

М. Касивара
П. Шапира

Пучки
на многообразиях

Перевод с английского и французского
Ю. Ю. Кочеткова и
В. Е. Назайкинского
под редакцией
Б. Ю. Стернина



Москва «Мир» 1997

Предисловие к русскому изданию

Монография, перевод которой вы держите в руках, без преувеличения представляет собой выдающееся явление в современной математической литературе. Она содержит замкнутое изложение теории пучков на многообразиях, включающее фундаментальные понятия этой теории, основные конструкции, такие, как двойственность, преобразование Фурье, микролокализация, волновые фронты и контактные преобразования, а также обрисовывает два основных приложения теории — в вещественной аналитической геометрии и в теории линейных дифференциальных уравнений.

Фактически излагаемая в книге теория пучков на многообразиях есть *микролокальный анализ пучков*. Микролокальный анализ в широком смысле слова — это изучение на кокасательном пространстве T^*X объектов, «естественно живущих» на многообразии X . Например, изучение в T^*X особенностей решений дифференциальных уравнений $Pu = 0$ привело к понятию волнового фронта распределения (Сато, Хёрмандер). В качестве другого примера рассмотрим аналитическое подмножество S аналитического многообразия X . Характеристику Эйлера–Пуанкаре и другие важные топологические инварианты множества S можно вычислять, стратифицируя S , рассматривая затем конормали к стратам (что дает лагранжево множество в T^*X) и применяя соответствующим образом адаптированные классические методы дифференциальной геометрии. Оба приведенных выше примера объединяются в рамках единой теории — микролокальной теории пучков.

Изложение ведется на языке производных категорий, наиболее адекватном в данной ситуации, поскольку многие продвинутые конструкции теории естественно формулируются именно на этом языке, который, начиная с самых элементарных понятий, вводится и подробно объясняется в книге, так что изложение действительно является замкнутым. Фактически, однако, от читателя требуются достаточно высокая математическая культура и порой значительные усилия, чтобы проникнуть в весьма тонкие конструкции теории.

Несомненно, специалисты по теории пучков и алгебраической геометрии и так имеют достаточную мотивацию, чтобы прочесть эту книгу. Основная же цель настоящего предисловия — ввести в курс дела специалистов по дифференциальным уравнениям и показать, что из-

лагаемая в книге теория предоставляет им настолько мощный аппарат, что ее изучение, безусловно, стоит тех усилий, которые при этом будут затрачены.

Оговоримся сразу, что следующий ниже текст по существу относится не ко всей книге в целом — с точки зрения теории дифференциальных уравнений основной интерес представляет гл. 11, посвященная теории $\mathcal{D}$ -модулей и приложениям развиваемых в книге конструкций к аналитическим дифференциальным уравнениям в частных производных, и именно на этих результатах мы сконцентрируем наше внимание.

Ниже мы постараемся показать, как некоторые фундаментальные вопросы и понятия, возникающие при исследовании дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений, естественным образом решаются и интерпретируются в терминах пучков $\mathcal{D}$ -модулей и $\mathcal{O}$ -модулей и каковы преимущества этого подхода. Изложение этих вопросов в гл. 11 опирается на весь развитый в предыдущем тексте аппарат; мы же постараемся дать элементарное изложение, использующее простейшие, тривиальные примеры и не требующее от читателя — специалиста по дифференциальным уравнениям никаких дополнительных знаний. Разумеется, при этом приходится отказаться от формулировки результатов в полной общности; в частности, мы, как правило, опускаем более тонкие моменты, связанные с высшими когомологиями пучков решений.

Прежде чем перейти к изложению материала, мы хотим поблагодарить проф. М. Касивару и П. Шапира за внимание к подготовке русского издания книги.

1. Системы дифференциальных уравнений и $\mathcal{D}$ -модули. Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad Pu = v,$$

или, в более подробной записи,

$$(2) \quad \begin{aligned} P_{11}u_1 + \dots + P_{1k}u_k &= v_1, \\ &\dots\dots\dots \\ P_{m1}u_1 + \dots + P_{mk}u_k &= v_m, \end{aligned}$$

где $u = (u_1, \dots, u_k)$ — неизвестные функции, $v = (v_1, \dots, v_m)$ — из-

вестные функции, а

$$(3) \quad P_{ij} = P_{ij}(x, -i\partial/\partial x) = \sum_{|\alpha|=0}^{r_{ij}} a_{ij\alpha}(x)(-i\partial/\partial x)^\alpha, \\ i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k,$$

— дифференциальные операторы в частных производных порядков r_{ij} . Как обычно, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс и $x = (x^1, \dots, x^n)$. Мы не предполагаем, что число неизвестных функций k совпадает с числом уравнений m (или, как говорят в этом случае, что система является *определенной*); многие важные системы, такие, как уравнения Максвелла, уравнения Пфаффа или система Коши–Римана, имеют больше уравнений, чем неизвестных (*переопределенные* системы); нет также особых оснований исключать из рассмотрений случай $k > m$ (*недоопределенные* системы).

Круг вопросов общей теории дифференциальных уравнений, возникающих при изучении системы (1), включает в себя, в частности, следующее:

- (а) При каких условиях решение системы (1) существует?
- (б) Единственно ли решение, и если нет, то как много решений у соответствующей однородной системы?
- (в) Каким образом можно ставить для системы (1) краевые условия или задачу Коши?
- (г) Каковы свойства гладкости решений? Как распространяются особенности (волновой фронт) решений?
- (д) Что такое характеристики и биохарактеристики системы (1)?
- (е) Каковы «естественные» области существования решений?

И так далее.

Вопрос о существовании решений системы (1) является весьма сложным и включает в себя как локальные, так и глобальные аспекты. Например, уравнение $du/d\varphi = v$ на окружности локально всегда разрешимо, а глобальное решение существует только при условии, что $\oint v(\varphi) d\varphi = 0$. Более тонкие примеры (например, знаменитый пример Леви) показывают, что и локальная разрешимость даже для случая одного уравнения далеко не тривиальна. Тем не менее существуют *необходимые* условия разрешимости, которые непосредственно выводятся из системы (1). Они называются *дифференциальными условиями согласования* на правые части $v_1, \dots, v_m$. Эти условия, как правило, отсутствуют для квадратных (определенных) систем, но являются неотъемлемым элементом теории в переопределенном случае. Именно, дифференцируя уравнения системы (1), мы получаем ее *дифференциальные следствия*, которые могут быть присоеди-

нены к системе, в результате чего получается равносильная система дифференциальных уравнений (заметим, что дифференциальных следствий бесконечно много). Если удастся построить линейную комбинацию уравнений расширенной таким образом системы, не содержащую неизвестных функций $u_1, \dots, u_k$, то получаем некоторое соотношение, связывающее функции $v_1, \dots, v_m$. Такое соотношение называется дифференциальным *условием согласования*, и его выполнение, очевидно, необходимо для того, чтобы система (1) имела решение.

В качестве примера рассмотрим систему

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x^1} = v_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x^2} = v_2, \quad x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2.$$

Дифференцируя первое уравнение по x^2 , а второе — по x^1 , получаем дифференциальные следствия

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial x^1} = \frac{\partial v_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^1 \partial x^2} = \frac{\partial v_2}{\partial x^1},$$

а из них — дифференциальное условие согласования

$$(6) \quad \frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} = 0.$$

В силу леммы Пуанкаре условие (6) является необходимым и достаточным условием разрешимости системы (4); поэтому в данном случае ясно, что никаких дифференциальных условий согласования, не выводимых из (6), не существует. Однако в общем случае дело обстоит не так просто, и возникает вопрос о том, как выписать полную систему условий согласования (и конечна ли она). Здесь оказывается полезным встать на «алгебраическую» точку зрения. Каждое условие согласования можно задавать матрицей-строкой $\tilde{Q} = (\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_m)$ дифференциальных операторов, так что само условие имеет вид

$$(7) \quad \tilde{Q}v = \tilde{Q}_1 v_1 + \dots + \tilde{Q}_m v_m = 0.$$

При этом соотношение (7) является дифференциальным условием согласования для системы (1) тогда и только тогда, когда

$$(8) \quad \tilde{Q}P = 0$$

(здесь $\tilde{Q}P$ — композиция (произведение) матричных дифференциальных операторов $\tilde{Q}$ и P). Будем говорить, что набор

$$\{Q^{(\alpha)}\}_{\alpha \in J} = \{(Q_1^{(\alpha)}, \dots, Q_m^{(\alpha)})\}_{\alpha \in J}$$

дифференциальных условий согласования для системы (1) является полным, если любое дифференциальное условие согласования может быть представлено в виде

$$(9) \quad \tilde{Q} = \sum_{\alpha} R_{\alpha} Q^{(\alpha)},$$

где R_{α} — скалярные дифференциальные операторы, а сумма конечна. Пусть Q — матрица дифференциальных операторов, строками которой являются $Q^{(\alpha)}$, $\alpha \in J$.¹⁾ Тогда утверждение, что Q является полной системой дифференциальных условий согласования для системы (1), приобретает следующий вид:

(i) $QP = 0$;

(ii) если для некоторого матричного дифференциального оператора Q_1 справедливо $Q_1 P = 0$, то

$$(10) \quad Q_1 = SQ$$

для некоторого матричного дифференциального оператора S .

Для того чтобы проинтерпретировать условия (i) и (ii), введем кольцо $\mathcal{D}$ дифференциальных операторов (с гладкими или аналитическими коэффициентами, смотря по тому, какой случай рассматривается) и обозначим через $\mathcal{D}^s$ прямую сумму s экземпляров кольца $\mathcal{D}$, снабженную естественной структурой левого $\mathcal{D}$ -модуля: элемент $a \in \mathcal{D}$ действует на элемент $(a_1, \dots, a_s) \in \mathcal{D}^s$ по формуле

$$(11) \quad a(a_1, \dots, a_s) = (aa_1, \dots, aa_s),$$

где aa_j — произведение (композиция) дифференциальных операторов a и a_j . Иными словами, $\mathcal{D}^s$ — свободный модуль ранга s над $\mathcal{D}$ (говоря о модулях, прилагательное «левый» в дальнейшем будем опускать). Умножение справа на матрицу дифференциального оператора

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \dots & P_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1} & \dots & P_{mk} \end{pmatrix}$$

задает отображение

¹⁾ Будем считать, что множество индексов J конечно, или требовать в последующих формулах конечности всех входящих в них сумм (возникающих, скажем, при вычислении произведения матриц).

$$(12) \quad r_P : \mathcal{D}^m \rightarrow \mathcal{D}^k,$$

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto (a_1 P_{11} + \dots + a_m P_{m1}, \dots, a_1 P_{1k} + \dots + a_m P_{mk}),$$

которое является гомоморфизмом $\mathcal{D}$ -модулей, поскольку правое и левое умножение коммутируют¹⁾,

$$ar_P(a_1 \dots a_m) = r_P(aa_1, \dots, aa_m).$$

В дальнейшем вместо r_P мы часто будем писать просто

$$\mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k.$$

Аналогично, умножение справа на Q задает гомоморфизм

$$\mathcal{D}^s \xrightarrow{Q} \mathcal{D}^m, \quad s = |J|,$$

так что мы имеем последовательность гомоморфизмов $\mathcal{D}$ -модулей

$$(13) \quad \mathcal{D}^s \xrightarrow{Q} \mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k,$$

задаваемых правыми умножениями на Q и P .

Условие (i), очевидно, означает, что последовательность (13) является комплексом, т. е. композиция гомоморфизмов равна нулю (заметим на всякий случай, что $grg_Q = r_QP$). Что же касается условия (ii), то оно означает, что комплекс (13) в действительности является *точной последовательностью*, т. е. ядро $\text{Ker}(P)$ совпадает с образом $\text{Im}(Q)$. Действительно, пусть $Q_1 P = 0$, т. е. $Q_1 \in \text{Ker}(P)$. Тогда, согласно условию (ii), $Q_1 = SQ$, т. е. $Q_1 \in \text{Im}(Q)$. Включение $\text{Im}(Q) \subset \text{Ker}(P)$ вытекает из того, что последовательность (13) является комплексом.

Итак, в терминах $\mathcal{D}$ -модулей задача построения полной системы дифференциальных условий согласования формулируется следующим образом: «достроить» заданный гомоморфизм левых модулей

$$(14) \quad \mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k$$

до точной последовательности (13). Для аналитического случая из теории $\mathcal{D}$ -модулей следует, что такое построение всегда возможно и,

¹⁾ Заметим, что всякий гомоморфизм свободных левых $\mathcal{D}$ -модулей задается умножением справа на матрицу дифференциальных операторов.

более того, число s (т. е. число условий согласования в полной системе) оказывается конечным. Более точно, это возможно над достаточно малой областью в пространстве переменных x (зависящей от оператора P). Иными словами, нужно рассматривать не кольцо дифференциальных операторов в фиксированной области, а пучок колец ростков дифференциальных операторов и соответствующие пучки модулей; результат о возможности построения последовательности (13) вытекает из нётеровости пучка колец $\mathcal{D}$ в аналитическом случае. Здесь мы, допуская некоторую вольность, не будем проводить явного разграничения между пучками и пространствами сечений, кроме тех случаев, когда это абсолютно необходимо для понимания соответствующего результата; так, мы пишем $a \in \mathcal{D}$, имея в виду, что a — сечение пучка $\mathcal{D}$ над некоторым открытым множеством.

Сопоставим теперь системе (1) гомоморфизм левых $\mathcal{D}$ -модулей (14). Заметим, однако, что если мы переходим от системы (1) к эквивалентной системе, например, путем добавления дифференциальных следствий, то меняется и гомоморфизм (14). Чтобы избавиться от этого неудобства, построим (14) до точной последовательности

$$(15) \quad \mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \rightarrow 0$$

(таким образом, $\mathcal{M}$ есть не что иное, как фактормодуль свободного модуля $\mathcal{D}^k$ по подмодулю $\text{Im}(r_P)$) и сопоставим системе (1) левый $\mathcal{D}$ -модуль $\mathcal{M}$. Этот модуль уже не меняется, с точностью до изоморфизма, от перехода к эквивалентной системе, и, как мы сейчас увидим, различные системы (1), соответствующие одному и тому же $\mathcal{D}$ -модулю $\mathcal{M}$, эквивалентны в смысле, который будет точно описан ниже. Прежде всего, будем считать, что для системы (1) уже выписан полный набор дифференциальных условий согласования и, таким образом, $\mathcal{D}$ -модуль $\mathcal{M}$ включен в точную последовательность вида

$$(16) \quad \mathcal{D}^s \xrightarrow{Q} \mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k \xrightarrow{\pi} \mathcal{M} \rightarrow 0$$

(эта последовательность есть не что иное, как начальный отрезок проективной резольвенты модуля $\mathcal{M}$). Предположим, что наряду с (16) задана другая точная последовательность того же вида

$$(17) \quad \mathcal{D}^{s_1} \xrightarrow{Q_1} \mathcal{D}^{m_1} \xrightarrow{P_1} \mathcal{D}^{k_1} \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{M} \rightarrow 0,$$

т. е. $\mathcal{M}$ отвечает также системе дифференциальных уравнений

$$(18) \quad P_1 u_1 = v_1.$$

Покажем, что все решения системы (18) могут быть получены из решений системы (1) и, наоборот, все решения системы (1) могут быть получены из решений системы (18). Прежде всего, построим гомоморфизмы

$$\varphi: \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{D}^{k_1}, \quad \psi: \mathcal{D}^m \rightarrow \mathcal{D}^{m_1} \quad \text{и} \quad \chi: \mathcal{D}^s \rightarrow \mathcal{D}^{s_1}$$

такие, чтобы диаграмма

$$(19) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^s & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}^m & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}^k & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ \chi \downarrow & & \psi \downarrow & & \varphi \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{D}^{s_1} & \xrightarrow{Q_1} & \mathcal{D}^{m_1} & \xrightarrow{P_1} & \mathcal{D}^{k_1} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \end{array}$$

была коммутативной. Это нетрудно сделать. Действительно, пусть

$$a_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, k$$

(единица стоит на j -м месте) — стандартные базисные элементы модуля $\mathcal{D}^k$, и пусть $b_j \in \pi_1^{-1}(\pi(a_j))$ — произвольно выбранные элементы (так как π_1 — эпиморфизм, то $\pi_1^{-1}(\pi(a_j))$ непусто). Условия $\varphi(a_j) = b_j$, $j = 1, \dots, k$, задают теперь некоторый гомоморфизм φ , такой, что правый квадрат в диаграмме (19) коммутативен. Построим теперь гомоморфизм ψ , обеспечивающий коммутативность левого квадрата. Пусть $c_1, \dots, c_m$ — стандартный базис в $\mathcal{D}^m$. Так как верхняя строка в (19) точна, то $\pi(c_j P) = 0$ и $\pi_1(\varphi(c_j P)) = 0$ в силу коммутативности правого квадрата в (19). В силу точности нижней строки получаем поэтому, что

$$(20) \quad \varphi(c_j P) = d_j P_1, \quad j = 1, \dots, m,$$

для некоторых элементов $d_j \in \mathcal{D}^{m_1}$. Полагая $\psi(c_j) = d_j$, мы определяем теперь требуемый гомоморфизм ψ . Аналогично строится гомоморфизм χ . Напомним теперь, что любой гомоморфизм свободных модулей определяется умножением справа на некоторый матричный дифференциальный оператор, т. е. $\varphi = r_R$, $\psi = r_N$ и $\chi = r_L$ для некоторых матричных дифференциальных операторов R, N и L .

Итак, мы имеем коммутативную диаграмму

$$(21) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^s & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}^m & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}^k & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ L \downarrow & & N \downarrow & & R \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{D}^{s_1} & \xrightarrow{Q_1} & \mathcal{D}^{m_1} & \xrightarrow{P_1} & \mathcal{D}^{k_1} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ L_1 \downarrow & & N_1 \downarrow & & R_1 \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{D}^s & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}^m & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}^k & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \end{array}$$

(нижняя половина строится аналогично верхней). Коммутативность этой диаграммы означает, в частности, что

$$(22) \quad PR = NP_1, \quad P_1R_1 = N_1P, \quad QN = LQ_1, \quad Q_1N_1 = L_1Q.$$

Выбрасывая среднюю строку, из диаграммы (21) получаем диаграмму

$$(23) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^s & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}^m & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}^k & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \\ LL_1 \downarrow & & NN_1 \downarrow & & RR_1 \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{D}^s & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}^m & \xrightarrow{P} & \mathcal{D}^k & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{M} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Из коммутативной диаграммы (23) вытекает, что для любого $A \in \mathcal{D}^k$ мы имеем

$$ARR_1 - A \in \text{Ker } \pi,$$

т. е. в силу точности

$$(24) \quad ARR_1 - A = BP$$

для некоторого $B = B(A) \in \mathcal{D}^m$. Поскольку $\mathcal{D}^k$ — свободный модуль, можно, рассматривая (24) на образующих модуля $\mathcal{D}^k$, добиться, чтобы отображение $A \mapsto B(A)$ было гомоморфизмом модулей, т. е. $B = A\Lambda$ для некоторого матричного дифференциального оператора Λ . Тогда из (24) получаем

$$(25) \quad RR_1 = 1 + \Lambda P.$$

Далее, опять в силу коммутативности диаграммы (23), мы имеем

$$NN_1P = PRR_1 = P + P\Lambda P = (1 + P\Lambda)P,$$

или

$$(NN_1 - 1 - P\Lambda)P = 0,$$

откуда в силу полноты условий согласования (т. е. точности строк в (23) в члене $\mathcal{D}^m$) следует, что

$$(26) \quad NN_1 - 1 - P\Lambda = SQ$$

для некоторого матричного дифференциального оператора S . Итак, собирая все вместе, мы имеем следующие соотношения для дифференциальных операторов:

$$(27) \quad PR = NP_1, \quad P_1R_1 = N_1P,$$

$$(28) \quad NN_1 = 1 + P\Lambda + SQ, \quad RP_1 = 1 + \Lambda P, \quad R_1R = 1 + \Lambda_1P_1,$$

$$(29) \quad Q_1N_1 = L_1Q$$

(мы выписали только те равенства, которые нам непосредственно необходимы).

Рассмотрим систему

$$(30) \quad Pu = v$$

и систему

$$(31) \quad P_1 u_1 = v_1,$$

где $v_1 = N_1 v$.

Предложение 1. (i) Если правая часть системы (30) удовлетворяет дифференциальным условиям согласования, то им удовлетворяет и правая часть системы (31).

(ii) Множества решений систем (30) и (31) аффинно изоморфны; изоморфизм $P^{-1}(v) \rightarrow P_1^{-1}(v_1)$ задается формулой

$$(32) \quad u \mapsto u_1 = R_1 u,$$

а обратный изоморфизм — формулой

$$(33) \quad u_1 \mapsto u = Ru_1 - \Lambda v.$$

Доказательство. (i) Пусть $Qv = 0$. Тогда в силу (29) $Q_1 v_1 = Q_1 N_1 v = L_1 Qv = 0$.

(ii) Если $Pu = v$, то $P_1 R_1 u = N_1 Pu = N_1 v = v_1$ в силу (27). Далее, если $Pu_1 = v_1$, то

$$\begin{aligned} P(Ru_1 - \Lambda v) &= PRu_1 - P\Lambda v = NP_1 u_1 - P\Lambda v \\ &= NN_1 v - P\Lambda v = v + P\Lambda v + SQv - P\Lambda v = v \end{aligned}$$

в силу (27), (28) и поскольку $Qv = 0$.

Далее,

$$R(R_1 u) - \Lambda v = u + \Lambda Pu - \Lambda v = u$$

для любого решения u уравнения (30); кроме того,

$$\begin{aligned} R_1(Ru_1 - \Lambda v) &= R_1 Ru_1 - R_1 \Lambda v = u_1 + \Lambda_1 P_1 u_1 - R_1 \Lambda v \\ &= u_1 + \Lambda_1 v_1 - R_1 \Lambda v = u_1 + (\Lambda_1 N_1 - R_1 \Lambda) v \\ &= u_1 + \Lambda_1 N_1 Pu - R_1 \Lambda Pu, \end{aligned}$$

где $u = Ru_1 - \Lambda v$. Преобразуя это равенство далее, получим, снова пользуясь (27) и (28),

$$\begin{aligned} R_1(Ru_1 - \Lambda v) &= u_1 + \Lambda_1 P_1 R_1 u - R_1(RR_1 - 1)u \\ &= u_1 + \Lambda_1 P_1 R_1 u - (R_1 R)R_1 u + R_1 u \\ &= u_1 + \Lambda_1 P_1 R_1 u - (1 + \Lambda_1 P_1)R_1 u + R_1 u = u_1. \end{aligned}$$

Итак, отображения (32) и (33) взаимно обратны, что и завершает доказательство.

В силу доказанной эквивалентности можно принять точку зрения, что основным объектом теории является не система (1), а соответствующий ей модуль M , и изучать именно его. Однако для того, чтобы провести в жизнь эту программу, необходимо выяснить, как понятия, естественным образом связанные с системой (1), выражаются в терминах модуля M .

В частности, прежде всего нужно уяснить, как выразить в терминах модуля M понятие решения системы (1), не апеллируя при этом к самой системе. Начнем с решений однородной системы

$$(34) \quad Pu = 0.$$

Ее решения можно искать в различных классах функций (гладких, аналитических, обобщенных, ветвящихся и т. п.). Общим свойством любого такого класса является то, что на входящие в него функции можно действовать дифференциальными операторами, т. е. он является $\mathcal{D}$ -модулем. Обозначим его через $\mathcal{L}$.

Предложение 2. *Пространство решений системы (29) естественно изоморфно пространству¹⁾ $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{L})$ гомоморфизмов $\mathcal{D}$ -модуля M в $\mathcal{D}$ -модуль $\mathcal{L}$.*

Доказательство. Рассмотрим снова точную последовательность (15), и пусть $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{L})$ — некоторый гомоморфизм из M в $\mathcal{L}$:

$$(35) \quad \begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^m & \longrightarrow & \mathcal{D}^k & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & \searrow \tilde{\varphi} & \downarrow \varphi & & \\ & & & & \mathcal{L} & & \end{array}$$

Пусть $\tilde{\varphi}$ — такой гомоморфизм, что диаграмма (35) коммутативна,

¹⁾ Поскольку кольцо $\mathcal{D}$ некоммутативно, на множестве $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{L})$ нет естественной структуры $\mathcal{D}$ -модуля.

т. е. $\tilde{\varphi} = \varphi \cdot \pi$. Каждой образующей

$$a_j = (0, \dots, 1_j, \dots, 0), \quad j = 1, \dots, k,$$

модуля $\mathcal{D}^k$ гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ сопоставляет некоторый элемент $u_j \in \mathcal{L}$. Пусть $u = {}^t(u_1, \dots, u_k)$ (здесь значок t указывает транспонирование, т. е. u — вектор-столбец). Покажем, что u — решение уравнения (34). Поскольку верхняя строка в (35) точна, а диаграмма коммутативна, мы имеем $\tilde{\varphi}(AP) = 0$ для любого $A = (A_1, \dots, A_m) \in \mathcal{D}^m$ и, в частности, $\tilde{\varphi}(P_{i1}, \dots, P_{ik}) = 0$, $i = 1, \dots, m$ (здесь P_{ij} — элементы матрицы P). Но

$$\tilde{\varphi}(P_{i1}, \dots, P_{ik}) = \tilde{\varphi}\left(\sum_{j=1}^k P_{ij} \cdot a_j\right) = \sum_{j=1}^k P_{ij} \tilde{\varphi}(a_j) = \sum_{j=1}^k P_{ij} u_j,$$

поскольку $\tilde{\varphi}$ — гомоморфизм. Таким образом,

$$\sum_{j=1}^k P_{ij} u_j = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

т. е. $Pu = 0$, что и требовалось.

Обратно, пусть u — решение уравнения (34). Определим гомоморфизм $\tilde{\varphi} : \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{L}$ формулой $\tilde{\varphi}(a_j) = u_j$, $j = 1, \dots, k$. Тогда $\tilde{\varphi} \cdot \pi_P = 0$ и в силу точности верхней строки в (35) $\tilde{\varphi}|_{\text{Ker } \pi} = 0$, откуда следует, что существует гомоморфизм φ , дополняющий диаграмму (35) до коммутативной. Взаимная однозначность установленного нами соответствия $\varphi \leftrightarrow u$ очевидна.

Рассмотрим теперь точную последовательность (16) и применим к ней функтор $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{L})$. В результате получится комплекс

$$(36) \quad 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^k, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^m, \mathcal{L}) \\ \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^s, \mathcal{L}).$$

Разберем более подробно, как он устроен. Заметим, что

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = \text{Ker } P$$

по предложению 2, а $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^k, \mathcal{L}) = \mathcal{L}^k$ (каждый гомоморфизм $\mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{L}$ задается своими значениями u_j , $j = 1, \dots, k$, на стандартных образующих модуля $\mathcal{D}^k$). Далее, отображения

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^k, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^m, \mathcal{L}) \quad \text{и} \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^m, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^s, \mathcal{L})$$

задаются обычным действием (умножением слева) на операторы P и Q соответственно. Действительно, например, отображение

$$\mathcal{L}^k \approx \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^k, \mathcal{L}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^m, \mathcal{L}) \approx \mathcal{L}^m$$

устроено следующим образом: если $u = {}^t(u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{L}^k$, то соответствующий гомоморфизм $\mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{L}$ имеет вид

$$(a_1, \dots, a_k) \mapsto \sum_{i=1}^k a_i u_i,$$

а правое умножение на P сопоставляет ему «сквозной» гомоморфизм

$$\mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{L},$$

$$b = (b_1, \dots, b_m) \mapsto bP \mapsto \sum_{i=1}^k (bP)_i u_i = \sum_{j=1}^m b_j (Pu)_j,$$

который, как мы видим, задается вектором $Pu \in \mathcal{L}^m$.

Итак, комплекс (36) имеет вид

$$(37) \quad 0 \rightarrow \text{Ker } P \rightarrow \mathcal{L}^k \xrightarrow{P} \mathcal{L}^m \xrightarrow{Q} \mathcal{L}^s.$$

Когомологии $H^1 = \text{Ker } Q / \text{Im } P$ комплекса (37) в члене $\mathcal{L}^m$ имеют смысл *дополнительных к дифференциальным условиям согласования препятствий* к разрешимости в классе $\mathcal{L}$ неоднородного уравнения $Pu = v$; иными словами, если $Qv = 0$ (выполнены дифференциальные условия согласования), то для разрешимости уравнения $Pu = v$ необходимо и достаточно, чтобы класс когомологий $[v] \in H^1$ равнялся нулю. С другой стороны, поскольку комплекс (37) получен применением функтора $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{L})$ к последовательности (16) — начальному отрезку свободной резольвенты модуля $\mathcal{M}$, — группа когомологий H^1 задается производным функтором функтора Hom :

$$H^1 = \text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{L}).$$

Итак, мы видим, что и пространство решений однородного уравнения, и препятствия к разрешимости неоднородного уравнения выражаются в терминах модуля $\mathcal{M}$ с помощью функтора $\text{Hom}_{\mathcal{D}}$ и его (перво-го¹⁾) производного функтора $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1$.

¹⁾ Высшие производные функторы $\text{Ext}_{\mathcal{D}}^j$ не имеют такой наглядной интерпретации в терминах исходной системы (1). Тем не менее общие соображения подсказывают, что полезно рассмотреть всю совокупность производных функторов, что и делается в теории $\mathcal{D}$ -модулей.

2. Продолжение решений. Обратимся теперь к другому вопросу, а именно вопросу о «естественных областях» существования решения. Впрочем, мы не будем сколько-нибудь серьезно углубляться в этот аспект, а рассмотрим его на (достаточном для наших целей) «простом» примере уравнения

$$(38) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, y),$$

на плоскости двух переменных (x, y) . Каковы естественные области существования решения в данном случае?

Пусть G — некоторая область с гладкой границей ∂G на плоскости (x, y) , и пусть u — гладкое решение уравнения (38) в области G . Пусть, далее, $(x_0, y_0) \in \partial G$, и пусть $\nu = (p, q)$ — вектор конормали к границе в точке (x_0, y_0) . Если $p \neq 0$, т. е. параллельные оси x прямые $\{y = \text{const}\}$ пересекают границу ∂G в точке (x_0, y_0) (а значит, и в близких точках) трансверсально, то, продолжая решение постоянной вдоль каждой из этих прямых, получим, что решение продолжается как гладкое решение в полную окрестность точки (x_0, y_0) . Итак, если на границе области G есть хоть одна точка, вектор конормали $\nu = (p, q)$ в которой имеет p -компоненту, отличную от нуля, то такая область не есть «естественная область существования» решения — *каждое* решение может быть с сохранением гладкости продолжено как решение в более широкую область. Отсюда видно, что естественные области существования решений суть полосы, ограниченные прямыми $\{y = \text{const}\}$; действительно, в каждой такой полосе можно построить решение, не продолжаемое ни в какую более широкую область. Постараемся сформулировать этот результат в несколько ином виде.

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок ростков решений уравнения (38) на плоскости. На языке теории пучков продолжаемость всех решений через границу области G в точке $(x_0, y_0) \in \partial G$ означает тривиальность гомологий пучка $\mathcal{F}$ с носителями в дополнении к области G . В нашем примере непродолжаемость имеет место тогда и только тогда, когда вектор $\nu = (p, q)$ конормали к границе удовлетворяет условию $p = 0$, т. е. *характеристичен* относительно оператора $\partial/\partial x$.

Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть X — комплексно-аналитическое многообразие. Требуется продолжить решение дифференциального уравнения $Pu = f$, где P — голоморфный дифференциальный оператор на X , из некоторой области $\Omega_0 \subset X$ в более широкую область $\Omega_1 \subset X$. Будем продолжать решение «постепенно», деформируя область Ω_0 к Ω_1 через семейство Ω_t , $t \in [0, 1]$. Оказывается, что если конормаль к границе области Ω_t не проходит через «запрещенные направления» ни при каком $t \in [0, 1]$, то решение можно

продолжить из Ω_0 в Ω_1 . Более точно, пусть $\sigma(P)$ — главный символ оператора P , а

$$\text{char}(P) = \{(x, \xi) \in T^*X : \sigma(P)(x, \xi) = 0\}$$

— множество характеристических векторов оператора P . Тогда запрещенные направления — это в точности направления характеристических векторов.

Естественной формализацией «запрещенных направлений» на языке пучков является понятие микроносителя. Микроноситель пучка $\mathcal{F}$ — это замкнутое подмножество

$$\text{SS}(\mathcal{F}) \subset T^*X,$$

определяемое следующим образом: пусть $\Phi \in C^1(X)$ — вещественная функция; тогда $(x_0, d\Phi(x_0)) \notin \text{SS}(\mathcal{F})$, если когомологии пучка $\mathcal{F}$ с носителями в $\{x : \Phi(x) \geq \Phi(x_0)\}$ тривиальны в точке x_0 .

Фундаментальным в теории $\mathcal{D}$ -модулей является следующий результат, принадлежащий авторам этой книги.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль на комплексно-аналитическом многообразии X , и пусть $\mathcal{F}$ — комплекс решений модуля $\mathcal{M}$. Тогда

$$\text{SS}(\mathcal{F}) = \text{char}(\mathcal{M}),$$

где $\text{char}(\mathcal{M})$ — характеристическое многообразие модуля $\mathcal{M}$ (подробнее см. ниже).

Эта теорема является ключом к переводу многих задач теории аналитических линейных дифференциальных уравнений в частных производных на язык теории пучков и эффективному решению их в новых терминах. Она тесно связана с задачей Коши и теоремой Коши–Ковалевской, которые мы рассмотрим в следующем пункте.

3. Задача Коши. Обратимся теперь к вопросу о постановке задачи Коши для системы (1). Напомним сначала основной результат классической теории дифференциальных уравнений в частных производных — теорему Коши–Ковалевской.

Теорема 2. Пусть $X \subset \mathbb{C}^n$ — открытое подмножество, а

$$(39) \quad P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

— голоморфный дифференциальный оператор порядка m на X , такой, что $a_{(m,0,\dots,0)} \neq 0$. Далее, пусть $Y = \{x \in X \mid x_1 = 0\}$, и пусть $\gamma(f)$ обозначает джет $(m-1)$ -го порядка функции f на Y :

$$\gamma(f) = \left\{ f|_Y, \left. \frac{\partial f}{\partial x^1} \right|_Y, \dots, \left. \frac{\partial^{(m-1)} f}{(\partial x^1)^{(m-1)}} \right|_Y \right\}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$(40) \quad Pf = g, \quad \gamma(f) = h,$$

где g и h — голоморфные функции. Пусть $x_0 \in Y$. Тогда существует окрестность $V \subset X$ точки x_0 , такая, что эта задача имеет единственное голоморфное решение в V .

Для случая одного уравнения или определенной (квадратной) системы уравнений постановка задачи Коши достаточно очевидна. Посмотрим, как обстоит дело в случае переопределенных систем. Начнем с примера.

Рассмотрим частичную систему де Рама

$$(41) \quad d'u = \omega,$$

где $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{C}^n$, $x' = (x^1, \dots, x^k)$, $x'' = (x^{k+1}, \dots, x^n)$ и координаты x'' являются параметрами, т. е. d' есть взятие дифференциала по переменным x' , а форма ω содержит только дифференциалы переменных x' :

$$d'u(x', x'') = \frac{\partial u}{\partial x'}(x', x'') dx', \quad \omega = \omega' dx' = \sum_{j=1}^k \omega_j(x) dx_j.$$

Условие разрешимости имеет вид

$$(42) \quad d'\omega = 0.$$

На самом деле указанный пример является весьма характерным, поскольку микролокально такая система уравнений есть каноническая форма системы линейных уравнений с простыми невырожденными характеристиками.

Прежде всего, рассмотрим вопрос о том, как поставить для этой системы задачу Коши, т. е. задать данные Коши вида

$$u|_S = 0,$$

где S — некоторое аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$.

Случай 1 ($k = n$). Достаточно задать значение $u(x)$ в точке (например, при $x = 0$). Таким образом, уже здесь мы видим, что коразмерность многообразия S не равна единице. Решение может быть восстановлено как интеграл по контуру.

Случай 2 ($k < n$). Считая x'' параметрами, мы видим, что можно задавать начальные данные на поверхности $S = \{x' = 0\}$. Решение вычисляется аналогично первому случаю, при этом $\text{codim}_{\mathbb{C}} S = k$.

Такая поверхность, очевидно, не единственно возможная для задания данных Коши. Исследуем условия на поверхность S , на которой можно ставить данные Коши

$$u|_S = u_0$$

($\text{codim}_{\mathbb{C}} S = k$). Уравнение (41) задает производные функции u по направлениям, лежащим в линейной оболочке $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_k)$. Обозначим эту линейную оболочку через L . Очевидно, если

$$T_0 S \oplus L = T_0 \mathbb{C}^n,$$

где $T_0 S$ — касательное пространство к S в точке $x = 0$, то задача имеет единственное решение.

Обязательно ли $\text{codim}_{\mathbb{C}} S = k$? Рассмотрим пример

$$(43) \quad du = \omega \quad \text{в } \mathbb{C}^3,$$

где $x = (x^1, x^2, x^3)$, а d — полный дифференциал. Можно задать условия Коши на поверхности меньшей коразмерности:

$$(44) \quad u|_{x^1=0} = u_0(x^2, x^3).$$

Очевидно, что функция u_0 не произвольна: уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} = \omega_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x^3} = \omega_3$$

суть следствия уравнения (43) и траектории полей $\partial/\partial x^2$ и $\partial/\partial x^3$ лежат в поверхности $S = \{x^1 = 0\}$. Получаем систему уравнений, которой должна удовлетворять функция u_0 :

$$\frac{\partial u_0}{\partial x^2} = \omega_2|_{x^1=0}, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x^3} = \omega_3|_{x^1=0}.$$

Если эти условия выполнены, то решение задачи, очевидно, существует (разумеется, при $d\omega = 0$).

Итак, мы можем ставить условия на подмногообразии коразмерности меньше k , однако при этом возникают условия согласования не только на правые части, но и на начальные данные.

Мы рассмотрели случай $\text{codim } S < k$. Условие разрешимости имеет вид

$$T_0 S + L = T_0 \mathbb{C}^n,$$

но сумма в этом случае не прямая. Рассмотрим теперь случай $\text{codim } S > k$. В этом случае, очевидно, решение не единственно. Мы можем включить начальную поверхность в поверхность коразмерности k , и решение будет зависеть от способа продолжения начальных данных.

Условие

$$(45) \quad T_0 S + L = T_0 \mathbb{C}^n$$

есть, очевидно, условие *нехарактеристичности* задачи Коши. Обсудим его в более инвариантных терминах. Вернемся временно к случаю одного уравнения произвольного порядка:

$$(46) \quad \hat{P}u = P\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = f.$$

Обозначим через $P_m(x, \xi)$ главный символ оператора $\hat{P}$. Ковектор $\xi \neq 0$ в точке x называется *характеристическим* для оператора $\hat{P}$, если

$$(47) \quad P_m(x, \xi) = 0.$$

Пусть S — некоторое аналитическое подмногообразие в $\mathbb{C}^n$, $x_0 \in S$. Что означает, что поверхность S характеристична в точке x_0 относительно $\hat{P}$? Для ответа на этот вопрос рассмотрим конормальное расслоение к S

$$(48) \quad N^* S = \{(x, \xi) \in T_0^* \mathbb{C}^n \mid x \in S, T_x S \subset \text{Ker } \xi\}$$

(т. е. $\xi|_{T_x S} = 0$). Введем обозначение

$$\text{char } \hat{P} = \{P_m(x, \xi) = 0\} \subset T_0^* \mathbb{C}^n = T^* \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Рассмотрим пересечение

$$(49) \quad \text{char } \hat{P} \cap N^* S.$$

Это некоторое подмножество в N^*S , проектирующееся в S . Те точки из S , над которыми имеются точки этого пересечения, называются *характеристическими*, остальные — *нехарактеристическими*. Итак, $x_0 \in S$ характеристична тогда и только тогда, когда существует точка $\xi \in T_{x_0}^*C^n$, такая, что $(x_0, \xi) \in \text{char } P \cap N^*S$. Заметим, что для определенной системы любая точка многообразия S коразмерности большей единицы является характеристической. Теперь теорема Коши–Ковалевской может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3. *Если поверхность S нехарактеристична в точке x_0 , то задача Коши (с правильным числом начальных условий, удовлетворяющих условиям согласования) имеет, и притом единственное, решение в окрестности точки x_0 .*

Рассмотрим случай определенной системы уравнений. В этом случае $P_m(x, \xi)$ — матрица размера $s \times s$. Характеристические ковекторы в этом случае можно определить с помощью так называемого *скаляризатора*, т. е. такой (однородной по ξ) матричной функции $Q(x, \xi)$, что выполнено неравенство

$$Q P = \lambda(x, \xi) E$$

в окрестности точки (x_0, ξ_0) . Здесь $\lambda(x, \xi)$ — аналитическая однородная по ξ функция, определенная в (конической) окрестности точки (x_0, ξ_0) и называемая *гамильтонианом* оператора $\hat{P}$. Очевидно, что для заданного оператора существует много различных гамильтонианов; множество всех гамильтонианов образует идеал в кольце однородных по ξ аналитических функций в окрестности точки (x_0, ξ_0) . Обозначим этот идеал через J_P . Ковектор ξ в точке x называется *характеристическим*, если

$$\lambda(x, \xi) = 0$$

для любого гамильтониана $\lambda \in J_P$. Теорема Коши–Ковалевской формулируется для этого случая точно так же, как и выше.

Попробуем перенести введенные понятия на случай переопределенных систем. А именно, пусть

$$Pu = v$$

— переопределенная система дифференциальных уравнений, т. е. $u = (u_1, \dots, u_l)$, $v = (v_1, \dots, v_s)$, а P — матрица размера $l \times s$, $l < s$, состоящая из дифференциальных операторов порядка m . Пусть

$P_m(x, \xi)$ — старший символ этого матричного оператора. Подберем матрицу $Q(x, \xi)$ размера $s \times l$, такую, что

$$Q(x, \xi)P_m(x, \xi) = \lambda(x, \xi)E_l,$$

где E_l — единичная матрица размера $l \times l$.

При этом, однако, возникают некоторые затруднения. Прежде всего, разные уравнения системы могут иметь разные порядки (такие системы можно, конечно, рассматривать как системы Дуглиса-Ниренберга). Есть и более серьезные проблемы. Рассмотрим, например, систему

$$(50) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_1} = f_1, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} = f_2. \end{cases}$$

Ее главный символ есть

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + x_1 \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Любая пара (a, b) является скаляризатором:

$$(51) \quad (a, b) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + x_1 \xi_3 \end{pmatrix} = a\xi_1 + b(\xi_2 + x_1 \xi_3).$$

Каждая функция такого вида, очевидно, будет гамильтонианом. Но на самом деле множество гамильтонианов несколько шире. Применяя к первому уравнению в (50) оператор $\partial/\partial x_2 + x_1 \partial/\partial x_3$, а ко второму — оператор $\partial/\partial x_1$ и вычитая первый результат из второго, получим уравнение

$$(52) \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_3},$$

которое является *следствием* системы (50). Повторяя процедуру нахождения гамильтонианов для расширенной с помощью уравнения (52) системы, получаем гамильтонианы вида

$$a\xi_1 + b(\xi_2 + x_1 \xi_3) + c\xi_3.$$

Векторы

$$\partial/\partial x_1 \quad \text{и} \quad \partial/\partial x_2 + x_1(\partial/\partial x_3)$$

порождают двумерное касательное пространство в точке 0; если же мы добавим вектор $\partial/\partial x_3$, то пространство становится трехмерным. Значит, характеристическое множество пусто и можно ставить начальные условия для нашей задачи в точке.

Итак, к переопределенной системе следует добавить все ее дифференциальные следствия (которых, вообще говоря, бесконечно много). Гамильтонианом полученной системы тогда следовало бы называть гамильтониан любой ее конечной подсистемы. Ясно, что этот «наивный» язык становится неудобным и определять гамильтонианы и характеристические векторы переопределенных систем нужно, конечно же, в терминах колец дифференциальных операторов и модулей над ними.

К сожалению, соответствующее исследование выходит за рамки данного предисловия; мы ограничимся здесь следующими утверждениями (справедливыми в аналитической ситуации):

1. Для любого $\mathcal{D}$ -модуля $\mathcal{M}$, соответствующего некоторой системе (1) дифференциальных уравнений на многообразии X , определено множество $\text{char}(\mathcal{M})$ характеристических векторов, которое является аналитическим подмножеством в T^*X . Оно называется *характеристическим многообразием* модуля $\mathcal{M}$.

2. Множество $\text{char}(\mathcal{M})$ инволютивно (это означает, что скобка Пуассона любых функций f и g на T^*X , равных нулю на $\text{char}(\mathcal{M})$, также равна нулю на $\text{char}(\mathcal{M})$).

Перейдем от примеров к общей постановке. Пусть на n -мерном многообразии X задана система дифференциальных уравнений

$$(53) \quad Pu = v,$$

и мы хотим поставить для этой системы задачу Коши на некоторой поверхности (многообразии) $Y \subset X$ размерности k . Итак, заданы многообразие X и подмногообразие Y . Пусть далее $\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y$ — пучки дифференциальных операторов и $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$ — пучки ростков голоморфных функций на X и Y соответственно. Наше рассмотрение будет чисто локальным, и мы введем на X такую локальную систему координат $(x_1, \dots, x_n)$, что подмногообразие Y задается уравнениями

$$Y = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Введем следующие обозначения:

$$x = (x', x''), \quad x' = (x_1, \dots, x_k), \quad x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n);$$

$$D = (D', D''), \quad D' = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \quad D'' = \left(\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right).$$

Начальные условия для системы (53) определяются заданием джета некоторого порядка l вектор-функции u на Y (ниже мы увидим, почему разумно выбрать $l = \text{ord } P - 1$ для случая одного уравнения, удовлетворяющего условию Ковалевской). Будем обозначать этот джет через

$$j^l(u) = \{u_\alpha\}_{|\alpha| \leq l},$$

где

$$u_\alpha = \{(D'')^\alpha u\}|_Y, \quad \alpha = (\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n) \text{ — мультииндекс,}$$

и аналогичное обозначение введем для v .

Из системы (53) вытекают некоторые следствия относительно джетов вектор-функций u и v . А именно, применяя к системе (53) оператор $(D'')^\alpha$, получаем

$$(54) \quad (D'')^\alpha P u = (D'')^\alpha v.$$

Композицию $(D'')^\alpha P$ можно записать в виде дифференциального оператора

$$(55) \quad P_\alpha(x, D) = (D'')^\alpha P(x, D).$$

Ограничим теперь равенство (54) на Y , т. е. положим $x'' = 0$. Очевидно, что

$$(56) \quad P_\alpha(x', 0, D', D'') = \sum_{|\beta|=0}^{m+|\alpha|} P_{\alpha\beta}(x', D')(D'')^\beta,$$

где $P_{\alpha\beta}(x', D')$ — дифференциальные операторы на Y , а m — порядок оператора P . Таким образом, получаем систему уравнений

$$(57) \quad \sum_{|\beta|=0}^{m+|\alpha|} P_{\alpha\beta}(x', D') u_\beta = v_\alpha$$

относительно компонент u_β джета неизвестной функции u на Y . В случае одного уравнения, удовлетворяющего условию Ковалевской (т. е. $k = n - 1$ и уравнение разрешено относительно производной $\partial^m u / \partial x_n^m$), система (57) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 (58) \quad & u_m + \sum_{j=0}^{m-1} P_{0j}(x', D') u_j = v_0, \\
 & u_{m+1} + \sum_{j=0}^m P_{1j}(x', D') u_j = v_1, \\
 & u_{m+2} + \sum_{j=0}^{m+1} P_{2j}(x', D') u_j = v_2, \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $u_0, \dots, u_{m-1}$ могут быть заданы произвольно, а $u_m, u_{m+1}, \dots$ после этого однозначно определяются из системы (58).

В общем случае заранее не очевидно, что в задаче Коши можно ограничиться заданием джета конечного порядка (и какого?); поэтому мы будем рассматривать (57) как бесконечную систему уравнений

$$(59) \quad \sum_{|\beta|=0}^{m+|\alpha|} P_{\alpha\beta}(x', D') u_\beta = v_\alpha, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots,$$

на джет $j^\infty(u)$ бесконечного порядка функции u . Система (59) называется *индуцированной системой* на многообразии Y ; как мы увидим ниже, в нехарактеристической ситуации индуцирования система эквивалентна конечной системе уравнений (таким образом, можно ограничиться заданием на Y джета конечного порядка неизвестной функции u).

Мы выписали систему (59) весьма неинвариантным способом, используя специально выбранную систему локальных координат. Следуя нашей общей концепции, попытаемся выразить $\mathcal{D}_Y$ -модуль $\mathcal{M}_Y$, соответствующий системе (59), непосредственно в терминах $\mathcal{D}_X$ -модуля $\mathcal{M}$, соответствующего системе (57), и тем самым продемонстрировать инвариантность понятия индуцированной системы.

Обозначим через $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ пучок «граничных операторов», т. е. операторов, переводящих функции на X в функции на Y и имеющих вид

$$(60) \quad a = i^* \circ A,$$

где A — некоторый дифференциальный оператор на X (т. е. $A \in \mathcal{D}_X$, а i^* — оператор, сопоставляющий каждой функции на X ее ограничение на Y . Очевидно, что $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ является *правым* $\mathcal{D}_X$ -модулем¹⁾,

$$(61) \quad aB = i^* \circ AB \quad \text{для любого} \quad B \in \mathcal{D}_X,$$

¹⁾ Более точно, правым модулем над ограничением $\mathcal{D}_X$ на Y , так как $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ — пучок на Y .

и левым $\mathcal{D}_Y$ -модулем (последнее легко проверяется в локальных координатах, так как

$$B(x', D') \circ i^* = i^* \circ B(x', D')$$

для любого дифференциального оператора $B(x', D')$, не зависящего от x'' и D''). Элементы пучка $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ в локальных координатах записываются как дифференциальные операторы $Q(x', D', D'')$, не зависящие от x'' ; при этом по определению

$$[Q(x', D', D'')f](x') = [Q(x', D', D'')f]|_{x''=0}$$

для любой функции $f(x', x'')$, а правое действие $\mathcal{D}_X$ и левое действие $\mathcal{D}_Y$ на $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ задаются правилами

$$(62) \quad \begin{aligned} Q(x', D', D'')B(x, D) : & \text{вычислить композицию} \\ & \text{дифференциальных операторов} \\ & \text{и положить } x'' = 0; \\ C(x', D')Q(x', D', D'') : & \text{вычислить композицию} \\ & \text{дифференциальных операторов.} \end{aligned}$$

Заметим, что $\text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \mathcal{O}_Y)$ (множество гомоморфизмов левых $\mathcal{D}_Y$ -модулей) естественно отождествляется с пространством формальных джетов¹⁾ бесконечного порядка на Y . Действительно, пусть $\varphi = \{\varphi_\alpha\}_{|\alpha|=0}^\infty$ — некоторый джет на Y . Тогда соответствующий гомоморфизм

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \rightarrow \mathcal{O}_Y$$

задается формулой

$$(63) \quad \tilde{\varphi}(Q(x', D', D'')) = \left\{ Q(x', D', D'') \sum_{|\alpha|=0}^{\text{ord } Q} \varphi_\alpha \frac{(x'')^\alpha}{\alpha!} \right\} \Big|_{x''=0}.$$

Обратно, если $\tilde{\varphi} : \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ — произвольный гомоморфизм левых $\mathcal{D}_Y$ -модулей, то мы полагаем $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$, где

$$(64) \quad \varphi_\alpha = \tilde{\varphi}\{(D'')^\alpha\}.$$

¹⁾ Никакие условия на рост производных не налагаются, т. е. джет может не быть джетом никакой аналитической функции.

Поскольку система (59) как раз есть система на джеты (только не скалярных функций, а векторных), попробуем получить ее из системы (57) с помощью $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$.

А именно, рассмотрим ассоциированную с системой (57) точную последовательность левых $\mathcal{D}_X$ -модулей

$$(65) \quad \dots \rightarrow \mathcal{D}_X^r \xrightarrow{Q} \mathcal{D}_X^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}_X^s \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$$

и умножим ее тензорно на $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ (что можно сделать, поскольку $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ — правый $\mathcal{D}_X$ -модуль). Получаем последовательность левых $\mathcal{D}_Y$ -модулей

$$(66) \quad \dots \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{D}_X^r \xrightarrow{1 \otimes Q} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{D}_X^m \xrightarrow{1 \otimes P} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{D}_X^s \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Поскольку

$$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X},$$

последовательность (66) имеет вид

$$(67) \quad \dots \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}^r \xrightarrow{Q} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}^s \rightarrow \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes \mathcal{M} \rightarrow 0,$$

где Q и P действуют умножением справа. В координатах (x', x'') мы можем записать изоморфизм $\mathcal{D}_Y$ -модулей

$$(68) \quad \begin{aligned} \bigoplus_{|\alpha|=0}^{\infty} \mathcal{D}_Y &\approx \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}, \\ \{Q_{\alpha}(x', D')\} &\mapsto \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x', D')(D'')^{\alpha}. \end{aligned}$$

При этом изоморфизме правое действие оператора P на $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}^m$ будет выглядеть следующим образом:

$$(69) \quad \begin{aligned} \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x', D')(D'')^{\alpha} \cdot P \\ &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x', D')(D'')^{\alpha} P \\ &= \sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x', D') \sum_{\beta} P_{\alpha\beta}(x', D')(D'')^{\beta} \\ &= \sum_{\beta} \left(\sum_{\alpha} Q_{\alpha}(x', D') P_{\alpha\beta}(x', D') \right) (D'')^{\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оно задается в точности умножением справа на матрицу дифференциальных операторов $P_{\alpha\beta}$ индуцированной системы (59).

Поскольку функтор $\otimes$ точен справа, последовательность (67) точна в члене $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}^i$, и, таким образом, индуцированная система имеет вид

$$(70) \quad M_Y = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes M$$

(тензорное произведение над $\mathcal{D}_X$).

Вообще говоря, последовательность (67) не обязана быть точной в остальных членах (т. е. условия согласования для индуцированной системы могут не исчерпываться условиями согласования, индуцированными условиями согласования для исходной системы). Однако в нехарактеристическом случае это так.

Введем теперь важное определение.

Говорят, что модуль M нехарактеристичен относительно Y , если $\text{char}(M)$ не пересекается с конормальным расслоением к Y . В этих терминах имеет место следующее утверждение.

Теорема 4. *Если M нехарактеристичен относительно Y , то последовательность (67) точна и модуль M_Y порождается конечной системой уравнений.*

Теперь мы можем сформулировать теорему Коши-Ковалевской в форме Касивары, т. е. на языке $\mathcal{D}$ -модулей:

Теорема 5. *Пусть модуль M нехарактеристичен относительно Y . Тогда имеют место изоморфизмы*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(M_Y, \mathcal{O}_Y), \\ \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(M, \mathcal{O}_X) &\cong \text{Ext}_{\mathcal{D}_Y}^j(M_Y, \mathcal{O}_Y), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Иными словами, задача Коши имеет единственное решение для любых начальных данных и правых частей, удовлетворяющих условиям согласования.

Подобным образом можно рассматривать многие задачи теории дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами (гиперболические системы, распространение особенностей, граничные задачи, дифракция на нерегулярных препятствиях...). Идея заключается в том, чтобы не рассматривать по отдельности дифференциальный оператор P (или соответствующую систему M) и пучок, в котором он действует, а рассмотреть комплекс

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^n, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{P} \text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^s, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{Q} \dots$$

Приведем «таблицу соответствия» некоторых понятий традиционной теории дифференциальных уравнений и теории $\mathcal{D}$ -модулей.

Традиционный подход	Подход, связанный с теорией $\mathcal{D}$ -модулей
Система дифференциальных уравнений $Pu = v$	$\mathcal{D}$ -модуль $\mathcal{M} = \mathcal{D}^k / (\mathcal{D}^m P)$
Дифференциальные условия согласования на правые части $Qv = 0$	Второй член свободной резольвенты $\mathcal{D}^s \xrightarrow{Q} \mathcal{D}^m \xrightarrow{P} \mathcal{D}^k \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$
Пространство Кег P решений однородного уравнения	$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ — класс функций, в котором рассматривается уравнение
Коядро оператора P в пространстве правых частей, удовлетворяющих условию согласования, $\text{Coker } P = \{v \mid Qv = 0\} / \{v \mid v = Pu\}$	$\text{Ext}_{\mathcal{D}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{L})$
Характеристики $\text{char } P$	Характеристическое многообразие $\text{char } \mathcal{M}$ модуля $\mathcal{M}$
Гамильтониан H оператора P	Характеристический идеал $\text{Icar}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{O}(T^*X)$
Бихарактеристики и системы Гамильтона	Бихарактеристические листы и инволютивные распределения
Начальные данные в задаче Коши и условия согласования на них	Индукцированная система $\mathcal{M}_Y$
Волновой фронт решения	Микроноситель $\text{SS}(\mathcal{F})$ пучка решений $\mathcal{F}$

В этом списке мы сознательно не коснулись ряда важных понятий (микролокализации, преобразования Фурье, интегральных операторов Фурье, квантования канонических преобразований), которые также имеют свои аналоги в теории $\mathcal{D}$ -модулей, но которые выходят за рамки нашего предисловия.

Владимир Назайкинский, Борис Стернин

Предисловие

В течение долгого времени с момента ее разработки Лере теория пучков в основном применялась в теории функций многих комплексных переменных и в алгебраической геометрии, пока, наконец, она не стала основным инструментом для почти всех математиков, а когомологии не стали естественным языком для многих людей.

Однако хотя существует обширная литература по когомологиям пучков (например, знаменитая книга Годемана) и даже по производным функторам, в действительности очень мало книг развивают теорию пучков в рамках замечательного языка производных категорий, несмотря на то что его необходимость становится все более и более очевидной. Большинство конструкций теории работают в полную силу именно в этом контексте или даже бессмысленны вне него. Это особенно очевидно в отношении появившейся в шестидесятых годах двойственности Пуанкаре–Вердье или введенной в 1969 г. микролокализации Сато, которая только сейчас становится понятной в полной мере.

Начиная с семидесятых годов появляются другие фундаментальные идеи, и теория пучков (на многообразиях) естественным образом включает «микролокальную» точку зрения. Наша цель в этой книге заключается в том, чтобы дать замкнутое изложение, начинающееся с первоначальных понятий (производные категории и пучки) и подробно описывающее основные элементы теории, такие, как двойственность, преобразование Фурье, специализация и микролокализация, микроноситель и контактные преобразования, а также представить два основных приложения теории. Первое из них относится к вещественной аналитической геометрии и включает понятия конструктивных пучков, субаналитических циклов, характеристик Эйлера–Пуанкаре, формулу Лефшеца, превратные пучки и т. д. Второе приложение — это теория линейных уравнений в частных производных, включающая $\mathcal{D}$ -модули, микрофункции, эллиптические и микрогиперболические системы и комплексные квантованные контактные преобразования.

В этой книге мы надеемся проиллюстрировать глубокие связи, тесно соединяющие на первый взгляд такие далекие друг от друга области математики, как, например, алгебраическая топология и линейные уравнения в частных производных. В то же время мы хотим подчеркнуть по существу геометрическую природу встречающихся

проблем (что наиболее очевидно в теореме об инволютивности для пучков) и показать эффективность для их решения даже аналитиками алгебраических средств, введенных Гротендиком.

Разумеется, мы лишь коснулись многих других важных приложений, как, например, теории микродифференциальных систем (впрочем, на эту тему сейчас существуют исчерпывающие монографии), и совсем не затрагивали других, таких, как теория представлений и эквивариантная теория пучков.

Мы хотим выразить нашу благодарность К. Узелю, который согласился написать краткий исторический очерк теории пучков, Л. Илюзи, который помог нам при подготовке разделов «Замечания», и всем тем, кто «одолеет» различные части книги и сделал конструктивные замечания, в особенности Е. Андроникову, А. Араба, Ж.-М. Делору, Е. Лайштнаму и Ж.-П. Шнайдерсу, а также сотруднице Университета Пари-Норд Катрин Симон и сотрудникам секретариата Института математических исследований в Киото, которые терпеливо печатали рукопись.

Май 1990 г.

М. Касивара и П. Шапура

К русскому изданию

В настоящее время общепризнано, что теория пучков является краеугольным камнем математики. Русская школа (вслед за Гельфандом, Маниным, Бейлинсоном и многими другими) внесла большой вклад в ее развитие. Вот почему мы особенно удовлетворены тем, что наша книга «Пучки на многообразиях» переведена на русский язык.

Мы хотим выразить благодарность профессору Стернину, который был научным редактором перевода, д-рам Кочеткову и Назайкинскому, которым выпала трудная работа по переводу английского оригинала, и издательству «Мир», которое включило нашу книгу в свою знаменитую коллекцию монографий по математике.

1996 г.

М. Касивара и П. Шапура

Введение

Назначение этой книги — дать замкнутое в себе изложение теории пучков.

Пучки придумал Жан Лере, находясь в немецком лагере для военнопленных во время второй мировой войны.

Теория пучков преследует достаточно общую цель — получать глобальную информацию из локальной или, другими словами, определять препятствия, характеризующие тот факт, что некоторое локальное свойство не является глобальным: например, многообразие не всегда ориентируемо, а дифференциальное уравнение, разрешимое локально, может не иметь глобальных решений. Таким образом, теория пучков является широким обобщением той части алгебраической топологии (например, теории сингулярных гомологий), которая соответствует постоянным пучкам или, более общо, локально постоянным пучкам. Существует много естественно возникающих примеров пучков — ориентирующие пучки, пучки дифференцируемых или голоморфных функций, пучки решений систем дифференциальных уравнений, конструктивные пучки, пучки, получаемые как прямые образы, и пр.

Однако сначала было неясно, сможет ли такая общая теория иметь приложения. Вопрос разрешился с ее успешным использованием в теории функций нескольких комплексных переменных, и можно предположить, что оригинальная работа Лере оставалась бы в забвении, если бы не значительные достижения Картана и Серра в 50-х гг., а позже Гротендика (см. разд. «Краткий исторический очерк» ниже).

Теория пучков работает в полную силу, если ее дополнить инструментарием гомологической алгебры. Фактически именно Лере ввел понятие спектральной последовательности, которое вместе с производными функторами Картана–Эйленберга естественно подводит к теории производных категорий Гротендика. После ее включения в аппарат алгебраической геометрии теория производных категорий ныне получила полное признание как один из основных инструментов математики. В частности, без ее использования, безусловно, невозможно дать такое красивое обобщение двойственности Пуанкаре, как то, которое дал Вердье в 60-х гг. (после близкой работы Гротендика, основанной на этальных когомологиях), или детально рассмотреть то, что Гротендик назвал «шестью операциями» над пучками (функторы Rf_* , f^{-1} , $Rf!$, $f^!$, $\otimes^L$ и $RHom$). Как мы увидим, этот формализм ведет к глубоким и сильным обобщениям классических результатов. Мы уже упомянули двойственность Пуанкаре, но сюда

же, среди прочего, относятся формула Лефшеца для неподвижных точек и характеристика Эйлера–Пуанкаре. Конечно, упомянутые выше функторы являются абстрактными вариантами классических операций над функциями: прямой образ — интегрирования, обратный образ — композиции, тензорное произведение — обычного произведения. (С помощью «двойственности» в абстрактном случае мы получаем шесть операций вместо трех. «Двойственность» не имеет аналога для функций, но мы определим ее для конструктивных функций.) То, что мы кратко обрисовали к настоящему моменту — это, грубо говоря, «классическая теория пучков». Новая (и фундаментальная) идея, выдвинутая Микио Сато в 1969 г., расширила горизонты теории пучков. Это так называемый «микролокальный подход», и одной из целей данной книги является развитие теории пучков в рамках этой концепции. Основной задачей Сато было изучение аналитических особенностей решений систем линейных дифференциальных уравнений. Уже в 1959 г. он применил локальные когомологии для определения пучка гиперфункций и интерпретировал последние как суммы граничных значений голоморфных функций. Десятью годами позже он ввел пучок микрофункций, чтобы определить «направление, откуда приходят граничные значения». Чтобы сделать это, Сато ввел функтор специализации ι_M (вдоль подмногообразия M многообразия X) и его преобразование Фурье — функтор микролокализации μ_M . Эти функторы отображают производную категорию пучков на X в производные категории пучков на нормальном и конормальном расслоениях к многообразию M в X соответственно и позволяют детально изучать пучок в окрестности к многообразию M , принимая во внимание все нормали (или конормали) к M .

Пытаясь применить теорию Сато к изучению микрогиперболических систем, авторы настоящей книги постепенно осознали, что они используют только характеристическое многообразие системы (в кокасательном расслоении к комплексному многообразию X), что можно забыть о комплексной структуре на X и даже о том, что предметом рассмотрения являются уравнения в частных производных. На самом деле речь идет о нехарактеристических деформациях (комплексов пучков голоморфных решений системы) в «незапрещенных» направлениях, т. е. поперек нехарактеристических вещественных гиперповерхностей. Заметим, что эта техника нехарактеристических деформаций применялась и раньше, но здесь авторы имели дело с микродифференциальными системами и нуждались в микролокальной геометрии. В частности, было введено понятие γ -топологии — микролокальный аналог срезки. Позже, в 1982 г., обобщая свою работу о микрогиперболических системах, авторы ввели понятие мироносителя пучка: выражаясь нестрого, точка p кокасательного расслоения

T^*X к вещественному многообразию X не принадлежит $SS(F)$ — микроносителю пучка F , если F не имеет когомологий с носителями в полупространствах, конормали которых близки к p . Это определение позволяет изучать пучки микролокально и, в частности, позволяет определить действие контактных преобразований — естественных преобразований кокасательных расслоений — на пучках. Это действие аналогично действию квантованных контактных преобразований на микрофункциях [Sato–Kawai–Kashiwara 1] или на распределениях Фурье [Hörmander 2].

Понятие микроносителей тесно связано с теорией Морса. Хорошо известно, что если ϕ — вещественная функция на вещественном компактном многообразии X , то группы когомологий пространств $\{x \in X; \phi(x) < t\}$ при меняющемся t изоморфны до тех пор, пока t не дойдет до критического значения ϕ . Если рассматривать аналогичную задачу для групп когомологий пучка F , то можно получить похожий результат в терминах микроносителя пучка F . Для комплексных многообразий микроносители конструктивных пучков могут быть определены через *функтор исчезающего цикла* Гротендика–Делиня. Заметим, что функтор исчезающего цикла является частным случаем функтора микролокализации Сато.

Понятие микроносителя имеет глубокое геометрическое содержание. Мы докажем, что это множество (т. е. микроноситель) инволютивно. Это, в частности, дает чисто вещественное и геометрическое доказательство соответствующей классической теоремы для характеристического многообразия системы дифференциальных уравнений.

На протяжении всей книги мы будем убеждаться, что микролокальный подход углубляет теорию пучков и приводит к многочисленным приложениям. Приведем лишь несколько примеров.

(а) Многие морфизмы теории пучков становятся изоморфизмами при выполнении некоторых микролокальных условий. Рассмотрим, например, морфизм многообразий $f: Y \rightarrow X$. Пусть F — пучок (или комплекс пучков) на X . Тогда существует канонический морфизм

$$(i.1) \quad \omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F \rightarrow f^!F$$

($\omega_{Y/X}$ — относительный дуализирующий комплекс). Хорошо известно, что этот морфизм является изоморфизмом, если f — гладкий морфизм. Справедлив, однако, более сильный результат: этот морфизм является изоморфизмом, если «морфизм f является нехарактеристическим относительно F » (если f — замкнутое вложение, то это означает, что пересечение микроносителя $SS(F)$ и конормального расслоения к подмногообразию Y в X содержится в нулевом сечении).

(b) Пусть X — комплексное многообразие, а M — система линейных дифференциальных уравнений на X , т. е. левый когерентный

$\mathcal{D}_X$ -модуль, где $\mathcal{D}_X$ обозначает пучок колец голоморфных дифференциальных операторов на X . Пусть

$$(i.2) \quad F = R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$$

— комплекс пучков голоморфных решений системы. Геометрия линейных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами изящно описывается следующей формулой, доказательство которой основано на теореме Коши—Ковалевской:

$$(i.3) \quad SS(F) = \mathrm{char}(\mathcal{M}).$$

Здесь $\mathrm{char}(\mathcal{M})$ обозначает характеристическое многообразие системы.

Применим результат п. (а) к следующему случаю: пусть Y — вещественно-аналитическое многообразие, а X — его комплексификация; тогда если $\mathcal{M}$ — эллиптическая система, то комплекс вещественно-аналитических решений этой системы и комплекс ее решений в гиперфункциях изоморфны. Таким образом, мы получаем чисто теоретико-пучковое доказательство классической теоремы анализа.

(с) Комплекс пучков F на вещественно-аналитическом многообразии называется слабо конструктивным, если существует субаналитическая стратификация многообразия X , такая, что все группы когомологий пучка F локально постоянны на стратах. Мы покажем, что это условие эквивалентно микролокальному, а именно что микроноситель пучка F есть субаналитическое лагранжево подмножество в T^*X . Более того, если выполнено условие конечности, то пучку F можно сопоставить лагранжев цикл с носителем $SS(F)$. Тогда глобальная характеристика Эйлера—Пуанкаре на X равна индексу пересечения этого цикла с циклом, естественно сопоставленным нулевому сечению. Этот результат дает нам эффективное микролокальное средство для вычисления индексов.

Мы надеемся убедить читателя данной книги, что микролокальный подход к теории пучков в высшей степени естествен. Начиная с теории производных категорий, мы изложим как классическую теорию пучков («шесть операций»), так и микролокальную (микролокализацию, микроносители, контактные преобразования). Далее мы применим эту технику к изучению конструктивных пучков на вещественных многообразиях и, наконец, коснемся вкратце приложений этой теории к линейным уравнениям в частных производных.

Изложим содержание книги подробнее.

Глава 1 содержит основания гомологической алгебры, необходимые для понимания остальной части книги. В том числе здесь представлена теория производных категорий (за исключением t -структур, описание которых отложено до гл. 10).

Главы 2 и 3 содержат «классические» понятия теории пучков, изложенные на языке производных категорий. Сюда входит шесть операций, а также преобразование Фурье–Сато, которое устанавливает соответствие между пучками (точнее, объектами производной категории пучков) на векторном расслоении и пучками на двойственном расслоении.

Глава 4 посвящена понятию микролокализации. После описания геометрической конструкции нормальной деформации подмногообразия M в многообразии X мы определяем: функтор специализации ι_M , который отображает пучки на X в пучки на нормальном расслоении T_M^*X , и его преобразование Фурье–Сато, функтор микролокализации μ_M . Мы также определяем естественное обобщение функтора μ_M — функтор μ_{hot} — и изучаем функториальные свойства этих функторов.

В гл. 5 мы вводим понятие микроносителя пучка. После доказательства теоремы о глобальном продолжении для пучков в терминах геометрии их микроносителей мы используем γ -топологию для «микролокального» срезания пучков. Далее мы изучаем поведение микроносителей при функториальных операциях в нехарактеристическом случае (для обратных образов) и в собственном случае (для прямых образов). Как приложение получаем доказательство *неравенства Морса* для пучков.

В гл. 6 мы используем технику микроносителей для построения локализации производной категории пучков $D^b(x)$ подмножеству $\Omega \subset T^*X$ (при этом получаем новые триангулированные категории $D^b(X; \Omega)$) и для определения прямых и обратных «микролокальных» образов. Затем мы обобщаем результаты гл. 5, изучая поведение микроносителей при функториальных операциях. В частности, мы доказываем, что микроноситель $\mu_M(F)$ содержится в нормальном конусе микроносителя $SS(F)$ вдоль T_M^*X . Это утверждение является теоретико-пучковой версией теоремы о микрогиперболических системах и будет использоваться на протяжении всей книги. Эта глава также содержит результат исключительной важности — теорему об инволютивности микроносителей.

В гл. 7 мы изучаем контактные преобразования в пучках. Если χ — контактное преобразование открытого множества $\Omega_X \subset T^*X$ на открытое множество $\Omega_Y \subset T^*Y$, то при подходящих условиях можно построить изоморфизм $D^b(X; \Omega_X) \simeq D^b(Y; \Omega_Y)$, совместимый с функтором μ_{hot} . Вычисляя образ постоянного пучка A на подмногообразии $M \subset X$, мы естественно приходим к понятию *чистого пучка* вдоль гладкого лагранжева многообразия. Чистый пучок «обобщенно» (и микролокально) изоморфен некоторому пучку $L_M[d]$ для некоторого A -модуля L и сдвига d . Вычисление сдвига, однако, требует использования всей техники индекса инерции троек лагранжевых плоскостей.

В этой главе мы вычисляем, в частности, сдвиг микролокальной композиции ядер.

В гл. 8 мы проводим детальное изучение конструктивных пучков на вещественных многообразиях. Мы вводим (микролокальное) понятие μ -стратификации и доказываем, что пучок слабо конструктивен в том и только в том случае, когда его микроноситель субаналитичен и изотропен (а следовательно, лагранжев). После этого мы применяем полученные результаты к изучению функториальных операций на конструктивных пучках. В случае комплексных многообразий мы доказываем, что пучок конструктивен, если он конструктивен на вещественном подлежащем многообразии и, кроме того, если его микроноситель инвариантен относительно действия S^1 . Из этого мы выводим теорему о несобственных прямых образах. Наконец, мы показываем, что функторы близкого цикла и исчезающего цикла являются частными случаями функторов специализации и микролокализации.

Понятия субаналитических цепей и циклов вводятся в гл. 9 с помощью дуализирующих комплексов. Затем, используя функтор μhom , мы сопоставляем конструктивному пучку его характеристический цикл и показываем, что индекс пересечения этого лагранжева цикла и нулевого сечения расслоения T^*X равен глобальной характеристике Эйлера–Пуанкаре пучка F на X . Мы также вычисляем локальные характеристики Эйлера–Пуанкаре и показываем наличие связи между лагранжевыми циклами и конструктивными функциями на X , получая, таким образом, новый аппарат для исчисления этих функций. В этой же главе мы доказываем теорему Лефшеца о неподвижных точках для случая конструктивных пучков.

Глава 10 посвящена теории превратных пучков. Мы вводим понятие t -структуры и даем определение превратного пучка (т. е. превратного комплекса) на вещественном многообразии. Показывается, что превратные пучки образуют абелеву категорию. Затем мы рассматриваем превратные пучки на комплексном многообразии, даем микролокальный критерий превратности и доказываем, что превратность сохраняется при функториальных операциях.

В гл. 11 мы показываем, как можно применить теорию пучков для изучения систем линейных уравнений в частных производных. После краткого обзора теории $\mathcal{O}_X$ - и $\mathcal{D}_X$ -модулей мы доказываем одно включение в (i.3) и превратность комплекса голоморфных решений голономного $\mathcal{D}_X$ -модуля. Мы также вводим пучки гиперфункций и микрофункций и выводим из (i.3) некоторые основные результаты о решениях в микрофункциях эллиптических и гиперболических систем. В этой главе также определяются квантованные контактные преобразования для пучка $\mathcal{O}_X$. Теория этих преобразований имеет много важных приложений, которые в книге не обсуждаются.

В конце книги имеется приложение, в котором собраны необходимые для ее понимания результаты (частично с доказательствами) из симплектической геометрии. В частности, представлена теория индекса инерции.

Каждая глава начинается кратким введением и содержит (в конце) упражнения. Некоторые из упражнений (особенно это касается упражнений к гл. 1) представляют собой вспомогательные результаты, используемые далее в книге. Упражнения обычно несложные, в более трудных случаях мы даем указания к решению.

Мы практически не включали библиографические сведения в основной текст книги. Вместо этого каждую главу мы завершаем небольшой исторической справкой. Дело в том, что большинство теорем имеет длинную и запутанную историю, и было бы затруднительным упоминать каждый раз всех, кто внес свой вклад в ее доказательство. С другой стороны, представляется неправильным упоминать только того, кто первым начал исследования в данной области, или того, кто доказал окончательный результат.

Начала и истоки теории пучков весьма запутаны, и исторический очерк Кристиана Узеля, который согласился дать детальное изложение этой части истории математики, безусловно, обогатил книгу.

Краткий исторический очерк

Возникновение теории пучков

К. Узель

1. Лекции Лере (1945 г.)

Находясь в качестве военнопленного в концентрационном лагере №17 в Австрии, Жан Лере прочитал курс алгебраической топологии в организованном в лагере при его участии университете для заключенных. Это была тема, к которой он приступил еще в 1934 г. в совместной с Шаудером статье, посвященной обобщению на бесконечномерный случай понятия степени отображения и теоремы Брауэра о неподвижной точке [33]. Такого рода теорема для функциональных пространств была нужна Лере для того, чтобы установить существование решений нелинейных уравнений, которые встречаются в гидродинамике (и решения которых могут не быть ни регулярными, ни единственными).

Лекции Лере были опубликованы в конце войны в 1945 г. в Журнале Лиувилля [29]. В этой работе алгебраическая топология развивалась на новой основе, без предположений об ориентируемости или локальной линейности и без использования методов подразделения или симплициальной аппроксимации. Упор был сделан на когомологии (четкое различие между когомологиями и гомологиями стали проводить лишь в последние годы перед войной [47], в особенности после работы де Рама [37]); когомологии пространства с коэффициентами в кольце всегда имеют мультипликативную структуру, и мультипликативная структура в гомологиях, с которой работали в случае ориентируемых компактных многообразий, получается из мультипликативной структуры в когомологиях с помощью двойственности Пуанкаре. Лере переименовал когомологии в «гомологии» и говорил о группах Бетти, когда речь шла о гомологиях. При определении когомологий топологического пространства E с коэффициентами в кольце A он руководствовался способом Чеха [9], но заменил теоретико-множественное понятие покрытия на более подходящее для алгебраической топологии понятие перекрытия (*couverture*).

Чтобы его ввести, он сначала рассматривает «абстрактный комплекс», последовательность конечно порожденных свободных абелевых групп, соответствующих всевозможным размерностям p , с кограничным оператором, который действует на базисных элементах

$X^{p\alpha}$ p -мерной группы по правилу $X^{p\alpha} \mapsto \dot{X}^{p\alpha}$, где $\dot{X}^{p\alpha}$ лежит в $(p+1)$ -мерной группе (на всю p -мерную группу действие распространяется по линейности). Кограничный оператор подчинен следующей аксиоме: кограница кограницы равна нулю. Комплекс становится «конкретным», если поставить в соответствие каждому $X^{p\alpha}$ носитель $|X^{p\alpha}|$, являющийся непустым подмножеством в E ; налагается условие, что если $X^{q\beta}$ примыкает к $X^{p\alpha}$ (т. е. если они связаны конечной последовательностью базисных элементов, каждый из которых входит в кограницу предыдущего), то носитель элемента $X^{q\beta}$ содержится в носителе элемента $X^{p\alpha}$. Конкретный комплекс K называется перекрытием, если все носители замкнуты, для любой точки x пространства E подкомплекс, образованный элементами, носители которых содержат x , является симплексом (его когомологии тривиальны) и сумма K^0 элементов размерности 0 является коциклом (называемым единичным (ко)циклом). Классы когомологий пространства E с коэффициентами в A — это классы форм L^p произвольных перекрытий K пространства E (линейных комбинаций с коэффициентами из A p -мерных базисных элементов перекрытия K) при условии, что принято соглашение отождествлять L^p с «пересечением» $L^p \cdot K^{i0}$ для любого другого перекрытия K' (пересечение определяется с помощью тензорного произведения комплексов; носитель элемента $X^{p\alpha} \otimes X^{q\beta}$ является пересечением носителей элементов $X^{p\alpha}$ и $X^{q\beta}$, и производится факторизация по элементам с пустым носителем). Если пространство E нормально, можно вычислять когомологии, рассматривая только перекрытия из некоторого семейства, замкнутого относительно пересечения и для каждого конечного открытого покрытия ρ пространства E содержащего перекрытие с ρ -малыми носителями; в случае компактного E можно ограничиться одним перекрытием, если его носители «ациклически»¹⁾ (т. е. когомологически тривиальны).

Лере перенес результаты Хопфа [23] о компактных ориентируемых многообразиях на случай компактных топологических пространств. Он развил теорию двойственности, позволяющую вычислять группы Бетти. Первая часть курса лекций Лере завершается введением числа Лефшеца непрерывного отображения пространства E в себя для случая, когда E компактно, связно и допускает конечное «выпуклоподобное» покрытие (т. е. покрытие замкнутыми ациклическими множествами, пересечения которых являются пустыми или ациклическими).

Во второй части Лере сравнивает число Лефшеца отображения $\xi : E \rightarrow E$ с числом Лефшеца ограничения этого отображения на

¹⁾ В оригинале «simple», но мы предпочли более распространенный в отечественной литературе термин. — *Прим. перев.*

замкнутое подмножество, инвариантное относительно ξ . Чтобы обобщить на некомпактный случай результаты, доказанные ранее в компактном случае, он вводит «псевдоциклы» (элементы проективного предела когомологий компактных подмножеств B пространства E). Он определяет перекрытия («замощения»), исходя из клеточных разбиений дифференцируемых многообразий, и устанавливает двойственность Пуанкаре в случае ориентируемых многообразий без края.

В третьей части, с которой начинается работа Лере в области алгебраической топологии, определяется полный индекс $i(O)$ решений уравнения $x = \xi(x)$ в открытом подмножестве O пространства E (где $\xi: F \rightarrow E$ — непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве F , содержащем $\bar{O}$); предполагается, что E «выпуклоподобно» (компактно, связно и допускает покрытие «замкнутыми ациклическими множествами, конечные пересечения которых пусты или ациклически», а внутренности образуют базу топологии), и рассматриваются когомологии с целыми коэффициентами. Полный индекс определен, если рассматриваемое уравнение не имеет решений на границе области O . Он зависит лишь от ограничения отображения ξ на $\bar{O}$, инвариантен относительно гомотопии (отображения ξ) и равен числу Лефшеца, когда $O = E$. Если все решения указанного уравнения в O принадлежат объединению непересекающихся открытых подмножеств O_α из O , то $i(O)$ есть сумма $i(O_\alpha)$. В случае изолированного решения x его индекс определяется как полный индекс $i(V)$, где V — достаточно малая окрестность точки x , и если O содержит лишь изолированные решения, то $i(O)$ — сумма индексов этих решений. В теории сильно вязких струй в ходе доказательства того, что каждое решение указанного уравнения является изолированным и имеет индекс 1, устанавливается теорема единственности. Лере определяет еще один индекс для уравнений несколько более общей формы и применяет свою теорию к уравнению Фредгольма. Он рассматривает также случай уравнений вида $x = \xi(x, x')$, где $\xi: F \rightarrow E$ — непрерывное отображение, определенное на замкнутом подмножестве F из $E \times E'$ (предполагается, что E выпуклоподобно и ациклично); индекс заменяется операцией проектирования $Z^p.O$ на E' , где Z^p — псевдоцикл на пространстве $E \times E'$.

2. Теория пучков и спектральная последовательность

Впоследствии Лере существенно продвинул исследования в области алгебраической топологии, которыми он занимался, будучи в плену. Изучение соотношений между гомологиями расслоенного пространства и гомологиями его базы и слоя потребовало введения нового аппарата — когомологий с локальными коэффициентами, меня-

ющимися от точки к точке, — и вычисления когомологий методом последовательных приближений. Более общим образом, этот аппарат должен был позволить в случае, когда имеется непрерывное отображение $\xi: X \rightarrow Y$, изучать когомологии пространства X , исходя из когомологий пространства Y и слоя отображения ξ ; исследования такого рода дали возможность Пикару [36] вычислять гомотопии комплексных алгебраических поверхностей, а Лефшец распространил этот метод на более высокие размерности [28]. Впрочем, идея локальных коэффициентов независимо возникла у Стиррода [41]: у него она приняла частную форму локальных систем коэффициентов.

В работе [31], которая воспроизводит его курс лекций в Коллеж де Франс в 1947–48 и 1949–50 гг., Лере определяет пучок на локально компактном топологическом пространстве следующим образом: для любого замкнутого подмножества F пространства X задано кольцо $B(F)$ и для любого включения $F_1 \subset F$ замкнутых подмножеств из X задан гомоморфизм «ограничения» $b \mapsto F_1 b$ кольца $B(F)$ в $B(F_1)$. Он потребовал, чтобы $B(\emptyset) = 0$ и чтобы операция ограничения была транзитивной: $F_2(F_1 b) = F_2 b$, если $F_2 \subset F_1 \subset F$. Пучок является «непрерывным», если индуктивный предел колец $B(W)$, где W — замкнутая окрестность бесконечности, равен нулю и если для любого замкнутого множества F кольцо $B(F)$ является индуктивным пределом колец $B(V)$, где V пробегает замкнутые окрестности множества $F \cup \infty$; пучок называется собственным, если он удовлетворяет первому из этих условий и второму при некомпактных F и если, кроме того, $B(K)$ является индуктивным пределом колец $B(V)$, где V — замкнутая окрестность множества K , для всех компактных K .

Наряду с пучками Лере вводит, как и в своих лекциях 1945 г., комплексы и перекрытия, однако теперь по совету Анри Картана [5] комплексы не обязательно имеют базис, но наделены умножением: это дифференциальные кольца с правилом, которое сопоставляет каждому элементу k замкнутое подмножество $S(k)$ пространства X , называемое носителем этого элемента. Если заданы комплекс $\mathcal{K}$ на X и замкнутое подмножество $F \subset X$, то сечение $F\mathcal{K}$ — это комплекс на F , являющийся фактором комплекса $\mathcal{K}$ по идеалу, состоящему из элементов, носители которых не пересекаются с F ; таким образом, возникает пучок $\mathcal{B}: F \mapsto F\mathcal{K}$, который называется ассоциированным с комплексом $\mathcal{K}$. Комплекс $\mathcal{K}$ является перекрытием пространства X , если он не имеет кручения, градуирован степенями ≥ 0 , причем оператор кограницы имеет степень 1, и обладает единичным элементом u с носителем X , таким, что когомологии сечения $x\mathcal{K}$ сводятся к кратным элемента zu для любой точки x из X .

Чтобы определить когомологии пространства X с коэффициентами в собственном пучке $\mathcal{B}$ или даже гиперкогомологии, если $\mathcal{B}$ обладает дифференцированием, которое превращает его в дифференциальный

пучок, Лере воспользовался одним тонким перекрытием, вместо того чтобы использовать все перекрытия, как в лекциях 1945 г. Комплекс $\mathcal{K}$ называется тонким, если для любого конечного открытого покрытия (V_ν) компактификации $X \cup \infty$ тождественный автоморфизм комплекса $\mathcal{K}$ можно разложить в сумму линейных отображений $\lambda_\nu: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, таких, что $S(\lambda_\nu k) \subset \bar{V}_\nu \cap S(k)$ для любого элемента k из $\mathcal{K}$ и любого индекса ν . Существование тонких перекрытий конечномерного локально компактного пространства X устанавливается с помощью конструкции Чеха или конструкции Алесандера [1]. Если X n -мерно, то можно выбрать тонкое перекрытие, являющееся нулевым в размерностях $> n$. Если $\mathcal{X}$ — тонкое перекрытие пространства X и B — собственный дифференциальный пучок на X , то определено тензорное произведение $\mathcal{X} \otimes B$; это комплекс, порожденный элементами $k \otimes b$, где $k \in \mathcal{K}$, $b \in B(F)$ (F — замкнутое подмножество в X) и $S(k) \subset F$; носитель элемента $\sum k_\mu \otimes b_\mu$ — это множество точек x , таких, что $x \sum k_\mu \otimes b_\mu$ не равно нулю (принято соглашение, что если $x \in S(k)$, то $x(k \otimes b) = xk \otimes xb$, а в противном случае $x(k \otimes b) = 0$). Комплекс $\mathcal{X} \circ B$ — это фактор комплекса $\mathcal{X} \otimes B$ по идеалу элементов с пустым носителем (носители определяются так же, как и выше). Лере показывает, что когомологии комплекса $\mathcal{X} \circ B$ не зависят от выбора тонкого перекрытия $\mathcal{X}$, и обозначает эти когомологии через $\mathcal{H}(X \circ B)$.

Чтобы установить, что когомологии нормального пространства вычисляются с помощью перекрытий из замкнутого относительно операции пересечения семейства, в котором для любого открытого покрытия ρ найдется перекрытие с ρ -малыми носителями, Лере в своих лекциях 1945 г. использовал основополагающую лемму, согласно которой $K^* \cdot C^*$ и C' имеют одни и те же когомологии, если K^* — перекрытие, а C' — такой комплекс, что $K^* \cdot e$ является симплексом для любого носителя e комплекса C' . Анализируя доказательство этой леммы, он пришел к понятию спектрального кольца и к рассмотрению фильтрованных колец с убывающей $\mathbb{Z}$ -фильтрацией, которые он первоначально называл *sous-valué* (термин «фильтрованный» (*filtré*) ввел А. Картан [3]). С каждым дифференциальным фильтрованным кольцом A (ср. [26]) связана последовательность $(\mathcal{H}_r A)_r$ дифференциальных градуированных колец, где дифференциал кольца $\mathcal{H}_r A$ имеет степень r . Она определяется следующим образом. Обозначим через $A^{(p)}$ множество элементов из A , лежащих в компонентах фильтрации с индексами $\geq p$, и положим $C^p = C \cap A^{(p)}$ и $D^p = D \cap A^{(p)}$, где C — множество коциклов, а D — множество кограниц кольца A . Затем через C_r^p обозначим множество элементов $a \in A^{(p)}$, кограницы которых принадлежат компонентам фильтрации с индексами $\geq p+r$, и через D_r^p — множество кограниц δa для $a \in C_r^{p-r}$. Эти группы представляют собой аппроксимации порядка r для C^p и D^p соответственно. Ясно, что

C_r^p (соответственно D_r^p) убывает (соответственно возрастает) с ростом r и содержит C^p (соответственно содержится в D^p). В степени p кольцо $\mathcal{H}_r A$ определяется как факторкольцо $C_r^p / (C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p)$ и граница $\delta_r h_r^{[p]}$ класса $h_r^{[p]}$ элемента $c_r \in C_r^p$ в этом факторкольце есть по определению класс элемента δc_r^p по модулю $C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p$. Проверяется, что когомологии кольца $\mathcal{H}_r A$ канонически отождествляются с $\mathcal{H}_{r+1} A$; кроме того, при $r \geq s$ каждое $\mathcal{H}_s A$ отождествляется с некоторым подфактором кольца $\mathcal{H}_r A$. Таким же образом определяется градуированное кольцо $\mathcal{H}_\infty A$, p -компонентой которого является $C^p / (C^{p+1} + D^p)$ и которое изоморфно градуированному кольцу, ассоциированному с кольцом когомологий $\mathcal{H} A$ (с фильтрацией, индуцированной с кольца A). При помощи спектрального кольца $(\mathcal{H}_r A)$ это градуированное кольцо отождествляется с некоторым подкольцом «индуктивного предела» колец $\mathcal{H}_r A$ и с самим этим пределом, когда фильтрация кольца A ограничена сверху; если, кроме того, дифференциал кольца $\mathcal{H}_r A$ равен нулю для $r > l$, то последовательность $\mathcal{H}_r A$ стабилизируется для этих значений r и рассматриваемое градуированное кольцо отождествляется с $\mathcal{H}_r A$. Ясно также, что $\mathcal{H} A$ изоморфно кольцу $\mathcal{H}_r A$ для $r > l$, если фильтрация кольца A ограничена сверху, и что $\mathcal{H}_{l+1} A$ сосредоточено в степени 0. Спектральное кольцо зависит от A функториально. Если гомоморфизм $\lambda: A' \rightarrow A$ фильтрованных колец, фильтрация которых ограничена сверху, индуцирует изоморфизм колец $\mathcal{H}_{l+1} A' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{l+1} A$, то он индуцирует согласованный с фильтрацией изоморфизм колец $\mathcal{H} A' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} A$.

Наряду с дифференциальным фильтрованным кольцом, Лере рассматривает фильтрованное тензорное произведение $K^l \otimes A$, где K — другое дифференциальное градуированное кольцо (с дифференциалом степени 1), а элементы p -компоненты фильтрации кольца K являются элементами lp -компоненты фильтрации на K^l (l — заданное целое число). Когда K не имеет кручения, $\mathcal{H}_{l+1}(K^l \otimes A)$ (канонически) изоморфно когомологиям кольца $K^l \otimes \mathcal{H}_l A$; это становится очевидным, если заметить, что замена дифференциала кольца A нулевым не меняет $\mathcal{H}(K^l \otimes A)$; это позволяет, используя результаты Картана, установить при подходящих предположениях формулу Кюннета.

Если B — собственный фильтрованный дифференциальный пучок на пространстве X , $\mathcal{X}$ — тонкое покрытие пространства X и l — целое число, то спектральное кольцо $(\mathcal{H}_r(\mathcal{X}^l \circ B))$ и когомологии $\mathcal{H}(\mathcal{X}^l \circ B)$ не зависят от выбора $\mathcal{X}$ и Лере их обозначает через $(\mathcal{H}_r(X^l \circ B))$ и $\mathcal{H}(X^l \circ B)$ соответственно; в частности, $\mathcal{H}_{l+1}(X^l \circ B)$ изоморфно когомологиям комплекса $X^l \circ \mathcal{F}_l B$, где $(\mathcal{F}_r B)$ — спектральный пучок, ассоциированный с B . При $l = 1$ отсюда вытекает, что для собственного градуированного дифференциального пучка с ограниченными снизу степенями градуировки и дифференциалом степени

> 0 , таким, что $B(x)$ для любой точки $x \in X$ сосредоточен в степени 0, имеется изоморфизм $\mathcal{H}(X \circ B) = \mathcal{H}(X \circ \mathcal{F}B)$, где $\mathcal{F}B$ — пучок когомологий пучка B . Если (F_μ) — конечное замкнутое покрытие и если K^* — ассоциированный с ним (свободный) комплекс Чеха, то из предположения, что $\mathcal{H}(F \circ B) = \mathcal{H}B(F)$ для всех F , являющихся непустыми пересечениями множеств F_μ , следует равенство $\mathcal{H}(K^* \otimes B) = \mathcal{H}(X \circ B)$.

Непрерывному отображению $\xi: X \rightarrow Y$ локально компактных пространств, произвольному собственному фильтрованному дифференциальному пучку B на X и любой паре целых чисел (l, m) , $l < m$, Лере поставил в соответствие спектральное кольцо $\mathcal{H}_r(\xi^{-1}Y^m \circ X^l \circ B)$, определенное с помощью тонких перекрытий $\mathcal{X}$ на X и $\mathcal{Y}$ на Y ; перекрытие $\xi^{-1}\mathcal{Y}$ является фактором перекрытия $\mathcal{Y}$ по идеалу элементов y , таких, что $\xi^{-1}(S(y))$ пусто, а $\xi^{-1}Y^m \circ X^l$ есть тонкое перекрытие пространства X . Кроме того, кольцо $\mathcal{H}(\xi^{-1}Y^m \circ X^l \circ B)$ — это $\mathcal{H}(X \circ B)$, наделенное некоторой фильтрацией, не зависящей от выбора перекрытий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$, и соответствующее градуированное кольцо является подкольцом индуктивного предела колец $\mathcal{H}_r(\xi^{-1}Y^m \circ X^l \circ B)$ и совпадает с этим пределом при подходящих условиях конечности; далее, $\mathcal{H}_{m+1}(\xi^{-1}Y^m \circ X^l \circ B) = \mathcal{H}(Y^m \circ \xi\mathcal{F}_m(X^l \circ B))$, где $\xi\mathcal{F}_r(X^l \circ B)$ — образ при ξ спектрального пучка, ассоциированного с $\mathcal{H} \circ B$ (образ $\xi\mathcal{F}$ пучка $\mathcal{F}$ на X при ξ определяется формулой $\xi\mathcal{F}(F) = \mathcal{F}(\xi^{-1}F)$ для любого замкнутого подмножества F из Y).

Конец статьи [30] посвящен частному случаю постоянного пучка («пучка, совпадающего с некоторым кольцом») и локальной системы коэффициентов в смысле Стиррода [41] («пучка, локально изоморфного кольцу»). В статье [31], результаты которой были объявлены в заметке [29] 1946 г. и которая излагалась в Коллеж де Франс в 1950 г., общая теория применяется к случаю, когда ξ есть расслоение со слоем F и рассматриваются когомологии пространства с коэффициентами в (постоянном) кольце A . Пучок-образ $B = \xi\mathcal{F}(X \circ A)$ на Y локально изоморфен $\mathcal{H}(F \circ A)$. Часть результатов, которые содержатся в этой статье, была независимо получена Хиршем [22]. Для случая когда F имеет те же гомотопии, что и сфера, еще раз получены, в частности, результаты Гизина [20], дополненные результатами Чжэня и Спеньера [10]; для случая когда Y имеет те же гомотопии, что и сфера, заново установлены результаты Вана [44].

3. Семинар Картана и доказательство Вейля теорем де Рама

Идеи Лере вдохновили А. Вейля и А. Картана предпринять обновление алгебраической топологии. Первый из них беседовал с Лере в 1945 г. и вынес из этой беседы идею доказательства теорем де Рама, ныне ставшего классическим. Первый вариант этого доказательства

он изложил А. Картану в письме в 1947 г. [45], а окончательная редакция была опубликована в *Commentarii Mathematici Helvetici* 1952 г. [46]. Вейль ввел два двойственных друг другу двойных комплекса, ассоциированных с «простым покрытием» $\mathcal{U} = (U_i)$ дифференцируемого паракомпактного многообразия V , причем $\mathcal{U}$ должно быть локально конечным, а каждое непустое пересечение U_J множеств U_i (J принадлежит нерву покрытия $\mathcal{U}$) должно быть дифференцируемо стягиваемым. (m, p) -компонента первого двойного комплекса состоит из «коэлементов» $\Omega = (\omega_H)$, где для всякого $H = (i_0, \dots, i_p)$, такого, что $U_{|H|} = \bigcap_\nu U_{i_\nu} \neq \emptyset$, ω_H является дифференциальной формой степени m на $U_{|H|}$; дифференциалы d и δ степени 1 определены внешним дифференциалом и знакопередающей суммой ограничений, и имеется два соответствующих оператора гомотопии, определенных соответственно с помощью стягиваний множеств $U_{|H|}$ в точку и с помощью разбиения единицы, подчиненного покрытию $\mathcal{U}$. Эти операторы позволяют установить изоморфизм между m -й группой де Рама (замкнутые m -формы по модулю точных форм) и m -й группой когомологий нерва покрытия $\mathcal{U}$. У второго комплекса (m, p) -компонента образована «элементами» $T = (t_H)$, где для всякого H , описанного выше, t_H является конечной сингулярной цепью размерности m с носителем в $U_{|H|}$; два дифференциала (степени -1) соответствуют дифференциалу сингулярных гомологий и дифференциалу гомологий нерва покрытия $\mathcal{U}$, и имеются также два оператора гомотопии, которые задают изоморфизм между сингулярными гомологиями многообразия V и гомологиями нерва. Спаривание этих двух комплексов задается интегрированием дифференциальных форм по сингулярным цепям $((T, \Omega)$ определено, только если T или Ω конечен).

Семинар Картана в *Ecole Normale Supérieure* с 1948 по 1951 г. был посвящен алгебраической топологии. Кроме того, Картан изложил некоторые результаты на Коллоквиуме по алгебраической топологии Национального центра научных исследований в 1948 г. Записки семинара 1948-49 гг. содержат первоначальный вариант теории пучков (доклады 12-17), который был изъят из обращения и заменен новым изложением в записках семинара за 1950-51 гг. Принятое тогда определение пучка было дано Лазаром: пучок K -модулей F (K — коммутативное кольцо) на (регулярном) топологическом пространстве $\mathcal{X}$ — это накрывающее пространство (термин Годемана)¹⁾ $p: F \rightarrow \mathcal{X}$, каждый слой $p^{-1}(x) = F_x$ которого имеет структуру K -модуля, причем сложение и умножение на элементы (дискретного) кольца K непрерывны в топологии пространства F . Каждому открытому подмноже-

¹⁾ В оригинале, как и работах Годемана, — *espace étalé*, однако в отечественной литературе и, в частности, в переводе книги Годемана [13] принят термин «накрывающее пространство», хотя иногда он трактуется уже. — *Прим. перев.*

ству X пространства $\mathcal{X}$ ставится в соответствие модуль $\Gamma(F, X)$ сечений $s: X \rightarrow F$ пучка F над X (характеризующийся тем свойством, что $p \circ s = \text{id}_X$), и каждый слой F_x является индуктивным пределом модулей $\Gamma(F, X)$, где X — окрестность точки x . Можно определить пучок F следующим образом: любому открытому подмножеству X ставится в соответствие некоторый модуль F_X , а каждому вложению $X \subset Y$ открытых множеств — некоторый гомоморфизм ограничения $f_{XY}: F_Y \rightarrow F_X$ так, чтобы для этих гомоморфизмов выполнялось свойство транзитивности; в качестве слоя берется индуктивный предел модулей F_X по окрестностям X точки x , и дизъюнктивное объединение слоев наделяется надлежащей топологией. Отметим, что канонические морфизмы $F_X \rightarrow \Gamma(F, X)$ в общем случае не являются ни инъективными, ни сюръективными, хотя оказываются таковыми для различных пучков функций, которые естественно определяются таким способом. Например, пучок C^n коцепей Александра–Спеньера степени n определяется таким образом, если задать C_X^n как множество отображений пространства X^{n+1} в K и $C_X^n \rightarrow \Gamma(C^n, X)$ для $n \geq 1$ не будет инъективным, но оказывается сюръективным, если X паракомпактно. Так же обстоит дело для пучка S^n сингулярных коцепей.

Более важное новшество Картана — это введение семейства носителей; так называется семейство Φ замкнутых паракомпактных подпространств в $\mathcal{X}$, которое является наследственным, устойчивым относительно конечных объединений и обладает тем свойством, что каждый его элемент имеет окрестность, принадлежащую Φ . Лере рассматривал лишь случай семейства компактов, когда само $\mathcal{X}$ локально компактно. Отметим модуль $\Gamma(F)$ глобальных сечений пучка F и его подмодуль Γ_Φ сечений s , носители которых принадлежат Φ (носитель сечения s — это множество точек x , таких, что $s(x) \neq 0$; он всегда замкнут). Если $f: F \rightarrow G$ — сюръективный гомоморфизм пучков, то соответствующий гомоморфизм $\Gamma_\Phi(F) \rightarrow \Gamma_\Phi(G)$ в общем случае не является сюръективным, но он сюръективен, если ядро F' гомоморфизма f — тонкий пучок, т. е. для любого открытого локально конечного покрытия (U^i) пространства $\mathcal{X}$ тождественный автоморфизм пучка F' есть сумма эндоморфизмов, каждый из которых является нулем вне некоторого замкнутого множества, лежащего в открытом множестве с тем же номером из указанного покрытия. Пучок коцепей Александра–Спеньера и пучок сингулярных коцепей являются тонкими пучками. Тонким будет и пучок внешних дифференциальных форм на дифференцируемом многообразии. Картан определил когомологии пространства $\mathcal{X}$ с коэффициентами в некотором пучке и с носителями из некоторого семейства Φ аксиоматически при условии, что основное кольцо K является кольцом главных идеалов. Это последовательность функторов $F \mapsto H_\Phi^q(\mathcal{X}, F)$, значениями которых

служат K -модули, равные нулю при $q < 0$ и совпадающие с $\Gamma_\Phi(\Gamma)$ при $q = 0$; кроме того, каждой точной последовательности

$$(1) \quad 0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$$

пучков ставится в соответствие гомоморфизм $S_q : H_\Phi^q(\mathcal{X}, F'') \rightarrow H_\Phi^{q+1}(\mathcal{X}, F')$, функториально зависящий от последовательности. Эти данные должны подчиняться следующим аксиомам: $H_\Phi^q(\mathcal{X}, F) = 0$, если F — тонкий пучок и $q > 0$; последовательность

$$\dots \rightarrow H_\Phi^q(\mathcal{X}, F') \rightarrow H_\Phi^q(\mathcal{X}, F) \rightarrow H_\Phi^q(\mathcal{X}, F'') \xrightarrow{\delta_q} H_\Phi^{q+1}(\mathcal{X}, F') \rightarrow \dots,$$

ассоциированная с последовательностью (1), точна. Прежде чем доказать единственность такой теории, Картан установил ее существование, показав, что если

$$0 \rightarrow K \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow \dots$$

— точная последовательность, где все C_n являются тонкими пучками без кручения (тонкая резольвента постоянного пучка K), то, положив $H_\Phi^q(\mathcal{X}, F) = H^q(\Gamma_\Phi(C \circ F))$ для любого пучка F (где *фундаментальный пучок* C — это комплекс $C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots$, а $\circ$ означает тензорное произведение пучков на $\mathcal{X}$, мы получаем некоторую теорию когомологий. Коцепи Александера–Спеньера дают тонкую резольвенту для K ; когда этим же свойством обладают сингулярные коцепи, то говорят, что исходное пространство является HLC -пространством (гомологически локально связным пространством).

Более общим образом, можно вычислить когомологии с коэффициентами в пучке F и носителями в Φ с помощью Φ -резольвенты $0 \rightarrow \Gamma \rightarrow A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots$ пучка F , т. е. точной последовательности пучков, такой, что $H_\Phi^q(\mathcal{X}, A_n) = 0$ при $q \geq 1$ и $n \geq 0$. В этом случае $H_\Phi^q(\mathcal{X}, F) \simeq H^q(\Gamma_\Phi(A))$. Мы получаем Φ -резольвенту пучка F , тензорно умножая на F резольвенту $0 \rightarrow K \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots$, где C_n суть Φ -инъективные пучки без кручения, т. е. такие, что для любого эпиморфизма $F' \rightarrow F''$ гомоморфизм $\Gamma_\Phi(C \circ F') \rightarrow \Gamma_\Phi(C \circ F'')$ сюръективен; в этом случае говорят, что комплекс C есть Φ -фундаментальный пучок.

Перекрытия Лере соответствуют в изложении Картана карапасы (сагарасе). Карапас на $\mathcal{X}$ — это K -модуль A , обладающий для каждой точки $x \in \mathcal{X}$ фактормодулем $\varphi_x : A \rightarrow A_x$, причем требуется, чтобы носитель $\sigma(\alpha)$ элемента α из A был замкнут и непуст, если $\alpha \neq 0$ (носитель $\sigma(\alpha)$ — это множество точек x , таких, что $\varphi_x(\alpha) \neq 0$). Можно также определить карапас, задавая носители, в духе Лере; в этом случае A_x есть фактормодуль модуля A по подмодулю таких

α , что $x \notin \sigma(\alpha)$. Дизъюнктивное объединение $F = \mathcal{F}(A)$ модулей A_x ($x \in X$) становится пучком, если наделить его топологией, в которой базу открытые множества составляют множества $\{\varphi_x(\alpha) | x \in X\}$, где $\alpha \in A$, а X — открытое подмножество в X . Естественный морфизм модуля A в $\Gamma(\mathcal{F}(A))$ инъективен, но, вообще говоря, не сюръективен.

Чтобы непосредственно получить гомологическую спектральную последовательность расслоенных пространств способом, близким к исходному способу Лере [30], С. Эйленберг (доклад 8) использует аксиоматическую теорию гомологий упорядоченных множеств. Он рассматривает (частично) упорядоченное множество, состоящее из элементов $A, B, \dots$, с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1 и каждой паре (A, B) с $A < B$ ставит в соответствие абелеву группу $H(A, B)$, функториально зависящую от (A, B) (морфизмы задаются порядком), а каждой тройке (A, B, C) — гомоморфизм $d: H(A, B) \rightarrow H(B, C)$, функториально зависящий от (A, B, C) , причем так, чтобы периодическая последовательность

$$\dots \rightarrow H(B, C) \rightarrow H(A, C) \rightarrow H(A, B) \rightarrow H(B, C) \rightarrow \dots$$

была точной. Будем писать $H(A)$ вместо $H(A, 0)$. Точная последовательность, ассоциированная с тройкой $(A, A, 0)$, дает равенство $H(A, A) = 0$. Для строго возрастающей последовательности $(A_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ элементов рассматриваемого множества, ограниченной элементом A , группы B_p и C_p определяются как образы группы $H(A_p)$ в $H(A)$ и $H(A_p, A_{p-1})$ соответственно, а D_p — как ядро гомоморфизма $H(A_p, A_{p-1}) \rightarrow H(A, A_{p-1})$ для каждого p ; кроме того, для $k \geq 1$ через C_p^k обозначается образ группы $H(A_p, A_{p-k})$ в $H(A_p, A_{p-1})$, а через D_p^k — ядро гомоморфизма $H(A_p, A_{p-1}) \rightarrow H(A_{p+k-1}, A_{p-1})$. Тогда $D_p^1 = 0$ и $C_p^1 = H(A_p, A_{p-1})$; группы C_p^k (соответственно D_p^k) убывают (соответственно возрастают) с ростом k и содержат $C_p^\infty = C_p$ (соответственно содержатся в $D_p^\infty = D_p$). Наконец, пусть $E_p = C_p/D_p$ и $E_p^k = C_p^k/D_p^k$ (а также $E_p^1 = H(A_p, A_{p-1})$); можно показать, что $E_p \simeq B_p/B_{p-1}$. С помощью морфизмов d троек $(A_p, A_{p-1}, A_{p-k-1})$ и $(A_p, A_{p-k}, A_{p-k-1})$ строится дифференциал $d_p^k: E_p^k \rightarrow E_{p-k}^k$, превращающий $(E_p^k)_p$ в комплекс, и доказывается, что гомологии этого комплекса совпадают с E^{k+1} . Существует также контравариантная теория, в которой все стрелки обращаются (когомологии). Если взять в качестве упорядоченного множества множество дифференциальных подмодулей фиксированного дифференциального Λ -модуля A (Λ — основное кольцо), то получается кошулева спектральная последовательность в алгебраическом смысле; если $A' \supset B'$ — два таких подмодуля, то им сопоставляется $H(A', B') = H(A'/B')$, а гомоморфизм d для тройки $A' \supset B' \supset C'$ определяется точной по-

следовательностью $0 \rightarrow B'/C' \rightarrow A'/C' \rightarrow A'/B' \rightarrow 0$. Гомологическая спектральная последовательность расслоенного пространства $\tau: X \rightarrow B$ со слоем F , база B которого является конечным симплициальным комплексом, получается с помощью фильтрации пространства X , образованной подпространствами $X_p = \tau^{-1}(B^p)$, где B^p есть p -остов пространства B ; упорядоченное множество — это множество подпространств пространства X , и если $X' \subset Y'$ — два таких подпространства, то $H(X', Y') = H(X', Y'; G)$ (относительные гомологии с коэффициентами в группе G). Тогда мы имеем спектральную последовательность, для которой $E_{p+q,p}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}; G)$ (с граничным оператором тройки (X_p, X_{p-1}, X_{p-2})) и $E_{p+q,p}^2 H_p(B; H_q(F; G))$ (гомологии базы с коэффициентами в локальной системе $H_q(F; Q)$). В качестве другого приложения спектральной последовательности Картан изучает (доклады 11–12) гомологии и когомологии пространств с группой операторов.

Картан ввел в теории пучков две спектральные последовательности гиперкогомологий, задаваемые некоторым комплексом пучков F на X . Пусть A — градуированный карапас с кограничным оператором d степени 1, носители которого принадлежат семейству Φ . Тогда для каждого p определяется (естественный) гомоморфизм $H^{p+1}(A) \rightarrow H_{\Phi}^p(X, H^k(\mathcal{F}(A)))$, если выполняются следующие условия: (а) X имеет конечную Φ -размерность (т. е. существует такое целое n , что $H_{\Phi}^q(X, F) = 0$ для $q > n$ и любого пучка F) или градуировка модуля A ограничена снизу; (б) $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$ для $q > k$. Этот гомоморфизм будет даже изоморфизмом, если предположить, что $H^q(\mathcal{F}(A)) = 0$ при $q \neq k$, что $A \simeq \Gamma_{\Phi}(\mathcal{F}(A))$ и что A гомотопически Φ -тонок. Отсюда получается двойственность Пуанкаре для дифференцируемого многообразия X , если для пучка S сингулярных цепей обозначать цепи размерности p через S^{-p} (чтобы дифференциал имел степень 1); этот пучок гомотопически тонок и $H^p(S) = 0$, если $p \neq -n$, где n — размерность многообразия X . Пучок $T = H^{-n}(S)$ локально изоморфен K и определяется локальной ориентацией многообразия X ; имеет место изоморфизм $H^{p-n}(\Gamma_{\Phi}(S \circ F)) \simeq H_{\Phi}^p(X, T \circ F)$, где первый член, обозначаемый также через $H_{n-p}^{\Phi}(X, F)$, — это сингулярные Φ -гомологии многообразия X .

Серр изложил спектральную последовательность непрерывного отображения $f: E \rightarrow B$ на языке теории Φ -когомологий (доклад 21); мы задаем семейства носителей Ψ и Φ на E и B соответственно и предполагаем, что они «согласованы» в соответствующем смысле. Если G — пучок на E , то вычислим его когомологии как когомологии карапаса $A^0 = \Gamma_{\Phi}(C \circ G)$, где C — фундаментальный пучок на E . Сопоставляя каждому элементу $x \in A^0$ носитель $\overline{f(\sigma(x))}$ (где $\sigma(x)$ — носитель элемента x в E), мы получаем карапас A на

В. Тогда существует спектральная последовательность, такая, что $E_{p+q,p}^2 = H_{\Phi}^p(B, H^q(\mathcal{F}(A)))$ и что E_{∞} — градуированная группа, ассоциированная с соответствующим образом фильтрованной группой $H_{\Psi}(E, G)$; слой пучка $H^q(\mathcal{F}(A))$ на B — это $H_{\Psi}^q(F_b, G)$ ($b \in B$).

К. Ока в статьях [34] и [35], опубликованных в 1950 и 1951 гг., ввел в теории аналитических функций многих переменных понятие, очень близкое к понятию пучка (теперь для него используется термин «пучок идеалов»). Безусловно, развивая теорию пучков, Картан помнил о работах Ока, и эта теория позволила ему переформулировать результаты Ока как теоремы о когомологиях пучков (известные теоремы А и В); семинар Картана 1951–52 гг. был посвящен этим вопросам в рамках теории когерентных аналитических пучков. В 1953 г. Картан и Серр [8] доказали конечность когомологий компактного аналитического пространства с коэффициентами в когерентном пучке¹); Серр в 1953 г. [39] установил двойственность для аналитических локально свободных пучков на компактных комплексных многообразиях. Используя в качестве модели теорию аналитических пространств, Серр [40] в 1954 г. строит основание алгебраической геометрии исходя из теории когомологий когерентных алгебраических пучков.

4. Период зрелости: 1955–1958 гг.

Это период систематической разработки гомологической алгебры и ее применения к когомологиям пучков. Книга «Гомологическая алгебра» [7] Картана и Эйленберга, опубликованная в 1956 г., с тех пор является классической; в ней используется язык функторов, введенный в 1942 г. Эйленбергом и Маклейном [12], и теория когомологий связывается в ней с понятиями сателлитов и производных функторов. Первые сателлиты S_1T и S^1T ковариантного аддитивного функтора T на категории модулей строятся следующим образом: пусть A — произвольный модуль; рассмотрим точные последовательности $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow A \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow A \rightarrow Q \rightarrow N \rightarrow 0$, где P — проективный, а Q — инъективный модули, и положим $S_1T(A) = \text{Ker}(T(M) \rightarrow T(P))$, $S^1T(A) = \text{Coker}(T(Q) \rightarrow T(N))$ (можно показать, что это определение не зависит, с точностью до единственного изоморфизма, от выбора точных последовательностей). Далее, положим $S_{n+1}T = S_1(S_nT)$ и $S^{n+1}T = S^1(S^nT)$, обозначим S_nT через $S^{-n}T$ и будем считать, что $S_0T = S^0T = T$. Для любой точной последовательности модулей $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ существуют связывающие гомоморфизмы $\theta_1: S_1T(A'') \rightarrow T(A')$ и $\theta^1: T(A'') \rightarrow S^1T(A')$;

¹) Эту теорему для относительного случая в 1960 г. установил Грауэрт; см.: Grauert H. Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen". — Publ. Math. IHES, №5, 1960, pp. 5-64

в бесконечной последовательности

$$\dots \rightarrow S^n T(A') \rightarrow S^n T(A) \rightarrow S^n T(A'') \xrightarrow{\theta} S^{n+1} T(A') \rightarrow \dots$$

композиция двух последовательных гомоморфизмов равна нулю, и вся последовательность является точной, если T полуточен. Для контравариантных аддитивных функторов имеется двойственная теория. Правые производные функторы ковариантного аддитивного функтора T определяются все одновременно (а не с помощью рекуррентной формулы, как сателлиты): $R^n T(A) = H^n(T(X))$, где $0 \rightarrow A \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$ — инъективная резольвента модуля A ; для контравариантного модуля берется проективная резольвента $\dots \rightarrow Y^1 \rightarrow Y^0 \rightarrow A \rightarrow 0$. Если, напротив, взять проективную резольвенту в случае ковариантного функтора T и инъективную в случае, когда T контравариантен, то получатся левые производные функторы $L_n T$. Когда T ковариантен (соответственно контравариантен), каждая точная последовательность модулей $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ определяет связывающие гомоморфизмы $R^n T(A'') \rightarrow R^{n+1} T(A')$ и $L_n T(A'') \rightarrow L_{n-1} T(A')$ (соответственно $R^n T(A') \rightarrow R^{n+1} T(A'')$ и $L_n T(A') \rightarrow L_{n-1} T(A'')$) и длинные последовательности производных функторов точны. Аналогичным образом, производные функторы многих аргументов определяются с помощью надлежащих резольвент для каждого аргумента. Существуют морфизмы функторов $\tau^0: T \rightarrow R^0 T$ и $\sigma_0: L_0 T \rightarrow T$; для того чтобы первый (соответственно второй) из них был изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы T был точен слева (соответственно справа). Если это условие выполняется, то для точности функтора T необходимо и достаточно, чтобы $R^1 T = 0$ (соответственно $L_1 T = 0$). Начиная с морфизмов σ_0 и τ^0 , можно определить морфизмы $\sigma_n: L_n T \rightarrow S_n T$ и $\tau^n: S^n T \rightarrow R^n T$. Первый является изоморфизмом, если T точен справа, а второй — если T точен слева. Теория производных функторов используется для определения функторов Tor (производные функторы тензорного произведения) и Ext (производные функторы функтора Hom); функторы Tor позволяют удобно выразить полученные Кюнеттом [27] соотношения между гомологиями произведения двух топологических пространств и гомологиями сомножителей, и именно для того, чтобы понять эти соотношения, Картан и Эйленберг занялись разработкой гомологической алгебры. Построенная таким образом теория позволяет также унифицировать различные теории когомологий: когомологии алгебр (Хохшильд [24]), конечных групп (Тейт), алгебр Ли (Шевалле, Эйленберг [11]). Теории спектральных последовательностей посвящена гл. 15 книги Картана и Эйленберга, а в следующей главе рассматриваются ее приложения. Речь по существу идет о спектральных последовательностях композиций функторов, член E_2^{pq} которых является

композицией производных функторов, тогда как «предел» является градуированным функтором, ассоциированным с производным функтором композиции функторов (для подходящей фильтрации). Последняя глава книги посвящена гипергомологиям: показано, что если T — аддитивный функтор на категории модулей и A — комплекс модулей, то когомологии двойного комплекса $T(X)$, где X — «резольвента Картана–Эйленберга» комплекса A (это двойной комплекс), не зависят от выбора X . Эти когомологии обладают такой фильтрацией, что ассоциированный градуированный модуль будет «пределом» двух спектральных последовательностей, членами $E_2^{p,q}$ которых являются соответственно $H^p(R^q T(A))$ и $(R^q T)(H^p(A))$.

В [2] Д. Буксбаум предложил более широкую абстрактную область для построения гомологической алгебры — точные категории, которые ввел для своих целей Гротендик, назвавший их абелевыми категориями. Аксиомы точных категорий приведены в добавлении к книге Картана и Эйленберга. Работа Гротендика [14] имела целью ввести в единые рамки теорию когомологий топологических пространств с коэффициентами в пучке и теорию производных функторов для функторов, определенных на модулях, аналогия между которыми очевидна. И он указал такие рамки весной 1955 г. в Канзасском университете. Гротендик определил абелевы категории как аддитивные категории, в которых каждый морфизм имеет ядро и коядро и естественный морфизм его кообраза на образ является изоморфизмом. Пусть C — абелева категория, в которой существуют бесконечные прямые суммы; тогда каждый ее объект вкладывается в инъективный, если потребовать существования «образующей» (объекта U , такого, что мономорфизм $i: B \rightarrow A$ является изоморфизмом, если $\text{Hom}(U, i)$ биективен, или, что то же самое, любой объект является факторобъектом объекта $U^{(I)}$) и выполнения условия (AB5): если (A_i) — возрастающее направленное семейство подобъектов объекта A , то для любого $B \subset A$ имеет место равенство $(\sum A_i) \cap B = \sum (A_i \cap B)$; в этом случае говорят, что C содержит достаточно много инъективных объектов.

Гротендик назвал δ -функтором на C последовательность (T^i) аддитивных, например ковариантных, функторов, такую, что для каждой точной последовательности $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ в C задана последовательность связывающих гомоморфизмов $\delta: T^i(A'') \rightarrow T^{i+1}(A')$, функториально зависящих от точной последовательности и таких, что композиция любых двух последовательных морфизмов в длинной последовательности

$$\dots \rightarrow T^i(A') \rightarrow T^i(A) \rightarrow T^i(A'') \rightarrow T^{i+1}(A') \rightarrow \dots$$

равна нулю. Он определил последовательность правых сателлитов $S^i F$ ковариантного функтора F как универсальный δ -функтор

в том смысле, что для любого δ -функтора (T^i) каждый морфизм $f^0: F \rightarrow T^0$ продолжается до единственного морфизма δ -функторов $(S^i F) \rightarrow (T^i)$; это определение соответствует аксиоматическому описанию сателлитов, данному Картаном и Эйленбергом. Левые сателлиты определяются аналогично с помощью δ^* -функторов. Если каждый объект вкладывается в инъективный, то для любого ковариантного аддитивного функтора F существуют правые сателлиты $S^i F$ ($i \geq 0$), а если F , например, точен слева или справа, то сателлиты образуют точный δ -функтор. Производные функторы определяются, как в книге Картана и Эйленберга, с помощью инъективных и проективных резольвент, существование которых необходимо предположить. Гротендик распространяет на абелевы категории теорию спектральных последовательностей и гиперкогомологий. В частности, он рассматривает для этого случая спектральную последовательность для композиции ковариантных аддитивных функторов $F: C \rightarrow C'$ и $G: C' \rightarrow C$; предположим, что C и C' содержат достаточно много инъективных объектов, что G точен слева и что $R^q G(F(I)) = 0$ для всех q , если I — инъективный объект категории C ; тогда мы получаем спектральный функтор, сходящийся к функтору $R(GF)$ (снабженному надлежащей фильтрацией) и такой, что $E_2^{p,q}(A) = R^p G(R^q F(A))$ для любого объекта A из C .

Предпучком множеств на топологическом пространстве Гротендик называет индуктивную систему множеств $(F(U))$, определенную на множестве открытых подмножеств U из X (упорядоченном отношением включения). Пучки по Гротендику — это те предпучки, для которых выполняется следующее условие: если (U_i) — покрытие открытого множества U непустыми открытыми множествами, а (f_i) — семейство элементов $f_i \in F(U_i)$, такое, что ограничения элементов f_i и f_j на $U_i \cap U_j$ совпадают в $F(U_i \cap U_j)$ для любой пары индексов (i, j) , то существует единственный элемент $f \in F(U)$, ограничение которого на U_i совпадает с f_i для любого индекса i . Это условие выражает тот факт, что естественные отображения $F(U) \rightarrow \Gamma(\tilde{F}, U)$, где через $\tilde{F}$ обозначен пучок в смысле Картана (накрывающее пространство), ассоциированный с предпучком F , биективно. Определяются также пучки со значениями в некоторой категории, например пучки групп, пучки колец и т. д. Если O — пучок колец на X , то категория O -модулей (т. е. пучков левых модулей) является абелевой и в ней существуют бесконечные прямые суммы; она имеет образующую (прямую сумму пучков O_U , совпадающих с O на U и равных нулю на $X - U$, где U — переменное открытое множество в X), а значит, имеет достаточно много инъективных объектов.

Гротендик, развивая теорию когомологий с коэффициентами в пучке, не налагает никаких ограничений на пространство, что позволяет применять эту теорию к нехаусдорфовым пространствам, ко-

которые рассматриваются в алгебраической геометрии (топология Зариского; Серр [40] использовал для когерентных пучков когомологии Чеха покрытий открытыми аффинными множествами, установив, что последние когомологически тривиальны в случае когерентных коэффициентов). Семейства носителей, которые рассматривал Гротендик, являются более общими, чем у Картана: это непустые наследственные семейства замкнутых подмножеств, являющиеся возрастающими направленными. Функтор $F \rightarrow \Gamma_{\Phi}(F)$ (глобальные сечения с носителями в Φ абелева пучка F , т. е. пучка абелевых групп) точен слева, и гомологии $H_{\Phi}^q(X, F)$ определяются как последовательность правых производных функторов этого функтора; их можно вычислить с помощью инъективной резольвенты пучка F . Спектральная последовательность непрерывного отображения $f: Y \rightarrow X$ появилась как частный случай спектральной последовательности для композиции функторов; если Φ и Ψ — семейства носителей на X и Y соответственно, причем Φ — паракомпактифицирующее (т. е. удовлетворяющее условиям Картана) семейство или Ψ образовано всеми замкнутыми подмножествами в Y , то существует спектральный функтор с начальным членом $E_2^{pq}(F) = H^p(X, R^q f_{\Psi}(F))$, сходящийся к $H_{\Phi}^p(Y, F)$ (F — абелев пучок на Y), где f_{Ψ} — функтор прямого образа «с носителями в Ψ », $R^q f_{\Psi}$ — его q -й правый производный функтор, а Ψ' — подходящая модификация семейства Ψ (если Ψ включает в себя все замкнутые подмножества пространства Y , то это — множество замкнутых подмножеств A из Y , таких, что $\overline{f(A)} \in \Phi$). Пучок $R^q f_{\Psi}(F)$ (высший прямой образ) — это пучок, ассоциированный с предпучком $U \rightarrow H_{\Psi(U)}^q(f^{-1}(U), F)$ ($\Psi(U)$ — локализация семейства Ψ над открытым подмножеством U из X). Аналогичным образом, спектральная последовательность, связывающая когомологии Чеха открытого покрытия $\mathcal{U}$ с настоящими когомологиями, тоже получается как приложение спектральной последовательности композиции функторов; ее член E_2^{pq} — это $H^p(\mathcal{U}, H^q(F))$, где $H^q(F)$ — пучок, ассоциированный с предпучком $V \mapsto H^q(V, F)$ (это q -й правый производный функтор функтора вложения категории пучков в категорию предпучков).

Конец работы [14] содержит совершенно новый материал, посвященный функторам Ext для пучков модулей, включая спектральную последовательность, связывающую «локальные» функторы Ext с «глобальными» функторами Ext, и когомологиям с коэффициентами в пучках для пространств с группами операторов, где действие групп эквивариантно. Теория функторов Ext для пучков позволила Гротендику сформулировать и доказать теорему двойственности Серра на проективных алгебраических многообразиях в случае, когда у них могут быть особенности (см. [15] и [16]).

Первая книга, в которой систематически излагается теория пучков, была опубликована Р. Годеманом в 1958 г. [13]. Принятая в ней

точка зрения близка к позиции Гротендика. Главное новшество — это введение некоторых исключительно полезных классов ациклических пучков — вялых и мягких пучков, которые легче использовать, чем инъективные и тонкие, при построении резольвент. Говорят, что $\mathcal{F}$ — *вялый* пучок, если любое сечение этого пучка над открытым множеством продолжается на все пространство; инъективный пучок является вялым. Когда ядро эпиморфизма $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}''$ абелевых пучков — вялый пучок, гомоморфизм $\mathcal{L}(U) \rightarrow \mathcal{L}''(U)$ сюръективен для любого открытого множества U . Любой пучок $\mathcal{F}$ канонически вкладывается в вялый пучок $\mathcal{C}^0(\mathcal{F}): U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}(x)$, что дает каноническую вялую резольвенту $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathcal{C}^1 \rightarrow \dots$, которая позволяет вычислять когомологии с коэффициентами в $\mathcal{F}$, поскольку вялые пучки являются Φ -ациклическими для любого семейства носителей Φ . Говорят, что пучок $\mathcal{F}$ на пространстве X является *мягким*, если любое его сечение над замкнутым подмножеством пространства X продолжается на все X ; его называют Φ -мягким (Φ — паракомпактифицирующее семейство), если для любого $S \in \Phi$ ограничение $\mathcal{F}|_S$ — мягкий пучок. Если X паракомпактно, то любой вялый пучок мягок. Если ядро эпиморфизма $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}''$ есть Φ -мягкий пучок, то гомоморфизм $\Gamma_{\Phi}(\mathcal{L}) \rightarrow \Gamma_{\Phi}(\mathcal{L}'')$ сюръективен; отсюда следует, что Φ -мягкий пучок Φ -ациклический и что Φ -когомологии можно вычислять с помощью Φ -мягких резольвент. Если пучок колец $\mathcal{A}$ является Φ -мягким, то Φ -мягким будет и любой $\mathcal{A}$ -модуль. Абелевы Φ -тонкие пучки характеризуются тем, что их пучки локальных эндоморфизмов (над $\mathbb{Z}$) являются Φ -мягкими.

5. Производные категории и операции над пучками

В 1957–1965 гг. Гротендик для нужд алгебраической геометрии значительно продвинул развитие гомологической алгебры и теории пучков, введя понятие производной категории и формализм операций над пучками в рамках производных категорий. Кроме того, чтобы определить хорошие когомологии схем с постоянными коэффициентами, он пришел к расширению понятия топологического пространства, заменив его понятиями ситуса и топоса. Семинар по алгебраической геометрии в Институте высших научных исследований, душой которого с 1960 по 1968 г. был Гротендик, проходил под знаком этого обновления теории. В 1961–62 г. он был посвящен теории локальной двойственности для когерентных алгебраических пучков; были введены когомологии с носителями в локально замкнутом подпространстве, понятие дуализирующего модуля, а также изучались функторы Ext для квазикогерентных пучков на схемах. Чтобы получить теоремы двойственности в удовлетворительной форме, нужно

было располагать языком производных категорий, который сформулировал Вердье в своей диссертации 1963 г., следуя идеям Гротендика (см. [42]). На этом языке работа ведется не с когомологическими инвариантами, но прямо с комплексами, причем множество морфизмов расширяется так, чтобы морфизм комплексов, который индуцирует изоморфизм в когомологиях, стал изоморфизмом; тем самым можно избежать опасной операции перехода к подфакторам. Полные производные функторы в смысле производных категорий устроены при подходящих предположениях так же, как те функторы, производными к которым они являются, и спектральные последовательности появляются лишь тогда, когда нужно вычислять когомологии.

Р. Хартсхорн посвятил семинар в Гарварде 1963–64 гг. изучению теории двойственности для когерентных алгебраических пучков по «предварительным наброскам» Гротендика; он опубликовал записки этого семинара в 1966 г. [21]. Теоремы двойственности формулируются в относительной ситуации, когда $f: X \rightarrow Y$ — морфизм неётеровых (пред)схем. Наряду с обычным обратным образом f^* пучков $\mathcal{O}_Y$ -модулей и его левым полным производным функтором Lf^* (в смысле производных категорий) в подходящих предположениях определяется функтор обратного образа $f^!$ (в производных категориях), обладающий морфизмом следа $\mathrm{Tr}_f: Rf_* f^! \rightarrow \mathrm{id}$, так чтобы имел место изоморфизм двойственности $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F, f^! G) \simeq R\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_* F, G)$, где F принадлежит производной категории $\mathcal{O}_X$ -модулей, а G — производной категории $\mathcal{O}_Y$ -модулей. Если f является гладким и имеет относительную размерность n , то $f^!(G) = f^*(G) \otimes \omega[n]$, где $\omega = \Omega_{X/Y}^n$ — пучок относительных дифференциальных форм степени n ; когда f конечен, $f^!(G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f_* \mathcal{O}_X, G)$. Общая конструкция чрезвычайно сложна. Аналогичная конструкция для этальных когомологий была найдена Гротендиком на его семинаре 1964–65 гг., где он изложил теорию двойственности для l -адических когомологий. Это алгебраический и относительный аналог двойственности Пуанкаре. Соответствующую теорию в обычной топологии развил Вердье [43] в 1965 г., получив также относительное обобщение двойственности Пуанкаре в случае непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ хаусдорфовых топологических пространств, когда Y локально паракомпактно и f «локально евклидово» в следующем смысле: локально на Y оно является замкнутой иммерсией, сопровождаемой проекцией $V \times \mathbb{R}^n \rightarrow V$ (V открыто в Y); при дополнительном предположении, что когомологическая размерность отображения f и топологическая размерность пространства X конечны, имеет место изоморфизм двойственности $R\mathrm{Hom}(f_!(F'), G') \simeq R\mathrm{Hom}(F', f^!(G'))$, где $f_!$ — функтор прямого образа с собственными носителями, и правый сопряженный функтор $f^!$ получается из резольвенты функтора $pf^!: G' \rightarrow \{\text{пучок,}$

ассоциированный с предпучком $(U \mapsto \text{Hom}(f_*(\mathcal{I}_U), G'))$ }, где $\mathcal{I}$ — инъективная резольвента постоянного пучка $\mathbb{Z}$ на X .

М. Сато и М. Касивара ([38] и [25]) приспособили методы Гротендика к изучению систем уравнений в частных производных и к микролокальному анализу. Это дало важный толчок дальнейшему развитию, и на новом витке берущая начало в этих работах техника $\mathcal{D}$ -модулей оказалась плодотворной в алгебраической геометрии.

Библиография

1. Alexander J. W. On the connectivity ring of an abstract space. *Ann. Math.* 37, 698–708 (1936).
2. Buchsbaum D. A. Exact categories and Duality. *Trans. A. M. S.* 80, 1–34 (1955). [Имеется перевод в книге [7], добавление.]
3. Cartan H. Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe. *C.R. Acad. Sc. Paris* 226, 148–150, 303–305 (1948).
4. Cartan H. Séminaire «Topologie algébrique», 1^{re} ann'ée (1948–49).
5. Cartan H. Sur la notion de carapace en topologie algébrique. *Colloque de topologie algébrique. CNRS* 1–2 (1947).
6. Cartan H. Séminaire «Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux». 3^e année (1950–51).
7. Cartan H., Eilenberg S. *Homological Algebra*. Princeton Univ. Press (1956). [Имеется перевод: Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.]
8. Cartan H., Serre J.-P. Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. *C. R. Acad. Sc. Paris* 237, 128–130 (1953).
9. Čech E. Multiplications on a complex. *Ann. Math.* 37, 681–697 (1936).
10. Chern S. S., Spanier E. The homology structure of fibre bundles. *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* 36, 248–255 (1950).
11. Chevalley C., Eilenberg S. Cohomology theory of the Lie groups and Lie algebras. *Trans. A. M. S.* 63, 85–124 (1948).
12. Eilenberg S., MacLane S. Group extensions and homology. *Ann. Math.* 43, 758–831 (1942).
13. Godement R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Hermann, Paris (1958). [Имеется перевод: Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.]
14. Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôkoku Math. J.* 9, 119–221 (1957). [Имеется перевод: Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — М.: ИЛ, 1961.]
15. Grothendieck A. Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents. *Sém. Bourbaki* 149 (1957).

16. Grothendieck A. The cohomology of abstract algebraic varieties. Intern. Congress of Math. at Edinburgh 1958. Cambridge, 103–118 (1960).
17. Grothendieck A. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. Sémin. de Géométrie algébrique 1962 (SGA2), North-Holland, Amsterdam (1968).
18. Grothendieck A. Cohomologie l -adique et fonctions L. Sémin. de Géométrie algébrique 1964–65 (SGA5). Lect. Notes. Math. 589. Springer, Berlin Heidelberg New York (1977).
19. Grothendieck A. Récoltes et semailles. Prépublication de l'Université de Montpellier.
20. Gysin W. Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen der Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. 14, 61–122 (1941).
21. Hartshorne R. Residues and Duality. Lect. Notes Math. 20. Springer, Berlin Heidelberg New York (1966).
22. Hirsch G. Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés. Bull. Soc. Math. Belgique 23–33 (1947–48).
23. Hopf H. Quelques problèmes de la théorie des représentations continues. Ens. Math. 35, 334–347 (1936).
24. Hochschild G. On the cohomology groups of an associative algebra. Ann. Math. 46, 58–67 (1945).
25. Kashiwara M. Algebraic study of systems of partial differential equations. Thesis, Univ. of Tokyo (1970).
26. Koszul J.-L. Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. Bull. Soc. Math. France 78, 65–127 (1950).
27. Künneth H. Über die Torsionzahlen von Produktmannigfaltigkeiten. Math. Ann. 91, 65–85 (1923).
28. Lefschetz S. On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to abelian varieties. Trans. A. M. S. 22, 327–382 (1921).
29. Leray J. Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations. J. Math. Pures et Appl., 9^e série 24, 95–167 (1945); Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique, *ibid.* 169–199; Sur les équations et les transformations, *ibid.* 201–248.
30. Leray J. Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base. C. R. Acad. Sc. Paris 223, 395–397 (1946).
31. Leray J. L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. J. Math. Pures et Appl., 9^e série 29, 1–139 (1950).
32. Leray J. L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, *ibid.* 169–213.
33. Leray J. et Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles. Ann. ENS 51, 45–78 (1934).

34. Oka K. Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. France 78, 1–27 (1950).
35. Oka K. Lemme fondamental. Journ. Math. Soc. Japan 3, 204–214 et 259–278 (1951).
36. Picard E. Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables indépendantes. J. Math. Pures et Appl. 5, 135–319 (1889).
37. de Rham G. Sur l'Analysis Situs des variétés à n dimensions. J. Math. Pures et Appl., 9^e série 10, 115–200 (1931).
38. Sato M. Hyperfunctions and partial differential equations. Proc. Intern. Conference on Functional Analysis and related Topics Tokyo 1969, 91–94. Univ. Tokyo Press (1969).
39. Serre J.-P. Un théorème de dualité. Comm. Math. Helv. 29, 9–26 (1955).
40. Serre J.-P. Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. 61, 197–278 (1955). [Имеется перевод: Серр Ж.-П. Когерентные алгебраические пучки. — В кн.: Расслоенные пространства. — М.: ИЛ, 1958, с. 372–450.]
41. Steenrod N. Homology with local coefficients. Ann. Math. 44, 610–627 (1943).
42. Verdier J.-L. Catégories dérivées (Etat 0). Lect. Notes Math. 569, 262–312. Springer, Berlin Heidelberg New York (1977).
43. Verdier J.-L. Dualité dans la cohomologie des espaces localement compacts. Sémin. Bourbaki 300 (1965–66).
44. Wang H.C. The homology groups of the fiber bundles over a sphere. Duke Math. J. 16, 33–38 (1949).
45. Weil A. Lettre à H. Cartan. Oeuvres 2, 44. Berlin (1985).
46. Weil A. Sur les théorèmes de de Rham. Comm. Math. Helv. 26 (1952).
47. Whitney H. On products in a complex. Ann. Math. 39, 397–432 (1938).
48. Dieudonné J. A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960. Birkhäuser, Boston (1989).

Гомологическая алгебра

В этой главе излагаются основы гомологической алгебры, необходимые для понимания дальнейших глав книги: категории и функторы, триангулированные категории, локализация, производные категории, индуктивные и проективные объекты, условия Миттаг-Лефлера.

Так как невозможно в одну главу вместить изложение всех нужных нам результатов из гомологической алгебры, часть вспомогательных утверждений мы сформулировали в виде упражнений и оставили до гл. X изложение теории t -структур (которая до этой главы не используется).

Без сомнения, читатель может также с большой пользой для себя изучить классические монографии и статьи по этому разделу математики, такие, как [Bourbaki 1], [Cartan–Eilenberg 1], [Freyd 1], [Gabriel–Zisman 1], [Godement 1], [Grothendieck 1], [Hilton–Stammbach 1], [Iversen 1], [MacLain 1], [Mitchell 1], [Northcott 1], а особенно монографии [Deligne 1], [Гельфанд–Манин 1], [Hartshorne 1] и [Verdier 2], где рассматриваются производные категории.

Замечание 1.0. Хорошо известно, что неосторожная работа с категорией множеств опасна. Один из способов избежать опасности — работать исключительно в пределах данного универсума, и это мы всегда будем предполагать. Такое предположение не влияет на постановку наших задач, и больше к этому вопросу мы возвращаться не будем.

1.1. Категории и функторы

Определение 1.1.1. *Категорией $\mathcal{C}$ называется следующий набор данных:*

- (i) семейство $\text{Ob}(\mathcal{C})$, члены которого называются *объектами* категории $\mathcal{C}$;
- (ii) набор множеств $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, определенных для всех пар (X, Y) , $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, элементы которых называются *морфизмами* из X в Y ;
- (iii) набор отображений из $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$, определенных для всех троек (X, Y, Z) , X, Y, Z

$\in \text{Ob}(\mathcal{C})$, которые называются *отображениями композиции* и обозначаются $(f, g) \mapsto g \circ f$.

Эти данные удовлетворяют следующим условиям:

(1.1.1) композиция морфизмов ассоциативна,

(1.1.2) для любого объекта $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ существует морфизм $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, такой, что $f \circ \text{id}_X = f$ и $\text{id}_X \circ g = g$ для всех $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ и всех $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$.

Отметим единственность морфизма id_X для каждого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Из соображений краткости мы будем писать $f: X \rightarrow Y$ для обозначения морфизма $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется *изоморфизмом*, если существует морфизм $g: Y \rightarrow X$, такой, что $f \circ g = \text{id}_Y$ и $g \circ f = \text{id}_X$. Если f — изоморфизм, то мы будем использовать обозначение $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ или $X \simeq Y$, когда понятно, о каком морфизме идет речь.

Пример 1.1.2. Через $\mathbf{Set}$ мы будем обозначать категорию множеств и их отображений.

Подкатегорией категории $\mathcal{C}$ называется такая категория $\mathcal{C}'$, что $\text{Ob}(\mathcal{C}') \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ и для каждой пары (X, Y) , $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Кроме того, $\text{id}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$ и отображение композиции для $\mathcal{C}'$ есть ограничение отображения композиции для $\mathcal{C}$.

Если, кроме того, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ для любой пары (X, Y) , $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, то $\mathcal{C}'$ называется *полной подкатегорией* категории $\mathcal{C}$.

Пример 1.1.3. Обозначим через $\mathbf{Top}$ категорию топологических пространств и непрерывных отображений. Тогда $\mathbf{Top}$ является подкатегорией категории $\mathbf{Set}$, но не является ее полной подкатегорией.

Пусть $\mathcal{C}$ — категория. *Противоположная категория*, обозначаемая через $\mathcal{C}^{\circ}$, определяется следующим образом:

$$(1.1.3) \quad \begin{cases} \text{Ob}(\mathcal{C}^{\circ}) = \text{Ob}(\mathcal{C}), \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\circ}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \text{ для любых } X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \\ \text{с очевидным законом композиции.} \end{cases}$$

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathcal{C}$. Мы назовем f *мономорфизмом*, если для любого $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и для любых $g, g' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, таких, что $f \circ g = f \circ g'$, имеет место равенство $g = g'$. Мы назовем f *эпиморфизмом*, если он является мономорфизмом в противоположной категории $\mathcal{C}^{\circ}$, т. е. для любого $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и для любых $h, h' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, таких, что $h \circ f = h' \circ f$, имеет место равенство $h = h'$.

Объект P категории $\mathcal{C}$ называется *начальным*, если множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(P, Y)$ содержит ровно один элемент для любого $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Аналогично, объект Q называется *конечным*, если множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Q)$ содержит ровно один элемент при любом X , т. е. Q — начальный объект в $\mathcal{C}^0$. Заметим, что два начальных (соответственно два конечных) объекта естественно изоморфны.

Определение 1.1.4. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — категории. Функтором F из категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}'$ называется следующий набор данных:

- (i) отображение $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}')$;
- (ii) отображение $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Эти данные подчиняются следующим условиям:

$$(1.1.4) \quad F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)},$$

$$(1.1.5) \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

Определенный таким образом функтор F называют также *ковариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, а функтор из $\mathcal{C}^0$ в $\mathcal{C}'$ называют *контравариантным функтором* из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$.

Пусть, например, $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Тогда отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot): Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ является (ковариантным) функтором из $\mathcal{C}$ в $\mathbf{Set}$, а $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X): Z \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$ является контравариантным функтором из $\mathcal{C}$ в $\mathbf{Set}$.

Определение 1.1.5. Пусть F_1 и F_2 — функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$. Морфизм θ из F_1 в F_2 состоит из следующих данных:

для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ определен элемент $\theta(X) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F_1(X), F_2(X))$.

При этом выполнены следующие условия:

(1.1.6) для любого $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F_1(X) & \xrightarrow{\theta(X)} & F_2(X) \\ \downarrow F_1(f) & & \downarrow F_2(f) \\ F_1(Y) & \xrightarrow{\theta(Y)} & F_2(Y) \end{array}$$

коммутативна.

Отметим, что, имея категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$, мы получаем таким образом новую категорию, объектами которой являются функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, а морфизмами — морфизмы функторов.

Определение 1.1.6. Функтор F из $\mathcal{C}$ в $\mathbf{Set}$ называется *представимым*, если существует объект $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, такой, что F изоморфен функтору $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$.

В этом случае выбор X однозначен с точностью до изоморфизма, и говорят, что объект X *представляет* функтор F .

Аналогичное определение можно дать для контравариантных функторов.

Определение 1.1.7. Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — функтор.

(i) Мы называем функтор F *вполне строгим*, если

(1.1.7) для любой пары (X, Y) объектов из $\text{Ob}(\mathcal{C})$ отображение $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ является биекцией.

(ii) Мы называем функтор F *эквивалентностью категорий*, если имеет место (1.1.7) и, кроме этого,

(1.1.8) для любого $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ существует $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, такой, что $F(X)$ изоморфен X' .

Отметим, что F является эквивалентностью категорий в том и только том случае, когда существуют функтор $F': \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ и изоморфизмы функторов $F \circ F' \simeq \text{id}_{\mathcal{C}'}$ и $F' \circ F \simeq \text{id}_{\mathcal{C}}$. В этом случае мы называем функтор F' *квазиобратным* к F .

Существует вложение категории $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{C}^v$ всех контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathbf{Set}$.

Пусть $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^v$ — функтор $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$.

Предложение 1.1.8. (i) Для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и любого $F \in \text{Ob}(\mathcal{C}^v)$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^v}(h(X), F) \simeq F(X).$$

(ii) Функтор h является вполне строгим.

Доказательство. (i) Морфизму $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^v}(h(X), F)$ мы сопоставим $\phi(f) \in F(X)$ следующим образом. Так как f — это морфизм функторов из $h(X)$ в F , то $f(X)$ определяет отображение из $h(X)(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ в $F(X)$. Теперь определим $\phi(f)$ как образ морфизма id_X . Обратно, элементу $s \in F(X)$ мы сопоставим $\psi(s) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^v}(h(X), F)$ следующим образом. Для $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} h(X)(Y) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), F(Y)) \\ &\rightarrow F(Y), \end{aligned}$$

где последняя стрелка определена элементом z . Легко проверить, что ϕ и ψ взаимно обратны.

(ii) Применяя (i) к $h(Y)$, получаем

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathcal{C}^v}(h(X), h(Y)) &\simeq h(Y)(X) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).\end{aligned}\quad \square$$

Заметим, что контравариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$ представим тогда и только тогда, когда он изоморфен $h(X)$ для некоторого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Аналогично можно рассмотреть категорию $\mathcal{C}^\wedge$, противоположную категории $\mathcal{C}^v$, т. е. категорию (ковариантных) функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{S}et$. Существует естественная эквивалентность категорий

$$\mathcal{C}^\wedge \simeq \mathcal{C}^{o\vee o},$$

и функтор $h': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\wedge$, $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$, также является вполне строгим.

1.2. Абелевы категории

Определение 1.2.1. Категория $\mathcal{C}$ называется *аддитивной*, если

- (i) для любой пары (X, Y) объектов из $\text{Ob}(\mathcal{C})$ множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеет структуру аддитивной (абелевой) группы и закон композиции билинеен;
- (ii) существует объект $0 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, такой, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, 0) = 0$;
- (iii) для любой пары (X, Y) объектов из $\text{Ob}(\mathcal{C})$ функтор

$$W \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$$

представим;

- (iv) для любой пары (X, Y) объектов из $\text{Ob}(\mathcal{C})$ функтор

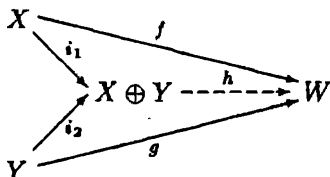
$$W \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$$

представим.

Отметим, что условия (iii) и (iv) эквивалентны, если выполнены условия (i) и (ii). Более того, представляющие объекты в (iii) и (iv) изоморфны (см. упр. 1.3). Мы будем обозначать этот представляющий объект через $X \oplus Y$ и называть его *прямой суммой* объектов X и Y . Изоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \oplus Y, X \oplus Y) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X \oplus Y) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \oplus Y)$$

определяет два морфизма, ассоциированных с $\text{id}_{X \oplus Y}$, $i_1: X \rightarrow X \oplus Y$ и $i_2: Y \rightarrow X \oplus Y$. Эти морфизмы обладают следующим свойством универсальности: для каждой пары морфизмов $f: X \rightarrow W$ и $g: Y \rightarrow W$ существует морфизм $h: X \oplus Y \rightarrow W$, такой, что диаграмма



коммутативна. Аналогичное утверждение справедливо для обращенных стрелок.

Если F — функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, где $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — аддитивные категории, то F называется *аддитивным*, если для любой пары (X, Y) объектов из $\text{Ob}(\mathcal{C})$ отображение F из $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ в $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$ является групповым гомоморфизмом.

Будем считать теперь $\mathcal{C}$ аддитивной категорией. Пусть $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Функтор $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \cdot)$ сопоставляет морфизму $f: X \rightarrow Y$ групповой гомоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y).$$

Аналогично определяем

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z): \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z).$$

Определение 1.2.2. Пусть $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

(i) Если функтор

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, f)): Z &\mapsto \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, f)) \\ &= \{u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X); f \circ u = 0\} \end{aligned}$$

представим, то представляющий его объект называется *ядром* морфизма f и обозначается $\text{Ker } f$.

(ii) Аналогично, если функтор

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, \cdot)): Z &\mapsto \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)) \\ &= \{u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z); f \circ u = 0\} \end{aligned}$$

представим, то представляющий его объект называется *ко-ядром* морфизма f и обозначается $\text{Coker } f$.

Отметим, что равенство $\text{Ker } f = 0$ (соответственно $\text{Coker } f = 0$) равносильно тому, что f — мономорфизм (соответственно эпиморфизм).

Предположим, что морфизм f имеет ядро. Тогда существует морфизм функторов

$$\beta: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \text{Ker } f) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$$

и $\beta(\text{id}_{\text{Ker } f})$ определяет морфизм

$$\alpha: \text{Ker } f \rightarrow X,$$

причем $\beta = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \alpha)$.

Морфизм α обладает следующим свойством универсальности: любой морфизм $e: W \rightarrow X$, такой, что $f \circ e = 0$, пропускается через α , т. е. пунктирная стрелка на приведенной ниже диаграмме всегда существует и определена однозначно (делая диаграмму коммутативной):

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow e & \uparrow \alpha & & \\ & & \text{Ker } f & & \end{array}$$

Аналогично, если f имеет коядро, то существует морфизм функторов

$$\delta: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Coker } f, \cdot) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, \cdot),$$

который определяет морфизм

$$\gamma: Y \rightarrow \text{Coker } f,$$

причем γ есть решение задачи на универсальность, представленной следующей диаграммой (где $g \circ f = 0$):

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y & \xrightarrow{\quad} & Z \\ & \searrow f & \downarrow \gamma & \nearrow g & \\ & & \text{Coker } f & & \end{array}$$

Предположим, что морфизм $\alpha: \text{Ker } f \rightarrow X$ имеет коядро. Это коядро называется *кообразом* морфизма f и обозначается $\text{Coim } f$. Аналогично, предположим, что морфизм $\gamma: Y \rightarrow \text{Coker } f$ имеет ядро. Оно

называется *образом* морфизма f и обозначается $\text{Im } f$. Из свойств универсальности ядра и коядра следует, что если $\text{Coim } f$ и $\text{Im } f$ существуют, то существует и естественный морфизм

$$(1.2.1) \quad \text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f.$$

Определение 1.2.3. Аддитивная категория $\mathcal{C}$ называется *абелевой категорией*, если выполняются следующие условия:

- (i) для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ существуют $\text{Ker } f$ и $\text{Coker } f$;
- (ii) канонический морфизм $\text{Coim } f \rightarrow \text{Im } f$ является изоморфизмом.

Примеры 1.2.4. (а) Пусть $\mathcal{B}\text{an}(\mathbb{C})$ — категория банаховых пространств над $\mathbb{C}$ и непрерывных линейных отображений. Это аддитивная категория. Более того, если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм, то можно определить его ядро и коядро (коядро определим как $Y/\overline{\text{Im } f}$, где $\overline{\text{Im } f}$ — замыкание в Y образа морфизма f). Отметим, что из равенств $\text{Ker } f = \text{Coker } f = 0$ не следует, что f — изоморфизм. Значит, категория $\mathcal{B}\text{an}(\mathbb{C})$ не является абелевой.

(b) Пусть A — кольцо с единицей. Тогда категория $\mathcal{M}\text{od}(A)$ левых A -модулей и A -линейных отображений является абелевой. Пусть A^{op} — кольцо, противоположное кольцу A ; тогда абелева категория $\mathcal{M}\text{od}(A^{\text{op}})$ эквивалентна категории правых A -модулей.

Можно доказать, что любая абелева категория эквивалентна полной подкатегории категории $\mathcal{M}\text{od}(A)$ для некоторого кольца A (см. [Mitchell 1]).

(с) Интересный пример аддитивной категории, не являющейся абелевой, дает категория фильтрованных левых модулей над фильтрованным кольцом (гл. 11).

Теперь мы будем считать $\mathcal{C}$ абелевой категорией.

Определение 1.2.5. Последовательность морфизмов

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

называется *точной*, если

- (i) $g \circ f = 0$;
- (ii) естественный морфизм $\text{Im } f \rightarrow \text{Ker } g$ является изоморфизмом.

Обобщая это определение, мы назовем последовательность морфизмов *точной*, если каждые два последовательных морфизма образуют точную последовательность в смысле определения 1.2.5.

Значит, если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм, то мы получаем две точные последовательности

$$0 \rightarrow \text{Ker } f \rightarrow X \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \text{Im } f \rightarrow Y \rightarrow \text{Coker } f \rightarrow 0.$$

Отметим, что последовательность $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ (соответственно $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow 0$) точна в том и только том случае, когда f — мономорфизм (соответственно эпиморфизм).

Определение 1.2.6. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории. Аддитивный функтор F из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$ называется *точным слева* (соответственно *справа*), если для любой точной последовательности $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X''$ (соответственно $X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$) морфизмов из $\mathcal{C}$ последовательность $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'')$ (соответственно $F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$) точна.

Если функтор F является точным справа и точным слева, то он называется *точным*.

Контравариантный функтор F из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$ называется *точным слева* (соответственно *точным справа*, соответственно *точным*), если он является таковым как функтор из $\mathcal{C}^o$ в $\mathcal{C}'$.

Пример 1.2.7. Пусть $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Тогда функторы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ оба являются точными слева как функторы из $\mathcal{C}$ в $\text{Mod}(\mathbb{Z})$.

Определение 1.2.8. Пусть $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Тогда объект X называется *инъективным* (соответственно *проективным*), если функтор $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$ (соответственно $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot)$) точен.

Отметим, что $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ инъективен в том и только в том случае, когда для всех диаграмм указанного ниже вида, в которых верхняя строка точна, существует пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow & \nearrow & \\ & & Z & & \end{array}$$

Другими словами, объект Z инъективен тогда и только тогда, когда для всех мономорфизмов $f: X \rightarrow Y$ морфизм $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, Z)$ сюръективен.

Из этого замечания вытекает, что если $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ — точная последовательность, а X — инъективный объект, то последовательность расщепима (см. упр. 1.5).

Более того, если $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность морфизмов в $\mathcal{C}$ и X' инъективен, то X инъективен в том и только в том случае, когда X'' инъективен.

Аналогичные утверждения для проективных объектов получаются при обращении стрелок.

Терминология 1.2.9. Если $\mathcal{C}$ — абелева категория, а $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ — точная последовательность, то X иногда называют подобъектом объекта Y , а Z — факторобъектом объекта Y . Используется обозначение $Z = Y/X$.

Обозначения 1.2.10. Как $\text{Mod}(\mathbb{Z})$, так и $\mathfrak{Ab}$ будут обозначать категорию абелевых групп.

Если A — кольцо и X — некоторый A -модуль, то мы будем писать $\text{Hom}_A(X, \cdot)$ вместо $\text{Hom}_{\text{Mod}(A)}(X, \cdot)$ и аналогично будем использовать обозначение $\text{Hom}_A(\cdot, X)$.

Если кольцо A коммутативно, то значениями этих функторов являются объекты из $\text{Mod}(A)$. Мы сохраняем в коммутативном случае те же обозначения, но будем помнить, что это теперь функторы из $\text{Mod}(A)$ в $\text{Mod}(A)$. Аналогично мы поступаем и с функторами $X \otimes_A \cdot$ и $\cdot \otimes_A X$.

1.3. Категория комплексов

Пусть $\mathcal{C}$ — аддитивная категория.

Определение 1.3.1. *Комплексом* в категории $\mathcal{C}$ называется такой набор данных $\{X^n, d_X^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, что для любого $n \in \mathbb{Z}$

$$(1.3.1) \quad X^n \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \quad d_X^n \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^n, X^{n+1}) \text{ и } d_X^{n+1} \circ d_X^n = 0.$$

Морфизмом f из комплекса X в комплекс Y называется последовательность $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ морфизмов $f^n : X^n \rightarrow Y^n$, такая, что для любого n

$$(1.3.2) \quad d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n.$$

Определенную таким образом категорию комплексов категории $\mathcal{C}$ мы будем обозначать $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Это аддитивная категория, и если $\mathcal{C}$ абелева, то $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ также абелева.

Часто встречается и такое описание комплекса:

$$\dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

Семейство $d_X = \{d_X^n\}_n$ называется *дифференциалом* комплекса X . Комплекс X называется *ограниченным* (соответственно *ограниченным сверху*, соответственно *ограниченным снизу*), если $X^n = 0$ для всех $|n| \gg 0$ (соответственно $n \ll 0$, соответственно $n \gg 0$). Полная подкатегория категории $\mathbf{C}(\mathcal{C})$, состоящая из ограниченных комплексов (соответственно ограниченных сверху, соответственно ограниченных снизу), обозначается через $\mathbf{C}^b(\mathcal{C})$ (соответственно $\mathbf{C}^+(\mathcal{C})$, соответственно $\mathbf{C}^-(\mathcal{C})$).

Мы отождествляем $\mathcal{C}$ с полной подкатегорией категории $\mathbf{C}(\mathcal{C})$, состоящей из комплексов X , таких, что $X^n = 0$ при $n \neq 0$.

Определение 1.3.2. Пусть k — целое число, а $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}(\mathcal{C}))$. Определим комплекс $X[k]$ следующим образом:

$$(1.3.3) \quad \begin{cases} X[k]^n = X^{n+k}, \\ d_{X[k]}^n = (-1)^k d_X^{n+k}. \end{cases}$$

По морфизму $f: X \rightarrow Y$ категории $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ построим морфизм $f[k]: X[k] \rightarrow Y[k]$, полагая

$$(1.3.4) \quad f[k]^n = f^{n+k}.$$

Функтор $[k]$ из $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ в $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ называется *функтором сдвига степени k* .

Определение 1.3.3. Морфизм $f: X \rightarrow Y$ категории $\mathbf{C}(\mathcal{C})$ называется *гомотопным нулю*, если существуют морфизмы $s^n: X^n \rightarrow Y^{n-1}$, такие, что для всех n

$$(1.3.5) \quad f^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_Y^{n-1} \circ s^n.$$

Говорят, что морфизм f *гомотопен* морфизму g , если их разность $f - g$ гомотопна нулю. Мы обозначим через $\text{Ht}(X, Y)$ подгруппу группы $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$, состоящую из морфизмов, гомотопных нулю. Легко видеть, что отображение композиции $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Z)$ переводит $\text{Ht}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(Y, Z)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}(\mathcal{C})}(X, Y) \times \text{Ht}(Y, Z)$ в $\text{Ht}(X, Z)$. Это замечание позволяет определить новую категорию $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ следующим образом.

Определение 1.3.4. Категория $K(C)$ задается так:

$$(1.3.6) \quad \begin{cases} \text{Ob}(K(C)) = \text{Ob}(C(C)), \\ \text{Hom}_{K(C)}(X, Y) = \text{Hom}_{C(C)}(X, Y) / \text{Ht}(X, Y). \end{cases}$$

Аналогично определяются категории $K^b(C)$, $K^+(C)$ и $K^-(C)$. Они являются полными подкатегориями в $K(C)$.

Впредь (до конца раздела) мы будем считать категорию C абелевой.

Определение 1.3.5. Если $X \in \text{Ob}(C(C))$, то полагаем

$$\begin{aligned} Z^k(X) &= \text{Ker } d_X^k, \quad B^k(X) = \text{Im } d_X^{k-1}, \\ H^k(X) &= \text{Coker}(B^k(X) \rightarrow Z^k(X)). \end{aligned}$$

$H^k(X)$ называется k -ми когомологиями комплекса X .

Другими словами,

$$(1.3.7) \quad H^k(X) = \text{Ker } d_X^k / \text{Im } d_X^{k-1}.$$

Отметим, что $H^k(\cdot)$ является аддитивным функтором из $C(C)$ в C и

$$(1.3.8) \quad H^k(X) = H^0(X[k]).$$

Если морфизм $f: X \rightarrow Y$ гомотопен нулю, то $H^k(f): H^k(X) \rightarrow H^k(Y)$ является нулевым морфизмом. Следовательно, $H^k(\cdot)$ можно рассматривать как функтор из $K(C)$ в C .

Существуют точные последовательности

$$\begin{aligned} X^{k-1} &\rightarrow Z^k(X) \rightarrow H^k(X) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow H^k(X) \rightarrow \text{Coker}(d_X^{k-1}) \rightarrow X^{k+1}, \\ 0 &\rightarrow Z^{k-1}(X) \rightarrow X^{k-1} \rightarrow B^k(X) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow B^k(X) \rightarrow X^k \rightarrow \text{Coker}(d_X^{k-1}) \rightarrow 0, \\ (1.3.9) \quad 0 &\rightarrow H^k(X) \rightarrow \text{Coker } d_X^{k-1} \xrightarrow{d_X^k} Z^{k+1}(X) \\ &\rightarrow H^{k+1}(X) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Предложение 1.3.6. Пусть $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ — точная последовательность в $C(C)$. Тогда существует канонически определенная длинная точная последовательность в C

$$\dots \rightarrow H^n(X) \rightarrow H^n(Y) \rightarrow H^n(Z) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X) \rightarrow \dots,$$

причем если диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' \longrightarrow 0 \end{array}$$

является коммутативной диаграммой точных последовательностей в $\mathbf{C}(C)$, то все диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^n(Z) & \longrightarrow & H^{n+1}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(Z') & \longrightarrow & H^{n+1}(X') \end{array}$$

коммутативны.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными горизонтальными строками

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Coker}(d_X^{n-1}) & \longrightarrow & \text{Coker}(d_Y^{n-1}) & \longrightarrow & \text{Coker}(d_Z^{n-1}) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow d_X^n & & \downarrow d_Y^n & & \downarrow d_Z^n & & \\ 0 \longrightarrow & Z^{n+1}(X) & \longrightarrow & Z^{n+1}(Y) & \longrightarrow & Z^{n+1}(Z) \end{array}$$

Утверждение теоремы вытекает из (1.3.9) и упр. 1.9. Доказательство функториальности этой конструкции мы оставляем читателю. $\square$

Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}(C))$. Мы определим усеченные комплексы $\tau^{\leq n}(X)$ и $\tau^{\geq n}(X)$ следующим образом:

$$(1.3.10) \quad \tau^{\leq n}(X): \dots \rightarrow X^{n-2} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d_X^n \rightarrow 0 \rightarrow \dots,$$

$$(1.3.11) \quad \tau^{\geq n}(X): \dots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Coker } d_X^{n-1} \rightarrow X^{n+1} \rightarrow X^{n+2} \rightarrow \dots.$$

Существуют морфизмы категории $\mathbf{C}(C)$

$$(1.3.12) \quad \tau^{\leq n}(X) \rightarrow X, \quad X \rightarrow \tau^{\geq n}(X)$$

и при $n' \leq n$

$$(1.3.13) \quad \tau^{\leq n'}(X) \rightarrow \tau^{\leq n}(X), \quad \tau^{\geq n'}(X) \rightarrow \tau^{\geq n}(X).$$

Кроме того, справедливо

Предложение 1.3.7. (i) Естественный морфизм $H^k(\tau^{\leq n}(X)) \rightarrow H^k(X)$ является изоморфизмом при $k \leq n$ и $H^k(\tau^{\leq n}(X)) = 0$ при $k > n$.

(ii) Естественный морфизм $H^k(X) \rightarrow H^k(\tau^{\geq n}(X))$ является изоморфизмом при $k \geq n$ и $H^k(\tau^{\geq n}(X)) = 0$ при $k < n$.

Доказательство тривиально.

Замечание 1.3.8. Объекты X и Y из $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ называются гомотопно эквивалентными, если они изоморфны в категории $\mathbf{K}(\mathcal{C})$, т. е. если существует морфизм $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{C})}(X, Y)$, который является изоморфизмом в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Этот морфизм f называется гомотопической эквивалентностью.

Обозначения 1.3.9. (i) Рассмотрим последовательность $\{X_n, d_n^X\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где $X_n \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $d_n^X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_n, X_{n-1})$ и $d_n^X \circ d_{n+1}^X = 0$. Такую последовательность мы также будем называть комплексом в $\mathcal{C}$. Действительно, полагая $X^n = X_{-n}$, $d_X^n = d_{-n}^X$, получаем, что $\{X^n, d_X^n\}$ является комплексом в смысле определения 1.3.1.

(ii) Мы иногда будем обозначать через $X^\cdot$ (соответственно через X .) комплекс $\{X^n, d_X^n\}$ (соответственно $\{X_n, d_n^X\}$). Объект $\text{Ker } d_{n-1}^X / \text{Im } d_n^X$ называется n -й группой гомологий комплекса X . и обозначается через $H_n(X)$.

Обозначение 1.3.10. С этого момента мы полагаем $\tau^{<n}(X) = \tau^{\leq(n-1)}(X)$ и $\tau^{>n}(X) = \tau^{\geq(n+1)}(X)$.

1.4. Конусы морфизмов

Пусть $\mathcal{C}$ — аддитивная категория и $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$.

Определение 1.4.1. Конусом морфизма f , обозначаемым через $M(f)$, называется объект в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$, определенный следующим образом:

$$(1.4.1) \quad \begin{cases} M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n, \\ d_{M(f)}^n = \begin{pmatrix} d_{X[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}. \end{cases}$$

(Напомним, что $d_{X[1]}^n = -d_X^{n+1}$.)

Определим морфизмы $\alpha(f): Y \rightarrow M(f)$ и $\beta(f): M(f) \rightarrow X[1]$ следующим образом:

$$(1.4.2) \quad \alpha(f)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{id}_{Y^n} \end{pmatrix},$$

$$(1.4.3) \quad \beta(f)^n = (\text{id}_{X^{n+1}}, 0).$$

Лемма 1.4.2. Для любого морфизма $f: X \rightarrow Y$ в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ существует морфизм $\phi: X[1] \rightarrow M(\alpha(f))$, такой, что

$$(1.4.4) \quad \phi \text{ является изоморфизмом категории } \mathbf{K}(\mathcal{C});$$

диаграмма

$$(1.4.5) \quad \begin{array}{ccccccc} Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\beta(f)} & X[1] & \xrightarrow{-f[1]} & Y[1] \\ \downarrow \text{id}_Y & & \downarrow \text{id}_{M(f)} & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{id}_{Y[1]} \\ Y & \xrightarrow{\alpha(f)} & M(f) & \xrightarrow{\alpha(\alpha(f))} & M(\alpha(f)) & \xrightarrow{\beta(\alpha(f))} & Y[1] \end{array}$$

коммутативна в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Заметим, что это утверждение не имеет места в $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Отметим далее, что морфизм ϕ не единствен даже в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Этот факт является источником многих трудностей теории, до сих пор не проясненных.

Доказательство. Имеем

$$M(\alpha(f))^n = Y^{n+1} \oplus M(f)^n = Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Y^n.$$

Определим морфизмы $\phi^n: X[1]^n \rightarrow M(\alpha(f))^n$ и $\psi^n: M(\alpha(f))^n \rightarrow X[1]^n$ следующим образом:

$$\phi^n = \begin{pmatrix} -f^{n+1} \\ \text{id}_{X^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^n = (0, \text{id}_{X^{n+1}}, 0).$$

Тогда лемма вытекает из следующих утверждений:

- (a) $\phi = (\phi^n)_n$ и $\psi = (\psi^n)_n$ являются морфизмами комплексов,
- (b) $\psi \circ \phi = \text{id}_{X[1]}$,
- (c) $\phi \circ \psi$ гомотопен $\text{id}_{M(\alpha(f))}$,
- (d) $\psi \circ \alpha(\alpha(f)) = \beta(f)$,
- (e) $\beta(\alpha(f)) \circ \phi = -f[1]$.

Все эти утверждения, кроме (c), доказываются легко. Для доказательства (c) определим морфизм $s^n: M(\alpha(f))^n \rightarrow M(\alpha(f))^{n-1}$ формулой

$$s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{Y^n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что

$$\text{id}_{M(\alpha(f))^n} - \phi^n \circ \psi^n = s^{n+1} \circ d_{M(\alpha(f))}^n + d_{M(\alpha(f))}^{n-1} \circ s^n. \quad \square$$

Определим *треугольник* в категории $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ как последовательность морфизмов $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$, а морфизм треугольников — как коммутативную диаграмму в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \phi \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi[1] \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

Определение 1.4.3. Треугольник $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ называется *выделенным*, если он изоморфен треугольнику $X' \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X'[1]$, построенному по некоторому морфизму f из $\mathcal{C}(\mathcal{C})$.

Предложение 1.4.4. Совокупность выделенных треугольников в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ обладает такими свойствами:

- (TR0) Треугольник, изоморфный выделенному, является выделенным.
- (TR1) Для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{C}))$ треугольник $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$ является выделенным.
- (TR2) Любой морфизм $f: X \rightarrow Y$ категории $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ может быть вложен в выделенный треугольник $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$.
- (TR3) Треугольник $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1]$ является выделенным тогда и только тогда, когда выделенным является треугольник $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X[1] \xrightarrow{-f[1]} Y[1]$.
- (TR4) Если $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ и $X' \xrightarrow{f'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[1]$ — выделенные треугольники, то коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow u & & \downarrow v \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

может быть продолжена (не обязательно однозначно) до морфизма треугольников.

- (TR5) (аксиома октаэдра). Пусть

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1], \\ Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y[1], \\ X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

— выделенные треугольники; тогда существует выделенный треугольник

$$Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow Z'[1],$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \\
 \text{id}_X \downarrow & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X[1]} \\
 X & \xrightarrow{g \circ f} & Z & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X[1] \\
 f \downarrow & & \downarrow \text{id}_Z & & \downarrow & & \downarrow f[1] \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Y[1] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X'} & & \downarrow \\
 Z' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Z'[1]
 \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Утверждения (TR0) и (TR2) очевидны, а (TR3) следует из леммы 1.4.2.

Так как конус морфизма $f: 0 \rightarrow X$ есть X , то треугольник $0 \rightarrow X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0[1]$ является выделенным. Применяя (TR3), получаем утверждение (TR1). Докажем теперь (TR4). Заменяя треугольники $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ и $X' \xrightarrow{f'} Y' \rightarrow Z' \rightarrow X'[1]$ изоморфными, будем предполагать, что заданы два треугольника $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} X[1]$ и $X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\alpha(f')} M(f') \xrightarrow{\beta(f')} X'[1]$. Мы построим морфизм $w: M(f) \rightarrow M(f')$, такой, что

$$(1.4.6) \quad \begin{cases} w \circ \alpha(f) = \alpha(f') \circ v, \\ u[1] \circ \beta(f) = \beta(f') \circ w. \end{cases}$$

Из определения категории $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ следует, что существуют морфизмы $s^n: X^n \rightarrow Y'^{n-1}$, такие, что $v^n \circ f^n - f'^n \circ u^n = s^{n+1} \circ d_X^n + d_{Y'}^{n-1} \circ s^n$. Мы определим морфизмы $w^n: M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \rightarrow M(f')^n = X'^{n+1} \oplus Y'^n$ формулой

$$w^n = \begin{pmatrix} u^{n+1} & 0 \\ s^{n+1} & v^n \end{pmatrix}.$$

Прямое вычисление показывает, что w является изоморфизмом в категории комплексов и удовлетворяет (1.4.6).

Докажем (TR5). Мы можем предполагать, что $Z' = M(f)$, $X' = M(g)$ и $Y' = M(g \circ f)$. Определим морфизмы $u: Z' \rightarrow Y'$ и $v: Y' \rightarrow X'$ следующим образом:

$$u^n: X^{n+1} \oplus Y^n \rightarrow X^{n+1} \oplus Z^n, \quad u^n = \begin{pmatrix} \text{id}_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & g^n \end{pmatrix},$$

$$v^n: X^{n+1} \oplus Z^n \rightarrow Y^{n+1} \oplus Z^n, \quad v^n = \begin{pmatrix} f^{n+1} & 0 \\ 0 & \text{id}_{Z^n} \end{pmatrix}.$$

Морфизм $w: X' \rightarrow Z'[1]$ определим как композицию $X' \rightarrow Y[1] \rightarrow Z'[1]$. Тогда диаграмма (TR5) коммутативна, и достаточно показать, что $Z' \xrightarrow{u} Y' \xrightarrow{v} X' \xrightarrow{w} Z'[1]$ — выделенный треугольник. Для этого мы построим изоморфизм $\phi: M(u) \rightarrow X'$ и его обратный $\psi: X' \rightarrow M(u)$, удовлетворяющие условиям $\phi \circ \alpha(u) = v$ и $\beta(u) \circ \psi = w$. Имеем

$$M(u)^n = M(f)^{n+1} \oplus M(g \circ f)^n = X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \oplus X^{n+1} \oplus Z^n$$

и $X'^n = M(g)^n = Y^{n+1} \oplus Z^n$. Определим ϕ и ψ формулами

$$\phi^n = \begin{pmatrix} 0 & \text{id}_{Y^{n+1}} & f^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{id}_{Z^n} \end{pmatrix}, \quad \psi^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \text{id}_{Y^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \text{id}_{X^{n+1}} \end{pmatrix}$$

Легко проверяется, что ϕ и ψ — морфизмы комплексов и $\phi \circ \alpha(u) = v$, $\beta(u) \circ \psi = w$.

Имеем $\phi \circ \psi = \text{id}_{X'}$. Если мы определим морфизмы

$$s^n: M(u)^n \rightarrow M(u)^{n-1}, \quad s^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{id}_{X^{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то имеет место равенство

$$(\text{id}_{M(u)} - \psi \circ \phi)^n = s^{n+1} \circ d_{M(u)}^n + d_{M(u)}^{n-1} \circ s^n.$$

Следовательно, $\psi \circ \phi = \text{id}_{M(u)}$ в $K(\mathcal{C})$.

□

Замечание 1.4.5. Утверждение (TR5) может быть описано следующей октаэдральной диаграммой:

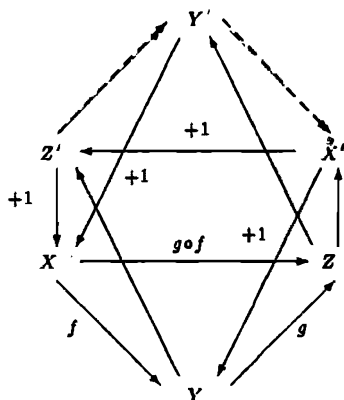


Диаграмма 1.4.1

1.5. Триангулированные категории

Мы приходим к понятию триангулированной категории, абстрагируя свойства категории $K(C)$.

Пусть C — аддитивная категория и $T: C \rightarrow C$ — ее автоморфизм. Мы будем иногда писать $[1]$ вместо T и $[k]$ вместо T^k (т. е. $X[1]$ вместо $T(X)$ и $f[1]$ вместо $T(f)$).

Треугольником в C называется последовательность морфизмов

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X).$$

Определение 1.5.1. Триангулированной категорией C называется следующий набор данных:

- (1.5.1) аддитивная категория C , на которой задан автоморфизм $T: C \rightarrow C$,
- (1.5.2) семейство треугольников, называемых *выделенными*, для которых выполнены аксиомы (TR0)–(TR5) предложения 1.4.4 (напоминаем, что $X[1]$ — это $T(X)$).

Пусть (C, T) и (C', T') — две триангулированные категории. Аддитивный функтор $F: C \rightarrow C'$ называется *функтором триангулированных категорий*, если $F \circ T \simeq T' \circ F$ и F переводит выделенные треугольники в C в выделенные треугольники в C' .

Очевидно, что если $\mathcal{C}$ — аддитивная категория, то $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ — триангулированная категория. Пусть теперь $\mathcal{C}$ — триангулированная категория, а $\mathcal{A}$ — абелева категория.

Определение 1.5.2. Аддитивный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ называется *когомологическим функтором*, если для любого выделенного треугольника $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$ последовательность $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z)$ является точной.

Для когомологического функтора F мы будем писать F^k вместо $F \circ T^k$. Тогда для любого выделенного треугольника $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$ получаем длинную точную последовательность

$$(1.5.3) \quad \dots \rightarrow F^{k-1}(Z) \rightarrow F^k(X) \rightarrow F^k(Y) \rightarrow F^k(Z) \rightarrow F^{k+1}(X) \rightarrow \dots$$

Предложение 1.5.3. (i) Если $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow T(X)$ — выделенный треугольник, то $g \circ f = 0$.

(ii) Для любого $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ функторы $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, W)$ являются когомологическими.

Доказательство. (i) Из (TR1) следует, что $X \xrightarrow{\text{id}_X} X \rightarrow 0 \rightarrow T(X)$ — выделенный треугольник. Тогда из (TR4) вытекает существование морфизма $\phi: 0 \rightarrow Z$, такого, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(X) \\ \text{id}_X \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

коммутативна.

Следовательно, $g \circ f = \phi \circ 0 = 0$.

(ii) Пусть $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow T(X)$ — выделенный треугольник. Чтобы доказать когомологичность функтора $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$, достаточно доказать, что для любого $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$, $g \circ \phi = 0$, существует $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X)$, такой, что $\phi = f \circ \psi$. Но это следует из (TR1), (TR3) и (TR4): эти аксиомы дают возможность построить стрелку ψ , делающую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{\text{id}_W} & W & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & T(W) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \phi & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & T(X) \end{array}$$

коммутативной. Доказательство когомологичности функтора $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, W)$ аналогично. $\square$

Замечание 1.5.4. Пусть $\mathcal{C}$ — аддитивная категория, а $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$. Композиция $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\alpha(f)} M(f)$, как правило, не равна нулю в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$, но равна нулю в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Следствие 1.5.5. Пусть

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ \phi \downarrow & & \psi \downarrow & & \theta \downarrow & & T(\phi) \downarrow \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

— морфизм выделенных треугольников. Тогда если ϕ и ψ — изоморфизмы, то и θ — изоморфизм.

Доказательство. Пусть $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Применим к предыдущей диаграмме функтор $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \cdot)$. Получим коммутативную диаграмму с точными строками. Так как $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \phi)$ и $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \psi)$ — изоморфизмы, так же как $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, T(\phi))$ и $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, T(\psi))$, то, применяя упр. 1.8, получаем, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, \theta)$ — изоморфизм. Теперь, используя предложение 1.1.8, убеждаемся, что θ — изоморфизм. $\square$

Предложение 1.5.6. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Тогда функтор $H^0(\cdot): \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ является когомологическим функтором.

Доказательство. Достаточно показать, что если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$, то точна последовательность

$$H^0(Y) \rightarrow H^0(M(f)) \rightarrow H^0(X[1]).$$

Поскольку $0 \rightarrow Y \rightarrow M(f) \rightarrow X[1] \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$, доказательство вытекает из предложения 1.3.6. $\square$

Определение 1.5.7. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Он называется *квазиизоморфизмом* (сокращенно киз), если $H^n(f)$ является изоморфизмом для всех n .

Из определения следует, что f — киз в том и только в том случае, когда $H^n(M(f)) = 0$ для всех n . Если f — киз, то мы будем писать для краткости $X \xrightarrow[\text{киз}]{} Y$.

Обозначение 1.5.8. Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория. Выделенный треугольник $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow T(X)$ мы будем обозначать $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$.

Определение 1.5.9. Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория. Треугольник $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T(X)$ называется *антивыделенным треугольником* в $\mathcal{C}$, если треугольник $X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \xrightarrow{\gamma} T(X)$ выделенный.

Заметим, что категория $\mathcal{C}$ с семейством антивыделенных треугольников является триангулированной категорией. Мы обозначим ее через $\mathcal{C}^a$.

1.6. Локализация категорий

Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а S — семейство морфизмов в $\mathcal{C}$.

Определение 1.6.1. Семейство S называется *мультипликативной системой*, если выполняются следующие условия (S1)–(S4):

- (S1) $\text{id}_X \in S$ для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- (S2) Для любой пары (f, g) морфизмов из S , таких, что композиция $g \circ f$ определена, $g \circ f \in S$.
- (S3) Любая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

в которой $g \in S$, может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & Z \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

в которой $h \in S$. Справедливо аналогичное утверждение, в котором все стрелки обращены.

- (S4) Если f и g принадлежат $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, то следующие два условия эквивалентны:

- (i) существует морфизм $t: Y \rightarrow Y'$, $t \in S$, такой, что $t \circ f = t \circ g$,
- (ii) существует морфизм $s: X' \rightarrow X$, $s \in S$, такой, что $f \circ s = g \circ s$.

Определение 1.6.2. Пусть $\mathcal{C}$ — категория и S — мультипликативная система. Категория $\mathcal{C}_S$, называемая *локализацией* категории $\mathcal{C}$ по S , определена следующим набором данных:

$$(1.6.1) \quad \text{Ob}(\mathcal{C}_S) = \text{Ob}(\mathcal{C}),$$

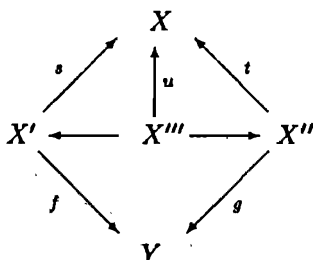
(1.6.2) для любой пары (X, Y) объектов из $\text{Ob}(\mathcal{C})$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \{(X', s, f); X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}), \\ s: X' \rightarrow X, f: X' \rightarrow Y, s \in S\} / \mathcal{R},$$

где $\mathcal{R}$ есть следующее отношение эквивалентности:

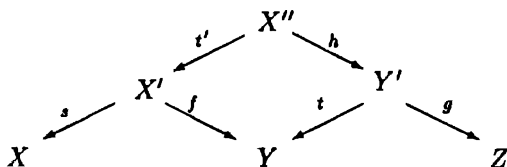
$$(X', s, f) \mathcal{R} (X'', t, g)$$

тогда и только тогда, когда существует коммутативная диаграмма



где $u \in S$.

Композиция морфизмов $(X', s, f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y)$ и $(Y', t, g) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(Y, Z)$ определена следующим образом: мы применяем (S3) для построения коммутативной диаграммы



в которой $t' \in S$, и полагаем

$$(Y', t, g) \circ (X', s, f) = (X'', s \circ t', g \circ h).$$

Легко проверить, что $\mathcal{C}_S$ — категория.

Через Q мы обозначим функтор

$$Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_S,$$

определенный следующим образом: $Q(X) = X$ для $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и $Q(f) = (X, \text{id}_X, f)$ для $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Предложение 1.6.3. (i) Если $s \in S$, то $Q(s)$ — изоморфизм в C_S .

(ii) Пусть C' — категория, а $F: C \rightarrow C'$ — функтор, такой, что $F(s)$ является изоморфизмом в C' для всех $s \in S$. Тогда F однозначно пропускается через Q .

Доказательство тривиально.

Замечание 1.6.4. Из предложения 1.6.3 вытекает, что

$$(1.6.3) \quad (C^\circ)_S \simeq (C_S)^\circ.$$

Следовательно, мы получаем категорию, эквивалентную C_S , заменяя условие (1.6.2) условием

$$(1.6.2)' \quad \text{Hom}_{C_S}(X, Y) = \{(Y', t, g); Y'\} \in \text{Ob}(C), \\ t: Y \rightarrow Y', g: X \rightarrow Y', t \in S\} / \mathcal{R}',$$

где отношение $\mathcal{R}'$ определено аналогично отношению $\mathcal{R}$.

Предложение 1.6.5. Пусть C' — полная подкатегория категории C . Пусть S — мультипликативная система в C , а S' — семейство морфизмов из C' , принадлежащих S . Пусть S' является мультипликативной системой в C' и выполнено одно из следующих двух условий:

(i) если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм из S , а $Y \in \text{Ob}(C')$, то существует морфизм $g: W \rightarrow X$, $W \in \text{Ob}(C')$, такой, что $f \circ g \in S'$;

(ii) та же формулировка, что в (i), но с обращенными стрелками.

Тогда локализация C'_S является полной подкатегорией в C_S .

Доказательство — прямая проверка.

Определение 1.6.6. Пусть C — триангулированная категория и $\mathcal{N}$ — семейство объектов из C . Тогда $\mathcal{N}$ называется нуль-системой, если выполнены следующие условия (N1)–(N3):

(N1) $0 \in \mathcal{N}$.

(N2) $X \in \mathcal{N}$ в том и только в том случае, когда $X[1] \in \mathcal{N}$.

(N3) Если $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ — выделенный треугольник и $X \in \mathcal{N}$, $Y \in \mathcal{N}$, то $Z \in \mathcal{N}$.

Теперь положим

$$(1.6.4) \quad S(\mathcal{N}) = \{ f: X \rightarrow Y; f \text{ включено в выделенный} \\ \text{треугольник } X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1], \text{ где } Z \in \mathcal{N} \}.$$

Предложение 1.6.7. Пусть $\mathcal{N}$ — нуль-система. Тогда $S(\mathcal{N})$ — мультипликативная система.

Доказательство. Условие (S1) вытекает из (N1) и (TR1). Докажем выполнение условия (S2). Пусть $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z' \rightarrow X[1]$ и $Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow X' \rightarrow Y[1]$ — выделенные треугольники, такие, что $Z' \in \mathcal{N}$ и $X' \in \mathcal{N}$. По свойству (TR2) существует выделенный треугольник $X \xrightarrow{g \circ f} Z \rightarrow Y' \rightarrow X[1]$, а по свойству (TR5) существует выделенный треугольник $Z' \rightarrow Y' \rightarrow X' \rightarrow Z'[1]$. Тогда из (N2), (N3) и (TR3) следует, что $Y' \in \mathcal{N}$, т. е. $g \circ f \in S(\mathcal{N})$.

Чтобы проверить условие (S3), рассмотрим выделенный треугольник $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} X' \rightarrow Z[1]$, в котором $X' \in \mathcal{N}$. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм. Тогда существует выделенный треугольник $W \rightarrow X \xrightarrow{f \circ g} X' \rightarrow W[1]$.

Из (TR4) и (TR3) следует, что существует морфизм выделенных треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} W & \xrightarrow{h} & X & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & W[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{id}_{X'} & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & Z[1]. \end{array}$$

Так как $X' \in \mathcal{N}$, то $h \in S(\mathcal{N})$.

Аналогично доказывается утверждение с обращенными стрелками.

Наконец, докажем (S4). Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $t: Y \rightarrow Y'$ — морфизмы, такие, что $t \in S(\mathcal{N})$ и $t \circ f = 0$. Мы покажем, что существует морфизм $s: X' \rightarrow X$, $s \in S(\mathcal{N})$, такой, что $f \circ s = 0$. Пусть $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{t} Y' \rightarrow Z[1]$ — выделенный треугольник, в котором $Z \in \mathcal{N}$. Из (TR1), (TR3) и (TR4) вытекает существование морфизма $h: X \rightarrow Z$, такого, что $f = g \circ h$. Если мы включим h в выделенный треугольник $X' \xrightarrow{s} X \xrightarrow{h} Z \rightarrow X'[1]$, то морфизм s будет обладать требуемыми свойствами. Доказательство обратной импликации аналогично. $\square$

Обозначение 1.6.8. Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория и $\mathcal{N}$ — нуль-система в $\mathcal{C}$. Мы будем писать $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ вместо $\mathcal{C}_{S(\mathcal{N})}$.

Предложение 1.6.9. Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория и $\mathcal{N}$ — нуль-система в ней.

- (i) $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ также является триангулированной категорией: семейство выделенных треугольников образуют треугольники, изоморфные образам выделенных треугольников в $\mathcal{C}$.
- (ii) Обозначим через Q естественный функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{N}$; тогда $Q(X) \simeq 0$, если $X \in \mathcal{N}$.

- (iii) Любой функтор триангулированных категорий $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, такой, что $F(X) \simeq 0$ для всех $X \in \mathcal{N}$, единственным образом пропускается через $\mathcal{Q}$.

Это предложение есть очевидное следствие предложения 1.6.3.

Предложение 1.6.10. Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория, $\mathcal{N}$ — нуль-система в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — полная триангулированная подкатегория в $\mathcal{C}$, такая, что любой выделенный треугольник $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ в $\mathcal{C}$, в котором $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ и $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, является выделенным треугольником в $\mathcal{C}'$. Пусть $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathcal{C}')$. Тогда

- (i) $\mathcal{N}'$ является нуль-системой в $\mathcal{C}'$;
- (ii) если, кроме того, любой морфизм $Y \rightarrow Z$ из $\mathcal{C}$, где $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, $Z \in \mathcal{N}$, пропускается через объект из $\mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathcal{C}')$, то $\mathcal{C}'/\mathcal{N}'$ является полной подкатегорией в $\mathcal{C}/\mathcal{N}$.

Доказательство. (i) очевидно.

(ii) Мы должны проверить выполнение условия (i) предложения 1.6.5. Пусть $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$ — выделенный треугольник, в котором $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, $Z \in \mathcal{N}$. Нам известно, что морфизм $Y \rightarrow Z$ пропускается через $Z' \in \mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathcal{C}')$: $Y \rightarrow Z' \rightarrow Z$. Применяя (TR5) к морфизмам $Y \rightarrow Z'$ и $Z' \rightarrow Z$, находим выделенный треугольник $Y \rightarrow Z' \rightarrow W \rightarrow Y[1]$, такой, что морфизм $W[-1] \rightarrow Y$ пропускается через X : $W[-1] \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$. Это завершает доказательство. $\square$

Замечание 1.6.11. Пусть $\mathcal{N}$ — нуль-система в $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Q}$ — функтор $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{N}$. Тогда $\mathcal{Q}(X) \simeq 0$ для $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ в том и только в том случае, когда существует объект $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, такой, что $X \oplus Y \in \mathcal{N}$. Это условие эквивалентно условию $X \oplus X[1] \in \mathcal{N}$. Доказательство — прямая проверка.

1.7. Производные категории

В этом разделе $\mathcal{C}$ будет обозначать абелеву категорию.

Мы применим только что описанную конструкцию к триангулированной категории $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Легко видеть, что

$$(1.7.1) \quad \mathcal{N} = \{X \in \text{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{C})) : H^n(X) = 0 \text{ для всех } n\}$$

является нуль-системой. Тогда из предложения 1.5.6 следует, что $S(\mathcal{N})$ состоит из квазиизоморфизмов категории $\mathbf{K}(\mathcal{C})$.

Определение 1.7.1. Положим $\mathbf{D}(\mathcal{C}) = \mathbf{K}(\mathcal{C})/\mathcal{N}$. Мы будем называть $\mathbf{D}(\mathcal{C})$ *производной категорией* категории $\mathcal{C}$.

Заменяя $\mathbf{K}(\mathcal{C})$ на $\mathbf{K}^b(\mathcal{C})$ (соответственно на $\mathbf{K}^+(\mathcal{C})$, соответственно на $\mathbf{K}^-(\mathcal{C})$), мы аналогичным образом определяем производную категорию $\mathbf{D}^b(\mathcal{C})$ (соответственно $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$, соответственно $\mathbf{D}^-(\mathcal{C})$). Из предложения 1.6.3 следует, что функтор $H^n(\cdot): \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ пропускается через $\mathbf{D}(\mathcal{C})$. Полученный таким образом функтор $\mathbf{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ мы по-прежнему будем обозначать $H^n(\cdot)$.

Предложение 1.7.2. (i) Категория $\mathbf{D}^b(\mathcal{C})$ (соответственно $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$, соответственно $\mathbf{D}^-(\mathcal{C})$) эквивалентна полной подкатегории категории $\mathbf{D}(\mathcal{C})$, состоящей из объектов X , таких, что $H^n(X) = 0$ при $|n| \gg 0$ (соответственно $n \ll 0$, соответственно $n \gg 0$).

(ii) Композиция функторов $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{K}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathcal{C})$ задает эквивалентность категории $\mathcal{C}$ и полной подкатегории в $\mathbf{D}(\mathcal{C})$, состоящей из объектов X , таких, что $H^n(X) = 0$ при $n \neq 0$.

Доказательство. Предложение является прямым следствием предложения 1.6.10 и того факта, что для объекта $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{C}))$, такого, что $H^j(X) = 0$ при $j < n$ (соответственно $H^j(X) = 0$ при $j > n$), морфизм $X \rightarrow \tau^{\geq n}(X)$ (соответственно $\tau^{\leq n}(X) \rightarrow X$) является квазиизоморфизмом. $\square$

Замечание 1.7.3. Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}(\mathcal{C}))$ и $Q(X)$ — образ объекта X в $\mathbf{D}(\mathcal{C})$. Тогда $Q(X) \simeq 0$ в том и только в том случае, когда X квазиизоморфен нулю в $\mathbf{K}(\mathcal{C})$. Это утверждение немедленно вытекает из замечания 1.6.11 и аддитивности функтора $H^n(\cdot)$. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$. По определению f есть нулевой морфизм в категории $\mathbf{D}(\mathcal{C})$ в том и только в том случае, когда существует квазиизоморфизм $g: X' \rightarrow X$, такой, что $f \circ g$ гомотопен нулю, или когда существует квазиизоморфизм $h: Y \rightarrow Y'$, такой, что $h \circ f$ гомотопен нулю. Отметим, что, как правило, не существует квазиизоморфизма $q: X' \rightarrow X$ (соответственно $h: Y \rightarrow Y'$), такого, что $f \circ g = 0$ (соответственно $h \circ f = 0$) в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$.

Пример 1.7.4. Пусть $\mathcal{C} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$, а морфизм $f: X \rightarrow Y$ определен диаграммой

$$\begin{array}{ccccccccccc} X & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow f & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \\ Y & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Тогда f гомотопен нулю, но не существует квазиизоморфизма $g: X' \rightarrow X$, такого, что $f \circ g = 0$ (из инъективности морфизма f^n следует равенство g нулю).

Предложение 1.7.5. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, а $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}(\mathcal{C})$. Пусть $M(f)$ — конус морфизма f и $\phi^n: M(f)^n = X^{n+1} \oplus Y^n \rightarrow Z^n$ — морфизм $(0, g^n)$. Тогда $\{\phi^n\}_n: M(f) \rightarrow Z$ есть морфизм комплексов, $\phi \circ \alpha(f) = g$ и ϕ — квазиизоморфизм.

Доказательство. Утверждение, что ϕ — морфизм комплексов, очевидно. Более того, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow M(\text{id}_X) \xrightarrow{\gamma} M(f) \rightarrow Z \rightarrow 0,$$

где γ ассоциирован с морфизмом $\text{id}_X \rightarrow f$. Этот морфизм описывается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{id}} & X \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Из предложения 1.3.6 вытекает, что достаточно проверить равенство $H^n(M(\text{id}_X)) = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Так как $M(\text{id}_X)$ является нулем в категории $\mathcal{K}(\mathcal{C})$, то это равенство очевидно. $\square$

В условиях предложения 1.7.5 выделенный треугольник $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{h} X[1]$ называется выделенным треугольником, ассоциированным с точной последовательностью $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$. Здесь $h = \beta(f) \circ \phi^{-1}$.

Отметим, что этот выделенный треугольник порождает длинную точную последовательность

$$\cdots \rightarrow H^n(X) \rightarrow H^n(Y) \rightarrow H^n(Z) \xrightarrow{H^n(h)} H^{n+1}(X) \rightarrow \cdots,$$

где $H^n(h) = -\delta$ (δ определено в предложении 1.3.6).

Отметим также, что если X, Y, Z являются образами объектов из $\mathcal{C}$ при вложении $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C})$, то морфизм $h: Z \rightarrow X[1]$ равен нулю в $\mathcal{D}^+(\mathcal{C})$ тогда и только тогда, когда точная последовательность $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ расщепляется. В любом случае $H^n(h) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 1.7.6. В разд. 1.3 мы определили функторы $\tau^{\geq n}(\cdot)$ и $\tau^{\leq n}(\cdot)$ на категории $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Легко видеть, что эти функторы переводят морфизмы, гомотопные нулю, в морфизмы, гомотопные нулю. Из предложения 1.3.7 следует, что они переводят квазиизоморфизмы в квазиизоморфизмы. То есть мы получаем функторы $\tau^{\geq n}: \mathbf{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ и $\tau^{\leq n}: \mathbf{D}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{C})$.

Применяя предложение 1.7.5, мы получаем выделенные треугольники в $\mathbf{D}(\mathcal{C})$:

$$(1.7.2) \quad \tau^{\leq n}(X) \longrightarrow X \longrightarrow \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{+1},$$

$$(1.7.3) \quad \tau^{\leq n-1}(X) \longrightarrow \tau^{\leq n}(X) \longrightarrow H^n(X)[-n] \xrightarrow{+1},$$

$$(1.7.4) \quad H^n(X)[-n] \longrightarrow \tau^{\geq n}(X) \longrightarrow \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{+1}.$$

Если $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}(\mathcal{C}))$, то $\tau^{\geq n+1}(X)$ квазиизоморфен $\text{Coker}(\tau^{\leq n}(X) \rightarrow X)$, $\tau^{\leq n-1}(X)$ квазиизоморфен $\text{Ker}(\tau^{\leq n}(X) \rightarrow H^n(X)[-n])$ и $\tau^{\geq n+1}(X)$ квазиизоморфен $\text{Coker}(H^n(X)[-n] \rightarrow \tau^{\geq n}(X))$.

Предложение 1.7.7. Пусть $\mathcal{I}$ — полная аддитивная подкатегория в $\mathcal{C}$, такая, что

(1.7.5) для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ существует $X' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ и точная последовательность $0 \rightarrow X \rightarrow X'$.

Тогда

- (i) для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$ найдутся $X' \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$ и квазиизоморфизм $f: X \rightarrow X'$.
- (ii) пусть семейство $\mathcal{N}$ определено условием (1.7.1), и пусть $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$; тогда канонический функтор $\mathbf{K}^+(\mathcal{I})/\mathcal{N}' \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C})$ есть эквивалентность категорий.

Доказательство. Из предложения 1.6.5 вытекает, что (ii) является следствием (i). Пусть теперь $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$. Мы будем по индукции строить комплекс $X'_{\leq p}: \dots \rightarrow X'^{p-1} \rightarrow X'^p \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ и морфизм комплексов $X \rightarrow X'_{\leq p}$ со следующими свойствами: $X'^j \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ для всех j , $H^j(X) \simeq H^j(X'_{\leq p})$ при $j < p$ и отображение $H^p(X) \rightarrow \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1}$ является мономорфизмом.

Если $p \ll 0$, то такое построение возможно. Предположим, что комплекс $X'_{\leq p}$ и соответствующий морфизм построены для некоторого p . Пусть $Z'^{p+1} = \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1} \oplus_{\text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1}} X'^{p+1}$ (см. упр. 1.6). Выберем $X'^{p+1} \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ так, чтобы существовал мономорфизм $Z'^{p+1} \rightarrow X'^{p+1}$.

Теперь применим результаты упр. 1.6 к диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \text{Coker } d_X^{p-1} & \longrightarrow & X^{p+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1} & \longrightarrow & X'^{p+1} \end{array}$$

(морфизмы $X'^p \rightarrow X'^{p+1}$ и $X^{p+1} \rightarrow X'^{p+1}$ определены очевидным образом). Тогда $H^p(X) \simeq H^p(X'_{\leq p+1})$ в силу того, что $H^p(X) \rightarrow \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1}$ — мономорфизм и, более того, $H^{p+1}(X) \rightarrow \text{Coker } d_{X'_{\leq p+1}}^p$ является мономорфизмом. $\square$

Следствие 1.7.8. Пусть выполнены условия предложения 1.7.7, а также справедливо условие

(1.7.6) существует целое $d \geq 0$, такое, что для любой точной последовательности $X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots \rightarrow X^d \rightarrow 0$ в $\mathcal{C}$, в которой $X^j \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ при $j < d$, $X^d \in \text{Ob}(\mathcal{I})$.

Тогда для любого объекта $X \in \text{Ob}(\mathcal{K}^b(\mathcal{C}))$ существует объект $X' \in \text{Ob}(\mathcal{K}^b(\mathcal{I}))$, квазиизоморфный X .

Доказательство. Из предложения 1.7.7 вытекает существование объекта $X' \in \text{Ob}(\mathcal{K}^+(\mathcal{I}))$, квазиизоморфного X .

Если $H^j(X) = 0$ при $j > n_0$, то $H^j(X') = 0$ при $j > n_0$. Поэтому $\tau^{\leq n_0+d}(X') \rightarrow X'$ — квазиизоморфизм. Здесь $(\tau^{\leq n_0+d}(X'))^k \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ при $k < n_0 + d$ и $(\tau^{\leq n_0+d}(X'))^k = 0$ при $k > n_0 + d$. Так как $H^k(\tau^{\leq n_0+d}(X')) = 0$ при $k > n_0$, то в силу условия (1.7.6) $(\tau^{\leq n_0+d}(X'))^{n_0+d} \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. Наконец, так как X ограничен, то квазиизоморфизм $X \rightarrow X'$ определяет квазиизоморфизм $X \rightarrow \tau^{\leq k} X'$ при $k \gg 0$. $\square$

Последнее предложение оказывается особенно важным в следующей ситуации.

Определение 1.7.9. Мы говорим, что категория $\mathcal{C}$ содержит достаточно много инъективных объектов, если для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ существуют инъективный объект $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и мономорфизм $X \rightarrow X'$.

Другими словами, в категории $\mathcal{C}$ достаточно много инъективных объектов, если ее подкатегория инъективных объектов удовлетворяет условию (1.7.5).

Предложение 1.7.10. Пусть категория $\mathcal{C}$ содержит достаточно много инъективных объектов, и пусть $\mathcal{I}$ — полная подкатегория инъективных объектов в ней. Тогда естественный функтор $\mathcal{K}^+(\mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{D}^+(\mathcal{C})$ является эквивалентностью категорий.

Доказательство. В силу предложения 1.7.7 достаточно показать, что

$$(1.7.7) \quad \mathcal{N} \cap \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I})) = 0,$$

т. е. что любой объект $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}^+(\mathcal{I}))$, такой, что $H^n(X) = 0$ для любого n , гомотопен нулю. Пусть $Z^n = \text{Ker } d_X^n$. Рассмотрим точные последовательности

$$(1.7.8) \quad 0 \longrightarrow Z^n \xrightarrow{i^n} X^n \xrightarrow{j^n} Z^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Индукцией по n получаем, что все Z^n инъективны. Поэтому последовательности (1.7.8) расщепляются и существуют морфизмы

$$k^n: X^n \rightarrow Z^n, \quad t^n: Z^{n+1} \rightarrow X^n,$$

такие, что $k^n \circ i^n = \text{id}_{Z^n}$, $j^n \circ t^n = \text{id}_{Z^{n+1}}$, $k^n \circ t^n = 0$ и $\text{id}_{X^n} = i^n \circ k^n + t^n \circ j^n$. Тогда $\text{id}_{X^n} = d_X^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_X^n$ и $s^n = t^{n-1} \circ k^n: X^n \rightarrow X^{n-1}$ — гомотопия. $\square$

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — абелева категория, а $\mathcal{C}'$ — полная абелева подкатегория в $\mathcal{C}$. Обозначим через $\mathbf{D}_{\mathcal{C}'}^+(\mathcal{C})$ полную триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^+(\mathcal{C})$, состоящую из тех комплексов, когомологии которых (как объекты) принадлежат $\mathcal{C}'$. Имеется естественный функтор

$$(1.7.9) \quad \mathbf{D}^+(\mathcal{C}') \xrightarrow{\delta} \mathbf{D}_{\mathcal{C}'}^+(\mathcal{C}).$$

Мы дадим полезный критерий того, что δ является эквивалентностью категорий. Сначала определение: подкатегория $\mathcal{C}'$ категории $\mathcal{C}$ называется *плотной*, если для любой точной последовательности $Y \rightarrow Y' \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Z'$ из $\mathcal{C}$, в которой Y, Y', Z, Z' принадлежат $\mathcal{C}'$, X также принадлежит $\mathcal{C}'$.

Предложение 1.7.11. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и $\mathcal{C}'$ — полная плотная абелева подкатегория в ней. Предположим, что для любого мономорфизма $f: X' \rightarrow X$, где $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, существует морфизм $g: X \rightarrow Y$, где $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, такой, что $g \circ f$ — мономорфизм. Тогда функтор δ из (1.7.9) является эквивалентностью категорий.

Доказательство. Достаточно доказать (см. предложение 1.6.5) следующий факт:

$$(1.7.10) \quad \begin{cases} \text{для любого } X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathcal{C}'}^+(\mathcal{C})) \text{ существуют} \\ X' \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}')) \text{ и квазиизоморфизм } X \xrightarrow{\sim} X'. \end{cases}$$

Построение объекта X' проводится так же, как в доказательстве предложения 1.7.7. Определив комплекс $X'_{\leq p} : \dots \rightarrow X'^{p-1} \rightarrow X'^p \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ и морфизм $X \rightarrow X'_{\leq p}$, такие, что $X'^j \in \text{Ob}(C')$, $H^j(X) \simeq H^j(X'_{\leq p})$ при $j < p$ и $H^p(X) \rightarrow \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1}$ является мономорфизмом, мы строим X'^{p+1} следующим образом.

Пусть $M = \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1} \oplus_{\text{Coker } d_X^{p-1}} \text{Ker } d_X^{p+1}$ и $N = \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1} \oplus_{\text{Coker } d_X^{p-1}} X^{p+1}$.

Существует точная последовательность (см. упр. 1.6. и (1.3.9))

$$0 \rightarrow H^p(X) \rightarrow \text{Coker } d_{X'_{\leq p}}^{p-1} \rightarrow M \rightarrow H^{p+1}(X) \rightarrow 0.$$

Следовательно, $M \in \text{Ob}(C')$. Из формулировки предложения следует существование мономорфизма $g: N \rightarrow X'^{p+1}$, $X'^{p+1} \in \text{Ob}(C')$, такого, что $g \circ i$ — мономорфизм ($i: M \rightarrow N$ — мономорфизм). Морфизмы $X'^p \rightarrow X'^{p+1}$ и $X'^{p+1} \rightarrow X'^{p+1}$ определяются естественным образом. Нетрудно проверить (как в доказательстве предложения 1.7.7), что комплекс $X'_{\leq p+1}$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

Замечание 1.7.12. В тех же предположениях δ индуцирует эквивалентность категорий $D^b(C') \simeq D_{C'}^b(C)$ (для доказательства нужно использовать функтор $\tau \leq^n$ при $n \gg 0$).

Комментарий 1.7.13. Повторим основные шаги построения категории $D(C)$. Мы начинаем с абелевой категории C и рассматриваем категорию $C(C)$ комплексов в C . После этого мы полагаем морфизмы, гомотопные нулю в $C(C)$, нулевыми морфизмами и приходим к категории $K(C)$. Преимущество категории $K(C)$ перед $C(C)$ состоит в том, что существуют диаграммы, не коммутативные в $C(C)$, которые становятся коммутативными в $K(C)$ (что делает $K(C)$ триангулированной категорией). Далее, мы хотим сделать так, чтобы морфизм в $K(C)$, индуцирующий изоморфизм в когомологиях, был обратимым. Для этого мы локализуем $K(C)$ и получаем категорию $D(C)$.

Обозначение 1.7.14. Пусть A — кольцо. Мы будем писать $D(A)$ вместо $D(\text{Mod}(A))$, если это не приводит к недоразумению.

1.8. Производные функторы

В этом разделе через C и C' будут обозначаться абелевы категории, а через $F: C \rightarrow C'$ — аддитивный функтор.

Пусть Q — естественный функтор $K^+(C) \rightarrow D^+(C)$ (или $K^+(C') \rightarrow D^+(C')$).

Определение 1.8.1. Пусть $T: \mathbf{D}^+(C) \rightarrow \mathbf{D}^+(C')$ — функтор триангулированных категорий, а s — морфизм функторов,

$$s: Q \circ K^+(F) \rightarrow T \circ Q,$$

где $K^+(F): K^+(C) \rightarrow K^+(C')$ — функтор, естественно ассоциированный с F . Предположим, что для любого функтора триангулированных категорий $G: \mathbf{D}^+(C) \rightarrow \mathbf{D}^+(C')$ морфизм

$$\text{Hom}(T, G) \rightarrow \text{Hom}(Q \circ K^+(F), G \circ Q)$$

является изоморфизмом.

Тогда пара (T, s) (единственная, с точностью до изоморфизма) называется *правым производным функтором* функтора F и обозначается через RF . Функтор $H^n \circ RF$ обозначается через $R^n F$ и называется *n -м производным функтором функтора F* .

Мы дадим полезный критерий существования функтора RF . Впредь до предложения 1.8.7 мы будем предполагать F точным слева.

Определение 1.8.2. Полная аддитивная подкатегория $\mathcal{I}$ категории C называется *инъективной по отношению к F* (или *F -инъективной*), если

- (i) выполнено условие (1.7.5);
- (ii) если $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в C и X' и X принадлежат $\text{Ob}(\mathcal{I})$, то $X'' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$;
- (iii) если $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в C и X', X, X'' принадлежат $\mathcal{I}$, то последовательность $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$ точна.

Отметим, что если выполнены условие (i) и (ii), то в (iii) достаточно предполагать только, что $X' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$, так как F точен слева.

Пусть подкатегория $\mathcal{I}$ F -инъективна. Тогда легко проверить, что F переводит объекты из $K^+(\mathcal{I})$, квазиизоморфные нулю, в объекты из $K^+(C')$, обладающие этим свойством. Поэтому композиция функторов

$$K^+(\mathcal{I}) \xrightarrow{K^+(F)} K^+(C') \longrightarrow \mathbf{D}^+(C')$$

пропускается через $K^+(\mathcal{I})/\mathcal{N} \cap \text{Ob}(K^+(\mathcal{I}))$, где $\mathcal{N}$ определено, как в (1.7.1). Так как категория $K^+(\mathcal{I})/\mathcal{N} \cap \text{Ob}(K^+(\mathcal{I}))$ эквивалентна категории $\mathbf{D}^+(C)$ (см. предложение 1.7.7), то мы получаем

Предложение 1.8.3. Пусть $\mathcal{I}$ есть F -инъективная подкатегория категории C . Тогда функтор из $K^+(\mathcal{I})/\mathcal{N} \cap \text{Ob}(K^+(\mathcal{I}))$ в $\mathbf{D}^+(C')$, построенный выше, является *правым производным функтором* функтора F .

Замечание 1.8.4. Из универсальности функтора RF следует, что эта конструкция не зависит от I .

Замечание 1.8.5. Пусть категория $\mathcal{C}$ содержит достаточно много инъективных объектов и $\mathcal{I}$ — полная подкатегория инъективных объектов из $\mathcal{C}$ (т. е. условие (1.7.5) выполнено). Тогда так как любая короткая точная последовательность в $\mathcal{I}$ расщепляется (см. упр. 1.5), то $\mathcal{I}$ является F -инъективной для любого точного слева функтора F . В частности, в этом случае RF всегда существует.

Замечание 1.8.6. Пусть $\mathcal{I}$ есть F -инъективная подкатегория категории $\mathcal{C}$, n — целое число, и пусть объект $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$ таков, что $H^k(X) = 0$, если $k < n$. Тогда $R^k F(X) = 0$ при $k < n$ и $R^n F(X) = F(H^n(X))$. Далее, для такого X найдется $X' \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$, квазиизоморфный X , такой, что $X'^k = 0$ при $k < n$. Конечно, если $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}))$, то $R^k F(X) = H^k F(X)$ для всех k . В частности, если $X \in \text{Ob}(\mathcal{I})$, то $R^k F(X) = 0$, если $k \neq 0$. (Объект X из $\mathcal{C}$ такой, что $R^k F(X) = 0$ при $k \neq 0$, называется F -ациклическим, см. упр. 1.19.)

Предложение 1.8.7. Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ — абелевы категории, а $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ и $F': \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ — точные слева функторы. Предположим, что существует полная аддитивная подкатегория $\mathcal{I}$ в $\mathcal{C}$ (соответственно $\mathcal{I}'$ в $\mathcal{C}'$), которая является F -инъективной (соответственно F' -инъективной), и, кроме того, $F(\text{Ob}(\mathcal{I})) \subset \text{Ob}(\mathcal{I}')$. Тогда $\mathcal{I}$ является $(F' \circ F)$ -инъективной и

$$(1.8.1) \quad R(F' \circ F) = RF' \circ RF.$$

Доказательство — прямая проверка.

Заметим, что из существования функторов RF , RF' и $R(F' \circ F)$ вытекает существование канонического морфизма функторов

$$(1.8.2) \quad R(F' \circ F) \rightarrow RF' \circ RF.$$

В самом деле, мы имеем равенство

$$\text{Hom}(R(F' \circ F), RF' \circ RF) = \text{Hom}(Q \circ \mathbf{K}^+(F') \circ \mathbf{K}^+(F), RF' \circ RF \circ Q)$$

и существуют морфизмы

$$\begin{aligned} Q \circ \mathbf{K}^+(F) &\xrightarrow{\alpha} RF \circ Q, \\ Q \circ \mathbf{K}^+(F') &\xrightarrow{\beta} RF' \circ Q, \end{aligned}$$

что дает цепочку морфизмов

$$Q \circ K^+(F') \circ K^+(F) \xrightarrow{\beta \circ K^+(F)} RF' \circ Q \circ K^+(F) \xrightarrow{RF' \circ \alpha} RF' \circ RF \circ Q.$$

Предложение 1.8.8. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории, F', F и F'' — точные слева функторы из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}'$, а $\lambda: F' \rightarrow F$ и $\mu: F \rightarrow F''$ — морфизмы функторов. Пусть $\mathcal{I}$ — полная аддитивная подкатегория в $\mathcal{C}$, инъективная по отношению к F', F и F'' . Предположим, что справедливо условие

(1.8.3) для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ последовательность $0 \rightarrow F'(X) \rightarrow F(X) \rightarrow F''(X) \rightarrow 0$ точна.

Тогда существует естественный морфизм функторов $\nu: RF'' \rightarrow RF'[1]$, такой, что для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ последовательность

$$RF'(X) \xrightarrow{R\lambda(X)} RF(X) \xrightarrow{R\mu(X)} RF''(X) \xrightarrow{\nu(X)} RF'(X)[1]$$

является выделенным треугольником в $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$.

Доказательство. Для любого $X \in \text{Ob}(K^+(\mathcal{I}))$ существует точная последовательность

$$0 \rightarrow F'(X^n) \xrightarrow{\lambda(X^n)} F(X^n) \xrightarrow{\mu(X^n)} F''(X^n) \rightarrow 0.$$

Из замечания 1.7.5 следует, что $F''(X)$ изоморфен конусу $M(\lambda(X))$ морфизма $\lambda(X)$ (в категории $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$).

Морфизм $\alpha(\lambda(X)): M(\lambda(X)) \rightarrow F'(X)[1]$ порождает морфизм в категории $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}')$ из $F''(X)$ в $F'(X)[1]$. Факторизуя, получаем

$$\nu: RF'' \rightarrow RF'[1].$$

Дальнейшие рассуждения очевидны. □

В заключительной части параграфа рассмотрим случай точного справа функтора F . Обращая стрелки, определяем F -проективную подкатегорию категории $\mathcal{C}$ и левый производный функтор, обозначаемый через LF .

Точнее, полная аддитивная подкатегория $\mathcal{P}$ категории $\mathcal{C}$ называется F -проективной (F точен справа), если

- (i) для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ найдутся $X' \in \text{Ob}(\mathcal{P})$ и точная последовательность $X' \rightarrow X \rightarrow 0$;
- (ii) если $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}$, а X'' и X принадлежат $\text{Ob}(\mathcal{P})$, то $X' \in \text{Ob}(\mathcal{P})$;
- (iii) если $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}$, а X', X, X'' принадлежат $\text{Ob}(\mathcal{P})$, то последовательность $0 \rightarrow F(X') \rightarrow F(X) \rightarrow F(X'') \rightarrow 0$ точна.

Построение левого производного функтора

$$LF: \mathbf{D}^-(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{C}')$$

аналогично построению правого производного функтора.

Пример 1.8.9. Пусть A — кольцо. Тогда категория $\text{Мод}(A)$ содержит достаточно много инъективных и проективных объектов (см. [Cartan–Eilenberg 1]). Более того, пусть M — правый A -модуль. Тогда категория (левых) плоских A -модулей является проективной по отношению к функтору $M \otimes_A \cdot$.

В следующих главах мы рассмотрим многочисленные примеры производных функторов.

Замечание 1.8.10. Конструкция производных функторов может быть обобщена на функторы, определенные только на $K^+(C)$. Точнее, пусть F — функтор триангулированных категорий из $K^+(C)$ в $K^+(C')$. Пусть дана полная триангулированная подкатегория I категории $K^+(C)$, такая, что выполнены следующие условия (1.8.4) и (1.8.5):

(1.8.4) для любого $X \in \text{Ob}(K^+(C))$ существует квазиизоморфизм $X \rightarrow X'$, где $X' \in \text{Ob}(I)$;

(1.8.5) если $X \in \text{Ob}(I)$ квазиизоморфен нулю, то $F(X)$ также квазиизоморфен нулю.

Тогда функтор $RF: D^+(C) \rightarrow D^+(C')$ определяется так же, как в предложении 1.8.3, и обладает свойством универсальности из определения 1.8.1.

Замечание 1.8.11. Пусть $F: C \rightarrow C'$ — контравариантный функтор. Тогда следующим образом определим контравариантный функтор $K(F): K(C) \rightarrow K(C')$. Если $X = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}} \in C(C)$, то

$$(1.8.6) \quad \begin{cases} (K(F)(X))^n = F(X^{-n}), \\ d_{K(F)(X)}^n = (-1)^{n+1} F(d_X^{-n-1}). \end{cases}$$

Если в качестве F взять канонический контравариантный функтор $C^\circ \rightarrow C$, то $K(C^\circ) \simeq (K(C))^\circ$ и, если C абелева, $D(C^\circ) \simeq (D(C))^\circ$. Кроме того, $K^\pm(C^\circ) \simeq (K^\mp(C))^\circ$ и $D^\pm(C^\circ) \simeq (D^\mp(C))^\circ$.

1.9. Двойные комплексы

Пусть C — аддитивная категория.

Определение 1.9.1. Двойной комплекс (X, d_X) в C определяется набором данных $\{X^{n,m}, d_X^{n,m}, d_X^{\prime\prime n,m}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$, где $X^{n,m} \in \text{Ob}(C)$, $d_X^{n,m}: X^{n,m} \rightarrow X^{n+1,m}$ и $d_X^{\prime\prime n,m}: X^{n,m} \rightarrow X^{n,m+1}$ для всех пар (n, m) , причем имеют место равенства

$$(1.9.1) \quad d_X^{\prime\prime 2} = 0, \quad d_X^{\prime\prime 2} = 0, \quad d_X' \circ d_X'' = d_X'' \circ d_X'.$$

Условия (1.9.1) означают, что $d_X^{n+1,m} \circ d_X^{n,m} = 0$ (аналогично понимаются другие условия).

Мы иногда будем называть *простым комплексом* комплекс в смысле определения 1.3.1.

Пусть X и Y — двойные комплексы. Морфизм f из X в Y определяется очевидным образом. Таким образом мы получаем категорию $C^2(C)$ двойных комплексов на категории C .

Пусть X — двойной комплекс. Для заданного $n \in \mathbb{Z}$ пусть X_I^n обозначает простой комплекс

$$\{X^{n,m}, d_X^{n,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}.$$

Семейство морфизмов $\{d_X^{n,m}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ определяет морфизм

$$d_I^n: X_I^n \rightarrow X_I^{n+1}.$$

Очевидно, что $d_I^{n+1} \circ d_I^n = 0$. То есть мы построили функтор

$$\begin{aligned} F_I: C^2(C) &\rightarrow C(C(C)), \\ X &\mapsto \{X_I^n, d_I^n\}, \end{aligned}$$

который является эквивалентностью категорий.

Аналогично, используя d'' вместо d' , получаем эквивалентность

$$\begin{aligned} F_{II}: C^2(C) &\rightarrow C(C(C)), \\ X &\mapsto \{X_{II}^m, d_{II}^m\}, \end{aligned}$$

где $X_{II}^m = \{X^{n,m}, d_X^{n,m}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $d_{II}^m = \{d_X^{n,m}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Предположим, что X удовлетворяет следующему условию конечности:

(1.9.2) множество $\{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n + m = k, X^{n,m} \neq 0\}$ конечно для любого $k \in \mathbb{Z}$.

Тогда можно построить по X простой комплекс $s(X)$, положив

$$s(X)^k = \bigoplus_{k=n+m} X^{n,m}.$$

Пусть $i_{n,m}: X^{n,m} \rightarrow \bigoplus_{k=n'+m'} X^{n',m'}$ и $p_{n,m}: \bigoplus_{k=n'+m'} X^{n',m'} \rightarrow X^{n,m}$ — естественные морфизмы из $X^{n,m}$ в $s(X)^k$ и из $s(X)^k$ в $X^{n,m}$ соответственно. Определим

$$d_s^k(X): s(X)^k \rightarrow s(X)^{k+1}$$

следующим образом:

$$(1.9.3) \quad p_{n',m'} \circ d_{s(X)}^k \circ i_{n,m} = \begin{cases} d_X^{n,m}, & \text{если } m = m', \\ (-1)^n d_X^{n,m}, & \text{если } n = n', \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для $n + m = k$, $n' + m' = k + 1$.

Предложение 1.9.2. Набор данных $\{s(X)^k, d_{s(X)}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ определяет комплекс в $\mathcal{C}$, т. е. $d_{s(X)}^{k+1} \circ d_{s(X)}^k = 0$.

Доказательство очевидно.

Мы назовем $s(X)$ *простым комплексом, ассоциированным с X* .

Можно рассматривать множество объектов из $\mathcal{C}^2(\mathcal{C})$, удовлетворяющих (1.9.2), как полную аддитивную подкатегорию $\mathcal{C}_f^2(\mathcal{C})$ в $\mathcal{C}^2(\mathcal{C})$. Тогда $s(\cdot)$ становится аддитивным функтором:

$$(1.9.4) \quad s(\cdot): \mathcal{C}_f^2(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}).$$

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — абелева категория.

Определим функторы $\tau_I^{\leq n}$, $\tau_I^{\geq n}$, $\tau_{II}^{\leq m}$, $\tau_{II}^{\geq m}$, используя эквивалентности F_I и F_{II} . Например,

$$\tau_I^{\leq n} = (F_I)^{-1} \circ \tau^{\leq n} \circ F_I.$$

Другими словами, $\tau_I^{\leq n}(X)$ — это двойной комплекс

$$\dots \longrightarrow X^{n-1,\cdot} \xrightarrow{d_X^{n-1,\cdot}} X^{n,\cdot} \longrightarrow \text{Ker } d_X^{n,\cdot} \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

или, что эквивалентно, комплекс в категории $\mathcal{C}(\mathcal{C})$

$$\dots \longrightarrow X_I^{n-1} \xrightarrow{d_I^{n-1}} X_I^n \longrightarrow \text{Ker } d_I^n \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Введем также простой комплекс

$$(1.9.5) \quad H_I^p(X) = H^p(F_I(X))$$

и двойной комплекс

$$(1.9.6) \quad H_I(X): \dots \longrightarrow H_I^p(X) \xrightarrow{0} H_I^{p+1}(X) \longrightarrow \dots$$

Аналогично поступим для $H_{II}^q(X)$ и $H_{II}(X)$.

Теорема 1.9.3 Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм двойных комплексов, причем X и Y удовлетворяют условию (1.9.2). Предположим, что f индуцирует изоморфизм

$$f: H_I H_{II}(X) \simeq H_I H_{II}(Y).$$

Тогда $s(f): s(X) \rightarrow s(Y)$ — квазиизоморфизм.

Доказательство. Пусть $q \in \mathbb{Z}$. Имеем коммутативную диаграмму выделенных треугольников

$$\begin{array}{ccccc} s\tau_{II}^{\leq q-1}(X) & \longrightarrow & s\tau_{II}^{\leq q}(X) & \longrightarrow & H_{II}^q(X)[-q] \xrightarrow{+1} \\ \downarrow s\tau_{II}^{\leq q-1}(f) & & \downarrow s\tau_{II}^{\leq q}(f) & & \downarrow H_{II}^q(f)[-q] \\ s\tau_{II}^{\leq q-1}(Y) & \longrightarrow & s\tau_{II}^{\leq q}(Y) & \longrightarrow & H_{II}^q(Y)[-q] \xrightarrow{+1} \end{array}$$

(см. упр. 1.25).

Предположим, что $X_{II}^q = 0$ при $q \ll 0$.

Тогда, так как $s\tau_{II}^{\leq q-1}(f)$ квазиизоморфен нулю при $q \ll 0$ и $H_{II}^q(f)$ является квазиизоморфизмом для всех q по условию, $s\tau_{II}^{\leq q}(f)$ будет квазиизоморфизмом при всех q . Поскольку $H^k(s\tau_{II}^{\leq q}(f)) = H^k(s(f))$ при $q \gg 0$ и фиксированном k (см. упр. 1.25), в рассматриваемом случае утверждение доказано. В общем случае мы применим полученный результат к функтору $\tau_{II}^{\geq q}(f)$. При фиксированном k имеем $H^k(s(f)) = H^k(s\tau_{II}^{\geq q}(f))$ для $q \ll 0$, что доказывает утверждение в общем случае. $\square$

Отметим, что s преобразует морфизмы, гомотопные нулю, в морфизмы, гомотопные нулю. Точнее, морфизм $f: X \rightarrow Y$ в $\mathbf{C}_f^2(\mathcal{C})$ называется *гомотопным нулю*, если найдутся морфизмы $t_1^{n,m}: X^{n,m} \rightarrow Y^{n-1,m}$ и $t_2^{n,m}: X^{n,m} \rightarrow Y^{n,m-1}$, такие, что

$$d'^{n-1,m} \circ t_1^{n,m} = t_1^{n+1,m} \circ d'^{n,m},$$

$$d'^{n,m-1} \circ t_2^{n,m} = t_2^{n,m+1} \circ d'^{n,m},$$

$$f^{n,m} = d'^{n-1,m} \circ t_1^{n,m} + t_1^{n+1,m} \circ d'^{n,m} + d'^{n,m-1} \circ t_2^{n,m} + t_2^{n,m+1} \circ d'^{n,m}.$$

Тогда морфизм $s(f): s(X) \rightarrow s(Y)$ гомотопен нулю. В частности, если $F_I(f): F_I(X) \rightarrow F_I(Y)$ гомотопен нулю, то $s(f)$ гомотопен нулю. Аналогичные утверждения справедливы для морфизма $F_{II}(f)$.

1.10. Бифункторы

Пусть $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ — категории.

Определение 1.10.1. Бифунктором F из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ в $\mathcal{C}''$ называется следующий набор данных:

- (i) отображение $F: \text{Ob}(\mathcal{C}) \times \text{Ob}(\mathcal{C}') \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{C}'')$;
- (ii) для любой пары $(X, Y) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и любой пары $(X', Y') \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ отображение $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y') \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}''}(F(X, X'), F(Y, Y'))$, такое, что отображение $F(X, \cdot)$ (соответственно $F(\cdot, X')$) является функтором из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}''$ (соответственно из $\mathcal{C}'$ в $\mathcal{C}''$) и, если $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X', Y')$, имеет место равенство $F(f, Y') \circ F(X, g) = F(Y, g) \circ F(f, X')$.

Бифунктор называется *аддитивным*, *точным слева*, *точным справа*, *бифунктором триангулированных категорий*, *когомологическим бифунктором* и т. д., если он является таковым по каждой переменной.

Морфизм бифункторов определяется очевидным образом.

Пример 1.10.2. $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ является бифунктором из $\mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C}$ в Set .

Пример 1.10.3. Пусть A — кольцо. Тогда $\cdot \oplus_A \cdot$ является бифунктором из $\text{Mod}(A^{op}) \times \text{Mod}(A)$ в $\text{Mod}(\mathbb{Z})$.

Предположим теперь, что $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ — абелевы категории, а F — точный слева аддитивный бифунктор из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ в $\mathcal{C}''$.

Если $X \in \text{Ob}(\mathcal{C}^+(\mathcal{C}))$ и $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}^+(\mathcal{C}'))$, то $F(X, X')$ — двойной комплекс в $\mathcal{C}''$. Связывая с $F(X, X')$ простой комплекс $s(F(X, X'))$, определим бифунктор

$$\mathcal{C}^+(F): \mathcal{C}^+(\mathcal{C}) \times \mathcal{C}^+(\mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{C}^+(\mathcal{C}'')$$

а факторизуя — бифунктор

$$\mathcal{K}^+(F): \mathcal{K}^+(\mathcal{C}) \times \mathcal{K}^+(\mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{K}^+(\mathcal{C}'')$$

(факторизация возможна — см. последнее замечание в § 1.9).

Для того чтобы определить производный функтор от бифунктора, удобно начать с рассмотрения бифунктора триангулированных категорий. Пусть $F: \mathcal{K}^+(\mathcal{C}) \times \mathcal{K}^+(\mathcal{C}') \rightarrow \mathcal{K}^+(\mathcal{C}'')$ — бифунктор триангулированных категорий. Пусть $\mathcal{I}$ (соответственно $\mathcal{I}'$) — полная триангулированная подкатегория в $\mathcal{K}^+(\mathcal{C})$ (соответственно в $\mathcal{K}^+(\mathcal{C}')$).

Рассмотрим следующие два условия:

$$(1.10.1) \quad \begin{cases} \text{для любого } X \in \text{Ob}(K^+(C)) \text{ (соответственно} \\ \text{Ob}(K^+(C')))) \text{ существует квазиизоморфизм } X \rightarrow Y, \\ \text{где } Y \in \text{Ob}(I) \text{ (соответственно } \text{Ob}(I'))); \end{cases}$$

$$(1.10.2) \quad \begin{cases} \text{для любого } X \in \text{Ob}(I) \text{ и любого } X' \in \text{Ob}(I') \\ \text{комплекс } F(X, X') \text{ квазиизоморфен нулю,} \\ \text{если } X \text{ или } X' \text{ квазиизоморфен нулю.} \end{cases}$$

Предложение 1.10.4. Если условия (1.10.1) и (1.10.2) выполнены, то существует бифунктор триангулированных категорий $RF: D^+(C) \times D^+(C') \rightarrow D^+(C'')$, делающий диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I \times I' & \xrightarrow{F} & K^+(C'') \\ \downarrow Q \times Q' & & \downarrow Q'' \\ D^+(C) \times D^+(C') & \xrightarrow{RF} & D^+(C'') \end{array}$$

коммутативной (здесь Q , Q' и Q'' — функторы локализации, определяющие категории $D^+(C)$, $D^+(C')$ и $D^+(C'')$ соответственно).

Производный функтор RF обладает следующим свойством универсальности: для любого бифунктора триангулированных категорий $G: D^+(C) \times D^+(C') \rightarrow D^+(C'')$ канонический гомоморфизм

$$\text{Hom}(RF, G) \rightarrow \text{Hom}(Q'' \circ F, G \circ (Q \times Q'))$$

является изоморфизмом. Здесь $Q'' \circ F$ и $G \circ (Q \times Q')$ являются бифункторами из $K^+(C) \times K^+(C')$ в $D^+(C'')$.

Доказательство очевидно.

Следствие 1.10.5. Пусть $F: K^+(C) \times K^+(C') \rightarrow K^+(C'')$ — бифунктор триангулированных категорий. Предположим, что существует полная подкатегория I в $K^+(C)$, такая, что

$$(1.10.3) \quad \text{для любого } Y \in \text{Ob}(K^+(C')) \text{ условия (1.8.4) и (1.8.5) выполнены по отношению к функтору } F(\cdot, Y);$$

$$(1.10.4) \quad \text{для любого } X \in \text{Ob}(I) \text{ и любого } Y \in \text{Ob}(K^+(I')) \text{ объект } F(X, Y) \text{ квазиизоморфен нулю, если } Y \text{ квазиизоморфен нулю.}$$

Тогда для F существует производный функтор RF , а при фиксированном $Y \in \text{Ob}(K^+(C'))$ для функтора $F(\cdot, Y): K^+(C) \rightarrow K^+(C'')$ существует производный функтор, обозначаемый через $R_I F(\cdot, Y)$. Кроме того, если $X \in \text{Ob}(K^+(C))$, то существует естественный изоморфизм

$$RF(X, Y) \simeq R_I F(X, Y).$$

Доказательство. Существование функтора $R_I F(\cdot, Y)$ вытекает из замечания 1.8.10. Положив $I' = K^+(C')$, получаем, что существование RF есть следствие предложения 1.10.4. Равенство $RF(X, Y) = R_I F(X, Y)$ следует из конструкции производного функтора. $\square$

Вернемся к ситуации, когда F — точный слева бифунктор из $C \times C'$ в C'' . Пусть I (соответственно I') — полная аддитивная подкатегория в C (соответственно в C').

Определение 1.10.6. Назовем пару (I, I') F -инъективной, если для любого $X \in \text{Ob} I$ и любого $X' \in \text{Ob}(I')$ категория I является $F(\cdot, X')$ -инъективной, а I' является $F(X, \cdot)$ -инъективной.

Предложение 1.10.7. Пусть пара (I, I') F -инъективна; тогда пара $(K^+(I), K^+(I'))$ удовлетворяет условиям (1.10.1)–(1.10.2).

Доказательство. Выполнение условий (1.10.1) следует из предложения 1.7.7. Проверим справедливость (1.10.2). Сначала докажем, что $F(X, Y)$ квазиизоморфен нулю, если $X \in \text{Ob}(I)$, $Y \in \text{Ob}(K^+(I'))$ и Y квазиизоморфен нулю. В этом случае

$$H_{II'}^q(F(X, Y)) = 0 \text{ для всех } q.$$

Применяя теорему 1.9.3, получаем, что $F(X, Y)$ квазиизоморфен нулю. Аналогично проводятся рассуждения, если поменять ролями X и Y . $\square$

Следствие 1.10.8. Пусть $F: C \times C' \rightarrow C''$ — точный слева бифунктор абелевых категорий. Предположим, что существует полная аддитивная подкатегория I категории C , удовлетворяющая условиям (i)–(iii) определения 1.8.2 по отношению к функтору $F(\cdot, Y)$ для любого $Y \in \text{Ob}(C')$. Пусть, кроме того, функтор $F(X, \cdot)$ точен при $X \in \text{Ob}(I)$. Тогда категория $K^+(I)$ удовлетворяет условиям (1.10.3)–(1.10.4).

Доказательство. Утверждение является следствием предложения 1.10.7. $\square$

Предложение 1.10.9. Пусть $F: \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ — точный слева бифунктор абелевых категорий, а $G: \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'''$ — точный слева функтор абелевых категорий. Предположим, что существуют полные аддитивные подкатегории $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$ и $\mathcal{I}''$ категорий $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ и $\mathcal{C}''$ соответственно, такие, что пара $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ F -инъективна, категория $\mathcal{I}''$ G -инъективна и

$$(1.10.5) \quad F(\text{Ob}(\mathcal{I}), \text{Ob}(\mathcal{I}')) \subset \text{Ob}(\mathcal{I}'').$$

Тогда существует производный функтор $R(G \circ F): \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \times \mathbf{D}^+(\mathcal{C}') \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}''')$ и

$$R(G \circ F) \simeq RG \circ RF.$$

Доказательство очевидно.

Аналогичные результаты справедливы и для других композиций функторов.

Замечание 1.10.10. Если мы в следствии 1.10.5 поменяем роли $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$, то определим функтор $R_{II}F(X, \cdot)$. Разумеется,

$$(1.10.6) \quad R_I F(X, Y) \simeq R_{II} F(X, Y) \simeq RF(X, Y).$$

Пример 1.10.11. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Тогда $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ является аддитивным бифунктором из $\mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C}$ в $\text{Mod}(\mathbb{Z})$. Если $\mathcal{C}$ содержит достаточно много инъективных (или проективных) объектов, то $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ имеет правый производный функтор

$$R \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot): (\mathbf{D}^-(\mathcal{C}))^{\circ} \times \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\text{Mod}(\mathbb{Z})).$$

Функтор $H^n(\cdot) \circ R \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ обозначается через $\text{Ext}_{\mathcal{C}}^n(\cdot, \cdot)$.

Пример 1.10.12. Пусть A — кольцо. Тогда $\cdot \otimes_A \cdot$ — аддитивный бифунктор из $\text{Mod}(A^{\text{op}}) \times \text{Mod}(A)$ в $\text{Mod}(\mathbb{Z})$. Он является точным справа функтором по обоим переменным. Обозначим через $\cdot \otimes_A^L \cdot$ левый производный функтор из $\mathbf{D}^-(\text{Mod}(A^{\text{op}})) \times \mathbf{D}^-(\text{Mod}(A))$ в $\mathbf{D}^-(\text{Mod}(\mathbb{Z}))$. Тогда если N и M — модули, то $H^{-n}(N \otimes_A^L M)$ обозначается через $\text{Tor}_n^A(N, M)$.

Обозначения 1.10.13. Пусть A — коммутативное кольцо. Производные функторы от $\text{Hom}_A(\cdot, \cdot)$ и $\cdot \otimes_A \cdot$ со значениями в $\mathbf{D}(\text{Mod}(A))$ будут по-прежнему обозначаться через $R \text{Hom}_A(\cdot, \cdot)$ и $\cdot \otimes_A^L \cdot$.

Замечание 1.10.14. Пусть $F: \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ — бифунктор абелевых категорий, и пусть $G: \mathcal{C}' \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$ — бифунктор, определенный формулой $G(Y, X) = F(X, Y)$. Определим изоморфизм $r: K^+(F) \xrightarrow{\sim} K^+(G)$ следующим образом. Пусть $X = (X^n)_{n \in \mathbb{Z}}, Y = (Y^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — объекты из $\mathcal{C}(\mathcal{C})$ и $\mathcal{C}(\mathcal{C}')$ соответственно. Тогда $r(X, Y)$ есть прямая сумма морфизмов $(-1)^{nm} \cdot \text{id}: F(X^n, Y^m) \rightarrow G(Y^m, X^n)$. Легко проверить, что $r(X, Y)$ является морфизмом простых комплексов.

Замечание 1.10.15. Пусть $F: \mathcal{C}' \times \mathcal{C}^0 \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$ — трифунктор и $G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ — функтор. Предположим, что для всех $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и всех $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ морфизм

$$\alpha(Y, X): F(Y, X, X) \rightarrow G(Y)$$

является функториальным по Y и, кроме того, для любого морфизма $f: X \rightarrow X'$ в $\mathcal{C}$ диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & F(Y, X', X') & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ F(Y, X', X) & & & & G(Y) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & F(Y, X, X) & & \end{array}$$

коммутативна. Тогда для любых $Y \in \text{Ob}(K(\mathcal{C}'))$ и $X \in \text{Ob}(K(\mathcal{C}))$ можно определить морфизм

$$K(\alpha)(Y, X): K(F)(Y, X, X) \rightarrow K(G)(Y)$$

как прямую сумму морфизмов

$$F(Y^m, X^n, X^n) \rightarrow G(Y^m).$$

Легко проверяется, что $K(\alpha)(X, Y)$ является морфизмом комплексов (нужно использовать соглашение из замечания 1.8.11).

Например, если A — коммутативное кольцо конечной глобальной размерности (см. упр. 1.28), то для X и Y из $D^b(\mathcal{M}od(A))$ мы можем определить морфизм

$$(1.10.7) \quad D(\alpha)(Y, X): R\text{Hom}_A(X, Y) \overset{L}{\otimes}_A X \rightarrow Y.$$

В самом деле, рассмотрим квазиизоморфизм $Y \rightarrow I$, где I ограничен и инъективен, и квазиизоморфизм $P \rightarrow X$, где P ограничен и проективен. Тогда морфизм

$$K(\alpha)(I, P): R\text{Hom}_A(P, I) \otimes_A P \rightarrow I$$

корректно определен (см. замечание выше) и задает $D(\alpha)(Y, X)$.

Замечание 1.10.16. Пусть F таков, как в замечании 1.10.14. отождествим $F(X[p], Y) \simeq F(X, Y)[p]$ с помощью формулы

$$F(X[p], Y)^n \simeq \prod_k F(X^{k+p}, Y^{n-k}) \simeq (F(X, Y)[p])^n$$

и $F(X, Y)[q] \simeq F(X, Y)[q]$ с помощью формулы

$$(F(X, Y[q]))^n \simeq \prod_k F(X^k, Y^{n+q-k}) \xrightarrow{(-1)^{k \cdot q}} \prod_k F(X^k, Y^{n+q-k}) \simeq (F(X, Y)[q])^n$$

так, чтобы эти отождествления были морфизмами комплексов.

Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F(X[p], Y[q]) & \longrightarrow & F(X, Y[q])[p] \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(X[p], Y)[q] & \longrightarrow & F(X, Y)[p+q] \end{array}$$

коммукативна или антикоммукативна в зависимости от четности числа pq .

Замечание 1.10.17. Проблемы правильной расстановки знаков являются довольно тонкими. Они подробно рассмотрены в работе [Deligne 1], а также на первых страницах книги [Berthelot–Green–Messing 1]. Соглашения, принятые авторами последней книги, отличаются от наших. В частности, в (1.4.3) они заменяют β на $-\beta$.

1.11. Ind-объекты и pro-объекты

Пусть $\mathcal{C}^\vee$ — категория контравариантных функторов из $\mathcal{C}$ в $\mathbf{Set}$, а $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^\vee$ — функтор $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X)$. Этот функтор делает $\mathcal{C}$ полной подкатегорией в $\mathcal{C}^\vee$ (см. § 1). Напомним, что контравариантный функтор $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ называется *представимым*, если F изоморфен объекту из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{C}^\vee$.

Пусть $\mathcal{I}$ — категория. *Индуктивной системой* в $\mathcal{C}$, *индексированной категорией* $\mathcal{I}$, называется функтор из $\mathcal{I}$ в $\mathcal{C}$. Аналогично, *проективной системой* называется функтор из $\mathcal{I}^\circ$ в $\mathcal{C}$. Определим проективную систему $F_\bullet$ в $\mathbf{Set}$, индексированную категорией $\mathcal{I}$, формулой $F_\bullet(i) = \{\text{pt}\}$ для любого $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$. Тогда для проективной системы $F: \mathcal{I}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$, индексированной категорией $\mathcal{I}$, множество морфизмов

из F_0 в F называется *проективным пределом* функтора F и обозначается $\varprojlim_I F$ или $\varprojlim_{i \in I} F(i)$. Точнее, $\varprojlim_I F$ состоит из таких наборов $\{x(i)\}_{i \in \text{Ob}(I)}$, что $x(i) \in F(i)$ и $F(h)x(j) = x(i)$ для любого $h: i \rightarrow j$.

Мы будем иногда писать $i \in I$ вместо $i \in \text{Ob}(I)$ и $\varprojlim_i$ вместо $\varprojlim_{i \in I}$.

Определение 1.11.1. Пусть I и C — категории.

- (а) Если F — индуктивная система в C , индексированная категорией I , то $\varinjlim_I F$ обозначает функтор

$$X \mapsto \varinjlim_{i \in I} \text{Hom}_C(F(i), X)$$

из C в Set .

- (б) Если F — проективная система в C , индексированная категорией I , то $\varprojlim_I F$ обозначает функтор

$$X \mapsto \varprojlim_{i \in I} \text{Hom}_C(X, F(i))$$

из C^0 в Set .

Если эти функторы представимы, то мы сохраним те же обозначения для представляющих объектов в C и будем называть эти объекты *индуктивным* и *проективным пределами* соответственно.

Если F — проективная система в Set , то определение 1.11.1(б) эквивалентно данному ранее.

Определение 1.11.2. Категория I называется *фильтрованной*, если выполнены следующие условия:

$$(1.11.1) \quad \begin{cases} \text{для } i, j \in \text{Ob}(I) \text{ найдется } k \in \text{Ob}(I) \\ \text{и морфизмы } i \rightarrow k, j \rightarrow k; \end{cases}$$

$$(1.11.2) \quad \begin{cases} \text{для любых двух морфизмов } f, g \in \text{Hom}_I(i, j) \\ \text{найдется морфизм } h: j \rightarrow k, \text{ такой, что } h \circ f = h \circ g. \end{cases}$$

Легко доказывается следующее предложение.

Предложение 1.11.3. Пусть F — индуктивная система в Set , индексированная фильтрованной категорией I . Тогда $\varinjlim_I F$ может

быть представлен как $(\coprod_{i \in \text{Ob}(I)} F(i)) / \sim$, где $x \sim y$ для $x \in F(i)$ и $y \in F(j)$ тогда и только тогда, когда существуют объект $k \in \text{Ob}(I)$ и морфизмы $f: i \rightarrow k$, $g: j \rightarrow k$, такие, что $F(f)x = F(g)y$.

Определение 1.11.4. Пусть $\mathcal{I}$ и $\mathcal{C}$ — категории, причем категория $\mathcal{I}$ фильтрованная.

- (а) Для индуктивной системы F в $\mathcal{C}$, индексированной категорией $\mathcal{I}$, через " $\varinjlim_{\mathcal{I}}$ " F мы обозначим функтор

$$X \mapsto \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(i))$$

из $\mathcal{C}^{\circ}$ в $\mathbf{Set}$.

- (б) Для проективной системы F в $\mathcal{C}$, индексированной категорией $\mathcal{I}$, через " $\varprojlim_{\mathcal{I}}$ " F мы обозначим функтор

$$X \mapsto \varprojlim_{i \in \mathcal{I}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X).$$

из $\mathcal{C}$ в $\mathbf{Set}$.

Если эти функторы представимы, то так же будут обозначаться и представляющие их объекты в $\mathcal{C}$.

Функтор из $\mathcal{C}^{\circ}$ (соответственно из $\mathcal{C}$) в $\mathbf{Set}$ (т. е. объект из $\mathcal{C}^{\vee}$ (соответственно из $\mathcal{C}^{\wedge}$)) называется *ind-объектом* (соответственно *pro-объектом*), если он изоморфен " $\varinjlim_{\mathcal{I}}$ " F (соответственно " $\varprojlim_{\mathcal{I}}$ " F) для

индуктивной (соответственно проективной) системы F , индексированной фильтрованной категорией $\mathcal{I}$.

Пример 1.11.5. Пусть $(I, \leq)$ — упорядоченное множество. Мы сопоставляем множеству I категорию $\mathcal{I}$ следующим образом:

$$(1.11.3) \quad \begin{cases} \text{Ob}(\mathcal{I}) = I, \\ \text{Hom}_{\mathcal{I}}(i, j) \text{ состоит из единственного элемента } s_{ji}, \\ \text{если } i \leq j, \text{ и пуст в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда индуктивная система F в $\mathcal{C}$, индексированная множеством I , есть по определению индуктивная система в $\mathcal{C}$, индексированная категорией $\mathcal{I}$.

Обычно вместо F пишут $\{X_i, \rho_{j,i}\}$, где $X_i = F(i)$, $\rho_{j,i} = F(s_{ji})$. Аналогично определяется проективная система, индексированная категорией $\mathcal{I}$. Если I — направленное упорядоченное множество (т. е. для любых $i \in I$, $j \in I$ найдется $k \in I$, такой, что $k \geq i$, $k \geq j$), то категория $\mathcal{I}$ является фильтрованной.

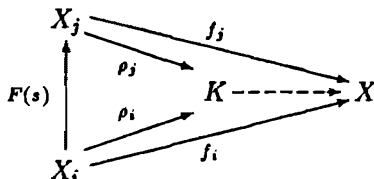
Пусть F — индуктивная система в $\mathcal{C}$, индексированная фильтрованной категорией $\mathcal{I}$. Предположим, что $\varinjlim_j F(j)$ представим, и обозначим через K представляющий его объект. Имеем

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(K, K) \simeq \varprojlim_j \text{Hom}_{\mathcal{C}}(F(j), K).$$

Этот изоморфизм определяет семейство морфизмов $\rho_j : F(j) \rightarrow K$, удовлетворяющих условию

$$(1.11.4) \quad \rho_j \circ F(s) = \rho_i \quad \text{для любого } s: i \rightarrow j,$$

а $\{K, \rho_i\}_i$ обладает свойством универсальности, описываемым диаграммой



То есть для любого семейства морфизмов $f_i : X_i \rightarrow X$, таких, что $f_j \circ F(s) = f_i$ при всех $s: i \rightarrow j$, существует (единственная) пунктирная стрелка, делающая диаграмму коммутативной.

Пусть теперь " $\varinjlim_j F(j)$ " представим, а L — представляющий его объект. Для любого $i \in \text{Ob}(I)$ изоморфизм

$$\text{Hom}_C(F(i), L) \simeq \varinjlim_j \text{Hom}_C(F(i), F(j))$$

и морфизм $\text{id}_{F(i)}$ вместе определяют морфизм $\rho_i : F(i) \rightarrow L$, удовлетворяющий (1.11.4). Более того, используя изоморфизм

$$\text{Hom}_C(L, L) \simeq \varinjlim_j \text{Hom}(L, F(j)),$$

можно найти объект $i_0 \in \text{Ob}(C)$ и морфизм $f: L \rightarrow F(i_0)$, такие, что

$$(1.11.5) \quad \rho_{i_0} \circ f = \text{id}_L.$$

Для любого $X \in \text{Ob}(C)$ и любого $i \in \text{Ob}(I)$ композиция морфизмов

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_C(X, F(i)) &\xrightarrow{\rho_i} \text{Hom}_C(X, L) \xrightarrow{f} \text{Hom}_C(X, F(i_0)) \\
 &\longrightarrow \varinjlim_j \text{Hom}_C(X, F(j))
 \end{aligned}$$

совпадает с каноническим морфизмом. Поэтому

$$(1.11.6) \quad \text{для любого } i \in \text{Ob}(I) \text{ существуют } j \in \text{Ob}(I), s: i \rightarrow j \text{ и } t: i_0 \rightarrow j, \text{ такие, что } F(t) \circ f \circ \rho_i = F(s).$$

Фактически выполнение этих условий гарантирует существование объекта " $\varinjlim_j$ " в $\text{Ob}(C)$.

Предложение 1.11.6. Пусть $L \in \text{Ob}(C)$. Тогда L представляет " $\varinjlim$ " $F(j)$ в том и только в том случае, когда для всех i из I существуют морфизмы $\rho_i: F(i) \rightarrow L$, объект $i_0 \in \text{Ob}(I)$ и морфизм $f: L \rightarrow F(i_0)$, такие, что выполнены условия (1.11.4)–(1.11.6).

Доказательство. Необходимость уже доказана. Для доказательства достаточности заметим, что для любого $X \in \text{Ob}(C)$ отображения

$$\varinjlim \text{Hom}_C(X, F(j)) \xrightarrow{\{\rho_j\}} \text{Hom}_C(X, L)$$

и

$$\text{Hom}_C(X, L) \xrightarrow{f} \text{Hom}_C(X, F(i_0)) \longrightarrow \varinjlim \text{Hom}_C(X, F(j))$$

взаимно обратны. □

Следствие 1.11.7. Если " $\varinjlim$ " $F(j)$ представим объектом L , то " $\varinjlim$ " $F(j)$ также представим объектом L .

Следствие 1.11.8. Пусть C' — категория, T — функтор из C в C' и F — индуктивная система в C . Если " $\varinjlim$ " $F(j)$ существует в C , то " $\varinjlim$ " $TF(j)$ существует в C' и представляется объектом $T(\varinjlim F(j))$.

Доказательство. Функтор T сохраняет существование ρ_i , i_0 и f из предложения 1.11.6, удовлетворяющих условиям (1.11.4)–(1.11.6). □

В этом параграфе рассматривались главным образом индуктивные пределы. Аналогичные результаты справедливы и для проективных пределов, так как проективная система в C является индуктивной в C^0 .

1.12. Условие Миттаг-Лефлера

В этом параграфе мы будем главным образом изучать проективные системы абелевых групп, индексированные множеством $\mathbb{N}$. Через $\mathcal{A}b$ мы обозначим категорию абелевых групп. Мы будем рассматривать упорядоченное множество $(\mathbb{N}, \leq)$ как категорию и обозначать ее $\underline{\mathbb{N}}$ (см. § 1.11). Таким образом, проективная система абелевых групп, индексированная множеством $\mathbb{N}$, — это функтор из $\underline{\mathbb{N}}^0$

в $\mathcal{A}b$. Пусть X является таким функтором. Мы также будем использовать для него обозначение $\{X_n, \rho_{n,p}\}$. Значит, $\rho_{n,p}: X_p \rightarrow X_n$ — это морфизмы абелевых групп, определенные при $p \geq n$, и выполняются условия

$$(1.12.1) \quad \rho_{n,n} = \text{id}_{X_n}, \quad \rho_{n,p} \circ \rho_{p,q} = \rho_{n,q}, \quad \text{если } n \leq p \leq q.$$

Пусть $\text{Hom}(\underline{\mathbb{N}}^\circ, \mathcal{A}b)$ — категория контравариантных функторов из $\underline{\mathbb{N}}$ в $\mathcal{A}b$ (т. е. категория проективных систем абелевых групп, индексированных множеством $\mathbb{N}$). Очевидно, что эта категория абелева.

Так как категория $\mathcal{A}b$ допускает проективные пределы (как и индуктивные), то существует функтор

$$\varprojlim_j: \text{Hom}(\underline{\mathbb{N}}^\circ, \mathcal{A}b) \rightarrow \mathcal{A}b,$$

который проективной системе ставит в соответствие ее проективный предел. Если $X = \{X_n, \rho_{n,p}\}$ — проективная система, то мы будем использовать как $\varprojlim X$, так и $\varprojlim_n X_n$ для обозначения ее проективного предела.

Заметим, что функтор $\varprojlim$ точен слева. Мы построим полную подкатегорию в $\text{Hom}(\underline{\mathbb{N}}^\circ, \mathcal{A}b)$, инъективную по отношению к $\varprojlim$.

Определение 1.12.1. Пусть $X = \{X_n, \rho_{n,p}\}$ — проективная система абелевых групп. Говорят, что X удовлетворяет условию *Миттаг-Лефлера* (сокращенно *M-L*), если для любого $n \in \mathbb{N}$ убывающая последовательность $\{\rho_{n,p}(X_p)\}_{p \geq n}$ подгрупп из X_n стационарна.

Предложение 1.12.2. Пусть

$$0 \rightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$$

— точная последовательность проективных систем абелевых групп.

- (i) Если X' и X'' удовлетворяют условию *M-L*, то и X также удовлетворяет условию *M-L*.
- (ii) Если X удовлетворяет условию *M-L*, то и X'' удовлетворяет условию *M-L*.

Доказательство. (i) Для любых n, N_0, N_1, p , где $n \leq N_0 \leq N_1 \leq p$, имеем коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X'_p & \xrightarrow{f} & X_p & \xrightarrow{g} & X''_p & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X'_{N_1} & \xrightarrow{f} & X_{N_1} & \xrightarrow{g} & X''_{N_1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X'_{N_0} & \xrightarrow{f} & X_{N_0} & \xrightarrow{g} & X''_{N_0} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & X'_n & \xrightarrow{f} & X_n & \xrightarrow{g} & X''_n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Зафиксируем n и выберем N_0 и $N_1 \geq N_0$ так, чтобы

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(X'_p \rightarrow X'_n) &= \operatorname{Im}(X'_{N_0} \rightarrow X'_n) && \text{для всех } p \geq N_0 \\
\operatorname{Im}(X''_p \rightarrow X''_n) &= \operatorname{Im}(X''_{N_1} \rightarrow X''_n) && \text{для всех } p \geq N_1.
\end{aligned}$$

Так как $g(\operatorname{Im}(X_{N_1} \rightarrow X_{N_0})) = g(\operatorname{Im}(X_p \rightarrow X_{N_0}))$, то

$$\operatorname{Im}(X_{N_1} \rightarrow X_{N_0}) \subset \operatorname{Im}(X_p \rightarrow X_{N_0}) + f(X'_{N_0}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(X_{N_1} \rightarrow X_n) &\subset \operatorname{Im}(X_p \rightarrow X_n) + f(\operatorname{Im}(X'_{N_0} \rightarrow X'_n)) \\
&\subset \operatorname{Im}(X_p \rightarrow X_n).
\end{aligned}$$

(ii) очевидно. □

Предложение 1.12.3. Пусть $0 \rightarrow X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность проективных систем. Предположим, что X' удовлетворяет условию M-L. Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim X' \rightarrow \varprojlim X \rightarrow \varprojlim X'' \rightarrow 0$$

точна.

Доказательство. Пусть $X'' = \{X''_n, \rho_{n,p}\}$, и пусть $x'' = \{x''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — элемент из $\varprojlim_n X''_n$. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{\nu(n)\}_n$ так, чтобы $\nu(n) \geq n$ и $\text{Im}(X'_p \rightarrow X'_n) = \text{Im}(X'_{\nu(n)} \rightarrow X'_n)$ для всех $p \geq \nu(n)$. Отметим сначала, что если $g(x_{\nu(n)}) = x''_{\nu(n)}$ для $x_{\nu(n)} \in X_{\nu(n)}$, то для всех $p \geq \nu(n)$ существует $x_p \in X_p$, для которого выполняются равенства $g(x_p) = x''_p$ и $\rho_{n,p}(x_p) = \rho_{n,\nu(n)}(x_{\nu(n)})$. Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, выберем $y_p \in X_p$ так, чтобы $g(y_p) = x''_p$. Тогда $\rho_{\nu(n),p}(y_p) - x_{\nu(n)} \in f(X'_{\nu(n)})$, так что $\rho_{n,p}(y_p) - \rho_{n,\nu(n)}(x_{\nu(n)}) \in \text{Im}(f(X'_p) \rightarrow f(X'_n))$, и мы можем найти $z_p \in f(X'_p)$, такой, что $y_p - z_p$ обладает требуемыми свойствами. Построим последовательность $x = \{x_{\nu(n)}\}_n$, такую, что $g(x_{\nu(n)}) = x''_{\nu(n)}$ и $\rho_{n-1,\nu(n)}(x_{\nu(n)}) = \rho_{n-1,\nu(n-1)}(x_{\nu(n-1)})$. Если уже построены $x_{\nu(i)} \in X_{\nu(i)}$ для $i < n_0$, то $x_{\nu(n_0)}$ строится так, как описано выше. Тогда элементы $x_n = \rho_{n,\nu(n)}(x_{\nu(n)})$ удовлетворяют равенствам $g(x_n) = x''_n$ и $\rho_{n-1,n}(x_n) = x_{n-1}$. $\square$

Рассмотрим теперь проективные системы комплексов абелевых групп или, что то же самое, комплексы проективных систем абелевых групп. Пусть $X^\cdot = \{X^k, d^k\}$ — комплекс проективных систем абелевых групп: $X^k = \{X^k_n, \rho^k_{n,p}\}$ для каждого k — проективная система абелевых групп, а морфизмы d^k и $\rho^k_{n,p}$ удовлетворяют естественным условиям совместимости.

С комплексом $X^\cdot$ мы связываем комплекс абелевых групп, обозначенный через $X^\cdot_\infty$:

$$X^\cdot_\infty = \varprojlim X^\cdot = \{\varprojlim X^k, d^k\}.$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ естественные морфизмы $X^\cdot_\infty \rightarrow X^\cdot_n$ определяют морфизмы

$$\phi_k: H^k(X^\cdot_\infty) \rightarrow \varprojlim_n H^k(X^\cdot_n)$$

для каждого $k \in \mathbb{Z}$.

Предложение 1.12.4. *Предположим, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ система X^k удовлетворяет условию M-L. Тогда*

- (а) для любого k морфизм ϕ_k сюръективен;
- (б) если, кроме того, для некоторого i система $H^{i-1}(X^\cdot)$ (т. е. проективная система $\{H^{i-1}(X^\cdot_n), H^{i-1}(\rho_{n,p})\}$) удовлетворяет условию M-L, то морфизм ϕ_i биективен.

Доказательство. Положим $Z_n^k = \text{Ker}(d_n^k : X_n^k \rightarrow X_{n+1}^{k+1})$ и $B_n^k = \text{Im}(d_{n-1}^k : X_{n-1}^k \rightarrow X_n^k)$. Тогда существуют точные последовательности

$$(1.12.2) \quad 0 \rightarrow Z_n^k \rightarrow X_n^k \rightarrow B_n^{k+1} \rightarrow 0,$$

$$(1.12.3) \quad 0 \rightarrow B_n^k \rightarrow Z_n^k \rightarrow H^k(X_n^\cdot) \rightarrow 0,$$

$$(1.12.4) \quad 0 \rightarrow \varprojlim_n B_n^k \rightarrow \varprojlim_n Z_n^k \rightarrow \varprojlim_n H^k(X_n^\cdot) \rightarrow 0.$$

Существование (1.12.4) следует из предложения 1.12.3, поскольку по предложению 1.12.2 проективная система $\{B_n^k\}_n$ удовлетворяет условию М-Л. Так как, кроме того, $\varprojlim(\cdot)$ является точным слева функтором, то

$$(1.12.5) \quad \begin{aligned} \varprojlim_n Z_n^k &= \text{Ker} \left(\varprojlim_n X_n^k \rightarrow \varprojlim_n X_n^{k+1} \right) \\ &= \text{Ker}(X_\infty^k \rightarrow X_\infty^{k+1}). \end{aligned}$$

Рассмотрим диаграмму с точными строками

$$(1.12.6) \quad \begin{array}{ccccccc} X_\infty^{k-1} & \longrightarrow & \text{Ker}(X_\infty^k \rightarrow X_\infty^{k+1}) & \longrightarrow & H^k(X_\infty^\cdot) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \phi_k & & \\ 0 & \longrightarrow & \varprojlim_n B_n^k & \longrightarrow & \varprojlim_n Z_n^k & \longrightarrow & \varprojlim_n H^k(X_n^\cdot) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Из нее следует сюръективность морфизма ϕ_k .

Предположим теперь, что $\{H^{i-1}(X_n^\cdot)\}_n$ удовлетворяет условию М-Л. Из (1.12.3) и предложения 1.12.2 вытекает, что проективная система $\{Z_n^{i-1}\}_n$ удовлетворяет условию М-Л. Используя предложение 1.12.3 и последовательность (1.12.2), получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_n Z_n^{i-1} \rightarrow \varprojlim_n X_n^{i-1} \rightarrow \varprojlim_n B_n^i \rightarrow 0.$$

Следовательно, в диаграмме (1.12.6) ψ_{i-1} сюръективен, а ϕ_i биективен. $\square$

Замечание 1.12.5. Обозначим через $\text{Hom}(\mathcal{I}, \mathcal{A}b)$ категорию функторов из $\mathcal{I}$ в $\mathcal{A}b$, т. е. категорию индуктивных систем абелевых групп, индексированных категорией $\mathcal{I}$. Существует корректно определенный функтор

$$\varinjlim : \text{Hom}(\mathcal{I}, \mathcal{A}b) \rightarrow \mathcal{A}b,$$

который каждой индуктивной системе сопоставляет ее индуктивный предел. В отличие от функтора $\varprojlim$ функтор $\varinjlim$ точен.

В частности, рассмотрим комплекс индуктивных систем абелевых групп $X^\cdot = \{X^k, d^k\}$, где каждый объект $X^k = \{X_{i,j}^k, \rho_{i,j}^k\}$ является индуктивной системой. Тогда для каждого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$(1.12.7) \quad H^k(\varinjlim X^\cdot) \simeq \varinjlim H^k(X^\cdot).$$

В завершение этого раздела напомним результат Касивары (см. [Kashiwara 5]) об индуктивных и проективных пределах множеств, индексированных множеством $\mathbb{R}$.

Предложение 1.12.6. Пусть $\{X_s, \rho_{s,t}\}$ — проективная система множеств, индексированная множеством $\mathbb{R}$. Предположим, что для каждого $s \in \mathbb{R}$ канонические отображения

$$\lambda_s: X_s \rightarrow \varprojlim_{r < s} X_r$$

и

$$\mu_s: \varinjlim_{r > s} X_r \rightarrow X_s$$

инъективны (соответственно сюръективны). Тогда все отображения ρ_{s_0, s_1} ($s_0 \leq s_1$) инъективны (соответственно сюръективны).

Доказательство. Сначала докажем инъективность. Пусть x и y принадлежат X_{s_1} и таковы, что $\rho_{s_0, s_1}(x) = \rho_{s_0, s_1}(y)$ для некоторого $s_0 < s_1$. Пусть

$$I = \{s \in \mathbb{R}; s \leq s_1, \rho_{s, s_1}(x) = \rho_{s, s_1}(y)\}.$$

Тогда I содержит s_0 . Из условий $s \in I$, $r < s$ следует, что $r \in I$. Пусть $s_2 = \sup I$. Так как λ_{s_2} инъективен, то $s_2 \in I$. Если $s_2 = s_1$, то $x = y$. Предположим, что $s_2 < s_1$. Так как μ_{s_2} инъективен, то существует $s > s_2$, $s \in I$. Противоречие.

Теперь докажем сюръективность. Пусть $s_0 < s_1$, $x_0 \in X_{s_0}$. Пусть A есть множество упорядоченных пар (s, x) , где $s_0 \leq s \leq s_1$, $x \in X_s$ и $\rho_{s, s_0}(x) = x_0$. Упорядочим A следующим образом:

$$(s, x) \leq (s', x') \text{ тогда и только тогда, когда } s \leq s' \text{ и } \rho_{s, s'}(x') = x.$$

Покажем, что A индуктивно упорядочено. Пусть $B \subset A$ и B линейно упорядочено. Пусть

$$I = \{s \in \mathbb{R}; s_0 \leq s \leq s_1, \text{ существует } x \in X_s, \text{ такой, что } (s, x) \in B\}.$$

Пусть $s_2 = \sup I$. Если $s_2 \in I$, то B имеет максимальный элемент. Если $s_2 \notin I$, то из сюръективности λ_{s_2} следует, что существует пара $(s_2, x_2) \in A$, большая, чем любой элемент из B . Это доказывает индуктивную упорядоченность A .

Пусть (s, x) — максимальный элемент в A . Если $s = s_1$, то утверждение доказано. В противном случае из сюръективности μ_s следует существование $s', s < s' \leq s_1$, и $x' \in X_{s'}$, таких, что $\rho_{s, s'}(x') = x$. Противоречие. $\square$

Упражнения к гл. 1

Упражнение 1.1. Пусть $\mathcal{C}$ — аддитивная категория. Докажите, что можно единственным образом задать структуру аддитивной группы на каждом множестве $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ так, чтобы закон композиции $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ был также аддитивен для всех объектов $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. (Указание. Сначала определите, что является нулем в $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, затем закон сложения, используя правила композиции.)

Упражнение 1.2. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — категории, а $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ и $G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ — функторы.

(i) Докажите, что следующие два условия эквивалентны.

(a) Существуют морфизмы функторов

$$\alpha: F \circ G \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}'}, \quad \beta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F,$$

такие, что композиция $G(Y) \xrightarrow{\beta(G(Y))} G \circ F \circ G(Y) \xrightarrow{G(\alpha(Y))} G(Y)$ равна $\text{id}_{G(Y)}$ для любого $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$, а композиция $F(X) \xrightarrow{F(\beta(X))} F \circ G \circ F(X) \xrightarrow{\alpha(F(X))} F(X)$ равна $\text{id}_{F(X)}$ для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

(b) Существует изоморфизм бифункторов $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ из $\mathcal{C}^{\text{ob}} \times \mathcal{C}'$ в $\mathbf{Set}$.

В этом случае мы называем G *правым сопряженным функтором к F* , а F — *левым сопряженным функтором к G* .

(ii) Докажите, что для функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ (соответственно $G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$) его правый (соответственно левый) сопряженный единствен с точностью до изоморфизма (если он вообще существует).

(iii) Докажите, что для функтора $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ (соответственно $G: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$) правый (соответственно левый) сопряженный существует в том и только в том случае, когда для любого $Y \in$

$\text{Ob}(\mathcal{C}')$ функтор $X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), Y)$ представим (соответственно для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ функтор $Y \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$ представим).

Упражнение 1.3. Докажите, что если выполнены условия (i)–(iii) определения 1.2.1, то Z является представляющим объектом для функтора

$$W \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \oplus \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$$

в том и только в том случае, когда существуют морфизмы $i_1: X \rightarrow Z$, $i_2: Y \rightarrow Z$, $p_1: Z \rightarrow X$, $p_2: Z \rightarrow Y$, такие, что $p_2 \circ i_1 = 0$, $p_1 \circ i_2 = 0$, $p_1 \circ i_1 = \text{id}_X$, $p_2 \circ i_2 = \text{id}_Y$ и $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = \text{id}_Z$.

Упражнение 1.4. Пусть $X \xrightarrow{i_1} Z \xrightarrow{p_2} Y$ — последовательность морфизмов аддитивной категории $\mathcal{C}$ и $p_2 \circ i_1 = 0$. Докажите эквивалентность следующих условий:

(i) Для любого $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \rightarrow 0$$

точна.

(ii) Для любого $W \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ последовательность

$$0 \leftarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \leftarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W) \leftarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W) \leftarrow 0$$

точна.

(iii) Существуют морфизмы $i_2: Y \rightarrow Z$, $p_1: Z \rightarrow X$, такие, что выполнены условия упр. 1.3.

Если все эти условия выполнены, то мы называем последовательность $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ *расщепляющейся*. В этом случае Z изоморфен $X \oplus Y$ и X называется *прямым слагаемым* в Z .

(iv) Докажите, что если $\mathcal{C}$ — абелева или триангулированная категория и морфизмы $i_1: X \rightarrow Z$ и $p_1: Z \rightarrow X$ таковы, что $p_1 \circ i_1 = \text{id}_X$, то X является прямым слагаемым в Z .

Упражнение 1.5. Пусть $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ — точная последовательность в абелевой категории. Тогда из инъективности объекта X или проективности объекта Y следует расщепляемость указанной последовательности.

Упражнение 1.6. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория.

- (i) Пусть $f: X \rightarrow Z$ и $g: Y \rightarrow Z$ — морфизмы в $\mathcal{C}$. Докажите, что $\text{Ker}(X \oplus Y \rightarrow Z)$ является представляющим объектом для функтора

$$W \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X) \times_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y).$$

Представляющий объект для этого функтора обозначается $X \times_Z Y$.

Аналогично, обращая стрелки, мы определяем объект $X \oplus_Z Y$ для морфизмов $f: Z \rightarrow X$ и $g: Z \rightarrow Y$ как объект, представляющий функтор $W \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, W) \times_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W)$ (т. е. $\text{Coker}(Z \rightarrow X \oplus Y)$).

- (ii) Покажите, что в условиях (i) мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Ker } g' & \xrightarrow{\sim} & \text{Ker } g & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f' & \longrightarrow & X \times_Z Y & \xrightarrow{f'} & Y \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow g' & & \downarrow g \\ 0 & \longrightarrow & \text{Ker } f & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

где морфизмы f' и g' определены очевидным образом.

- (iii) Пусть

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

— коммутативная диаграмма. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $X' \rightarrow X \times_Y Y'$ — эпиморфизм,
(b) $X \oplus_{X'} Y' \rightarrow Y$ — мономорфизм,

(с) в диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \rightarrow & \text{Ker } f' \times_{X'} \text{Ker } g' & \rightarrow & \text{Ker } g' & \rightarrow & \text{Ker } g & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \rightarrow & \text{Ker } f' & \rightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \rightarrow \text{Coker } f' \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow g' & & \downarrow g & \\
 \rightarrow & \text{Ker } j & \rightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \rightarrow \text{Coker } j \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & \rightarrow \text{Coker } g' & \rightarrow & \text{Coker } g & \rightarrow \text{Coker } f \oplus_Y \text{Coker } g \rightarrow \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & 0 & & 0 & 0
 \end{array}$$

все последовательности точны.

(iv) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — морфизм в $\mathbf{C}(\mathcal{C})$. Предположим, что для каждого n квадрат морфизмов

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Coker } d_X^{n-1} & \longrightarrow & X^n \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Coker } d_Y^{n-1} & \longrightarrow & Y^n
 \end{array}$$

удовлетворяет эквивалентным условиям из п.(iii). Тогда f является квазиизоморфизмом. (Указание. Используйте следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \rightarrow & H^n(X) & \rightarrow & \text{Coker } d_X^{n-1} & \rightarrow & X^{n+1} & \rightarrow \text{Coker } d_X^n \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 0 \rightarrow & H^n(Y) & \rightarrow & \text{Coker } d_Y^{n-1} & \rightarrow & Y^{n+1} & \rightarrow \text{Coker } d_Y^n \rightarrow 0
 \end{array}$$

Упражнение 1.7. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория.

(i) Если $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, то через $\mathcal{P}(Z)$ мы обозначим категорию, объектами которой являются эпиморфизмы $f: Z' \rightarrow Z$. Морфизмы $(f: Z' \rightarrow Z) \rightarrow (f': Z'' \rightarrow Z)$ определяются как морфизмы $h: Z' \rightarrow Z''$, такие, что $f' \circ h = f$. Докажите, что категория $\mathcal{P}(Z)$ кофильтрованная, т. е. категория $\mathcal{P}(Z)^\circ$ фильтрованная.

(ii) Для $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ положим $\tilde{h}_Z(X) = \varinjlim_{\mathcal{P}(X)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X)$, где

$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X)$ — это функтор из $\mathcal{P}(Z)$ в $\mathcal{A}\mathfrak{b}$, который эпиморфизму $f: Z' \rightarrow Z$ сопоставляет абелеву группу $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z', X)$.

Докажите, что $\tilde{h}_Z$ — точный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ и что если для f и f' из $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X')$ равенство $\tilde{h}_Z(f) = \tilde{h}_Z(f')$ выполняется при всех $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, то $f = f'$.

Докажите, что последовательность в $\mathcal{C}$ точна, если ее образ при действии $\tilde{h}_Z$ точен при всех $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$.

Отметим, что это упражнение позволяет переводить на язык категории $\mathcal{A}\mathfrak{b}$ задачи, сформулированные в терминах абелевых категорий.

Упражнение 1.8 (лемма о пяти морфизмах). Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Рассмотрим коммутативную диаграмму в $\mathcal{C}$ с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} X^0 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & X^2 & \longrightarrow & X^3 & \longrightarrow & X^4 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 \\ Y^0 & \longrightarrow & Y^1 & \longrightarrow & Y^2 & \longrightarrow & Y^3 & \longrightarrow & Y^4 \end{array}$$

Докажите, что

- (i) если f_0 — эпиморфизм, а f_1 и f_3 — мономорфизм, то f_2 — мономорфизм,
- (ii) если f_4 — мономорфизм, а f_1 и f_3 — эпиморфизмы, то f_2 — эпиморфизм.

Упражнение 1.9. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Рассмотрим коммутативную диаграмму в $\mathcal{C}$ с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \xrightarrow{g'} & Z' \end{array}$$

Докажите, что существует естественно определяемая точная последовательность

$$\operatorname{Ker} \alpha \rightarrow \operatorname{Ker} \beta \rightarrow \operatorname{Ker} \gamma \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Coker} \alpha \rightarrow \operatorname{Coker} \beta \rightarrow \operatorname{Coker} \gamma,$$

такая, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ Y & \longleftarrow & \operatorname{Ker} \gamma \circ g & \longrightarrow & \operatorname{Ker} \gamma \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ Y' & \xleftarrow{f'} & X' & \longrightarrow & \operatorname{Coker} \alpha \end{array}$$

Упражнение 1.10. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Рассмотрим диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'_0 & \longrightarrow & M'_1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Предположим, что объекты M_0 и M'_0 инъективны. Постройте изоморфизм $M_0 \oplus M'_1 \simeq M'_0 \oplus M_1$.

Упражнение 1.11. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C}(\mathcal{C}))$ таков, что для любого $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ комплекс абелевых групп $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ точен. Докажите, что X равен нулю в $\mathcal{K}(\mathcal{C})$ (см. упр. 1.4.).

Упражнение 1.12. Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория. Рассмотрим коммутативную диаграмму в $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X[1] \end{array}$$

в которой верхняя строка является выделенным треугольником. Докажите, что при выполнении одного из следующих условий нижняя строка также является выделенным треугольником:

- (i) для любого $P \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ последовательность $\operatorname{Hom}(P, X) \rightarrow \operatorname{Hom}(P, Y) \rightarrow \operatorname{Hom}(P, Z') \rightarrow \operatorname{Hom}(P, X[1])$ точна,
- (ii) для любого $Q \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ последовательность $\operatorname{Hom}(X[1], Q) \rightarrow \operatorname{Hom}(Z', Q) \rightarrow \operatorname{Hom}(Y, Q) \rightarrow \operatorname{Hom}(X, Q)$ точна.

Упражнение 1.13. Пусть $X_i \rightarrow Y_i \rightarrow Z_i \xrightarrow{+1}$, $i = 1, 2$, — два треугольника в триангулированной категории. Докажите, что они являются выделенными в том и только в том случае, когда их прямая сумма $X_1 \oplus X_2 \rightarrow Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow Z_1 \oplus Z_2 \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник. (Указание. Используйте результат упр. 1.12. Для доказательства достаточности рассмотрите выделенный треугольник $\delta: X_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow U \xrightarrow{+1}$ и докажите, что композиция $\delta_1 \rightarrow \delta_1 \oplus \delta_2 \rightarrow \delta$, где δ_1 и δ_2 — данные треугольники, является изоморфизмом.)

Упражнение 1.14. Пусть $\mathcal{C}$ — категория, а S — мультипликативная система в $\mathcal{C}$. Если $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, то через S_X мы обозначим категорию, объектами которой являются морфизмы $s: X' \rightarrow X$, $s \in S$, а морфизмы определены следующим образом. Для $s: X' \rightarrow X$ и $s': X'' \rightarrow X$ положим

$$\text{Hom}_{S_X}(s, s') = \{h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X'', X'); s' = s \circ h\}.$$

- (i) Покажите, что категория $(S_X)^\circ$ является фильтрованной.
- (ii) Докажите, что для $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \varinjlim_{S_X} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y).$$

Здесь $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$ — это функтор из S_X° в $\mathbf{Set}$, который сопоставляет морфизму $s': X' \rightarrow X$ множество $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y)$.

- (iii) Обращая стрелки, определите категорию S_Y^a и докажите, что

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_S}(X, Y) = \varinjlim_{S_Y^a} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y').$$

Упражнение 1.15 (см. [Deligne 1]). Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Определим категорию $\text{Ind}(\mathcal{C})$ как полную подкатегорию в $\mathcal{C}^{\mathbf{v}}$ (см. § 1.1), состоящую из объектов, изоморфных $\varinjlim_I F$ для некоторой индуктивной системы F в $\mathcal{C}$, индексированной фильтрованной категорией I .

Пусть теперь категория $\mathcal{C}$ абелева. Для $X \in \text{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$ через S_X обозначим категорию, объектами которой являются квазиизоморфизмы $u: X \rightarrow X'$, а морфизм $h: (u: X \rightarrow X') \rightarrow (u': X \rightarrow X'')$ определен с помощью морфизма $v: X' \rightarrow X''$, такого, что $v \circ u = u'$.

- (i) Докажите, что функтор $\sigma: \mathbf{D}^+(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ind}(\mathbf{K}^+(\mathcal{C}))$, $X \mapsto \varinjlim_{S_X} X'$,

корректно определен и является вполне строгим. Здесь X' —

функтор из S_X в $K^+(C)$, который ставит в соответствие X' морфизму $u: X \rightarrow X'$.

- (ii) Пусть $F: C \rightarrow C'$ — точный слева функтор абелевых категорий. Определим функтор $T: D^+(C) \rightarrow \text{Ind}(K^+(C'))$ формулой $T(X) = \varinjlim_{S_X} F(X')$. Мы будем говорить, что F *производит* в

$X \in \text{Ob}(D^+(C))$, если существует $Y \in \text{Ob}(D^+(C'))$, такой, что $T(X) \simeq \sigma(Y)$. Докажите, что такой объект Y единствен и что если F производит в каждом $X \in \text{Ob}(D^+(C))$, то существует правый производный функтор RF и $\sigma \circ RF \simeq T$.

Упражнение 1.16. Пусть C — аддитивная категория.

- (i) Докажите, что для $X \in C^-(C)$ и $Y \in C^+(C)$

$$Z^0(s(\text{Hom}_C(X, Y))) = \text{Hom}_{C(C)}(X, Y),$$

$$B^0(s(\text{Hom}_C(X, Y))) = \text{Ht}(X, Y),$$

$$H^0(s(\text{Hom}_C(X, Y))) = \text{Hom}_{K(C)}(X, Y).$$

(s определено в (1.9.4)).

- (ii) Пусть C — абелева категория, содержащая достаточно много инъективных (или проективных) объектов. Пусть $X \in \text{Ob}(D^-(C))$, $Y \in \text{Ob}(D^+(C))$. Докажите, что

$$H^0(R\text{Hom}_C(X, Y)) = \text{Hom}_{D(C)}(X, Y).$$

Упражнение 1.17. Пусть C — абелева категория. Говорят, что C имеет гомологическую размерность $\leq n$, где n — неотрицательное целое число, если $\text{Ext}^j(X, Y) = 0$ при $j > n$ для всех $X, Y \in \text{Ob}(C)$. Здесь $\text{Ext}^j(X, Y) = \text{Hom}_{D(C)}(X, Y[j])$. Предположим, что C содержит достаточно много инъективных объектов. Докажите эквивалентность следующих условий:

- (i) C имеет гомологическую размерность $\leq n$;
(ii) для любого $X \in \text{Ob}(C)$ существует инъективная резольвента объекта X длины $\leq n$, т. е. точная последовательность $0 \rightarrow X \rightarrow I^0 \rightarrow \dots \rightarrow I^n \rightarrow 0$, в которой все I^j инъективны.

Наименьшее $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, такое, что эти условия выполнены, называется *гомологической размерностью* категории C и обозначается через $\text{hd}(C)$.

Упражнение 1.18. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория и $\text{hd}(\mathcal{C}) \leq 1$. Докажите, что для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{C}))$ в категории $\mathbf{D}^b(\mathcal{C})$ имеется изоморфизм

$$X \simeq \bigoplus_k H^k(X)[-k].$$

(Пример: $\mathcal{C} = \text{Mod}(A)$, где A — кольцо главных идеалов, в частности поле или $\mathbb{Z}$.)

Упражнение 1.19. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева функтор, а $\mathcal{I}$ — некоторая F -инъективная подкатегория в $\mathcal{C}$. Мы назовем объект X из $\mathcal{C}$ F -ациклическим, если $R^k F(X) = 0$ при $k \neq 0$. Пусть $\mathcal{J}$ — полная подкатегория F -ациклических объектов в $\mathcal{C}$.

- (i) Докажите, что $\mathcal{J}$ F -инъективна.
- (ii) Докажите, что для любого целого $n \geq 0$ следующие условия эквивалентны:
 - (а) $R^k F(X) = 0$ для всех $k > n$ и всех $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
 - (б) для любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ существует точная последовательность

$$0 \rightarrow X \rightarrow X^0 \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0,$$

где $X^j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$, $0 \leq j \leq n$;

- (с) если $X^0 \rightarrow \dots \rightarrow X^n \rightarrow 0$ — точная последовательность и если $X^j \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ при $j < n$, то $X^n \in \text{Ob}(\mathcal{J})$.

В этом случае мы говорим, что F имеет *когомологическую размерность* $\leq n$.

Упражнение 1.20. В условиях предложения 1.8.7 предположим, что F (соответственно F') имеет когомологическую размерность $\leq r$ (соответственно $\leq r'$) (см. упр. 1.19). Докажите, что $F' \circ F$ имеет когомологическую размерность $\leq r + r'$.

Упражнение 1.21. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}'$ — абелевы категории и $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева функтор. Предположим, что в $\mathcal{C}$ существует F -инъективная подкатегория $\mathcal{I}$. Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{C}))$ таков, что $R^i F(H^j(X)) = 0$ для всех $i > 0$ и всех $j \leq j_0$. Докажите, что существует изоморфизм

$$R^j F(X) \simeq F(H^j(X)) \text{ для всех } j \leq j_0.$$

Упражнение 1.22. В условиях предложения 1.8.7 пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(C))$, и пусть $R^j F(X) = 0$ при $j < n$. Докажите, что

$$R^n(F' \circ F)(X) \simeq F' \circ R^n F(X).$$

(Указание. Используйте замечание 1.8.6.)

Упражнение 1.23. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, а $\mathcal{I}$ — полная подкатегория в $\mathcal{C}$. Предположим, что $\mathcal{I}$ удовлетворяет условиям (1.7.5)–(1.7.6) и

если $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}$ и $X' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$, то $X'' \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ в том и только в том случае, когда $X \in \text{Ob}(\mathcal{I})$.

Пусть $*$ = $\emptyset$ или b , или $-$, или $+$.

- Докажите, что любой объект $X \in \text{Ob}(\mathbf{C}^*(C))$ квазиизоморфен некоторому $Y \in \text{Ob}(\mathbf{C}^*(C))$.
- Пусть $\mathcal{C}'$ — абелева категория и $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева функтор. Предположим, что $\mathcal{I}$ F -инъективна. Докажите, что RF существует как функтор из $\mathbf{D}^*(C)$ в $\mathbf{D}^*(C')$.
- Пусть $\mathcal{C}''$ — абелева категория, а $G: \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ — точный слева бифунктор. Предположим, что для каждого $X' \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$ категория $\mathcal{I}$ $G(\cdot, X')$ -инъективна. Докажите, что RG существует как бифунктор из $\mathbf{D}^-(C) \times \mathbf{D}^-(C')$ в $\mathbf{D}^-(C'')$ и из $\mathbf{D}^*(C) \times \mathbf{D}^b(C')$ в $\mathbf{D}^*(C'')$ (см. [Hartshorn 1, с. 42]).

Упражнение 1.24. (i) Пусть $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ — точный слева функтор абелевых категорий, а $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(C))$. Постройте естественные морфизмы $H^j(RF(X)) \rightarrow F(H^j(X))$.

(ii) Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$ — абелевы категории, а F — бифунктор из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ в $\mathcal{C}''$. Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^*(C))$, $Y \in \text{Ob}(\mathbf{D}^*(C'))$, где $*$ = $+$ или $-$.

- Предположим, что F точен слева и $*$ = $+$ (соответственно F точен справа и $*$ = $-$). Постройте естественные морфизмы $(p, q \in \mathbb{Z})$

$$H^{p+q}(RF(X, Y)) \rightarrow F(H^p(X), H^q(Y)).$$

(соответственно $F(H^p(X), H^q(Y)) \rightarrow H^{p+q}(LF(X, Y))$).

- Предположим, что F точен. Докажите существование изоморфизма ($n \in \mathbb{Z}$)

$$H^n(F(X, Y)) \simeq \bigoplus_{p+q=n} F(H^p(X), H^q(Y)).$$

Упражнение 1.25. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, а X — двойной комплекс в $\mathcal{C}$, удовлетворяющий условию (1.9.2).

- (i) Докажите, что следующие треугольники являются выделенными в $\mathbf{D}(\mathcal{C})$:

$$\begin{aligned} s\tau_{II}^{\leq n-1}(X) &\rightarrow s\tau_{II}^{\leq n}(X) \rightarrow H_{II}^n(X)[-n] \xrightarrow{+1}, \\ H_{II}^n(X)[-n] &\rightarrow s\tau_{II}^{\geq n}(X) \rightarrow s\tau_{II}^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{+1}. \end{aligned}$$

- (ii) Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что естественный морфизм

$$H^k(s\tau_{II}^{\leq n}(X)) \rightarrow H^k(s(X))$$

(соответственно $H^k(s(X)) \rightarrow H^k(s\tau_{II}^{\geq n}(X))$) является изоморфизмом при $n \gg 0$ (соответственно при $n \ll 0$).

- (iii) Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. Докажите, что

$$H^k(s\tau_{II}^{\leq n}(X)) = 0 \text{ при } n \ll 0$$

и

$$H^k(s\tau_{II}^{\geq n}(X)) = 0 \text{ при } n \gg 0.$$

(Указание. $H^k(s(X))$ зависит только от $\{X^{n,m}; k-1 \leq n+m \leq k+1\}$.)

Упражнение 1.26 (Ж.-П. Шнейдерс). В условиях упр. 1.25 предположим, что

$$H_{II}^q(X) \underset{\text{киз}}{\simeq} 0 \text{ всегда, кроме случая } q = q_0, q_1,$$

где $q_0 < q_1$. Докажите существование выделенного треугольника

$$H_{II}^{q_0}(X)[-q_0] \rightarrow s(X) \rightarrow H_{II}^{q_1}(X)[-q_1] \xrightarrow{+1}.$$

(Указание. Используйте упр. 1.25.)

Упражнение 1.27. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева (соответственно триангулированная) категория. Обозначим через $K(\mathcal{C})$ абелеву группу, являющуюся фактором свободной абелевой группы, порожденной всеми объектами категории $\mathcal{C}$, по соотношениям $X = X' + X''$, соответствующим точным последовательностям $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ (соответственно выделенным треугольникам $X' \rightarrow X \rightarrow X'' \xrightarrow{+1}$ в $\mathcal{C}$). Она называется *группой Гротендика* категории $\mathcal{C}$.

Пусть теперь $\mathcal{C}$ — абелева категория. Докажите, что функтор $i: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{C})$, $X \mapsto X$, индуцирует групповой изоморфизм $K(\mathcal{C}) \simeq K(\mathbf{D}^b(\mathcal{C}))$. Обратный изоморфизм дается формулой $X \mapsto \sum_j (-1)^j [H^j(X)]$, где $[Z]$ — класс объекта Z в $K(\mathcal{C})$.

Упражнение 1.28. Пусть A — кольцо. Докажите эквивалентность следующих условий:

- (i) $\text{Mod}(A)$ имеет гомологическую размерность $\leq n$;
- (ii) любой левый A -модуль M имеет инъективную резольвенту длины $\leq n$;
- (iii) любой левый A -модуль M имеет проективную резольвенту длины $\leq n$ (т. е. существует точная последовательность $0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, в которой все P_j проективны).

Положим $\text{gld}(A) = \sup(\text{hd}(\text{Mod}(A)), \text{hd}(\text{Mod}(A^{\text{op}})))$ и назовем $\text{gld}(A)$ *глобальной гомологической размерностью* кольца A .

Упражнение 1.29. Пусть A — кольцо.

- (i) Докажите, что свободный A -модуль проективен.
- (ii) Докажите, что проективный A -модуль M является прямым слагаемым некоторого свободного A -модуля M' (т. е. $M' = M \oplus M''$, где M'' есть A -модуль).
- (iii) A -модуль M называется *плоским*, если функтор $\cdot \otimes_A M$ точен. Докажите, что проективные модули являются плоскими.
- (iv) Пусть n — неотрицательное целое число. Докажите эквивалентность следующих условий:

(a) $\text{Tor}_j^A(N, M) = 0$ для любого $j > n$, любого правого A -модуля N и любого левого A -модуля M ;

(b) любой левый A -модуль M имеет плоскую резольвенту длины $\leq n$ (т. е. существует точная последовательность $0 \rightarrow P^n \rightarrow \dots \rightarrow P^0 \rightarrow M \rightarrow 0$, в которой все P^j плоские);

(b)^{op} то же утверждение, что и в п. (b), с заменой левых A -модулей правыми.

Определим *слабую глобальную размерность* кольца A , $\text{wgld}(A)$, как наименьшее $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, для которого выполнены эти условия.

- (v) Докажите, что $\text{wgld}(A) \leq \text{gld}(A)$.

Упражнение 1.30. Пусть A — коммутативное кольцо. Объект X из $D^b(\text{Mod}(A))$ называется *совершенным*, если он изоморфен ограниченному комплексу конечно порожденных проективных A -модулей.

- (i) Докажите, что если $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник в $D^b(\text{Mod}(A))$ и X, Y совершенны, то Z совершенен.
- (ii) Докажите, что прямая сумма совершенных объектов совершенна. (Указание. Для ограниченного комплекса проективных модулей P' и квазиизоморфизма $P' \rightarrow X' \oplus Y'$, где

$P^j = X^j = Y^j = 0$ при $j > 0$, обозначим через $\tilde{P}, \tilde{X}, \tilde{Y}$ комплексы, полученные заменой $P^0, P^{-1}, X^{-1}, Y^{-1}$ на $0, P^{-1} \oplus P^0, X^{-1} \oplus P^0, Y^{-1} \oplus P^0$ соответственно. Затем построим квазиизоморфизм $\tilde{P} \rightarrow \tilde{X} \oplus \tilde{Y}$, используя морфизмы $P^0 \xrightarrow{h} \tilde{X}^{-1} \oplus \tilde{Y}^{-1}$, так, чтобы композиция

$$P^0 \rightarrow \tilde{X}^{-1} \oplus \tilde{Y}^{-1} \xrightarrow{\phi} X^0 \oplus Y^0 \oplus P^0$$

была равна $(0, 0, \text{id}_{P^0})$. Здесь $\phi|_{P^0 \oplus P^0 \rightarrow P^0} = (\text{id}_{P^0}, -\text{id}_{P^0})$.

- (iii) Пусть $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$, и предположим, что M совершенен. Пусть $M^* = R\text{Hom}(M, A)$. Докажите, что M^* совершенен и канонический морфизм $M \rightarrow M^{**}$ является изоморфизмом.

Теперь предположим, что A нётерово и $\text{gld}(AS) < \infty$.

- (iv) Пусть $\mathcal{M}\text{od}^f(A)$ обозначает абелеву категорию конечно порожденных A -модулей. Докажите, что все объекты из $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}^f(A))$ совершенны.
- (v) Обозначим через $\mathbf{D}_f^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$ полную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$, состоящую из объектов, группы когомологий которых принадлежат $\mathcal{M}\text{od}^f(A)$. Докажите, что естественный функтор $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}^f(A)) \rightarrow \mathbf{D}_f^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$ является эквивалентностью категорий. (Указание. Используйте предложение 1.7.11 (см. [SGA, Exposé 1]).)

Упражнение 1.31. (i) Пусть $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(\mathbb{Z})))$, и пусть $M^* = R\text{Hom}(M, \mathbb{Z})$. Докажите, что из $M^* = 0$ следует, что $M = 0$. (Указание. Можно считать, что $H^k(M) = 0$ при $k > 0$. Используя выделенный треугольник $\tau^{\leq -1}(M) \rightarrow M \rightarrow H^0(M)_{+1}$, доказательство мож-

но свести к доказательству следующего утверждения: пусть M — такой $\mathbb{Z}$ -модуль, что $\text{Hom}(M, \mathbb{Z}) = \text{Ext}^1(M, \mathbb{Z}) = 0$; тогда $M = 0$. Для того чтобы доказать это утверждение, покажите, что M не имеет кручения. Затем покажите, что M делим (т. е. что умножение на $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — сюръективный морфизм) и что $M \simeq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Если $M \neq 0$, то $M = \mathbb{Q} \oplus L$, из чего следует, что $\text{Ext}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$, а это неверно.)

(ii) Пусть $M^* \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}^f(\mathbb{Z})))$. Докажите, что в этом случае $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}^f(\mathbb{Z})))$.

Упражнение 1.32. Пусть k — поле и $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(k)))$. Положим $X^* = R\text{Hom}(X, k)$ (дифференциал определен в замечании 1.8.11).

- (i) Предположим, что $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_f^b(\mathcal{M}od(k)))$. Докажите существование естественных изоморфизмов

$$X \simeq X^{**}, \quad X^* \otimes X \simeq R\text{Hom}(X, X)$$

и постройте морфизм $X^* \otimes X \rightarrow k$ как прямое произведение морфизмов $(X^n)^* \otimes X^n \rightarrow k$.

- (ii) Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_f^b(\mathcal{M}od(k)))$, и пусть $v \in \text{Hom}(X, X)$. Положим

$$\text{tr}(v) = \sum_j (-1)^j \text{tr}(H^j(v)),$$

где $\text{tr}(H^j(v))$ — след эндоморфизма $H^j(v): H^j(X) \rightarrow H^j(X)$. Пусть теперь $Y \in \text{Ob}(\mathbf{K}^b(\mathcal{M}od^f(k)))$, а $v \in \text{Hom}(Y, Y)$. Докажите, что

$$\text{tr}(v) = \sum_j (-1)^j \text{tr}(v^j).$$

- (iii) Рассмотрим эндоморфизм выделенных треугольников в $\mathbf{D}_f^b(\mathcal{M}od(k))$

$$\begin{array}{ccccccc} X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{\quad +1 \quad} & \\ \downarrow v' & & \downarrow v & & \downarrow v'' & & \\ X' & \longrightarrow & X & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{\quad +1 \quad} & \end{array}$$

Докажите, что $\text{tr}(v) = \text{tr}(v') + \text{tr}(v'')$.

- (iv) В условиях (ii) докажите, что $\text{tr}(v)$ является образом v при морфизме

$$H^0(R\text{Hom}(X, X)) \simeq H^0(X^* \otimes X) \rightarrow k.$$

Обычно для $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_f^b(\mathcal{M}od(k)))$ полагают

$$\chi(X) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(X).$$

Конечно, $\chi(X) = \text{tr}(\text{id}_X)$ в k (см. [SGA6, Exposé 1]).

Упражнение 1.33. Пусть k — поле, V — линейное пространство над k и $u: V \rightarrow V$ — эндоморфизм. Мы говорим, что u принадлежит классу эндоморфизмов со следом, если $\dim(u^n(V)) < \infty$ для некоторого $n > 0$. В этом случае мы полагаем

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(u|_{u^n(V)}).$$

- (i) Докажите, что определение следа $\operatorname{tr}(u)$ не зависит от выбора n .
- (ii) Пусть $V \xrightarrow{u} W \xrightarrow{v} V$ — морфизмы линейных пространств над k . Докажите, что $u \circ v$ принадлежит классу эндоморфизмов со следом в том и только в том случае, когда $v \circ u$ принадлежит этому классу, и тогда $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.
- (iii) Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{v'} & V & \xrightarrow{v''} & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u' & & \downarrow u & & \downarrow u'' & & \\ 0 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{v'} & V & \xrightarrow{v''} & V'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Докажите, что u принадлежит классу эндоморфизмов со следом в том и только в том случае, когда u' и u'' принадлежат этому классу, и тогда $\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(u') + \operatorname{tr}(u'')$.

Упражнение 1.34. Пусть k — поле и $X \in \operatorname{Ob}(\mathbf{D}_f^b(\operatorname{Mod}(k)))$. Положим

$$b_i(X) = \dim H^i(X), \quad b_i^*(X) = (-1)^i \sum_{j \leq i} (-1)^j b_j(X).$$

Пусть $X' \rightarrow X \rightarrow X'' \xrightarrow{+1}$ есть выделенный треугольник в $\mathbf{D}_f^b(\operatorname{Mod}(k))$. Докажите, что

$$\chi(X) = \chi(X') + \chi(X''),$$

$$b_i^*(X) \leq b_i^*(X') + b_i^*(X'').$$

($\chi(X)$ определено в упр. 1.32.)

Упражнение 1.35. (i) Пусть I — направленное множество, а $\{X_i\}$ — индуктивная система, индексированная множеством I , в категории $\mathcal{C}$. Докажите, что " $\varinjlim$ " X_i является индуктивным пределом в $\mathcal{C}^V$.

Точнее, докажите, что для любого $F \in \text{Ob}(\mathcal{C}^\vee)$

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^\vee}(\varinjlim X_i, F) \simeq \varprojlim F(X_i).$$

(ii) Пусть $\{Y_j\}$ является индуктивной системой в $\mathcal{C}$, индексированной направленным множеством $\mathcal{J}$. Докажите, что

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}^\vee} \left(\varinjlim_i X_i, \varinjlim_j Y_j \right) \simeq \varprojlim_i \varprojlim_j \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y_j).$$

Упражнение 1.36. Пусть A — нётерово кольцо, а $\text{Mod}^f(A)$ — категория конечно порожденных A -модулей. Пусть $\{X_i, \rho_{i,j}\}$ — индуктивная система в этой категории, индексированная направленным упорядоченным множеством I . Докажите, что если $\varinjlim_j X_j$ в

$\text{Mod}^f(A)$ существует, то он является представляющим объектом для $\varinjlim_j X_j$.

Упражнение 1.37. Пусть $\mathcal{C}$ — аддитивная категория. Обозначим через $\text{End}(\mathcal{C})$ множество эндоморфизмов функтора $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

- (i) Докажите, что $\text{End}(\mathcal{C})$ является коммутативным кольцом.
- (ii) Докажите, что если A — кольцо, то $\text{End}(\text{Mod}(A))$ изоморфно его центру (т. е. множеству

$$\{a \in A; ax = xa \text{ для любого } x \in A\}).$$

- (iii) Если задан кольцевой гомоморфизм коммутативного кольца A в $\text{End}(\mathcal{C})$, то мы называем $\mathcal{C}$ *аддитивной категорией* над A . Докажите, что $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ имеет структуру A -модуля и что композиция морфизмов A -билинейна.
- (iv) Предположим, что $\mathcal{C}$ — абелева категория над коммутативным нётеровым кольцом A .

(а) Докажите, что для любого $M \in \text{Ob}(\text{Mod}^f(A))$ и любого $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ функтор $Y \mapsto \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y))$ представим. Представляющий объект обозначается через $X \otimes_A M$.

(б) Докажите, что $\otimes_A$ — точный справа бифунктор из $\mathcal{C} \times \text{Mod}^f(A)$ в $\mathcal{C}$.

(с) Докажите, что этот бифунктор имеет левый производный функтор $\otimes_A^L: \mathbf{D}^-(\mathcal{C}) \times \mathbf{D}^-(\text{Mod}^f(A)) \rightarrow \mathbf{D}^-(\mathcal{C})$.

(d) Рассмотрите аналогично функтор $\text{Hom}_{A^\circ}(\cdot, \cdot): \text{Mod}^f(A)^\circ \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ (т. е. функтор $\otimes_A$ в $\mathcal{C}^\circ$).

Упражнение 1.38. Пусть $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ — фильтрованные категории и $\phi: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$ — функтор. Мы называем категории $\mathcal{I}$ и $\mathcal{I}'$ *кофинальными*, если

- (а) для любого $i' \in \text{Ob}(\mathcal{I}')$ существует $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ и морфизм $i' \rightarrow \phi(i)$;
- (б) для любого $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$, любого $i' \in \text{Ob}(\mathcal{I}')$ и морфизма $f: \phi(i) \rightarrow i'$ найдется морфизм $g: i \rightarrow i_1$ в $\mathcal{I}$, такой, что $\phi(g): \phi(i) \rightarrow \phi(i_1)$ пропускается через f .

Пусть $\mathcal{C}$ — категория и $\{C_i\}_{i \in \mathcal{I}'}$ — индуктивная (соответственно проективная) система, индексированная категорией $\mathcal{I}'$. Докажите, что

$$\varinjlim_{\mathcal{I}} F \circ \phi \rightarrow \varinjlim_{\mathcal{I}'} F \quad \text{и} \quad \varprojlim_{\mathcal{I}} F \circ \phi \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{I}'} F$$

(соответственно $\varinjlim_{\mathcal{I}'} F \rightarrow \varinjlim_{\mathcal{I}} F \circ \phi$ и $\varprojlim_{\mathcal{I}'} F \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{I}} F \circ \phi$) — изоморфизмы.

Упражнение 1.39. Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория. Для $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{C}))$ положим $\text{Ext}^j(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[j])$.

- (i) Пусть $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ и $n \geq 1$. По точной последовательности

$$E: 0 \rightarrow Y \rightarrow Z_n \rightarrow Z_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \rightarrow X \rightarrow 0$$

определите элемент $C(E) \in \text{Ext}^n(X, Y)$. Такая точная последовательность называется *n-расширением* объекта X с помощью Y .

- (ii) Докажите, что любой элемент из $\text{Ext}^n(X, Y)$ может быть представлен как $C(E)$ для некоторого расширения E объекта X с помощью Y .
- (iii) Пусть $E': 0 \rightarrow Y \rightarrow Z'_n \rightarrow \dots \rightarrow Z'_1 \rightarrow X \rightarrow 0$ — другое расширение. Докажите, что $C(E) = C(E')$ тогда и только тогда, когда найдется расширение

$$E'': 0 \rightarrow Y \rightarrow Z''_n \rightarrow \dots \rightarrow Z''_1 \rightarrow X \rightarrow 0,$$

такое, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \longrightarrow & Z_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & X \\ \parallel & & \uparrow & & & & \uparrow & & \parallel \\ Y & \longrightarrow & Z''_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z''_1 & \longrightarrow & X \\ \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow & & \parallel \\ Y & \longrightarrow & Z'_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z'_1 & \longrightarrow & X \end{array}$$

(обычно $\text{Ext}^n(X, Y)$ называется *расширением Ионеды*).

Замечания

Мы отсылаем читателя к «Краткому историческому очерку» К. Узе-ля, помещенному в начале этой книги, для детального ознакомления с историей теории когомологий.

Отметим здесь лишь следующий общепризнанный факт: начала теории производных категорий сформулированы Гротендиком в работе [Grothendieck 4] и развиты Вердые в его диссертации. К сожалению, эта диссертация никогда не была опубликована (опубликована только короткая заметка [Verdie 2]).

До появления этой сложной теории математики использовали производные функторы (см. книгу [Cartan-Eilenberg 1] и добавление к ней, написанное Буксбаумом) и фундаментальную технику спектральных последовательностей, предложенную Лере (см. [Leray 1, 2]) в 1945 г. Знаменитая статья Гротендика [Grothendieck 1] оказала огромное влияние, прояснив и обобщив теорию.

В данной книге мы не используем спектральные последовательности. Эта техника в полной общности нам не нужна. Теоремы 1.9.3 вполне достаточно для наших целей.

Напомним, наконец, что ind -объекты и pro -объекты были введены в работе [Grothendieck 2], а условие Миттаг-Лефлера — в [Grothendieck 3].

Пучки

В этой главе мы построим абелеву категорию пучков на топологическом пространстве вместе с обычным набором функторов, таких, как функторы обратного образа f^{-1} и прямого образа f_* , функтор точного прямого образа $f_!$, функтор тензорного произведения $\otimes$ и функтор $\mathcal{H}om$. Используя результаты первой главы, мы определим производную категорию $\mathbf{D}^b(X)$ категории пучков и производные функторы функторов, упомянутых выше. Здесь будут введены понятия инъективных, плоских, вялых и s -мягких пучков и построен аппарат теории пучков, используемый в книге далее (в частности, доказаны лемма о нехарактеристической деформации и теорема о гомотопической инвариантности когомологий). Хотя нам это и не понадобится, мы решили дать краткий очерк теории когомологий Чеха. В конце главы будут рассмотрены некоторые естественно возникающие пучки на вещественных и комплексных многообразиях.

Большинство излагаемых здесь результатов являются классическими, и мы отсылаем читателя к монографиям [Bredon 1], [Godement 1] и [Iversen 1] для дальнейшего ознакомления с теорией пучков.

2.1. Предпучки

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через $\mathcal{O}P(X)$ множество всех открытых подмножеств в X , упорядоченное по включению. Рассмотрим следующую категорию $\mathcal{O}\mathcal{P}(X)$:

$$(2.1.1) \quad \begin{cases} \text{Ob}(\mathcal{O}\mathcal{P}(X)) = \mathcal{O}P(X) \\ \text{Hom}_{\mathcal{O}\mathcal{P}(X)}(V, U) = \begin{cases} \{\text{pt}\}, & \text{если } V \subset U, \\ \emptyset & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{cases}$$

(Здесь V и U — открытые подмножества в X , а $\{\text{pt}\}$ — множество, состоящее из одного элемента.)

Определение 2.1.1. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Предпучком F на X со значениями в $\mathcal{C}$ называется контравариантный функтор из $\mathcal{O}\mathcal{P}(X)$ в $\mathcal{C}$, а морфизмом предпучков — морфизм таких функторов.

Другими словами, предпучок на X — это проективная система, индексированная категорией $\mathfrak{Op}(X)$ (см. § 1.11).

В этой книге мы будем рассматривать только предпучки (и пучки) абелевых групп. Поэтому, если не оговорено противное, под $\mathcal{C}$ будет пониматься $\mathfrak{Ab}$, т. е. предпучок будет предпучком абелевых групп.

Таким образом, предпучок ставит в соответствие каждому открытому множеству $U \subset X$ абелеву группу $F(U)$ и каждому открытому включению $V \subset U$ — групповой гомоморфизм $\rho_{V,U}: F(U) \rightarrow F(V)$, называемый *морфизмом ограничения* и обладающий следующими свойствами:

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} \rho_{U,U} = \text{id}_{F(U)}, \rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} & \text{для каждой} \\ \text{тройки } W \subset V \subset U \text{ открытых подмножеств.} \end{cases}$$

Морфизм предпучков $\phi: F \rightarrow G$ — это семейство групповых гомоморфизмов $\phi_U: F(U) \rightarrow G(U)$, совместимых с морфизмами ограничения. Точнее, если обозначать одним и тем же символом $\rho_{V,U}$ морфизмы ограничения для F и G , то приведенная ниже диаграмма будет коммутативной для всех пар U, V открытых множеств, таких, что $V \subset U$:

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\phi_U} & G(U) \\ \rho_{V,U} \downarrow & & \downarrow \rho_{V,U} \\ F(V) & \xrightarrow{\phi_V} & G(V) \end{array}$$

Определим предпучок 0 как функтор $U \mapsto 0$ для всех открытых U . Прямая сумма $F \oplus G$ предпучков F и G определяется формулой $U \mapsto F(U) \oplus G(U)$. Таким образом, категория предпучков абелевых групп и морфизмов предпучков на топологическом пространстве X является аддитивной категорией. Обозначим ее через $\mathfrak{PSh}(X)$.

Пусть $\phi: F \rightarrow G$ — морфизм предпучков. Соответствие $U \mapsto \text{Ker } \phi_U$ (соответственно $U \mapsto \text{Coker } \phi_U$) определяет предпучок на X , и этот предпучок является ядром (соответственно коядром) морфизма ϕ в категории $\mathfrak{PSh}(X)$. Этот предпучок обозначается через $\text{Ker } \phi$ (соответственно $\text{Coker } \phi$). Так как свойство (ii) определения 1.2.3 очевидно выполняется, то $\mathfrak{PSh}(X)$ является абелевой категорией.

Терминология 2.1.2. Пусть F — предпучок на X и $U \subset X$ — открытое подмножество. Элемент $s \in F(U)$ называется *сечением* предпучка F над U . Если V открыто в U , то мы будем обычно писать $s|_V$ вместо $\rho_{V,U}(s)$ и называть образ $\rho_{V,U}(s)$ *ограничением s на V* .

Положим для $x \in X$

$$(2.1.3) \quad F_x = \varinjlim_U F(U),$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей точки x . Группа F_x называется *стеблем* предпучка F в точке x , а образ сечения $s \in F(U)$ в F_x (где $x \in U$) называется *ростком* этого сечения в точке x и обозначается через s_x .

Через $F|_U$ мы обозначим предпучок на U , определенный следующим образом: $U \supset V \mapsto F(V)$. Этот предпучок называется *ограничением* предпучка F на U .

2.2. Пучки

Пусть X — топологическое пространство.

Определение 2.2.1. Предпучок (абелевых групп) F на X называется *пучком*, если выполнены следующие условия:

- (S1) Для любого открытого множества $U \subset X$, любого его открытого покрытия $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и сечения $s \in F(U)$ из равенств $s|_{U_i} = 0$ для всех i следует $s = 0$.
- (S2) Для любого открытого множества $U \subset X$, любого открытого покрытия $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и любого множества сечений $s_i \in F(U_i)$ из равенств $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ для всех пар $i, j \in I$ следует существование сечения $s \in F(U)$, такого, что $s|_{U_i} = s_i$ для всех i .

Отметим, что, модифицируя определение, мы можем ввести понятие пучков множеств, но такое обобщение нам в этой книге не понадобится.

Отметим далее, что условия (S1) и (S2) эквивалентны следующему утверждению: для любого открытого множества $U \subset X$ и любого его открытого покрытия $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, замкнутого относительно конечных пересечений, морфизм $F(U) \rightarrow \varprojlim_i F(U_i)$ является изоморфизмом.

Если F — пучок, то $F(\emptyset) = 0$.

Если F — пучок на X , а U открыто в X , то $F|_U$ — пучок на U .

Определим *носитель* $\text{supp}(F)$ пучка F как дополнение к объединению открытых множеств $U \subset X$, таких, что $F|_U = 0$. Аналогично определим *носитель* сечения s пучка F на U как дополнение в U к объединению открытых множеств $V \subset U$, таких, что $s|_V = 0$.

Обозначим носитель сечения s через $\text{supp}(s)$. Имеет место равенство $\text{supp}(s) = \{x \in U; s_x \neq 0\}$.

Морфизм пучков определяется как морфизм соответствующих предпучков. Тогда очевидно, что категория пучков на X , которая обозначается через $\mathfrak{Sh}(X)$, является полной аддитивной подкатегорией категории $\mathfrak{PSh}(X)$. Обозначим через $\Gamma(U; \cdot)$ функтор $F \mapsto F(U)$ из $\mathfrak{Sh}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$. Тогда $\Gamma(U; F) = F(U)$.

Предложение 2.2.2. Пусть $\phi: F \rightarrow G$ — морфизм пучков. Он является изоморфизмом в том и только в том случае, когда для любого $x \in X$ индуцированный морфизм $\phi_x: F_x \rightarrow G_x$ является изоморфизмом.

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть ϕ_x — изоморфизм для любого $x \in X$, и пусть U — открытое подмножество в X . Докажем инъективность морфизма $\phi_U: F(U) \rightarrow G(U)$. Пусть $s \in F(U)$ таково, что $\phi_U(s) = 0$. Тогда $(\phi_U(s))_x = \phi_x(s_x) = 0$ и $s_x = 0$ для всех $x \in U$.

Из аксиомы (S1) следует, что $s = 0$. Докажем сюръективность морфизма ϕ_U . Пусть $t \in G(U)$. Тогда по условию существует открытое покрытие $\{U_i\}$ множества U и сечения $s_i \in F(U_i)$, такие, что $\phi(s_i) = t|_{U_i}$. Так как $\phi(s_i)|_{U_i \cap U_j} = \phi(s_j)|_{U_i \cap U_j}$, то из инъективности морфизма ϕ вытекает, что $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Следовательно, существует сечение $s \in F(U)$, такое, что $s|_{U_i} = s_i$. Легко проверить, что $\phi(s) = t$. $\square$

Предложение 2.2.3. Пусть F — предпучок на X ; тогда существуют пучок F^+ и морфизм $\theta: F \rightarrow F^+$, такие, что для любого пучка G на X гомоморфизм

$$\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(F^+, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{PSh}(X)}(F, G),$$

определяемый морфизмом θ , является изоморфизмом. Другими словами, $F \rightarrow F^+$ есть левый сопряженный функтор к функтору включения $\mathfrak{Sh}(X) \rightarrow \mathfrak{PSh}(X)$ (см. упр. 1.2).

Более того, пара (F^+, θ) единственна с точностью до изоморфизма и $\theta_x: F_x \rightarrow F_x^+ — изоморфизм.$

Доказательство. Для любого открытого множества $U \subset X$ определим $F^+(U)$ как множество функций s из U в $\prod_{x \in U} F_x$, таких, что для каждой точки $x \in U$ значение $s(x)$ принадлежит F_x и найдутся открытая окрестность V этой точки, $V \subset U$, и сечение $t \in F(V)$, такие, что $t_y = s(y)$ для всех $y \in V$. Очевидно, что F^+ удовлетворяет условиям (S1)–(S2).

Морфизм $\theta : F \rightarrow F^+$ определяется следующим образом: сечению $s \in F(U)$ мы сопоставляем функцию из U в $\coprod_{x \in U} F_x$, задаваемую соответствием $x \mapsto s_x$. Легко видеть, что $\theta_x : F_x \rightarrow (F^+)_x$ является изоморфизмом для любого $x \in X$. В частности, если G — пучок, то $\theta : G \rightarrow G^+$ — изоморфизм (см. предложение 2.2.2). Следовательно, для предпучка F и пучка G мы можем построить гомоморфизм $\text{Hom}_{\mathfrak{PSh}(X)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(F^+, G)$ как композицию морфизмов $\text{Hom}_{\mathfrak{PSh}(X)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(F^+, G^+) \xleftarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(F^+, G)$. Легко проверить, что этот гомоморфизм обратен гомоморфизму $\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(F^+, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{PSh}(X)}(F, G)$. $\square$

Мы назовем F^+ *ассоциированным пучком* предпучка F .

Пусть $\phi : F \rightarrow G$ — морфизм пучков. Предпучок $U \mapsto \text{Ker } \phi_U$ есть пучок, который является ядром морфизма ϕ в категории $\mathfrak{Sh}(X)$. Напротив, $U \mapsto \text{Coker } \phi_U$ не всегда является пучком, но ассоциированный пучок является коядром морфизма ϕ в категории $\mathfrak{Sh}(X)$. Таким образом, через $\text{Ker } \phi$ мы будем обозначать пучок $U \mapsto \text{Ker } \phi_U$, а через $\text{Coker } \phi$ — ассоциированный пучок предпучка $U \mapsto \text{Coker } \phi_U$. Нужно иметь в виду, что $\text{Coker } \phi$ обозначает разные объекты в $\mathfrak{PSh}(X)$ и в $\mathfrak{Sh}(X)$. Так как мы будем работать с пучками, то обозначение $\text{Coker } \phi$ следует понимать в пучковом смысле.

Заметим, что для $x \in X$

$$(2.2.1) \quad (\text{Ker } \phi)_x = \text{Ker } \phi_x,$$

$$(2.2.2) \quad (\text{Coker } \phi)_x = \text{Coker } \phi_x,$$

где $\phi_x : F_x \rightarrow G_x$ — морфизм, ассоциированный с семейством морфизмов ϕ_U , $x \in U$.

Прямая сумма двух пучков F и G определяется как прямая сумма соответствующих предпучков. Очевидно, что это пучок, и он является прямой суммой в категории $\mathfrak{Sh}(X)$. Мы обозначим его через $F \oplus G$.

Предложение 2.2.4. Категория $\mathfrak{Sh}(X)$ является абелевой.

Доказательство. Пусть $\phi : F \rightarrow G$ — морфизм пучков, $K = \text{Coim } \phi$, $L = \text{Im } \phi$ и $\psi : K \rightarrow L$ — естественный морфизм. Из (2.2.1) и (2.2.2) следует, что морфизмы $\psi_x : K_x \rightarrow L_x$ являются изоморфизмами для всех $x \in X$. Доказываемый результат вытекает из предложения 2.2.2. $\square$

Замечание 2.2.5. Из предложения 2.2.2 следует, что комплекс пучков $F' \rightarrow F \rightarrow F''$ точен в том и только в том случае, когда для любой

точки $x \in X$ точна последовательность групп $F'_x \rightarrow F_x \rightarrow F''_x$. В частности, функтор $F \mapsto F_x$ из $\mathfrak{Sh}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$ точен. С другой стороны, функтор $\Gamma(X; \cdot)$ из $\mathfrak{Sh}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$ точен только слева.

Большинство пучков, с которыми приходится работать, имеют более богатую структуру, чем структура абелевой группы.

Обозначим через $\mathfrak{Ring}$ категорию колец с единицей и морфизмов таких колец. Предпучок со значениями в $\mathfrak{Ring}$ называется *предпучком колец*. Если такой предпучок является пучком (со значениями в $\mathfrak{Ab}$), то он называется *пучком колец*.

Определение 2.2.6. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X . Пучок M называется $\mathcal{R}$ -модулем (или пучком $\mathcal{R}$ -модулей), если $M(U)$ является левым $\mathcal{R}(U)$ -модулем для любого открытого множества $U \subset X$ и для любого открытого вложения $V \subset U$ гомоморфизм ограничения согласован со структурой модуля, т. е. $\rho_{V,U}(sm) = \rho_{V,U}(s) \cdot \rho_{V,U}(m)$ для любого $s \in \mathcal{R}(U)$ и любого $m \in M(U)$.

Морфизм $\mathcal{R}$ -модулей определяется очевидным образом.

Аналогично определяются пучки правых $\mathcal{R}$ -модулей.

Обозначим через $\mathfrak{Mod}(\mathcal{R})$ категорию (левых) $\mathcal{R}$ -модулей. Если $\mathcal{R}^{op}$ обозначает пучок колец, противоположный $\mathcal{R}$ (т. е. $\mathcal{R}^{op}(U) = \mathcal{R}(U)^{op}$), то категория $\mathfrak{Mod}(\mathcal{R}^{op})$ эквивалентна категории правых $\mathcal{R}$ -модулей.

Для $F, G \in \text{Ob}(\mathfrak{Mod}(\mathcal{R}))$ мы будем писать $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)$ вместо $\text{Hom}_{\mathfrak{Mod}(\mathcal{R})}(F, G)$. Таким образом, $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, \cdot)$ есть бифунктор из $\mathfrak{Mod}(\mathcal{R})^o \times \mathfrak{Mod}(\mathcal{R})$ в $\mathfrak{Ab}$.

Легко проверить, что $\mathfrak{Mod}(\mathcal{R})$ — абелева категория. При этом последовательность в $\mathfrak{Mod}(\mathcal{R})$ точна тогда и только тогда, когда она точна в $\mathfrak{Sh}(X)$.

Обозначим через $\mathbb{Z}_X$ пучок на X , ассоциированный с предпучком $U \mapsto \mathbb{Z}$ (см. определение 2.2.11 ниже, где эта конструкция обобщается). Тогда $\mathbb{Z}_X$ является пучком колец и

$$(2.2.3) \quad \mathfrak{Sh}(X) = \mathfrak{Mod}(\mathbb{Z}_X).$$

Мы будем использовать оба этих обозначения. Более того, для $F, G \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X))$ мы будем писать $\text{Hom}(F, G)$ вместо $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(F, G)$ и $\text{Hom}_{\mathfrak{Sh}(X)}(F, G)$.

Пусть теперь $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , а F и G суть $\mathcal{R}$ -модули. Рассмотрим предпучок

$$(2.2.4) \quad U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{R}|_U}(F|_U, G|_U).$$

Этот предпучок, очевидно, является пучком абелевых групп (даже пучком $\mathcal{R}$ -модулей, если $\mathcal{R}$ коммутативно).

Определение 2.2.7. Обозначим через $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)$ пучок, определенный в (2.2.4), и назовем его *пучком решений* модуля F в G (над $\mathcal{R}$).

Заметим, что в общем случае естественный морфизм

$$(2.2.5) \quad (\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G))_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}_x}(F_x, G_x)$$

не является ни инъективным, ни сюръективным. По построению

$$(2.2.6) \quad \Gamma(X; \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)) = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G).$$

Бифунктор $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, \cdot)$ является точным слева по каждому из своих аргументов.

Пусть теперь F — правый $\mathcal{R}$ -модуль, а G — левый $\mathcal{R}$ -модуль.

Определение 2.2.8. Обозначим через $F \otimes_{\mathcal{R}} G$ пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto F(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} G(U)$, и назовем его *тензорным произведением* F и G (над $\mathcal{R}$).

Если $\mathcal{R}$ коммутативно, то $F \otimes_{\mathcal{R}} G$ является пучком $\mathcal{R}$ -модулей. Если $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_X$, то мы будем писать $F \otimes G$ вместо $F \otimes_{\mathbb{Z}_X} G$. По построению для любого $x \in X$

$$(2.2.7) \quad \left(F \otimes_{\mathcal{R}} G \right)_x = F_x \otimes_{\mathcal{R}_x} G_x.$$

Следовательно, функтор $\cdot \otimes_{\mathcal{R}} \cdot$ точен справа для каждого из своих аргументов.

Пусть $\mathcal{S}$ — другой пучок колец на X , а H — некоторый $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ -бимодуль (т. е. H наделен структурой левого $\mathcal{R}$ -модуля и правого $\mathcal{S}$ -модуля так, что действия колец $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ коммутируют). В этом случае существует естественный изоморфизм

$$(2.2.8) \quad F \otimes_{\mathcal{R}} \left(H \otimes_{\mathcal{S}} H \right) \simeq \left(F \otimes_{\mathcal{R}} H \right) \otimes_{\mathcal{S}} G.$$

В этой ситуации мы будем пользоваться обозначением $F \otimes_{\mathcal{R}} H \otimes_{\mathcal{S}} G$.

Предложение 2.2.9. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец, $\mathcal{S}$ — пучок коммутативных колец, а $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{R}$ — морфизм пучков колец, такой, что его образ содержится в центре пучка $\mathcal{R}$. Пусть F, G суть $\mathcal{R}$ -модули, а H есть $\mathcal{S}$ -модуль. Тогда существуют канонические изоморфизмы

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{R}} \left(H \otimes_{\mathcal{S}} F, G \right) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, \text{Hom}_{\mathcal{S}}(H, G)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{S}}(H, \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)). \end{aligned}$$

Доказательство. Для каждого открытого множества $U \subset X$ существуют естественные изоморфизмы

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}(U)} \left(H(U) \otimes_{\mathcal{S}(U)} F(U), G(U) \right) &\simeq \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}(U)} (F(U), \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}(U)} (H(U), G(U))) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}(U)} (H(U), \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}(U)} (F(U), G(U))). \end{aligned}$$

Обозначим через $H \otimes_S^{\vee} F$ предпучок $U \mapsto H(U) \otimes_{\mathcal{S}(U)} F(U)$, и пусть $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}^{\vee}}(\cdot, \cdot)$ обозначает группу морфизмов в категории предпучков $\mathcal{R}$ -модулей. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}^{\vee}} \left(H \otimes_S^{\vee} F, G \right) &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}} (F, \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}} (H, G)) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}} (H, \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}} (F, G)), \end{aligned}$$

и остается применить предложение 2.2.3. □

Следствие 2.2.10. В условиях предложения 2.2.9 существуют канонические морфизмы

$$(2.2.10) \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S F \rightarrow G \quad \text{в } \operatorname{Mod}(\mathcal{R}),$$

$$(2.2.11) \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S H \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}} \left(F, G \otimes_S H \right) \quad \text{в } \operatorname{Mod}(\mathcal{S}),$$

$$(2.2.12) \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R}), \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, \mathcal{R}))$$

в $\operatorname{Mod}(\mathcal{S})$.

Доказательство. (i) Из (2.2.9) следует, что

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}} \left(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S F, G \right) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{S}}(\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G), \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)).$$

Тогда единица из $\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)$ определяет морфизм (2.2.10).

(ii) Тензорно умножая (2.2.10) на H , приходим к морфизму

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S H \otimes_S F \rightarrow G \otimes_S H.$$

Принимая во внимание (2.2.9), получим морфизм (2.2.11).

(iii) Положим для краткости $D_{\mathcal{R}}F = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, \mathcal{R})$. Тогда $D_{\mathcal{R}}$ — это функтор из $\text{Mod}(\mathcal{R})$ в $\text{Mod}(\mathcal{R}^{\text{op}})$. Существуют морфизмы

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{R}^{\text{op}}}(\mathcal{D}_{\mathcal{R}}F, \mathcal{D}_{\mathcal{R}}F) &\rightarrow \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}^{\text{op}}} \left(\text{Hom}_{\mathcal{R}} \left(F, G \otimes_S \mathcal{D}_{\mathcal{R}}G \right), \mathcal{D}_{\mathcal{R}}F \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}^{\text{op}}} \left(\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S \mathcal{D}_{\mathcal{R}}G, \mathcal{D}_{\mathcal{R}}F \right) \simeq \\ &\simeq \text{Hom}_S(\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G), \text{Hom}_{\mathcal{R}^{\text{op}}}(\mathcal{D}_{\mathcal{R}}G, \mathcal{D}_{\mathcal{R}}F)). \end{aligned}$$

Единица из $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}F$ определяет морфизм (2.2.12). $\square$

Теперь построим проективные и индуктивные пределы в категории $\text{Mod}(\mathcal{R})$.

Пусть $\{F_i\}_{i \in I}$ — проективная система $\mathcal{R}$ -модулей, индексированная упорядоченным множеством I . Предпучок $U \mapsto \varprojlim_{i \in I} F_i(U)$, оче-

видно, является пучком и проективным пределом системы $\{F_i\}$ в $\text{Mod}(\mathcal{R})$. Мы обозначим его через $\varprojlim_i F_i$. Таким образом, проектив-

ные пределы в категории $\text{Mod}(\mathcal{R})$ существуют и функторы $\Gamma(U; \cdot)$ и $\varprojlim$ коммутируют, т. е.

$$(2.2.13) \quad \Gamma(U; \varprojlim_i F_i) \simeq \varprojlim_i \Gamma(U; F_i).$$

Заметим, что если $x \in X$, то естественный морфизм $(\varprojlim_i F_i)_x \rightarrow \varprojlim_i (F_i)_x$ не обязательно является изоморфизмом.

Аналогично, если $\{F_j\}_{j \in J}$ — индуктивная система $\mathcal{R}$ -модулей, индексированная упорядоченным множеством J , то через $\varinjlim_j F_j$

мы обозначим пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \varinjlim_{j \in J} F_j(U)$.

Заметим, что для любого $x \in X$ существует изоморфизм

$$(2.2.14) \quad \left(\varinjlim_j F_j \right)_x \simeq \varinjlim_j (F_j)_x.$$

Канонический гомоморфизм $\varinjlim_j \Gamma(U; F_j) \rightarrow \Gamma(U; \varinjlim_j F_j)$, однако, не обязательно является изоморфизмом.

Как частный случай предыдущих рассуждений (когда порядок на I или J тривиален) мы получаем определение прямого произведения $\prod_{i \in I} F_i$ и прямой суммы $\bigoplus_{j \in J} F_j$ семейства пучков.

В конце этого параграфа мы рассмотрим примеры «простейших» пучков на топологическом пространстве X .

Определение 2.2.11. (i) Пусть M — абелева группа. Обозначим через M_X пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto M$ (U открыто в X). Мы назовем M_X *постоянным пучком со стеблем M* .

(ii) Пусть F — пучок на X . Он называется *локально постоянным* на X , если существует открытое покрытие $X = \bigcup_i U_i$, такое, что $F|_{U_i}$ — постоянный пучок для любого i .

Отметим, что если M_X — постоянный пучок со стеблем M , то $(M_X)_x = M$ для всех $x \in X$. Отметим также, что если U открыто, то $\Gamma(U; M_X)$ изоморфен множеству непрерывных функций на U со значениями в M (M наделена дискретной топологией). Мы рассмотрим примеры локально постоянных пучков в § 2.9.

Замечание 2.2.12. Пусть $\{pt\}$ обозначает множество с единственным элементом. Пусть A — кольцо. Оно определяет пучок колец на $\{pt\}$, и иногда полезно рассматривать $\text{Mod}(A)$ как $\text{Mod}(A_{\{pt\}})$, т. е. рассматривать A -модуль как пучок $A_{\{pt\}}$ -модулей.

2.3. Операции над пучками

Пусть X и Y — топологические пространства, а $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение.

Определение 2.3.1. (i) Пусть G — пучок на Y . Его *прямым образом*, обозначаемым через f_*G , называется пучок на X , определяемый так:

$$U \mapsto f_*G(U) = G(f^{-1}(U)), \quad U \text{ открыто в } X$$

(ii) Пусть F — пучок на X . Его *обратным образом*, обозначаемым через $f^{-1}F$, называется пучок на Y , ассоциированный с предпучком

$$V \mapsto \varinjlim_U F(U), \quad V \text{ открыто в } Y, U \text{ пробегает семейство}$$

открытых окрестностей множества $f(V)$ в X .

Очевидным образом определяется прямой (соответственно обратный) образ морфизма пучков на Y (соответственно на X), т. е. мы имеем два функтора

$$\begin{aligned} f_*: \mathfrak{Sh}(Y) &\rightarrow \mathfrak{Sh}(X), \\ f^{-1}: \mathfrak{Sh}(X) &\rightarrow \mathfrak{Sh}(Y). \end{aligned}$$

Если $\mathcal{R}$ (соответственно S) — пучок колец на X (соответственно на Y), то $f^{-1}\mathcal{R}$ (соответственно f_*S) является пучком колец на Y (соответственно на X) и f_* и f^{-1} индуцируют функторы, также обозначаемые через f_* и f^{-1} :

$$\begin{aligned} f_*: \mathcal{M}od S &\rightarrow \mathcal{M}od(f_*S), \\ f^{-1}: \mathcal{M}od \mathcal{R} &\rightarrow \mathcal{M}od(f^{-1}\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Пример 2.3.2. Пусть $a_X: X \rightarrow \{\text{pt}\}$ — отображение (напомним, что $\{\text{pt}\}$ — это множество с единственным элементом). Пусть M — абелева группа. Тогда

$$(2.3.1) \quad M_X = a_X^{-1} M_{\{\text{pt}\}}.$$

Пусть F — пучок на X . Тогда

$$(2.3.2) \quad \Gamma(X; F) = \Gamma(\{\text{pt}\}; a_{X*} F) \simeq a_{X*} F.$$

Пусть $y \in Y$ и F — пучок на X . Тогда

$$(2.3.3) \quad (f^{-1}F)_y = F_{f(y)}.$$

Из этой формулы следует, что f^{-1} — точный функтор. С другой стороны, функтор f_* является только точным слева, что вытекает из точности слева функтора $\Gamma(U; \cdot)$.

Существуют естественные морфизмы функторов

$$(2.3.4) \quad f^{-1} \circ f_* \rightarrow \text{id} \quad \text{в } \mathcal{M}od(f^{-1}\mathcal{R}),$$

$$(2.3.5) \quad \text{id} \rightarrow f_* \circ f^{-1} \quad \text{в } \mathcal{M}od(\mathcal{R}).$$

Предложение 2.3.3. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , $F \in \text{Ob}(\mathcal{M}od(\mathcal{R}))$ и $G \in \text{Ob}(\mathcal{M}od(f^{-1}\mathcal{R}))$. Тогда

$$(2.3.6) \quad \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, f_*G) \simeq \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G).$$

Другими словами, f^{-1} является левым сопряженным к f_* и f_* является правым сопряженным к f^{-1} .

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, f_*G) &\xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, f^{-1}f_*G) \\ &\xrightarrow{\beta} \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G) &\xrightarrow{\gamma} \text{Hom}_{f_*f^{-1}\mathcal{R}}(f_*f^{-1}F, f_*G) \\ &\xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, f_*G). \end{aligned}$$

Гомоморфизмы α и γ определяются очевидным образом, а β и δ определены посредством (2.3.4) и (2.3.5) соответственно. Легко проверяется, что $\beta \circ \alpha$ и $\delta \circ \gamma$ взаимно обратны. $\square$

Следствие 2.3.4. В условиях предложения 2.3.3

$$(2.3.7) \quad \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, f_* G) \simeq f_* \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G).$$

Доказательство. Пусть U открыто в X . Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(U; f_* \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G)) &= \\ &= \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}|_{f^{-1}(U)}}(f^{-1}F|_{f^{-1}(U)}, G|_{f^{-1}(U)}) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{R}|_U}(F|_U, f_* G|_U) \\ &= \Gamma(U; \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, f_* G)). \end{aligned} \quad \square$$

Пусть Z — топологическое пространство, а $g: Z \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Из конструкции прямого и обратного образов непосредственно получаем

$$(2.3.8) \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*,$$

$$(2.3.9) \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

Обратный образ коммутирует с тензорным произведением. Точнее:

Предложение 2.3.5. Пусть F_1 (соответственно F_2) — правый (соответственно левый) $\mathcal{R}$ -модуль. Существует канонический изоморфизм

$$(2.3.10) \quad f^{-1}F_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F_2 \simeq f^{-1} \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2 \right).$$

Доказательство. Морфизм (2.3.10) индуцирован морфизмами

$$F_1(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} F_2(U) \rightarrow \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2 \right)(U), \quad U \text{ открыто в } X.$$

Докажем, что это изоморфизм. Пусть $y \in Y$ и $x = f(y)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}F_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F_2 \right)_y &\simeq (f^{-1}F_1)_y \otimes_{(f^{-1}\mathcal{R})_y} (f^{-1}F_2)_y \\ &\simeq (F_1)_x \otimes_{\mathcal{R}_x} (F_2)_x \\ &\simeq \left(f_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2 \right)_x. \end{aligned} \quad \square$$

Теперь мы построим функторы, связанные с подмножеством $Z \subset X$. Здесь Z рассматривается как топологическое пространство с индуцированной топологией. Обозначим через $j: Z \hookrightarrow X$ соответствующее включение. Для $F \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X))$ положим

$$(2.3.11) \quad F|_Z = j^{-1}F,$$

$$(2.3.12) \quad \Gamma(Z; F) = \Gamma(Z; j^{-1}F).$$

Отметим, что определение (2.3.12) согласуется с ранее данным определением для открытого подмножества Z .

Существует естественный морфизм $\Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(Z; F|_Z)$. Для $s \in \Gamma(X; F)$ мы обозначим через $s|_Z$ его образ в $\Gamma(Z; F|_Z)$ и назовем его *ограничением s на Z* .

Предположим, что Z замкнуто в X . В этом случае положим

$$F_Z = j_* j^{-1}F.$$

Существует естественный морфизм $F \rightarrow F_Z$. Более того,

$$(2.3.13) \quad \begin{cases} F_Z|_Z = F|_Z, \\ F_Z|_{X \setminus Z} = 0. \end{cases}$$

В частности, $(F_Z)_x = F_x$, если $x \in Z$, и $(F_Z)_x = 0$, если $x \notin Z$. Если Z локально замкнуто в X , то также можно построить пучок F_Z на X , удовлетворяющий условию (2.3.13). А именно, если Z открыто, то положим

$$F_Z = \text{Ker}(F \rightarrow F_{X \setminus Z}).$$

В общем случае представим Z в виде $Z = U \cap A$, где U открыто в X , а A замкнуто. Положим

$$F_Z = (F_U)_A.$$

Результат этого построения не зависит от выбора U или A (см. (i) в следующем предложении).

Перечислим основные свойства функтора $(\cdot)_Z: F \mapsto F_Z$.

Предложение 2.3.6. Пусть Z — локально замкнутое подмножество в X , а F — пучок на X .

- (i) Пучок F_Z удовлетворяет условиям (2.3.13). Более того, любой пучок на X , удовлетворяющий (2.3.13), изоморфен F_Z .
- (ii) Функтор $(\cdot)_Z: F \mapsto F_Z$ точен.

(iii) Пусть Z' локально замкнуто в X . Тогда

$$(F_Z)_{Z'} = F_{Z \cap Z'}.$$

(iv) Пусть Z замкнуто в X и $j: Z \hookrightarrow X$ — соответствующее включение. Тогда

$$F_Z = j_* j^{-1} F.$$

(v) Пусть Z' — замкнутое подмножество в Z (Z локально замкнуто). Тогда существует точная последовательность

$$0 \rightarrow F_{Z \setminus Z'} \rightarrow F_Z \rightarrow F_{Z'} \rightarrow 0.$$

(vi) Пусть Z_1 и Z_2 замкнуты в X . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow F_{Z_1 \cup Z_2} \xrightarrow{\alpha} F_{Z_1} \oplus F_{Z_2} \xrightarrow{\beta} F_{Z_1 \cap Z_2} \rightarrow 0$$

точна. Здесь морфизмы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\beta = (\beta_1, -\beta_2)$ индуцированы естественными морфизмами $F_{Z_1 \cup Z_2} \rightarrow F_{Z_i}$ и $F_{Z_i} \rightarrow F_{Z_1 \cap Z_2}$ ($i = 1, 2$) соответственно.

(vii) Пусть U_1 и U_2 открыты в X . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow F_{U_1 \cap U_2} \xrightarrow{\gamma} F_{U_1} \oplus F_{U_2} \xrightarrow{\delta} F_{U_1 \cup U_2} \rightarrow 0$$

точна. Здесь морфизмы $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ и $\delta = (\delta_1, -\delta_2)$ индуцированы естественными морфизмами $F_{U_1 \cap U_2} \rightarrow F_{U_i}$ и $F_{U_i} \rightarrow F_{U_1 \cup U_2}$ ($i = 1, 2$) соответственно.

Доказательство. Все эти утверждения проверяются легко. □

Следствие 2.3.7. Пусть Z_1 и Z_2 замкнуты в X . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma(Z_1 \cup Z_2; F) \rightarrow \Gamma(Z_1; F) \oplus \Gamma(Z_2; F) \rightarrow \Gamma(Z_1 \cap Z_2; F)$$

точна.

Доказательство. Применим точный слева функтор $\Gamma(X; \cdot)$ к точной последовательности предложения 2.3.6(vi) и заметим, что $\Gamma(X; F_Z) \simeq \Gamma(Z; F)$, если Z замкнуто в X . □

Определим другой пучок, функториально связанный с локально замкнутым подмножеством Z пространства X . Пусть U открыто в X , а Z — замкнутое подмножество в U . Положим

$$(2.3.14) \quad \Gamma_Z(U; F) = \text{Ker}(F(U) \rightarrow F(U \setminus Z)).$$

Значит, $\Gamma_Z(U; F)$ — это подгруппа в $\Gamma(U; F)$, состоящая из таких сечений, носитель которых содержится в Z .

Пусть V открыто в U и $Z \subset V$. Канонический морфизм $\Gamma_Z(U; F) \rightarrow \Gamma_Z(V; F)$ является изоморфизмом. Таким образом, для локально замкнутого подмножества Z в X мы можем определить $\Gamma_Z(X; F)$ как $\Gamma_Z(U; F)$, где U — любое открытое множество, содержащее Z как замкнутое подмножество. Отметим, что предпучок $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ является пучком.

Определение 2.3.8. Пучок $U \mapsto \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ обозначим через $\Gamma_Z(F)$ и назовем его *пучком сечений пучка F с носителем в Z* .

Предложение 2.3.9. Пусть Z локально замкнуто в X , а F — пучок на X .

- (i) Функторы $\Gamma_Z(X; \cdot): F \mapsto \Gamma_Z(X; F)$ из $\mathfrak{Sh}(X)$ в $\mathfrak{Ab}$ и $\Gamma_Z(\cdot): F \mapsto \Gamma_Z(F)$ из $\mathfrak{Sh}(X)$ в $\mathfrak{Sh}(X)$ являются точными слева. Более того,

$$\Gamma_Z(X; \cdot) = \Gamma(X; \cdot) \circ \Gamma_Z(\cdot).$$

- (ii) Пусть Z' локально замкнуто в X . Тогда

$$\Gamma_{Z'}(\cdot) \circ \Gamma_Z(\cdot) = \Gamma_{Z \cap Z'}(\cdot).$$

- (iii) Пусть Z открыто в X , а $i: Z \hookrightarrow X$ — соответствующее вложение. Тогда

$$\Gamma_Z(\cdot) = i_* \circ i^{-1}.$$

- (iv) Пусть Z' — замкнутое подмножество локально замкнутого подмножества Z пространства X . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{Z'}(F) \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow \Gamma_{Z \setminus Z'}(F)$$

точна.

- (v) Пусть U_1 и U_2 открыты в X . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_{U_1}(F) \oplus \Gamma_{U_2}(F) \xrightarrow{\beta} \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F)$$

точна. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $\beta = (\beta_1, -\beta_2)$ индуцированы морфизмами $\Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \xrightarrow{\sigma_i} \Gamma_{U_i}(F)$ и $\Gamma_{U_i}(F) \xrightarrow{\beta_i} \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F)$ ($i = 1, 2$) соответственно.

(vi) Пусть Z_1 и Z_2 замкнуты в X . Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \xrightarrow{\gamma} \Gamma_{Z_1}(F) \oplus \Gamma_{Z_2}(F) \xrightarrow{\delta} \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F)$$

точна. Здесь $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ и $\delta = (\delta_1, -\delta_2)$ индуцированы морфизмами $\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \xrightarrow{\gamma_i} \Gamma_{Z_i}(F)$ и $\Gamma_{Z_i}(F) \xrightarrow{\delta_i} \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F)$ ($i = 1, 2$) соответственно.

Доказательство очевидно. $\square$

Итак, мы определили следующие функторы на категории $\mathfrak{Sh}(X)$: $\text{Hom}(\cdot, \cdot), \cdot \otimes \cdot, f_*, f^{-1}, (\cdot)_Z, \Gamma_Z(\cdot), \Gamma(X; \cdot)$. Рассмотрим теперь отношения между ними.

Предложение 2.3.10. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X и $F \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$. Пусть Z — локально замкнутое подмножество в X . Тогда существуют естественные изоморфизмы

$$(2.3.15) \quad \mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F \simeq F_Z,$$

$$(2.3.16) \quad \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) \simeq \Gamma_Z(F).$$

Доказательство. Утверждение (2.3.15) вытекает из соотношений

$$\left(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F \right) \Big|_Z \simeq (\mathcal{R}_Z|_Z) \otimes_{\mathcal{R}|_Z} (F|_Z) \simeq (\mathcal{R}|_Z) \otimes_{\mathcal{R}|_Z} (F|_Z) \simeq F|_Z$$

и $(\mathcal{R}_Z \otimes_{\mathcal{R}} F)|_{X \setminus Z} = 0$ и предложения 2.3.6(i).

Для доказательства изоморфизма (2.3.16) предположим сначала, что Z открыто в X . Для любого открытого подмножества U в X носитель $\Gamma(U; \mathcal{R}_Z)$ замкнут в $U \cap Z$. Из этого следует, что естественный морфизм

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}|_Z}(\mathcal{R}_Z|_Z, F|_Z)$$

является изоморфизмом. Множество справа — это $\Gamma(Z; F)$. Теперь, заменяя в этом изоморфизме X на открытое подмножество U , мы получаем требуемый результат для открытого Z . Если Z замкнуто, то применим функтор $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, F)$ к точной последовательности $0 \rightarrow \mathcal{R}_{X \setminus Z} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}_Z \rightarrow 0$ и сравним полученную последовательность с точной последовательностью $0 \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow F \rightarrow \Gamma_{X \setminus Z}(F)$.

Пусть теперь $Z = A \cap U$, где A замкнуто, а U открыто в X . Имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_Z, F) &= \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_{A \cap U}, F) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}_A, \Gamma_U(F)) \\ &= \Gamma_A(\Gamma_U(F)) \\ &= \Gamma_{U \cap A}(F). \end{aligned}$$

$\square$

Замечание 2.3.11. Предложения 2.2.9, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.5, 2.3.9 и 2.3.10 дают возможность построения других морфизмов и изоморфизмов. Пусть, например, $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , Z — локально замкнутое подмножество в X , а F, F_1, F_2 (соответственно G, G_1, G_2) — пучки $\mathcal{R}$ -модулей (соответственно $f^{-1}\mathcal{R}$ -модулей) (когда речь будет идти о тензорных произведениях, то F_1, G и G_1 будут считаться правыми модулями). Тогда существуют естественные морфизмы и изоморфизмы

$$(2.3.17) \quad \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}} F_2 \right)_Z \simeq F_1 \otimes_{\mathcal{R}} (F_2)_Z \simeq (F_1)_Z \otimes_{\mathcal{R}} F_2,$$

$$(2.3.18) \quad \text{Hom}_{\mathcal{R}}((F_1)_Z, F_2) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F_1, \Gamma_Z(F_2)) \\ \simeq \Gamma_Z \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F_1, F_2),$$

$$(2.3.19) \quad f^{-1}F_Z \simeq (f^{-1}F)_{f^{-1}(Z)},$$

$$(2.3.20) \quad \Gamma_Z f_* G \simeq f_* \Gamma_{f^{-1}(Z)}(G),$$

$$(2.3.21) \quad f_* G \otimes_{\mathcal{R}} F \rightarrow f_* \left(G \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F \right),$$

$$(2.3.22) \quad f_* G_1 \otimes_{\mathcal{R}} f_* G_2 \rightarrow f_* \left(G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right),$$

$$(2.3.23) \quad f_* \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(f_* G_1, f_* G_2),$$

$$(2.3.24) \quad f^{-1} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \rightarrow \text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2).$$

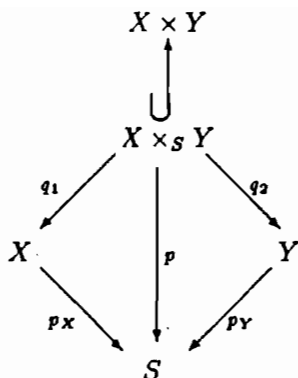
Построим, например, морфизм (2.3.21). Рассмотрим цепочку морфизмов (символ $\mathcal{R}$ для кратости опускается)

$$\text{Hom}(G \otimes f^{-1}F, G \otimes f^{-1}F) \rightarrow \text{Hom}(f^{-1}f_* G \otimes f^{-1}F, G \otimes f^{-1}F) \\ \simeq \text{Hom}(f^{-1}(f_* G \otimes F), G \otimes f^{-1}F) \\ \simeq \text{Hom}(f_* G \otimes F, f_*(G \otimes f^{-1}F)).$$

Образ тождественного морфизма объекта $G \otimes f^{-1}F$ и дает требуемый морфизм.

Обозначение 2.3.12. Пусть $p_X: X \rightarrow S$ и $p_Y: Y \rightarrow S$ — непрерывные отображения, а $X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y; p_X(x) = p_Y(y)\}$ — расслоенное произведение пространств X и Y над S . Обозначим через q_1 и q_2 проекции из $X \times_S Y$ на X и Y соответственно, а через p проекцию из $X \times_S Y$ на S (см. диаграмму (2.3.25)).

(2.3.25)



Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на S , а F (соответственно G) — пучок $p_X^{-1}\mathcal{R}^{op}$ -модулей (соответственно $p_Y^{-1}\mathcal{R}^{op}$ -модулей). Положим

$$(2.3.26) \quad F \boxtimes_{\mathcal{R}} G = q_1^{-1}F \otimes_{p^{-1}\mathcal{R}} q_2^{-1}G.$$

Если нет опасности ошибиться, то мы будем писать просто $F \boxtimes_S G$, а если $S = \{\text{pt}\}$, то S в формулах будет опускаться. Заметим, что если $S = \{\text{pt}\}$, $X = Y$, а δ — диагональное вложение, то

$$F \otimes G \simeq \delta^{-1}(F \boxtimes G).$$

Пучок $F \boxtimes_S G$ называется *внешним тензорным произведением пучков* F и G (над S).

2.4. Инъективные, вялые и плоские пучки

Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{R}$ — пучок колец на X и $F \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$. Мы будем называть пучок F $\mathcal{R}$ -инъективным, если F инъективен как объект категории $\text{Mod}(\mathcal{R})$.

Предложение 2.4.1. (i) Пусть F $\mathcal{R}$ -инъективен, а U — открытое множество X . Тогда пучок $F|_U$ является $\mathcal{R}|_U$ -инъективным.

(ii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, а G — некоторый $f^{-1}\mathcal{R}$ -инъективный пучок на Y . Тогда f_*G является $\mathcal{R}$ -инъективным.

Доказательство. Пусть $i: U \hookrightarrow X$ — включение. Тогда из (2.3.18) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathcal{R}|_U}(G, F|_U) &= \text{Hom}_{\mathcal{R}|_U}((i_*G)|_U, F|_U) \\
 &= \text{Hom}_{\mathcal{R}}((i_*G)_U, F).
 \end{aligned}$$

Так как функтор $G \mapsto (i_*G)_U$ точен, то функтор $G \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{R}|_U}(G, F|_U)$ также точен.

(ii) Надо применить предложение 2.3.2.

□

Следствие 2.4.2. Пусть функтор F $\mathcal{R}$ -инъективен; тогда функтор $\text{Нот}_{\mathcal{R}}(\cdot, F)$ точен.

Предложение 2.4.3. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X . Тогда категория $\text{Мод}(\mathcal{R})$ содержит достаточно много инъективных объектов.

Доказательство. Пусть $\hat{X}$ — пространство X , наделенное дискретной топологией, а $f: \hat{X} \rightarrow X$ — естественное (непрерывное) отображение. Пусть $F \in \text{Об}(\text{Мод}(\mathcal{R}))$, и предположим, что существует $f^{-1}\mathcal{R}$ -инъективный пучок I и мономорфизм $f^{-1}F \rightarrow I$. Применяя точный слева функтор f_* и морфизм (2.3.5), получаем точную последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow f_*I$. Так как f_*I является $\mathcal{R}$ -инъективным по предположению 2.4.1, то достаточно доказать утверждение для дискретного пространства $\hat{X}$.

Пусть $F \in \text{Об}(\text{Мод}(f^{-1}\mathcal{R}))$, и для любого $x \in X$ пусть $0 \rightarrow F_x \rightarrow I_x$ — точная последовательность в $\text{Мод}(\mathcal{R}_x)$, такая, что I_x инъективен (см. пример 1.3.9). Тогда $\prod_{x \in X} I_x$ определяет инъективный пучок I на $\hat{X}$ и последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow I$ точна. $\square$

Замечание 2.4.4. В общем случае категория $\text{Мод}(\mathcal{R})$ не обязательно содержит достаточно много проективных объектов (см. упр. 2.23).

Определение 2.4.5. Пучок F на X называется *вялым*, если для любого открытого подмножества $U \subset X$ морфизм ограничения $\Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(U; F)$ сюръективен.

Предложение 2.4.6. Пусть F — вялый пучок на X .

- (i) Для любого открытого подмножества $U \subset X$ пучок $F|_U$ является вялым на U .
- (ii) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение; тогда пучок f_*F является вялым.
- (iii) Пусть Z — локально замкнутое подмножество в X . Тогда пучок $\Gamma_Z(F)$ является вялым.
- (iv) Пусть Z — локально замкнутое подмножество в X , а Z' — замкнутое подмножество в Z . Тогда последовательность

$$0 \rightarrow \Gamma_{Z'}(F) \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow \Gamma_{Z \setminus Z'}(F) \rightarrow 0$$

точна.

- (v) Пусть U_1 и U_2 — открытые подмножества в X . Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_{U_1}(F) \oplus \Gamma_{U_2}(F) \xrightarrow{\beta} \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F) \longrightarrow 0$$

точна (α и β определены, как в предложении 2.3.9).

(vi) Пусть Z_1 и Z_2 — замкнутые подмножества в X . Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \xrightarrow{\gamma} \Gamma_{Z_1}(F) \oplus \Gamma_{Z_2}(F) \xrightarrow{\delta} \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F) \longrightarrow 0$$

точна (γ и δ определены, как в предложении 2.3.9).

(vii) Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , G — некоторый $\mathcal{R}$ -модуль, а H есть $\mathcal{R}$ -инъективный модуль. Тогда пучок $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, H)$ является вялым. В частности, все $\mathcal{R}$ -инъективные модули являются вялыми.

Доказательство. (i) и (ii) очевидны.

(iii) Заменяя X на U , где U открыто в X и содержит Z как замкнутое подмножество, мы можем предполагать, что Z замкнуто. Пусть U открыто в X . Нам нужно доказать, что морфизм ограничения $\Gamma_Z(X; F) \rightarrow \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$ сюръективен. Пусть $s \in \Gamma_{Z \cap U}(U; F)$. Продолжим s нулем на $X \setminus Z$. Обозначим это продолжение через s' . Потом продолжим s' на все X , используя вялость F .

(iv) Пусть U — открытое множество; тогда $\Gamma(U; \Gamma_Z(F)) \rightarrow \Gamma(U; \Gamma_{Z \setminus Z'}(F)) \simeq \Gamma(U \setminus Z'; \Gamma_Z(F))$ сюръективен по (iii).

(v) Из предложения 2.3.9 следует, что достаточно доказать эпиморфность β . Но морфизм ограничения $\Gamma_{U_1}(F) \rightarrow \Gamma_{U_1 \cap U_2}(F)$ уже эпиморфен.

(vi) Пусть $s \in \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(X; F)$. Найдем сечения $s_i \in \Gamma_{Z_i}(X \setminus Z_1 \cap Z_2; F)$ ($i = 1, 2$), такие, что $s = s_1 - s_2$ на $X \setminus Z_1 \cap Z_2$. Продолжим s_1 и s_2 до сечений s'_1 и s'_2 на всем X . Тогда $s'_1 - s'_2 = s + s'$, где $s' \in \Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(X; F)$ и $(s'_1 - s') - s'_2 = s$.

(vii) Пусть U — открытое подмножество в X . Применяя точный функтор $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, H)$ к точной последовательности $0 \rightarrow G_U \rightarrow G \rightarrow G_{X \setminus U} \rightarrow 0$, получаем требуемый результат ввиду следствия 2.4.2. $\square$

Предложение 2.4.7. Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — последовательность в $\mathfrak{Sh}(X)$. Пусть пучок F' вялый. Тогда последовательность $0 \rightarrow \Gamma(X; F') \rightarrow \Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(X; F'') \rightarrow 0$ точна.

Доказательство. Пусть $s'' \in \Gamma(X; F'')$, и пусть $\mathfrak{S}$ — множество пар (U, s) , таких, что U открыто в X , $s \in \Gamma(U; F')$ и s отображается в $s''|_U$. Упорядочим $\mathfrak{S}$, полагая $(U, s) \leq (V, t)$, если $U \subset V$ и $t|_U = s$. Тогда $\mathfrak{S}$ индуктивно упорядочено. Пусть (U, s) — максимальный элемент, и предположим, что $U \neq X$. Возьмем точку $x \in X \setminus U$. Тогда существуют открытая окрестность V точки x и сечение $t \in \Gamma(V; F')$, такие, что t отображается в $s''|_V$. На $U \cap V$ сечение $s - t$ принадлежит $\Gamma(U \cap V; F')$. Найдем сечение $r \in \Gamma(X; F')$, такое, что

$r|_{U \cap V} = s - t$. Заменяя t на $t - r$, мы можем считать, что $t = s$ на $U \cap V$. Следовательно, s может быть продолжено на $U \cup V$. Противоречие. $\square$

Следствие 2.4.8. В условиях предложения 2.4.7 пусть Z локально замкнуто в X . Тогда последовательности

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(X; F') \rightarrow \Gamma_Z(X; F) \rightarrow \Gamma_Z(X; F'') \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow \Gamma_Z(F') \rightarrow \Gamma_Z(F) \rightarrow \Gamma_Z(F'') \rightarrow 0$$

точны.

Доказательство. Для открытого множества U , такого, что $U \cap Z$ замкнуто в U , построим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma_{Z \cap U}(U; F') & \longrightarrow & \Gamma_{Z \cap U}(U; F) & \longrightarrow & \Gamma_{Z \cap U}(U; F'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(U; F') & \longrightarrow & \Gamma(U; F) & \longrightarrow & \Gamma(U; F'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Gamma(U \setminus Z; F') & \longrightarrow & \Gamma(U \setminus Z; F) & \longrightarrow & \Gamma(U \setminus Z; F'') \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Из предложения 2.4.7 вытекает, что вторая и третья строки, а также все столбцы точны. Следовательно, верхняя строка точна (см. упр. 1.8). $\square$

Следствие 2.4.9. Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathfrak{Sh}(X)$. Предположим, что пучки F' и F вялые; тогда пучок F'' также является вялым.

Доказательство. Пусть U открыто в X . В диаграмме

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma(X; F) & \longrightarrow & \Gamma(X; F'') \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \gamma \\
 \Gamma(U; F) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(U; F'')
 \end{array}$$

α и β сюръективны. Следовательно, γ сюръективен. $\square$

Таким образом (см. определение 1.8.2), полная подкатегория категории $\mathfrak{Sh}(X)$, состоящая из вялых пучков, инъективна по отношению к функторам $\Gamma(X; \cdot)$, $\Gamma_Z(\cdot)$ и f_* .

Отметим, что свойства пучка быть инъективным или вялым — это локальные свойства.

Предложение 2.4.10. Пусть $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие.

- (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X))$. Если пучок $F|_{U_i}$ вял при всех i , то F — вялый пучок.
- (ii) Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , а $F \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$. Если пучок $F|_{U_i}$ является $\mathcal{R}|_{U_i}$ -инъективным при всех i , то F $\mathcal{R}$ -инъективен.

Доказательство. Для доказательства п. (i) достаточно доказать следующее утверждение:

(2.4.1) пучок F вял в том и только в том случае, когда для любого открытого подмножества U морфизм $F \rightarrow \Gamma_U(F)$ является эпиморфизмом.

Так как из вялости пучка F следует, что $F \mapsto \Gamma_U(F)$ — эпиморфизм, то нужно показать обратное.

Пусть s_0 есть сечение пучка F над открытым множеством V_0 . Чтобы доказать продолжаемость сечения s_0 до глобального сечения, рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ пар (s, V) , где V открыто, а $s \in \Gamma(V; F)$. Упорядочим $\mathfrak{S}$, полагая $(s, V) \leq (s', V')$, если $V \subset V'$ и $s'|_V = s$. Тогда $\mathfrak{S}$ становится индуктивно упорядоченным, т. е. существует максимальный элемент (s, V) , такой, что $(s, V) \geq (s_0, V_0)$. Покажем, что $V = X$. Если это не так, то найдется точка $x \in X \setminus V$. Так как $F_x \rightarrow \Gamma_V(F)_x$ — сюръективный морфизм, то существует открытая окрестность W точки x и сечение $t \in \Gamma(W; F)$, такие, что $t|_{V \cap W} = s|_{V \cap W}$. Тогда существует сечение $s' \in \Gamma(W \cup V; F)$, такое, что $s'|_W = t$ и $s'|_V = s$. Это противоречит максимальной паре (s, V) . Следовательно, $V = X$ и (2.4.1) доказано.

(ii) Функтор $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, F)$ точен, и для любого пучка $\mathcal{R}$ -модулей G пучок $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, F)$ является вялым. Тогда функтор $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, F) = \Gamma(X; \cdot) \circ \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, F)$ точен. $\square$

Определение 2.4.11. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X и $F \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$. Пучок F называется $\mathcal{R}$ -плоским, если функтор $\cdot \otimes_{\mathcal{R}} F$ из категории правых $\mathcal{R}$ -модулей в $\mathfrak{Sh}(X)$ точен.

Если нет опасности путаницы, то мы будем писать «плоский» вместо « $\mathcal{R}$ -плоский».

Из (2.2.7) следует, что F является $\mathcal{R}$ -плоским и том и только в том случае, когда пучки F_x являются $\mathcal{R}_x$ -плоскими для всех $x \in X$.

Предложение 2.4.12. Пусть $F \in \text{Ob}(\text{Мод}(\mathcal{R}))$. Тогда существует $\mathcal{R}$ -плоский пучок P и эпиморфизм $P \rightarrow F$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{S}$ — семейство пар (U, s) , где U открыто и $s \in \Gamma(U; F)$. Если $(U, s) \in \mathfrak{S}$, то через $\mathcal{R}(U, s)$ мы обозначим пучок $\mathcal{R}_U$, индексированный парой (U, s) . Положим

$$(2.4.2) \quad P = \bigoplus_{(U, s) \in \mathfrak{S}} \mathcal{R}(U, s).$$

Цепочка морфизмов $\mathcal{R}_U \rightarrow F_U \rightarrow F$, где единичное сечение $1 \in \Gamma(U; \mathcal{R}_U)$ отображается в $s \in \Gamma(U; F)$, определяет эпиморфизм $P \rightarrow F$. Модуль P является плоским, так как P_x является свободным $\mathcal{R}_x$ -модулем для любого $x \in X$. $\square$

Предложение 2.4.13. Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\text{Мод}(\mathcal{R})$. Если F и F'' являются $\mathcal{R}$ -плоскими, то F' также является $\mathcal{R}$ -плоским.

Доказательство. Это утверждение немедленно вытекает из соответствующих свойств $\mathcal{R}_x$ -модулей (при всех $x \in X$). $\square$

Заметим, что из двух последних предложений следует, что категория $\text{Мод}(\mathcal{R})$ содержит достаточно много проективных объектов по отношению к функтору $G \otimes_{\mathcal{R}} \cdot$ (для любого правого $\mathcal{R}$ -модуля G).

2.5. Пучки на локально компактных пространствах

Если топологическое пространство X удовлетворяет некоторым условиям конечности (например, является локально компактным), то возникают новые интересные классы пучков и функторы на них. В этом разделе, если не оговорено противное (как в предложении 2.5.1 или замечании 2.5.3), все пространства предполагаются локально компактными и, в частности, хаусдорфовыми.

Предложение 2.5.1. Пусть X — (не обязательно локально компактное) топологическое пространство, Z — его подпространство и F — пучок на X . Рассмотрим канонический морфизм

$$\psi: \varinjlim_U \Gamma(U; F) \rightarrow \Gamma(Z; F),$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей подпространства Z (в X).

- (i) Морфизм ψ инъективен.
- (ii) Пусть X хаусдорфово, а Z компактно. Тогда ψ — изоморфизм.
- (iii) Пусть X паракомпактно, а Z замкнуто. Тогда ψ — изоморфизм.

Перед тем как приступить к доказательству, напомним, что хаусдорфово пространство X называется паракомпактным, если для любого его открытого покрытия $(U_i)_{i \in I}$ найдется открытое локально конечное покрытие $(V_j)_{j \in J}$, являющееся измельчением покрытия $(U_i)_{i \in I}$ (т. е. для любого $j \in J$ найдется $i \in I$, такое, что $V_j \subset U_i$). Также напомним, что если X паракомпактно и $(U_i)_{i \in I}$ — открытое локально конечное покрытие, то существует открытое покрытие $(V_i)_{i \in I}$, такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$ для всех i . Замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно. Локально компактные пространства, счетные на бесконечности, а также метрические пространства паракомпактны.

Доказательство предложения 2.5.1. (i) Если $s \in \Gamma(U; F)$ является нулем в $\Gamma(Z; F)$, то $s_x = 0$ для всех $x \in Z$. Поэтому s равно нулю в открытой окрестности подпространства Z .

(ii) и (iii). Пусть $s \in \Gamma(Z; F)$. Тогда существуют семейство открытых множеств $\{U_i\}_{i \in I}$ и семейство сечений $s_i \in \Gamma(U_i; F)$, такие, что $s|_{U_i \cap Z} = s_i|_{U_i \cap Z}$ и $Z \subset \bigcup U_i$. В случае (ii) мы можем считать I конечным, а в случае (iii) мы можем считать, что $\{U_i\}$ — локально конечное покрытие пространства X .

В каждом случае мы можем найти семейство открытых подмножеств $\{V_i\}_{i \in I}$, такое, что $\bar{V}_i \subset U_i$, $\{V_i\}$ локально конечно и $Z \subset \bigcup V_i$. Для любого $x \in X$ положим $I(x) = \{i \in I; x \in \bar{V}_i\}$ и

$$W = \{x \in \bigcup V_i; s_{ix} = s_{jx} \text{ для всех } i, j \in I(x)\}.$$

Тогда $I(x)$ — конечное множество, и для каждого $x \in X$ найдется окрестность W_x , такая, что $I(y) \subset I(x)$ при $y \in W_x$. Поэтому W открыто и содержит Z (по построению). Так как $s_i|_{W \cap V_i \cap V_j} = s_j|_{W \cap V_i \cap V_j}$, то существует $\tilde{s} \in \Gamma(W; F)$, такое, что $\tilde{s}|_{W \cap V_i} = s_i|_{W \cap V_i}$. Тогда $\tilde{s}$ удовлетворяет равенству $\psi(\tilde{s}) = s$. $\square$

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение (X и Y не обязательно локально компактны). Напомним, что f называется собственным, если оно замкнуто (т. е. образ замкнутого в Y множества замкнут в X).

X), а его слои относительно хаусдорфовы (т. е. любые две различные точки слоя имеют в Y непересекающиеся окрестности) и компактны. Если X и Y локально компактны, то f собственно в том и только в том случае, когда прообраз любого компактного в X множества компактен в Y . Пусть G — пучок на Y . Определим подпучок $f_!G$ пучка f_*G , полагая для открытого $U \subset X$

$$(2.5.1) \quad \Gamma(U; f_!G) = \{s \in \Gamma(f^{-1}(U); G); f: \text{supp}(s) \rightarrow U \text{ собственно}\}.$$

Так как свойство быть собственным локально на X , то очевидно, что предпучок, определенный условием (2.5.1), является подпучком пучка f_*G . Пучок $f_!G$ называется *прямым образом с собственными носителями* пучка G . Обозначим через $f_!$ функтор $G \mapsto f_!G$ из $\mathfrak{Sh}(Y)$ в $\mathfrak{Sh}(X)$. Если $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , то функтор $f_!$ индуцирует функтор, также обозначаемый $f_!$, из $\text{Mod}(f^{-1}\mathcal{R})$ в $\text{Mod}(\mathcal{R})$. Очевидно, что $f_!$ — точный слева функтор. Положим

$$(2.5.2) \quad \Gamma_c(X; F) = \{s \in \Gamma(X; F); \text{supp}(s) \text{ компактен и хаусдорфов}\}.$$

Если a_X — отображение $X \rightarrow \{\text{pt}\}$, то $\Gamma_c(X; F) \simeq a_{X!} F$.

Пусть $g: Z \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Имеем

$$(2.5.3) \quad f_! \circ g_! = (f \circ g)_!.$$

В частности,

$$(2.5.4) \quad \Gamma_c(X; f_!G) \simeq \Gamma_c(Y; G).$$

Предложение 2.5.2. Пусть X и Y локально компактны (в частности, хаусдорфовы), $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение и G — пучок на Y . Тогда определенный для каждого $x \in X$ канонический морфизм

$$\alpha: (f_!G)_x \rightarrow \Gamma_c(f^{-1}(x); G|_{f^{-1}(x)})$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Докажем сначала инъективность морфизма α . Пусть V — открытая окрестность точки x и $t \in \Gamma(V; f_!G)$. Тогда t определено сечением $s \in \Gamma(f^{-1}(V); G)$, таким, что отображение $\text{supp}(s) \rightarrow V$ собственное. Если $\alpha(t) = 0$, то $\text{supp}(s) \cap f^{-1}(x) = \emptyset$ и $x \notin f(\text{supp}(s))$. Так как последнее множество замкнуто, то существует открытая окрестность точки x , на которой $t = 0$.

Докажем теперь, что морфизм α сюръективен. Пусть $s \in \Gamma_c(f^{-1}(x); G|_{f^{-1}(x)})$, а $K = \text{supp}(s)$. Из предложения 2.5.1 вытекает существование открытой окрестности U множества K в Y и сечения $t \in \Gamma(U; G)$,

таких, что $t|_K = s|_K$. Уменьшая U , мы можем считать, что имеет место равенство $t|_{U \cap f^{-1}(x)} = s|_{U \cap f^{-1}(x)}$. Пусть V — относительно компактная открытая окрестность множества K , $\bar{V} \subset U$. Так как $x \notin f(\bar{V} \cap \text{supp}(t) \setminus V)$, то найдется открытая окрестность W точки x , такая, что $f^{-1}(W) \cap \bar{V} \cap \text{supp}(t) \subset V$. Определим $\bar{s} \in \Gamma(f^{-1}(W); G)$, полагая

$$\begin{aligned}\bar{s}|_{f^{-1}(W) \setminus (\text{supp}(t) \cap \bar{V})} &= 0, \\ \bar{s}|_{f^{-1}(W) \cap V} &= t|_{f^{-1}(W) \cap V}.\end{aligned}$$

Так как $\text{supp}(\bar{s}) \subset f^{-1}(W) \cap \text{supp}(t) \cap \bar{V}$, то f собственна на этом множестве. Более того, $\bar{s}|_{f^{-1}(x)} = s$. $\square$

Замечание 2.5.3. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение (X и Y не обязательно локально компактны) и G — пучок на Y . Пусть f собственна на $\text{supp}(G)$. Рассуждая, как в предложении 2.5.2, мы можем показать, что для любого $x \in X$ естественный морфизм

$$(f_*G)_x \rightarrow \Gamma(f^{-1}(x); G|_{f^{-1}(x)})$$

является изоморфизмом.

Предложение 2.5.4. Пусть Z локально замкнуто в X (X не предполагается локально компактным) и $i: Z \hookrightarrow X$ — соответствующее включение.

(i) Функтор $i_!$ точен.

(ii) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathcal{G}\mathfrak{h}(X))$. Тогда

$$F_Z \simeq i_! \circ i^{-1}(F).$$

Доказательство. (i) $(i_!F)_x \simeq F_x$ или 0, в зависимости от того, $x \in Z$ или $x \notin Z$.

(ii) Имеем $i_! \circ i^{-1}F|_{X \setminus Z} = 0$ и $(i_! \circ i^{-1}F)|_Z = i^{-1}F$. Далее используем предложение 2.3.6(i). $\square$

С этого момента и до конца параграфа все пространства предполагаются локально компактными.

Определение 2.5.5. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathcal{G}\mathfrak{h}(X))$. Пучок F называется *c-мягким*, если для любого компактного подмножества $K \subset X$ морфизм ограничения $\Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(K; F)$ сюръективен.

Из предложения 2.5.1 вытекает, что вялые пучки и, в частности, инъективные пучки, являются *c-мягкими*. В § 2.9 мы приведем примеры *c-мягких* пучков.

Предложение 2.5.6. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathcal{S}h(X))$. Тогда F является s -мягким в том и только в том случае, когда для любого замкнутого подмножества $Z \subset X$ морфизм ограничения $\Gamma_c(X; F) \rightarrow \Gamma_c(Z; F_Z)$ сюръективен.

Доказательство. Если K компактно, то $\Gamma(K; F) = \Gamma_c(K; F|_K)$, что доказывает достаточность.

Предположим теперь, что F является s -мягким, и пусть $s \in \Gamma(Z; F|_Z)$ — сечение с компактным носителем K . Пусть U — относительно компактная открытая окрестность множества K в X . Определим сечение $\tilde{s} \in \Gamma(\partial U \cup (Z \cap \bar{U}); F)$, полагая $\tilde{s}|_{Z \cap \bar{U}} = s$, $\tilde{s}|_{\partial U} = 0$. Продолжим $\tilde{s}$ до сечения $t \in \Gamma(X; F)$. Так как $t = 0$ в окрестности ∂U , то можно считать, что носитель сечения t принадлежит $\bar{U}$. $\square$

Предложение 2.5.7. Пусть F есть s -мягкий пучок на X .

- (i) Пусть Z локально замкнуто в X . Тогда пучок $F|_Z$ является s -мягким.
- (ii) Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда пучок $f_! F$ является s -мягким.
- (iii) Пусть Z локально замкнуто в X . Тогда пучок F_Z является s -мягким

Доказательство. (i) Если Z открыто, то утверждение очевидно. Если Z замкнуто, то нужно применить предложение 2.5.6.

(ii) Если K компактно в Y , то $\Gamma(K; f_! F) = \Gamma_c(f^{-1}K; F)$. Так как $\Gamma_c(Y; f_! F) = \Gamma_c(X; F)$, то утверждение следует из предложения 2.5.6.

(iii) Это утверждение следует из (i) и (ii), так как $F_Z = f_!(F|_Z)$, где f — включение $Z \hookrightarrow X$. $\square$

Предложение 2.5.8. Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на X и F' есть s -мягкий пучок. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Тогда последовательность $0 \rightarrow f_! F' \rightarrow f_! F \rightarrow f_! F'' \rightarrow 0$ точна. В частности, точна последовательность $0 \rightarrow \Gamma_c(X; F') \rightarrow \Gamma_c(X; F) \rightarrow \Gamma_c(X; F'') \rightarrow 0$.

Доказательство. Для всех $y \in Y$ пучок $F'|_{f^{-1}(y)}$ является s -мягким на $f^{-1}(y)$. Тогда из предложения 2.5.2 вытекает, что утверждение достаточно доказать для отображения $f: X \rightarrow \{\text{pt}\}$.

Пусть $s'' \in \Gamma_c(X; F'')$ и U — относительно компактная открытая окрестность множества $\text{supp}(s'')$. Покажем, что s'' содержится в образе $\Gamma_c(X; F) \rightarrow \Gamma_c(X; F'')$. Заменяя F', F и F'' на F'_U, F_U и F''_U , а X на $\bar{U}$, мы можем считать X компактным. Пусть $\{K_i\}_{i=1, \dots, n}$ — конечное покрытие пространства X компактными множествами, такое,

что для любого i существует сечение $s_i \in \Gamma(K_i; F)$, образ которого есть $s''|_{K_i}$. Проведем индукцию по n . Если $n \geq 2$, то на $K_1 \cap K_2$ сечение $s_1 - s_2$ определяет элемент из $\Gamma(K_1 \cap K_2; F')$ и, следовательно, продолжается до сечения $s' \in \Gamma(X; F')$. Заменяя s_2 на $s_2 + s'$, мы можем считать, что $s_1|_{K_1 \cap K_2} = s_2|_{K_1 \cap K_2}$. Поэтому существует $t \in \Gamma(K_1 \cup K_2; F)$, такое, что $t|_{K_i} = s_i$ ($i = 1, 2$). Далее применяем индукцию. $\square$

Следствие 2.5.9. Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathfrak{Sh}(X)$. Пусть пучки F' и F являются s -мягкими; тогда F'' также s -мягкий.

Доказательство аналогично доказательству следствия 2.4.9. $\square$

Из этих результатов вытекает, что категория s -мягких пучков является инъективной по отношению к функторам $\Gamma_c(X; \cdot)$, $f_!$ и $\Gamma(K; \cdot)$ (K — компакт). Если X счетно на бесконечности, то справедливо более сильное утверждение.

Предложение 2.5.10. Пусть X локально компактно и счетно на бесконечности. Тогда категория s -мягких пучков инъективна по отношению к функтору $\Gamma(X; \cdot)$.

Доказательство. Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathfrak{Sh}(X)$, где F' — s -мягкий пучок. Пусть $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность компактных подмножеств в X , такая, что $\bigcup_n K_n = X$ и $K_n \subset \text{Int}(K_{n+1})$ для всех n . Из предложений 2.5.7 и 2.5.8 вытекает, что последовательности $0 \rightarrow \Gamma(K_n; F') \rightarrow \Gamma(K_n; F) \rightarrow \Gamma(K_n; F'') \rightarrow 0$ точны при всех n . Так как морфизм $\Gamma(K_{n+1}; F') \rightarrow \Gamma(K_n; F')$ сюръективен при всех n , то, применяя предложение 1.12.3, получаем, что последовательность

$$0 \rightarrow \varprojlim_n \Gamma(K_n; F') \rightarrow \varprojlim_n \Gamma(K_n; F) \rightarrow \varprojlim_n \Gamma(K_n; F'') \rightarrow 0$$

точна. Так как $\Gamma(X; G) \cong \varprojlim_n \Gamma(K_n; G)$ для любого пучка G , то доказательство закончено. $\square$

Изучим отношения между функтором $f_!$ и функторами, введенными ранее. Рассмотрим декартов квадрат локально компактных пространств:

$$(2.5.5) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ \downarrow g' & \square & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Напомним, что это означает следующее: (а) диаграмма коммутативна, (b) пространство Y' изоморфно расслоенному произведению $Y \times_X X' = \{(y, x') \in Y \times X'; f(y) = g(x')\}$ как топологическое пространство (символ «квадрат» внутри диаграммы означает, что диаграмма декартова).

Предложение 2.5.11. *Существует канонический изоморфизм функторов*

$$(2.5.6) \quad g^{-1} \circ f_! \simeq f'_! \circ g'^{-1}.$$

Доказательство. Построим сначала канонический морфизм

$$(2.5.7) \quad f_! \circ g'_* \rightarrow g_* \circ f'_!.$$

Пусть $G \in \text{Ob}(\mathcal{G}h(Y'))$, а V открыто в X . Сечение $t \in \Gamma(V; f_! \circ g'_* G)$ определено сечением $s \in \Gamma((f \circ g')^{-1}(V); G)$, таким, что $\text{supp}(s) \subset g'^{-1}(Z)$, где подмножество $Z \subset f^{-1}(V)$ собственно над V . Тогда морфизм $g'^{-1}(Z) \rightarrow g^{-1}(V)$ собственный и s определяет сечение пучка $g_* f'_! G$. Это определяет морфизм (2.5.7).

Для того чтобы доказать (2.5.6), рассмотрим пучок $G \in \text{Ob}(\mathcal{G}h(Y))$. Из предложения 2.5.3 следует, что

$$\text{Hom}(g^{-1} \circ f_! G, f'_! \circ g'^{-1} G) = \text{Hom}(f_! G, g_* \circ f'_! \circ g'^{-1} G).$$

Морфизм $f_! \rightarrow f_! \circ g'_* \circ g'^{-1} \rightarrow g_* \circ f'_! \circ g'^{-1}$ индуцирует морфизм (2.5.6). Докажем, что это изоморфизм. Пусть $x' \in X'$; тогда

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f_! G)_{x'} &= (f_! G)_{g(x')} \\ &= \Gamma_c(f^{-1}(g(x'))); G). \end{aligned}$$

Отображение g' индуцирует гомеоморфизм $f'^{-1}(x') \simeq f^{-1}(g(x'))$ и изоморфизм

$$\Gamma_c(f^{-1}(g(x'))); G) \simeq \Gamma_c(f'^{-1}(x')); g'^{-1} G) \simeq (f_! \circ g'^{-1} G)_{x'}. \quad \square$$

Теперь рассмотрим связь функтора $f_!$ с тензорным произведением.

Лемма 2.5.12 *Пусть A — кольцо, а M — плоский A -модуль. Пусть F — пучок правых A -модулей. Тогда существует естественный изоморфизм*

$$\Gamma_c(X; F) \otimes_A M \simeq \Gamma_c \left(X; F \otimes_{A_X} M_X \right).$$

В частности, если F является c -мягким, то пучок $F \otimes_{A_X} M_X$ также c -мягкий.

Доказательство. Мы можем считать X компактным. Если $X = \bigcup_j K_j$ — конечное покрытие пространства X компактными подмножествами, то существует точная последовательность

$$(2.5.8) \quad 0 \longrightarrow \Gamma(X; F) \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_j \Gamma(K_j; F) \xrightarrow{\mu} \bigoplus_{j,k} \Gamma(K_j \cap K_k; F).$$

Так как модуль M плоский, то последовательность остается точной после тензорного умножения на M . Поэтому получаем диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow & \Gamma(X; F) \otimes_A M & \xrightarrow{\lambda} & \bigoplus_j \Gamma(K_j; F) \otimes_A M & \xrightarrow{\mu} & \bigoplus_{j,k} \Gamma(K_j \cap K_k; F) \otimes_A M \\ & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\ 0 \rightarrow & \Gamma\left(X; F \otimes_{A_X} M_X\right) & \xrightarrow{\lambda'} & \bigoplus_j \Gamma\left(K_j; F \otimes_{A_X} M_X\right) & \xrightarrow{\mu'} & \bigoplus_{j,k} \Gamma\left(K_j \cap K_k; F \otimes_{A_X} M_X\right) \end{array}$$

Покажем сначала, что α инъективен. Для $x \in X$ имеет место изоморфизм

$$(2.5.9) \quad \lim_U \left(\Gamma(U; F) \otimes_A M \right) \xrightarrow{\sim} \lim_U \Gamma\left(U; F \otimes_{A_X} M_X\right),$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей точки x (на самом деле обе части (2.5.9) изоморфны $F_x \otimes_A M$). Следовательно, если сечение $s \in \Gamma(X; F) \otimes_A M$ удовлетворяет условию $\alpha(s) = 0$, то мы можем найти конечное покрытие $X = \bigcup_j K_j$, такое, что $\lambda(s) = 0$. Тогда $s = 0$. То же рассуждение, примененное к K_j и $K_j \cap K_k$ вместо X , дает инъективность β и γ .

Для доказательства сюръективности α возьмем $t \in \Gamma(X; F \otimes_{A_X} M_X)$. Из (2.5.9) следует существование конечного покрытия $X = \bigcup_j K_j$, такого, что $\lambda'(t)$ принадлежит образу β . Тогда из инъективности γ следует, что t принадлежит образу α . $\square$

Предложение 2.5.13. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , и пусть $F \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$ и $G \in \text{Ob}(\text{Mod}(f^{-1}\mathcal{R}^{\text{op}}))$.

(i) Существует естественный морфизм

$$(2.5.10) \quad f_! G \otimes_{\mathcal{R}} F \rightarrow f_! \left(G \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1} F \right).$$

(ii) Пусть F — плоский $\mathcal{R}$ -модуль; тогда (2.5.10) — изоморфизм.

Доказательство. Отметим, что морфизм (2.5.10) индуцирован морфизмом (2.3.21). Пусть теперь F — плоский модуль. Покажем, что (2.5.10) — изоморфизм. Выберем $x \in X$ и применим предложение 2.5.2 и лемму 2.5.12. Имеем

$$\begin{aligned} \left(f_! \left(G_{f^{-1}\mathcal{R}} \otimes f^{-1}F \right) \right)_x &\simeq \Gamma_c \left(f^{-1}(x); G_{f^{-1}\mathcal{R}} \otimes f^{-1}F \right) \\ &\simeq \Gamma_c \left(f^{-1}(x); G_{(\mathcal{R}_x)_Y} \otimes (F_x)_Y \right) \\ &\simeq \Gamma_c(f^{-1}(x); G) \otimes_{\mathcal{R}_x} F_x \\ &\simeq (f_!G)_x \otimes_{\mathcal{R}_x} F_x \\ &\simeq \left(f_!G \otimes_{\mathcal{R}} F \right)_x. \end{aligned}$$

□

Предложение 2.5.13 позволяет построить другие естественные морфизмы. Например, если G_1 и G_2 — два $f^{-1}\mathcal{R}$ -модуля, то существуют морфизмы (там, где рассматривается тензорное произведение, G_1 считается правым модулем)

$$(2.5.11) \quad f_!G_1 \otimes_{\mathcal{R}} f_*G_2 \longrightarrow f_! \left(G_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right),$$

$$(2.5.12) \quad \begin{array}{ccc} f_! \operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(f_*G_1, f_!G_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_* \operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathcal{R}}(f_!G_1, f_!G_2). \end{array}$$

Существование морфизма (2.5.11) вытекает из (2.5.10) и (2.3.4). Объясним существование верхней стрелки в (2.5.12). Положим $H = \operatorname{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2)$. Тогда существуют естественные морфизмы

$$f_!H \otimes f_*G_1 \rightarrow f_!(H \otimes G_1) \rightarrow f_!G_2.$$

Теперь существование верхней стрелки следует из предложения 2.2.9. Другие стрелки в (2.5.12) определяются аналогично. Отметим, что если $\mathcal{R}$ коммутативно, то эти морфизмы $\mathcal{R}$ -линейны.

2.6. Когомологии пучков

Применим результаты гл. 1 к категории пучков. Пусть X — топологическое пространство, а $\mathcal{R}$ — пучок колец на X . Категория $\text{Mod}(\mathcal{R})$ пучков (левых) $\mathcal{R}$ -модулей на X абелева. Следовательно, мы можем рассматривать производную категорию $\mathbf{D}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$ и ее полные триангулированные подкатегории $\mathbf{D}^*(\text{Mod}(\mathcal{R}))$, где $*$ = +, −, b . Для краткости будем писать

$$(2.6.1) \quad \mathbf{D}^*(\mathcal{R}) = \mathbf{D}^*(\text{Mod}(\mathcal{R})), \quad * = \emptyset, +, -, b.$$

В частности, если A — кольцо, то категория $\mathbf{D}(A_X)$ есть производная категория категории пучков A -модулей на X . (Например, $\mathbf{D}(\mathbb{Z}_X) = \mathbf{D}(\mathfrak{S}\mathfrak{h}(X))$.)

Для того чтобы определить производные функторы от функторов, введенных ранее, рассмотрим следующую ситуацию: Z локально замкнуто в X , $f: Y \rightarrow X$ и $g: W \rightarrow Y$ — непрерывные отображения, $S \rightarrow \mathcal{R}$ — морфизм пучков колец на X , образ которого содержится в центре пучка $\mathcal{R}$, а $\mathcal{S}$ коммутативен. Когда мы рассматриваем функтор $f_!$ (или $g_!$), то считаем соответствующие пространства локально компактными.

Так как категория $\text{Mod}(\mathcal{R})$ содержит достаточно много инъективных объектов, то мы можем определить производные функторы от всех точных слева функторов. Получаем

$$\begin{aligned} R\Gamma_Z(X; \cdot) &: \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathfrak{A}b), \\ R\Gamma_Z(\cdot) &: \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}), \\ R\Gamma(Z; \cdot) &: \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathfrak{A}b), \\ Rf_* &: \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}), \\ R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\cdot, \cdot) &: \mathbf{D}^-(\mathcal{R})^\circ \times \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{S}), \\ R\text{Hom}_{\mathcal{S}}(\cdot, \cdot) &: \mathbf{D}^-(\mathcal{S})^\circ \times \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}), \\ R\Gamma_c(X; \cdot) &: \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathfrak{A}b), \\ Rf_! &: \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Кроме того, так как функторы $(\cdot)_Z: F \rightarrow F_Z$ и $f^{-1}: F \rightarrow f^{-1}F$ точны, то они определяют функторы на производных категориях, и мы получаем функторы (где $*$ = $\emptyset$, +, −, b)

$$\begin{aligned} (\cdot)_Z &: \mathbf{D}^*(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^*(\mathcal{R}), \\ f^{-1} &: \mathbf{D}^*(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^*(f^{-1}\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Напомним, что для нахождения производного функтора нужно заменить комплекс пучков F комплексом инъективных пучков I , квазиизоморфным F , после чего применить функтор к комплексу I . Для

заданного функтора достаточно выбрать пучки I^j из подкатегории пучков, инъективной по отношению к этому функтору.

Пример 2.6.1. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathfrak{Sh}(X))$. Рассмотрим точную последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow F^0 \rightarrow \dots$, где пучки F^j вялые. отождествим F с комплексом $\dots \rightarrow 0 \rightarrow F \rightarrow 0 \dots$, полагая степень F равной нулю. Тогда F квазиизоморфно комплексу

$$F^\bullet : \dots \rightarrow 0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \dots,$$

где F^0 имеет степень 0. Тогда $R\Gamma_Z(X; F)$ представляется комплексом $\Gamma_Z(X; F^\bullet)$.

Для того чтобы определить левый производный функтор $\cdot \otimes_{\mathcal{R}}^L \cdot$, нужно наложить некоторые условия на $\mathcal{R}$.

Определение 2.6.2. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X . Положим (см. упр. 1.29):

$$\text{wgld}(\mathcal{R}) = \sup_{x \in X} (\text{wgld}(\mathcal{R}_x)).$$

Тогда $\text{wgld}(\mathcal{R})$ называется *слабой глобальной размерностью* пучка $\mathcal{R}$.

При рассмотрении тензорных произведений над пучком колец $\mathcal{R}$ мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{R}$ имеет конечную слабую глобальную размерность

$$(2.6.2) \quad \text{wgld}(\mathcal{R}) < \infty.$$

Применяя предложение 2.4.12, следствие 1.7.8 и упр. 1.23, мы устанавливаем, что если F принадлежит $\text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{R}))$ (соответственно $\text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$), то он квазиизоморфен ограниченному комплексу (соответственно комплексу, ограниченному снизу) плоских $\mathcal{R}$ -модулей. Поэтому мы можем определить производные функторы

$$\begin{aligned} \cdot \otimes_{\mathcal{R}}^L \cdot &: \mathbf{D}^*(\mathcal{R}^{op}) \times \mathbf{D}^*(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^*(S), \\ \cdot \otimes_S^L \cdot &: \mathbf{D}^*(\mathcal{R}) \times \mathbf{D}^*(S) \rightarrow \mathbf{D}^*(\mathcal{R}), \end{aligned}$$

где $*$ = $-$, $+$, b .

В частности, в условиях обозначения 2.3.12 для $*$ = $-$, $+$, b мы получаем функторы

$$\cdot \boxtimes_{\mathcal{R}}^L \cdot : \mathbf{D}^*(p_X^{-1}(\mathcal{R}^{op})) \times \mathbf{D}^*(p_Y^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^*(p^{-1}S).$$

(Здесь $\mathcal{R}$ и S — пучки колец на S .)

Теперь мы кратко опишем отношения между этими функторами, используя результаты предложений 1.8.7 и 1.10.9.

Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$. Тогда

$$(2.6.3) \quad R\Gamma_Z(X; F) \simeq R\Gamma(X; R\Gamma_Z(F)).$$

В самом деле, если F инъективен, то и $\Gamma_Z(F)$ инъективен.

Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{R}))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$. Тогда

$$(2.6.4) \quad R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \simeq R\Gamma(X; R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)).$$

В самом деле, категория вялых пучков инъективна по отношению к функтору $\Gamma(X; \cdot)$, и если F и G — пучки $\mathcal{R}$ -модулей и F инъективен, то пучок $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, F)$ вялый.

Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(g^{-1}f^{-1}\mathcal{R}))$. Тогда

$$(2.6.5) \quad R(f \circ g)_* F \simeq Rf_* Rg_* F.$$

В самом деле, если F вялый, то $g_* F$ является вялым, т. е. вялые пучки образуют инъективную категорию по отношению к функтору прямого образа. Аналогично, говоря о c -мягких пучках вместо вялых, получаем

$$(2.6.6) \quad R(f \circ g)_! F \simeq Rf_! Rg_! F.$$

Предложение 2.6.3. Пусть $\phi: \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(S)$ — функтор, индуцированный забывающим функтором $\text{Mod}(\mathcal{R}) \rightarrow \text{Mod}(S)$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^-(\mathcal{R}))$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$ и $H \in \text{Ob}(\mathbf{D}^-(S))$ ($\text{wglid}(S) < \infty$); тогда

$$(i) \quad \phi(R\text{Hom}_S(H, G)) \simeq R\text{Hom}_S(H, \phi(G));$$

$$(ii) \quad \phi \in \mathbf{D}^+(S)$$

$$(2.6.7) \quad R\text{Hom}_{\mathcal{R}}\left(F \overset{L}{\underset{S}{\otimes}} H, G\right) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, R\text{Hom}_S(H, G)) \\ \simeq R\text{Hom}_S(H, R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)).$$

Доказательство. Из предложения 2.2.9 следует, что если H является плоским над S и G инъективен, то $\text{Hom}_S(H, G)$ — комплекс инъективных $\mathcal{R}$ -модулей. Следовательно,

$$R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F \overset{L}{\underset{S}{\otimes}} H, G) = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F \overset{L}{\underset{S}{\otimes}} H, G),$$

$$R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, R\text{Hom}_S(H, G)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, \text{Hom}_S(H, G)).$$

Теперь существование первого изоморфизма в (ii) следует из предложения 2.2.9. Для доказательства (i) и доказательства существования второго изоморфизма в (ii) заменим H ограниченным сверху комплексом H , таким, что H^n есть прямая сумма пучков $\mathcal{S}_U$ (см. конструкцию в предложении 2.4.12). Тогда $\text{Ext}_S^j(H^n, K) = 0$ при $j \neq 0$ для любого вялого $\mathcal{S}$ -модуля K . Следовательно, $R\text{Hom}_S(H, K) \simeq \text{Hom}_S(H, K)$ для комплекса K вялых $\mathcal{S}$ -модулей. Пусть теперь G инъективен. Тогда (i) следует из того, что $\phi(G)$ является комплексом вялых $\mathcal{S}$ -модулей. По предложению 2.4.6(vii) $\text{Hom}_S(F, G)$ является комплексом вялых $\mathcal{S}$ -модулей. Поэтому $R\text{Hom}_S(H, R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)) \simeq \text{Hom}_S(H, \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G))$. Так как объект H является плоским над $\mathcal{S}$, то $R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F \otimes_S^L H, G) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{R}}(F \otimes_S H, G)$. Остается применить предложение 2.2.9. $\square$

Используя производный функтор $R\Gamma(X; \cdot)$ для нахождения нулевых когомологий, получаем

$$(2.6.8) \quad \text{Hom}_{D^+(\mathcal{R})} \left(F \otimes_S^L H, G \right) \simeq \text{Hom}_{D^+(\mathcal{S})}(H, R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)) \\ \simeq \text{Hom}_{D^+(\mathcal{R})}(F, R\text{Hom}_S(H, G)).$$

Положим $H = \mathcal{S}_Z$ в (2.5.7); тогда

$$(2.6.9) \quad R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F_Z, G) \simeq R\Gamma_Z R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \\ \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, R\Gamma_Z(G)) \quad \text{в } D^+(\mathcal{S}).$$

Теперь, рассуждая, как в следствии 2.2.10, можно построить естественные морфизмы

$$(2.6.10) \quad R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S^L F \rightarrow G \quad \text{в } D^+(\mathcal{R}),$$

$$(2.6.11) \quad R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_S^L H \rightarrow R\text{Hom}_{\mathcal{R}} \left(F, G \otimes_S^L H \right) \quad \text{в } D^+(\mathcal{S}),$$

$$(2.6.12) \quad R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \rightarrow R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R}), R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, \mathcal{R})) \\ \text{в } D^+(\mathcal{S}).$$

В (2.6.12) мы предполагаем, что $\mathcal{R}$ коммутативен, $\text{wglid}(\mathcal{R}) < \infty$ и $F, G, R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R})$ ограничены. Тогда морфизм (2.6.12) определяется следующим образом. Из (2.6.11) следует, что

$$R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_{\mathcal{R}}^L R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R}) \rightarrow R\text{Hom}_{\mathcal{R}} \left(F, G \otimes_{\mathcal{R}}^L R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R}) \right).$$

С другой стороны, (2.6.10) дает морфизм $G \otimes_{\mathcal{R}}^L R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{R}$. Объединяя, получаем морфизм

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F, G) \otimes_{\mathcal{R}}^L R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(G, \mathcal{R}) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F, \mathcal{R}).$$

Тогда из (2.6.8) следует (2.6.12).

Предложение 2.6.4. (i) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}))$, и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^-(\mathcal{R}))$. Тогда

$$(2.6.13) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F, Rf_*G) \simeq R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G).$$

(ii) Функторы $f^{-1} : \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R})$ и $Rf_* : \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R})$ сопряжены, т. е.

$$(2.6.14) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathcal{R})}(F, Rf_*G) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R})}(f^{-1}F, G).$$

Доказательство. (i) Если G инъективен, то f_*G тоже инъективен. Следовательно, $R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(f, Rf_*(\cdot))$ — производный функтор от $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(F, f_*(\cdot))$. Так как $R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, \cdot)$ — производный функтор от $\text{Hom}_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, \cdot)$, то утверждение вытекает из предложения 2.3.3.

(ii) Доказательство аналогично доказательству п. (i). □

Аналогичные рассуждения дают

$$(2.6.15) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F, Rf_*G) \simeq Rf_*R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1}F, G) \quad \text{в } \mathbf{D}^+(\mathcal{S}).$$

Применяя (2.6.14), получаем естественные морфизмы

$$(2.6.16) \quad \text{id} \rightarrow Rf_* \circ f^{-1} \quad \text{в } \mathbf{D}^+(\mathcal{R}),$$

$$(2.6.17) \quad f^{-1} \circ Rf_* \rightarrow \text{id} \quad \text{в } \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}).$$

Предложение 2.6.5. Пусть $F_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}^{op}))$, $F_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$ ($\text{wgl}d(\mathcal{R}) < \infty$). Тогда

$$(2.6.18) \quad f^{-1}F_1 \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}}^L f^{-1}F_2 \xrightarrow{\sim} f^{-1} \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}}^L F_2 \right) \in \mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{S}).$$

Доказательство. Если F является плоским над $\mathcal{R}$, то $f^{-1}F$ будет плоским над $f^{-1}\mathcal{R}$. Следовательно, $f^{-1}(\cdot) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}}^L f^{-1}(\cdot)$ является производным функтором функтора $f^{-1}(\cdot) \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}(\cdot)$. Остается применить предложение 2.3.5. □

Предложение 2.6.6. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}^{\text{op}}))$, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$ ($\text{wglid}(\mathcal{R}) < \infty$). Тогда

$$(2.6.19) \quad Rf_! G \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{R}} F \xrightarrow{\sim} Rf_! \left(G \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F \right) \text{ в } \mathbf{D}^+(S).$$

(Напомним, что X и Y локально компактны.)

Доказательство. Предположим сначала, что F плоский. Из леммы 2.5.12 вытекает, что функтор $\cdot \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F$ отображает s -мягкие пучки в $f_!$ -инъективные пучки. Следовательно, $Rf_!(\cdot \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F)$ — производный функтор от $f_!(\cdot \otimes_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F)$. Так как $Rf_!(\cdot) \otimes_{\mathcal{R}} F$ — производный функтор от $f_!(\cdot) \otimes_{\mathcal{R}} F$, то утверждение в этом случае вытекает из предложения 2.5.13. В общем случае заметим, что если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$, то F квазиизоморфен ограниченному снизу комплексу плоских пучков. $\square$

Предложение 2.6.7. Рассмотрим декартов квадрат (2.5.5), и пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}))$. Тогда

$$(2.6.20) \quad g^{-1} \circ Rf_! G \simeq Rf'_! \circ g'^{-1} G \text{ в } \mathbf{D}^+(g^{-1}\mathcal{R}).$$

Доказательство. Так как $g^{-1} \circ Rf_!$ является производным функтором от $g^{-1} \circ f_!$, то достаточно показать (см. предложение 2.5.11), что $Rf'_! \circ g'^{-1}$ есть производный функтор от $f'_! \circ g'^{-1}$.

Обозначим через I_Y подкатегорию в $\text{Mod}(f^{-1}\mathcal{R})$, состоящую из таких пучков G , что $G|_{f^{-1}(x)}$ является s -мягким пучком для всех $x \in X$. Аналогично определим подкатегорию $I_{Y'}$ в $\text{Mod}(g'^{-1}f^{-1}\mathcal{R})$. Тогда категория I_Y инъективна по отношению к функтору g'^{-1} , g'^{-1} отображает I_Y в $I_{Y'}$ и категория $I_{Y'}$ инъективна по отношению к функтору $f'_!$, что завершает доказательство. $\square$

Некоторые естественные морфизмы и изоморфизмы могут быть выведены из приведенных выше формул. Опишем их, оставляя доказательства существования читателю. Напомним, что если в формуле есть тензорное произведение $\otimes_{\mathcal{R}}$, то $\text{wglid} \mathcal{R} < \infty$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}^{\text{op}}))$. Имеем

$$(2.6.21) \quad Rf_* G \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{R}} F \rightarrow Rf_* \left(G \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{R}} f^{-1}F \right) \text{ в } \mathbf{D}^+(S).$$

Пусть $G_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}^{\text{op}}))$ и $G_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}))$. Имеем

$$(2.6.22) \quad Rf_* G_1 \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{R}} Rf_* G_2 \rightarrow Rf_* \left(G_1 \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right) \text{ в } \mathbf{D}^+(S),$$

$$(2.6.23) \quad Rf_! G_1 \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{R}} Rf_* G_2 \rightarrow Rf_! \left(G_1 \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{R}} G_2 \right) \text{ в } \mathbf{D}^+(S).$$

Пусть $G_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(f^{-1}\mathcal{R}))$, $G_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(f^{-1}\mathcal{R}))$, и пусть f_* и $f_!$ имеют конечную когомологическую размерность (см. упр. 1.19). Тогда

$$(2.6.24) \quad Rf_* R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(Rf_* G_1, Rf_* G_2),$$

$$(2.6.25) \quad Rf_* R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(Rf_! G_1, Rf_! G_2),$$

$$(2.6.26) \quad Rf_! R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(G_1, G_2) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(Rf_* G_1, Rf_! G_2)$$

в $\mathbf{D}^+(S)$.

Пусть $F_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{R}))$ и $F_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$. Имеем

$$(2.6.27) \quad f^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(F_1, F_2) \rightarrow R\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{R}}(f^{-1} F_1, f^{-1} F_2)$$

в $\mathbf{D}^+(f^{-1}S)$.

Наконец, используем предложения 1.8.8, 2.3.6, 2.3.9 и 2.4.6. Пусть U_1 и U_2 (соответственно Z_1 и Z_2) — открытые (соответственно замкнутые) подмножества в X , Z — локально замкнутое подмножество в X , а Z' — замкнутое подмножество в Z .

Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$, то существуют следующие выделенные треугольники:

$$(2.6.28) \quad R\Gamma_{U_1 \cup U_2}(F) \rightarrow R\Gamma_{U_1}(F) \oplus R\Gamma_{U_2}(F) \rightarrow R\Gamma_{U_1 \cap U_2}(F) \xrightarrow{+1},$$

$$(2.6.29) \quad R\Gamma_{Z_1 \cap Z_2}(F) \rightarrow R\Gamma_{Z_1}(F) \oplus R\Gamma_{Z_2}(F) \rightarrow R\Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(F) \xrightarrow{+1},$$

$$(2.6.30) \quad F_{U_1 \cap U_2} \rightarrow F_{U_1} \oplus F_{U_2} \rightarrow F_{U_1 \cup U_2} \xrightarrow{+1},$$

$$(2.6.31) \quad F_{Z_1 \cup Z_2} \rightarrow F_{Z_1} \oplus F_{Z_2} \rightarrow F_{Z_1 \cap Z_2} \xrightarrow{+1},$$

$$(2.6.32) \quad R\Gamma_{Z'}(F) \rightarrow R\Gamma_Z(F) \rightarrow R\Gamma_{Z \setminus Z'}(F) \xrightarrow{+1},$$

$$(2.6.33) \quad F_{Z \setminus Z'} \rightarrow F_Z \rightarrow F_{Z'} \xrightarrow{+1}.$$

Обозначения 2.6.8. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , Z локально замкнуто в X , $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$, $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{R}))$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}^{op}))$. Положим

$$H_Z^j(F) = H^j(R\Gamma_Z(F)),$$

$$H^j(X; F) = H^j(R\Gamma(X; F)),$$

$$H_Z^j(X; F) = H^j(R\Gamma_Z(X; F)),$$

$$H^j(Z; F) = H^j(R\Gamma(Z; F)),$$

$$H_c^j(X; F) = H^j(R\Gamma_c(X; F)),$$

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{R}}^j(K, F) = H^j(R\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(K, F)),$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{R}}^j(K, F) = H^j(R\text{Hom}_{\mathcal{R}}(K, F)),$$

$$\text{Tor}_j^{\mathcal{R}}(G, F) = H^{-j}\left(G \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{R}} F\right).$$

Отметим, что если X локально компактно, то $H_c^j(X; F) \varprojlim_K H_K^j(X; F)$, где K пробегает семейство компактных подмножеств пространства X .

Замечание 2.6.9. Для некоторого не обязательно локально замкнутого подмножества Z пространства X определим функтор $F \mapsto \Gamma(Z; F) = \Gamma(Z; F|_Z)$. Мы можем рассмотреть производный функтор $F \mapsto R\Gamma(Z; F)$. Здесь нужно соблюдать осторожность, так как $R\Gamma(Z; F)$ может не совпадать с функтором $R\Gamma(Z; \cdot)$, примененным к $F|_Z$. Однако в следующих ситуациях существует естественный изоморфизм $R\Gamma(Z; F) \simeq R\Gamma(Z; F|_Z)$:

- (i) Z открыто;
- (ii) X хаусдорфово и Z компактно;
- (iii) Z замкнуто в паракомпактном открытом подмножестве $U \subset X$.

Во всех случаях

$$H^j(Z; F) \varprojlim_{\rightarrow} H^j(U; F),$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей множества Z в X .

Замечание 2.6.10. Применяя функтор $R\Gamma(X; \cdot)$ к выделенным треугольникам (2.6.28)–(2.6.32), мы получим новые выделенные треугольники. Применяя функтор $H^0(\cdot)$ к этим треугольникам, получим длинные точные последовательности. Последовательности, полученные из (2.6.28)–(2.6.31), называются *последовательностями Майера-Вьеториса*. Например, существует точная последовательность

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{k-1}(U_1 \cap U_2; F) \rightarrow H^k(U_1 \cup U_2; F) \\ \rightarrow H^k(U_1; F) \oplus H^k(U_2; F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Существует также точная последовательность, полученная применением функтора $R\Gamma_c(X; \cdot)$ к (2.6.33) (с $Z = X, Z' = K$ — компакт)

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(K; F) \rightarrow H_c^k(X \setminus K; F) \rightarrow H_c^k(X; F) \rightarrow \dots$$

Обозначение 2.6.11. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_X))$. Его носитель, обозначаемый $\text{supp}(F)$, является замкнутым подмножеством в X :

$$(2.6.34) \quad \text{supp}(F) = \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \text{supp } H^j(F)}.$$

(ii) Пусть A — кольцо и $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathfrak{Mod}(A)))$. Положим

$$M_X = a_X^{-1} M,$$

где a_X — это отображение $X \rightarrow \{\text{pt}\}$.

(iii) Пусть A — коммутативное кольцо. Работая в категории $\mathbf{D}^+(A_X)$, мы будем называть A *базовым кольцом*. Если не может возникнуть путаницы, то мы будем писать Hom , $\otimes$, $\boxtimes$ вместо Hom_A , $\otimes_A$, $\boxtimes_A$. Начиная с гл. 3, мы часто будем писать $\mathbf{D}^+(X)$ вместо $\mathbf{D}^+(A_X)$.

2.7. Некоторые теоремы об обращении в нуль

В этом параграфе будут сформулированы и доказаны теоремы об обращении в нуль групп когомологий пучков, или, что эквивалентно, теоремы об изоморфизмах групп когомологий, в некоторых частных случаях. Эти результаты будут получены или с помощью «нехарактеристических деформаций» (предложение 2.7.2), или гомотопическими методами, с помощью процедуры Миттаг-Лефлера, которую мы теперь сформулируем для пучков.

Предложение 2.7.1. Пусть X — топологическое пространство и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_X))$. Пусть $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность открытых в X множеств, а $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — убывающая последовательность замкнутых в X множеств. Положим $U = \bigcup_n U_n$, $Z = \bigcap_n Z_n$.

- (i) Для любого j естественное отображение $\varphi_j : H_Z^j(U; F) \rightarrow \varprojlim_n H_{Z_n}^j(U_n; F)$ сюръективно.
- (ii) Пусть для данного j проективная система $\{H_{Z_n}^{j-1}(U_n; F)\}_n$ удовлетворяет условию M - L . Тогда φ_j биективно.
- (iii) Пусть $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность подмножеств в X , таких, что $\bigcup_n X_n = X$ и $X_n \subset \text{Int}(X_{n+1})$ для всех n . Пусть для данного j проективная система $\{H^{j-1}(X_n; F)\}_n$ удовлетворяет условию M - L . Тогда естественное отображение $H^j(X; F) \rightarrow \varprojlim_n H^j(X_n; F)$ биективно.

Доказательство. Мы можем считать F комплексом вялых пучков.

Для доказательства (i) и (ii) обозначим через E_n^i простой комплекс, ассоциированный с двойным комплексом

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \Gamma(U_n; F^{i-1}) & \longrightarrow & \Gamma(U_n; F^i) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & \Gamma(U_n \setminus Z_n; F^{i-1}) & \longrightarrow & \Gamma(U_n \setminus Z_n; F^i) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Тогда $H_{Z_n}^j(U_n; F) \simeq H^j(E_n^i)$ и $H_Z^j(U; F) \simeq H^j\left(\varprojlim_n E_n^i\right)$. Так как объекты $\{E_n^i\}_n$ удовлетворяют условию М-Л при всех i , то утверждение следует из предложения 1.12.4.

(iii) есть следствие того, что $\{H^{j-1}(\text{Int } X_n; F)\}_n$ удовлетворяет условию М-Л, и того, что $\varprojlim H^j(X_n; F) \simeq \varprojlim H^j(\text{Int } X_n; F)$. $\square$

Предложение 2.7.2. (лемма о нехарактеристической деформации). Пусть X — хаусдорфово пространство, $F \in \text{Ob}(\mathcal{D}^+(\mathbb{Z}_X))$ и $\{U_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — семейство открытых подмножеств из X . Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) $U_t = \bigcup_{s < t} U_s$ для всех $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) для всех пар (s, t) , $s \leq t$, множество $\overline{U_t \setminus U_s} \cap \text{supp}(F)$ компактно;
- (iii) полагая $Z_s = \overline{\bigcap_{t > s} (U_t \setminus U_s)}$, для всех пар (s, t) , $s \leq t$, и всех $x \in Z_s \setminus U_t$ имеем

$$(R\Gamma_{(X \setminus U_t)}(F))_x = 0.$$

Тогда при всех $t \in \mathbb{R}$ существует изоморфизм

$$R\Gamma\left(\bigcup_s U_s; F\right) \simeq R\Gamma(U_1; F).$$

Доказательство. Рассмотрим следующие утверждения:

$$\begin{aligned} (a)_k^s &: \varprojlim_{t > s} H^k(U_t; F) \simeq H^k(U_s; F), \\ (b)_k^t &: \varprojlim_{s < t} H^k(U_s; F) \simeq H^k(U_t; F). \end{aligned}$$

Пусть $(a)_k^s$ доказано для всех $s \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{Z}$, а $(b)_k^t$ доказано для всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $k < k_0$. Из предложения 1.12.6 следует

$$(2.7.1) \quad H^k(U_t; F) \simeq H^k(U_s; F)$$

для всех $k < k_0$ и всех пар (s, t) , $s \leq t$. Зафиксируем t ; тогда последовательность $\{H^{k_0-1}(U_{t-1/n}; F)\}_n$ удовлетворяет условию M-L и $(b)_{k_0}^t$ следует из предложения 1.12.4. Индукцией по k получаем, что $(b)_k^t$ справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $k \in \mathbb{Z}$. Применяя предложение 2.7.1 к семействам $\{H^k(U_n; F)\}_{n \in \mathbb{N}}$, мы доказываем результат индукцией по k .

Докажем теперь $(a)_k^s$. Заменяя X на $\text{supp}(F)$, мы можем с самого начала считать $\overline{U_t} \setminus U_s$ компактом для всех $t \geq s$. Рассмотрим выделенные треугольники

$$R\Gamma_{(X \setminus U_s)}(F)|_{Z_s} \longrightarrow R\Gamma_{(X \setminus U_s)}(F)|_{Z_s} \longrightarrow R\Gamma_{(U_t \setminus U_s)}(F)|_{Z_s} \xrightarrow{+1}.$$

Так как первые два члена равны нулю по условию, мы получаем, что $R\Gamma_{(U_t \setminus U_s)}(F)|_{Z_s} = 0$. Поэтому для всех $k \in \mathbb{Z}$ и всех $t \geq s$ имеем (см. обозначения 2.6.8)

$$\begin{aligned} 0 &= H^k(Z_s; R\Gamma_{(U_t \setminus U_s)}(F)) \\ &= \varinjlim_{U \supset Z_s} H^k(U \cap U_t; R\Gamma_{(X \setminus U_s)}(F)), \end{aligned}$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей множества Z_s . Так как для любого такого U найдется $t', t \geq t' > s$, такое, что $U \cap U_t \supset U_{t'} \setminus U_s$, то

$$0 = \varinjlim_{t > s} H^k(U_t; R\Gamma_{(X \setminus U_s)}(F)),$$

что дает $(a)_k^s$. □

Систематическим изучением пучков на евклидовых пространствах мы займемся в гл. 3, но здесь нам понадобится один технический результат.

Лемма 2.7.3 Пусть I — интервал $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, а F — пучок на I . Тогда

- (i) $H^j(I; F) = 0$ при всех $j > 1$;
- (ii) пусть отображение $F(I) \rightarrow F_t$ сюръективно для всех $t \in I$; тогда $H^j(I; F) = 0$ при всех $j \geq 1$.
- (iii) если F является постоянным пучком M_I на I , то морфизмы $M \rightarrow R\Gamma(I; F) \rightarrow F_t$ являются изоморфизмами при всех $t \in I$.

Доказательство. Пусть $j \geq 1$ и $s \in H^j(I; F)$. Пусть $f_{t_1, t_2}, t_1 \leq t_2$, — естественное отображение:

$$f_{t_1, t_2}: H^j(I; F) \rightarrow H^j([t_1, t_2]; F).$$

Определим множество $J = \{t \in [0, 1]; f_{0,t}(s) = 0\}$. Тогда $0 \in J$ и из $0 \leq t' \leq t, t \in J$, вытекает, что $t' \in J$. Более того, J открыто, так как для всех $t_0 < 1$

$$H^j([0, t_0]; F) = \varinjlim_{t > t_0} H^j([0, t]; F),$$

и из $f_{0,t_0}(s) = 0$ вытекает, что $f_{0,t}(s) = 0$ при некотором $t > t_0$.

Рассмотрим последовательность Майера-Вьеториса, ассоциированную с разбиением $[0, t_0] = [0, t] \cup [t, t_0]$, где $0 \leq t \leq t_0 \leq 1$,

$$\dots \rightarrow H^j([0, t_0]; F) \rightarrow H^j([0, t]; F) \oplus H^j([t, t_0]; F) \rightarrow H^j(\{t\}; F) \rightarrow \dots$$

Если $j > 1$ или $j = 1$ и морфизм $F(I) \rightarrow F_t$ сюръективен, то

$$(2.7.2) \quad H^j([0, t_0]; F) \simeq H^j([0, t]; F) \oplus H^j([t, t_0]; F).$$

Возьмем $t_0 = \sup J$. Так как $\varinjlim_{t < t_0} H^j([t, t_0]; F) = 0$, то существует

$t < t_0$, такое, что $f_{t,t_0}(s) = 0$. С другой стороны, $f_{0,t}(s) = 0$. Значит, $f_{0,t_0}(s) = 0$ по (2.7.2) и $J = [0, 1]$.

(iii) Из (ii) следует, что $H^j(I; F) = 0$ при $j > 0$. Поэтому $R\Gamma(I; F) \simeq \Gamma(I; F)$. Композиция морфизмов $M \rightarrow \Gamma(I; F) \rightarrow F_t \simeq M$ есть единичный морфизм. Следовательно, достаточно показать, что если $s \in \Gamma(I; F)$ и $s_t = 0$, то $s = 0$. Это следует из доказанного выше утверждения, что $\text{supp}(s)$ открыт и замкнут одновременно. $\square$

Рассмотрим теперь тройку топологических пространств S, X, Y и коммутативную диаграмму непрерывных отображений

$$(2.7.3) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ p_Y \searrow & & \swarrow p_X \\ & S & \end{array}$$

В этом случае мы говорим, что $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение над S .

Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на S и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$. Морфизм (2.3.5) индуцирует морфизм

$$(2.7.4) \quad R p_{X*} \circ p_X^{-1} F \rightarrow R p_{X*} \circ R f_* \circ f^{-1} \circ p_X^{-1} F \simeq R p_{Y*} \circ p_Y^{-1} F,$$

а если f — собственное отображение, то морфизм функторов

$$(2.7.5) \quad R p_{X!} \circ p_X^{-1} F \rightarrow R p_{X!} \circ R f_* \circ f^{-1} \circ p_X^{-1} F \simeq R p_{Y!} \circ p_Y^{-1} F.$$

Мы обозначим через $f^\#$ (соответственно $f_c^\#$) морфизм $R p_{X*} \circ p_X^{-1} \rightarrow R p_{Y*} \circ p_Y^{-1}$ (соответственно $R p_{X!} \circ p_X^{-1} \rightarrow R p_{Y!} \circ p_Y^{-1}$), определенный морфизмом (2.7.4) (соответственно (2.7.5)).

Определение 2.7.4. (i) Пусть $f_0 : Y \rightarrow X$ и $f_1 : Y \rightarrow X$ — два непрерывных отображения над S . Мы называем f_0 и f_1 *гомотопными* над S , если существует непрерывное отображение $h : Y \times I \rightarrow X$ ($I = [0, 1]$) над S , такое, что $f_i = h \circ j_i$ ($i = 0, 1$), где j_t ($t \in I$) — это отображение $Y \rightarrow Y \times I$, $y \mapsto (y, t)$. Если отображение h собственное, то f_0 и f_1 называются *собственно гомотопными*.

(ii) Пусть $f : Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение над S . Оно называется *гомотопической эквивалентностью* над S , если существует непрерывное отображение $g : X \rightarrow Y$ над S , такое, что $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны отображениям id_X и id_Y соответственно.

Предложение 2.7.5. (i) Пусть $f_0 : Y \rightarrow X$ и $f_1 : Y \rightarrow X$ гомотопны над S . Тогда $f_0^\# = f_1^\#$.

(ii) Если f_0 и f_1 собственно гомотопны, то $f_{0c}^\# = f_{1c}^\#$.

Доказательство. (i) Пусть $h : Y \times I \rightarrow X$ — гомотопия, связывающая f_0 и f_1 над S . Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(2.7.6) \quad \begin{array}{ccc} Y & & \\ j_i \downarrow & \searrow f_i & \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & X \\ p \downarrow & & \downarrow p_X \\ Y & \xrightarrow{p_Y} & S \end{array}$$

где $p : Y \times I \rightarrow Y$ — проекция. Из замечания 2.5.3 и леммы 2.7.3 вытекает изоморфизм функторов из $\mathbf{D}^+(\mathcal{R})$ в $\mathbf{D}^+(p_Y^{-1}\mathcal{R})$:

$$(2.7.7) \quad p_Y^{-1} \xrightarrow{\sim} Rp_* \circ p^{-1} \circ p_Y^{-1} \xrightarrow{\sim} j_i^{-1} \circ p^{-1} \circ p_Y^{-1} \simeq p_Y^{-1},$$

а композиция этих изоморфизмов тождественна на p_Y^{-1} .

Рассмотрим коммутативную диаграмму морфизмов функторов из $\mathbf{D}^+(\mathcal{R})$ в $\mathbf{D}^+(\mathcal{R})$

$$\begin{array}{ccc} Rp_{X*} \circ p_X^{-1} & \longrightarrow & Rp_{X*} \circ Rh_* \circ h^{-1} \circ p_X^{-1} \\ \downarrow f_i^\# & & \downarrow \wr \\ Rp_{Y*} \circ f_i^{-1} \circ p_X^{-1} & & Rp_{Y*} \circ Rp_* \circ p^{-1} \circ p_Y^{-1} \\ \parallel & \nwarrow \alpha_i & \\ Rp_{Y*} \circ p_Y^{-1} & & \end{array}$$

Здесь морфизм α_i определен формулой

$$Rp_* \circ p^{-1} \circ p_Y^{-1} \rightarrow j_i^{-1} \circ p^{-1} \circ p_Y^{-1} = p_Y^{-1}.$$

Следовательно, $\alpha_0 = \alpha_1$ по (2.7.7) и $f_0^\# = f_1^\#$.

(ii) Доказательство аналогично. □

Замечание 2.7.6. Пусть X' (соответственно Y') замкнуто в X (соответственно в Y), и пусть $f: Y \rightarrow X$ — отображение над S , такое, что $f^{-1}(X') \subset Y'$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$. Тогда существуют естественные морфизмы

$$\begin{aligned} Rp_{X_*} \circ R\Gamma_{X'} \circ p_X^{-1} F &\rightarrow Rp_{X_*} \circ Rf_* \circ f^{-1} \circ R\Gamma_{X'} \circ p_X^{-1} F \\ &\rightarrow Rp_{X_*} \circ Rf_* \circ R\Gamma_{f^{-1}(X')} \circ f^{-1} \circ p_X^{-1} F \\ &\rightarrow Rp_{Y_*} \circ R\Gamma_{Y'} \circ p_Y^{-1} F. \end{aligned}$$

Обозначим через $f_{Y',X'}^\#$, следующий морфизм функторов:

$$(2.7.8) \quad f_{Y',X'}^\#: Rp_{X_*} \circ R\Gamma_{X'} \circ p_X^{-1} \rightarrow Rp_{Y_*} \circ R\Gamma_{Y'} \circ p_Y^{-1}.$$

Если $Y' = f^{-1}(X')$, то мы будем писать $f_X^\#$, вместо $f_{Y',X'}^\#$. Предположим теперь, что f_0, f_1 и h из определения 2.7.4 удовлетворяют условию

$$(2.7.9) \quad h_\lambda^{-1}(X') \subset Y' \text{ для любого } \lambda \in I, \text{ где } h_\lambda(\cdot) = h(\cdot, \lambda).$$

Тогда, рассуждая, как в доказательстве предложения 2.7.5, имеем

$$(2.7.10) \quad f_{0Y',X'}^\# = f_{1Y',X'}^\#.$$

Следствие 2.7.7. (i) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — гомотопический изоморфизм над S . Тогда для любого $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{R}))$ морфизм $f^\#: Rp_{X_*} p_X^{-1} F \rightarrow Rp_{Y_*} p_Y^{-1} F$ является изоморфизмом.

(ii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, а $s: X \rightarrow Y$ — его непрерывное сечение. Предположим, что $s \circ f$ гомотопно id_X над X . Тогда для любого $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ морфизм $F \rightarrow Rf_* f^{-1} F$ и композиция $Rf_* f^{-1} F \rightarrow Rf_* R s_* s^{-1} f^{-1} F \simeq F$ являются изоморфизмами.

(iii) В частности, если X — стягиваемое топологическое пространство, то $M \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X; M_X)$ для любого объекта M категории $\mathbf{D}^+(\mathcal{M}\text{od}(A))$.

(iv) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — собственное непрерывное отображение со стягиваемыми слоями (и, следовательно, сюръективное). Тогда если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, то $F \rightarrow Rf_* f^{-1} F$ — изоморфизм.

Доказательство. (i) Пусть отображение $g: X \rightarrow Y$ такое же, как в определении 2.7.4 (ii). Тогда по предложению 2.7.5 $f^\# \circ g^\# = \text{id}$ и $g^\# \circ f^\# = \text{id}$.

(ii) является частным случаем п. (i).

(iii) является частным случаем п. (ii).

(iv) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ и $x \in X$. Из замечания 2.5.3 и п. (iii) следует, что

$$\begin{aligned} (Rf_* \circ f^{-1} F)_x &\simeq R\Gamma(f^{-1}(x); f^{-1} F) \\ &\simeq R\Gamma(f^{-1}(x); (f|_{f^{-1}(x)})^{-1} F_x) \\ &\simeq F_x, \end{aligned}$$

□

Отметим, что утверждение (iv) в следствии 2.7.7 часто называют теоремой Вьеториса-Бигла. Мы уточним это утверждение и обобщим его на несобственный случай.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Обозначим через $\mathcal{M}\text{od}(A_Y/f)$ полную подкатегорию категории $\mathcal{M}\text{od}(A_Y)$, состоящую из пучков G , таких, что для любого $x \in X$ пучок $G|_{f^{-1}(x)}$ локально постоянен. Обозначим через $\mathbf{D}_f^+(A_Y)$ полную подкатегорию категории $\mathbf{D}^+(A_Y)$, состоящую из объектов G , таких, что $H^j(G) \in \mathcal{M}\text{od}(A_Y/f)$ для всех j . Заметим, что $\mathcal{M}\text{od}(A_Y/f)$ является плотной подкатегорией в $\mathcal{M}\text{od}(A_Y)$ (см. § 1.7). Отметим также, что $\mathbf{D}_f^+(A_Y)$ — триангулированная категория. Функторы f_* и f^{-1} индуцируют функторы, которые будут также обозначаться через f_* и f^{-1} :

$$(2.7.11) \quad \mathcal{M}\text{od}(A_X) \overset{f^{-1}}{\underset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathcal{M}\text{od}(A_Y/f).$$

Функтор «включения» $\mathcal{M}\text{od}(A_Y/f) \rightarrow \mathcal{M}\text{od}(A_Y)$ индуцирует функтор $\mathbf{D}^+(\mathcal{M}\text{od}(A_Y/f)) \rightarrow \mathbf{D}_f^+(A_Y)$. Таким образом, мы получаем функторы (которые будут также обозначаться через Rf_* и f^{-1})

$$(2.7.12) \quad \mathbf{D}^+(A_X) \overset{f^{-1}}{\underset{Rf_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{D}_f^+(A_Y).$$

Мы дадим достаточные условия взаимной обратности этих функторов. Пусть дано семейство $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ замкнутых подмножеств пространства Y , удовлетворяющее условиям

$$(2.7.13) \quad \begin{cases} Y = \bigcup_n Y_n, Y_n \subset \text{Int}(Y_{n+1}) \text{ для всех } n, \\ f|_{Y_n} \text{ — собственное отображение со стягиваемыми} \\ \text{слоями для всех } n. \end{cases}$$

Предложение 2.7.8. Если выполнены условия (2.7.13), то функторы f^{-1} и f_* (соответственно f^{-1} и Rf_*) в (2.7.11) (соответственно в (2.7.12)) взаимно обратны.

Доказательство. Мы рассмотрим случай формулы (2.7.12), так как случай формулы (2.7.11) проще.

Отметим сначала, что стягиваемое пространство непусто, а значит, $f(Y_n) = X$ для всех n . Отметим далее, что локально постоянный пучок на стягиваемом пространстве постоянен (см. упр. 2.4). Рассмотрим сначала случай собственного f .

Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_f^+(A_Y))$ и $y \in Y$. Тогда $H^j(G)|_{f^{-1}f(y)}$ — постоянный пучок; поэтому $H^i(f^{-1}f(y); H^j(G)) = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и всех $i > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} H^j(f^{-1} \circ Rf_* G)_y &\simeq H^j(Rf_* G)_{f(y)} \\ &\simeq H^j(f^{-1}f(y); G) \\ &\simeq \Gamma(f^{-1}f(y); H^j(G)) \\ &\simeq H^j(G)_y. \end{aligned}$$

Поэтому $f^{-1} \circ Rf_* \simeq \text{id}_{\mathbf{D}_f^+(A_Y)}$. Из следствия 2.7.7 получаем, что $Rf_* \circ f^{-1} \simeq \text{id}_{\mathbf{D}^+(A_X)}$.

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, а V открыто в X . Для каждого j семейство $\{H^j(f^{-1}(V) \cap Y_n; f^{-1}F)\}_n$ удовлетворяет условию М-Л. Применяя лемму 2.7.1, получаем

$$\begin{aligned} H^j(V; F) &\simeq H^j(f^{-1}(V) \cap Y_n; f^{-1}F) \\ &\simeq H^j(f^{-1}(V); f^{-1}F). \end{aligned}$$

Поэтому $F \mapsto Rf_* \circ f^{-1}F$ — изоморфизм.

Пусть, наконец, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_f^+(A_Y))$, $y \in Y$ и V — открытая окрестность точки $f(y)$ в X . Так как для всех j семейство $\{H^j(f^{-1}(V) \cap Y_n; G)\}_n$ удовлетворяет условию М-Л, то

$$H^j(f^{-1}(V); G) \simeq H^j(f^{-1}(V) \cap Y_n; G).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} H^j(f^{-1} \circ Rf_* G)_y &\simeq H^j(Rf_* G)_{f(y)} \\ &\simeq \varinjlim_{V \ni f(y)} H^j(f^{-1}(V); G) \\ &\simeq \varinjlim_{V \ni f(y)} H^j(f^{-1}(V) \cap Y_n; G) \\ &\simeq H^j(G)_y, \end{aligned}$$

т. е. $G \mapsto f^{-1} \circ Rf_* G$ — изоморфизм. □

2.8. Когомологии покрытий

Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ — семейство открытых множеств в X .

Для целого $p \geq 0$ и набора $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_p\} \in J^{p+1}$ положим

$$U_\alpha = \bigcap_{\nu=0}^p U_{\alpha_\nu}.$$

Если σ — перестановка на множестве $\{0, \dots, p\}$, то через $\text{sgn } \sigma$ обозначим ее четность. Если $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$, то положим $\alpha^\sigma = (\alpha_{\sigma(0)}, \dots, \alpha_{\sigma(p)})$.

Пусть F — пучок на X . Для двух открытых подмножеств U и V в X , где $U \subset V$, через $\rho_{V,U}$ обозначим канонический морфизм $F_U \rightarrow F_V$ (см. § 2.3).

С $\mathcal{U}$ и F мы свяжем комплекс пучков на X (см. обозначения 1.3.9), обозначаемый через $C_*(\mathcal{U}; F)$, следующим образом.

Для $p \in \mathbb{Z}$, $p < 0$, положим $C_p(\mathcal{U}; F) = 0$. Для $p \geq 0$ пусть $C_p(\mathcal{U}; F)$ есть подпучок пучка $\bigoplus_{\alpha \in J^{p+1}} F_{U_\alpha}$, состоящий из «знакопередающих» сечений: $(s_\alpha)_{\alpha \in J^{p+1}}$ есть элемент из $C_p(\mathcal{U}; F)$, если выполнены два условия:

$$(2.8.1) \quad s_\alpha = (\text{sgn } \sigma) s_{\alpha^\sigma} \text{ для любой перестановки } \sigma \text{ на } \{0, \dots, p\},$$

$$(2.8.2) \quad \begin{cases} \text{если } \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \text{ и } \alpha_\nu = \alpha_{\nu'} \text{ для пары различных} \\ \text{индексов } \nu \text{ и } \nu' \text{ из } \{0, \dots, p\}, \text{ то } s_\alpha = 0. \end{cases}$$

Дифференциал $d_p: C_p(\mathcal{U}; F) \rightarrow C_{p-1}(\mathcal{U}; F)$ определен так:

$$(2.8.3) \quad \begin{cases} \text{для } \beta \in J^p \text{ и } s = (s_\alpha)_\alpha \in C_p(\mathcal{U}; F) \\ (d_p(s))_\beta = \sum_{j \in J} \rho_{U_\beta, U_{(j, \beta)}}(s_{(j, \beta)}). \end{cases}$$

Здесь $(j, \beta) = (j, \beta_0, \dots, \beta_{p-1}) \in J^{p+1}$.

Немедленно проверяется, что

$$(2.8.4) \quad d_{p-1} \circ d_p = 0.$$

Пример 2.8.1. (i) Если $J = \{0, 1\}$, то комплекс $C(U; F)$ — это

$$0 \rightarrow F_{U_1 \cap U_2} \rightarrow F_{U_1} \oplus F_{U_2} \rightarrow 0.$$

(ii) Если $J = \{0, 1, 2\}$, то комплекс $C(U; F)$ — это

$$0 \rightarrow F_{U_1 \cap U_2 \cap U_3} \rightarrow F_{U_2 \cap U_3} \oplus F_{U_3 \cap U_1} \oplus F_{U_1 \cap U_2} \rightarrow F_{U_1} \oplus F_{U_2} \oplus F_{U_3} \rightarrow 0.$$

Положим $U = \bigcup_j U_j$. Определим «отображение аугментации» $\delta : C(U; F) \rightarrow F_U$, положив $\delta|_{F_{U_i}} = \rho_{U, U_i}$. Немедленно проверяется, что

$$(2.8.5) \quad \delta \circ d_1 = 0.$$

Из этого вытекает, что δ индуцирует морфизм комплексов $C(U; F) \rightarrow F_U$, где F_U отождествляется с комплексом $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow F_U \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$.

Лемма 2.8.2 Морфизм $C(U; F) \rightarrow F_U$ является квазиизоморфизмом.

Доказательство. Пусть $\tilde{C}(U; F)$ обозначает аугментированный комплекс $C(U; F) \rightarrow F$ (т. е. комплекс $\cdots \xrightarrow{d_1} C_0(U; F) \xrightarrow{\delta} F \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$). Пусть $j_0 \in J$, $J' = J \setminus \{j_0\}$ и $U' = \{U_j\}_{j \in J'}$. Морфизм $\rho_{U, U_{j_0}}$ индуцирует морфизм $\alpha_{j_0} : \tilde{C}(U'; F_{U_{j_0}}) \rightarrow \tilde{C}(U'; F)$.

Отметим сначала, что $\tilde{C}(U; F)$ является конусом отображения α_{j_0} . В самом деле, обозначим через $\bigoplus'_{\alpha \in J^{p+1}} F_{U_\alpha}$ подпучок пучка $\bigoplus_{\alpha \in J^{p+1}} F_{U_\alpha}$, состоящий из сечений, удовлетворяющих условиям (2.8.1) и (2.8.2). Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{C}_p(U; F) &= \bigoplus'_{\alpha \in J^{p+1}} F_{U_\alpha} \\ &= \left(\bigoplus'_{\alpha=(j_0, \beta), \beta \in J^p} F_{U_{j_0} \cap U_\beta} \right) \oplus \left(\bigoplus'_{\alpha \in J'^{p+1}} F_{U_\alpha} \right) \\ &= \tilde{C}_{p-1}(U'; F_{U_{j_0}}) \oplus \tilde{C}_p(U'; F). \end{aligned}$$

Теперь нетрудно проверить, что дифференциал пучка $\tilde{C}_p(U; F)$ является дифференциалом конуса отображения α_{j_0} . Так как $\alpha_{j_0}|_{U_{j_0}}$ — изоморфизм, то комплекс $\tilde{C}(U; F)|_{U_{j_0}}$ гомотопен нулю. Поэтому $C(U; F) \rightarrow F_U$ — квазиизоморфизм на U . Так как оба члена равны нулю вне U , то доказательство закончено. $\square$

Замечание 2.8.3. На самом деле мы доказали, что локально на U комплекс $C(U; F)$ гомотопен F .

Пусть теперь $\mathcal{U}$ — открытое покрытие пространства X . Положим

$$(2.8.6) \quad C^*(\mathcal{U}; F) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(C(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_X), F),$$

$$(2.8.7) \quad C^*(\mathcal{U}; F) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(C(\mathcal{U}; \mathbb{Z}_X), F).$$

Тогда $\Gamma(X; C^*(\mathcal{U}; F)) = C^*(\mathcal{U}; F)$. Более того, так как $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_X}(\mathbb{Z}_U; F) = \Gamma(U; F)$, то $C^p(\mathcal{U}; F)$ есть подмодуль из $\prod_{\alpha \in J^{p+1}} F(U_\alpha)$, состоящий из сечений, удовлетворяющих условиям (2.8.1) и (2.8.2).

Предложение 2.8.4. *Отображение аугментации δ индуцирует квазиизоморфизм пучков $F \xrightarrow{\sim} C^*(\mathcal{U}; F)$.*

Доказательство. Примените замечание 2.8.3 к пучку $\mathbb{Z}_X$. □

Предложение 2.8.5 (теорема Лере об ациклическом покрытии). Пусть $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ — открытое покрытие пространства X , а F — пучок на X . Предположим, что $H^k(U_\alpha; F) = 0$ для всех $\alpha \in J^p$ ($p \geq 0$) и всех $k > 0$. Тогда $R\Gamma(X; F)$ квазиизоморфен $C^*(\mathcal{U}; F)$.

Доказательство. Пусть I^* — комплекс вялых пучков, квазиизоморфный F . Тогда $R\Gamma(X; F) \simeq \Gamma(X; I^*)$. Из предложения 2.8.4 и теоремы 1.9.3 следует, что $\Gamma(X; I^*)$ квазиизоморфен $z(\Gamma(X; C^*(\mathcal{U}; I^*)))$, где $z(\cdot)$ обозначает простой комплекс, ассоциированный с двойным комплексом. Так как $\Gamma(X; C^*(\mathcal{U}; I^*)) \simeq C^*(\mathcal{U}; I^*)$, то остается заметить, что из теоремы 1.9.3 и условия данного предложения вытекает квазиизоморфизм между $C^*(\mathcal{U}; F)$ и $z(C^*(\mathcal{U}; I^*))$. □

Замечание 2.8.6. Когомологии покрытий $H^n(C^*(\mathcal{U}; F))$ часто называются *когомологиями Чета*.

2.9. Примеры пучков на вещественных и комплексных многообразиях

Пучки, которые рассматриваются в данном параграфе, будут разбираться подробнее в гл. 11.

2.9.1. Пучок C_X^0 . Рассмотрим предпучок на топологическом пространстве X , сопоставляющий открытому подмножеству $U \subset X$ пространство $C^0(U)$ непрерывных комплекснозначных функций на U с обычной операцией ограничения. Очевидно, что этот предпучок является пучком. Обозначим его через C_X^0 . Заметим, что постоянный пучок $\mathbb{Z}_X$ может быть отождествлен с подпучком пучка C_X^0 , состоящим из функций, принимающих только целые значения.

2.9.2. Пучок $\mathcal{L}_{loc, dx}^1$. Пусть U — открытое подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а $L^1(U; dx)$ — пространство функций на U , интегрируемых по отношению к лебеговой мере dx на $\mathbb{R}^n$. Предпучок $U \mapsto L^1(U; dx)$ не является пучком. Ассоциированный пучок на $\mathbb{R}^n$ обозначается через $L_{loc, dx}^1$.

2.9.3. Окольцованные пространства. Окольцованное пространство $(X, \mathcal{A}_X)$ — это топологическое пространство X и пучок колец $\mathcal{A}_X$ на нем. Морфизм окольцованных пространств $f: (Y, \mathcal{A}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{A}_X)$ — это непрерывное отображение $f: Y \rightarrow X$ и морфизм пучков колец $f^{-1}\mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_Y$. Если A — кольцо, а $\mathcal{A}_X$ — пучок A -алгебр (т. е. существует морфизм $\mathcal{A}_X \rightarrow \mathcal{A}_X$), то $(X, \mathcal{A}_X)$ называется A -окольцованным пространством.

2.9.4. C^α -многообразия. Пусть α — целое число ($0 \leq \alpha < \infty$) или $\alpha = \infty$, или $\alpha = \omega$. Обозначим через $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\alpha$ пучок комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$ класса C^α (C^ω — это класс вещественно-аналитических функций). Вещественным многообразием M класса C^α и размерности n называется локально компактное счетное на бесконечности пространство M с пучком колец $\mathcal{C}_M^\alpha$ на нем, такое, что $(M, \mathcal{C}_M^\alpha)$ локально изоморфно $(\mathbb{R}^n, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^n}^\alpha)$ как C -окольцованное пространство.

Через $\dim X$ или $\dim_{\mathbb{R}} X$ обозначается размерность вещественного многообразия X . Отметим, что вместо $\mathcal{C}_M^\omega$ часто употребляется обозначение $\mathcal{A}_M$.

Мы отсылаем читателя к книге [Guillemin–Pollack 1] за основами дифференциальной геометрии.

2.9.5. Ориентация, формы и плотности. На C^0 -многообразии M мы будем рассматривать ориентирующий пучок σ_M . Этот пучок локально изоморфен $\mathbb{Z}_M$, и выбор ориентации на M (если M ориентируемо) эквивалентен выбору изоморфизма $\sigma_M \simeq \mathbb{Z}_M$. В следующей главе мы будем изучать пучок σ_M подробно.

Пусть теперь $\alpha = \infty$ или $\alpha = \omega$, а p — целое число. Обозначим через $\mathcal{C}_M^{\alpha, (p)}$ пучок дифференциальных форм степени p с коэффициентами в $\mathcal{C}_M^\alpha$. Обозначим через $d: \mathcal{C}_M^{\alpha, (p)} \rightarrow \mathcal{C}_M^{\alpha, (p+1)}$ внешний дифференциал.

Напомним, что если $(x_1, \dots, x_n)$ — система локальных координат на M , то p -форма f однозначно представляется в следующем виде:

$$f = \sum_{|I|=p} f_I dx_I,$$

где $I = \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$ ($i_1 < i_2 < \dots < i_p$), $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$, а f_I — сечение пучка $\mathcal{C}_M^\alpha$. Тогда

$$df = \sum_{i=1}^n \sum_{|I|=p} \frac{\partial f_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I.$$

Рассмотрим также пучок

$$\mathcal{V}_M^\alpha = \mathcal{C}_M^{\alpha, (n)} \otimes \sigma_M$$

($\alpha = \infty$ или $\alpha = \omega$) и назовем его пучком $\mathcal{C}^\alpha$ -плотностей на M .

$\mathcal{C}^\infty$ -плотности с компактными носителями можно интегрировать. Обозначим через $\int_M \cdot$ отображение интегрирования (т. е. интеграл)

$$(2.9.1) \quad \int_M \cdot : \Gamma_c(M; \mathcal{V}_M^\infty) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Пучки $\mathcal{C}_M^{\alpha, (p)}$ и $\mathcal{V}_M^\alpha$ являются пучками $\mathcal{C}_M^\alpha$ -модулей. Из существования «разбиения единицы» вытекает, что пучки $\mathcal{C}_M^\alpha$, $\mathcal{C}_M^{\alpha, (p)}$, $\mathcal{V}_M^\alpha$ являются $\mathcal{C}$ -мягкими, если $\alpha \neq \omega$. Пучки $\mathcal{C}_M^\omega$, $\mathcal{C}_M^{\omega, (p)}$, $\mathcal{V}_M^\omega$ адикличны по отношению к функтору $\Gamma(M; \cdot)$ (т. е. $H^j(M; \mathcal{C}_M^\omega) = 0$ при $j > 0$; см. [Grauert 1]).

2.9.6. Распределения и гиперфункции. На $\mathcal{C}^\infty$ -многообразии M существует естественно определяемый пучок $\mathcal{D}b_M$ распределений Шварца (см. [Schwartz 2], [de Rham 1]). Напомним, что $\mathcal{D}b_M$ — это $\mathcal{C}$ -мягкий пучок и $\Gamma_c(M; \mathcal{D}b_M)$ является топологически двойственным к пространству $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\infty)$. Последнее пространство рассматривается как топологическое с топологией Фреше.

На $\mathcal{C}^\omega$ -многообразии M аналогично можно определить пучок $\mathcal{B}_M$ гиперфункций Сато (см. [Sato 1]). Это вялый пучок, и $\Gamma_c(M; \mathcal{B}_M)$ топологически двойственно к пространству $\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\omega)$. Последнее пространство рассматривается как топологическое с топологией DFS -пространства (подробнее рассмотрение этих вопросов см. в [Martineau 1] или [Scharif 1]). Конструкция Сато является чисто кохомологической, и мы рассмотрим ее в разд. 2.9.13.

Интеграл (2.9.1) определяет спаривание

$$(2.9.2) \quad \begin{cases} \Gamma(M; \mathcal{C}_M^\infty) \times \Gamma_c(M; \mathcal{V}_M^\infty) \rightarrow \mathbb{C}, \\ (f, g) \mapsto \int_M fg. \end{cases}$$

Используя это, можно определить морфизм пучков из $\mathcal{C}_M^\infty$ в $\mathcal{D}b_M$. Можно доказать, что этот морфизм инъективен. Более того, на вещественно-аналитическом многообразии M инъекция

$\Gamma(M; \mathcal{V}_M^\omega) \rightarrow \Gamma(M; \mathcal{V}_M^\infty)$ индуцирует морфизм $\mathcal{D}b_M \rightarrow \mathcal{B}_M$, который также инъективен.

Можно определить пучки $\mathcal{D}b_M^{(p)} = \mathcal{C}_M^{\infty, (p)} \otimes_{\mathcal{C}_M^\infty} \mathcal{D}b_M$ (соответственно $\mathcal{B}_M^{(p)} = \mathcal{C}_M^{\omega, (p)} \otimes_{\mathcal{C}_M^\omega} \mathcal{B}_M$) p -форм, коэффициентами которых являются распределения (соответственно гиперфункции). Эти пучки являются s -мягкими (соответственно вялыми).

2.9.7. Комплекс де Рама. Пусть M есть C^∞ -многообразие. По лемме Пуанкаре последовательность

$$(2.9.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}_M^{\infty, (0)} \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \mathcal{C}_M^{\infty, (n)} \rightarrow 0$$

точна. Следовательно, пучок $\mathcal{C}_M$ квазиизоморфен комплексу s -мягких пучков

$$(2.9.4) \quad \mathcal{C}_M \xrightarrow{\text{киз}} (0 \rightarrow \mathcal{C}_M^{\infty, (0)} \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \mathcal{C}_M^{\infty, (n)} \rightarrow 0),$$

что дает возможность явного вычисления групп когомологий $H^j(M; \mathcal{C}_M)$ и $H_c^j(M; \mathcal{C}_M)$. Например, применяя $R\Gamma(M; \cdot)$ к (2.9.4), получаем

$$(2.9.5) \quad R\Gamma(M; \mathcal{C}_M) \simeq (0 \rightarrow \Gamma(M; \mathcal{C}_M^{\infty, (0)}) \xrightarrow{d} \dots \rightarrow \Gamma(M; \mathcal{C}_M^{\infty, (n)}) \rightarrow 0).$$

Аналогичный результат справедлив при замене $\mathcal{C}_M^\infty$ на $\mathcal{D}b_M$. Если M — вещественно-аналитическое многообразие, то справедлив аналогичный результат при замене $\mathcal{C}_M^\infty$ на $\mathcal{C}_M^\omega$ или $\mathcal{B}_M$. Следует, однако, помнить, что пучок $\mathcal{C}_M^\omega$ не является s -мягким (но здесь $\Gamma(M; \cdot)$ ацикличесен). С другой стороны, пучок $\mathcal{B}_M$ не только s -мягкий, но и вялый, что позволяет вычислить группы когомологий $H_Z^j(M; \mathcal{C}_M)$ для локально замкнутого $Z \subset M$.

Комплекс (2.9.3) называется комплексом де Рама на M .

2.9.8. Комплексные многообразия. Пусть $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ обозначает пучок голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$. Комплексным многообразием размерности n называется $\mathbb{C}$ -окольцованное пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, локально изоморфное $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$.

Через $\dim_{\mathbb{C}} X$ обозначается размерность комплексного многообразия X . Мы отсылаем читателя к книге Уэллса [Wells 1], в которой изложены основы комплексной дифференциальной геометрии. Также мы рекомендуем книгу [Banica-Stanasila 1] желающим полнее ознакомиться с аналитической геометрией.

Обозначим через $\mathcal{O}_X^{(p)}$ пучок голоморфных p -форм на X и через ∂ — голоморфный дифференциал. Положим

$$(2.9.6) \quad \Omega_X = \mathcal{O}_X^{(n)} \otimes \sigma_X,$$

где σ_X — ориентирующий пучок на X (см. гл. 3). Поскольку лемма Пуанкаре справедлива и в комплексном случае, пучок $\mathcal{S}_X$ квазиизоморфен комплексу

$$(2.9.7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{(0)} \xrightarrow{\partial} \dots \rightarrow \mathcal{O}_X^{(n)} \rightarrow 0.$$

2.9.9. Комплексы Дольбо. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — комплексное многообразие. Обозначим через $(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ топологическое пространство с пучком $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ антиголоморфных функций на X . (Напомним, что функция $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ антиголоморфна, если комплексно-сопряженная к ней функция $\bar{f}$ голоморфна.) Следовательно, $(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ — другое комплексное многообразие.

Обозначим через $X^{\mathbb{R}}$ подлежащее вещественно-аналитическое многообразие. Отождествляя $X^{\mathbb{R}}$ с диагональю в $X \times \bar{X}$, получаем, что $X \times \bar{X}$ является комплексификацией многообразия $X^{\mathbb{R}}$. Действительно,

$$(2.9.8) \quad \mathcal{O}_{X \times \bar{X}|X^{\mathbb{R}}} \simeq \mathcal{C}_{X^{\mathbb{R}}}^{\omega}.$$

На $X \times \bar{X}$ рассмотрим голоморфный дифференциал d , который действует как ∂ на X и как $\bar{\partial}$ на $\bar{X}$. То есть $d = \partial + \bar{\partial}$, что приводит к разложению пучков $\mathcal{C}_{X^{\mathbb{R}}}^{\alpha, (r)}$ ($\alpha = \infty$ или $\alpha = \omega$) в прямую сумму

$$\mathcal{C}_{X^{\mathbb{R}}}^{\alpha, (r)} = \bigoplus_{p+q=r} \mathcal{C}_X^{\alpha, (p, q)},$$

где $\mathcal{C}_X^{\alpha, (p, q)}$ — пучок (p, q) -форм на X . В локальных голоморфных координатах $(z_1, \dots, z_n)$ на X сечение f пучка $\mathcal{C}_X^{\alpha, (p, q)}$ может быть однозначно представлено в виде

$$f = \sum_{|I|=p, |J|=q} f_{I, J} dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

где $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p}$ и $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. В частности,

$$\partial f = \sum_I \sum_J \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_{I, J}}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Лемма Дольбо утверждает, что комплекс

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{(p)} \rightarrow \mathcal{C}_X^{\infty, (p, 0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{C}_X^{\infty, (p, 1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_X^{\infty, (p, n)} \rightarrow 0$$

точен. Аналогичный результат справедлив, если $\mathcal{C}_X^{\infty, (p, q)}$ заменить на $\mathcal{C}_X^{\omega, (p, q)}$, $\mathcal{D}b_X^{(p, q)}$ или $B_X^{(p, q)}$. В частности, $\mathcal{O}_X^{(p)}$ квазиизоморфен комплексу вялых пучков (см. [Komatsu 1] или [Schapira 1])

$$(2.9.9) \quad 0 \rightarrow B_X^{(p, 0)} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \rightarrow B_X^{(p, n)} \rightarrow 0.$$

Как показал Головин, (2.9.9) есть комплекс инъективных $\mathcal{O}_X$ -модулей (см. [Головин 1]).

2.9.10. Операции на $\mathcal{O}_X$. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий. Будучи морфизмом окольцованных пространств, f индуцирует морфизм $f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$. Существует другой морфизм, который может быть определен в производной категории $\mathbf{D}^+(\mathbb{C}_X)$:

$$(2.9.10) \quad Rf_*\Omega_Y[\dim_{\mathbb{C}} Y] \rightarrow \Omega_X[\dim_{\mathbb{C}} X].$$

Этот морфизм может быть описан следующим образом.

Пусть $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $m = \dim_{\mathbb{C}} Y$, $l = m - n$. Морфизм $f^{-1}\mathcal{C}_X^{\omega, (m-p, m-q)} \rightarrow \mathcal{C}_Y^{\omega, (m-p, m-q)}$ определяет по двойственности морфизм

$$(2.9.11) \quad f_*\mathcal{D}b_Y^{(p, q)} \otimes \sigma_Y \rightarrow \mathcal{D}b_X^{(p-l, q-l)} \otimes \sigma_X.$$

Тогда из (2.9.10) и из существования комплексов Дольбо для Ω_Y и Ω_X вытекает (2.9.10).

2.9.11. Когомологии пучка $\mathcal{O}_X$. Мы отсылаем читателя к книге Хёрмандера [Hörmander 1] для детального изучения когомологий пучка $\mathcal{O}_X$. Напомним только, что если множество Ω открыто в $\mathbb{C}^n$, то оно называется псевдовыпуклым, если $H^j(\Omega; \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $j > 0$. Например, все выпуклые области псевдовыпуклы, а если $n = 1$, то любая открытая область псевдовыпукла. Последний результат может быть обобщен следующим образом:

$$(2.9.12) \quad \begin{cases} \text{если } \Omega \text{ открыто в } \mathbb{C}^n, \text{ то} \\ H^j(\Omega; \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0 \quad \text{для всех } j \geq n \end{cases}$$

(см. [Malgrange 1], где доказано (2.9.12) с помощью комплекса Дольбо и того факта, что уравнение $\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) f = g$ всегда разрешимо в $\Gamma(\Omega; C_{\mathbb{R}^{2n}}^\infty)$).

Пусть X — комплексное многообразие размерности n , Z локально замкнуто в X и $x \in Z \setminus \text{Int } Z$. Тогда

$$(2.9.13) \quad H_Z^j(\mathcal{O}_X)_x = 0 \quad \text{для всех } j \notin [1, n].$$

Для $j = 0$ это следует из «принципа аналитического продолжения», а для $j > n$ это следует из (2.9.12) или (2.9.9) (т. е. $\mathcal{O}_X$ имеет вялую размерность n , см. упр. 2.9).

Полезный критерий обращения в нуль $H_Z^j(\mathcal{O}_X)$ принадлежит Мартино [Martineau 2] и Касиваре (см. [Sato-Kawai-Kashiwara 1]). Пусть $X = \mathbb{C}^n$, Z замкнуто и выпукло в X и $x \in Z$.

$$(2.9.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Если не существует аффинного комплексного} \\ \text{пространства } L \text{ размерности } d, \text{ содержащего} \\ x, \text{ такого, что } L \cap Z \text{ есть окрестность} \\ \text{точки } x \text{ в } L, \text{ то } H_Z^j(\mathcal{O}_X)_x = 0 \text{ при } j \leq n - d. \end{array} \right.$$

2.9.12. Граничные значения голоморфных функций. Пусть Ω — строго псевдовыпуклое открытое множество в $\mathbb{C}^n$ с C^2 -гладкой границей. Напомним, что на $\partial\Omega$ существует голоморфная замена координат, которая переводит Ω в строго выпуклое открытое множество.

Пусть j — вложение $\Omega \hookrightarrow \overline{\Omega}$. Существует выделенный треугольник на $\overline{\Omega}$

$$(2.9.15) \quad \mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}} \rightarrow Rj_*\mathcal{O}_\Omega \xrightarrow{+1} R\Gamma_{\partial\Omega}(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}}) \rightarrow .$$

Так как $H_{\partial\Omega}^0(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}}) = 0$, то предпучок $U \mapsto H_{U \cap \partial\Omega}^1(U \cap \overline{\Omega}; \mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}})$ равен пучку $H_{\partial\Omega}^1(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}})$ (см. упр. 2.13). Имеем $H_{\partial\Omega}^k(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}}) = 0$ при $k > 1$, так как $R^k j_*\mathcal{O}_\Omega = 0$ при $k > 0$. Кроме того,

$$(2.9.16) \quad \text{пучок } H_{\partial\Omega}^1(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}}) \text{ является вялым.}$$

Будем считать область Ω строго выпуклой (см. предложение 2.4.10). Пусть U выпукло и открыто в $\mathbb{C}^n$. Применяя функтор $R\Gamma(U; \cdot)$ к треугольнику (2.9.15), получаем

$$\Gamma(U \cap \overline{\Omega}; H_{\partial\Omega}^1(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}})) \simeq \mathcal{O}_X(\Omega \cap U) / \mathcal{O}_X(\overline{\Omega} \cap U).$$

На самом деле $H^k(U \cap \overline{\Omega}; \mathcal{O}_X) = 0$ при $k > 0$, так как $U \cap \overline{\Omega}$ имеет фундаментальную систему выпуклых открытых окрестностей в U .

Пусть ω — открытое подмножество в $\partial\Omega$. Тогда существует выпуклое открытое множество U в $\mathbb{C}^n$, такое, что $U \cap \overline{\Omega} = \omega$ и $U \cup \Omega$ выпукло. Тогда последовательность Майера–Вьеториса

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cup \Omega) \rightarrow \mathcal{O}_X(U) \oplus \mathcal{O}_X(\Omega) \rightarrow \mathcal{O}_X(U \cap \Omega) \rightarrow 0$$

точна и отображение $\mathcal{O}_X(\Omega)/\mathcal{O}_X(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathcal{O}_X(\Omega \cap U)/\mathcal{O}_X(\overline{\Omega} \cap U)$ сюръективно, что и доказывает (2.9.16).

2.9.13. Гиперфункции Сато. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие размерности n , а X — его комплексификация (напомним, что X однозначно определено в окрестности многообразия M). Пучок $\mathcal{B}_M$ гиперфункций Сато определяется так:

$$(2.9.17) \quad \mathcal{B}_M = H_M^n(\mathcal{O}_X) \otimes \sigma_{M/X},$$

где $\sigma_{M/X} = \sigma_M \otimes \sigma_X$ (см. гл. 3).

Из (2.9.14) следует, что комплекс $R\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[n]$ сконцентрирован в степени 0. Поэтому

$$\mathcal{B}_M \simeq R\Gamma_M(\mathcal{O}_X)[n] \otimes \sigma_{M/X}.$$

Так как пучки $H_M^j(\mathcal{O})_X$ равны нулю при $j < n$, то (см. упр. 2.13) предпучок $U \mapsto H_{U \cap M}^n(U; \mathcal{O}_X)$ является пучком и равен $\mathcal{B}_M$. (Мы будем отождествлять пучок $\mathcal{B}_M$ на X и его ограничение на M .) Кроме того, из (2.9.12) следует, что этот пучок вялый. Он совпадает с пучком, описанным в разд. 2.9.6 (более подробное рассмотрение дано в гл. 11).

2.9.14. Пример локально постоянного пучка. Пусть $X = \mathbb{C}$ и z — голоморфная координата на X . Пусть α — комплексное число и P — голоморфный дифференциальный оператор $z \frac{\partial}{\partial z} - \alpha$. Рассмотрим комплекс пучков на X

$$(2.9.18) \quad F := 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Пучок $H^0(F)|_{X \setminus \{0\}} \simeq \text{Ker}(P)|_{X \setminus \{0\}}$ является локально постоянным, так как на каждом открытом связном и односвязном множестве $U \subset X \setminus \{0\}$ пучок $H^0(F)|_U$ изоморфен постоянному пучку $\mathbb{C}_U$, порожденному ветвью функции z^α . Если $\alpha \notin \mathbb{Z}$, то $\Gamma(X \setminus \{0\}; H^0(F)) = 0$,

так как не существует ненулевых голоморфных решений уравнения $Pf = 0$ на $X \setminus \{0\}$. Для $\alpha \notin \mathbb{Z}$ имеем

$H^0(F)|_{X \setminus \{0\}}$ — локально постоянный пучок ранга 1,

$$H^0(F)|_{\{0\}} = 0,$$

$$H^1(F) = 0.$$

Если $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, то

$$H^0(F) \simeq \mathbb{C}_X,$$

$$H^1(F) \simeq \mathbb{C}_{\{0\}}.$$

Если $\alpha = -1, -2, \dots$, то

$$H^0(F) \simeq \mathbb{C}_{X \setminus \{0\}} \quad \text{и} \quad H^1(F) = 0.$$

Комплекс F — это простой пример того, что называется «превратным пучком». Такие комплексы будут изучаться в гл. 8 и 10.

Упражнения к гл. 2

Упражнение 2.1. Пусть $\mathbb{N}$ — это множество $\mathbb{N}$ с топологией, в которой открытыми множествами являются множества $\{0, 1, \dots, n\}$ и само $\mathbb{N}$. Покажите, что предпучок на $\mathbb{N}$ можно отождествить с проективной системой групп на $\mathbb{N}$, и докажите, что предпучок F на $\mathbb{N}$ является пучком в том и только в том случае, когда $\Gamma(\mathbb{N}; F) = \varprojlim F$.

Докажите, что также

(a) $H^j(\mathbb{N}; F) = 0$ при $j \neq 0, 1$,

(b) $H^1(\mathbb{N}; F) = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in F_n \} / \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}; x_n \in F_n \text{ и существуют } y_n \in F_n, \text{ такие, что } x_n = y_n - y_{n+1} \}.$

Упражнение 2.2. Пусть A и B замкнуты в X и $A \cup B = X$. Докажите, что для $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$ существует естественный изоморфизм $(R\Gamma_B(F))_A \simeq R\Gamma_A(F_A)$.

Упражнение 2.3. (i) Пусть U открыто в X и $x \in \overline{U} \setminus U$. На примере пучка $F = Z_U$ покажите, что формула $(\text{Hom}(F, G))_x \simeq \text{Hom}(F_x, G_x)$ в общем случае неверна.

(ii) Приведите пример пучка F на X , замкнутого подмножества $Z \subset X$ и открытого подмножества $U \subset X$, таких, что $Z \cap U = \emptyset$, но $R\Gamma_Z(F_U) \neq 0$. Так как $\Gamma_Z(F_U) = 0$, то в данном случае производный функтор композиции не равен композиции производных функторов.

Упражнение 2.4. Докажите, что локально постоянный пучок на стягиваемом пространстве X является постоянным.

Упражнение 2.5. Пусть X — паракомпактное пространство. Пучок F на X называется *мягким*, если для всех замкнутых $Z \subset X$ естественное отображение $\Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(Z; F)$ сюръективно. Докажите, что если F является мягким, то $H^i(X; F) = 0$ для всех $i > 0$.

Упражнение 2.6. Пусть X — локально компактное пространство и F — пучок на X .

- (a) Докажите, что F является c -мягким в том и только в том случае, когда $H_c^i(U; F) = 0$ для всех $i > 0$ и всех множеств U , открытых в X (мы пишем $H_c^i(U; F)$ вместо $H_c^i(U; F|_U)$).
- (b) Пусть, кроме того, X счетно на бесконечности. Докажите, что если F является c -мягким, то F — мягкий пучок.
- (c) Докажите, что свойство быть c -мягким локально на X .

Упражнение 2.7. Пусть $\mathcal{R}$ есть c -мягкий пучок колец. Докажите, что любой пучок $\mathcal{R}$ -модулей является c -мягким.

Упражнение 2.8. Пусть X — локально компактное пространство, счетное на бесконечности. Пучок F на X называется *гибким*, если для любой пары множеств Z_1 и Z_2 , замкнутых в открытом множестве $U \subset X$, отображение $\Gamma_{Z_1}(U; F) \oplus \Gamma_{Z_2}(U; F) \rightarrow \Gamma_{Z_1 \cup Z_2}(U; F)$ сюръективно (см. [Bengel-Shapira 1]).

- (a) Докажите, что вялые пучки являются гибкими.
- (b) Докажите, что если пучок F гибкий, то $\Gamma_Z(F)$ является c -мягким для любого замкнутого $Z \subset X$.
- (c) Докажите, что свойство быть гибким локально на X .

(Замечание. На вещественно-аналитическом многообразии M пучок $\mathcal{D}b_M$ является c -мягким, но не гибким. С другой стороны, факторпучок $\mathcal{D}b_M/\mathcal{A}_M$ гибкий, но не вялый. Пучки $\mathcal{D}b_M$ и $\mathcal{A}_M$ определены в § 9.)

Упражнение 2.9. Пусть X — топологическое пространство.

- (a) Докажите эквивалентность следующих условий для пучка F и неотрицательного целого числа n :
 - (i) Существует точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow F^0 \rightarrow \dots \rightarrow F^n \rightarrow 0$, в которой пучки F^j вялые.
 - (ii) Если последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow F^0 \rightarrow \dots \rightarrow F^n \rightarrow 0$ точна и F^j вялые при $0 \leq j < n$, то F^n является вялым.

- (iii) $H_S^k(X; F) = 0$ при $k > n$ для любого замкнутого множества S .
- (iv) $H_S^k(X; F) = 0$ при $k > n$ для любого локально замкнутого S .
- (v) $H_S^k(F) = 0$ при $k > n$ для любого замкнутого S .
- (vi) $H_S^k(F) = 0$ при $k > n$ для любого локально замкнутого S .

Наименьшее n , удовлетворяющее этим условиям, называется *вялой размерностью* пучка F . Максимум вялых размерностей всех пучков F на X называется *вялой размерностью* пространства X .

- (b) Для локально компактного пространства X определите *с-мягкую размерность* пучка F на X и *с-мягкую размерность* пространства X . Сформулируйте эквивалентные условия, аналогичные условиям (i)–(iv).
- (c) Докажите, что для локально компактного пространства X и пучка F на нем $(\text{с-мягкая размерность пучка } F) \leq (\text{вялая размерность пучка } F) \leq 1 + (\text{с-мягкая размерность пучка } F)$.

Упражнение 2.10. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец на X , и пусть $M \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathcal{R}))$.

- (a) Докажите, что пучок M инъективен в том и только в том случае, когда для любого под- $\mathcal{R}$ -модуля $\mathcal{I}$ в $\mathcal{R}$ (мы назовем $\mathcal{I}$ идеалом в $\mathcal{R}$) естественный гомоморфизм

$$\Gamma(X; M) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{R}, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{I}, M)$$

сюръективен.

- (b) Пусть A — поле. Докажите, что любой идеал пучка A_X изоморфен пучку A_U , где U открыто в X . Выведите из этого, что A_X -модуль M инъективен в том и только в том случае, когда M — вялый пучок.

Упражнение 2.11. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств. Пусть G — пучок на Y . Докажите эквивалентность следующих двух условий:

- (a) Для любого $x \in X$ пучок $G|_{f^{-1}(x)}$ является *с-мягким*.
- (b) $R^j f_* G_U = 0$ для любого открытого $U \subset Y$ и любого $j > 0$.

Упражнение 2.12. Пусть X — топологическое пространство.

- (a) Пусть $(F_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — индуктивная система пучков на X , индексированная направленным упорядоченным множеством Λ .

Пусть X компактно и хаусдорфово. Докажите существование изоморфизма $\varinjlim H^k(X; F_\lambda) \simeq H^k(X; \varinjlim F_\lambda)$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

- (b) Пусть $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная система пучков на X , и пусть Z локально замкнуто в X . Пусть $\{H_Z^{k-1}(X; F_n)\}_n$ удовлетворяет условию $M-L$. Докажите существование изоморфизма $H_Z^k(X; \varinjlim F_n) \xrightarrow{\sim} \varinjlim H_Z^k(X; F_n)$.

Упражнение 2.13. Пусть F — пучок на X , а Z локально замкнуто в X . Пусть $R^j \Gamma_Z(F) = 0$ при $j < n$. Докажите, что предпучок $U \mapsto H_Z^n(U; F)$ является пучком и равен пучку $R^n \Gamma_Z(F)$ (см. упр. 1.22).

Упражнение 2.14. Пусть $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие пространства X . Для любого $i \in I$ пусть F_i — пучок на U_i , и для каждой пары (i, j) пусть ϕ_{ij} — изоморфизм $F_j|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} F_i|_{U_i \cap U_j}$. Предположим, что $\phi_{ii} = \text{id}$ и $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$ на $U_i \cap U_j \cap U_k$. Докажите существование пучка F на X и множества изоморфизмов $\{\phi_i\}_{i \in I}$, таких, что $\phi_i: F|_{U_i} \simeq F_i$, $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$ на $U_i \cap U_j$ для всех пар (i, j) . Докажите, что F единствен с точностью до изоморфизма.

Упражнение 2.15. (i) Пусть $F^\bullet$ — ограниченный снизу комплекс пучков на X . Постройте естественный морфизм

$$H^j(\Gamma(X; F^\bullet)) \rightarrow H^j(R\Gamma(X; F^\bullet)).$$

(ii) Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ — открытое покрытие пространства X и F — пучок на X . Постройте канонический морфизм

$$H^j(C^\bullet(\mathcal{U}; F)) \rightarrow H^j(X; F).$$

Упражнение 2.16. Пусть A — коммутативное кольцо, а $A^\times$ — группа обратимых элементов в A . Пусть X — топологическое пространство, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ — его открытое покрытие, $c \in C^2(\mathcal{U}; A_X^\times)$ и $\delta c = 0$ (см. § 1.8). Пусть c' — класс элемента c в $H^2(C^\bullet(\mathcal{U}; A_X^\times))$ и c'' — образ c' в $H^2(X; A_X^\times)$ (см. упр. 2.15). Определим категорию $\mathfrak{Sh}(X; c)$, объектами которой являются семейства $\{F_i, \rho_{ij}\}$, где F_i есть $A|_{U_i}$ -модуль и $\rho_{ij}: F_j|_{U_i \cap U_j} \simeq F_i|_{U_i \cap U_j}$ — изоморфизм, такой, что

$$\rho_{ij} \rho_{jk} \rho_{ki} = c_{ijk} \cdot \text{id}_{F_i|_{U_i \cap U_j \cap U_k}} \quad \text{для всех } i, j, k.$$

Морфизмы этой категории определены очевидным образом.

(i) Докажите, что $\mathfrak{Sh}(X; c)$ — абелева категория.

(ii) Пусть $\tilde{c} \in C^2(\mathcal{U}; A_X^\times)$, и пусть $\tilde{c}'' = c''$. Докажите, что категории $\mathfrak{Sh}(X; c)$ и $\mathfrak{Sh}(X; \tilde{c})$ эквивалентны.

Упражнение 2.17. Пусть X — локально компактное пространство, $\mathcal{R}$ — пучок коммутативных колец на X и $\text{wgl}d(\mathcal{R}) < \infty$. Пусть Z_1 и Z_2 локально замкнуты в X .

(i) Постройте естественный морфизм

$$R\Gamma_{Z_1}(F_1) \otimes_{\mathcal{R}}^L R\Gamma_{Z_2}(F_2) \rightarrow R\Gamma_{Z_1 \cap Z_2} \left(F_1 \otimes_{\mathcal{R}}^L F_2 \right),$$

где F_1 и F_2 принадлежат $\mathbf{D}^+(\mathcal{R})$.

(ii) Пусть $\mathcal{R} = A_X$, где A — коммутативное кольцо. Постройте морфизм

$$R\Gamma_{Z_1}(X; F_1) \otimes_A^L R\Gamma_{Z_2}(X; F_2) \rightarrow R\Gamma_{Z_1 \cap Z_2} \left(X; F_1 \otimes_A^L F_2 \right)$$

и морфизмы ($p, q \in \mathbb{Z}$)

$$H_{Z_1}^p(X; F_1) \otimes_A^L H_{Z_2}^q(X; F_2) \rightarrow H_{Z_1 \cap Z_2}^{p+q} \left(X; F_1 \otimes_A^L F_2 \right).$$

Этот последний морфизм называется *кап-произведением* (или *~-произведением*). (Указание. Используйте упр. 1.24.)

Упражнение 2.18. Пусть $f_i: Y_i \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, — непрерывное отображение локально компактных пространств над S (см. (2.7.3)). Пусть p_{Y_i} — отображение пространства Y_i в S . Положим $f = f_1 \times_S f_2: Y_1 \times_S Y_2 \rightarrow X_1 \times_S X_2$. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок коммутативных колец на S и $\text{wgl}d(\mathcal{R}) < \infty$. Пусть $G_i \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(p_{Y_i}^{-1}\mathcal{R}))$.

(i) Докажите существование изоморфизма

$$Rf_{1!}G_1 \otimes_S^L \mathcal{R} Rf_{2!}G_2 \xrightarrow{\sim} Rf_! \left(G_1 \otimes_S^L \mathcal{R} G_2 \right).$$

Формула, описывающая этот изоморфизм, называется *формулой Кюннета*. (Указание. Сведите задачу к случаю, когда $S = X_1 = X_2 = \{\text{pt}\}$. Затем используйте изоморфизм (2.6.19) аналогично тому, как это делается в доказательстве предложения 3.1.15.)

(ii) Пусть $S = X_1 = X_2 = \{\text{pt}\}$, а $\mathcal{R}$ — поле. Докажите, что

$$H_c^n(Y_1 \times Y_2; G_1 \boxtimes G_2) \simeq \bigoplus_{p+q=n} (H_c^p(Y_1; G_1) \otimes H_c^q(Y_2; G_2)).$$

(Указание. Используйте упр. 1.24.)

Упражнение 2.19. Пусть X локально компактно, а A — коммутативное кольцо и $\text{wgld}(A) < \infty$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ и Ω (соответственно Z) открыто (соответственно замкнуто) в X . Обозначим через a_X отображение $X \rightarrow \{\text{pt}\}$. Докажите существование изоморфизмов

$$R\Gamma(\Omega; F) \simeq Ra_{X*} R\mathcal{H}om(A_\Omega, F),$$

$$R\Gamma_c(\Omega; F) \simeq Ra_{X!} \left(A_\Omega \overset{L}{\otimes} F \right),$$

$$R\Gamma_Z(X; F) \simeq Ra_{X*} R\mathcal{H}om(A_Z, F),$$

$$R\Gamma_c(Z; F) \simeq Ra_{X!} \left(A_Z \overset{L}{\otimes} F \right).$$

Упражнение 2.20 (см. упр. 9.10). Пусть A — коммутативное кольцо, $\text{wgld}(A) < \infty$, а E — вещественное конечномерное векторное пространство. Определим на $\text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_E))$ операцию свертки, положив $F * G = R s_!(F \boxtimes^L G)$, где s — это отображение $E \times E \rightarrow E$, $(x, y) \mapsto x + y$.

- Докажите, что если F, G, H принадлежат $\mathbf{D}^+(A_E)$, то $F * G \simeq G * F$, $F * (G * H) \simeq (F * G) * H$, $A_{\{0\}} * F \simeq F$.
- Пусть Z_1 и Z_2 компактны и выпуклы в E . Докажите, что $A_{Z_1} * A_{Z_2} \simeq A_{Z_1 + Z_2}$.
- Докажите, что $A_\gamma * A_{\text{Int } \gamma} = 0$, где γ — выпуклый замкнутый собственный конус.
- Пусть $E = \mathbb{R}^n$, $Z_1 = [-1, 1]^n$, $Z_2 =]-1, 1[^n$. Докажите, что $A_{Z_1} * A_{Z_2} \simeq A_{\{0\}}[-n]$.

Упражнение 2.21. Пусть X — топологическое пространство, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — убывающая последовательность замкнутых подмножеств, $\bigcap_n X_n = \emptyset$ и $X_n = X$ для $n \ll 0$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$ и $H_{X_n \setminus X_{n+1}}^k(F) = 0$ при $k \neq n$. Используя выделенный треугольник $R\Gamma_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}(F) \rightarrow R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+2}}(F) \rightarrow R\Gamma_{X_n \setminus X_{n+1}}(F) \xrightarrow{+1}$, определим отображение $d^n : H_{X_n \setminus X_{n+1}}^n(F) \rightarrow H_{X_{n+1} \setminus X_{n+2}}^{n+1}$ и положим $K^n = H_{X_n \setminus X_{n+1}}^n(F)$.

- Докажите, что $(K^\cdot, d^\cdot)$ является комплексом пучков на X .
- Докажите, что $H_{X_n}^k(F) = 0$ при $k < n$, и установите изоморфизм $H_{X_{n-1}}^n(F) \xrightarrow{\sim} H^n(F)$.
- Пусть $G^n = \Gamma_{X_n}(F^n) \cap (d_F^n)^{-1}(\Gamma_{X_{n+1}}(F^{n+1}))$, где F — комплекс пучков $\{F^n, d_F^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Постройте морфизмы $d_G^n : G^n \rightarrow G^{n+1}$,

докажите, что $G = (G^*, d_G^*)$ — комплекс, постройте морфизмы $G \rightarrow K$ и $G \rightarrow F$ и докажите, что если все F^n вялые, то эти морфизмы являются квазиизоморфизмами. Покажите, что $F \simeq K$ в $D^+(X)$ (см. [Hartshorn 1]).

Упражнение 2.22. Пусть X — топологическое пространство и $X = U_1 \cup U_2$ — покрытие пространства X открытыми или замкнутыми множествами. Пусть $F_i \in \text{Ob}(D^+(U_i)), i = 1, 2$, а ϕ — изоморфизм $F_1|_{U_1 \cap U_2} \xrightarrow{\sim} F_2|_{U_1 \cap U_2}$ в $D^+(U_1 \cap U_2)$. Постройте объект $F \in \text{Ob}(D^+(X))$ и изоморфизмы $\psi_i: F|_{U_i} \simeq F_i$, такие, что $\psi_2|_{U_1 \cap U_2} \simeq \phi \circ \psi_1|_{U_1 \cap U_2}$.

Упражнение 2.23. Пусть $X = \mathbb{R}^n, n \geq 1$ и k — поле. Докажите, что если объект $P \in \text{Ob}(\text{Mod}(k_X))$ проективен, то $P = 0$. (Указание. Предположив, что $P \neq 0$, покажите, что существует непустое открытое множество $U \subset X$, такое, что k_U является прямым слагаемым в P , и выведите противоречие.)

Упражнение 2.24. Пусть k — коммутативное кольцо. В этом упражнении под термином «кольцо» понимается кольцо A и морфизм $K \rightarrow A$, такой, что образ кольца k принадлежит центру кольца A . Пусть X — топологическое пространство и $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ — пучки колец на X . Предположим, что $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ являются плоскими над k .

- (i) Докажите, что плоский (соответственно инъективный) $(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B})$ -модуль является плоским (соответственно инъективным) над $\mathcal{A}$.
- (ii) Докажите, что функтор $\cdot \otimes_{\mathcal{B}} \cdot$:

$$\text{Mod} \left(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B}^{\text{op}} \right) \times \text{Mod} \left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{C}^{\text{op}} \right) \rightarrow \text{Mod} \left(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{C}^{\text{op}} \right)$$

имеет левый производный функтор $\cdot \otimes_{\mathcal{B}}^L \cdot$:

$$D^- \left(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B}^{\text{op}} \right) \times D^- \left(\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{C}^{\text{op}} \right) \rightarrow D^- \left(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{C}^{\text{op}} \right),$$

и докажите существование изоморфизма

$$\left(K \otimes_{\mathcal{B}}^L M \right) \otimes_{\mathcal{C}}^L N \simeq K \otimes_{\mathcal{B}}^L \left(M \otimes_{\mathcal{C}}^L N \right)$$

в $D^- (\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{D}^{\text{op}})$, где $K \in \text{Ob}(D^- (\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{B}^{\text{op}})), M \in \text{Ob}(D^- (\mathcal{B} \otimes_k \mathcal{C}^{\text{op}})), N \in \text{Ob}(D^- (\mathcal{C} \otimes_k \mathcal{D}^{\text{op}}))$.

- (iii) Докажите, что функтор $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$:

$$\mathcal{M}od\left(\mathcal{A} \otimes_k B^{op}\right)^{\circ} \times \mathcal{M}od\left(\mathcal{A} \otimes_k C^{op}\right) \rightarrow \mathcal{M}od\left(B \otimes_k C^{op}\right)$$

имеет правый производный функтор $R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\cdot, \cdot)$:

$$\mathbf{D}^{-}\left(\mathcal{A} \otimes_k B^{op}\right)^{\circ} \times \mathbf{D}^{+}\left(\mathcal{A} \otimes_k C^{op}\right) \rightarrow \mathbf{D}^{+}\left(B \otimes_k C^{op}\right),$$

и докажете существование изоморфизма

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}\left(M \overset{L}{\otimes}_B N, K\right) \simeq R\mathcal{H}om_B(N, R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, K))$$

в $\mathbf{D}^{+}(B \otimes_k C^{op})$, где $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{-}(\mathcal{A} \otimes_k B^{op}))$, $N \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{-}(B \otimes_k C^{op}))$ и $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{+}(\mathcal{A} \otimes_k C^{op}))$.

- (iv) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, а B и $\mathcal{A}$ — пучки колец на Y и X соответственно, причем оба являются плоскими над k . Пусть существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что $\text{wgl}d(\mathcal{A}_x) \leq n$ для всех $x \in X$. Для $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(B \otimes_k f^{-1}\mathcal{A}^{op}))$ постройте морфизм в $\mathbf{D}^{+}(k_Y)$, функториальный по отношению к $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{-}(\mathcal{A}))$ и $N \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{+}(\mathcal{A}))$,

$$f^{-1}R\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(M, N) \rightarrow R\mathcal{H}om_B\left(K \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}M, K \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{A}} f^{-1}N\right).$$

Упражнение 2.25. Пусть X — топологическое пространство и S замкнуто в X . Пусть $\{S_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ — убывающая последовательность замкнутых подмножеств в S , таких, что $S_k = S$ при $k \ll 0$ и $S_k = \emptyset$ при $k \gg 0$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{+}(X))$ и $r \in \mathbb{Z}$. Предположим, что $H_{S_k}^j(F)|_{S_k \setminus S_{k+1}} = 0$ при $j < r$ для всех k . Докажите, что $H_S^j(F) = 0$ при $j < r$. (Указание. Проводя индукцию по k , предположите, что $H_S^j(F)|_{X \setminus S_{k-1}} = 0$ при $j < r$, и рассмотрите выделенный треугольник

$$R\Gamma_{(S_{k-1} \setminus S_k)}(F)|_{X \setminus S_k} \longrightarrow R\Gamma_S(F)|_{X \setminus S_k} \longrightarrow Ri_* i^{-1} R\Gamma_S(F) \xrightarrow{+1},$$

где i — открытое вложение $X \setminus S_{k-1} \rightarrow X \setminus S_k$.)

Упражнение 2.26. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathbb{Z}_X))$, а $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j=1, \dots, r}$ — открытое покрытие пространства X . Постройте естественный морфизм

$$H^0\left(\bigcap_j U_j; F\right) \rightarrow H^{r-1}(X; F).$$

(Указание. Используйте упр. 2.15.)

Замечания

Мы отсылаем читателя к «Краткому историческому очерку» К. Уэзеля в начале книги для подробного ознакомления с историей теории пучков.

Напомним только, что пучки были введены Лере [1,2] около 1945 г. вместе со спектральными последовательностями — основным в то время инструментом изучения когомологий пучков. Теория приобрела свое настоящее значение под влиянием работы Картана [Cartan 1]. Вероятно, возникновение современного формализма пучковых когомологий можно отнести к работе Гротендика [Grothendieck 1]. Книга Годемана [Godement 1] много способствовала популяризации теории. Функториальные операции на пучках в рамках теории производных категорий были определены Гротендиком сначала в когерентном случае [Grothendieck 4], а потом в случае дискретных коэффициентов ([SGA4], [SGA5]).

Во второй главе читатель встречал и другие имена в названиях терминов и теорем: «когомологии Чеха», «формула Кюннета», «последовательность Майёра-Вьеториса», «лемма Пуанкаре», «теорема Вьеториса-Бигла», «комплекс де Рама» и др. Среди других важных вкладов в теорию пучков надо отметить введение вялых и мягких пучков Годеманом и введение локальных когомологий (функтор $\Gamma_Z(\cdot)$ и его производный) Гротендиком [Grothendieck 1]. Также необходимо упомянуть лемму о нехарактеристических деформациях (предложение 2.7.2), которая будет играть решающую роль в гл. 5. Она принадлежит Касиваре [Kashivara 3,5]. Эта лемма является «вариацией на тему» теории Морса и основана на так называемой теореме Миттаг-Лефлера из работы Гротендика [Grothendieck 3].

Двойственность Пуанкаре–Вердье и преобразование Фурье–Сато

В этой главе мы ознакомим читателя с двумя основными методами изучения пучков на многообразиях. Сначала, следуя Вердье [Verdier 1], мы построим функтор $f^!$ — правый сопряженный к функтору $Rf_!$. Если $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств, удовлетворяющих некоторым условиям, и если F (соответственно G) принадлежит $\mathbf{D}^+(A_X)$ (соответственно $\mathbf{D}^+(A_Y)$), то имеет место соотношение

$$(3.0.1) \quad \mathrm{Hom}(Rf_! G, F) = \mathrm{Hom}(G, f^! F).$$

Этот результат обобщает классическую двойственность Пуанкаре. Действительно, если X состоит из одной точки, $F = A$ и Y — топологическое многообразие, то комплекс $f^! A$ (называемый *дуализирующим комплексом* на Y) изоморфен ориентирующему пучку на Y , сдвинутому на размерность. Имея функтор $f^!$, можно построить ряд интересных формул теории пучков.

Далее мы подробно изучим преобразование Фурье–Сато — операцию, которая позволяет переходить от конических пучков (в производной категории) на векторном расслоении к коническим пучкам на двойственном векторном расслоении (и обратно).

В этой главе мы будем подробно изучать пучки на топологических многообразиях: ориентирующие пучки, являющуюся размерность, когомологически конструктивные пучки, а также рассмотрим понятие γ -топологии, которая будет предметом подробного изучения в гл. 5.

Другой подход к рассмотрению понятий, изучаемых в § 1–4, см. в книгах [Borel et al. 1], [Gelfand–Manin 1], [Iversen 1] и [SHS].

Материал, изложенный в данной главе, большей частью является классическим, но до появления этой книги не существовало его систематического изложения.

Соглашение 3.0. В этих и последующих главах, за исключением гл. 11, чтобы не затруднять изложение, мы будем работать с пучками A_X -модулей на топологическом пространстве X . Будет предполагаться, что кольцо A коммутативно и имеет конечную глобальную размерность. (Напомним, см. упр. 1.29, что $\mathrm{wgld}(A) \leq \mathrm{gld}(A)$.)

Если нет опасности ошибки, то мы будем писать $\mathbf{D}^+(X)$ или $\mathbf{D}^b(X)$ вместо $\mathbf{D}^+(A_X)$ или $\mathbf{D}^b(A_X)$ соответственно. Мы также будем писать $F \otimes^L G$ и $R\mathrm{Hom}(F, G)$ вместо $F \otimes_{A_X}^L G$ и $R\mathrm{Hom}_{A_X}(F, G)$. Все многообразия считаются конечными и счетными на бесконечности. Подмногообразия всегда локально замкнуты.

В этой главе все топологические пространства предполагаются локально компактными, за исключением пространств с γ -топологией.

Когда идет речь о композиции двух функторов, например $f^! \circ Rf_!$, мы иногда будем опускать символ $\circ$.

3.1. Двойственность Пуанкаре–Вердье

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств. Цель данного раздела — построить правый сопряженный функтор $f^!$ к функтору $Rf_!: \mathbf{D}^+(A_Y) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_X)$. Функтор $f^!$ должен удовлетворять соотношению

$$(3.1.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_!G, F) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, f^!F),$$

если $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$.

В частности, если Y есть n -мерное ориентируемое многообразие, $X = \{\mathrm{pt}\}$, $A = \mathbb{Q}$, $G = \mathbb{Q}_Y$, $F = \mathbb{Q}_{\{\mathrm{pt}\}}$, то, как мы увидим, $f^!\mathbb{Q}_{\{\mathrm{pt}\}} \simeq \mathbb{Q}_Y[n]$; следовательно,

$$\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(Y; \mathbb{Q}_Y)[n], \mathbb{Q}) \simeq R\Gamma(Y; \mathbb{Q}_Y).$$

Рассматривая j -ю группу когомологий, получаем

$$(3.1.2) \quad (H_c^{n-j}(Y; \mathbb{Q}_Y))^* \simeq H^j(Y; \mathbb{Q}_Y),$$

где $*$ означает переход к сопряженному векторному пространству над $\mathbb{Q}$. Это классическая двойственность Пуанкаре.

Сначала объясним процесс построения функтора $f^!$ эвристически. Пусть $F \in \mathrm{Ob} \mathbf{D}^+(A_X)$ и V открыто в Y ; тогда

$$\begin{aligned} R\Gamma(V; f^!F) &= R\mathrm{Hom}(A_V, f^!F) \\ &= R\mathrm{Hom}(Rf_!A_V, F). \end{aligned}$$

Последний комплекс может быть описан с помощью s -мягкой резольвенты K пучка A_X . Тогда $Rf_!A_V = f_!K_V$. Если F — комплекс инъективных пучков, то

$$R\Gamma(V; f^!F) = \mathrm{Hom}(f_!K_V, F).$$

Эта конструкция требует дополнительных предположений об отображении f .

Определение 3.1.1. Пучок G на Y называется f -мягким, если для любого $x \in X$ пучок $G|_{f^{-1}(x)}$ является s -мягким.

Из упр. 2.6 вытекает, что G является f -мягким в том и только в том случае, когда $R^j f_! G_V = 0$ для любого открытого подмножества $V \subset Y$ и любого $j \neq 0$.

Предположим теперь, что

$$(3.1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{функтор } f_! : \mathcal{M}og(\mathbb{Z}_Y) \rightarrow \mathcal{M}og(\mathbb{Z}_X) \text{ имеет} \\ \text{конечную когомологическую размерность.} \end{array} \right.$$

Это означает, что существует целое $r \geq 0$, такое, что $R^j f_! = 0$ при $j > r$. Это условие эквивалентно одному из следующих двух условий (см. упр. 1.19):

$$(3.1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{для любого } G \in \text{Ob}(\mathcal{S}h(Y)) \text{ существует точная} \\ \text{последовательность } 0 \rightarrow G \rightarrow G^0 \rightarrow \dots \rightarrow G^r \rightarrow 0, \\ \text{где все } G^j \text{ являются } f\text{-мягкими;} \end{array} \right.$$

$$(3.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{для любой точной последовательности} \\ G^0 \rightarrow \dots \rightarrow G^r \rightarrow 0 \text{ в } \mathcal{S}h(Y), \\ \text{где все } G^j \text{ являются } f\text{-мягкими при} \\ j < r, \text{ пучок } G^r \text{ также } f\text{-мягок.} \end{array} \right.$$

Отметим, что функтор $f_!$ имеет когомологическую размерность $\leq r$ в том и только в том случае, когда для любых $x \in X$ функтор $\Gamma_c(f^{-1}(x); \cdot)$ имеет когомологическую размерность $\leq r$.

Пусть K — некоторый $\mathbb{Z}_Y$ -модуль, а F есть A_X -модуль. Определим предпучок $f_K^! F$ A -модулей формулой

$$(f_K^! F)(V) = \text{Hom}_{A_X} \left(f_! \left(A_Y \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K_V \right), F \right).$$

(Напомним, что для двух A_X -модулей F и G мы пишем $\text{Hom}_{A_X}(G, F)$ вместо $\text{Hom}_{\mathcal{M}od(A_X)}(G, F)$.)

Для $V' \subset V$ отображение $f_!(A_Y \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K_{V'}) \rightarrow f_!(A_Y \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K_V)$ определяет отображение ограничения $(f_K^! F)(V) \rightarrow (f_K^! F)(V')$.

Лемма 3.1.2 Пусть K — плоский и f -мягкий $\mathbb{Z}_Y$ -модуль.

- (i) Для любого пучка G на Y пучок $G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K$ является f -мягким.
- (ii) $G \mapsto f_!(G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K)$ — точный функтор из $\mathcal{M}od(\mathbb{Z}_Y)$ в $\mathcal{M}od(\mathbb{Z}_X)$.

Доказательство. (i) Любой пучок G на Y имеет резольвенту

$$\rightarrow G^{-r} \rightarrow \dots \rightarrow G^0 \rightarrow G \rightarrow 0,$$

где каждый G^j является прямым произведением пучков $\mathbb{Z}_V$, V открыто в Y (см. конструкцию в доказательстве предложения 2.4.12). Следовательно, $G^j \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K$ есть f -мягкий пучок. Так как последовательность

$$\rightarrow G^{-r} \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K \rightarrow \dots \rightarrow G^0 \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K \rightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K \rightarrow 0$$

точна, то (3.1.5) завершает доказательство, если взять r достаточно большим.

(ii) следует из (i). □

Лемма 3.1.3 Пусть K — плоский и f -мягкий $\mathbb{Z}_Y$ -модуль, а F — инъективный A_X -модуль.

- (i) Предпучок $f_K^! F$ является пучком и инъективным A_Y -модулем.
(ii) Существует канонический изоморфизм, функториальный по отношению к $G \in \text{Ob}(\mathcal{M}\text{od}(A_Y))$,

$$\text{Hom}_{A_X} \left(f_! \left(G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K \right), F \right) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{A_Y} (G, f_K^! F).$$

Доказательство. В ходе доказательства мы будем писать $\cdot \otimes K$ вместо $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K$. Покажем сначала, что $f_K^! F$ является пучком. Пусть $V = \bigcup V_j$ — открытое покрытие открытого множества $V \subset Y$. Существует точная последовательность

$$\bigoplus_{j,k} A_{V_j \cap V_k} \rightarrow \bigoplus_j A_{V_j} \rightarrow A_V \rightarrow 0.$$

Применяя лемму 3.1.2(ii), получаем точную последовательность

$$f_! \left(\bigoplus_{j,k} A_{V_j \cap V_k} \otimes K \right) \rightarrow f_! \left(\bigoplus_j A_{V_j} \otimes K \right) \rightarrow f_! (A_V \otimes K) \rightarrow 0.$$

Так как F инъективен, то последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_{A_X} (f_! (A_V \otimes K), F) &\rightarrow \text{Hom}_{A_X} \left(f_! \left(\bigoplus_j A_{V_j} \otimes K \right), F \right) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{A_X} \left(f_! \left(\bigoplus_{j,k} A_{V_j \cap V_k} \otimes K \right), F \right) \end{aligned}$$

точна и изоморфна последовательности

$$0 \rightarrow (f_K^! F)(V) \rightarrow \prod_j (f_K^! F)(V_j) \rightarrow \prod_{j,k} (f_K^! F)(V_j \cap V_k).$$

Это означает, что $f_K^!(F)$ — пучок.

Определим гомоморфизм

$$\alpha(G) : \text{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F) \rightarrow \text{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F).$$

Пусть $\phi \in \text{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F)$; тогда для любого открытого $V \subset Y$ существует цепочка морфизмов A_X -модулей

$$\begin{aligned} G(V) \otimes_A f_!(A_Y \otimes K_V) &\rightarrow f_!(G \otimes K_V) \\ &\rightarrow f_!(G \otimes K) \\ &\xrightarrow{\phi} F, \end{aligned}$$

что задает морфизм из $G(V)$ в $(f_K^! F)(V) = \text{Hom}(f_!(A_Y \otimes K_V), F)$. Так как этот морфизм функториален по отношению к открытому множеству $V \subset Y$, то мы получаем элемент $\alpha(G)(\phi) \in \text{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F)$.

Доказательство того, что $\alpha(G)$ — изоморфизм, мы проведем в три шага.

(а) Если $G = A_V$, V открыто в Y , то $\alpha(G)$ — изоморфизм. В самом деле,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{A_X}(f_!(G \otimes K), F) &= \text{Hom}_{A_X}(f_!(A_V \otimes K), F) \\ &\simeq (f_K^! F)(V) \\ &\simeq \text{Hom}_{A_Y}(G, f_K^! F). \end{aligned}$$

(б) Если $G = \bigoplus_j A_{V_j}$ для семейства открытых множеств $V_j \subset Y$, то $\alpha(G)$ — изоморфизм; это следует из (а), так как $\alpha(G) = \prod_j \alpha(A_{V_j})$.

(с) Пусть теперь G — произвольный A_Y -модуль. Из предложения 2.4.12 вытекает существование точной последовательности $0 \rightarrow G'' \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 0$, где $G' \simeq \bigoplus_j A_{V_j}$. Следовательно, $\alpha(G')$ — изоморфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(f_!(G \otimes K), F) & \rightarrow & \text{Hom}(f_!(G' \otimes K), F) & \rightarrow & \text{Hom}(f_!(G'' \otimes K), F) \\ & & \downarrow \alpha(G) & & \downarrow \alpha(G') & & \downarrow \alpha(G'') \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(G, f_K^! F) & \rightarrow & \text{Hom}(G', f_K^! F) & \rightarrow & \text{Hom}(G'', f_K^! F) \end{array}$$

Из леммы 3.1.2 следует, что обе строчки в диаграмме точные. Так как $\alpha(G')$ биективен, то $\alpha(G)$ инъективен. Проводя те же рассуждения для пучка G'' , доказываем инъективность $\alpha(G'')$. Следовательно, $\alpha(G)$ биективен.

Как следствие этого мы получаем точность функтора $\text{Hom}_{A_Y}(\cdot, f_K^! F)$ на категории $\text{Mod}(A_Y)$. Следовательно, $f_K^! F$ инъективен. $\square$

Пусть когомологическая размерность функтора $f_!$ не превосходит r .

Лемма 3.1.4 *Существует резольвента $0 \rightarrow \mathbb{Z}_Y \rightarrow K^0 \rightarrow \dots \rightarrow K^r \rightarrow 0$, такая, что все K^j — плоские и f -мягкие $\mathbb{Z}_Y$ -модули.*

Доказательство. Мы построим искомую резольвенту методом, применявшимся в доказательстве предложения 2.4.3. Пусть $\hat{Y}$ — это множество Y с дискретной топологией, а $p: \hat{Y} \rightarrow Y$ — естественное отображение. Тогда $K^0 = p_* p^{-1} \mathbb{Z}_Y$, $K^1 = p_* p^{-1}(K^0/\mathbb{Z}_Y), \dots, K^j = p_* p^{-1}(\text{Coker}(K^{j-2} \rightarrow K^{j-1}))$ при $1 < j < r$ и $K^r = \text{Coker}(K^{r-2} \rightarrow K^{r-1})$.

Последовательность $0 \rightarrow \mathbb{Z}_Y \rightarrow K^0 \rightarrow \dots \rightarrow K^r \rightarrow 0$ точна, все K^j при $0 \leq j < r$ вялые и, следовательно, f -мягкие, а из (3.1.4)' следует, что K^r также f -мягкий.

Остается показать, что K^j являются плоскими при $0 \leq j \leq r$. Для этого мы покажем, что если пучок G плоский, то пучки $p_* p^{-1} G$ и $p_* p^{-1} G/G$ также плоские. Если $y \in Y$, то

$$(p_* p^{-1} G)_y = \varinjlim_{y \in U, y' \in U} \prod G_{y'},$$

и

$$(p_* p^{-1} G/G)_y = \varinjlim_{y \in U, y' \in U \setminus \{y\}} \prod G_{y'},$$

где U пробегает семейство окрестностей точки y . Это $\mathbb{Z}$ -модули без кручения и, следовательно, плоские. $\square$

Пусть $\mathcal{I}(X)$ обозначает полную подкатегорию в $\text{Mod}(A_X)$, состоящую из инъективных объектов. Тогда $\mathbf{K}^+(\mathcal{I}(X)) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_X)$ — эквивалентность триангулированных категорий. Пусть K — такой же комплекс, как в лемме 3.1.4. Для $F \in \mathbf{K}^+(\mathcal{I}(X))$ пусть $f_K^! F$ — простой комплекс, ассоциированный с двойным комплексом $(f_{K-q}^!(F^p))^{p,q}$. Тогда $f_K^! F$ — комплекс инъективных A_Y -модулей. Легко проверить, что $f_K^!$ переводит морфизм, гомотопный нулю, в морфизм, гомотопный нулю. Факторизуя, получаем функтор триангулированных категорий

$$f_K^! : \mathbf{K}^+(\mathcal{I}(X)) \rightarrow \mathbf{K}^+(\mathcal{I}(Y)).$$

Теорема 3.1.5 Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств, такое, что $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность. Тогда существует функтор триангулированных категорий $f^!: \mathbf{D}^+(A_X) \rightarrow \mathbf{D}^+(A_Y)$ и изоморфизм бифункторов на $\mathbf{D}^+(A_Y)^\circ \times \mathbf{D}^+(A_X)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_!(\cdot), \cdot) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(\cdot, f^!(\cdot)).$$

Другими словами, $f^!$ — правый сопряженный к $Rf_!$.

(Отметим, что $f^!$ единствен с точностью до изоморфизма, см. упр. 1.2.)

Доказательство. Покажем, что $f_K^!$ обладает требуемыми свойствами. Для $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}(X)))$, $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{K}^+(\mathcal{I}(Y)))$ из леммы 3.1.3 следует, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{M}\mathrm{od}(A_X))} \left(f_! \left(G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K \right), F \right) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{M}\mathrm{od}(A_Y))} (G, f_K^! F).$$

Так как $G \simeq G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} \mathbb{Z}_Y \rightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K$ есть квазиизоморфизм, а $G \times_{\mathbb{Z}_Y} K$ — комплекс f -мягких пучков (по лемме 3.1.2), то $Rf_! G \simeq f_!(G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K)$ в $\mathbf{D}^+(A_X)$. Значит, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{M}\mathrm{od}(A_X))}(f_!(G \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K), F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_! G, F)$. С другой стороны, так как $f_K^! F$ — комплекс инъективных A_Y -модулей, то

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}^+(\mathcal{M}\mathrm{od}(A_Y))}(G, f_K^! F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, f_K^! F),$$

что и завершает доказательство. $\square$

Замечание 3.1.6. (i) Теорема 3.1.5 допускает обобщение. А именно, пусть $f: Y \rightarrow X$ такое же, как выше, $\mathcal{R}$ (соответственно $\mathcal{S}$) — пучок колец на X (соответственно на Y), и пусть задан морфизм пучков колец $f^{-1}\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$. Тогда существует функтор триангулированных категорий $f^!: \mathbf{D}^+(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{S})$, являющийся правым сопряженным к $Rf_!: \mathbf{D}^+(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{R})$. Доказательство аналогично приведенному выше; $(f_K^! F)(V)$ определяется как $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}\mathrm{od}(\mathcal{R})}(f_!(\mathcal{S} \otimes_{\mathbb{Z}_Y} K_V), F)$.

(ii) Изоморфизм в теореме 3.1.5 совместим со сдвигами. А именно, если $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ и $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$, то следующая диаграмма

коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_!G, F) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, f^!F) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}((Rf_!G)[1], F[1]) & & \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G[1], (f^!F)[1]) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_!(G[1]), F[1]) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G[1], f^!(F[1])).
 \end{array}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость от основного кольца A , мы будем пока писать $f_A^!$ вместо $f^!$. Следовательно, $f_A^!$ — это функтор из $\mathbf{D}^+(A_X)$ в $\mathbf{D}^+(A_Y)$. Пусть $\phi_X: \mathbf{D}^+(A_X) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_X)$ и $\phi_Y: \mathbf{D}^+(A_Y) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_Y)$ — забывающие функторы.

Предложение 3.1.7. *Имеет место изоморфизм*

$$\phi_Y \circ f_A^! \simeq f_Z^! \circ \phi_X.$$

Доказательство. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_Y))$, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_Y)}(G, f_Z^! \circ \phi_X F) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_X)}(Rf_!G, \phi_X F) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}\left(A_X \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_X} Rf_!G, F\right) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}\left(Rf_!\left(A_Y \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_Y} G\right), F\right) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}\left(A_Y \overset{L}{\otimes}_{\mathbb{Z}_Y} G, f_A^!F\right) \\
 &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_Y)}(G, \phi_Y \circ f_A^!F).
 \end{aligned}$$

Поэтому $f_Z^! \circ \phi_X F \simeq \phi_Y \circ f_A^!F$. □

Пусть теперь $g: Z \rightarrow Y$ — непрерывное отображение локально компактных пространств.

Предложение 3.1.8. *Пусть $f_!$ и $g_!$ имеют конечную когомологическую размерность. Тогда $(f \circ g)_!$ тоже имеет конечную когомологическую размерность и*

$$(f \circ g)^! \simeq g^! \circ f^!$$

как функторы из $\mathbf{D}^+(A_X)$ в $\mathbf{D}^+(A_Z)$.

Доказательство следует из формулы $(f \circ g)_! \simeq f_! \circ g_!$. □

Предложение 3.1.9. Рассмотрим декартов квадрат непрерывных отображений и локально компактных пространств

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{f'} & X' \\ g' \downarrow & \square & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X. \end{array}$$

Пусть $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность; тогда

- (i) $f'_!$ имеет конечную когомологическую размерность;
- (ii) существует канонический изоморфизм функторов из $\mathbf{D}^+(A_{X'})$ в $\mathbf{D}^+(A_Y)$

$$f'_! \circ Rg_* \simeq Rg'_* \circ f''_!;$$

- (iii) существует морфизм функторов из $\mathbf{D}^+(A_X)$ в $\mathbf{D}^+(A_{Y'})$

$$g'^{-1} f'_! \rightarrow f''_! g^{-1}.$$

Доказательство. (i) Пусть $x' \in X'$. Тогда $f'^{-1}(x')$ гомеоморфно $f^{-1}(g(x'))$. Следовательно, когомологическая размерность функтора $f'_!$ не больше когомологической размерности $f_!$.

(ii) Требуемый результат получается из рассмотрения цепочки изоморфизмов, функториальных по отношению к $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_{X'}))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_{Y'})}(G, f'_! Rg_* F) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_! G, Rg_* F) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_{X'})}(g'^{-1} Rf_! G, F) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_{X'})}(Rf'_! \circ g'^{-1} G, F) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_{Y'})}(g'^{-1} G, f''_! F) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, Rg'_* \circ f''_! F). \end{aligned}$$

(iii) Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, то из предложения 2.5.11 следует существование морфизма $Rf'_! g'^{-1} f'_! F \simeq g'^{-1} Rf_! f'_! F \rightarrow g'^{-1} F$. Это дает требуемый гомоморфизм $g'^{-1} f'_! F \rightarrow f''_! g^{-1} F$. $\square$

Предложение 3.1.10. Пусть $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность. Тогда если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_Y))$, то

$$\begin{aligned} R\text{Hom}(Rf_!G, F) &\simeq R\text{Hom}(G, f^!F), \\ R\text{Hom}(Rf_!G, F) &\simeq Rf_*R\text{Hom}(G, f^!F). \end{aligned}$$

Доказательство. Существование первого изоморфизма следует из существования второго — достаточно применить функтор $R\Gamma(X; \cdot)$.

Существует канонический морфизм

$$Rf_*R\text{Hom}(G, f^!F) \rightarrow R\text{Hom}(Rf_!G, Rf_*f^!F).$$

Образуя композицию этого морфизма с морфизмом $Rf_! \circ f^!F \rightarrow F$, получаем

$$Rf_*R\text{Hom}(G, f^!F) \rightarrow R\text{Hom}(Rf_!G, F).$$

Пусть V открыто в X ; тогда

$$\begin{aligned} H^j(R\Gamma(V; Rf_*R\text{Hom}(G, f^!F))) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_{j^{-1}(V)})}(G|_{j^{-1}(V)}, f^!F[j]|_{j^{-1}(V)}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_V)}((Rf_!G)|_V, F[j]|_V) \\ &\simeq H^j(R\Gamma(V; R\text{Hom}(Rf_!G, F))). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство. □

Предложение 3.1.11. Пусть $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность; тогда существует естественный морфизм функторов из $\mathbf{D}^+(A_X) \times \mathbf{D}^+(A_X)$ в $\mathbf{D}^+(A_Y)$.

$$f^!(\cdot) \overset{L}{\otimes}_{A_Y} f^{-1}(\cdot) \rightarrow f^!(\cdot) \left(\cdot \overset{L}{\otimes}_{A_X} \cdot \right).$$

Доказательство. Пусть F, F_1 и F_2 принадлежит $\mathbf{D}^+(A_X)$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)} \left(f^!F_1 \overset{L}{\otimes}_{A_Y} f^{-1}F_2, f^!F \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)} \left(Rf_! \left(f^!F_1 \overset{L}{\otimes}_{A_Y} f^{-1}F_2 \right), F \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)} \left(Rf_!f^!F_1 \overset{L}{\otimes}_{A_X} F_2, F \right). \end{aligned}$$

Пусть $F = F_1 \otimes_{A_X}^L F_2$. Тогда требуемый морфизм есть образ морфизма $Rf_! f^! F_1 \otimes_{A_X}^L F_2 \rightarrow F_1 \otimes_{A_X}^L F_2$. $\square$

Мы увидим в § 3.3, что если f является топологической субмерсией, то морфизм предложения 3.1.11 является изоморфизмом.

Рассмотрим случай, когда функтор $f^!$ выражается через ранее введенные функторы.

Предложение 3.1.12. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — гомеоморфизм пространства Y на локально замкнутое подмножество в X . Тогда

$$f^!(\cdot) \simeq f^{-1} \circ R\Gamma_{f(Y)}(\cdot).$$

Доказательство. Положим $Z = f(Y)$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(f_! G, F) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(f_! G, R\Gamma_Z(F)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(f^{-1} \circ f_! G, f^{-1} R\Gamma_Z(F)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, f^{-1} R\Gamma_Z(F)). \end{aligned}$$

Откуда получаем $f^! F \simeq f^{-1} \circ R\Gamma_Z(F)$. $\square$

Предложение 3.1.13. Пусть $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность. В этом случае если $F_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_X))$ и $F_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, то

$$f^! R\mathcal{H}om(F_1, F_2) \simeq R\mathcal{H}om(f^{-1} F_1, f^! F_2).$$

Доказательство. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$; тогда

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, f^! R\mathcal{H}om(F_1, F_2)) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}(Rf_! G, R\mathcal{H}om(F_1, F_2)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}\left(Rf_! G \otimes_{A_X}^L F_1, F_2\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}\left(Rf_! \left(G \otimes_{A_Y}^L f^{-1} F_1\right), F_2\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_X)}\left(G \otimes_{A_Y}^L f^{-1} F_1, f^! F_2\right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(A_Y)}(G, R\mathcal{H}om(f^{-1} F_1, f^! F_2)) \end{aligned}$$

Так как эта цепочка изоморфизмов существует при любом G , то доказательство окончено. $\square$

Предложение 3.1.14. *Предположим, что X имеет конечную c -мягкую размерность (см. упр. 2.9). Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_X))$. Пусть q_1 и q_2 обозначают первую и вторую проекции пространства $X \times X$ на сомножители, и пусть Δ — диагональ в $X \times X$. Тогда*

$$R\mathcal{H}om(G, F) \simeq Rq_{1*} R\Gamma_{\Delta} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F).$$

Доказательство. Обозначим через δ вложение Δ в $X \times X$. Тогда

$$\begin{aligned} Rq_{1*} R\Gamma_{\Delta} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F) &\simeq \delta^! R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(\delta^{-1}q_2^{-1}G, \delta^!q_1^!F) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(G, F). \end{aligned} \quad \square$$

Рассмотрим теперь два локально компактных пространства X и Y и обозначим через q_1 и q_2 проекции пространства $X \times Y$ на X и Y соответственно.

Предложение 3.1.15. *Предположим, что Y имеет конечную c -мягкую размерность. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_Y))$. Тогда существует канонический изоморфизм*

$$R\Gamma(X \times Y; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}, q_1^!F)) \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(Y; G), R\Gamma(X; F)).$$

Доказательство. Обозначим через a_X (соответственно a_Y) проекцию $X \rightarrow \{\text{pt}\}$ (соответственно $Y \rightarrow \{\text{pt}\}$). Тогда

$$\begin{aligned} R\Gamma(X \times Y; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) &\simeq Ra_{X*} Rq_{1*} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F) \\ &\simeq Ra_{X*} R\mathcal{H}om(Rq_{1!}q_2^{-1}G, F) \\ &\simeq Ra_{X*} R\mathcal{H}om(a_X^{-1}Ra_{Y!}G, F) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(Ra_{Y!}G, Ra_{X*}F). \end{aligned} \quad \square$$

Определение 3.1.16. (i) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение, и предположим, что $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность. Положим

$$\omega_{Y/X} = f^!A_X$$

и назовем $\omega_{Y/X}$ *относительным дуализирующим комплексом*. Если $X = \{\text{pt}\}$, то положим $\omega_Y = \omega_{Y/X}$ и назовем ω_Y *дуализирующим комплексом на Y* .

(ii) Предположим, что X имеет конечную s -мягкую размерность. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_X))$. Положим

$$D_X F = R\mathcal{H}om(F, \omega_X), \quad D'_X F = R\mathcal{H}om(F, A_X).$$

Назовем комплекс $D_X F$ комплексом, двойственным к F .

Если нет опасности путаницы, то мы будем писать DF вместо $D_X F$.

Из предложения 3.1.11 вытекает существование естественного морфизма функторов

$$(3.1.6) \quad f^{-1}(\cdot) \otimes \omega_{Y/X} \rightarrow f^!(\cdot).$$

Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_X))$, то из теоремы 3.1.5 и предложения 3.1.10 следует, что

$$(3.1.7) \quad \mathcal{H}om_{\mathbf{D}^b(A_X)}(F, \omega_X) \simeq \mathcal{H}om_{\mathbf{D}^b(\text{Mod}(A))}(R\Gamma_c(X; F), A) \text{ и}$$

$$(3.1.8) \quad R\mathcal{H}om(F, \omega_X) \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(X; F), A).$$

В частности, если $F = A_Z$, где Z локально замкнуто в X , то $R\Gamma_Z(X; \omega_X) \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(Z; A_Z), A)$.

3.2. Теоремы об обращении в нуль на многообразиях

Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n .

Лемма 3.2.1 Для любого пучка F на V

$$H_c^j(V; F) = 0 \quad \text{для} \quad j > n.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $n = 1$, и положим $\tilde{F} = i_! F$, где $i: V \rightarrow [0, 1]$ — гомеоморфизм пространства V на интервал $[0, 1]$. Имеем

$$H_c^j(V; F) \simeq H^j([0, 1]; \tilde{F}).$$

Утверждение леммы в этом случае вытекает из леммы 2.7.3. В общем случае пусть V' есть $(n-1)$ -мерное векторное пространство и f — сюръективное линейное отображение $V \rightarrow V'$. Из предыдущего рассуждения вытекает, что $R^j f_! F = 0$ при $j \neq 0, 1$. Так как $R^0 f_! F \simeq \tau^{\leq 0} Rf_! F$ и $\tau^{\geq 1} Rf_! F \simeq (R^1 f_! F)[-1]$, то мы получаем выделенный треугольник

$$R^0 f_! F \longrightarrow Rf_! F \longrightarrow (R^1 f_! F)[-1] \xrightarrow{+1}.$$

Применим к этому треугольнику функтор $\Gamma_c(V'; \cdot)$. Получаем длинную точную последовательность

$$\cdots \rightarrow H_c^j(V'; R^0 f_! F) \rightarrow H_c^j(V; F) \rightarrow H_c^{j-1}(V'; R^1 f_! F) \rightarrow \cdots.$$

Требуемый результат получается с помощью индукции по n . □

Предложение 3.2.2. Пусть X есть n -мерное C^0 -многообразие и F — пучок на X . Тогда

- (i) F имеет s -мягкую резольвенту длины не более n ;
- (ii) F имеет вялую резольвенту длины не более $n + 1$;
- (iii) $H_c^j(X; F) = 0$ при $j > n$;
- (iv) $H^j(X; F) = 0$ при $j > n$;
- (v) если Z локально замкнуто в X , то $H_Z^j(X; F) = 0$ при $j > n + 1$.

Напомним, что C^0 -многообразие счетно на бесконечности по определению.

Доказательство. Пусть $0 \rightarrow F \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots$ — вялая резольвента пучка F (см. § 2.4.) Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow F \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_{n-1} \rightarrow G_n \rightarrow 0,$$

где $G_n = \text{Im}(F_{n-1} \rightarrow F_n)$. Докажем, что пучок G_n является s -мягким. Это свойство локально на X (см. упр. 2.6); следовательно, мы можем считать X открытым множеством в некотором вещественном векторном пространстве V размерности n . Пусть U открыто в X ; тогда

$$H_c^j(U; F) = H_c^j(V; F_U).$$

Группа в правой части равна нулю по лемме 3.2.1. Поэтому $H_c^j(U; G_n) = 0$ при $j > 0$ и пучок G_n является s -мягким (упр. 2.6).

Теперь (iii) вытекает из (i), как и (iv), поскольку $H^j(X; G) = 0$ при $j > 0$, если G является s -мягким (предложение 2.5.10).

С помощью длинной точной последовательности, ассоциированной с вложением $Z \hookrightarrow X$, выводим (v) из (iv). Тогда (ii) следует из (v). $\square$

Предложение 3.2.3. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности n . Пусть $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathcal{M}\text{od}(A)))$ и $x \in V$.

- (i) Естественный морфизм $R\Gamma(V; M_V) \rightarrow (M_V)_x \simeq M$ является изоморфизмом.
- (ii) Естественный морфизм $R\Gamma_{\{x\}}(V; M_V) \rightarrow R\Gamma_c(V; M_V)$ является изоморфизмом.
- (iii) Существует изоморфизм

$$R\Gamma(\mathbb{R}^n; M_{\mathbb{R}^*}) \simeq M[-n].$$

- (iv) Пусть ϕ — линейный автоморфизм пространства V , а $\phi_c^\#$ — ассоциированный автоморфизм объекта $R\Gamma_c(V; M_V)$. Тогда

$\phi_c^\# = \text{sgn}(\phi) \cdot \text{id}_{R\Gamma_c(V; M_V)}$, где $\text{sgn}(\phi)$ — знак определителя автоморфизма ϕ .

- (v) С каждой ориентацией пространства V канонически связан изоморфизм $R\Gamma_c(V; M_V) \simeq M[-n]$, согласованный с изоморфизмом n . (iii).

Доказательств. (i) Надо применить следствие 2.7.7.

(ii) Пусть $x = 0$. Положим $F = M_V$. Как и в п. (i), $R\Gamma(\{y; |y| > 0\}; F) \rightarrow R\Gamma(\{y; |y| > a\}; F)$ — изоморфизм при $a > 0$. Следовательно, $R\Gamma_{\{0\}}(V; F) \rightarrow R\Gamma_{\{y; |y| \leq a\}}(V; F)$ — изоморфизм. Так как $H_c^j(V; F) = \varinjlim_a H_{\{y; |y| \leq a\}}^j(V; F)$, то утверждение (ii) доказано.

(iii), (iv) Предположим сначала, что $n = 1$. Обозначим через U_1 и U_2 связные компоненты в $V \setminus \{0\}$ и рассмотрим выделенный треугольник

$$R\Gamma_{\{0\}}(V; M_V) \xrightarrow{\alpha} R\Gamma(V; M_V) \xrightarrow{\beta} R\Gamma(U_1; M_V) \oplus R\Gamma(U_2; M_V) \xrightarrow{\gamma}_{+1}.$$

По (i) β допускает левый обратный; значит, $\alpha = 0$, и мы получаем эпиморфизм

$$(3.2.1) \quad 0 \rightarrow \Gamma(V; M_V) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i=1}^2 \Gamma(U_i; M_V) \xrightarrow{\gamma} H_{\{0\}}^1(V, M_V) \rightarrow 0,$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ и β_i — изоморфизм $\Gamma(V; M_V) \simeq \Gamma(U_i; M_V)$. Поскольку $\phi_c^\#[1] \circ \gamma = \pm 1$ в зависимости от того, меняет ϕ компоненты U_1 и U_2 местами или нет, мы получаем (iii) и (iv) при $n = 1$. Будем теперь проводить индукцию по $\dim V$. Разложим V в прямое произведение $V \simeq L \times V'$, где $\dim L = 1$. Из формулы Кюннета (упр. 2.18) мы получаем

$$(3.2.2) \quad R\Gamma_c(V; M_V) \simeq R\Gamma_c(L; M_L) \overset{L}{\otimes} R\Gamma_c(V'; A_{V'}),$$

что доказывает (iii). Для доказательства (iv) заметим, что $\phi_c^\#$ локально постоянно по отношению к $\phi \in \text{GL}(V)$ (предложение 2.7.5), и $\text{GL}(V)$ имеет две связные компоненты. Следовательно, достаточно найти ϕ , такое, что $\phi_c^\# = -1$. Мы возьмем ϕ равным $\psi \otimes \text{id}_{V'}$, где ψ — антиподальное преобразование пространства L . Тогда (iv) следует из (3.2.2).

(v) вытекает из (iii) и (iv). □

В § 3.5 нам понадобится следующий результат.

Предложение 3.2.4. Пусть V — вещественное конечномерное векторное пространство, X — его открытое подмножество и F — пучок на X . Предположим, что для любого выпуклого компактного подмножества $K \subset X$ отображение ограничения $\Gamma(X; F) \rightarrow \Gamma(K; F)$ сюръективно. Тогда $H^j(U; F) = 0$ для любого выпуклого открытого множества $U \subset X$ при всех $j > 0$.

Доказательство. Мы можем считать, что X равно U и выпукло. Рассмотрим возрастающую последовательность выпуклых компактных множеств $\{K_n\}$ в X . Из предложения 2.7.1 следует, что достаточно доказать равенство $H^j(K; F) = 0$ для всех $j > 0$ и для любого выпуклого компактного $K \subset X$.

Применим индукцию по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то искомый результат есть частный случай леммы 2.7.3. Пусть теперь $V = V' \oplus L$, где $\dim L = 1$. Пусть f — проекция $V \rightarrow V'$, а f_K — ограничение f на K . Если $y \in V'$, то пучок $F|_{f^{-1}(y) \cap K}$ удовлетворяет условию данного предложения. Поэтому $R^j f_{K*}(F|_K) = 0$ при $j > 0$. Пучок $f_{K*}(F|_K)$ также удовлетворяет условию предложения. Таким образом, по индукции получаем

$$H^j(K; F) = H^j(f(K); f_{K*}F) = 0$$

при $j > 0$. □

3.3. Ориентация и двойственность

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств.

Определение 3.3.1. Отображение f называется *топологической субмерсией с размерностью слоя l* , если для любой точки $y \in Y$ найдется ее открытая окрестность V , такая, что $U = f(V)$ открыто в X и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f|_V} & U \\ \uparrow h & \nearrow p & \\ U \times \mathbb{R}^l & & \end{array}$$

где p — проекция, а h — гомеоморфизм.

Заметим, что если X и Y являются C^1 -многообразиями, а f есть C^1 -субмерсия, то f является топологической субмерсией. Если f —

топологическая субмерсия, то $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность (см. предложение 3.2.2).

Предложение 3.3.2. Пусть f — топологическая субмерсия с размерностью слоя l . Тогда

- (i) $H^k(f^! A_X) = 0$ при $k \neq -l$ и $H^{-l}(f^! A_X)$ локально изоморфен A_Y ;
- (ii) морфизм функторов $f^! A_X \otimes_{A_Y} f^{-1}(\cdot) \rightarrow f^!(\cdot)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Докажем сначала (i) в случае, когда $Y = \mathbb{R}^l$ и $X = \{\text{pt}\}$. Из (3.1.8) следует, что если U открыто в Y , то $R\Gamma(U; f^! A_X) \simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(U; A_Y), A)$. Если, кроме того, U гомеоморфно $\mathbb{R}^l$, то из предложения 3.2.3 следует, что $R\Gamma_c(U; A_Y) \simeq A[-l]$, и, значит, $H^j(U; f^! A_X) = 0$ при $j \neq -l$ и $\Gamma(U; H^{-l}(f^! A_X)) \simeq \text{Hom}(H_c^l(U; A_Y), A)$.

Так как $H_c^l(Y; A_Y) \leftarrow H_c^l(U; A_Y)$ — изоморфизм (по предложению 3.2.3(ii)), то $A \simeq \Gamma(Y; H^{-l}(f^! A_X)) \rightarrow \Gamma(U; H^{-l}(f^! A_X))$ — изоморфизм. Это показывает, что $H^{-l}(f^! A_X)$ — постоянный пучок, изоморфный A_Y . Теперь рассмотрим общий случай. Так как задача локальна, то можно считать, что $Y = \mathbb{R}^l \times X$ и f — проекция. Пусть p — проекция $Y \rightarrow \mathbb{R}^l$, а a_X и $a_{\mathbb{R}^l}$ — проекции пространства X и $\mathbb{R}^l$ на $\{\text{pt}\}$. Из предложения 3.1.9 следует существование морфизма $p^{-1}\omega_{\mathbb{R}^l} \rightarrow f^! A_X$. Следовательно, для любого $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ мы имеем цепочку морфизмов

$$(3.3.1) \quad p^{-1}\omega_{\mathbb{R}^l} \otimes f^{-1}F \rightarrow f^! A_X \otimes f^{-1}F \rightarrow f^! F.$$

Достаточно показать, что композиция этих морфизмов является изоморфизмом. Если U открыто в $\mathbb{R}^l$ и гомеоморфно $\mathbb{R}^l$, а V открыто в X , то существует цепочка изоморфизмов

$$\begin{aligned} R\Gamma(U \times V; f^! F) &\simeq R\text{Hom}(A_{U \times V}, f^! F) \\ &\simeq R\text{Hom}(Rf_! A_{U \times V}, F) \\ &\simeq R\text{Hom}\left(R\Gamma_c(U; A_U) \overset{L}{\otimes} A_V, F\right) \\ &\simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(U; A_U), A) \overset{L}{\otimes} R\text{Hom}(A_V, F) \\ &\simeq R\Gamma(U; \omega_{\mathbb{R}^l}) \overset{L}{\otimes} R\Gamma(V, F). \end{aligned}$$

□

Определение 3.3.3. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — топологическая субмерсия с размерностью слоя l . Положим

$$\text{ог}_{Y/X} = H^{-l}(\omega_{Y/X}),$$

где $\omega_{Y/X}$ — относительный дуализирующий комплекс (определение 3.1.16), и назовем $\text{ог}_{Y/X}$ *относительным ориентирующим пучком*. Если $X = \{\text{pt}\}$ (в этом случае Y является топологическим многообразием), то мы будем писать ог_Y вместо $\text{ог}_{Y/X}$ и назовем ог_Y *ориентирующим пучком на Y* .

Из предложения 3.3.2 следует, что

$$(3.3.2) \quad \omega_{Y/X} \simeq \text{ог}_{Y/X}[l].$$

Предложение 3.3.4. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — топологическая субмерсия с размерностью слоя l .

- (i) Пусть $\omega_{Y/X}^{\mathbb{Z}}$ и $\text{ог}_{Y/X}^{\mathbb{Z}}$ — относительный дуализирующий комплекс и относительный ориентирующий пучок для основного кольца $\mathbb{Z}$. Тогда

$$\omega_{Y/X} \simeq A_Y \otimes_{\mathbb{Z}_Y} \omega_{Y/X}^{\mathbb{Z}} \quad \text{и} \quad \text{ог}_{Y/X} \simeq A_Y \otimes_{\mathbb{Z}_Y} \text{ог}_{Y/X}^{\mathbb{Z}}.$$

- (ii) Существуют канонические изоморфизмы

$$\text{ог}_{Y/X} \otimes \text{ог}_{Y/X} \simeq A_Y,$$

$$\text{Hom}(\text{ог}_{Y/X}, A_Y) \simeq \text{ог}_{Y/X}.$$

- (iii) Пусть $g: Z \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, и предположим, что $f \circ g$ — топологическая субмерсия с размерностью слоя m . Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$. Тогда

$$g^! \circ f^{-1} F \simeq (f \circ g)^{-1} F \otimes \text{ог}_{Z/X} \otimes g^{-1} \text{ог}_{Y/X}[m-l].$$

Доказательство. (i) следует из предложения 3.3.2.

(ii) следует из упр. 3.3.

(iii) Из предложения 3.3.2 и предыдущего результата вытекает, что

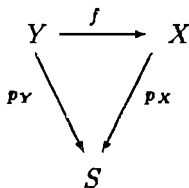
$$(f \circ g)^! F \simeq (f \circ g)^{-1} F \otimes \text{ог}_{Z/X}[m],$$

$$f^! F \simeq f^{-1} F \otimes \text{ог}_{Y/X}[l].$$

Так как $\text{ог}_{Y/X}$ локально изоморфен A_Y , то результат следует из соотношения

$$g^! \circ f^{-1} F \otimes \text{ог}_{Y/X}[l] \simeq g^! \circ f^! F \simeq (f \circ g)^{-1} F \otimes \text{ог}_{Z/X}[m]. \quad \square$$

Замечание 3.3.5. Пусть



— коммутативная диаграмма непрерывных отображений локально компактных пространств. Предположим, что p_X и p_Y являются топологическими субмерсиями с размерностями слоев m и n соответственно. Тогда $f^! A_X \simeq \text{oz}_{Y/S} \otimes f^{-1} \text{oz}_{X/S}[n - m]$ и естественно положить

$$(3.3.3) \quad \text{oz}_{Y/X} = \text{oz}_{Y/S} \otimes f^{-1} \text{oz}_{X/S}.$$

Заметим, что если $g: Z \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, такое, что $p_Y \circ g$ является топологической субмерсией, то

$$(3.3.4) \quad \omega_{Z/X} \simeq \omega_{Z/Y} \otimes g^{-1} \omega_{Y/X} \quad \text{и} \quad \text{oz}_{Z/X} \simeq \text{oz}_{Z/Y} \otimes g^{-1} \text{oz}_{Y/X}.$$

Предложение 3.3.6. Пусть X есть n -мерное C^0 -многообразие.

- (i) oz_X является пучком, ассоциированным с предпучком $U \mapsto \text{Hom}(H_c^n(U; A_X), A)$.
- (ii) Для $x \in X$ существует канонический изоморфизм $\text{oz}_{X,x} \simeq \text{Hom}(H_{\{x\}}^n(X; A_X), A) \simeq H_{\{x\}}^n(X; A_X)$.
- (iii) Пусть X — гладкое и ориентируемое многообразие. Тогда существует изоморфизм $\text{oz}_X \simeq A_X$ и изменение ориентации пространства X меняет знак этого изоморфизма.

Доказательство. (i) Пусть U открыто в X и гомеоморфно $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\begin{aligned}
 R\Gamma(U; \omega_X) &\simeq R\text{Hom}(A_U; \omega_X) \\
 &\simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(X; A_U), A) \\
 &\simeq \text{Hom}(H_c^n(U; A_U), A)[n]
 \end{aligned}$$

ввиду (3.1.7).

(ii) следует из (i) и предложений 3.2.3 и 3.3.4(ii).

(iii) Пусть $X = \bigcup_i U_i$ — покрытие пространства X открытыми множествами, гомеоморфными $\mathbb{R}^n$, с согласованными ориентациями. Тогда изоморфизмы $\phi_{U_i}: \text{oz}_X|_{U_i} \simeq A_{U_i}$ можно склеить (см. лемму 3.3.7 ниже), и ϕ_{U_i} заменяется на $-\phi_{U_i}$ при изменении ориентации (см. предложение 3.2.3). $\square$

Лемма 3.3.7 Пусть $E = \mathbb{R}^n$, и зафиксируем изоморфизм $\sigma_E \simeq A_E$. Пусть U и V открыты в E и $f: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм. Предположим, что якобиан отображения f положителен в каждой точке множества U . Тогда следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccccc} \sigma_U & \xrightarrow{\sim} & \sigma_{E/U} & \xrightarrow{\sim} & A_U \\ \uparrow f_{\sigma_U}^\# & & & & \uparrow f_A^\# \\ f^{-1}(\sigma_V) & \xrightarrow{\sim} & f^{-1}(\sigma_{E/V}) & \xrightarrow{\sim} & f^{-1}(A_V) \end{array}$$

(Здесь морфизмы $f_{\sigma_U}^\#$ и $f_A^\#$ определяются следующим образом. Пусть a_U (соответственно a_V) — проекция множества U (соответственно множества V) на $\{pt\}$. Тогда $f_A^\#$ есть изоморфизм $f^{-1} \circ a_V^{-1} \xrightarrow{\sim} a_U^{-1}$ и $f_{\sigma_U}^\#$ есть изоморфизм $f^{-1} \circ a_V^![-n] \xrightarrow{\sim} f' \circ a_V^![-n] \xrightarrow{\sim} a_U^![-n]$. Заметим, что $f^{-1} \simeq f^!$.)

Доказательство. Достаточно доказать, что для всех $x_0 \in U$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H_{\{f(x_0)\}}^n(E; A_E) & \xrightarrow{f^\#} & H_{\{x_0\}}^n(E; A_E) \\ & \searrow \sim & \swarrow \sim \\ & H_c^n(E; A_E) & \end{array}$$

Мы можем положить $x_0 = f(x_0) = 0$. Положим $u = f'(0)$ и $f_\lambda(x) = u(x) + \lambda(f(x) - u(x))$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Найдем открытые окрестности U' и V' точки 0, такие, что $f_\lambda(U') \subset V'$ и $f_\lambda^{-1}(\{0\}) \cap U' \subset \{0\}$. Так как $u^\#$ действует как единица на $H_{\{0\}}^n(E; A_E)$ (предложение 3.2.3), то из замечания 2.7.6 следует, что то же самое верно для $f^\#$. $\square$

Функтор $f^!$ является композицией ранее введенных функторов. В самом деле, пусть $f: Y \rightarrow X$ — отображение C^0 -многообразий. Представим f как композицию замкнутого вложения и субмерсии, $f = p \circ j$:

$$(3.3.5) \quad f: Y \xhookrightarrow{j} Y \times X \xrightarrow{p} X,$$

где p — проекция, а j — отображение графика, $j(y) = (y, f(y))$. Применяя предложения 3.1.8, 3.1.12 и 3.3.2 к $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$, получаем

$$(3.3.6) \quad f^! F \simeq j^{-1} R\Gamma_{j(Y)}(p^{-1} F) \otimes \sigma_Y[\dim Y].$$

Если $F = A_X$, то

$$(3.3.7) \quad \sigma_{Y/X} \simeq j^{-1}(H_{j(Y)}^{\dim X}(A_{Y \times X})) \otimes \sigma_Y.$$

Если $f = \text{id}_X$, то

$$(3.3.8) \quad \sigma_X \simeq H_X^{\dim X}(A_{X \times X})|_X$$

(где X отождествляется с диагональю в $X \times X$).

Обозначение 3.3.8. В этой книге везде, за исключением § 10.3, под $\dim X$ понимается размерность вещественного многообразия X . Если $f: Y \rightarrow X$ — морфизм C^0 -многообразий, то положим

$$(3.3.9) \quad \dim Y/X = \dim Y - \dim X.$$

Если Y — подмногообразие, то мы также будем использовать обозначение

$$\text{codim}_X Y = -\dim Y/X.$$

Если нет опасности путаницы, то мы будем писать $\text{codim } Y$ вместо $\text{codim}_X Y$. Отметим, что

$$(3.3.10) \quad \omega_{Y/X} \simeq \sigma_{Y/X}[\dim Y/X].$$

Естественно положить

$$(3.3.11) \quad \begin{aligned} \omega_{Y/X}^{\otimes -1} &= R\mathcal{H}om(\omega_{Y/X}, A_Y), \\ &\simeq \sigma_{Y/X}[-\dim Y/X]. \end{aligned}$$

Предложение 3.3.9. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств. Предположим, что

- (i) f — топологическая субмерсия;
- (ii) $Rf_! f^! \mathbb{Z}_X \rightarrow \mathbb{Z}_X$ является изоморфизмом.

Тогда если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathbb{Z}_X))$, то морфизм $F \rightarrow Rf_* f^{-1} F$ является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть l — размерность слоя отображения f . Имеем $f^! F \simeq f^{-1} F \otimes f^! \mathbb{Z}_X$, и $f^! \mathbb{Z}_X$ локально изоморфен $\mathbb{Z}_Y[l]$. Поэтому

$$\begin{aligned} f^{-1} F &\simeq R\mathcal{H}om(f^! \mathbb{Z}_X, f^! F), \\ Rf_* f^{-1} F &\simeq Rf_* R\mathcal{H}om(f^! \mathbb{Z}_X, f^! F) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(Rf_! f^! \mathbb{Z}_X, F) \\ &\simeq F. \end{aligned}$$

□

Замечание 3.3.10. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение локально компактных пространств. Предположим, что f является топологической субмерсией с размерностью слоя l . Тогда условие (ii) предложения 3.3.9 выполняется в том и только в том случае, когда для любого $x \in X$ существует изоморфизм

$$(3.3.12) \quad R\Gamma_c(f^{-1}(x); \omega_{f^{-1}(x)}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

Этот изоморфизм эквивалентен изоморфизму

$$(3.3.13) \quad \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(f^{-1}(x); \mathbb{Z}_{f^{-1}(x)}).$$

Действительно, положим $M = R\Gamma_c(f^{-1}(x); \omega_{f^{-1}(x)})$ и $M^* = R\text{Hom}(M, \mathbb{Z})$. Тогда $M^* \simeq R\Gamma(f^{-1}(x); \mathbb{Z}_{f^{-1}(x)})$ и изоморфизм $M \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ (в категории $\mathbf{D}^b(\text{Mod}(\mathbb{Z}))$) эквивалентен изоморфизму $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} M^*$ (см. упр. 1.31).

Пусть теперь X является C^0 -многообразием размерности n , а a_X — отображение $X \rightarrow \{\text{pt}\}$. Морфизм $Ra_X: a_X^! A_{\{\text{pt}\}} \rightarrow A_{\{\text{pt}\}}$ определяет морфизм

$$(3.3.14) \quad Ra_X! \omega_X \rightarrow A.$$

Беря 0-е когомологии, получаем «морфизм интегрирования», который мы будем обозначать $\int_X$:

$$(3.3.15) \quad \int_X : H_c^n(X; \omega_X) \rightarrow A.$$

С другой стороны, если $A = \mathbb{C}$, а X есть C^∞ -многообразие, то существует морфизм $H_c^n(X; \omega_X) \rightarrow \mathbb{C}$, определяемый следующим образом. Пучок ω_X квазиизоморфен комплексу де Рама (см. § 2.9)

$$0 \longrightarrow C_X^{\infty, (0)} \otimes \omega_X \xrightarrow{d} \dots \longrightarrow C_X^{\infty, (n)} \otimes \omega_X \longrightarrow 0.$$

Так как пучок $C_X^{\infty, (j)} \otimes \omega_X$ C -мягкий, то

$$H_c^n(X; \omega_X) \simeq \Gamma_c(X; C_X^{\infty, (n)} \otimes \omega_X) / d\Gamma_c(X; C_X^{\infty, (n-1)} \otimes \omega_X).$$

Если ϕ — плотность с компактным носителем, т. е. элемент из $\Gamma_c(X; C_X^{\infty, (n)} \otimes \omega_X)$, то $\int_X \phi$ корректно определен и равен 0, если

$\phi = d\psi$ для некоторого $\psi \in \Gamma_c(X; C_X^{\infty, (n-1)} \otimes \mathcal{O}_X)$ по теореме Стокса. Следовательно, $\int_X$ определяет морфизм

$$(3.3.16) \quad \int_X : \Gamma_c(X; C_X^{\infty, (n)} \otimes \mathcal{O}_X) / d\Gamma_c(X; C_X^{\infty, (n-1)} \otimes \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Этот морфизм совпадает с морфизмом (3.3.15) с точностью до знака. Доказательство этого факта мы оставляем читателю в качестве упражнения (упр. 3.20). Отметим, что если X связно, то $H_c^n(X; \mathcal{O}_X) \simeq \text{Hom}(H^0(X; \mathbb{C}_X); \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$, из чего следует, что (3.3.15) и (3.3.16) совпадают с точностью до ненулевой константы.

Морфизм интегрирования мы будем подробно рассматривать в гл. 9. В конце этого параграфа мы дадим оценку для $\text{hd}(\mathcal{M}\text{od}(A_X))$.

Предложение 3.3.11. Пусть X есть C^0 -многообразие размерности n и A — кольцо. Гомологическая размерность категории $\mathcal{M}\text{od}(A_X)$ (см. упр. 1.17) ограничена сверху числом $3n + \text{gld}(A) + 1$.

Доказательство. Пусть $F, G \in \text{Ob}(\mathcal{M}\text{od}(A_X))$. Нам нужно доказать, что

$$(3.3.17) \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}(A_X)}(G, F[j]) = 0 \text{ при } j > 3n + \text{gld}(A) + 1.$$

Пусть δ_X — диагональное вложение $X \hookrightarrow X \times X$. Из предложения 3.1.14 следует, что

$$R\text{Hom}(G, F) \simeq \delta_X^! R\text{Hom}(q_2^{-1}G, q_1^!F).$$

Значит,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{D}(A_X)}(G, F[j]) &\simeq H^j(R\Gamma(X; R\text{Hom}(G, F))) \\ &\simeq H^j(R\Gamma_{\Delta}(X \times X; R\text{Hom}(q_2^{-1}G, q_1^!F))). \end{aligned}$$

Из предложения 3.1.15 следует, что

$$R\Gamma(U \times V; R\text{Hom}(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(U; G), R\Gamma(U; F)).$$

Поэтому $H^j(R\text{Hom}(q_2^{-1}G, q_1^!F)) = 0$ при $j > n + \text{gld}(A)$ (предложение 3.2.2(iv)). Теперь утверждение следует из предложения 3.2.2(v). $\square$

Отметим, что эта оценка далека от наилучшей.

Следствие 3.3.12. Пусть X есть C^0 -многообразие. Тогда $R\text{Hom}(\cdot, \cdot)$ является корректно определенным функтором из $\mathcal{D}^b(A_X)^{\circ} \times \mathcal{D}^b(A_X)$ в $\mathcal{D}^b(A_X)$.
(Напомним, что $\text{gld}(A) < \infty$.)

3.4. Когомологически конструктивные пучки

Пусть X — локально компактное пространство конечной s -мягкой размерности. Напомним (см. упр. 1.30), что объект $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$ называется *совершенным*, если он квазиизоморфен ограниченному комплексу конечно порожденных проективных A -модулей.

Определение 3.4.1. Объект $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$ называется *когомологически конструктивным*, если для любого $x \in X$ выполнены следующие условия:

- (i) $\varinjlim_{x \in U} R\Gamma(U; F)$ и $\varinjlim_{x \in U} R\Gamma_c(U; F)$ являются представимыми функторами (U пробегает семейство открытых окрестностей точки x);
- (ii) $\varinjlim_{x \in U} R\Gamma(U; F) \rightarrow F_x$ и $R\Gamma_{\{x\}}(X; F) \rightarrow \varinjlim_{x \in U} R\Gamma_c(U; F)$ являются изоморфизмами;
- (iii) комплексы F_x и $R\Gamma_{\{x\}}(X; F)$ совершенны.

Определение и свойства $\varinjlim$ и $\varprojlim$ см. в § 11 гл. 1.

Замечание 3.4.2. Заметим, что (ii) следует из (i). На самом деле существование первого изоморфизма очевидно. Чтобы доказать существование второго, возьмем убывающую последовательность $\{K_n\}_n$ компактных окрестностей точки x . Тогда $\varprojlim R\Gamma_c(X; F) \simeq \varprojlim R\Gamma_{K_n}(X; F)$. Поэтому $\varprojlim H_{K_n}^k(X; F)$ представим для любого $k \in \mathbb{Z}$ и проективная система $\{H_{K_n}^k(X; F)\}_n$ удовлетворяет условию М-Л. Из предложения 2.7.1 тогда следует, что $\varprojlim H_{K_n}^k(X; F) \simeq H_{\{x\}}^k(X; F)$.

Предложение 3.4.3. Пусть F когомологически конструктивен. Тогда

- (i) DF когомологически конструктивен (см. определение 3.1.16);
- (ii) $F \rightarrow DDF$ — изоморфизм;
- (iii) $R\Gamma_{\{x\}}(X; DF) \simeq R\text{Hom}(F_x, A)$ и $(DF)_x \simeq R\text{Hom}(R\Gamma_{\{x\}}(X; F), A)$ для любого $x \in X$.

Доказательство. (i) и (iii). Из (3.1.8) следует, что

$$(3.4.1) \quad R\Gamma(U; DF) \simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(U; F), A).$$

Применяя функтор $\varinjlim_{x \in U}$, получаем

$$(3.4.2) \quad \begin{aligned} \varprojlim_{x \in U} R\Gamma(U; DF) &\simeq R\mathrm{Hom} \left(\varprojlim_{x \in U} R\Gamma_c(U; F), A \right) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_{\{x\}}(X; F), A), \end{aligned}$$

что доказывает существование второго изоморфизма в (iii).

Поэтому $\varprojlim_{x \in U} R\Gamma(U; DF)$ представим и совершенен. Пусть K — компактная окрестность точки x и $\overset{\circ}{K}$ — ее внутренность. Имеем

$$\begin{aligned} R\Gamma_K(X; DF) &\simeq R\mathrm{Hom}(A_K, DF) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(F_K, \omega_X) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X; F_K), A). \end{aligned}$$

Применяя функтор $\varprojlim$, получаем

$$\begin{aligned} \varprojlim_{x \in U} R\Gamma_c(U; DF) &\simeq \varprojlim_{x \in \overset{\circ}{K}} R\Gamma_K(X, DF) \\ &\simeq R\mathrm{Hom} \left(\varprojlim_{x \in \overset{\circ}{K}} R\Gamma(X; F_K), A \right) \\ &\simeq R\mathrm{Hom} \left(\varprojlim_{x \in U} R\Gamma(U; F), A \right) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(F_x, A). \end{aligned}$$

Так как последний комплекс совершенен, то существование первого изоморфизма в (iii) доказано.

(ii) По (i) объекты DF и DDF конструктивны. Поэтому для $x \in X$ из (iii) получаем

$$\begin{aligned} (DDF)_x &\simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_{\{x\}}(X; DF), A) \\ &\simeq R\mathrm{Hom}(R\mathrm{Hom}(F_x, A), A) \simeq F_x. \end{aligned}$$

Следовательно, $F \rightarrow DDF$ — изоморфизм. $\square$

Предложение 3.4.4. Пусть X и Y — локально компактные пространства конечной s -мягкой размерности, а q_1 и q_2 — проекции $X \times Y$ на X и Y соответственно. Пусть $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(A_X))$ и $G \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$. Предположим, что F когомологически конструктивен. Тогда

$$DF \boxtimes^L G \rightarrow R\mathrm{Hom}(q_1^{-1}F, q_2^!G)$$

— изоморфизм. Если X есть C^0 -многообразие, то

$$D'F \overset{L}{\boxtimes} G \rightarrow R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G)$$

— изоморфизм.

Доказательство. Достаточно доказать существование первого изоморфизма. Пусть U и V — открытые подмножества в X и Y соответственно. Из предложения 3.1.15 следует, что

$$R\Gamma(U \times V; R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G)) \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_c(U; F), R\Gamma(V; G)).$$

Применяя функтор $\varinjlim_{x \in U}$, получаем

$$\begin{aligned} \varinjlim_{x \in U} R\Gamma(U \times V; R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G)) \\ \simeq R\mathcal{H}om\left(\varinjlim_{x \in U} R\Gamma_c(U; F), R\Gamma(V; G)\right) \\ \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_{\{x\}}(X; F), R\Gamma(V; G)) \\ \simeq R\mathcal{H}om(R\Gamma_{\{x\}}(X; F), A) \overset{L}{\otimes} R\Gamma(V; G) \\ \simeq (DF)_x \overset{L}{\otimes} R\Gamma(V; G). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G) &\simeq q_1^{-1}DF \overset{L}{\otimes} q_2^{-1}G \\ &\simeq q_1^{-1}D'F \overset{L}{\otimes} q_2^!G. \end{aligned}$$

□

Примеры 3.4.5. (i) Пусть X есть C^0 -многообразие, а Y — замкнутое подмногообразие в X размерности p . Тогда A_Y и $R\Gamma_Y(A_X)$ кохомологически конструктивны на X и

$$(3.4.3) \quad D_X(A_Y) \simeq R\Gamma_Y(\omega_X) \simeq \omega_Y.$$

(ii) Пусть X — вещественное конечномерное векторное пространство, а Z — замкнутое (соответственно открытое) выпуклое подмножество в X . Тогда A_Z и $R\Gamma_Z(A_X)$ кохомологически конструктивны на X (см. упр. 3.4).

Предложение 3.4.6. Пусть F и G — когомологически конструктивные объекты из $D^b(X)$. Тогда

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(G, F) &\simeq R\mathcal{H}om(DF, DG) \\ &\simeq D\left(D(F) \overset{L}{\otimes} G\right). \end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства того, что канонический морфизм

$$R\mathcal{H}om(G, F) \rightarrow R\mathcal{H}om(DF, DG)$$

является изоморфизмом, достаточно доказать существование изоморфизма (см. предложение 3.1.14)

$$q_2^{-1} DG \overset{L}{\otimes} q_1^! F \simeq q_1^{-1}(DDF) \overset{L}{\otimes} q_2^! DG,$$

что очевидно.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om\left(DF \overset{L}{\otimes} G, \omega_X\right) &\simeq R\mathcal{H}om(G, R\mathcal{H}om(DF, \omega_X)) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(G, DDF) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(G, F). \end{aligned}$$

□

С конструктивными пучками мы будем встречаться на протяжении всей книги.

3.5. γ -топология

Пусть V — вещественное конечномерное векторное пространство, а γ — замкнутый выпуклый конус в V с вершиной в точке 0. Определим топологию на V , связанную с γ .

Определение 3.5.1. Открытыми множествами в γ -топологии на V являются такие множества Ω , что

- (i) Ω открыто в обычной топологии;
- (ii) $\Omega + \gamma = \Omega$.

Пусть X — подмножество в V . Через X_γ обозначим пространство X с индуцированной γ -топологией, а через ϕ_γ — естественное непрерывное отображение

$$\phi_\gamma : X \rightarrow X_\gamma$$

пространства X (с обычной топологией) в X_γ . Вместо ϕ_γ иногда пишут ϕ_γ^X , чтобы отметить пространство X .

Заметим, что $\{0\}$ -топология — это обычная топология, и если $\gamma_1 \subset \gamma_2$ — два замкнутых выпуклых конуса, то отображение $X_{\gamma_1} \rightarrow X_{\gamma_2}$ непрерывно.

Пример 3.5.2. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\gamma = [0, +\infty[$. Тогда γ -открытыми множествами будут интервалы $]c, +\infty[; -\infty \leq c \leq +\infty$.

Через γ^a мы будем обозначать противоположный конусу γ конус: $\gamma^a = -\gamma$.

Если $\Omega \subset X$, то мы будем называть Ω γ -открытым (соответственно γ -замкнутым, соответственно γ -окрестностью точки x), если Ω открыто (соответственно замкнуто, соответственно является окрестностью точки x) в γ -топологии.

Предложение 3.5.3. Пусть X есть γ -открытое подмножество в V , а F — пучок на X_γ .

- (i) Пусть U — открытое выпуклое подмножество пространства X . Тогда естественный морфизм $R\Gamma(U + \gamma; F) \rightarrow R\Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$ является изоморфизмом.
- (ii) Пусть K — выпуклое компактное подмножество в X . Тогда естественный морфизм $R\Gamma(K + \gamma; \phi_\gamma^{-1}F) \rightarrow R\Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F)$ является изоморфизмом.
- (iii) Естественный морфизм $F \rightarrow R\phi_{\gamma*}\phi_\gamma^{-1}F$ является изоморфизмом.

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

(а) Пусть U выпукло в X , а ψ — естественное отображение $\Gamma(U + \gamma; F) \rightarrow \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$. Докажем, что ψ инъективно. Пусть s — сечение пучка F над $U + \gamma$, такое, что $s_x = 0$ в $(\phi_\gamma^{-1}F)_x$ для всех $x \in U$. Для такого x найдется γ -открытое множество W , содержащее x , такое, что $s_y = 0$ для всех $y \in W$. Поэтому $s_{x+v} = 0$ для всех $x \in U$ и $v \in \gamma$.

Покажем, что ψ сюръективно. Сечение s пучка $\phi_\gamma^{-1}F$ над U определено с помощью открытого покрытия $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ и сечений s_i пучка F над $U_i + \gamma$, таких, что $s_x = s_{i,x}$ для всех $x \in U_i$. Покажем, что если $x \in (U_i + \gamma) \cap (U_j + \gamma)$, то $s_{i,x} = s_{j,x}$. Пусть $x_i \in U_i \cap (x + \gamma^a)$, $x_j \in U_j \cap (x + \gamma^a)$, $x_t = tx_i + (1-t)x_j$ ($t \in [0, 1]$). Тогда $x_t \in U \cap (x + \gamma^a)$. Положим

$$A = \{t \in [0, 1]; \text{ для любого } k \in I, \text{ такого, что } x_t \in U_k, s_{i,x} = s_{k,x}\}.$$

Можно дать другое определение множества A :

$$A = \{t \in [0, 1]; \text{ существует } k \in I, \text{ такое, что если } x_t \in U_k,$$

$$\text{то } s_{i,x} = s_{k,x}\}.$$

Поэтому A открыто, замкнуто и содержит 1, т. е. $A = [0, 1]$. Следовательно, $s_i|_{(U_i+\gamma)\cap(U_j+\gamma)} = s_j|_{(U_i+\gamma)\cap(U_j+\gamma)}$. Поэтому существует $\tilde{s} \in \Gamma(U+\gamma; F)$, такое, что $\tilde{s}|_{U_i+\gamma} = s_i$, а это доказывает сюръективность ψ . То есть мы доказали существование изоморфизма

$$(3.5.1) \quad \Gamma(U+\gamma; F) \simeq \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$$

(в частности, $\Gamma(U+\gamma; F) \simeq \Gamma(U+\gamma; \phi_\gamma^{-1}F)$).

(b) Пусть K компактно и выпукло в X . Из (a) следует, что

$$\varinjlim_U \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F) \rightarrow \Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F)$$

— изоморфизм, где U пробегает семейство γ -открытых окрестностей множества K . Для любого компактного выпуклого множества L , такого, что $K \subset L \subset K+\gamma$, любая γ -окрестность множества K содержит L . Поэтому

$$\Gamma(L; \phi_\gamma^{-1}F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F).$$

Так как $\Gamma(K+\gamma; \phi_\gamma^{-1}F) \simeq \varprojlim_L \Gamma(L; \phi_\gamma^{-1}F)$, то

$$(3.5.2) \quad \Gamma(K+\gamma; \phi_\gamma^{-1}F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F).$$

(c) Естественный морфизм $F \rightarrow \phi_{\gamma*}\phi_\gamma^{-1}F$ является изоморфизмом. В самом деле, если U выпукло и γ -открыто, то

$$\begin{aligned} \Gamma(U; \phi_{\gamma*}\phi_\gamma^{-1}F) &= \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F) \\ &\simeq \Gamma(U; F). \end{aligned}$$

(d) Предположим, что пучок F вялый, Ω выпукло и открыто, а K выпукло и компактно в Ω . Морфизм ограничения $\Gamma(\Omega; \phi_\gamma^{-1}F) \rightarrow \Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F)$ сюръективен по (3.5.1). Применяя предложение 3.2.4, получаем

$$(3.5.3) \quad R^j\Gamma(\Omega; \phi_\gamma^{-1}F) = 0 \text{ при } j \neq 0,$$

из чего следует, что $R^j\Gamma(K; \phi_\gamma^{-1}F)$ и $R^j\phi_{\gamma*}\phi_\gamma^{-1}F$ равны нулю при $j \neq 0$. То есть предложение доказано в предположении вялости пучка F .

(e) Пусть F — пучок на X_γ , а F^* — ограниченный снизу комплекс вялых пучков, квазиизоморфный пучку F . Из (3.5.3) следует, что $R\Gamma(U+\gamma; F) \simeq \Gamma(U+\gamma; F^*) \simeq \Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F^*) \simeq R\Gamma(U; \phi_\gamma^{-1}F)$, что доказывает (i). Доказательства пп. (ii) и (iii) аналогичны. $\square$

Опишем другой метод построения $\phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}F$. Пусть $X = V$. Положим

$$(3.5.4) \quad Z(\gamma) = \{(x, y) \in X \times X; y - x \in \gamma\}.$$

Обозначим через q_1 и q_2 проекции $X \times X$ на сомножители.

Предложение 3.5.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$. Существует естественный изоморфизм

$$Rq_{1*}((q_2^{-1}F)_{Z(\gamma)}) \simeq \phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}F.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{q}_j: Z(\gamma) \rightarrow X$ — ограничение проекции q_j ($j = 1, 2$) на $Z(\gamma)$. Тогда для любого γ -открытого множества Ω имеем

$$\tilde{q}_1^{-1}\Omega = \{(x, y) \in X \times X; x \in \Omega, y \in x + \gamma\} \subset \tilde{q}_2^{-1}\Omega.$$

Поэтому для любого пучка G на $Z(\gamma)$ существует морфизм $(\phi_\gamma \circ \tilde{q}_2)_*G \rightarrow (\phi_\gamma \circ \tilde{q}_1)_*G$, т. е. мы получаем морфизм функторов из $\mathbf{D}^+(Z(\gamma))$ в $\mathbf{D}^+(X_\gamma)$

$$R(\phi_\gamma \circ \tilde{q}_2)_* \rightarrow R(\phi_\gamma \circ \tilde{q}_1)_*.$$

Таким образом, для любого $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$ существует морфизм

$$R\phi_{\gamma*}F \rightarrow R\phi_{\gamma*}R\tilde{q}_{2*}\tilde{q}_2^{-1}F \rightarrow R\phi_{\gamma*}R\tilde{q}_{1*}\tilde{q}_2^{-1}F,$$

что дает

$$(3.5.5) \quad \phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}F \rightarrow R\tilde{q}_{1*}R\tilde{q}_2^{-1}F.$$

Докажем, что это изоморфизм.

Для выпуклого компактного множества K проекция $\tilde{q}_1^{-1}K \rightarrow \tilde{q}_2\tilde{q}_1^{-1}K = K + \gamma$ имеет стягиваемые и собственные слои. Значит (следствие 2.7.7(iv)),

$$R\Gamma(\tilde{q}_1^{-1}K; \tilde{q}_2^{-1}F) \simeq R\Gamma(K + \gamma; F).$$

Таким образом, для любого $x \in X$ и любого целого j

$$\begin{aligned} H^j(R\tilde{q}_{1*}\tilde{q}_2^{-1}F)_x &\simeq \varinjlim_K H^j(R\Gamma(K; R\tilde{q}_{1*}\tilde{q}_2^{-1}F)) \\ &\simeq \varinjlim_K H^j(R\Gamma(\tilde{q}_1^{-1}K; \tilde{q}_2^{-1}F)) \\ &\simeq \varinjlim_K H^j(R\Gamma(K + \gamma; F)) \\ &\simeq H^j(\phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}F)_x, \end{aligned}$$

где K пробегает семейство выпуклых компактных окрестностей точки x , а это показывает, что (3.5.5) — изоморфизм. $\square$

3.6. Ядра

Пусть X и Y — локально компактные пространства конечной c -мягкой размерности. Пусть q_1 и q_2 обозначают проекции пространства $X \times Y$ на X и Y соответственно. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$.

Определение 3.6.1. Определим функторы $\Phi_K: \mathbf{D}^+(Y) \rightarrow \mathbf{D}^+(X)$ и $\Psi_K: \mathbf{D}^+(X) \rightarrow \mathbf{D}^+(Y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_K(G) &= Rq_{1!} \left(K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right), \\ \Psi_K(F) &= Rq_{2*} R\mathcal{H}om(K, q_1^! F).\end{aligned}$$

Предложение 3.6.2. Существует изоморфизм бифункторов, определенных на $\mathbf{D}^+(Y)^\circ \times \mathbf{D}^+(X)$,

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X)}(\Phi_K(\cdot), \cdot) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(Y)}(\cdot, \Psi_K(\cdot)).$$

Другими словами, Ψ_K и Φ_K сопряжены.

Доказательство. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(Y))$. Тогда

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X)}(\Phi_K(G), F) &= \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X)} \left(Rq_{1!} \left(K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right), F \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X \times Y)} \left(K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G, q_{1!} F \right) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(X \times Y)}(q_2^{-1} G, R\mathcal{H}om(K, q_1^! F)) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^+(Y)}(G, Rq_{2*} R\mathcal{H}om(K, q_1^! F)). \quad \square\end{aligned}$$

Предложение 3.6.3. Пусть $X = Y$ и $K = A_\Delta$, где Δ — диагональ в $X \times X$. Тогда Φ_K и Ψ_K изоморфны функтору id в $\mathbf{D}^+(X)$.

Доказательство. Из предложения 3.1.14 следует, что

$$\begin{aligned}F &\simeq Rq_{2*} R\Gamma_\Delta R\mathcal{H}om(q_2^{-1} A_X, q_1^! F) \\ &\simeq Rq_{2*} R\mathcal{H}om(A_\Delta, q_1^! F) \\ &\simeq \Psi_K(F).\end{aligned}$$

Так как $A_\Delta \otimes q_2^{-1} G \simeq (q_2^{-1} G)_\Delta$, то $\Phi_K(G) \simeq G$. □

Пусть Z — еще одно локально компактное пространство конечной c -мягкой размерности. Обозначим через q'_1 и q'_2 (соответственно q''_1

и q_2'') проекции пространства $X \times Y \times Z$ (соответственно $Y \times Z$) на X и Z (соответственно на Y и Z). Через q_{ij} мы будем обозначать (i, j) -ю проекцию пространства $X \times Y \times Z$ (так, q_{13} — это проекция на $X \times Z$).

$$(3.6.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & X \times Y \times Z & & \\ & \swarrow q_{12} & \downarrow q_{13} & \searrow q_{23} & \\ X \times Y & & X \times Z & & Y \times Z \\ \downarrow q_1 & \swarrow q_2 & \swarrow q_1' & \searrow q_2' & \downarrow q_2'' \\ & X & & Y & Z \end{array}$$

Предложение 3.6.4. Пусть $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$, и пусть $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$. Положим

$$K = Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right).$$

Тогда $\Psi_{K_2} \circ \Psi_{K_1} \simeq \Psi_K$ и $\Phi_{K_1} \circ \Phi_{K_2} \simeq \Phi_K$.

Доказательство. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_{K_2} \circ \Psi_{K_1}(F) &= Rq_{2*}'' R\mathcal{H}om(K_2, q_1'' Rq_{2*} R\mathcal{H}om(K_1, q_1' F)) \\ &\simeq Rq_{2*}'' R\mathcal{H}om(K_2, Rq_{23*} q_{12}' R\mathcal{H}om(K_1, q_1' F)) \\ &\simeq Rq_{2*}'' Rq_{23*} R\mathcal{H}om(q_{23}^{-1} K_2, R\mathcal{H}om(q_{12}^{-1} K_1, q_{12}' q_1' F)) \\ &\simeq Rq_{2*}' Rq_{13*} R\mathcal{H}om \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2, q_{13}' q_1' F \right) \\ &\simeq Rq_{2*}' R\mathcal{H}om \left(Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right), q_1'' F \right) \\ &= \Psi_K(F). \end{aligned}$$

Доказательство существования второго изоморфизма аналогично. $\square$

Положим

$$(3.6.2) \quad K_1 \circ K_2 + Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} K_2 \right).$$

Следствие 3.6.5. Предположим, что $Z = X$, $K_2 \circ K_1 \simeq A_{\Delta_X}[l]$ и $K_1 \circ K_2 \simeq A_{\Delta_Y}[l']$ для некоторых l и l' (Δ_X и Δ_Y обозначают диагонали в $X \times X$ и $Y \times Y$ соответственно). Тогда Φ_{K_1} , Φ_{K_2} , Ψ_{K_1} и Ψ_{K_2} являются эквивалентностями категорий.

Отметим, что в этом случае $l = l'$, если $X \neq \emptyset$.

Пример 3.6.6. Пусть $\tau: E \rightarrow X$ — вещественное векторное расслоение над локально компактным пространством X с размерностью слоя n . Пусть $\pi: E^* \rightarrow X$ — двойственное расслоение. Обозначим через $\dot{E}$ (соответственно $\dot{E}^*$) пространство E (соответственно E^*) с удаленным нулевым сечением. Положим

$$(3.6.3) \quad S = \dot{E}/\mathbb{R}^+, \quad S^* = \dot{E}^*/\mathbb{R}^+.$$

Проекции пространств S и S^* на X являются топологическими субмерсиями с размерностью слоя $n - 1$. Определим множества

$$(3.6.4) \quad \begin{cases} D = \left\{ (x, y) \in S \times_X S^*; \langle x, y \rangle \geq 0 \right\}, \\ I = \left\{ (y, x) \in S^* \times_X S; \langle y, x \rangle > 0 \right\} \end{cases}$$

и объекты из $\mathbf{D}^b(S \times S^*)$ и $\mathbf{D}^b(S^* \times S)$

$$(3.6.5) \quad \begin{cases} K_1 = A_D \otimes \omega_{S^*/X}, \\ K_2 = A_I. \end{cases}$$

Предложение 3.6.7. *Имеем*

$$\begin{aligned} K_1 \circ K_2 &\simeq A_{\Delta_S} \quad \text{в } \mathbf{D}^b(S \times S), \\ K_2 \circ K_1 &\simeq A_{\Delta_{S^*}} \quad \text{в } \mathbf{D}^b(S^* \times S^*). \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через p_{ij} (i, j) -ю проекцию пространства $S \times S^* \times S$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & S \times S^* \times S & & \\ & \swarrow p_{12} & \downarrow p_{13} & \searrow p_{23} & \\ S \times S^* & & S \times S & & S^* \times S. \end{array}$$

Положим $L = p_{12}^{-1}(D) \cap p_{23}^{-1}(I)$. Тогда $K_1 \circ K_2 \simeq R p_{13!}(A_L \otimes \omega_{S^*/X})$.

Пусть $(x, x') = z \in S \times S$. Если $z \notin S \times_X S$, то $p_{13}^{-1}(z) \cap L = \emptyset$. Если $z \in S \times_X S$, но $z \notin S \times_S S$, то $p_{13}^{-1}(z) \cap L$ гомеоморфно замкнутому полупространству в $\mathbb{R}^{n-1}$ или пусто. Поэтому в этом случае $(K_1 \circ K_2)_z = 0$.

Пусть $U = p_{13}^{-1}(\Delta_S) \cap L$. Так как $(Rp_{13}; A_L)_{\Delta_S} \simeq Rp_{13}; (A_U)$, а отображение $U \rightarrow \Delta_S$ изоморфно отображению $\pi: I \rightarrow S$, то получаем

$$K_1 \circ K_2|_{\Delta_S} \simeq R\pi_!(A_I \otimes \omega_{S^*/X}) \simeq R\pi_!\pi^! A_S.$$

Отображение $\pi: I \rightarrow S$ изоморфно проекции $S \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow S$ локально на S . Поэтому $R\pi_!\pi^! A_S \rightarrow A_S$ — изоморфизм.

Доказательство для случая $K_2 \circ K_1$ аналогично. $\square$

Из следствия 3.6.5 вытекает, что Φ_{K_1} , Φ_{K_2} , Ψ_{K_1} и Ψ_{K_2} являются эквивалентностями категорий.

3.7. Преобразование Фурье—Сато

Введем понятие *конического пучка*. Пусть $\mathbb{R}^+$ — мультипликативная группа положительных вещественных чисел, а X — локально компактное пространство с действием $\mathbb{R}^+$ на нем. Другими словами, существует непрерывное отображение

$$\mu: X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X,$$

такое, что для любого $x \in X$ и любых t_1 и $t_2 \in \mathbb{R}^+$

$$(3.7.1) \quad \begin{cases} \mu(x, t_1, t_2) = \mu(\mu(x, t_1), t_2), \\ \mu(x, 1) = x. \end{cases}$$

Определение 3.7.1. (i) Обозначим через $\mathcal{M}od_{\mathbb{R}^+}(A_X)$ полную подкатегорию в $\mathcal{M}od(A_X)$, состоящую из пучков $\bar{F}$, таких, что $F|_b$ — локально постоянный пучок для любой $\mathbb{R}^+$ -орбиты $b \subset X$.

(ii) Обозначим через $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(A_X)$ (или просто через $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(X)$) полную подкатегорию в $\mathbf{D}^+(A_X)$, состоящую из таких объектов F , что $H^j(F) \in \mathcal{M}od_{\mathbb{R}^+}(A_X)$ для всех $j \in \mathbb{Z}$.

(iii) Объект, принадлежащий $\mathcal{M}od_{\mathbb{R}^+}(A_X)$ (соответственно $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(X)$), называется *коническим объектом*.

Рассмотрим отображения

$$(3.7.2) \quad X \xrightarrow{j} X \times \mathbb{R}^+ \xrightleftharpoons[p]{\mu} X,$$

где $j(x) = (x; 1)$, а p — проекция. Существуют естественные морфизмы

$$(3.7.3) \quad \mu^{-1}F \xleftarrow{\alpha} p^{-1}Rp_*\mu^{-1}F \xrightarrow{\beta} p^{-1}F,$$

где β определяется значением в 1:

$$Rp_*\mu^{-1}F \rightarrow Rp_*Rj_*j^{-1}\mu^{-1}F \simeq F.$$

Предложение 3.7.2. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+_{\mathbb{R}^+}(X))$;
- (ii) морфизмы α и β в (3.7.3) являются изоморфизмами;
- (iii) $H^j(\mu^{-1}F)$ локально постоянен на слоях расслоения p для всех $j \in \mathbb{Z}$;
- (iv) $\mu^{-1}F \simeq p^{-1}F$;
- (v) $\mu^!F \simeq p^!F$.

Доказательство. Эквивалентности (iv) $\iff$ (v) и (i) $\iff$ (iii) очевидны, как и импликации (ii) $\Rightarrow$ (iv) и (iv) $\Rightarrow$ (iii). Наконец, импликация (iii) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из следствия 2.7.7. $\square$

Следствие 3.7.3. Пусть U открыто в X . Предположим, что $b \cap U$ стягиваемо (в частности, непусто) для любой $\mathbb{R}^+$ -орбиты $b \subset X$. Тогда для $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+_{\mathbb{R}^+}(X))$ морфизм ограничения $R\Gamma(X; F) \rightarrow R\Gamma(U; F)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть $\mu': U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ — ограничение отображения μ . Тогда μ' имеет стягиваемые слои. Применяя предложение 3.3.9, получаем

$$F \simeq R_{\mu'_*}\mu'^{-1}F.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R\Gamma(X; F) &\simeq R\Gamma(U \times \mathbb{R}^+; \mu'^{-1}F) \\ &\simeq R\Gamma(U \times \mathbb{R}^+; p^{-1}F) \\ &\simeq R\Gamma(U; F). \end{aligned}$$

$\square$

Пусть X и Y — пространства с действием группы $\mathbb{R}^+$ на них. Тогда $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ действует на $X \times Y$. Мы оставляем читателю задачу «правильного» определения категории $\mathbf{D}^+_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}(X \times Y)$ и понятия биконического пучка.

Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+_{\mathbb{R}^+}(X))$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+_{\mathbb{R}^+}(Y))$, то имеет место включение $F \boxtimes^L G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}(X \times Y))$. Отметим, что биконический пучок является коническим: действие группы $\mathbb{R}^+$ на $X \times Y$ задается диагональным вложением $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Пусть теперь $f: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Предположим, что $f_!$ имеет конечную когомологическую размерность и f

перестановочно с действием группы $\mathbb{R}^+$. Получаем коммутативную диаграмму

$$(3.7.4) \quad \begin{array}{ccccc} Y & \xleftarrow{\mu} & Y \times \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ f \downarrow & & \tilde{f} \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xleftarrow{\mu} & X \times \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{p_X} & X \end{array}$$

Предложение 3.7.4. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(X))$. Тогда объекты $f^{-1}F$ и $f^!F$ являются коническими.

(ii) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(Y))$. Тогда объекты Rf_*G и $Rf_!G$ являются коническими.

(iii) Пусть $F_1, F_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(X))$. Тогда объект $F_1 \otimes^L F_2$ является коническим. Если $F_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(X))$, то объект $R\mathcal{H}om(F_1, F_2)$ является коническим.

Доказательство. Мы будем использовать предложение 3.7.2.

(i) Имеют место изоморфизмы

$$\mu^{-1}f^{-1}F \simeq \tilde{f}^{-1}\mu^{-1}F \simeq \tilde{f}^{-1}p_X^{-1}F \simeq p_Y^{-1}f^{-1}F,$$

т. е. объект $f^{-1}F$ конический. Доказательство для $f^!$ аналогично.

(ii) Имеем изоморфизмы

$$\mu^!Rf_*G \simeq R\tilde{f}_*\mu^!G \simeq R\tilde{f}_*p_Y^!G \simeq p_X^!Rf_*G,$$

т. е. объект Rf_*G конический. Доказательство для $Rf_!$ аналогично.

(iii) Имеем

$$\begin{aligned} \mu^{-1}\left(F_1 \otimes^L F_2\right) &\simeq \mu^{-1}F_1 \otimes^L \mu^{-1}F_2 \\ &\simeq p^{-1}F_1 \otimes^L p^{-1}F_2 \\ &\simeq p^{-1}\left(F_1 \otimes^L F_2\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^!R\mathcal{H}om(F_1, F_2) &\simeq R\mathcal{H}om(\mu^{-1}F_1, \mu^!F_2) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(p^{-1}F_1, p^!F_2) \\ &\simeq p^!R\mathcal{H}om(F_1, F_2). \end{aligned}$$

□

Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — вещественное векторное расслоение с размерностью слоя n над локально компактным пространством Z .

Мы отождествляем Z с нулевым сечением пространства E и обозначим через $i: Z \hookrightarrow E$ соответствующее вложение. Положим

$$(3.7.5) \quad \dot{E} = E \setminus Z, \quad \dot{\tau} = \tau|_{\dot{E}}.$$

Обозначим через a антиподальное отображение $x \rightarrow -x$ на E , и если $A \subset E$, то через A^a мы обозначим образ подмножества A при действии a . Назовем подмножество $A \subset E$ *выпуклым* (соответственно *коническим*, соответственно *собственным конусом*), если для любого $z \in Z$ множество $\tau^{-1}(Z) \cap A$ выпукло (соответственно является коническим, соответственно является собственным конусом). Напомним, что конус называется *собственным*, если он не содержит прямых.

Предложение 3.7.5. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{Z}}^+(E))$. Тогда

- (i) $R\tau_* F \simeq i^{-1} F$,
- (ii) $R\eta F \simeq i^! F$.

Доказательство. (i) Морфизм $\tau^{-1} R\tau_* F \rightarrow F$ определяет морфизм $R\tau_* F \simeq i^{-1} \tau^{-1} R\tau_* F \rightarrow i^{-1} F$. Чтобы убедиться в том, что это изоморфизм, возьмем $z \in Z$, и пусть U — открытая выпуклая окрестность точки $i(z)$. Тогда по следствию 3.7.3

$$\begin{aligned} R\Gamma(U; F) &\simeq R\Gamma(\mathbb{R}^+ U; F) \\ &\simeq R\Gamma(\tau(U); R\tau_* F). \end{aligned}$$

Беря когомологии обеих частей и переходя к индуктивным пределам по семейству открытых выпуклых окрестностей точки $i(z)$, получаем требуемый результат.

(ii) Морфизм $i^! F \rightarrow F$ определяет морфизм

$$i^! F \simeq R\eta i^! F \rightarrow R\eta F.$$

Чтобы доказать, что это изоморфизм, будем рассуждать, как в п. (i). Пусть U — открытая выпуклая окрестность открытого множества $V \subset Z$, такая, что отображение $\tau^{-1} V \cap \bar{U} \rightarrow V$ собственнo. Тогда по следствию 3.7.3

$$R\Gamma_Z(\tau^{-1} V; F) \simeq R\Gamma_{\bar{U}}(\tau^{-1} V; F).$$

Беря когомологии обеих частей и индуктивные пределы по семейству открытых множеств из $\tau^{-1} V$, удовлетворяющих перечисленным

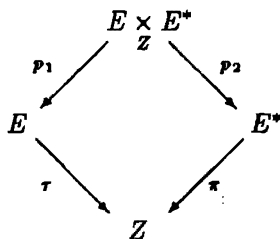
выше условиям, получаем, что $R\Gamma(V; i^!F) \simeq R\Gamma(V; R\eta F)$, откуда $i^!F \simeq R\eta F$. $\square$

Пусть $\pi: E^* \rightarrow Z$ — двойственное расслоение. Аналогично определим вложение $i: Z \hookrightarrow E^*$, а также E^* и π .

Если $A \subset E$, то *полярное множество* A° определяется следующим образом:

$$(3.7.6) \quad A^\circ = \{y \in E^*; \pi(y) \in \tau(A) \text{ и } \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ для всех } x \in \tau^{-1}\pi(y) \cap A\}.$$

Обозначим через p_1 и p_2 проекции произведения $E \times_Z E^*$:



Рассмотрим множества

$$\begin{aligned}
 P &= \left\{ (x, y) \in E \times_Z E^*; \langle x, y \rangle \geq 0 \right\}, \\
 P' &= \left\{ (x, y) \in E \times_Z E^*; \langle x, y \rangle \leq 0 \right\}
 \end{aligned}$$

и функторы (см. § 3.6)

$$(3.7.7) \quad \begin{cases} \tilde{\Psi}_{P'} = Rp_{1*} \circ R\Gamma_{P'} \circ p_2^!, \\ \tilde{\Phi}_{P'} = Rp_{2!} \circ (\cdot)_{P'} \circ p_1^{-1}, \\ \tilde{\Psi}_P = Rp_{2*} \circ R\Gamma_P \circ p_1^{-1}, \\ \tilde{\Phi}_P = Rp_{1!} \circ (\cdot)_P \circ p_2^!. \end{cases}$$

Из предложения 3.7.4 следует, что эти функторы являются корректно определенными функторами из $D_{\mathbb{R}+}^+(E)$ в $D_{\mathbb{R}+}^+(E^*)$ и из $D_{\mathbb{R}+}^+(E^*)$ в $D_{\mathbb{R}+}^+(E)$.

Пусть $\sigma_{E/Z}$ — относительный ориентирующий пучок пространства E над Z . Так как этот пучок постоянен на слоях расслоения τ , то мы иногда будем отождествлять $\sigma_{E/Z}$ и его ограничение на Z . Заметим,

что $\sigma_{E/Z}|_Z \simeq \sigma_{Z/E}$ (где $Z \rightarrow E$ — нулевое вложение). Пучки $\sigma_{Z/E}$ и σ_{Z/E^*} естественно изоморфны, потому что ориентация векторного пространства задает ориентацию двойственного пространства (см. замечание 3.7.11 ниже).

Для изучения функторов (3.7.7) нам понадобится лемма.

Лемма 3.7.6. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E))$. Тогда $\text{supp}((R\Gamma_P(p_1^{-1}F))_{P'})$ содержится в $Z \times_Z E^* \subset E \times_Z E^*$.

Доказательство. Пусть $U = E \times_Z E^* \setminus Z \times_Z E^*$. Локально на U проекция p_1 изоморфна проекции $\mathbb{R}^n \times E \rightarrow E$, а множества P и P' локально изоморфны множествам $\{x_1 \geq 0\}$ и $\{x_1 \leq 0\}$ соответственно, где x_1 обозначает первую координату пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому для доказательства того, что $(R\Gamma_P(p_1^{-1}F))_{P'}$ равно нулю на U , достаточно показать, что если (а) X локально компактно; (б) p — проекция $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$; (с) t — координата на $\mathbb{R}$, то

$$(3.7.8) \quad (R\Gamma_{\{t \geq 0\}}(p^{-1}G))_{\{t=0\}} = 0$$

для любого $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$. Так как $p^{-1}G$ является коническим на расслоении $X \times \mathbb{R}$ над X , то

$$(R\Gamma_{\{t \geq 0\}}(p^{-1}G))|_{t=0} \simeq Rp_* R\Gamma_{\{t \geq 0\}}(p^{-1}G).$$

Теперь достаточно доказать, что $Rp_* R\Gamma_{\{t \geq 0\}}(p^{-1}G)$ равен нулю. Но $Rp_* R\Gamma_{\{t \geq 0\}}(p^{-1}G) \simeq R\text{Hom}(Rp_* A_{\{t \geq 0\}}, G)$ и $Rp_* A_{\{t \geq 0\}} = 0$. $\square$

Теорема 3.7.7. Функторы $\tilde{\Phi}_{P'}$ и $\tilde{\Psi}_P$ из $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E)$ в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E^*)$ естественно изоморфны.

Доказательство. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E))$. Существуют изоморфизмы

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{P'} &= Rp_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'} \\ &\simeq Rp_{2!}R\Gamma_P((p_1^{-1}F)_{P'}) \\ &\simeq Rp_{2!}((R\Gamma_P(p_1^{-1}F))_{P'}) \\ &\simeq Rp_{2*}((R\Gamma_P(p_1^{-1}F))_{P'}) \\ &\simeq Rp_{2*}R\Gamma_P(p_1^{-1}F). \end{aligned}$$

В самом деле, существование первого изоморфизма вытекает из предложения 3.7.5(ii), существование второго — из упр. 2.2, существование третьего — из леммы 3.7.6 и существование последнего — из предложения 3.7.5(i). $\square$

Из этого следует, что функторы $\tilde{\Phi}_P$ и $\tilde{\Psi}_{P'}$ изоморфны.

Определение 3.7.8. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E))$. Положим

$$\begin{aligned} F^\wedge &= \tilde{\Phi}_{P'}(F) (= R p_{2!}(p_1^{-1} F)_{P'}) \\ &(\simeq \tilde{\Psi}_P(F) = R p_{2*} R \Gamma_P(p_1^{-1} F)) \end{aligned}$$

и назовем $F^\wedge$ *преобразованием Фурье–Сато* объекта F .

Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E^*))$. Положим

$$\begin{aligned} G^\vee &= \tilde{\Psi}_{P'}(G) (= R p_{1*} R \Gamma_{P'}(p_2^! G)) \\ &(\simeq \tilde{\Phi}_P(G) = R p_{1!}(p_2^! G)_P) \end{aligned}$$

и назовем $G^\vee$ *обратным преобразованием Фурье–Сато* объекта G .

Разумеется, такими же формулами, поменяв E и E^* местами, можно определить $F^\vee$ и $G^\wedge$. Отметим, что

$$(3.7.9) \quad F^\vee \simeq (F^\wedge)^a \otimes \text{oz}_{E^*/Z}[n] \simeq (F^\wedge)^a \otimes \omega_{E^*/Z},$$

где $(F^\wedge)^a$ — обратный образ объекта $F^\wedge$ при действии антиподального отображения a на E^* .

В самом деле, справедливость формулы (3.7.9) вытекает прямо из определений, так как $p_1^! F \simeq p_1^{-1} F \otimes \omega_{E \times_Z E^*}/E$.

Теорема 3.7.9. Функтор $^\wedge$ из $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E)$ в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E^*)$ и functor $^\vee$ из $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E^*)$ в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E)$ являются эквивалентностями категорий и обратны друг другу. В частности, если F и F' принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E)$, то

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E)}(F', F) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E^*)}(F'^\wedge, F^\wedge).$$

Доказательство. Из предложения 3.6.2 и теоремы 3.7.8 следует, что $\tilde{\Phi}_{P'}$ и $\tilde{\Psi}_{P'}$ — сопряженные функторы. Функторы $\tilde{\Phi}_P$ и $\tilde{\Psi}_P$ также становятся сопряженными после выбора изоморфизма $\text{oz}_{Z/E} \simeq \text{oz}_{Z/E^*}$. Поэтому если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E))$, то мы получаем морфизм

$$(3.7.10) \quad F \rightarrow F^{\wedge\vee}.$$

Чтобы доказать, что (3.7.10) — изоморфизм, достаточно доказать, что для каждого выпуклого открытого множества $U \subset E$ этот морфизм индуцирует изоморфизм

$$H^j(U; F) \simeq H^j(U; F^{\wedge\vee}).$$

По следствию 3.7.3 мы можем считать U выпуклым открытым конусом. В этом случае

$$\begin{aligned}
 H^j(U; F^{\wedge \vee}) &= \text{Hom}_{D_{\mathbb{N}^+}^+(E)}(A_U, \tilde{\Psi}_{P'} \tilde{\Phi}_{P'}(F)[j]) \\
 &\simeq \text{Hom}_{D_{\mathbb{N}^+}^+(E^*)}(\tilde{\Phi}_{P'}(A_U), \tilde{\Phi}_{P'}(F)[j]) \\
 &\simeq \text{Hom}_{D_{\mathbb{N}^+}^+(E^*)}(\tilde{\Phi}_{P'}(A_U), \tilde{\Psi}_P(F)[j]) \\
 &\simeq \text{Hom}_{D_{\mathbb{N}^+}^+(E)}(\tilde{\Phi}_P \tilde{\Phi}_{P'}(A_U), F[j]) \\
 &\stackrel{\alpha}{\simeq} \text{Hom}_{D_{\mathbb{N}^+}^+(E)}(A_U, F[j]).
 \end{aligned}$$

Здесь α индуцируется морфизмами $\tilde{\Phi}_P \tilde{\Phi}_{P'}(A_U) \simeq \tilde{\Phi}_P \tilde{\Psi}_P(A_U) \rightarrow A_U$. Следовательно, достаточно доказать, что $\tilde{\Phi}_P \tilde{\Psi}_P(A_U)$ изоморфен A_U . Этот факт доказывается в лемме 3.7.10 ниже. Аналогично доказывается, что морфизм $G^{\vee \wedge} \rightarrow G$ является изоморфизмом для $G \in \text{Ob}(D_{\mathbb{N}^+}^+(E^*))$. $\square$

Лемма 3.7.10. (i) Пусть γ — собственный замкнутый выпуклый конус в E , содержащий нулевое сечение. Тогда

$$(A_\gamma)^\wedge \simeq A_{\text{Int } \gamma^\circ}.$$

(ii) Пусть U — выпуклый открытый конус в E . Тогда

$$(A_U)^\wedge \simeq A_{U^{\circ\circ}} \otimes \text{oz}_{E^*}[-n].$$

Доказательство. (i) Пусть $y \in E^*$. Тогда

$$\begin{aligned}
 ((A_\gamma)^\wedge)_y &\simeq R\Gamma_c(p_2^{-1}(y); A_{(\gamma \times_Z E^*) \cap P'}) \\
 &\simeq R\Gamma_c(p_1(p_2^{-1}(y) \cap P') \cap \gamma; A_E).
 \end{aligned}$$

Положим $\gamma_y = p_1(p_2^{-1}(y) \cap P') \cap \gamma$. Если $y \notin \text{Int } \gamma^\circ$, то γ_y — собственный замкнутый выпуклый конус, содержащий полупрямую. Тогда так как $\tau^{-1}(\pi(y))$ и $\tau^{-1}(\pi(y)) \setminus \gamma_y$ гомеоморфны, то $((A_\gamma)^\wedge)_y = 0$. Если $y \in \text{Int } \gamma^\circ$, то $\gamma_y = \{0\}$ и отображение $((A_\gamma)^\wedge)_y \rightarrow ((A_Z)^\wedge)_y$ является изоморфизмом. Это показывает, что $(A_\gamma)^\wedge \simeq ((A_Z)^\wedge)_{\text{Int } \gamma^\circ}$, из чего следует (i), поскольку $(A_Z)^\wedge \simeq A_{E^*}$.

(ii) Доказательство аналогично. Имеем

$$\begin{aligned}
 ((A_U)^\wedge)_y &\simeq R\Gamma_c(p_2^{-1}(y); A_{(U \times E^*) \cap P'}) \\
 &\simeq R\Gamma_c(p_1(p_2^{-1}(y) \cap P') \cap U; A_E).
 \end{aligned}$$

Положим $\gamma_y = p_1(p_2^{-1}(y) \cap P') \cap U$. Если $y \notin U^{\circ a}$, то $\gamma_y = \emptyset$ и $((A_U)^\wedge)_y = 0$. Если $y \in U^{\circ a}$, то морфизм $((A_U)^\wedge)_y \rightarrow (Rp_2! A_{E \times_Z E^*})_y$ является изоморфизмом.

Следовательно, $(A_U)^\wedge \simeq (Rp_2! A_{E \times_Z E^*})_{U^{\circ a}}$. Так как

$$Rp_2! A_{E \times_Z E^*} \simeq \mathcal{O}_{E^*}/Z[-n],$$

то (ii) доказано. □

Замечание 3.7.11. Так как $\tilde{\Phi}_{P'}$ и $\tilde{\Psi}_{P'}$, а также $\tilde{\Phi}_P$ и $\tilde{\Psi}_P$ сопряжены, то существуют морфизмы

$$\alpha'(F) : F \rightarrow \tilde{\Psi}_{P'} \tilde{\Phi}_{P'}(F),$$

$$\beta'(G) : \tilde{\Phi}_{P'} \tilde{\Psi}_{P'}(G) \rightarrow G,$$

$$\alpha(G) : G \rightarrow \tilde{\Psi}_P \tilde{\Phi}_P(G),$$

$$\beta(F) : \tilde{\Phi}_P \tilde{\Psi}_P(F) \rightarrow F.$$

Чтобы определить $\alpha(G)$ и $\beta(F)$, нам нужно отождествить $R\tau_* \omega_{E/Z}$ и $R\pi_* \omega_{E^*/Z}$. Мы сделаем это следующим образом (задача локальна).

Выберем отрицательно определенную симметрическую форму на E . Тогда определяемый ею изоморфизм $E \xrightarrow{\sim} E^*$ определяет и изоморфизм между $R\tau_* \omega_{E/Z}$ и $R\pi_* \omega_{E^*/Z}$.

После отождествления $\tilde{\Phi}_{P'}$ и $\tilde{\Psi}_P$, а также $\tilde{\Phi}_P$ и $\tilde{\Psi}_{P'}$ (теорема 3.7.7) мы можем показать, что $\alpha'(F)$ (соответственно $\alpha(G)$) и $\beta(F)$ (соответственно $\beta'(G)$) взаимно обратны. Доказательства мы опускаем.

Суммируем свойства преобразования Фурье–Саго.

Предложение 3.7.12. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{A}^+}^+(E))$.

(i) $F^{\wedge\wedge} \simeq F^a \otimes \mathcal{O}_{E/Z}[-n]$.

(ii) Пусть U — открытый выпуклый конус в E^* . Тогда

$$R\Gamma(U; F^\wedge) \simeq R\Gamma_{U^\circ}(\tau^{-1}\pi(U); F) \simeq R\Gamma_{U^\circ}(E; F).$$

(iii) Пусть γ — собственный замкнутый выпуклый конус в E^* , содержащий нулевое сечение. Тогда

$$R\Gamma_\gamma(E^*; F^\wedge) \simeq R\Gamma(\text{Int } \gamma^a; F) \otimes \mathcal{O}_{E/Z}[-n].$$

(iv) Имеем

$$(D'F)^\vee \simeq D'(F^\wedge), \quad (DF)^\vee \simeq D(F^\wedge).$$

Доказательство. (i), (ii), (iii) являются следствиями ранее доказанных утверждений.

(iv) Мы имеем

$$\begin{aligned}
 R\mathcal{H}om(F^\wedge, A_{E^\bullet}) &= R\mathcal{H}om(Rp_{2!}(p_1^{-1}F)_{P'}, A_{E^\bullet}) \\
 &\simeq Rp_{2*}R\mathcal{H}om((p_1^{-1}F)_{P'}, p_2^!A_{E^\bullet}) \\
 &\simeq Rp_{2*}R\mathcal{H}om((p_1^{-1}F)_{P'}, p_1^{-1}\omega_{E/Z}) \\
 &\simeq Rp_{2*}R\Gamma_{P'}(p_1^!(D'F)) \\
 &\simeq (D'F)^\vee.
 \end{aligned}$$

Доказательство для D аналогично. $\square$

Изучим функториальные свойства преобразования Фурье–Сато.

Пусть Z' — локально компактное пространство и $f: Z' \rightarrow Z$ — непрерывное отображение. Положим $E' = Z' \times_Z E$ и обозначим через f_τ (соответственно f_π) отображение из E' в E (соответственно из E'^* в E^*), индуцированное f .

Предложение 3.7.13. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E))$. Тогда

$$\begin{aligned}
 (f_\tau^!F)^\wedge &\simeq f_\pi^!(F^\wedge), \\
 (f_\tau^{-1}F)^\wedge &\simeq f_\pi^{-1}(F^\wedge).
 \end{aligned}$$

(ii) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E'))$. Тогда

$$\begin{aligned}
 (Rf_{\tau*}G)^\wedge &\simeq Rf_{\pi*}(G^\wedge), \\
 (Rf_{\tau!}G)^\wedge &\simeq Rf_{\pi!}(G^\wedge).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим диаграмму с декартовыми квадратами

$$\begin{array}{ccccc}
 E'^* & \xrightarrow{f_\pi} & E^* & & \\
 q_2' \uparrow & & \square & & \uparrow q_2 \\
 (3.7.11) \quad Z' \times_Z P & \xrightarrow{f} & P & & \\
 q_1' \downarrow & & \square & & \downarrow q_1 \\
 E' & \xrightarrow{f_\tau} & E & &
 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 f_{\pi}^! F^{\wedge} \otimes \omega_{E^{\bullet}/Z} &= f_{\pi}^! Rq_{2*} q_1^! F \\
 &\simeq Rq_{2*} \tilde{f}^! q_1^! F \\
 &\simeq Rq_{2*} q_1^! f_{\tau}^! F \\
 &\simeq (f_{\tau}^! F)^{\wedge} \otimes \omega_{E^{\bullet}/Z},
 \end{aligned}$$

что доказывает изоморфизм $f_{\pi}^! (F^{\wedge}) \simeq (f_{\tau}^! F)^{\wedge}$. Доказательство существования остальных изоморфизмов аналогично. $\square$

Пусть теперь E_1 и E_2 — два векторных расслоения над Z и $f: E_1 \rightarrow E_2$ — морфизм расслоений. Обозначим через ${}^t f: E_2^* \rightarrow E_1^*$ двойственный морфизм. Тогда $\omega_{E_1/E_2} \simeq f^! A_{E_2}$ и $\omega_{E_2^*/E_1^*} \simeq {}^t f^! A_{E_1^*}$.

Предложение 3.7.14. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E_1))$. Тогда

$$\begin{aligned}
 {}^t f^{-1}(F^{\wedge}) &\simeq (Rf_! F)^{\wedge}, \\
 {}^t f^!(F^{\vee}) &\simeq (Rf_* F)^{\vee}, \\
 {}^t f^!(F^{\wedge}) &\simeq (Rf_* F)^{\wedge} \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}, \\
 {}^t f^{-1}(F^{\vee}) &\simeq (Rf_! F)^{\vee} \otimes \omega_{E_2^*/E_1^*}.
 \end{aligned}$$

(ii) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E_2))$. Тогда

$$\begin{aligned}
 (f^{-1}G)^{\vee} &\simeq R^t f_!(G^{\vee}), \\
 (f^!G)^{\wedge} &\simeq R^t f_*(G^{\wedge}), \\
 (\omega_{E_1/E_2} \otimes f^!G)^{\vee} &\simeq R^t f_*(G^{\vee}), \\
 (\omega_{E_1/E_2} \otimes f^{-1}G)^{\wedge} &\simeq R^t f_!(G^{\wedge}).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Положим $\tilde{P}' = E_1 \times_{E_2} P'_2 = P'_1 \times_{E_1^*} E_2^*$, $E_2^* = \{(x, y) \in E_1 \times_Z E_2^*; \langle x, {}^t f(y) \rangle = \langle f(x), y \rangle \leq 0\}$ и рассмотрим диаграмму с двумя декартовыми квадратами

$$\begin{array}{ccccc}
 E_1^* & \xleftarrow{{}^t f} & E_2^* & & \\
 q_2 \uparrow & & \uparrow & \swarrow q_2' & \\
 P_1' & \xleftarrow{\tilde{q}_1} & \tilde{P}' & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & P_2' \\
 q_1 \searrow & & \downarrow & \square & \downarrow q_1' \\
 & & E_1 & \xrightarrow{f} & E_2
 \end{array}$$

Тогда

$$\begin{aligned} {}^t f^{-1} F^\wedge &\simeq {}^t f^{-1} R q_{2!} q_1^{-1} F \\ &\simeq R q'_{2!} R \tilde{q}_{2!} \tilde{q}_1^{-1} q_1^{-1} F \\ &\simeq R q'_{2!} q_1'^{-1} R f_! F \\ &\simeq (R f_! F)^\wedge. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} {}^t f^! F^\vee &\simeq {}^t f^! R q_{2*} q_1^! F \\ &\simeq R q'_{2*} R \tilde{q}_{2*} \tilde{q}_1^! q_1^! F \\ &\simeq R q'_{2*} q_1'^! R f_* F \\ &\simeq (R f_* F)^\vee. \end{aligned}$$

Оставшиеся формулы можно доказать, положив $F = G^\vee$ или $F = G^\wedge$. $\square$

Рассмотрим теперь внешнее тензорное произведение. Пусть E_1 и E_2 — два векторных расслоения над Z . Мы будем одним и тем же символом $^\wedge$ обозначать преобразование Фурье–Сато на E_i ($i = 1, 2$) и на $E_1 \times_Z E_2$.

Предложение 3.7.15. Пусть $F_i \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^+(E_i))$, $i = 1, 2$. Тогда

$$F_1^\wedge \boxtimes_Z F_2^\wedge \simeq \left(F_1 \boxtimes_Z F_2 \right)^\wedge.$$

Доказательство. Для $i = 1, 2$ через p_j^i ($j = 1, 2$) и p_i обозначим i -ю проекцию, определенную на $E_j \times_Z E_j^*$ ($j = 1, 2$) и на $(E_1 \times_Z E_2) \times_Z (E_1^* \times_Z E_2^*)$ соответственно. Пусть P_j^i ($j = 1, 2$) и P' обозначают замкнутые подмножества $\{(x, y) \leq 0\}$ в $E_j \times_Z E_j^*$ ($j = 1, 2$) и в $(E_1 \times_Z E_2) \times_Z (E_1^* \times_Z E_2^*)$. Имеем (см. упр. 2.18)

$$\begin{aligned} F_1^\wedge \boxtimes_Z F_2^\wedge &\simeq R p_{2!} \left((p_1^1)^{-1} F_1 \boxtimes_Z (p_1^2)^{-1} F_2 \right)_{P_1' \times_Z P_2'}, \\ \left(F_1 \boxtimes_Z F_2 \right)^\wedge &\simeq R p_{2!} \left((p_1^1)^{-1} F_1 \boxtimes_Z (p_1^2)^{-1} F_2 \right)_{P'}. \end{aligned}$$

Положим $G = (p_1^1)^{-1} F_1 \boxtimes_Z (p_1^2)^{-1} F_2$. Отображение p_2 может быть представлено в виде

$$\left(E_1 \times_Z E_2 \right) \times_Z \left(E_1^* \times_Z E_2^* \right) \xrightarrow{\beta} E_1^* \times_Z E_2^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} E_1^* \times_Z E_2^*,$$

где $\beta(x_1, x_2, y_1, y_2) = (y_1, y_2, \langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle)$, а $\alpha(y_1, y_2, t_1, t_2) = (y_1, y_2)$. Так как

$$R\beta_! G_{P^1} \simeq (R\beta_! G)_{\{t_1+t_2 \leq 0\}} \text{ и } R\beta_! G_{P^1 \times_Z P^1_2} \simeq (R\beta_! G)_{\{t_1 \leq 0, t_2 \leq 0\}},$$

то остается показать, что

$$R\alpha_!((R\beta_! G)_{\{t_1+t_2 \leq 0\}}) \rightarrow R\alpha_!((R\beta_! G)_{\{t_1 \leq 0, t_2 \leq 0\}})$$

— изоморфизм.

Докажем справедливость этого утверждения в каждой точке $E^*_1 \times_Z E^*_2$. То есть мы должны доказать, что если H — биконический объект в $\mathbf{D}^+(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, то

$$(3.7.12) \quad R\Gamma_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; H_{\{t_1+t_2 \leq 0\}}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; H_{\{t_1 \leq 0, t_2 \leq 0\}}),$$

или, что эквивалентно,

$$(3.7.13) \quad R\Gamma_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; H_{\{0 < t_1 \leq t_2\} \cup \{0 < t_2 \leq -t_1\}}) = 0.$$

Это утверждение вытекает из того факта, что пучки когомологий H постоянны на каждой связной компоненте открытого множества $\{t_1 t_2 \neq 0\}$. $\square$

Замечание 3.7.16. В этой книге мы не контролируем выбор знаков. Например, отождествление $\sigma_{Y/X}$ и $\sigma_Y \otimes f^{-1}\sigma_X$ (для морфизма $f: Y \rightarrow X$) или отождествление $\sigma_{Z/E} \simeq \sigma_{Z/E^*}$ для векторного расслоения $E \rightarrow Z$ (и, в частности, отождествление $\sigma_{T^*X} \simeq A_{T^*X}$) не описывается в деталях.

Упражнения к гл. 3

Упражнение 3.1. Пусть $A = \mathbb{Q}$. Положим $X = \mathbb{R}$, $B = \{1/n; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ и $Z = B \cup \{0\}$.

- (i) Пусть $F = \mathbb{Q}_B$. Найдите $D'F$ и $D'D'F$. Покажите, что $F \neq D'D'F$.
- (ii) Пусть $G = \mathbb{Q}_Z$. Докажите, что пучок G мягкий и что $H^1_{\{0\}}(X; G)$ бесконечномерно над $\mathbb{Q}$. (Указание. Покажите, что $H^0(X; F)$ (соответственно $H^0(X; G)$) изоморфно пространству всех последовательностей (соответственно стационарных последовательностей) рациональных чисел.)

(iii) Докажите, что $H_{\{0\}}^2(X; \mathbb{Q}_{X \setminus Z}) \neq 0$.

Упражнение 3.2. Докажите, что мягкая размерность пространства $\mathbb{R}^n$ равна n , а его вялая размерность равна $n + 1$. (Указание. Используйте результат упражнения 3.1.)

Упражнение 3.3. Пусть X — топологическое пространство, а F — пучок на X , локально изоморфный $\mathbb{Z}_X$. Докажите существование канонических изоморфизмов

$$F \otimes F \simeq \mathbb{Z}_X, \quad D'F \simeq F.$$

Упражнение 3.4. Пусть X есть C^0 -многообразие. Назовем множество $\Omega \subset X$ локально когомологически тривиальным в X (сокращенно l.c.t.), если для любого $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$

$$(R\Gamma_{\overline{\Omega}}(A_X))_x = 0, \quad (R\Gamma_{\Omega}(A_X))_x \simeq A$$

(см. [Scharira 3]).

- (i) Докажите, что Ω является l.c.t. в X в том и только в том случае, когда $D'(A_{\overline{\Omega}}) \simeq A_{\overline{\Omega}}$ и $D'(A_{\overline{\Omega}}) \simeq A_{\Omega}$.
- (ii) Докажите, что если Ω является l.c.t. в X , то $\Omega = \text{Int}(\overline{\Omega})$.
- (iii) Докажите, что если Ω выпукло в $\mathbb{R}^n$, то оно l.c.t. в $\mathbb{R}^n$ и A_{Ω} и $A_{\overline{\Omega}}$ когомологически конструктивны.

Упражнение 3.5. Пусть V — вещественное n -мерное векторное пространство, а q — квадратичная форма на V . Для $a \in \mathbb{R}$ положим $Z_a = \{x \in V; q(x) \leq a\}$. Пусть ε^- — число неположительных собственных значений формы q .

(i) Докажите, что

$$R\Gamma_c(V; A_{Z_a})[\varepsilon^-] \simeq \begin{cases} A, & \text{если } a \geq 0, \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

(ii) Используя предложение 3.1.10, выведите из (i), что

$$R\Gamma_{Z_a}(V; A_V)[n - \varepsilon^-] \simeq \begin{cases} A, & \text{если } a \geq 0, \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Упражнение 3.6. Пусть $f : Y \rightarrow X$ — сферическое расслоение с размерностью слоя $n \geq 1$. Докажите существование выделенного треугольника

$$R^0 f_* A_Y \rightarrow Rf_* A_Y \rightarrow R^n f_* A_Y[-n] \xrightarrow{+1}$$

и выделенного треугольника

$$A_X \rightarrow Rf_* A_Y \rightarrow f_* \sigma_{Y/X}[-n] \xrightarrow{+1}.$$

(Указание. Используйте упр. 1.26.)

Упражнение 3.7. Пусть $\tau : E \rightarrow Z$ — векторное расслоение с размерностью слоя n , а $i : Z \hookrightarrow E$ — нулевое вложение. Предположим, что на E задана относительная ориентация, т. е. задан изоморфизм $A_E \simeq \sigma_{E/Z}$.

- (i) Постройте изоморфизм $\Gamma(Z; A_Z) \simeq H_Z^n(E; A_E)$ (образ 1 называется *классом Тома*).
- (ii) Постройте коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} R\tau_! A_E & \longrightarrow & R\tau_* A_E \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ A_Z[-n] & \longrightarrow & A_Z \end{array}$$

и морфизм $\Gamma(Z; A_Z) \rightarrow H^n(Z; A_Z)$ (образ 1 называется *классом Эйлера*).

- (iii) Докажите, что класс Эйлера является образом класса Тома при отображении $H_Z^n(E; A_E) \rightarrow H^n(E; A_E) \simeq H^n(Z; A_Z)$.
- (iv) Докажите, что если расслоение имеет непрерывное сечение, отличное от нуля в каждой точке, то его класс Эйлера равен нулю (см. упр. 5.2).

Упражнение 3.8. Пусть X — топологическое многообразие, Y — замкнутое подмногообразие коразмерности l , а $j : Y \hookrightarrow X$ — вложение. Пусть задан изоморфизм $\sigma_{Y/X} \simeq A_Y$. Постройте длинную точную последовательность

$$H^k(Y; A_Y) \xrightarrow{\alpha} H^{k+l}(X; A_X) \rightarrow H^{k+l}(X \setminus Y; A_X) \rightarrow H^{k+l}(Y; A_Y).$$

(Отображение α называется *отображением Гизина*. Образ 1 $\in H^0(Y; A_Y)$ опять-таки называется классом Эйлера.)

Упражнение 3.9. Мы находимся в условиях предложения 3.1.9.

- (i) Докажите существование естественных морфизмов функторов и коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc}
 Rf_! \circ Rg'_! & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & Rf_* \circ Rg'_* \\
 \downarrow & & \downarrow \wr \\
 Rf_! \circ Rg'_* & \longrightarrow & Rg_* \circ Rf'_! \longrightarrow Rg_* \circ Rf'_* \\
 & & \\
 & g'^{-1} \circ f^! \longrightarrow f^! \circ g'^{-1} & \\
 & \\
 g^{-1} \circ Rf_! & \xrightarrow{\sim} & Rf'_! \circ g'^{-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 g^{-1} \circ Rf_* & \longrightarrow & Rf'_* \circ g'^{-1} \\
 & & \\
 Rf'_! \circ g'^! & \longrightarrow & g^! \circ Rf_! \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Rf'_* \circ g'^! & \xrightarrow{\sim} & g^! \circ Rf_*
 \end{array}$$

- (ii) Для $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_Y))$, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(A_X))$ постройте каноническую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 Rf_! R\mathcal{H}om(G, f^! F) & \longrightarrow & R\mathcal{H}om(Rf_* G, F) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Rf_* R\mathcal{H}om(G, f^! F) & \xrightarrow{\sim} & R\mathcal{H}om(Rf_! G, F)
 \end{array}$$

- (iii) Для F_1 и F_2 из $\mathbf{D}^b(A_X)$ постройте коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & & R\mathcal{H}om(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 f^{-1}R\mathcal{H}om(F_1, F_2) & & & & R\mathcal{H}om(f^{-1}F_1 \otimes_{\omega_{Y/X}}, f^! F_2) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & R\mathcal{H}om(f^! F_1, f^! F_2) & &
 \end{array}$$

Упражнение 3.10. Докажите, что в условиях предложения 3.3.9 для любого $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$ морфизм $Rf_! f^! F \rightarrow F$ является изоморфизмом.

Упражнение 3.11. Пусть k — поле, X — компактное n -мерное C^0 -многообразие, F — когомологически конструктивный объект из $\mathbf{D}^b(k_X)$ и DF — двойственный к нему объект.

- (i) Докажите, что $H^j(X; F)$ и $H^{-j}(X; DF)$ являются конечномерными векторными k -пространствами, двойственными друг другу. Отметим, что $H^{-j}(X; DF) = H^{n-j}(X; D'F \otimes \text{or}_X)$. (Указание. Докажите индукцией по j , что $\text{Im}(H^j(U; F) \rightarrow H^j(K; F))$ конечномерен для любого компактного K и открытого $U, K \subset U$.)
- (ii) Пусть $k = \mathbb{R}$, X — компактное ориентируемое многообразие класса C^∞ . Опишите двойственность между $H^j(X; \mathbb{R}_X)$ и $H^{n-j}(X; \mathbb{R}_X)$, используя комплекс де Рама с C^∞ -функциями и распределениями в качестве коэффициентов (см. § 2.9).

Упражнение 3.12. Пусть E — вещественное конечномерное векторное пространство, γ — замкнутый выпуклый конус с центром в 0, $\gamma^a = -\gamma$.

- (i) Докажите существование изоморфизма

$$A_{\gamma^a} \xrightarrow{\sim} \phi_{\gamma}^{-1} R\phi_{\gamma*}(A_{\gamma^a}).$$

- (ii) Пусть Ω есть γ -открытое подмножество в E . Докажите существование изоморфизма

$$A_{\Omega} \simeq \phi_{\gamma}^{-1} R\phi_{\gamma*} A_{\Omega}.$$

Упражнение 3.13. Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с координатами (x, y) , $A = \{(x, y); y = 0\}$ и $B = \{(x, y); x \neq 0, y = x \sin(1/x)\}$. Пусть $F = \mathbb{Q}_A$, $G = \mathbb{Q}_{\overline{B}}$. Докажите, что F и G когомологически конструктивны над $\mathbb{Q}$, но $F \otimes G$ и $R\text{Hom}(F, G)$ когомологически конструктивными не являются.

Упражнение 3.14. Пусть S^n — единичная сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $-1 \leq a < 1$. Положим

$$\Omega = \{(x, y) \in S^n \times S^n; \langle x, y \rangle > 0\}, \quad K = A_{\Omega}.$$

Докажите, что функторы Ψ_K и Φ_K (см. § 3.6) являются эквивалентностями категорий над $\mathbf{D}^+(A_{S^n})$.

Упражнение 3.15. Пусть V — ориентированное векторное пространство $\mathbb{R}^n$ и m — целое число, $1 \leq m \leq n$. Положим

$X_m = \{\lambda; \lambda \text{ — ориентированное } m\text{-мерное линейное подпространство в } V\};$

$\Omega = \{(\lambda, \mu) \in X_m \times X_{n-m}; \lambda \text{ и } \mu \text{ трансверсальны и ориентация пространства } \lambda \oplus \mu \text{ совпадает с ориентацией пространства } V\};$

$K = A_\Omega$.

Докажите, что Ψ_K и Φ_K являются эквивалентностями категорий $D^+(A_{X_m})$ и $D^+(A_{X_{n-m}})$.

Упражнение 3.16. Пусть $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ — координаты на пространстве $\mathbb{R}^{1+n}$. Пусть γ_i ($i = 1, 2, 3$) — замкнутый конус:

$$\gamma_1 = \left\{ (t, x); t^2 \geq \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\},$$

$$\gamma_2 = \left\{ (t, x); t^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\},$$

$$\gamma_3 = \left\{ (t, x); t^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}.$$

Положим $\gamma_i^+ = \gamma_i \cap \{(t, x); t \geq 0\}$ и $G_i = A_{\gamma_i}$, $G_i^+ = A_{\gamma_i^+}$. Найдите преобразование Фурье–Сато этих пучков.

Упражнение 3.17. Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — векторное расслоение над локально компактным пространством Z . Используя обозначения примера 3.6.6, обозначим одним и тем же символом γ проекции $\dot{E} \rightarrow S$ и $\dot{E}^* \rightarrow S^*$. Пусть $j: \dot{E} \hookrightarrow E$ — включение. Докажите коммутативность следующих диаграмм, где $\tilde{\Psi}_D$ и $\tilde{\Phi}_D$ определяются, как в (3.7.7):

$$\begin{array}{ccccccc} D^+(S) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_D} & D^+(S^*) & D^+(S^*) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_D} & D^+(S) \\ \downarrow \gamma^{-1} & & \uparrow R\gamma_* & \downarrow \gamma^{-1} & & \uparrow R\gamma_* \\ D_{\mathbb{R}^+}^+(\dot{E}) & & D_{\mathbb{R}^+}^+(\dot{E}^*) & D_{\mathbb{R}^+}^+(\dot{E}^*) & & D_{\mathbb{R}^+}^+(\dot{E}) \\ \downarrow Rj_* & & j^{-1} \uparrow & \downarrow Rj_! & & j^{-1} \uparrow \\ D_{\mathbb{R}^+}^+(E) & \xrightarrow{\Lambda} & D_{\mathbb{R}^+}^+(E^*) & D_{\mathbb{R}^+}^+(E^*) & \xrightarrow{V} & D_{\mathbb{R}^+}^+(E) \end{array}$$

Упражнение 3.18. Пусть X есть C^0 -многообразие размерности n , $x \in X$ и U — открытая окрестность точки x . Определим морфизм вычета в точке x , обозначаемый $\text{Res}(x; \cdot)$, как композицию

$$H^{n-1}(U \setminus \{x\}; \sigma x) \rightarrow H_{\{x\}}^n(X; \sigma x) \xrightarrow{\sim} A.$$

- (i) Пусть X компактно, Z — конечное подмножество в X и $u \in H^{n-1}(X \setminus Z; \sigma x)$. Докажите, что

$$\sum_{x \in Z} \text{Res}(x; u) = 0.$$

(Указание. Используйте существование морфизма $H_Z^n(X; \sigma x) \rightarrow H^n(X; \sigma x)$.)

- (ii) Пусть X не компактно и $H^{n-1}(X; \sigma x) = H^n(X; \sigma x) = 0$. Пусть Y — компактное C^0 -многообразие размерности $n-1$ и $\gamma: Y \rightarrow X$ — непрерывное отображение. Предположим, что задан изоморфизм $\gamma^{-1} \sigma x \simeq \sigma y$. Если Z замкнуто в X и $Z \cap \gamma(Y) = \emptyset$, то обозначим через γ^{-1} отображение $H^{n-1}(X \setminus Z; \sigma x) \rightarrow H^{n-1}(Y; \sigma y)$, порожденное заданным изоморфизмом.

Пусть $x \in X \setminus \gamma(Y)$. Так как $H^{n-1}(X \setminus \{x\}; \sigma x) \simeq A$, то существует единственный элемент $u \in H^{n-1}(X \setminus \{x\}; \sigma x)$, такой, что $\text{Res}(x; u) = 1$. Положим

$$\text{Ind}(x; \gamma) = \int_Y \gamma^{-1}(u),$$

где $\int_Y$ обозначает отображение $H^{n-1}(Y; \sigma y) \rightarrow A$.

Пусть теперь Z — конечное подмножество в $X \setminus \gamma(Y)$ и $v \in H^{n-1}(X \setminus Z; \sigma x)$. Докажите формулу вычетов Коши

$$\int_Y \gamma^{-1}(v) = \sum_{x \in Z} \text{Ind}(x; \gamma) \text{Res}(x; v).$$

(Это упражнение взято из книги [Iversen 2].)

Упражнение 3.19. Мы сохраняем обозначения предложения 2.7.5 и диаграммы (2.7.5). Пусть все пространства локально компактны, а функторы $h_!$, $rp_!$, $px_!$ имеют конечную когомологическую размерность. Пусть, кроме того, h — собственное отображение. Определим для $j = 0, 1$ морфизмы функторов $f_{j\#}: Rrp_! \circ p_Y^j \rightarrow Rrp_! \circ p_X^j$, используя морфизмы $Rf_{j!} \circ f_j^! \rightarrow \text{id}_X$. Докажите, что $f_{0\#} = f_{1\#}$.

Упражнение 3.20. Будем считать, что в (i) и в (ii) $X = \mathbb{R}$. Выберем $a, b \in X$, $a < b$, и положим $I_b^- =]-\infty, b]$, $I_a^+ = [a, +\infty[$.

(i) Покажите, что $\mathbb{Z}_X$ квазиморфен комплексу

$$K: 0 \rightarrow \mathbb{Z}_{I_b^-} \otimes \mathbb{Z}_{I_a^+} \rightarrow \mathbb{Z}_{I_b^- \cap I_a^+} \rightarrow 0.$$

Пусть $\mathcal{C}_X$ обозначает комплекс де Рама $0 \rightarrow \mathcal{C}_X^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{C}_X^{\infty, (1)} \rightarrow 0$ (см. § 9 гл. 2). Постройте морфизм комплексов $K \xrightarrow{\phi} \mathcal{C}_X$, такой, что композиция

$$\mathbb{Z}_X \simeq H^0(K) \rightarrow H^0(\mathcal{C}_X) \simeq \mathcal{C}_X$$

совпадает с морфизмом $\mathbb{Z}_X \rightarrow \mathcal{C}_X$, порожденным вложением $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$.

(ii) Докажите, что $H_c^1(X; \mathbb{Z}_X) \simeq H^1(\Gamma_c(X; K))$ и что следующая диаграмма коммутативна с точностью до знака (определение $\int_X$ см. в (3.3.16)):

$$\begin{array}{ccccc} H_c^1(X; \mathbb{Z}_X) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\Gamma_c(X; K)) & \xrightarrow{\phi} & H^1(\Gamma_c(X; \mathcal{C}_X)) \\ \downarrow & & & & \downarrow \int_X \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & & & \mathbb{C} \end{array}$$

(iii) Докажите, что если $A = \mathbb{C}$, то гомоморфизмы (3.3.15) и (3.3.16) равны с точностью до знака.

Упражнение 3.21. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — топологическая субмерсия локально компактных пространств, Z_1, Z_2 замкнуты в Y и $Z_1 \subset Z_2$. Пусть $H_c^j((Z_2 \setminus Z_1) \cap f^{-1}(x); \mathbb{Z}_Y) = 0$ для любого j . Докажите, что для любого $F \in \text{Ob}(\mathcal{D}^b(X))$ морфизм $Rf_* R\Gamma_{Z_1}(f^{-1}F) \rightarrow Rf_* R\Gamma_{Z_2}(f^{-1}F)$ является изоморфизмом.

Замечания

Мы отсылаем читателя к «Краткому историческому очерку» в начале книги для подробного ознакомления с историей двойственности пучков и функтора $f^!$.

Напомним, что функтор $f^!$ был введен Гротендиком [Grothendieck 4] в 1963 г. в рамках его теории двойственности для когерентных

пучков на локально нетеровых схемах. Эта теория послужила моделью для создания теорий двойственности в иных ситуациях: для локально компактных пространств [Verdier 1], этальных когомологий ([SGA4], [SGA5]) и недавно для $\mathcal{D}$ -модулей (см. § 11.2). Теория, которую мы излагаем здесь, принадлежит Вердье и изложена в трудах Гейдельберг-Страсбургского семинара [SHS]. Отметим, что многие результаты § 3.2 и 3.3 были известны и ранее (см., например, [Borel 1], [Borel-Moore 1]).

Преобразование Фурье-Сато играет важную роль во многих разделах математики (см. [Hotta-Kashiwara 1], [Malgrange 2], [Brylinski 2]). Аналогичная конструкция в алгебраическом случае принадлежит Делиню (см. [Illusie 1], [Katz-Laumon 1], [Laumon 1]). Это преобразование впервые было введено Сато в 1970 г. для сферических пучков (см. [Sato-Kawai-Kashiwara 1]). Только после 1975 г. (особенно после статьи [Kashiwara 4]) началась систематическая работа с векторными расслоениями (т. е. с использованием нулевого сечения). Хотя нулевое сечение было впервые использовано в работе [Brylinski-Malgrange-Verdier 1], все результаты § 7 в основном содержатся в работах [Sato-Kawai-Kashiwara 1] и [Kashiwara-Kawai 2].

Специализация и микролокализация

Пусть X — многообразие, а M — замкнутое подмногообразие в X . Сначала мы построим многообразие $\tilde{X}_M$ — нормальную деформацию подмногообразия M в X — и отображение $(p, t): \tilde{X}_M \rightarrow X \times \mathbb{R}$ (размерность $\tilde{X}_M$ на единицу больше размерности X), такое, что $t^{-1}(c)$ изоморфно X при $c \neq 0$ и $t^{-1}(0)$ изоморфно $T_M X$, нормальному расслоению к многообразию M в X .

Мы будем использовать многообразие $\tilde{X}_M$ для того, чтобы сопоставить пучку F на X (или объекту $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$) объект $\nu_M(F) \in \mathbf{D}^b(T_M X)$, называемый специализацией объекта F вдоль M . Преобразование Фурье—Сато $\mu_M(F)$ объекта $\nu_M(F)$ называется микролокализацией объекта F вдоль M .

Определив функторы ν_M и μ_M и изучив их функториальные свойства, мы займемся изучением функтора μ_{tot} .

Этот функтор является обобщением функтора микролокализации и является одним из главных объектов рассмотрения данной книги. Отметим, что результаты § 2 и § 3 впервые получены в работе [Sato-Kawai-Kashiwara 1].

Соглашение 4.0. Мы сохраняем соглашение 3.0. Кроме того, все многообразия и морфизмы многообразий будут считаться принадлежащими классу C^∞ либо вещественно-аналитическими.

В этой главе и далее мы будем работать главным образом в категории ограниченных комплексов пучков (см. следствие 3.3.12). Разумеется, многие результаты справедливы при более слабых предположениях.

4.1. Нормальная деформация и нормальные конусы

Пусть X есть n -мерное многообразие, $M \subset X$ — замкнутое подмногообразие коразмерности l и $T_M X$ — нормальное расслоение к многообразию M в X , т. е. векторное расслоение на M , определенное с

помощью точной последовательности

$$(4.1.1) \quad 0 \rightarrow TM \rightarrow M \times_X TX \rightarrow T_M X \rightarrow 0.$$

Мы построим многообразие $\tilde{X}_M$ и два отображения

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} p: \tilde{X}_M \rightarrow X, \\ t: \tilde{X}_M \rightarrow \mathbb{R}, \end{cases}$$

такие, что

$$(4.1.3) \quad \begin{cases} p^{-1}(X \setminus M) & \text{изоморфно } (X \setminus M) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ t^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) & \text{изоморфно } X \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}), \\ t^{-1}(0) & \text{изоморфно } T_M X. \end{cases}$$

Многообразие $\tilde{X}_M$ мы назовем *нормальной деформацией* подмногообразия M в X .

С этой целью рассмотрим открытое покрытие $X = \bigcup_i U_i$ и открытые вложения $\phi_i: U_i \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, такие, что $U_i \cap M = \phi_i^{-1}(\{0\}^l \times \mathbb{R}^{n-l})$. Положим $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^{n-l}$ и

$$V_i = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \quad (tx', x'') \in \phi_i(U_i)\}.$$

Обозначим через $t_{V_i}: V_i \rightarrow \mathbb{R}$ проекцию $(x, t) \mapsto t$ и через $p_{V_i}: V_i \rightarrow U_i$ отображение $(x, t) \mapsto \phi_i^{-1}(tx', x'')$. Определим отображение

$$\psi_{ji}: V_i \times_{U_i} (U_i \cap U_j) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

положив $\psi_{ji}(x, t) = (\psi'_{ji}(x, t), \psi''_{ji}(x, t))$, где

$$(t\psi'_{ji}(x, t), \psi''_{ji}(x, t)) = \phi_j \phi_i^{-1}(tx', x'').$$

Определение корректно, так как первые l компонент $\phi_j \phi_i^{-1}(tx', x'')$ обращаются в 0 при $t = 0$.

Пусть $\mathcal{R}$ — отношение эквивалентности, отождествляющее $(x_i, t_i) \in V_i$ и $(x_j, t_j) \in V_j$, если $t_i = t_j$ и $x_j = \psi_{ji}(x_i, t_i)$. Положим

$$\tilde{X}_M = \left(\coprod_i V_i \right) / \mathcal{R}.$$

Легко проверяется, что $\tilde{X}_M$ является многообразием и что отображения $p: \tilde{X}_M \rightarrow X$ и $t: \tilde{X}_M \rightarrow \mathbb{R}$, заданные условиями $p|_{V_i} = p_{V_i}$ и $t|_{V_i} = t_{V_i}$, определены корректно и удовлетворяют первым двум условиям в (4.1.3). Мы назовем $\tilde{X}_M$ нормальной деформацией подмногообразия M в X .

Заметим, что мультипликативная группа $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ действует на $\tilde{X}_M$ следующим образом:

$$(c, (x', x'', t)) \mapsto (cx', x'', c^{-1}t).$$

Покажем, что гиперповерхность $t^{-1}(0)$ в $\tilde{X}_M$ может быть канонически отождествлена с нормальным расслоением $T_M X$. Положим $\psi_{ji}(x, t) = (\psi'_{ji}, \psi''_{ji})$, как выше, а также $\phi_j \circ \phi_i^{-1} = \phi_{ji} = (\phi'_{ji}, \phi''_{ji})$. Тогда

$$(4.1.4) \quad \begin{cases} \psi'_{ji}(x, 0) = \sum_{k=1}^l x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \phi'_{ji}(0, x''), \\ \psi''_{ji}(x, 0) = \phi''_{ji}(0, x''). \end{cases}$$

Поэтому семейство $\{V_i \cap t^{-1}(0), \psi_{ji}(x, 0)\}$ определяет покрытие пространства $T_M X$ координатными окрестностями, а точка $x = (x', x'') \in V_i \cap t^{-1}(0)$ может быть отождествлена с нормальным вектором x' в точке $(0, x'') \in M$.

Обозначим через Ω открытое подмножество в $\tilde{X}_M$, являющееся прообразом $\mathbb{R}^+$ при отображении t , через j — вложение $\Omega \hookrightarrow \tilde{X}_M$, через $\tilde{p}$ — отображение $p \circ j$ и через s — иммерсию $T_M X \hookrightarrow \tilde{X}_M$. Пусть τ — проекция $T_M X \rightarrow M$, а i — вложение $M \hookrightarrow X$. Если нет опасности путаницы, то мы будем писать τ вместо $i \circ \tau$.

$$(4.1.5) \quad \begin{array}{ccccc} T_M X & \xhookrightarrow{\quad} & \tilde{X}_M & \xleftarrow{\quad} & \Omega \\ \tau \downarrow & & \downarrow p & \nearrow \tilde{p} & \\ M & \xhookrightarrow{\quad} & X & & \end{array}$$

Отметим, что отображение $\tilde{p}$ гладкое, а $(\tilde{p}, t)$ — изоморфизм множества Ω на $X \times \mathbb{R}^+$. Отметим далее, что $p^{-1}(M)$ есть объединение $T_M X$ и $M \times \mathbb{R}$, а $T_M X \cap (M \times \mathbb{R}) = M \times \{0\}$ совпадает с нулевым сечением расслоения $T_M X$.

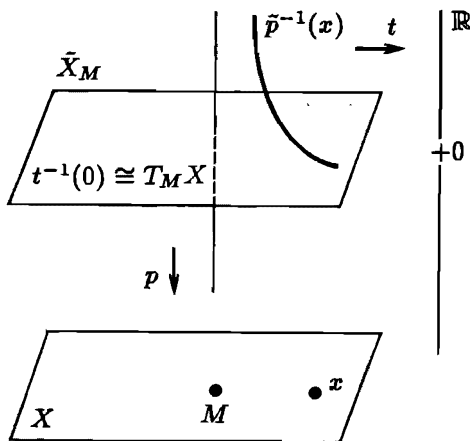


Рис. 4.1.1

Определение 4.1.1. (i) Пусть S — подмножество в X . *Нормальным конусом к S вдоль M* , обозначаемым $C_M(S)$, называется множество

$$(4.1.6) \quad C_M(S) = T_M X \cap \overline{\tilde{p}^{-1}(S)}.$$

(ii) Пусть S_1 и S_2 — подмножества в X . *Нормальный конус $C(S_1, S_2)$* — это множество $C_{\Delta_X}(S_1 \times S_2) \subset TX$, где Δ_X — диагональ в $X \times X$, а TX отождествляется с $T_{\Delta_X}(X \times X)$ с помощью первой проекции.

По построению $C_M(S)$ — замкнутое коническое подмножество в $T_M X$, и его проекция на M совпадает с $M \cap \bar{S}$.

Аналогично, $C(S_1, S_2)$ — замкнутое коническое подмножество в TX . Отметим, что если M — замкнутое подмногообразие, то $C(S, M)$ является прообразом $C_M(S)$ при отображении $M \times_X TX \rightarrow T_M X$. Это утверждение вытекает из следующего предложения.

Предложение 4.1.2. (i) Пусть (x) — локальная система координат на X , а S_1 и S_2 — подмножества в X . Пусть $(x_0; v_0) \in TX$. Тогда

$$(x_0; v_0) \in C(S_1, S_2) \Leftrightarrow \text{существует последовательность} \\ \{(x_n, y_n, c_n)\} \in S_1 \times S_2 \times \mathbb{R}^+, \\ \text{такая, что}$$

$$(4.1.7) \quad x_n \xrightarrow{n} x_0, \quad y_n \xrightarrow{n} x_0, \quad c_n(x_n - y_n) \xrightarrow{n} v_0.$$

(ii) Пусть $(x) = (x', x'')$ — локальная система координат на X , $M = \{x; x' = 0\}$, $S \subset X$. Пусть $x_0 = (0, x''_0) \in M$, $(x_0; v_0) \in T_M X$. Тогда

$$(x_0; v_0) \in C_M(S) \Leftrightarrow \text{существует последовательность} \\ \{(x_n, c_n)\} = \{((x'_n, x''_n), c_n)\} \text{ в } S \times \mathbb{R}^+, \\ \text{такая, что } x_n \xrightarrow{n} x_0, \quad c_n x'_n \xrightarrow{n} v_0.$$

Доказательство. Достаточно доказать (ii). Пусть (x', x'', t) — координаты на $\tilde{X}_M$ и $p: \tilde{X}_M \rightarrow X$ — отображение $(x', x'', t) \mapsto (tx', x'')$.

(а) Пусть $(x_0, v_0) \in C_M(S)$. Тогда существует последовательность $\{(x'_n, x''_n, t_n)\}$ в $\tilde{p}^{-1}S$, такая, что $(x'_n, x''_n, t_n) \xrightarrow{n} (v_0, x''_0, 0)$. То есть последовательность $\{((t_n x'_n, x''_n), t_n^{-1})\} \in S \times \mathbb{R}^+$ обладает требуемыми свойствами.

(б) Обратно, пусть $\{(x_n, c_n)\}$ — последовательность в $S \times \mathbb{R}^+$, такая, что $x_n \xrightarrow{n} (0, x''_0)$, $c_n x'_n \rightarrow v_0$. Если последовательность $\{c_n\}$ неограничена, то мы можем считать, что $c_n \xrightarrow{n} +\infty$.

Тогда последовательность $\{(c_n x'_n, x''_n, c_n^{-1})\}$ в $\tilde{p}^{-1}(S)$ сходится к $(v_0, x''_0, 0)$. Если последовательность $\{c_n\}$ ограничена, то $v_0 = 0$. Мы можем выбрать последовательность положительных чисел $\{\epsilon_n\}$ так, чтобы $\epsilon_n \xrightarrow{n} 0$, $\epsilon_n^{-1} x'_n \xrightarrow{n} 0$. Тогда $\{(\epsilon_n^{-1} x'_n, x''_n, \epsilon_n)\}$ — это последовательность в $\tilde{p}^{-1}(S)$, сходящаяся к $(0, x''_0, 0)$. $\square$

Предложение 4.1.3. Пусть V — открытое коническое подмножество в $T_M X$.

(i) Пусть W — открытая окрестность множества V в $\tilde{X}_M$, а $U = \tilde{p}(W \cap \Omega)$. Тогда $V \cap C_M(X \setminus U) = \emptyset$.

(ii) Обратно, пусть U — открытое подмножество в X , такое, что $V \cap C_M(X \setminus U) = \emptyset$. Тогда $\tilde{p}^{-1}(U) \cup V$ является открытой окрестностью множества V в $\bar{\Omega} = \Omega \cup T_M X$.

Доказательство. (i) Так как $W \cap \tilde{p}^{-1}(X \setminus U) = \emptyset$, то мы имеем $V \cap \tilde{p}^{-1}(X \setminus U) = \emptyset$.

(ii) По определению $C_M(X \setminus U) \cup \tilde{p}^{-1}(X \setminus U)$ замкнуто в $\bar{\Omega}$. Так как $T_M X \setminus V$ замкнуто, а $C_M(X \setminus U) \subset T_M X \setminus V$, то $(T_M X \setminus V) \cup \tilde{p}^{-1}(X \setminus U)$ замкнуто в $\bar{\Omega}$. Дополнительным множеством здесь является $\tilde{p}^{-1}(U) \cup V$. $\square$

Следующий результат необходим для доказательства теоремы 4.2.3.

Предложение 4.1.4. Пусть V — открытое коническое подмножество в $T_M X$. Тогда семейство открытых окрестностей W множества V в $\tilde{X}_M$, таких, что слои отображения $p: W \cap \Omega \rightarrow X$ связны, образует систему открытых окрестностей множества V .

Доказательство. Пусть W — открытая окрестность множества V в $\tilde{X}_M$. Положим

$$X' = \tilde{X}_M, \quad \dot{X}' = \dot{T}_M X \cup p^{-1}(X \setminus M) = X' \setminus (M \times \mathbb{R}), \quad S = \dot{X}' / \mathbb{R}^+.$$

(Напомним, что $\dot{T}_M X = T_M X \setminus M$ и $p^{-1}(M) = T_M X \cup (M \times \mathbb{R})$.)

Тогда S — многообразие, а $\alpha: X' \rightarrow S$ является $\mathbb{R}^+$ -расслоением. Более того, S содержит $\dot{T}_M X / \mathbb{R}^+$ в качестве гиперповерхности и $S \rightarrow X$ — собственное отображение. Уменьшая X , если это необходимо, выберем сечение σ расслоения $\dot{X}' \rightarrow S$, продолжая сечение $\dot{T}_M X \rightarrow \dot{T}_M X / \mathbb{R}^+$. Положим

$$W' = \bigcup_{x \in \sigma^{-1}(W)} \{ \text{связная компонента множества } \alpha^{-1}(x) \cap W, \text{ содержащая } \sigma(x) \}.$$

По построению слои отображения $W' \rightarrow S$ связны и W' — открытая окрестность множества $V \cap \dot{T}_M X$.

Определим множество $W'' = W' \cup V \cup (W \cap t^{-1}\mathbb{R}^-)$. Это открытая окрестность множества V . Далее, $W'' \subset W$ и слои расслоения $p: W'' \cap \Omega \rightarrow X$ связны. $\square$

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $N \subset Y$ — замкнутое подмногообразие коразмерности k и $f(N) \subset M$. Обозначим через $f|_N$ отображение из N в M , индуцированное f . Пусть f' — отображение из TY в $Y \times_X TX$, ассоциированное с f , и f_τ — замена базы $Y \times_X TX \rightarrow TX$. Касательное отображение Tf есть $f_\tau \circ f'$:

$$(4.1.8) \quad Tf: TY \xrightarrow{f'} Y \times_X TX \xrightarrow{f_\tau} TX.$$

Обозначим через $T_N f$ отображение из $T_N Y$ в $T_M X$, ассоциированное с Tf , через f'_N отображение из $T_N Y$ в $N \times_M T_M X$, а через $f_{N\tau}$ замену базы $N \times_M T_M X \rightarrow T_M X$, т. е.

$$(4.1.9) \quad T_N f: T_N Y \xrightarrow{f'_N} N \times_M T_M X \xrightarrow{f_{N\tau}} T_M X.$$

Если нет опасности путаницы, то мы будем писать f_τ вместо $f_{N\tau}$ и f' вместо f'_N .

Обозначим через $p_X, j_X, t_X, s_X, \tilde{p}_X$ отображения, связанные с нормальной деформацией многообразия M в X . Пусть $\Omega_X = t_X^{-1}(\mathbb{R}^+)$. Введем аналогичные обозначения для N и Y : $p_Y, j_Y, t_Y, s_Y, \tilde{p}_Y, \Omega_Y$. Отображение f определяет отображение $\tilde{f}'$ из $\tilde{Y}_N$ в $\tilde{X}_M$. Если $y = (y', y'')$ (соответственно $x = (x', x'')$) — локальная система координат на Y (соответственно на X), такая, что $N = \{y; y' = 0\}$ (соответственно $M = \{x; x' = 0\}$) и $f = (f_1, f_2)$, то

$$(4.1.10) \quad \begin{cases} \tilde{f}'(y', y'', t) = (\frac{1}{t} f_1(ty', y''), f_2(ty', y''), t) & \text{для } t \neq 0, \\ \tilde{f}'(y', y'', 0) = (dy' f_1(0, y'') \cdot y', f_2(0, y''), 0). \end{cases}$$

Из этого вытекает существование коммутативной диаграммы с декартовыми квадратами

$$(4.1.11) \quad \begin{array}{ccccccc} T_N Y & \xrightarrow{s_Y} & \tilde{Y}_N & \xleftarrow{j_Y} & \Omega_Y & \xrightarrow{\tilde{p}_Y} & Y \\ \downarrow T_n f & & \downarrow \tilde{f}' & & \downarrow \tilde{f} & & \downarrow f \\ T_M X & \xrightarrow{s_X} & \tilde{X}_M & \xleftarrow{j_X} & \Omega_X & \xrightarrow{\tilde{p}_X} & X \end{array}$$

Отметим, что отображения $\tilde{p}_X$ и $\tilde{p}_Y$ гладкие и $t_Y = t_X \circ \tilde{f}'$. Диаграмма же

$$(4.1.12) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{Y}_N & \xrightarrow{p_Y} & Y \\ \tilde{f}' \downarrow & & \downarrow f \\ \tilde{X}_M & \xrightarrow{p_X} & X \end{array}$$

не является декартовой, и если f собственное, то $\tilde{f}'$ может таковым не быть. Такие неприятные явления не возникают, если f «чистое» по отношению к M или f «трансверсально» к M . Напомним соответствующие определения (здесь удобно работать с касательными и кокасательными расслоениями, см. § 4.3).

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий и M — замкнутое подмногообразие в X .

Определение 4.1.5 (i) f называется *чистым по отношению к M* , если $N = f^{-1}(M)$ является подмногообразием в Y и отображение $t'_N: N \times_M T_M^* X \rightarrow T_N^* Y$ сюръективно.

(ii) f называется *трансверсальным к M* , если отображение $t'_f|_{Y \times_X T_M^* X}: Y \times_X T_M^* X \rightarrow T^* Y$ инъективно.

Если f — замкнутое вложение, то мы будем называть Y *чистым* (или *трансверсальным*) вместо того, чтобы говорить, что f *чистое* (или *трансверсальное*). Если f трансверсально к M , то f чистое по отношению к M . Обратное неверно, что можно показать на примере, когда Y является подмногообразием в X , а M — подмногообразием в Y . Если f чистое по отношению к M и $f^{-1}(M) = N$, то отображение $p \times \tilde{f}': \tilde{Y}_N \rightarrow Y \times \tilde{X}_M$ является замкнутым вложением. Это вытекает из того, что $f'_N: T_N Y \rightarrow N \times_M T_M X$ — замкнутое вложение, из инъективности отображения $\tilde{Y}_N \hookrightarrow Y \times \tilde{X}_M$ и из того, что $t_Y = t_X \circ \tilde{f}'$, $T_N Y = t_Y^{-1}(0)$ и $T_M X = t_X^{-1}(0)$.

Если f трансверсально к M и $f^{-1}(M) = N$, то $f': T_N Y \rightarrow Y \times_X T_M X$ является изоморфизмом и квадрат (4.1.12) декартов.

В гл. 7 нам понадобится обобщение определения 4.1.5.

Определение 4.1.6. Пусть $f_1: Y_1 \rightarrow X$ и $f_2: Y_2 \rightarrow X$ — морфизмы многообразий; f_1 и f_2 называют *трансверсальными* (соответственно *чистыми*), если отображение $(f_1, f_2): Y_1 \times Y_2 \rightarrow X \times X$ трансверсально (соответственно чисто) по отношению к диагонали в $X \times X$.

Отметим, что если f_2 — вложение подмногообразия Y_2 в X , то трансверсальность (соответственно чистота) морфизмов f_1 и f_2 эквивалентна тому, что f_1 является трансверсальным (соответственно чистым) по отношению к Y_2 .

4.2. Специализация

Пусть M — замкнутое подмногообразие в X . Здесь и далее мы сохраняем обозначения § 4.1 (особенно 4.1.5).

Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$.

Лемма 4.2.1. *Существует естественный изоморфизм*

$$s^{-1} Rj_* \tilde{p}^{-1} F \simeq s^! j_! \tilde{p}^! F.$$

Доказательство. Рассмотрим выделенный треугольник

$$(4.2.1) \quad (p^{-1} F)_\Omega \longrightarrow Rj_* \tilde{p}^{-1} F \longrightarrow R\Gamma_{\{t=0\}}((p^{-1} F)_\Omega)[1] \xrightarrow{+1}.$$

Применяя s^{-1} , получаем

$$\begin{aligned} s^{-1} Rj_* \tilde{p}^{-1} F &\simeq s^!(p^{-1} F)_{\Omega}[1] \\ &\simeq s^! j_* \tilde{p}^! F, \end{aligned}$$

так как $\tilde{p}^! \simeq \tilde{p}^{-1}[1]$. □

Определение 4.2.2. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^+(X))$. Положим

$$\nu_M(F) = s^{-1} Rj_* \tilde{p}^{-1} F \simeq s^! j_* \tilde{p}^! F$$

и назовем $\nu_M(F)$ специализацией объекта F вдоль M .

Теорема 4.2.3. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда

- (i) $\nu_M(F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(T_M X))$ и $\text{supp}(\nu_M(F)) \subset C_M(\text{supp}(F))$.
- (ii) Пусть V — открытое коническое подмножество в $T_M X$. Тогда

$$H^j(V; \nu_M(F)) = \varinjlim_U H^j(U; F),$$

где U пробегает семейство открытых подмножеств в X , таких, что $C_M(X \setminus U) \cap V = \emptyset$ (см. рис. 4.2а). В частности, если $v \in T_M X$, то

$$H^j(\nu_M(F))_v = \varinjlim_U H^j(U; F),$$

где U пробегает семейство открытых подмножеств в X , таких, что $v \notin C_M(X \setminus U)$.

- (iii) Пусть A — замкнутое коническое подмножество в $T_M X$. Тогда

$$H_A^j(T_M X; \nu_M(F)) = \varinjlim_{Z, U} H_{Z \cap U}^j(U; F),$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей многообразия M в X , а Z пробегает семейство замкнутых подмножеств в X , таких, что $C_M(Z) \subset A$ (см. рис. 4.2б).

- (iv) Существуют изоморфизмы

$$\begin{aligned} \nu_M(F)|_M &\simeq R\tau_*(\nu_M(F)) \simeq F|_M, \\ (R\Gamma_M(\nu_M(F)))|_M &\simeq R\Gamma(\nu_M(F)) \simeq R\Gamma_M(F)|_M. \end{aligned}$$

$$(\nu) \quad R\dot{\tau}_*(\nu_M(F)|_{\dot{T}_M X}) \simeq R\Gamma_{X \setminus M}(F)|_M.$$

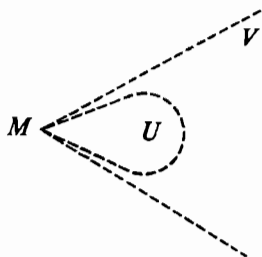


Рис. 4.2a

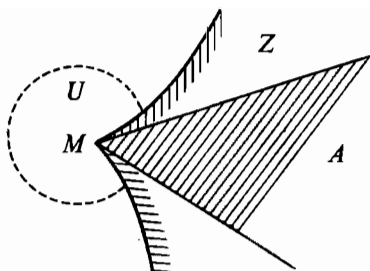


Рис. 4.2b

Доказательство. (i) Так как $\tilde{p}^{-1}F$ локально постоянен по отношению к действию $\mathbb{R}^+$, то это свойство выполнено также и для $Rj_*\tilde{p}^{-1}F$, и для $s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F$. Утверждение о носителях очевидно.

(ii) Пусть U открыто в X и $V \cap C_M(X \setminus U) = \emptyset$. Имеем цепочку морфизмов

$$(4.2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R\Gamma(U; F) \rightarrow R\Gamma(p^{-1}(U); p^{-1}F) \\ \rightarrow R\Gamma(p^{-1}(U) \cap \Omega; p^{-1}F) \\ \rightarrow R\Gamma(\tilde{p}^{-1}(U) \cup V; Rj_*j^{-1}p^{-1}F) \\ \rightarrow R\Gamma(V; \nu_M(F)), \end{array} \right.$$

где существование третьей стрелки объясняется тем, что $p^{-1}(U) \cup V$ является окрестностью множества V в $\tilde{\Omega}$ (предложение 4.1.3).

Таким образом, получаем морфизм

$$\varinjlim_U H^k(U; F) \rightarrow H^k(V; \nu_M(F)).$$

Покажем, что это изоморфизм. Имеем

$$\begin{aligned} H^k(V; \nu_M(F)) &\simeq \varinjlim_W H^k(W; Rj_*j^{-1}p^{-1}F) \\ &\simeq \varinjlim_W H^k(W \cap \Omega; p^{-1}F), \end{aligned}$$

где W пробегает семейство окрестностей множества V . По предложению 4.1.4 мы можем считать, что отображение $p: W \cap \Omega \rightarrow p(W \cap \Omega)$ имеет связные слои, гомеоморфные $\mathbb{R}$. Применяя предложение 3.3.9, получаем

$$H^k(W \cap \Omega; p^{-1}F) \simeq H^k(p(W \cap \Omega); F).$$

Так как $p(W \cap \Omega)$ пробегает семейство открытых подмножеств U в X , таких, что $C_M(X \setminus U) \cap V = \emptyset$ (предложение 4.1.3), то мы получаем (ii).

(iii) Имеем цепочку морфизмов

$$\begin{aligned} R\Gamma_{Z \cap U}(U; F) &\rightarrow R\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U)}(p^{-1}(U); p^{-1}F) \\ &\rightarrow R\Gamma_{p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega}(p^{-1}(U) \cap \Omega; p^{-1}F) \\ &\rightarrow R\Gamma_{(p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega) \cup A}(p^{-1}(U); Rj_* j^{-1} p^{-1}F) \\ &\rightarrow R\Gamma_A(T_M X; \nu_M(F)) \end{aligned}$$

Мы используем здесь замкнутость множества $(p^{-1}(Z \cap U) \cap \Omega) \cup A$ в $p^{-1}(U)$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow \varinjlim_U H^{k-1}(U \setminus Z; F) & \rightarrow & \varinjlim_U H^k_{Z \cap U}(U; F) & \rightarrow & \varinjlim_U H^k(U; F) & \rightarrow & \dots \\ & \downarrow \gamma_{k-1} & & \downarrow \alpha_k & & \downarrow \beta_k & \\ \dots \rightarrow H^{k-1}(T_M X \setminus A; \nu_M(F)) & \rightarrow & H^k_A(T_M X; \nu_M(F)) & \rightarrow & H^k(T_M X; \nu_M(F)) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Так как строки точны, а γ_k и β_k — изоморфизмы по (ii), то все α_k — изоморфизмы.

(iv) Рассмотрим диаграмму (4.1.5) и обозначим через k вложение M в $T_M X$ в качестве нулевого сечения. Имеем морфизмы

$$\begin{aligned} F|_M &\simeq k^{-1} s^{-1} p^{-1} F \\ &\rightarrow k^{-1} s^{-1} Rj_* j^{-1} p^{-1} F \\ &\simeq \nu_M(F)|_M \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} k^! \nu_M(F) &\simeq k^! s^! j_! j^! p^! F \\ &\rightarrow k^! s^! p^! F \\ &\simeq i^! F, \end{aligned}$$

Эти морфизмы являются изоморфизмами по (ii) и (iii). Оставшаяся часть (iv) следует из предложения 3.7.5.

(v) Рассмотрим морфизм выделенных треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} R\Gamma_M(F)|_M & \longrightarrow & F|_M & \longrightarrow & R\Gamma_{X \setminus M}(F)|_M & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ R\Gamma_M(\nu_M(F))|_M & \longrightarrow & R\tau_* \nu_M(F) & \longrightarrow & R\dot{\tau}_*(\nu_M(F)|_{\dot{T}_M X}) & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

Так как левая и средняя вертикальные стрелки являются изоморфизмами по (iv), то и правая стрелка — тоже изоморфизм. $\square$

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, N (соответственно M) — замкнутое подмногообразие в Y (соответственно в X) и $f(N) \subset M$. Мы используем обозначения § 4.1 (см. (4.1.8), (4.1.9), (4.1.11)).

Предложение 4.2.4. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$.

- (i) Существует коммутативная диаграмма канонических морфизмов

$$\begin{array}{ccc} R(T_N f)_! \nu_N(G) & \longrightarrow & \nu_M(Rf_! G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R(T_N f)_* \nu_N(G) & \longleftarrow & \nu_M(Rf_* G) \end{array}$$

- (ii) Более того, если отображения $\text{supp}(G) \rightarrow X$ и $C_N(\text{supp}(G)) \rightarrow T_M X$ собственны и если $\text{supp}(G) \rightarrow \cap f^{-1}(M) \subset N$, то эти морфизмы являются изоморфизмами.

В частности, если $f^{-1}(M) = N$, f чистое по отношению к M и собственное на $\text{supp}(G)$, то эти морфизмы являются изоморфизмами.

Доказательство. (i) Имеем цепочки морфизмов (см. упр. 3.9)

$$\begin{aligned} R(T_N f)_! \nu_N(G) &= R(T_N f)_! s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{p}_Y^{-1}(G) \\ &\simeq s_X^{-1} R\tilde{f}'_! Rj_{Y*} \tilde{p}_Y^{-1} G \\ &\rightarrow s_X^{-1} Rj_{X*} R\tilde{f}'_! \tilde{p}_Y^{-1} G \\ &\simeq s_X^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} Rf_! G \\ &= \nu_M(Rf_! G) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \nu_M(Rf_* G) &= s_X^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} Rf_* G \\ &\simeq s_X^{-1} Rj_{X*} R\tilde{f}_* \tilde{p}_Y^{-1} G \\ &\simeq s_X^{-1} R\tilde{f}'_* Rj_{Y*} \tilde{p}_Y^{-1} G \\ &\rightarrow R(T_N f)_* s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{p}_Y^{-1} G \\ &= R(T_N f)_* \nu_N(G). \end{aligned}$$

Коммутативность диаграммы следует из построения.

(ii) Если $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(\text{supp}(G))}$ является собственным над $\tilde{X}_M$, то все морфизмы — это изоморфизмы, так как можно заменить $R\tilde{f}_*^*$ и $R(T_N f)_*$ на $R\tilde{f}_!^*$ и на $R(T_N f)_!$; соответственно. Следовательно, достаточно доказать, что если замкнутое множество $Z \subset Y$ собственнo над X , $C_N(Z)$ собственнo над $T_M X$ и $Z \cap f^{-1}(M) \subset N$, то $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$ собственнo над $\tilde{X}_M$. Так как слои отображения $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)} \rightarrow \tilde{X}_M$ компактны, то достаточно показать, что это отображение замкнуто. Пусть $\{u_n\}_n$ — последовательность в $\overline{\tilde{p}_Y^{-1}(Z)}$, такая, что последовательность $\{\tilde{f}'(u_n)\}$ сходится. Мы должны показать сходимостъ подпоследовательности из $\{u_n\}_n$. Мы можем считать, что последовательность $\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ сходится. Так как отображение

$$\tilde{p}_Y^{-1}(Z) \setminus T_N Y \rightarrow \tilde{X}_M \setminus T_M X$$

собственное, то можно считать последовательность $\{\tilde{f}'(u_n)\}_n$ сходящейся к точке из $T_M X$. Тогда предел последовательности $\{\tilde{p}_Y(u_n)\}_n$ содержится в $Z \cap f^{-1}(M)$ и, значит, в N .

Рассматривая локальные системы координат в X и Y , как в (4.1.10), положим $u_n = (y'_n, y''_n, t_n)$. Тогда $t_n \xrightarrow{n} 0$, $t_n y'_n \xrightarrow{n} 0$. Мы можем считать, что $t_n > 0$ (т. е. $u_n \in \tilde{p}_Y^{-1}(Z)$). Так как $\{y''_n\}_n$ сходится, то достаточно показать ограниченность последовательности $\{|y'_n|_n\}_n$. Приведем предположение $|y'_n| \xrightarrow{n} \infty$ к противоречию. Выбрав подпоследовательность, мы можем считать, что $\{y'_n/|y'_n|\}_n$ сходится к ненулевому вектору v . Тогда $\{(y'_n/|y'_n|, y''_n, t_n|y'_n|)\}_n$ принадлежит $\tilde{p}_Y^{-1}(Z)$ и сходится к точке $p \in T_N Y$, не принадлежащей нулевому сечению. С другой стороны, последовательность

$$\tilde{f}'(u_n) = \left(\frac{1}{t_n} f_1(t_n y'_n, y''_n), f_2(t_n y'_n, y''_n) \right)$$

сходится и, таким образом, последовательность $\left\{ \frac{1}{t_n |y'_n|} f_1(t_n y'_n, y''_n) \right\}$ сходится к нулю, из чего вытекает, что $T_N f(p)$ принадлежит нулевому сечению расслоения $T_M X$. Значит,

$$C_N(Z) \cap (T_N f)^{-1}(T_N f(p)) \supset \mathbb{R}_{\geq 0} p,$$

что противоречит собственности отображения $C_N(Z) \rightarrow T_M X$. $\square$

Прежде чем перейти к рассмотрению функтора обратного образа, заметим, что если τ_X обозначает отображение $T_M X \rightarrow X$, то

$$(4.2.3) \quad \tau_X^! A_X \simeq \tau_X^{-1} A_X,$$

из чего следует, что $\tau_Y^{-1} f^! A_X \simeq (T_N f)^! A_{T_M X}$, или, что эквивалентно, $\tau^{-1} \omega_{Y/X} \simeq \omega_{T_N Y/T_M X}$. Тогда

$$(4.2.4) \quad \begin{cases} \omega_{T_N Y/N \times_M T_M X} \simeq \tau^{-1} \omega_{Y/X} \otimes \tau^{-1} \omega_{N/M}^{\otimes -1}, \\ \omega_{N \times_M T_M X/T_N Y} \simeq \pi^{-1} \omega_{N/M} \otimes \pi^{-1} \omega_{Y/X}^{\otimes -1}. \end{cases}$$

Для простоты мы часто будем писать $\omega_{Y/X}$ вместо $\tau^{-1} \omega_{Y/X}$ или $\pi^{-1} \omega_{Y/X}$. Аналогичных соглашений мы будем придерживаться для $\omega_{N/M}$, $\omega_{Y/X}$ и т. д. Также мы будем писать $\omega_{Y/X} \otimes \cdot$ вместо $\omega_{Y/X} \otimes^L \cdot$ и т. д.

Предложение 4.2.5. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда существуют канонические морфизмы

$$\begin{aligned} \alpha: (T_N f)^{-1} \nu_M(F) &\rightarrow \nu_N(f^{-1} F), \\ \beta: \nu_N(f^! F) &\rightarrow (T_N f)^! \nu_M(F), \end{aligned}$$

такие, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \omega_{T_N Y/T_M X} \otimes (T_N f)^{-1} \nu_M(F) & \xrightarrow{\omega_{Y/X} \otimes \alpha} & \nu_X(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1} F) \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \\ (T_N f)^! \nu_M(F) & \xleftarrow{\beta} & \nu_N(f^! F) \end{array}$$

Здесь вертикальные стрелки определены, как в (3.1.6).

Все эти морфизмы являются изоморфизмами на открытом множестве, на котором отображение $T_N f: T_N Y \rightarrow T_M X$ гладко.

В частности, если $f: Y \rightarrow X$ и $f|_N: N \rightarrow M$ — гладкие отображения, то определенные выше морфизмы являются изоморфизмами.

Доказательство. Так как отображения $\tilde{p}_Y$ и $\tilde{p}_X$ гладкие, то $\tilde{p}_Y^{-1} f^! \simeq \tilde{f}^! \tilde{p}_X^{-1}$. Получаем цепочки морфизмов

$$\begin{aligned} (T_N f)^{-1} \nu_M(F) &= (T_N f)^{-1} s_X^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \\ &\simeq s_Y^{-1} \tilde{f}'^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \\ &\rightarrow s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{f}^{-1} \tilde{p}_X^{-1} F \\ &\simeq s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{p}_Y^{-1} f^{-1} F \\ &= \nu_N(f^{-1} F), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_N(f^! F) &= s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{p}_Y^{-1} f^! F \\
&\simeq s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{f}^! \tilde{p}_X^{-1} F \\
&\simeq s_Y^{-1} \tilde{f}^! Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \\
&\rightarrow (T_N f)^! s_X^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \\
&= (T_N f)^! \nu_M(F).
\end{aligned}$$

Коммутативность следует из построения.

В тех точках, где $T_N f$ гладкое, гладкое и $\tilde{f}'$, а α, β и γ — изоморфизмы. $\square$

Рассмотрим, наконец, функтор тензорного произведения.

Пусть X и Y — многообразия, а M и N — подмногообразия в X и Y соответственно.

Предложение 4.2.6. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$; тогда в категории $\mathbf{D}^b(T_{M \times N}(X \times Y))$ существует естественный морфизм

$$\nu_M(F) \overset{L}{\boxtimes} \nu_N(G) \rightarrow \nu_{M \times N} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right).$$

Доказательство. Пусть $p_X, j_X, \tilde{p}_X, s_X$ — естественные отображения, связанные с нормальной деформацией многообразия M в X . Аналогично определим $p_Y, \dots, s_Y$. Мы будем писать $p, j, \tilde{p}, s$ вместо $p_X \times p_Y, \dots, s_X \times s_Y$ и $p', j', \tilde{p}', s'$ вместо $p_X \times p_Y, j_X \times j_Y, \tilde{p}_X \times \tilde{p}_Y, s_X \times s_Y$.

Естественное замкнутое вложение

$$k: (\widetilde{X \times Y})_{M \times N} \hookrightarrow \tilde{X}_M \times \tilde{Y}_N$$

определяет коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
T_M X \times T_N Y & \xrightarrow{s'} & \tilde{X}_M \times \tilde{Y}_M & \xleftarrow{j'} & \Omega_X \times \Omega_Y \\
\parallel & & \uparrow k & \swarrow p' \quad \nwarrow \tilde{p}' & \uparrow \tilde{k} \\
& \square & & X \times Y & \\
& & \uparrow p & \nwarrow \tilde{p} & \\
T_{M \times N}(X \times Y) & \xrightarrow{s} & (\widetilde{X \times Y})_{M \times N} & \xleftarrow{j} & \Omega_{X \times Y}
\end{array}$$

Имеем морфизмы

$$\begin{aligned}
\nu_M(F) \overset{L}{\boxtimes} \nu_N(G) &= s_X^{-1} Rj_{X*} \bar{p}_X^{-1} F \overset{L}{\boxtimes} s_Y^{-1} Rj_{Y*} \bar{p}_Y^{-1} G \\
&\rightarrow s'^{-1} Rj'_* \tilde{p}'^{-1} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right) \\
&\simeq s^{-1} k^{-1} Rj'_* \tilde{p}'^{-1} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right) \\
&\rightarrow s^{-1} Rj_* \tilde{k}^{-1} \tilde{p}'^{-1} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right) \\
&\simeq s^{-1} Rj_* \tilde{p}^{-1} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right).
\end{aligned}$$

□

Следствие 4.2.7. Пусть F и G принадлежат $\text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда в категории $\mathbf{D}^b(T_M X)$ существует естественный морфизм $\nu_M(F) \overset{L}{\otimes} \nu_M(G) \rightarrow \nu_M(F \overset{L}{\otimes} G)$.

Доказательство. Пусть Δ_X — диагональ в $X \times X$, а δ_X — вложение $\Delta_X \hookrightarrow X \times X$. Аналогично определим Δ_{TX} , $\Delta_{T_M X}$, δ_{TX} , $\delta_{T_M X}$. Отметим, что по (4.1.9) $\delta_{T_M X} = T_M \delta_X$. Применяя предложения 4.2.5 и 4.2.6, получаем морфизмы

$$\begin{aligned}
\nu_M(F) \overset{L}{\otimes} \nu_M(G) &\simeq \delta_{T_M X}^{-1} \left(\nu_M(F) \overset{L}{\boxtimes} \nu_M(G) \right) \\
&\rightarrow \delta_{T_M X}^{-1} \left(\nu_{M \times N} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right) \right) \\
&\rightarrow \nu_M \left(\delta_X^{-1} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right) \right) \\
&\simeq \nu_M \left(F \overset{L}{\otimes} G \right).
\end{aligned}$$

□

4.3. Микролокализация

Пусть M — замкнутое подмногообразие многообразия X коразмерности l (как в § 4.1). Мы обозначим через $T_M^* X$ конормальное расслоение на M в X , т. е. ядро отображения $M \times_X T^* X \rightarrow T^* M$. Обозначим через π проекцию $T^* X \rightarrow X$ и ее ограничение $T_M^* X \rightarrow M$ (мы будем иногда писать π вместо $i \circ \pi$, где $i: M \rightarrow X$).

Обозначим через $\dot{\pi}$ ограничение проекции π на $\dot{T}^* X = T^* X \setminus X$.

Определение 4.3.1. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Микролокализацией объекта F вдоль M , обозначаемой $\mu_M(F)$, называется преобразование Фурье–Сато специализации $\nu_M(F)$:

$$\mu_M(F) = \nu_M(F)^\wedge.$$

Применяя теорему 4.2.3 и результаты § 3.7, получаем такой результат:

Теорема 4.3.2. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда

(i) $\mu_M(F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(T_M^*X))$.

(ii) Пусть V — открытый выпуклый конус в T_M^*X ; тогда

$$H^j(V; \mu_M(F)) = \varinjlim_{U, Z} H_Z^j(U \cap V; F),$$

где U пробегает семейство открытых подмножеств в X , таких, что $U \cap M = \pi(V)$, а Z пробегает семейство замкнутых подмножеств, таких, что $C_M(Z) \subset V^\circ$. В частности, пусть $p \in T_M^*X$; тогда

$$H^j(\mu_M(F))_p = \varinjlim_Z H_Z^j(F)_{\pi(p)},$$

где Z пробегает семейство замкнутых подмножеств в X , таких, что $C_M(Z)_{\pi(p)} \subset \{v \in (T_M^*X)_{\pi(p)}; \langle v, p \rangle > 0\} \cup \{0\}$.

(iii) Пусть Z — собственный замкнутый выпуклый конус в T_M^*X , содержащий нулевое сечение над M . Тогда

$$H_Z^j(T_M^*X; \mu_M(F) \otimes \sigma_{Z/M/X}) = \varinjlim_U H^{j-1}(U; F),$$

где U пробегает семейство открытых подмножеств в X , таких, что $C_M(X \setminus U) \cap \text{Int } Z^{\text{oa}} = \emptyset$.

(iv) $\mu_M(F)|_M \simeq R\pi_*\mu_M(F) \simeq R\Gamma_M(F)|_M \simeq i^!F,$

$$R\pi_!\mu_M(F) \simeq R\Gamma_M(\mu_M(F)) \simeq i^{-1}F \otimes \omega_{M/X}.$$

Заметим, что

$$i^{-1}F \otimes \omega_{M/X} = F|_M \otimes \sigma_{Z/M/X}[-l].$$

Применяя сформулированные результаты к выделенному треугольнику

$$R\Gamma_M(\mu_M(F)) \longrightarrow R\pi_*\mu_M(F) \longrightarrow R\dot{\pi}_*\mu_M(F) \xrightarrow{+1},$$

получаем выделенный треугольник

$$(4.3.1) \quad F|_M \otimes \omega_{M/X} \longrightarrow R\Gamma_M(F)|_M \longrightarrow R\pi_* \mu_M(F) \xrightarrow{+1}.$$

Пусть теперь $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий и $N \subset Y$ — замкнутое подмногообразие коразмерности k , такое, что $f(N) \subset M$. Отображение Tf (см. (4.1.8)) определяет отображения

$$(4.3.2) \quad T^*Y \xleftarrow{f'} Y \times_X T^*X \xrightarrow{f_*} T^*X.$$

Из этого следует существование отображений

$$(4.3.3) \quad T_N^*Y \xleftarrow{f'_N} N \times_M T_M^*X \xrightarrow{f_{N*}} T_M^*X.$$

Если нет опасности путаницы, то мы будем писать f_π вместо $f_{N\pi}$ и ${}^t f'$ вместо ${}^t f'_N$. Положим

$$(4.3.4) \quad T_Y^*X = \text{Ker}({}^t f': Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y) = {}^t f'^{-1}(T_Y^*Y).$$

Замечание 4.3.3. В литературе часто встречаются обозначения ρ_f и $\bar{\omega}_f$ или просто ρ и $\bar{\omega}$ вместо ${}^t f'$ и f_π соответственно. Мы такие обозначения не используем.

Применим функтор Фурье–Сато к морфизмам предложений 4.2.4 и 4.2.5.

Предложение 4.3.4. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Тогда существует коммутативная диаграмма канонических морфизмов

$$\begin{array}{ccc} Rf_{N\pi}! {}^t f'^{-1}_N \mu_N(G) & \longrightarrow & \mu_M(Rf_* G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rf_{N\pi*}({}^t f'_N! \mu_N(G) \otimes \omega_{Y/X} \otimes \omega_{N/M}^{-1}) & \longleftarrow & \mu_M(Rf_* G). \end{array}$$

Если отображения $\text{supp}(G) \rightarrow X$ и $C_N(\text{supp}(G)) \rightarrow T_M X$ собственные и если $f^{-1}(M) \cap \text{supp}(G) \subset N$, то эти морфизмы являются изоморфизмами.

В частности, если $f^{-1}(M) = N$, а f чистое по отношению к M и собственное на $\text{supp}(G)$, то все эти морфизмы являются изоморфизмами.

Доказательство. Пусть $H = \nu_N(G)$. Применяя предложения 3.7.13 и 3.7.14 к $f' = f_\tau \circ f'_N$, получаем

$$\begin{aligned} (R(T_N f)_! H)^\wedge &\simeq Rf_{\pi!}(Rf'_{N!} H)^\wedge \\ &\simeq Rf_{\pi!} f'^{-1}_{N'}(H^\wedge), \\ (R(T_N f)_* H)^\wedge &\simeq Rf_{\pi*}(Rf'_{N*} H)^\wedge \\ &\simeq Rf_{\pi*}(f'^1_{N'} H^\wedge \otimes \omega_{N \times_M T_M^* X / T_N^* Y}^{\otimes -1}). \end{aligned}$$

Утверждение теперь следует из предложения 4.2.4 и формулы (4.2.4). $\square$

Предложение 4.3.5. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$.

- (i) Существует коммутативная диаграмма канонических морфизмов

$$\begin{array}{ccc} R^i f'_{N!}(\omega_{N/M} \otimes f'^{-1}_{N\pi} \mu_M(F)) & \longrightarrow & \mu_N(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1} F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^i f'_{N*} f'^1_{N\pi} \mu_M(F) & \longleftarrow & \mu_N(f^1 F) \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки определены формулами (3.1.6).

- (ii) Если $f: Y \rightarrow X$ и $f|_N: N \rightarrow M$ — гладкие отображения, то все эти морфизмы являются изоморфизмами.
 (iii) Если f трансверсально к M и $f^{-1}(M) = N$, то существует естественный морфизм

$$R^i f'_{N*} f'^{-1}_{N\pi} \mu_M(F) \rightarrow \mu_N(f^{-1} F).$$

Доказательство. Положим $H = \nu_M(F)$ и применим предложения 3.7.13 и 3.7.14. Имеем

$$\begin{aligned} (T_N f)^! A_{T_M X} \otimes ((T_N f)^{-1} H)^\wedge &\simeq (f'^1_{N'} A_{N \times_M T_M X} \otimes f'^{-1}_{N'}(f'^1_{N\tau} A_{T_M X} \otimes f'^{-1}_{N\tau} H))^\wedge \\ &\simeq R^i f'_{N!}(f'^1_{N\tau} A_{T_M X} \otimes f'^{-1}_{N\tau} H)^\wedge \\ &\simeq R^i f'_{N!}(f'^1_{N\pi} A_{T_M^* X} \otimes f'^{-1}_{N\pi}(H^\wedge)), \\ ((T_N f)^! H)^\wedge &\simeq (f'^1_{N'} f'^1_{N\tau} H)^\wedge \\ &\simeq R^i f'_{N*} f'^1_{N\pi}(H^\wedge). \end{aligned}$$

То есть (i), (ii) следуют из предложения 4.2.5.

Если f трансверсально к M и $f^{-1}(M) = N$, то ${}^t f'_N: T_N^* Y \rightarrow N \times_M T_M^* X$ является изоморфизмом и $\omega_{N/M} \simeq (\omega_{Y/X})|_N$. $\square$

Отметим, что если f и $f|_N$ — гладкие отображения, то $Y \times_X T^* X$ является подрасслоением расслоения $T^* Y$ и f_* индуцирует изоморфизм $(Y \times_X T^* X) \cap T_N^* Y \xrightarrow{\sim} Y \times_X T_M^* X$.

Мы вернемся к изучению морфизмов, определенных в предложениях 4.3.4 и 4.3.5, в гл. 5 и 6, где в терминах микронесителей пучков будут сформулированы достаточные условия того, что эти морфизмы являются изоморфизмами.

Рассмотрим теперь тензорное произведение.

Предложение 4.3.6. *В условиях предложения 4.2.6 существует естественный морфизм*

$$\mu_M(F) \overset{L}{\boxtimes} \mu_N(G) \rightarrow \mu_{M \times N} \left(F \overset{L}{\boxtimes} G \right).$$

Доказательство. Следует применить предложения 4.2.6 и 3.7.15. $\square$

Предложение 4.3.7. *Пусть M — подмногообразие в X и $\gamma: T_M^* X \times_M T_M^* X \rightarrow T_M^* X$ — морфизм, заданный сложением векторов. Тогда для любых $F, G \in \text{Ob}(\mathcal{D} \text{ в } (X))$ существует естественный морфизм*

$$(4.3.5) \quad R\gamma_* \left(\mu_M(F) \overset{L}{\boxtimes}_M \mu_M(G) \right) \rightarrow \mu_M \left(F \overset{L}{\otimes} G \right) \otimes \omega_{M/X}.$$

Доказательство. Пусть $\delta: T_M X \hookrightarrow T_M X \times_M T_M X$ — диагональное вложение. Тогда

$$\nu_M(F) \overset{L}{\otimes} \nu_M(G) \simeq \delta^{-1} \left(\nu_M(F) \overset{L}{\boxtimes}_M \nu_M(G) \right).$$

Отметим, что ${}^t \delta = \gamma$; тогда, применяя предложения 3.7.13 и 3.7.15, получаем

$$\begin{aligned} \left(\omega_{T_M X / T_M X \times_M T_M X} \otimes \nu_M(F) \overset{L}{\otimes} \nu_M(G) \right)^\wedge &\simeq R^t \delta_* \left(\nu_M(F) \overset{L}{\boxtimes}_M \nu_M(G) \right)^\wedge \\ &\simeq R\gamma_* \left(\mu_M(F) \overset{L}{\boxtimes}_M \mu_M(G) \right). \end{aligned}$$

Теперь остается применить следствие 4.2.7. $\square$

Замечание 4.3.8. Морфизмы предложений 4.3.4 и 4.3.5 связаны следующим образом (доказательство предоставляется читателю):

- (а) Для любого морфизма $\varphi: G \rightarrow f^!F$ в категории $\mathbf{D}^b(Y)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} Rf_{N\pi*}({}^t f_N'^{-1} \mu_N(G)) & \xrightarrow{\alpha} & \mu_M(Rf_* G) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ Rf_{N\pi*}({}^t f_N'^{-1} \mu_N(f^! F)) & \xrightarrow{\beta} & \mu_M(F), \end{array}$$

где α — морфизм, заданный первой горизонтальной стрелкой в предложении 4.3.4, а морфизм β — второй горизонтальной стрелкой в предложении 4.3.5.

- (б) Аналогично, для любого морфизма $\psi: F \rightarrow Rf_* G$ в категории $\mathbf{D}^b(X)$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mu_M(F) & \xrightarrow{\alpha'} & Rf_{N\pi*}({}^t f_N'^! \mu_N(f^{-1} F) \otimes \omega_{Y/X} \otimes \omega_{N/M}^{\otimes -1}) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ \mu_M(Rf_* G) & \xrightarrow{\beta'} & Rf_{N\pi*}({}^t f_N'^! \mu_N(G) \otimes \omega_{Y/X} \otimes \omega_{N/M}^{\otimes -1}), \end{array}$$

где морфизм α' задан первой горизонтальной стрелкой в предложении 4.3.5, а морфизм β' — второй горизонтальной стрелкой в предложении 4.3.4.

4.4. Функтор μ_{hot}

Пусть f — морфизм из Y в X и $\Delta_f \subset X \times Y$ — его график. Обозначим через Δ_X (соответственно Δ_Y) диагональ в $X \times X$ (соответственно в $Y \times Y$). Мы отождествим $Y \times_X T^* X$ с $T_{\Delta_f}^*(X \times Y)$ с помощью проекции $T^*(X \times Y) \rightarrow (T^* X) \times Y$ и аналогично отождествим $T^* X$ (соответственно $T^* Y$) с $T_{\Delta_X}^*(X \times X)$ (соответственно $T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)$) с помощью первой проекции. Если нет опасности путаницы, то мы будем писать Δ вместо Δ_f . Имеет место диаграмма морфизмов (см. (4.3.3))

$$(4.4.1) \quad \begin{array}{ccccc} T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) & \longleftarrow & T_{\Delta_f}^*(X \times Y) & \longrightarrow & T_{\Delta_X}^*(X \times X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ T^* Y & \xleftarrow{f'} & Y \times_X T^* X & \xrightarrow{f_*} & T^* X \end{array}$$

Существует полезная формула

$$(4.4.2) \quad \omega_{Y \times_X T^*X/T^*Y} \otimes \omega_{Y \times_X T^*X/T^*X} \simeq \omega_{Y \times_X T^*X}.$$

Обозначим через $f_1 : Y \times Y \rightarrow X \times Y$ отображение (f, id_Y) и через $f_2 : X \times Y \rightarrow X \times X$ отображение (id_X, f) . Получаем коммутативную диаграмму, в которой первый квадрат декартов, а f_2 трансверсально к Δ_X :

$$(4.4.3) \quad \begin{array}{ccccc} Y \times Y & \xrightarrow{f_1} & X \times Y & \xrightarrow{f_2} & X \times X \\ \uparrow & & \uparrow & \square & \uparrow \\ \Delta_Y & \xrightarrow{\sim} & \Delta & \xrightarrow{f} & \Delta_X \end{array}$$

Обозначим через q_j (соответственно $\tilde{q}_j$, соответственно q_j') j -ю проекцию ($j = 1, 2$), определенную на $X \times X$ (соответственно на $X \times Y$, соответственно на $Y \times Y$).

Определение 4.4.1. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X)), G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Положим

- (i) $\mu\text{hom}(G \rightarrow F) = \mu_\Delta R\text{Hom}(\tilde{q}_2^{-1}G, \tilde{q}_1^!F)$,
- (ii) $\mu\text{hom}(F \leftarrow G) = (\mu_\Delta R\text{Hom}(\tilde{q}_1^{-1}F, \tilde{q}_2^!G))^a$,
- (iii) если $Y = X$ и f — тождественное отображение, то положим

$$\mu\text{hom}(G, F) = \mu\text{hom}(G \rightarrow F) = \mu_{\Delta_X}(R\text{Hom}(q_2^{-1}G, q_1^!F)).$$

В формуле (ii) символ $(\cdot)^a$ обозначает обратный образ антиподального отображения на $Y \times_X T^*X$.

Пусть π обозначает проекцию из $T_\Delta^*(X \times Y)$ на $\Delta \simeq Y$.

Предложение 4.4.2. (i) *Существуют канонические морфизмы*

$$\begin{aligned} R\pi_* \mu\text{hom}(G \rightarrow F) &\simeq R\text{Hom}(G, f^!F), \\ R\pi_* \mu\text{hom}(F \leftarrow G) &\simeq R\text{Hom}(f^{-1}F, G). \end{aligned}$$

В частности, когда $Y = X$ и f — тождественное отображение, то

$$R\pi_* \mu\text{hom}(G, F) \simeq R\text{Hom}(G, F).$$

(ii) Предположим, что G (соответственно F) кохомологически конструктивен. Тогда

$$R\pi_* \mu\text{hom}(G \rightarrow F) \simeq R\text{Hom}(G, A_Y) \overset{L}{\otimes} f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X}$$

(соответственно

$$R\pi_* \mu\text{hom}(F \leftarrow G) \simeq f^{-1}R\text{Hom}(F, A_X) \overset{L}{\otimes} G).$$

В частности, когда $Y = X$ и f — тождественное отображение, то

$$R\pi_* \mu\text{hom}(G, F) \simeq R\text{Hom}(G, A_X) \overset{L}{\otimes} F.$$

Доказательство. (i) По теореме 4.3.2 существует цепочка морфизмов

$$\begin{aligned} R\pi_* \mu_{\Delta} R\text{Hom}(\tilde{q}_2^{-1}G, \tilde{q}_1^{-1}F) &\simeq R\tilde{q}_{2*} R\Gamma_{\Delta} R\text{Hom}(\tilde{q}_2^{-1}G, \tilde{q}_1^{-1}F) \\ &\simeq R\tilde{q}_{2*} R\text{Hom}(\tilde{q}_2^{-1}G, R\Gamma_{\Delta} \tilde{q}_1^{-1}F) \\ &\simeq R\text{Hom}(G, R\tilde{q}_{2*} R\Gamma_{\Delta} \tilde{q}_1^{-1}F) \\ &\simeq R\text{Hom}(G, f^!F). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} R\pi_* \mu_{\Delta} R\text{Hom}(\tilde{q}_1^{-1}F, \tilde{q}_2^{-1}G) &\simeq R\tilde{q}_{2*} R\Gamma_{\Delta} R\text{Hom}(\tilde{q}_1^{-1}F, \tilde{q}_2^{-1}G) \\ &\simeq R\tilde{q}_{2*} R\text{Hom}((\tilde{q}_1^{-1}F)_{\Delta}, \tilde{q}_2^{-1}G) \\ &\simeq R\text{Hom}(R\tilde{q}_{2!}(\tilde{q}_1^{-1}F)_{\Delta}, G) \\ &\simeq R\text{Hom}(f^{-1}F, G). \end{aligned}$$

(ii) Доказательство проводится аналогично (см. предложение 3.4.4). $\square$

Функтор μhom обобщает функтор микролокализации Сато.

Предложение 4.4.3. Пусть Y — замкнутое подмногообразие в X , j — вложение $T_Y^*X \rightarrow T^*X$ и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Существует изоморфизм

$$\mu\text{hom}(A_Y, F) \simeq j_* \mu_Y(F).$$

Доказательство. Пусть f — иммерсия $Y \hookrightarrow X$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{\Delta_X} R\text{Hom}(q_2^{-1}A_Y, q_1^{-1}F) &\simeq \mu_{\Delta_X} (Rf_{2*} f_{2!} q_1^{-1}F) \\ &\simeq \mu_{\Delta_X} (Rf_{2*} \tilde{q}_1^{-1}F). \end{aligned}$$

Отождествим $T_{\Delta}^*(X \times Y)$ с $Y \times_X T_{\Delta_X}^*(X \times X)$. Применяя предложение 4.3.4, получаем

$$\mu_{\Delta_X}(Rf_{2*}\tilde{q}_1^!F) \simeq \mu_{\Delta}(\tilde{q}_1^!F).$$

Тогда из предложения 4.3.5 вытекает, что

$$\mu_{\Delta}(\tilde{q}_1^!F) \simeq j_*\mu_Y(F).$$

□

Стебель объекта $\mu\mathcal{H}om(G, F)$ можно описать на языке γ -топологии (см. §3.5).

Предложение 4.4.4. Пусть X — векторное пространство, а F и G принадлежат $\text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и пусть $(x_0; \xi_0) \in T^*X$. Тогда

$$H^j(\mu\mathcal{H}om(G, F))_{(x_0; \xi_0)} = \varinjlim_{U, \gamma} H^j(R\Gamma(U; R\mathcal{H}om)(\phi_{\gamma}^{-1}R\phi_{\gamma*}G_U, F)),$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей точки x_0 , а γ пробегает семейство замкнутых выпуклых собственных конусов в X , таких, что $\gamma \subset \{v \in X; \langle v, \xi_0 \rangle < 0\} \cup \{0\}$.

Напомним, что ϕ_{γ} обозначает отображение $X \rightarrow X_{\gamma}$, где X_{γ} — пространство X с γ -топологией.

Доказательство. Пусть γ — замкнутый собственный конус в X . Положим

$$(4.4.4) \quad Z_{\gamma} = \{(x, x') \in X \times X; x' - x \in \gamma\}.$$

Тогда

$$H^j(\mu\mathcal{H}om(G, F))_{(x_0; \xi_0)} = \varinjlim_{U, V, \gamma} H^j(R\Gamma_{Z_{\gamma}}(U \times V; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F))),$$

где U и V пробегают семейство открытых окрестностей точки x_0 , а γ пробегает семейство замкнутых выпуклых собственных конусов, удовлетворяющих условиям рассматриваемого предложения. Тогда

$$\begin{aligned} R\Gamma_{Z_{\gamma}}(U \times V; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \\ \simeq R\Gamma(U \times X; R\mathcal{H}om((q_2^{-1}G_V)_{Z_{\gamma}}, q_1^!F)) \\ \simeq R\Gamma(U; R\mathcal{H}om(Rq_{1!}(q_2^{-1}G_V)_{Z_{\gamma}}, F)). \end{aligned}$$

Теперь результат следует из предложения 3.5.4.

□

Рассмотрим функторальные свойства $\mu\mathcal{H}om$.

Предложение 4.4.5. В условиях определения 4.4.1 существуют коммутативные диаграммы канонических морфизмов

$$\begin{array}{ccc}
 \text{(i)} & R^!f'_! \mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F) & \longrightarrow \mu\mathcal{H}om(G, f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & R^!f'_* \mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F) & \longleftarrow \mu\mathcal{H}om(G, f^!F) \\
 \\
 \text{(ii)} & R^!f'_! \mu\mathcal{H}om(F \leftarrow G) & \longrightarrow \mu\mathcal{H}om(f^!F, G \otimes \omega_{Y/X}) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & R^!f'_* \mu\mathcal{H}om(F \leftarrow G) & \longleftarrow \mu\mathcal{H}om(f^{-1}F, G), \\
 \\
 \text{(iii)} & Rf_{\pi!} \mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F) & \longrightarrow \mu\mathcal{H}om(Rf_*G, F) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & Rf_{\pi*} \mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F) & \longrightarrow \mu\mathcal{H}om(Rf_!G, F) \\
 \\
 \text{(iv)} & Rf_{\pi!} \mu\mathcal{H}om(F \leftarrow G) & \longrightarrow \mu\mathcal{H}om(F, Rf_!G) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & Rf_{\pi*} \mu\mathcal{H}om(F \leftarrow G) & \longleftarrow \mu\mathcal{H}om(F, Rf_*G)
 \end{array}$$

Если f гладкое, то все морфизмы в (i) и (ii) являются изоморфизмами. Если f является собственным на $\text{supp}(G)$, то все морфизмы в (iii) и (iv) — изоморфизмы.

Перед тем как приступить к доказательству, напомним (теорема 3.1.5 и формула (2.6.14)), что морфизм $Rf_!G \rightarrow F$ задает морфизм $G \rightarrow f^!F$, и наоборот, а морфизм $F \rightarrow Rf_*G$ задает морфизм $f^{-1}F \rightarrow G$, и наоборот. Мы систематически будем использовать эти свойства (заменяя Y на $Y \times_X T^*X$ и X на T^*Y или на T^*X). Мы также будем использовать морфизмы, построенные в §2.6.

Доказательство. Мы сохраняем обозначения, введенные в начале этого параграфа. Применяя предложение 4.3.4 и 4.3.5, получаем следующую цепочку естественных морфизмов:

$$\begin{aligned}
 \text{(i,a)} \quad & \mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F) \\
 &= \mu_{\Delta} R\mathcal{H}om(\tilde{q}_2^{-1}G, \tilde{q}_1^!F) \\
 &\rightarrow \mu_{\Delta} R\mathcal{H}om(\tilde{q}_2^{-1}G, Rf_{1*}f_1^{-1}\tilde{q}_1^!F) \\
 &\simeq \mu_{\Delta} Rf_{1*} R\mathcal{H}om(q_2'^{-1}G, q_1''f^{-1}F) \\
 &\rightarrow {}^t f'^! \mu_{\Delta_Y} R\mathcal{H}om(q_2'^{-1}G, q_1''f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i, b) \quad \mu hom(G, f^! F) &= \mu_{\Delta_Y} RHom(q_2^{-1} G, q_1^! f^! F) \\
&\simeq \mu_{\Delta_Y} f_1^! RHom(\tilde{q}_2^{-1} G, \tilde{q}_1^! F) \\
&\rightarrow R^! f_{*} \mu_{\Delta} RHom(\tilde{q}_2^{-1} G, \tilde{q}_1^! F).
\end{aligned}$$

Если f гладкое, то последний морфизм является изоморфизмом.

$$\begin{aligned}
(ii, a) \quad \mu hom(F \leftarrow G) &= \mu_{\Delta} RHom(\tilde{q}_1^{-1} F, \tilde{q}_2^! G)^a \\
&\rightarrow \mu_{\Delta} RHom(Rf_{1!} f_1^! \tilde{q}_1^{-1} F, \tilde{q}_2^! G)^a \\
&\simeq \mu_{\Delta} Rf_{1*} RHom(q_1'^{-1} f^! F, \tilde{q}_2^! G)^a \\
&\rightarrow {}^! f'^! \mu_{\Delta_Y} RHom(q_1'^{-1} f^! F, \tilde{q}_2^! G \otimes \omega_{Y/X})^a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii, b) \quad \mu hom(f^{-1} F, G) &\simeq \mu_{\Delta_Y} RHom(q_1'^{-1} f^{-1} F, q_2^! G)^a \\
&\simeq \mu_{\Delta_Y} RHom(Rf_1^{-1} \tilde{q}_1^{-1} F, f_1^! \tilde{q}_2^! G)^a \\
&\simeq \mu_{\Delta_Y} f_1^! RHom(\tilde{q}_1^{-1} F, \tilde{q}_2^! G)^a \\
&\rightarrow R^! f_{*} \mu_{\Delta} RHom(\tilde{q}_1^{-1} F, \tilde{q}_2^! G)^a.
\end{aligned}$$

Если f гладкое, то последний морфизм является изоморфизмом.

$$\begin{aligned}
(iii, a) \quad \mu hom(G \rightarrow F) &\rightarrow \mu_{\Delta} RHom(f_2^{-1} Rf_{2*} \tilde{q}_2^{-1} G, \tilde{q}_1^! F) \\
&\xrightarrow{\sim} \mu_{\Delta} f_2^! RHom(q_2^{-1} Rf_{*} G, q_1^! F) \\
&\rightarrow f_{\pi}^! \mu_{\Delta_X} RHom(q_2^{-1} Rf_{*} G, q_1^! F),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii, b) \quad \mu hom(Rf_! G, F) &= \mu_{\Delta_X} RHom(q_2^{-1} Rf_! G, q_1^! F) \\
&\simeq \mu_{\Delta_X} Rf_{2*} RHom(\tilde{q}_2^{-1} G, \tilde{q}_1^! F) \\
&\rightarrow Rf_{\pi*} \mu_{\Delta} RHom(\tilde{q}_2^{-1} G, \tilde{q}_1^! F).
\end{aligned}$$

Если f собственное на $\text{supp}(G)$, то последний морфизм является изоморфизмом.

$$\begin{aligned}
(iv, a) \quad \mu hom(F \leftarrow G) &\rightarrow \mu_{\Delta} RHom(\tilde{q}_1^{-1} F, f_2^! Rf_{2!} \tilde{q}_2^! G)^a \\
&\xrightarrow{\sim} \mu_{\Delta} f_2^! RHom(q_1^{-1} F, q_2^! Rf_! G)^a \\
&\rightarrow f_{\pi}^! \mu_{\Delta_X} RHom(q_1^{-1} F, q_2^! Rf_! G)^a,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{iv}, b) \quad \mu\hbar\text{om}(F, Rf_*G) &\simeq \mu_{\Delta_X} R\hbar\text{om}(q_1^{-1}F, q_2^!Rf_*G)^a \\
&\simeq \mu_{\Delta_X} Rf_{2*} R\hbar\text{om}(\tilde{q}_1^{-1}F, \tilde{q}_2^!G)^a \\
&\rightarrow Rf_{\pi*} \mu_{\Delta} R\hbar\text{om}(\tilde{q}_1^{-1}F, \tilde{q}_2^!G)^a.
\end{aligned}$$

Если f собственное на $\text{supp}(G)$, то последний морфизм является изоморфизмом.

Эти морфизмы дают нам все горизонтальные стрелки предложения. Вертикальные стрелки — это естественные морфизмы $f_! \rightarrow f_*$ и $f^{-1} \otimes \omega_{Y/X} \rightarrow f^!$. Доказательство коммутативности диаграммы мы оставляем читателю. $\square$

Предложение 4.4.6. *В условиях определения 4.4.1 существуют канонические морфизмы*

- (i) $R^t f'_! f_\pi^{-1} \mu\hbar\text{om}(Rf_!G, F) \rightarrow \mu\hbar\text{om}(G, f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X}),$
- (ii) $R^t f'_! f_\pi^{-1} \mu\hbar\text{om}(F, Rf_*G) \rightarrow \mu\hbar\text{om}(f^!F, G \otimes \omega_{Y/X}),$
- (iii) $Rf_{\pi!} {}^t f'^{-1} \mu\hbar\text{om}(G, f^!F) \rightarrow \mu\hbar\text{om}(Rf_*G, F),$
- (iv) $Rf_{\pi!} {}^t f'^{-1} \mu\hbar\text{om}(f^{-1}F, G) \rightarrow \mu\hbar\text{om}(F, Rf_!G).$

Если f гладкое и собственное на $\text{supp}(G)$, то морфизмы (iii) и (iv) являются изоморфизмами.

Доказательство. Имеем следующие морфизмы:

- (i)
$$\begin{aligned}
f_\pi^{-1} \mu\hbar\text{om}(Rf_!G, F) &\rightarrow f_\pi^{-1} Rf_{\pi*} \mu\hbar\text{om}(G \rightarrow F) \\
&\rightarrow \mu\hbar\text{om}(G \rightarrow F) \\
&\rightarrow {}^t f'^! \mu\hbar\text{om}(G, f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X}),
\end{aligned}$$
- (ii)
$$\begin{aligned}
f_\pi^{-1} \mu\hbar\text{om}(F, Rf_*G) &\rightarrow f_\pi^{-1} Rf_{\pi*} \mu\hbar\text{om}(F \leftarrow G) \\
&\rightarrow \mu\hbar\text{om}(F \leftarrow G) \\
&\rightarrow {}^t f'^! \mu\hbar\text{om}(f^!F, G \otimes \omega_{Y/X}),
\end{aligned}$$
- (iii)
$$\begin{aligned}
{}^t f'^{-1} \mu\hbar\text{om}(G, f^!F) &\rightarrow {}^t f'^{-1} R^t f'_! \mu\hbar\text{om}(G \rightarrow F) \\
&\rightarrow \mu\hbar\text{om}(G \rightarrow F) \\
&\rightarrow f_\pi^! \mu\hbar\text{om}(Rf_*G, F),
\end{aligned}$$
- (iv)
$$\begin{aligned}
{}^t f'^{-1} \mu\hbar\text{om}(f^{-1}F, G) &\rightarrow {}^t f'^{-1} R^t f'_! \mu\hbar\text{om}(F \leftarrow G) \\
&\rightarrow \mu\hbar\text{om}(F \leftarrow G) \\
&\rightarrow f_\pi^! \mu\hbar\text{om}(F, Rf_!G).
\end{aligned}$$

Если f гладкое и $H \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times_X T^*X))$, то $H \rightarrow {}^t f'^{-1} R^t f'_* H$ — изоморфизм. Применяя предложение 4.4.5, получаем, что в этом случае (iii) и (iv) — изоморфизмы. $\square$

Пусть F_1 и F_2 принадлежат $\mathbf{D}^b(X)$. Существуют канонические морфизмы

(4.4.5)

$$\begin{array}{ccc} & \mu\text{hom}(f^! F_2, f^! F_1) & \\ \mu\text{hom}(f^! F_2, f^{-1} F_1 \otimes \omega_{Y/X}) \nearrow & & \searrow \mu\text{hom}(f^{-1} F_2 \otimes \omega_{Y/X}, f^! F_1) \\ & \mu\text{hom}(f^{-1} F_2, f^{-1} F_1) & \end{array}$$

Аналогично, пусть G_1 и G_2 принадлежат $\mathbf{D}^b(Y)$. Существуют канонические морфизмы

(4.4.6)

$$\begin{array}{ccc} & \mu\text{hom}(Rf_! G_2, Rf_! G_1) & \\ \mu\text{hom}(Rf_* G_2, Rf_! G_1) \nearrow & & \searrow \mu\text{hom}(Rf_! G_2, Rf_* G_1) \\ & \mu\text{hom}(Rf_* G_2, Rf_* G_1) & \end{array}$$

Предложение 4.4.7. Пусть F_1, F_2, G_1, G_2 определены, как выше. Тогда существуют коммутативные диаграммы канонических морфизмов

$$\begin{array}{ccc} \text{(i)} & R^t f'_! f_\pi^{-1} \mu\text{hom}(F_2, F_1) & \longrightarrow \mu\text{hom}(f^! F_2, f^{-1} F_1 \otimes \omega_{Y/X}) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & R^t f'_* f_\pi^! (\mu\text{hom}(F_2, F_1) \otimes \omega_{Y/X}^{-1}) & \longleftarrow \mu\text{hom}(f^{-1} F_2 \otimes \omega_{Y/X}, f^! F_1) \\ \text{(ii)} & Rf_{\pi!} {}^t f'^{-1} \mu\text{hom}(G_2, G_1) & \longrightarrow \mu\text{hom}(Rf_* G_2, Rf_! G_1) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & Rf_{\pi*} ({}^t f'^! \mu\text{hom}(G_2, G_1) \otimes \omega_{Y/X}) & \longleftarrow \mu\text{hom}(Rf_! G_2, Rf_* G_1) \end{array}$$

Если f гладко, то все морфизмы в (i) — изоморфизмы.

Если f — замкнутое вложение, то все морфизмы в (ii) являются изоморфизмами.

Доказательство. (i) Из предложения 4.3.5 следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} f_\pi^{-1} \mu\text{hom}(F_2, F_1) & \longrightarrow & \mu_\Delta f_2^{-1} R\text{hom}(q_2^{-1} F_2, q_1^! F_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_\pi^! \mu\text{hom}(F_2, F_1) \otimes \omega_{Y/X}^{-1} & \longleftarrow & \mu_\Delta f_2^! R\text{hom}(q_2^{-1} F_2 \otimes \omega_{Y/X}, q_1^! F_1) \end{array}$$

Применяя морфизм $f^{-1}R\mathcal{H}om(\cdot, \cdot) \rightarrow R\mathcal{H}om(f^!(\cdot), f^!(\cdot))$ (см. упр. 3.9), получаем

$$(4.4.7) \quad \begin{array}{ccc} f_{\pi}^{-1}\mu\mathcal{H}om(F_2, F_1) & \longrightarrow & \mu\mathcal{H}om(f^!F_2 \rightarrow F_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_{\pi}^!\mu\mathcal{H}om(F_2, F_1) \otimes \omega_{Y/X}^{\otimes -1} & \longleftarrow & \mu\mathcal{H}om((f^{-1}F_2 \otimes \omega_{Y/X}) \rightarrow F_1) \end{array}$$

Если мы применим функтор $R^!f_!^*$ к первой горизонтальной стрелке диаграммы (4.4.7), а функтор $R^!f_{*}^*$ — ко второй, то результат будет следовать из предложения 4.4.5(i).

(ii) Из предложения 4.3.4 следует существование коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} {}^!f'^{-1}\mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) & \longrightarrow & \mu_{\Delta}Rf_{1!}R\mathcal{H}om(q_1'^{-1}G_2, q_2'^!G_1)^a \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^!f'^!\mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) \otimes \omega_{Y/X} & \longleftarrow & \mu_{\Delta}Rf_{1*}R\mathcal{H}om(q_1'^{-1}G_2, q_2'^!G_1)^a \end{array}$$

из которой получаем

$$(4.4.8) \quad \begin{array}{ccc} {}^!f'^{-1}\mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) & \longrightarrow & \mu\mathcal{H}om(Rf_{*}G_2 \leftarrow G_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}^!f'^!\mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) \otimes \omega_{Y/X} & \longleftarrow & \mu\mathcal{H}om(Rf_{!}G_2 \leftarrow G_1) \end{array}$$

Если мы применим функтор $Rf_{\pi!}$ к первой горизонтальной стрелке в (4.4.8), а функтор $Rf_{\pi*}$ — ко второй, то результат будет следовать из предложения 4.4.5 (iv).

Пусть f гладкое. Из предложения 4.4.5(i) вытекает существование изоморфизма

$$R^!f_!\mu\mathcal{H}om(f^!F_2 \rightarrow F_1) \simeq \mu\mathcal{H}om(f^!F_2, f^{-1}F_1 \otimes \omega_{Y/X}).$$

С другой стороны, по предложению 4.3.5

$$\begin{aligned} \mu\mathcal{H}om(f^!F_2 \rightarrow F_1) \otimes \omega_{Y/X} &\simeq \mu_{\Delta}R\mathcal{H}om(f_2^{-1}q_2^{-1}F_2, f_2^!q_1^!F_1) \\ &\simeq \mu_{\Delta}f_2^!R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2, q_1^!F_1) \\ &\simeq f_{\pi}^!\mu_{\Delta_X}R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2, q_1^!F_1), \end{aligned}$$

а это доказывает, что морфизмы в (i) являются изоморфизмами.

Пусть теперь f — замкнутое вложение. Из предложения 4.4.5(iii) следует существование изоморфизма

$$Rf_{\pi!} \mu hom(G_2 \rightarrow Rf_! G_1) \xrightarrow{\sim} \mu hom(Rf_* G_2, Rf_! G_1).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mu hom(G_2 \rightarrow Rf_! G_1) &\simeq \mu_{\Delta} R\mathcal{H}om(\bar{q}_2^{-1} G_2, \bar{q}_1^! Rf_! G_1) \\ &\simeq \mu_{\Delta} Rf_{1!} R\mathcal{H}om(q_2'^{-1} G_2, q_1'' G_1) \\ &\simeq {}^t f'^{-1} \mu_{\Delta_Y} R\mathcal{H}om(q_2'^{-1} G_2, q_1'' G_1), \end{aligned}$$

а это доказывает, что морфизмы в (ii) являются изоморфизмами. $\square$

Теперь рассмотрим действие внешнего тензорного произведения на μhom (см. обозначение 2.3.12).

Пусть $p_X : X \rightarrow S$ и $p_Y : Y \rightarrow S$ — морфизмы многообразий. Обозначим через q_1 и q_2 первую и вторую проекции как многообразия $X \times Y$, так и $X \times_S Y$. Предположим, что

$$(4.4.9) \quad X \times_S Y \text{ является подмногообразием в } X \times Y.$$

Пусть j обозначает вложение $X \times_S Y \hookrightarrow X \times Y$. Так как

$$(X \times_S Y) \times_{X \times Y} T^*(X \times Y) \simeq T^*X \times_S T^*Y,$$

то мы имеем два отображения

$$(4.4.10) \quad T^* \left(X \times_S Y \right) \xleftarrow{j^!} T^*X \times_S T^*Y \xrightarrow{j_{\pi}} T^*X \times T^*Y.$$

Предложение 4.4.8. Пусть F_1, F_2 принадлежат $\mathbf{D}^b(X)$, а G_1, G_2 принадлежат $\mathbf{D}^b(Y)$. Тогда существуют канонические морфизмы

$$\begin{aligned} (i) \quad R^t j_! \left(\mu hom(F_2, F_1) \boxtimes_S^L \mu hom(G_2, G_1) \right) \\ \rightarrow \mu hom \left(F_2 \boxtimes_S^L G_2, F_1 \boxtimes_S^L G_1 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad R^t j_! \left(\mu hom(F_2, F_1)^a \boxtimes_S^L \mu hom(G_2, G_1) \right) \\ \rightarrow \mu hom(R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_1, q_2^{-1} G_2), R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_2, q_2^{-1} G_1)). \end{aligned}$$

Доказательство. (i) Пусть сначала $S = \{\text{pt}\}$. Из предложения 4.3.6 следует существование морфизмов

$$\begin{aligned}
& \mu_{\Delta_X}(R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2, q_1^!F_1)) \overset{L}{\boxtimes} \mu_{\Delta_Y}(R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G_2, q_1^!G_1)) \\
& \rightarrow \mu_{\Delta_X \times \Delta_Y} \left(R\mathcal{H}om(q_2^{-1}F_2, q_1^!F_1) \overset{L}{\boxtimes} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G_2, q_1^!G_1) \right) \\
& \rightarrow \mu_{\Delta_X \times \Delta_Y} \left(R\mathcal{H}om \left(q_2^{-1}F_2 \overset{L}{\boxtimes} q_2^{-1}G_2, q_1^!F_1 \overset{L}{\boxtimes} q_1^!G_1 \right) \right) \\
& \xrightarrow{\sim} \mu\mathcal{H}om \left(F_2 \overset{L}{\boxtimes} G_2, F_1 \overset{L}{\boxtimes} G_1 \right).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим общий случай. Применяя предыдущий результат и предложение 4.4.7(i), получаем

$$\begin{aligned}
& R^t j'_! \left(\mu\mathcal{H}om(F_2, F_1) \overset{L}{\boxtimes} \mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) \right) \\
& \simeq R^t j'_! j_\pi^{-1} \left(\mu\mathcal{H}om(F_2, F_1) \overset{L}{\boxtimes} \mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) \right) \\
& \rightarrow R^t j'_! j_\pi^{-1} \mu\mathcal{H}om \left(F_2 \overset{L}{\boxtimes} G_2, F_1 \overset{L}{\boxtimes} G_1 \right) \\
& \rightarrow \mu\mathcal{H}om \left(j^{-1} \left(F_2 \overset{L}{\boxtimes} G_2 \right), j^{-1} \left(F_1 \overset{L}{\boxtimes} G_1 \right) \right) \\
& \simeq \mu\mathcal{H}om \left(F_2 \overset{L}{\boxtimes}_S G_2, F_1 \overset{L}{\boxtimes}_S G_1 \right).
\end{aligned}$$

(ii) Пусть сначала $S = \{\text{pt}\}$. Обозначим через q'_j (соответственно q''_j , соответственно $\tilde{q}_j$) j -ю проекцию $X \times X$ (соответственно $Y \times Y$, соответственно $(X \times Y) \times (X \times Y)$). Тогда

$$\begin{aligned}
& \mu\mathcal{H}om(F_2, F_1)^a \overset{L}{\boxtimes} \mu\mathcal{H}om(G_2, G_1) \\
& \simeq \mu_{\Delta_X}(R\mathcal{H}om(q_1'^{-1}F_2, q_2^!F_1)) \overset{L}{\boxtimes} \mu_{\Delta_Y}(R\mathcal{H}om(q_2''^{-1}G_2, q_1^!G_1)) \\
& \rightarrow \mu_{\Delta_X \times \Delta_Y} \left(R\mathcal{H}om(q_1'^{-1}F_2, q_2^!F_1) \overset{L}{\boxtimes} R\mathcal{H}om(q_2''^{-1}G_2, q_1^!G_1) \right) \\
& \rightarrow \mu_{\Delta_X \times \Delta_Y} \left(R\mathcal{H}om(\tilde{q}_1^{-1}q_1^{-1}F_2, \tilde{q}_2^{-1}q_1^{-1}F_1) \right. \\
& \quad \left. \overset{L}{\boxtimes} R\mathcal{H}om(\tilde{q}_2^{-1}, q_2^{-1}G_2, \tilde{q}_1^{-1}q_2^{-1}G_1) \right) \otimes \omega_{X \times Y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \mu_{\Delta_X \times Y} (R\mathcal{H}om(R\mathcal{H}om(\tilde{q}_2^{-1} q_1^{-1} F_1, \tilde{q}_2^{-1} q_2^{-1} G_2), \\
& R\mathcal{H}om(\tilde{q}_1^{-1}, q_1^{-1} F_2, \tilde{q}_1^{-1} q_2^{-1} G_1))) \otimes \omega_{X \times Y} \\
& \simeq \mu_{\mathcal{H}om}(R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_1, q_2^{-1} G_2), R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_2, q_2^{-1} G_1)).
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим общий случай. Применим предыдущий результат и предложение 4.4.7(i) и получим

$$\begin{aligned}
& {}^{t_j} j'_! \left(\mu_{\mathcal{H}om}(F_2, F_1)^a \boxtimes^L \mu_{\mathcal{H}om}(G_2, G_1) \right) \\
& \simeq {}^{t_j} j'_! j_\pi^{-1} \left(\mu_{\mathcal{H}om}(F_2, F_1)^a \boxtimes^L \mu_{\mathcal{H}om}(G_2, G_1) \right) \\
& \rightarrow {}^{t_j} j'_! j_\pi^{-1} \mu_{\mathcal{H}om}(R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_1, q_2^{-1} G_2), R\mathcal{H}om(\tilde{q}_1^{-1} F_2, q_2^{-1} G_1)) \\
& \rightarrow \mu_{\mathcal{H}om}(j^! R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_1, q_2^{-1} G_2), j^! R\mathcal{H}om(q_1^{-1} F_2, q_2^{-1} G_1)).
\end{aligned}$$

В последнем члене можно заменить $q_2^{-1} G_2$ и $q_2^{-1} G_1$ на $q_2^! G_2$ и $q_2^! G_1$ соответственно. Теперь требуемый результат следует из предложения 3.1.13. $\square$

Рассмотрим композицию функторов $\mu_{\mathcal{H}om}$.

Пусть $g: Z \rightarrow Y$ и $f: Y \rightarrow X$ — морфизмы многообразий, $h = f \circ g$. Обозначим через q_i, q'_i, q''_i ($i = 1, 2$) i -е проекции многообразия $X \times Y, X \times Z, Y \times Z$ соответственно. Через q_{ij} обозначим (i, j) -ю проекцию многообразия $X \times Y \times Z$ (см. диаграмму (3.6.1)). Обозначим через $\tilde{q}_{ij}$ (i, j) -проекцию пространства $X \times Y \times Y \times Z$, а через p_{ij} (соответственно $\tilde{p}_{ij}$) (i, j) -ю проекцию пространства $T^*X \times T^*Y \times T^*Z$ (соответственно $T^*X \times T^*Y \times T^*Y \times T^*Z$). Обозначим через r_{ij} ограничение $\tilde{p}_{ij}$ на $\Delta_Y \times_{Y \times Y} T^*(X \times Y \times Y \times Z)$. И наконец, обозначим через j диагональное вложение $X \times Y \times Z \hookrightarrow X \times Y \times Y \times Z$. Отметим, что ${}^{t_j} j'$ индуцирует изоморфизм

$$(4.4.11) \quad \Delta_Y \times_{Y \times Y} T_{\Delta_f \times \Delta_g}^*(X \times Y \times Y \times Z) \xrightarrow{\sim} T_{\Delta_f \times Y \Delta_g}^*(X \times Y \times Z),$$

а $q_{13\pi}$ индуцирует изоморфизм

$$(4.4.12) \quad (\Delta_f \times_Y \Delta_g) \times_{\Delta_h} T_{\Delta_h}^*(X \times Z) \xrightarrow{\sim} T_{\Delta_h}^*(X \times Z).$$

Следовательно, мы имеем коммутативную диаграмму

(4.4.13)

$$\begin{array}{ccc}
& & T_{\Delta_f}^*(X \times Y) \simeq Y \times_X T^*X \\
& \nearrow r_{12} & \uparrow g_\pi \\
\Delta_Y \times_{Y \times Y} T_{\Delta_f \times \Delta_g}^*(X \times Y \times Y \times Z) \xrightarrow{\sim} T_{\Delta_f \times_Y \Delta_g}^*(X \times Y \times Z) & \xleftarrow{\iota'_{q'_{13}}} & T_{\Delta_h}^*(X \times Z) \simeq Z \times_X T^*X \\
& \searrow r_{34} & \downarrow \iota'_{f'} \\
& & T_{\Delta_f}^*(Y \times Z) \simeq Z \times_Y T^*Y
\end{array}$$

Предложение 4.4.9. Пусть F (соответственно G , соответственно H) принадлежит $\mathbf{D}^b(X)$ (соответственно $\mathbf{D}^b(Y)$, соответственно $\mathbf{D}^b(Z)$). Тогда существует канонический морфизм

$${}^t f'^{-1} \mu_{\text{hom}}(H \rightarrow G) \stackrel{L}{\otimes} g_\pi^{-1} \mu_{\text{hom}}(G \rightarrow F) \rightarrow \mu_{\text{hom}}(H \rightarrow F).$$

Доказательство. Пусть $K_1 = R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)$, $K_2 = R\mathcal{H}om(q_2''^{-1}H, q_1''^!G)$ и $L = q_\pi^{-1} \mu_{\Delta_f}(K_1) \stackrel{L}{\otimes} {}^t f'^{-1} \mu_{\Delta_g}(K_2)$.

Имеем цепочку морфизмов

$$\begin{aligned}
L &\xrightarrow{\sim} {}^t q'_{13}{}^{-1} j'_* \left(r_{12}^{-1} \mu_{\Delta_f}(K_1) \stackrel{L}{\otimes} r_{34}^{-1} \mu_{\Delta_g}(K_2) \right) \\
&\xrightarrow{\sim} {}^t q'_{13}{}^{-1} j'_* j_\pi^{-1} \left(\bar{p}_{12}^{-1} \mu_{\Delta_f}(K_1) \stackrel{L}{\otimes} \bar{p}_{34}^{-1} \mu_{\Delta_g}(K_2) \right) \\
&\rightarrow {}^t q'_{13}{}^{-1} j'_* j_\pi^{-1} \mu_{\Delta_f \times \Delta_g} \left(\bar{q}_{12}^{-1} K_1 \stackrel{L}{\otimes} \bar{q}_{34}^{-1} K_2 \right) \\
&\rightarrow {}^t q'_{13}{}^{-1} \mu_{\Delta_f \times_Y \Delta_g} \left(j^{-1} \left(\bar{q}_{12}^{-1} K_1 \stackrel{L}{\otimes} \bar{q}_{34}^{-1} K_2 \right) \right) \\
&\rightarrow {}^t q'_{13}{}^{-1} \mu_{\Delta_f \times_Y \Delta_g} (R\mathcal{H}om(q_{13}^{-1} q_2'^{-1} H, q_{13}^! q_1''^! F)) \\
&\rightarrow \mu_{\Delta_h} (Rq_{13}^! R\mathcal{H}om(q_{13}^{-1} q_2'^{-1} H, q_{13}^! q_1''^! F)) \\
&\rightarrow \mu_{\Delta_h} (R\mathcal{H}om(q_2'^{-1} H, q_1''^! F)).
\end{aligned}$$

Здесь мы применили результаты предложения 4.3.5 к отображению j , а затем результаты предложений 4.3.6 и 4.3.4 к отображению q_{13} . $\square$

Аналогичный результат справедлив для композиции функторов $\mu\text{hom}(\cdot \leftarrow \cdot)$.

Следствие 4.4.10. Пусть F_1, F_2, F_3 принадлежат $\mathbf{D}^b(X)$. Тогда существует канонический морфизм

$$\mu\text{hom}(F_1, F_2) \overset{L}{\otimes} \mu\text{hom}(F_2, F_3) \rightarrow \mu\text{hom}(F_1, F_3).$$

Пусть теперь X, Y, Z — многообразия. Обозначим, как обычно, через q_{ij} (i, j)-ю проекцию многообразия $X \times Y \times Z$, а через p_{ij} (i, j)-ю проекцию пространства $T^*X \times T^*Y \times T^*Z$; через p_{ij}^a обозначим композицию p_{ij} и антиподального отображения, заданного на j -м сомножителе.

Предложение 4.4.11. Пусть $K_1, F_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ и $K_2, F_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$. Тогда существует канонический морфизм.

$$(4.4.14) \quad Rp_{13}^a \left(p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_1, F_1) \overset{L}{\otimes} p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, F_2) \right) \\ \rightarrow \mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, F_1 \circ F_2),$$

где $K_1 \circ K_2$ и $F_1 \circ F_2$ определены формулой (3.6.2).

Доказательство. Пусть $j: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y \times Y \times Z$ — диагональное вложение. Рассмотрим коммутативную диаграмму

(4.4.15)

$$\begin{array}{ccc} T^*(X \times Y) \times T^*(Y \times Z) & \xleftarrow{p_{12}^a \times p_{23}^a} & T^*X \times T^*Y \times T^*X \\ \uparrow j^* & & \downarrow \text{id} \times p_2 \times a \\ T^*(X \times Y) \times_Y T^*(Y \times Z) & \xleftarrow{\quad} & T^*X \times T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y) \times T^*Z \\ \downarrow j' & \square & \downarrow \\ T^*(X \times Y \times Z) & \xleftarrow{q'_{13}} & T^*X \times Y \times T^*Z \\ & & \downarrow q_{13}^* \\ & & T^*X \times T^*Z \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow p_{13}^a \\ \downarrow \end{array}$$

Применяя предложение 4.4.8(i) к отображениям $X \times Y \rightarrow Y$ и $Y \times Z \rightarrow Y$, получаем морфизм

$$(4.4.16) \quad R^t j'_! j_\pi^{-1} \left(\mu hom(K_1, F_1) \boxtimes^L \mu hom(K_2, F_2) \right) \\ \rightarrow \mu hom \left(q_{12}^{-1} K_1 \otimes^L q_{23}^{-1} K_2, q_{12}^{-1} F_1 \otimes^L q_{23}^{-1} F_2 \right).$$

Применяя предложение 4.4.6(ii) и формулу (4.4.6), получаем

$$(4.4.17) \quad Rq_{13!} {}^t q_{13}^{-1} \mu hom \left(q_{12}^{-1} K_1 \otimes^L q_{23}^{-1} K_2, q_{12}^{-1} F_1 \otimes^L q_{23}^{-1} F_2 \right) \\ \rightarrow \mu hom \left(Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} K_1 \otimes^L q_{23}^{-1} K_2 \right), Rq_{13!} \left(q_{12}^{-1} F_1 \otimes^L q_{23}^{-1} F_2 \right) \right).$$

Объединяя (4.4.16) и (4.4.17), получаем морфизм

$$(4.4.18) \quad Rq_{13!} {}^t q_{13}^{-1} R^t j'_! j_\pi^{-1} \left(\mu hom(K_1, F_1) \boxtimes^L \mu hom(K_2, F_2) \right) \\ \rightarrow \mu hom(K_1 \circ K_2, F_1 \circ F_2).$$

Так как левая часть в (4.4.18) изоморфна левой части в (4.4.14) в силу коммутативности диаграммы (4.4.15), то мы получаем требуемый результат. $\square$

Упражнения к гл.4

Упражнение 4.1. Пусть X есть n -мерное многообразие, а M — замкнутое подмногообразие в X коразмерности l .

- (i) Взяв локальные координаты (x', x'', t) на $\tilde{X}_M$ и (y', y'') на X таким образом, что $p(x', x'', t) = (y', y'')$, покажите, что dt/t^l является корректно определенным сечением пучка относительных форм $\Omega_{\tilde{X}}^{(n+1)} \otimes_{p^{-1}\mathcal{C}_X^\infty} \Omega_X^{(n) \otimes -1}$ над всем $\tilde{X}_M$.
- (ii) Покажите, что сечение dt/t^l можно задать внутренним образом.
- (iii) Выведите из (i) и (ii), что относительный ориентирующий пучок $oz_{\tilde{X}/X}$ канонически изоморфен $A_{\tilde{X}}$.

Упражнение 4.2. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X и S замкнуто в X . Докажите существование функтора $\nu: \mathbf{D}^b(X/S) \rightarrow \mathbf{D}^b(T_M X \setminus C_M(S))$, такого, что следующая диаграмма коммутативна с точностью до изоморфизма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D}^b(X) & \xrightarrow{\nu_M} & \mathbf{D}^b(T_M X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{D}^b(X \setminus S) & \xrightarrow{\nu} & \mathbf{D}^b(T_M X \setminus C_M(S)). \end{array}$$

Упражнение 4.3. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X , а S локально замкнуто в X . Докажите, что $C_M(S) = \text{supp } \nu_M(A_S)$.

Упражнение 4.4. Пусть X — многообразие и $F, G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Пусть F и G когомологически конструктивны. Докажите, что

$$\mu\text{hom}(F, G) \simeq \mu\text{hom}(DG, DF)^a$$

(см. предложение 3.4.6).

Упражнение 4.5. Пусть $E \rightarrow Z$ — векторное расслоение, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E))$. Докажите, что $\nu_Z(F) \simeq F$ и $\mu_Z \simeq F^\wedge$, где Z отождествляется с нулевым сечением расслоения E .

Упражнение 4.6. Пусть $F_1, F_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Пусть $(t; \tau)$ — координаты на $T^*\mathbb{R}$. Установите изоморфизмы

$$\begin{aligned} \mu\text{hom}(F_2, F_1) &\simeq \mu\text{hom}\left(F_2 \overset{L}{\boxtimes} A_{\{0\}}, F_1 \overset{L}{\boxtimes} A_{\{0\}}\right) \Big|_{t=0, \tau=1}, \\ \mu\text{hom}(F_2, F_1) &\simeq \mu\text{hom}\left(F_2 \overset{L}{\boxtimes} A_{\mathbb{R}}, F_1 \overset{L}{\boxtimes} A_{\mathbb{R}}\right) \Big|_{t=0, \tau=0}. \end{aligned}$$

(Указание. Используйте предложение 4.4.7.)

Упражнение 4.7. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X , Z замкнуто в X , $F, G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Постройте следующие естественные морфизмы и приведите примеры, когда эти морфизмы не являются изоморфизмами:

$$\begin{aligned} & (i) \quad A_{C_M(Z)} \rightarrow \nu_M(A_Z), \\ & (ii) \quad \nu_M R\mathcal{H}om(G, F) \rightarrow R\mathcal{H}om(\nu_M(G), \nu_M(F)), \\ & (iii) \quad \nu_M R\Gamma_Z(F) \rightarrow R\Gamma_{C_M(Z)}(\nu_M(F)). \end{aligned}$$

Замечания

Разрешение особенностей — обычная операция в геометрии. Классический пример здесь — это введение полярных координат. Построение нормальной деформации подмногообразия M (что мы проделали в § 4.1) не является, однако, обычной процедурой, так как полученное многообразие полностью содержит нормальное расслоение многообразия M , а не только сферическое или проективное расслоение. Это построение является вещественным аналогом операции, введенной недавно в алгебраической геометрии (см. [Fulton 1]).

Определение нормального конуса (определение 4.1.1) совпадает с классическим и встречается у многих авторов (см. [Thom 1], [Whitney 1, 2]).

Функторы специализации и микролокализации были введены Сато [Sato 2] в 1969 г. (см. [Sato-Kawai-Kashiwara 1]). Наша конструкция несколько отличается от конструкции Сато, так как мы используем понятие нормальной деформации многообразия M . В алгебраическом случае аналогичную конструкцию придумал Вердые [Verdier 5], который обнаружил ее связи со знаменитым функтором «исчезающих циклов» (см. гл. 8 § 6).

Функтор микролокализации сначала рассматривался как средство определения микрофункций и аналитических волновых фронтов. Вскоре после работы Сато Хермандер [Hörmander 1] ввел понятие расщеплений C^∞ -волновых фронтов и интегральных операторов Фурье, что послужило началом интенсивной деятельности в области теории линейных уравнений в частных производных. После этого идея слежения за особенностями кокасательного пучка (восходящая к XIX веку) распространилась и на другие области математики — теорию фейнмановских интегралов, аналитическую геометрию, теорию представлений групп, теорию пучков, и все это и составляет ту область, которая называется сейчас микролокальным анализом.

Все основные результаты § 4.2 и 4.3 содержатся в работе [Sato-Kawai-Kashiwara 1]. Функтор μ_{hom} был введен в работе [Kashiwara-Schapira 3] как теоретико-пучковая версия функтора Hom категории $\mathcal{E}$ -модулей (см. § 11.4).

Микроносители пучков

На многообразии X каждому объекту F категории $\mathbf{D}^b(X)$ соответствует замкнутое коническое подмножество в T^*X , называемое его микроносителем и обозначаемое через $SS(F)$. Грубо говоря, $SS(F)$ описывает множество конаправлений на X , в которых F «не распространяется». В следующей главе мы покажем, что $SS(F)$ — инволютивное подмножество в T^*X .

Это понятие позволяет сформулировать условия коммутирования разнообразных функторов теории пучков; например, можно ответить на вопрос, когда $f^!F$ изоморфен $\omega_{Y/X} \otimes f^{-1}F$ или когда $f^{-1}R\mathcal{H}om(F_1, F_2)$ изоморфен $R\mathcal{H}om(f^{-1}F_1, f^{-1}F_2)$.

Мы начнем с доказательства эквивалентности трех определений микроносителя $SS(F)$ и сформулируем в терминах микроносителя критерий того, что для двух заданных открытых подмножеств Ω_0, Ω_1 многообразия X , $\Omega_0 \subset \Omega_1$, действующий из $R\Gamma(\Omega_1; F)$ в $R\Gamma(\Omega_0; F)$ морфизм ограничения является изоморфизмом. Естественным инструментом исследования микроносителя является введенная в гл. 3 γ -топология, ассоциированная с выпуклым замкнутым собственным конусом γ . В действительности, если X аффинно и $\phi_\gamma: X \rightarrow X_\gamma$ — отображение, ослабляющее топологию на X , то $\phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}$ играет роль срезающего функтора в следующем смысле: $SS(\phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}F)$ содержится в $X \times \gamma^{oa}$ и морфизм $\phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}F \rightarrow F$ является «изоморфизмом на $X \times \text{Int } \gamma^{oa}$ ». Это понятие микролокального изоморфизма определяется здесь же и будет развито в следующей главе.

Затем дается несколько примеров микроносителей, а после этого мы изучаем поведение микроносителей при разнообразных операциях над пучками, таких, как тензорное произведение и $\mathcal{H}om$, прямые и обратные образы, преобразование Фурье–Сато.

Всюду в этой главе мы предполагаем, что рассматриваемые морфизмы являются собственными или «нехарактеристическими», относительно микроносителя. Это ограничение будет снято в гл. 6. Результаты этой и следующей глав очень похожи на многие классические результаты теории дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами, и в гл. 11 мы покажем, как можно вывести некоторые из этих классических результатов из теории микроносителя.

Во многих местах изложение близко следует статье Касивары и Шапира [Kashivara-Schapira 3], но некоторые доказательства упрощены.

Мы придерживаемся соглашения 4.0.

5.1. Эквивалентные определения микроносителя

Пусть X — многообразие. Если α — целое число или $\alpha = +\infty$, то будем рассматривать функции класса C^α ($1 \leq \alpha \leq \infty$) на X . Если X — вещественно-аналитическое многообразие, то под функциями класса C^ω будем понимать вещественно-аналитические функции.

Как обычно, через $\pi : T^*X \rightarrow X$ мы обозначаем кокасательное расслоение.

Предложение 5.1.1. Пусть X — открытое подмножество векторного пространства E , $p = (x_0; \xi_0) \in T^*X$ и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда следующие условия, где $1 \leq \alpha \leq \infty$ или $\alpha = \omega$, эквивалентны:

- (1) _{α} Существует открытая окрестность U точки p , такая, что для любой точки $x_1 \in X$ и любой вещественной функции ψ класса C^α , определенной в окрестности точки x_1 и удовлетворяющей условиям $\psi(x_1) = 0$ и $d\psi(x_1) \in U$, мы имеем

$$(R\Gamma_{\{x; \psi(x) \geq 0\}}(F))_{x_1} = 0.$$

- (2) Существуют собственный замкнутый выпуклый конус γ в E , удовлетворяющий условию $0 \in \gamma$, и объект $F' \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(E))$, такие, что

(а) $\gamma \setminus \{0\} \subset \{v; \langle v, \xi_0 \rangle < 0\}$, т. е. $\xi_0 \in \text{Int}(\gamma^{\circ a})$,

(б) $F'|_U \simeq F|_U$ для некоторой окрестности U точки x_0 в X ,

(с) $Rf_{\gamma*}F' = 0$ (ср. § 3.5).

- (3) Существуют окрестность U точки x_0 , число $\varepsilon > 0$ и собственный замкнутый выпуклый конус γ , содержащий 0 и удовлетворяющий условию (а) из п. (2), такие, что если мы положим

$$H = \{x; \langle x - x_0, \xi_0 \rangle \geq -\varepsilon\},$$

$$L = \{x; \langle x - x_0, \xi_0 \rangle = -\varepsilon\},$$

то $H \cap (U + \gamma) \subset X$ и имеется естественный изоморфизм

$$R\Gamma(H \cap (x + \gamma); F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(L \cap (x + \gamma); F)$$

для каждого $x \in U$.

Доказательство. Если $\xi_0 = 0$, то каждое из этих трех условий эквивалентно тому, что $F = 0$ в окрестности точки x_0 . Предположим, что $\xi_0 \neq 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1)₁. Мы можем считать, что $X = E$ и $F = F'$. Положим $U = X \times \text{Int } \gamma^{\circ a}$. Для любой функции ψ , такой, что $\psi(x_1) = 0$ и $d\psi(x_1) \in U$, существует γ -открытое множество Ω , которое совпадает с $\{x; \psi(x) < 0\}$ в некоторой окрестности точки x_1 . Более того, мы можем предположить, что когда Ω' пробегает систему γ -окрестностей точки x_1 , множества $\Omega' \setminus \Omega$ образуют систему окрестностей точки x_1 в $X \setminus \Omega$ в обычной топологии. Поэтому мы получаем

$$(R\Gamma_{\{x; \psi(x) \geq 0\}}(F))_{x_1} = (R\Gamma_{(X_\gamma \setminus \Omega_\gamma)}(R\phi_{\gamma*} F))_{x_1} = 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Мы можем предполагать, что X γ -открыто и $U \subset H \setminus L$. Пусть Ω_0 и Ω_1 — такие два γ -открытых множества, что $\Omega_0 \subset \Omega_1$, $x_0 \in \text{Int}(\Omega_1 \setminus \Omega_0)$ и $\Omega_1 \setminus \Omega_0 \subset \subset U$. Тогда

$$(5.1.1) \quad R\Gamma((x + \gamma) \cap H; F) \simeq R\Gamma(x + \gamma; F_H),$$

и аналогичная формула верна с заменой H на L . Из (5.1.1) мы получаем, что $R\Gamma(x + \gamma; F_{H \setminus L}) = 0$ для любого $x \in U$, и поэтому

$$(5.1.2) \quad (\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F_{H \setminus L})|_U = 0.$$

Применяя предложение 3.5.3, мы получаем

$$\begin{aligned} R\phi_{\gamma*} R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0}(F_{H \setminus L}) &\simeq R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0 \gamma} R\phi_{\gamma*} F_{H \setminus L} \\ &\simeq R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0 \gamma} R\phi_{\gamma*} \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F_{H \setminus L} \\ &\simeq R\phi_{\gamma*} R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0} \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F_{H \setminus L} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0}(F_{H \setminus L})$ обладает нужными свойствами.

(1) _{ω} $\Rightarrow$ (3). Мы можем предположить, что $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $x_0 = 0$ и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(E))$.

Положим $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Возьмем достаточно малое $\epsilon > 0$ и определим H и L , как в п.(3). Далее возьмем достаточно малое $\delta > 0$ и положим

$$(5.1.3) \quad \gamma = \{x; x_1 \leq -\delta|x'|\}.$$

Мы выбираем ϵ, δ и γ -открытое подмножество Ω_1 таким образом, чтобы $0 \in \Omega_1$ и $(\Omega_1 \cap H) \times \text{Int } \gamma^{\circ a} \subset \mathbb{R}^+ \cdot U$. Покажем, что для каждого $x \in \Omega_1 \cap H$ имеет место изоморфизм

$$(5.1.4) \quad R\Gamma(H \cap (x + \gamma); F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(L \cap (x + \gamma); F).$$

Для любого $a \in \Omega_1 \cap (H \setminus L)$ мы можем построить семейство $\{\Omega_t(a)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ открытых подмножеств в X , такое, что

$$(5.1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \Omega_t(a) \subset a + \text{Int } \gamma, \\ \text{(ii)} \quad \Omega_t(a) \cap L = (a + \text{Int } \gamma) \cap L, \\ \text{(iii)} \quad \Omega_t(a) = \bigcup_{r < t} \Omega_r(a), \\ \text{(iv)} \quad \Omega_t(a) \text{ имеет гладкую вещественно-аналитическую} \\ \quad \text{границу } \partial\Omega_t(a), \\ \text{(v)} \quad Z_t(a) = \left(\bigcap_{s > t} \overline{\Omega_s(a) \setminus \Omega_t(a)} \right) \cap H \text{ содержится в} \\ \quad \partial\Omega_t(a), \text{ и внешняя кономаль к } \Omega_t(a) \text{ в точке} \\ \quad Z_t(a) \text{ содержится в } U, \\ \text{(vi)} \quad \left(\bigcup_{t > 0} \Omega_t(a) \right) \cap H = (a + \text{Int } \gamma) \cap H, \\ \text{(vii)} \quad \left(\bigcap_{t > 0} \Omega_t(a) \right) \cap H = (a + \text{Int } \gamma) \cap L. \end{array} \right.$$

Положим, например,

$$\psi_t(x') = \delta^2 |x' - a'|^2 + \frac{(\delta^2 |x' - a'|^2 - (\varepsilon + a_1)^2)^2}{\sqrt{t + (\delta^2 |x' - a'|^2 - (\varepsilon + a_1)^2)^2}}.$$

Тогда можно взять

$$\Omega_t(a) = \{x; x_1 < a_1 \text{ и } (x_1 - a_1)^2 > \psi_t(x')\}.$$

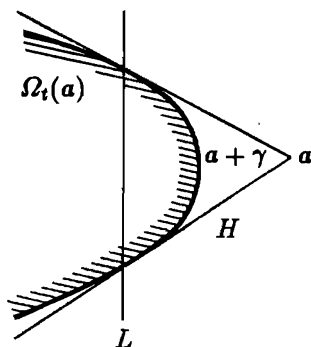


Рис. 5.1

Теперь мы положим

$$(5.1.6) \quad \tilde{\Omega}_t(a) = \Omega_t(a) \cup ((a + \text{Int } \gamma) \setminus H)$$

и покажем, что для каждого $t > 0$ имеет место изоморфизм

$$(5.1.7) \quad R\Gamma(a + \text{Int } \gamma; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\tilde{\Omega}_t(a); F).$$

Обозначим через j вложение $a + \text{Int } \gamma \hookrightarrow X$ и применим лемму о нехарактеристических деформациях (предложение 2.7.2). Достаточно показать, что

$$(5.1.8) \quad (R\Gamma_{X \setminus \tilde{\Omega}_t(a)}(Rj_* j^{-1} F))_y = 0$$

для любых $y \in Z_s(a) \setminus \tilde{\Omega}_t(a)$ и $s \leq t$. Поскольку $Z_s(a) \setminus \tilde{\Omega}_t(a) \subset Z_t(a)$, мы можем считать, что $y \in Z_t(a) \setminus \tilde{\Omega}_t(a)$. Если y принадлежит $H \setminus L$, то (5.1.8) следует из (1)_w. Предположим теперь, что $y \in Z_t(a) \cap L = L \cap \partial(a + \text{Int } \gamma)$. Поскольку $a + \text{Int } \gamma$ и $\Omega_t(a)$ имеют гладкие вещественно-аналитические границы в окрестности точки y , согласно (1)_w мы имеем

$$(5.1.9) \quad (R\Gamma_{X \setminus \Omega_t(a)}(F))_y = (R\Gamma_{X \setminus (a + \text{Int } \gamma)}(F))_y = 0$$

и потому

$$(5.1.10) \quad (R\Gamma_{X \setminus \Omega_t(a)}(Rj_* j^{-1}(F)))_y = 0.$$

С другой стороны, $(a + \text{Int } \gamma) \setminus \Omega_t(a)$ представляет собой дизъюнктное объединение множеств $(a + \text{Int } \gamma) \setminus \tilde{\Omega}_t(a)$ и $(a + \text{Int } \gamma) \setminus (\Omega_t(a) \cup H)$. Значит, $(R\Gamma_{X \setminus \tilde{\Omega}_t(a)}(Rj_* j^{-1} F))$ является прямым слагаемым в $R\Gamma_{X \setminus \Omega_t(a)}(Rj_* j^{-1} F)$, и потому из (5.1.10) следует (5.1.8). Таким образом, (5.1.7) доказано для всех t .

Из (5.1.7) мы получаем изоморфизмы

$$(5.1.11) \quad \begin{aligned} R\Gamma((a + \text{Int } \gamma) \cap H; F|_H) &\simeq R\Gamma(\tilde{\Omega}_t(a) \cap H; F|_H) \\ &\simeq R\Gamma(\Omega_t(a) \cap H; F|_H). \end{aligned}$$

Наконец, покажем, что для любого $x \in \Omega_1 \cap H$ имеет место изоморфизм

$$(5.1.12) \quad R\Gamma((x + \gamma) \cap H; F|_H) \xrightarrow{\sim} R\Gamma((x + \gamma) \cap L; F|_H),$$

из которого немедленно следует (5.1.4).

Пусть $v = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда семейство множеств $\{(x + \rho v + \text{Int } \gamma) \cap H\}_{\rho > 0}$ образует систему окрестностей подмножества $(x + \gamma) \cap H$ в H , а семейство $\{\Omega_t(x + \rho v) \cap L\}_{\rho > 0, t > 0}$ образует систему окрестностей подмножества $(x + \gamma) \cap L$ в H . Таким образом, (5.1.12) следует из (5.1.11). $\square$

Определение 5.1.2. Пусть X — многообразие.

(i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Микроноситель объекта F , обозначаемый через $\text{SS}(F)$, — это подмножество в T^*X , определяемое условием

$$p \notin \text{SS}(F) \iff \text{выполнено условие (1)}_1 \text{ предложения 5.1.1.}$$

(ii) Пусть $u: F \rightarrow F'$ — морфизм в категории $\mathbf{D}^b(X)$, и пусть A — подмножество в T^*X . Будем говорить, что u — *изоморфизм на A* , если u вкладывается в такой выделенный треугольник $F \xrightarrow{u} F' \xrightarrow{+1} F''$, что $\text{SS}(F'') \cap A = \emptyset$.

Заметим, что u является изоморфизмом в точке p тогда и только тогда, когда у p есть такая окрестность U , что для любых точки x_1 и функции ψ , такой же, как в п. (1) $_{\alpha}$ предложения 5.1.1, морфизм

$$(R\Gamma_{\{x; \psi(x) \geq 0\}}(F))_{x_1} \rightarrow (R\Gamma_{\{x; \psi(x) \geq 0\}}(F'))_{x_1}$$

является изоморфизмом.

Следующие свойства микроносителя выводятся непосредственно из определения.

Предложение 5.1.3. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда $\text{SS}(F)$ — замкнутое коническое подмножество в T^*X и $\text{SS}(F) \cap T_X^*X = \text{supp}(F)$.

(ii) $\text{SS}(F) = \text{SS}(F[1])$.

(iii) Пусть $F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник в категории $\mathbf{D}^b(X)$. Тогда при $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ имеем

$$(5.1.13) \quad \text{SS}(F_i) \subset \text{SS}(F_j) \cup \text{SS}(F_k) \text{ для } j \neq k,$$

$$(5.1.14) \quad (\text{SS}(F_i) \setminus \text{SS}(F_j)) \cup (\text{SS}(F_j) \setminus \text{SS}(F_i)) \subset \text{SS}(F_k) \text{ для } k \neq i, j.$$

Иногда мы будем называть свойства (iii) *неравенствами треугольника* для микроносителей. В гл. 6 мы докажем, что микроноситель всегда является инволютивным подмножеством в T^*X .

Замечание 5.1.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Включение $\text{SS}(H^j(F)) \subset \text{SS}(F)$, вообще говоря, места не имеет, но выполняется соотношение $\text{SS}(F) \subset \bigcup_j \text{SS}(H^j(F))$ (ср. упр. 5.4 и 5.6).

Замечание 5.1.5. Пусть $\phi_X: \mathbf{D}^b(A_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(\mathbb{Z}_X)$ — забывающий функтор, и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(A_X))$. Тогда

$$(5.1.15) \quad \text{SS}(F) = \text{SS}(\phi_X(F)).$$

Иначе говоря, $\text{SS}(F)$ не зависит от основного кольца A .

Замечание 5.1.6. Из предложения 5.1.1 следует, что микроноситель объекта F зависит только от C^1 -структуры многообразия X .

5.2. Распространение

Пусть E — конечномерное вещественное векторное пространство, X — открытое подмножество в E и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$.

Предложение 5.2.1. Пусть U — открытое подмножество в X , а γ — замкнутый собственный выпуклый конус в E , содержащий 0. Пусть Ω_0 и Ω_1 суть γ -открытые подмножества в E . Предположим, что

$$(5.2.1) \quad \text{SS}(F) \cap (U \times \text{Int } \gamma^{\circ a}) = \emptyset,$$

$$(5.2.2) \quad \Omega_0 \subset \Omega_1 \text{ и } \Omega_1 \setminus \Omega_0 \subset U,$$

$$(5.2.3) \quad (x + \gamma) \setminus \Omega_0 \text{ компактно для любого } x \in \Omega_1.$$

Тогда

$$(5.2.4) \quad R\Gamma(\Omega_1 \cap X; F) \rightarrow R\Gamma(\Omega_0 \cap X; F) \text{ — изоморфизм}$$

и

$$(5.2.5) \quad R\phi_{\gamma*}(R\Gamma_{X \setminus \Omega_0}(F))|_{\Omega_1} = 0,$$

где ϕ_γ — отображение $X \rightarrow X_\gamma$.

Доказательство предложения мы начнем с частного случая, а вслед за тем докажем общий.

Лемма 5.2.2. Предложение 5.2.1 справедливо, если Ω_0 имеет вид $\{x \in E; \langle x, \xi_0 \rangle < c\}$ для некоторого $\xi_0 \in \text{Int } \gamma^{\circ a}$ и

$$(5.2.6) \quad \text{SS}(F) \cap (U \times (\gamma^{\circ a} \setminus \{0\})) = \emptyset.$$

Доказательство. Снабдим E евклидовой структурой, и пусть $d(\cdot, \cdot)$ — метрика в E . Положим

$$(5.2.7) \quad W_t = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; s_1 < t\} \cup \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; s_2 < 0\} \\ \cup \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2; s_1 < 2t, s_2 < t, (s_1 - 2t)^2 + (s_2 - t)^2 > t^2\}$$

для $0 < t$.

Далее, положим $l(x) = \langle x, \xi_0 \rangle - c$, $H = \{x, l(x) \geq 0\}$ и

$$(5.2.8) \quad U(t, x_1) = \{x \in X; (d(x, x_1 + \gamma), l(x)) \in W_t\}.$$

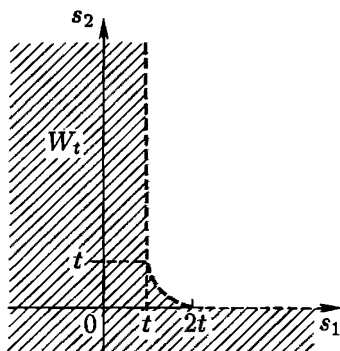


Рис. 5.2a

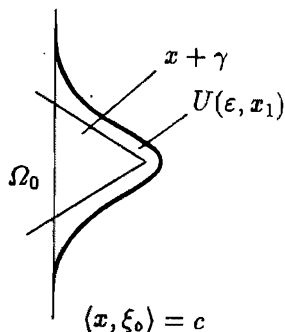


Рис. 5.2b

Тогда $U(t, x_1) \supset X \setminus H, \overline{U(t, x_1)} \subset \Omega_1$, если $0 < t \ll 1$, и $\{U(t, x_1) \cap H\}_{t>0}$ образует систему окрестностей множества $(x_1 + \gamma) \cap H$. Заметим теперь, что $d(x, x_1 + \gamma)$ — функция класса C^1 на $X \setminus (x_1 + \gamma)$ и ее дифференциал на этом множестве принадлежит γ^{aa} . Следовательно, $U(t, x_1)$ имеет границу класса C^1 , внешняя конормаль к которой лежит в γ^{aa} . Отсюда следует, что $(R\Gamma_{X \setminus U(t, x_1)}(F))_x = 0$ при $x \in U \cap \partial U(t, x_1)$.

Выберем ϵ достаточно малым для того, чтобы множество $U(\epsilon, x_1)$ содержалось в Ω_1 . Тогда можно применить к семейству $\{U(t, x_1)\}_{0 < t < \epsilon}$ лемму о нехарактеристических деформациях (предложение 2.7.2). Полагая $\tilde{F} = R\Gamma_{X \setminus \Omega_0}(F)$, мы получаем изоморфизм

$$(5.2.9) \quad R\Gamma(U(\epsilon, x_1); \tilde{F}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U(t, x_1); \tilde{F}).$$

Переходя в (5.2.9) к когомологиям, а затем к индуктивному пределу по $t > 0$, получаем

$$(5.2.10) \quad R\Gamma(U(\epsilon, x_1); \tilde{F}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(x_1 + \gamma; \tilde{F}).$$

Мы используем этот изоморфизм для того, чтобы доказать справедливость равенства $R\Gamma(x + \gamma; \tilde{F}) = 0$ для каждого $x \in \Omega_1$, и это завершает доказательство. Выберем $v \in \text{Int } \gamma$ и положим $x_t = x + tv$. Пусть

$$I = \{t \geq 0; R\Gamma(x_t + \gamma; \tilde{F}) = 0\}.$$

Тогда I непусто, поскольку $x_t \in \Omega_0$ при $t \gg 0$. Пусть $t_0 = \inf I$. Пусть $\epsilon > 0$ таково, что $\overline{U(\epsilon, x_{t_0})}$ содержится в Ω_1 , и пусть $t > t_0$ таково, что $t \in I$ и

$$x_{t_0} + \gamma \subset U(\epsilon, x_t) \subset U(\epsilon, x_{t_0}).$$

Изоморфизм $R\Gamma(U(\varepsilon, x_{t_0}); \tilde{F}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(x_{t_0} + \gamma; \tilde{F})$ пропускается через объект $R\Gamma(U(\varepsilon, x_t); \tilde{F})$, являющийся нулевым. Поэтому t_0 принадлежит I . Если бы t_0 было строго положительно, мы могли бы найти такие t , $0 < t < t_0$, и $\varepsilon > 0$, что

$$x_t + \gamma \subset U(\varepsilon, x_{t_0}) \subset U(\varepsilon, x_t) \subset \overline{U(\varepsilon, x_t)} \subset \Omega_1.$$

Поскольку изоморфизм $R\Gamma(U(\varepsilon, x_t); \tilde{F}) \rightarrow R\Gamma(x_t + \gamma; \tilde{F})$ пропускается через нулевой объект $R\Gamma(U(\varepsilon, x_{t_0}); \tilde{F})$, t принадлежит I . Итак, $t_0 = 0$ и лемма 5.2.2 доказана. $\square$

Окончание доказательства предложения 5.2.1. Мы сведем предложение 5.2.1 к лемме 5.2.2. Поскольку (5.2.4) следует из (5.2.5), достаточно доказать (5.2.5). Если $\gamma = \{0\}$, то $F|_U = 0$ и предложение очевидно. Поэтому мы можем предположить, что $\gamma \neq \{0\}$. Пусть γ' — такой замкнутый собственный выпуклый конус, что $\text{Int } \gamma' \supset \gamma \setminus \{0\}$, и пусть Ω — такое подмножество в $\Omega_1 \setminus \Omega_0$, открытое в γ' -топологии на $\Omega_1 \setminus \Omega_0$, что $\Omega \subset \subset U$. Такие Ω образуют базу открытых множеств в γ -топологии на $\Omega_1 \setminus \Omega_0$. Поскольку достаточно показать, что $R\Gamma(\Omega; R\Gamma_{X \setminus \Omega_0}(F)) = 0$ для таких Ω и поскольку $\text{Int } \gamma^{\text{oa}} \supset \gamma'^{\text{oa}} \setminus \{0\}$, мы с самого начала можем предположить, что выполнено (5.2.6). Кроме того, мы можем предположить, что

$$(5.2.11) \quad \Omega_1 \setminus \Omega_0 \subset \subset U.$$

По лемме о нехарактеристических деформациях (предложение 2.7.2) для доказательства (5.2.5) достаточно показать, что

$$(5.2.12) \quad R\Gamma_{H_c} R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0}(F)_{\partial H_c} = 0 \quad \text{для любого } c,$$

где для произвольной точки $\xi_0 \in \text{Int } \gamma^{\text{oa}}$ мы положили

$$H_c = \{x; \langle x, \xi_0 \rangle \geq c\} \quad \text{и} \quad \partial H_c = \{x; \langle x, \xi_0 \rangle = c\}.$$

Для любого $x_0 \in \partial H_c \cap U$ существует такое γ -открытое подмножество $\Omega \ni x_0$, что $\Omega \cap H_c \subset U$. По лемме 5.2.2 имеем $R\phi_{\gamma*}(R\Gamma_{\Omega \cap H_c}(F)) = 0$. Теперь (5.2.12) следует из того факта, что множества $W \cap H_c$ образуют систему окрестностей точки x_0 в H_c , когда W пробегает систему окрестностей точки x_0 в γ -топологии. Доказательство предложения 5.2.1 завершено. $\square$

Теперь мы рассмотрим случай $X = Y \times E$, где E — конечномерное вещественное векторное пространство, а Y — многообразие. Пусть γ — замкнутый выпуклый конус в E , содержащий 0 (мы не требуем, чтобы γ был собственным). Положим $X_\gamma = Y \times E_\gamma$ и обозначим через ϕ_γ непрерывное отображение $X \rightarrow X_\gamma$.

Для срезания микроносителей пучков мы будем использовать γ -топологию.

Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$.

Предложение 5.2.3 (лемма о микролокальной срезке).

(i) Микроноситель $SS(F)$ содержится в $T^*Y \times (E \times \gamma^{oa})$ тогда и только тогда, когда морфизм $\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F \rightarrow F$ является изоморфизмом.

(ii) Морфизм $\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F \rightarrow F$ является изоморфизмом на $T^*Y \times (E \times \text{Int } \gamma^{oa})$.

Доказательство. Мы можем предполагать, что Y аффинно. Заменяя γ на $\{0\} \times \gamma$, мы с самого начала можем считать, что $X = E$. Предположим вначале, что $\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F \simeq F$. Мы докажем включение $SS(F) \subset X \times \gamma^{oa}$. Пусть $\xi_0 \notin \gamma^{oa}$. Выберем собственный выпуклый замкнутый конус γ' таким образом, чтобы $\gamma' \setminus \{0\} \subset \{v; \langle v, \xi_0 \rangle < 0\}$ и $\gamma' + \gamma = E$. Тогда для любого γ' -открытого непустого выпуклого подмножества Ω в X имеем

$$R\Gamma(\Omega; F) \simeq R\Gamma(\Omega + \gamma; F) \simeq R\Omega(X; F).$$

Отсюда следует, что для любой пары выпуклых γ' -открытых подмножеств (Ω_0, Ω_1) , удовлетворяющих условию $\Omega_0 \subset \Omega_1$, справедливо соотношение

$$R\phi_{\gamma'*} R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0}(F) = 0,$$

откуда вытекает, что $SS(F) \cap (X \times \{\xi_0\}) = \emptyset$.

Обратно, предположим, что $SS(F) \subset X \times \gamma^{oa}$. Для доказательства изоморфизма $\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} F \simeq F$ достаточно убедиться, что для любого относительно компактного открытого выпуклого подмножества Ω в X морфизм ограничения, действующий из $R\Gamma(\Omega + \gamma; F)$ в $R\Gamma(\Omega; F)$, является изоморфизмом. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество выпуклых открытых подмножеств V в $\Omega + \gamma$, таких, что $V \supset \Omega$ и что $R\Gamma(V; F) \rightarrow R\Gamma(\Omega; F)$ — изоморфизм. Из предложения 2.7.1 следует, что $\mathfrak{S}$ индуктивно упорядочено. Пусть V — максимальный элемент в $\mathfrak{S}$. Докажем от противного, что $V = \Omega + \gamma$. Если $V \neq \Omega + \gamma$, то существует точка $x_0 \in (\Omega + \gamma) \setminus \bar{V}$.

Лемма 5.2.4. Пусть V — открытое выпуклое подмножество в X , а $x_0 \in X$. Пусть λ — порожденный подмножеством V конус с вершиной в x_0 , а λ' — замкнутый конус $\bar{\lambda} - x_0$ с вершиной в начале координат. Пусть V_1 — внутренность выпуклой оболочки множества $V \cup \{x_0\}$. Тогда $V_1 \setminus V$ локально замкнуто в λ' -топологии.

Доказательство леммы 5.2.4. Мы имеем

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(1-t)x_0 + tu; u \in V, 0 < t \leq 1\} \\ &= \{(1-t)x_0 + tu; u \in V, 0 < t < 1\}. \end{aligned}$$

Положим

$$V_2 = \{(1-t)x_0 + tu; u \in V, t > 0\},$$

$$V_3 = \{(1-t)x_0 + tu; u \in V, t > 1\}.$$

Тогда V_2 и V_3 являются λ' -открытыми, и достаточно показать, что $V_1 \setminus V = V_2 \setminus V_3$. Поскольку $V \subset V_1 \subset V_2$, $V \subset V_3$ и $V_2 \subset V_1 \cup V_3$, достаточно показать, что $V_1 \cap V_3$ содержится в V . Для $x \in V_1 \cap V_3$ мы можем записать $x = (1-t)x_0 + tu = (1-s)x_0 + sv$, где $0 < t \leq 1$, $1 < s$ и $u, v \in V$. Тогда $(s-t)x = (s-1)tu + (1-t)sv$, и потому $x \in V$. $\square$

Окончание доказательства предложения 5.2.3.. Пусть V_1 , λ и λ' такие же, как и в лемме 5.2.4. Тогда λ' — собственный выпуклый конус, а $V_1 \setminus V$ локально замкнуто в λ' -топологии согласно предыдущей лемме. С другой стороны, $\text{Int } \lambda' \ni v$ для некоторого $v \in \gamma^a$, и поэтому $\lambda'^{oa} \cap \gamma^{oa} \subset \{0\}$. Согласно предложению 5.2.1, отсюда следует, что

$$(R\phi_{\lambda'} R\Gamma_{V_1 \setminus V}(F))|_{V_1} = 0.$$

Итак, $V_1 \in \mathfrak{S}$, и мы пришли к противоречию.

Для того чтобы доказать (ii), рассмотрим выделенный треугольник $\phi_{\gamma}^{-1} R\phi_{\gamma*} F \rightarrow F \xrightarrow{+1} F' \rightarrow$. Применяя к нему функтор $R\phi_{\gamma*}$, мы получаем $R\phi_{\gamma*} F' = 0$, откуда, согласно предложению 5.1.1, вытекает, что

$$SS(F') \cap (X \times \text{Int } \gamma^{oa}) = \emptyset.$$

Заметим, что если конус γ несобственный, то $\text{Int } \gamma^o = \emptyset$. $\square$

Замечание 5.2.5. Срезка микроносителя будет снова обсуждаться в § 6.1.

5.3. Примеры: микроносители, ассоциированные с локально замкнутыми подмножествами

Напомним, что если Z — локально замкнутое подмножество в X , то пучок A_Z на X определяется как нулевой пучок на $X \setminus Z$ и постоянный пучок со стеблем A на Z .

Пусть E — конечномерное вещественное векторное пространство, а γ — замкнутый выпуклый конус с вершиной в нуле. Напомним, что $\gamma^a = -\gamma$ и $\gamma^o = \{\xi \in E^*; \langle v, \xi \rangle \geq 0 \text{ для любых } v \in \gamma\}$.

Предложение 5.3.1. $SS(A_\gamma) \cap \pi^{-1}(0) = \gamma^\circ$.

Доказательство. Сечение $1 \in \Gamma(E; A_E)$ определяет сечение $1_\gamma \in \Gamma(E; A_\gamma)$ с носителем γ . Поэтому γ° содержится в $\pi^{-1}(0) \cap SS(A_\gamma)$. С другой стороны, морфизм $\phi_\gamma^{-1} \circ R\phi_{\gamma*} A_\gamma \rightarrow A_\gamma$ является изоморфизмом. Поэтому нужный результат следует из леммы о микролокальной срезке (предложение 5.2.3). $\square$

Предложение 5.3.2. Пусть X — многообразие, а M — замкнутое подмногообразие. Тогда

$$SS(A_M) = T_M^* X.$$

Доказательство. Поскольку это утверждение локально на M , мы можем считать, что X — векторное пространство, а M — подпространство в X . Тогда требуемое утверждение становится частным случаем предыдущего результата. $\square$

Заметим, в частности, что $SS(A_X) = T_X^* X$ — нулевое сечение расслоения $T^* X$.

Предложение 5.3.3. Пусть φ — вещественная функция класса C^1 и $d\varphi \neq 0$ на множестве $\{x; \varphi(x) = 0\}$. Тогда

$$(i) \ SS(A_{\{x; \varphi(x) \geq 0\}}) = \{(x; \lambda d\varphi(x)); \lambda \varphi(x) = 0, \lambda \geq 0, \varphi(x) \geq 0\},$$

$$(ii) \ SS(A_{\{x; \varphi(x) > 0\}}) = \{(x; \lambda d\varphi(x)); \lambda \varphi(x) = 0, \lambda \leq 0, \varphi(x) \geq 0\}.$$

Доказательство. Утверждение (i) следует из предложения 5.3.1, если выбрать систему локальных координат так, чтобы множество $\{x; \varphi(x) \geq 0\}$ было замкнутым полупространством.

Утверждение (ii) следует из (i) и неравенств треугольника (предложение 5.1.3), если рассмотреть точную последовательность $0 \rightarrow A_{\{x; \varphi(x) > 0\}} \rightarrow A_X \rightarrow A_{\{x; \varphi(x) \leq 0\}} \rightarrow 0$. $\square$

Теперь мы обсудим некоторые конкретные примеры в $\mathbb{R}^2$. Обозначим через (x_1, x_2) координаты в $\mathbb{R}^2$ и через (ξ_1, ξ_2) двойственные координаты.

Пример 5.3.4. Пусть $Z = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0, -x_1^{3/2} \leq x_2 < x_1^{3/2}\}$. Тогда

$$(5.3.1) \ SS(A_Z) = (T_X^* X \cap \bar{Z}) \cup \{(x; \xi); \xi_2 > 0, x_2 = -(2\xi_1/3\xi_2)^3, \\ x_1 = (2\xi_1/3\xi_2)^2\}.$$

Действительно, положим $\varphi_\pm(x) = x_2 \pm x_1^{3/2}$ при $x_1 \geq 0$, $\varphi_\pm(x) = x_2$ при $x_1 \leq 0$ и $Z_i = \{x; \varphi_i(x) \geq 0\}$ ($i = \pm$). Легко проверить, используя предложение 5.1.1, что для $i = \pm$ микроноситель $SS(A_{Z_i})$ является замыканием множества $\{(x; \lambda d\varphi_i(x)); \lambda \varphi_i(x) = 0, \lambda \geq 0, \varphi_i(x) \geq 0\}$. Тогда (5.3.1) следует из предложения 5.1.3, поскольку $Z = Z_+ \setminus Z_-$.

Пример 5.3.5. Пусть $Z = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1, x_2 \geq 0\}$. Тогда

$$(5.3.2) \quad \pi^{-1}(0) \cap SS(A_Z) = \{\xi; \xi_1 \xi_2 \leq 0\}.$$

Действительно, пусть $Z^\pm = \{x \in Z; \pm x_1 \geq 0, \pm x_2 \geq 0\}$. Рассмотрим точную последовательность $0 \rightarrow A_Z \rightarrow A_{Z^+} \oplus A_{Z^-} \rightarrow A_{\{0\}} \rightarrow 0$. Из предложения 5.3.1 и неравенств треугольника (предложение 5.1.3) получаем включение $\pi^{-1}(0) \cap SS(A_Z) \supset \{\xi; \xi_1 \xi_2 \leq 0\}$. Чтобы доказать обратное включение, обозначим через γ конус Z^- . Тогда $\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} A_{Z^+} \simeq \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} A_{\{0\}} \simeq A_{Z^+}$ и, следовательно, $\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} A_Z \simeq \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} A_{Z^-}$. Поскольку $\text{Int } \gamma^{\circ a} \cap SS(A_{Z^-}) = \emptyset$, из предложения 5.2.3 мы получаем $\text{Int } \gamma^{\circ a} \cap SS(A_Z) = \emptyset$. Заменяя γ на γ^a , приходим к (5.3.2).

В общем случае точно вычислить $SS(A_Z)$ затруднительно. Для того чтобы оценить это множество, введем следующее определение.

Определение 5.3.6. Пусть S — подмножество многообразия X . Положим

$$N_x(S) = T_x X \setminus C_x(X \setminus S, S),$$

$$N_x^*(S) = (N_x(S))^\circ,$$

$$N(S) = \bigcup_{x \in X} N_x(S), \quad N^*(S) = \bigcup_{x \in X} N_x^*(S).$$

Множество $N(S)$ называется *строго нормальным конусом* (или *конусом строгих нормалей*) к S , а $N^*(S)$ — *конормальным конусом* (или *конусом конормалей*) к S .

(Напомним, что нормальный конус $C(X \setminus S, S)$ был введен в § 4.1.)

Из предложения 4.1.2 следует, что ненулевой вектор $\theta \in T_x X$ принадлежит $N_x(S)$ тогда и только тогда, когда в локальной карте в окрестности точки x существуют такие открытый конус γ , содержащий θ , и окрестность U точки x , что

$$(5.3.3) \quad U \cap ((S \cap U) + \gamma) \subset S.$$

В частности, $N(S)$ — открытый выпуклый конус в TX , удовлетворяющий условию

$$\begin{aligned} N_x(S) = T_x X &\Leftrightarrow C_x(X \setminus S, S) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \notin \bar{S} \quad \text{или} \quad x \in \text{Int } S. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} N_x(S) = \emptyset &\Leftrightarrow N_x^*(S) = T_x^* X, \\ N_x(S) \neq \emptyset &\Leftrightarrow N_x^*(S)^a \text{ — собственный} \\ &\text{замкнутый выпуклый конус.} \end{aligned}$$

Заметим также, что

$$\begin{aligned} N_x(X \setminus S) &= N_x(S)^a, \\ N_x^*(X \setminus S) &= N_x^*(S)^a. \end{aligned}$$

Предложение 5.3.7. Пусть X аффинно, и пусть γ — собственный замкнутый выпуклый конус с $\text{Int } \gamma \neq \emptyset$. Пусть Ω (соответственно Z) — открытое (соответственно замкнутое) подмножество в X . Пусть $x \in X$.

- (i) Если $N_x^*(\Omega) \subset \text{Int } \gamma^\circ \cup \{0\}$ (соответственно $N_x^*(Z)^a \subset \text{Int } \gamma^\circ \cup \{0\}$), то Ω (соответственно Z) γ -открыто (соответственно γ -замкнуто) в некоторой окрестности точки x .
- (ii) Обратно, если Ω (соответственно Z) γ -открыто (соответственно γ -замкнуто) в некоторой окрестности точки x , то $N_x^*(\Omega) \subset \gamma^\circ$ (соответственно $N_x^*(Z)^a \subset \gamma^\circ$).

Доказательство. Поскольку Ω γ -открыто в окрестности точки x тогда и только тогда, когда $X \setminus \Omega$ γ -замкнуто в окрестности точки x и $N^*(\Omega) = N^*(X \setminus \Omega)^a$, достаточно доказать утверждения, касающиеся Ω .

- (i) Для каждого ненулевого $v \in N_x(\Omega)$ существует такой выпуклый открытый конус γ_v , что Ω γ_v -открыто в окрестности точки x (ср. (5.3.3)). Покрывая $\gamma \setminus \{0\}$ конечным числом таких конусов γ_v , получаем требуемый результат.
- (ii) следует из (5.3.3). □

Предложение 5.3.8. Пусть X — многообразие, Ω — открытое подмножество, а Z — замкнутое подмножество в X . Тогда

$$\begin{aligned} SS(A_\Omega) &\subset N^*(\Omega)^a, \\ SS(A_Z) &\subset N^*(Z). \end{aligned}$$

Доказательство. Мы можем считать X аффинным, а результаты достаточно доказать для Ω , поскольку мы можем применить неравенство треугольника к последовательности $0 \rightarrow A_{X \setminus \Omega} \rightarrow A_X \rightarrow A_Z \rightarrow 0$.

Пусть $x \in X$ и $N_x^*(\Omega) \neq T_x^*X$. Пусть γ — такой замкнутый выпуклый собственный конус, что

$$(5.3.4) \quad N_x^*(\Omega) \subset \text{Int } \gamma^\circ \cup \{0\}.$$

Согласно предыдущему предложению, Ω γ -открыто в окрестности точки x , и мы можем предположить, что Ω γ -открыто. Тогда $A_\Omega = \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} A_\Omega$, а значит, $\text{SS}(A_\Omega) \subset X \times \gamma^{\circ a}$ (предложение 5.2.3). Поскольку это включение имеет место для любого γ , удовлетворяющего (5.3.4), мы получаем нужный результат. $\square$

5.4. Фунториальные свойства микроносителя

В этом параграфе мы изучаем поведение микроносителя при некоторых операциях, таких, как собственный прямой образ, обратный образ в нехарактеристическом случае и т. д. Некоторые из полученных здесь результатов будут обобщены в следующей главе.

Пусть X и Y — два многообразия. Как обычно, через q_1 и q_2 (соответственно p_1 и p_2) мы обозначаем проекцию на первый и на второй сомножители произведения $X \times Y$ (соответственно $T^*X \times T^*Y$). Если f — отображение из Y в X , то, как и в гл. 4, через f' и f_* мы обозначаем отображения

$$T^*Y \xleftarrow{f'} Y \times_X T^*X \xrightarrow{f_*} T^*X.$$

Предложение 5.4.1. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Тогда

$$\text{SS}\left(F \overset{L}{\boxtimes} G\right) \subset \text{SS}(F) \times \text{SS}(G).$$

Доказательство. Мы можем считать X и Y векторными пространствами. Пусть $(x_0, y_0; \xi_0, \eta_0) \in T^*(X \times Y)$, и предположим, например, что $(x_0; \xi_0) \notin \text{SS}(F)$. Возьмем H, L, U, γ , удовлетворяющие условиям п. (3) предложения 5.1.1 для пучка F на X , и положим $\tilde{\gamma} = \gamma \times \{0\}$. Тогда для $z = (x, y) \in U \times Y$ мы имеем

$$(5.4.1) \quad \begin{aligned} R\Gamma\left(H \times Y \cap (z + \tilde{\gamma}); q_1^{-1} F \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G\right) \\ \simeq R\Gamma\left(H \cap (x + \gamma); F \overset{L}{\otimes} G_y\right) \\ \simeq R\Gamma(H \cap (x + \gamma); F) \overset{L}{\otimes} G_y. \end{aligned}$$

Действительно, поскольку $H \cap (x + \gamma)$ компактно, мы можем применить предложение 2.6.6.

Поскольку справедлива также формула, отличающаяся от (5.4.1) заменой H на L , нужный результат следует из предложения 5.1.1. $\square$

Предложение 5.4.2. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Тогда

$$\text{SS}(\text{RHom}(q_2^{-1}G, q_1^{-1}F)) \subset \text{SS}(F) \times \text{SS}(G)^a.$$

Доказательство. Достаточно доказать аналогичное утверждение с заменой $q_1^{-1}F$ на $q_1^!F$.

Мы можем считать, что X и Y — векторные пространства. Пусть $(x_0, y_0; \xi_0, -\eta_0) \notin \text{SS}(F) \times \text{SS}(G)^a$.

Предположим сначала, что $(x_0; \xi_0) \notin \text{SS}(F)$. В этом случае доказательство такое же, как и для предложения 5.4.1. Возьмем H, L, U, γ , удовлетворяющие условиям п. (3) предложения 5.1.1 для пучка F на X , и положим $\tilde{\gamma} = \gamma \times \{0\}$. Для $z = (x, y) \in U \times Y$, согласно предложению 3.1.5,

$$\begin{aligned} (5.4.2) \quad H^j(\text{R}\Gamma(H \times Y \cap (z + \tilde{\gamma}); \text{RHom}(q_2^{-1}G, q_1^!F))) \\ \simeq \varinjlim_W H^j(\text{R}\Gamma((H \cap (x + \gamma)) \times W; \text{RHom}(q_2^{-1}G, q_1^!F))) \\ \simeq \varinjlim_W H^j(\text{RHom}(\text{R}\Gamma_c(W, G), \text{R}\Gamma(H \cap (x + \gamma); F))), \end{aligned}$$

где W пробегает семейство открытых окрестностей точки y . Поскольку мы имеем аналогичную формулу с заменой H на L , доказательство в этом случае следует из предложения 5.1.1.

Предположим теперь, что $(y_0; \eta_0) \notin \text{SS}(G)$. Возьмем конус γ , удовлетворяющий условию (2) предложения 5.1.1 для пучка G на Y . Мы можем считать, что $R\phi_{\gamma*}G = 0$.

Лемма 5.4.3. Пусть Y — конечномерное вещественное векторное пространство, γ — замкнутый выпуклый собственный конус, содержащий 0, а Ω — такое γ^a -открытое подмножество в Y , что для любого компакта K в Y множество $\Omega \cap (K + \gamma)$ относительно компактно. Пусть Ω' — такое γ^a -открытое подмножество в Ω , что $\Omega \setminus \Omega'$ относительно компактно в Y . Наконец, пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$, и предположим, что $R\phi_{\gamma*}G = 0$. Тогда

- (i) $R\phi_{\gamma*}G_\Omega = 0$,
- (ii) $R\Gamma_c(\Omega'; G) \simeq R\Gamma_c(\Omega; G)$.

Доказательство леммы 5.4.3. Пусть Ω_1 — некоторое γ -открытое подмножество в Y . Предположим, что $\Omega_1 \cap \Omega \subset \subset Y$. Мы имеем

$$(5.4.3) \quad H^j(\Omega_1; G_\Omega) \simeq \varinjlim_K H_K^j(\Omega_1; G),$$

где K пробегает семейство замкнутых подмножеств в Ω_1 , содержащихся в Ω .

Для таких K множество $K' = \overline{K} + \gamma^a$ замкнуто в Y (здесь $\overline{K}$ обозначает замыкание множества K в Y). Поэтому

$$(5.4.4) \quad K' \cap \Omega_1 \subset \Omega.$$

Действительно, если $x = y + v \in \Omega_1$, где $y \in \overline{K}$, $v \in \gamma^a$, то $y = x - v$ принадлежит множеству $(\Omega_1 + \gamma) \cap \overline{K} = \Omega_1 \cap \overline{K} = K$, и поэтому $x \in K + \gamma^a \subset \Omega + \gamma^a = \Omega$.

Поскольку $K \cap \Omega_1 \subset K' \cap \Omega_1$, мы получаем, согласно (5.4.3),

$$H^j(\Omega_1; G_\Omega) \simeq \varinjlim_{K'} H_{K' \cap \Omega_1}^j(\Omega_1; G),$$

где K' пробегает семейство таких γ -замкнутых подмножеств, что $K \cap \Omega_1 \subset \Omega$. Тогда $R\Gamma_{K' \cap \Omega_1}(\Omega_1; G) \simeq R\Gamma_{K' \cap \Omega_1}(\Omega_1; R\phi_{\gamma*}G) = 0$, что доказывает (i).

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что $R\Gamma_c(\Omega, G) \simeq R\Gamma_c(Y, G_\Omega)$ и аналогичная формула имеет место с заменой Ω на Ω' . Поэтому достаточно показать, что $R\Gamma_c(Y; G_{\Omega \setminus \Omega'}) = 0$, а поскольку подмножество $\Omega \setminus \Omega'$ относительно компактно, достаточно показать, что $R\Gamma(Y; G_{\Omega \setminus \Omega'}) = 0$. Однако $R\Gamma(Y; G_\Omega) \simeq R\Gamma(Y; G_{\Omega'}) = 0$ согласно (i). $\square$

Окончание доказательства предложения 5.4.2. Согласно предыдущей лемме и предложению 3.1.15, для любого открытого подмножества W в X и любой пары γ^a -открытых подмножеств Ω и Ω' в Y , таких, что $\Omega' \subset \Omega$ и $\Omega \setminus \Omega' \subset \subset Y$, мы имеем

$$R\Gamma(W \times \Omega; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \simeq R\Gamma(W \times \Omega'; R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)).$$

Поэтому условие (2) предложения 5.1.1 выполнено для пучка $R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)$ относительно конуса $\{0\} \times \gamma^a$. $\square$

Предложение 5.4.4. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$ и отображение f является собственным на $\text{supp}(G)$. Тогда

$$\text{SS}(Rf_*G) \subset f_\pi({}^!f'^{-1}(\text{SS}(G))).$$

Более того, если f — замкнутое включение, то это включение пре-
вращается в равенство.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и φ — такая вещественная C^1 -функция на X , что $\varphi(x) = 0$ и $d(\varphi \circ f)(y) \notin SS(G)$ для любого $y \in f^{-1}(x)$. Тогда $R\Gamma_{\{\varphi \circ f \geq 0\}}(G)|_{f^{-1}(x)} = 0$ и

$$\begin{aligned} (R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(Rf_*G))_x &\simeq (Rf_*R\Gamma_{\{\varphi \circ f \geq 0\}}(G))_x \\ &\simeq R\Gamma(f^{-1}(x); R\Gamma_{\{\varphi \circ f \geq 0\}}(G)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Здесь $\{\varphi \geq 0\}$ обозначает множество $\{x \in X; \varphi(x) \geq 0\}$ и аналогич-
ный смысл имеет обозначение $\{f \circ \varphi \geq 0\}$.) Это доказывает первое
утверждение. Предположим теперь, что f — замкнутая иммерсия.
Мы можем считать, что X — векторное пространство, а Y — вектор-
ное подпространство в X . Предположим, что $p \notin SS(Rf_*G)$, и выбо-
рем H, L, γ, U удовлетворяющими условию (3) предложения 5.1.1 для
пучка Rf_*G на X . Для $x \in U \cap Y$ мы имеем

$$R\Gamma(H \cap (x + \gamma); Rf_*G) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(L \cap (x + \gamma); Rf_*G).$$

С другой стороны,

$$R\Gamma(H \cap (x + \gamma); Rf_*G) \simeq R\Gamma((Y \cap H) \cap (x + (Y \cap \gamma)); G)$$

и аналогичная формула верна с заменой H на L . Теперь нужный
результат следует из предложения 5.1.1. $\square$

Предложение 5.4.5. Предположим, что $f: Y \rightarrow X$ — гладкое ото-
бражение.

(i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда

$$SS(f^{-1}F) = {}^t f'(f_{\pi}^{-1}(SS(F))).$$

(ii) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Тогда следующие условия эквивалент-
ны:

- (a) все когомологии $H^j(G)$ — локально постоянные пучки на
слоях отображения f ;
- (b) локально на Y существует такой пучок $F \in$
 $\text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, что $G \simeq f^{-1}F$;
- (c) $SS(G) \subset {}^t f'(Y \times_X T^*X)$.

Доказательство. (i) Прежде всего докажем, что $SS(f^{-1}F)$ содержится в $f'(f_{\pi}^{-1}(SS(F)))$. Мы можем считать, что $Y = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, $X = \mathbb{R}^n$, а f — проекция $(x, y) \mapsto x$. Пусть $p = (x_0, y_0; \xi_0, \eta_0) \notin f'(f_{\pi}^{-1}(SS(F)))$. Если $\eta_0 \neq 0$, выберем $v \in \mathbb{R}^l$ таким образом, что $\langle v, \eta_0 \rangle < 0$, и положим $\gamma = \{(0, tv); t \geq 0\}$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ мы полагаем $H = \{(x, y); \langle y, \eta_0 \rangle \geq -\varepsilon\}$, $L = H \setminus \text{Int } H$. Для $z \in \text{Int } H$ мы имеем

$$R\Gamma(H \cap (z + \gamma); f^{-1}F) = R\Gamma(L \cap (z + \gamma); f^{-1}F),$$

поскольку $f^{-1}F|_{(z + \mathbb{R}(0, v))}$ — постоянный пучок. Таким образом, доказано, что в этом случае $p \notin SS(f^{-1}F)$.

Предположим теперь, что $\eta_0 = 0$ и $(x_0; \xi_0) \notin SS(F)$. Выберем H, L, γ, U в соответствии с условием (3) предложения 5.1.1 для пучка F на X и положим $\tilde{\gamma} = \gamma \times \{0\}$. Тогда для любого $z \in f^{-1}(U)$ мы получим

$$R\Gamma(f^{-1}(H) \cap (z + \tilde{\gamma}); f^{-1}F) \simeq R\Gamma(H \cap (f(z) + \gamma); F),$$

и аналогичный изоморфизм имеет место с заменой H на L . Отсюда следует, что $p \notin SS(f^{-1}F)$.

Для доказательства обратного включения достаточно использовать условие (1) предложения 5.1.1 и заметить, что если φ — вещественная C^1 -функция на X и $x \in X$, то

$$(R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F))_x = (R\Gamma_{\{\varphi \circ f \geq 0\}}(f^{-1}F))_y$$

для любого $y \in f^{-1}(x)$.

(ii) Можно считать, что $Y = X \times \mathbb{R}^l$. Тогда (a) $\Leftrightarrow$ (b) в силу предложения 2.7.8, (b) $\Rightarrow$ (c) в силу (i), а для доказательства импликации (c) $\Rightarrow$ (a) мы применяем предложение 5.2.3 с $\gamma = \mathbb{R}^l$. $\square$

Замечание 5.4.6. Пусть $V = f'(Y \times_X T^*X)$ в ситуации предложения 5.4.5. Множество V является гладким инволютивным подмногообразием в T^*Y . Хотя включение $SS(H^j(G)) \subset SS(G)$, вообще говоря, и не имеет места (ср. замечание 5.1.4), $SS(G) \subset V \Leftrightarrow SS(H^j(G)) \subset V$ для любого j , что следует из предложения 5.4.5.

Для того чтобы описать поведение микроносителей при различных операциях теории пучков, введем обозначение $A + B$ для двух конусов A и B в T^*X , полагая

$$(5.4.5) \quad (A + B) \cap \pi^{-1}(x) = \{a + b; a \in A \cap \pi^{-1}(x), b \in B \cap \pi^{-1}(x)\}.$$

Лемма 5.4.7. Если A и B — замкнутые конусы в T^*X и $A \cap B^a \subset T_X^*X$, то $A + B$ также является замкнутым конусом в T^*X .

Доказательство. Пусть (x) — система координат на X , и пусть $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на T^*X . По условию $\xi + \eta \neq 0$ на множестве $\{((x; \xi), (x; \eta)) \in A \times_X B; |\xi| + |\eta| = 1\}$. Поэтому можно считать, что $|\xi + \eta| \geq \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ на этом множестве. Таким образом, $A \times_X B$ содержится в множестве $C = \{(x; \xi, \eta); |\xi + \eta| \geq \varepsilon(|\xi| + |\eta|)\}$. Поскольку отображение $\mu: C \rightarrow T^*X$, заданное формулой $(x; \xi, \eta) \mapsto (x; \xi + \eta)$, является собственным, множество $A + B = \mu(A \times_X B)$ замкнуто. $\square$

Предложение 5.4.8. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathcal{D}^b(X))$.

(a) Пусть Ω — открытое подмножество в X , а j — открытое вложение $\Omega \hookrightarrow X$.

(i) Предположим, что $\text{SS}(F) \cap N^*(\Omega)^a \subset T_X^*X$. Тогда

$$\text{SS}(Rj_*j^{-1}F) \subset N^*(\Omega) + \text{SS}(F).$$

(ii) Предположим, что $\text{SS}(F) \cap N^*(\Omega) \subset T_X^*X$. Тогда

$$\text{SS}(Rj_*j^{-1}F) \subset N^*(\Omega)^a + \text{SS}(F).$$

(b) Пусть Z — замкнутое подмножество в X .

(i) Если $\text{SS}(F) \cap N^*(Z) \subset T_X^*X$, то $\text{SS}(R\Gamma_Z(F)) \subset N^*(Z)^a + \text{SS}(F)$.

(ii) Если $\text{SS}(F) \cap N^*(Z)^a \subset T_X^*X$, то $\text{SS}(F_Z) \subset N^*(Z) + \text{SS}(F)$.

Доказательство. (a) Можно считать, что X — векторное пространство. Выберем точку $x_0 \in X$ и докажем утверждение в этой точке.

(i) Пусть $\xi_0 \notin N_{x_0}^*(\Omega) + (\text{SS}(F) \cap \pi^{-1}(x_0))$; покажем, что $(x_0; \xi_0) \notin \text{SS}(Rj_*j^{-1}F)$. По условию

$$(N_{x_0}^*(\Omega) + \overline{\mathbb{R}^{-}\xi_0}) \cap \text{SS}(F)^a \subset \{0\},$$

и существует такой замкнутый выпуклый собственный конус K в $T_{x_0}^*X$, что

$$N_{x_0}^*(\Omega) + \overline{\mathbb{R}^{-}\xi_0} \subset \text{Int}(K) \cup \{0\},$$

$$K^a \cap (\text{SS}(F) \cap \pi^{-1}(x_0)) \subset \{0\}.$$

Пусть γ — конус, полярный к K . Тогда $\gamma \subset \{v; \langle v, \xi_0 \rangle < 0\} \cup \{0\}$, и в силу предложения 5.3.7 можно считать, что Ω γ -открыто. Пусть U —

относительно компактная открытая окрестность точки x_0 , такая, что $(U \times \gamma^{oa}) \cap SS(F) \subset T_X^*X$. Пусть Ω_0 и Ω_1 — такие два γ -открытых множества, что $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_0 \cup U$. Применяя предложение 5.2.1, мы получаем

$$(5.4.6) \quad (R\phi_{\gamma*} R\Gamma_{X \setminus \Omega_0}(F))|_{\Omega_1} = 0.$$

Поскольку открытое множество Ω γ -открыто, $Rj_* j^{-1}$ коммутирует с $R\phi_{\gamma*}$. Поэтому (5.4.6) остается верным с заменой F на $Rj_* j^{-1}F$, что в силу предложения 5.1.1 завершает доказательство.

(ii) Доказательство аналогично. Пусть $\xi_0 \notin N_{x_0}^*(\Omega)^a + (SS(F) \cap \pi^{-1}(x_0))$. Мы можем найти замкнутый выпуклый собственный конус γ и окрестность U точки x_0 , такие, что $\gamma \subset \{v; \langle v, \xi_0 \rangle < 0\} \cup \{0\}$ и $(U \times \gamma^{oa}) \cap SS(F) \subset T_X^*X$. Можно считать, что Ω γ^a -открыто. Применяя предложение 5.2.1, мы можем найти такие γ -открытые подмножества Ω_0 и Ω_1 , что $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_0 \cup U$, $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ — окрестность точки x_0 , а $R\phi_{\gamma*} R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0}(F) = 0$. Положим $F' = R\Gamma_{\Omega_1 \setminus \Omega_0}(F)$. Заменяя Ω при необходимости другим γ^a -открытым множеством, совпадающим с Ω в окрестности точки x_0 , мы можем с самого начала считать, что $\Omega \cap (K + \gamma)$ относительно компактно в X для любого компактного подмножества K в X . Тогда по лемме 5.4.3 мы получаем, что $R\phi_{\gamma*}(F'_\Omega) = 0$. В силу предложения 5.1.1 отсюда следует, что $(x_0; \xi_0) \notin SS(F'_\Omega)$ и пучок F'_Ω изоморфен $F_\Omega = Rj_* j^{-1}F$ в окрестности точки x_0 .

(b) Положим $\Omega = X \setminus Z$. Тогда (b) выводится из (a) применением неравенств треугольника к выделенным треугольникам $R\Gamma_Z(F) \rightarrow F \rightarrow Rj_* j^{-1}F \xrightarrow{+1}$ и $Rj_* j^{-1}F \rightarrow F \rightarrow F_Z \xrightarrow{+1}$. $\square$

Следствие 5.4.9. Пусть Z — замкнутое подмножество в X , $x \in Z$ и $N_x^*(Z) \neq T_x^*X$. Предположим, что $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ удовлетворяет условию $SS(F) \cap N_x^*(Z) \subset \{0\}$. Тогда $(R\Gamma_Z(F))_x = 0$.

Доказательство. Можно считать, что X аффинно. Полагая $F' = R\Gamma_Z(F)$, мы имеем

$$SS(F') \cap \pi^{-1}(x) \subset (SS(F) \cap \pi^{-1}(x)) + N_x^*(Z)^a.$$

Поскольку множество $((SS(F) \cap \pi^{-1}(x)) + N_x^*(Z)^a) \cap N_x^*(Z)$ содержится в $\{0\}$, существует замкнутый выпуклый собственный конус γ , такой, что $\text{Int } \gamma^{oa} \cup \{0\}$ содержит $N_x^*(Z)$ и

$$(SS(F') \cap \pi^{-1}(x)) \cap \gamma^{oa} \subset \{0\}.$$

В силу предложения 5.3.7 можно считать, что Z γ -замкнуто. Согласно предложению 5.2.1, существуют такие γ -открытые подмножества

$\Omega_1 \supset \Omega_0$, что $R\phi_{\gamma*} R\Gamma_{X \setminus \Omega_0}(F')|_{\Omega_1} = 0$ и $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ — относительно компактная окрестность точки x . Так как $N_x^*(Z) \subset \text{Int } \gamma^{oa} \cup \{0\}$, множества $\Omega \cap Z$ образуют систему окрестностей точки x в Z , если Ω пробегает семейство γ -открытых окрестностей точки x . Поэтому

$$H^j(F')_x = \lim_{\Omega} H^j(\Omega; F') = \lim_{\Omega} H^j(\Omega \cap \Omega_0; F'),$$

где Ω пробегает семейство γ -открытых окрестностей точки x . Поскольку $\Omega \cap \Omega_0 \cap Z = \emptyset$, если γ -открытая окрестность Ω точки x такова, что $\Omega \cap Z \subset \Omega_1 \setminus \Omega_0$, мы получаем требуемый результат. $\square$

Следствие 5.4.10. (i) Если M — замкнутое подмногообразие в X и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, то

$$\text{supp}(\mu_M(F)) \subset T_M^*X \cap \text{SS}(F).$$

(ii) Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}^b(X)$. Тогда

$$\text{supp}(\mu_{\text{hom}}(G, F)) \subset \text{SS}(G) \cap \text{SS}(F).$$

Доказательство. (i) По теореме 4.3.2 (ii) для $p \in T_M^*X \setminus \text{SS}(F)$ мы имеем $H^j(\mu_M(F))_p \simeq \lim_{\xrightarrow{Z}} H_Z^j(F)_{\pi(p)}$, где Z пробегает описанное там семейство. Но мы можем, кроме того, предположить, что $N_{\pi(p)}^*(Z) \subset T_M^*X \setminus \text{SS}(F)$. Тогда из следствия 5.4.9 вытекает, что $H_Z^j(F)_{\pi(p)} = 0$.

(ii) вытекает из (i) и предложения 5.4.2. $\square$

В следующей главе мы дадим оценку множества $\text{SS}(\mu_{\text{hom}}(G, F))$.

Следствие 5.4.11. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X , $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Предположим, что $\text{SS}(F) \cap T_M^*X \subset T_X^*X$. Тогда

(i) $\text{SS}(F_M) \subset \text{SS}(F) + T_M^*X$,

(ii) естественный морфизм $F_M \otimes \omega_{M/X} \rightarrow R\Gamma_M(F)$ является изоморфизмом.

Напомним, что $\omega_{M/X} = \sigma_{M/X}[\dim M - \dim X]$ — относительный дуализирующий комплекс.

Доказательство. (i) Проводя индукцию по $\text{codim } M$, можно считать, что M — гиперповерхность. Поскольку результат локален на M , мы

можем также считать, что M делит X на два открытых подмножества Ω^+ и $\Omega^-: X = \Omega^- \cup M \cup \Omega^+$. Пусть $j_{\pm}$ — открытые вложения $\Omega_{\pm} \hookrightarrow X$. Мы имеем выделенные треугольники

$$(5.4.7) \quad Rj_{-!}j_{-}^{-1}F \oplus Rj_{+!}j_{+}^{-1}F \longrightarrow F \longrightarrow F_M \xrightarrow{+1}.$$

Теперь результат следует из предложения 5.4.8.

(ii) Пусть $i: M \hookrightarrow T_M^*X$ — нулевое сечение, а $\dot{\pi}: \dot{T}_M^*X \rightarrow M$ — проекция. Тогда имеется выделенный треугольник

$$(5.4.8) \quad i^!\mu_M(F) \longrightarrow R\pi_*\mu_M(F) \longrightarrow R\dot{\pi}_*(\mu_M(F)|_{\dot{T}_M^*X}) \xrightarrow{+1}.$$

С другой стороны, по теореме 4.3.2 $i^!\mu_M(F) = F_M \otimes \omega_{M/X}$ и $R\pi_*\mu_M(F) = R\Gamma_M(F)$. В силу следствия 5.4.10 $\text{supp}(\mu_M(F)) \subset i(M)$, откуда вытекает, что $R\dot{\pi}_*(\mu_M(F)|_{\dot{T}_M^*X}) = 0$. Итак, мы получили (ii). $\square$

Определение 5.4.12. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а A — замкнутое коническое подмножество в T^*X . Будем говорить, что f *нехарактеристичен относительно A* , если

$$(5.4.9) \quad f_{\pi}^{-1}(A) \cap T_Y^*X \subset Y \times_X T_X^*X.$$

Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, то f называется *нехарактеристичным относительно F* при условии, что f нехарактеристичен относительно $\text{SS}(F)$. Если f — вложение, то вместо « f нехарактеристичен» говорят также « Y нехарактеристичен».

Напомним, что через T_Y^*X обозначается ядро отображения ${}^t f': Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y$. В частности, если отображение f гладкое, то оно нехарактеристично относительно любого конического подмножества в T^*X . Рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве леммы 5.4.7, показывают, что если f нехарактеристичен относительно A , то ${}^t f'(f_{\pi}^{-1}(A))$ также является замкнутым коническим подмножеством.

Предложение 5.4.13. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Предположим, что морфизм $f: Y \rightarrow X$ нехарактеристичен. Тогда

$$(i) \quad \text{SS}(f^{-1}F) \subset {}^t f'(f_{\pi}^{-1}(\text{SS}(F))),$$

$$(ii) \quad \text{естественный морфизм } f^{-1}F \otimes_{\omega_{Y/X}} \rightarrow f^!F \text{ является изоморфизмом.}$$

Доказательство. Разложим f в композицию морфизмов с помощью отображения графика

$$Y \xrightarrow{g} Y \times X \xrightarrow{h} X, \quad f = h \circ g,$$

где $g(y) = (y, f(y))$, а h — проекция произведения $Y \times X$ на второй сомножитель. Достаточно доказать результат отдельно для h и g , и можно с самого начала предполагать, что f либо гладок, либо является замкнутым вложением. Теперь утверждение следует из предложения 5.4.5 в гладком случае и из предложения 5.4.4 и следствия 5.4.11 в случае вложения. $\square$

Предложение 5.4.14. Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}^b(X)$.

(i) Пусть $SS(F) \cap SS(G)^a \subset T_X^* X$. Тогда

$$SS\left(F \overset{L}{\otimes} G\right) \subset SS(F) + SS(G).$$

(ii) Пусть $SS(F) \cap SS(G) \subset T_X^* X$. Тогда

$$SS(R\mathcal{H}om(G, F)) \subset SS(F) + SS(G)^a.$$

Если, кроме того, G кохомологически конструктивен, то $R\mathcal{H}om(G, A_X) \otimes^L F \rightarrow R\mathcal{H}om(G, F)$ — изоморфизм.

Доказательство. Напомним, что

$$(5.4.10) \quad F \overset{L}{\otimes} G \simeq \delta_X^{-1} \left(F \boxtimes G \right),$$

$$(5.4.11) \quad R\mathcal{H}om(G, F) \simeq \delta_X^! R\mathcal{H}om(q_2^{-1} G, q_1^! F),$$

где $\delta_X: X \rightarrow X \times X$ — диагональное вложение. Поэтому требуемое утверждение следует из предложений 5.4.13, 5.4.1, 5.4.2 и 3.4.4. $\square$

Замечание 5.4.15. В предложениях 5.4.8–5.4.13 мы всюду делали предположение о нехарактеристичности. Оно будет снято в гл. 6.

Примеры 5.4.16. (i) Пусть t — координата на $\mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение $t \mapsto t^3$, и пусть $G = A_{\mathbb{R}}$. Тогда $Rf_* G \simeq A_{\mathbb{R}}$, но $f_*^{-1} f'^{-1}(T_{\mathbb{R}}^* \mathbb{R})$ содержит $T_{\{0\}}^* \mathbb{R}$. Поэтому включение в предложении 5.4.4, вообще говоря, не является равенством. Однако если f голоморфно и конечно, а пучок G $\mathbb{C}$ -конструктивен (см. § 8.5), то равенство всегда имеет место [Kashiwara 5].

(ii) Пусть $X = \mathbb{R}^2$ с координатами (t, y) , $Y = \{(t, y); t = 0\}$, и пусть $Z = \{(t, y); t > 0, -t < y \leq t\}$. Тогда

$$(5.4.12) \quad SS(A_Z) \cap \pi^{-1}(0) = \{(\tau, \eta); \tau \leq -|\eta|\},$$

где (τ, η) — двойственные координаты. Тогда Y нехарактеристично относительно пучка A_Z . Поскольку $(A_Z)_Y = R\Gamma_Y(A_Z) = 0$, включения в предложении 5.4.13 не являются равенствами в общем случае.

Теперь мы обобщим предложение 5.4.4 на несобственную ситуацию.

Из теории Морса хорошо известно, что если Y — компактное многообразие, а φ — вещественная C^1 -функция на Y , не имеющая критических значений в интервале $]t_1, t_2[$, то для любого j группы когомологий $H^j(\{x; \varphi(x) < t\}; A_X)$ изоморфны для всех $t \in]t_1, t_2[$. Аналогичный результат справедлив в относительном случае, т. е. для любого пучка G на Y ; при этом условие, что φ не имеет критических значений (т. е. $d\varphi(x) \notin T_X^*X$ при $\varphi(x) \in]t_1, t_2[$), заменяется условием, что $d\varphi(x)$ не принадлежит $SS(G)$. Более точно, мы имеем следующий результат.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а φ — вещественная C^1 -функция на Y . Положим

$$(5.4.13) \quad Y_t = \{y \in Y; \varphi(y) < t\}, \quad \tilde{Y}_t = \{y \in Y; \varphi(y) \leq t\}$$

и обозначим через j_t (соответственно $\tilde{j}_t$) вложение $Y_t \hookrightarrow Y$ (соответственно $\tilde{Y}_t \hookrightarrow Y$), а через f_t (соответственно $\tilde{f}_t$) — отображение $f|_{Y_t} = f \circ j_t$ (соответственно $f \circ \tilde{j}_t$). Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$.

Предложение 5.4.17. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$, и предположим, что $\text{supp}(G) \cap \tilde{Y}_t$ является собственным над X для всех $t \in \mathbb{R}$.

(i) Пусть для любого $y \in Y \setminus \tilde{Y}_{t_0}$

$$d\varphi(y) \notin \left(SS(G) + {}^t f' \left(Y \times_X T^*X \right) \right).$$

Тогда

(a)	$Rf_* G \simeq Rf_{t_*} j_t^{-1} G$	для $t > t_0$,
(a')	$Rf_* G \simeq R\tilde{f}_{t_*} \tilde{j}_t^{-1} G$	для $t \geq t_0$,
(b)	$SS(Rf_* G) \subset f_{\pi}({}^t f'^{-1}(SS(G) \cap \pi^{-1}(\tilde{Y}_{t_0})))$ $\quad = f_{\pi}({}^t f'^{-1}(SS(G)))$.	

(ii) Предположим, что для любого $y \in Y \setminus \tilde{Y}_{t_0}$

$$-d\varphi(y) \notin \left(SS(G) + {}^t f' \left(Y \times_X T^*X \right) \right).$$

Тогда

- (c) $Rf_t G \simeq Rf_{t*} j_t^{-1} G$ для $t > t_0$,
 (c') $R\tilde{f}_t G \simeq R\tilde{f}_{t*} \tilde{j}_t^{-1} G$ для $t > t_0$,
 (d) $SS(Rf_t G) \subset f_{t*} (f'^{-1}(SS(G) \cap \pi^{-1}(\tilde{Y}_{t_0})))$
 $\subset f_{t*} (f'^{-1}(SS(G)))$.

Доказательство. Пусть $\tilde{f}$ — отображение, задаваемое формулой $(f, \varphi): Y \rightarrow X \times \mathbb{R}$, и пусть q и $\tilde{\varphi}$ — проекции произведения $X \times \mathbb{R}$ на первый и второй сомножители соответственно. Тогда отображение $\tilde{f}$ является собственным на $\text{supp}(G)$ и $f = q \circ \tilde{f}$. Пусть i_t (соответственно $\tilde{i}_t$) обозначает вложение $X \times]-\infty, t[\hookrightarrow X \times \mathbb{R}$ (соответственно $X \times]-\infty, t] \hookrightarrow X \times \mathbb{R}$). Положим $q_t = q \circ i_t$ и $\tilde{q}_t = q \circ \tilde{i}_t$. Тогда, полагая $\tilde{G} = R\tilde{f}_* G$, имеем

$$Rf_{t*} j_t^{-1} G \simeq Rq_{t*} i_t^{-1} \tilde{G}, \quad R\tilde{f}_{t*} \tilde{j}_t^{-1} G \simeq Rq_{t*} \tilde{i}_t^{-1} \tilde{G},$$

$$Rf_{t*} j_t^{-1} G \simeq Rq_{t*} i_t^{-1} \tilde{G}, \quad R\tilde{f}_{t*} \tilde{j}_t^{-1} G \simeq R\tilde{q}_{t*} \tilde{i}_t^{-1} \tilde{G}.$$

Поэтому достаточно доказать утверждение для $\tilde{G}, q, i_t, \tilde{\varphi}$ вместо G, f, j_t, φ .

(i) Из условий предложения следует, что

$$(5.4.14) \quad SS(\tilde{G}) \cap (T^*X \times \{(t; \tau); t > t_0\}) \subset T^*X \times \{(t; \tau); \tau \leq 0\}.$$

Пусть U — открытое подмножество в X , содержащееся в локальной карте и выпуклое в этой карте. В силу предложения 5.2.3 и следствия 3.5.5 для всех $t > t_0$ имеет место изоморфизм

$$(5.4.15) \quad R\Gamma(U \times \mathbb{R}; \tilde{G}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U \times]-\infty, t[; \tilde{G}).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать изоморфизм $R\Gamma(U \times]t_0, \infty[; \tilde{G}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(U \times]t_0, t[; \tilde{G})$. В силу изоморфизма $]t_0, \infty[\simeq \mathbb{R}$ мы можем применить приведенные выше предложения. Это доказывает п. (а).

Поскольку q является собственным на $\text{supp}(i_{t*} i_t^{-1} \tilde{G})$, из предложения 5.4.4 мы получаем, что

$$(5.4.16) \quad SS(Rq_* Ri_{t*} i_t^{-1} \tilde{G}) \subset \{(x; \xi); (x, t'; \xi, 0) \in SS(Ri_{t*} i_t^{-1} \tilde{G})$$

для некоторого $t'\}$.

Так как $SS(Ri_{t*} i_t^{-1} \tilde{G})$ содержится в $SS(\tilde{G}) + (T^*X \times \{(t, \tau); \tau \leq 0\})$ в силу предложения 5.4.8, из (5.4.16) и (5.4.14) вытекает, что для $t > t_0$

$$SS(Rq_* Ri_{t*} i_t^{-1} \tilde{G}) \subset \{(x; \xi); (x, t'; \xi, 0) \in SS(\tilde{G}) \text{ для некоторого } t'\},$$

откуда следует (b).

Чтобы получить (а'), достаточно заметить, что для любого компактного подмножества K в X справедливо соотношение

$$H^k(K; R\tilde{q}_{i_*} \tilde{i}_t^{-1} \tilde{G}) \xrightarrow[t' > t]{} \lim_{t' > t} H^k(K; Rq_{i'_*} i_t'^{-1} \tilde{G}).$$

(ii) Доказательство аналогично, следует лишь заменить « $\tau \leq 0$ » на « $\tau \geq 0$ » в (5.4.14) и вместо формулы (5.4.15) использовать формулу

$$R\Gamma_{U \times]-\infty, t]}(U \times \mathbb{R}; \tilde{G}) \simeq R\Gamma_{U \times]-\infty, t']} (U \times \mathbb{R}; \tilde{G})$$

для любых t и $t', t_0 \leq t \leq t'$. □

Замечание 5.4.18. Условия предложения 5.4.17 означают, что f относительно нехарактеристичен в следующем смысле. Пусть $T^*(Y/X)$ — относительное кокасательное расслоение, т. е. коядро морфизма ${}^t f': Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y$, и пусть $p: T^*Y \rightarrow T^*(Y/X)$ — естественная проекция. Тогда условие предложения 5.4.17 записывается в виде $\pm p(d\varphi(y)) \notin p(SS(G))$ для любого $y \in Y \setminus Y_{t_0}$.

В качестве частного случая предложения 5.4.17 установим следующий полезный результат.

Следствие 5.4.19 (микролокальная лемма Морса). Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и пусть $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ есть C^1 -функция, такая, что отображение $\phi: \text{supp}(F) \rightarrow \mathbb{R}$ является собственным. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

- (i) Предположим, что $d\phi(x) \notin SS(F)$ для любого $x \in X$, такого, что $a \leq \phi(x) < b$. Тогда естественные морфизмы

$$\begin{aligned} R\Gamma(\phi^{-1}(]-\infty, b[); F) &\rightarrow R\Gamma(\phi^{-1}(]-\infty, a]); F) \\ &\rightarrow R\Gamma(\phi^{-1}(]-\infty, a]); F) \end{aligned}$$

являются изоморфизмами.

- (ii) Предположим, что $-d\phi(x) \notin SS(F)$ для любого $x \in X$, такого, что $a < \phi(x) \leq b$ (соответственно $a \leq \phi(x) < b$). Тогда естественный морфизм

$$R\Gamma_{\phi^{-1}(]-\infty, a])}(X; F) \rightarrow R\Gamma_{\phi^{-1}(]-\infty, b])}(X; F)$$

(соответственно

$$R\Gamma_c(\phi^{-1}(]-\infty, a]); F) \rightarrow R\Gamma_c(\phi^{-1}(]-\infty, b]); F))$$

является изоморфизмом.

В качестве простого приложения полученных выше результатов докажем *неравенства Морса* для пучков. С этой целью будем предполагать вплоть до конца § 4, что основное кольцо A является полем, и будем обозначать его через k . Для $V \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k)))$ положим, как и в упр. 1.34,

$$(5.4.17) \quad b_j(V) = \dim H^j(V),$$

$$(5.4.18) \quad b_l^*(V) = (-1)^l \sum_{j \leq l} (-1)^j b_j(V).$$

Пусть теперь $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и пусть $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая C^∞ -функция. Положим

$$(5.4.19) \quad \Lambda_\phi = \{(x; d\phi(x)); x \in X\}.$$

Заметим, что Λ_ϕ — лагранжево (вообще говоря, не коническое) подмногообразие в T^*X .

Предложение 5.4.20. *Сделаем следующие предположения:*

- (i) для всех $t \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in \text{supp } F; \phi(x) \leq t\}$ компактно;
- (ii) множество $\Lambda_\phi \cap \text{SS}(F)$ конечно (и, например, равно $\{p_1, \dots, p_N\}$);
- (iii) пусть $x_i = \pi(p_i)$; тогда $V_i = (R\Gamma_{\{\phi \geq \phi(x_i)\}}(F))_{x_i}$ принадлежит $\text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k)))$ для всех $i = 1, \dots, N$. Тогда
 - (a) $R\Gamma(X; F)$ принадлежит $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k))$;
 - (b) для $b_j = b_j(R\Gamma(X; F))$, $b_j^* = b_j^*(R\Gamma(X; F))$, $b_j' = \sum_i b_j(V_i)$ и $b_j^{**} = \sum_i b_j^*(V_i)$ мы имеем

$$(5.4.20) \quad b_l^* \leq b_l^{**} \quad \text{для всех } l,$$

$$(5.4.21) \quad \sum_j (-1)^j b_j = \sum_j (-1)^j b_j'.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что из предположения (i) следует, что функция ϕ является собственной на $\text{supp}(F)$. Положим $G = R\phi_* F$. Пусть t — координата на $\mathbb{R}$. Далее, пусть $\phi(\{x_1, \dots, x_N\}) = \{t_1, \dots, t_L\}$, где $t_i < t_{i+1}$ для всех i . Тогда

- (i)' для всех $t \in \mathbb{R}$ множество $]-\infty, t] \cap \text{supp}(G)$ компактно.
- (ii)' $\text{SS}(G) \cap \{(t; dt); t \in \mathbb{R}\}$ содержится в $\bigcup_{i=1}^L \{(t_i; dt)\}$ (это следует из предложения 5.4.4).
- (iii)' $(R\Gamma_{\{t \geq t_i\}}(G))_{t_i} \simeq \bigoplus_{\phi(x_j)=t_i} V_j$.

Действительно, левая часть последнего соотношения изоморфна $(R\Gamma_{\{x; \phi(x) \geq t_i\}}(F))|_{\phi^{-1}(t_i)}$, а потому и $\bigoplus_{\phi(x_j)=t_i} (R\Gamma_{\{\phi(x) \geq t_i\}}(F))_{x_j}$, по определению микроносителя. Поскольку $R\Gamma(X; F) = R\Gamma(\mathbb{R}; G)$, а G удовлетворяет тем же условиям, что и F , мы с самого начала можем предположить, что $X = \mathbb{R}$, а ϕ — тождественное отображение.

Положим теперь $t_0 = -\infty$, $t_{L+1} = +\infty$, $I_t =]-\infty, t[$, $Z_t =]-\infty, t]$ и для краткости будем писать $I_j = I_{t_j}$, $Z_j = Z_{t_j}$.

По лемме о нехарактеристических деформациях (предложение 2.7.2) имеют место изоморфизмы

$$R\Gamma(I_{j+1}; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(I_t; F), \quad t_j < t \leq t_{j+1}.$$

Переходя к когомологиям, а затем к индуктивному пределу для $t > t_j$, получаем

$$(5.4.22) \quad H^k(I_{j+1}; F) \simeq H^k(Z_j; F).$$

Рассмотрим выделенные треугольники

$$(5.4.23) \quad (R\Gamma_{\{t \geq t_j\}}(F))_{t_j} \longrightarrow R\Gamma(Z_j; F) \longrightarrow R\Gamma(I_j; F) \xrightarrow{+1}.$$

Поскольку $R\Gamma(I_1; F) = 0$, в силу (5.4.22) мы получаем по индукции, что и $R\Gamma(Z_j; F)$, и $R\Gamma(I_j; F)$ принадлежат $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k))$. Это доказывает утверждение (а).

Обозначим для краткости $b_j(R\Gamma(Z_j; F))$ через $b_j(Z_j)$ и $b_j(R\Gamma(I_j; F))$ через $b_j(I_j)$. Применяя результат упр. 1.34, мы получаем из (5.4.23) соотношение

$$b_l'^* \geq \sum_{i=1}^L (b_l^*(Z_i) - b_l^*(I_i)).$$

Так как, согласно (5.4.22),

$$b_j = \sum_{i=1}^L (b_j(Z_i) - b_j(I_i)),$$

то выполняется неравенство (5.4.20).

Наконец, (5.4.21) следует из (5.4.20), поскольку $b_l^* = -b_{l-1}^*$ и $b_l'^* = -b_{l-1}'^*$ при $l \geq 0$. $\square$

Результаты о классических неравенствах Морса можно найти у Милнора [Milnor 1]. Отметим, что выражение $\sum_j (-1)^j b_j$ есть не что иное, как характеристика Эйлера–Пуанкаре объекта F на X . Мы вернемся к этой характеристике в гл. 9.

5.5. Микроноситель конических пучков

В этом параграфе мы изучаем микроносители пучков на векторных расслоениях.

Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — вещественное векторное расслоение над многообразием Z (ср. § 3.7). Через $\mu: \mathbb{R}^+ \times E \rightarrow E$ обозначим действие $\mathbb{R}^+$ на E , а через e — векторное поле на E , задающее соответствующее инфинитезимальное действие. Таким образом, для любой функции φ на E имеем $(e(\varphi))(x) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mu(t, x))|_{t=1}$. Векторное поле e обычно называется *эйлеровым векторным полем*. Отображение μ порождает отображение ${}^t\mu: \mathbb{R}^+ \times T^*E \rightarrow T^*\mathbb{R}^+ \times T^*E$. Рассмотрим композицию ограничения отображения ${}^t\mu$ на $1 \in \mathbb{R}^+$ с проекцией $T^*\mathbb{R}^+ \times T^*E \rightarrow T^*\mathbb{R}^+ \simeq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. В результате мы получаем отображение

$$(5.5.1) \quad \theta_E: T^*E \rightarrow \mathbb{R}$$

— главный символ оператора e .

Пусть (z, x) — (локальная на Z) система координат, такая, что (z) — координаты на Z , а (x) — линейные координаты. Пусть $(z, x; \zeta, \xi)$ — соответствующие координаты на T^*E . Тогда

$$(5.5.2) \quad \begin{cases} e = \langle x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ \theta_E = \langle x, \xi \rangle, \\ \alpha_E = \langle \zeta, dz \rangle + \langle \xi, dx \rangle. \end{cases}$$

Здесь α_E — фундаментальная 1-форма на T^*E (ср. § П.2).

Напомним, что через $T^*(E/Z)$ обозначается относительное кокасательное расслоение многообразия E над Z . Оно определяется точной последовательностью векторных расслоений над E

$$(5.5.3) \quad 0 \rightarrow E \times_Z T^*Z \rightarrow T^*E \rightarrow T^*(E/Z) \rightarrow 0.$$

Для любого $z \in Z$ слой $T^*(E/Z)_z$ расслоения $T^*(E/Z)$ над z можно отождествить с кокасательным расслоением $T^*(E_z)$ к слою E_z расслоения E над точкой z . С другой стороны, $T^*(E_z)$ изоморфно $E_z \times E_z^*$. Поэтому для каждого z мы получаем отображение из $T^*(E/Z)_z$ в E_z^* . Это дает отображение

$$(5.5.4) \quad T^*(E/Z) \rightarrow E^*,$$

Затем мы определяем морфизм над Z

$$(5.5.5) \quad \psi_E: T^*E \rightarrow E^*$$

как композицию $T^*E \rightarrow T^*(E/Z) \rightarrow E^*$.

Предложение 5.5.1. (i) Существует единственное отображение $\Phi_E: T^*E \rightarrow T^*E^*$, такое, что $\alpha_E - d\theta_E = \Phi_E^*(\alpha_{E^*})$ и что композиция $T^*E \xrightarrow{\Phi_E} T^*E^* \xrightarrow{\alpha} E^*$ равна ψ_E .

$$(ii) \theta_{E^*} \circ \Phi_E = -\theta_E.$$

(iii) $\Phi_{E^*} \circ \Phi_E = a^*$, где a^* — автоморфизм расслоения T^*E , индуцированный антиподальным отображением на E .

Доказательство. Пусть, как и выше, (z, x) — система локальных координат на E , и пусть (z, y) — двойственные координаты на E^* . Тогда каноническое спаривание между E и E^* над Z задается формулой $E \times_Z E^* \ni (z, x, y) \mapsto (x, y) = \sum_j x_j y_j$. Пусть $(z, x; \zeta, \xi)$ и $(z, y; \zeta, \eta)$ — соответствующие координаты на T^*E и T^*E^* . Отображение ψ_E задается формулой $(z, x; \zeta, \xi) \mapsto (z, \xi)$, и мы имеем

$$\alpha_E - d\theta_E = \langle \zeta, dz \rangle - \langle x, d\xi \rangle.$$

Поэтому отображение

$$(5.5.6) \quad \Phi_E: (z, x; \zeta, \xi) \mapsto (z, \xi; \zeta, -x)$$

удовлетворяет нужным условиям. Отображение Φ_E однозначно определяется этими условиями. Действительно, из равенства $\pi \circ \Phi_E = \psi_E$ следует, что

$$\Phi_E(z, x, \zeta, \xi) = (z, \xi; \varphi_0(z, x, \zeta, \xi), \varphi_1(z, x, \zeta, \xi)),$$

а из второго условия вытекает, что

$$\langle \varphi_0, dz \rangle + \langle \varphi_1, d\xi \rangle = \langle \zeta, dz \rangle - \langle x, d\xi \rangle.$$

(ii) следует из формулы (5.5.6).

(iii) Так как $\Phi_{E^*}(z, y, \zeta, \eta) = (z, \eta; \zeta, -y)$, то $\Phi_{E^*} \circ \Phi_E(z, x, \zeta, \xi) = (z, -x, \zeta, -\xi)$. $\square$

Замечание 5.5.2. Отображение Φ_E — симплектическое (т. е. сохраняющее форму $d\alpha_E$), но не однородное симплектическое (т. е. не сохраняющее форму α_E) преобразование.

Мы обозначим через S_E характеристическое многообразие эйлера в векторного поля

$$(5.5.7) \quad S_E = \theta_E^{-1}(0).$$

В координатах $(z, x; \zeta, \xi)$ на T^*E многообразие S_E задается уравнением $\langle x, \xi \rangle = 0$.

Наконец, заметим, что на многообразии T^*E заданы два действия группы $\mathbb{R}^+$, одно из которых отвечает структуре векторного расслоения T^*E над E , а другое — структуре векторного расслоения E над Z . Во введенной выше системе локальных координат эти два действия описываются формулами

$$(5.5.8) \quad \begin{cases} (z, x; \zeta, \xi) \mapsto (z, x; \lambda \zeta, \lambda \xi), & \lambda \in \mathbb{R}^+, \\ (z, x; \zeta, \xi) \mapsto (z, \mu x; \zeta, \mu^{-1} \xi), & \mu \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Подмножество в T^*E будем называть *биконическим*, если оно инвариантно относительно обоих действий группы $\mathbb{R}^+$.

Изучим теперь конические пучки на E . Напомним (§ 3.7), что через $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$ обозначается полная подкатегория категории $\mathbf{D}^b(E)$, состоящая из таких объектов F , что для любого j когомологии $H^j(F)$ локально постоянны на орбитах действия группы $\mathbb{R}^+$.

Предложение 5.5.3. (i) Категория $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$ — полная подкатегория в $\mathbf{D}^b(E)$, состоящая из объектов F , для которых $SS(F) \subset S_E$.

(ii) Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E))$, то множество $SS(F)$ биконическое.

Доказательство. Пункт (ii) очевиден. Докажем (i).

Положим $\dot{E} = E \setminus Z$, где Z отождествлено с нулевым сечением. Достаточно доказать утверждение на $\dot{E}$. Но оно следует из предложения 5.4.5, так как $\dot{E}/\mathbb{R}^+$ — многообразие, а $\dot{E} \times_{\dot{E}/\mathbb{R}^+} T^*(\dot{E}/\mathbb{R}^+) = \dot{E} \times_E S_E$. $\square$

Проекция $\tau: E \rightarrow Z$ и ее ограничение $\dot{\tau}$ на $\dot{E}$ определяют отображения

$$(5.5.9) \quad \begin{array}{ccccc} T^*E & \xleftarrow{\iota_{\tau'}} & E \times_Z T^*Z & \xrightarrow{\tau_\pi} & T^*Z \\ \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ T^*\dot{E} & \xleftarrow{\dot{\iota}_{\dot{\tau}'}} & \dot{E} \times_Z T^*Z & \xrightarrow{\dot{\tau}_\pi} & T^*Z \end{array}$$

Кроме того, нулевое сечение расслоения E позволяет нам определить иммерсии

$$(5.5.10) \quad T^*Z \hookrightarrow E \times_Z T^*Z \xhookrightarrow{\iota_{\tau'}} T^*E,$$

с помощью которых мы будем иногда рассматривать T^*Z как подмножество в T^*E . Заметим, что если A — замкнутое биконическое подмножество в T^*E , то

$$(5.5.11) \quad \tau_\pi \iota_{\tau'}^{-1}(A) = T^*Z \cap A.$$

Предложение 5.5.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}+}^b(E))$. Тогда

- (i) $\text{SS}(R\tau_*(F)) \subset T^*Z \cap \text{SS}(F)$,
- (ii) $\text{SS}(R\tau_!(F)) \subset T^*Z \cap \text{SS}(F)$,
- (iii) $\text{SS}(R\dot{\tau}_*(F)) \subset \dot{\tau}_\pi^t \dot{\tau}'^{-1}(\text{SS}(F))$,
- (iv) $\text{SS}(R\dot{\tau}_!(F)) \subset \dot{\tau}_\pi^t \dot{\tau}'^{-1}(\text{SS}(F))$.

Доказательство. Локально на Z мы можем выбрать координаты $(z; x)$, где (x) — координаты в слое. Тогда требуемые утверждения следуют из предложения 5.4.17, в котором нужно положить $Z = X, Y = E$ и $Y_t = \{(z, x); |x|^2 < t\}$ в случаях (i) и (ii) или $Y_t = \{(z, x); t^{-1} < |x|^2 < t\}$ в случаях (iii) и (iv). $\square$

В § 3.7 мы определили преобразование Фурье–Сато $F^\wedge$ конического пучка $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}+}^b(E))$. Напомним, что

$$F^\wedge = Rp_{2*}R\Gamma_p(p_1^{-1}F),$$

где p_1 и p_2 — проекции произведения $E \times_Z E^*$ на первый и второй сомножители соответственно, а $P = \{(z, x, y) \in E \times_Z E^*; (x, y) \geq 0\}$. $\square$

Теорема 5.5.5. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}+}^b(E))$. Тогда, отождествляя T^*E и T^*E^* с помощью отображения Φ_E (см. предложение 5.5.1), мы получим

$$\text{SS}(F) = \text{SS}(F^\wedge).$$

Доказательство. По теореме 3.7.9 достаточно доказать включение $\text{SS}(F^\wedge) \subset \text{SS}(F)$. Выберем локальные координаты (z, x) на E и обозначим через (z, y) двойственные координаты на E^* , а через $(z, x; \zeta, \xi)$ и $(z, y; \zeta, \eta)$ координаты на T^*E и T^*E^* соответственно. Тогда Φ_E определяется формулой (5.5.6). Пусть $(z_0, x_0; \zeta_0, \xi_0) \notin \text{SS}(F)$; покажем, что $(z_0, \xi_0; \zeta_0, -x_0) \notin \text{SS}(F^\wedge)$. На первом шаге предположим, что

$$(5.5.12) \quad x_0 \neq 0, \quad \xi_0 \neq 0,$$

$$(5.5.13) \quad R\Gamma_Z(F) = 0.$$

Обозначим через j вложение $\dot{E} \hookrightarrow E$, через $\tilde{j}$ вложение $\dot{E} \times_Z E^* \hookrightarrow E \times_Z E^*$ и через $\tilde{p}_2$ проекцию $\dot{E} \times_Z E^* \rightarrow E^*$. В предположении, что выполнено (5.5.13), мы имеем

$$\begin{aligned} R\Gamma_p(p_1^{-1}F) &\simeq R\Gamma_p(p_1^{-1}Rj_*j^{-1}F) \\ &\simeq R\Gamma_p(R\tilde{j}_*j^{-1}p_1^{-1}F) \simeq R\tilde{j}_*\tilde{j}^{-1}R\Gamma_p(p_1^{-1}F), \end{aligned}$$

и потому

$$F^\wedge \simeq R\dot{p}_{2*} \tilde{j}^{-1} R\Gamma_p(p_1^{-1}F).$$

Пусть $(z_0, \xi_0; \zeta_0, -x_0) \in SS(F^\wedge)$. Применяя предложение 5.5.4 к p_2 , мы найдем некоторую точку $x_1 \in \dot{E}$, такую, что $(z_0, x_1, \xi_0; \zeta_0, 0, -x_0) \in SS(R\Gamma_p(p_1^{-1}F))$.

Если $(z_0, x_1, \xi_0) \in \partial P$, то в силу (5.5.12) множество P имеет гладкую границу, конормаль к которой в этой точке задается ковектором $\xi_0 dx + x_1 dy$. Поскольку эта точка не лежит в $SS(p_1^{-1}F)^a$, мы можем применить предложение 5.4.14 и найти такое ξ_1 , что $(z_0, x_1, \xi_0; \zeta_0, \xi_1, 0) \in SS(p_1^{-1}F)$ и $(z_0, x_1, \xi_0; 0, \xi_1, x_0) \in SS(AP)$. Таким образом, $x_0 = kx_1$, $\xi_1 = k\xi_0$ для некоторого $k \geq 0$ и $(z_0, x_1; \zeta_0, \xi_1) \in SS(F)$. Это противоречие, поскольку множество $SS(F)$ биконическое.

Чтобы избавиться от предположения (5.5.13), рассмотрим выделенный треугольник

$$R\Gamma_Z(F) \longrightarrow F \longrightarrow Rj_* j^{-1}F \xrightarrow{+1}.$$

Так как предыдущий результат можно применить к $Rj_* j^{-1}F$, достаточно показать, что $(z_0, \xi_0, \zeta_0, -x_0) \notin SS(R\Gamma_Z(F)^\wedge)$. Но это следует из предложения 3.7.13. Действительно, обозначим через i вложение $Z \hookrightarrow E$. Мы имеем $R\Gamma_Z(F)^\wedge \simeq (i_* i^! F)^\wedge \simeq \pi^{-1} i^! F$, и микроноситель пучка $\pi^{-1} i^! F$ содержится в множестве $\{(z, y; \zeta, \eta); \eta = 0\}$.

В заключение мы рассмотрим общий случай.

Рассмотрим пучок $A_{\mathbb{R} \times \{0\}}$ на $\mathbb{R}^2$. Применяя предложения 3.7.15 и 3.7.12, мы получаем

$$(5.5.14) \quad (F \boxtimes A_{\mathbb{R} \times \{0\}})^\wedge \simeq F^\wedge \boxtimes A_{\{0\} \times \mathbb{R}}[-1].$$

Если $(z_0, x_0; \zeta_0, \xi_0) \notin SS(F)$, то $(z_0, x_0, 1, 0; \zeta_0, \xi_0, 0, 1) \notin SS(F \boxtimes A_{\mathbb{R} \times \{0\}})$, так что $(z_0, \xi_0, 0, 1; \zeta_0, -x_0, -1, 0) \notin SS(F^\wedge \boxtimes A_{\{0\} \times \mathbb{R}})$, откуда следует, что $(z_0, \xi_0; \zeta_0, -x_0) \notin SS(F^\wedge)$ в силу предложений 5.4.4 и 5.4.5. $\square$

Упражнения к гл. 5

Упражнение 5.1. Пусть X — многообразие, а V — замкнутое коническое подмножество в T^*X . Обозначим через $\mathfrak{Sh}_V(X)$ (соответственно $\mathbf{D}_V^b(X)$) полную подкатегорию в $\mathfrak{Sh}(X)$ (соответственно в $\mathbf{D}^b(X)$), состоящую из объектов F , для которых $SS(F) \subset V$.

- (i) Теперь предположим, что X — комплексное векторное пространство с линейными координатами $(z) = (z_1, \dots, z_n)$, и

пусть $(z; \zeta)$ — координаты на комплексном кокасательном расслоении $X \times X^*$. Мы отождествим $X \times X^*$ с вещественным кокасательным расслоением посредством формы $\langle \zeta, dz \rangle + \langle \bar{\zeta}, d\bar{z} \rangle$. Пусть $V = \{(z; \zeta); \sum_j z_j \zeta_j = 0\}$. Докажите, что $\mathfrak{Sh}_V(X)$ состоит из пучков, которые локально постоянны на орбитах действия группы $\mathbb{C}^*$ на X .

- (ii) В ситуации (i) выясните, является ли функтор $\delta : \mathbf{D}^b(\mathfrak{Sh}_V(X)) \rightarrow \mathbf{D}_V^b(X)$ эквивалентностью категорий.

Упражнение 5.2. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и пусть φ — вещественная C^1 -функция на X . Возьмем такую точку $x_0 \in X$, что $\varphi(x_0) = 0, d\varphi(x_0) \notin \text{SS}(F)$. Докажите, что $\varinjlim_U R\Gamma_{\{x; \varphi(x) \geq 0\}}(U; F) = 0$, где

U пробегает семейство открытых окрестностей точки x_0 в X (относительно $\text{ind-объекта } \varinjlim$, см. § 1.11).

Упражнение 5.3. Пусть E — вещественное векторное пространство, а $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E))$. Пусть $\xi_0 \in E^*$. Докажите, что $(0; \xi_0) \notin \text{SS}(F)$ тогда и только тогда, когда существует такая фундаментальная система выпуклых открытых конических окрестностей γ точки ξ_0 , что $R\Gamma_{\gamma^0}(E; F) = 0$. (Указание. Используйте теорему 5.5.5.)

Упражнение 5.4. Пусть $C = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = t^2, t > 0\}$, и пусть j — вложение $C \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Положим $F = Rj_* A_C$.

- (i) Используя результат упр. 5.3, покажите, что $\pi^{-1}(0) \cap \text{SS}(F) \neq T_{\{0\}}^* \mathbb{R}^3$.
- (ii) Докажите, что $H^1(F) = A_{\{0\}}$.

Заметим, что мы нашли пример пучка $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, для которого $\text{SS}(H^j(F))$ не содержится в $\text{SS}(F)$.

Упражнение 5.5. Пусть X — векторное пространство.

- (i) Пусть Z — замкнутое выпуклое подмножество в X , и пусть $F = A_Z$. Покажите, что для любого $x \in Z$ справедливо соотношение $\text{SS}(F) \cap \pi^{-1}(x) = \gamma^0$, где $\gamma = C_x(Z)$.
- (ii) Пусть Ω — открытое выпуклое подмножество в X , и пусть $F = A_\Omega$. Покажите, что $\text{SS}(A_\Omega) = \text{SS}(A_{\bar{\Omega}})^a$.

Упражнение 5.6. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Докажите включение $\text{SS}(F) \subset \bigcup_j \text{SS}(H^j(F))$.

Упражнение 5.7. (i) Пусть $\{F_\lambda\}_\lambda$ — индуктивная система пучков на X . Докажите включение $SS(\varinjlim_\lambda F_\lambda) \subset \bigcup_\lambda SS(F_\lambda)$.

(ii) Пусть $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная система пучков на X . Докажите включение $SS(\varprojlim_n F_n) \subset \bigcap_n SS(F_n)$.

Упражнение 5.8. Пусть V — конечномерное векторное пространство, а Ω — открытый конус (не обязательно выпуклый) в V^* . Положим $G = (A_\Omega)^\wedge \otimes \omega_V$. Пусть $\mu: V \times V \rightarrow V$ — отображение $(x, y) \mapsto y - x$, и пусть $K = \mu^{-1}G$. Вспомним функтор Φ_K , введенный в § 3.6.

(i) Докажите, что если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(V))$, то $SS(\Phi_K(F)) \subset V \times \Omega$.

(ii) Докажите, что существует естественный морфизм $\Phi_K(F) \rightarrow F$, который является изоморфизмом на $V \times \Omega$. (Сравните с предложением 5.2.3.)

Упражнение 5.9. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times \mathbb{R}))$ удовлетворяет соотношению $SS(F) \cap (T_X^* X \times T^* \mathbb{R}) \subset T_{X \times \mathbb{R}}^*(X \times \mathbb{R})$. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, заданное формулой $\varphi(s) = 0$ при $s \leq 0$ и $\varphi(s) = s$ при $s \geq 0$. Докажите, что $SS(\varphi_X^{-1} F) \cap (T_X^* X \times T^* \mathbb{R}) \subset T_{X \times \mathbb{R}}^*(X \times \mathbb{R})$, где $\varphi_X = \text{id}_X \times \varphi$.

(Указание. Пусть $S = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2; t = s \geq 0 \text{ или } t = 0, s \leq 0\}$. Тогда $\varphi_X^{-1} F \simeq Rq_{2*}(q_1^{-1} F)_S$, где q_1 и q_2 — проекции из $X \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_s$ на $X \times \mathbb{R}_t$ и $X \times \mathbb{R}_s$ соответственно. Теперь достаточно проверить, что $\pm ds \notin (SS(F) \times T_{\mathbb{R}}^* \mathbb{R}, + SS(A_{X \times S}))$.)

Упражнение 5.10. Пусть F_0 и F_1 — объекты категории $\mathbf{D}^b(X)$, причем F_0 и F_1 имеют компактный носитель. Будем говорить, что F_0 и F_1 гомотопны, если существует $H \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times \mathbb{R}))$, такой, что проекция $p: X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является собственной на $\text{supp}(H)$, $SS(H) \cap (T_X^* X \times T^* \mathbb{R}) \subset T_{X \times \mathbb{R}}^*(X \times \mathbb{R})$ и $H|_{X \times \{i\}} \simeq F_i, i = 0, 1$.

(i) Докажите, что если H реализует гомотопию указанным выше образом, то существует $\tilde{H}$, удовлетворяющий тому же предположению, что и H , и, кроме того, $\tilde{H}|_{X \times [1, 2]} \simeq F_1 \boxtimes A_{[1, 2]}$. (Указание. Используйте упр. 5.9.)

(ii) Докажите, что гомотопность — отношение эквивалентности. (Указание. Используйте (i) и упр. 2.22.)

(iii) Докажите, что если F_0 и F_1 гомотопны, то $D_X F_0$ и $D_X F_1$ также гомотопны.

(iv) Докажите, что если F_0 и F_1 гомотопны, то для любого $k \in \mathbb{Z}$ когомологии $H^k(X; F_0)$ и $H^k(X; F_1)$ изоморфны.

- (v) Для $X = \mathbb{R}$ покажите, что $A_{[0,1]}$ гомотопна $A_{\{0\}}$, $A_{[0,1]}$ гомотопна нулю и $A_{]0,1]}$ гомотопна $A_{\{0\}}[-1]$.

Упражнение 5.11. (i) Пусть X — многообразие, а $i: Y \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение подмногообразия Y . Докажите, что если $T_Y^*X \setminus SS(F) \rightarrow Y$ имеет непрерывное сечение, то $i^!F \rightarrow i^{-1}F$ при $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ является нулевым морфизмом. (Указание. Рассмотрите последовательность $\mu_Y(i_*i^!F) \rightarrow \mu_Y(F) \rightarrow \mu_Y(i_*i^{-1}F)$.)

(ii) Используя (i), снова решите упр. 3.7.

(iii) Докажите, что в ситуации упр. 3.8 композиция отображений $H^k(Y; A_Y) \rightarrow H^{k+l}(X; A_X) \rightarrow H^{k+l}(Y; A_Y)$ равна нулю, если у $T_Y^*X \rightarrow Y$ имеется непрерывное сечение.

Упражнение 5.12. Предположим, что в качестве основного кольца взято поле k . Пусть X — многообразие, ϕ — вещественная C^∞ -функция на X , и предположим, что

- (i) для любого $t \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X; \phi(x) \leq t\}$ компактно,
- (ii) множество $\{x; d\phi(x) = 0\}$ конечно (и равно, скажем, $\{x_1, \dots, x_N\}$), и для любого x_i гессиан $H_\phi(x_i)$ невырожден и имеет ε_i отрицательных собственных значений.

Докажите, что $R\Gamma(X; k_X)$ содержится в $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k))$ и

$$\chi(R\Gamma(X; k_X)) = \sum_i (-1)^{c_i},$$

где $\chi(\cdot)$ определена в упр. 1.32.

(Указание. Используйте предложение 5.4.20, локальную версию упр. 3.5 и «лемму Морса».)

Упражнение 5.13. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Докажите формулу

$$SS(D_X F) = SS(F)^a,$$

предполагая выполненным условие (i) или условие (ii), приведенные ниже.

- (i) F когомологически конструктивен.
- (ii) Основное кольцо A удовлетворяет следующему условию: если $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(A)))$ и $R\text{Hom}_A(M, A) = 0$, то $M = 0$.

Заметим, что (ii) выполнено, если A — поле или кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ (ср. упр. 1.31). Авторы не располагают примером кольца, которое не обладало бы этим свойством.

Упражнение 5.14. Положим $X = \mathbb{R}$ и $B = \{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Пусть $F = G = \mathbb{Q}_B$. Докажите соотношение $\nu_{\{(0,0)\}}(F \boxtimes G) \neq \nu_{\{0\}}(F) \boxtimes \nu_{\{0\}}(G)$.

Замечания

Понятие микроносителя комплекса пучков F на вещественном многообразии X было введено авторами в 1982 г. [Kashiwara-Schapira 2, 3]. Оно может рассматриваться как обобщение теории Морса (см. [Milnor 1]), что ясно видно из следствия 5.4.19, или даже как обобщение менее давней «стратифицированной теории Морса» Горески и Макферсона [Goresky-MacPherson 2], которая применима только к конструктивным пучкам (см. гл. 8).

Однако мотивация наших конструкций связана с линейными уравнениями в частных производных, и в особенности с гиперболическими системами (см. [Kashiwara-Schapira 1]). При изучении таких систем приходится нехарактеристически деформировать область определения решений. Тогда оказывается, что можно забыть о самих дифференциальных уравнениях и о комплексной структуре на X ; единственное, о чем нужно помнить, — это о характеристическом многообразии системы в вещественном кокасательном расслоении, т. е. о микроносителе комплекса решений системы (см. ниже теорему 11.3.3). Как мы покажем в гл. 11, этот метод чрезвычайно плодотворен при изучении микродифференциальных уравнений.

γ -топология была введена авторами в работе [Kashiwara-Schapira 1] с тем, чтобы заставить микродифференциальные операторы действовать на голоморфные функции. В этой же работе было доказано предложение 5.2.1 (конечно, в более ограничительном контексте). Результаты этой главы были получены в работе [Kashiwara-Schapira 3], за исключением предложения 5.4.20, которое является вариантом Шапира и Тозе [Schapira-Tose 1] одного результата Касивары [Kashiwara 7]. Это предложение является обобщением классических неравенств Морса, по поводу которых см. работу Ботта [Bott 1].

Микроноситель и микролокализация

Пусть X — многообразие, а Ω — подмножество в T^*X . Мы определяем триангулированную категорию $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$ как локализацию категории $\mathbf{D}^b(X)$ по полной подкатегории всех объектов, носители которых не пересекают Ω . Тогда понятие «микролокального на Ω » изучения пучка F на X приобретает точный смысл: оно просто означает, что F рассматривается как объект категории $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$. Имея в руках это новое понятие, мы вводим микролокальные обратные образы и микролокальные прямые образы пучков. Они получаются переходом соответственно к pro -объектам и ind -объектам в категории $\mathbf{D}^b(X; p)$ (локализации категории $\mathbf{D}^b(X)$ в точке p), но мы даем условия, гарантирующие, что эти операции не выводят из $\mathbf{D}^b(X; p)$.

Локализация категории $\mathbf{D}^b(X)$ связана с функтором $\mu\hbar\mathrm{om}$ формулой

$$(6.0.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p)}(G, F) = H^0(\mu\hbar\mathrm{om}(G, F))_p.$$

Эта формула является существенным шагом в доказательстве теоремы 6.5.4, которая утверждает, что $\mathrm{SS}(F)$ — инволютивное подмножество в T^*X .

Прежде чем получить теорему об инволютивности, мы изучаем действие различных операций (прямых образов при открытом вложении, микролокализации и т. д.) на микроносители пучков, распространяя при этом результаты предыдущей главы на характеристический или несобственный случай. В частности, мы получаем соотношение

$$(6.0.2) \quad \mathrm{SS}(\mu\hbar\mathrm{om}(G, F)) \subset C(\mathrm{SS}(F), \mathrm{SS}(G)),$$

формулировка которого использует нормальные конусы в кокасательных расслоениях, которые мы изучаем в § 6.2.

Далее мы микролокально характеризуем пучки, микроносители которых содержатся в некотором инволютивном подмногообразии. Кроме всего прочего, мы показываем, что если $\mathrm{SS}(F)$ содержится в конормальном расслоении подмногообразия Y многообразия X , то микролокально F изоморфен пучку L_Y для некоторого A -модуля L .

В заключение мы рассматриваем случай, в котором функторы обратного образа и микролокализации коммутируют, и получаем теоретико-пучковый аналог одного результата о задаче Коши для микрогиперболических систем.

6.1. Категория $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$

Пусть V — подмножество в T^*X . Определим полную подкатегорию $\mathbf{D}_V^b(X)$ в категории $\mathbf{D}^b(X)$, полагая

$$(6.1.1) \quad \text{Ob}(\mathbf{D}_V^b(X)) = \{F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X)); \text{SS}(F) \subset V\}.$$

Это триангулированная категория, причем выделенные треугольники категории $\mathbf{D}_V^b(X)$ — это такие выделенные треугольники в $\mathbf{D}^b(X)$, что участвующие в них объекты принадлежат $\mathbf{D}_V^b(X)$. Кроме того, $\text{Ob}(\mathbf{D}_V^b(X))$ — нулевая система в $\mathbf{D}^b(X)$. Поэтому мы можем применить результаты § 1.6 и локализовать категорию $\mathbf{D}^b(X)$ по $\text{Ob}(\mathbf{D}_V^b(X))$.

Определение 6.1.1. Пусть $\Omega = T^*X \setminus V$.

(i) Мы полагаем

$$\mathbf{D}^b(X; \Omega) = \mathbf{D}^b(X) / \text{Ob}(\mathbf{D}_V^b(X)).$$

(ii) Пусть F и G — объекты категории $\mathbf{D}^b(X)$. Если они изоморфны в $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$, то мы говорим, что F и G *изоморфны на Ω* .

Для $p \in T^*X$ мы пишем $\mathbf{D}^b(X; p)$ вместо $\mathbf{D}^b(X; \{p\})$. Напомним, что $\text{Ob}(\mathbf{D}^b(X; \Omega)) = \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, а произвольный морфизм $u: G \rightarrow F$ в категории $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$ определяется заданием пары морфизмов $v: G \rightarrow F'$ и $w: F' \rightarrow F$ в $\mathbf{D}^b(X)$, таких, что w — изоморфизм на Ω , или, в другом варианте, пары морфизмов $w': G' \rightarrow G$ и $v': G' \rightarrow F$ в $\mathbf{D}^b(X)$, таких, что w' — изоморфизм на Ω . Более точно,

$$(6.1.2) \quad \begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; \Omega)}(G, F) &= \varinjlim \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(G, F') \\ &= \varinjlim \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(G', F), \end{aligned}$$

где индуктивный предел в первой (соответственно второй) строке в (6.1.2) берется по категории морфизмов $w: F \rightarrow F'$ (соответственно $w: G' \rightarrow G$), таких, что w — изоморфизм на Ω (см. упр. 1.14). Заметим, что если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X; \Omega))$, то $\text{SS}(F)$ корректно определен в Ω .

В § 4.4 мы ввели бифунктор μhom , действующий из $\mathbf{D}^b(X)^\circ \times \mathbf{D}^b(X)$ в $\mathbf{D}^b(T^*X)$. Если микроноситель пучка F или G не пересекается с Ω , то $\mu\text{hom}(G, F)|_\Omega = 0$ в силу следствия 5.4.10. Таким образом, $\mu\text{hom}(\cdot, \cdot)|_\Omega$ — корректно оопределенный функтор из $\mathbf{D}^b(X; \Omega)^\circ \times \mathbf{D}^b(X; \Omega)$ в $\mathbf{D}^b(\Omega)$. Мы сохраним для этого функтора обозначение μhom :

$$(6.1.3) \quad \mu\text{hom}: \mathbf{D}^b(X; \Omega)^\circ \times \mathbf{D}^b(X; \Omega) \rightarrow \mathbf{D}^b(\Omega).$$

Изоморфизм $\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(G, F) \simeq H^0(T^*X; \mu\text{hom}(G, F))$ (предложение 4.4.2) задает морфизм

$$(6.1.4) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; \Omega)}(G, F) \rightarrow H^0(\Omega; \mu\text{hom}(G, F)).$$

В действительности, если $w: F \rightarrow F'$ — морфизм в $\mathbf{D}^b(X)$, а ω — изоморфизм на Ω , то ω индуцирует изоморфизм $\mu\text{hom}(G, F)|_\Omega \xrightarrow{\sim} \mu\text{hom}(G, F')|_\Omega$.

В общем случае морфизм (6.1.4) не является изоморфизмом (см. упр. 6.6), однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 6.1.2. Пусть $p \in T^*X$, а F и G — объекты категории $\mathbf{D}^b(X)$. Тогда естественный морфизм $\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p)}(G, F) \rightarrow H^0(\mu\text{hom}(G, F))_p$ является изоморфизмом.

Доказательство. Если $p \in T_X^*X$, то доказывать нечего.

Предположим, что X — векторное пространство и $p = (x_0; \xi_0) \in T^*X$. В тех же обозначениях, что и в предложении 4.4.4, мы имеем

$$(6.1.5) \quad \begin{aligned} H^0(\mu\text{hom}(G, F))_p &\simeq \varinjlim_{U, \gamma} H^0(R\Gamma(U; R\text{Hom}(\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} G_U, F))) \\ &\simeq \varinjlim_{U, \gamma} \text{Hom}((\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} G_U)_U, F). \end{aligned}$$

Пусть α — морфизм, указанный в формулировке теоремы 6.1.2. Покажем прежде всего, что α инъективен. Рассмотрим морфизм $u \in \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(G, F)$, такой, что $\alpha(u) = 0$. Существуют U, γ , такие, что композиция морфизмов $(\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} G_U)_U \rightarrow G \xrightarrow{u} F$ равна нулю.

Поскольку морфизм $(\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} G_U)_U \rightarrow G$ в категории $\mathbf{D}^b(X; p)$ является изоморфизмом (предложение 5.2.3), мы получаем, что $u = 0$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Покажем, что α сюръективен. Если $v \in H^0(\mu\text{hom}(G, F))_p$, то существуют такие U, γ и $w \in \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}((\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} G_U)_U, F)$, что w представляет v . Поскольку $(\phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} G_U)_U \rightarrow G$ — изоморфизм в

$\mathbf{D}^b(X; p)$, w определяет элемент из $\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p)}(G, F)$, образ которого под действием морфизма α равен v . $\square$

Приводимое ниже следствие — важный шаг в доказательстве инволютивности микросистем.

Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Рассмотрим естественные морфизмы

$$\begin{aligned}\text{Hom}(F, F) &\xrightarrow{\sim} H^0(R\Gamma(X; R\text{Hom}(F, F))) \\ &\xrightarrow{\sim} H^0(R\Gamma(T^*X; \mu\text{hom}(F, F))) \\ &\rightarrow \Gamma(T^*X; H^0(\mu\text{hom}(F, F))).\end{aligned}$$

Обозначим через s образ элемента $\text{id}_F \in \text{Hom}(F, F)$ в $\Gamma(T^*X; H^0(\mu\text{hom}(F, F)))$.

Следствие 6.1.3. *Справедливо соотношение*

$$\text{supp}(s) = \text{supp}(\mu\text{hom}(F, F)) = \text{SS}(F).$$

В частности, при $p \in T^*X$

$$(6.1.6) \quad p \notin \text{SS}(F) \Leftrightarrow \mu\text{hom}(F, F)_p = 0.$$

Доказательство. Включение $\text{supp}(s) \subset \text{supp}(\mu\text{hom}(F, F))$ очевидно, а включение $\text{supp}(\mu\text{hom}(F, F)) \subset \text{SS}(F)$ вытекает из следствия 5.4.10.

Пусть $p \in T^*X$, $p \notin \text{supp}(s)$. Тогда из равенства $s_p = 0$ по теореме 6.1.2 вытекает, что $\text{id}_F \in \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p)}(F, F)$ — нулевой морфизм. Поэтому $F = 0$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$, т. е. $p \notin \text{SS}(F)$. $\square$

В дальнейшем мы обсуждаем микролокальные операции на пучках, например обратные и прямые образы. Для этой цели нам необходимо уточнить микролокальную лемму о срезке из § 5.2.

Предложение 6.1.4 (уточненная микролокальная лемма о срезке).

Пусть x_0 — точка многообразия X , K — собственный замкнутый выпуклый конус в $T_{x_0}^*X$, а $U \subset K$ — открытый конус. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и пусть W — коническая окрестность множества $K \cap \text{SS}(F) \setminus \{0\}$. Тогда существуют объект $F' \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и морфизм $u: F' \rightarrow F$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(6.1.7) \quad u \text{ — изоморфизм на } U,$$

$$(6.1.8) \quad \pi^{-1}(x_0) \cap \text{SS}(F') \subset W \cup \{0\}.$$

Доказательство. При необходимости утолщая K , мы можем считать, что $\{0\} \cup \text{Int } K \supset \bar{U}$. Можно также считать, что X — векторное

пространство и $x_0 = 0$. Выберем такой замкнутый собственный выпуклый конус γ , что $K^{oa} \subset \gamma \subset U^{oa}$ и что $\gamma \setminus \{0\}$ имеет C^1 -границу $\delta\gamma$. Мы возьмем такие координаты $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ на X , что

$$(6.1.9) \quad \gamma \subset \{0\} \cup \{x; x_1 < 0\}.$$

Пусть $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на T^*X . Поскольку $\gamma^{oa} \subset K$, существует такая открытая окрестность нуля Ω , что

$$(6.1.10) \quad W \supset G = \{\xi \in \gamma^{oa} \setminus \{0\}; \\ \text{существует } (x; \xi) \in \pi^{-1}(\Omega) \cap SS(F)\}.$$

Возьмем такое $\varepsilon > 0$, что

$$(6.1.11) \quad \Omega \supset \{x \in \gamma; x_1 \geq -\varepsilon\}.$$

Теперь мы возьмем такое замкнутое подмножество Z в X с C^1 -границей δZ , что (см. рис. 6.1.1)

$$(6.1.12) \quad 0 \in \text{Int } Z,$$

$$(6.1.13) \quad Z \subset \{x; x_1 \geq -\varepsilon\},$$

$$(6.1.14) \quad \begin{cases} \delta Z \text{ и } \delta\gamma \text{ касаются в точках пересечения;} \\ \text{более точно, } N_x^*(Z)^a = N_x^*(\gamma) \text{ для любого} \\ x \in \delta Z \cap \delta\gamma. \end{cases}$$

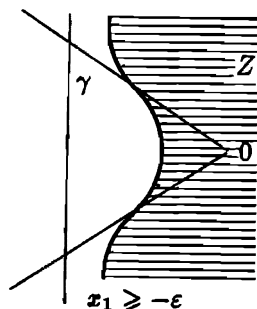


Рис. 6.1.1

Построение подмножества Z мы оставляем читателю.

Положим теперь $F' = \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*} R\Gamma_Z(F)$ и обозначим через u канонический морфизм $F' \rightarrow F$. Мы докажем, что F' и u обладают нужными свойствами. По микролокальной лемме о срезке (предложение 5.2.3) u является изоморфизмом на $\text{Int } Z \times \text{Int } \gamma^{\circ a}$. Поскольку $\text{Int } \gamma^{\circ a} \supset U$, выполнено (6.1.7). Из того же предложения следует, что $\text{SS}(F') \subset X \times \gamma^{\circ a}$, и поэтому остается только доказать, что

$$(6.1.15) \quad \text{если } \xi \in \delta(\gamma^{\circ a}) \setminus \{0\} \text{ и } (0; \xi) \in \text{SS}(F'), \text{ то } \xi \in G.$$

Пусть $q_i: X \times X \rightarrow X$ — проекция на i -й сомножитель ($i = 1, 2$), и пусть $s: X \times X \rightarrow X$ — отображение, задаваемое формулой $s(x, x') = x - x'$. В силу предложения 3.5.4

$$(6.1.16) \quad F' \simeq Rq_{2*}(s^{-1}A_\gamma \otimes q_1^{-1}R\Gamma_Z(F)).$$

Согласно условиям (6.1.9) и (6.1.13), отображение $q_2: s^{-1}(\gamma) \cap q_1^{-1}Z \rightarrow X$ собственное, и для вычисления $\text{SS}(F')$ мы можем применить предложения 5.4.4, 5.4.5 и 5.4.14. Мы получаем, что

$$(6.1.17) \quad \begin{cases} \text{если } (0; \xi) \in \text{SS}(F'), \text{ то существует} \\ (x; \xi) \in \text{SS}(A_\gamma)^a \cap \text{SS}(R\Gamma_Z(F)). \end{cases}$$

Теперь x содержится в Ω в силу (6.1.11) и (6.1.13). Поэтому доказательство утверждения (6.1.15) сводится к доказательству следующего утверждения:

$$(6.1.18) \quad \begin{cases} \text{если } \xi \neq 0 \text{ и } (x; \xi) \in \text{SS}(A_\gamma)^a \cap \text{SS}(R\Gamma_Z(F)), \\ \text{то } (x; \xi) \in \text{SS}(F). \end{cases}$$

Поскольку $\xi \neq 0$ и $(x; \xi) \in \text{SS}(A_\gamma)^a$, мы имеем $x \in \delta\gamma$. Если $x \in \text{Int } Z$, то $F \simeq R\Gamma_Z(F)$ в точке x , и поэтому $(x; \xi) \in \text{SS}(F)$. Если $x \in \delta Z$, то, согласно (6.1.14), $N_x^*(Z) = N_x^*(\gamma)^a = \mathbb{R}_{\geq 0}\xi$. Предположим, что $(x; \xi) \notin \text{SS}(F)$. Тогда предложение 5.4.8 показывает, что $\xi \in \text{SS}(R\Gamma_Z(F)) \cap \pi^{-1}(x) \subset -\mathbb{R}_{\geq 0}\xi + (\text{SS}(F) \cap \pi^{-1}(x))$, откуда следует, что $(x; \xi) \in \text{SS}(F)$. Мы пришли к противоречию, что и завершает доказательство. $\square$

Нам потребуется утверждение, двойственное к предыдущему. С этой целью мы рассмотрим сначала утверждение, двойственное к предложению 5.2.3.

Лемма 6.1.5 (двойственная микролокальная лемма о срезке). Пусть γ — замкнутый выпуклый собственный конус в векторном пространстве X , такой, что $\text{Int } \gamma \neq \emptyset$. Пусть $s: X \times X \rightarrow X$ — отображение, заданное формулой $(x, x') \mapsto x - x'$, и пусть $q_i: X \times X \rightarrow X$ — проекция на i -й сомножитель ($i = 1, 2$). Тогда для любого объекта $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ с компактным носителем имеется естественный морфизм

$$(6.1.19) \quad u: F \rightarrow Rq_{2!}R\Gamma_{s^{-1}(\gamma^a)}(q_1^!F),$$

такой, что

$$(i) \text{ SS}(Rq_{2!}R\Gamma_{s^{-1}(\gamma^a)}(q_1^!F)) \subset X \times \gamma^{oa},$$

$$(ii) \text{ } u \text{ — изоморфизм на } X \times \text{Int } \gamma^{oa}.$$

Доказательство. Мы имеем цепочку морфизмов

$$F \simeq Rq_{2*}R\mathcal{H}om(A_{s^{-1}(0)}, q_1^!F) \rightarrow Rq_{2*}R\mathcal{H}om(s^{-1}A_{\gamma^a}, q_1^!F).$$

Поскольку $A_{\gamma^a} \simeq \phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}A_{\{0\}}$, в силу предложения 5.2.3

$$(6.1.20) \quad \text{SS}(A_{\gamma^a}) \subset X \times \gamma^{oa},$$

$$(6.1.21) \quad A_{\gamma^a} \rightarrow A_{\{0\}} \text{ — изоморфизм на } X \times \text{Int } \gamma^{oa}.$$

Теперь из предложений 5.4.5, 5.4.14 и 5.4.4 следует, что $\text{SS}(Rq_{2*}R\mathcal{H}om(s^{-1}A_{\gamma^a}, q_1^!F)) \subset X \times \gamma^{oa}$. Утверждение (i) доказано.

С другой стороны, $\text{SS}(A_{\gamma \setminus \{0\}}) \subset X \times (X^* \setminus \text{Int } \gamma^{oa})$ в силу (6.1.21). Поэтому, снова в силу предложений 5.4.5, 5.4.14 и 5.4.4, мы получаем $\text{SS}(Rq_{2*}R\mathcal{H}om(s^{-1}A_{\gamma^a \setminus \{0\}}, q_1^!F)) \subset X \times (X^* \setminus \text{Int } \gamma^{oa})$. Это доказывает (ii). $\square$

Предложение 6.1.6 (двойственная уточненная микролокальная лемма о срезке). Пусть x_0, K, U, F и W — те же, что и в предложении 6.1.4. Тогда существует морфизм $u: F \rightarrow F'$, удовлетворяющий условиям (6.1.7) и (6.1.8).

Доказательство. Мы можем считать, что F имеет компактный носитель. Доказательство аналогично доказательству предложения 6.1.4, за исключением того, что используется двойственный срезающий функтор $Rq_{2!}R\Gamma_{s^{-1}(\gamma^a)}(q_1^!F_Z)$ вместо $\phi_\gamma^{-1}R\phi_{\gamma*}(R\Gamma_Z(F))$. Более точно, мы берем те же γ, Ω, G , что и в упомянутом доказательстве, и выбираем $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы

$$(6.1.11)' \quad \Omega \supset \{x \in \gamma^{oa}; x_1 \leq \varepsilon\}.$$

Аналогично мы выбираем замкнутое подмножество Z с C^1 -границей δZ , удовлетворяющее (6.1.12) и следующим условиям:

$$(6.1.13)' \quad Z \subset \{x; x_1 \leq \varepsilon\},$$

$$(6.1.14)' \quad \begin{cases} \delta Z \text{ и } \delta \gamma^a \text{ касаются в точках пересечения;} \\ \text{более точно, } N_x^*(Z)^a = N_x^*(\gamma^a) \text{ для каждого} \\ x \in \delta Z \cap \delta \gamma^a. \end{cases}$$

Мы полагаем

$$(6.1.16)' \quad F' = Rq_2! R\Gamma_{\delta^{-1}(\gamma^a)}(q_1^! F_Z).$$

Тогда по предыдущей лемме существует канонический морфизм $F_Z \rightarrow F'$. Пусть u — композиция морфизмов $F \rightarrow F_Z \rightarrow F'$. Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что u обладает нужными свойствами. Мы оставляем подробности читателю. $\square$

Теперь мы готовы ввести микролокальные операции над пучками. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий и $p \in Y \times_X T^*X$. Положим $p_Y = {}^t f'(p)$, $p_X = f_*(p)$. Эти обозначения будут сохранены до конца предложения 6.1.10. Мы будем использовать ind- и pro-объекты (ср. § 1.11).

Определение 6.1.7. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X; p_X))$. Через $f_\mu^{-1} F$ (соответственно $f_\mu^! F$) мы будем обозначать pro-объект " $\varprojlim_{F' \rightarrow F} f^{-1} F'$ " (соответственно ind-объект " $\varinjlim_{F \rightarrow F'} f^! F'$ ") в категории $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$. Здесь

$F' \rightarrow F$ (соответственно $F \rightarrow F'$) пробегает категорию морфизмов в $\mathbf{D}^b(X)$, являющихся изоморфизмами в точке p_X . Мы называем $f_\mu^{-1} F$ микролокальным обратным образом объекта F в точке p .

(ii) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y; p_Y))$. Через $f_!^\mu G$ (соответственно $f_*^\mu G$) мы обозначим pro-объект " $\varprojlim_{G' \rightarrow G} Rf_! G'$ " (соответственно ind-объект " $\varinjlim_{G \rightarrow G'} Rf_* G'$ ") в категории $\mathbf{D}^b(X; p_X)$. Здесь $G' \rightarrow G$ (соответственно $G \rightarrow G'$) пробегает категорию морфизмов в $\mathbf{D}^b(Y)$, которые являются изоморфизмами в точке p_Y . Мы называем $f_!^\mu G$ (соответственно $f_*^\mu G$) микролокальным собственным прямым образом (соответственно микролокальным прямым образом) пучка G в точке p .

Эти четыре операции связаны между собой следующим образом.

Предложение 6.1.8. *Предположим, что $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X; p_X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y; p_Y))$.*

(i) *Имеют место естественные изоморфизмы*

$$(6.1.22) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p_X)}(f_!^\mu G, F) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; p_Y)}(G, f_\mu^! F),$$

$$(6.1.23) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p_X)}(F, f_*^\mu G) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; p_Y)}(f_\mu^{-1} F, G).$$

(ii) *Определены канонические морфизмы*

$$(6.1.24) \quad f_!^\mu G \rightarrow f_*^\mu G,$$

$$(6.1.25) \quad \omega_{Y/X} \otimes f_\mu^{-1} F \rightarrow f_\mu^! F.$$

Доказательство. Поскольку все эти соотношения доказываются непосредственно, проверим лишь (6.1.22). Мы имеем

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p_X)}(f_!^\mu G, F) &\simeq \varinjlim_{G' \rightarrow G} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p_X)}(Rf_! G', F) \\ &\simeq \varinjlim_{G' \rightarrow G} \varinjlim_{F \rightarrow F'} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(Rf_! G', F') \\ &\simeq \varinjlim_{G' \rightarrow G} \varinjlim_{F \rightarrow F'} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y)}(G', f^! F') \\ &\simeq \varinjlim_{F \rightarrow F'} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; p_Y)}(G, f^! F') \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; p_Y)}(G, f_\mu^! F). \end{aligned} \quad \square$$

Теперь мы изучим некоторые условия, гарантирующие, что микролокальные обратные образы или микролокальные прямые образы лежат в $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$ или $\mathbf{D}^b(X; p_X)$.

Предложение 6.1.9. *Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X; p_X))$.*

(i) *Если ${}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(\text{SS}(F)) \subset \{p\}$ в окрестности точки p , то $f_\mu^{-1} F$ и $f_\mu^! F$ лежат в $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$ и морфизм $\omega_{Y/X} \otimes f_\mu^{-1} F \rightarrow f_\mu^! F$ является изоморфизмом. Более того, для любой окрестности W точки p*

$$(6.1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SS}(f_\mu^{-1} F) \subset {}^t f'(W \cap f_\pi^{-1}(\text{SS}(F))) \\ \text{в окрестности точки } p_Y. \end{array} \right.$$

(ii) *Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и предположим, что*

(a) *f нехарактеристичен для F ,*

(b) *${}^t f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(\text{SS}(F)) \subset \{p\}$.*

Тогда $f_\mu^{-1} F \simeq f^{-1} F$ и $f_\mu^! F \simeq f^! F$.

Доказательство. Если $p_X \in T_X^*X$, то f нехарактеристичен относительно F , и результат вытекает из предложения 5.4.13.

Пусть $p_X \in T^*X$. Докажем прежде всего результаты, касающиеся f_μ^{-1} . Пусть F такое же, как и в (i), и положим $x_0 = \pi(p_X)$, $y_0 = \pi(p_Y)$, $V = \text{Ker}(T_{x_0}^*X \rightarrow T_{y_0}^*Y)$. Возьмем собственный замкнутый выпуклый конус K и открытый выпуклый конус U , такие, что, $p_X \in U \subset K$, $K \cap V \subset \{0\}$ и $f_\pi^! f'^{-1}(p_Y) \cap \text{SS}(F) \cap K \subset \{p_X\}$.

По уточненной микролокальной лемме о срезке существует такой морфизм $u: F' \rightarrow F$, что u — изоморфизм в точке p_X , а F' удовлетворяет условиям (ii) (a) и (ii) (b).

Кроме того, если $F'' \rightarrow F'$ — изоморфизм в точке p_X , а F' и F'' удовлетворяют условиям п. (ii), то, вкладывая этот морфизм в выделенный треугольник $F'' \rightarrow F' \rightarrow F_0 \xrightarrow{+1}$, мы обнаруживаем, что f является нехарактеристическим относительно F_0 и что $f'^{-1}(p_Y) \cap f_\pi^{-1}(\text{SS}(F_0)) = \emptyset$. В силу предложения 5.4.13 получаем, что $p_Y \notin \text{SS}(f^{-1}F_0)$. Это означает, что $f^{-1}F'' \rightarrow f^{-1}F'$ — изоморфизм в $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$. По определению объекта $f_\mu^{-1}F$ индуктивный предел можно брать по категории морфизмов $F' \rightarrow F$, где F' удовлетворяет условиям п. (ii). Тогда все $f^{-1}F'$ изоморфны в $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$, что доказывает утверждения п. (i) и (ii), касающиеся f_μ^{-1} . Утверждения относительно $f_\mu^!$ доказываются аналогичным образом с использованием двойственной уточненной микролокальной леммы о срезке, а изоморфизм $\omega_{Y/X} \otimes f_\mu^{-1}F \xrightarrow{\sim} f_\mu^!F$ следует из (ii) и предложения 5.4.13. $\square$

Предложение 6.1.10. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y; p_Y))$.

(0) Мы имеем

$$\begin{aligned} f_\pi^! G &\simeq \varprojlim_V Rf_! G_V \simeq \varprojlim_K Rf_! R\Gamma_K(G), \\ f_\pi^* G &\simeq \varinjlim_V Rf_* R\Gamma_V G \simeq \varinjlim_K Rf_*(G_K), \end{aligned}$$

где V (соответственно K) пробегает системы открытых (соответственно замкнутых) окрестностей точки $y_0 = \pi(p_Y)$. (Заметим, что указанные изоморфизмы определены в категориях $\mathbf{D}^b(X; p_X)^\wedge$ и $\mathbf{D}^b(X; p_X)^\vee$.)

- (i) Если $f_\pi^{-1}(p_X) \cap f'^{-1}(\text{SS}(G)) \subset \{p\}$ в окрестности точки p , то $f_\pi^! G$ и $f_\pi^* G$ лежат в $\mathbf{D}^b(X; p_X)$, и морфизм $f_\pi^! G \rightarrow f_\pi^* G$ является изоморфизмом. Кроме того, для любой окрестности W точки p

$$(6.1.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SS}(f_!^\mu G) \subset f_\pi(W \cap {}^t f'^{-1}(\text{SS}(F))) \\ \text{в окрестности точки } p_X. \end{array} \right.$$

(ii) Если $\text{supp}(G)$ является собственным над X и если $f_\pi^{-1}(p_X) \cap {}^t f'^{-1}(\text{SS}(G)) \subset \{p\}$, то $f_!^\mu G \simeq f_*^\mu G \simeq Rf_* G$.

Доказательство. Изоморфизмы $\varprojlim_V Rf_! G_V \simeq \varprojlim_K Rf_! R\Gamma_K(G)$ и $\varprojlim_V Rf_* R\Gamma_V(G) \simeq \varprojlim_K Rf_* G_K$ очевидны, поскольку имеются естественные морфизмы $G_V \rightarrow R\Gamma_K(G)$ и $G_K \rightarrow R\Gamma_V(G)$ при $V \subset K$ или $R\Gamma_K(G) \rightarrow G_V$ и $R\Gamma_V(G) \rightarrow G_K$ при $K \subset V$.

(а) Мы прежде всего покажем, что если G удовлетворяет условиям (i), то множество открытых окрестностей V точки y_0 , удовлетворяющих следующим условиям:

$$(6.1.28) \quad \bar{V} \rightarrow X \text{ — собственное отображение,}$$

$$(6.1.29) \quad {}^t f'^{-1}(\text{SS}(G_V)) \cap f_\pi^{-1}(p_X) \subset \{p\},$$

является системой окрестностей точки y_0 .

Поскольку вопрос имеет локальную природу, мы можем предположить, что Y и X — векторные пространства, $p_Y = (0; \eta_0)$ и $p_X = (0; \xi_0)$.

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$(6.1.30) \quad \{y \in Y; f(y) = 0 \text{ и } (y; {}^t f'(y) \cdot \xi_0) \in \text{SS}(G)\} \subset \{0\} \cup \{y; |y| > 2\varepsilon\}.$$

Поэтому существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что

$$(6.1.31) \quad (y; {}^t f'(y) \cdot \xi_0 + \eta) \notin \text{SS}(G), \text{ если } |y| = \varepsilon \text{ и } |\eta| \leq \varepsilon_1.$$

Положим теперь

$$(6.1.32) \quad V = \{y; \varepsilon_1 |y| < (f(y), \xi_0) + \varepsilon_1 \varepsilon\}.$$

Достаточно показать, что V удовлетворяет (6.1.29).

Согласно (6.1.31), $\text{SS}(G) \cap N^*(V) \cap \pi_\gamma^{-1}(f^{-1}(0)) \subset T_Y^* Y$. Поэтому из предложения 5.4.8 вытекает, что

$$(6.1.33) \quad \text{SS}(G_V) \subset \text{SS}(G) + N^*(V)^a \text{ над } f^{-1}(0).$$

Поскольку ${}^t f'^{-1} \text{SS}(G_V) \cap f_\pi^{-1}(p_X) \cap \pi^{-1}(V) \subset \{p\}$, достаточно показать, что если $y \in \bar{V} \setminus V$, то $(y; {}^t f'(y) \cdot \xi_0) \notin \text{SS}(G_V)$.

Ввиду (6.1.33) существуют такие $k \geq 0$ и $(y; \eta) \in SS(G)$, что ${}^t f'(y) \cdot \xi_0 = \eta + k(-{}^t f'(y) \cdot \xi_0 + \varepsilon_1 y/|y|)$.

Поэтому $\eta = (1+k){}^t f'(y) \cdot \xi_0 - k\varepsilon_1 y/|y|$.

Поскольку $|k\varepsilon_1 y/(1+k)|y|| \leq \varepsilon_1$, это противоречит (6.1.31).

(b) Докажем изоморфизм $f_!^* G \simeq \varprojlim_V Rf_! G_V$. Пусть $G' \rightarrow G$ —

изоморфизм в точке p_Y . Мы вложим его в выделенный треугольник $G' \rightarrow G \rightarrow G_0 \xrightarrow{+1}$. Тогда $p_Y \notin SS(G_0)$, и, согласно (a), существует система открытых окрестностей точки y_0 , состоящая из множеств V , таких, что отображение $\bar{V} \rightarrow X$ собственное, а ${}^t f'^{-1}(SS(G_{0V})) \cap f_\pi^{-1}(p_X) = \emptyset$. Для такого V мы имеем $p_X \notin SS(Rf_! G_{0V})$ согласно предложению 5.4.4, и поэтому $Rf_! G'_V \rightarrow Rf_! G_V$ — изоморфизм в $D(X; p_X)$. Переходя к проективному пределу по V и G' , мы получаем

$$\varprojlim_{G'} Rf_! G' \simeq \varprojlim_{G', V} Rf_! G'_V \simeq \varprojlim_V Rf_! G_V.$$

(c) Если G удовлетворяет условиям (ii), то для V , удовлетворяющих (6.1.28) и (6.1.29), $Rf_! G_V \rightarrow Rf_! G$ — изоморфизм в $D^b(X; p_X)$. Отсюда мы получаем, что $f_!^* G \simeq f_!^* G$.

(d) Утверждения о $f_!^* G$ доказываются аналогично, с заменой условия (6.1.29) на шаге (a) на условие

$$(6.1.29)' \quad {}^t f'^{-1}(SS(Rf_! G_V)) \cap f_\pi^{-1}(p_X) \subset \{p\}.$$

Детали мы оставляем читателю.

(e) Чтобы доказать (i), мы можем в силу шага (a) предположить, что G удовлетворяет условиям (ii). Тогда результат следует из шага (c) (и из соответствующего результата для $f_!^* (G)$). $\square$

В заключение сформулируем следующий результат, доказательство которого немедленно вытекает из предложения 5.4.1.

Предложение 6.1.11. Пусть Y и X — два многообразия, $p_Y \in T^*Y$, $p_X \in T^*X$ и $p = (p_X, p_Y) \in T^*(X \times Y)$.

Пусть F_1 и F_2 (соответственно G_1 и G_2) лежат в $D^b(X)$ (соответственно в $D^b(Y)$). Тогда имеется канонический гомоморфизм

$$(6.1.34) \quad \text{Hom}_{D^b(X; p_X)}(F_1, F_2) \times \text{Hom}_{D^b(Y; p_Y)}(G_1, G_2) \rightarrow \text{Hom}_{D^b(X \times Y; p)}\left(F_1 \overset{L}{\boxtimes} G_1, F_2 \overset{L}{\boxtimes} G_2\right).$$

6.2. Нормальные конусы в кокасательном расслоении

В следующем параграфе мы изучим поведение микроносителя при различных операциях. Для формулировки результатов нам потребуются некоторые новые операции над коническими подмножествами в кокасательных расслоениях. Их конструкция использует понятие нормального конуса, введенное в § 4.1, и симплектическую структуру в T^*X (см. приложение). Пусть X — многообразие. Мы отождествляем T^*T^*X и TT^*X посредством $-H$, где H — изоморфизм Гамильтона. Если $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ — система локальных координат на X , а (x, ξ) — соответствующие координаты на T^*X (и, значит, каноническая 1-форма α_X имеет вид $\langle \xi, dx \rangle = \sum_j \xi_j dx_j$), то

$$(6.2.1) \quad -H(\langle \lambda, dx \rangle + \langle \mu, d\xi \rangle) = \left\langle \lambda, \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle - \left\langle \mu, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle,$$

где $\langle \lambda, dx \rangle + \langle \mu, d\xi \rangle \in T_p^*T^*X$, $\left\langle \lambda, \frac{\partial}{\partial \xi} \right\rangle - \left\langle \mu, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \in T_pT^*X$, $p \in T^*X$.

Если Λ — гладкое коническое лагранжево подмногообразие в T^*X , то $-H$ индуцирует изоморфизм $T^*\Lambda \simeq T_\Lambda T^*X$. В частности, если M — подмногообразие в X , то мы имеем изоморфизмы

$$(6.2.2) \quad T^*T_M X \simeq T^*T_M^* X \simeq T_{T_M^* X} T^* X.$$

Здесь первый изоморфизм получен из предложения 5.5.1 при $E = T_M X$. Пусть (x', x'') — такая система локальных координат на X , что $M = \{(x', x''); x' = 0\}$, и пусть $(x', x''; \xi', \xi'')$ — соответствующие координаты на T^*X . В этих координатах мы отождествляем $T_M X$ с X , а $T^*(T_M X)$ — с T^*X . Мы также отождествляем $T_{T_M^* X}(T^*X)$ с T^*X . Тогда изоморфизмы (6.2.2) описываются формулами

$$(6.2.3) \quad \begin{array}{ccccc} T^*T_M X & \xrightarrow{\sim} & T^*T_M^* X & \xrightarrow{\sim} & T_{T_M^* X} T^* X \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ (x', x''; \xi', \xi'') & \longleftrightarrow & (\xi', x''; -x', \xi'') & \longleftrightarrow & (x', x''; \xi', \xi'') \end{array}$$

Пусть p обозначает проекцию $T_M^* X \rightarrow M$, а $\dot{p}$ — ее сужение на $\dot{T}_M^* X$. Мы имеем отображения (ср. (5.5.9))

$$\begin{array}{ccccc} T^*T_M^* X & \xleftarrow{\quad \varphi' \quad} & T_M^* X \times_M T^* M & \xrightarrow{\quad \pi \quad} & T^* M \\ \cup & & \cup & & \parallel \\ T^*\dot{T}_M^* X & \xleftarrow{\quad \varphi' \quad} & \dot{T}_M^* X \times_M T^* M & \xrightarrow{\quad \dot{p}_* \quad} & T^* M \end{array}$$

С указанными выше координатами $T_M^*X \times_M T^*M$ изоморфно подмножеству $\{x' = 0\}$ в $T^*T_M^*X$, а p_π задается формулой $(0, x''; \xi', \xi'') \mapsto (x''; \xi'')$.

Напомним (ср. (5.5.10)), что T^*M вложено в $T_{T_M^*X}T^*X \simeq T^*T_M^*X$ посредством нулевого сечения расслоения T_M^*X и отображения $\iota_{p'}$. В тех же координатах, что и выше, это вложение имеет вид $(x''; \xi'') \mapsto (0, x''; 0; \xi'')$.

Лемма 6.2.1. Пусть (x', x'') — система локальных координат на X , такая, что $M = \{(x', x''); x' = 0\}$, и пусть $(x', x''; \xi', \xi'')$ — соответствующие координаты на T^*X . Пусть A — коническое подмножество в T^*X . Тогда

$$(i) \quad p_\pi \iota_{p'}^{-1}(C_{T_M^*X}(A)) = T^*M \cap C_{T_M^*X}(A);$$

$$(ii) \quad (x''_0; \xi''_0) \in T^*M \cap C_{T_M^*X}(A) \Leftrightarrow \text{существует такая последовательность } \{(x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n)\} \text{ в } A, \text{ что}$$

$$(6.2.4) \quad \begin{cases} (x''_n; \xi''_n) \xrightarrow{n} (x''_0; \xi''_0), \\ |x'_n| \xrightarrow{n} 0, \\ |x'_n| |\xi'_n| \xrightarrow{n} 0; \end{cases}$$

$$(iii) \quad (x''_0; \xi''_0) \in p_\pi \iota_{p'}^{-1}(C_{T_M^*X}(A)) \Leftrightarrow \text{существует последовательность } \{(x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n)\} \text{ в } A, \text{ удовлетворяющая (6.2.4) и, кроме того, условию}$$

$$(6.2.5) \quad |\xi'_n| \xrightarrow{n} +\infty.$$

Напомним, что $C_{T_M^*X}(A)$ обозначает нормальный конус к A вдоль T_M^*X , ср. § 4.1.

Доказательство. (i) Множество $C_{T_M^*X}(A)$ биконическое. Поэтому (i) является частным случаем (5.5.11).

(ii), (iii) Пусть $(x', x''; \xi', \xi'')$ — координаты на $T_{T_M^*X}(T^*X)$. Подмногообразие $T_M^*X \times_M T^*X$ определяется уравнениями $\{x' = 0\}$, а отображение p_π имеет вид $(0, x''; \xi', \xi'') \mapsto (x'', \xi'')$. Вложение $T^*M \hookrightarrow T_{T_M^*X}(T^*X)$ задается соответствием $(x'', \xi'') \mapsto (0, x''; 0, \xi'')$.

(a) Пусть $\{(x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n)\}$ — последовательность в A , удовлетворяющая (6.2.4).

Предположим сначала, что $\{\xi'_n\}$ — ограниченная последовательность. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что

$\xi'_n \xrightarrow[n]{\quad} \xi'_0$ для некоторого ξ'_0 . Пусть $\{t_n\}$ — такая последовательность в $\mathbb{R}^+$, что $t_n \xrightarrow[n]{\quad} 0$ и $t_n^{-1} x'_n \xrightarrow[n]{\quad} 0$. Мы имеем

$$\begin{cases} (x'_n, x''_n; t_n \xi'_n, t_n \xi''_n) \xrightarrow[n]{\quad} (0, x''_0; 0, 0), \\ t_n^{-1}(x'_n; t_n \xi''_n) \xrightarrow[n]{\quad} (0; \xi''_0). \end{cases}$$

Поэтому $(x''_0; \xi''_0)$ принадлежит $T^*M \cap C_{T_M^*X}(A)$.

Предположим теперь, что $\{\xi'_n\}$ — неограниченная последовательность. Переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $|\xi'_n| \xrightarrow[n]{\quad} \infty$ и $\xi'_n/|\xi'_n| \xrightarrow[n]{\quad} \xi'_0 \neq 0$. Положим $t_n = |\xi'_n|^{-1}$. Тогда

$$\begin{cases} (x'_n, x''_n; t_n \xi'_n, t_n \xi''_n) \xrightarrow[n]{\quad} (0, x''_0; \xi'_0, 0), \\ t_n^{-1}(x'_n; t_n \xi''_n) \xrightarrow[n]{\quad} (0; \xi''_0). \end{cases}$$

Следовательно, $(0, x''_0; \xi'_0, \xi''_0) \in C_{T_M^*X}(A)$, и поэтому $(x''_0; \xi''_0) \in \dot{p}_\pi{}^{\dot{p}'^{-1}} C_{T_M^*X}(A)$.

(b) Пусть $(x''_0; \xi''_0) \in p_\pi{}^{\dot{p}'^{-1}}(C_{T_M^*X}(A))$.

Существует такое ξ'_0 , что $(0, x''_0; \xi'_0, \xi''_0) \in C_{T_M^*X}(A)$. Поэтому существуют последовательности $\{(x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n)\}$ в A и $\{t_n\}$ в $\mathbb{R}^+$, такие, что

$$\begin{cases} (x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n) \xrightarrow[n]{\quad} (0, x''_0; \xi'_0, 0), \\ t_n(x'_n; \xi''_n) \xrightarrow[n]{\quad} (0; \xi''_0). \end{cases}$$

Последовательность $\{x'_n, x''_n; t_n \xi'_n, t_n \xi''_n\}$ удовлетворяет (6.2.4). Если $(x''_0; \xi''_0) \in \dot{p}_\pi{}^{\dot{p}'^{-1}} C_{T_M^*X}(A)$, то мы можем считать, что $\xi'_0 \neq 0$. Если $t_n \xrightarrow[n]{\quad} \infty$, то $|t_n \xi'_n| \xrightarrow[n]{\quad} \infty$, и (6.2.5) выполнено. Если $\{t_n\}$ — ограниченная последовательность, то $\xi''_0 = 0$. В этом случае, выбирая такую последовательность $\{s_n\}$, что $s_n |\xi''_n| \xrightarrow[n]{\quad} 0$, $s_n \xrightarrow[n]{\quad} \infty$, $s_n |x'_n| \xrightarrow[n]{\quad} 0$, мы получим последовательность $\{(x'_n, x''_n; s_n \xi'_n, s_n \xi''_n)\}$ в A , удовлетворяющую (6.2.4) и (6.2.5). $\square$

Замечание 6.2.2. Мы имеем

$$\dot{p}'^{-1}(C_{T_M^*X}(A)) = (\dot{p}'^{-1}(C_{T_M^*X}(A))) \cap \dot{T}_M^*X \times T^*M.$$

Поэтому, не опасаясь путаницы, мы обозначим это множество через $\dot{p}'^{-1}(C_{T_M^*X}(A))$.

Пусть теперь Y и X — два многообразия, а f — морфизм из Y в X . Мы отождествим Y с графиком отображения f в $X \times Y$. Обозначим через q проекцию $T_Y^*(X \times Y) \rightarrow Y$, а через $\dot{q}$ ее ограничение на $\dot{T}_Y^*(X \times Y)$. Заметим, что $\dot{T}_Y^*(X \times Y)$ отождествляется с $Y \times_X T^*X$ с помощью первой проекции.

Определение 6.2.3. Пусть A (соответственно B) — коническое подмножество в T^*X (соответственно в T^*Y). Мы полагаем

$$(i) \quad C_\mu(A, B) = C_{T_Y^*(X \times Y)}(A \times B^a) \\ \text{(это замкнутое биконическое подмножество в)}$$

$$T_{T_Y^*(X \times Y)}T^*(X \times Y) \simeq T^*(Y \times_X T^*X));$$

$$(ii) \quad f^\#(A, B) = q_\pi' q'^{-1}(C_\mu(A, B)) \\ = T^*Y \cap C_\mu(A, B);$$

$$(iii) \quad f_\infty^\#(A, B) = \dot{q}_\pi' \dot{q}'^{-1}(C_\mu(A, B));$$

$$(iv) \quad f^\#(A) = f^\#(A, T_Y^*Y) \text{ и } f_\infty^\#(A) = f_\infty^\#(A, T_Y^*Y);$$

$$(v) \text{ если } Y = X, \text{ а } f \text{ — тождественное отображение, то мы} \\ \text{полагаем } A \hat{+} B = f^\#(A; B^a) \subset T^*X \text{ и } A \hat{+}_\infty B = f_\infty^\#(A, B^a) \subset T^*X.$$

Отметим, что если $Y = X$, а f — тождественное отображение, то определение $C_\mu(A, B)$ в (i) совпадает с $C(A, B)$.

Заметим также, что $C_\mu(A, B)$, $f^\#(A, B)$, $f_\infty^\#(A, B)$ и т. д. — замкнутые множества.

Предложение 6.2.4. (i) *Предположим, что f — замкнутое вложение. Тогда*

$$f^\#(A) = T^*Y \cap C_{T_Y^*X}(A), \\ f_\infty^\#(A) = \dot{p}_\pi' \dot{p}'^{-1}(C_{T_Y^*X}(A)),$$

где p обозначает проекцию $T_Y^*X \rightarrow Y$.

(ii) Пусть π обозначает проекцию $T^*X \rightarrow X$. Тогда если A и B — конические подмножества в T^*X , то

$$A \hat{+} B = T^*X \cap C(A, B^a), \\ A \hat{+}_\infty B = \dot{\pi}_\pi' \dot{p}'^{-1}(C(A, B^a)).$$

(iii) Пусть (x) (соответственно (y)) — система локальных координат на X (соответственно на Y), и пусть $(x; \xi)$ (соответственно

$(y; \eta)$) — ассоциированные координаты на T^*X (соответственно на T^*Y). Тогда

(a) $(y_0; \eta_0) \in f^\#(A, B) \Leftrightarrow$ существует такая последовательность $\{(x_n; \xi_n), (y_n; \eta_n)\}$ в $A \times B$, что

$$(6.2.6) \quad \begin{cases} y_n \xrightarrow{n} f y_0, x_n \xrightarrow{n} f(y_0), \\ ({}^t f'(y_n) \cdot \xi_n - \eta_n) \xrightarrow{n} \eta_0, |x_n - f(y_n)| |\xi_n| \xrightarrow{n} 0; \end{cases}$$

(b) $(y_0; \eta_0) \in f_\infty^\#(A, B) \Leftrightarrow$ существует такая последовательность $\{(x_n; \xi_n), (y_n; \eta_n)\}$ в $A \times B$, что выполнено (6.2.6) и, кроме того,

$$(6.2.7) \quad |\xi_n| \xrightarrow{n} +\infty.$$

Доказательство. Пункты (i) и (ii) следуют непосредственно из определения.

Пункт (iii) следует из леммы 6.2.1 после следующей замены координат на $T^*(X \times Y)$:

$$(x, y; \xi, \eta) \mapsto (x - f(y), y; \xi, \eta + {}^t f'(y) \cdot \xi). \quad \square$$

Замечание 6.2.5. Пусть A — замкнутое коническое подмножество в T^*X . Тогда

$$(6.2.8) \quad f^\#(A) = {}^t f' f_\pi^{-1}(A) \cup f_\infty^\#(A).$$

Аналогично пусть A и B — замкнутые конические подмножества в T^*X . Тогда

$$(6.2.9) \quad A \hat{+} B = (A + B) \cup (A \hat{+}_\infty B).$$

Замечание 6.2.6. Пусть A — замкнутое коническое подмножество в T^*X . Тогда $f_\infty^\#(A) = \emptyset$ в том и только в том случае, когда f нехарактеристичен относительно A (ср. определение 5.4.12).

Аналогичным образом, $A \hat{+}_\infty B = \emptyset$ для двух замкнутых конических подмножеств в T^*X тогда и только тогда, когда $A \cap B^a \subset T_X^*X$.

В связи с предыдущим замечанием естественно ввести следующее определение.

Определение 6.2.7. (i) Пусть A — замкнутое коническое подмножество в T^*X , а V — подмножество в T^*Y . Будем говорить, что f *нехарактеристичен относительно A на V* , если $f_\infty^\#(A) \cap V = \emptyset$.

(ii) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Мы говорим, что f *нехарактеристичен относительно F на V* , если f нехарактеристичен относительно $\text{SS}(F)$ на V .

Если f — замкнутое вложение, то говорят также « Y нехарактеристично» вместо « f нехарактеристично».

Замечание 6.2.8. Следующие частные случаи предложения 6.2.4 будут особенно полезны.

(i) Пусть (x', x'') — система локальных координат на X , $M = \{x' = 0\}$, а j обозначает вложение $M \rightarrow X$. Пусть $(x', x''; \xi', \xi'')$ — соответствующие координаты на T^*X . Тогда если A — замкнутое коническое подмножество в T^*X , то $(x''_0; \xi''_0) \in j^\#(A)$ в том и только в том случае, когда существует последовательность $\{(x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n)\}$ в A , такая, что $x'_n \xrightarrow{n} 0, x''_n \xrightarrow{n} x''_0, \xi''_n \xrightarrow{n} \xi''_0$ и $|x'_n| |\xi'_n| \xrightarrow{n} 0$.

(ii) Пусть (x) — система локальных координат на X , а $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на T^*X . Пусть A и B — два замкнутых конических подмножества в T^*X . Тогда $(x_0; \xi_0) \in A \hat{+} B$, если и только если существуют последовательности $\{(x_n; \xi_n)\}$ в A и $\{(y_n; \eta_n)\}$ в B , такие, что $x_n \xrightarrow{n} x_0, y_n \xrightarrow{n} x_0, \xi_n + \eta_n \xrightarrow{n} \xi_0$ и $|x_n - y_n| |\xi_n| \xrightarrow{n} 0$.

Заметим также, что $(x_0; \xi_0) \in A \hat{+}_\infty B$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\{(x_n; \xi_n)\}$ и $\{(y_n; \eta_n)\}$, удовлетворяющие указанным выше условиям и такие, что $|\xi_n| \xrightarrow{n} \infty$.

6.3. Прямые образы

В § 5.4 мы изучали поведение микронесителя при различных операциях типа собственных прямых образов и нехарактеристических обратных образов. Здесь мы обобщаем эти результаты.

Мы будем использовать понятие нормальных конусов, введенные в § 4.1, и операции $f^\#, \hat{+}$ и т. д., введенные в предыдущем параграфе.

Теорема 6.3.1 Пусть Ω — открытое подмножество в X , а j — вложение $\Omega \hookrightarrow X$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\Omega))$. Тогда

$$(i) \quad \text{SS}(Rj_* F) \subset \text{SS}(F) \hat{+} N^*(\Omega),$$

$$(ii) \quad \text{SS}(Rj_* F) \subset \text{SS}(F) \hat{+} N^*(\Omega)^a.$$

Доказательство. Мы покажем это, перемещая Ω в общее положение, с тем чтобы F был нехарактеристическим относительно $N^*(\Omega)$.

(i) Мы можем предполагать, что X — векторное пространство. Пусть $(x_0; \xi_0) \notin SS(F) \hat{+} N^*(\Omega)$. Для того чтобы показать, что $(x_0; \xi_0) \notin SS(Rj_* F)$, мы можем считать, что $x_0 \in \text{supp}(F)$, $\xi_0 \neq 0$, $x_0 \in \partial\Omega$, и поэтому $(x_0; \xi_0) \notin SS(F)$. Поскольку ξ_0 не лежит в $N_x^*(\Omega)$, мы можем считать, что Ω γ -открыто, где γ — такой замкнутый выпуклый собственный конус, что $N_{x_0}^*(\Omega) \subset \text{Int } \gamma^\circ \cup \{0\}$, $\text{Int } \gamma \neq \emptyset$ и $\xi_0 \notin \gamma^\circ$ (см. предложение 5.3.7).

Возьмем такое $v \in \text{Int } \gamma$, что $\langle \xi_0, v \rangle < 0$. Для $s > 0, t > 0$ положим

$$H_s = \{x; \langle x - x_0, \xi_0 \rangle > -s\},$$

$$\Omega_{t,s} = \{x; x - t(\langle x - x_0, \xi_0 \rangle + s)v \in \Omega\}.$$

Тогда

$$\overline{\Omega}_{t,s} \cap H_s \subset \Omega,$$

$$\Omega_{t,s} \cap H_s \subset \Omega_{t',s}, \quad 0 < t' \leq t,$$

$$\left(\bigcup_t \Omega_{t,s} \right) \cap H_s = \Omega \cap H_s.$$

Поскольку $t\langle v, \xi_0 \rangle < 1$, мы определяем преобразование $(x; \xi) \mapsto (y; \eta)$, полагая

$$\begin{cases} y = x - t(\langle x - x_0, \xi_0 \rangle + s)v, \\ \xi = \eta - t\langle \eta, v \rangle \xi_0. \end{cases}$$

Тогда

$$(x; \xi) \in N^*(\Omega_{t,s}) \Leftrightarrow (y; \eta) \in N^*(\Omega).$$

Покажем теперь, что существуют открытая окрестность $U \times W$ точки $(x_0; \xi_0)$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что, полагая $U_s = U \cap H_s$, для $0 < t < \varepsilon, 0 < s < \varepsilon$ будем иметь

$$(6.3.1) \quad \begin{cases} (a) & SS(F) \cap N^*(\Omega_{t,s})^a \cap \pi^{-1}(U_s) \subset T_X^* X, \\ (b) & (SS(F) + N^*(\Omega_{t,s})) \cap (U_s \times W) = \emptyset. \end{cases}$$

Действительно, предположим, что (a) или (b) не выполнено. Мы найдем последовательности $\{t_n\}, \{s_n\}, \{x_n\}, \{\xi_n\}, \{\zeta_n\}$, такие, что

$$\begin{cases} t_n \xrightarrow{n} 0, & s_n \xrightarrow{n} 0, & t_n > 0, & s_n > 0, \\ x_n \xrightarrow{n} x_0, & \zeta_n \in N_{x_n}^*(\Omega_{t_n, s_n}) \setminus \{0\}, \\ (x_n; \xi_n) \in SS(F), \\ \xi_n + \zeta_n = c\tilde{\xi}_n, & \tilde{\xi}_n \rightarrow \xi_0, & \text{где} \\ c = 0 & \text{или} & c = 1 & (c = 0 \text{ для (a), } c = 1 \text{ для (b)}). \end{cases}$$

Определим $(y_n; \eta_n) \in N^*(\Omega)$, полагая

$$\begin{cases} y_n = x_n - t_n(\langle x_n - x_0, \xi_0 \rangle + s_n)v, \\ \xi_n = \eta_n - t_n\langle \eta_n, v \rangle \xi_0, \end{cases}$$

и далее положим

$$\rho_n = \zeta_n + \eta_n = c\tilde{\xi}_n + t_n\langle \eta_n, v \rangle \xi_0.$$

Тогда $\eta_n \in \gamma^\circ$ и

$$\begin{cases} \langle \xi_0, v \rangle < 0, \quad \langle \tilde{\xi}_n, v \rangle < 0, \quad \langle \eta_n, v \rangle \geq 0, \quad \langle \rho_n, v \rangle \leq 0, \\ |\eta_n| \leq c'\langle \eta_n, v \rangle \quad \text{для некоторого } c' > 0, \\ c''|\rho_n| \geq -\langle \rho_n, v \rangle \quad \text{для некоторого } c'' > 0. \end{cases}$$

Последнее утверждение следует из того факта, что направления ρ_n сходятся к направлению ξ_0 . Поэтому

$$\begin{aligned} c''|\rho_n| &\geq -c\langle \tilde{\xi}_n, v \rangle - t_n\langle \eta_n, v \rangle \cdot \langle \xi_0, v \rangle \\ &\geq t_n\langle \eta_n, v \rangle |\langle \xi_0, v \rangle| \\ &\geq c'''t_n|\eta_n| \quad \text{для некоторого } c''' > 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\rho_n \neq 0$, поскольку $\eta_n \neq 0$.

Таким образом, последовательность $|\eta_n|(|\rho_n|^{-1})t_n$ ограничена, а $|\eta_n|(|\rho_n|^{-1})|x_n - y_n| \xrightarrow{n} 0$. Так как $\rho_n/|\rho_n|$ сходится к $\xi_0/|\xi_0|$, а $(x_n; \zeta_n/|\rho_n|) \in SS(F)$, $(y_n; \eta_n/|\rho_n|) \in N^*(\Omega)$, мы имеем $(x_0; \xi_0/|\xi_0|) \in SS(F) \hat{+} N^*(\Omega)$. Это противоречит предположению, и тем самым (6.3.1) доказано.

Пусть теперь $j_{t,s}$ обозначает иммерсию $\Omega_{t,s} \hookrightarrow X$. Для фиксированного s , $0 < s < \varepsilon$, положим

$$(6.3.2) \quad F_t = Rj_{t,s*}(F|_{\Omega_{t,s}}).$$

В силу предложения 5.4.8 и условия нехарактеристичности (6.3.1) мы имеем

$$(6.3.3) \quad SS(F_t) \cap (U_s \times W) = \emptyset.$$

Согласно предложению 5.2.1, отсюда следует, что существуют замкнутый собственный конус γ' и γ' -открытые подмножества $\Omega_0 \subset \Omega_1$, такие, что $\gamma' \subset \{y; \langle y, \xi_0 \rangle < 0\} \cup \{0\}$ и $x_0 \in \text{Int}(\Omega_1 \setminus \Omega_0) \subset H_s$, причем $R\phi_{\gamma'^*} R\Gamma_{(\Omega_1 \setminus \Omega_0)}(F_t) = 0$ для всех $t \in]0, \varepsilon[$.

Применяя предложение 2.7.1, получаем $R\phi_{\gamma^*} R\Gamma_{(\Omega_1 \setminus \Omega_0)}(F) = 0$, откуда следует, что $(x_0; \xi_0) \notin SS(F)$.

(ii) Доказательство аналогично. Полагая

$$(6.3.4) \quad G_t = Rj_{t,*}(F|_{\Omega_{t,*}}),$$

мы находим

$$(6.3.5) \quad SS(G_t) \cap (U_s \times W) = \emptyset.$$

Поэтому существуют H, L, γ , как в предложении 5.1.1, такие, что

$$R\Gamma(H \cap (x + \gamma); G_t) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(L \cap (x + \gamma); G_t)$$

для x вблизи x_0 и $0 < t \ll 1$. Поскольку $H^k(H \cap (x + \gamma); Rj_! F) = \varinjlim_t H^k(H \cap (x + \gamma); G_t)$ и $H^k(L \cap (x + \gamma); Rj_! F) = \varinjlim_t H^k(L \cap (x + \gamma); G_t)$,

мы имеем $H^k(H \cap (x + \gamma); Rj_! F) \xrightarrow{\sim} H^k(L \cap (x + \gamma); Rj_! F)$. Отсюда следует, что $(x_0; \xi_0) \notin SS(Rj_! F)$. $\square$

Предложение 6.3.2. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X , $U = X \setminus M$, j — вложение $U \hookrightarrow X$ и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(U))$. Тогда

$$SS(Rj_* F) \cap \pi^{-1}(M) \subset SS(F) \hat{+} T_M^* X,$$

$$SS(Rj_! F) \cap \pi^{-1}(M) \subset SS(F) \hat{+} T_M^* X,$$

$$SS((Rj_* F)|_M) \subset T^* M \cap C_{T_M^* X}(SS(F)).$$

Доказательство. Пусть $p: \tilde{X}_M \rightarrow X$ — нормальная деформация X вдоль M (ср. § 4.1). Напомним, что существуют локальные системы координат (x', x'') на X и (x', x'', t) на $\tilde{X}_M$, такие, что $M = \{x' = 0\}$, $p(x', x'', t) = (tx', x'')$, а $\mathbb{R}^+$ действует на $\tilde{X}_M$ по формуле $\lambda(x', x'', t) = (\lambda x', x'', \lambda^{-1} t)$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$). Положим

$$\tilde{U} = \{(x', x'', t); x' \neq 0\} = \tilde{X}_M \setminus (M \times \mathbb{R}),$$

$$\tilde{U}_{\pm} = \tilde{U} \cap \{\pm t > 0\}, \quad \tilde{M} = \tilde{U} \cap \{t = 0\} = \dot{T}_M X,$$

$$X' = \tilde{U}/\mathbb{R}^+, \quad X'_{\pm} = \tilde{U}_{\pm}/\mathbb{R}^+, \quad M' = \tilde{M}/\mathbb{R}^+.$$

Обозначим через γ проекцию $\tilde{U} \rightarrow X'$ и через ρ — отображение $X' \rightarrow X$, так что $p = \rho \circ \gamma$. Тогда X' — многообразие, ρ — собственное отображение, а γ — гладкое отображение. Кроме того,

$M' = \rho^{-1}(M)$ — гиперповерхность в X' , изоморфная сферическому нормальному расслоению $S_M X = \dot{T}_M X / \mathbb{R}^+$, $X' = X'_- \sqcup M' \sqcup X'_+$, а ρ индуцирует изоморфизм $X'_+ \simeq U$. Обозначим этот изоморфизм через i , а вложение $X'_+ \hookrightarrow X'$ — через k :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{M} & \longrightarrow & \tilde{M}/\mathbb{R}^+ = M' & \longrightarrow & M \\
 \cap & & \cap & & \cap \\
 \tilde{U} & \xrightarrow{\gamma} & \tilde{U}/\mathbb{R}^+ = X' & \xrightarrow{\rho} & X \\
 \cup & & \uparrow k & & \uparrow j \\
 \tilde{U}_+ & \longrightarrow & \tilde{U}_+/\mathbb{R}^+ = X'_+ & \xrightarrow[i]{\sim} & U
 \end{array}$$

Если $F' = i^{-1}F$, то

$$\begin{aligned}
 R\rho_* Rk_* F' &\simeq Rj_* F, \\
 R\rho_* Rk_! F' &\simeq Rj_! F.
 \end{aligned}$$

Пусть

$$S = \rho_* {}^t \rho'^{-1} (\text{SS}(F') \hat{+} T_M^* X').$$

Применяя предложение 5.4.4 и теорему 6.3.1, мы получаем

$$(6.3.6) \quad \pi^{-1}(M) \cap \text{SS}(Rj_* F) \subset S$$

и аналогичную формулу с заменой j_* на $j_!$. Поскольку γ — гладкое и сюръективное отображение, мы имеем

$$\text{SS}(F') \hat{+} T_M^* X' = \gamma_* {}^t \gamma'^{-1} (\text{SS}(\gamma^{-1} F' | \tilde{U}_+) \hat{+} T_M^* \tilde{U}).$$

Поэтому

$$(6.3.7) \quad S = p_* {}^t p'^{-1} \left((\text{SS}(p^{-1} F | \tilde{U}_+) \hat{+} T_M^* \tilde{U}) \times_{\tilde{X}_M} \tilde{U} \right).$$

Пусть $(x', x'', t; \xi', \xi'', \tau)$ — координаты на $T^* \tilde{X}_M$. Тогда p_* и ${}^t p'$ задаются формулами $(x', x'', t; \xi', \xi'') \mapsto (tx', x''; \xi', \xi'')$ и $(x', x'', t; \xi', \xi'') \mapsto (x', x'', t; t\xi', \xi'')$ соответственно. Поэтому из

включения $(0, x''_0; \xi'_0, x''_0) \in S$ следует существование такого $x'_0 \neq 0$, что

$$(x'_0, x''_0, 0; 0, \xi''_0, \langle x'_0, \xi'_0 \rangle) \in SS(p^{-1}F|_{\tilde{U}_+}) \hat{+} T_M^* \tilde{U}.$$

Мы получили такую последовательность $\{(x'_n, x''_n, t_n; \xi'_n, \xi''_n, \tau_n)\}$ в $SS(p^{-1}F|_{\tilde{U}_+})$, что

$$(6.3.8) \quad \begin{cases} x'_n \xrightarrow{n} x'_0, & x''_n \xrightarrow{n} x''_0, & t_n \xrightarrow{n} 0, & \xi'_n \xrightarrow{n} 0, \\ \xi''_n \xrightarrow{n} \xi''_0, & t_n \tau_n \xrightarrow{n} 0. \end{cases}$$

Поскольку

$$(x', x'', t; \xi', \xi'', \tau) \in SS(p^{-1}F|_{\tilde{U}_+}) \Leftrightarrow (tx', x''; t^{-1}\xi', \xi'') \in SS(F),$$

$$t > 0, \quad x' \neq 0, \quad t\tau = \langle x', \xi' \rangle,$$

мы видим, что последовательность $\{(t_n x'_n, x''_n; t_n^{-1} \xi'_n, \xi''_n)\}$ содержится в $SS(F)$ и удовлетворяет соотношениям

$$t_n x'_n \xrightarrow{n} 0, \quad x''_n \xrightarrow{n} x''_0, \quad \xi''_n \xrightarrow{n} \xi''_0, \quad |t_n x'_n| \cdot |t_n^{-1} \xi'_n| \xrightarrow{n} 0.$$

Это доказывает два первых включения в силу замечания 6.2.8. Для того чтобы доказать последнее включение, рассмотрим выделенный треугольник

$$Rj_! F \rightarrow Rj_* F \rightarrow (Rj_* F)_M \xrightarrow{+1}.$$

Из неравенств треугольника вытекает, что $SS((Rj_* F)_M) \subset SS(F) \hat{+} T_M^* X$. Теперь третье включение следует из предложения 5.4.4 и леммы 6.2.1(ii).

В гл. 7 нам придется иметь дело с прямыми образами относительно отображений, собственных лишь в микролокальном смысле. Более точно, рассмотрим следующую ситуацию.

Пусть $q_1: X \times Y \rightarrow X$ и $p: T^*(X \times Y) \rightarrow (T^*X) \times Y$ обозначают естественные проекции.

Предложение 6.3.3. Пусть Ω — открытое подмножество в T^*X , и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$. Предположим, что

$$(6.3.9) \quad \text{проекция } \overline{p(SS(F))} \cap (\Omega \times Y) \rightarrow \Omega \text{ является собственной.}$$

Тогда

- (i) $SS(Rq_{1*}F) \cap \Omega \subset q_{1*} t_1'^{-1}(SS(F)),$
- (ii) $SS(Rq_1, F) \cap \Omega \subset q_{1*} t_1'^{-1}(SS(F)),$
- (iii) $Rq_{1!}F \rightarrow Rq_{1*}F$ — изоморфизм в $\mathbf{D}^b(X; \Omega).$

Заметим, что (6.3.9) означает, что для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ существует такое компактное подмножество $L \subset Y$, что

$$(6.3.10) \quad SS(F) \cap (K \times T^*Y) \subset K \times \left(L \times T^*Y \right).$$

Доказательство. Выбрав замкнутое вложение многообразия Y в векторное пространство, мы можем считать, что $Y = \mathbb{R}^n$ для некоторого n . Поскольку $\mathbb{R}^n$ изоморфно открытому шару в $\mathbb{R}^n$, мы можем теперь предположить, что Y — открытый шар в $\mathbb{R}^n$. Положим $\tilde{Y} = \mathbb{R}^n$ и обозначим через j открытое вложение $X \times Y \hookrightarrow X \times \tilde{Y}$, а через $\tilde{q}_1$ — проекцию $X \times \tilde{Y} \rightarrow X$. Тогда $Rq_{1*}F \simeq R\tilde{q}_{1*}Rj_*F$ и $Rq_{1!}F \simeq R\tilde{q}_{1!}Rj_*F$. Положим $Z = X \times \partial Y$. По теореме 6.3.1

$$\begin{aligned} SS(Rj_*F) &\subset SS(F) \cup (T_Z^*(X \times \tilde{Y}) \hat{+} SS(F)), \\ SS(Rj_!F) &\subset SS(F) \cup (T_Z^*(X \times \tilde{Y}) \hat{+} SS(F)), \\ SS((Rj_*F)_Z) &\subset T_Z^*(X \times \tilde{Y}) \hat{+} SS(F). \end{aligned}$$

Рассматривая выделенный треугольник

$$Rj_!F \rightarrow Rj_*F \rightarrow (Rj_*F)_Z \xrightarrow{+1},$$

мы видим, что все результаты доказываемого предложения следуют из соотношения

$$(6.3.11) \quad \tilde{q}_{1*} \tilde{q}_1'^{-1} (T_Z^*(X \times \tilde{Y}) \hat{+} SS(F)) \cap \Omega = \emptyset.$$

Докажем (6.3.11). Пусть K — компактное подмножество в Ω . Из (6.3.10) мы получаем $SS(F) \cap (K \times T^*Y) \cap \pi^{-1}(Z) = \emptyset$, откуда $K \cap \tilde{q}_{1*} \tilde{q}_1'^{-1} (T_Z^*(X \times \tilde{Y}) \hat{+} SS(F)) = \emptyset$. $\square$

6.4. Микролокализация

Мы дадим оценку микроносителя микролокализации.

Теорема 6.4.1. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X , и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда

- (i) $SS(\nu_M(F)) \subset C_{T_M^*X}(SS(F)),$
- (ii) $SS(\nu_M(F)) = SS(\mu_M(F)).$

Здесь мы отождествляем $T_{T_M^*X}T^*X$, $T^*T_M^*X$ и T^*T_MX , пользуясь предложением 5.5.1 (ср. (6.2.2) и (6.2.3)).

Доказательство. Пункт (ii) следует из теоремы 5.5.5.

(i) Выберем такую систему локальных координат (x', x'') на X , что $M = \{(x', x''); x' = 0\}$. Как и в §4.1, $\tilde{X}_M$ снабжено координатами (x', x'', t) и мы обозначаем через $p: \tilde{X}_M \rightarrow X$ отображение $(x', x'', t) \mapsto (tx', x'')$, а через Ω — открытое подмножество $\{t > 0\}$ в $\tilde{X}_M$. Тогда мы можем отождествить T_MX с $\{t = 0\}$ в $\tilde{X}_M$. Обозначим через j вложение $\Omega \hookrightarrow \tilde{X}_M$, через s — иммерсию $T_MX \hookrightarrow \tilde{X}$ и положим $\tilde{p} = p \circ j$ (ср. с диаграммой (4.1.5)). Пусть $(x', x'', t; \xi', \xi'', \tau)$ — координаты на $T^*\tilde{X}_M$. По определению $\nu_M(F) = s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}F$. Применяя предложения 5.4.5 и 6.3.2, мы получаем

$$SS(\tilde{p}^{-1}F) = \{(x', x'', t; \xi', \xi'', \tau); t > 0, (tx', x''); t^{-1}\xi', \xi''\} \in SS(F), \\ t\tau - \langle x', \xi' \rangle = 0\},$$

и поэтому если $(x'_0, x''_0; \xi'_0, \xi''_0) \in SS(\nu_M(F))$, то существует такая последовательность $\{(x'_n, x''_n, t_n; \xi'_n, \xi''_n, \tau_n)\}$ в $SS(\tilde{p}^{-1}F)$, что

$$t_n \xrightarrow{n} 0, |t_n||\tau_n| \xrightarrow{n} 0 \text{ и } (x'_n, x''_n; \xi'_n, \xi''_n) \xrightarrow{n} (x'_0, x''_0; \xi'_0, \xi''_0).$$

Поэтому $(t_n x'_n, x''_n; t_n^{-1}\xi'_n, \xi''_n)$ принадлежит $SS(F)$. Так как $SS(F)$ — коническое множество, $(t_n x'_n, x''_n; \xi'_n, t_n \xi''_n)$ лежит в $SS(F)$. Теперь из определения множества $CT_M^*X(SS(F))$ сразу следует, что $(x'_0, x''_0; \xi'_0, \xi''_0) \in CT_M^*X(SS(F))$. $\square$

Заметим, что, используя те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 6.4.1, мы получаем, что если $(x'_0, x''_0; \xi'_0, \xi''_0)$ лежит в $SS(\nu_M(F))$, то $\langle x'_0, \xi'_0 \rangle = 0$. (Это вытекает из соотношений $|t_n||\tau_n| \xrightarrow{n} 0$ и $t_n \tau_n - \langle x'_n, \xi'_n \rangle = 0$, полученных по ходу доказательства.) В обозначениях (5.5.7) это означает, что $SS(\nu_M(F)) \subset ST_M^*X$, что эквивалентно конечности $\nu_M(F)$.

Следствие 6.4.2. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Тогда

- (i) $SS(\mu_{\text{hom}}(G \rightarrow F)) \subset C_\mu(SS(F), SS(G))$,
- (ii) $SS(\mu_{\text{hom}}(F \leftarrow G)) \subset C_\mu(SS(F), SS(G))^a$,

где a — антиподальное отображение относительно структуры векторного расслоения в $T^*(Y \times_X T^*X)$ над $Y \times_X T^*X$;

- (iii) если G когомологически конструктивен, то естественный морфизм

$$R\mathcal{H}om(G, A_Y) \overset{L}{\otimes} f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \rightarrow R\mathcal{H}om(G, f^!F)$$

является изоморфизмом на $T^*Y \setminus f_{\infty}^{\#}(\mathcal{S}\mathcal{S}(F), \mathcal{S}\mathcal{S}(G))$.

Доказательство. Пункты (i) и (ii) непосредственно следуют из теоремы 6.4.1.

- (iii) Рассмотрим выделенный треугольник

$$(6.4.1) \quad R\pi_! H \longrightarrow R\pi_* H \longrightarrow R\dot{\pi}_* H \xrightarrow{+1},$$

в котором $H = \mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F)$. Тогда $\mathcal{S}\mathcal{S}(R\dot{\pi}_* H) \cap V = \emptyset$ в силу предложения 5.5.4 и определения 6.2.3(iii), и результат следует из предложения 4.4.2. $\square$

Следствие 6.4.3. Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}^b(X)$. Тогда

- (i) $\mathcal{S}\mathcal{S}(\mu\mathcal{H}om(G, F)) \subset C(\mathcal{S}\mathcal{S}(F), \mathcal{S}\mathcal{S}(G))$,
- (ii) если G когомологически конструктивен, то естественный морфизм

$$R\mathcal{H}om(G, A_X) \overset{L}{\otimes} F \rightarrow R\mathcal{H}om(G, F)$$

является изоморфизмом на $T^*X \setminus (\mathcal{S}\mathcal{S}(F) \hat{+}_{\infty} \mathcal{S}\mathcal{S}(G)^a)$.

Доказательство. Это частный случай следствия 6.4.2.

Следствие 6.4.4. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Тогда

- (i) $\mathcal{S}\mathcal{S}(f^{-1}F) \subset f^{\#}(\mathcal{S}\mathcal{S}(F))$,
- (ii) $\mathcal{S}\mathcal{S}(f^!F) \subset f^{\#}(\mathcal{S}\mathcal{S}(F))$,
- (iii) если V — подмножество в T^*Y и f нехарактеристичен относительно F на V , то естественный морфизм

$$f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \rightarrow f^!F$$

является изоморфизмом на V и, кроме того,

$$\mathcal{S}\mathcal{S}(f^{-1}F) \cap V \subset {}^t f'(f_{\pi}^{-1}(\mathcal{S}\mathcal{S}(F))).$$

Доказательство. отождествим Y с графиком морфизма f в $X \times Y$ и обозначим через q проекцию $T_Y^*(X \times Y) \rightarrow Y$. Тогда

$$(6.4.2) \quad \begin{cases} f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \simeq Rq_! \mu_Y(F \boxtimes \omega_Y), \\ f^! F \simeq Rq_* \mu_Y(F \boxtimes \omega_Y) \end{cases}$$

и имеется выделенный треугольник (6.4.1) с $H = \mu_Y(F \boxtimes \omega_Y)$. Теперь нужные результаты следуют из предложения 5.4.4. $\square$

Следствие 6.4.5. Пусть F и G — объекты категории $D^+(X)$. Тогда

$$(i) \quad SS\left(F \overset{L}{\otimes} G\right) \subset SS(F) \hat{+} SS(G),$$

$$(ii) \quad SS(R\mathcal{H}om(G, F)) \subset SS(F) \hat{+} SS(G)^a.$$

Доказательство. Нужно применить предложения 5.4.1 и 5.4.2, а также следствие 6.4.4, как в доказательстве предложения 5.4.14. $\square$

Замечание 6.4.6. В ситуации следствия 6.4.4(iii) предположим, что V — открытое подмножество в T^*Y . Тогда отображение ${}^t f': {}^t f'^{-1}(V) \cap f_\pi^{-1}(SS(F)) \rightarrow V$ является собственным. Однако последнее условие строго слабее, чем условие « f нехарактеристичен относительно F на V », как показывает следующий пример.

Возьмем $X = \mathbb{R}^2$ с координатами (y, t) , положим $Y = \{(y, t); t = 0\}$ и рассмотрим пучок $F = A_Z$, где $Z = \{(y, t); t = y^2\}$. Пусть $V = \{(y, \eta) \in T^*Y; \eta > 0\}$. Тогда $F|_Y \simeq A_{\{0\}}$ и $f_\pi^{-1}(SS(F)) \cap {}^t f'^{-1}(V) = \emptyset$.

Замечание 6.4.7. Микроноситель инвариантен относительно C^1 -преобразований на X , а $\cdot \hat{+} \cdot$ и $f^\#(\cdot)$ не инвариантны (ср. упр. 6.7). Это означает, что теорема 6.3.1 и ее следствия не являются наилучшими возможными результатами.

6.5. Инволютивность и распространение

В теории дифференциальных уравнений в частных производных фундаментально важными являются результаты о *распространении особенностей вдоль бихарактеристических кривых* и об *инволютивности характеристического многообразия*. В этом параграфе в качестве приложения следствия 6.4.3 мы докажем результаты такого типа в рамках теории пучков.

Пусть U — открытое подмножество в T^*X , а ϕ — вещественная C^2 -функция на U . Мы полагаем

$$(6.5.1) \quad V_0 = \{p \in U; \phi(p) = 0\}, \quad V_{\pm} = \{p \in U; \pm\phi(p) \geq 0\}.$$

Пусть $p \in V_0$. Интегральная кривая гамильтонова векторного поля H_{ϕ} , проходящая через p , называется *бихарактеристикой* множества V_0 (или функции ϕ), *выпущенной* (или *исходящей*) из p , и обозначается через b_p . Мы определяем также *положительную полубихарактеристику* b_p^+ , *выпущенную* из p , как положительную полутраекторию поля H_{ϕ} , выпущенную из p . Если $(x; \xi)$ — система однородных симплектических координат, то b_p^+ — такая кривая $(x(t), \xi(t))_{t \geq 0}$, что

$$(6.5.2) \quad \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j}, \quad \frac{\partial \xi_j}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j}, \quad (x(0); \xi(0)) = p.$$

Заметим, что b_p^+ зависит от V_+ , а не от ϕ . Более точно, замена ϕ на $h\phi$, где $h(p) > 0$, не влияет на b_p^+ в окрестности точки p .

Аналогичным образом определяется *отрицательная полубихарактеристика* b_p^- . Если $d\phi(p) = 0$, то мы считаем, что $b_p^{\pm} = \{p\}$.

Пусть S — локально замкнутое подмножество в T^*X .

Определение 6.5.1. Пусть $p \in S$. Мы говорим, что S *инволютивно* в точке p , если для любого $\theta \in T_p^*T^*X$, такого, что нормальный конус $C_p(S, S)$ содержится в гиперплоскости $\{v \in T_pT^*X; \langle v, \theta \rangle = 0\}$, выполнено условие $H(\theta) \in C_p(S)$.

Если S инволютивно в любой точке $p \in S$, будем говорить, что S *инволютивно*.

Разумеется, если S — гладкое подмногообразие, то S инволютивно в смысле определения 6.5.1 тогда и только тогда, когда T_pS инволютивно в T_pT^*X для всех $p \in S$, поскольку в этом случае $C_p(S, S) = C_p(S) = T_pS$.

Предложение 6.5.2. *Предположим, что S инволютивно и замкнуто в открытом подмножестве U в T^*X . Пусть $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ — функция класса C^2 , такая, что $\phi|_S = 0$. Тогда S является объединением бихарактеристик функции ϕ .*

Доказательство. Пусть $p \in S$. Мы можем предположить, что $d\phi(p) \neq 0$, поскольку в противном случае траектория поля H_{ϕ} , выпущенная из p , сводится к одноточечному множеству $\{p\}$. Поэтому S содержится в гладкой гиперповерхности $\{\phi = 0\}$, откуда следует, что

$$C_p(S, S) \subset \{p \in T_pT^*X; \langle v, d\phi(p) \rangle > 0\}.$$

Таким образом, $H_{\phi} \in C_p(S)$, и нужный результат вытекает из следующей леммы. □

Лемма 6.5.3. Пусть U — многообразие, S — замкнутое подмногожество в U , v — векторное поле класса C^1 на U , $p_0 \in S$, а b^+ — положительная полутраектория поля v , выпущенная из p_0 (т. е. $b^+ : [0, +\infty[\rightarrow U$ удовлетворяет условиям $b(0) = p_0$ и $\frac{\partial}{\partial t} b^+(t) = v(b^+(t))$). Предположим, что $v(p) \in C_p(S)$ для всех $p \in S$. Тогда b^+ содержится в S .

Доказательство. Мы можем предположить, что U — открытое подмногожество в $\mathbb{R}^N$, $p_0 = 0$ и $v = \frac{\partial}{\partial t}$ в координатах $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$. Тогда $b^+(t) = (t, 0)$.

Предположим, что $(a, 0) \notin S$ для некоторого $a > 0$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что, полагая $B = \{x \in \mathbb{R}^{N-1}; |x| \leq \varepsilon\}$, мы получаем $S \cap \{a\} \times B = \emptyset$. Пусть γ_t — выпуклая оболочка множества $\{(t, 0)\} \cup (\{a\} \times B)$, и пусть $t_0 = \inf\{t; \gamma_t \cap S = \emptyset\}$. Тогда $\gamma_{t_0} \cap S \neq \emptyset$, $0 \leq t_0 < a$ и $\gamma_t \cap S = \emptyset$ для $t_0 < t \leq a$. Выберем некоторое $p \in \gamma_{t_0} \cap S$. Тогда $\frac{\partial}{\partial t} \notin C_p(S)$, т. е. мы пришли к противоречию. $\square$

Теорема 6.5.4 (теорема об инволютивности). Пусть F принадлежит $D^b(X)$. Тогда его микронеситель $SS(F)$ инволютивен.

Доказательство. Пусть $S = SS(F)$, $p \in S$ и $\theta \in T_p^* T^* X$. Предположим, что

$$(6.5.3) \quad C_p(S, S) \subset \{\theta = 0\},$$

$$(6.5.4) \quad H(\theta) \notin C_p(S).$$

Мы приведем эти предположения к противоречию. Согласно (6.5.4), $\theta \neq 0$ и существует такое замкнутое подмногожество Z в $T^* X$, что $p \in Z$, $S \subset Z$ и $\langle H(\theta), \lambda \rangle < 0$ для всех $\lambda \in N_p^*(Z) \setminus \{0\}$. Действительно, если выбрать локальную систему координат вблизи p , то можно найти открытый выпуклый конус γ с вершиной в p , содержащий $H(\theta)$ и такой, что $\gamma \cap S = \emptyset$ в окрестности точки p . Теперь достаточно положить $Z = T^* X \setminus \gamma$.

С другой стороны, из (6.5.3) вытекает ввиду следствия 6.4.3, что $SS(\mu hom(F, F)) \cap \pi^{-1}(p)$ содержится в множестве $\{H(\theta) = 0\}$ (здесь π означает проекцию $T^* T^* X \rightarrow T^* X$). Поэтому мы получаем

$$SS(\mu hom(F, F)) \cap N_p^*(Z) \subset \{0\}.$$

Поскольку $\mu hom(F, F)_p = (R\Gamma_Z \mu hom(F, F))_p$, мы имеем $\mu hom(F, F)_p = 0$ по следствию 5.4.9. Итак, $p \notin SS(F)$ в силу следствия 6.1.3, и мы пришли к противоречию. $\square$

Замечание 6.5.5. Если в определении 6.5.1 заменить условие $C_p(V, V) \subset \{\theta = 0\}$ более слабым условием $C_p(V) \subset \{\theta = 0\}$, теорема 6.5.4 перестает быть верной (см. упр. 6.2).

Пусть теперь U — открытое подмножество в T^*X , ϕ — вещественная функция класса C^2 на U , а V_0, V_+, V_- определены, как в (6.5.1).

Предложение 6.5.6. Пусть F и G — объекты категории $\mathbf{D}^b(X)$. Предположим, что $SS(F) \cap U \subset V_+$ и $SS(G) \cap U \subset V_-$. Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и u — сечение пучка $H^j(\mu\text{hom}(G, F))$. Тогда $\text{supp}(u)$ содержится в V_0 и представляет собой объединение положительных полубихарактеристик.

Доказательство. Положим $K = \mu\text{hom}(G, F)$. Из следствия 6.4.3 мы знаем, что над U носитель $\text{supp}(K)$ содержится в $V_+ \cap V_- = V_0$, а $SS(K)$ содержится в $C(V_+, V_-) = \{v \in TT^*X; \langle v, d\phi \rangle \geq 0\}$, если отождествлять TT^*X и T^*T^*X с помощью изоморфизма $-H$. Поэтому

$$SS(K) \subset \{\theta \in T^*T^*X; \langle \theta, H_\phi \rangle \geq 0\}$$

(так как $\langle -H(\theta), d\phi \rangle = \langle \theta, H_\phi \rangle$).

Теперь результат вытекает из следующей леммы.

Лемма 6.5.7. Пусть Z — многообразие, v — векторное поле класса C^1 на Z , а $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Z))$. Предположим, что $SS(K) \subset \{\theta \in T^*Z; \langle \theta, v \rangle \geq 0\}$. Пусть $j \in \mathbb{Z}$ и u — сечение пучка $H^j(K)$ над Z . Тогда $\text{supp}(u)$ является объединением положительных полутраекторий поля v .

Доказательство. Пусть $p \in Z$, и пусть b — траектория поля v , проходящая через p . Мы можем считать, что $b \neq \{p\}$, и после замены координат можно предполагать, что $Z = \mathbb{R} \times Y$, $b = \mathbb{R} \times \{y_0\}$, $v = \frac{\partial}{\partial t}$, где t — координата на $\mathbb{R}$.

Пусть γ — конус $\{t \leq 0\}$ в $\mathbb{R}$, и пусть $\tilde{\gamma} = \gamma \times Y$. Применяя предложение 5.2.3, мы получаем $K \simeq \phi_{\tilde{\gamma}}^{-1} R\phi_{\tilde{\gamma}*} K$. Отсюда вытекает, что $H^j(K)|_b \simeq \phi_{\tilde{\gamma}}^{-1} L$ для некоторого $L \in \text{Ob}(\mathcal{G}h(\mathbb{R}_{\tilde{\gamma}}))$, и если $u|_b$ — сечение пучка $H^j(K)|_b$, то $\text{supp}(u|_b)$ представляет собой объединение интервалов $[a, +\infty[$ в силу предложения 3.5.3. $\square$

Пример 6.5.8. Пусть t — координата на $\mathbb{R}$, а $(t; \tau)$ — координаты на $T^*\mathbb{R}$. Пусть $F = A_{\{t > 0\}}$, $G = A_{\{t=0\}}$. Тогда $\mu\text{hom}(G, F) = A_{\{t=0, \tau \leq 0\}}[-1]$ и носитель любого ненулевого сечения u пучка $H^1(\mu\text{hom}(G, F))$ представляет собой интервал $\{t = 0, \tau \in]-\infty, 0]\}$. Этот интервал является положительной полубихарактеристикой поля $H_t = -\frac{\partial}{\partial \tau}$, выпущенной из точки $(0, 0)$, но не представляется в виде объединения отрицательных полубихарактеристик.

6.6. Пучки в окрестности инволютивного многообразия

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий.

Предложение 6.6.1. *Предположим, что f — замкнутое вложение, и отождествим Y с подмногообразием в X . Пусть $p \in T_Y^*X$ и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$.*

- (i) *Предположим, что $\text{SS}(F) \subset \pi^{-1}(Y)$ в окрестности точки p . Тогда существует $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$, такой, что $F \simeq f_*G$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$.*
- (ii) *Предположим, что $\text{SS}(F) \subset T_Y^*X$ в окрестности точки p . Тогда существует такой объект $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$, что $F = M_Y$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$.*

Доказательство. (i) Если $p \in T_X^*X$, то доказывать нечего. Предположим, что $p \in T_Y^*X$. Индукцией по коразмерности подмногообразия Y сводим дело к случаю, когда Y — гиперповерхность. Пусть $\{\phi = 0\}$ — уравнение поверхности Y , причем $p = (x_0; d\phi(x_0))$. Положим $\Omega^\pm = \{x \in X; \pm\phi(x) > 0\}$ и обозначим через $j_\pm$ открытые вложения $\Omega^\pm \hookrightarrow X$. Применяя теорему 6.3.1, мы видим, что $p \notin \text{SS}(Rj_{-*}j_+^{-1}(F))$. Поэтому $R\Gamma_{\{\phi \geq 0\}}(F) \rightarrow F$ — изоморфизм в $\mathbf{D}^b(X; p)$, и мы можем предположить с самого начала, что $\text{supp}(F)$ содержится в множестве $\{\phi \geq 0\}$. Снова с помощью теоремы 6.3.1 устанавливаем, что $p \notin \text{SS}(Rj_{+!}j_+^{-1}(F))$. Поэтому $F \rightarrow F_Y$ — изоморфизм в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Так как $F_Y \simeq f_*f^{-1}F$, отсюда вытекает требуемый результат.

(ii) Мы имеем $F = f_*G$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$ для некоторого $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Применяя предложение 5.4.4, получаем $\text{SS}(G) \subset T_Y^*Y$ в некоторой окрестности точки $\pi(p)$. Пусть g — отображение $Y \rightarrow \{\text{pt}\}$. В силу предложения 5.4.5 $G = g^{-1}M$ для некоторого $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$. Итак, $F \simeq M_Y$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$. $\square$

Предложение 6.6.2. *Предположим, что f — гладкое отображение, и отождествим $Y \times_X T^*X$ с подмногообразием в T^*Y . Пусть $p \in Y \times_X T^*X$, и пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Предположим, что $\text{SS}(G) \subset Y \times_X T^*X$ в окрестности точки p . Тогда существует $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, такой, что $G \simeq f^{-1}F$ в $\mathbf{D}^b(Y; p)$.*

Доказательство. Используя индукцию по $\dim Y - \dim X$, мы можем считать, что $Y = \mathbb{R}^n$, $X = \mathbb{R}^{n-1}$, f — проекция $(x_1, x') \mapsto x'$, а $p = (0, \xi_0)$, где $\xi_0 = (0, \xi'_0)$.

Для $\xi_0 = 0$ результат уже был доказан в предложении 5.4.5. Поэтому мы предположим, что $\xi_0 \neq 0$. Пусть H_ε — открытое полу-

пространство $\{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, \xi_0 \rangle > -\varepsilon\}$, γ — замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, такой, что γ^{oa} — окрестность точки ξ_0 , и, наконец, U — окрестность нуля, представляющая собой пересечение H_ε с некоторым γ -открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$. Мы можем предположить, что

$$(6.6.1) \quad SS(G) \cap (U \times \gamma^{oa}) \subset Y \times_X T^*X.$$

Отсюда мы выводим, что

$$\begin{aligned} ((SS(G) \setminus (U \times \gamma^{oa})) \hat{+} N^*(H_\varepsilon)^a) \cap (U \times \text{Int } \gamma^{oa}) &= \emptyset, \\ ((SS(G) \cap (U \times \gamma^{oa})) \hat{+} N^*(H_\varepsilon)^a) \cap (U \times \gamma^{oa}) &\subset Y \times_X T^*X. \end{aligned}$$

Тогда

$$(6.6.2) \quad SS(G_{H_\varepsilon}) \cap (U \times \gamma^{oa}) \subset Y \times_X T^*X.$$

Мы полагаем

$$(6.6.3) \quad G' = \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*}(G_{H_\varepsilon}).$$

Достаточно показать, что

$$(6.6.4) \quad SS(G') \cap (U \times \gamma^{oa}) \subset Y \times_X T^*X.$$

Действительно, предполагая, что выполняется (6.6.4), мы получаем, что $SS(G') \cap \pi^{-1}(U) \subset Y \times_X T^*X$ в силу предложения 5.2.3, и для завершения доказательства остается применить предложение 5.4.5, поскольку $G' \simeq G$ в $\mathbf{D}^b(Y; p)$ в силу предложения 5.2.3.

Наконец, (6.6.4) вытекает из (6.6.2) и следующей леммы. $\square$

Лемма 6.6.3. Пусть E — вещественное конечномерное векторное пространство, γ — замкнутый выпуклый собственный конус в E , такой, что $\gamma \ni 0$, и пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(E))$, $G' = \phi_\gamma^{-1} R\phi_{\gamma*}(G)$. Пусть $x \in E$, и предположим, что для некоторой компактной окрестности K точки x множество $(K + \gamma) \cap \text{supp}(G)$ компактно. Пусть $\xi \in E'$ и $(x + \gamma; \xi) \cap SS(G) = \emptyset$. Тогда $(x; \xi) \notin SS(G')$.

Доказательство. Обозначим через q_1 и q_2 проекции из $E \times E$ на первый и второй сомножители, а через s — отображение

$$(6.6.5) \quad s: E \times E \rightarrow E, \quad s(x, y) = y - x.$$

Тогда по предложению 3.5.4

$$(6.6.6) \quad G' \simeq Rs_* \left(q_1^{-1} A_\gamma \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right).$$

Теперь

$$\begin{aligned} SS(G') &\subset \{(x; \xi)\}; \text{ существует } y, (y, x + y; -\xi, \xi) \\ &\in SS(A_\gamma) \times SS(G), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. $\square$

6.7. Микролокализация и обратные образы

В этом параграфе мы дополним результаты § 4.3, используя микро-носитель.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, и пусть M (соответственно N) — замкнутое подмногообразие в X (соответственно в Y), причем $f(N) \subset M$. Как и в § 4.3, мы используем обозначения ${}^t f'$, f_π , ${}^t f'_N$, $f_{N\pi}$ для отображений

$$\begin{array}{ccccc} T^*Y & \xleftarrow{{}^t f'} & Y \times_X T^*X & \xrightarrow{f_\pi} & T^*X \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ T_N^*Y & \xleftarrow{{}^t f'_N} & N \times_M T_M^*X & \xrightarrow{f_{N\pi}} & T_M^*X \end{array}$$

Теорема 6.7.1. Пусть V — открытое подмножество в T_N^*Y , и пусть $F \in \mathcal{D}^b(X)$. Предположим, что

- (i) f нехарактеристичен относительно F на V (ср. определение 6.2.7),
- (ii) $f_{N\pi}|_{{}^t f'^{-1}(V)}: {}^t f'^{-1}(V) \rightarrow T_M^*X$ нехарактеристичен относительно $C_{T_M^*X}(\mathcal{SS}(F))$,
- (iii) ${}^t f'^{-1}(V) \cap f_\pi^{-1}(\mathcal{SS}(F)) \subset Y \times_X T_M^*X$.

Тогда естественные морфизмы (ср. предложение 4.3.5)

$$R^t f'_{N!}(\omega_{N/M} \otimes f_{N\pi}^{-1} \mu_M(F))|_V \rightarrow \mu_N(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1} F)|_V$$

и

$$(\mu_N(f^! F))|_V \rightarrow (R^t f'_{N*} f_{N\pi}^! \mu_M(F))|_V$$

являются изоморфизмами.

Доказательство. Мы пойдем тем же путем, что и в доказательстве предложений 4.2.5 и 4.3.5. Заметим прежде всего, что отображение $f_\pi^{-1}(\mathcal{SS}(F)) \rightarrow T^*Y$ является собственным на некоторой окрестности подмножества V в силу (i) и замечания 6.4.6. Поэтому на V вертикальные стрелки в предложении 4.3.5 являются изоморфизмами в силу (i) и (ii) ввиду следствия 6.4.4. Поэтому достаточно показать, что первый из указанных в теореме морфизмов — изоморфизм. Рассмотрим диаграмму (4.1.11), обозначения которой мы сохраним.

Тогда

$$\begin{aligned}(T_N f)^{-1} \nu_M(F) &\simeq s_Y^{-1} \tilde{f}'^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F, \\ \nu_N(f^{-1} F) &\simeq s_Y^{-1} Rj_{Y*} \tilde{f}^{-1} \tilde{p}_X^{-1} F \simeq s_Y^{-1} (Rj_{Y*} \tilde{f}^1 \tilde{p}_X^{-1} F \otimes \omega_{\tilde{Y}_N/\tilde{X}_M}^{\otimes -1}) \\ &\simeq s_Y^{-1} (\tilde{f}'^1 Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \otimes \omega_{\tilde{Y}_N/\tilde{X}_M}^{\otimes -1}).\end{aligned}$$

Рассмотрим выделенный треугольник

$$\omega_{\tilde{Y}_N/\tilde{X}_M} \otimes \tilde{f}'^{-1} Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \xrightarrow{\alpha} \tilde{f}'^1 Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \longrightarrow H \xrightarrow{+1}.$$

Тогда носителем H будет $T_N Y$, и для доказательства теоремы достаточно показать, что $V \cap \text{SS}((s_Y^{-1} H)^\wedge) = \emptyset$. Здесь, как и в предложении 5.5.1, мы отождествляем $T^* T_N Y$ и $T^* T_N^* Y$. В силу следствия 6.4.4 достаточно показать, что

$$(6.7.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{для любой точки } q_0 \in V \text{ существует точка} \\ q \in T_N Y \times_{\tilde{Y}_N} T^* \tilde{Y}_N, \text{ такая, что } q_0 = {}^t s'_Y(q) \in V \text{ и } \tilde{f}' \\ \text{нехарактеристичен относительно } Rj_{X*} \tilde{p}_X^{-1} F \\ \text{в точке } q. \end{array} \right.$$

Мы выберем такие системы локальных координат $(x) = (x', x'')$ на X и $(y) = (y', y'')$ на Y , что $M = \{(x', x''); x' = 0\}$ и $N = \{(y', y''); y' = 0\}$. Обозначим через $(x', x'', t; \xi', \xi'', \tau)$ координаты на $\tilde{X}_M$ и через $(y', y'', t; \eta', \eta'', \tau)$ координаты на $\tilde{Y}_N$.

Мы будем писать

$$\begin{aligned}f(y', y'') &= (g(y', y''), h(y', y'')), \\ \tilde{f}(y', y'', t) &= (\tilde{g}(y', y'', t), \tilde{h}(y', y'', t), t).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}t\tilde{g}(y', y'', t) &= g(ty', y''), \\ \tilde{h}(y', y'', t) &= h(ty', y'').\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}(6.7.2) \quad {}^t f'(ty', y'') \cdot (\xi', t\xi'') \\ = (\tilde{g}_{y'}(y, t) \cdot \xi' + \tilde{h}_{y'}(y, t) \cdot \xi'', \tilde{g}_{y''}(y, t) \cdot t\xi' + \tilde{h}_{y''}(y, t) \cdot t\xi'').\end{aligned}$$

Положим $q = (0, y'_0, 0; \eta'_0, 0, \tau_0)$ и $x''_0 = h(0, y'_0)$. Тогда $q_0 = (y'_0; \eta'_0) \in V$. Предположим, что f' характеристичен относительно $Rj_{X*} \bar{p}_X^{-1} F$ в точке q . Применяя предложение 6.2.4, мы найдем последовательности

$$\{(y'_n, y''_n, t'_n)\} \text{ в } \tilde{Y}_N \text{ и } \{(x'_n, x''_n, t_n; \xi'_n, \xi''_n, \tau_n)\} \text{ в } SS(Rj_{X*} \bar{p}_X^{-1} F),$$

такие, что

$$(6.7.3) \quad \begin{cases} (y'_n, y''_n, t'_n) \xrightarrow{n} (0, y'_0, 0), \\ (x'_n, x''_n, t_n) \xrightarrow{n} (0, x''_0, 0), \end{cases}$$

$$(6.7.4) \quad \tau_n + \bar{g}_i(y'_n, y''_n, t'_n) \cdot \xi'_n + \bar{h}_i(y'_n, y''_n, t'_n) \cdot \xi''_n \xrightarrow{n} \tau_0,$$

$$(6.7.5) \quad \begin{cases} \bar{g}_{y'}(y'_n, y''_n, t'_n) \cdot \xi'_n + \bar{h}_{y'}(y'_n, y''_n, t'_n) \cdot \xi''_n \xrightarrow{n} \eta'_0, \\ \bar{g}_{y''}(y'_n, y''_n, t'_n) \cdot \xi'_n + \bar{h}_{y''}(y'_n, y''_n, t'_n) \cdot \xi''_n \xrightarrow{n} 0, \end{cases}$$

$$(6.7.6) \quad |\tau_n| + |\xi'_n| + |\xi''_n| \xrightarrow{n} \infty,$$

$$(6.7.7) \quad |(x'_n, x''_n, t_n) - \tilde{f}(y'_n, y''_n, t'_n)| \cdot (|\tau_n| + |\xi'_n| + |\xi''_n|) \xrightarrow{n} 0.$$

Из (6.7.4) и (6.7.6) мы получаем

$$(6.7.8) \quad |\xi'_n| + |\xi''_n| \xrightarrow{n} \infty.$$

Кроме того, из (6.7.7), в частности, вытекает, что

$$(6.7.9) \quad |t_n - t'_n| \cdot (|\tau_n| + |\xi'_n| + |\xi''_n|) \xrightarrow{n} 0.$$

Предположим сначала, что $t_n > 0$. Тогда $(t_n x'_n, x''_n; \xi'_n, t_n \xi''_n) \in SS(F)$, и из (6.7.2), (6.7.5), (6.7.9) мы выводим, что

$$(6.7.10) \quad {}^t f'(t_n y'_n, y''_n) \cdot (\xi'_n, t_n \xi''_n) \xrightarrow{n} (\eta'_0, 0).$$

Поскольку f нехарактеристичен относительно F в точке $p = (0, y'_0; \eta'_0, 0)$ (предположение (i)), отсюда следует, что

$$(6.7.11) \quad \text{последовательность } \{|\xi'_n| + |t_n \xi''_n|\}_n \text{ ограничена.}$$

Таким образом, $(\xi''_n) \xrightarrow{n} +\infty$.

Поскольку последовательность $\{(\xi'_n, t_n \xi''_n)\}$ ограничена, мы можем предположить, переходя к подпоследовательности, что $\xi'_n \xrightarrow{n} \xi'_1, t_n \xi''_n \xrightarrow{n} \xi''_1$. Тогда в силу (6.7.10) $(0, y''_0; \xi'_1, \xi''_1) \in {}^t f'(V) \times_X f_\pi^{-1}(SS(F))$. Из предположения (iii) мы получаем, что $\xi''_1 = 0$. Таким образом, $(\xi'_n, t_n \xi''_n) \xrightarrow{n} (\xi'_1, 0)$. Мы можем предположить, что последовательность $\xi''_n/|\xi''_n|$ имеет предел ξ''_2 . Мы получаем такую последовательность $\{(t_n x'_n, x''_n; \xi'_n, t_n \xi''_n)\}$ в $SS(F)$, что

$$\begin{aligned}(t_n x'_n, x''_n) &\xrightarrow{n} (0, x''_0), \\ (\xi'_n, t_n \xi''_n) &\xrightarrow{n} (\xi'_1, 0), \\ \frac{1}{t_n |\xi''_n|} (t_n x'_n, t_n \xi''_n) &\xrightarrow{n} (0, \xi''_2).\end{aligned}$$

Тогда $(0, x''_0; \xi'_1, \xi''_2) \in C_{T_M^* X}(SS(F))$ и из предположения (ii) вытекает, что $h_{y''}(0, y''_0) \cdot \xi''_2 = \tilde{h}_{y''}(0, y''_0, 0) \cdot \xi''_2 \neq 0$. Из (6.7.5) мы получаем (напомним, что $|\xi''_n| \xrightarrow{n} \infty$)

$$\tilde{g}_{y''}(y'_n, y''_n, t_n) \cdot \frac{\xi'_n}{\xi''_n} + \tilde{h}_{y''}(y'_n, y''_n, t_n) \cdot \frac{\xi''_n}{|\xi''_n|} \xrightarrow{n} 0.$$

Мы пришли к противоречию, поскольку $|\xi'_n|$ ограничена.

Наконец, предположим, что $t_n = 0$. По теореме 6.3.1 существует двойная последовательность $\{(x'_{n,m}, x''_{n,m}, t_{n,m}; \xi'_{n,m}, \xi''_{n,m}, \tau_{n,m})\}$ в $SS(\bar{\rho}_X^{-1} F)$, такая, что

$$(x'_{n,m}, x''_{n,m}, t_{n,m}; \xi'_{n,m}, \xi''_{n,m}, \tau_{n,m}) \xrightarrow{m} (x'_n, x''_n, 0; \xi'_n, \xi''_n, \tau_n)$$

и $t_{n,m}$ положительны.

Поэтому мы можем выбрать подпоследовательность, удовлетворяющую (6.7.3)–(6.7.7), и доказательство окончено. $\square$

Замечание 6.7.2. Мы можем разложить f в композицию с помощью его графика следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \hookrightarrow & Y \times X & \xlongequal{\quad} & Y \times X & \longrightarrow & X \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ N & \xlongequal{\quad} & N & \hookrightarrow & N \times M & \longrightarrow & M \end{array}$$

Тогда можно было бы вывести теорему 6.7.1 из двух таких следствий.

Следствие 6.7.3. В ситуации теоремы 6.7.1 предположим, что выполняется условие (i), а также допустим, что

$$f|_N: N \rightarrow M \text{ — гладкое отображение.}$$

Тогда справедливо заключение теоремы.

Действительно, в этом случае отображение $f_{N\pi}$ гладкое и $f'^{-1}(T_N^*Y) \subset Y \times_X T_M^*X$.

Следствие 6.7.4. В ситуации теоремы 6.7.1 предположим, что $Y = X$, а f — тождественное отображение (и потому $N \subset M \subset X$ и $N \times_M T_M^*X = T_N^*X \cap T_M^*X$). Предположим также, что выполняется условие (ii). Тогда естественное отображение

$$\mu_N(F)|_{V \cap T_M^*X} \rightarrow (f_{N\pi}^! \mu_M(F))|_{V \cap T_M^*X}$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Из предположения (ii) вытекает, что (над V) $CT_{M^*X}(SS(F)) \cap T_{N \times_M T_M^*X}^*(T_M^*X)$ содержится в нулевом сечении. В частности, над V в нулевом сечении содержится и $C_{N \times_M T_M^*X}(SS(F) \cap T_N^*X)$, поскольку $T_{N \times_M T_M^*X}^*(T_M^*X) \simeq T_{N \times_M T_M^*X}(T_N^*X)$ при отождествлении касательного расслоения и кокасательного расслоения. Поэтому существует открытая окрестность W множества $V \cap T_M^*X$ в $V \subset T_N^*X$, такая, что $SS(F) \cap W \subset T_M^*X$. Тогда условия теоремы 6.7.1 выполнены с заменой V на W . $\square$

Следствие 6.7.5. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, V — подмножество в T^*Y , $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Предположим, что f нехарактеристичен относительно F на $V \cap SS(G)$. Тогда естественные морфизмы (ср. предложение 4.4.5) $\mu_{\text{hom}}(G, f^!F) \rightarrow R^!f_*\mu_{\text{hom}}(G \rightarrow F)$ и $\mu_{\text{hom}}(f^{-1}F, G) \rightarrow R^!f_*\mu_{\text{hom}}(F \leftarrow G)$ суть изоморфизмы на V .

Доказательство. Надо использовать следствие 6.7.3 в доказательстве предложения 4.4.5.

Следствие 6.7.6. В ситуации следствия 6.7.5 предположим дополнительно, что f — замкнутое вложение. Тогда естественные морфизмы $R^!f_!f_\pi^{-1}\mu_{\text{hom}}(Rf_!G, F) \rightarrow \mu_{\text{hom}}(G, f^!F)$ и $R^!f_!f_\pi^{-1}\mu_{\text{hom}}(F, Rf_*G) \rightarrow \mu_{\text{hom}}(f^{-1}F, G)$ (ср. предложение 4.4.6) суть изоморфизмы на V .

Доказательство. Надо использовать следствие 6.7.5 и предложение 4.4.5, как и в доказательстве пп. (i) и (ii) предложения 4.4.6. $\square$

Упражнения к гл. 6

Упражнение 6.1. Пусть X — открытое подмножество векторного пространства E , а γ — собственный замкнутый выпуклый конус в E , и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Предположим, что $\text{SS}(F) \subset X \times \gamma^{\text{oa}}$.

- (i) Докажите, что для любой точки $x \in X$ существуют ее окрестность U и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(E_\gamma))$, такие, что $F|_U \simeq (\phi_\gamma^{-1}G)|_U$.
- (ii) Докажите, что $\text{SS}(H^j(F)) \subset X \times \gamma^{\text{oa}}$ для всех j .

Упражнение 6.2. Пусть $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 \geq y > -x^2\}$, и пусть $F = A_Z$.

- (i) Докажите, что $\text{SS}(F) = \{(x, y; \xi, \eta); x^2 \geq y \geq -x^2, \xi = \eta = 0, \text{ или } y = -x^2, \xi = 2x\eta, \eta \leq 0, \text{ или } y = x^2, \xi = -2x\eta, \eta \leq 0\}$.
- (ii) Пусть $p = (0, 0; 0, 0)$. Докажите, что $C_p(\text{SS}(F)) = \{y = 0, \xi = 0, \eta \leq 0\}$.
- (iii) Пусть $\theta = dy$. Докажите, что $C_p(\text{SS}(F)) \subset \{\theta^{-1}(0)\}$, но $-H_\theta \notin C_p(\text{SS}(F))$. (Ср. замечание 6.5.5.)

Упражнение 6.3. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и предположим, что $H^j(F) = 0$ для $j < 0$. Пусть $u \in H^0(X; F) = \Gamma(X; H^0(F))$, $x \in X$, и пусть γ — замкнутый выпуклый собственный конус в $T_x X$, такой, что $\gamma \ni 0$. Предположим, что $(\text{SS}(F) \cap \pi^{-1}(x)) \cap \gamma^{\text{oa}} \subset \{0\}$ и $C_x(\text{supp}(u)) \cap \gamma \subset \{0\}$. Докажите, что $x \notin \text{supp}(u)$. (Указание. Используйте предложение 5.2.1.)

Упражнение 6.4. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, и пусть F_1 и F_2 — объекты категории $\mathbf{D}^b(X)$.

- (i) Предположим, что f нехарактеристичен относительно $\text{SS}(F_1) \hat{+} \text{SS}(F_2)^a$. Докажите изоморфизм

$$f^{-1} R\mathcal{H}om(F_2, F_1) \simeq R\mathcal{H}om(f^{-1} F_2, f^{-1} F_1).$$

- (ii) Пусть f нехарактеристичен относительно $\text{SS}(F_1) \hat{+} \text{SS}(F_2)$. Докажите изоморфизм

$$f^{-1} F_1 \overset{L}{\otimes} f^! F_2 \simeq f^! \left(F_1 \overset{L}{\otimes} F_2 \right).$$

Упражнение 6.5. Пусть M — замкнутое подмногообразие в X , $\tilde{X}$ — накрытие пространства $X \setminus M$, а ρ — отображение $\tilde{X} \rightarrow X$ (т. е. $\rho = i \circ p$, где $i: X \setminus M \hookrightarrow X$, а p — проекция $\tilde{X} \rightarrow X \setminus M$).

Пучку $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ поставим в соответствие

$$\begin{aligned}\rho_M(F) &= R\rho_* \rho^{-1} F \\ &\simeq R\mathcal{H}om(R\rho_! A_{\tilde{X}}, F).\end{aligned}$$

(i) Докажите, что

$$\text{SS}(\rho_M(F)) \subset \text{SS}(F) \cup (\text{SS}(F) \hat{+} T_M^* X).$$

(ii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, трансверсальный к M . Положим $N = f^{-1}(M)$. Предположим, что f нехарактеристичен относительно F и относительно $\text{SS}(F) \hat{+} T_M^* X$. Докажите изоморфизм

$$f^{-1} \rho_M(F) \simeq \rho_N(f^{-1} F).$$

Здесь ρ_N определяется аналогично с помощью накрытия $\tilde{X} \times_X Y$ над $Y \setminus N$.

Упражнение 6.6. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, и пусть (x, y) — координаты на X , а $(x, y; \xi, \eta)$ — соответствующие координаты на T^*X . Положим $\Omega = \{(x, y; \xi, \eta); \eta > 0\}$ и $\Omega' = \Omega \setminus \{(x, y; \xi, \eta); \eta > 0, x \leq 0, \xi = 0\}$.

(i) Докажите, что из $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, $\text{SS}(F) \cap \Omega' = \emptyset$ вытекает, что $\text{SS}(F) \cap \Omega = \emptyset$.

(ii) Докажите, что для любых $F, G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ отображение

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; \Omega)}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; \Omega')}(F, G)$$

является изоморфизмом.

(iii) Докажите, что $H^0(\Omega'; \mu\mathcal{H}om(A_{\{0\}}, A_{\{0\}})) \simeq A^2$, но при этом $\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; \Omega')}(A_{\{0\}}, A_{\{0\}}) \simeq A$. (Указание. Используйте теорему об инволютивности.)

Упражнение 6.7. Пусть γ — кривая $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0, x \leq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^\lambda, x \geq 0\}$, где $1 < \lambda < 2$. Пусть $\Lambda = T_\gamma^* \mathbb{R}^2$. Докажите, что

$$\Lambda \hat{+} \Lambda = \Lambda \cup T_{\{0\}}^* \mathbb{R}^2.$$

Упражнение 6.8. Пусть $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$. Покажите, что если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ и $\text{SS}(F) \subset \text{SS}(A_\gamma)$, то существует такой объект $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\text{Мод}(A)))$, что $F \simeq M_\gamma$ в $\mathbf{D}^b(\mathbb{R}^2)$.

Упражнение 6.9. Мы сохраняем обозначения предложения 6.1.8. Докажите изоморфизмы

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p_X)^\wedge}(f_!^\mu G, F) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; p_Y)^\vee}(G, f_\mu^! F) \simeq \mu\text{hom}(G \rightarrow F)_p, \\ \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; p_X)^\vee}(F, f_*^\mu G) &\simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; p_Y)^\wedge}(f_\mu^{-1} F, G) \simeq \mu\text{hom}(F \leftarrow G)_p.\end{aligned}$$

Замечания

Изучение нормальных конусов в кокасательных расслоениях (т. е. результаты § 6.2) было начато в работе [Kashiwara, Schapira 1]. Оно мотивировалось наблюдением, что классическое понятие гиперболичности для уравнений в частных производных может естественным образом быть сформулировано в терминах таких конусов, и теоремы 6.3.1, 6.4.1 и 6.7.1 в действительности представляют собой теоретико-пучковые варианты некоторых результатов в микрогиперболических системах (см. предложения 11.5.4 и 11.5.8 далее в этой книге, а относительно дальнейших продвижений см. работу [D'Agnolo, Schapira 1]).

Операция $\hat{+}$, первоначально введенная в работе [Kashiwara, Schapira 2], сейчас выступает как естественный инструмент при изучении произведений (скажем, произведений распределений, см. [Lebeau 1]) или при исследовании стратификаций (ср. гл. 8).

Теорема об инволютивности (теорема 6.5.4) представляет собой далеко идущее обобщение соответствующего результата для систем линейных дифференциальных уравнений, который первоначально был доказан аналитическими методами в работе [Sato, Kawai, Kashiwara 1] (после фундаментальной работы [Guillemin, Quillen, Sternberg 1]). Интересно заметить, что теорема об инволютивности для дифференциальных уравнений имеет в настоящее время три кардинально различных доказательства: первое из них — аналитическое, как отмечалось выше, второе — чисто алгебраическое, принадлежащее Габберу [Gabber 1], и последнее — чисто «геометрическое» (и «вещественное»), опирающееся на теорему 6.5.4 (ср. теорему 11.3.3 ниже). Эта теорема впервые была получена в работах [Kashiwara, Schapira 2, 3] в менее точной форме и с другим доказательством.

Предложение 6.5.6 очень полезно при изучении распространения аналитических особенностей микродифференциальных уравнений, особенно в задачах дифракции. Это предложение принадлежит Шапира [Schapira 3]. Все остальные результаты этой главы принадлежат авторам, причем многие из них были уже доказаны Касиварой и Шапира в работе [Kashiwara, Schapira 3].

Контактные преобразования и чистые пучки

В этой главе мы выполняем контактные преобразования в пучках. Мы начинаем с того, что обобщаем на микролокальную ситуацию понятие ядра, введенное в § 3.6, и развиваем микролокальное исчисление ядер.

Пусть X и Y — два многообразия, а Ω_X и Ω_Y — открытые подмногожества соответственно в T^*X и T^*Y . Мы показываем, что при соответствующих предположениях корректно определены функторы Φ_K и Ψ_K из $D^b(Y; \Omega_Y)$ в $D^b(X; \Omega_X)$ и из $D^b(X; \Omega_X)$ в $D^b(Y; \Omega_Y)$, задающие эквивалентности категорий, совместимые с функтором μhom . Далее, если $\chi: \Omega_X \xrightarrow{\sim} \Omega_Y$ — контактное преобразование, то мы показываем, что после сужения множеств Ω_X и Ω_Y всегда можно, используя эти ядра, построить эквивалентность $D^b(X; \Omega_X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y; \Omega_Y)$. Пусть теперь M — гиперповерхность в X , а N — гиперповерхность в Y . Предположим, что контактное преобразование χ переводит $T_M^*X \cap \Omega_X$ в $T_N^*Y \cap \Omega_Y$. Если график преобразования χ ассоциирован с конормальным расслоением к некоторой поверхности S в $X \times Y$ и если в качестве ядра K выбран пучок A_S , то мы показываем, что $\Phi_K(A_N) \simeq A_M[d]$ в $D^b(X; p)$ ($p \in \Omega_X$), где d — сдвиг, который мы вычисляем, используя индекс инерции.

Это вычисление приводит к понятию *чистых пучков* вдоль гладкого лагранжева многообразия Λ , понятию, которое является теоретико-пучковым аналогом понятия *распределений Фурье*, введенных Хёрмандером [Hörmander 2,4], и понятия *простых голономных систем* Сато-Каваи-Касивары [Sato-Kawai-Kashivara 1]. Если $\Lambda = T_M^*X$, где M — замкнутое подмногообразие в X , то чистый пучок F вдоль Λ в точке p есть не что иное, как образ в $D^b(X; p)$ пучка $L_M[d]$, где L — некоторый A -модуль (таким образом, L_M — пучок на X с носителем M , постоянный на M со стеблем L), а d — сдвиг. (В таком случае говорят, что F — чистый пучок со сдвигом $d + \frac{1}{2} \text{codim } M$.) В том случае, когда ранг проекции $\pi: \Lambda \rightarrow X$ непостоянен, сдвиг пучка F может претерпевать скачки, и его вычисление в полной мере требует техники, связанной с индексом инерции. Мы завершаем главу вычислением сдвига для композиции двух ядер и сдвига чистого пучка после перехода к его прямому или обратному образу.

Сведения, содержащиеся в этой главе, не обязательны для понимания оставшейся части книги, исключая §§ 10.3 и 11.4.

Мы придерживаемся соглашения 4.0. Кроме того, если не оговорено противное, все рассматриваемые подмногообразия кокасательных расслоений предполагаются локально коническими.

7.1. Микролокальные ядра

В этом параграфе мы «микролокализуем» конструкции § 3.6.

Пусть X и Y — два многообразия. Мы обозначим через q_1 и q_2 соответственно проекции $X \times Y \rightarrow X$ и $X \times Y \rightarrow Y$, а через p_1 и p_2 — проекции $T^*(X \times Y) \rightarrow T^*X$ и $T^*(X \times Y) \rightarrow T^*Y$. Мы полагаем также $p_j^a = p_j \circ a$, где a — антиподальное отображение. Если Z — третье многообразие, то через q_{ij} обозначается проекция из $X \times Y \times Z$ на (i, j) -й сомножитель. Например, q_{13} есть проекция на $X \times Z$. Аналогично определяются проекции p_{ij} из $T^*(X \times Y \times Z) \simeq T^*X \times T^*Y \times T^*Z$. В этой главе $T^*(X \times Y) \times_{X \times Y} T^*(Y \times Z)$ обозначает расслоенное произведение с помощью проекций $p_1: T^*(Y \times Z) \rightarrow T^*Y$ и $p_2^a: T^*(X \times Y) \rightarrow T^*Y$. Мы отождествляем это множество с $T^*(X \times Y \times Z)$ с помощью соответствия

$$(((x; \xi), (y; -\eta)), ((y; \eta), (z; \zeta))) \leftrightarrow ((x; \xi), (y; \eta), (z; \zeta)).$$

Пусть $\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z$ — открытые подмножества в T^*X, T^*Y и T^*Z соответственно. Мы полагаем $\Omega_X^a = a(\Omega_X)$, где a — антиподальное отображение, и аналогично определяются Ω_Y^a, Ω_Z^a и т. д.

Определение 7.1.1. Через $\mathbf{N}(X, Y; \Omega_X, \Omega_Y)$ обозначается полная подкатегория в $\mathbf{D}^b(X \times Y; \Omega_X \times T^*Y)$, состоящая из всех таких объектов K , что

- (i) $\mathrm{SS}(K) \cap (\Omega_X \times T^*Y) \subset \Omega_X \times \Omega_Y^a$,
- (ii) отображение $p_1: \mathrm{SS}(K) \cap (\Omega_X \times T^*Y) \rightarrow \Omega_X$ собственное.

Если нет опасности путаницы, мы пишем $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y)$ вместо $\mathbf{N}(X, Y; \Omega_X, \Omega_Y)$.

Разумеется, если Ω'_X и Ω'_Y — открытые подмножества в T^*X и T^*Y соответственно, причем $\Omega'_X \subset \Omega_X$ и $\Omega_Y \subset \Omega'_Y$, то $\mathrm{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$ содержится в $\mathrm{Ob}(\mathbf{N}(\Omega'_X, \Omega'_Y))$. Если $Y = \{\mathrm{pt}\}$, то

$$(7.1.1) \quad \mathbf{N}(\Omega_X, \{\mathrm{pt}\}) \simeq \mathbf{D}^b(X; \Omega_X).$$

Пусть $K \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ и $L \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$. Напомним (§ 3.6), что $K \circ L$ — объект в $\mathrm{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Z))$, определяемый формулой

$$(7.1.2) \quad K \circ L = Rq_{13}! \left(q_{12}^{-1} K \overset{L}{\otimes} q_{23}^{-1} L \right).$$

Предложение 7.1.2. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$. Тогда

- (i) естественный морфизм $K \circ L \rightarrow Rq_{13*}(q_{12}^{-1}K \otimes^L q_{23}^{-1}L)$ является изоморфизмом в $\mathbf{D}^b(X \times Z; \Omega_X \times T^*Z)$,
- (ii) $SS(K \circ L) \cap (\Omega_X \times T^*Z) \subset p_{13}((SS(K) \cap (\Omega_X \times \Omega_Y^*)) \times_{T^*Y} (SS(L) \cap (\Omega_Y \times T^*Z)))$,
- (iii) если $L \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Z))$, то $K \circ L \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Z))$.

В частности, соответствие $(K, L) \mapsto K \circ L$ задает бифунктор из $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y) \times \mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Z)$ в $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Z)$.

Доказательство. Заметим сначала, что

$$(7.1.3) \quad (p_{12}^{-1}(SS(K))) \hat{+}_{\infty} p_{23}^{-1}(SS(L)) \cap (\Omega_X \times T^*Y \times T^*Z) = \emptyset.$$

Действительно, возьмем последовательность $\{(x_n, y_n; \xi_n, \eta_n)\}$ в $SS(K)$ и последовательность $\{(y'_n, z_n; \eta'_n, \zeta_n)\}$ в $SS(L)$, такие, что $(x_n; \xi_n) \xrightarrow{n} (x_0; \xi_0) \in \Omega_X$, $(z_n; \zeta_n) \xrightarrow{n} (z_0; \zeta_0)$, $y_n \xrightarrow{n} y_0$, $y'_n \xrightarrow{n} y_0$, $\eta_n + \eta'_n \xrightarrow{n} \eta_0$. Тогда последовательность $\{\eta_n\}$ ограничена, поскольку $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$. Отсюда следует (7.1.3). Из следствия 6.4.5 (ср. замечание 6.2.5) мы получаем

$$(7.1.4) \quad SS\left(q_{12}^{-1}K \otimes^L q_{23}^{-1}L\right) \cap \Omega_X \times T^*Y \times T^*Z \subset p_{12}^{-1}(SS(K)) + p_{23}^{-1}(SS(L)).$$

Из предположения относительно K следует также, что для любого компактного подмножества A в $\Omega_X \times T^*Z$ существует такое компактное подмножество B в Y , что

$$(7.1.5) \quad (x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \in (p_{12}^{-1}(SS(K)) + p_{23}^{-1}(SS(L))) \cap p_{13}^{-1}(A) \implies y \in B.$$

В силу (7.1.4) и (7.1.5) мы можем применить предложение 6.3.3 к $q_{12}^{-1}K \otimes^L q_{23}^{-1}L$ на $\Omega_X \times T^*Z$ для отображения q_{13} . Мы получаем (i), а также

$$SS(K \circ L) \cap (\Omega_X \times T^*Z) \subset \{(x, z; \xi, \zeta); \text{ существует такая точка } (y; \eta) \in T^*Y, \text{ что } (x, y; \xi, -\eta) \in SS(K), (x; \xi) \in \Omega_X \text{ и } (y, z; \eta, \zeta) \in SS(L)\}.$$

Этим доказано (ii), а (iii) отсюда следует. □

Напомним, что в § 3.6 мы сопоставили объекту $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ функторы $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$ и $\Psi_K: \mathbf{D}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}^b(Y)$, полагая

$$(7.1.6) \quad \begin{cases} \Phi_K(G) = Rq_{1!} \left(K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right) \simeq K \circ G, \\ \Psi_K(F) = Rq_{2*} R\mathcal{H}om(K, q_1^! F). \end{cases}$$

Определение 7.1.3. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$. Определим функтор $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$, полагая $\Phi_K(G) = K \circ G$.

Это определение осмыслено в силу предложения 7.1.2, примененного к $Z = \{\text{pt}\}$, и согласовано с (7.1.6).

Мы обозначим через $r: X \times Y \rightarrow Y \times X$ каноническое отображение

$$(7.1.7) \quad r(x, y) = (y, x).$$

Предложение 7.1.4. Предположим, что объект $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ удовлетворяет условию $r_* K \in \mathbf{N}(\Omega_Y^a, \Omega_X^a)$. Тогда

- (i) Ψ_K индуцирует корректно определенный функтор из $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ в $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$;
- (ii) естественный морфизм $Rq_{2!} R\mathcal{H}om(K, q_1^! F) \rightarrow \Psi_K(F)$ является изоморфизмом в $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$;
- (iii) $\text{SS}(\Psi_K(F)) \cap \Omega_Y \subset p_2^a(\text{SS}(K) \cap p_1^{-1}(\text{SS}(F) \cap \Omega_X))$.

Мы не воспроизводим доказательство, так как оно мало отличается от доказательства предложения 7.1.2.

Пусть W — четвертое многообразие, а Ω_W — открытое подмножество в T^*W .

Предложение 7.1.5. Функторы из $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y) \times \mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Z) \times \mathbf{N}(\Omega_Z, \Omega_W)$ в $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_W)$, задаваемые формулами $(K, L, M) \mapsto (K \circ L) \circ M$ и $(K, L, M) \mapsto K \circ (L \circ M)$, изоморфны.

Доказательство очевидно. $\square$

Предложение 7.1.6. (i) Функторы из $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y) \times \mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Z) \times \mathbf{D}^b(Z; \Omega_Z)$ в $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$, задаваемые формулами $(K, L, H) \mapsto \Phi_{K \circ L}(H)$ и $(K, L, H) \mapsto \Phi_K(\Phi_L(H))$, изоморфны.

(ii) Функторы из $\mathbf{N}(\Omega_Z^a, \Omega_Y^a) \times \mathbf{N}(\Omega_Y^a, \Omega_X^a) \times \mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ в $\mathbf{D}^b(Z; \Omega_Z)$, задаваемые формулами $(L, K, F) \mapsto \Psi_{r^{-1}(K \circ L)}(F)$ и $(L, K, F) \mapsto \Psi_{r^{-1}L}(\Psi_{r^{-1}K}(F))$, изоморфны.

Здесь r обозначает одно из канонических отображений $X \times Y \rightarrow Y \times X$, $Y \times Z \rightarrow Z \times Y$ и $X \times Z \rightarrow Z \times X$.

Доказательство. Утверждение (i) — частный случай предложения 7.1.5, а (ii) следует из предложения 3.6.4. $\square$

Пусть q_{ij} обозначает (i, j) -ю проекцию, определенную на $X \times Z \times Y \times Z$. Через i_Z мы обозначим функтор из $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y)$ в $\mathbf{N}(\Omega_X \times \Omega_Z, \Omega_Y \times \Omega_Z)$, определенный формулой

$$(7.1.8) \quad i_Z: K \mapsto q_{13}^{-1} K \overset{L}{\otimes} q_{24}^{-1} A_{\Delta_Z}.$$

Рассмотрим диаграмму

$$(7.1.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y) \times \mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Z) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Z) \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 \\ \mathbf{N}(\Omega_X \times \Omega_Z, \Omega_Y \times \Omega_Z) \times \mathbf{D}^b(Y \times Z; \Omega_Y \times T^*Z) & \xrightarrow[\beta_2]{} & \mathbf{D}^b(X \times Z; \Omega_X \times T^*Z) \end{array}$$

где $\alpha_1(K, L) = (i_Z(K), L)$, $\alpha_2(H) = H$, $\beta_1(K, L) = K \circ L$ и $\beta_2(H, G) = \Phi_H(G)$.

Предложение 7.1.7. *Диаграмма (7.1.9) коммутативна, т. е. $\beta_2 \circ \alpha_1 \simeq \alpha_2 \circ \beta_1$.*

Доказательство очевидно. $\square$

Предложение 7.1.8. *Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$. Предположим, что $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$ и $r^{-1}K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_Y^a, \Omega_X^a))$. Тогда функторы $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ и $\Psi_K: \mathbf{D}^b(X; \Omega_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$ являются взаимно сопряженными.*

Доказательство. Мы знаем (упр. 1.14), что

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)}(\Phi_K(G), F) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(\Phi_K(G'), F'),$$

где индуктивный предел берется по категории морфизмов $G' \rightarrow G$ и $F \rightarrow F'$, таких, что $G' \simeq G$ в $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$ и $F \simeq F'$ в $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$. Аналогично

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)}(G, \Psi_K(F)) = \varinjlim \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(Y)}(G', \Psi_K(F')),$$

где индуктивный предел берется по той же самой категории. Поэтому нужный результат вытекает из предложения 3.6.2. $\square$

Предложение 7.1.9. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$. Предположим, что K кохомологически конструктивен, и пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$. Положим $K^* = r_* R\mathcal{H}om(K, \omega_{X \times Y/Y})$. Тогда $r^{-1}K^* \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X^a, \Omega_Y^a))$ и $\Phi_K \simeq \Psi_{K^*}$ как функторы из $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$ в $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$.

Доказательство. Поскольку $\text{SS}(r^{-1}K^*) = \text{SS}(K)^a$, объект $r^{-1}K^*$ принадлежит $\mathbf{N}(\Omega_X^a, \Omega_Y^a)$. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Из (7.1.3) нам известно, что

$$\left(\text{SS}(K^*) \hat{+}_{\infty} \text{SS}(q_2^! G) \right) \cap (\Omega_X \times T^* Y) = \emptyset.$$

Применяя следствие 6.4.3, мы получаем такой изоморфизм в категории $\mathbf{D}^b(X \times Y; \Omega_X \times T^* Y)$:

$$R\mathcal{H}om(K^*, q_2^! G) \simeq R\mathcal{H}om(K^*, q_2^! A_Y) \stackrel{L}{\otimes} q_2^{-1} G.$$

Тогда в силу предложения 7.1.2

$$\begin{aligned} \Psi_K^*(G) &\simeq Rq_{1*} \left(K \stackrel{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right) \\ &\simeq Rq_{1*} \left(K \stackrel{L}{\otimes} q_2^{-1} G \right) \end{aligned}$$

в $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$. □

Предложение 7.1.10. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$ и $L \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_X))$. Предположим, что $K \circ L \simeq A_{\Delta_X}$ в $\mathbf{D}^b(X \times X; \Omega_X \times T^* X)$ и $L \circ K \simeq A_{\Delta_X}$ в $\mathbf{D}^b(Y \times Y; \Omega_Y \times T^* Y)$. Тогда $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ и $\Phi_L: \mathbf{D}^b(X; \Omega_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$ — взаимно обратные эквивалентности категорий.

Доказательство. Это легко следует из предложения 7.1.6. □

Предложение 7.1.11. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X; \Omega_X))$ и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y))$.

(i) Предположим, что $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y))$. Тогда в $\mathbf{D}^b(\Omega_X)$ имеется естественный изоморфизм

$$Rp_{1*} \mu\mathcal{H}om(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1} G, q_1^! F)) \simeq \mu\mathcal{H}om(\Phi_K(G), F).$$

(ii) Предположим, что $r_* K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(\Omega_Y^a, \Omega_X^a))$. Тогда в $\mathbf{D}^b(\Omega_Y)$ имеется естественный изоморфизм

$$Rp_{2*}^a \mu\mathcal{H}om(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1} G, q_1^! F)) \simeq \mu\mathcal{H}om(G, \Psi_K(F)).$$

Доказательство. (i) Рассмотрим отображения

$$(7.1.10) \quad \begin{array}{ccccc} X \times X & \xleftarrow{q} & X \times X \times Y & \xrightarrow{j} & X \times Y \times X \times Y \\ \cup & & \cup & & \cup \\ \Delta_X & \xleftarrow{\quad} & \Delta_X \times Y & \xrightarrow{\sim} & \Delta_{X \times Y} \end{array}$$

и ассоциированные с ними отображения

$$(7.1.11) \quad \begin{array}{ccc} T_{\Delta_X}^*(X \times X) & \xleftarrow{q_*} & Y \times T_{\Delta_X}^*(X \times X) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ T^*X & \xleftarrow{\quad} & Y \times T^*X \\ T_{\Delta_X \times Y}^*(X \times X \times Y) & \xleftarrow{j'_*} & T_{\Delta_X \times Y}^*(X \times Y \times X \times Y) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ (T^*X) \times Y & \xleftarrow{\quad} & T^*(X \times Y) \end{array}$$

Обозначим, как обычно, через q_j j -ю проекцию, определенную на $X \times Y \times X \times Y$, а через q_{ij} (i, j) -ю проекцию. Положим

$$\begin{aligned} H &= R\mathcal{H}om(q_{34}^{-1}K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \\ &\simeq R\mathcal{H}om\left(q_{34}^{-1}K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1}G, q_1^!F\right). \end{aligned}$$

Тогда $\mu\mathcal{H}om(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \simeq \mu_{\Delta_X \times Y} H$.

Отображение j нехарактеристично относительно H на $\Omega_X \times T^*Y \subset T_{\Delta_X \times Y}^*(X \times X \times Y)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\{(x_n, y_n, x'_n, y'_n; \xi_n, \eta_n, \xi'_n, \eta'_n)\}$ в $SS(H)$, такую, что $(x_n, y_n, x'_n, y'_n) \xrightarrow{n} (x_0, y_0, x_0, y_0)$, $(\xi_n, \xi'_n, \eta_n + \eta'_n) \xrightarrow{n} (\xi_0, -\xi_0, \eta_0)$, $(x_0; \xi_0) \in \Omega_X$. Тогда последовательность $\{\eta'_n\}$ ограничена в силу предположений, наложенных на K .

Применяя следствие 6.7.3, мы получаем такой изоморфизм на $\Omega_X \times T^*Y$:

$$\begin{aligned} R^i j_* \mu\mathcal{H}om(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \\ \simeq \mu_{\Delta_X \times Y} j^! R\mathcal{H}om\left(q_{34}^{-1}K \overset{L}{\otimes} q_2^{-1}G, q_1^!F\right) \\ \simeq \mu_{\Delta_X \times Y} R\mathcal{H}om\left(q_{23}^{-1}K \overset{L}{\otimes} q_3^{-1}G, q_1^!F\right). \end{aligned}$$

Возьмем теперь прямой образ обеих частей под действием q_π . В силу предложения 4.3.4 имеется естественный морфизм

$$\begin{aligned} Rq_{\pi*} R^i j_* \mu hom(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)) \\ \leftarrow \mu_{\Delta_X} Rq_* R\mathcal{H}om\left(q_{23}^{-1}K \overset{L}{\otimes} q_3^{-1}G, q_1^!F\right) \\ \simeq \mu_{\Delta_X} R\mathcal{H}om(q_2^{-1}\Phi_K(G), q_1^!F) \\ = \mu hom(\Phi_K(G), F), \end{aligned}$$

который является изоморфизмом, если носитель объекта G компактен. Поскольку $q_\pi \circ j' = p_1$, мы резюмируем следующее.

Имеется естественный морфизм

$$(7.1.12) \quad \mu hom(\Phi_K(G), F) \rightarrow Rp_{1*} \mu hom(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F)),$$

который является изоморфизмом, если G имеет компактный носитель. Чтобы завершить доказательство утверждения (i), заметим, что для любого компактного подмножества A в Ω_X существует такое компактное подмножество B в Y , что из равенства $\text{supp}(G) \cap B = \emptyset$ вытекают следующие утверждения:

- (a) $\text{supp}(Rp_{1*} \mu hom(K, R\mathcal{H}om(q_2^{-1}G, q_1^!F))) \cap A = \emptyset$,
- (b) $\text{supp}(\mu hom(\Phi_K(G), F)) \cap A = \emptyset$.

Действительно, (a) очевидно, поскольку K принадлежит $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y)$, а (b) вытекает из предложения 7.1.2(iii). Для того чтобы доказать, что (7.1.12) — изоморфизм, остается заменить G таким пучком G' , что $G'|_B = G|_B$ и носитель $\text{supp}(G')$ компактен.

(ii) Доказательство аналогично. □

В следующем параграфе мы дадим достаточные условия того, что Φ_K и Ψ_K — эквивалентности категорий.

7.2. Контактные преобразования в пучках

Пусть задано замкнутое коническое подмножество $\Lambda \subset \Omega_X \times \Omega_Y^a$, где Ω_X и Ω_Y — открытые подмножества в T^*X и T^*Y соответственно, как и в § 7.1. Мы предположим, что

$$(7.2.1) \quad p_1|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \Omega_X \quad \text{и} \quad p_2^a|_\Lambda: \Lambda \rightarrow \Omega_Y^a \quad \text{— гомеоморфизмы.}$$

Обозначим через χ отображение $p_1|_\Lambda \circ (p_2^a|_\Lambda)^{-1}$ из Ω_Y^a в Ω_X . Если Λ гладкое и лагранжево и если p_j — диффеоморфизмы, то χ — контактное преобразование.

Теорема 7.2.1. Пусть $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$. Предположим, что выполнено условие (7.2.1) и, кроме того,

(7.2.2) K когомологически конструктивен,

(7.2.3) $(p_1^{-1}(\Omega_X) \cup p_2^{a-1}(\Omega_Y)) \cap \text{SS}(K) \subset \Lambda$,

(7.2.4) естественный морфизм $A_\Lambda \rightarrow \mu\text{hom}(K, K)|_\Lambda$ является изоморфизмом в $\mathbf{D}^b(\Lambda)$.

Тогда $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ и $\Psi_K: \mathbf{D}^b(X; \Omega_X) \rightarrow \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$ — взаимно обратные эквивалентности категорий.

Более того, если G_1 и G_2 принадлежат $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$, то в $\mathbf{D}^b(\Omega_X)$ имеется естественный изоморфизм

$$(7.2.5) \quad \chi_* \mu\text{hom}(G_2, G_1) \simeq \mu\text{hom}(\Phi_K(G_2), \Phi_K(G_1)).$$

Доказательство. Согласно предположениям (7.2.1) и (7.2.3), K принадлежит $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_Y)$, а $r_* K$ принадлежит $\mathbf{N}(\Omega_Y^a, \Omega_X^a)$, где r обозначает отображение (7.1.7) из $X \times Y$ в $Y \times X$. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\quad \tilde{j} \quad} & X \times Y \times Y \\ \downarrow q_2 & \square & \downarrow q_{23} \\ Y & \xrightarrow{\quad j \quad} & Y \times Y \end{array}$$

где j и $\tilde{j}$ — диагональные вложения. Положим $E = R\text{Hom}(q_{12}^{-1}K, q_{13}^!K)$. Это объект категории $\mathbf{D}^b(X \times Y \times Y)$. В силу предложения 7.1.9, полагая $K^* = r^{-1}R\text{Hom}(K, \omega_{X \times Y/X})$, мы имеем $K^* \circ K \simeq Rq_{23*}E$ в $\mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Y)$.

С другой стороны, $\tilde{j}^!E \simeq R\text{Hom}(\tilde{j}^{-1}q_{12}^{-1}K, \tilde{j}^!q_{13}^!K) \simeq R\text{Hom}(K, K)$. Поэтому мы имеем канонические морфизмы

$$A_{X \times Y} \rightarrow R\text{Hom}(K, K) \rightarrow \tilde{j}^!E,$$

которые индуцируют морфизмы

$$A_Y \rightarrow Rq_{2*}A_{X \times Y} \rightarrow Rq_{2*}\tilde{j}^!E \simeq j^!Rq_{23*}E.$$

Итак, мы получили морфизм

$$(7.2.6) \quad \alpha: A_{\Delta_Y} \rightarrow K^* \circ K \quad \text{в} \quad \mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Y).$$

Докажем, что α — изоморфизм. Пусть Z — еще одно многообразие, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Z; \Omega_X \times T^*Z))$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; \Omega_Y \times T^*Z))$. Пусть

$i_Z(K)$ обозначает объект в $\mathbf{N}(\Omega_X \times T^*Z, \Omega_Y \times T^*Z)$, построенный в (7.1.8). В силу предложения 7.1.11 в $\mathbf{D}^b(\Omega_X \times T^*Z)$ мы имеем естественный изоморфизм

$$(7.2.7) \quad \chi_*(\mu\text{hom}(G, \Psi_{i_Z(K)}(F))|_{\Omega_Y \times T^*Z}) \simeq \mu\text{hom}(\Phi_{i_Z(K)}(G), F)|_{\Omega_X \times T^*Z}.$$

Выберем $Z = Y$, $G = A_{\Delta_Y}$ и $F = K$. Мы получаем изоморфизм

$$\chi_*\mu\text{hom}(A_{\Delta_Y}, \Psi_{i_Y(K)}(K)) \simeq \mu\text{hom}(K, K).$$

Поскольку $\Psi_{i_Y(K)}(K) \simeq K^* \circ K$ в силу предложения 7.1.9, мы получили на $\Omega_Y \subset T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)$ изоморфизм

$$(7.2.8) \quad \mu_{\Delta}(\alpha): \mu_{\Delta_Y}(A_{\Delta_Y}) \simeq \mu_{\Delta_Y}(K^* \circ K).$$

Так как $\text{SS}(K^* \circ K) \cap (\Omega_Y \times T^*Y) \subset T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)$, из предложения 6.6.1 и изоморфизма (7.2.8) следует, что α — изоморфизм в $\mathbf{N}(\Omega_Y, \Omega_Y)$. Аналогично доказывается изоморфизм $A_{\Delta_X} \simeq K \circ K^*$ в $\mathbf{N}(\Omega_X, \Omega_X)$, где $K^* = r^{-1}R\mathcal{H}om(K, \omega_{X \times Y/Y})$. В силу предложения 7.1.10 из этих изоморфизмов следует, что $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ — эквивалентность категорий. Поскольку Ψ_K — функтор, сопряженный к Φ_K , получаем, что Ψ_K — квазиобратный функтор к Φ_K . Тогда (7.2.5) вытекает из (7.2.7) с $Z = \{\text{pt}\}$. $\square$

Покажем, что если χ — контактное преобразование между Ω_Y и Ω_X , то после уменьшения множеств Ω_Y и Ω_X можно построить эквивалентность категорий $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$ и $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ с помощью теоремы 7.2.1.

Пусть Ω_X и Ω_Y — открытые подмножества в T^*X и T^*Y соответственно, а $\chi: \Omega_Y \rightarrow \Omega_X$ — контактное преобразование. Положим

$$(7.2.9) \quad \Lambda = \{(x, y; \xi, \eta) \in \Omega_X \times \Omega_Y^a; (x; \xi) = \chi(y; -\eta)\}.$$

Это коническое лагранжево многообразие, замкнутое в $\Omega_X \times \Omega_Y^a$. Пусть $p_Y \in \Omega_Y$, $p_X = \chi(p_Y) \in \Omega_X$.

Следствие 7.2.2. *Существуют открытые окрестности X' точки $\pi(p_X)$, Y' точки $\pi(p_Y)$, Ω'_X точки p_X и Ω'_Y точки p_Y , такие, что $\Omega'_X \in T^*X' \cap \Omega_X$, $\Omega'_Y \subset T^*Y' \cap \Omega_Y$, и существует $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X' \times Y'))$, такой, что*

- (a) χ индуцирует контактное преобразование $\Omega'_Y \simeq \Omega'_X$,
- (b) $((\Omega'_X \times T^*Y') \cup (T^*X' \times \Omega_Y^a)) \cap \text{SS}(K) \subset \Lambda \cap (\Omega'_X \times \Omega_Y^a)$,
- (c) $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y'; \Omega'_Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X'; \Omega'_X)$ — эквивалентность категорий,
- (d) для G_1 и G_2 из $\mathbf{D}^b(Y'; \Omega'_Y)$ мы имеем в $\mathbf{D}^b(\Omega'_X)$ изоморфизм (7.2.5).

Доказательство. В силу следствия П.2.8, уменьшая при необходимости Ω_Y и Ω_X , мы можем разложить χ в композицию $\chi_2 \circ \chi_1$, где каждое из χ_i ($i = 1, 2$) — контактное преобразование, а лагранжево многообразие Λ_i , ассоциированное с χ_i по формуле (7.2.9), является ко-нормальным расслоением к гиперповерхности. Как следует из предположений 7.1.2 и 7.1.6, если $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X' \times Z))$ и $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Z \times Y'))$ удовлетворяют условиям (b), (c) и (d) следствия, то $K_2 \circ K_1$ также удовлетворяет этим условиям. Таким образом, мы с самого начала можем предполагать, что существует такая гиперповерхность $S \subset X \times Y$, что лагранжево многообразие Λ , определенное формулой (7.2.9), содержится в $T_S^*(X \times Y)$. Поскольку Λ является $\mathbb{R}^+$ -коническим, а S — гиперповерхность, существуют открытые окрестности $\Omega'_X, \Omega'_Y, X', Y'$ точек $p_X, p_Y, \pi(p_X), \pi(p_Y)$ соответственно, такие, что $((\Omega'_X \times T^*Y') \cup (T^*X' \times \Omega'^a_Y)) \cap T_S^*(X \times Y) \subset \Lambda$. Тогда все предположения теоремы 7.2.1 выполнены для $K = A_{S \cap (X' \times Y')}$ в $\mathbf{D}^b(X' \times Y')$. $\square$

Определение 7.2.3. В ситуации теоремы 7.2.1 мы говорим, что Φ_K и Ψ_K — *расширенные контактные преобразования над χ* .

Покажем, что все расширенные контактные преобразования над тождественным преобразованием порождены эквивалентностями категорий в $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$. В этом смысле Φ_K по существу единственно. Пусть χ тождественно в окрестности точки $p \in T^*X$. Из предложения 6.6.1 мы заключаем, что $K \simeq M_{\Delta_X}$ в $\mathbf{D}^b(X \times X; (p, p^a))$, где $M \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$. Если $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, то

$$\Phi_K(G) = M_X \overset{L}{\otimes} G \quad \text{в } \mathbf{D}^b(X; p).$$

Предложение 7.2.4. *Предположим, что функтор $M_X \otimes^L \cdot$ определяет эквивалентность категорий в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Тогда функтор $M \otimes^L \cdot$ определяет эквивалентность категорий в $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$.*

Доказательство. Пусть Y — такое подмногообразие в X , что $p \in T_Y^*X$. Положим $\Lambda = T_Y^*X$. Тогда $M_X \otimes^L \cdot$ индуцирует эквивалентность категорий на $\mathbf{D}^b_\Lambda(X; p)$, а эта последняя категория эквивалентна $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$ в силу предложения 6.6.1. $\square$

Пример 7.2.5. Пусть X и Y — два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$, снабженные линейными системами координат (x) и (y) соответственно. Пусть $(x; \xi)$ и $(y; \eta)$ — соответствующие координаты на кокасательных расслоениях. Рассмотрим контактное преобразование $\chi: T^*Y \simeq T^*X$, задаваемое формулой

$$(7.2.10) \quad \chi: (y; \eta) \mapsto (x; \xi) = (y + \eta/|\eta|; \eta),$$

где $|\eta| = (\sum_j \eta_j^2)^{1/2}$. Пусть $S = \{(x, y) \in X \times Y; \sum_j (x_j - y_j)^2 \geq 1\}$, и пусть $\Lambda = \text{SS}(A_S) \cap \dot{T}^*(X \times Y)$. Тогда

$$\Lambda = \left\{ (x, y; \xi, \eta); \sum_j (x_j - y_j)^2 = 1, \xi = -\eta - \lambda(x - y), \lambda > 0 \right\}.$$

Таким образом,

$$(x, \xi) = \chi(y, \eta) \Leftrightarrow (x, y; \xi, -\eta) \in \Lambda.$$

Пусть $K = A_S$. Тогда все условия теоремы 7.2.1 выполнены и $\Phi_K: \mathbf{D}^b(Y; \dot{T}^*Y) \rightarrow \mathbf{D}^b(X; \dot{T}^*X)$ — эквивалентность категорий.

Для $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$ мы имеем $\Phi_K(G) \simeq Rq_{1!}(q_2^{-1}G)_S$. В частности, $\Phi_K(A_{\{0\}}) \simeq A_{\{\sum_j x_j^2 \geq 1\}}$, $\Phi_K(A_Y) \simeq 0$, $\Phi_K(A_{\{y \neq 0\}}) \simeq A_{\{\sum_j x_j^2 \geq 1\}}[-1]$ в $\mathbf{D}^b(X; \dot{T}^*X)$.

Пример 7.2.6. Рассмотрим пример, аналогичный примеру 7.2.5, на комплексных многообразиях.

Пусть X и Y — два экземпляра пространства $\mathbb{C}^n$, снабженные С-линейными координатами (z) и (w) соответственно, причем $z = x + \sqrt{-1}y$ и $w = u + \sqrt{-1}v$. Пусть $(z; \zeta)$ и $(w; \theta)$ — соответствующие координаты на комплексных кокасательных расслоениях. Если $X^{\mathbb{R}}$ и $Y^{\mathbb{R}}$ обозначают о веществления многообразий X и Y , то канонические 1-формы на $T^*X^{\mathbb{R}}$ и $T^*Y^{\mathbb{R}}$ равны соответственно $2 \text{Re}(\sum_j \zeta_j dz_j)$ и $2 \text{Re}(\sum_j \theta_j dw_j)$. Пусть $\Omega_X = \{(z; \zeta); \zeta^2 \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$, где $\zeta^2 = \sum_j \zeta_j^2$, и аналогично $\Omega_Y = \{(w; \theta); \theta^2 \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$. Тогда $(-\theta^2)^{1/2}$ — голоморфная функция на Ω_Y , корректно определенная в силу условия $\text{Re}((-\theta^2)^{1/2}) > 0$, и мы можем рассмотреть голоморфное контактное преобразование χ из Ω_Y в Ω_X , задаваемое формулой

$$(7.2.11) \quad \chi: (w; \theta) \mapsto (z; \zeta) = (w + \theta/(-\theta^2)^{1/2}; \theta).$$

Пусть $Z = \{(z, w); (z - w)^2 = -1\}$. Рассмотрим лагранжевы многообразия

$$\Lambda^{\pm} = \{(z, w; \zeta, \theta); \zeta^2 \notin \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \zeta = -\theta, z = w \pm \zeta/(-\zeta^2)^{1/2}\}.$$

Тогда $(z; \zeta) = \chi(w; \theta) \Leftrightarrow (z, w; \zeta, -\theta) \in \Lambda^+ \text{ и } T_Z^*(X \times Y) \cap (\Omega_X \times \Omega_Y^{\circ}) = \Lambda^+ \sqcup \Lambda^-$. Положим $Z_+ = \{(z, w); \text{Im}((z - w)^2) = 0, \text{Re}((z - w)^2) < -1\}$, и пусть $K = A_{Z_+}$. Тогда

$$\text{SS}(K) = \{(z, w; \zeta, \theta); (z, w) \in \overline{Z}_+, \zeta = -\theta = k(z - w), k \in \mathbb{C}, \text{Re } k \geq 0, (1 + \text{Re}((z - w)^2)) \cdot \text{Re } k = 0\}.$$

Отсюда получаем

$$SS(K) \cap (\Omega_X \times T^*Y) = SS(K) \cap (T^*X \times \Omega_Y^a) = \Lambda^+.$$

(Заметим, что $SS(A_Z) \cap (\Omega_X \times T^*Y) = SS(A_Z) \cap (T^*X \times \Omega_Y^a) = \Lambda^+ \sqcup \Lambda^-$, а K изоморфен $A_Z[-1]$ в $\mathbf{D}^b(X \times Y; \Lambda_+)$.)

Таким образом, преобразование Φ_K определяет эквивалентность категорий

$$\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{D}^b(X; \Omega_X).$$

Определим вещественные подмногообразия $N = \{w \in Y; \operatorname{Im} w = 0\}$ и $M = \{z \in X; (\operatorname{Im} z)^2 = 1\}$. Вычислим $\Phi_K(A_N)$.

Для $z = x + \sqrt{-1}y$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$) мы имеем $\Phi_K(A_N)_z = R\Gamma_c(S_z; A_Y)$, где

$$S_z = \{w \in N; (z, w) \in Z_+\} = \{w \in \mathbb{R}^n; \langle x - w, y \rangle = 0, (x - w)^2 < y^2 - 1\}.$$

Поэтому $S_z = \emptyset$ при $y^2 \leq 1$, и S_z гомеоморфно $(n-1)$ -мерному открытому шару при $y^2 > 1$. Мы получаем, что

$$\Phi_K(A_N) \simeq A_{\{y^2 > 1\}}[1-n].$$

7.3. Микролокальная композиция ядер

Пусть X , Y и Z — три многообразия, и пусть p_X , p_Y и p_Z — точки в T^*X , T^*Y и T^*Z соответственно. Положим $x_0 = \pi_X(p_X)$, $y_0 = \pi_Y(p_Y)$ и $z_0 = \pi_Z(p_Z)$. Мы сохраняем те же обозначения p_{ij} , q_{ij} , p_{ij}^a и т. д., что и в § 7.1.

Пусть (K_1, K_2) — пара, состоящая из объекта K_1 из $\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a))$ и объекта K_2 из $\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a))$. Будем говорить, что пара (K_1, K_2) микролокально допускает композицию в точке (p_X, p_Y, p_Z) , если

$$(7.3.1) \quad \begin{cases} SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2) \cap \{p_X\} \times T^*Y \times \{p_Z^a\} \subset \{(p_X, p_Y, p_Z^a)\} \\ \text{в некоторой окрестности точки } (p_X, p_Y, p_Z^a). \end{cases}$$

Заметим, что если F принадлежит $\mathbf{D}^b(X; p)$, то корректно определен росток микронесителя $SS(F)$ в точке p . Из этого замечания вытекает, что формула (7.3.1) имеет смысл.

Предложение 7.3.1. Пусть $(K_1, K_2) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y)) \times \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$ — пара, микролокально допускающая композицию в точке (p_X, p_Y, p_Z) . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (i) " $\varprojlim$ " $K'_1 \circ K'_2$ принадлежит $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$, где $K'_1 \rightarrow K_1$ пробегает категорию изоморфизмов в точке (p_X, p_Y^a) , а $K'_2 \rightarrow K_2$ пробегает категорию изоморфизмов в точке (p_Y, p_Z^a) .

Кроме того, для любой окрестности W точки (p_X, p_Y, p_Z^a) в $T^*X \times T^*Y \times T^*Z$ мы имеем

$$(7.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{SS}(\varprojlim K'_1 \circ K'_2) \subset p_{13}^a \left(W \cap \left(\text{SS}(K_1) \times_{T^*Y} \text{SS}(K_2) \right) \right) \\ \text{в некоторой окрестности точки } (p_X, p_Z^a). \end{array} \right.$$

- (ii) Если, кроме того, пара (K_1, K_2) удовлетворяет условиям

$$(7.3.3) \quad \left(\text{SS}(K_1) \times_{T^*Y} \text{SS}(K_2) \right) \cap (\{p_X\} \times T_{y_0}^*Y \times \{p_Z^a\}) \subset \{(p_X, p_Y, p_Z^a)\},$$

$$(7.3.4) \quad (\text{SS}(K_1) \times_{T^*Y} \text{SS}(K_2)) \cap (\{(x_0; 0)\} \times T_{y_0}^*Y \times \{(z_0; 0)\}) = \emptyset,$$

то " $\varprojlim_V$ " $(K_1)_{X \times V} \circ K_2$ принадлежит $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$ и изоморфен " $\varprojlim$ " $K'_1 \circ K'_2$. Здесь V пробегает систему открытых окрестностей точки y_0 .

- (iii) Существуют морфизмы $K'_1 \rightarrow K_1$ и $K'_2 \rightarrow K_2$, такие, что в точках (p_X, p_Y^a) и (p_Y, p_Z^a) соответственно они являются изоморфизмами, а пара (K'_1, K'_2) удовлетворяет условиям (7.3.3) и (7.3.4).

- (iv) Если $p_X \in \dot{T}^*X$, то " $\varprojlim$ " $K'_1 \circ K_2$ принадлежит $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$ и изоморфен " $\varprojlim$ " $K'_1 \circ K'_2$.

Определение 7.3.2. Для пары $(K_1, K_2) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a))) \times \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$ рго-объект " $\varprojlim$ " $K'_1 \circ K'_2$ в категории $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$, описанный в предыдущем предложении, обозначается через $K_1 \circ_\mu K_2$ и называется микролокальной композицией ядер K_1 и K_2 .

Доказательство предложения 7.3.1 мы начнем со следующей леммы.

Лемма 7.3.3. В обозначениях предложения 7.3.1 предположим, что $p_X \in \dot{T}^*X$. Пусть S — такое замкнутое коническое подмножество в $T^*(Y \times Z)$, что

$$(7.3.5) \quad \begin{cases} SS(K_1) \times_{T^*Y} S \subset \{(p_X, p_Y, p_Z^a)\} \\ \text{в окрестности точки } (p_X, p_Y, p_Z^a). \end{cases}$$

Тогда существует такой морфизм $\varphi: K'_1 \rightarrow K_1$ в $\mathbf{D}^b(X \times Y)$, что φ — изоморфизм в точке (p_X, p_Z^a) , а K'_1 удовлетворяет условиям

$$(7.3.6) \quad SS(K'_1) \times_{T^*Y} S \cap (\{p_X\} \times T_{y_0}^*Y \times \{p_Z^a\}) \subset \{(p_X, p_Y, p_Z^a)\},$$

$$(7.3.7) \quad SS(K'_1) \cap ((T_X^*X)_{x_0} \times T_{y_0}^*Y) = \emptyset.$$

Доказательство. Возьмем такую компактную окрестность L точки p_Y в $T_{y_0}^*Y$, что $(SS(K_1) \times_{T^*Y} S) \cap (\{p_X\} \times L \times \{p_Z^a\}) \subset \{(p_X, p_Y, p_Z^a)\}$. Пусть G — образ множества $S \cap (T_{y_0}^*Y \times \{p_Z^a\})$ при отображении $p_1: T^*(Y \times Z) \rightarrow T^*Y$. Тогда

$$(7.3.8) \quad (\{p_X\} \times (G \cap L)^a) \cap SS(K_1) \subset \{(p_X, p_Y^a)\}.$$

Возьмем собственный замкнутый выпуклый конус γ в $T_{(x_0, y_0)}^*(X \times Y)$, такой, что

$$(7.3.9) \quad (\{p_X\} \times T_{y_0}^*Y) \cap \text{Int } \gamma \subset \{p_X\} \times L^a \text{ и } (p_X, p_Y^a) \in \text{Int } \gamma,$$

$$(7.3.10) \quad \gamma \cap (\{(x_0; 0)\} \times T_{y_0}^*Y) = \emptyset.$$

Здесь $(x_0; 0)$ — начало координат в $T_{x_0}^*X$.

Затем возьмем такое коническое открытое множество U , что

$$\text{Int } \gamma \supset U \ni (p_X, p_Y^a).$$

Теперь, применяя уточненную микролокальную лемму о срезке (предложение 6.1.4), мы получаем такой морфизм $\varphi: K'_1 \rightarrow K_1$, что

$$(7.3.11) \quad \varphi \text{ — изоморфизм на } U,$$

$$(7.3.12) \quad SS(K'_1) \subset U \cup (\gamma \setminus (\{p_X\} \times G^a)).$$

Тогда φ обладает требуемыми свойствами. □

Доказательство предложения 7.3.1. Прежде всего покажем, что из (7.3.1), (7.3.3) и (7.3.4) вытекает, что

$$(7.3.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2) \right) \cap (\{p_X\} \times T^*Y \times \{p_Z^a\}) \\ \subset \{(p_X, p_Y, p_Z^a)\} \text{ в окрестности точки } (x_0, y_0, z_0). \end{array} \right.$$

Если (7.3.13) не выполнено, то существует такая последовательность $\{(y_n; \eta_n)\} \subset T^*Y \setminus \{p_Y\}$, что $y_n \xrightarrow{n} y$, $(p_X, (y_n; -\eta_n)) \in SS(K_1)$, $((y_n; \eta_n), p_Z^a) \in SS(K_2)$. Если $\{\eta_n\}$ ограничена, то $\{(y_n, \eta_n)\}$ сходится к p_Y в силу (7.3.3), что противоречит (7.3.1). Если $\{\eta_n\}$ — неограниченная последовательность, то мы можем предположить, что $\eta_n/|\eta_n|$ сходится к $\eta \neq 0$. Тогда $((x_0; 0), (y_0; -\eta)) \in SS(K_1)$ и $((y_0, \eta), (z_0; 0)) \in SS(K_2)$, что противоречит (7.3.4).

Теперь мы в несколько шагов докажем предложение.

(а) Предположим сначала, что $p_X \in T^*X$. Тогда (iii) следует из леммы 7.3.3. Кроме того, при доказательстве (i), (ii) и (iv) мы можем в силу той же леммы предположить, что пара (K_1, K_2) удовлетворяет (7.3.3) и (7.3.4).

В силу (7.3.4) $SS(q_{12}^{-1}K_1) \cap SS(q_{23}^{-1}K_2)^a \subset T_{X \times Y \times Z}^*(X \times Y \times Z)$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) . Поэтому в силу предложения 5.4.14 $G = q_{12}^{-1}K_1 \otimes^L q_{23}^{-1}K_2$ удовлетворяет условию

$$(7.3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} SS(G) \subset S = SS(K_1) \times T_Z^*Z + T_X^*X \times SS(K_2) \\ \text{в окрестности точки } (x_0, y_0, z_0). \end{array} \right.$$

Поскольку $({}^tq'_{13})^{-1}(S)$ изоморфно образу произведения $SS(K_1) \times_{T^*Y} SS(K_2)$ в $T^*X \times Y \times T^*Z$, из (7.3.13) и (7.3.14) вытекает, что

$$(7.3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} ({}^tq'_{13})^{-1}(SS(G)) \cap q_{13\pi}^{-1}(\{p_X, p_Z^a\}) \subset \{(p_X, y_0, p_Z^a)\} \\ \text{в окрестности точки } (p_X, y_0, p_Z^a). \end{array} \right.$$

Таким образом, мы можем применить предложение 6.1.10 и заключить, что $\varinjlim_v Rq_{13*}(G_{X \times v \times Y}) = \varinjlim_v (K_1)_{X \times v} \circ K_2$ принадле-

жит $D^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$. Пусть теперь $K'_1 \rightarrow K_1$ и $K'_2 \rightarrow K_2$ — изоморфизмы в точках (p_X, p_Y^a) и (p_Y, p_Z^a) соответственно. Существует такой изоморфизм $K''_1 \rightarrow K'_1$ в точке (p_X, p_Y^a) , что (K''_1, K'_2) и (K'_1, K_2) удовлетворяют условиям (7.3.3) и (7.3.4). Тогда $q_{12}^{-1}K''_1 \otimes^L q_{23}^{-1}K'_2 \rightarrow q_{12}^{-1}K''_1 \otimes^L q_{23}^{-1}K_2 \rightarrow q_{12}^{-1}K_1 \otimes^L q_{23}^{-1}K_2$ — изоморфизмы в точке

(p_X, y_0, p_Z^a) в силу предложения 5.4.14. Поэтому в силу предложения 6.1.10

$$(7.3.16) \quad \varprojlim_V (K_1'')_{X \times V} \circ K_2' \xrightarrow{\sim} \varprojlim_V (K_1)_{X \times V} \circ K_2.$$

Переходя к «проективному пределу» по K_1'' , мы получаем

$$(7.3.17) \quad \varprojlim_{K_1'} K_1' \circ K_2' \xrightarrow{\sim} \varprojlim_V (K_1)_{X \times V} \circ K_2.$$

Полагая $K_2' = K_2$, получаем

$$\varprojlim_{K_1'} K_1' \circ K_2 \xrightarrow{\sim} \varprojlim_V (K_1)_{X \times V} \circ K_2,$$

а переходя к «проективному пределу» по K_2' в (7.3.17), получаем $\varprojlim_{K_1', K_2'} K_1' \circ K_2' \xrightarrow{\sim} \varprojlim_V (K_1)_{X \times V} \circ K_2$.

(b) $p_Z \in \dot{T}^*Z$. Доказательство аналогично доказательству шага (a).

(c) Предположим, что $p_X \in T_X^*X, p_Z \in T_Z^*Z$ и $p_Y \in \dot{T}^*Y$. Поскольку $(p_X, tp_Y, p_Z^a) \notin \text{SS}(K_1) \times_{T^*Y} \text{SS}(K_2)$ при $t > 0$, мы имеем либо $(p_X, p_Y^a) \notin \text{SS}(K_1)$, либо $(p_Y, p_Z^a) \notin \text{SS}(K_2)$, откуда вытекают требуемые результаты.

(d) $(p_X, p_Y, p_Z) \in T_X^*X \times T_Y^*Y \times T_Z^*Z$. Поскольку $\text{supp}(K_1) \times_Y \text{supp}(K_2) \cap \{x_0\} \times Y \times \{z_0\} \subset \{(x_0, y_0, z_0)\}$ в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) , пара (K_1, K_2) удовлетворяет условиям (7.3.3) и (7.3.4) и $\varprojlim_{K_1', K_2'} K_1' \circ K_2'$

$K_2' \xrightarrow{\sim} \varprojlim_V (K_1)_{X \times V} \circ K_2$ принадлежит $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$. $\square$

Предложение 7.3.4. Пусть q_1' и q_2' — проекции из $(X \times Z) \times (Y \times Z)$ соответственно на $X \times Z$ и на $Y \times Z$, и пусть i — диагональное вложение $X \times Y \times Z \hookrightarrow (X \times Z) \times (Y \times Z)$. Пусть $(K_1, K_2) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a))) \times \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$ — пара, микролокально допускающая композицию в точке (p_X, p_Y, p_Z) . Тогда $(i_*(K_1 \boxtimes A_Z), K_2) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Z \times Y \times Z; (p_X, p_Z^a, p_Y^a, p_Z))) \times \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z \times \{pt\}; (p_Y, p_Z^a, pt)))$ микролокально допускает композицию в точке $((p_X, p_Z^a), (p_Y, p_Z^a), pt)$ и

$$K_1 \circ_\mu K_2 \simeq i_*(K_1 \boxtimes A_Z) \circ_\mu K_2.$$

Доказательство проводится непосредственно.

Предложение 7.3.5. Пусть X, Y, Z и W — четыре многообразия, $p_X \in T^*X$, $p_Y \in T^*Y$, $p_Z \in T^*Z$, $p_W \in T^*W$. Пусть $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a)))$, $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$, $K_3 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Z \times W; (p_Z, p_W^a)))$. Предположим, что

$$(7.3.18) \quad \begin{cases} \text{SS}(K_1) \times_{T^*Y} \text{SS}(K_2) \times_{T^*Z} \text{SS}(K_3) \\ = \{(p_X, p_Y^a), (p_Y, p_Z^a), (p_Z, p_W^a)\} \\ \text{в окрестности этой точки.} \end{cases}$$

Тогда $(K_1, K_2), (K_2, K_3), (K_1 \circ_\mu K_2, K_3)$ и $(K_1, K_2 \circ_\mu K_3)$ микролокально допускают композицию и

$$(7.3.19) \quad \left(K_1 \circ_\mu K_2 \right) \circ_\mu K_3 \simeq K_1 \circ_\mu \left(K_2 \circ_\mu K_3 \right) \text{ в } \mathbf{D}^b(X \times W; (p_X, p_W^a)).$$

Доказательство проводится непосредственно.

Предложение 7.3.6. Пусть X, Y, Z, X', Y', Z' — шесть многообразий и $p_W \in T^*W$ ($W = X, Y, Z, X', Y', Z'$).

Пусть $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a)))$, $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$, $K'_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X' \times Y'; (p_{X'}, p_{Y'}^a)))$ и $K'_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y' \times Z'; (p_{Y'}, p_{Z'}^a)))$. Предположим, что пары (K_1, K_2) и (K'_1, K'_2) микролокально допускают композицию. Тогда пара $(K_1 \boxtimes^L K'_1, K_2 \boxtimes^L K'_2)$ микролокально допускает композицию и

$$(7.3.20) \quad \left(K_1 \boxtimes^L K'_1 \right) \circ_\mu \left(K_2 \boxtimes^L K'_2 \right) \simeq \left(K_1 \circ_\mu K_2 \right) \boxtimes^L \left(K'_1 \circ_\mu K'_2 \right).$$

Доказательство проводится непосредственно.

В заключение этого параграфа мы определим класс ядер, микролокально допускающих композицию с любыми ядрами.

Определение 7.3.7. Обозначим через $\mathbf{N}(X, Y; p_X, p_Y)$ полную триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a))$, состоящую из таких объектов K , что

$$(7.3.21) \quad \begin{cases} \text{SS}(K) \cap (\{p_X\} \times T^*Y) \subset \{(p_X, p_Y^a)\} \\ \text{в окрестности точки } (p_X, p_Y^a). \end{cases}$$

Легко убедиться, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 7.3.8. Для любых $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(X, Y; p_X, p_Y))$ и $L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$ пара (K, L) микролокально допускает композицию в точке (p_X, p_Y, p_Z) , и микролокальная композиция ядер индуцирует функторы

$$(7.3.22) \quad \begin{aligned} \cdot \circ_{\mu} \cdot : \mathbf{N}(X, Y; p_X, p_Y) \times \mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)) \\ \rightarrow \mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a)), \end{aligned}$$

$$(7.3.23) \quad \cdot \circ_{\mu} \cdot : \mathbf{N}(X, Y; p_X, p_Y) \times \mathbf{N}(Y, Z; p_Y, p_Z) \rightarrow \mathbf{N}(X, Z; p_X, p_Z).$$

7.4. Интегральные преобразования в пучках, ассоциированных с подмногообразиями

Мы начнем с элементарного результата из дифференциальной геометрии. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а N (соответственно M) — замкнутое подмногообразие в Y (соответственно в X). Мы предполагаем, что отображение f гладкое, и отождествляем $Y \times_X T^*X$ с замкнутым инволютивным подмногообразием в T^*Y . Положим

$$(7.4.1) \quad V = Y \times_X \dot{T}^*X, \quad \Lambda = \dot{T}_N^*Y.$$

Пусть $p \in \Lambda \cap V$. Будем считать, что

$$(7.4.2) \quad \text{пересечение } \Lambda \cap V \text{ является чистым в точке } p.$$

Вспомним отображения f' и f_{π} , действующие из $Y \times_X T^*X$ в T^*Y и T^*X соответственно. В силу (7.4.2) отображение $f_{\pi}|_{\Lambda \cap V}: \Lambda \cap V \rightarrow T^*X$ имеет постоянный ранг (см. упр. П.5), и для достаточно малой окрестности W точки p образ $f_{\pi}(W \cap \Lambda \cap V)$ есть лагранжево многообразие. Мы будем предполагать, что существует такое подмногообразие M в X , что

$$(7.4.3) \quad f_{\pi}(W \cap \Lambda \cap V) = T_M^*X \text{ в окрестности точки } f_{\pi}(p).$$

Мы полагаем $y_0 = \pi_Y(p)$, $x_0 = \pi_X(f_{\pi}(p))$ и $\lambda_0(p) = T_p \pi_Y^{-1}(y_0)$.

Предложение 7.4.1. В описанной выше ситуации (f гладкое, выполнены условия (7.4.2) и (7.4.3)) предположим дополнительно, что N — гиперповерхность в Y . Тогда существуют локальные системы координат $(x) = (x_1, x', x'')$ на X и (x, t, u) на Y вблизи точек x_0 и y_0 соответственно, такие, что $p = (0; dx_1)$, $f(x, t, u) = x$, $M = \{x \in X; x_1 = x' = 0\}$, $N = \{(x, t, u) \in Y; x_1 = q(t) + \langle x', u \rangle\}$, где $q(t)$ — квадратичная форма, а $x_1 \in \mathbb{R}$, $x', u \in \mathbb{R}^r$, $t \in \mathbb{R}^n$, $x'' \in \mathbb{R}^m$ для некоторых $r, n, m \in \mathbb{N}$. Кроме того, если предположение (7.4.2) заменить на

(7.4.4) пересечение $\Lambda \cap V$ трансверсально в точке p ,
то квадратичная форма $q(t)$ невырождена.

Доказательство. Кора́нг проекции $\Lambda \cap V \rightarrow Y$ в точке p равен

$$\dim(\lambda_0(p) \cap T_p(V \cap \Lambda)) = \dim(\lambda_0(p) \cap T_p V \cap T_p \Lambda) = 1.$$

Поскольку эта же формула верна и в некоторой окрестности точки p в $V \cap \Lambda$, множество $\pi_Y(\Lambda \cap V)$ есть гладкое подмногообразие L в Y . Более того, $L \simeq (\Lambda \cap V)/\mathbb{R}^+$. (Заметим, что L является дискриминантным множеством отображения $f|_N : N \rightarrow X$.) Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \dot{T}_N^* Y & \longleftarrow & \Lambda \cap V & \xrightarrow{\quad f_L \quad} & \dot{T}_M^* X \\ \downarrow & \square & \downarrow & & \downarrow \\ N & \longleftarrow & L & \xrightarrow{\quad f_L \quad} & M \end{array}$$

где $f_L = f|_L$, $\tilde{f}_L = f_\pi|_{\Lambda \cap Y}$.

Выберем координаты (x_1, x', x'') на X таким образом, что $M = \{x_1 = x' = 0\}$ и $x_0 = 0$, $f_\pi(p) = dx_1$. Пусть $(x_1, x', x''; \xi_1, \xi', \xi'')$ — соответствующие координаты на $\dot{T}^* X$, причем $\xi_1 \neq 0$. Поскольку $L \simeq (\Lambda \cap V)/\mathbb{R}^+$ и $\tilde{f}_L$ — гладкое отображение, имеем $u = \xi'/\xi_1 \circ \tilde{f}_L$, и $x'' \circ f_L$ задает координаты на L . Мы пишем x'' вместо $x'' \circ f_L$. Затем мы дополняем координаты (x'', u) на L до координатной системы (x'', u, t'') на L , которую мы продолжаем на Y (заметим, что если пересечение $\Lambda \cap V$ трансверсально, то $\tilde{f}_L$ — изоморфизм и (x'', u) — система координат на L). Итак, мы имеем координаты (x_1, x', x'', t'', u) на Y , которые дополняем переменной t' , обращающейся в нуль на L . Положим $t = (t', t'')$. Тогда

$$f(x_1, x', x'', t', t'', u) = (x_1, x', x''),$$

$$L = \{x_1 = x' = t' = 0\},$$

$$N = \{x_1 = g(x', x'', t', t'', u)\} \text{ для некоторой функции } g.$$

Поскольку $\partial_{x'} g = \xi' / \xi_1$ на L , мы можем записать

$$g = \langle x', u \rangle + h(x', x'', t', t'', u),$$

где

$$(7.4.5) \quad \partial_{x'} h = 0 \quad \text{на} \quad \{x' = t' = 0\}.$$

Из включения $L \subset N$ следует, что

$$(7.4.6) \quad h = 0 \quad \text{на} \quad \{x' = t' = 0\},$$

а из включения $T_N^* Y \times_N L \subset V$ — что

$$(7.4.7) \quad \partial_{t'} h = 0 \quad \text{на} \quad \{x' = t' = 0\}.$$

Предположим временно, что

$$(7.4.8) \quad \partial_{t', t''}^2 h(0) \quad \text{невыврожденна.}$$

Тогда по лемме Морса (см. [Hörmander 4, т. 3, приложение C]), заменяя $t' = (t_1, \dots, t_r)$ другими координатами, мы можем написать

$$h(0, x'', t', t'', u) = \sum_{j=1}^r \pm t_j^2$$

и получаем

$$h(x', x'', t', t'', u) = q(t') + \langle x', \varphi(x', x'', t', t'', u) \rangle,$$

где $q(t')$ — невырожденная квадратичная форма (по отношению к переменной t'). В силу (7.4.5) $\varphi(0, x'', 0, t'', u) = 0$. Заменяя u на $u - \varphi$, получаем требуемый результат.

Наконец, докажем (7.4.8). Пусть $(x, t, u; \xi, \tau, v)$ — координаты на $T^* Y$, причем $\xi = (\xi_1, \xi', \xi'')$, $\tau = (\tau', \tau'')$. Мы имеем

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{x_1 = \langle x', u \rangle + h, -\xi' / \xi_1 = u + \partial_{x'} h, -\xi'' / \xi_1 = \partial_{x''} h, \\ &\quad -\tau / \xi_1 = \partial_1 h, -v / \xi_1 = x' + \partial_u h\}, \\ V &= \{\tau = v = 0\}. \end{aligned}$$

В силу (7.4.5)–(7.4.7) получаем, что

$$\begin{aligned} T_p \Lambda &= \{x_1 = 0, -\xi' = u + \partial_{x', x''}^2 h(0) \cdot x' + \partial_{x', t'}^2 h(0) \cdot t', \\ &\quad -\tau' = \partial_{t', t''}^2 h(0) \cdot t' + \partial_{t', x''}^2 h(0) \cdot x', \xi'' = \tau'' = 0, -v = x'\}, \\ T_p V &= \{\tau = v = 0\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$T_p \Lambda \cap T_p V = \{x_1 = x' = \tau = v = \xi'' = 0, \\ -\xi' = u + \partial_{x', t'}^2 h(0) \cdot t', 0 = \partial_{x', h}^2(0) \cdot t'\}.$$

Поскольку образ множества $T_p \Lambda \cap T_p V$ при отображении $T_p(T^*Y) \rightarrow T_{y_0}Y$ содержится в $T_{y_0}L$, мы имеем $(x, t, u; \xi, \tau, v) \in T_p \Lambda \cap T_p V \implies t' = 0$. Итак, $\partial_{x', h}^2(0)$ невырождена, что и завершает доказательство. $\square$

Мы сохраним системы координат, доставляемые предложением 7.4.1, и положим

$$(7.4.9) \quad N^+ = \{(x, t, u); x_1 \geq q(t) + \langle x', u \rangle\}.$$

Пусть n_+ (соответственно n_-) — число положительных (соответственно отрицательных) собственных значений формы $q(t)$. Определим число n_0 с помощью соотношения

$$(7.4.10) \quad n_+ + n_0 + n_- = \dim Y/X - \operatorname{codim} M + 1.$$

Другими словами, n_0 — размерность вполне изотропного пространства формы q ; в частности, $n_0 = 0$, если q невырождена.

Предложение 7.4.2. В предположениях предложения 7.4.1 пусть $L \in \operatorname{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$. Тогда

(i) в категории про-объектов категории $\mathbf{D}^b(X)$ имеется морфизм

$$\varprojlim_U Rf_!(L_{N^+ \cap U}) \rightarrow L_M[\delta],$$

где $\delta = 1 - \operatorname{codim} M - (n_0 + n_-) = n_+ - \dim Y/X$; здесь U пробегает семейство открытых окрестностей точки y_0 ;

(ii) $f_!^u L_{N^+} \simeq \varprojlim_U Rf_!(L_{N^+ \cap U})$ существует в $\mathbf{D}^b(X; f_\pi(p))$, и описанный в п. (i) морфизм является в этой категории изоморфизмом (ср. определение 6.1.7 и предложение 6.1.10).

Заметим, что (i) и (ii) вытекают из следующих двух утверждений, которые мы собираемся доказать.

- (a) Для открытой окрестности U точки y_0 имеется морфизм $Rf_!(L_{N^+ \cap U}) \rightarrow L_M[\delta]$ в категории $\mathbf{D}^b(X)$.
- (b) Существует система открытых окрестностей точки y_0 в U , такая, что для любой окрестности U' из этой системы морфизм $Rf_!(L_{N^+ \cap U'}) \rightarrow L_M[\delta]$ является изоморфизмом в категории $\mathbf{D}^b(X; f_\pi(p))$.

Заметим также, что " $\varprojlim$ " $Rf_!(L_{N+\cap U})$ не существует в $\mathbf{D}^b(X)$.

Доказательство. Мы разделим координаты (t) на группы $(t) = (s', s'', t')$ таким образом, что

$$q(t) = s'^2 - s''^2,$$

и разложим отображение f в композицию

$$f: Y \xrightarrow{f_1} Y_1 \xrightarrow{f_2} Y_2 \xrightarrow{f_3} Y_3 \xrightarrow{f_4} X,$$

где $f_1(x, s', s'', t', u) = (x, s', t', u)$, $f_2(x, s', t', u) = (x, t', u)$, $f_3(x, t', u) = (x, u)$ и $f_4(x, u) = (x)$.

Пусть $\eta > 0$ и $\varepsilon > 0$, причем $\eta \ll \varepsilon$. Положим

$$U_0 = \{(x, s', s'', t', u); |x| < \eta, |t'| < \varepsilon, |u| < \varepsilon, s'^2 < \varepsilon, s''^2 < \varepsilon\}.$$

(а) Вычислим $Rf_{1!}L_{N+\cap U_0}$. Для $|x| < \eta, |t''| < \varepsilon, |u| < \varepsilon, s'^2 < \varepsilon$ мы имеем

$$f_1^{-1}(x, s', t', u) \cap N_+ \cap U_0 = \{s''; \langle x', u \rangle + s'^2 - x_1 \leq s''^2 < \varepsilon\}.$$

Это множество пусто при $\langle x', u \rangle + s'^2 - x_1 \geq \varepsilon$, является открытым шаром при $\langle x', u \rangle + s'^2 - x_1 \leq 0$ и гомеоморфно множеству

$$S_a^b = \{a \leq s''^2 < b\} \quad \text{при} \quad 0 < \langle x', u \rangle + s'^2 - x_1 < \varepsilon.$$

(с $0 < a < b$). Поскольку $R\Gamma_c(S_a^b; L_{\mathbb{R}^n-}) = 0$, мы получаем

$$Rf_{1!}L_{N+\cap U_0} \simeq L_{N_1^+ \cap U_1}[-n-],$$

где $U_1 = \{|x| < \eta, |t'| < \varepsilon, |u| < \varepsilon, s'^2 < \varepsilon\}$ и $N_1^+ = \{x_1 \geq s'^2 + \langle x', u \rangle\}$.

(б) Вычислим $Rf_{2!}L_{N_1^+ \cap U_1}$. Для $|x| < \eta, |t'| < \varepsilon, |u| < \varepsilon$ мы имеем

$$f_2^{-1}(x, t', u) \cap N_1^+ \cap U_1 = \{s'; s'^2 < \varepsilon, s'^2 \leq x_1 - \langle x', u \rangle\}.$$

При $0 \leq x_1 - \langle x', u \rangle < \varepsilon$ это множество есть замкнутый шар или $\{0\}$. При $x_1 - \langle x', u \rangle < 0$ это множество пусто. Поскольку $|x| < \eta$ и $\eta \ll \varepsilon$, нет необходимости рассматривать случай $x_1 - \langle x', u \rangle \geq \varepsilon$. Поэтому

$$Rf_{2!}L_{N_1^+ \cap U_1} \simeq L_{N_2^+ \cap U_2},$$

где $U_2 = \{|x| < \eta, |t'| < \varepsilon, |u| < \varepsilon\}$ и $N_2^+ = \{x_1 \geq \langle x', u \rangle\}$.

(с) Вычислим $Rf_{3!}L_{N_2^+ \cap U_2}$. Мы немедленно получаем

$$Rf_{3!}L_{N_2^+ \cap U_2} = L_{N_3^+ \cap U_3}[-n_0],$$

где $U_3 = \{|x| < \eta, |u| < \varepsilon\}$ и $N_3^+ = \{x_1 \geq \langle x', u \rangle\}$.

(d) Наконец, вычислим $Rf_{4!}L_{N_3^+ \cap U_3}$. Рассмотрим выделенный треугольник

$$L_{\{|u| < \varepsilon, \langle x', u \rangle > x_1\}} \rightarrow L_{\{|u| < \varepsilon\}} \rightarrow L_{\{|u| < \varepsilon, \langle x', u \rangle \leq x_1\}} \xrightarrow{+1}.$$

Множество $\{u; |u| < \varepsilon, \langle x', u \rangle > x_1\}$ пусто при $x_1 \geq \varepsilon|x'|$, а в противном случае является непустым выпуклым открытым множеством.

Поэтому $(Rf_{4!}(L_{N_3^+ \cap U_3}))_x$ изоморфен $(Rf_{4!}L_{U_3})_x$ при $x_1 \geq \varepsilon|x'|$ и равен нулю в противном случае:

$$\begin{aligned} Rf_{4!}L_{N_3^+ \cap U_3} &\simeq (Rf_{4!}L_{\{|u| < \varepsilon\}})_{\{x_1 \geq \varepsilon|x'|\}} \cap U_4 \\ &\simeq L_{N_4^+ \cap U_4}[-r], \end{aligned}$$

где $U_4 = \{|x| < \eta\}$, $N_4^+ = \{x_1 \geq \varepsilon|x'|\}$, а r — размерность пространства переменных u , т. е. $r = \text{codim } M - 1$.

(е) Мы получили

$$Rf_!L_{N^+ \cap U_0} \simeq L_{N_4^+ \cap U_4}[\delta],$$

где $\delta = 1 - \text{codim } M - n_0 - n_-$, а U_0, U_4 и N_4^+ определены выше. Для завершения доказательства осталось заметить, что естественный морфизм $L_{\{x_1 \geq \varepsilon|x'|\}} \rightarrow L_M$ является изоморфизмом в категории $D^b(X; f_\pi(p))$. (Напомним, что $f_\pi(p) = (0; dx_1)$.) $\square$

Сдвиг, фигурирующий в предложении 7.4.2, можно интерпретировать с использованием индекса инерции, свойства которого излагаются в приложении.

Введем некоторые обозначения. В ситуации предложения 7.4.1 мы положим

$$(7.4.11) \quad \begin{cases} E_p = T_p T^* Y, & \lambda_N(p) = T_p T_N^* Y, \\ \lambda_0(p) = T_p \pi_Y^{-1} \pi_Y(p), & \lambda_1(p) = T_p f_\pi^{-1} \pi_X^{-1} \pi_X(f_\pi(p)). \end{cases}$$

Предложение 7.4.3. В ситуации предложения 7.4.2 мы имеем

$$\begin{aligned} 1 - \text{codim } M - (n_0 + n_-) \\ = \frac{1}{2}[1 + \dim M - \dim Y - \dim((T_p V)^\perp \cap \lambda_N(p)) - \tau], \end{aligned}$$

где $\tau = \tau_{E_p}(\lambda_0(p), \lambda_N(p), \lambda_1(p))$.

(Напомним, что $\tau_{E_p}(\cdot, \cdot, \cdot)$ — индекс инерции трех линейных лагранжевых подпространств в симплектическом векторном пространстве E_p .)

Доказательство. Мы используем доставляемые предложением 7.4.1 координатные системы (x, t, u) на Y и (x) на X , так что $f(x, t, u) = x$, $M = \{x_1 = x' = 0\}$, $N = \{x_1 = \langle x', u \rangle + q(t)\}$, где $q(t) = \frac{1}{2} \langle At, t \rangle$ с некоторой симметрической матрицей A . Через $(x, t, u'; \xi, \tau, v)$ обозначим соответствующие координаты на T^*Y .

Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_0(p) &= \{x = t = u = 0\}, \\ \lambda_N(p) &= \{x_1 = \xi'' = 0, \xi' = -u, \tau = -At, v = -x'\}, \\ \lambda_1(p) &= \{x = \tau = v = 0\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим изотропное подпространство ρ в E_p , определенное соотношением $\rho = \{x = 0\}^\perp$. Мы можем отождествить E_p^ρ с пространством переменных $(t, u; \tau, v)$. Поскольку $\rho^\perp \supset \lambda_0(p) + \lambda_1(p)$, по теореме П.3.2

$$\tau = \tau_{E_p^\rho}(\{t = u = 0\}, \{v = 0, \tau = -At\}, \{\tau = v = 0\}).$$

Рассмотрим изотропное пространство $\{v = 0\}^\perp$. Имеем

$$\tau = \tau(\{t = 0\}, \{\tau = -At\}, \{\tau = 0\}),$$

где индекс инерции вычисляется теперь в пространстве переменных (t, τ) . В силу предложения П.3.6 получаем

$$(7.4.12) \quad \tau = -\operatorname{sgn}(A),$$

где $\operatorname{sgn}(A) = n_+ - n_-$ — разность числа положительных собственных значений и числа отрицательных собственных значений формы q .

С другой стороны,

$$n_0 = \dim(T_p V^\perp \cap \lambda_N(p)).$$

Записывая $n_0 + n_- = \frac{1}{2}(n_0 + n_- + n_+ + n_0 - (n_+ - n_-))$, из (7.4.10) мы получаем, что

$$\begin{aligned}1 - \operatorname{codim} M - \frac{1}{2}[\dim Y/X - \operatorname{codim} M + 1 + \dim(T_p V^\perp \cap \lambda_N(p)) + \tau] \\ = \frac{1}{2}[1 - \operatorname{codim} M - \dim Y/X - \dim(T_p V^\perp \cap \lambda_N(p)) - \tau],\end{aligned}$$

а это и есть требуемый результат. $\square$

Применим предшествующие результаты для того, чтобы получать композиции ядер, связанных с гиперповерхностями. Прежде всего нам потребуется элементарная лемма.

Пусть $\Lambda_1 \subset T^*(X \times Y)$ и $\Lambda_2 \subset T^*(Y \times Z)$ — два (конических) лагранжевых подмногообразия, и пусть $(p_X, p_Y^a) \in \Lambda_1$ и $(p_Y, p_Z^a) \in \Lambda_2$. Предположим, что

$$(7.4.13) \quad p_2^a|_{\Lambda_1}: \Lambda_1 \rightarrow T^*Y \text{ и } p_1|_{\Lambda_2}: \Lambda_2 \rightarrow T^*Y \text{ трансверсальны.}$$

Как и в § 7.1, $T^*(X \times Y) \times_{T^*Y} T^*(Y \times Z)$ обозначает расслоенное произведение расслоений $p_2^a: T^*(X \times Y) \rightarrow T^*Y$ и $p_1: T^*(Y \times Z) \rightarrow T^*Y$.

Лемма 7.4.4. Предположим, что выполнено (7.4.13). Тогда $\Lambda_1 \times_{T^*Y} \Lambda_2$ — гладкое подмногообразие в $T^*(X \times Y) \times_{T^*Y} T^*(Y \times Z)$. Кроме того, заменяя Λ_1 и Λ_2 на $\Lambda_1 \cap U$ и $\Lambda_2 \cap V$, где U и V — достаточно малые открытые окрестности точек (p_X, p_Y^a) и (p_Y, p_Z^a) соответственно, мы получаем, что

- (i) p_{13} индуцирует изоморфизм многообразия $\Lambda_1 \times_{T^*Y} \Lambda_2$ на некоторое гладкое лагранжево подмногообразие Λ в $T^*(X \times Z)$;
- (ii) если обозначить через δ диагональное вложение $X \times Y \times Z \hookrightarrow X \times Y \times Y \times Z$, то δ_π трансверсально к $\Lambda_1 \times \Lambda_2$, а $\Lambda_{12} = \delta'_\pi \delta_\pi^{-1}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$ — лагранжево подмногообразие в $T^*(X \times Y \times Z)$. Кроме того, q'_{13} трансверсально к Λ_{12} , а $q_{13\pi} q'_{13}^{-1}(\Lambda_{12}) = \Lambda$.

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что $\Lambda_1 \times_{T^*Y} \Lambda_2$ — гладкое подмногообразие в $T^*(X \times Y \times Z)$, размерность которого равна $\dim(X \times Y) + \dim(Y \times Z) - \dim T^*Y = \dim(X \times Z)$.

(i) Мы полагаем

$$(7.4.14) \quad \begin{cases} E_X = T_{p_X} T^*X, & E_Y = T_{p_Y} T^*Y, & E_Z = T_{p_Z} T^*Z, \\ \lambda_1 = T_{(p_X, p_Y^a)} \Lambda_1, & \lambda_2 = T_{(p_Y, p_Z^a)} \Lambda_2. \end{cases}$$

Если E — симплектическое векторное пространство, то через E^a мы обозначаем пространство E , оснащенное той же кососимметрической формой с обратным знаком.

Через α обозначим отображение из E в E^a , задаваемое формулой $x \mapsto x$. Тогда $E_Y^a \simeq T_{p_Y^a}(T^*Y)$ и $E_Z^a \simeq T_{p_Z^a}(T^*Z)$ (изоморфизмы задаются с помощью α^*), и мы по-прежнему обозначаем через λ_1 и λ_2 лагранжевы плоскости в $E_X \oplus E_Y^a$ и $E_Y \oplus E_Z^a$, переходящие в λ_1 и λ_2 при изоморфизмах $T_{(p_X, p_Y^a)} T^*(X \times Y) \simeq E_X \oplus E_Y^a$ и $T_{(p_Y, p_Z^a)} T^*(Y \times Z) \simeq E_Y \oplus E_Z^a$ соответственно.

Тогда в соответствии с предложением П.1.4 мы имеем

$$\lambda_1 \circ \lambda_2 = p_{13} \left(\lambda_1 \times_{E_Y} \lambda_2 \right),$$

где p_{13} — проекция из $(E_X \oplus E_Y^a) \times_{E_Y} (E_Y \oplus E_Z^a)$ на $E_X \oplus E_Z^a$.

Поскольку $\lambda_1 \circ \lambda_2$ — лагранжево подпространство в $E_X \oplus E_Z^a$, а $\dim(\lambda_1 \times_{E_Y} \lambda_2) = \dim \lambda_1 + \dim \lambda_2 - \dim E_Y = \dim(X \times Z) = \dim \lambda_1 \circ \lambda_2$, мы видим, что $p_{13}: \Lambda_1 \times_{T^*Y} \Lambda_2 \rightarrow T^*(X \times Z)$ — вложение, а $p_{13}(\Lambda_1 \times_{T^*Y} \Lambda_2)$ — лагранжево многообразие.

(ii) Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \delta_\pi: T_{(p_X, p_Y^a, p_Z^a)} \left(X \times Y \times Z \times_{X \times Y \times Y \times Z} T^*(X \times Y \times Y \times Z) \right) \\ \hookrightarrow T_{(p_X, p_Y^a, p_Y, p_Z^a)}(X \times Y \times Y \times Z) \end{aligned}$$

транскверсально к $\lambda_1 \times \lambda_2 \simeq T_{(p_X, p_Y^a, p_Z^a)}(\Lambda_1 \times \Lambda_2)$, а

$${}^i q'_{13}: T_{(y_0, p_X, p_Z^a)}(Y \times T^*(X \times Z)) \hookrightarrow T_{(p_X, y_0, p_Z^a)}T^*(X \times Y \times Z)$$

транскверсально к $\text{Im}(\delta_\pi^{-1}(\lambda_1 \times \lambda_2)) \xrightarrow{{}^i \delta} T_{(p_X, y_0, p_Z^a)}T^*(X \times Y \times Z)$, где $y_0 = \pi(p_Y) \in T_Y^*Y$. Пусть теперь $\rho' \subset \rho \subset T_{(p_Y^a, p_Y)}(T^*(Y \times Y))$ — изотропные подпространства, определенные формулами

$$\rho'^\perp = T_{(p_Y^a, p_Y)}(Y \times_{Y \times Y} T^*(Y \times Y)) \text{ и } \rho = T_{(p_Y^a, p_Y)}(T_Y^*(Y \times Y)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} T_{(p_X, p_Y^a, p_Y, p_Z^a)} \left(X \times Y \times Z \times_{X \times Y \times Y \times Z} T^*(X \times Y \times Y \times Z) \right) \\ \simeq E_Y \oplus \rho'^\perp \oplus E_Z^a, \\ T_{(p_X, y_0, p_Z^a)}T^*(X \times Y \times Z) \simeq (E_X \oplus E_Y^a \oplus E_Y \oplus E_Z^a)^{(0 \oplus \rho' \oplus 0)}, \end{aligned}$$

и

$$T_{(y_0, p_X, p_Z^a)}(Y \times T^*(X \times Z)) \simeq (E_X \oplus \rho \oplus E_Z^a)^{(0 \oplus \rho' \oplus 0)}.$$

Таким образом, задача сводится к установлению равенств

$$(\lambda_1 \oplus \lambda_2) + (E_X \oplus \rho'^\perp \oplus E_Z^a) = E_X \oplus E_Y^a \oplus E_Y \oplus E_Z^a$$

и

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \oplus \lambda_2)^{(0 \oplus \rho' \oplus 0)} + (E_X \oplus \rho \oplus E_Z^a)^{(0 \oplus \rho' \oplus 0)} \\ = (E_X \oplus E_Y^a \oplus E_Y \oplus E_Z^a)^{(0 \oplus \rho' \oplus 0)}, \end{aligned}$$

которые непосредственно следуют из соотношения

$$(\lambda_1 \oplus \lambda_2) \cap (0 \oplus \rho' \oplus 0) \subset (\lambda_1 \oplus \lambda_2) \cap (0 \oplus \rho \oplus 0)$$

$$\simeq \text{Ker} \left(\lambda_1 \times_{E_Y} \lambda_2 \rightarrow E_X \oplus E_Z^a \right) = 0.$$

□

Определение 7.4.5. В ситуации леммы 7.4.4 положим $\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$.

Разумеется, $\Lambda_1 \circ \Lambda_2$ определено только в окрестности точки (p_X, p_Z^a) . Более точно, $\Lambda_1 \circ \Lambda_2$ — росток множества в точке (p_X, p_Z^a) . Пусть теперь $S_1 \subset X \times Y$ и $S_2 \subset Y \times Z$ — две гиперповерхности. Положим

$$(7.4.15) \quad \begin{aligned} \Lambda_1 &= T_{S_1}^*(X \times Y) \cap (\dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y), \\ \Lambda_2 &= T_{S_2}^*(Y \times Z) \cap (\dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Z). \end{aligned}$$

Пусть $(p_X, p_Y^a) \in \Lambda_1, (p_Y, p_Z^a) \in \Lambda_2$. Полагаем $x_0 = \pi(p_X), y_0 = \pi(p_Y)$ и $z_0 = (p_Z)$. Тогда из $p_X \notin T_X^*X$ и $p_Z \notin T_Z^*Z$ вытекает, что

$$(7.4.16) \quad q_1|_{S_1}: S_1 \rightarrow Y \quad \text{и} \quad q_2|_{S_2}: S_2 \rightarrow Y \quad \text{гладкие.}$$

Мы предполагаем выполненным (7.4.13) и следующее условие:

$$(7.4.17) \quad \begin{cases} \Lambda_1 \circ \Lambda_2 = T_S^*(X \times Z) \text{ в окрестности точки } (p_X, p_Z^a) \\ \text{для подмногообразия } S \text{ в } X \times Z. \end{cases}$$

Сохраним обозначения (7.4.14) и положим также

$$(7.4.18) \quad \begin{cases} \lambda_0(p_X) = T_{p_X} \pi^{-1}(x_0), & \lambda_0(p_Y) = T_{p_Y} \pi^{-1}(y_0), \\ \lambda_0(p_Z) = T_{p_Z} \pi^{-1}(z_0). \end{cases}$$

Для кратости мы также пишем λ_{0X} (соответственно λ_{0Y} и λ_{0Z}) вместо $\lambda_0(p_X)$ (соответственно $\lambda_0(p_Y)$ и $\lambda_0(p_Z)$). Это лагранжевы подпространства в E_X, E_Y и E_Z соответственно. Наконец, полагаем

$$(7.4.19) \quad \begin{cases} \lambda_1(p_Y) &= p_2^a(\lambda_1 \cap p_1^{-1}(\lambda_0(p_X))) \\ &= T_{p_Y}(p_2^a(\Lambda_1 \cap \pi^{-1}(x_0) \times T^*Y)) \\ &= \lambda_0(p_X) \circ \lambda_1^a, \\ \lambda_2(p_Y) &= p_1(\lambda_2 \cap p_2^{a-1}(\lambda_0(p_Z))) \\ &= T_{p_Y}(p_1(\Lambda_2 \cap T^*Y \times \pi^{-1}(z_0))) \\ &= \lambda_2 \circ \lambda_0(p_Z). \end{cases}$$

Здесь p_2^a — проекция $E_X \oplus E_Y^a \rightarrow E_Y^a$ или $E_Y \oplus E_Z^a \rightarrow E_Z^a$, и мы используем обозначения, введенные в предложении П.1.4 и после предложения П.3.8. Заметим, что $\lambda_1(p_Y)$ и $\lambda_2(p_Y)$ — лагранжевы подпространства в E_Y .

Предложение 7.4.6. Пусть $(p_X, p_Y, p_Z) \in \dot{T}^*X \times \dot{T}^*Y \times \dot{T}^*Z$, и пусть S_1 и S_2 — две гиперповерхности в $X \times Y$ и $Y \times Z$, как и выше.

Пусть L' и L'' принадлежат $\mathbf{D}^b(\text{Mod}(A))$, и пусть $L = L' \otimes^L L''$. Наложим условие трансверсальности (7.4.13), и пусть выполнено также (7.4.17). Тогда пара (L'_{S_1}, L''_{S_2}) микролокально допускает композицию в точке (p_X, p_Y, p_Z) и в $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$ имеется изоморфизм

$$(7.4.20) \quad L'_{S_1} \circ_{\mu} L''_{S_2} \simeq L_S[\delta],$$

где

$$(7.4.21) \quad \begin{cases} \delta = 1 - \frac{1}{2}[\dim Y + \text{codim } S + \tau], \\ \tau = \tau_{E_Y}(\lambda_0(p_Y), \lambda_2(p_Y), \lambda_1(p_Y)). \end{cases}$$

Доказательство. Первое утверждение в (7.4.21) немедленно следует из (7.4.20). В силу (7.4.16) $q_{12}^{-1}S_1$ и $q_{23}^{-1}S_2$ трансверсально пересекаются в $X \times Y \times Z$. Положим

$$(7.4.22) \quad S_{12} = q_{12}^{-1}S_1 \cap q_{23}^{-1}S_2, \quad W = q_{12}^{-1}S_1, \quad f = q_{13}|_W.$$

В силу (7.4.16) отображение f гладкое. Кроме того, S_{12} — гиперповерхность в W , f' трансверсально $T_{S_{12}}^*W$, а f_* индуцирует изоморфизм $f'^{-1}T_{S_{12}}^*W \simeq T_S^*(X \times Z)$. Применяя предложения 7.4.2 и 7.4.3, получаем в $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$ изоморфизм

$$\varprojlim_U Rf_!(L_{S_{12} \cap U}) \simeq L_S[\delta],$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей точки (x_0, y_0, z_0) в W , а сдвиг δ будет вычислен позднее. Пусть U_1, U_2, U_3 — открытые окрестности точек x_0, y_0, z_0 в X, Y, Z соответственно, и пусть $U = (U_1 \times U_2 \times U_3) \cap W$, $U_{13} = U_1 \times U_3$. Мы имеем $Rf_!(L_{S_{12} \cap U}) \simeq (Rq_{13}!(L'_{S_1} \otimes^L L''_{S_2})_{U_2})_{U_{13}}$.

По лемме 7.3.3 получаем, что $\varprojlim_{U_{13}} (L'_{S_1} \circ L''_{S_2})_{U_2}$ существует и изоморфен $L_S[\delta]$ в $\mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a))$.

Из предложения 7.3.1(ii) следует, что

$$L'_{S_1} \circ_{\mu} L''_{S_2} \simeq L_S[\delta] \quad \text{в} \quad \mathbf{D}^b(X \times Z; (p_X, p_Z^a)).$$

Наконец, вычислим сдвиг δ . Пусть $\bar{p} = (p_X, p_Y^a, p_Y, p_Z^a) \in T_{S_1 \times S_2}^*(X \times Y \times Y \times Z)$ и $p' = {}^i i'(\bar{p}) \in T_{S_{12}}^*(X \times Y \times Z)$, где через i обозначено диагональное вложение $X \times Y \times Z \hookrightarrow X \times Y \times Y \times Z$, и пусть $p'' = {}^j j'(p')$, где через j обозначено вложение $W \hookrightarrow X \times Y \times Z$. Положим

$$E'' = T_{p''} T^* W, \quad \lambda''_0 = T_{p''} \pi^{-1} \pi(p''), \\ \lambda''_1 = T_{p''} f_{\pi}^{-1}(\pi^{-1}(x_0, z_0)), \quad \lambda''_2 = T_{p''} T_{S_{12}}^* W.$$

В силу предложения 7.4.3

$$\delta = \frac{1}{2}[1 + \dim S - (\dim(X \times Y \times Z) - 1) - \tau''],$$

где $\tau'' = \tau_{E''}(\lambda''_0, \lambda''_2, \lambda''_1)$. Поскольку $\frac{1}{2}[1 + \dim S - (\dim(X \times Y \times Z) - 1)] = 1 - \frac{1}{2}(\dim Y + \text{codim } S)$, остается лишь показать, что $\tau = \tau''$.

Положим $E' = T_{p'} T^*(X \times Y \times Z)$, $\lambda'_0 = T_{p'} \pi^{-1} \pi(p')$, $\lambda'_1 = T_{p'} T_{\{x_0\} \times Y \times \{z_0\}}^*(X \times Y \times Z)$ и $\lambda'_2 = T_{p'} T_{S_{12}}^*(X \times Y \times Z)$. Заметим, что $p' \in T^* X \times T_Y^* Y \times T^* Z$. Рассмотрим в E' изотропное подпространство $\rho' = (T_{p'}(W \times_{X \times Y \times Z} T^*(X \times Y \times Z)))^\perp$. Тогда $(E')^{\rho'} \simeq E''$, $\rho' \subset \lambda'_0 \cap \lambda'_2$ и $(\lambda'_i)^{\rho'} \simeq \lambda''_i$ ($i = 0, 1, 2$). Поэтому

$$\tau'' = \tau' \stackrel{\text{def}}{=} \tau_E(\lambda'_0, \lambda'_2, \lambda'_1).$$

Теперь положим $\tilde{E} = T_{\bar{p}} T^*(X \times Y \times Y \times Z)$, $\tilde{\lambda}_0 = T_{\bar{p}} \pi^{-1} \pi(\bar{p})$, $\tilde{\lambda}_1 = T_{\bar{p}} T_{\{x_0\} \times Y \times \{z_0\}}^*(X \times Y \times Y \times Z)$ и $\tilde{\lambda}_2 = T_{\bar{p}} T_{S_1 \times S_2}^*(X \times Y \times Y \times Z)$. Рассмотрим в $\tilde{E}$ изотропное подпространство $\tilde{\rho} = \{0\} \times (T_{(p_Y^a, p_Y)}(T_Y^*(Y \times Y) \cap \pi^{-1} \pi(p_Y^a, p_Y))) \times \{0\}$. Тогда $\tilde{E}^{\tilde{\rho}} \simeq E'$, $\tilde{\rho} \subset \tilde{\lambda}_0 \cap \tilde{\lambda}_1$, $(\tilde{\lambda}_i)^{\tilde{\rho}} \simeq \lambda'_i$ ($i = 0, 1, 2$). Поэтому

$$\tau' = \tilde{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{\tilde{E}}(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_1).$$

Теперь мы используем обозначения (7.4.18) и (7.4.19) и отождествим $\tilde{E}$ с $E_X \oplus E_Y^a \oplus E_Y \oplus E_Z^a$. Тогда

$$\tilde{\tau} = \tau(\lambda_{0X} \oplus \lambda_{0Y} \oplus \lambda_{0Y} \oplus \lambda_{0Z}, \lambda_1 \oplus \lambda_2, \lambda_{0X} \oplus \Delta \oplus \lambda_{0Z}),$$

где Δ — диагональ в $E_Y^a \oplus E_Y$.

Таким образом,

$$\tilde{\tau} = \tau_{E_X^a \oplus E_Y}(\lambda_{0Y} \oplus \lambda_{0Y}, p_2^a(\lambda_1 \cap p_1^{-1}(\lambda_{0X})) \oplus p_1(\lambda_2 \cap p_2^{a-1}(\lambda_{0Z})), \Delta).$$

Применяя предложение П.3.9, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \tau_{E_Y}(\lambda_{0Y}, \lambda_{0Y}, \lambda_2(p_Y), \lambda_1(p_Y)) \\ &= \tau_{E_Y}(\lambda_{0Y}, \lambda_2(p_Y), \lambda_1(p_Y)) \\ &= \tau. \end{aligned}$$

□

Следствие 7.4.7. Пусть X и Y — два многообразия одной и той же размерности n , а S — гиперповерхность в $X \times Y$. Положим $\Lambda = T_S^*(X \times Y)$, и пусть $p = (p_X, p_Y^a) \in \Lambda \cap (\dot{T}X \times \dot{T}Y)$. Предположим, что

$$(7.4.23) \quad \begin{cases} p_1|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow T^*X \text{ и } p_2^a|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow T^*Y — \\ \text{локальные изоморфизмы в окрестности} \\ \text{точки } p. \end{cases}$$

Положим $K = A_S$ и $L = \tau_* A_S[n-1]$, где τ — каноническое отображение $X \times Y \rightarrow Y \times X$. Тогда

- (i) $K \in \text{Ob}(\mathbf{N}(X, Y; p_X, p_Y))$ и $L \in \text{Ob}(\mathbf{N}(Y, X; p_Y, p_X))$,
- (ii) $K \circ_{\mu} L \simeq A_{\Delta_X}$ в $\mathbf{N}(X, X; p_X, p_X)$ и $L \circ_{\mu} K \simeq A_{\Delta_Y}$ в $\mathbf{N}(Y, Y; p_Y, p_Y)$.

Доказательство. Положим $x_0 = \pi(p_X)$, $y_0 = \pi(p_Y)$. Положим также $\Lambda' = T_{r(s)}^*(Y \times X)$, $\Lambda'' = \Lambda \circ \Lambda'$. Тогда $(x, x'; \xi, \xi') \in \Lambda''$, если и только если существует точка $(y; \eta) \in T^*Y$, такая, что $(x, y; \xi, -\eta) \in \Lambda$ и $(y, x'; \eta, \xi') \in \Lambda'$. В силу (7.4.23) отсюда вытекает, что $x = x'$ и $\xi = -\xi'$. Итак, $\Lambda'' = T_{\Delta_X}^*(X \times X)$. Аналогичным образом $\Lambda' \circ \Lambda = T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)$. Значит, выполнены все условия предложения 7.4.6, и мы получаем

$$K \circ_{\mu} L \simeq A_{\Delta_X}[n-1+\delta] \text{ в } \mathbf{D}^b(X \times X; (p_X, p_X^a)),$$

где $\delta = 1 - \frac{1}{2}(2n + \tau) = 1 - n + \frac{1}{2}\tau$,

$$\tau = \tau_{T_{p_Y} T^*Y}(\lambda_0(p_Y), \lambda_2(p_Y), \lambda_1(p_Y)),$$

$$\lambda_0(p_Y) = T_{p_Y} \pi^{-1} \pi(p_Y),$$

$$\lambda_2(p_Y) = p_1(T_{(p_Y, p_X^a)} T_{r(s)}^*(Y \times X) \cap p_2^{a-1} T_{p_X} \pi^{-1}(x_0)),$$

$$\lambda_1(p_Y) = p_2^a(T_{(p_X, p_Y^a)} T_S^*(X \times Y) \cap p_1^{-1} T_{p_X} \pi^{-1}(x_0)).$$

Поскольку $\lambda_1(p_Y) = \lambda_2(p_Y)$, мы видим, что $\tau = 0$ и $K \circ_{\mu} L \simeq A_{\Delta_X}$ в $\mathbf{N}(X, X; p_X, p_X)$. Аналогично можно доказать, что $L \circ_{\mu} K \simeq A_{\Delta_Y}$. $\square$

Замечание 7.4.8. Существуют открытые окрестности Ω_X точки p_X и Ω_Y точки p_Y , такие, что условия (7.2.1) и (7.2.3) теоремы 7.2.1 выполнены при $K = A_S$. Поэтому Φ_K и Ψ_K задают взаимно обратные эквивалентности категорий $\mathbf{D}^b(X; \Omega_X)$ и $\mathbf{D}^b(Y; \Omega_Y)$, причем выполнено (7.2.5).

В силу предложения 7.4.6 мы получили более прямое доказательство эквивалентности $\mathbf{D}^b(X; p_X) \simeq \mathbf{D}^b(Y; p_Y)$ и теперь в состоянии отслеживать сдвиг δ , появляющийся в контактных преобразованиях (ср. примеры 7.2.5 и 7.2.6). Изучению этих сдвигов посвящен следующий параграф.

7.5. Чистые пучки

Пусть Λ — (коническое) лагранжево подмногообразие в T^*X , $p \in \Lambda$, и пусть φ — вещественная функция класса C^∞ на X . Мы полагаем

$$(7.5.1) \quad \Lambda_\varphi = \{(x; d\varphi(x)); x \in X\}.$$

Заметим, что Λ_φ — лагранжево, но, вообще говоря, не коническое подмногообразие в T^*X .

Определение 7.5.1. Будем говорить, что функция φ *трансверсальна* многообразию Λ в точке p , если $\varphi(\pi(p)) = 0$ и многообразия Λ и Λ_φ пересекаются в точке p трансверсально.

Заметим, что если Λ — конормальное расслоение некоторого подмногообразия M в X , то это условие эквивалентно утверждению, что $\pi(p)$ — невырожденная критическая точка функции $\varphi|_M$ (т. е. ее гессиан невырожден).

Для $p \in \Lambda_\varphi \cap \Lambda$ положим

$$(7.5.2) \quad \lambda_0(p) = T_p \pi^{-1} \pi(p), \quad \lambda_\Lambda(p) = T_p \Lambda, \quad \lambda_\varphi(p) = T_p \Lambda_\varphi,$$

$$(7.5.3) \quad \tau_\varphi(p) = \tau_{T_p T^*X}(\lambda_0(p), \lambda_\Lambda(p), \lambda_\varphi(p)).$$

Если путаница исключена, мы пишем $\lambda_0, \tau_\varphi, \dots$ вместо $\lambda_0(p), \tau_\varphi(p)$ и т. д.

Если φ трансверсальна Λ в точке $p \in T^*X$, то $d\varphi(\pi(p)) \neq 0$ и множество $\{\varphi = 0\}$ является гладким многообразием. В этом случае мы полагаем

$$(7.5.4) \quad \lambda_{\{\varphi=0\}}(p) = T_p T^*_{\{\varphi=0\}} X.$$

Тогда

$$(7.5.5) \quad \tau_\varphi = \tau(\lambda_0, \lambda_\Lambda, \lambda_{\{\varphi=0\}}).$$

Действительно, обозначим через $\rho(p)$ прямую в $T_p T^*X$, порожденную эйлеровым векторным полем в точке p (напомним, что это векторное поле определяется в системе однородных симплектических координат $(x; \xi)$ выражением $\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$). Тогда $\rho(p)$ — изотропное подпространство, содержащееся в $\lambda_0(p) \cap \lambda_\Lambda(p)$, $(\lambda_\varphi(p))^{\rho(p)} = (\lambda_{\{\varphi=0\}}(p))^{\rho(p)}$

и (7.5.5) следует из теоремы П.3.2.

Заметим, что

$$(7.5.6) \quad \begin{cases} \lambda_\varphi(p) \text{ и } \lambda_\Lambda(p) \text{ трансверсально пересекаются тогда} \\ \text{и только тогда, когда } \lambda_{\{\varphi=0\}} \cap \lambda_\Lambda(p) = \rho(p). \end{cases}$$

Лемма 7.5.2. Пусть X и X' — два многообразия одинаковой размерности, $S \subset X' \times X$ — гиперповерхность и $\Lambda_S = \dot{T}_S^*(X' \times X)$. Пусть $\bar{p} = (p', p'') \in \Lambda_S$, и предположим, что $p_1|_{\Lambda_S}$ и $p_2^a|_{\Lambda_S}$ — локальные изоморфизмы в окрестности точки $\bar{p}$. Обозначим через $\chi: T^*X \rightarrow T^*X'$ контактное преобразование, определенное в окрестности точки p и задаваемое формулой $\chi = p_1|_{\Lambda_S} \circ (p_2^a|_{\Lambda_S})^{-1}$. Пусть φ — такая функция на X , что $\Lambda_\varphi \ni p$. Предположим, что $\chi(T_{\{\varphi=0\}}^*X) = T_{\{\psi=0\}}^*X'$ для некоторой вещественной функции ψ на X' . Мы выбираем ψ таким образом, чтобы были выполнены соотношения $d\psi(\pi(p')) = p'$ и $\psi(\pi(p')) = 0$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Положим $K = \Lambda_S$.

Тогда для любой лагранжевой плоскости λ в $T_p(T^*X)$ и любого $j \in \mathbb{Z} + \tau_\varphi/2$ мы имеем

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{\pi(p)}[j + \tau_\varphi/2] \simeq R\Gamma_{\{\psi \geq 0\}}(\Phi_K F)_{\pi(p')}[j + (\tau_\psi/2) + d],$$

где $d = \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p), \lambda, \lambda_1(p))$, а $\lambda_1(p) = \chi(\lambda_0(p')) \subset T_p(T^*X)$, $\tau_\varphi = \tau(\lambda_0(p), \lambda, \lambda_\varphi(p))$ и $\tau_\psi = \tau(\lambda_0(p'), \chi(\lambda), \lambda_\psi(p')) = \tau(\lambda_1(p), \lambda, \lambda_\varphi(p))$.

Доказательство. Сначала заметим, что

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{\pi(p)} = \mu\text{hom}(A_{\{\varphi=0\}}, F)_p.$$

Применяя теорему 7.2.1 и предложение 7.4.6, мы находим, что

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{\pi(p)} = R\Gamma_{\{\psi \geq 0\}}(\Phi_K(F))_{\pi(p')}[-\delta],$$

где δ определяется соотношением $\Phi_K(A_{\{\varphi=0\}}) \simeq A_{\{\psi=0\}}[\delta]$ в $\mathbf{D}^b(X'; p')$, т. е. (предложение 7.4.6)

$$\delta = 1 - \frac{1}{2}[\dim X + 1 + \tau(\lambda_0(p), \lambda_{\{\varphi=0\}}(p), \lambda_1(p))].$$

Вычислим $d = \frac{1}{2}\tau_\varphi - \delta - \frac{1}{2}\tau_\psi$. Из условия коцикличности (теорема П.3.2) мы получаем

$$\begin{aligned} 2d &= \tau(\lambda_0, \lambda, \lambda_\varphi) - (1 - n - \tau(\lambda_0, \lambda_\varphi, \lambda_1)) - \tau(\lambda_1, \lambda, \lambda_\varphi) \\ &= (n-1) + \tau(\lambda_0, \lambda, \lambda_1). \end{aligned}$$

□

Предложение 7.5.3. Предположим, что φ трансверсальна Λ в точке $p \in T^*X$, а $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Предположим также, что $\text{SS}(F) \subset \Lambda$ в окрестности точки p . Пусть j — такое число, что

$j - \frac{1}{2}(n + \dim(\lambda_0 \cap \lambda_A)) \in \mathbb{Z}$. Тогда $R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{\pi(p)}[j + \tau_\varphi(p)/2]$ не зависит от φ (см. формулу (7.5.3) для определения $\tau_\varphi(p)$).

Доказательство. (а) Предположим сначала, что $\Lambda = T_M^*X$ для некоторого подмногообразия M в X . Выберем систему координат $x = (x', x'')$, где $x' = (x_1, \dots, x_l)$, таким образом, что $M = \{x'' = 0\}$ и $\pi(p) = 0$. Пусть $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на T^*X , $\xi = (\xi'; \xi'')$. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_\varphi &= \{(x; \xi); \xi_j = \partial\varphi/\partial x_j\}, \\ T_p\Lambda_\varphi &= \left\{ (x; \xi); \xi_j = \sum_k \partial^2_{x_j x_k} \varphi(0) \cdot x_k \right\}, \\ T_p T_M^*X &= \{(x; \xi); x'' = \xi' = 0\}.\end{aligned}$$

Пересечение $T_p\Lambda_\varphi \cap T_p T_M^*X$ равно $\{0\}$ тогда и только тогда, когда матрица $(\partial^2_{x_j x_k} \varphi(0))_{1 \leq j, k \leq l}$ невырождена. Поэтому в силу леммы Морса (ср. [Hörmander 4, т. 3, приложение C]) мы можем предположить после замены координат, что $\varphi|_M = \sum_{1 \leq j \leq l} a_j x_j^2$, где $a_j \in \mathbb{R}, a_j \neq 0$. Получаем

$$\begin{aligned}\tau_\varphi &= \tau(\{x = 0\}, \{x'' = \xi' = 0\}, \{\xi = \partial^2_{x, x} \varphi(0) \cdot x\}) \\ &= \tau(\{x' = 0\}, \{\xi' = 0\}, \{\xi' = \partial^2_{x', x'} \varphi(0) \cdot x'\}),\end{aligned}$$

где индекс в последней строчке вычисляется в пространстве переменных $(x'; \xi')$. В силу предложения П.3.6 получаем

$$\begin{aligned}(7.5.7) \quad \tau_\varphi &= -\operatorname{sgn}(\partial^2_{x', x'} \varphi(0)) \\ &= \#\{j; 1 \leq j \leq l, a_j < 0\} \\ &\quad - \#\{j, 1 \leq j \leq l, a_j > 0\}.\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу предложения 6.6.1 существует такой пучок $L \in \operatorname{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\operatorname{od}(A)))$, что $F \simeq L_M$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Тогда

$$\begin{aligned}R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{\pi(p)}[j + \tau_\varphi/2] &\simeq R\Gamma_{\{\sum_{1 \leq i \leq l} a_i x_i^2 \geq 0\}}(L_{R^1})_0[j + \tau_\varphi/2] \\ &\simeq L[j + \tau_\varphi/2 - q],\end{aligned}$$

где $q = \#\{j; 1 \leq j \leq l, a_j < 0\}$ (это частный случай вычисления, приведенного в процессе доказательства предложения 7.4.2). Поскольку $\tau_\varphi - 2q = -l$, мы получаем нужный результат в этом случае.

(b) Перейдем к общему случаю. Мы можем считать, что $p \in T^*X$ (иначе $\Lambda = T_M^*X$, ср. упр. П.2). Пусть φ_1 и φ_2 — функции, трансверсальные Λ в точке p . Согласно следствию П.2.7, можно найти контактное преобразование $\chi: T^*X \simeq T^*X'$, определенное в окрестности точки p и такое, что

(i) $\chi = p_1|_{\Lambda_S} \circ (p_2^a|_{\Lambda_S})^{-1}$, $\Lambda_S = T_S^*(X' \times X)$, где S — гиперповерхность в $X' \times X$, а $\chi(\Lambda) = T_{M'}^*X'$ для некоторого подмногообразия M' в X' .

(ii) $\chi(T_{\{\varphi_i=0\}}^*X) = T_{\{\psi_i=0\}}^*X'$ для некоторых функций ψ_i ($i = 1, 2$).

Теперь нужный результат следует из первой части доказательства и из леммы 7.5.2, поскольку сдвиг d , полученный в этой лемме, не зависит от i . $\square$

Определение 7.5.4. Пусть Λ — лагранжево подмногообразие в T^*X , $p \in \Lambda$ и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Предположим, что $\text{SS}(F) \subset \Lambda$ в окрестности точки p , и пусть φ — функция, трансверсальная Λ в точке p . Пусть d — число, удовлетворяющее условию

$$(7.5.8) \quad d \equiv \frac{1}{2} \dim(\lambda_o(p) \cap \lambda_\Lambda(p)) \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Пусть также $\tau_\varphi(p) = \tau(\lambda_o(p), \lambda_\Lambda(p), \lambda_\varphi(p))$ (ср. (7.5.3)), и пусть $L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$. Если имеется изоморфизм

$$R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)_{\pi(p)}[-d + \frac{1}{2} \dim X + \frac{1}{2} \tau_\varphi(p)] \simeq L,$$

то говорят, что F имеет тип L со сдвигом d в точке p .

Если $H^j(L) = 0$ при $j \neq 0$, то говорят, что F чист в точке p . Если, кроме того, L — свободный A -модуль ранга 1, то говорят, что F прост в точке p .

В описанной ситуации класс эквивалентности объекта L относительно изоморфизмов называется типом объекта F со сдвигом d в точке p . Заметим, что тип объекта F не зависит от φ в силу предложения 7.5.3.

Примеры 7.5.5. (i) Если F имеет тип L со сдвигом d , то F имеет тип $L[-k]$ со сдвигом $d+k$, а $F[k]$ имеет тип L со сдвигом $d+k$.

(ii) Пусть M — замкнутое подмногообразие в X . Тогда A_M — простой пучок со сдвигом $\frac{1}{2} \text{codim } M$ в каждой точке $p \in T_M^*X$. Действительно, выберем координаты $x = (x', x'')$, в которых $M = \{x'' = 0\}$, $x' = (x_1, \dots, x_i)$, $p = (0; \lambda dx_n)$. Возьмем $\varphi(x) = \lambda x_n + \sum_{j=1}^i x_j^2$. Тогда φ трансверсальна T_M^*X в точке p , и мы имеем

$$(H_{\{\varphi \geq 0\}}^k(A_M))_0 = \begin{cases} A & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из (7.5.7) получаем $d = \frac{1}{2}(\dim X - l)$.

(iii) Пусть ψ — вещественная функция на X , $Z = \{x; \psi(x) \geq 0\}$, $U = \{x; \psi(x) < 0\}$, $p = (x_0; d\psi(x_0))$, причем $\psi(x_0) = 0$, $d\psi(x_0) \neq 0$. Тогда пучок A_Z (соответственно A_U) является простым со сдвигом $\frac{1}{2}$ (соответственно $-\frac{1}{2}$) в точке p . Действительно, $A_Z \simeq A_{\{\psi=0\}} \simeq A_U[1]$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$.

(iv) Напомним пример 5.3.4: пусть $Z = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0, -x_1^{3/2} \leq x_2 < x_1^{3/2}\}$ и $\Lambda = \{(x; \xi); \xi_2 > 0, x_2 = -(2\xi_1/3\xi_2)^3, x_1 = (2\xi_1/3\xi_2)^2\}$. В силу (iii) пучок A_Z имеет сдвиг $\frac{1}{2}$ на $\Lambda \cap \{\xi_1 > 0\}$ и сдвиг $-\frac{1}{2}$ на $\Lambda \cap \{\xi_1 < 0\}$. Вычислим сдвиг пучка A_Z в точке $(0; dx_2)$. Выберем $\varphi(x) = x_2$. Тогда φ трансверсальна Λ в $(0; dx_2)$ и $\tau_\varphi = 0$. Поскольку $(H_{\{x_2 \geq 0\}}^j(A_Z))_0 = A$ при $j = 1$ и 0 в противном случае, сдвиг равен 0 .

Изучим поведение сдвига при некоторых специальных контактных преобразованиях.

Предложение 7.5.6. Пусть F — объект типа L со сдвигом d вдоль Λ в точке p . Рассмотрим контактное преобразование $\chi: T^*X \xrightarrow{\sim} T^*X'$, определенное в окрестности точки p , и предположим, что $\chi = p_1|_{\Lambda_S} \circ (p_2^a|_{\Lambda_S})^{-1}$, $\Lambda_S = T_S^*(X' \times X)$, где S — гиперповерхность. Положим $K = A_S$. Тогда $\Phi_K(F)$ имеет тип L со сдвигом d' вдоль $\chi(\Lambda)$ в точке $\chi(p)$, где

$$\begin{aligned} d' &= d - \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p), \lambda_\Lambda(p), \lambda_1(p)), \\ \lambda_1(p) &= p_2^a(\lambda_{\Lambda_S}(\chi(p), p^a) \cap p_1^{-1}(\lambda_0(\chi(p)))) \\ &= \chi^{-1}(\lambda_0(\chi(p))) = \lambda_0(\chi(p)) \circ \lambda_{\Lambda_S}(\chi(p), p^a)^a. \end{aligned}$$

Доказательство. Мы можем подобрать такую функцию φ на X , что она трансверсальна Λ в точке p и $\chi(T_{\{\varphi=0\}}^*X) = T_{\{\psi=0\}}^*X'$ для некоторой гладкой функции ψ . Таким образом, результат следует из леммы 7.5.2. $\square$

Следствие 7.5.7. Пусть U — открытое подмножество в T^*X , $L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathfrak{M}\text{od}(A)))$, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Предположим, что $\text{SS}(F) \cap U \subset \Lambda$. Тогда множество таких точек $p \in \Lambda \cap U$, что F имеет тип L в точке p , открыто и замкнуто в $\Lambda \cap U$.

Доказательство. Пусть $p \in \Lambda \cap U$. Мы можем найти контактное преобразование χ , удовлетворяющее условиям предложения 7.5.6 и такое, что $\chi(\Lambda) = T_N^*X'$ для некоторой гиперповерхности N в X' . Тогда $\phi_K(F) \simeq L'_N$ в $\mathbf{D}^b(X', \chi(p))$ для некоторого $L' \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathfrak{M}\text{od}(A)))$. Отсюда следует, что $\phi_K(F) \simeq L'_N$ в $\mathbf{D}^b(X'; \Omega)$ для некоторой открытой окрестности Ω точки $\chi(p)$. В силу предложения 7.5.6 мы можем свести дело к случаю $\Lambda = T_N^*X$. Тогда следствие становится очевидным. $\square$

Замечание 7.5.8. Из доказательства последнего предложения мы видим, что если F имеет тип L в точке p , то существует объект G , простой в точке p и такой, что $F \simeq L_X \otimes G$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$.

Вычисление сдвига — не столь простая операция, как показывает пример 7.5.5(iv), но мы можем использовать следующий результат для того, чтобы привести ситуацию к общему положению.

Рассмотрим связное топологическое пространство S и непрерывное отображение $p: S \rightarrow \Lambda$. Мы предполагаем, что задано непрерывное семейство лагранжевых плоскостей $\mu(s)$ в $T_{p(s)}T^*X$, $s \in S$, таких, что

$$(7.5.9) \quad \mu(s) \cap \lambda_0(p(s)) = \mu(s) \cap \lambda_\Lambda(p(s)) = \{0\}.$$

Предложение 7.5.9. *Предположим, что функция $d(s) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p(s)), \lambda_\Lambda(p(s)), \mu(s))$ постоянна на S . Тогда тип объекта F со сдвигом $d(s)$ в точке $p(s)$ постоянен.*

Доказательство. (а) Предположим вначале, что $\Lambda = T_M^*X$ для некоторого подмногообразия M в X . Тогда $d(s)$ локально постоянен, так же как и $\tau(\lambda_0(p(s)), \lambda_\Lambda(p(s)), \mu(s))$, поскольку постоянна размерность $\dim(\lambda_0(p(s)) \cap \lambda_\Lambda(p(s)))$.

(б) Для того чтобы рассмотреть общий случай, мы выбираем контактное преобразование χ , определенное в окрестности точки $p(s_0)$, удовлетворяющее условиям предложения 7.5.6 и такое, что $\chi(\Lambda) = T_N^*X'$ для некоторого подмногообразия N в X' и $\chi(\mu(s_0))$ трансверсально $\lambda_0(\chi(p(s)))$. Положим $p'(s) = \chi(p(s))$ и будем писать p или p' вместо $p(s)$ или $p'(s)$ для краткости.

Определим $d'(s)$ равенством $d'(s) = d(s) - \frac{1}{2}(n-1) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p), \lambda_\Lambda(p), \lambda_1(p))$, где $\lambda_1(p) = \chi^{-1}(\lambda_0(p'))$.

Тогда в силу предложения 7.5.6 тип объекта F со сдвигом $d(s)$ в точке $p(s)$ совпадает с типом объекта $\Phi_K(F)$ со сдвигом $d'(s)$ в $p'(s)$. Мы имеем

$$\tau(\lambda_0(p'), \lambda_{\chi(\Lambda)}(p'), \chi(\mu(s))) = \tau(\lambda_1(p), \lambda_\Lambda(p), \mu(s)).$$

Тогда, согласно (а), достаточно показать, что величина

$$\begin{aligned} d(s) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p), \lambda_\Lambda(p), \lambda_1(p)) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_1(p), \lambda_\Lambda(p), \mu(s)) \\ = d(s) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p), \mu(s), \lambda_1(p)) - \frac{1}{2}\tau(\lambda_0(p), \lambda_\Lambda(p), \mu(s)) \end{aligned}$$

локально постоянна. Поскольку $\mu(s)$ трансверсальна как $\lambda_0(p)$, так и $\lambda_1(p)$, остается проверить, что $\dim(\lambda_0(p) \cap \lambda_1(p))$ локально постоянна (теорема II.3.2). Мы имеем

$$\begin{aligned} \lambda_0(p) \cap \lambda_1(p) &= \lambda_0(p) \cap p_2^a(p_1^{-1}(\lambda_0(p'))) \cap \lambda_{T_S^*(X' \times X)}(p', p^a) \\ &\simeq \lambda_{T_S^*(X' \times X)}(p', p^a) \cap \lambda_0(p', p^a), \end{aligned}$$

и размерность этого пространства равна 1, поскольку S — гиперповерхность. Это завершает доказательство. $\square$

Дадим применение предложения 7.5.9.

Пусть X_1 и X_2 — два многообразия, Λ_i — лагранжево подмногообразие в T^*X_i , $p_i \in \Lambda_i$ ($i = 1, 2$). Мы обозначаем через q_i проекцию $X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$.

Предложение 7.5.10. Пусть $F_i \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X_i))$, и предположим, что F_i имеет тип L_i со сдвигом d_i в p_i вдоль Λ_i ($i = 1, 2$). Тогда

- (i) $F_1 \boxtimes^L F_2$ имеет тип $L_1 \otimes^L L_2$ со сдвигом $d_1 + d_2$ в (p_1, p_2) вдоль $\Lambda_1 \times \Lambda_2$;
- (ii) $R\text{Hom}(q_1^{-1}F_1, q_2^{-1}F_2)$ имеет тип $R\text{Hom}(L_1, L_2)$ со сдвигом $d_2 - d_1$ в (p_1^a, p_2) вдоль $\Lambda_1^a \times \Lambda_2$.

Доказательство. (i) В точках p'_i общего положения в Λ_i мы имеем $F_i \simeq (L_i)_{M_i}[d(p'_i) - \frac{1}{2} \text{codim } M_i]$, $i = 1, 2$, для некоторых подмногообразий M_i в X_i . Поэтому $F_1 \boxtimes^L F_2 \simeq (L_1 \otimes L_2)_{M_1 \times M_2}[d(p'_1) + d(p'_2) - \frac{1}{2} \text{codim } M_1 \times M_2]$. Таким образом, $F_1 \boxtimes^L F_2$ имеет тип $L_1 \otimes^L L_2$ в точках общего положения в $\Lambda_1 \times \Lambda_2$, а значит, и во всех точках из $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ в силу следствия 7.5.7. Для вычисления сдвига в точке (p_1, p_2) выберем два семейства лагранжевых плоскостей $\mu_i(p'_i) \subset T_{p'_i}T^*X_i$ ($i = 1, 2$), $p'_i \in \Lambda_i$, удовлетворяющих (7.5.9). Пусть $d(p'_1, p'_2)$ обозначает сдвиг объекта $F_1 \boxtimes^L F_2$ в точке (p'_1, p'_2) . В силу предложения 7.5.9

$$\begin{aligned} 2(d(p'_1, p'_2) - d(p_1, p_2)) &= \tau(\lambda_o(p'_1, p'_2), \lambda_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(p'_1, p'_2), \mu(p'_1) \oplus \mu(p'_2)) \\ &\quad - \tau(\lambda_o(p_1, p_2), \lambda_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(p_1, p_2), \mu(p_1) \oplus \mu(p_2)), \\ 2(d(p'_i) - d(p_i)) &= \tau(\lambda_o(p'_i), \lambda_{\Lambda_i}(p'_i), \mu(p'_i)) \\ &\quad - \tau(\lambda_o(p_i), \lambda_{\Lambda_i}(p_i), \mu(p_i)), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Поскольку $d(p'_1, p'_2) = d(p'_1) + d(p'_2)$ для p'_i в общем положении и

$$\begin{aligned} \tau(\lambda_o(p'_1, p'_2), \lambda_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(p'_1, p'_2), \mu(p'_1) \oplus \mu(p'_2)) \\ = \tau(\lambda_o(p'_1), \lambda_{\Lambda_1}(p'_1), \mu(p'_1)) + \tau(\lambda_o(p'_2), \lambda_{\Lambda_2}(p'_2), \mu(p'_2)) \end{aligned}$$

для любой точки (p'_1, p'_2) , мы получаем $d(p_1, p_2) = d(p_1) + d(p_2)$.

(ii) Доказательство аналогично. $\square$

В заключение этого параграфа мы распространим предложения 7.4.6 и 7.5.6 на более общую ситуацию. Пусть X, Y, Z — три многообразия, а $\Lambda_1 \subset T^*(X \times Y)$, $\Lambda_2 \subset T^*(Y \times Z)$ — два лагранжевых многообразия. Пусть $\bar{p}_1 = (p_X, p_Y^a) \in \Lambda_1$ и $\bar{p}_2 = (p_Y, p_Z^a) \in \Lambda_2$. Мы сохраняем обозначения (7.4.14) и (7.4.19), т. е. полагаем $\lambda_i =$

$T_{\tilde{p}_i} A_i$, $i = 1, 2$, $\lambda_0(p_W) = T_{p_W} \pi^{-1} \pi(p_W)$ для $W = X, Y, Z$, $\lambda_1(p_Y) = \lambda_0(p_X) \circ \lambda_1^a$, $\lambda_2(p_Y) = \lambda_2 \circ \lambda_0(p_Z)$. Введем обозначение (ср. упр. П.9)

$$(7.5.10) \quad \tau(\lambda_1 : \lambda_2) = \tau(\lambda_0(p_Y), \lambda_2(p_Y), \lambda_1(p_Y)).$$

Теорема 7.5.11. Пусть $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a)))$ и $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$, причем $\text{SS}(K_i) \subset \Lambda_i$ в некоторой окрестности точки $\tilde{p}_i$ ($i = 1, 2$). Предположим, что $p_2^a|_{\Lambda_1} : \Lambda_1 \rightarrow T^*Y$ и $p_1|_{\Lambda_2} : \Lambda_2 \rightarrow T^*Y$ трансверсальны и K_i имеет тип L_i со сдвигом d_i вдоль Λ_i в точке $\tilde{p}_i$, $i = 1, 2$.

Тогда пара (K_1, K_2) микролокально допускает композицию $\text{SS}(K_1 \circ_{\mu} K_2) \subset \Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_1 \circ \Lambda_2$ в некоторой окрестности точки (p_X, p_Z^a) и $K_1 \circ_{\mu} K_2$ имеет тип $L_1 \otimes^L L_2$ со сдвигом $d_1 + d_2 - \frac{1}{2}(\dim Y + \tau(\Lambda_1 : \Lambda_2))$ вдоль Λ в точке (p_X, p_Z^a) .

Доказательство. (а) Заметим, что если Λ_1 и Λ_2 — конормальные расслоения к гиперповерхностям и Λ — конормальное расслоение к подмногообразию, то мы возвращаемся к предложению 7.4.6.

Если $Z = \{pt\}$ и Λ_1 — конормальное расслоение к гиперповерхности, ассоциированной с контактным преобразованием, то мы возвращаемся к предложению 7.5.6.

(b) Пусть Δ — диагональ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, и пусть $q \in T^*\mathbb{R}$. Тогда $(K_1 \boxtimes A_{\Delta}) \circ_{\mu} (K_2 \boxtimes A_{\Delta}) \simeq (K_1 \circ_{\mu} K_2) \boxtimes A_{\Delta}$ в силу предложения 7.3.6.

Заменяя W , p_W на $W \times \mathbb{R}$, (p_W, q) ($W = X, Y, Z$) и K_1, K_2 на $K_1 \boxtimes A_{\Delta}, K_2 \boxtimes A_{\Delta}$, мы можем с самого начала предполагать, что $p_W \in T^*W$ ($W = X, Y, Z$).

(с) Свести теорему к случаю $Z = \{pt\}$ можно с помощью следующей процедуры. В тех же обозначениях, что и в предложении 7.3.4, мы имеем $K_1 \circ_{\mu} K_2 \simeq i_*(K_1 \boxtimes A_Z) \circ_{\mu} K_2$. Поскольку $i_*(K_1 \boxtimes A_Z)$ имеет тип L_1 со сдвигом $d_1 + \frac{1}{2} \dim Z$ и $\tau(\lambda_1 : \lambda_2) = \tau(\lambda'_1 : \lambda_2)$, где $\lambda'_1 = \lambda_1 \times T_Z^*(Z \times Z)$, доказываемая теорема для (K_1, K_2) эквивалентна теореме для $(i_*(K_1 \boxtimes A_Z), K_2)$.

(d) Пусть W — другое многообразие, и пусть Λ_3 — лагранжево подмногообразие в $T^*(Z \times W)$, а $K_3 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Z \times W; (p_Z, p_W^a)))$. Предположим, что K_3 имеет тип L_3 со сдвигом d_3 вдоль Λ_3 и, кроме того, отображения $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 \rightarrow T^*Z$ и $\Lambda_3 \rightarrow T^*Z$ трансверсальны, так же как и отображения $\Lambda_2 \rightarrow T^*Z$ и $\Lambda_3 \rightarrow T^*Z$. Поэтому $\Lambda_1 \rightarrow T^*Y$ и $\Lambda_2 \circ \Lambda_3 \rightarrow T^*Y$ трансверсальны. Если теорема верна для $(K_1, K_2), (K_2, K_3)$ и $(K_1 \circ_{\mu} K_2, K_3)$ (соответственно $(K_1, K_2 \circ_{\mu} K_3)$), то она верна и для $(K_1, K_2 \circ_{\mu} K_3)$ (соответственно для $(K_1 \circ_{\mu} K_2, K_3)$). Это немедленно следует из изоморфизма $(K_1 \circ_{\mu} K_2) \circ_{\mu} K_3 \simeq K_1 \circ_{\mu} (K_2 \circ_{\mu} K_3)$ и формулы (ср. упр. П.9)

$$\tau(\lambda_1 : \lambda_2) + \tau(\lambda_1 \circ \lambda_2 : \lambda_3) = \tau(\lambda_1 : \lambda_2 \circ \lambda_3) + \tau(\lambda_2 : \lambda_3).$$

(е) Если существует подмножество Ω в $A_1 \times_{T \cdot Y} A_2$, такое, что (p_X, p_Y, p_Z) лежит в $\bar{\Omega}$ и теорема верна в каждой точке из Ω , то теорема верна в точке (p_X, p_Y, p_Z) . В действительности это будет следовать из предложения 7.5.9.

Пусть $p : S \rightarrow A_1 \times_{T \cdot Y} A_2$ — непрерывное отображение, такое, что $p(s_0) = (p_X, p_Y, p_Z)$ для $s_0 \in S$. Мы запишем $p(s) = (p_X(s), p_Y(s), p_Z(s))$ и положим

$$\lambda_1(s) = T_{(p_X(s), p_Y(s)^a)} A_1, \quad \lambda_2(s) = T_{(p_Y(s), p_Z(s)^a)} A_2 \quad \text{и}$$

$$E_W(s) = T_{p_W(s)} T^* W, \quad \lambda_{oW}(s) = \lambda_o(p_W(s)) \quad \text{для } W = X, Y, Z.$$

Выберем лагранжевы плоскости $\mu_W(s) \subset E_W(s)$, непрерывно зависящие от s и такие, что $\mu_W(s) \cap \lambda_{oW}(s) = 0$ ($W = X, Y, Z$) и что $(\mu_X(s) \oplus \mu_Y(s)^a) \cap \lambda_1(s) = 0$, $(\mu_Y(s) \oplus \mu_Z(s)^a) \cap \lambda_2(s) = 0$, $(\mu_X(s) \oplus \mu_Z(s)^a) \cap (\lambda_1(s) \circ \lambda_2(s)) = 0$. Затем выберем функции $d_1(s), d_2(s), d(s)$, удовлетворяющие условию $d_i(s_0) = d_i$ ($i = 1, 2$) и такие, что функции

$$d_1(s) - \frac{1}{2} \tau_{E_X(s) \oplus E_Y(s)^a} (\lambda_{oX}(s) \oplus \lambda_{oY}(s)^a, \lambda_1(s), \mu_X(s) \oplus \mu_Y(s)^a),$$

$$d_2(s) - \frac{1}{2} \tau_{E_Y(s) \oplus E_Z(s)^a} (\lambda_{oY}(s) \oplus \lambda_{oZ}(s)^a, \lambda_2(s), \mu_Y(s) \oplus \mu_Z(s)^a),$$

$$d(s) - \frac{1}{2} \tau_{E_X(s) \oplus E_Z(s)^a} (\lambda_{oX}(s) \oplus \lambda_{oZ}(s)^a, \lambda_1(s) \circ \lambda_2(s), \mu_X(s) \oplus \mu_Z(s)^a)$$

локально постоянны. В силу предложения 7.5.9 K_1 имеет тип L_1 со сдвигом $d_1(s)$ в точке $(p_X(s), p_Y(s)^a)$, а K_2 имеет тип L_2 со сдвигом $d_2(s)$ в точке $(p_Y(s), p_Z(s)^a)$.

Предположим, что $K_1 \circ_\mu K_2$ имеет тип $L_1 \otimes^L L_2$ со сдвигом

$$d = d_1(s_1) + d_2(s_1)$$

$$- \frac{1}{2} [\dim Y + \tau(\lambda_{oY}(s_1), \lambda_2(s_1) \circ \lambda_{oZ}(s_1), \lambda_{oX}(s_1) \circ \lambda_1(s_1)^a)]$$

в некоторой точке $(p_X(s_1), p_Z(s_1)^a)$. Если $d(s_1) = d$, то $K_1 \circ_\mu K_2$ имеет тип $L_1 \otimes^L L_2$ со сдвигом $d(s)$ в точке $(p_X(s), p_Z(s)^a)$ в силу предложения 7.5.9. Поэтому для того, чтобы доказать теорему для $s = s_0$, достаточно показать, что $d_1(s) + d_2(s) - d(s) - \frac{1}{2} \tau(\lambda_{oY}(s), \lambda_2(s) \circ \lambda_{oZ}(s), \lambda_{oX}(s) \circ \lambda_1(s)^a)$ — локально постоянная функция от s . Это утверждение эквивалентно тому, что локально постоянна функция

$$\tau(s) = \tau_{E_X(s) \oplus E_Y(s)^a} (\lambda_{oX}(s) \oplus \lambda_{oY}(s)^a, \lambda_1(s), \mu_X(s) \oplus \mu_Y(s)^a)$$

$$+ \tau_{E_Y(s) \oplus E_Z(s)^a} (\lambda_{oY}(s) \oplus \lambda_{oZ}(s)^a, \lambda_2(s), \mu_Y(s) \oplus \mu_Z(s)^a)$$

$$- \tau_{E_X(s) \oplus E_Z(s)^a} (\lambda_{oX}(s) \oplus \lambda_{oZ}(s)^a, \lambda_1(s) \circ \lambda_2(s), \mu_X(s) \oplus \mu_Z(s)^a)$$

$$- \tau_{E_Y(s)} (\lambda_{oY}(s), \lambda_2(s) \circ \lambda_{oZ}(s), \lambda_{oX}(s) \circ \lambda_1(s)^a).$$

В силу упр. П.10 мы имеем

$$\tau(s) = \tau_{E_Y(s)}(\mu_Y(s), \mu_X(s) \circ \lambda_1(s)^a, \lambda_2(s) \circ \mu_Z(s)).$$

Поскольку $\mu_Y(s)$, $\mu_X(s) \circ \lambda_1(s)^a$ и $\lambda_2(s) \circ \mu_Z(s)$ попарно трансверсальны, $\tau(s)$ локально постоянна. Выбирая $S = \overline{Z}$ и полагая p равным тождественному отображению, получаем требуемый результат.

(f) Мы докажем теорему для случая, когда Λ_1 — график контактного преобразования из T^*X в T^*Y . В силу (с) мы можем с самого начала предполагать, что $Z = \{pt\}$. Тогда мы разложим контактное преобразование $T^*X \rightarrow T^*Y$ в композицию $T^*X \rightarrow T^*X' \rightarrow T^*Y$ таким образом, что график преобразования $T^*X \rightarrow T^*X'$ (соответственно $T^*X' \rightarrow T^*Y$) соответствует конормальному расслоению к некоторой гиперповерхности $S \subset X \times X'$ (соответственно $S' \subset X' \times Y$). В силу замечания 7.5.8 мы можем предположить, что $K_1 = A_S \circ A_{S'}$. В силу (а) теорема верна для пары $(A_S, A_{S'})$ в любой точке, в которой отображение $\Lambda_1 \rightarrow X \times Y$ имеет постоянный ранг. Поэтому в силу (е) она верна для $(A_S, A_{S'})$ всюду. Применяя (d) и предложение 7.5.6, мы получаем (f).

(g) Теперь мы докажем теорему в общем случае.

В силу (с) мы можем считать, что $Z = \{pt\}$. Тогда существуют контактные преобразования χ_1 на T^*X и χ_2 на T^*Y , такие, что $(\chi_1 \times \chi_2^{-1})(\Lambda_1)$, $\chi_2(\Lambda_2)$ и $\chi_1(\Lambda_1 \circ \Lambda_2)$ — конормальные расслоения к гиперповерхностям (предложение П.2.6). Пусть F_i и G_i — простые объекты, микронесители которых содержатся в лагранжевых многообразиях, ассоциированных соответственно с χ_i и χ_i^{-1} ($i = 1, 2$), и которые удовлетворяют условиям $G_1 \circ_\mu F_1 \simeq A_{\Delta_X}$, $G_2 \circ_\mu F_2 \simeq A_{\Delta_Y}$. Тогда микронесители объектов $F_1 \circ_\mu K_1 \circ_\mu G_2$ и $F_2 \circ_\mu K_2$ содержатся в конормальных расслоениях к гиперповерхностям. Поэтому в силу (а) теорема верна для $(F_1 \circ_\mu K_1 \circ_\mu G_2, F_2 \circ_\mu K_2)$. В силу (f) теорема справедлива для $(G_2, F_2 \circ_\mu K_2)$ и $(F_1 \circ_\mu K_1, G_2)$. Поэтому в силу (d) теорема верна для $(F_1 \circ_\mu K_1, K_2)$. Снова в силу (f) теорема верна для $(G_1, F_1 \circ_\mu K_1)$ и $(G_1, K_1 \circ_\mu K_1 \circ_\mu K_2)$. Поэтому, согласно (f), она верна для $(G_1 \circ_\mu F_1 \circ_\mu K_1, K_2)$, т. е. для (K_1, K_2) . $\square$

Заметим, что в доказательстве п. (g) нельзя было воспользоваться предложением 7.5.6, поскольку оно применимо только при $Z = \{pt\}$.

В качестве приложения теоремы 7.5.11 мы получаем следующее утверждение.

Следствие 7.5.12. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $p \in Y \times_X T^*X$, $p_Y = 'f'(p)$, $p_X = f_\pi(p)$. Пусть Λ_Y — такое лагран-

жее многообразие в T^*Y , что ${}^t f'$ трансверсально Λ_Y в точке p_Y . Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$, и предположим, что $\text{SS}(G) \subset \Lambda_Y$ в некоторой окрестности точки p_Y , а G имеет тип L со сдвигом d вдоль Λ_Y в точке p_Y .

- (i) Для достаточно малой открытой окрестности W точки p множество $\Lambda_X = f_\pi({}^t f'(\Lambda_Y) \cap W)$ является лагранжеевым многообразием, изоморфно отображающимся на ${}^t f'^{-1}(\Lambda_Y) \cap W$ с помощью отображения f_π .
- (ii) Пучок $f_!^* G = \varprojlim_U Rf_* G_U$ существует в $\mathbf{D}^b(X; p_X)$ (ср. предложение 6.1.10), и $f_!^* G$ имеет тип L со сдвигом

$$d - \frac{1}{2}(\dim Y/X + \tau(\lambda_0(p_X), \lambda_{\Lambda_X}(p_X), f_\pi({}^t f'^{-1}(\Lambda_0(p_Y))))).$$

Здесь U пробегает систему открытых окрестностей точки $p_Y(p_Y)$, и мы пишем $f_\pi({}^t f'^{-1}(\lambda_0(p_Y)))$ вместо $(df_\pi)(d({}^t f'))^{-1}(\lambda_0(p_Y))$.

Доказательство. (i) следует из упр. П.5.

(ii) Применим теорему 7.5.11 с $K_1 = A_\Delta$ и $K_2 = G$, где $\Delta \subset X \times Y$ — график отображения f . $\square$

Следствие 7.5.13. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $p \in Y \times_X T^*X$, $p_Y = {}^t f'(p)$ и $p_X = f_\pi(p)$. Пусть Λ_X — лагранжеево подмногообразие в T^*X , такое, что f_π трансверсально Λ_X в точке p_X . Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, и предположим, что $\text{SS}(F) \subset \Lambda_X$ в некоторой окрестности точки p_X , а F имеет тип L со сдвигом d вдоль Λ_X в точке p_X . Тогда

- (i) для достаточно малой открытой окрестности W точки p множество $\Lambda_Y = {}^t f'(f_\pi^{-1}(\Lambda_X) \cap W)$ есть лагранжеево многообразие, изоморфно отображающееся на $f_\pi^{-1}(\Lambda_X) \cap W$ с помощью ${}^t f'$;
- (ii) $f_\mu^{-1} F = \varprojlim_{F' \rightarrow F} f^{-1} F'$ и $f_\mu^! F = \varinjlim_{F \rightarrow F'} f^! F'$ существуют в $\mathbf{D}^b(Y; p_Y)$, где $F' \rightarrow F$ (соответственно $F \rightarrow F'$) пробегает категорию изоморфизмов в точке p_X , а $\omega_{Y/X} \otimes f_\mu^{-1} \simeq f_\mu^! F$ (ср. предложение 6.1.9);
- (iii) $f_\mu^{-1} F$ имеет тип L со сдвигом d .

Доказательство. (i) следует из упр. П.5.

(ii) следует из предложения 6.1.9.

(iii) Применим теорему 7.5.11 с $K_1 = A_\Delta$ и $K_2 = F$, где $\Delta \subset Y \times X$ — график отображения f . $\square$

Упражнения к гл. 7

Упражнение 7.1. Пусть V — вещественное (соответственно комплексное) конечномерное векторное пространство, а V^* — его сопряженное пространство. Положим $S_V = (V \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+$ (соответственно $(V \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$), и пусть $Z = \{(x, y) \in S_V \times S_{V^*}; \langle x, y \rangle = 0\}$. Пусть $K = A_Z$, $\Omega = T^*S_V$ и $\Omega' = T^*S_{V^*}$. Докажите, что условия теоремы 7.2.1 выполнены для K на (Ω, Ω') (в работе [Brylinski 2] можно найти подробное исследование таких контактных преобразований в контексте комплексных многообразий и конструктивных пучков).

Упражнение 7.2. Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — векторное расслоение над многообразием Z . отождествим T^*E и T^*E^* , как в предложении 5.5.1. Пусть F_1 и F_2 принадлежат $D_{\mathbb{R}^+}^b(E)$. Докажите изоморфизм

$$\mu hom(F_2, F_1) \simeq \mu hom(F_2^\wedge, F_1^\wedge).$$

(Указание. Используя упр. 3.17 и 4.6, покажите, что это утверждение эквивалентно аналогичной формуле для F_1 и F_2 в $D_{\mathbb{R}^+}^b(\dot{E})$ или $D^b(\dot{E}/\mathbb{R}^+)$. Затем используйте теорему 7.2.1.)

Упражнение 7.3. Пусть (x) и (y) — две системы линейных координат на двух экземплярах X и Y пространства $\mathbb{R}^n$ соответственно, и пусть $(x; \xi)$ и $(y; \eta)$ — ассоциированные координаты. Рассмотрим контактное преобразование χ (частичное преобразование Лежандра), определенное для $\xi_n \neq 0, \eta_n \neq 0$ формулой $y_j = \xi_j \xi_n^{-1}$ ($p < j < n$), $y_n = (\sum_{j=p+1}^n x_j \xi_j) \xi_n^{-1}$, $y_k = x_k$ ($k \leq p$), $\eta_j = -x_j \xi_n$ ($p < j < n$), $\eta_n = \xi_n$, $\eta_k = \xi_k$ ($k \leq p$).

(i) Докажите, что χ ассоциировано с конормальным расслоением к подмногообразию $S = \{(x, y); x_k - y_k = 0, 1 \leq k \leq p, x_n - y_n + \sum_{j=p+1}^{n-1} x_j y_j = 0\}$.

(ii) Применяя теорему 7.2.1, докажите, что микролокально $\psi_K(A_M) \simeq A_N$, где $N = \{y_n = 0\}$, $M = \{x_{p+1} = \dots = x_n = 0\}$ и $K = A_S[d]$ для некоторого сдвига d , который следует вычислить.

Упражнение 7.4. Пусть X — комплексное многообразие, а Λ — связное комплексное лагранжево подмногообразие в T^*X . Пусть $F \in \text{Ob}(D^b(X))$, и предположим, что $\text{SS}(F) \subset \Lambda$ в окрестности многообразия Λ . Докажите, что если объект F чистый со сдвигом d в точке $p \in \Lambda$, то F чистый со сдвигом d в любой точке многообразия Λ . (Указание. Используйте предложение 7.5.9 и упр. П.7.)

Упражнение 7.5. В ситуации теоремы 7.5.11 предположим, что X , Y , Z и A_i — комплексные многообразия, причем K_i имеет тип L_i со сдвигом 0 ($i = 1, 2$). Докажите, что пучок $K_1 \otimes_\mu K_2$ имеет тип $L_1 \otimes^L L_2$ со сдвигом $-\dim_{\mathbb{C}} Y$.

Замечания

Симплектическая геометрия восходит к Гамильтону и Якоби, и физики привыкли работать в «фазовом пространстве», т. е. в кокасательном расслоении (см. великолепное введение к книге [Guillemin-Sternberg 1]). Однако лишь совсем недавно появился математический аппарат, который позволил выйти за рамки чисто геометрической точки зрения и работать в кокасательном расслоении (как говорят, «микролокально») с классическими объектами, связанными с многообразием X , такими, как, например, распределения или дифференциальные операторы. Первым шагом было введение «псевдодифференциальных операторов» (обзор теории которых мы здесь не делаем, отсылая читателя к работе [Hörmander 4]), затем появились канонический оператор Маслова (см. [Маслов 1]) и, наконец, теория микрофункций Сато [Sato 1] и теория интегральных операторов Фурье [Hörmander 2], которые, в частности, позволяют осуществлять над этими классическими объектами контактные преобразования.

Изложенная в этой главе теория представляет собой теоретико-пучковую версию теории интегральных операторов Фурье или ее комплексного эквивалента — теории простых голономных модулей [Sato-Kawai-Kashiwara 1]. Впервые эта теория была введена другим методом в [Kashiwara-Schapira 3].

Конструктивные пучки

В начале этой главы мы разъясняем понятие конструктивного пучка на симплициальном комплексе, а также напоминаем основные результаты теории субаналитических множеств Хиронаки.

Затем мы даем следующее определение (являющееся модификацией определения стратификации Уитни): стратификация $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ вещественно-аналитического многообразия называется μ -стратификацией, если X_α являются субаналитическими многообразиями и для каждой пары (α, β) , такой, что $X_\beta \cap \overline{X}_\alpha \neq \emptyset$ имеют место включения $X_\beta \subset \overline{X}_\alpha$ и

$$(T_{X_\beta}^* X \hat{+} T_{X_\alpha}^* X) \cap \pi^{-1}(X_\beta) \subset T_{X_\beta}^* X.$$

(Определение операции $\hat{+}$ см. в § 6.2.) Можно доказать, что если Λ — замкнутое коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X , то существует μ -стратификация $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, такая, что $\Lambda \subset \bigsqcup_\alpha T_{X_\alpha}^* X$.

Далее мы вводим следующее определение. Объект F из $\mathbf{D}^b(X)$ называется слабо $\mathbb{R}$ -конструктивным (w - $\mathbb{R}$ -конструктивным для краткости), если существует локально конечное покрытие $X = \bigcup_j X_j$ субаналитическими подмножествами, такими, что для всех k и для всех j пучки $H^k(F)|_{X_j}$ локально постоянны. Если, кроме этого, комплексы F_x совершенны для всех $x \in X$, то F называется $\mathbb{R}$ -конструктивным.

Используя существование μ -стратификаций, мы доказываем, что F является w - $\mathbb{R}$ -конструктивным тогда и только тогда, когда $\mathrm{SS}(F)$ содержится в замкнутом коническом субаналитическом изотропном множестве или, что эквивалентно, когда $\mathrm{SS}(F)$ субаналитичен и лагранжев. Другими словами, w - $\mathbb{R}$ -конструктивность — это микролокальное свойство. Мы активно используем результаты предыдущих глав для вывода функториальных свойств w - $\mathbb{R}$ - и $\mathbb{R}$ -конструктивных объектов. Используя существование триангуляций для субаналитических множеств, мы также доказываем, что производная категория категории $\mathbb{R}$ -конструктивных пучков эквивалентна полной подкатегории в $\mathbf{D}^b(X)$, состоящей из объектов с $\mathbb{R}$ -конструктивными когомологиями.

Для комплексных многообразий мы вводим понятия w - $\mathbb{C}$ - и $\mathbb{C}$ -конструктивных объектов. Определения аналогичны, с точностью

до замены термина «субаналитическое подмногообразие» на термин «комплексно-аналитическое подмногообразие». Полезная теорема утверждает, что F является $\mathcal{W}$ - $\mathcal{C}$ -конструктивным в том и только в том случае, когда F является $\mathcal{W}$ - $\mathbb{R}$ -конструктивным (на подлежащем вещественном многообразии) и $SS(F)$ инвариантен относительно действия $\mathbb{C}^\times$ на T^*X . С помощью этой теоремы многие свойства $\mathbb{R}$ -конструктивных пучков переносятся на $\mathcal{C}$ -конструктивный случай.

В конце главы мы вводим хорошо известные функтор близкого цикла и функтор исчезающего цикла и сравниваем их с функторами специализации и микролокализации.

Соглашение 8.0. Мы сохраняем соглашение 4.0. В частности, $\text{gld}(A) < \infty$, где A — основное кольцо. Кроме того (если явно не оговаривается противное), все многообразия и морфизмы считаются вещественно-аналитическими и счетными в бесконечности.

Через $\dim X$ (соответственно $\dim_{\mathbb{C}} X$) мы обозначаем размерность вещественно-аналитического (соответственно комплексно-аналитического) подмножества X .

8.1. Конструктивные пучки на симплициальном комплексе

Определение 8.1.1. Симплициальным комплексом $S = (S, \Delta)$ называется набор данных, состоящий из множества S и множества Δ его подмножеств, удовлетворяющий следующим условиям:

(S.1) Любое $\sigma \in \Delta$ является конечным и непустым подмножеством в S .

(S.2) Если τ — непустое подмножество в S и $\tau \subset \sigma$, $\sigma \in \Delta$, то $\tau \in \Delta$.

(S.3) $\{p\} \in \Delta$ для любого элемента $p \in S$.

(S.4) Для любого элемента $p \in S$ множество $\{\sigma \in \Delta; p \in \sigma\}$ конечно.

Любой элемент из Δ называется *симплексом*, а элемент из S называется *вершиной*.

Пусть $\mathbb{R}^S$ обозначает множество отображений из S в $\mathbb{R}$. Напомним, что элемент $x \in \mathbb{R}^S$ есть семейство $x(p) \in \mathbb{R}$, индексированное элементами $p \in S$. Введем в $\mathbb{R}^S$ топологию произведения. Симплексу $\sigma \in \Delta$ мы сопоставим подмножество $|\sigma|$ из $\mathbb{R}^S$ следующим образом:

$$(8.1.1) \quad |\sigma| = \{x \in \mathbb{R}^S; x(p) = 0 \text{ для } p \notin \sigma, \\ x(p) > 0 \text{ для } p \in \sigma \text{ и } \sum_p x(p) = 1\}.$$

Отметим, что множества $|\sigma|$ попарно не пересекаются. Положим

$$(8.1.2) \quad |S| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} |\sigma|,$$

$$(8.1.3) \quad U(\sigma) = \bigcup_{\tau \in \Delta, \tau \supset \sigma} |\tau|$$

и для $x \in |S|$

$$(8.1.4) \quad U(x) = U(\sigma(x)),$$

где $\sigma(x)$ — единственным образом определенный симплекс, такой, что $x \in |\sigma(x)|$, т. е. $\sigma(x) = \{p; x(p) \neq 0\}$.

$$(8.1.5) \quad U(\sigma) = \{x \in |S|; x(p) > 0 \text{ при } p \in \sigma\},$$

$$(8.1.6) \quad U(x) = \{y \in |S|; y(p) > 0 \text{ для всех } p, \text{ таких, что } x(p) > 0\}.$$

Пример 8.1.2. Пусть $S = \{1, 2, 3\}$, а Δ — семейство непустых подмножеств множества S . На рисунках изображены множества $|\sigma|$, $U(\sigma)$ и $U(x)$, где $\sigma = \{1, 2\}$, $x = (1, 0, 0)$.

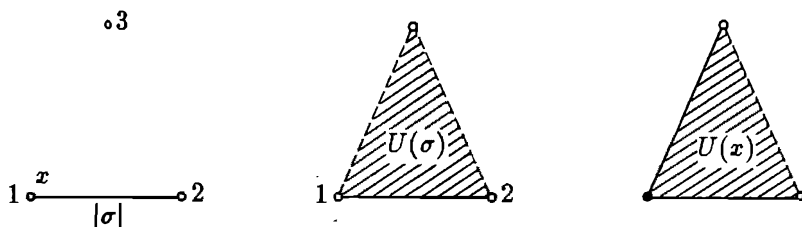


Рис. 8.1.1

Топологию пространства $|S|$ мы будем считать индуцированной с $\mathbb{R}^S$. Тогда, как легко видеть из (8.1.5) и (8.1.6), $U(\sigma)$ и $U(x)$ открыты в $|S|$. Положим

$$(8.1.7) \quad S(\sigma) = \{p \in S; \{p\} \cup \sigma \in \Delta\}.$$

Тогда $S(\sigma)$ конечно в S (аксиома (S.4)) и $U(\sigma)$ содержится в $\mathbb{R}^{S(\sigma)}$. Следовательно, $U(\sigma)$ гомеоморфно локально замкнутому подмножеству в $\mathbb{R}^l$, где $l = \#S(\sigma)$. Так как $|\sigma| = \{x \in U(\sigma); x(p) = 0 \text{ для } p \notin \sigma\}$, то $|\sigma|$ замкнуто в $U(\sigma)$, а значит, локально замкнуто в $|S|$. Легко видеть, что

$$(8.1.8) \quad |\overline{\sigma}| = \{x \in \mathbb{R}^S; x(p) = 0, \text{ если } p \notin \sigma, x(p) \geq 0 \text{ и } \sum_p x(p) = 1\} \\ = \bigcup_{\tau \subset \sigma} |\tau|,$$

где $|\overline{\sigma}|$ обозначает замыкание $|\sigma|$ в $|S|$. Отметим, что для σ и τ в Δ

$$(8.1.9) \quad U(\sigma) \cap U(\tau) = \begin{cases} U(\sigma \cup \tau), & \text{если } \sigma \cup \tau \in \Delta, \\ \emptyset, & \text{если } \sigma \cup \tau \notin \Delta; \end{cases}$$

$$(8.1.10) \quad U(\sigma) \subset U(\tau) \text{ тогда и только тогда, когда } \tau \subset \sigma.$$

Из аксиомы (S.4) и (8.1.9) следует, что семейство $\{U(\sigma)\}_{\sigma \in \Delta}$ образует локально конечное открытое покрытие множества $|S|$, т. е. $|S|$ — паракомпактное топологическое пространство.

Определение 8.1.3. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(|S|))$.

- (i) F называется *слабо S-конструктивным* (*w-S-конструктивным*), если для всех $j \in \mathbb{Z}$ и всех $\sigma \in \Delta$ пучки $H^j(F)|_{|\sigma|}$ постоянны.
- (ii) Если F является *w-S-конструктивным* и F_x — совершенный комплекс для всех $x \in |S|$, то F называется *S-конструктивным*.

(Определение совершенного комплекса см. в упр. 1.30. Напомним, что если A нётерово, то F_x совершенен в том и только в том случае, когда $H^j(F)_x$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ конечно порожден. Напомним, что по предположению $\text{gld}(A) < \infty$.)

Пучок F называется *w-S-конструктивным* (соответственно *S-конструктивным*), если, рассматриваемый как объект из $\mathbf{D}^b(|S|)$, он является *w-S-конструктивным* (соответственно *S-конструктивным*). Обозначим через $\mathbf{D}_{w-S-c}^b(|S|)$ (соответственно $\mathbf{D}_{S-c}^b(|S|)$) полную триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(|S|)$, состоящую из *w-S-конструктивных* (соответственно *S-конструктивных*) объектов.

Обозначим через $w\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(S)$ (соответственно $\mathcal{C}\text{ons}(S)$) полную подкатегорию в $\text{Mod}(A_S)$, состоящую из *w-S-конструктивных* (соответственно *S-конструктивных*) пучков.

Пусть $u: F \rightarrow G$ — морфизм пучков на S , причем F и G являются *w-S-конструктивными*. Легко доказать, что $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$ и $\text{Coker } u$ *w-S-конструктивны*. Более того, если $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на $|S|$ и F' и F'' *w-|S|-конструктивны*, то F также *w-S-конструктивен*, т. е. $w\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(S)$ является абелевой категорией.

Если основное кольцо A нётерово, то те же результаты имеют место в категории $\mathcal{C}\text{ons}(S)$.

Предложение 8.1.4. Пусть F является ω -S-конструктивным пучком. Тогда для любого $\sigma \in \Delta$ и любого $x \in |\sigma|$ существуют изоморфизмы

$$\begin{aligned} (i) \quad & H^0(U(\sigma); F) \xrightarrow{\sim} H^0(|\sigma|; F) \xrightarrow{\sim} F_x, \\ (ii) \quad & H^j(U(\sigma); F) = H^j(|\sigma|; F) = 0 \quad \text{при } j \neq 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Для $0 < \varepsilon < 1$ положим $I_\varepsilon = \{t \in \mathbb{R}; \varepsilon \leq t \leq 1\}$ и определим отображение $\pi_\varepsilon: I_\varepsilon \times U(\sigma) \rightarrow U(\sigma)$ формулой

$$(8.1.11) \quad \pi_\varepsilon(t, y)(p) = ty(p) + (1-t)x(p) \quad \text{при } p \in S.$$

Отображение π_ε непрерывно и сюръективно, $\pi_\varepsilon(1, \cdot)$ — тождественное отображение $\{1\} \times U(\sigma) \simeq U(\sigma)$, а $\pi_\varepsilon(\varepsilon, \cdot)$ — гомеоморфизм $\{\varepsilon\} \times U(\sigma)$ на $\{\varepsilon\} \times U(\sigma)$.

Обозначим через q_2 проекцию из $I_\varepsilon \times U(\sigma)$ на $U(\sigma)$. Так как из $y \in |\tau|$ следует, что $\pi_\varepsilon(t, y) \in |\tau|$, то $\pi_\varepsilon^{-1}F$ — постоянный пучок на слоях отображения q_2 , т. е. $\pi_\varepsilon^{-1}F = q_2^{-1}G$ для некоторого пучка G на $U(\sigma)$ ($G = q_{2*}\pi_\varepsilon^{-1}F$). Применяя следствие 2.7.7, получаем, что для всех $t \in I_\varepsilon$ морфизм $R\Gamma(I_\varepsilon \times U(\sigma); \pi_\varepsilon^{-1}F) \rightarrow R\Gamma(\{t\} \times U(\sigma); \pi_\varepsilon^{-1}F)$ является изоморфизмом. Следовательно,

$$\begin{aligned} (8.1.12) \quad & R\Gamma(U(\sigma); F) \simeq R\Gamma(\{\varepsilon\}) \times U(\sigma); \pi_\varepsilon^{-1}F \\ & \simeq R\Gamma(\pi_\varepsilon(\{\varepsilon\} \times U(\sigma)); F). \end{aligned}$$

Отметим, что семейство $\{\pi_\varepsilon(\{\varepsilon\} \times U(\sigma))\}_{\varepsilon > 0}$ образует систему окрестности точки x в X . Беря когомологии от обеих частей (8.1.12) и переходя к индуктивному пределу по $\varepsilon > 0$, получаем, что $H^j(U(\sigma); F)$ является нулем при $j > 0$ и изоморфен F_x при $j = 0$. Если те же рассуждения мы проведем для симплициального комплекса σ и пучка $F|_{|\sigma|}$, то получим тот же результат с заменой $U(\sigma)$ на $|\sigma|$, что и завершает доказательство. $\square$

Следствие 8.1.5. (i) Функтор $\Gamma(U(\sigma); \cdot)$ является точным на категории $\omega\text{-Cons}(S)$.

(ii) Если F является ω -S-конструктивным пучком и $\Gamma(U(\sigma); F) = 0$ для всех $\sigma \in \Delta$, то $F = 0$.

Назовем пучок F на $|S|$ S-ациклическим, если для всех $k > 0$ и всех $\sigma \in \Delta$ имеет место равенство $H^k(U(\sigma); F) = 0$. Тогда в силу предложения 8.1.4 ω -S-конструктивные пучки S-циклически. Естественно, вялые пучки на $|S|$ также S-ациклически.

Пусть F — пучок на $|S|$. Мы функториально сопоставим ему ω -S-конструктивный пучок $\beta(F)$ и морфизм $\alpha(F): \beta(F) \rightarrow F$. Для этого определим сначала объект

$$(8.1.13) \quad \alpha(F) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta} (F(U(\sigma)))_{U(\sigma)}.$$

Если M является A -модулем, то $\text{Hom}(M_{U(\sigma)}, F) = \text{Hom}(M, \Gamma(U(\sigma); F))$. Поэтому существует естественный морфизм $i(F) : \alpha(F) \rightarrow F$, и этот морфизм функториален по отношению к F . Пусть F' обозначает ядро морфизма $i(F)$ и $\beta(F)$ обозначает коядро морфизма $\alpha(F') \rightarrow \alpha(F)$, являющегося композицией $\alpha(F') \rightarrow F' \rightarrow \alpha(F)$. Морфизм $s(F) : \beta(F) \rightarrow F$, функториальный по отношению к F , получается из диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F & & \\
 & & & & \nearrow i(F) & & \\
 & & \alpha(F') & \longrightarrow & \alpha(F) & \longrightarrow & \beta(F) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \nearrow & & \uparrow s(F) \\
 & & F' & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
 0 & & & & & &
 \end{array}$$

Отметим, что пучки $\alpha(F)$ и $\beta(F)$ w - S -конструктивны.

Лемма 8.1.6. Если $\sigma \in \Delta$, то естественный морфизм $\Gamma(U(\sigma); \beta(F)) \rightarrow \Gamma(U(\sigma); F)$ является изоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 \alpha(F')(U(\sigma)) & \longrightarrow & \alpha(F)(U(\sigma)) & \longrightarrow & \beta(F)(U(\sigma)) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \parallel & & \downarrow & & \\
 0 \longrightarrow & F'(U(\sigma)) & \longrightarrow & \alpha(F)(U(\sigma)) & \longrightarrow & F(U(\sigma)) & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Так как $\Gamma(U(\sigma); \cdot)$ — точный функтор на $w\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(S)$, то верхняя последовательность точна. Так как морфизм $\alpha(F)(U(\sigma)) \rightarrow F(U(\sigma))$ сюръективен, то нижняя последовательность точна. Теперь требуемый результат вытекает из сюръективности морфизма $\alpha(F')(U(\sigma)) \rightarrow F'(U(\sigma))$. $\square$

Лемма 8.1.7. Пусть F является w - S -конструктивным; тогда $s(F) : \beta(F) \rightarrow F$ — изоморфизм.

Доказательство. Пучки $\text{Ker } s(F)$ и $\text{Coker } s(F)$ являются w - S -конструктивными, и их сечения над $U(\sigma)$ равны нулю по лемме 8.1.6 и следствию 8.1.5(i). Тогда по следствию 8.1.5(ii) эти пучки равны нулю. $\square$

Из этой леммы следует, что $\beta : \text{Mod}(A|_S) \rightarrow w\text{-Cons}(S)$ является правым сопряженным функтором к функтору включения $w\text{-Cons}(S) \rightarrow \text{Mod}(A|_S)$.

Предложение 8.1.8. (i) *Функтор β из $\mathfrak{H}(|S|)$ в $w\text{-Cons}(S)$ точен слева.*

(ii) *Если F — пучок на $|S|$, то $\Gamma(U(\sigma); R^k \beta(F)) = H^k(U(\sigma); F)$ для всех $\sigma \in \Delta$ и всех $k \geq 0$.*

(iii) *$R^k \beta(F) = 0$ для всех $k > 0$ в том и только в том случае, когда пучок F S -ацикличен.*

Доказательство. (i) Пусть $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на $|S|$. Так как пучки $\beta(F')$, $\beta(F)$ и $\beta(F'')$ w - S -конструктивны, то для доказательства точности последовательности $0 \rightarrow \beta(F') \rightarrow \beta(F) \rightarrow \beta(F'')$ достаточно показать (см. следствие 8.1.5(ii)), что для всех $\sigma \in \Delta$ последовательность $0 \rightarrow \Gamma(U(\sigma); \beta(F')) \rightarrow \Gamma(U(\sigma); \beta(F)) \rightarrow \Gamma(U(\sigma); \beta(F''))$ точна. Но это следует из леммы 8.1.6 и точности слева функтора $\Gamma(U(\sigma); \cdot)$.

(ii) Пусть F' — инъективная резольвента пучка F . Тогда $R^k \beta(F) = H^k(\beta F')$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \Gamma(U(\sigma); R^k \beta(F)) &= \Gamma(U(\sigma); H^k(\beta(F'))) \\ &= H^k(\Gamma(U(\sigma); \beta(F'))) \\ &= H^k(\Gamma(U(\sigma); F')) \\ &= H^k(U(\sigma); F). \end{aligned}$$

(Мы использовали здесь лемму 8.1.6 и тот факт, что w - S -конструктивные пучки S -ацикличны.)

(iii) вытекает из (ii) и следствия 8.1.5(ii). □

Предложение 8.1.9. *Пусть F' — ограниченный снизу комплекс S -ациклических пучков. Пусть $H^n(F')$ w - S -конструктивен для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда морфизм $\beta(F') \rightarrow F'$ является квазиизоморфизмом.*

Доказательство. Обозначим через d' дифференциал комплекса F' (т. е. $d^n : F^n \rightarrow F^{n+1}$). Положим $Z^n(F') = \text{Ker } d^n$, $B^n(F') = \text{Im } d^{n-1}$. Рассмотрим точные последовательности

$$(8.1.14) \quad 0 \rightarrow Z^{n-1}(F') \rightarrow F^{n-1} \rightarrow B^n(F') \rightarrow 0,$$

$$(8.1.15) \quad 0 \rightarrow B^n(F') \rightarrow Z^n(F') \rightarrow H^n(F') \rightarrow 0.$$

Предположим, что $Z^{n-1}(F')$ S -ацикличен. Применяя функтор β к (8.1.14), получаем, что $R^k \beta(B^n(F')) = 0$ при $k > 0$, а из

этого и из предложения 8.1.8 следует, что $B^n(F')$ S-ацикличен. То же рассуждение, проведенное для последовательности (8.1.15), дает S-ацикличность $Z^n(F')$. Рассуждения по индукции доказывают S-ацикличность $Z^n(F')$ и $B^n(F')$.

Так как функтор β точен слева, то $\beta(Z^n(F')) = Z^n(\beta(F'))$. Поскольку $R^1\beta(Z^{n-1}(F')) = 0$, из рассмотрения последовательности (8.1.14) получаем, что $\beta(B^n(F')) = B^n(\beta(F'))$. Аналогично, так как $R^1\beta(B^n(F')) = 0$, то из рассмотрения последовательности (8.1.15) получаем, что $\beta(H^n(F')) = H^n(\beta(F'))$. Тогда из леммы 8.1.7 следует, что $\beta(H^n(F')) \simeq H^n(F')$. Это доказывает изоморфизм $H^n(\beta(F')) \simeq H^n(F')$. $\square$

Для того чтобы работать с категорией $D^b(|S|)$, сделаем следующее предположение:

$$(8.1.16) \quad \begin{cases} \text{существует целое } n, \text{ такое, что} \\ \# \sigma \leq n + 1 \text{ для всех } \sigma \in \Delta. \end{cases}$$

Назовем наименьшее n , удовлетворяющее (8.1.16), *размерностью* комплекса S . Из (8.1.16) и предложений 8.1.8 и 3.2.2 следует, что $R^k\beta = 0$ при $k > n$. Рассмотрим функторы (здесь δ — естественный функтор)

$$w\text{-}\mathcal{C}ons(S) \xrightleftharpoons[\beta]{\delta} \mathcal{M}od(A|_S).$$

Они индуцируют функторы

$$(8.1.17) \quad D^b(w\text{-}\mathcal{C}ons(S)) \xrightleftharpoons[R\beta]{\delta} D^b_{w-S-c}(|S|).$$

Теорема 8.1.10. В условиях предположения (8.1.16) функторы δ и $R\beta$ в (8.1.17) являются эквивалентностями категорий и взаимно обратны.

Доказательство. Изоморфизм $R\beta \circ \delta \simeq \text{id}$ в $D^b(w\text{-}\mathcal{C}ons(S))$ следует из существования изоморфизма $\beta \circ \delta \simeq \text{id}$ в $w\text{-}\mathcal{C}ons(S)$.

Изоморфизм $\delta \circ R\beta \simeq \text{id}$ в $D^b_{w-S-c}(|S|)$ следует из предложения 8.1.9. $\square$

Теорема 8.1.11. Пусть основное кольцо A нётерово и справедливо предположение (8.1.16). Тогда естественный функтор $\delta: D^b(\mathcal{C}ons(S)) \rightarrow D^b_{S-c}(|S|)$ является эквивалентностью категорий.

Доказательство. Из предложения 1.7.11 (и замечания 1.7.12) и теоремы 8.1.10 вытекает, что достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 8.1.12. Пусть $u: F \rightarrow G$ — эпиморфизм w - S -конструктивных пучков, и пусть G S -конструктивен. Тогда существуют S -конструктивный пучок H и морфизм $v: H \rightarrow F$, такие, что $u \circ v$ — эпиморфизм.

Доказательство. Из следствия 8.1.5 вытекает, что отображение $F(U(\sigma)) \rightarrow G(U(\sigma))$ сюръективно для любого $\sigma \in \Delta$. Так как (предложение 8.1.4) $G(U(\sigma)) \cong G_x$ при $x \in |\sigma|$, то $G(U(\sigma))$ конечно порожден. Следовательно, существуют конечно порожденный свободный модуль $H(\sigma)$ и эпиморфизм $H(\sigma) \rightarrow G(U(\sigma))$. Этот морфизм расщепляется, и мы получаем морфизмы $H(\sigma) \rightarrow F(U(\sigma)) \rightarrow G(U(\sigma))$. Положим $H = \bigoplus_{\sigma} H(\sigma)_{U(\sigma)}$. Тогда H есть S -конструктивный пучок, морфизмы $H(\sigma) \rightarrow F(U(\sigma))$ определяют морфизм $H \rightarrow F$ и композиция $H \rightarrow F \rightarrow G$ — эпиморфизм. $\square$

Из этих рассуждений следует, что категория $w\text{-}\mathbf{Cons}(S)$ содержит достаточно много проективных объектов, а если A нётерово, то и категория $\mathbf{Cons}(S)$ содержит достаточно много проективных объектов.

8.2. Субаналитические множества

В этом разделе мы без доказательств изложим введение в теорию субаналитических множеств Хиронаки. Подробнее с этой теорией можно ознакомиться по работам [Hironaka 1,2], [Hardt 1,2], [Bierstorne-Milman 1].

Пусть X — многообразие (напомним, что все многообразия считаются вещественно-аналитическими), а Z — подмножество в X .

Определение 8.2.1. Множество Z называется *субаналитическим* в точке $x \in X$, если существуют открытая окрестность U точки x , компактные многообразия Y_j^i ($i = 1, 2, 1 \leq j \leq N$) и морфизмы $f_j^i: Y_j^i \rightarrow X$, такие, что

$$Z \cap U = U \cap \bigcup_{j=1}^N (f_j^1(Y_j^1) \setminus f_j^2(Y_j^2)).$$

Если Z субаналитично в каждой точке $x \in X$, то оно называется *субаналитическим* в X .

Предложение 8.2.2. (i) Пусть Z субаналитично в X . Тогда множества $\bar{Z}$ и $\text{Int}(Z)$ субаналитичны в X , а связные компоненты множества Z локально конечны и субаналитичны.

(ii) Пусть Z_1 и Z_2 субаналитичны в X . Тогда $Z_1 \cup Z_2, Z_1 \setminus Z_2$ и $Z_1 \cap Z_2$ субаналитичны.

(iii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Если $Z \subset X$ субаналитично, то множество $f^{-1}(Z)$ субаналитично в Y . Если $W \subset Y$ субаналитично в Y и f собствен на $\overline{W}$, то $f(W)$ субаналитично в X .

(iv) Пусть Z замкнуто и субаналитично в X . Тогда существуют многообразие Y и собственный морфизм $f: Y \rightarrow X$, такие, что $f(Y) = Z$.

Сформулируем теперь лемму о выборе кривой.

Предложение 8.2.3. Пусть Z субаналитично в X и $x_0 \in \overline{Z}$. Тогда существует аналитическая кривая $t \mapsto x(t)$, $]-1, 1[\rightarrow X$, такая, что $x(0) = x_0$ и $x(t) \in Z$ при $t \neq 0$.

Сформулируем теорему о десингуляризации в вещественно-аналитическом случае.

Предложение 8.2.4. Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция, не равная тождественно нулю на каждой связанной компоненте многообразия X . Положим $Z = \{x \in X; \varphi(x) = 0, d\varphi(x) = 0\}$. Тогда существует собственный морфизм многообразий $f: Y \rightarrow X$, индуцирующий изоморфизм $Y \setminus f^{-1}(Z) \simeq X \setminus Z$, такой, что в окрестности каждой точки $y_0 \in f^{-1}(Z)$ найдется локальная система координат $(y_1, \dots, y_n)$, в которой $\varphi \circ f = \pm y_1^{r_1} \dots y_n^{r_n}$, где r_j — неотрицательные целые числа.

Пусть Z — субаналитическое подмножество в X . Определим множество Z_{reg} как подмножество точек $x \in Z$, таких, что существует открытая окрестность U точки x в X , для которой множество $U \cap Z$ является замкнутым подмногообразием в U . Положим $Z_{\text{sing}} = Z \setminus Z_{\text{reg}}$. Множества Z_{reg} и Z_{sing} субаналитичны в X и $Z \subset \overline{Z_{\text{reg}}}$.

Если $x \in Z_{\text{reg}}$, то $\dim_x(Z)$ (размерность Z в x) является корректно определенной величиной. Положим

$$(8.2.1) \quad \dim(Z) = \sup_{x \in Z_{\text{reg}}} \dim_x(Z).$$

Теорема триангуляции, сформулированная ниже, сводит изучение конструктивных пучков вдоль субаналитических стратификаций к изучению конструктивных пучков на симплициальных комплексах.

Предложение 8.2.5. Пусть $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ — локально конечное разбиение многообразия X на субаналитические подмножества. Тогда существует симплициальный комплекс $S = (S, \Delta)$ и гомеоморфизм $i: |S| \xrightarrow{\sim} X$, такие, что

- (i) $i(|\sigma|)$ для любого $\sigma \in \Delta$ является субаналитическим подмногообразием в X ;
 (ii) для любого $\sigma \in \Delta$ существует $\alpha \in A$, такое, что $i(|\sigma|) \subset X_\alpha$.

8.3. Субаналитические изотропные множества и μ -стратификации

В этом разделе будут сформулированы и доказаны все утверждения о субаналитических изотропных множествах, которые понадобятся нам далее. Мы также введем понятие μ -стратификации.

Пусть S — локально замкнутое субаналитическое подмногообразие многообразия X . Положим

$$(8.3.1) \quad T_S^* X = \overline{T_{S_{\text{reg}}}^* X} \cap \pi^{-1}(S).$$

Предложение 8.3.1. Множество $T_S^* X$ субаналитично в $T^* X$.

Доказательство. Мы можем считать S замкнутым. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — собственный морфизм многообразий и $f(Y) = S$. Положим

$$(8.3.2) \quad Y_0 = \{y \in f^{-1}(S_{\text{reg}}); f'_y: T_y Y \rightarrow T_{f(y)} S \text{ сюръективен}\}.$$

Тогда Y_0 открыто и субаналитично в Y , а $S_0 = f(Y_0)$ открыто, плотно и субаналитично в S . Множество $P = T^* X \setminus f_*^{-1} f'^{-1}(T^* Y_0)$ субаналитично и

$$P = \{(x; \xi) \in T^* X; {}^t f'(y) \cdot \xi = 0 \text{ для любого } y \in Y_0 \cap f^{-1}(x)\}.$$

Следовательно, $P \cap \pi^{-1}(S_0) = T_{S_0}^* X$, и это множество субаналитично. Поэтому множество $T_S^* X = \overline{T_{S_0}^* X}$ также субаналитично. $\square$

Предложение 8.3.2. (i) Пусть M — замкнутое подмногообразие в X и S субаналитично в X . Тогда нормальный конус $C_M(S)$ субаналитичен в $T_M X$.

(ii) Пусть S_1 и S_2 субаналитичны в X . Тогда нормальный конус $C(S_1, S_2)$ субаналитичен в TX .

Доказательство. (ii) следует из (i), а (i) является прямым следствием определения 4.1.1. $\square$

Предложение 8.3.3. Пусть S_1 и S_2 субаналитичны в $\mathbb{R}^n$ и $v \in C_x(S_1, S_2)$. Тогда существуют две вещественно-аналитические кривые $x_i(t)$, $t \in]-1, 1[$, $i = 1, 2$, такие, что $x_i(0) = x$, $x_i(t) \in S_i$ ($t \neq 0$, $i = 1, 2$) и $x_1(t) - x_2(t) = t^k v + O(t^{k+1})$ для некоторого целого k .

Доказательство. Пусть p — отображение $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(x, y, s) \mapsto (x, x - sy)$. Тогда если мы отождествим TX с множеством $\{s = 0\}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, то $C(S_1, S_2) = \overline{p^{-1}(S_1 \times S_2)} \cap \Omega \cap TX$, где $\Omega = \{s > 0\}$.

Пусть $v \in C_x(S_1, S_2)$. По лемме о выборе кривой существует кривая $u(t) = (x(t), y(t), s(t))$, $-1 < t < 1$, такая, что $x(0) = x$, $y(0) = v$, $s(0) = 0$ и $x(t) \in S_1$, $x(t) - s(t)y(t) \in S_2$, $s(t) > 0$ при $t \neq 0$. Полагая $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x(t) - s(t)y(t)$, получаем $x_1(t) - x_2(t) = s(t)y(t) = t^k v + O(t^{k+1})$ при некотором $k > 0$. $\square$

Предложение 8.3.4. Пусть S субаналитично в X и θ — вещественно-аналитическая 1-форма на X . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $\theta|_{S_{\text{reg}}} = 0$,
- (ii) $\theta|_{C_x(S)} = 0$ для любого $x \in X$.

Условие (ii) означает, что θ как линейный функционал на $T_x X$ обращается в нуль на $C_x(S)$.

Доказательство. Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна.

Пусть имеет место (i), и пусть $x_0 \in \bar{S}$, $v \in C_{x_0}(S)$, $v \neq 0$. По предыдущему предложению существуют кривая $x(t)$, $-1 < t < 1$, такая, что $x(t) \in S_{\text{reg}}$ и $x(t) = x_0 + t^k v + O(t^{k+1})$. Выберем локальную систему координат и запишем θ в виде $\theta = \sum_j a_j(x) dx_j$, $v = (v_1, \dots, v_n)$. Тогда $\sum_j a_j(x(t)) (\partial x_j / \partial t) = 0$ при $t \neq 0$; поэтому $k \sum_j a_j(x_0) v_j t^{k-1} + O(t^k) = 0$, и мы получаем $(\theta(x_0), v) = 0$. $\square$

Определение 8.3.5. Если выполнены эквивалентные условия предложения 8.3.4, то мы говорим, что θ исчезает на S , и пишем $\theta|_S = 0$.

Следствие 8.3.6. (i) Пусть $h: X' \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $S \subset X$ и $S' \subset X'$ — субаналитические подмножества и $h(S') \subset S$. Пусть θ есть 1-форма на X . Тогда из $\theta|_S = 0$ следует, что $h^* \theta|_{S'} = 0$.

(ii) Пусть $(S_j)_{j \in J}$ — локально конечное семейство субаналитических подмножеств в X , и пусть θ есть 1-форма на X . Если $\theta|_{S_j} = 0$ для всех j , то $\theta|_{\bigcup_j S_j} = 0$.

Доказательство. (i) Для всех $x' \in X'$ имеем

$$h'(C_{x'}(S')) \subset C_{h(x')}(S).$$

(ii) следует из равенства

$$C_x \left(\bigcup_j S_j \right) = \bigcup_j C_x(S_j).$$

$\square$

Предложение 8.3.7. Пусть $h: X' \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а $S \subset X$ и $S' \subset X'$ — субаналитические подмножества. Пусть $h(S') = S$, и пусть θ есть 1-форма на X . Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (i) $\theta|_S = 0$,
- (ii) $h^*\theta|_{S'} = 0$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) вытекает из следствия 8.3.6(i).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Мы можем считать S невырожденным. Пусть $g: Y \rightarrow X'$ — собственный морфизм, такой, что $g(Y) = S'$. Тогда $g^*h^*\theta = 0$.

Положим $f = g \circ h: Y \rightarrow X$ и $Y_0 = \{y \in Y; f'_y: T_y Y \rightarrow T_{f(y)} X \text{ сюръективно}\}$. Тогда из плотности $f(Y_0)$ в S вытекает требуемый результат (мы предполагаем Y счетным в бесконечности). $\square$

Нам понадобится результат о конических субаналитических подмножествах в векторных расслоениях.

Предложение 8.3.8. Пусть $\tau: E \rightarrow X$ — векторное расслоение.

- (i) Пусть Λ — коническое и субаналитическое подмножество в $\dot{E}$. Тогда Λ субаналитично в E .
- (ii) Если Λ субаналитично в E и $\bar{\Lambda} \rightarrow X$ — собственное отображение, то $\mathbb{R}^+ \cdot \Lambda$ субаналитично.
- (iii) Если Λ — коническое субаналитическое подмножество в E , то $\tau(\Lambda)$ субаналитично в X .
- (iv) Пусть $\tau': E' \rightarrow X$ — векторное расслоение и $f: E \rightarrow E'$ — морфизм расслоений. Если Λ — коническое субаналитическое подмножество в E , то $f(\Lambda)$ субаналитично в E' .

Доказательство. Пусть $\gamma: \dot{E} \rightarrow \dot{E}/\mathbb{R}^+$ — проекция и $i: X \rightarrow E$ — нулевое сечение. Рассмотрим подмногообразие $S \subset \dot{E}$, такое, что $S \rightarrow \dot{E}/\mathbb{R}^+$ — изоморфизм.

(i) Пусть $\mu: \mathbb{R}^+ \times E \rightarrow E$ — умножение. Тогда $\Lambda' = \mu([0, 1] \times (S \cap \Lambda))$ субаналитично в E и (i) следует из того факта, что $\Lambda' \setminus i(X) = \Lambda$ в окрестности точки $i(X)$.

(ii) Отображение $\mu: [0, 1] \times \bar{\Lambda} \rightarrow E$ собственное, потому что $\bar{\Lambda}$ собственное над X . Теперь (ii) следует из того, что $\mathbb{R}^+ \cdot \Lambda = \mu([0, 1] \times \Lambda) \cup p(\mu^{-1}(\Lambda) \cap ([0, 1] \times E))$, где p — вторая проекция $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$.

(iii) есть частный случай (iv) при $E' = X$.

(iv) Пусть $A \subset E$ — субаналитическая открытая окрестность нулевого сечения в E , такая, что отображение $\bar{A} \rightarrow X$ собственное. Тогда $f(A \cap \Lambda)$ субаналитично. Так как $f(\Lambda) = \mathbb{R}^+ \cdot f(A \cap \Lambda)$, то (iv) следует из (ii). $\square$

Рассмотрим теперь субаналитические изотропные подмногожества в T^*X . Напомним, что α_X (или просто α) обозначает каноническую 1-форму на T^*X .

Определение 8.3.9. Пусть Λ — коническое субаналитическое подмногожество в T^*X .

- (i) Λ называется *изотропным*, если $\alpha|_{\Lambda} = 0$.
- (ii) Λ называется *лагранжевым*, если оно изотропно и инволютивно (см. определение 6.5.1).

Предложение 8.3.10. (i) Пусть Λ — замкнутое коническое субаналитическое подмногожество в T^*X . Следующие условия эквивалентны:

- (a) Λ изотропно;
- (b) существует локально конечное семейство $\{X_j\}$ субаналитических подмногожеств в X , такое, что $\Lambda \subset \bigcup_j T_{X_j}^*X$;
- (c) существует конечное семейство $\{X_j\}$ субаналитических подмногообразий, таких, что $X_j \subset \pi(\Lambda)$ и $\Lambda \subset \bigcup_j T_{X_j}^*X$.

(ii) Если Λ изотропно и Y субаналитично в X , то существует субаналитическое подмногообразие $Y_0 \subset Y$, открытое и плотное в Y , такое, что $\Lambda \cap \pi^{-1}(Y_0) \subset T_{Y_0}^*X$.

Доказательство. (i) (b) $\Rightarrow$ (a). По следствию 8.3.6 достаточно доказать, что $\alpha|_{T_{X_j}^*X} = 0$. Это следует из соответствующего результата для $X_{j,\text{reg}}$, так как $T_{X_j}^*X = \overline{T_{X_{j,\text{reg}}}^*X}$.

(a) $\Rightarrow$ (c). Пусть d — максимальный ранг проекции $\pi: \Lambda_{\text{reg}} \rightarrow X$. Будем проводить индукцию по d . Пусть $\Lambda_0 = \{p \in \Lambda_{\text{reg}}; \text{ранг } \pi \text{ в } p \text{ равен } d\}$. Тогда Λ_0 открыто и субаналитично в Λ . Положим $X_0 = (\pi(\Lambda))_{\text{reg}}$ и $\Lambda'_0 = \Lambda_0 \cap \pi^{-1}(X_0)$. Тогда Λ'_0 открыто и субаналитично в Λ , плотно в Λ_0 и дифференциал проекции $\pi: \Lambda'_0 \rightarrow X_0$ сюръективен в каждой точке $p \in \Lambda'_0$. Докажем, что

$$(8.3.3) \quad \Lambda'_0 \subset T_{X_0}^*X.$$

Выберем локальную систему координат $(x_1, \dots, x_n) = (x', x'')$, где $x' = (x_1, \dots, x_p)$, такую, что $X_0 = \{x'' = 0\}$. Пусть $\xi = (\xi', \xi'')$ обозначает двойственную систему координат. Тогда $\alpha|_{\pi^{-1}(X_0)} = \xi' dx'$ и $dx_1, \dots, dx_p$ линейно независимы на X_0 , а π — гладкое отображение. Поэтому $\xi' = 0$ на Λ'_0 , что доказывает (8.3.3). Положим теперь $\Lambda' = \overline{\Lambda'_0} \setminus T_{X_0}^*X$. Так как из (8.3.3) следует, что $\Lambda'_0 \cap \Lambda' = \emptyset$, то возможен следующий шаг индукции.

(c) $\Rightarrow$ (b) очевидно.

(ii) Заменяя Λ и Y на $\Lambda \cap \pi^{-1}(\bar{Y})$ и $\bar{Y}$ соответственно, мы можем с самого начала считать, что $\Lambda \subset \pi^{-1}(Y)$. Тогда, выбирая $\{X_j\}$, как в (i)(c), достаточно определить Y_0 как объединение связных компонент множества $Y_{\text{reg}} \cap X_j$, открытых в Y_{reg} . $\square$

Предложение 8.3.11. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий.

- (i) Пусть $\Lambda \subset T^*Y$ — коническое субаналитическое изотропное множество, такое, что отображение $f_\pi: {}^t f'^{-1}(\Lambda) \rightarrow T^*X$ собственнo. Тогда $f_\pi {}^t f'^{-1}(\Lambda)$ — коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X .
- (ii) Пусть $\Lambda \subset T^*X$ — коническое субаналитическое изотропное множество. Тогда ${}^t f' f_\pi^{-1}(\Lambda)$ — коническое субаналитическое изотропное множество в T^*Y .

Доказательство. (i) Заметим сначала, что ${}^t f'^* \alpha_Y = f_\pi^* \alpha_X$. Применяя теперь предложение 8.3.7, получаем цепочку импликаций

$$\begin{aligned} \alpha_Y|_\Lambda = 0 &\Rightarrow ({}^t f')^* \alpha_Y|_{{}^t f'^{-1}(\Lambda)} = 0 \Leftrightarrow f_\pi^* \alpha_X|_{{}^t f'^{-1}(\Lambda)} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_X|_{f_\pi({}^t f'^{-1}(\Lambda))} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Субаналитичность ${}^t f' f_\pi^{-1}(\Lambda)$ следует из предложения 8.3.8. В остальном доказательство аналогично доказательству п.(i). $\square$

Следующий результат будет играть важную роль в доказательстве теорем конечности.

Предложение 8.3.12 (микролокальная теорема Бертини–Сарда). Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция, а $\Lambda \subset T^*X$ — замкнутое коническое субаналитическое изотропное множество. Пусть $S = \{t \in \mathbb{R}; t = \varphi(x), d\varphi(x) \in \Lambda \text{ для некоторого } x \in X\}$. Пусть φ собственна на $\pi(\Lambda)$. Тогда S дискретно.

Доказательство. Имеем $S = \{t \in \mathbb{R}; (t, dt) \in \varphi_\pi {}^t \varphi'^{-1}(\Lambda)\}$. Так как $\varphi_\pi {}^t \varphi'^{-1}(\Lambda)$ — замкнутое субаналитическое изотропное подмножество, то S дискретно.

Предложение 8.3.13. Пусть Λ и Λ_0 — локально замкнутые конические подмножества в T^*X и $\Lambda \subset \Lambda_0$. Предположим, что Λ_0 субаналитично и изотропно, а Λ инволютивно и замкнуто в Λ_0 . Тогда Λ субаналитично и лагранжево.

Доказательство. Нам понадобятся две леммы.

Лемма 8.3.14. Пусть Λ_0 — изотропное подмногообразие в X , а Λ — инволютивное подмножество, замкнутое в Λ_0 . Тогда Λ открыто в Λ_0 и $\dim \Lambda = \dim X$.

Доказательство леммы 8.3.14. По предположению 6.2.9 Λ_0 локально принадлежит лагранжеву многообразию. Следовательно, мы можем считать Λ_0 лагранжевым. По предположению 6.5.2 для любой вещественной функции φ , равной нулю на Λ_0 , Λ есть объединение интегральных кривых поля H_φ . Λ объединение интегральных кривых, исходящих из точки x , образует ее окрестность. $\square$

Лемма 8.3.15. Пусть S — коническое локально замкнутое субаналитическое изотропное подмногожество в T^*X , и пусть V — локально замкнутое инволютивное подмногожество. Предположим, что $V \subset S$ и $\dim S < \dim X$. Тогда $V = \emptyset$.

Доказательство леммы 8.3.15. Будем проводить индукцию по $\dim S$. Достаточно доказать, что $V \cap S_{\text{reg}} = \emptyset$. Следовательно, мы можем считать S гладким. Пусть $x \in V$. По лемме 8.3.14 $\dim_x V = \dim X$, что противоречит неравенству $\dim S < \dim X$. $\square$

Окончание доказательства предложения 8.3.13. Положим $\Lambda'_0 = (\Lambda_0)_{\text{reg}}$, $\Lambda' = \Lambda \cap \Lambda'_0$. По лемме 8.3.14 Λ' замкнуто и открыто в Λ'_0 . Так как Λ'_0 субаналитично, то Λ' также субаналитично. Теперь достаточно показать, что $\Lambda = \overline{\Lambda'} \cap \Lambda_0$. Положим $V = \Lambda \setminus \overline{\Lambda'}$. Это — инволютивное подмногожество в T^*X , содержащееся в $\Lambda_0 \setminus (\Lambda_0)_{\text{reg}}$. Значит, V пусто по лемме 8.3.15. $\square$

Для рассмотрения нормального конуса изотропного подмногоства вдоль лагранжева подмногообразия нам понадобится такая лемма.

Лемма 8.3.16. Пусть $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ с системой координат (x, t) . Пусть Y — гиперповерхность $\{t = 0\}$, а Z субаналитично в X и $Z \subset \overline{Z} \setminus Y$. Пусть α есть 1-форма на X и $\theta = t\alpha + bdt$, где b — вещественно-аналитическая функция на X . Тогда из $\theta|_Z = 0$ следует, что $\alpha|_{Z \cap Y} = 0$ и $b|_{Z \cap Y} = 0$.

Доказательство. Мы можем считать Z замкнутым. Пусть $f: X' \rightarrow X$ — собственный морфизм многообразий, такой, что $f(X') = Z$. Положим $Y' = f^{-1}(Y)$. Пусть X'' — объединение тех связных компонент многообразия X' , на которых $t \circ f = 0$. Так как $f(X' \setminus X'') \subset Z \setminus Y$, то $f(X' \setminus X'') = Z$. Следовательно, заменяя X' на $X' \setminus X''$, мы можем считать Y' нигде не плотным. Применяя предложение 8.2.4 к функции $t' = t \circ f$, мы можем считать, что в окрестности каждой точки из Y' существует локальная система координат $(t_1, \dots, t_N)$, такая, что $t' = \pm \prod_{j=1}^l t_j^{a_j}$, где $1 \leq l \leq N$ и a_j — положительные целые числа. Положим $\alpha' = f^*\alpha$, $b' = f^*b$. Тогда

$t'\alpha' + b'dt' = 0$. Так как $dt'/t' = \sum_j (a_j/t_j) dt_j$, то

$$(8.3.4) \quad \alpha' = -b' \left(\sum_j (a_j/t_j) dt_j \right).$$

Из этой формулы следует, что произведение $t_1 \dots t_l$ делит b' и, значит, $b'|_{Y'} = 0$ и $b|_{Y \cap Z} = 0$.

Мы можем переписать (8.3.4) в виде

$$\alpha' = (-b'/t_1 \dots t_l) \left(\sum_j t_1 \dots t_l (a_j/t_j) dt_j \right).$$

Следовательно, $\alpha'|_{Y'_{\text{reg}}} = 0$. Отсюда по предложению 8.3.7 следует, что $\alpha'|_{Y'} = 0$ и $\alpha|_{Y \cap Z} = 0$. $\square$

Теорема 8.3.17. Пусть $\Lambda \subset T^*X$ — (гладкое коническое) лагранжево подмногообразие, а $S \subset T^*X$ — коническое субаналитическое изотропное подмногообразие в T^*X . Мы отождествим $T_\Lambda T^*X$ и $T^*\Lambda$ с помощью $-H$, где H — гамильтонов изоморфизм: $TT^*X \simeq T^*T^*X$. Тогда

- (i) нормальный конус $C_\Lambda(S)$ есть коническое субаналитическое изотропное подмногообразие в $T^*\Lambda$;
- (ii) $C_\Lambda(S)$ содержится в гиперплоскости $\{\alpha_X = 0\}$.

(Напомним, что $\alpha_X = 0$ на Λ и α_X определяет линейный функционал на $T_\Lambda T^*X$. Поэтому гиперплоскость $\{\alpha_X = 0\}$ корректно определена в $T_\Lambda T^*X \simeq T^*\Lambda$.)

Доказательство. Мы можем считать Λ конормальным расслоением к некоторому подмногообразию (предложение П.2.9 и упр. П.2). Для простоты положим $\Lambda = \{(x; \xi) \in T^*\mathbb{R}^n; x = 0\}$ (в общем случае доказательство аналогично). Рассмотрим отображение $p: T^*X \times \mathbb{R} \rightarrow T^*X, ((x; \xi), t) \mapsto (tx; \xi)$. Тогда $T_\Lambda T^*X \simeq \{t = 0\}$, $C_\Lambda(S) \simeq p^{-1}(S) \cap \{t > 0\} \cap \{t = 0\}$ и $p^*(\alpha_X) = \sum_j \xi_j d(tx_j) = t(\sum_j \xi_j dx_j) + \langle x, \xi \rangle dt$. Так как $p^*(\alpha_X)|_{p^{-1}(S)} = 0$ по предложению 8.3.7, то из леммы 8.3.16 следует, что

$$\left(\sum_j \xi_j dx_j \right) \Big|_{C_\Lambda(S)} = 0 \quad \text{и} \quad \langle x, \xi \rangle|_{C_\Lambda(S)} = 0.$$

Значит, $(\sum_j x_j d\xi_j)|_{C_\Lambda(S)} = 0$, что и завершает доказательство, так как $-\sum_j x_j d\xi_j$ есть каноническая 1-форма на $T^*\Lambda$. $\square$

Следствие 8.3.18. (i) Пусть Λ_1 и Λ_2 — конические субаналитические изотропные подмножества в T^*X . Тогда $\Lambda_1 \hat{+} \Lambda_2$ — коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X .

(ii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а $\Lambda \subset T^*X$ — коническое субаналитическое изотропное подмножество. Тогда $f^*(\Lambda)$ — коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*Y (см. определение 6.2.3).

Теперь мы приступим к изучению стратификаций многообразия X субаналитическими подмногообразиями. Напомним основные определения.

Пусть $(X_j)_{j \in J}$ — семейство подмножеств в X . Это семейство называется *покрытием*, если $X = \bigcup_{j \in J} X_j$. Если X_j попарно не пересекаются, то такое покрытие называется *разбиением* многообразия X . В этом случае мы пишем $X = \bigsqcup_{j \in J} X_j$. Покрытие $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ называется *уточнением* покрытия $X = \bigcup_{j \in J} X'_j$, если для любого $i \in I$ найдется $j \in J$, такое, что $X_i \subset X'_j$.

Определение 8.3.19. (i) Разбиение $Y = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ замкнутого субаналитического подмножества $Y \subset X$ называется его *субаналитической стратификацией*, если оно локально конечно, все X_α являются субаналитическими подмногообразиями и $X_\beta \subset \overline{X}_\alpha$ для всех пар $(\alpha, \beta) \in A \times A$, таких, что $\overline{X}_\alpha \cap X_\beta \neq \emptyset$. Если условия определения выполнены, то X_α называются *стратами*.

(ii) Пусть N и M — подмногообразия в X . Мы говорим, что пара (N, M) *удовлетворяет μ -условию*, если

$$(8.3.5) \quad (T_M^*X \hat{+} T_N^*X) \cap \pi^{-1}(N) \subset T_N^*X.$$

(iii) Разбиение $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ называется *μ -стратификацией*, если оно является субаналитической стратификацией и для всех пар $(\alpha, \beta) \in A \times A$, таких, что $X_\beta \subset \overline{X}_\alpha \setminus X_\alpha$, пара (X_α, X_β) удовлетворяет μ -условию.

Отметим, что если $X = \bigsqcup_{\alpha} X_\alpha$ есть μ -стратификация, то множество $\Lambda = \bigsqcup_{\alpha} T_{X_\alpha}^*X$ является замкнутым коническим субаналитическим и изотропным подмножеством в T^*X . В самом деле, если $X_\beta \subset \overline{X}_\alpha$, то $\overline{T_{X_\alpha}^*X} \cap \pi^{-1}(X_\beta)$ содержится в $T_{X_\beta}^*X$.

Теорема 8.3.20. Пусть $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ — локально конечное покрытие многообразия X субаналитическими подмножествами. Тогда существует μ -стратификация $X = \bigsqcup_{j \in J} X_\alpha$, являющаяся уточнением покрытия $\{X_j\}$.

Для доказательства теоремы нам понадобится лемма.

Лемма 8.3.21. (i) Пусть Y — замкнутое субаналитическое подмножество в X , а $Y = \bigcup_{j \in J} X_j$ — локально конечное покрытие множества Y субаналитическими подмножествами. Тогда существует субаналитическая стратификация множества Y , являющаяся утончением покрытия $\{X_j\}$.

(ii) Пусть N и M — субаналитические подмногообразия в X . Тогда множество Ω точек $x \in N$, таких, что (M, N) удовлетворяет μ -условию в окрестности точки x , является плотным в N и субаналитическим в X .

(iii) Пусть X' открыто и субаналитично в X , а $X' = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ — субаналитическая стратификация множества X' , страты X_α которой субаналитичны в X . Тогда существует наибольшее открытое подмножество Ω в X' , такое, что $\Omega = \bigsqcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \cap \Omega)$ является μ -стратификацией множества Ω . Кроме этого, Ω субаналитично в X .

Доказательство леммы 8.3.21. (i) Пусть A — множество конечных подмножеств множества J . Положим $Z_\alpha = (\bigcap_{j \in \alpha} X_j) \setminus (\bigcup_{j \notin \alpha} X_j)$, где $\alpha \in A$. Тогда $Y = \bigsqcup_{\alpha} Z_\alpha$ — локально конечное субаналитическое разбиение, т. е. мы с самого начала можем считать, что $Y = \bigsqcup_j X_j$ — локально конечное субаналитическое разбиение. Будем проводить индукцию по $\dim Y$. Пусть X'_j — объединение связных компонент множества $(X_j)_{\text{reg}} \cap Y_{\text{reg}}$, открытых в Y_{reg} . Положим $Y' = Y \setminus (\bigcup_j X'_j)$. Так как $Y \setminus Y' = \bigsqcup_j X_j$ — объединение непересекающихся множеств, то это есть субаналитическая стратификация. Пусть A — множество конечных подмножеств множества J . По предположению индукции существует субаналитическая стратификация $Y' = \bigsqcup_{j \in J'} Y_j$, являющаяся утончением исходной стратификации

$$Y' = \bigcup_{j \in J, \alpha \in A} \left[Y' \cap X_j \cap \left(\bigcap_{k \in \alpha} \overline{(X_k \setminus Y')} \right) \setminus \left(\bigcup_{k \in J \setminus \alpha} \overline{(X_k \setminus Y')} \right) \right].$$

Тогда $Y = (\bigsqcup_{j \in J} (X_j \setminus Y')) \sqcup (\bigsqcup_{j \in J'} Y_j)$ — искомая стратификация.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что для любого j и любого $k \in J'$ из $\overline{X_j \setminus Y'} \cap Y_k \neq \emptyset$ следует, что $X_j \setminus Y' \supset Y_k$. Существует α , такое, что $Y_k \subset \bigcap_{i \in \alpha} \overline{(X_i \setminus Y')} \setminus (\bigcup_{i \in J \setminus \alpha} \overline{X_i \setminus Y'})$. Поэтому из $\overline{X_j \setminus Y'} \cap Y_k \neq \emptyset$ следует, что $j \in \alpha$. Это доказывает требуемое утверждение.

(ii) $\Omega = N \setminus \pi(Z)$, где $Z = \overline{(T_N^* X \hat{+} T_M^* X) \setminus T_N^* X}$. Поэтому Ω субаналитично. Так как $T_N^* X \hat{+} T_M^* X$ изотропно, то существует открытое плотное подмножество U в N , такое, что $(T_N^* X \hat{+} T_M^* X) \cap \pi^{-1}(U) \subset T_N^* X$ (предложение 8.3.10(ii)). Тогда $\pi(Z) \cap U = \emptyset$.

(iii) Множество Ω является дополнением к множеству $\bigcup_{(\alpha, \beta)} X_\beta \cap \pi((T_{X_\alpha}^* X \hat{+} T_{X_\beta}^* X) \setminus T_{X_\beta}^* X)$, где $(\alpha, \beta) \in A \times A$, $X_\beta \subset \overline{X_\alpha} \setminus X_\alpha$. $\square$

Доказательство теоремы 8.3.20. Мы можем считать, что $X = \bigsqcup_j X_j$ — субаналитическая стратификация. Проводя индукцию по $\dim Y$, достаточно показать, что если Y — замкнутое субаналитическое подмножество в X , такое, что $X \setminus Y = \bigsqcup_{j \in J} (X_j \setminus Y)$ есть μ -стратификация, то существуют нигде не плотное субаналитическое подмножество $Y' \subset Y$ и более тонкая субаналитическая стратификация $X = \bigsqcup_i X'_i$, такие, что разбиение $X \setminus Y' = \bigsqcup_i (X'_i \setminus Y')$ является μ -стратификацией. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим стратификацию $Y = \bigsqcup_k Y_k$ субаналитическими многообразиями, более тонкую, чем разбиение $Y = \bigsqcup_j (X_j \cap Y)$. Тогда $X = (\bigsqcup_j (X_j \setminus Y)) \sqcup (\bigsqcup_k Y_k)$ является субаналитической стратификацией. То есть мы можем считать, что $J = J' \sqcup J''$, $X \setminus Y = \bigsqcup_{j \in J'} X_j$, $Y = \bigsqcup_{j \in J''} X_j$. Пусть Ω — наибольшее открытое подмножество в X , такое, что $\Omega = \bigsqcup_j (X_j \cap \Omega)$ является μ -стратификацией (лемма 8.3.21(ii)). Тогда Ω субаналитично и содержит $X \setminus Y$. Следовательно, достаточно показать, что $\Omega \cap Y$ плотно в Y . Но это следует из леммы 8.3.21(ii). $\square$

Следствие 8.3.22. Пусть Λ — замкнутое коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X . Тогда существует μ -стратификация $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, такая, что $\Lambda \subset \bigsqcup_\alpha T_{X_\alpha}^* X$.

Доказательство. Из предложения 8.3.10 следует существование локально конечного покрытия $X = \bigcup_j X_j$ субаналитическими множествами, такого, что $\Lambda \subset \bigcup_j T_{X_j}^* X$. Применяя теорему 8.3.20, мы находим μ -стратификацию $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, утончающую покрытие. Тогда $\bigcup_j T_{X_j}^* X \subset \bigsqcup_\alpha T_{X_\alpha}^* X$, что и доказывает утверждение. $\square$

Предложение 8.3.23. Пусть M — подмногообразие в X , а Λ — коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X . Если $T_M^* X \cap \Lambda = \emptyset$ и $(\Lambda \hat{+} T_M^* X) \cap \pi^{-1}(M) \subset T_M^* X$, то $\overline{\Lambda} \cap T_M^* X$ нигде не плотно на каждом слое расслоения $T_M^* X \rightarrow M$.

Доказательство. Мы покажем, что $\pi^{-1}(x_0) \cap \overline{\Lambda}$ нигде не плотно в $T_M^* X$ для любого $x_0 \in M$. Возьмем локальную систему координат (x', x'') на X , такую, что $M = \{x' = 0\}$, и пусть x_0 — начало координат. Мы будем использовать ассоциированные системы координат на $T^*T_M^* X$ и $T_{T_M^* X} T^* X$, как в (6.2.3). Из условия $(\Lambda \hat{+} T_M^* X) \cap \pi^{-1}(M) \subset T_M^* X$ следует, что

$$(8.3.6) \quad \{x' = 0\} \cap C_{T_M^* X}(\Lambda) \subset \{\xi'' = 0\}.$$

С другой стороны, $CT_M^*X(\Lambda)$ изотропно по теореме 8.3.17, и, следовательно, существует открытое плотное подмножество U в $\pi^{-1}(x_0) \cap T_M^*X$, такое, что $CT_M^*X(\Lambda) \times_{T_M^*X} U \subset T_{\pi^{-1}(x_0) \cap T_M^*X}^*(T_M^*X)$ (предложение 8.3.10(ii)). Так как $T_{\pi^{-1}(x_0) \cap T_M^*X}^*(T_M^*X)$ есть $\{x' = 0, x'' = 0\}$, то $CT_M^*X(\Lambda) \times_{T_M^*X} U$ содержится в $\{x' = \xi'' = 0\}$, т. е. в нулевом сечении расслоения $T_{T_M^*X}^*T^*X$. Это означает, что $\bar{\Lambda} \cap U$ содержится в T_M^*X в окрестности U , а $T_M^*X \cap \Lambda$ пусто, из чего следует, что $\bar{\Lambda} \cap U = \emptyset$. $\square$

Следствие 8.3.24. Пусть $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ есть μ -стратификация. Тогда

$$\pi \left(T_{X_{\alpha}}^*X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} \overline{T_{X_{\beta}}^*X} \right) = X_{\alpha}.$$

Введем понятие субаналитической фильтрации, сходное с понятием стратификации, но в некоторых случаях более удобное.

Определение 8.3.25. (i) *Убывающей фильтрацией* на топологическом пространстве X называется убывающая последовательность $\{X_j\}$ его замкнутых подмножеств, такая, что $X_j = X$ при $j \ll 0$ и $X_j = \emptyset$ при $j \gg 0$.

(ii) *Субаналитической фильтрацией* на вещественно-аналитическом многообразии X называется убывающая фильтрация $\{X_j\}$, такая, что X_j субаналитичны в X и $X_j \setminus X_{j+1}$ — вещественно-аналитические многообразия.

(iii) Субаналитическая фильтрация называется μ -фильтрацией, если пары $(X_j \setminus X_{j+1}, X_k \setminus X_{k+1})$ удовлетворяют μ -условию при всех j и $k, j > k$.

Аналогично определяются возрастающие фильтрации.

Предложение 8.3.26. Пусть $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$ — локально конечное покрытие многообразия X замкнутыми субаналитическими подмножествами. Тогда существует субаналитическая μ -фильтрация $\{X_j\}$, такая, что для любого j каждая связная компонента множества $X_j \setminus X_{j+1}$ содержится в некотором X_{α} .

Доказательство. Мы можем считать, что $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ является μ -стратификацией. Положим

$$X_j = \bigcup_{\dim X_{\alpha} \leq -j} X_{\alpha}.$$

Тогда $X_j \setminus X_{j+1}$ является объединением попарно непересекающихся $(-j)$ -мерных многообразий. Фильтрация $\{X_j\}$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

Докажем существование функции Морса по отношению к изотропному подмногообразию. Этот результат понадобится нам в гл. 10.

Предложение 8.3.27. Пусть X является n -мерным замкнутым подмногообразием в $\mathbb{R}^N$, а Λ — замкнутое коническое субаналитическое изотропное подмногообразие в T^*X . Пусть Λ_0 — субаналитическое n -мерное подмногообразие, содержащееся в Λ , и $\dim(\Lambda \setminus \Lambda_0) < n$. Тогда существует точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, такая, что если $\phi(x) = |x - x_0|^2$, $x \in X$, и $\Lambda_\phi = \{(x, d\phi(x)); x \in X\} \subset T^*X$, то

$$(8.3.7) \quad \Lambda_\phi \cap \Lambda \subset \Lambda_0 \quad \text{и пересечение трансверсально.}$$

Доказательство. Обозначим через q проекцию $X \times_{\mathbb{R}^N} T^*\mathbb{R}^N \rightarrow T^*X$. Заменяя X, Λ, Λ_0 на $\mathbb{R}^N, q^{-1}\Lambda, q^{-1}\Lambda_0$, мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^n$. Обозначим через $(x; \xi)$ однородные симплектические координаты на $T^*\mathbb{R}^n$. Полагая $g(x, \xi) = x - \xi/2$, имеем $\Lambda_\phi = g^{-1}(x_0)$. Пусть теперь f является композицией:

$$f: \Lambda \hookrightarrow T^*\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n.$$

Так как $\dim(\Lambda \setminus \Lambda_0) \leq n - 1$, то $f(\Lambda \setminus \Lambda_0)$ имеет меру 0. Положим $G = \{p \in \Lambda_0; T_p f \text{ не сюръективно}\}$. По теореме Сарда (см. [Guillemin-Pollack 1]) $f(G)$ имеет меру 0. Следовательно, $f(\Lambda \setminus \Lambda_0) \cup f(G) \neq \mathbb{R}^n$ и любая точка $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (f(\Lambda \setminus \Lambda_0) \cup f(G))$ удовлетворяет требуемым условиям. $\square$

Функция Морса на стратифицированных пространствах описана в работах [Lazzeri 1], [Pignogni 1] и в [Goresky-MacPherson 2].

8.4. $\mathbb{R}$ -конструктивные пучки

В этом разделе мы рассмотрим пучки, локально постоянные вдоль субаналитических стратификаций.

Предложение 8.4.1. Пусть $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ есть μ -стратификация, а $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) для всех $j \in \mathbb{Z}$ и всех $\alpha \in A$ пучки $H^j(F)|_{X_\alpha}$ локально постоянны;
- (ii) $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (i) Согласно следствию 6.4.5, $\text{SS}(F_{X_\alpha})$ содержится в $\text{SS}(F) + T_{X_\alpha}^* X$ в окрестности X_α . Поэтому $\text{SS}(F_{X_\alpha}) \cap \pi^{-1}(X_\alpha)$

содержится в $T_{X_\alpha}^* X$, и по предложению 5.4.4 $SS(F|_{X_\alpha}) \subset T_{X_\alpha}^* X_\alpha$. Значит, по предложению 5.4.5 пучок $H^j(F)|_{X_\alpha} = H^j(F|_{X_\alpha})$ локально постоянен.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Так как задача локальна, то мы можем считать стратификацию конечной. Пусть B — подмножество в A , такое, что $Y = \bigsqcup_{\alpha \in B} X_\alpha$ замкнуто в X . Предположим, что $SS(F) \cap \pi^{-1}(X \setminus Y) \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$. Пусть $\alpha_0 \in B$ таково, что X_{α_0} открыто в Y . Положим $Y' = Y \setminus X_{\alpha_0}$. Рассуждая по индукции, достаточно показать, что $SS(F) \cap \pi^{-1}(X \setminus Y') \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$. То есть мы можем считать, что $Y = X_{\alpha_0}$. Обозначим через j открытое вложение $X \setminus X_{\alpha_0} \hookrightarrow X$. Получаем выделенный треугольник

$$Rj_* j^{-1} F \longrightarrow F \longrightarrow F_{X_{\alpha_0}} \xrightarrow{+1}.$$

По условию и предложению 5.4.4 $SS(F_{X_{\alpha_0}}) \subset T_{X_{\alpha_0}}^* X$. Тогда из предложения 6.3.2 следует, что

$$\begin{aligned} SS(Rj_* j^{-1} F) \cap \pi^{-1}(X_{\alpha_0}) &\subset \left(\bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X \right) \hat{+} T_{X_{\alpha_0}}^* X \\ &= \bigcup_{\alpha \in A} (T_{X_\alpha}^* X \hat{+} T_{X_{\alpha_0}}^* X) \\ &\subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X. \end{aligned}$$

Это и требовалось доказать. $\square$

Теорема 8.4.2. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует конечное покрытие $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ субаналитическими подмножествами, такое, что для всех $j \in \mathbb{Z}$ и всех $i \in I$ пучки $H^j(F)|_{X_i}$ локально постоянны;
- (ii) $SS(F)$ содержится в замкнутом коническом субаналитическом изотропном подмножестве;
- (iii) $SS(F)$ — замкнутое коническое субаналитическое лагранжеево подмножество.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из предложений 8.3.20, 8.4.1 и 8.3.10.

(ii) $\Rightarrow$ (i) вытекает из следствия 8.3.22 и предложения 8.4.1.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) очевидно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) следует из теоремы инволютивности (теорема 6.5.4) и предложения 8.3.13. $\square$

Определение 8.4.3. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$.

- (i) Объект F называется *слабо $\mathbb{R}$ -конструктивным* ($w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивным), если он удовлетворяет условиям теоремы 8.4.2.
- (ii) Если F является $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивным и F_x для каждого $x \in X$ является совершенным комплексом, то F называется $\mathbb{R}$ -конструктивным.

Заметим, что если основное кольцо нётерово, то условие (ii) эквивалентно утверждению, что все группы когомологий $H^j(F_x)$ конечно порождены.

Обозначим через $\mathbf{D}_{w\text{-}\mathbb{R}\text{-}c}^b(X)$ (соответственно $\mathbf{D}_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(X)$) полную триангулированную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(X)$, состоящую из $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивных (соответственно $\mathbb{R}$ -конструктивных) объектов.

Пучок F на X называется $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивным (соответственно $\mathbb{R}$ -конструктивным), если он является таковым, когда рассматривается как объект в $\mathbf{D}^b(X)$. Обозначим через $w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)$ (соответственно $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)$) полную подкатегорию в $\text{Mod}(A_X)$, состоящую из $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивных (соответственно $\mathbb{R}$ -конструктивных) пучков.

Пусть $u: F \rightarrow G$ — морфизм пучков на X , причем F и G $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивны. Легко доказать, что $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$ и $\text{Coker } u$ являются $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивными. Кроме того, если $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность пучков на X и F' и F'' $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивны, то F также $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивен. Следовательно, $w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)$ — абелева категория.

Если основное кольцо A нётерово, то все эти утверждения справедливы и в категории $\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)$.

Пример 8.4.4. Пусть $Z \subset X$ — локально замкнутое субаналитическое подмножество. Тогда пучок A_Z $\mathbb{R}$ -конструктивен.

Теорема 8.4.5. (i) Естественный функтор $\mathbf{D}^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)) \rightarrow \mathbf{D}_{w\text{-}\mathbb{R}\text{-}c}^b(X)$ является эквивалентностью категорий.

(ii) Пусть основное кольцо A нётерово. Тогда естественный функтор $\mathbf{D}^b(\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)) \rightarrow \mathbf{D}_{\mathbb{R}\text{-}c}^b(X)$ является эквивалентностью категорий.

Доказательство. (i) Нам нужно доказать утверждения (a) и (b) ниже.

(a) Для любого $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w\text{-}\mathbb{R}\text{-}c}^b(X))$ существует объект $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X)))$, изоморфный F в $\mathbf{D}^b(X)$.

(b) Для любых объектов F и G из $\mathbf{D}^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X))$ имеет место изоморфизм

$$(8.4.1) \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X))}(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(F, G).$$

Докажем (а). Выберем локально конечное покрытие субаналитическими множествами $X = \bigcup_{j \in J} X_j$, такое, что $H^k(F)|_{X_j}$ локально постоянны для всех k и всех j . По предложению 8.2.5 существует симплициальный комплекс $S = (S, \Delta)$ и гомеоморфизм $i: |S| \xrightarrow{\sim} X$, такие, что

$$(8.4.2) \quad i(|\sigma|) \text{ субаналитичны для всех } \sigma \in \Delta,$$

$$(8.4.3) \quad \begin{cases} \text{для любого } \sigma \in \Delta \text{ существует } j \in J, \\ \text{такое, что } i(|\sigma|) \subset X_j. \end{cases}$$

Поэтому $i^{-1}(F)$ является объектом в $D_{w-S-c}^b(|S|)$ и по теореме 8.1.10 существует объект $G \in \text{Ob}(D^b(w\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(S)))$, изоморфный $i^{-1}(F)$. Тогда i_*G является объектом в $D^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X))$, изоморфным F .

Докажем (b). Пусть $F^\bullet$ и $G^\bullet$ — два ограниченных комплекса $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивных пучков. Существуют симплициальный комплекс $S = (S, \Delta)$ и гомеоморфизм $i: |S| \xrightarrow{\sim} X$, удовлетворяющие (8.4.2) и такие, что

$$(8.4.4) \quad \begin{cases} i^{-1}(F^\bullet) \text{ и } i^{-1}(G^\bullet) \text{ есть комплексы} \\ w\text{-}S\text{-конструктивных пучков.} \end{cases}$$

Рассмотрим диаграмму

$$(8.4.5) \quad \begin{array}{ccc} \text{Hom}_{D^b(w\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(S))}(i^{-1}F^\bullet, i^{-1}G^\bullet) & \xrightarrow{v} & \text{Hom}_{D^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X))}(F^\bullet, G^\bullet) \\ \downarrow u & & \downarrow w \\ \text{Hom}_{D^b(|S|)}(i^{-1}F^\bullet, i^{-1}G^\bullet) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_{D^b(X)}(F^\bullet, G^\bullet) \end{array}$$

Согласно теореме 8.1.10, u — изоморфизм. Следовательно, отображение w сюръективно. Докажем, что w инъективно. Пусть $\varphi \in \text{Hom}_{D^b(w\text{-}\mathbb{R}\text{-}\mathcal{C}\text{ons}(X))}(F^\bullet, G^\bullet)$ и $w(\varphi) = 0$. Представим φ квазиизоморфизмом $G^\bullet \xrightarrow{\sim} G'^\bullet$ и морфизмом $\varphi': F^\bullet \rightarrow G'^\bullet$. Заменяя φ на φ' , мы можем считать φ морфизмом из $F^\bullet$ в $G^\bullet$. Тогда $\varphi = v \circ i^{-1}(\varphi)$, и если $w(\varphi) = 0$, то $i^{-1}(\varphi) = 0$, т. е. $\varphi = 0$.

(ii) Доказательство аналогично. □

Из теоремы 8.4.2 следует, что $w\text{-}\mathbb{R}$ -конструктивность — микролокальное свойство. Значит, мы можем применить всю технику, развитую в гл. 5 и 6, для изучения функториальных свойств конструктивных объектов.

Предложение 8.4.6. (i) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий.

- (i)_a Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$. Тогда $f^{-1}F$ и $f^!F$ принадлежат $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(Y)$.
- (i)_b Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(Y))$, и пусть f является собственным на $\text{supp}(G)$. Тогда $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$.
- (ii) Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$. Тогда $G \otimes^L F$ и $R\mathcal{H}om(G, F)$ принадлежат $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$, а $\mu\mathcal{H}om(G, F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(T^*X))$.
- (iii) Пусть $E \rightarrow X$ — векторное расслоение и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E))$. Предположим, что F w - $\mathbb{R}$ -конструктивен. Тогда $F^\wedge$, преобразование Фурье–Сато объекта F , является w - $\mathbb{R}$ -конструктивным объектом.

Доказательство. Применим теорему 8.3.17 и предложение 8.3.11. Тогда (i)_a вытекает из следствия 6.4.4, (i)_b — из предложения 5.4.4, (ii) — из следствия 6.4.5 и следствия 6.4.3, а (iii) — из теоремы 5.5.5. $\square$

Для дальнейшего рассмотрения $\mathbb{R}$ -конструктивных пучков нам понадобится лемма. Сначала введем

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \varepsilon\}, \\ B_{\varepsilon', \varepsilon} &= \{x \in \mathbb{R}^n; \varepsilon' < |x| < \varepsilon\}, \\ S_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\overline{B}_\varepsilon$ и $\overline{B}_{\varepsilon', \varepsilon}$ замыкания B_ε и $B_{\varepsilon', \varepsilon}$ соответственно.

Лемма 8.4.7. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$, а $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вещественно-аналитическая функция. Предположим, что φ собственна на $\text{supp}(F)$. Тогда существуют естественные изоморфизмы

- (i) $R\Gamma(\varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon); F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\varphi^{-1}(B_\varepsilon); F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\varphi^{-1}(0); F)$ при $0 < \varepsilon \ll 1$;
- (ii) $R\Gamma_{\varphi^{-1}(0)}(X; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon)}(X; F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\varphi^{-1}(B_\varepsilon); F)$ при $0 < \varepsilon' < \varepsilon \ll 1$;
- (iii) $R\Gamma(\varphi^{-1}(B_{0, \varepsilon}); F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\varphi^{-1}(B_{\varepsilon'', \varepsilon'}); F) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(S_{\varepsilon'''}; F)$ при $0 \leq \varepsilon'' < \varepsilon''' < \varepsilon' \leq \varepsilon \ll 1$.

Доказательство. Заменяя φ на $|\varphi|^2$, мы можем считать, что $n = 1$. Применим микролокальную теорему Бертини–Сарда (предложение 8.3.12) с $\Lambda = \text{SS}(F)$ и микролокальную лемму Морса (следствие 5.4.19). $\square$

Отметим, что эта лемма применима в том частном случае, когда X открыто в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi(x) = x - x_0$ для некоторого $x_0 \in X$.

Предложение 8.4.8. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, и пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$. Предположим, что f собствен на $\text{supp}(G)$. Тогда $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$.

Доказательство. Из предложения 8.4.6 следует, что нам достаточно доказать, что $R\Gamma(f^{-1}(x); G|_{f^{-1}(x)})$ есть совершенный комплекс для каждой точки $x \in X$. Представим f в виде композиции с помощью отображения графика. Теперь мы можем считать f гладким и положить $X = \{\text{pt}\}$ (мы используем очевидное соображение, что если $S \subset Y$ — подмногообразие, то $G|_S \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(S))$). Используя замкнутое вложение $Y \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, мы можем считать, что $Y = \mathbb{R}^n$.

Рассуждение по индукции сводит задачу к случаю $n = 1$. Другими словами, нужно доказать, что если $Y = \mathbb{R}$ и G имеет компактный носитель, то комплекс $R\Gamma(Y; G)$ совершенный. Так как $\text{SS}(G)$ субаналитичен и изотропен, то существует конечная последовательность $t_1, \dots, t_N$ вещественных чисел, такая, что $\text{supp}(G) \subset [t_1, t_N]$ и $G|_{[t_{i-1}, t_i]}$ постоянен при всех $i \leq N$. Рассматривая выделенные треугольники

$$\begin{aligned} G]_{-\infty, t_i[} &\longrightarrow G \longrightarrow G[t_i, +\infty[\xrightarrow{+1}, \\ G]_{t_i, +\infty[} &\longrightarrow G[t_i, +\infty[\longrightarrow G\{t_i\} \xrightarrow{+1} \end{aligned}$$

и рассуждая по индукции, приходим к выводу, что достаточно доказать, что комплекс $R\Gamma(Y; G|_{]t_{i-1}, t_i[})$ совершенен. Так как этот комплекс изоморфен комплексу $R\Gamma_{\{t\}}(Y; G)$ для любого $t \in]t_{i-1}, t_i[$, то требуемый результат вытекает из рассмотрения выделенного треугольника

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\{t\}}(Y; G) &\longrightarrow R\Gamma([t - \varepsilon, t + \varepsilon]; G) \longrightarrow \\ &R\Gamma([t - \varepsilon, t[\cup]t, t + \varepsilon]; G) \xrightarrow{+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 8.4.9. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$. Рассмотрим следующие условия:

- (i) F $\mathbb{R}$ -конструктивен;
- (ii) F когомологически конструктивен;
- (iii) $R\Gamma_{\{x\}}(X; F)$ совершенен для любого $x \in X$;
- (iv) $DF = R\mathcal{H}om(F, \omega_X)$ $\mathbb{R}$ -конструктивен.

Тогда (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Если основное кольцо A является полем или $A = \mathbb{Z}$, то эти четыре условия эквивалентны.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Используем обозначения леммы 8.4.7. Выбрав систему координат в окрестности точки x_0 , мы получим выделенный треугольник ($0 < \varepsilon \ll 1$)

$$R\Gamma_{\{x_0\}}(X; F) \longrightarrow R\Gamma(B_\varepsilon; F) \longrightarrow R\Gamma(B_\varepsilon \setminus \{x_0\}; F) \xrightarrow{+1}.$$

Существуют изоморфизмы $R\Gamma(B_\varepsilon; F) \simeq F_{x_0}$, $R\Gamma(B_\varepsilon \setminus \{x_0\}; F) \simeq R\Gamma(S_{\varepsilon'}; F)$ ($0 < \varepsilon' < \varepsilon$). Так как комплекс $R\Gamma(S_{\varepsilon'}; F)$ совершенен, то результат следует из предложения 8.4.8.

(ii) $\Rightarrow$ (i) и (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидны.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Используя те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 3.4.3, получаем

$$(DF)_x \simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_{\{x\}}(X; F), A).$$

Но комплекс $(DF)_x$, двойственный совершенному, сам совершенен.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Если $x \in X$, то $R\Gamma_{\{x\}}(X; DF) = R\mathrm{Hom}(F_x, A)$. Так как этот комплекс совершенен, то и комплекс F_x совершенен (см. упр. 1.31 для случая $A = \mathbb{Z}$). $\square$

Предложение 8.4.10. (i) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий и $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$. Тогда $f^{-1}F$ и $f^!F$ принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y)$.

(ii) Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Тогда $G \otimes^L F$ и $R\mathrm{Hom}(G, F)$ принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

Доказательство. Из предложения 8.4.6 нам известна ω - $\mathbb{R}$ -конструктивность объектов $f^{-1}F$ и $f^!F$.

(i) Так как $(f^{-1}F)_y = F_{f(y)}$, то этот комплекс совершенен (см. доказательство предложения 8.4.8). Имеем $f^!D_X D_X F = f^!R\mathrm{Hom}(D_X F, \omega_X) \simeq R\mathrm{Hom}(f^{-1}D_X F, \omega_Y) \simeq D_Y(f^{-1}D_X F)$. Следовательно, $f^!F$ $\mathbb{R}$ -конструктивен по предложению 8.4.9.

(ii) Очевидно, что $G \otimes^L F$ $\mathbb{R}$ -конструктивен. Так как $R\mathrm{Hom}(G, F) = D(DF \otimes^L G)$ (предложение 3.4.6), то этот объект $\mathbb{R}$ -конструктивен по предложению 8.4.9. $\square$

Следствие 8.4.11. Пусть $F \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$.

(i) Пусть K компактно и субаналитично в X . Тогда $R\Gamma_K(X; F)$ и $R\Gamma(K; F)$ — совершенные комплексы.

(ii) Пусть Ω относительно компактно, открыто и субаналитично в X . Тогда $R\Gamma(\Omega; F)$ и $R\Gamma_c(\Omega; F)$ — совершенные комплексы.

Доказательство. Примените предложение 8.4.8 и 8.4.10 (а также изоморфизмы упр. 2.19). $\square$

Предложение 8.4.12. (i) Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — векторное расслоение и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E))$. Предположим, что F $\mathbb{R}$ -конструктивен. Тогда $F^\wedge$ — преобразование Фурье–Сато объекта F — также $\mathbb{R}$ -конструктивен.

(ii) Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^-c}^b(X)$. Тогда $\mu\text{Hom}(G, F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^-c}^b(T^*X))$.

Доказательство. (i) Мы придерживаемся обозначений § 3.7. Тогда $F^\wedge = R\rho_{2*}R\Gamma_P(p_1^{-1}F)$. Обозначим через i нулевое вложение $E^* \hookrightarrow E \times_Z E^*$. Так как объект $R\Gamma_P(p_1^{-1}F)$ является коническим на векторном расслоении $E \times_Z E^* \rightarrow E^*$, то $F^\wedge \simeq i^{-1}R\Gamma_P(p_1^{-1}F)$ (предложение 3.7.5). Тогда F $\mathbb{R}$ -конструктивен по предложению 8.4.10.

(ii) По предложению 8.4.10 достаточно доказать, что если M — подмногообразие в X , то $\nu_M(F)$ $\mathbb{R}$ -конструктивен.

Из определения специализации $\nu_M(F)$ следует, что достаточно доказать, что $Rj_*j^{-1}F$ $\mathbb{R}$ -конструктивен, если j — открытое вложение $\Omega \hookrightarrow X$ и $\Omega = \{x \in X; \varphi(x) > 0\}$, где φ — вещественная функция, $d\varphi \neq 0$ на X . Но это следует из изоморфизма $Rj_*j^{-1}F \simeq R\mathcal{H}om(A_\Omega, F)$ и предложения 8.4.10. $\square$

Рассмотрим теперь связи между функтором двойственности и функтором μHom .

Предложение 8.4.13. Пусть M — подмногообразие в X , а $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^-c}^b(X))$. Тогда существуют естественные изоморфизмы

- (i) $\nu_M(D_X F) \simeq D_{T_M X}(\nu_M(F))$,
- (ii) $\mu_M(D_X F) \simeq D_{T_M^* X}(\mu_M(F))^a \otimes \omega_{M/X}$.

(Здесь « a » обозначает прямой образ при антиподальном отображении на $T_M^* X$.)

Доказательство. Мы используем обозначения § 4.2. Из леммы 4.2.1 следует, что

$$\begin{aligned}
 \nu_M(D_X F) &= s^{-1}Rj_*\tilde{p}^{-1}R\mathcal{H}om(F, \omega_X) \\
 &\simeq s^{-1}Rj_*R\mathcal{H}om(\tilde{p}^!F, \tilde{p}'\omega_X) \\
 &\simeq s^{-1}R\mathcal{H}om(j_!\tilde{p}^!F, \omega_{\tilde{X}_M}) \\
 &\simeq R\mathcal{H}om(s^!j_!\tilde{p}^!F, \omega_{T_M X}) \\
 &\simeq D_{T_M X}(\nu_M(F)).
 \end{aligned}$$

Мы использовали $\mathbb{R}$ -конструктивность объекта $G = R\mathcal{H}om(j_! \bar{p}^! F, \omega_{\tilde{X}_M})$ (это следует из доказательства предложения 8.4.12) и формулу $s^{-1}DG \simeq Ds^!G$ (см. упр. 8.3).

(ii) Из (i), формулы (3.7.9) и предложения 3.7.12 следует, что

$$\begin{aligned}\mu_M(DF) &= (\nu_M(DF))^{\vee a} \otimes \omega_{T_M^* X/M}^{\otimes -1} \\ &\simeq (D\nu_M(F))^{\vee a} \otimes \omega_{M/X} \\ &\simeq D_{\mu_M}(F)^a \otimes \omega_{M/X}.\end{aligned}$$

□

Предложение 8.4.14. Пусть F и G принадлежат $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Тогда существуют естественные изоморфизмы

- (i) $\mu\mathcal{H}om(F, G) \simeq \mu\mathcal{H}om(D_X G, D_X F)^a$,
- (ii) $D_{T^*X}(\mu\mathcal{H}om(F, G)) \simeq \mu\mathcal{H}om(G, F) \otimes \omega_X$.

Доказательство. (i) В действительности эта формула справедлива при более слабом предположении когомологической конструктивности F и G (см. упр. 4.4) и следует из предложения 3.4.6.

(ii) Из предложения 8.4.13 следует, что

$$\begin{aligned}D_{T^*X}(\mu\mathcal{H}om(F, G)) &\simeq D_{T^*X}\mu_{\Delta}(G \boxtimes DF) \\ &\simeq \mu_{\Delta}(D_{X \times X}(G \boxtimes DF))^a \otimes \omega_{\Delta/X \times X}^{\otimes -1} \\ &\simeq \mu_{\Delta}(DG \boxtimes F)^a \otimes \omega_X \\ &\simeq \mu_{\Delta}(F \boxtimes DG) \otimes \omega_X \\ &\simeq \mu\mathcal{H}om(G, F) \otimes \omega_X.\end{aligned}$$

□

8.5. $\mathbb{C}$ -конструктивные пучки

В этом параграфе мы обсудим комплексно-аналитический аналог теории. Так как комплексная геометрия не является предметом рассмотрения данной книги, то детали доказательства будут опускаться.

Если X — комплексное многообразие, то через $X^{\mathbb{R}}$ мы будем обозначать вещественное подлежащее многообразие. Мы будем ссылаться на § 11.1, в котором описана связь между $(T^*X)^{\mathbb{R}}$ и $T^*(X^{\mathbb{R}})$. Если нет опасности путаницы, то мы будем писать X вместо $X^{\mathbb{R}}$.

Пусть S — локально замкнутое подмножество в X . Оно называется $\mathbb{C}$ -аналитическим, если $\bar{S}$ и $\bar{S} \setminus S$ являются комплексно-аналитическими подмножествами (мы отсылаем читателя к книге Картана [Cartan 2], где изложены основы аналитической геометрии). В частности, если S $\mathbb{C}$ -аналитично в X , то S субаналитично в $X^{\mathbb{R}}$.

Подмножество $\Lambda \subset T^*X$ называется $\mathbb{R}^+$ -коническим, если оно обладает соответствующим свойством в $T^*(X^{\mathbb{R}})$, локально $\mathbb{C}^{\times}$ -коническим, если оно локально инвариантно относительно действия $\mathbb{C}^{\times}$, т. е. $\Lambda \cap S$ открыто в S для любой $\mathbb{C}^{\times}$ -орбиты S , и $\mathbb{C}^{\times}$ -коническим, если оно есть объединение $\mathbb{C}^{\times}$ -орбит.

Если Λ — комплексно-аналитическое подмногообразие, то оно инволютивно (соответственно лагранжево, соответственно изотропно), если $T_p\Lambda$ — комплексно-инволютивное (соответственно лагранжево, соответственно изотропное) подмножество в T^*X при каждом $p \in \Lambda$. Предположим, что Λ — замкнутое $\mathbb{C}$ -аналитическое подмножество в T^*X . Тогда Λ является $\mathbb{R}^+$ -коническим в том и только в том случае, когда оно $\mathbb{C}^{\times}$ -коническое. В этом случае мы будем называть Λ коническим.

Заметим, что если Λ — комплексно-аналитическое подмногообразие и Λ_{reg} лагранжево, то Λ лагранжево (см. упр. 8.8).

Предложение 8.5.1. Пусть S и Y являются $\mathbb{C}$ -аналитическими подмножествами в X . Тогда нормальный конус $C(Y, S)$ (принадлежащий $TX^{\mathbb{R}}$ и построенный с использованием вещественной структуры многообразия X) $\mathbb{C}$ -аналитичен в TX .

Доказательство см. в книге [Whitney 2].

Отметим, в частности, что $C(Y, S)$ инвариантен по отношению к действию $\mathbb{C}^{\times}$.

Предложение 8.5.2. Пусть Ω открыто в T^*X , а Λ — локально $\mathbb{C}^{\times}$ -коническое инволютивное замкнутое подмножество в Ω . Предположим, что Λ содержится в замкнутом $\mathbb{R}^+$ -коническом субаналитическом изотропном подмножестве в Ω . Тогда Λ — комплексно-аналитическое множество.

Доказательство. Из предложения 8.3.13 следует, что Λ субаналитично и лагранжево в Ω . Для любого $p \in \Lambda_{\text{reg}}$ пространство $T_p\Lambda$ является вещественной лагранжевой плоскостью в T_pT^*X . Так как Λ локально $\mathbb{C}^{\times}$ -коническое, то $T_p\Lambda = (T_p\Lambda)^{\perp}$ содержит $\mathbb{C} \cdot H(\alpha)$, где α — комплексная 1-форма на T^*X . Следовательно, $\alpha|_{\Lambda_{\text{reg}}} = 0$, из чего вытекает, что $d\alpha|_{\Lambda_{\text{reg}}} = 0$ и $\text{Re}(d\alpha)|_{T_p\Lambda + \sqrt{-1}T_p\Lambda} = 0$. Это означает, что $\sqrt{-1}T_p\Lambda \subset (T_p\Lambda)^{\perp} = T_p\Lambda$. То есть $T_p\Lambda$ — комплексное линейное подпространство для любого $p \in \Lambda_{\text{reg}}$. Значит, Λ_{reg} — комплексное многообразие. Положим $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Тогда $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda \setminus \Lambda_{\text{reg}}) \leq 2n - 1$. Пусть S есть объединение $(2n - 1)$ -мерных связных компонент множества $(\Lambda \setminus \Lambda_{\text{reg}})_{\text{reg}}$, а S' — наибольшее открытое подмножество в S , на котором $(\Lambda_{\text{reg}}, S)$ удовлетворяет μ -условию. Так как S' плотно в S , то $\dim(\Lambda \setminus \Lambda_{\text{reg}}) \setminus S' \leq 2n - 2$.

Для любого $p \in S'$ выберем последовательность точек $\{p_n\}$ в Λ_{reg} , сходящуюся к p и такую, что $T_{p_n} \Lambda_{\text{reg}}$ сходится к $\tau \subset T_p T^* X$, где $\tau \supset T_p S'$ (см. упр. 8.12). Так как $T_{p_n} \Lambda_{\text{reg}}$ является комплексным линейным пространством, то таково и τ . Следовательно,

$$(8.5.1) \quad \dim_{\mathbb{C}}(T_p S' + \sqrt{-1} T_p S') = n \text{ для любого } p \in S'.$$

Пусть $S'_{\mathbb{C}}$ — комплексификация множества S' . Вложение $S' \hookrightarrow T^* X$ продолжается до отображения $S'_{\mathbb{C}} \rightarrow T^* X$, и, уменьшая $S'_{\mathbb{C}}$, если необходимо, мы можем считать, что это отображение имеет постоянный ранг (по (8.5.1)). Следовательно, его образ — это комплексное подмногообразие в окрестности множества S' . Обозначим его через Z . Те же рассуждения показывают, что любое комплексное подмногообразие, содержащее S' , содержит и Z , в окрестности множества S' . Отметим, что Z изотропно и, следовательно, лагранжево. Далее доказательство состоит из трех этапов. Мы докажем, что

- (a) $S' \cap \overline{\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z}$ нигде не плотно в S' ;
- (b) $S = \emptyset$;
- (c) Λ комплексно-аналитическое.

(a) Будем рассуждать от противного. Пусть $S' \cap \overline{\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z}$ содержит непустое открытое подмножество из S' . То есть мы можем считать, что $\overline{\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z} \supset S'$. Так как $\overline{\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z}$ субаналитично, то существует собственное вещественно-аналитическое отображение $f: W \rightarrow T^* X$, такое, что $f(W) = \overline{\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z}$. Мы можем считать, что $f^{-1}(\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z)$ открыто и плотно в W . Рассмотрим теперь комплексификацию $W_{\mathbb{C}}$ и продолжим f до голоморфного отображения $\tilde{f}: W_{\mathbb{C}} \rightarrow T^* X$. Если $w \in f^{-1}(\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z)$, то $\text{Im}(T_w W_{\mathbb{C}} \rightarrow T_{f(w)} T^* X)$ совпадает с $T_{f(w)}(\Lambda_{\text{reg}})$, мы получаем

$$(8.5.2) \quad \text{ранг } \tilde{f} \text{ меньше или равен } n.$$

Так как $f(W) \supset S'$, то существует точка $w \in W$, такая, что образ $T_w W \rightarrow T_{f(w)} T^* X$ содержит $T_{f(w)} S$. Следовательно, в этой точке ранг $\tilde{f}$ равен n и $\tilde{f}$ имеет постоянный ранг в окрестности точки w . Для достаточно малой окрестности U точки w $\tilde{f}(U)$ есть n -мерное комплексное подмногообразие, содержащее S , в окрестности точки $f(w)$. Следовательно, $\tilde{f}(U) = Z$ в окрестности точки $f(w)$ и $\emptyset \neq \tilde{f}(U \cap f^{-1}(\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z)) \subset Z$. Противоречие.

(b) Предположим, что $S \neq \emptyset$. Тогда найдется $p \in S' \setminus (\overline{\Lambda_{\text{reg}} \setminus Z})$. В окрестности точки p имеет место включение $\Lambda_{\text{reg}} \subset Z$, и так как $\Lambda = \overline{\Lambda_{\text{reg}}}$, то $\Lambda \subset Z$. По лемме 8.3.14 Λ открыто в Z . Поэтому $\Lambda = Z$ в окрестности точки p , а это противоречит тому, что $p \in S' \subset \Lambda \setminus \Lambda_{\text{reg}}$.

(с) Из (b) следует, что $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda \setminus \Lambda_{\text{reg}}) \leq 2n - 2$. Применяя теорему Реммерта-Штейна [Remmert-Stein 1] о расширениях комплексно-аналитических множеств, получаем, что $\overline{\Lambda_{\text{reg}}}$ является комплексно-аналитическим. $\square$

Дадим пример применения этого результата. Рассмотрим замкнутое $\mathbb{C}$ -аналитическое подмножество S в X . Множество T_S^*X определено формулой (8.3.1). Локально на X множество S определяется формулой $\{x \in X; f_j(x) = 0, j = 1, \dots, p\}$, где f_j — голоморфные функции. Следовательно,

$$T_S^*X = \overline{\left\{ \left(x; \sum_{j=1}^p \lambda_j df_j(x) \right); \lambda_j \in \mathbb{C}, f_j(x) = 0 \ \forall j \right\}}.$$

Из предложений 8.3.1 и 8.5.2 следует, что T_S^*X — замкнутое коническое $\mathbb{C}$ -аналитическое и $\mathbb{C}$ -лангражево подмножество в T^*X .

Перенесем теперь на комплексный случай основные результаты § 8.3.

Предложение 8.5.3. Пусть Λ — замкнутое коническое изотропное $\mathbb{C}$ -аналитическое подмножество в T^*X . Тогда существует конечное семейство $\{X_j\}$ замкнутых $\mathbb{C}$ -аналитических подмножеств в X , такое, что $\Lambda \subset \bigcup_j T_{X_j}^*X$. Кроме того, для любого $\mathbb{C}$ -аналитического подмножества $Y \subset X$ существует $\mathbb{C}$ -аналитическое многообразие $Y_0 \subset Y$, открытое и плотное в Y , такое, что $\Lambda \cap \pi^{-1}(Y_0) \subset T_{Y_0}^*X$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 8.3.10.

Предложение 8.5.4. Пусть $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ — локально конечное покрытие многообразия X $\mathbb{C}$ -аналитическими подмножествами. Тогда существует μ -стратификация $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, более тонкая, чем это покрытие, и такая, что X_α для всех $\alpha \in A$ является комплексным многообразием.

Доказательство использует предложения 8.5.3 и 8.5.1 и аналогично доказательству теоремы 8.3.20.

Теперь сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 8.5.5. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) существует локально конечное покрытие $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ $\mathbb{C}$ -аналитическими подмножествами, такое, что для всех $j \in J$ и всех $k \in \mathbb{Z}$ пучки $H^k(F)|_{X_j}$ локально постоянны;

- (ii) $SS(F)$ содержится в замкнутом $\mathbb{C}^X$ -коническом субаналитическом $\mathbb{R}$ -изотропном подмножестве множества Λ ;
- (iii) $SS(F)$ — замкнутое коническое $\mathbb{C}$ -аналитическое лагранжево подмножество;
- (iv) $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X))$ и $SS(F)$ является $\mathbb{C}^X$ -коническим.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii) Надо применить предложения 8.5.4 и 8.4.1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Надо применить теорему инволютивности 6.5.4 и предложение 8.5.2.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) следует из предложения 8.5.2.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) следует из предложений 8.5.3, 8.5.4 и 8.4.1. □

Определение 8.5.6. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$.

- (i) F называется *слабо $\mathbb{C}$ -конструктивным* (w - $\mathbb{C}$ -конструктивным), если он удовлетворяет эквивалентным условиям теоремы 8.5.5.
- (ii) Если f w - $\mathbb{C}$ -конструктивен и F_x для каждого $x \in X$ является совершенным комплексом, то F называется *$\mathbb{C}$ -конструктивным*.

Обозначим через $\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X)$ (соответственно $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$) полную триангулированную подкатегорию категории $\mathbf{D}^b(X)$, состоящую из w - $\mathbb{C}$ -конструктивных (соответственно $\mathbb{C}$ -конструктивных) объектов.

Пучок F на X называется w - $\mathbb{C}$ -конструктивным (соответственно $\mathbb{C}$ -конструктивным), если он является таковым, когда рассматривается как объект из $\mathbf{D}^b(X)$. Обозначим через $w\text{-}\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Comp}(X)$ (соответственно $\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Comp}(X)$) категорию таких пучков. Отметим, что естественный морфизм $\mathbf{D}^b(w\text{-}\mathbb{C}\text{-}\mathbf{Comp}(X)) \rightarrow \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X)$ не обязательно является эквивалентностью категорий. (Соответствующее доказательство не проходит, так как теорема о триангуляции в комплексном случае не верна.)

Предложение 8.5.7. (i) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий.

- (a) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X))$. Тогда $f^{-1}F$ и $f^!F$ принадлежат $\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(Y)$.
- (b) Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(Y))$, и предположим, что f собствен на $\text{supp}(G)$. Тогда $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X))$.

(ii) Пусть F и G принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$. Тогда $G \otimes^L F$ и $R\mathcal{H}om(G, F)$ принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ и $\mu\mathcal{H}om(G, F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(T^*X))$.

(iii) Пусть $E \rightarrow X$ — комплексное векторное расслоение и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E))$. Предположим, что F $\mathbb{C}$ -конструктивен. Тогда $F^\wedge$ также $\mathbb{C}$ -конструктивен.

Кроме того, если мы заменим в (i), (ii) и (iii) $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(\cdot)$ на $\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{C}-c}^b(\cdot)$, то все утверждения останутся справедливыми.

Доказательство. Из предложений 8.4.8, 8.4.10 и 8.4.12 следует, что достаточно доказать утверждения для ω - $\mathbb{C}$ -конструктивных объектов.

(i) По следствию 6.4.4 $\text{SS}(f^{-1}F) \subset f^\#(\text{SS}(F))$, и последнее множество является $\mathbb{R}^+$ -коническим и изотропным. Так как $\text{SS}(F)$ является $\mathbb{C}^\times$ -коническим, то по теореме 8.5.5 $\text{SS}(f^{-1}F)$ является $\mathbb{C}^\times$ -коническим, а $f^{-1}F$ является ω - $\mathbb{C}$ -конструктивным. Аналогично доказывается утверждение для $f^!F$. Пункты (ii) и (iii) также доказываются аналогично. $\square$

Рассмотрим теперь несобственные прямые образы.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий, а $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция. Положим, как в (5.4.13),

$$(8.5.3) \quad Y_t = \{y \in Y; \varphi(y) < t\}, \quad \tilde{Y}_t = \{y \in Y; \varphi(y) \leq t\}.$$

Обозначим через j_t (соответственно $\tilde{j}_t$) вложение $Y_t \hookrightarrow Y$ (соответственно $\tilde{Y}_t \hookrightarrow Y$) и положим $f_t = f \circ j_t$, $\tilde{f}_t = f \circ \tilde{j}_t$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$.

Предложение 8.5.8. Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(Y))$, и предположим, что

- (i) $\text{supp}(S) \cap \bar{Y}_t$ собствен над X для всех t ;
- (ii) для всех $y \in Y \setminus Y_{t_0}$.

$$d\varphi(y) \notin \text{SS}(G) + {}^t f' \left(Y \times_X T^* X \right).$$

Тогда утверждения (a), (a'), (b), (c), (c') и (d) предложения 5.4.17 справедливы и в данном случае и $Rf_* G$ и $Rf_! G$ принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$.

Доказательство. Так как $\text{SS}(G)$ $\mathbb{C}^\times$ -коническое, то для $y \in Y \setminus Y_{t_0}$ имеем

$$-d\varphi(y) \notin \text{SS}(G) + {}^t f' \left(Y \times_X T^* X \right).$$

Следовательно, мы можем применить предложение 5.4.17 (i) и (ii). Так как $Rf_* G \simeq Rf_*(G_{\tilde{Y}_t})$ и $Rf_! G \simeq Rf_*(R\Gamma_{\tilde{Y}_t}(G))$, то по предложению 8.4.8 эти объекты принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Так как их микронесители содержатся в множестве $f_* {}^t f'^{-1}(\text{SS}(G) \cap \pi^{-1}(\tilde{Y}_{t_0}))$ и это

множество субаналитично, изотропно и является $\mathbb{C}^*$ -коническим, то утверждения предложения следуют из теоремы 8.5.5. $\square$

Если $\dim X = 1$, то условия предложения 8.5.8 всегда выполнены «локально». Точнее, имеет место.

Предложение 8.5.9. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий, $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$, и пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(Y))$. Пусть $x_0 \in X$, и пусть K — компактное подмножество в $f^{-1}(x_0)$. Тогда существует открытая окрестность U (соответственно V) точки x_0 (соответственно множества K), $V \subset f^{-1}(U)$, причем если обозначить через $f_V: V \rightarrow U$ морфизм, индуцированный f , то

(i) $Rf_{V!}G$ и $Rf_{V*}G$ принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(U)$,

(ii) $\text{SS}(Rf_{V!}G) \cup \text{SS}(Rf_{V*}G) \subset f_{V*}{}^t f_V'^{-1}(\text{SS}(G))$.

Кроме этого, если Y открыто в $\mathbb{C}^n$ и $K = \{0\}$, то в качестве V можно взять открытый шар с центром в 0 радиуса $\varepsilon \ll 1$.

Доказательство. Представляя f в виде композиции $Y \hookrightarrow Y \times X \rightarrow X$, мы можем считать, что $Y = Z \times X$, где Z — комплексное многообразие, а f — проекция на X . Положим $Z_0 = Z \times \{x_0\} (= f^{-1}(x_0))$ и обозначим через j вложение $Z_0 \hookrightarrow Y$. Положим $\Lambda = \text{SS}(G)$, и пусть

$$(8.5.4) \quad \Lambda_0 = j^{\#} \Lambda \quad (\text{см. § 6.2}). \quad \square$$

Лемма 8.5.10. Имеем

$${}^t j' j_{\pi}^{-1} \left(\overline{\Lambda + {}^t f' \left(Y \times_X T^* X \right)} \right) = \Lambda_0.$$

Доказательство леммы 8.5.10. Выберем локальную систему координат (z, x) на $Z \times X$ и обозначим через $(z, x; \zeta, \xi)$ ассоциированную систему координат на $T^*(Z \times X)$. Тогда $(z_0; \zeta_0)$ принадлежит ${}^t j' j_{\pi}^{-1}(\overline{\Lambda + {}^t f'(Y \times_X T^* X)})$ в том и только в том случае, когда существует последовательность $\{(z_n, x_n; \zeta_n, \xi_n)\}$ в Λ , такая, что

$$(z_n, x_n, \zeta_n) \xrightarrow{n} (z_0, z_0, \zeta_0).$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$(8.5.5) \quad |\xi_n| |x_n - x_0| \xrightarrow{n} 0.$$

Предположим, что (8.5.5) не выполняется. По лемме о выборе кривой (в голоморфном случае) найдем голоморфное отображение

$$\theta: \{t \in \mathbb{C}; 0 < |t| < 1\} \rightarrow \Lambda.$$

При этом, полагая $\theta(t) = (z(t), x(t); \zeta(t), \xi(t))$, имеем при $t \rightarrow 0$

$$\begin{cases} (z(t); \zeta(t)) \rightarrow (z_0; \zeta_0), \\ x(t) - x_0 \sim t^s, \\ \xi(t) \sim t^{-r}, \quad 1 \leq s \leq r. \end{cases}$$

Так как Λ изотропно, то

$$\left\langle \zeta(t), \frac{dz(t)}{dt} \right\rangle + \xi(t) \frac{dx(t)}{dt} = 0.$$

Поэтому $\xi(t) \frac{dx(t)}{dt}$ ограничено. Противоречие. $\square$

Окончание доказательства предложения 8.5.9. Пусть $\varphi: Z_0 \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция. Предположим, что φ положительна и собственна. Положим $s_0 = \sup_K |\varphi|$ и, используя предложение 8.3.12, выберем вещественные числа $s_0 < s_1 < s_2$ так, чтобы

$$(8.5.6) \quad d\varphi(z) \notin \Lambda_0 \quad \text{при} \quad s_1 \leq \varphi(z) \leq s_2.$$

Положим $Z_0^s = \{z \in Z_0; \varphi(z) < s\}$. Мы утверждаем, что для достаточно малой открытой окрестности $U \subset X$ точки x_0 условия предложения 8.5.8 выполнены на $V = Z_0^{s_2} \times U$, если φ рассматривать как функцию на $Z \times X$ (положив $\varphi(z, x) = \varphi(z)$) и положить $t_0 = s_1$. Если это не так, то найдется последовательность $\{(z_n, x_n)\}$ в $Z \times X$, такая, что

$$\begin{cases} (z_n, x_n; d\varphi(z_n), 0) \in \Lambda + Z \times T^*X, \\ x_n \xrightarrow{n} x_0, \quad s_1 \leq \varphi(z_n) \leq s_2. \end{cases}$$

Мы можем считать, что $z_n \xrightarrow{n} z_0$. Тогда по лемме 8.5.10 $(z_0, d\varphi(z_0)) \in \Lambda_0$. Противоречие. $\square$

Замечание 8.5.11. Предложение 8.5.9 перестает быть справедливым, если отказаться от условия $\dim X = 1$. Мы отсылаем читателя к работе [Henry-Merle-Sabbah 1], в которой проведено геометрическое рассмотрение этой задачи при $\dim X > 1$.

8.6. Функтор близкого цикла и функтор исчезающего цикла

В гл. 4 мы определили функторы ι_Y и μ_Y специализации и микролокализации в вещественном случае. Если X и Y — комплексные многообразия, то эти функторы мы определим по-другому.

Пусть X — комплексное многообразие и $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфное отображение. Положим $Y = f^{-1}(0)$ и обозначим через i вложение $Y \hookrightarrow X$.

Пусть $\tilde{C}^*$ — универсальное накрытие для $C^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $p: \tilde{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ — проекция (т. е. пусть $\tilde{C}^* = \mathbb{C}$ и $p(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$). Положим $\tilde{X}^* = X \times_{\mathbb{C}} \tilde{C}^*$ и обозначим через $\tilde{p}$ проекцию $\tilde{X}^* \rightarrow X$, порожденную p (т. е. $\tilde{p} = \text{id} \times_{\mathbb{C}} p$):

$$(8.6.1) \quad \begin{array}{ccccc} & \tilde{X}^* & \longrightarrow & \tilde{C}^* & \\ & \downarrow \tilde{p} & \square & \downarrow p & \\ Y \subset & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

Отметим, что $\tilde{p}_!$ — точный функтор.

Определение 8.6.1. Для $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ положим

$$\psi_f(F) = i^{-1} R\tilde{p}_* \tilde{p}^{-1}(F)$$

и назовем ψ_f *функтором близкого цикла*.

Отметим, что $\psi_f(F)$ — объект категории $\mathbf{D}^b(Y)$ и зависит только от $F|_{X \setminus Y}$. Так как $\tilde{p}^{-1} \simeq \tilde{p}'$, то из двойственности Пуанкаре–Вердье следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{p}_* \tilde{p}^{-1} F &\simeq R\mathcal{H}om(\tilde{p}_! A_{\tilde{X}^*}, F) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(f^{-1} p_! A_{\tilde{C}^*}, F). \end{aligned}$$

Значит,

$$(8.6.2) \quad \psi_f(F) \simeq i^{-1} R\mathcal{H}om(f^{-1} p_! A_{\tilde{C}^*}, F).$$

Теперь действие $1 \in \mathbb{Z}$ на $\tilde{C}^*$ индуцирует автоморфизм T на $p_! A_{\tilde{C}^*}$ и, следовательно, автоморфизм на $\psi_f(F)$. Этот автоморфизм называется *монодромией* объекта $\psi_f(F)$ и будет обозначаться через M . Теперь рассмотрим комплекс

$$(8.6.3) \quad K: 0 \rightarrow p_! A_{\tilde{C}^*} \xrightarrow{\text{tr}} A_C \rightarrow 0,$$

где A_C имеет степень 0, а дифференциал tr — это морфизм следа $p_! A_{\tilde{C}^*} \simeq p_! p^! A_C \rightarrow A_C$.

Определение 8.6.2. Для $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ положим

$$\phi_f(F) = i^{-1} R\mathcal{H}om(f^{-1}K, F)$$

и назовем ϕ_f *функтором исчезающего цикла*.

Действие T на $p_!A_{\tilde{C}\bullet}$ и тождественное преобразование на A_C индуцируют автоморфизм комплекса K и, следовательно, автоморфизм объекта $\phi_f(F)$. Этот автоморфизм называется монодромией объекта $\phi_f(F)$ и также будет обозначаться через M .

Рассмотрим точные последовательности комплексов (представленных столбцами):

$$(8.6.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & p_!A_{\tilde{C}\bullet} & \xrightarrow{\text{id}} & p_!A_{\tilde{C}\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{tr} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A_C & \xrightarrow{\text{id}} & A_C & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

и

$$(8.6.5) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p_!A_{\tilde{C}\bullet} & \xrightarrow{1-T} & p_!A_{\tilde{C}\bullet} & \xrightarrow{\text{tr}} & A_{C\bullet} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{tr} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A_C & \xrightarrow{\text{id}} & A_C \longrightarrow 0 \end{array}$$

Отметим, что точность верхней строки в (8.6.5) следует из того, что для $a \in \mathbb{C}^*$

$$(p_!A_{\tilde{C}\bullet})_a \simeq A^{(\mathbb{Z})}$$

(где $A^{(\mathbb{Z})}$ обозначает множество последовательностей $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, таких, что $a_n = 0$ для всех, за исключением конечного множества, целых чисел n) и T определено формулой $\{a_n\}_n \rightarrow \{a_{n+1}\}_n$, а $\text{tr}: (p_!A_{\tilde{C}\bullet})_a \rightarrow (A_{C\bullet})_a$ определено формулой $\{a_n\}_n \rightarrow \sum_n a_n$. Получаем два выделенных треугольника в $\mathbf{D}^b(A_C)$:

$$(8.6.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_C \longrightarrow K \longrightarrow p_!A_{\tilde{C}\bullet}[1] \xrightarrow{+1}, \\ p_!A_{\tilde{C}\bullet}[+1] \longrightarrow K \longrightarrow A_{\{0\}} \xrightarrow{+1} \end{array} \right.$$

(отметим, что $A_{\{0\}}$ изоморфен комплексу $A_{C\bullet} \rightarrow A_C$ в $\mathbf{D}^b(A_C)$), которые дают нам выделенные треугольники в $\mathbf{D}^b(Y)$:

$$(8.6.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_f(F)[-1] \xrightarrow{\text{can}} \phi_f(F) \longrightarrow i^{-1}F \xrightarrow{+1}, \\ i^!F \longrightarrow \phi_f(F) \xrightarrow{\text{var}} \psi_f(F)[-1] \xrightarrow{+1}. \end{array} \right.$$

Отметим, что при таком построении треугольников и морфизмов

$$(8.6.8) \quad \begin{cases} \text{can} \circ \text{var} = 1 - M & \text{в } \text{End}(\phi_f(F)), \\ \text{var} \circ \text{can} = 1 - M & \text{в } \text{End}(\psi_f(F)). \end{cases}$$

Рассмотрим связи между ϕ_f, ψ_f, ν_Y и μ_Y в случае, когда Y неособо. Тогда df определяет функцию

$$(8.6.9) \quad \tilde{f}: T_Y X \rightarrow \mathbb{C}.$$

Обозначим через s сечение расслоения $T_Y X \rightarrow Y$, заданное $\tilde{f}^{-1}(1)$, и через s' — сечение расслоения $T_Y^* X \rightarrow Y$, заданное df .

Предложение 8.6.3. Пусть Y неособо и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$. Выберем точку в $p^{-1}(1) \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$ и отождествим Y с нулевым сечением расслоения $T_Y X$. Тогда существуют изоморфизмы

$$(8.6.10) \quad \begin{cases} \psi_f(F) \simeq \psi_f(\nu_Y(F)), \\ \phi_f(F) \simeq \phi_f(\nu_Y(F)). \end{cases}$$

Кроме того, если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X))$, то имеют место изоморфизмы

$$(8.6.11) \quad \begin{cases} \psi_f(F) \simeq s^{-1} \nu_Y(F), \\ \phi_f(F) \simeq s'^{-1} \mu_Y(F). \end{cases}$$

Отметим, что из этого предложения следует, что если F w - $\mathbb{C}$ -конструктивен, то $\psi_f(F)$ и $\phi_f(F)$ также w - $\mathbb{C}$ -конструктивны и

$$(8.6.12) \quad \text{supp}(\phi_f(F)) \subset \{x \in Y; df(x) \in \text{SS}(F)\}.$$

Доказательство. (а) Предположим сначала, что $X = \mathbb{C} \times Y$, а f — проекция на первый сомножитель. Рассмотрим диаграмму

$$(8.6.13) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^+ \times \tilde{\mathbb{C}}^* \times Y & \xrightarrow{j'} & \mathbb{R} \times \tilde{\mathbb{C}}^* \times Y & \xleftarrow{k'} & \tilde{\mathbb{C}}^* \times Y \\ \downarrow \pi' & \square & \downarrow \pi & \square & \downarrow \pi'' \\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^* \times Y & \xrightarrow{j} & \mathbb{R} \times \mathbb{C}^* \times Y & \xleftarrow{k} & \mathbb{C}^* \times Y \\ & \searrow h' & \downarrow h & & \\ & & \mathbb{C} \times Y = X & & \end{array}$$

Здесь j' — включение, k' — включение, определенное формулой $k'(z, y) = (0, z, y)$, h — отображение $(t, z, y) \rightarrow (tz, y)$. Отображения π', π, π'' порождены проекцией $p: \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathbb{C}$.

По определению ν_Y имеем

$$(8.6.14) \quad \nu_Y(F)|_{\tilde{T}_Y X} \simeq k^{-1} Rj_* h'^{-1} F.$$

Выбор точки в $p^{-1}(1) \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$ позволяет нам отождествить как $\tilde{\mathbb{C}}^*$ с $\mathbb{C}$, так и проекцию $p: \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathbb{C}$ с отображением $p(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$.

Получаем декартов квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times \tilde{\mathbb{C}}^* \times Y & \xrightarrow{h''} & \tilde{\mathbb{C}}^* \times_{\mathbb{C}} X \simeq \tilde{\mathbb{C}}^* \times Y \\ \downarrow \pi' & \square & \downarrow \tilde{p} \\ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^* \times Y & \xrightarrow{h'} & X \end{array}$$

где $h''(t, z, y) = (z + (1/2\pi\sqrt{-1}) \log t, y)$.

Так как h' и h'' — гладкие отображения, то для $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$

$$\begin{aligned} h'^{-1} R\tilde{p}_* \tilde{p}^{-1} F &\simeq \pi'_* h''^{-1} \tilde{p}^{-1} F \\ &\simeq \pi'_* \pi'^{-1} h'^{-1} F. \end{aligned}$$

Возвращаясь к диаграмме (8.6.13), получаем

$$\begin{aligned} k^{-1} Rj_* h'^{-1} R\tilde{p}_* \tilde{p}^{-1} F &\simeq k^{-1} Rj_* \pi'_* \pi'^{-1} h'^{-1} F \\ &\simeq k^{-1} \pi_* Rj'_* \pi'^{-1} h'^{-1} F \\ &\simeq k^{-1} \pi_* \pi^{-1} Rj_* h'^{-1} F. \end{aligned}$$

Пусть $G = Rj_* h'^{-1} F$, и напомним, что F w - R -конструктивен.

Мы хотим доказать, что

$$(8.6.15) \quad \begin{cases} k^{-1} R\pi_* \pi^{-1} G \rightarrow R\pi''_* k'^{-1} \pi^{-1} G \simeq R\pi''_* \pi''^{-1} k^{-1} G \\ \text{— изоморфизм.} \end{cases}$$

В самом деле, любая точка $x \in \mathbb{C}^* \times Y$ имеет фундаментальную систему открытых односвязных окрестностей U , таких, что $G_x \simeq R\Gamma(U; G)$ (так как G w - $\mathbb{R}$ -конструктивен). Так как $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} R\Gamma(U; \pi_* \pi^{-1} G) &\simeq R\Gamma(\pi^{-1}(U); \pi^{-1} G) \\ &\simeq R\Gamma(U; G)^{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Переходя к индуктивному пределу, получаем

$$(\pi_* \pi^{-1} G)_x \simeq (G_x)^{\mathbb{Z}}.$$

Аналогично доказывается, что

$$(\pi''_* \pi''^{-1} k^{-1} G)_x \simeq ((k^{-1} G)_x)^{\mathbb{Z}},$$

и это дает нам (8.6.15). Объединяя (8.6.15) и (8.6.14), получаем

$$\begin{aligned} \nu_Y(\tilde{p}_* \tilde{p}^{-1} F)|_{\tilde{T}_Y X} &\simeq \pi''_* \pi''^{-1} k^{-1} Rj_* h'^{-1} F \\ &\simeq \pi''_* \pi''^{-1} (\nu_Y(F)|_{\tilde{T}_Y X}). \end{aligned}$$

Применяя функтор $R\dot{\tau}_*$, получаем $\psi_f(F)$ в левой и $\psi_f(\nu_Y(F))$ в правой части равенства соответственно (см. теорему 4.2.3).

Это доказывает существование первого изоморфизма в (8.6.10). Для доказательства существования второго достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму выделенных треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} \psi_f(F)[-1] & \xrightarrow{\text{can}} & \phi_f(F) & \longrightarrow & i^{-1} F & \xrightarrow{+1} & \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \wr & & \\ \psi_f(\nu_Y(F))[-1] & \xrightarrow{\text{can}} & \phi_f(\nu_Y(F)) & \longrightarrow & i^{-1}(\nu_Y(F)) & \xrightarrow{+1} & \end{array}$$

Мы докажем (8.6.11), предполагая ω - $\mathbb{R}$ -конструктивность F . В этом случае $\tilde{p}^{-1} \nu_Y(F)$ постоянен на слоях расслоения $\tau \circ \tilde{p}: \tilde{\mathbb{C}}^* \times_{\mathbb{C}} T_Y X \rightarrow Y$. Пусть $\tilde{s}$ — сечение отображения $\tilde{\mathbb{C}}^* \times_{\mathbb{C}} T_Y X \rightarrow Y$, такое, что $\tilde{p} \circ \tilde{s} = s$. Применяя следствие 2.7.7, получаем

$$\begin{aligned} \psi_f(\nu_Y(F)) &\simeq R\dot{\tau}_*(\tilde{p}_* \tilde{p}^{-1} \nu_Y(F)|_{\tilde{T}_Y X}) \\ &\simeq \tilde{s}^{-1} \tilde{p}^{-1} \nu_Y(F) \\ &\simeq s^{-1} \nu_Y(F). \end{aligned}$$

Отождествляя $T_Y X$ с $\mathbb{C} \times Y$ и $T_Y^* X$ с $\mathbb{C} \times Y$, получаем, что $s'^{-1} \mu_Y(F) \simeq R\pi_* R\mathcal{H}om(A_{U \times Y}, \mu_Y(F))$, так как $\mu_Y(F)$ $\mathbb{C}^\times$ -коничен. Здесь $U = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}$.

Из теоремы 3.7.9 следует, что

$$\begin{aligned} s'^{-1} \mu_Y(F) &\simeq R\tau_* R\mathcal{H}om(A_{U \times Y}^\vee, \nu_Y(F)) \\ &\simeq R\tau_* R\mathcal{H}om(A_{Z \times Y}, \nu_Y(F)), \end{aligned}$$

где $Z = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Теперь мы получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathbb{C} \setminus Z} & \longrightarrow & A_{\mathbb{C}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_! A_{\tilde{\mathbb{C}}^*} & \longrightarrow & A_{\mathbb{C}} \end{array}$$

используя включение $\mathbb{C} \setminus Z \hookrightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*$ над $\mathbb{C}$. Так как комплекс $A_{\mathbb{C} \setminus Z} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$ изоморфен A_Z , то достаточно показать, что

$$(8.6.16) \quad R\tau_* R\mathcal{H}om(p_! A_{\tilde{\mathbb{C}}^*} \boxtimes A_Y, \nu_Y(F)) \xrightarrow{\sim} R\tau_* R\mathcal{H}om(A_{\mathbb{C} \setminus Z} \boxtimes A_Y, \nu_Y(F)).$$

Так как $\nu_Y(F)$ локально постоянен на слоях отображения $(\mathbb{C} \setminus Z) \times Y \rightarrow Y$, то $s^{-1}\nu_Y(F) \simeq R\tau_* R\mathcal{H}om(A_{\mathbb{C} \setminus Z} \boxtimes A_Y, \nu_Y(F))$. Это доказывает (8.6.16), и мы получаем, что $s'^{-1}\mu_Y(F) \simeq \phi_f(F)$.

В общем случае рассмотрим вложение X в $\mathbb{C} \times X$ с помощью отображения графика $f: X \xhookrightarrow{g} \mathbb{C} \times X \xrightarrow{i} \mathbb{C}$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \psi_f(F) &\simeq \psi_i(g_* F), \\ \phi_f(F) &\simeq \phi_i(g_* F) \end{aligned}$$

(см. упр. 8.15). □

Зная функтор исчезающего цикла, можно получить информацию о $SS(F)$.

Предложение 8.6.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\psi-\mathbb{C}-c}^b(X))$, а $p \in T^*X$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

- (i) $p \notin SS(F)$;
- (ii) существует открытая окрестность U точки p , такая, что для любой точки $x \in X$ и любой голоморфной функции f , определенной в окрестности x и такой, что $f(x) = 0$ и $df(x) \in U$, имеет место равенство $\phi_f(F)_x = 0$.

Доказательство. Из п. (i) предложения 8.6.3 и следствия 5.4.10 вытекает (ii). Обратно, предположим, что (ii) имеет место. Докажем, что $U \cap SS(F) = \emptyset$. По теореме 8.5.5 $\Lambda = SS(F)$ является комплексно-аналитическим лагранжевым подмножеством в T^*X . В общей точке $p' \in \Lambda \cap U$ F изоморфно L_Y (в категории $\mathbf{D}^b(X; p')$) для некоторого $L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(A)))$ и некоторого комплексного подмногообразия $Y \subset X$ (предложение 6.6.1). Мы покажем, что $L = 0$. Если $p' \in T_X^*X$,

то $Y = X$ и $L = 0$ (можно взять $f = 0$). В противном случае выберем локальную систему координат $(z_1, \dots, z_n)$ на X , такую, что $p' = (0; dz_1)$ и $Y = \{z_1 = \dots = z_l = 0\}$. Положим $f(z) = z_1 + \sum_{j=l+1}^n z_j^2$. Тогда $\phi_f(F)_o \simeq \mu_{\{f=0\}}(F)_{p'} \simeq \mu_{\{f=0\}}(LY)_{p'} \simeq \phi_f(LY)_o \simeq \phi_{f|_Y}(LY)_o \simeq L[l-n]$ (см. упр. 8.14 и 8.15), что и завершает доказательство. $\square$

Упражнения к гл. 8

Упражнение 8.1. Пусть $S = (S, \Delta)$ — симплициальный комплекс. Определим категорию Δ , положив $\text{Ob}(\Delta) = \{\sigma; \sigma \in \Delta\}$ и $\text{Hom}(\sigma, \tau) = \emptyset$, если $\sigma \not\subset \tau$, $\text{Hom}(\sigma, \tau) = \{\text{pt}\}$, если $\sigma \subset \tau$. Обозначим через $\Delta(A)$ категорию ковариантных функторов из Δ в $\text{Mod}(A)$, и пусть δ — это функтор из $\omega\text{-Comp}(S)$ в $\Delta(A)$, заданный формулой $F \mapsto \{\sigma \mapsto F(U(\sigma))\}$. Докажите, что δ — это эквивалентность категорий.

Упражнение 8.2. Пусть (t, x, y) — система координат на $X = \mathbb{R}^3$, и пусть $Z = \{y^2 - t^2 x^2 - x^3 = 0\}$, $Z_2 = \{x = y = 0\}$, $Z_1 = Z \setminus Z_2$, $Z_0 = X \setminus Z$. Докажите, что $X = Z_0 \sqcup Z_1 \sqcup Z_2$ является субаналитической стратификацией, но не μ -стратификацией.

Упражнение 8.3. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$.

(i) Докажите изоморфизмы:

$$\begin{aligned} f^!(D_X F) &\simeq D_Y(f^{-1} F), \\ Rf_*(D_Y F) &\simeq D_X(Rf_! G). \end{aligned}$$

(ii) Пусть F $\mathbb{R}$ -конструктивен. Докажите, что

$$f^{-1}(D_X F) \simeq D_Y(f^! F).$$

(iii) Предположим, что G и $Rf_!(D_Y G)$ $\mathbb{R}$ -конструктивны. Докажите изоморфизм

$$Rf_!(D_Y G) \simeq D_X(Rf_* G)$$

и докажите $\mathbb{R}$ -конструктивность $Rf_* G$.

Упражнение 8.4. В условиях предложения 5.4.17 докажите, что если объект G $\mathbb{R}$ -конструктивен, то $Rf_* G$ (соответственно $R_! fG$) также $\mathbb{R}$ -конструктивен.

Упражнение 8.5. Пусть $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ есть μ -стратификация. Положим $\Lambda = \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$. Докажите, что $\text{SS}(F) \subset \Lambda$ в том и только в том случае, когда $\text{SS}(H^j(F)) \subset \Lambda$ для всех j .

Упражнение 8.6. Пусть Ω — подмножество в T^*X . Определим полную подкатегорию $\mathbf{D}_{\psi-\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ (соответственно $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$) категории $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$ как категорию, состоящую из объектов F , удовлетворяющих следующему условию: для любой точки $p \in \Omega$ существует $F' \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\psi-\mathbb{R}-c}^b(X))$ (соответственно $F' \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$), такой, что F и F' изоморфны в $\mathbf{D}^b(X; p)$.

- (i) Докажите, что F из $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$ принадлежит $\mathbf{D}_{\psi-\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$ в том и только в том случае, когда существует открытая окрестность U множества Ω , такая, что $\text{SS}(F) \cap U$ содержится в замкнутом субаналитическом изотропном подмножестве в U .
- (ii) В условиях предложения 6.3.3 докажите, что если F $\mathbb{R}$ -конструктивен, то $Rq_{1!}F$ и $Rq_{1*}F$ принадлежит $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega)$.

Упражнение 8.7. В условиях теоремы 7.2.1 предположим, что K $\mathbb{R}$ -конструктивен. Докажите, что Φ_K индуцирует эквивалентность категорий $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y; \Omega_Y) \simeq \mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X; \Omega_X)$. (Указание. Используйте упр. 8.6.)

Упражнение 8.8. Пусть X — комплексное многообразие и Λ — замкнутое коническое $\mathbb{C}$ -аналитическое подмножество в T^*X . Предположим, что Λ_{reg} инволютивно. Докажите, что Λ инволютивно в $T^*X^{\mathbb{R}}$ (в смысле определения 6.5.1). (Указание. Используйте результат Касивары–Монтейро–Фернандеса [Kashiwara–Monteiro–Fernandes 1]).

Упражнение 8.9. Пусть $S = (S, \Delta)$ — конечномерный симплицальный комплекс (т. е. комплекс, удовлетворяющий условию (8.1.16)), и пусть $X = |S|$ обозначает соответствующее топологическое пространство. Положим

$$X_k = \{x \in X; x \in |\sigma| \text{ для некоторого } \sigma \in \Delta \text{ с } \#\sigma \leq -k + 1\}.$$

- (i) Докажите, что $H_{X_k \setminus X_{k+1}}^j(\omega_X) = 0$ при $j \neq k$.
- (ii) Используя упражнение 2.21, докажите, что ω_X изоморфен комплексу $\{H_{X_k \setminus X_{k+1}}^k(\omega_X)\}$ в $\mathbf{D}^b(X)$, и опишите этот комплекс.

Упражнение 8.10. Пусть X — комплексное многообразие, S — замкнутое $\mathbb{C}$ -аналитическое подмногообразие, $U = X \setminus S$ и j — открытое вложение $U \hookrightarrow X$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(U))$ и $\text{SS}(F) \subset T_U^*U$. Докажите, что $Rj_!F$ и Rj_*F принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$.

Упражнение 8.11. Пусть $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ — субаналитическая стратификация вещественно-аналитического многообразия X . Докажите, что если $\Lambda = \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^*X$ замкнуто, то Λ инволютивно (в смысле определения 6.5.1).

Упражнение 8.12. Пусть N и M — субаналитические подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ и $N \subset \overline{M} \setminus M$. Рассмотрим следующие условия (а) и (б) (формулировка восходит к Уитни).

- (а) Для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из M , сходящейся к $x \in N$, если $\{T_{x_n}M\}$ сходится к плоскости τ , то $T_xN \subset \tau$.
- (б) Для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из M и любой последовательности $\{y_n\}$ точек из N , сходящихся к $x \in N$, если последовательность прямых $\{\mathbb{R}(x_n, y_n)\}$ сходится к l и последовательность $\{T_{x_n}M\}$ сходится к τ , то $l \subset \tau$.

Докажите, что из (б) следует (а) и что из μ -условия следует (б). (Указание. Используйте лемму о выборе кривой.)

Упражнение 8.13. Пусть f — голоморфная функция на комплексном многообразии X , и пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X))$. Докажите существование канонического изоморфизма

$$R\Gamma_{\{\text{Re } f \geq 0\}}(F)|_{f^{-1}(0)} \xrightarrow{\sim} \phi_f(F).$$

Упражнение 8.14. Пусть $X = \mathbb{C}^n$, $f(x) = \sum_j x_j^2$, и пусть $M \in \text{Ob } \mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A))$. Докажите изоморфизм $\phi_f(M_X) \simeq M_{\{0\}}[-n]$.

Упражнение 8.15. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий, а $t: X \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция на X . Пусть $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(Y))$, и предположим, что f собствен на $\text{supp}(G)$. Обозначим через f_0 ограничение f на $\{t \circ f = 0\}$. Докажите, что

$$\begin{aligned}\psi_t(Rf_*G) &\simeq Rf_{0*}\psi_{t_0f}(G), \\ \phi_t(Rf_*G) &\simeq Rf_{0*}\phi_{t_0f}(G).\end{aligned}$$

Замечания

Истоки теории субаналитических множеств восходят к работам Лоясевича [Lojasiewicz 1,2], а разрабатываться она начала Габриэловым [1] и Хиронакой [Hironaka 1,2]. Основные результаты принадлежат Хиронаке [loc.cit], но и другие ученые внесли важный вклад, в частности, см. [Hardt 1,2], [Tamm 1] и [Teissier 1]. Первоначально технически очень трудная, эта теория затем была существенно упрощена (см., например, [Denkowska-Lojasiewicz-Stacica 1]): в небольшой статье [Bierstone-Milman 1] содержатся все основные теоремы с полными доказательствами.

Понятие стратифицированного пространства впервые появилось в работе Картана и Шевалле [Cartan-Chevalley 1]. Уитни [Whitney 1,2] ввел условия регулярности на страты (знаменитые «условия (а) и (b) Уитни») и доказал, что для любой заданной стратификации существует более тонкая стратификация, удовлетворяющая этим условиям (аналог теоремы 8.3.20). Существуют различные условия регулярности вещественных стратификаций (см. обзор [Trotman 1]). В частности, следует отметить понятие ω -стратификации, принадлежащее Вердье [Verdier 3] (1976 г.), которое является вариантом условия, принадлежащего Куо [Kuo 1]. В этой статье Вердье доказал, что, во-первых, ω -условие сильнее условий Уитни и, во-вторых, ω -стратификации всегда существуют. Последнее утверждение эквивалентно теореме 8.3.20, так как в [Trotman 2] доказана эквивалентность понятий ω - и μ -стратификаций. Отметим также работу [Delort 1], где дано обобщение операции $\hat{+}$.

В комплексном относительном случае A_j -условие Тома является эффективным средством изучения прямых образов (см. [Henry-Merle-Sabbah 1]), а Хиронака [Hironaka 3] доказал, что если пространство образа имеет размерность, большую единицы, то это условие удовлетворяется «локально», что, по существу, эквивалентно предложению 8.5.9.

Микролокальное изучение стратификаций (т. е. рассмотрение стратификаций с использованием лагранжевых подмножеств, что теперь называется «конормальной геометрией») было начато Касиварой [Kashiwara 3,5] и продолжено в работах [Kashiwara-Schapira 1,3].

Конструктивные пучки ввел Гротендик (в [SGA 4], раздел IX, принадлежащий Артину), он же изучил их функториальные свойства (в контексте этальных когомологий). Интерес к этой теории возродился после открытия Касиварой [Kashiwara 3] связи конструктивных пучков с $\mathcal{D}$ -модулями (см. гл. 11.3), а также после создания теории когомологий пересечений (ГМ-когомологий) Горески и Макферсоном [Goresky-MacPherson 1] и теории превратных пучков Габбером

и Бейлинсоном–Берштейном–Делинем [Beilinson–Bernstein–Deligne 1] (см. обзор Брилински [Brylinski 1]).

Теория функторов близкого и исчезающего циклов (§ 8.6) принадлежит Гротендику (см. [SGA 7], раздел 1) и Делиню [Deligne 2]. Своими истоками она имеет работы Лефшеца и Пикара по исчезающим циклам и монодромии.

В предложении 8.6.4 доказано, что микроноситель S -конструктивного пучка на комплексном многообразии может быть описан с помощью функтора исчезающего цикла. Как заметил Брилински [loc. cit.], это утверждение в неявной форме содержится в работе Касивары [Kashiwara 5].

Все результаты § 8.1, а также теорема 8.4.5 содержатся в работе Касивары [Kashiwara 6]. Большинство результатов § 8.3, 8.4 и 8.5 впервые были получены аналогичными методами в [Kashiwara–Schapira 3], но, конечно, операции над конструктивными пучками были известны задолго до этого (см. [Verdier 4]). Однако определение 8.3.19 и предложение 8.4.14 — это новые результаты, как и доказательство предложения 8.4.1, не использующее теорему изотопии Тома–Мазера.

Характеристические циклы

На вещественно-аналитическом многообразии X с помощью дуализирующего комплекса ω_X мы определим субаналитические цепи и субаналитические циклы. Затем введем понятие пересечения двух циклов.

Для $\mathbb{R}$ -конструктивного объекта F из $D^b(X)$ мы построим характеристический цикл $CC(F)$ объекта F как естественный образ морфизма $\text{id}_F \in \text{Hom}(F, F)$ в $H_{SS(F)}^0(T^*X; \pi^{-1}\omega_X)$. Это и есть «лагранжиан». Если, например, M является замкнутым подмногообразием в X , а $V \in \text{Ob}(D^b(\text{Mod}^f(k)))$ (основное кольцо — это поле k характеристики 0), то $CC(V_M) = m[T_M^*X]$, где $[T_M^*X]$ — лагранжев цикл, соответствующий конормальному расслоению T_M^*X к M в X , а $m = \chi(V) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(V)$. Мы изучим функториальные свойства характеристических циклов, связанные с нехарактеристическими прямыми и собственными прямыми образами. Мы докажем, что если F имеет компактный носитель, то характеристика Эйлера-Пуанкаре $\chi(X; F) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(X; F)$ равна индексу пересечения цикла $CC(F)$ и цикла, соответствующего нулевому сечению расслоения T^*X . Мы также выведем формулу локальной характеристики Эйлера-Пуанкаре. Эти характеристики можно найти с помощью «функции Морса относительно $SS(F)$ ».

Затем мы выведем формулу — аналог «формулы Лефшеца для числа неподвижных точек». Если f — эндоморфизм многообразия X и задан морфизм $\varphi \in \text{Hom}(f^{-1}F, F)$, то можно определить характеристический класс $C(\varphi) \in H^0(X; \omega_X)$, степень которого определяет след $\text{tr}(\varphi)$ отображения $\Gamma(X; \varphi) \in \text{Hom}(R\Gamma(X; F), R\Gamma(X; F))$ (предполагается, что F имеет компактный носитель). Если f имеет конечное число неподвижных точек и трансверсален единице, то мы покажем, как найти $\text{tr}(\varphi)$ по локальной формуле.

Наконец, мы рассмотрим группу Гротендика категории $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Мы докажем, что эта группа изоморфна группе лагранжевых циклов на T^*X (изоморфизм определен отображением $F \mapsto CC(F)$), а также изоморфна группе $\mathbb{R}$ -конструктивных функций на X (изоморфизм определен отображением $F \mapsto \chi(F)(x) = \chi(F_x)$). Это задает новое исчисление на алгебре конструктивных функций на X .

Мы придерживаемся соглашений 8.0. В § 9.1, в § 9.4 и далее основ-

ным кольцом будет поле характеристики 0, которое мы будем обозначать через k .

Замечание 9.0. Коммутативность диаграмм в § 9.1 будет тщательно проверяться. Эта же схема проверки работает в аналогичных случаях и далее. Иногда мы будем оставлять проверку читателю. Контроль знаков при диаграммных вычислениях очень трудоемок (особенно в данной главе). Поэтому мы не будем различать коммутативных и антикоммутативных диаграмм. Это не влияет на понимание смысла вычислений. В приложениях правильный знак нетрудно угадать, рассматривая простые примеры.

9.1. Формула характеристики Эйлера–Пуанкаре

В этом разделе основным кольцом будет поле k характеристики 0. Если $V \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}^f(k)))$, то

$$(9.1.1) \quad \chi(V) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(V).$$

Пусть X — вещественно-аналитическое многообразие, F принадлежит $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ и $x \in X$.

Определение 9.1.1. Положим

$$\begin{aligned} \chi(F)(x) &= \chi(F_x), \\ \chi_c(F)(x) &= \chi(R\Gamma_{\{x\}}(X; F)) = \chi(D(F))(x). \end{aligned}$$

Если $R\Gamma(X; F)$ (соответственно $R\Gamma_c(X; F)$) принадлежит $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}^f(k))$, то положим

$$\begin{aligned} \chi(X; F) &= \chi(R\Gamma(X; F)) \\ (\text{соответственно } \chi_c(X; F) &= \chi(R\Gamma_c(X; F))). \end{aligned}$$

Целое число $\chi(X; F)$ называется *характеристикой* или *индексом Эйлера–Пуанкаре* объекта F , а функция $\chi(F)(x)$ — *локальной характеристикой* или *локальным индексом Эйлера–Пуанкаре* объекта F .

В этом разделе мы рассмотрим методы вычисления этих характеристик.

Единица из $\text{Hom}(F, F) = \text{Hom}(k_X, R\mathcal{H}\text{om}(F, F))$ определяет морфизм

$$(9.1.2) \quad k_X \rightarrow R\mathcal{H}\text{om}(F, F).$$

Если определить дуализирующий функтор D_X как $R\mathcal{H}om(\cdot, \omega_X)$, то мы получаем морфизм

$$(9.1.3) \quad \mathrm{tr}_X: F \otimes D_X F \rightarrow \omega_X.$$

Мы назовем tr_X *морфизмом следа*. Пусть $\delta_x: X \rightarrow X \times X$ — диагональное вложение (если нет опасности путаницы, то мы будем писать δ вместо δ_X и, аналогично, D вместо D_X и т. д.). Существует единственный морфизм

$$(9.1.4) \quad \delta^! \rightarrow \delta^{-1},$$

такой, что коммутативна следующая диаграмма:

$$(9.1.5) \quad \begin{array}{ccccc} \delta^{-1} \delta_! \delta^! & \longrightarrow & \delta^{-1} & \xrightarrow{\sim} & \delta^! \delta_! \delta^{-1} \\ \wr \downarrow & & \uparrow & & \downarrow \wr \\ \delta^{-1} \delta_* \delta^! & \xrightarrow{\sim} & \delta^! & \longrightarrow & \delta^! \delta_* \delta^{-1} \end{array}$$

Значит, получаем цепочку морфизмов

$$k_X \rightarrow R\mathcal{H}om(F, F) \simeq \delta^!(F \boxtimes DF) \rightarrow \delta^{-1}(F \boxtimes DF) \simeq F \otimes DF \xrightarrow{\mathrm{tr}_X} \omega_X.$$

Определение 9.1.2. Образ элемента $1 \in \Gamma(X; k_X)$ в $H_{\mathrm{supp}(F)}^0(X; \omega_X)$ (см. выше) называется *характеристическим классом* объекта F и обозначается через $C(F)$. Если S — замкнутое подмножество и $S \supset \mathrm{supp}(F)$, то мы используем то же обозначение $C(F)$ для образа характеристического класса объекта F при морфизме $H_{\mathrm{supp}(F)}^0(X; \omega_X) \rightarrow H_S^0(X; \omega_X)$.

Если $X = \{\mathrm{pt}\}$, то $F \in \mathrm{Ob}(D^b(\mathcal{M}od^f(k)))$ и $C(F) = \chi(F)$ (см. упр. 1.32).

Рассмотрим прямые образы характеристических классов.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а $G \in \mathrm{Ob}(D_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$, и предположим, что f является собственным на $\mathrm{supp}(G)$. Рассмотрим диаграмму

$$(9.1.6) \quad \begin{array}{ccccccc} Rf_* k_Y & \rightarrow & Rf_* R\mathcal{H}om(G, G) & \xleftarrow{\sim} & Rf_! \delta_Y^!(G \boxtimes D_Y G) & \rightarrow & \\ \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ k_X & \rightarrow & R\mathcal{H}om(Rf_! G, Rf_! G) & \xleftarrow{\sim} & \delta_X^!(Rf_! G \boxtimes D_X Rf_! G) & \rightarrow & \\ & & & & \rightarrow & Rf_!(G \otimes D_Y G) & \rightarrow Rf_! \omega_Y \\ & & & & & \uparrow & \downarrow \\ & & & & & (Rf_! G) \otimes (D_X Rf_! G) & \rightarrow \omega_X \end{array}$$

1 2 3 4

$$\begin{array}{ccccccc}
f_* \mathcal{H}om(G, G) & \xrightarrow{\sim} & f_* \delta_Y^! \mathcal{H}om(A_Y \boxtimes G, G \boxtimes \omega_Y) & \xrightarrow{\sim} & f_* \delta_Y^! (G \boxtimes D_Y G) & \rightarrow & f_* \delta_Y^{-1} (G \boxtimes D_Y G) \xrightarrow{\sim} f_i(G \boxtimes D_Y G) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
f_* \mathcal{H}om(G, f^! f_i G) & \xrightarrow{\sim} & f_* \delta_Y^! \mathcal{H}om(A_Y \boxtimes G, f^! f_i G \boxtimes \omega_Y) & \leftarrow & f_* \delta_Y^! (f^! f_i G \boxtimes D_Y G) & \xleftarrow{\sim} & f_* \delta^{-1} f_{1*} (G \boxtimes D_Y G) \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \uparrow \\
& & f_* \delta_Y^! f_1^! \mathcal{H}om(A_X \boxtimes G, f_i G \boxtimes \omega_Y) & \xrightarrow{\sim} & f_* \delta_Y^! f_1^! (f_i G \boxtimes D_Y G) & \leftarrow & f_* \delta^{-1} f_{11} (G \boxtimes D_Y G) \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \uparrow \\
& & f_* \delta_Y^! \mathcal{H}om(A_X \boxtimes G, f_i G \boxtimes \omega_Y) & \leftarrow & f_* \delta^! (f_i G \boxtimes D_Y G) & \rightarrow & f_* \delta^{-1} (f_i G \boxtimes D_Y G) \xrightarrow{\sim} f_* (f^{-1} f_i G \otimes D_Y G) \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \uparrow \\
& & \delta_X^! f_{2*} \mathcal{H}om(A_X \boxtimes G, f_2^! (f_i G \boxtimes \omega_X)) & \leftarrow & \delta_X^! f_{2*} (f_i G \boxtimes D_Y G) & \rightarrow & \delta_X^{-1} f_{2*} (f_i G \boxtimes D_Y G) \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \uparrow \\
& & \delta_X^! f_{2*} \mathcal{H}om(A_X \boxtimes G, f_2^! (f_i G \boxtimes \omega_X)) & \leftarrow & \delta_X^! f_{2*} (f_i G \boxtimes D_Y G) & \rightarrow & \delta_X^{-1} (f_i G \boxtimes f_* D_Y G) \xrightarrow{\sim} f_i G \otimes f_* D_Y G \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \uparrow \\
& & \delta_X^! \mathcal{H}om(A_X \boxtimes f_i G, f_i G \boxtimes \omega_X) & \xrightarrow{\sim} & \delta_X^! (f_i G \boxtimes D_X f_i G) & \rightarrow & \delta_X^{-1} (f_i G \boxtimes D_X f_i G) \xrightarrow{\sim} f_i G \otimes D_X f_i G
\end{array}$$

Диаграмма (9.1.8)

Предложение 9.1.3. *Диаграмма (9.1.6) коммутативна.*

Доказательство. Для кратости мы будем опускать обозначение « R » производного функтора.

- (i) Квадрат 1, очевидно, коммутативен.
- (ii) Рассмотрим коммутативную диаграмму отображений

$$(9.1.7) \quad \begin{array}{ccccc} Y \times Y & \xrightarrow{f_1} & X \times Y & \xrightarrow{f_2} & X \times X \\ & \searrow \delta_Y & \uparrow \delta & \square & \uparrow \delta_X \\ & & Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

в которой квадрат декартов. Тогда квадраты 2 и 3 в (9.1.6) могут быть представлены, как на диаграмме (9.1.8) на с. 467.

Коммутативность всех квадратов в (9.1.8) легко проверяется, за исключением (а) и (б). Их коммутативность следует из лемм 9.1.4 и 9.1.5 соответственно.

Лемма 9.1.4. *Пусть $Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X$ — цепочка морфизмов локально компактных пространств конечной s -мягкой размерности. Положим $h = f \circ g$. Предположим, что g и h являются замкнутыми вложениями. Тогда если $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$, то следующая диаграмма коммутативна:*

$$(9.1.9) \quad \begin{array}{ccc} g^!G & \longrightarrow & g^{-1}G \\ \downarrow & & \uparrow \\ g^!f^!f_!G & & g^{-1}f^{-1}f_*G \\ \downarrow \wr & & \uparrow \wr \\ h^!f_!G & \longrightarrow & h^{-1}f_!G \end{array}$$

Доказательство леммы 9.1.4. Так как функтор $h_! = h_*: \mathbf{D}^b(Z) \rightarrow \mathbf{D}^b(X)$ является строгим, то достаточно доказать коммутативность диаграммы, полученной из (9.1.9) применением функтора $h_!(\simeq h_*)$.

Полученная таким образом диаграмма вкладывается в диаграмму (9.1.10) (см. с. 469). Коммутативность диаграммы (9.1.10) следует из того, что композиции

$$f_!G \rightarrow f_!f^!f_!G \rightarrow f_!G \text{ и } f_*G \rightarrow f_*f^{-1}f_*G \rightarrow f_*G$$

равны единице. □

$$\begin{array}{ccccccc}
h_! g^! G & \xrightarrow{\sim} & f_! g_! g^! G & \longrightarrow & f_! G & \longrightarrow & f_* G & \longrightarrow & f_* g_* g^{-1} G & \longrightarrow & h_* g^{-1} G \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
h_! g^! f^! f_! G & \xrightarrow{\sim} & f_! g_! g^! f^! f_! G & \longrightarrow & f_! f^! f_! G & \longrightarrow & f_* f^{-1} f_* G & \longrightarrow & f_* g_* g^{-1} f^{-1} f_* G & \xrightarrow{\sim} & h_* g^{-1} f^{-1} f_* G \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
h_! h^! f_! G & \longrightarrow & f_! G & \longrightarrow & f_! G & \longrightarrow & f_* G & \longrightarrow & h_* h^{-1} f_* G
\end{array}$$

(c)

Диаграмма (9.1.10)

Лемма 9.1.5. Рассмотрим следующий декартов квадрат локально компактных пространств конечной s -мягкой размерности, в котором отображение g есть замкнутое вложение:

$$(9.1.11) \quad \begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{g'} & Y \\ \downarrow f' & \square & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Тогда если $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$, то диаграмма

$$(9.1.12) \quad \begin{array}{ccc} f'_* g'^! G & \longrightarrow & f'_* g'^{-1} g \\ \wr \downarrow & & \uparrow \\ g^! f'_* G & \longrightarrow & g^{-1} f_* G \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство леммы 9.1.5. Достаточно доказать коммутативность диаграммы, полученной из (9.1.12) применением строгого функтора $g_! \simeq g_*$. Такая диаграмма вкладывается в следующую коммутативную диаграмму, что и завершает доказательство.

$$(9.1.13) \quad \begin{array}{ccccc} g_! f'_* g'^! G & \xrightarrow{\quad} & g_* f_* g'^{-1} G & & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f_* g_! g'^! G & \xrightarrow{\quad} & f_* g'_* g'^{-1} G & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & g_! f'_* G & \xrightarrow{\quad} & g_* g^{-1} f_* G & \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & f_* G & & & \end{array}$$

Окончание доказательства предложения 9.1.3. Остается доказать коммутативность квадрата 4 в (9.1.6). Это вытекает из следующей леммы. □

Лемма 9.1.6. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм локально компактных пространств конечной s -мягкой размерности, и пусть $F \in$

$\text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$, а $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$. Тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f_!(G \otimes \text{Hom}(G, f^!F)) & \longleftarrow f_!G \otimes f_*\text{Hom}(G, f^!F) & \longrightarrow f_!G \otimes \text{Hom}(f_!G, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_!f^!F & \xrightarrow{\hspace{10em}} & F \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство тривиально.

Из предложения 9.1.3 получаем такой результат:

Теорема 9.1.7. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$. Предположим, что f собствен на $\text{supp}(G)$. Тогда $C(Rf_*G)$ есть образ класса $C(G)$ при морфизме $H_{\text{supp}(G)}^0(Y; \omega_Y) \rightarrow H_{f(\text{supp}(G))}^0(X; \omega_X)$.

В частности, если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ имеет компактный носитель, то, рассматривая морфизм $a_X: X \rightarrow \{\text{pt}\}$, получаем

$$(9.1.14) \quad \chi(X; F) = \int_X C(F),$$

где $\int_X$ — отображение $H_c^0(X; \omega_X) \rightarrow k$, определенное в § 3.3. В следующих параграфах мы разовьем полученные здесь результаты в двух направлениях: с одной стороны, мы построим микролокальный аналог класса $C(F)$, а с другой — обобщим формулу характеристики Эйлера–Пуанкаре до формулы следа. Для этого нам понадобится подготовительный материал.

9.2. Субаналитические цепи и субаналитические циклы

Сингулярные гомологии определяются через сингулярные цепи. В этой книге мы ограничиваемся субаналитическим случаем. Пусть X — многообразие (напомним, что все многообразия и морфизмы считаются вещественно-аналитическими). Для целого p через $CS'_p(X)$ обозначим A -модуль, порожденный символами $[S]$, где S пробегает семейство субаналитических p -мерных ориентированных подмногообразий в X , причем должны выполняться следующие соотношения

(9.2.1)–(9.2.3):

(9.2.1) $[S_1 \sqcup S_2] = [S_1] + [S_2]$, если S_1 и S_2 не пересекаются,

(9.2.2) $\begin{cases} [S] = [S'], \text{ если } S' \text{ — открытое плотное в } S \\ \text{субаналитическое подмножество с индуци-} \\ \text{рованной ориентацией,} \end{cases}$

(9.2.3) $\begin{cases} [S^a] = -[S], \text{ если } S^a \text{ равно } S \text{ как множество,} \\ \text{но ориентация противоположна.} \end{cases}$

Обозначим через CS_p^X (или через CS_p , если нет опасности путаницы) пучок на X , ассоциированный с предпучком $U \mapsto CS_p'(U)$. Если F — пучок на X , то положим

$$CS_p(F) = CS_p \otimes F.$$

Определение 9.2.1. Пучок $CS_p(F)$ называется *пучком субаналитических p -цепей со значениями в F* .

Для того чтобы описать пучок $CS_p(F)$, нам понадобятся некоторые дополнительные результаты о дуализирующем комплексе ω_X .

Если $S \subset X$ — субаналитическое подмножество, то через j_S обозначим вложение $S \hookrightarrow X$. Если $\dim(S) \leq p$, то $S_{\text{reg}, p}$ будет обозначать объединение p -мерных связных компонент множества S_{reg} . Если S локально замкнуто, то положим

$$(9.2.4) \quad \partial S = \bar{S} \setminus S.$$

Это замкнутое множество.

Предложение 9.2.2. Пусть S — замкнутое субаналитическое подмножество размерности $\leq p$.

- (i) Для любого пучка F на S имеем $H_c^j(S; F) = H^j(S, F) = 0$ при $j > p$.
- (ii) $H^j(\omega_S) = 0$ при $j < -p$.
- (iii) $H^{-p}(S; \omega_S) \simeq H^0(S; H^{-p}(\omega_S)) \simeq \text{Hom}(H_c^p(S; A_S), A)$.

Доказательство. (i) Выберем фильтрацию $S = S_p \supset \dots \supset S_0$, где S_k — замкнутые субаналитические подмножества в S , а $S_k \setminus S_{k-1}$ гладки и имеют размерность k . Тогда

$$H^j(S; F_{S_k \setminus S_{k-1}}) = \varinjlim_U H^j(S_k \setminus S_{k-1}; F_U),$$

где U пробегает семейство открытых подмножеств в $S_k \setminus S_{k-1}$, таких, что $\bar{U} \cap S_{k-1} = \emptyset$. Из предложения 3.2.2 следует, что $H^j(S; F_{S_k \setminus S_{k-1}}) = 0$ при $j > k$. Теперь, рассматривая длинную точную последовательность

$$\dots \rightarrow H^j(S; F_{S \setminus S_{p-1}}) \rightarrow H^j(S; F) \rightarrow H^j(S; F_{S_{p-1}}) \rightarrow \dots,$$

будем проводить индукцию по p . Так как $H^j(S; F_{S_{p-1}}) = H^j(S_{p-1}; F_{S_{p-1}})$, то все члены с $j > p$ равны нулю и мы получаем, что $H^j(S; F) = 0$ при $j > p$. Обращение в нуль $H^j_\varepsilon(S; F)$ при $j > p$ следует из равенства $H^j_\varepsilon(S; F) = \varinjlim_U H^j(S; F_U)$, где U пробегает

семейство относительно компактных открытых подмножеств в S .

(ii) и (iii). Из (3.1.8) получаем

$$R\Gamma(S; \omega_S) \simeq R\text{Hom}(R\Gamma_c(S; A_S), A).$$

Так как комплекс $R\Gamma_c(S; A_S)$ сосредоточен в степенях $\leq p$, то $R\Gamma(S; \omega_S)$ сосредоточен в степенях $\geq -p$ и $H^{-p}(R\Gamma(S; \omega_S)) \simeq H^{-p}(R\text{Hom}(R\Gamma_c(S; A_S), A)) \simeq \text{Hom}(H^p_\varepsilon(S; A_S), A)$. $\square$

Предложение 9.2.3. Пусть S — замкнутое субаналитическое подмножество в X размерности $\leq p$, а S_0 — локально замкнутое субаналитическое подмножество в S . Тогда

- (i) $j_{S_0*} H^{-p}(\omega_{S_0}) \simeq H^0_{S_0}(j_{S_0*} H^{-p}(\omega_S))$,
- (ii) если S_0 замкнуто, а $\dim(S \setminus S_0) < p$, то $j_{S_0*} H^{-p}(\omega_{S_0}) \simeq j_{S_0*} H^{-p}(\omega_S)$,
- (iii) если S_0 открыто и плотно в $S_{\text{reg}, p}$, то существует точная последовательность

$$0 \rightarrow j_{S*} H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S_0*} \text{oz}_{S_0} \rightarrow j_{S \setminus S_0*} H^{-p+1}(\omega_{S \setminus S_0}).$$

Доказательство. (i) Имеем $Rj_{S_0*} \omega_{S_0} \simeq R\Gamma_{S_0}(\omega_S)$. Так как ω_{S_0} и ω_S сосредоточены в степенях $\geq -p$, то (i) доказано.

(ii) следует из того, что $\omega_S|_{S \setminus S_0}$ сосредоточен в степенях $> -p$.

(iii) Рассмотрим выделенный треугольник

$$R\Gamma_{S \setminus S_0}(\omega_S) \longrightarrow \omega_S \longrightarrow Rj_{S_0*} j_{S_0}^{-1} \omega_S \xrightarrow{+1}.$$

Он порождает длинную последовательность (заметим, что $\omega_{S \setminus S_0} \simeq R\Gamma_{S \setminus S_0}(\omega_S)$ и $\omega_S|_{S_0} \simeq \text{oz}_{S_0}[-p]$)

$$H^{-p}(\omega_{S \setminus S_0}) \rightarrow H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S_0*} \text{oz}_{S_0} \rightarrow H^{-p+1}(\omega_{S \setminus S_0}).$$

Так как $\dim(S \setminus S_0) < p$, то первый член обращается в нуль. $\square$

Вернемся к изучению пучков CS_p . Для неотрицательного целого p пусть $LCLS_p(X)$ обозначает множество локально замкнутых субаналитических подмножеств в X размерности $\leq p$. Введем частичный порядок $<$ на $LCLS_p(X)$ следующим образом: $S_1 < S_2$ для S_1 и S_2 из $LCLS_p(X)$ в том и только в том случае, когда существует субаналитическое подмножество $S \subset S_1 \cap S_2$, такое, что

$$(9.2.5) \quad \begin{cases} S \text{ открыто в } S_1 \text{ и замкнуто в } S_2 \\ \text{и } \dim(S_1 \setminus S) < p. \end{cases}$$

Отметим, что $LCLS_p(X)$ — это направленное упорядоченное множество, т. е. для любых S_1 и S_2 из $LCLS_p(X)$ найдется S , такое, что $S_1 < S$ и $S_2 < S$. В самом деле, положим $S = (S_1 \setminus \partial S_2) \cup (S_2 \setminus \partial S_1)$. Отметим, что $S < S_{\text{reg}, p}$ для любого $S \in LCLS_p(X)$. Если $S_1 < S_2$, то имеет место канонический морфизм

$$(9.2.6) \quad j_{S_1*} H^{-p}(\omega_{S_1}) \rightarrow j_{S_2*} H^{-p}(\omega_{S_2}).$$

Этот морфизм является композицией

$$j_{S_1*} H^{-p}(\omega_{S_1}) \rightarrow j_{S*} H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S_2*} H^{-p}(\omega_{S_2}),$$

где S удовлетворяет (9.2.5). Это построение не зависит от выбора S . В самом деле, если S' — какое-либо другое множество, удовлетворяющее (9.2.5), то $S'' = S \cap S'$ также удовлетворяет (9.2.5), а морфизм $j_{S*} H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S''*} H^{-p}(\omega_{S''})$ корректно определен и является изоморфизмом (так как S'' замкнуто и открыто в S и $\dim(S \setminus S'') < p$).

Лемма 9.2.4. *Существуют изоморфизмы*

$$CS_p^X \simeq \varinjlim_{S \in LCLS_p(X)} j_{S*} H^{-p}(\omega_S) \simeq \varinjlim_{S'} j_{S'*} \omega_{S'},$$

где S' пробегает семейство p -мерных субаналитических подмногообразий в X .

Доказательство. Так как $S < S_{\text{reg}, p}$ для $S \in LCLS_p(X)$, то существование последнего изоморфизма очевидно.

Пусть U открыто в X , а V — открытое субаналитическое подмножество в X , такое, что $\bar{V} \subset U$. Определим морфизм

$$\alpha: CS_p'(U) \rightarrow \varinjlim_S \Gamma(V; j_{S*} \omega_S) \rightarrow \Gamma\left(V; \varinjlim_S j_{S*} \omega_S\right)$$

следующим образом. Если S — ориентированное p -мерное субаналитическое подмногообразие, то его ориентация определяет сечение s пучка $oz_{S \cap V}$ над V . Тогда α задано соотношением $[S] \mapsto s \in \Gamma(V; j_{S*} oz_S)$. Взяв индуктивный предел по U и V , получаем морфизм $CS_p^X \rightarrow \varinjlim_S j_{S*} oz_S$, который, очевидно, является изоморфизмом. $\square$

Пусть $CLS_p X$ обозначает множество замкнутых субаналитических подмножеств в X размерности $\leq p$. Упорядочим $CLS_p(X)$ по включению. Если S_1 и S_2 принадлежат $CLS_p(X)$ и $S_1 \subset S_2$, то по предложению 9.2.3 существует инъективный морфизм

$$(9.2.7) \quad j_{S_1*} H^{-p}(\omega_{S_1}) \rightarrow j_{S_2*} H^{-p}(\omega_{S_2}).$$

Определение 9.2.5. Положим

$$ZS_p^X = \varinjlim_{S \in CLS_p(X)} j_{S*} H^{-p}(\omega_S)$$

и назовем ZS_p^X пучком субаналитических p -циклов на X (над кольцом A). Если нет опасности ошибки, то мы будем писать ZS_p вместо ZS_p^X .

Для A_X -модуля F на X положим $ZS_p(F) = ZS_p \otimes F$ и назовем этот объект пучком субаналитических p -циклов со значениями в F . Так как $CLS_p(X)$ содержится в $LCLS_p(X)$, то имеет место точная последовательность

$$(9.2.8) \quad 0 \rightarrow ZS_p \rightarrow CS_p.$$

Пусть $S \in LCLS_p(X)$. Тогда существует выделенный треугольник

$$\omega_{\partial S} \longrightarrow \omega_{\bar{S}} \longrightarrow Rj_{S*} \omega_S \xrightarrow{+1},$$

который порождает длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow H^{-p}(\omega_{\bar{S}}) \rightarrow j_{S*} H^{-p}(\omega_S) \rightarrow H^{1-p}(\omega_{\partial S}).$$

Беря индуктивные пределы, получаем точную последовательность

$$(9.2.9) \quad 0 \rightarrow ZS_p \rightarrow CS_p \rightarrow ZS_{p-1},$$

где первая стрелка — это морфизм из (9.2.8). Определим *граничный оператор*

$$(9.2.10) \quad \partial_p: CS_p \rightarrow CS_{p-1}$$

как композицию $CS_p \rightarrow ZS_{p-1} \rightarrow CS_{p-1}$. Если нет опасности ошибки, то мы будем писать ∂ вместо ∂_p .

Предложение 9.2.6. (i) $\mathcal{CS}$ является комплексом пучков (см. обозначение 1.3.9).

(ii) $\mathcal{ZS}_p \simeq \text{Ker } \partial_p$.

(iii) $\mathcal{CS}_p(F)$ для любого пучка F на X является мягким пучком.

(iv) Существует канонический морфизм $\omega_X \rightarrow \mathcal{CS}$ в $\mathbf{D}^b(X)$.

(v) Если Ω открыто в X , то $\mathcal{CS}_p^X|_\Omega \simeq \mathcal{CS}_p^\Omega$ и $\mathcal{ZS}_p^X|_\Omega \simeq \mathcal{ZS}_p^\Omega$.

Доказательство. (i) и (ii) очевидны.

(iii) Для любого субаналитического подмножества $W \subset X$ пусть ρ_W обозначает эндоморфизм пучка $\mathcal{CS}_p$, определенного на $j_{S*}H^{-p}(\omega_S)$ морфизмом

$$j_{S*}H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S \cap W*}H^{-p}(\omega_{S \cap W}).$$

Тогда $\rho_W|_W = \text{id}$, $\rho_W^2 = \rho_W$ и $\rho_W = 0$ на $X \setminus \overline{W}$. Если Z — замкнутое подмножество в X и $s \in \Gamma(Z; \mathcal{CS}_p(F))$, то существуют открытая окрестность U подмножества Z и сечение $\tilde{s} \in \Gamma(U; \mathcal{CS}_p(F))$, ограничение которого на Z равно s . Пусть W — субаналитическое открытое подмножество в X и $Z \subset W \subset \overline{W} \subset U$. Тогда $\rho_W(\tilde{s}) \in \Gamma_{\overline{W}}(X; \mathcal{CS}_p(F))$ является глобальным продолжением сечения s .

(v) доказывается аналогично.

(vi) Так как $H^{-n}(\mathcal{CS}_*) = \text{Ker } \partial_n = \mathcal{ZS}_n = H^{-n}(\omega_X)$, то мы получаем морфизм $H^{-n}(\omega_n)[n] \rightarrow \mathcal{CS}$. $\square$

Предложение 9.2.7. Пусть L — локально свободный пучок конечного ранга на X .

(i) $\text{supp}(\alpha)$ для любого $\alpha \in \Gamma(X; \mathcal{CS}_p(L))$ является замкнутым субаналитическим подмножеством чистой размерности p .

(ii) Пусть $S \in \text{CLS}_p(X)$. Тогда

$$\Gamma_S(X; \mathcal{ZS}_p(L)) \simeq H^{-p}(S; \omega_S \otimes L).$$

(iii) Пусть $S \in \text{LCLS}_p(X)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(X; j_{S*}H^{-p}(\omega_S \otimes L)) &\simeq H^{-p}(S; \omega_S \otimes L) \\ &\simeq \{\alpha \in \Gamma_{\overline{S}}(X; \mathcal{CS}_p(L)); \text{supp}(\partial\alpha) \subset \partial S\}. \end{aligned}$$

Доказательство. (i) Локально сечение α принадлежит $j_{S*}\omega_S$ для некоторого субаналитического p -мерного подмногообразия S .

(ii) Пусть $S' \in \text{CLS}_p(X)$ и $S \subset S'$. В этом случае $\Gamma_S(j_{S'*}H^{-p}(\omega_{S'})) \simeq j_{S*}H^{-p}(\omega_S)$, из чего следует (ii).

(iii) Если $\alpha \in H^{-p}(S; \omega_S \otimes L)$, то очевидно, что $\text{supp}(\alpha) \subset \overline{S}$ и $\text{supp}(\partial\alpha) \subset \partial S$. Нам нужно доказать обратное. Так как задача локальна, мы можем считать, что $L = A_X$ и $\alpha \in \Gamma(S'; H^{-p}(\omega_{S'}))$ для некоторого $S' \in \text{LCLS}_p(X)$. Тогда $\Gamma_{\overline{S}}(j_{S'*}H^{-p}(\omega_{S'})) \simeq j_{\overline{S} \cap S'*}H^{-p}(\omega_{\overline{S} \cap S'})$.

Следовательно, мы можем считать, что $S' \subset \bar{S}$. Заменяя S' на $(S \cap S')_{\text{reg}, p} \cup (S \setminus \bar{S}')_{\text{reg}, p}$, мы можем предполагать, что S' открыто в S , а $\dim(S \setminus S') < p$. Тогда выделенный треугольник $\omega_S \setminus S' \rightarrow \omega_S \rightarrow \omega_{S'} \xrightarrow{+1}$ дает точную последовательность

$$0 \rightarrow H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S'*} H^{-p}(\omega_{S'})|_S \rightarrow j_{S \setminus S'*} H^{-p+1}(\omega_{S \setminus S'})|_S.$$

Так как $\partial\alpha|_S = 0$, то $\alpha \in H^{-p}(\omega_S)$. □

Следствие 9.2.8. Пусть L — локально свободный пучок конечного ранга на X . Тогда

$$\Gamma(X; CS_p(L)) \simeq \varinjlim_{S \in LCLS_p(X)} \Gamma(S; H^{-p}(\omega_S) \otimes L),$$

$$\Gamma(X; ZS_p(L)) \simeq \varinjlim_{S \in \overline{CLS}_p(X)} \Gamma(S; H^{-p}(\omega_S) \otimes L).$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 9.2.10, которую мы сформулируем ниже, рассмотрим функториальные операции на субаналитических цепях.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а CS^Y и CS^X обозначают комплексы субаналитических цепей на Y и X соответственно. Имеем

$$(9.2.11) \quad f_! CS_p^Y = \varinjlim_S j_{S*} H^{-p}(\omega_S),$$

где $S \in LCLS_p(Y)$ и f собствен на $\bar{S}$. Если S таково, то множество $S' = f(\bar{S}) \setminus f(\partial S)$ принадлежит $LCLS_p(X)$ и отображение $S \cap f^{-1}(S') \rightarrow S'$ собствен. Следовательно, мы получаем

$$f_! j_{S*} H^{-p}(\omega_S) \rightarrow j_{S'*} H^{-p}(\omega_{S'}) \rightarrow CS_p^X,$$

где первая стрелка получена взятием p -х когомологий морфизма $Rf_! \omega_{\bar{S}} \rightarrow \omega_{f(\bar{S})}$. Переходя к индуктивному пределу, получаем морфизм $f_! CS_p^Y \rightarrow CS_p^X$. Так как этот морфизм коммутирует с дифференциалом, то существует морфизм комплексов

$$(9.2.12) \quad f_! CS^Y \rightarrow CS^X.$$

Если f — пучок на X , то получаем морфизм

$$(9.2.13) \quad f_! CS^Y(f^{-1}F) \rightarrow CS^X(F).$$

Если $\alpha \in \Gamma(Y; \mathcal{CS}_p(f^{-1}F))$ и f собствен на $\text{supp}(\alpha)$, то мы обозначим через $f_*(\alpha)$ образ сечения α при морфизме (9.2.13) и назовем его прямым образом сечения α .

Внешнее произведение $\alpha \boxtimes \beta$ двух циклов $\alpha \in \Gamma(X; \mathcal{CS}_p^X(F))$ и $\beta \in \Gamma(Y; \mathcal{CS}_q^Y(G))$ определено морфизмом

$$j_{S_1*} H^{-p}(\omega_{S_1}) \boxtimes j_{S_2*} H^{-q}(\omega_{S_2}) \rightarrow j_{S_1 \times S_2*} H^{-p-q}(\omega_{S_1 \times S_2}),$$

где $S_1 \in LCL\mathcal{S}_p(X)$ и $S_2 \in LCL\mathcal{S}_q(Y)$. Так как эти морфизмы коммутируют с дифференциалом, то существует морфизм

$$(9.2.14) \quad \mathcal{CS}^X(F) \boxtimes \mathcal{CS}^Y(G) \rightarrow \mathcal{CS}^{X \times Y}(F \boxtimes G).$$

Определим теперь гомотопию субаналитических циклов.

Определение 9.2.9. Пусть γ_0 и γ_1 принадлежат $\Gamma(X; \mathcal{ZS}_p^X)$. Мы назовем γ_0 и γ_1 *гомотопными*, если существует $\tau \in \Gamma_{X \times [0,1]}(X \times \mathbb{R}; \mathcal{CS}_{p+1}^{X \times \mathbb{R}})$, такой, что

$$(9.2.15) \quad \partial\tau = i_{0*}\gamma_0 - i_{1*}\gamma_1,$$

где i_t — включение $X \hookrightarrow X \times \mathbb{R}, x \mapsto (x, t)$.

Пусть q обозначает проекцию $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ и S — образ $\text{supp}(\tau)$ при проекции q . Применяя q_* к (9.2.15), получаем, что $\gamma_0 - \gamma_1 = \partial q_*\tau$. Следовательно, γ_0 и γ_1 имеют один и тот же образ в $H_p(\Gamma_S(X; \mathcal{CS}^X))$. Теперь мы можем доказать такую теорему:

Теорема 9.2.10. *Канонический морфизм (см. предложение 9.2.6) $\omega_X \rightarrow \mathcal{CS}^X$ является изоморфизмом в $\mathbf{D}^b(X)$.*

Доказательство. Пусть $n = \dim X$. Так как $H^{-n}(\mathcal{CS}^X) = \mathcal{ZS}_n = H^{-n}(\omega_X)$, то достаточно показать, что $H^{-p}(\mathcal{CS}^X) = 0$ при $0 \leq p < n$. Пусть $x \in X$, а $\alpha \in (\mathcal{ZS}_p)_x$ при $0 \leq p < n$. Уменьшая X , если необходимо, найдем замкнутое субаналитическое подмножество S размерности $\leq p$, такое, что α является образом сечения (которое мы также обозначим через α) пучка $H^{-p}(S; \omega_S)$. Рассмотрим $(n-1)$ -мерное многообразие Y , такое, что $X \simeq \mathbb{R} \times Y$ в окрестности точки x , а проекция $f: X \rightarrow Y$ собственная на S (существование такого Y докажете самостоятельно в качестве упражнения). Пусть $\beta \in H_{[0,\infty]}^0(\mathbb{R}; \mathcal{CS}_1^{\mathbb{R}})$ — канонический элемент, граница $\partial\beta$ которого есть $\{0\}$. Положим $\gamma = \beta \boxtimes \alpha$. Тогда $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R} \times X; \mathcal{CS}_{p+1})$ и $\partial\gamma = \partial\beta \boxtimes \alpha = i_*\alpha$, где i — отображение $X \hookrightarrow \mathbb{R} \times X, x \mapsto (0, x)$. Пусть φ обозначает отображение $\mathbb{R} \times X \rightarrow X, (t, (s, y)) \mapsto (t+s, y)$. Тогда $\varphi: \mathbb{R} \times S \rightarrow X$ собственное и, следовательно, отображение $\varphi|_{\text{supp}(\gamma)}$ собственное. Поэтому $\varphi_*\gamma \in \Gamma(X; \mathcal{CS}_{p+1})$ и $\partial\varphi_*\gamma = \varphi_*\partial\gamma = \varphi_*i_*\alpha = \alpha$, что доказывает равенство $H^{-p}(\mathcal{CS}^X) = 0$ при $0 \leq p < n$. $\square$

Следствие 9.2.11. (i) Стебли пучков CS_p и ZS_p являются плоскими A -модулями, и $ZS_p(F)$ является ядром морфизма $CS_p(F) \rightarrow CS_{p-1}(F)$ для любого пучка F на X .

(ii) В категории $\mathbf{D}^b(X)$ существует естественный изоморфизм $\omega_X \otimes F \simeq CS_*(F)$.

Доказательство. (i) Стебель пучка CS_p — это индуктивный предел свободных A -модулей; следовательно, он плоский. Рассмотрим точную последовательность $0 \rightarrow ZS_p \rightarrow CS_p \rightarrow ZS_{p-1} \rightarrow 0$ при $p \leq \dim X$. Тогда если ZS_{p-1} плоский, то ZS_p плоский и мы получаем точную последовательность $0 \rightarrow ZS_p(F) \rightarrow CS_p(F) \rightarrow ZS_{p-1}(F) \rightarrow 0$. Таким образом, (i) устанавливается индукцией по p .

(ii) следует из (i) и теоремы 9.2.10. $\square$

Определим теперь пересечение двух циклов. Пусть S_j — замкнутое субаналитическое подмножество размерности p_j ($j = 1, 2$) в n -мерном многообразии X . Пусть L_1 и L_2 — локально свободные пучки конечного ранга. Рассмотрим цепочку морфизмов

(9.2.16)

$$\begin{aligned} H_{S_1}^{-p_1}(X; \omega_X \otimes L_1) \otimes H_{S_2}^{-p_2}(X; \omega_X \otimes L_2) \\ \simeq H_{S_1}^{n-p_1}(X; \text{oz}_X \otimes L_1) \otimes H_{S_2}^{n-p_2}(X; \text{oz}_X \otimes L_2) \\ \rightarrow H_{S_1 \cap S_2}^{2n-p_1-p_2}(X; \text{oz}_X \otimes L_1 \otimes \text{oz}_X \otimes L_2) \\ \simeq H_{S_1 \cap S_2}^{n-p_1-p_2}(X; \omega_X \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes \text{oz}_X). \end{aligned}$$

Определение 9.2.12. Пусть $C_j \in H_{S_j}^{-p_j}(X; \omega_X \otimes L_j)$ ($j = 1, 2$). Образ $C_1 \otimes C_2$ в $H_{S_1 \cap S_2}^{n-p_1-p_2}(X; \omega_X \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes \text{oz}_X)$ при морфизме (9.2.16) называется пересечением циклов C_1 и C_2 и обозначается через $C_1 \cap C_2$. Если $S_1 \cap S_2$ — компакт, $n = p_1 + p_2$ и $L_1 \otimes L_2 \simeq \text{oz}_X$, то число $\int_X C_1 \cap C_2$ называется индексом пересечения C_1 и C_2 и обозначается $\#(C_1 \cap C_2)$.

Напомним, что $\int_X$ — это морфизм $H_c^0(X; \omega_X) \rightarrow A$.

Замечание 9.2.13. Пусть $C_j \in H_{S_j}^{-p_j}(X; \omega_X)$, $j = 1, 2$. Тогда

(9.2.17)
$$C_1 \cap C_2 = (-1)^{(n-p_1)(n-p_2)} C_2 \cap C_1$$

в $H_{S_1 \cap S_2}^{(n-p_1-p_2)}(X; \omega_X \otimes \text{oz}_X)$. Это следует из того факта, что если K_1 и K_2 — комплексы, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^{p_1}(K_1) \otimes H^{p_2}(K_2) & \longrightarrow & H^{p_1+p_2}(K_1 \otimes K_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{p_2}(K_2) \otimes H^{p_1}(K_1) & \longrightarrow & H^{p_1+p_2}(K_2 \otimes K_1) \end{array}$$

коммутативна или антикоммутативна в зависимости от четности $p_1 p_2$ (см. замечание 1.10.16).

Если $\dim(S_1 \cap S_2) \leq p_1 + p_2 - n$, то морфизм (9.2.16) определяет морфизм (см. предложение 9.2.6)

$$(9.2.18) \quad \Gamma_{S_1}(X; \mathcal{ZS}_{p_1}(L_1)) \otimes \Gamma_{S_2}(X; \mathcal{ZS}_{p_2}(L_2)) \rightarrow \\ \Gamma_{S_1 \cap S_2}(X; \mathcal{ZS}_{p_1+p_2-n}(L_1 \otimes L_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}X})).$$

Этот морфизм мы также будем называть морфизмом пересечения и будем обозначать его $\cap$.

Замечание 9.2.14. Применяя (9.2.12) к морфизму $a_X: X \rightarrow \{\text{pt}\}$, получаем морфизм $a_X! \mathcal{CS}^X \rightarrow A$ и, далее, морфизм $\mathcal{CS}^X \rightarrow \omega_X$ (в категории $\mathbf{D}^b(X)$). Последний морфизм совпадает с изоморфизмом, построенным в теореме 9.2.10 (с точностью до знака).

9.3. Лагранжевы циклы

В T^*X объектом специального рассмотрения являются циклы, носители которых субаналитичны и изотропны. Пусть $n = \dim X$.

Определение 9.3.1. Положим

$$\mathcal{L}_X = \varinjlim_{\Lambda} H_{\Lambda}^0(\pi^{-1}\omega_X),$$

где Λ пробегает семейство всех замкнутых конических субаналитических изотропных подмножеств в T^*X . Мы назовем $\mathcal{L}_X$ *пучком лагранжевых циклов на T^*X* .

Так как $\pi^{-1}\omega_X \simeq \omega_{T^*X} \otimes \mathcal{O}_{T^*X/X}[-n]$, то лагранжев цикл есть n -цикл со значениями в $\mathcal{O}_{T^*X/X}$. Как частный случай результатов § 9.2 получаем такие утверждения:

(а) Пусть Λ — коническое локально замкнутое субаналитическое изотропное подмножество. Тогда

$$(9.3.1) \quad H_{\Lambda}^0(\mathcal{L}_X) \simeq H_{\Lambda}^0(\pi^{-1}\omega_X) \\ \simeq j_{\Lambda*} H^{-n}(\omega_{\Lambda} \otimes \mathcal{O}_{T^*X/X}) \\ \simeq H_{\Lambda}^0(\mathcal{ZS}_n(\mathcal{O}_{T^*X/X})).$$

В частности, если Λ — гладкое подмножество размерности n , то

$$H_{\Lambda}^0(\mathcal{L}_X)|_{\Lambda} \simeq \mathcal{O}_{\Lambda} \otimes \mathcal{O}_{T^*X/X}.$$

(b) Пусть s — сечение пучка $\mathcal{L}_X$ на открытом подмножестве $U \subset T^*X$. Тогда $\text{supp}(s)$ является замкнутым коническим субаналитическим изотропным подмножеством чистой размерности n , но мы не знаем, является ли оно инволютивным в смысле определения 6.5.1.

Изучим функториальные свойства лагранжевых циклов. Пусть Y — еще одно многообразие размерности m , а Λ_X (соответственно Λ_Y) — замкнутое коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X (соответственно в T^*Y). Определим внешнее произведение двух лагранжевых циклов через цепочку морфизмов

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_X}^0(\pi^{-1}\omega_X) \boxtimes H_{\Lambda_Y}^0(\pi^{-1}\omega_Y) &\rightarrow H_{\Lambda_X \times \Lambda_Y}^0(\pi^{-1}\omega_X \boxtimes \pi^{-1}\omega_Y) \\ &\simeq H_{\Lambda_X \times \Lambda_Y}^0(\pi^{-1}\omega_{X \times Y}). \end{aligned}$$

Переходя к индуктивному пределу по отношению к Λ_X и Λ_Y , получаем

$$(9.3.2) \quad \mathcal{L}_X \boxtimes \mathcal{L}_Y \rightarrow \mathcal{L}_{X \times Y}.$$

Пусть теперь $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Напомним, что ${}^t f'$ и f_π — это отображения $Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y$ и $Y \times_X T^*X \rightarrow T^*X$ соответственно (см. (4.3.2)). Чтобы избежать недоразумений, мы будем иногда обозначать через π_Y (соответственно π_X , соответственно π) проекцию $T^*Y \rightarrow Y$ (соответственно $T^*X \rightarrow X$, соответственно $Y \times_X T^*X \rightarrow Y$).

Пусть Λ_X и Λ_Y — замкнутые конические субаналитические изотропные подмножества в T^*X и T^*Y соответственно.

Предложение 9.3.2. (i) *Предположим, что f_π собственна на ${}^t f'^{-1}(\Lambda_Y)$. Тогда существует естественный морфизм*

$$(9.3.3) \quad H_{\Lambda_Y}^0(T^*Y; \pi_Y^{-1}\omega_Y) \rightarrow H_{f_\pi, {}^t f'^{-1}(\Lambda_Y)}^0(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X).$$

(ii) *Предположим, что ${}^t f'$ является собственным на $f_\pi^{-1}(\Lambda_X)$. Тогда существует естественный морфизм*

$$(9.3.4) \quad H_{\Lambda_X}^0(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X) \rightarrow H_{{}^t f', f_\pi^{-1}(\Lambda_X)}^0(T^*Y; \pi_Y^{-1}\omega_Y).$$

Отметим, что, согласно условию п. (i), $f_\pi {}^t f'^{-1}(\Lambda_Y)$ есть замкнутое коническое субаналитическое подмножество в T^*X и по предложению 8.3.11 это множество изотропно. Аналогично, из условия (ii) вытекают замкнутость, коничность, субаналитичность и изотропность подмножества ${}^t f' f_\pi^{-1}(\Lambda_X) \subset T^*Y$.

Доказательство. (i) Пусть $\pi: Y \times_X T^*X \rightarrow Y$ — проекция. Рассмотрим морфизмы

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_Y}^0(T^*Y; \pi_Y^{-1}\omega_Y) &\rightarrow H_{f'^{-1}(\Lambda_Y)}^0\left(Y \times_X T^*X; \pi^{-1}\omega_Y\right) \\ &\rightarrow H_{f_\pi{}^*f'^{-1}(\Lambda_Y)}^0(T^*X; Rf_{\pi!}\pi^{-1}\omega_Y) \end{aligned}$$

Требуемый результат получается применением морфизма

$$Rf_{\pi!}\pi^{-1}\omega_Y \simeq \pi_X^{-1}Rf_!\omega_Y \rightarrow \pi_X^{-1}\omega_X.$$

(ii) Рассмотрим морфизмы

$$\begin{aligned} H_{\Lambda_X}^0(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X) &\rightarrow H_{f_\pi^{-1}(\Lambda_X)}^0\left(Y \times_X T^*X; \pi^{-1}f^{-1}\omega_X\right) \\ &\rightarrow H_{f'_!f_\pi^{-1}(\Lambda_X)}^0(T^*Y; R^tf'_!\pi^{-1}f^{-1}\omega_X). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства нам остается построить морфизм

$$(9.3.5) \quad R^tf'_!\pi^{-1}f^{-1}\omega_X \rightarrow \pi_Y^{-1}\omega_Y.$$

Сделаем это следующим образом. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{f_1} & Y \times X \\ \uparrow \delta_Y & & \uparrow \delta \\ \Delta_Y & \xrightarrow{\sim} & \Delta_f \end{array}$$

Отметим, что морфизм $f'_!: T_{\Delta_f}^*(Y \times X) \rightarrow T_{\Delta_Y}^*(Y \times Y)$ изоморфен $f'_!$. Применяя предложение 4.3.5 к пучку $\delta_*f^{-1}\omega_X$, получаем

$$R^tf'_!\mu_{\Delta_f}(\delta_*f^{-1}\omega_X) \rightarrow \mu_{\Delta_Y}(\omega_{Y/X} \otimes f_1^{-1}\delta_*f^{-1}\omega_X) \rightarrow \mu_{\Delta_Y}(\delta_Y*\omega_Y),$$

из чего вытекает (9.3.5). $\square$

Отметим, что, отождествляя $\pi^{-1}\omega$ и $\omega_{T^*X/X}$, морфизм (9.3.5) можно построить так:

$$\begin{aligned} R^tf'_!\pi^{-1}f^{-1}\omega_X &\simeq R^tf'_!f_\pi^{-1}\omega_{T^*X/X} \simeq R^tf'_!\omega_{Y \times_X T^*X/Y} \\ &\rightarrow \omega_{T^*Y/Y} \simeq \pi_Y^{-1}\omega_Y, \end{aligned}$$

существование которого следует из (9.3.5), является изоморфизмом.

Определение 9.3.3. В условиях предложения 9.3.2 обозначим через f_* морфизм (9.3.3), а через f^* — морфизм (9.3.4).

Примеры 9.3.4. (i) Если X есть 0-мерное многообразие $\{pt\}$, то $\mathcal{L}_X = A$. Обозначим через $[pt]$ цикл, соответствующий $1 \in A$.

(ii) Пусть a_X — морфизм $X \rightarrow \{pt\}$. Положим

$$(9.3.6) \quad [T_X^* X] = a_X^*[pt].$$

(iii) Пусть $f: Y \hookrightarrow X$ — замкнутое вложение. Положим

$$(9.3.7) \quad [T_Y^* X] = f_*[T_Y^* Y].$$

(iv) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, и пусть f трансверсален замкнутому подмногообразию $Z \subset X$. Тогда

$$(9.3.8) \quad f^*[T_Z^* X] = [T_{f^{-1}(Z)}^* Y].$$

Определим понятие пересечение для лагранжевых циклов.

Пусть $\sigma: X \rightarrow T^*X$ — непрерывное сечение морфизма π (т. е. $\pi \circ \sigma = \text{id}_X$). Существует морфизм

$$(9.3.9) \quad \begin{aligned} H_{\sigma(X)}^0(T^*X; \pi^! A_X) &\simeq H^0(X; \sigma^! \pi^! A_X) \\ &= H^0(X; A_X). \end{aligned}$$

Отметим, что $\pi^! A_X \simeq \omega_{T^*X} \otimes \pi^{-1} \omega_X[-n]$, где $n = \dim X$. Если задана ориентация на T^*X , то $\pi^! A_X \simeq \pi^{-1} \omega_X$.

Определение 9.3.5. (i) Образ $1 \in H^0(X; A_X)$ в $H_{\sigma(X)}^0(T^*X; \pi^! A_X)$ при изоморфизме (9.3.9) обозначается через $[\sigma]$.

(ii) Через $[\sigma_0]$ обозначается цикл, определенный нулевым сечением.

Пусть S_1 и S_2 — замкнутые подмножества в T^*X . Рассмотрим цепочку морфизмов

$$(9.3.10) \quad \begin{aligned} H_{S_1}^0(T^*X; \pi^! A_X) \otimes H_{S_2}^0(T^*X; \pi^{-1} \omega_X) \\ \rightarrow H_{S_1 \cap S_2}^0(T^*X; \pi^! A_X \otimes \pi^{-1} \omega_X) \\ \rightarrow H_{S_1 \cap S_2}^0(T^*X; \pi^! \omega_X) \\ \simeq H_{S_1 \cap S_2}^0(T^*X; \omega_{T^*X}). \end{aligned}$$

Как и в определении 9.2.12, если $\gamma \in H_{S_1}^0(T^*X; \pi^! A_X)$ и $\delta \in H_{S_2}^0(T^*X; \pi^{-1} \omega_X)$, то через $\gamma \cap \delta$ мы будем обозначать образ $\gamma \otimes \delta$

при действии цепи морфизмов (9.3.10) и называть его пересечением циклов γ и δ . Если $S_1 \cap S_2$ компактно, то через $\#(\gamma \cap \delta)$ мы будем обозначать число $\int_{T^*X} \gamma \cap \delta$. Если p — изолированная точка в $S_1 \cap S_2$, то через $\#(\gamma \cap \delta)_p$ мы будем обозначать число $\int_U \gamma \cap \delta$, где U — малая окрестность точки p .

Пусть S — замкнутое подмножество в T^*X , такое, что π собствен на S . Морфизм $R\pi_* \omega_{T^*X} \rightarrow \omega_X$ определяет морфизм

$$(9.3.11) \quad \alpha: H_S^0(T^*X; \omega_{T^*X}) \rightarrow H_{\pi(S)}^0(X; \omega_X).$$

С другой стороны, пусть Λ — замкнутое коническое подмножество. Тогда морфизм $R\pi_* \pi^{-1} \omega_X \xrightarrow{\sim} \omega_X$ определяет морфизм

$$(9.3.12) \quad \beta: H_\Lambda^0(T^*X; \pi^{-1} \omega_X) \rightarrow H_{\pi \Lambda}^0(X; \omega_X).$$

Предложение 9.3.6. Пусть σ является непрерывным сечением морфизма π , и пусть λ — лагранжесв цикл, $\text{supp}(\lambda) = \Lambda$. Тогда

$$\alpha([\sigma] \cap \lambda) = \beta(\lambda).$$

Доказательство. Достаточно доказать коммутативность приведенной на с. 485 диаграммы (9.3.13) (R в обозначениях опущено). Коммутативность левого нижнего квадрата следует из соотношения $\sigma^! \pi^! \simeq \text{id}$, а правого квадрата — из того, что морфизмы $\pi_* \pi^{-1} \rightarrow \text{id}$ и $\pi_* \pi^{-1} \rightarrow \pi_* \sigma_* \sigma^{-1} \pi^{-1} \simeq \text{id}$ равны. $\square$

9.4. Характеристические циклы

С этого места и до конца главы основное кольцо A будет полем характеристики 0, и мы будем обозначать его через k . Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbf{R}-c}^b(X))$. Рассмотрим цепочку морфизмов

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(F, F) &\simeq R\pi_* \mu \mathcal{H}om(F, F) \\ &\simeq R\pi_* R\Gamma_{\text{SS}(F)} \mu \mathcal{H}om(F, F) \\ &\simeq R\pi_* R\Gamma_{\text{SS}(F)} \mu_\Delta(F \boxtimes DF) \\ &\rightarrow R\pi_* R\Gamma_{\text{SS}(F)} \mu_\Delta(\delta_*(F \otimes DF)) \\ &\rightarrow R\pi_* R\Gamma_{\text{SS}(F)} \mu_\Delta(\delta_* \omega_X) \\ &\simeq R\pi_* R\Gamma_{\text{SS}(F)}(\pi^{-1} \omega_X). \end{aligned}$$

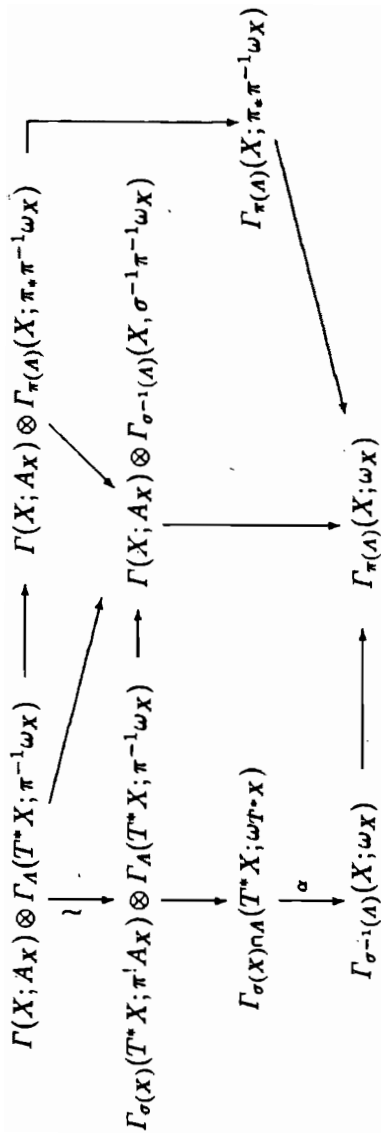


Диаграмма (9.3.13)

Определение 9.4.1. Образ $\text{id}_F \in \text{Hom}(F, F)$ в $H_{\text{SS}(F)}^0(T^*X; \pi^{-1}\omega_X) \subset H^0(T^*X; \mathcal{L}_X)$ называется *характеристическим циклом* объекта F и обозначается $\text{CC}(F)$.

Проведем сравнение операций над $\mathbb{R}$ -конструктивными пучками и над лагранжевыми циклами.

Пусть Y — многообразие и $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$. Используя предложение 4.4.8, легко убедиться в справедливости формулы

$$(9.4.1) \quad \text{CC}(F \boxtimes G) = \text{CC}(F) \boxtimes \text{CC}(G).$$

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий.

Предложение 9.4.2. Пусть f собствен на $\text{supp}(G)$. Тогда

$$(9.4.2) \quad \text{CC}(Rf_*G) = f_* \text{CC}(G).$$

Доказательство. Обозначим через δ_X (собственно δ_Y) диагональное вложение $X \hookrightarrow X \times X$ (соответственно $Y \hookrightarrow Y \times Y$), а через δ — отображение графика $Y \hookrightarrow X \times Y$. Рассмотрим диаграмму (см. (4.4.3))

$$(9.4.3) \quad \begin{array}{ccccc} Y \times Y & \xrightarrow{\quad} & X \times Y & \xrightarrow{\quad} & X \times X \\ & \searrow f_1 & & \searrow f_2 & \\ \uparrow \delta_Y & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta_X \\ \Delta_Y & \xrightarrow{\sim} & \Delta_f & \xrightarrow{f} & \Delta_X \end{array}$$

Обозначим через π_Y (соответственно π , соответственно π_X) проекцию $T^*Y \rightarrow Y$ (соответственно $Y \times_X T^*X \rightarrow Y$, соответственно $T^*X \rightarrow X$). Введем обозначения $S = \text{SS}(G)$, $S' = {}^t f'^{-1}(S)$, $S'' = f_\pi(S')$. Существуют естественные морфизмы (см. § 4.3)

$${}^t f'_1 \circ \mu_{\Delta_Y} \rightarrow \mu_{\Delta_f} \circ Rf_{1!}, \quad f_{2\pi!} \circ \mu_{\Delta_f} \rightarrow \mu_{\Delta_X} \circ Rf_{2!},$$

которые порождают коммутативную диаграмму (9.4.4) (см. с. 487; в этой диаграмме мы опускаем символ R).

Поэтому образ $\text{CC}(G) \in \Gamma_S(T^*Y; \pi_Y^{-1}\omega_Y)$ в $\Gamma_{S''}(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X)$ (через $\Gamma_{S'}(Y \times_X T^*X; \pi^{-1}\omega_Y)$) совпадает с $\text{CC}(Rf_*G)$. $\square$

Предложение 9.4.3. Пусть ${}^t f'$ собствен на $f_\pi^{-1}(\text{SS}(F))$ (т. е. f нехарактеристичен относительно F). Тогда

$$(9.4.5) \quad \text{CC}(f^{-1}F) = f^* \text{CC}(F).$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Hom}(G, G) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(f_i G, f_i G) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
\Gamma_{\Delta_Y}(Y \times Y; G \boxtimes DG) & \rightarrow & \Gamma_{\Delta_Y}(X \times X; f_i G \boxtimes DG) & \rightarrow & \Gamma_{\Delta_X}(X \times X; f_i G \boxtimes f_* DG) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_S(T^* Y; \mu_{\Delta_Y}(G \boxtimes DG)) & \rightarrow & \Gamma_{S'}(Y \times_X T^* X; \mu_{\Delta_Y}(f_i G \boxtimes DG)) & \rightarrow & \Gamma_{S''}(T^* X; \mu_{\Delta_X}(f_i G \boxtimes f_* DG)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_S(T^* Y; \mu_{\Delta_Y}(\delta_{Y*}(G \otimes DG))) & \rightarrow & \Gamma_{S'}(Y \times_X T^* X; \mu_{\Delta_Y}(\delta_*(f^{-1} f_i G \otimes DG))) & \rightarrow & \Gamma_{S''}(T^* X; \mu_{\Delta_X}(\delta_{X*}(f_i G \otimes Df_i G))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_S(T^* Y; \pi_Y^{-1} \omega_Y) & \rightarrow & \Gamma_{S'}(Y \times_X T^* X; \pi^{-1} \omega_Y) & \rightarrow & \Gamma_{S''}(T^* X; \pi_X^{-1} \omega_X)
\end{array}$$

Диаграмма (9.4.4)

Доказательство. Положим $S = SS(F)$, $S' = f_{\pi}^{-1}(S)$, $S'' = {}^t f'(S')$.
Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} Y \times Y & \xrightarrow{f_1} & Y \times X & \xrightarrow{f_2} & X \times X \\ \uparrow \delta_Y & & \uparrow \delta & & \uparrow \delta_X \\ \Delta_Y & \xrightarrow{\sim} & \Delta_f & \xrightarrow{f} & \Delta_X \end{array}$$

Обозначим, как выше, через π_Y, π и π_X проекции $T^*Y \rightarrow Y$, $Y \times_X T^*X \rightarrow Y$ и $T^*X \rightarrow X$ соответственно. Существуют естественные морфизмы

$$f_{2\pi}^{-1} \circ \mu_{\Delta_X} \rightarrow \mu_{\Delta_f} \circ f_2^{-1}, \quad {}^t f'_1 \circ \mu_{\Delta_f} \rightarrow \mu_{\Delta_Y} \circ (\omega_{Y/X} \otimes f_1^{-1}).$$

Так как ${}^t f'$ собствен на S' , то мы получаем коммутативную диаграмму (9.4.6) (см. с. 489). Следовательно, $CC(f^{-1}F)$ является образом $CC(F) \in H_S^0(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X)$ в $H_{S''}^0(T^*Y; \pi_Y^{-1}\omega_Y)$ (через $H_S^0(Y \times_X T^*X; f_{\pi}^{-1}\pi_X^{-1}\omega_X)$). $\square$

Пусть a обозначает антиподальное отображение на T^*X . Так как a отображает субаналитические изотропные множества в субаналитические и изотропные, то определен морфизм

$$a_*: a^{-1}\mathcal{L}_X \rightarrow \mathcal{L}_X.$$

Если λ — лагранжев цикл, то через λ^a мы обозначим его образ при действии a_* . Если $Y \subset X$ — подмногообразие, то

$$(9.4.7) \quad [T_Y^*X]^a = (-1)^{\dim Y} [T_Y^*X].$$

В самом деле, $R\Gamma_{T_Y^*X}(\pi^{-1}\omega_X) \simeq \omega_{T_Y^*X/T^*X} \otimes \pi^{-1}\omega_X$, $a^{-1}\omega_{T_Y^*X/T^*X} \rightarrow \omega_{T_Y^*X/T^*X}$ и $a^!\omega_{T_Y^*X/T^*X} \rightarrow \omega_{T_Y^*X/T^*X}$ равны с точностью до $(-1)^{\dim Y}$ после отождествления $a^!$ и a^{-1} .

Предложение 9.4.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$; тогда

$$CC(D_X F) = (CC(F))^a.$$

Доказательство. Имеем $\mu_{\Delta}(DF \boxtimes DDF) \simeq a^{-1}\mu_{\Delta}(F \boxtimes DF)$. $\square$

Отметим, что $CC(F)$ является микролокальным объектом в следующем смысле. Если Ω открыто в T^*X , а F и F' изоморфны в $\mathbf{D}^b(X; \Omega)$, то $CC(F)|_{\Omega} = CC(F')|_{\Omega}$. Это следу-

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{Hom}(F, F) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(F^{-1}F, f^{-1}F) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(F^{-1}F, f^{-1}F) & \xrightarrow{\quad} & \text{Hom}(F^{-1}F, f^{-1}F) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\Gamma_{\Delta_X}(X \times X; F \boxtimes DF) & \longrightarrow & \Gamma_{\Delta_Y}(Y \times Y; f^{-1}F \boxtimes DF) & \longrightarrow & \Gamma_{\Delta_Y}(Y \times Y; f^{-1}F \boxtimes D(f^{-1}F)) & \longrightarrow & \Gamma_{\Delta_Y}(Y \times Y; f^{-1}F \boxtimes D(f^{-1}F)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_S(T^*X; \mu_{\Delta_X}(F \boxtimes DF)) & \longrightarrow & \Gamma_S(T^*X; \mu_{\Delta_X}(f^{-1}F \boxtimes DF)) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \mu_{\Delta_Y}(f^{-1}F \boxtimes \omega_{Y/X} \otimes f^{-1}DF)) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \mu_{\Delta_Y}(f^{-1}F \boxtimes f^*DF)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_S(T^*X; \mu_{\Delta_X}(F \otimes DF)) & \longrightarrow & \Gamma_S(Y \times_X T^*X; \mu_{\Delta_X}(\delta_*(f^{-1}F \otimes f^{-1}D))) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \mu_{\Delta_Y}(\delta_{Y*}(f^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \otimes f^{-1}DF))) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \mu_{\Delta_Y}(\delta_{Y*}(f^{-1}F \otimes f^*DF))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_S(T^*X; \mu_{\Delta_X}(\delta_X^* \omega_X)) & \longrightarrow & \Gamma_S(Y \times_X T^*X; \mu_{\Delta_X}(\delta_X^*(\delta_X^* f^{-1} \omega_X))) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \mu_{\Delta_Y}(\delta_{Y*}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1} \omega_X))) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \mu_{\Delta_Y}(\delta_{Y*} \omega_Y)) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Gamma_X(T^*X; \pi_X^{-1} \omega_X) & \longrightarrow & \Gamma_S(Y \times_X T^*X; \pi_X^{-1} f^{-1} \omega_X) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \pi_Y^{-1}(\omega_{Y/X} \otimes f^{-1} \omega_X)) & \longrightarrow & \Gamma_{S''}(T^*Y; \pi_Y^{-1} \omega_Y)
\end{array}$$

Диаграмма (9.4.6)

ет из изоморфизма $\mu hom(F, F)|_{\Omega} \simeq \mu hom(F', F')|_{\Omega}$. Используя это замечание, мы можем явно вычислить $CC(F)$. Если $X = \{pt\}$, то $CC(F) = \chi(F) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(F)$. Если Y — замкнутое подмногообразие, а $H^j(F)$ — локально постоянный пучок ранга m_j для всех j , то $CC(F) = \sum_j (-1)^j m_j [T_Y^* X]$. В самом деле, пусть $i: Y \hookrightarrow X$ — вложение, а $a_Y: Y \rightarrow \{pt\}$. Тогда $F = Ri_* a_Y^{-1}(V)$ для некоторого $V \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k)))$. Теперь утверждение следует из предложений 9.4.2 и 9.4.3. В частности, для замкнутого подмногообразия $Y \subset X$

$$(9.4.8) \quad CC(k_Y) = [T_Y^* X].$$

Чтобы рассмотреть общий случай, введем пучок

$$CC_X = \varinjlim_{\Lambda} H_{\Lambda}^0(\pi^{-1} \omega_X),$$

где Λ пробегает семейство локально замкнутых субаналитических конических изотропных подмножеств в T^*X . Мы назовем CC_X пучком лагранжеских цепей. Имеют место включения

$$\mathcal{L}_X \subset CC_X \subset CS_n^{T^*X}(\text{ог}_{T^*X/X}).$$

Пусть теперь $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, а $\Lambda = SS(F)$. Существует открытое плотное подмножество $\Lambda_0 \subset \Lambda$, такое, что

$$(9.4.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda_0 \text{ является субаналитическим подмногообразием,} \\ \text{и если } \{\Lambda_{\alpha}\}_{\alpha} \text{ — множество связанных компонент} \\ \text{многообразия } \Lambda_0, \text{ то для каждого } \alpha \text{ существует} \\ \text{подмногообразие } X_{\alpha} \subset X, \text{ такое, что } \Lambda_{\alpha} \subset T_{X_{\alpha}}^* X. \end{array} \right.$$

Для каждого α пусть $[\Lambda_{\alpha}]$ — цепь с носителем $\bar{\Lambda}_{\alpha}$, которая равна $[T_{X_{\alpha}}^* X]$ на Λ_{α} . Если U — открытое подмножество, такое, что $\Lambda_{\alpha} = T_{X_{\alpha}}^* X \cap U$, то мы будем иногда писать $[T_{X_{\alpha}}^* X] \cap U$ вместо $[\Lambda_{\alpha}]$. Пусть $p \in \Lambda_{\alpha}$. Из предложения 6.6.1(ii) следует существование $V \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(k)))$, такого, что $F \simeq V_{X_{\alpha}}$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Следовательно, $CC(F) = m_{\alpha}[\Lambda_{\alpha}]$ в окрестности точки p при $m_{\alpha} = \chi(V)$. Так как Λ_{α} связно, то $CC(F) = m_{\alpha}[\Lambda_{\alpha}]$ в окрестности множества Λ_{α} , и если Ω открыто и плотно в T^*X и $\Omega \cap \Lambda = \Lambda_0$, то $CC(F)|_{\Omega} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}[\Lambda_{\alpha}]|_{\Omega}$. Следовательно,

$$(9.4.10) \quad CC(F) = \sum_{\alpha} m_{\alpha}[\Lambda_{\alpha}] \quad \text{в } CC_X.$$

Предложение 9.4.5. (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$. Тогда $\text{CC}(F)$ является лагранжесвым циклом над $\mathbb{Z}$.

(ii) Пусть $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Тогда

$$(9.4.11) \quad \text{CC}(F) = \text{CC}(F') + \text{CC}(F'').$$

В частности,

$$\text{CC}(F[k]) = (-1)^k \text{CC}(F).$$

Доказательство. (i) следует из (9.4.10).

(ii) Пусть Λ — замкнутое коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X , содержащее $\text{SS}(F') \cup \text{SS}(F'')$, и пусть $\Lambda_0 \subset \Lambda$ — открытое плотное подмножество, удовлетворяющее условию (9.4.9). Тогда $\text{CC}(F) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\Lambda_{\alpha}]$, $\text{CC}(F') = \sum_{\alpha} m'_{\alpha} [\Lambda_{\alpha}]$, $\text{CC}(F'') = \sum_{\alpha} m''_{\alpha} [\Lambda_{\alpha}]$. Пусть $p \in T_{X_{\alpha}}^* X$. Из предложения 6.6.1(ii) следует существование выделенного треугольника $V' \rightarrow V \rightarrow V'' \xrightarrow{+1}$ в $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}^f(k))$, такого, что треугольник $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \xrightarrow{+1}$ изоморфен $V'_{X_{\alpha}} \rightarrow V_{X_{\alpha}} \rightarrow V''_{X_{\alpha}} \xrightarrow{+1}$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Следовательно, $m_{\alpha} = m'_{\alpha} + m''_{\alpha}$. $\square$

Пример 9.4.6. Обозначим через t координату на $X = \mathbb{R}$ и рассмотрим множества

$$Z_{\pm} = \{\pm t \geq 0\}, \quad U_{\pm} = \{\pm t > 0\}.$$

Пусть $(t; \tau)$ обозначает соответствующую систему координат на T^*X . Рассмотрим лагранжесвы цепи

$$\alpha_{\pm} = [T_X^* X] \cap \{\pm t > 0\}, \quad \beta_{\pm} = [T_{\{0\}}^* X] \cap \{\pm \tau > 0\}.$$

(Здесь и далее если φ — вещественная функция на X , то $\{\varphi > 0\}$ обозначает подмножество $\pi^{-1}\{x; \varphi(x) > 0\}$ в T^*X .) Тогда

$$H_{\{t\tau=0\}}^0(T^*X; \mathcal{L}_X) = \mathbb{Z}[T_X^* X] \oplus \mathbb{Z}[T_{\{0\}}^* X] \oplus \mathbb{Z}(\alpha_+ + \beta_+).$$

(Мы рассматриваем субаналитические цепи с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.)
Теперь

- (i) $\text{CC}(k_X) = [T_X^* X] = \alpha_+ + \alpha_-$,
- (ii) $\text{CC}(k_{\{0\}}) = [T_{\{0\}}^* X] = \beta_+ + \beta_-$,
- (iii) $\text{CC}(k_{Z_{\pm}}) = \alpha_{\pm} + \beta_{\pm}$,
- (iv) $\text{CC}(k_{U_{\pm}}) = \alpha_{\pm} - \beta_{\mp}$.

В самом деле, (i) и (ii) уже доказаны (см. (9.4.8)). Найдем $CC(k_{U_+})$. Носителем этого цикла является множество $\{t \geq 0, \tau = 0\} \cup \{t = 0, \tau \leq 0\}$. При этом $k_{U_+} \simeq k_X$ на множестве $\{t > 0, \tau = 0\}$ и $k_{U_+} \simeq k_{\{0\}}[-1]$ на множестве $\{t = 0, \tau < 0\}$, что дает $CC(k_{U_+}) = \alpha_+ - \beta_-$. Остальные формулы доказываются аналогично.

Пример 9.4.7. Пусть $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ — система координат на $X = \mathbb{R}^{1+n}$. Рассмотрим множества

$$Z_{\pm} = \{\pm t \geq |x|\}, \quad Z_0 = \{|t| \leq |x|\}, \\ U_{\varepsilon} = \text{Int } Z_{\varepsilon} \quad (\varepsilon = +, -, 0), \quad S_{\pm} = \{\pm t = |x| > 0\},$$

где $|x|^2 = \sum_j x_j^2$.

Пусть $(t, x; \tau, \xi)$ обозначает соответствующую систему координат на T^*X . Определим лагранжевы цепи

$$\sigma_{\varepsilon} = [T_X^* X] \cap U_{\varepsilon}, \quad \varepsilon = +, -, 0, \\ \tau_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = [T_{S_{\varepsilon_1}}^* X] \cap \{\varepsilon_2 \tau > 0\}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \\ \gamma_{\pm} = [T_{\{0\}}^* X] \cap \{\pm \tau > |\xi|\}, \\ \gamma_0 = [T_{\{0\}}^* X] \cap \{|\tau| < |\xi|\}.$$

Имеем

- (i) $CC(k_X) = \sigma_+ + \sigma_0 + \sigma_-$,
- (ii) $CC(k_{\{0\}}) = \gamma_+ + \gamma_0 + \gamma_-$,
- (iii) $CC(k_{Z_{\pm}}) = \sigma_{\pm} + \tau_{\pm\pm} + \gamma_{\pm}$,
- (iv) $CC(k_{U_{\pm}}) = \sigma_{\pm} - \tau_{\pm\mp} + (-1)^{n+1} \gamma_{\mp}$,
- (v) $CC(k_{Z_0}) = \sigma_0 + \tau_{+-} + \tau_{-+} + (-1)^n (\gamma_+ + \gamma_-)$,
- (vi) $CC(k_{U_0}) = \sigma_0 - (\tau_{++} + \tau_{--}) + \gamma_0$,
- (vii) $CC(k_{S_{\pm}}) = \tau_{\pm+} + \tau_{\pm-} - \gamma_0 + ((-1)^n - 1) \gamma_{\mp}$.

Проверим справедливость (iii). Имеем

$$SS(k_{Z_{\pm}}) \subset \text{supp}(\sigma_{\pm}) \cup \text{supp}(\tau_{\pm\pm}) \cup \text{supp}(\gamma_{\pm}).$$

Кроме того, $k_{Z_{\pm}}$ микролокально изоморфен k_X (соответственно $k_{S_{\pm}}$, соответственно $k_{\{0\}}$) в общей точке из $\text{supp}(\sigma_{\pm})$ (соответственно $\text{supp}(\tau_{\pm\pm})$, соответственно $\text{supp}(\gamma_{\pm})$).

Остальные утверждения доказываются аналогично.

9.5. Микрлокальные формулы характеристики Эйлера–Пуанкаре

Пусть X — многообразие и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$. Используя формулу пересечения, мы найдем $\chi(X; F)$, $\chi(F)(x)$ и т. д. Напомним определение морфизмов α и β (см. (9.3.11) и (9.3.12)):

$$\begin{aligned}\alpha: H_S^0(T^*X; \omega_{T^*X}) &\rightarrow H_{\pi(S)}^0(X; \omega_X) \\ (S \text{ замкнуто, а } \pi \text{ собствен на } S), \\ \beta: H_\Lambda^0(T^*X; \pi^{-1}\omega_X) &\rightarrow H_{\Lambda \cap X}^0(X; \omega_X) \\ (\Lambda \text{ замкнуто и конично}).\end{aligned}$$

Предложение 9.5.1. Пусть σ — непрерывное сечение морфизма π . Тогда в $H_{\text{supp}(F)}^0(X; \omega_X)$

$$\begin{aligned}C(F) &= \alpha([\sigma] \cap CC(F)) \\ &= \beta(CC(F)).\end{aligned}$$

Доказательство. Из предложения 9.3.6 следует, что достаточно доказать справедливость равенства $C(F) = \beta(CC(F))$, что вытекает из следующей коммутативной диаграммы, если мы положим $\Lambda = \text{SS}(F)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(F, F) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(T^*X; \mu_{\text{Hom}(F, F)}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \Gamma_{X \cap \Lambda}(X; \delta^*(F \boxtimes DF)) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_\Lambda(T^*X; \mu_\Lambda(F \boxtimes DF)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{X \cap \Lambda}(X; F \otimes DF) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma_{\pi^{-1}(X \cap \Lambda)}(T^*X; \mu_\Lambda(\delta_*(F \otimes DF))) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{X \cap \Lambda}(X; \omega_X) & \xrightleftharpoons[\beta]{\sim} & \Gamma_{\pi^{-1}(X \cap \Lambda)}(T^*X; \pi^{-1}\omega_X) \quad \square \end{array}$$

Диаграмма (9.5.1)

Следствие 9.5.2. Пусть F имеет компактный носитель. Тогда

$$(9.5.2) \quad \chi(X; F) = \#([\sigma] \cap CC(F)).$$

Доказательство. Надо применить предложение 9.5.1 и формулу (9.1.3). $\square$

Отметим, что это следствие может также быть выведено из (9.1.14) с помощью отображения $a: X \rightarrow \{pt\}$.

Обобщим этот результат. Пусть I — открытый интервал в $\mathbb{R}$, $\varphi: X \rightarrow I$ — вещественно-аналитическая функция и σ_φ — сечение $x \mapsto d\varphi(x)$. Пусть $\Lambda_\varphi = \sigma_\varphi(X) = \{(x, d\varphi(x)); x \in X\}$, т. е. мы сопоставляем функции φ цикл (см. определение 9.3.5)

$$(9.5.3) \quad [\sigma_\varphi] \in H_{\Lambda_\varphi}^0(T^*X; \pi^! k_X).$$

Теорема 9.5.3. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$. Предположим, что

$$(9.5.4) \quad \text{множество } \{x \in \text{supp}(F); \varphi(x) \leq t\}$$

компактно при всех $t \in I$,

$$(9.5.5) \quad \text{множество } SS(F) \cap \Lambda_\varphi \text{ компактно.}$$

Тогда для всех $j \in \mathbb{Z}$ пространства $H^j(X; F)$ конечномерны и

$$\chi(X; F) = \#([\sigma_\varphi] \cap CC(F)).$$

Доказательство. Пусть $\Omega_t = \{x \in X; \varphi(x) < t\}$, и пусть j_t — открытое вложение $\Omega_t \hookrightarrow X$. Положим $F_t = Rj_{t*} j_t^{-1} F$. Применяя следствие 5.4.19, получаем, что $R\Gamma(X; F) \cong R\Gamma(X; F_t)$ для всех $t \gg 0$. Следовательно, пространства $H^j(X; F)$ конечномерны и по следствию 9.5.2 $\chi(X; F) = \chi(X; F_t) = \#([\sigma_\varphi] \cap CC(F_t))$. Так как $SS(F) \cap \pi^{-1}(\Omega_t) = SS(F_t) \cap \pi^{-1}(\Omega_t)$ и $SS(F) \cap \Lambda_\varphi \subset \pi^{-1}(\Omega_t)$ при $t \gg 0$, то, учитывая (9.5.5), остается доказать, что

$$(9.5.6) \quad SS(F_t) \cap \Lambda_\varphi \subset \pi^{-1}(\Omega_t) \quad \text{при } t \gg 0.$$

Пусть $K = \pi(SS(F) \cap \Lambda_\varphi)$. Тогда если $x \in \text{supp}(F) \setminus K$, то $d\varphi(x) \neq 0$, и из предложения 5.4.8 следует, что

$$SS(F_t) \subset SS(F) + \mathbb{R}_{\leq 0} \Lambda_\varphi \quad \text{при } t \gg 0.$$

Из этого включения и (9.5.5) вытекает (9.5.6). $\square$

Следствие 9.5.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$. Предположим, что имеет место (9.5.4) и

$$(9.5.7) \quad \text{SS}(F)^a \cap \Lambda_\varphi \text{ компактно.}$$

Тогда для всех j пространства $H_c^j(X; F)$ конечномерны и

$$\begin{aligned} \chi_c(X; F) &= \#([\sigma_\varphi] \cap \text{CC}(F)^a) \\ &= \#([\sigma_{-\varphi}] \cap \text{CC}(F)). \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем $\text{Hom}(R\Gamma_c(X; F), k) \simeq \text{Hom}(F, \omega_X) \simeq R\Gamma(X; D_X F)$. Следовательно, $\chi_c(X; F) = \chi(X; D_X F)$ и требуемый результат вытекает из предложения 9.4.4 и теоремы 9.5.3. $\square$

Замечание 9.5.5. Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция. Предположим, что $\varphi(x_0) = 0, d\varphi(x_0) = 0$ и гессиан φ в точке x_0 положительно определен (из этого следует существование локальной системы координат в окрестности точки x_0 , такой, что $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2$). Применяя микролокальную теорему Бертини-Сарда (предложение 8.3.12), получаем, что x_0 является изолированной точкой множества $\text{SS}(F) \cap \Lambda_\varphi$. Тогда по теореме 9.5.3

$$(9.5.8) \quad \chi(F)(x_0) = \#([\sigma_\varphi] \cap \text{CC}(F))_{x_0}$$

и, аналогично, по следствию 9.5.4

$$(9.5.9) \quad \chi_c(F)(x_0) = \#([\sigma_{-\varphi}] \cap \text{CC}(F))_{x_0}.$$

Здесь и далее $\#(c)_x$ для $c \in H_S^0(X; \omega_X)$ и изолированной точки x , принадлежащей замкнутому подмножеству S , обозначает образ c при сквозном отображении $H_S^0(X; \omega) \rightarrow H_{\{x\}}^0(X; \omega) \rightarrow k$.

Докажем более общий результат.

Теорема 9.5.6. Пусть $x_0 \in X, F \in (\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, а φ — вещественно-аналитическая функция на X . Предположим, что

$$(9.5.10) \quad \Lambda_\varphi \cap \text{SS}(F) \subset \{d\varphi(x_0)\}.$$

Тогда

$$\chi(R\Gamma_{\{\varphi \geq \varphi(x_0)\}}(F))(x_0) = \#([\sigma_\varphi] \cap \text{CC}(F)).$$

Доказательство. Мы можем считать, что $X = \mathbb{R}^n, x_0 = 0, \varphi(x_0) = 0$. Положим $\Lambda = \text{SS}(F)$ и $\psi(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2$. Если θ — вещественная функция на $\mathbb{R}$, то, если нет опасности путаницы, через $\{\theta > 0\}$ (например)

мы будем обозначать множество $\pi^{-1}(\{x \in X; \theta(x) > 0\})$ (см. аналогичные обозначения в примерах 9.4.6, 9.4.7). Из микролокальной теоремы Бертини–Сарда (предложение 8.3.12) вытекает существование $\delta_0 > 0$, такого, что

$$(9.5.11) \quad \Lambda \cap \Lambda_\psi \cap \{0 < |x| \leq \delta_0\} = \emptyset,$$

$$(9.5.12) \quad (\Lambda \hat{+} T_{\{\varphi=0\}}^* X) \cap \Lambda_\psi \cap \{0 < |x| \leq \delta_0\} = \emptyset.$$

(Напомним, что по следствию 8.3.18 множество $\Lambda \hat{+} T_{\{\varphi=0\}}^* X$ изотропно.) Далее, существует $\delta_1 > 0$, такое, что

$$(9.5.13) \quad k \geq 0, 0 < |x| \leq \delta_1, \varphi(x) > 0 \Rightarrow (x; k d\psi(x) + d\varphi(x)) \notin \Lambda.$$

В самом деле, если (9.5.13) не выполняется, то существует вещественно-аналитическая кривая $t \mapsto (x(t), a(t), b(t)) \in X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, такая, что $a(t) \geq 0, b(t) > 0, x(0) = 0$ и $\varphi(x(t)) > 0$ при $t \neq 0$ и $(x(t); a(t)d\psi(x(t)) + b(t)d\varphi(x(t))) \in \Lambda$. Так как Λ изотропно, то

$$a(t) \frac{d}{dt} \psi(x(t)) + b(t) \frac{d}{dt} \varphi(x(t)) \equiv 0.$$

Но это противоречит условию $\frac{d}{dt} \psi \geq 0$ и $\frac{d}{dt} \varphi > 0$ при $0 < t \leq 1$, что доказывает (9.5.13).

Положим $B(\delta) = \{x \in X; |x| < \delta\}$. Так как пучок $R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)$ $\mathbb{R}$ -конструктивен, то существует $\delta > 0, \delta < \inf(\delta_0, \delta_1)$, такое, что

$$R\Gamma(B(\delta); R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F)) \xrightarrow{\sim} (R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F))_0.$$

Зафиксируем такое δ и обозначим через j открытое вложение $B(\delta) \hookrightarrow X$. Положим $F' = Rj_* j^{-1} F, \Lambda' = \Lambda \cup (\Lambda + T_{\partial B(\delta)}^* X)$. Отметим, что

$$(9.5.14) \quad \text{SS}(F') \subset \text{SS}(F) + \mathbb{R}_{\leq 0} \Lambda_\psi$$

и, в частности, $\text{SS}(F') \subset \Lambda'$. Так как Λ' изотропно, то по микролокальной теореме Бертини–Сарда существует $\varepsilon > 0$, такое, что

$$(9.5.15) \quad \Lambda' \cap \Lambda_\varphi \cap \{0 < |\varphi(x)| \leq \varepsilon\} = \emptyset.$$

Применяя микролокальную лемму Морса (следствие 5.4.19), получаем

$$(9.5.16) \quad R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(X; F') \simeq R\Gamma_c(X \cap \{\varphi > -\varepsilon\}; F').$$

Согласно (9.5.15), $SS(F') \cap \Lambda_\varphi \cap \{0 > \varphi > -\varepsilon\} = \emptyset$. Отсюда по следствию 9.5.4

$$(9.5.17) \quad \chi_c(X \cap \{\varphi > -\varepsilon\}; F') = \#([\sigma_\varphi] \cap CC(F'|_{\varphi > -\varepsilon})).$$

(Правая часть равенства (9.5.17) — это индекс пересечения циклов $[\sigma_\varphi]$ и $CC(F')$ в $T^*(X \cap \{\varphi > -\varepsilon\})$, что имеет смысл, так как множество $\Lambda_\varphi \cap SS(F') \cap \{\varphi > -\varepsilon\}$ компактно.)

Таким образом, мы получили равенство

$$\chi(R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(F))(x_0) = \#([\sigma_\varphi] \cap CC(F'|_{\{\varphi > -\varepsilon\}})).$$

Остается показать, что

$$\Lambda_\varphi \cap SS(F') \cap \{\varphi > -\varepsilon\} \cap \{|x| = \delta\} = \emptyset.$$

Это равенство выполняется на множестве $\{-\varepsilon < \varphi < 0\}$ по (9.5.15) и на множестве $\{\varphi > 0\}$ по (9.5.13). Предположим, что оно не выполняется на множестве $\{\varphi = 0\}$. Найдем точку $p \in SS(F)$ и число $c \geq 0$, такие, что $p - cd\psi = d\varphi$, $|\pi(p)| = \delta$. Если $c = 0$, то это противоречит предположению. Если $c > 0$, то $(\Lambda \setminus \Lambda_\varphi) \cap \{\varphi = 0\} \cap \Lambda_\psi \neq \emptyset$, что противоречит (9.5.12). Доказательство окончено. $\square$

Примеры 9.5.7. Пусть Y — замкнутое подмногообразие размерности l , $x_0 \in Y$ и φ — вещественно-аналитическая функция, такая, что $\varphi(x_0) = 0$ и многообразия T_Y^*X и Λ_φ пересекаются трансверсально в точке $p = d\varphi(x_0)$. По лемме Морса существует локальная система координат $(x_1, \dots, x_l)$ на Y , в которой $\varphi|_Y = \sum_{j=1}^l a_j x_j^2$, где $a_j \neq 0$ для всех j . Пусть $q = \#\{j; a_j < 0\}$. Так как $R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}}(k_Y)_{x_0} \simeq k[-q]$ (см. § 7.5), то из теоремы 9.5.6 следует, что

$$(9.5.18) \quad \#([\sigma_\varphi] \cap [T_Y^*X]) = (-1)^q.$$

Этот результат поддается обобщению. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, а $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция. Пусть $\Lambda = SS(F)$. Пусть выполнено (9.5.4) и

$$(9.5.19) \quad \begin{cases} \Lambda_\phi \cap \Lambda — \text{конечное множество, содержащееся} \\ \text{в } \Lambda_{\text{reg}}, \text{ причем это пересечение трансверсально.} \end{cases}$$

Естественно назвать ϕ «функцией Морса по отношению к Λ ». Действительно, если $F = k_X$, то мы получаем обычное определение функции Морса. Пусть $\Lambda_\phi \cap \Lambda = \{p, \dots, p_N\}$, и предположим, что

$$(9.5.20) \quad \begin{cases} F — \text{чистый пучок со сдвигами } d_i \text{ и кратностями } m_i \\ \text{в точках } p_i, i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

Из теоремы 9.5.6 и определения чистого пучка получаем

$$(9.5.21) \quad \#([\sigma_\phi] \cap CC(F))_{p_i} = (-1)^{d'_i} \cdot m_i,$$

где

$$(9.5.22) \quad d'_i = d_i - \frac{1}{2} \dim X - \frac{1}{2} \tau(\lambda_o(p_i), \lambda_\Lambda(p_i), \lambda_\phi(p_i)).$$

Используя теорему 9.5.3, получаем

$$(9.5.23) \quad \chi(X; F) = \sum_{i=1}^N (-1)^{d'_i} \cdot m_i.$$

Отметим, что последний результат может быть выведен и даже уточнен (заменой равенства на «неравенство Морса») с помощью предложения 5.4.20.

Замечание 9.5.8. Так как $\mathcal{L}_X$ является подпучком пучка $\mathcal{L}S_n \otimes \sigma_{T^*X/X}$, то лагранжев цикл может рассматриваться как субаналитический цикл со значениями в $\sigma_{T^*X/X}$.

Дадим описание лагранжевых циклов в этих терминах. Для n -мерного многообразия M и нигде не обращающейся в нуль вещественной n -формы v на X обозначим через $\text{sgn}(v)$ ориентацию, заданную формой v . То есть $\text{sgn}(v)$ рассматривается как сечение пучка σ_X . Пусть теперь $(x_1, \dots, x_n)$ — система координат на X , а $(x; \xi)$ — ассоциированная система координат на T^*X . отождествим $\sigma_{T^*X/X}$ и σ_X с помощью соответствия $\text{sgn}(d\xi) \leftrightarrow \text{sgn} dx$, где $d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$, а $dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Тогда

$$(9.5.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} [T^*_{\{x_1=\dots=x_l=0\}}(X)] \text{ является циклом} \\ \{(x; \xi); x_1 = \dots = x_l = \xi_{l+1} = \dots = \xi_n = 0\} \\ \text{с ориентацией} \\ (-1)^l \text{sgn}(d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l \wedge dx_{l+1} \wedge \dots \wedge dx_n) \otimes \text{sgn}(d\xi), \end{array} \right.$$

$$(9.5.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\sigma_\varphi] \text{ для функции } \varphi \text{ на } X \text{ является циклом } \Lambda_\varphi \text{ с} \\ \text{ориентацией, индуцированной ориентацией на } X \\ \text{посредством проекции } \Lambda_\varphi \xrightarrow{\sim} X. \end{array} \right.$$

Определим пересечение двух n -циклов в T^*X следующим образом. Пусть Z_1 и Z_2 суть n -мерные подмногообразия в T^*X , пересекающиеся трансверсально в точке $p \in T^*X$. Пусть θ_i ($i = 1, 2$) — такие n -мерные формы, что $\theta_i|_{Z_i} = 0$ и $\text{sgn}(\theta_1 \wedge \theta_2) = \text{sgn}(d\xi \wedge dx) = (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \text{sgn}((d\alpha_X)^n)$. Если α_i есть n -цикл $[Z_i]$ с ориентацией $\text{sgn}(\theta_i|_{Z_i})$, то $\#(\alpha_1 \cap \alpha_2) = 1$. В этих условиях следствия 9.5.2, 9.5.4, теорема 9.5.3 и формулы (9.5.8) и (9.5.9) остаются справедливыми.

9.6. Формула Лефшеца для неподвижных точек

Рассмотрим два морфизма многообразий

$$Y \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} X.$$

Положим $h = (f, g): Y \rightarrow X \times X$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, и предположим, что задан морфизм

$$(9.6.1) \quad \varphi \in \text{Hom}(f^{-1}F, g^!F).$$

Положим

$$(9.6.2) \quad \begin{aligned} S &= \text{supp}(F), \quad T = f^{-1}(S) \cap g^{-1}(S), \\ Z &= T \cap h^{-1}(\Delta_X) = \{y \in Y; f(y) = g(y) \in S\}, \end{aligned}$$

Предположим, что

$$(9.6.3) \quad T \text{ компактно.}$$

Отметим, что носитель морфизма φ содержится в T . Естественные морфизмы $\text{id} \rightarrow Rf_*f^{-1}$ и $Rg_*g^! \rightarrow \text{id}$ определяют морфизмы

$$R\Gamma(X; F) \rightarrow R\Gamma_{f^{-1}(S)}(Y; f^{-1}F), \quad R\Gamma_T(Y; g^!F) \rightarrow R\Gamma(X, F).$$

Объединяя их с морфизмом φ , мы получаем морфизм (который мы по-прежнему обозначаем φ)

$$(9.6.4) \quad \varphi: R\Gamma(X; F) \rightarrow R\Gamma(X; F).$$

Целью данного раздела является вычисление $\text{tr}(\varphi)$ — следа морфизма φ , где

$$\text{tr}(\varphi) = \sum_j (-1)^j \text{tr}(H^j(\varphi)).$$

Здесь $H^j(\varphi)$ обозначает эндоморфизм пространства $H^j(X; F)$, определенный морфизмом (9.6.4). Так как $H^j(\varphi)$ разлагается в цепочку морфизмов $H^j(X; F) \rightarrow H_{g(T)}^j(X; F) \rightarrow H^j(X; F)$, а $H_{g(T)}^j(X; F)$ конечномерно, то $\text{tr}(H^j(\varphi))$ определен корректно (см.

упр. 1.33). Пусть δ — диагональное вложение $X \hookrightarrow X \times X$. Рассмотрим цепочку морфизмов (пока мы не предполагаем справедливости (9.6.3))

$$\begin{aligned}
 R\mathcal{H}om(F, F) &\stackrel{\sim}{\leftarrow} \delta^!(F \boxtimes DF) \\
 &\longrightarrow \delta^! Rh_* h^{-1}(F \boxtimes DF) \\
 &\stackrel{\sim}{\longrightarrow} R\Gamma_{\Delta} Rh_* R\Gamma_T(f^{-1}F \otimes Dg^!F) \\
 &\stackrel{\sim}{\longrightarrow} Rh_* R\Gamma_Z(f^{-1}F \otimes Dg^!F) \\
 &\xrightarrow{\varphi} Rh_* R\Gamma_Z(g^!F \otimes Dg^!F) \\
 &\xrightarrow{\text{tr}} Rh_* R\Gamma_Z(\omega_Y),
 \end{aligned}$$

что дает морфизм

$$(9.6.5) \quad \text{Hom}(F, F) \rightarrow H_Z^0(Y; \omega_Y).$$

Определение 9.6.1. Образ id_F в $H_Z^0(Y; \omega_Y)$ называется *характеристическим классом* морфизма φ и обозначается $C(\varphi)$.

Предложение 9.6.2 (теорема Лефшеца о неподвижных точках). Пусть f , g и φ определены, как выше, и предположим, что имеет место (9.6.3), а $\text{supp}(F)$ компактен. Тогда

$$\text{tr}(\varphi) = \int_Y C(\varphi).$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму (9.6.6) (см. с. 501). Так как φ разлагается в композицию морфизмов $R\Gamma(X; F) \xrightarrow{\alpha} R\Gamma_T(Y; g^!F) \xrightarrow{\beta} R\Gamma((X; F))$, то след φ равен следу $\beta \circ \alpha$, что равно образу id_F в k при действии цепочки морфизмов в правом столбце диаграммы, что и завершает доказательство. $\square$

Отметим, что это предложение остается справедливым без предположения компактности $\text{supp}(F)$ (см. упр. 9.9).

Пусть теперь $y \in Z$, и предположим, что y является изолированной точкой в Z . Положим $Z' = Z \setminus \{y\}$. Тогда

$$H_Z^0(Y; \omega_Y) \simeq H_{\{y\}}^0(Y; \omega_Y) \oplus H_{Z'}^0(Y; \omega_Y).$$

$$\begin{array}{ccc}
R\mathrm{Hom}(F, F) & \rightarrow & R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X; F), R\Gamma(X; F)) \\
\uparrow \wr & & \uparrow \wr \\
R\Gamma(X; \delta^!(F \boxtimes DF)) & & \\
\downarrow & & \\
R\Gamma(X; \delta^!(F \boxtimes DF)) & & \\
\swarrow & \sim & \searrow \\
R\Gamma(X \times X; F \boxtimes DF) & & R\Gamma(X; F) \otimes R\Gamma(X; DF) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R\Gamma(Y; f^{-1}F \otimes Dg^!F) & \longleftarrow & R\Gamma_{f^{-1}(s)}(Y; f^{-1}F) \otimes R\Gamma(Y; Dg^!F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R\Gamma_T(Y; g^!F \otimes Dg^!F) & \longleftarrow & R\Gamma_T(Y; g^!F) \otimes R\Gamma(Y; Dg^!F) \\
\downarrow & & \downarrow \\
R\Gamma_c(Y; \omega_Y) & & R\Gamma_T(Y; g^!F) \otimes (R\Gamma_c(Y; g^!F))^* \\
\downarrow \int_Y & & \downarrow \\
k & \longleftarrow & R\Gamma_c(Y; g^!F) \otimes (R\Gamma_c(Y; g^!F))^*
\end{array}$$

Диаграмма (9.6.6)

Определение 9.6.3. В этих условиях обозначим через $C_y(\varphi)$ образ $C(\varphi)$ при действии морфизма

$$H_Z^0(Y; \omega_Y) \rightarrow H_{\{y\}}^0(Y; \omega_Y) \simeq k.$$

Если $y \notin Z$, то положим $C_y(\varphi) = 0$.

Если Z конечно, то очевидно, что

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{y \in Z} C_y(\varphi).$$

Обозначения 9.6.4. С этого места мы будем считать $Y = X$ и $g = \mathrm{id}_X$, т. е. Z является пересечением $\mathrm{supp}(F)$ и множества неподвижных точек морфизма f .

Если x — неподвижная точка морфизма f , то через φ_x мы будем обозначать эндоморфизм объекта F_x , являющийся композицией морфизмов

$$F_x \simeq (f^{-1}F)_x \xrightarrow{\varphi} F_x.$$

Если x — неподвижная точка морфизма f и x является изолированной точкой множества $f^{-1}(x) \cap T = f^{-1}(x) \cap \text{supp}(F) \cap f^{-1}(\text{supp}(F))$, то через $\Gamma_{\{x\}}(\varphi)$ мы обозначим эндоморфизм $R\Gamma_{\{x\}}(X; F)$, являющийся композицией морфизмов

$$R\Gamma_{\{x\}}(X; F) \longrightarrow R\Gamma_{\{f^{-1}(x)\}}(X; f^{-1}F) \xrightarrow{\varphi} R\Gamma_{\{f^{-1}(x)\} \cap T}(X; F) \longrightarrow R\Gamma_{\{x\}}(X; F).$$

При вычислениях необходимо соблюдать осторожность, так как $C_x(\varphi)$, $\text{tr}(\varphi_x)$ и $\text{tr}(\Gamma_{\{x\}}(\varphi))$ — это, вообще говоря, различные объекты.

Пример 9.6.5. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — аналитический диффеоморфизм с двумя неподвижными точками t_0 и t_1 , $t_0 < t_1$, т. е. f индуцирует гомеоморфизм интервала $[t_0, t_1]$. Пусть $F = k_{[t_0, t_1]}$, а φ является каноническим изоморфизмом $f^{-1}k_{[t_0, t_1]} \xrightarrow{\sim} k_{[t_0, t_1]}$. Тогда $\text{tr}(\varphi) = \chi(\mathbb{R}; F) = 1 = C_{t_0}(\varphi) + C_{t_1}(\varphi)$. С другой стороны, φ_{t_i} действует как тождественное преобразование на F_{t_i} ($i = 0, 1$). Следовательно, $\text{tr}(\varphi_{t_i}) = 1$ и $C_{t_i}(\varphi) \neq \text{tr}(\varphi_{t_i})$ для $i = 0, 1$. Аналогичные аргументы справедливы для $\Gamma_{\{t_i\}}(\varphi)$. Как мы увидим позже, $C_{t_i}(\varphi) = 0$ или 1 в зависимости от того, возрастает или убывает $f(t) - t$ в t_i .

Пример 9.6.6. Пусть X есть n -мерное компактное многообразие, $F = k_X$ и φ — канонический морфизм $f^{-1}k_X \xrightarrow{\sim} k_X$. Рассмотрим цепочку морфизмов

$$\begin{aligned} k_X &\simeq R\mathcal{H}om(k_X, k_X) \\ &\simeq \delta^!(k_X \boxtimes \omega_X) \\ &\rightarrow \delta^! h_* \omega_X. \end{aligned}$$

Пусть $\Gamma_f = \{(f(x), x); x \in X\}$, и пусть $j: \Gamma_f \hookrightarrow X \times X$ — вложение. Тогда по построению $C(\varphi)$ является образом 1 при действии морфизмов

$$\begin{aligned} \Gamma(X; k_X) &\xrightarrow{\alpha} H_{\Delta}^0(X \times X; k_X \boxtimes \omega_X) \\ &\xrightarrow{\beta} H_{j^{-1}(\Delta)}^0(\Gamma_f; j^{-1}(k_X \boxtimes \omega_X)) \\ &\simeq H_{j^{-1}(\Delta)}^0(\Gamma_f; \omega_{\Gamma_f}) \\ &\simeq H_{j^{-1}(\Delta)}^0(X \times X; \omega_{X \times X}). \end{aligned}$$

Пусть $[\Gamma_f] \in H_{F_f}^0(X \times X; \mathcal{LS}_n(k_X \boxtimes \sigma_X))$ и $[\Delta] \in H^0(X \times X; \mathcal{ZS}_n(k_X \boxtimes \sigma_X))$ — циклы, ассоциированные с Γ_f и Δ . Тогда, отождествляя $(\sigma_X \boxtimes k_X)|_\Delta$ и $(k_X \boxtimes \sigma_X)|_\Delta$, получаем $\alpha(1) = [\Delta]$. Отсюда

$$\beta([\Delta]) = [\Gamma_f] \cap [\Delta],$$

что дает

$$(9.6.7) \quad C(\varphi) = [\Gamma_f] \cap [\Delta].$$

Таким образом, мы вывели знаменитую *формулу Лефшеца для неподвижных точек*

$$\sum_j (-1)^j \operatorname{tr}(H^j(\varphi)) = \#([\Gamma_f] \cap [\Delta])$$

(см. замечание 9.0).

Другими словами, след φ вычисляется как индекс пересечения графика морфизма f и диагонали.

Замечание 9.6.7. Пусть x — изолированная точка в Z . Тогда $C_x(\varphi)$ является локальным инвариантом в следующем смысле: пусть F и F' принадлежат $\operatorname{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, $\varphi: f^{-1}F \rightarrow F$, $\varphi': f^{-1}F' \rightarrow F'$ — морфизмы. Предположим, что существует окрестность W точки x и изоморфизм $\psi: F|_W \rightarrow F'|_W$, такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}F|_{W \cap f^{-1}(W)} & \xrightarrow{\varphi} & F|_{W \cap f^{-1}(W)} \\ f^{-1}(\psi) \downarrow & & \downarrow \psi \\ f^{-1}F'|_{W \cap f^{-1}(W)} & \xrightarrow{\varphi'} & F'|_{W \cap f^{-1}(W)} \end{array}$$

коммутативна. Тогда $C_x(\varphi) = C_x(\varphi')$. Доказательство тривиально.

Мы расскажем теперь, как можно вычислить $C(\varphi)$ в некоторых конкретных случаях. Начнем с доказательства гомотопической инвариантности класса $C(\varphi)$.

Пусть $I = [0, 1]$, $f: X \times I \rightarrow X$ — ограничение морфизма многообразий $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, $p: X \times I \rightarrow X$ — проекция. Пусть $F \in \operatorname{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, и пусть $\varphi: f^{-1}F \rightarrow p^{-1}F$ — морфизм. Для $t \in I$ пусть i_t обозначает вложение $X \hookrightarrow X \times I$, $x \mapsto (x, t)$. Положим $f_t = f \circ i_t$, $\varphi_t = i_t^{-1}(\varphi): f_t^{-1}F \rightarrow F$ и

$$\tilde{Z} = \{(x, t) \in \operatorname{supp}(F) \times I; f(x, t) = x\}.$$

Предложение 9.6.8. Пусть множество $\tilde{Z}$, определенное этими условиями, является компактным. Тогда образ $C(\varphi_t)$ в $H_{p(\tilde{Z})}^0(X; \omega_X)$ не зависит от t .

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
 R\mathrm{Hom}(F, F) & & \\
 \downarrow & & \\
 R\Gamma_{\Delta}(X \times X; F \boxtimes DF) & \longrightarrow & R\Gamma_{\Delta \times I}(X \times X \times I; F \boxtimes DF \boxtimes k_I) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R\Gamma_{p(\tilde{Z})}(X; f_t^{-1} F \otimes DF) & \xleftarrow{i_t^{\#}} & R\Gamma_{\tilde{Z}}(X \times I; f^{-1} F \otimes p^{-1} DF) \\
 \downarrow \varphi_t & & \downarrow \varphi \\
 R\Gamma_{p(\tilde{Z})}(X; F \otimes DF) & \xleftarrow{i_t^{\#}} & R\Gamma_{\tilde{Z}}(X \times I; p^{-1} F \boxtimes p^{-1} DF) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R\Gamma_{p(\tilde{Z})}(X; \omega_X) & \xleftarrow{i_t^{\#}} & R\Gamma_{\tilde{Z}}(X \times I; p^{-1} \omega_X)
 \end{array}$$

где $i_t^{\#}$ — это морфизм, индуцированный отображением $\mathrm{id} \rightarrow i_{t*} \circ i_t^{-1}$. Тогда $C(\varphi_t)$ есть образ $c \in H_{\tilde{Z}}^0(X \times I; p^{-1} \omega_X)$ при действии $i_t^{\#}$. Так как морфизмы

$$H_{p(\tilde{Z})}^0(X; \omega_X) \xrightarrow{p^{\#}} H_{p^{-1}p(\tilde{Z})}^0(X \times I; p^{-1} \omega_X) \xrightarrow{i_t^{\#}} H_{p(\tilde{Z})}^0(X; \omega_X)$$

являются изоморфизмами и $i_t^{\#} \circ p^{\#} = \mathrm{id}$, то $i_t^{\#}$ не зависит от t . $\square$

Пусть теперь x — изолированная точка в Z , а $\dot{V}$ — локально замкнутая субаналитическая окрестность точки x , такая, что

$$(9.6.8) \quad V \cap f^{-1}(V) \text{ замкнуто в } V \text{ и открыто в } f^{-1}(V).$$

Пусть $\Gamma_V(\varphi)$ обозначает морфизм из $f^{-1}R\Gamma_V(F)$ в $R\Gamma_V(F)$, являющийся композицией

$$\begin{aligned}
 f^{-1}R\Gamma_V(F) &\longrightarrow R\Gamma_{f^{-1}(V)}(f^{-1}F) \xrightarrow{\varphi} R\Gamma_{f^{-1}(V)}(F) \\
 &\longrightarrow R\Gamma_{f^{-1}(V) \cap V}(F) \longrightarrow R\Gamma_V(F).
 \end{aligned}$$

Предложение 9.6.9. Пусть имеет место (9.6.8). Тогда $C_x(\varphi) = C_x(\Gamma_V(\varphi))$. В частности, если V относительно компактно и $Z \cap \bar{V} = \{x\}$, то $C_x(\varphi) = \text{tr}(\Gamma_V(\varphi))$.

Доказательство. Утверждение является следствием локальной инвариантности (замечание 9.6.7) и теоремы Лефшеца (предложение 9.6.2). $\square$

Справедливо аналогичное утверждение.

Пусть V — локально замкнутая субаналитическая окрестность точки x , такая, что

$$(9.6.9) \quad V \cap f^{-1}(V) \text{ открыто в } V \text{ и замкнуто в } f^{-1}(V).$$

Пусть φ_V — морфизм из $f^{-1}F_V$ в F_V , являющийся композицией

$$f^{-1}F_V \longrightarrow (f^{-1}F)_{f^{-1}(V)} \xrightarrow{\varphi} F_{f^{-1}(V)} \longrightarrow F_{V \cap f^{-1}(V)} \longrightarrow F_V.$$

Предложение 9.6.10. Пусть выполняется условие (9.6.9) имеет место. Тогда $C_x(\varphi) = C_x(\varphi_V)$. В частности, если V относительно компактна $Z \cap \bar{V} = \{x\}$, то $C_x(\varphi) = \text{tr}(\varphi_V)$.

Теперь мы займемся вычислением следа специализации морфизма φ в неподвижной точке x отображения f . Для краткости мы будем писать $\nu_x F$ вместо $\nu_{\{x\}}(F)$. Обозначим через $\nu_x \varphi$ композицию морфизмов (см. предложение 4.2.5)

$$(9.6.10) \quad (T_x f)^{-1} \nu_x F \longrightarrow \nu_x f^{-1} F \xrightarrow{\varphi} \nu_x F.$$

Предположим, что

$$(9.6.11) \quad \Gamma_f \text{ и } \Delta \text{ пересекаются трансверсально в } x \in X.$$

Из этого предположения следует, что 0 — единственная неподвижная точка отображения $T_x f: T_x X \rightarrow T_x X$.

Предложение 9.6.11. Пусть выполняется условие (9.6.11). Тогда $C_x(\varphi) = C_0(\nu_x \varphi)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть коммутативную диаграмму (9.6.12) (см. с. 506), при построении которой мы использовали изоморфизм $D\nu_x F \simeq \nu_x DF$ из предложения 8.4.13. $\square$

Из этого предложения следует, что для вычисления $C_x(\varphi)$ при условии (9.6.11) достаточно рассмотреть следующую ситуацию.

$$\begin{array}{ccccccc}
R\mathrm{Hom}(F, F) & \xrightarrow{\quad} & R\mathrm{Hom}(\nu_z F, \nu_z F) & & & & \\
\uparrow \wr & & & & & & \\
R\Gamma_{\Delta}(X \times X; F \boxtimes DF) & \longrightarrow & R\Gamma_{\Delta}(T_z X \times T_z X; \nu_z F \boxtimes \nu_z DF) & \longleftarrow & R\Gamma_{\Delta}(T_z X \times T_z X; \nu_z F \boxtimes D\nu_z F) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R\Gamma_Z(X; f^{-1}F \otimes DF) & \longrightarrow & R\Gamma_{\{x\}}(T_z X; (T_z f)^{-1}\nu_z F \otimes \nu_z DF) & \longleftarrow & R\Gamma_{\{x\}}(T_z X; (T_z f)^{-1}\nu_z F \otimes D\nu_z F) & & \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \nu_z(\varphi) & & \downarrow \nu_z(\varphi) & & \\
R\Gamma_Z(X; f^{-1}F \otimes DF) & \longrightarrow & R\Gamma_{\{x\}}(T_z X; \nu_z F \otimes \nu_z DF) & \longleftarrow & R\Gamma_{\{x\}}(T_z X, \nu_z F \otimes D\nu_z F) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R\Gamma_Z(X; \omega_X) & \longrightarrow & R\Gamma_{\{x\}}(T_z X; \nu_z \omega_X) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma_{\{x\}}(T_z X; \omega_{T_z X}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
R\Gamma_{\{x\}}(X; \omega_X) & \xrightarrow{\quad} & k & & & &
\end{array}$$

Диаграмма (9.6.12)

Пусть V — конечномерное вещественное линейное пространство, $u: V \rightarrow V$ — линейный эндоморфизм, F — конический объект в $D_{\mathbb{R}-c}^b(V)$ и $\varphi \in \text{Hom}(u^{-1}F, F)$. Предположим, что

(9.6.13) 1 не является собственным значением эндоморфизма u .

Пусть $V^{\mathbb{C}}$ обозначает комплексификацию пространства V . Для $\lambda \in \mathbb{C}$ через $V_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ обозначим обобщенное собственное подпространство в $V^{\mathbb{C}}$, отвечающее λ , т. е. $x \in V_{\lambda}^{\mathbb{C}}$ в том и только в том случае, когда существует $m > 0$, такое, что $(u - \lambda)^m(x) = 0$. Линейное подпространство $V_s \subset V$ называется *сжимающимся*, если

$$(9.6.14) \quad \begin{cases} u(V_s) \subset V_s, \\ u|_{V_s} & \text{не имеет собственных значений } \lambda \in \mathbb{R}, \\ & \text{таких, что } \lambda > 1, \\ u|_{V/V_s} & \text{не имеет собственных значений } \lambda \in \mathbb{R}, \\ & \text{таких, что } 0 \leq \lambda < 1, \end{cases}$$

что эквивалентно условиям

$$(9.6.15) \quad \begin{cases} u(V_s) \subset V_s, \\ \bigoplus_{0 \leq \lambda < 1} V_{\lambda}^{\mathbb{C}} \subset V_s \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subset \bigoplus_{\lambda \notin [1, +\infty[} V_{\lambda}^{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Из этих условий следует, что $u^{-1}(V_s) = V_s$.

Аналогично, назовем линейное подпространство $V_e \subset V$ *расширяющимся*, если

$$(9.6.16) \quad \begin{cases} u(V_e) \subset V_e, \\ u|_{V_e} & \text{не имеет собственных значений } \lambda \in \mathbb{R}, \\ & \text{таких, что } 0 \leq \lambda < 1, \\ u|_{V/V_e} & \text{не имеет собственных значений } \lambda \in \mathbb{R}, \\ & \text{таких, что } \lambda > 1, \end{cases}$$

Это эквивалентно условиям

$$(9.6.17) \quad \begin{cases} u(V_e) \subset V_e, \\ \bigoplus_{1 < \lambda} V_{\lambda}^{\mathbb{C}} \subset V_e \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subset \bigoplus_{\lambda \notin [0, 1]} V_{\lambda}^{\mathbb{C}}. \end{cases}$$

Мы сконцентрируем внимание на расширяющихся пространствах.

Пусть V_e — расширяющееся пространство. Тогда $u|_{V_e}: V_e \rightarrow V_e$ — изоморфизм. Пусть $\Gamma_e(\varphi_{V_e})$ — эндоморфизм, являющийся композицией

$$R\Gamma_e(V_e; F|_{V_e}) \longrightarrow R\Gamma_e(V_e; u^{-1}F|_{V_e}) \xrightarrow{\varphi} R\Gamma_e(V_e; F|_{V_e}).$$

Предложение 9.6.12. Пусть $u: V \rightarrow V$ — линейное отображение без нетривиальных неподвижных точек и V_e — расширяющееся подпространство в V (см. (9.6.13)). Пусть F — конический объект в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(V)$ и $\varphi \in \text{Hom}(u^{-1}F, F)$. Тогда $C_0(\varphi) = \text{tr}(\Gamma_e(\varphi_{V_e}))$.

Доказательство. (а) Предположим сначала, что u не имеет собственных значений $\lambda \in \mathbb{C}$, таких, что $|\lambda| = 1$. Рассмотрим разложение $V = V_+ + V_-$, где

$$V_+ = \left(\bigoplus_{|\lambda| > 1} V_\lambda^{\mathbb{C}} \right) \cap V, \quad V_- = \left(\bigoplus_{|\lambda| < 1} V_\lambda^{\mathbb{C}} \right) \cap V.$$

Выберем норму на V , для которой существуют константы $c_1, c_2, 0 < c_1 < 1 < c_2$, такие, что $|u(x)| \geq c_2|x|$ на V_+ и $|u(x)| \leq c_1|x|$ на V_- .

Положим $Z_{ab} = \{x \in V_+; |x| < a\} \times \{x \in V_-; |x| \in b\}$. Тогда $u^{-1}(Z_{ab}) \cap Z_{ab}$ открыто в Z_{ab} и замкнуто в $u^{-1}(Z_{ab})$. Применяя предложение 9.6.9, получаем

$$(9.6.18) \quad C_0(\varphi) = \text{tr}(\Gamma(\varphi_{Z_{ab}})).$$

Здесь $\Gamma(\varphi_{Z_{ab}})$ — эндоморфизм на $R\Gamma(X; F_{Z_{ab}}) \simeq R\Gamma_c(Z_{ab}; F|_{Z_{ab}})$, индуцированный $\varphi_{Z_{ab}}$.

Лемма 9.6.13. Для любого $b > 0$ существует $a_0 > 0$, такое, что $R\Gamma_c(Z_{ab}; F) \rightarrow R\Gamma_c(Z_{\infty b}; F)$ является изоморфизмом при $a \geq a_0$.

Доказательство. Пусть $Y = \{(t, x_+) \in \mathbb{R} \times V_+; t^2 + |x_+|^2 = 1\}$. Вложим V_+ в Y с помощью отображения $\left(x_+ \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+|x_+|^2}}, \frac{x_+}{\sqrt{1+|x_+|^2}} \right)$.

Тогда V_+ является открытым подмножеством в Y , определенным условием $t > 0$. Пусть $j: V_+ \times V_- \rightarrow Y \times V_-$ — открытое вложение. Тогда пучок $F' = Rj_* F_{\{|x_-| \leq b\}}$ является ω - $\mathbb{R}$ -конструктивным. Теперь применима лемма 8.4.7 ($\varphi = t$). В самом деле, утверждение леммы 9.6.13 эквивалентно следующему: $R\Gamma(\{|t| \leq \varepsilon\}; F') = 0$ при $0 < \varepsilon \ll 1$. $\square$

Окончание доказательства предложения 9.6.12. Пусть $q: V \rightarrow V_-$ — проекция. Тогда так как $Rq_!F$ конечно, то при $b > 0$

(9.6.19)

$$\begin{aligned} H_c^k(V_+; F) &\simeq H^k(Rq_!F)_0 \\ &\simeq H^k(\{x_- \in V_-; |x_-| \leq b\}; Rq_!F) \\ &\simeq \varinjlim_{a \rightarrow \infty} H_c^k(Z_{ab}; F). \end{aligned}$$

По предыдущей лемме это изоморфно $H_c^k(Z_{ab}; F)$ при $a \gg 1$, т. е. мы получаем цепочку изоморфизмов $R\Gamma_c(V_+; F) \xleftarrow{\sim} R\Gamma_c(Z_{\infty b}; F) \xleftarrow{\sim} R\Gamma_c(Z_{ab}; F)$. Это доказывает утверждение в том частном случае, когда $V_e = V_+$ и нет собственных чисел λ , таких, что $|\lambda| = 1$.

(b) Замена u на tu , $t \in \mathbb{R}$, $1 - t \ll 1$, не меняет $C_0(\varphi)$ (предложение 9.6.8 и замечание 9.6.15 ниже) и не меняет $\text{tr}(\Gamma_c(\varphi_{V_e}))$ (предложение 2.7.5). Следовательно, мы можем считать $|\lambda| \neq 1$.

(c) Пусть $W = \bigoplus_{\lambda > 1} (V_\lambda^{\mathbb{C}} \cap V)$, и пусть V_e — расширяющееся пространство. Из (a) следует, что достаточно доказать равенство

$$(9.6.20) \quad \text{tr}(\Gamma_c(\varphi_W)) = \text{tr}(\Gamma_c(\varphi_{V_e})),$$

так как из него следует, что $\text{tr}(\Gamma_c(\varphi_W)) = \text{tr}(\Gamma_c(\varphi_{V_e}))$. Для доказательства (9.6.20) обозначим через V' пространство V_e/W , а через u' — отображение $V' \rightarrow V'$, индуцированное отображением u , и пусть $p: V_e \rightarrow V_e/W$ — проекция. Заменяя V на V' , u на u' и F на $Rp_!F$, получаем, что достаточно доказать равенство

$$(9.6.21) \quad \text{tr}(\Gamma_c(\varphi_V)) = \text{tr}(\varphi_0)$$

в предположении, что нет собственных чисел $\lambda \in [0, \infty[$.

Так как $R\Gamma_c(V; F) \xleftarrow{\sim} R\Gamma_{\{0\}}(V; F)$ и $R\Gamma(V; F) \xrightarrow{\sim} F_0$, то (9.6.21) эквивалентно утверждению, что след φ при действии на $R\Gamma(V \setminus \{0\}; F)$ равен 0. Так как F конечен, то этот след равен следу $\gamma_*\varphi$, при действии на $R\gamma_*F$, где γ — отображение $V \setminus \{0\} \rightarrow S_V \stackrel{\text{def}}{=} (V \setminus \{0\})/\mathbb{R}^+$.

По предположению γ_*u (отображение на S_V , индуцированное u) не имеет неподвижных точек, т. е. $\text{tr}(\gamma_*\varphi) = 0$ (предложение 9.6.2). $\square$

Аналогично доказывается

Предложение 9.6.14. Пусть $u: V \rightarrow V$ — линейное отображение, не имеющее нетривиальных неподвижных точек, а V_e — сжимающееся пространство (см. (9.6.14)). Пусть F — конический объект в $D_{\mathbb{R}-c}^b(V)$, а $\varphi \in \text{Hom}(u^{-1}F, F)$. Тогда $C_0(\varphi) = \text{tr}(\Gamma_{V_e}(\varphi))$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 9.6.13.

Отметим, что $R\Gamma_{V_e}(V; F)$ и $R\Gamma_c(V_e; F)$ не обязательно изоморфны.

Замечание 9.6.15. Пусть V — вещественное конечномерное линейное пространство. Обозначим через p проекцию $V \times \mathbb{R} \rightarrow V$, а через i_t — вложение $V \hookrightarrow V \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (x, t)$. Пусть $u: V \times \mathbb{R} \rightarrow V$ — непрерывное отображение, линейное по $x \in V$. Пусть F — конический объект в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(V)$, а φ — морфизм из $u^{-1}F$ в $p^{-1}F$. Положим $u_t = i_t \circ u$. Пусть $\varphi_t = i_t^{-1} \circ \varphi: u_t^{-1}F \rightarrow F$. Тогда если 1 не является собственным значением u_t , то $C_0(\varphi_t)$ не зависит от t . Это утверждение следует из предложения 9.6.8.

Следствие 9.6.16. Пусть X — комплексное многообразие, а $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X))$. Тогда если выполнено (9.6.11), то $C_x(\varphi) = \text{tr}(\varphi_x)$. Если, кроме этого, 0 не является собственным значением для $f'(x)$ (т. е. f — локальным изоморфизм в точке x), то $C_x(\varphi) = \text{tr}(\Gamma_{\{x\}}(\varphi))$.

Доказательство. Заменяя F на $\nu_x F$, мы можем считать X комплексным векторным пространством, f — линейным отображением, а F — $\mathbb{C}^x$ -коническим объектом (в том смысле, что F локально постоянен на $\mathbb{C}^x$ -орбитах в X). Заменяя f на λf , где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda - 1| \ll 1$, мы можем считать, что любое ненулевое собственное значение отображения f не является вещественным. Положим $V_e = \{0\}$. Если 0 не является собственным значением, то мы можем взять $V_e = T_x X$ и использовать тот факт, что $R\Gamma_c(T_x X; \nu_x F) \simeq R\Gamma_{\{x\}}(X; F)$. $\square$

Пример 9.6.17. Пусть X есть n -мерное многообразие, $F = k_X$ и $\varphi: f^{-1}F \rightarrow F$ — каноническое отображение. Пусть Γ_f и Δ пересекаются трансверсально в точке $x_0 \in X$. Тогда

$$(9.6.22) \quad C_{x_0}(\varphi) = \text{sgn}(\det(1 - f'(x_0))).$$

Действительно, по предложению 9.6.11 мы можем считать X линейным пространством, а f — линейным отображением. Возьмем $V_e = \bigoplus_{\lambda > 1} (V_\lambda^{\mathbb{C}} \cap V)$ и применим предложение 9.6.12. Тогда $\det_{V_e}(f|_{V_e}) > 0$. Согласно предложению 3.2.3(iv), φ_{V_e} действует единицей на $R\Gamma_c(V_e; k_X) \simeq k[-\dim V_e]$. Следовательно, $C_0(\varphi) = \text{tr}(\Gamma_c(\varphi_{V_e})) = (-1)^{\dim V_e} = \text{sgn}(\det(1 - f'(x_0)))$ (последнее равенство вытекает из того, что

$$\det_V(1 - f'(x_0)) = \det_{V_e}(1 - f'(x_0)) \cdot \det_{V/V_e}(1 - f'(x_0)),$$

$$\text{и } \det_{V/V_e}(1 - f'(x_0)) > 0, \det_{V_e}(f'(x_0) - 1) > 0).$$

Пример 9.6.18. Пусть f, F и φ такие же, как в примере 9.6.5. Предположим, что $f'(t_0) \neq 1$. Тогда

$$(9.6.23) \quad C_{t_0}(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } f'(t_0) > 1, \\ 1, & \text{если } 0 \leq f'(t_0) < 1. \end{cases}$$

Действительно, $C_{t_0}(\varphi) = \text{tr}(\Gamma_c(\varphi\nu_{t_0}))$, и мы можем положить $V_e = T_x X$, если $f'(t_0) > 1$, и $V_e = \{0\}$, если $0 \leq f'(t_0) < 1$. Так как $\nu_{t_0} F \simeq k_{\{t \geq 0\}}$, то $R\Gamma_c(T_{\{t_0\}} X; \nu_{t_0} F) = 0$ и $R\Gamma_c(\{0\}; \nu_{t_0} F) \simeq k$, откуда следует (9.6.23).

9.7. Конструктивные функции и лагранжевы циклы

Конструктивной функцией φ на X называется функция, принимающая целые значения ($\mathbb{Z}$ -функция), такая, что

$$(9.7.1) \quad \begin{cases} \text{для любого } m \in \mathbb{Z} \text{ множество } \varphi^{-1}(m) \text{ субаналитично} \\ \text{и семейство } \{\varphi^{-1}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}} \text{ локально конечно.} \end{cases}$$

Из результатов гл. 8 следует, что $\mathbb{Z}$ -функция конструктивна в том и только в том случае, когда существует μ -стратификация $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, такая, что $\varphi|_{X_{\alpha}}$ постоянна при любом α . Пусть 1_A обозначает характеристическую функцию подмножества $A \subset X$. По теореме триангуляции функция φ конструктивна в том и только в том случае, когда существуют локально конечное покрытие $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$, где X_{α} компактны, субаналитичны и конструктивны, и целые числа m_{α} , такие, что $\varphi = \sum_{\alpha} m_{\alpha} 1_{X_{\alpha}}$.

Множество конструктивных функций на X обладает естественной структурой алгебры. Эту алгебру мы будем обозначать $\text{CF}(X)$. Предпучок $U \mapsto \text{CF}(U)$ (U — открытое подмножество в X), очевидно, является пучком. Обозначим его через $\mathcal{CF}_X$ и назовем пучком конструктивных $\mathbb{Z}$ -функций на X . Отметим, что $\mathcal{CF}_X$ — мягкий пучок.

Пусть теперь $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ (основное кольцо — поле k характеристики 0). Локальная характеристика Эйлера-Пуанкаре $\chi(F)(x) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(F)_x$, очевидно, является конструктивной функцией. Более того,

$$(9.7.2) \quad \begin{cases} \chi(F \oplus G) = \chi(F) + \chi(G), \\ \chi(F \otimes G) = \chi(F) \cdot \chi(G), \end{cases}$$

и если $F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \xrightarrow{+1} \text{---}$ выделенный треугольник, то

$$(9.7.3) \quad \chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$$

(см. упр. 1.34).

Обозначим через $K_{\mathbb{R}-c}(X)$ группу Гротендика категории $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ (см. упр. 1.27). Эта группа есть факторгруппа свободной абелевой группы с образующими из $\text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ по множеству соотношений $F = F' + F''$ (соотношения находятся во взаимно однозначном соответствии с выделенными треугольниками $F' \rightarrow F \rightarrow F'' \xrightarrow{+1}$).

По теореме 8.1.11 $K_{\mathbb{R}-c}(X)$ является группой Гротендика абелевой категории $\mathbb{R}\text{-}\mathbf{Comp}(X)$. По (9.7.3) локальная характеристика Эйлера-Пуанкаре χ индуцирует групповой гомоморфизм, также обозначаемый через χ :

$$(9.7.4) \quad \chi: K_{\mathbb{R}-c}(X) \rightarrow \text{CF}(X).$$

Теорема 9.7.1. *Морфизм χ является изоморфизмом.*

Доказательство. (а) Пусть $\varphi \in \text{CF}(X)$. Выберем субаналитическую стратификацию $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, такую, что $\varphi = \sum_{\alpha \in A} m_\alpha 1_{X_\alpha}$, $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Пусть $\varepsilon_\alpha = \text{sgn}(m_\alpha)$ при $m_\alpha \neq 0$. Положим

$$(9.7.5) \quad F = \bigoplus_{\alpha \in A'} k_{X_\alpha}^{|m_\alpha|} \left[\frac{1 - \varepsilon_\alpha}{2} \right],$$

где $A' = \{\alpha \in A; m_\alpha \neq 0\}$.

Очевидно, что $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ и $\chi(F) = \varphi$. Это доказывает сюръективность χ (отметим, что $\text{supp}(F) = \text{supp}(\varphi)$).

(б) Докажем инъективность χ . Элемент $u \in K_{\mathbb{R}-c}(X)$ представим в виде конечной суммы $u = \sum_j a_j [F_j]$, где $a_j \in \mathbb{Z}$, а $[F_j]$ обозначает образ $F_j \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ в $K_{\mathbb{R}-c}(X)$. Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, то положим $F^k = F \oplus \dots \oplus F$ (k раз) для $k \in \mathbb{N}$ и $F^k = F^{-k}[1]$ для $k < 0$. Имеем $u = [\bigoplus_j F^{a_j}]$. Следовательно, $u \in K_{\mathbb{R}-c}(X)$ представим одним объектом F из $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

Пусть $X = \bigsqcup_\alpha Z_\alpha$ — субаналитическая стратификация, такая, что $H^j(F)|_{Z_\alpha}$ постоянны для всех j и всех α . Пусть X_k обозначает объединение стратов коразмерности k . Из рассмотрения выделенного треугольника $F_{X_0} \rightarrow F \rightarrow F_{X \setminus X_0} \xrightarrow{+1}$ получаем

$$[F] = [F_{X_0}] + [F_{X \setminus X_0}].$$

Продолжая это рассуждение, получаем $[F] = \sum_k [F_{X_k}]$, т. е. (см. упр. 1.27)

$$[F] = \sum_{j,k} (-1)^j [H^j(F)_{X_k}].$$

Таким образом, из $\chi(F) = 0$ следует, что для любого α

$$\dim \bigoplus_{j \text{ чет.}} H^j(F)_{Z_\alpha} = \dim \bigoplus_{j \text{ нечет.}} H^j(F)_{Z_\alpha}.$$

Значит,

$$\bigoplus_{j \text{ чет.}} H^j(F)_{Z_\alpha} \simeq \bigoplus_{j \text{ нечет.}} H^j(F)_{Z_\alpha}$$

и

$$\bigoplus_{j \text{ чет.}} H^j(F)_{X_k} \simeq \bigoplus_{j \text{ нечет.}} H^j(F)_{X_k}$$

(так как X_k является дизъюнктивным объединением Z_α), что доказывает равенство $[F] = 0$. $\square$

Рассмотрим естественные операции на конструктивных функциях. Пусть X и Y — многообразия.

(а) Определим «внешнее произведение»

$$(9.7.6) \quad \mathcal{CF}_X \boxtimes \mathcal{CF}_X \rightarrow \mathcal{CF}_{X \times Y},$$

полагая $(\varphi \boxtimes \psi)(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$. Очевидно, что если $\varphi = \chi(F)$, $\psi = \chi(G)$, то $\varphi \boxtimes \psi = \chi(F \boxtimes G)$.

(б) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Определим «обратный образ»

$$(9.7.7) \quad f^*: f^{-1}\mathcal{CF}_X \rightarrow \mathcal{CF}_Y,$$

полагая $(f^*\varphi)(y) = \varphi(f(y))$. Если $\varphi = \chi(F)$, то $f^*\varphi = \chi(f^{-1}F)$.

(с) Пусть $\varphi \in \Gamma_c(X; \mathcal{CF}_X)$. Определим «интеграл» от φ , обозначаемый через $\int_X \varphi$, следующим образом. Выберем объект $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ с компактным носителем, такой, что $\chi(F) = \varphi$. Положим

$$\int_X \varphi = \chi(X; F).$$

Определенное таким образом число зависит только от φ (из-за аддитивности функтора $\chi(X; \cdot)$ по отношению к выделенным треугольниками; см. также теорему 9.7.1).

Значение $\int_X \varphi$ может быть найдено следующим образом. Выберем конечное семейство $\{X_\alpha\}$ относительно компактных локально замкнутых субаналитических подмножеств, таких, что $\varphi = \sum_\alpha m_\alpha 1_{X_\alpha}$, $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$(9.7.8) \quad \int_X \varphi = \sum_\alpha m_\alpha \cdot \chi(X; k_{X_\alpha}).$$

В частности, если X_α компактны и конструктивны, то $\int_X \varphi = \sum_\alpha m_\alpha$.

(d) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Определим «прямой образ»

$$(9.7.9) \quad f_*: f_! \mathcal{CF}_Y \rightarrow \mathcal{CF}_X,$$

полагая

$$(f_* \psi)(x) = \int_Y \psi \cdot 1_{f^{-1}(x)}.$$

Для проверки конструктивности $f_* \psi$ применим теорему 9.7.1, представив ψ как $\chi(G)$, $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$, таким образом, чтобы f был собственным на $\text{supp}(G)$. Тогда

$$f_* \chi(G) = \chi(Rf_! G),$$

так как $\chi(Rf_! G)(x) = \chi(Y; G \otimes k_{f^{-1}(x)})$.

(е) Наконец, для $\varphi \in \mathcal{CF}_x$ мы определим «двойственную функцию», обозначаемую через $D_X \varphi$ (или просто $D\varphi$). Пусть $\varphi = \chi(F)$; тогда $D_X \varphi = \chi(D_X F)$. Так как D_X — триангулированный функтор, а χ аддитивен, то определение корректно. Заметим, что $(D_X \varphi)(x) = \chi_c(F)(x)$. Поэтому значение $(D_X \varphi)(x)$ можно найти следующим образом. Выберем локальную систему координат с началом в x и обозначим через $B(x, \varepsilon)$ открытый шар с центром в x радиуса ε . Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то по лемме 8.4.7

$$\begin{aligned} R\Gamma_{\{x\}}(X; F) &\simeq R\Gamma_c(B(x, \varepsilon); F) \\ &\simeq R\Gamma(X; F \otimes k_{B(x, \varepsilon)}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(9.7.10) \quad (D_X \varphi)(x) = \int_X 1_{B(x, \varepsilon)} \varphi$$

для $0 < \varepsilon \ll 1$. Отметим, что значение $(D_X \varphi)(x)$ зависит только от ростка функции φ в x , т. е. D_X является эндоморфизмом пучка $\mathcal{CF}_X$

$$(9.7.11) \quad D_X: \mathcal{CF}_X \rightarrow \mathcal{CF}_X.$$

Предложение 9.7.2. (i) Пусть $\varphi \in \mathcal{CF}(X)$. Тогда $D_X \circ D_X \varphi = \varphi$.

(ii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий и $\psi \in \Gamma(X; f_! \mathcal{CF}_Y)$. Тогда $f_* D_Y \psi = D f_* \psi$.

Доказательство следует из соответствующих свойств пучков и теоремы 9.7.1. □

Пример 9.7.3. Пусть Z — локально замкнутое субаналитическое подмножество в X . Предположим, что для любой точки $x \in \bar{Z}$ существует фундаментальная система открытых окрестностей $U, U \subset X$, такая, что $U \cap Z$ гомеоморфно $\mathbb{R}^d$. Тогда легко доказать, что $D_X k_Z \simeq k_{\bar{Z}}[d]$. Следовательно,

$$(9.7.12) \quad D_X 1_Z = (-1)^d 1_{\bar{Z}}.$$

Пусть $\bar{Z}$ компактно и $\int_X 1_{\bar{Z}} = 1$. Положим $\partial Z = \bar{Z} \setminus Z$. Так как $\int_X 1_{\partial Z} = \int_X 1_{\bar{Z}} - \int_X 1_Z$ и $\int_X 1_Z = \int_X D_X 1_Z$, то

$$(9.7.13) \quad \chi(\partial Z; k_{\partial Z}) = \int_X 1_{\partial Z} = 1 - (-1)^d.$$

Это является обобщением формулы Эйлера.

Мы построим теперь операции на пространстве конструктивных функций, аналогичные пучковым операциям.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Определим

$$(9.7.14) \quad f^!: f^{-1} \mathcal{CF}_X \rightarrow \mathcal{CF}_Y$$

формулой

$$f^! = D_Y \circ f^* \circ D_X.$$

Если $\varphi = \chi(F), F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, то $f^! \chi F = \chi(f^! F)$. Аналогично определим

$$(9.7.15) \quad \text{hom}: \mathcal{CF}_X \times \mathcal{CF}_X \rightarrow \mathcal{CF}_X,$$

полагая

$$\text{hom}(\psi, \varphi) = D_X(\psi \cdot (D_X \varphi)).$$

Из предложения 3.4.6 следует, что если F и G принадлежат $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$, то

$$\text{hom}(\chi(G), \chi(F)) = \chi(R\text{Hom}(G, F)).$$

Для определения микролокализации конструктивных функций нам надо будет рассмотреть однородные конструктивные функции на векторном расслоении.

Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — векторное расслоение. Обозначим через $\mathcal{CF}_{E/\mathbb{R}^+}$ подпучок пучка $\mathcal{CF}_E$, состоящий из функций, постоянных на орбитах группы $\mathbb{R}^+$. Положим

$$(9.7.16) \quad \mathcal{CF}_{\mathbb{R}^+}(E) = \Gamma(E; \mathcal{CF}_{E/\mathbb{R}^+}).$$

Пусть $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}^b(E)$ обозначает полную триангулированную подкатегорию конических объектов в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(E)$, и пусть $K_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}(E)$ — ее группа Гротендика.

Лемма 9.7.4. *Локальная характеристика Эйлера–Пуанкаре индуцирует изоморфизм*

$$\chi: K_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}(E) \xrightarrow{\sim} CF_{\mathbb{R}^+}(E).$$

Доказательство. Пусть $i: Z \hookrightarrow E$ — нулевое вложение, а $j: \dot{E} \hookrightarrow E$ и $\gamma: \dot{E} \rightarrow \dot{E}/\mathbb{R}^+$ — естественные отображения. Положим $S_E = \dot{E}/\mathbb{R}^+$. Существует коммутативная диаграмма

$$(9.7.17) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_{\mathbb{R}-c}(Z) & \xrightarrow{\alpha} & K_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}(E) & \xrightarrow{\beta} & K_{\mathbb{R}-c}(S_E) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & CF(Z) & \xrightarrow{\alpha'} & CF_{\mathbb{R}^+}(E) & \xrightarrow{\beta'} & CF(S_E) \longrightarrow 0 \end{array}$$

где α обозначает функтор $Ri_*: D_{\mathbb{R}-c}^b(Z) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}^b(E)$, β — функтор $R\gamma_* \circ j^{-1}: D_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}^b(E) \rightarrow D_{\mathbb{R}-c}^b(S_E)$, α' — это морфизм «расширения нулем», а β' — естественный морфизм. Первая и третья вертикальные стрелки являются изоморфизмами по теореме 9.7.1, а нижняя строка, очевидно, является точной последовательностью. Достаточно показать, что верхняя строка — точная последовательность. Пусть $\beta'': K_{\mathbb{R}-c}(S_E) \rightarrow K_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}(E)$ — отображение, производное от $F \mapsto Rj_*\gamma^{-1}F$ (см. предложение 8.3.8 (i)), и $\alpha'': K_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}(E) \rightarrow K_{\mathbb{R}-c}(Z)$ — отображение, производное от $F \mapsto i^{-1}F$. Тогда если $F \in \text{Ob}(D_{\mathbb{R}-c, \mathbb{R}^+}^b(E))$, то мы имеем выделенный треугольник $Rj_*\gamma^{-1}R\gamma_*F \rightarrow F \xrightarrow{+1} i_*i^{-1}F$. Следовательно, $1 = \beta'' \circ \beta + \alpha \circ \alpha''$, $\alpha'' \circ \beta'' = 0$, что и доказывает точность верхней последовательности. $\square$

Определим морфизмы

$$(9.7.18) \quad \eta \quad \text{и} \quad \tau_*: \tau_*CF_{E/\mathbb{R}^+} \rightarrow CF_Z,$$

полагая

$$(9.7.19) \quad \eta\varphi = i^!\varphi \quad \text{и} \quad \tau_*\varphi = i^*\varphi,$$

где i — это нулевое вложение $Z \hookrightarrow E$.

Дадим другое описание η и τ_* . Выберем метрику на векторном расслоении E . Пусть $B(\varepsilon)$ — открытое множество в E , такое, что $B(\varepsilon) \cap \tau^{-1}(z)$ для любого $z \in Z$ является открытым шаром радиуса

ε с центром в 0 (в индуцированной норме). Пусть $\varphi \in \text{CF}_{\mathbb{R}^+}(E)$. Из предложения 3.7.5 следует, что

$$(9.7.20) \quad \pi_* \varphi = \tau_*(\varphi \cdot 1_{B(\varepsilon)}) \quad \text{и} \quad \tau_* \varphi = \tau_*(\varphi \cdot 1_{\overline{B(\varepsilon)}}).$$

Определим теперь преобразование Фурье конструктивной функции. Мы будем пользоваться обозначениями § 3.7, а также через $\pi: E^* \rightarrow Z$ обозначим двойственное расслоение и через p_1 и p_2 — проекции $E \times_Z E^*$ на E и на E^* соответственно. Положим $P' = \{(x, y) \in E \times_Z E^*; \langle x, y \rangle \leq 0\}$ и обозначим через i_E нулевое вложение $E^* \simeq Z \times_Z E^* \hookrightarrow E \times_Z E^*$.

Определение 9.7.5. Пусть $\varphi \in \text{CF}_{\mathbb{R}^+}(E)$. Положим

$$\begin{aligned} \varphi^\wedge &= p_{2!}((p_1^* \varphi) \cdot 1_{P'}), \\ \varphi^\vee &= (-1)^n \varphi^{\wedge a}, \end{aligned}$$

где n — размерность слоя расслоения E , а $\varphi^{\wedge a} = a^* \varphi^\wedge$ — образ функции $\varphi^\wedge$ при антиподальном отображении.

Назовем $\varphi^\wedge$ (соответственно $\varphi^\vee$) преобразованием Фурье (соответственно обратным преобразованием Фурье) функции φ .

Отметим, что

$$(9.7.21) \quad \varphi^\wedge = i_E^*((p_1^* \varphi) \cdot 1_{P'}).$$

Из определения $^\wedge$ следует, что если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}^-, c}^b(E))$ и F конечен, то

$$(9.7.22) \quad \chi(F)^\wedge = \chi(F^\wedge).$$

Таким образом, из леммы 9.7.4 и теоремы 3.7.9 следует

Предложение 9.7.6. Пусть $\varphi \in \text{CF}_{\mathbb{R}^+}(E)$. Тогда $\varphi^\wedge$ и $\varphi^\vee$ принадлежат $\text{CF}_{\mathbb{R}^+}(E^*)$ и $\varphi^{\wedge \vee} = \varphi^{\vee \wedge} = \varphi$.

Несложным упражнением для читателя является переформулировка предложений 3.7.13, 3.7.14 и 3.7.15 в аналогичные утверждения о конструктивных функциях.

Отметим, что преобразование Фурье коммутирует с оператором замены базы. В частности, можно вычислять $\varphi^\wedge$ послойно, т. е. если $\varphi \in \text{CF}_{\mathbb{R}^+}(E)$ и $z \in Z$, то

$$(9.7.23) \quad (\varphi^\wedge)|_{\pi^{-1}(z)} = (\varphi|_{\tau^{-1}(z)})^\wedge.$$

Примеры 9.7.7. (i) Пусть E — линейное пространство, а $y \in E^*$. Тогда по определению

$$\varphi^\wedge(y) = \int_E (\varphi(x) \cdot 1_{|x| < \varepsilon} \cdot 1_{\langle x, y \rangle \leq 0}).$$

(ii) Пусть U — открытый выпуклый конус в E , а γ — замкнутый выпуклый собственный конус в E , содержащий Z . Тогда

$$(1_U)^\wedge = (-1)^n 1_{U^\circ},$$

$$(1_\gamma)^\wedge = 1_{\text{Int } \gamma^\circ}.$$

Эти утверждения следуют из леммы 3.7.10 (но могут быть проверены непосредственно).

Наконец, дадим определение специализации и микролокализации конструктивных функций.

Пусть M — замкнутое подмногообразие в X и i — вложение $M \hookrightarrow X$. Мы будем использовать морфизмы p, j, s из гл. 4 и диаграмму (4.1.5).

Определение 9.7.8. (i) Пусть $\varphi \in \text{CF}(X)$. Положим

$$\nu_M(\varphi) = -s^*((p^*\varphi) \cdot 1_\Omega),$$

$$\mu_M(\varphi) = \nu_M(\varphi)^\wedge.$$

(ii) Пусть φ и ψ принадлежат $\text{CF}(X)$. Положим

$$\mu\text{hom}(\psi, \varphi) = \mu_\Delta(\varphi \boxtimes D_X \psi).$$

Следовательно, мы определили морфизмы

$$\nu_M: i^{-1}\mathcal{CF}_X \rightarrow \tau_*\mathcal{CF}_{T_M X/\mathbb{R}^+},$$

$$\mu_M: i^{-1}\mathcal{CF}_X \rightarrow \pi_*\mathcal{CF}_{T_M^* X/\mathbb{R}^+},$$

$$\mu\text{hom}: \mathcal{CF}_X \times \mathcal{CF}_X \rightarrow \pi_*\mathcal{CF}_{T^* X/\mathbb{R}^+}.$$

Очевидно, что эти морфизмы «коммутируют» с χ . Например,

$$(9.7.24) \quad \chi(\mu\text{hom}(G, F)) = \mu\text{hom}(\chi(G), \chi(F))$$

для F и G из $\mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(X)$.

Пример 9.7.9. (i) Пусть (x', x'') — локальная система координат на X , такая, что $M = \{x' = 0\}$. Пусть t — координата на $\mathbb{R}$, а j — вложение $X \times \mathbb{R}^+ \hookrightarrow X \times \mathbb{R}$. Тогда

$$(\nu_M(\varphi))(x', x'') = -D_X((D_{X \times \mathbb{R}}(\varphi(tx', x'')) \cdot 1_{\{t > 0\}})|_{t=0}).$$

(ii) Пусть (x, y) — координаты на $\mathbb{R}^2$, $M = \{0\}$, $A = \{y = 0, x \geq 0\} \cup \{y = x^2, x \geq 0\}$. Тогда $C_M(A) = \{y = 0, x \geq 0\}$, но $\nu_M(1_A) = 2 \cdot 1_{C_M(A)} - 1_{\{0\}}$.

Отсюда вытекает, что в общем случае $\nu_M(1_A) \neq 1_{C_M(A)}$ (однако носитель функции $\nu_M(1_A)$ всегда содержится в $C_M(A)$).

(iii) Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — векторное расслоение и $\varphi \in CF_{\mathbb{R}^+}(E)$. Тогда $\nu_Z(\varphi) = \varphi$.

Рассмотрим теперь группу лагранжевых циклов на T^*X .

Пусть $\mathcal{L}_X$ обозначает пучок лагранжевых циклов на T^*X над кольцом $\mathbb{Z}$. Из предложения 9.4.5 следует, что характеристический цикл $CC(\cdot)$ определяет гомоморфизм (также обозначаемый CC):

$$(9.7.25) \quad CC: K_{\mathbb{R}-c}(X) \rightarrow H^0(T^*X; \mathcal{L}_X).$$

Теорема 9.7.10. Гомоморфизм CC в (9.7.25) является изоморфизмом.

Доказательство. (а) Пусть λ — лагранжев цикл. Построим объект $F \in \text{Ob}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, такой, что $CC(F) = \lambda$. Пусть $\Lambda = \text{supp}(\lambda)$. Это коническое субаналитическое изотропное подмножество в T^*X . Мы будем проводить рассуждения индукцией по $\dim \pi(\Lambda)$. Существует субаналитическое подмногообразие $Y \subset X$, такое, что Y открыто в $\pi(\Lambda)$, $\dim(\pi(\Lambda) \setminus Y) < \dim \pi(\Lambda)$ и $\Lambda \cap \pi^{-1}(Y) \subset T_Y^*X$. Следовательно, $\Gamma_{T_Y^*X}(\mathcal{L}_X)$ — локально постоянный пучок ранга 1 на $\pi^{-1}(Y)$. Поэтому существует $F \in \text{Ob}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, такой, что $\text{supp}(F) \subset \overline{Y}$, $H^j(F)|_Y$ локально постоянны и $CC(F) = \lambda$ на $\pi^{-1}(Y)$. Положив $\mu = \lambda - CC(F)$, имеем $\dim \pi(\text{supp}(\mu)) < \dim \pi(\Lambda)$. Продолжаем индуктивное рассуждение, заменив λ на μ .

(б) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathcal{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$ и $CC(F) = 0$. Докажем, что $F = 0$ в $K_{\mathbb{R}-c}(X)$. Из теоремы 9.7.1 следует, что достаточно доказать, что $\chi(F)(x) = 0$ для всех x . Но это следует из замечания 9.5.5. $\square$

Определим «морфизм Эйлера»

$$(9.7.26) \quad Eu: \pi_* \mathcal{L}_X \rightarrow CF_X$$

следующим образом. Пусть $x \in X$, а ϕ такова, что $\phi(x) = 0$, $d\phi(x) = 0$ и гессиан ϕ в точке x положительно определен. Пусть λ — сечение пучка $\pi_* \mathcal{L}_X$. Положим

$$Eu(\lambda)(x) = \#([\sigma_\phi] \cap \lambda)_x.$$

По теореме 9.7.10 и замечанию 9.5.5 морфизм E и корректно определен и имеет место

Теорема 9.7.11. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & K_{\mathbb{R}-c}(X) & \\ \swarrow \text{cc} & & \searrow \chi \\ H^0(T^*X; \mathcal{L}_X) & \xrightarrow{Eu} & H^0(X; \mathcal{CF}_X) \end{array}$$

коммулативна и ее стрелки являются изоморфизмами.

Упражнения к гл. 9

Упражнение 9.1. Пусть F является $\mathbb{R}$ -конструктивным пучком на многообразии X . Докажите, что $\mathcal{H}om(F, \mathcal{CS}^X)$ изоморфен $R\mathcal{H}om(F, \omega_X)$ в категории $\mathbf{D}^b(X)$. (Указание. Используйте упр. 9.2.)

Упражнение 9.2. Пусть S — замкнутое субаналитическое подмножество многообразия X . Непрерывная вещественнозначная функция φ на S называется субаналитической, если ее график субаналитичен в $X \times \mathbb{R}$.

- (i) Докажите, что пучок $\mathcal{S}_S$ субаналитических функций на S является мягким пучком колец и что морфизм $\mathcal{S}_X \rightarrow \mathcal{S}_S$ сюръективен.
- (ii) Окольцованное пространство $(X, \mathcal{S})$ называется субаналитическим, если оно локально изоморфно (как окольцованное пространство) субаналитическому подмножеству вещественно-аналитического многообразия с пучком субаналитических функций на нем. Дайте определение субаналитического подмножества в X , $\mathbb{R}$ -конструктивного пучка на X и комплекса пучков субаналитических циклов $\mathcal{CS}^X$. Докажите, что $\mathcal{CS}^X$ изоморфен ω_X в категории $\mathbf{D}^b(X)$. Докажите утверждение, аналогичное утверждению упр. 9.1 (Указание. Используйте результат Хиронаки, сформулированный в упр. 9.3.)

Упражнение 9.3. Пусть X есть n -мерное многообразие, а основное кольцо A — это $\mathbb{C}$. Докажите, что существует морфизм комплексов

$$(9.9.1) \quad \mathcal{CS}^X \xrightarrow{\psi} \mathcal{D}b_X^* \otimes \sigma_{\mathcal{L}_X}[n],$$

который является квазиизоморфизмом. Здесь Db_X — комплекс де Рама с коэффициентами в распределениях. (Указание. Используйте следующий результат, принадлежащий Хиронаке, — авторы благодарны ему за возможность включить этот результат в книгу:

Пусть S — локально замкнутое вещественно-аналитическое подмногообразие в X размерности p . Пусть S субаналитично в X . Тогда существуют p -мерное вещественно-аналитическое многообразие Y , морфизм вещественно-аналитических многообразий $f: Y \rightarrow X$ и открытое вложение $i: S \hookrightarrow Y$, такие, что $i(S)$ субаналитично в Y , f собствен на $\overline{i(S)}$ и $f \circ i$ совпадает с вложением $S \hookrightarrow X$ (можно считать, что $i(S)$ локально определено неравенствами $(y_1 > 0, \dots, y_k > 0)$ в Y , где $(y_1, \dots, y_p)$ — локальная система координат в Y).

Теперь определим ψ в (9.V.1) следующим образом. Для p -мерного ориентированного субаналитического подмногообразия S и сечения $\theta \in \Gamma_c(X; C_X^{\infty, (p)})$ положим $\int \psi([S])\theta = \int_S \theta$.

Упражнение 9.4. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ — вещественно-аналитическая функция. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ определим отображение $\rho_\lambda: Y \times_X T^*X \rightarrow T^*Y$ так: $p \mapsto {}^t f'(p) + \lambda d\varphi(\pi(p))$. Если S замкнуто в T^*Y , то определим

$$\alpha_\lambda: H_S^0(T^*Y; \pi_Y^{-1}\omega_Y) \rightarrow H_{\rho_\lambda^{-1}(S)}^0(Y \times_X T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X),$$

используя морфизм $\rho_\lambda^{-1}\pi_Y^{-1}\omega_Y \simeq \pi_X^{-1}\omega_X$. Если T замкнуто в $Y \times_X T^*X$ и f_π собствен на T , то определим

$$\beta: H_T^0(Y \times_X T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X) \rightarrow H_{f_\pi(T)}^0(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X),$$

используя морфизмы $Rf_{\pi!}\pi_X^{-1}\omega_X \simeq \pi_X^{-1}Rf_*\omega_Y \rightarrow \pi_X^{-1}\omega_X$.

Пусть теперь $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(Y))$, а f собствен на $\text{supp}(G) \cap \overline{Y}_t$ для всех t , где $Y_t = \{\varphi < t\}$. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, и для некоторого фиксированного $\lambda > 0$ положим

$$T_\pm = \bigcup_{0 \leq \mu \leq \lambda} \rho_\mu^{-1}(\text{SS}(G) \cap \pi^{-1}(\overline{Y}_{t_0})).$$

(i) Предположим, что для $y \in Y \setminus Y_t$

$$d\varphi(y) \notin \text{SS}(G) + {}^t f'_X(Y \times_X T^*X).$$

Докажите, что $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X))$, $\rho_\lambda^{-1}(\text{SS}(G))$ содержится в T_+ и $\text{CC}(Rf_*G) = \beta \circ \alpha_\lambda(\text{CC}(G))$ содержится в $H_{f_\pi(T_+)}^0(T^*X; \pi_X^{-1}\omega_X)$.

(ii) Докажите аналогичное утверждение с заменой $d\varphi(y)$ на $-d\varphi(y)$, Rf_*G на $Rf_!G$, α_λ на $\alpha_{-\lambda}$ и T_+ на T_- .

Упражнение 9.5. Пусть $\tau: E \rightarrow Z$ — векторное расслоение, а θ — эйлерово векторное поле на E , и пусть $P_{\pm} = \{\pm\theta \geq 0\} \subset T^*E$. Пусть Λ — замкнутое коническое подмножество в $P_+ \cap P_-$. Обозначим через i вложение $T^*Z \hookrightarrow P_{\pm} \subset T^*E$.

(i) Постройте морфизм

$$\varphi_{\pm}: R\Gamma_{\Lambda}(\pi_E^{-1}\omega_E) \rightarrow i_*\pi_Z^{-1}\omega_Z.$$

(Указание. Рассмотрите морфизмы

$$R\Gamma_{\Lambda}(\pi_E^{-1}\omega_E) \simeq R\Gamma_{\Lambda}R\Gamma_{P_{\pm}}(\pi_E^{-1}\omega_E) \rightarrow R\Gamma_{\Lambda}(A_{P_{\mp}} \otimes R\Gamma_{P_{\pm}}(\pi_E^{-1}\omega_E))$$

и используйте существование изоморфизма $A_{P_{\mp}} \otimes R\Gamma_{P_{\pm}}(\pi_E^{-1}\omega_E) \simeq i_*\pi_Z^{-1}\omega_Z$.)

(ii) Постройте морфизм

$$\psi_{\pm}: H_{\Lambda}^0(T^*E; \pi_E^{-1}\omega_E) \rightarrow H_{i^{-1}(\Lambda)}^0(T^*Z; \pi_Z^{-1}\omega_Z).$$

(iii) Пусть F — конический объект в $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(E)$. Докажите, что

$$\mathrm{CC}(R\tau_*) = \psi_-(\mathrm{CC}(F)),$$

$$\mathrm{CC}(R\tau!) = \psi_+(\mathrm{CC}(F)).$$

(Указание. Используйте упр. 9.4.)

Упражнение 9.6. Пусть X — компактное многообразие нечетной размерности. Докажите, что $\chi(X; k_X) = 0$.

Упражнение 9.7. Пусть F — конический $\mathbb{R}$ -конструктивный объект в $\mathbf{D}^b(E)$, где E — векторное расслоение. Используя упр. 7.2, отождествляя T^*E и T^*E^* , как в предложении 5.5.1, и отождествляя $\pi_E^{-1}\omega_E$ и $\pi_{E^*}^{-1}\omega_{E^*}$, докажите, что $\mathrm{CC}(F) = \mathrm{CC}(F^{\wedge})$.

Упражнение 9.8 (теорема Хопфа об индексе). Пусть X — компактное многообразие, а v — вещественно-аналитическое векторное поле на X с конечным множеством нулей $x_1, \dots, x_N$. Пусть поле невырожденно в каждой точке x_k ($k = 1, \dots, N$), т. е. $v = \sum_{ij} a_{ij}^k x_i \frac{\partial}{\partial x_j} + O(|x|^2)$ в локальной системе координат с центром x_k , причем матрица $A_k = (a_{ij}^k)$ невырожденна. Положим $\varepsilon_k = \mathrm{sgn} \det(A_k)$. Докажите, что

$$\chi(X; \mathbb{Q}_X) = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k.$$

(Указание. Рассмотрите сечение s касательного расслоения $TX \rightarrow X$, заданное полем v , и вычислите индекс пересечения сечения s и нулевого сечения.)

Упражнение 9.9. Докажите предложение 9.6.2 без предположения о компактности $\text{supp}(F)$.

Упражнение 9.10. Пусть E — конечномерное линейное пространство, а $\mathcal{A} = \Gamma_c(E; \mathcal{CF}_E)$ — группа конструктивных функций на E с компактными носителями.

- (i) Постройте операцию свертки на $\mathcal{A}$, заданную формулой $\varphi * \psi = s_*(\varphi \boxtimes \psi)$, где s — отображение $E \times E \rightarrow E$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- (ii) Докажите, что $(\mathcal{A}, *)$ — коммутативная алгебра с единицей $1_{\{0\}}$.
- (iii) Пусть Z — выпуклое компактное субаналитическое подмножество в E . Докажите, что

$$1_Z * D(1_{-Z}) = 1_{\{0\}}.$$

- (iv) Докажите, что $D(\varphi * \psi) = D\varphi * D\psi$ и $\int_E(\varphi * \psi) = (\int_E \varphi)(\int_E \psi)$.

Упражнение 9.11. Пусть k — поле, V — вещественное линейное пространство, V^* — двойственное пространство, q — проекция $T^*V \simeq V \times V^* \rightarrow V^*$. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(k_V))$ имеет компактный носитель.

Предположим, что

- (i) $F \simeq k_{\{x_0\}}^m$ в $\mathbf{D}^b(V; p)$, где $p = (x_0; \xi_0) \in T^*V$;

- (ii) $q^{-1}(\xi_0) \cap \text{SS}(F) = \{p\}$.

Докажите, что $q(\text{SS}(F)) = V^*$.

(Указание. Докажите, что $\text{supp}(q_* \text{CC}(F)) = V^*$.)

Упражнение 9.12. Пусть X — комплексное многообразие.

- (i) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X))$. Докажите, что $\chi(F_x) = \chi(R\Gamma_{\{x\}}(X; F))$ для любого $x \in X$ (см. [Sullivan 1]).

- (ii) Пусть ϕ есть $\mathbb{C}$ -конструктивная функция на X (т. е. существует комплексная стратификация $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, такая, что $\phi|_{X_{\alpha}}$ постоянна). Докажите, что $D_X(\phi) = \phi$.

(Указание. Используя функтор специализации, сведите задачу к случаю, когда X — линейное пространство, а F локально постоянен на орбитах $\mathbb{C}^{\times}$. Затем используйте тот факт, что характеристика Эйлера–Пуанкаре для S^1 равна нулю.)

Замечания

Понятие цикла является одним из основных в алгебраической геометрии, и мы отсылаем читателя к книге [Fulton 1] для подробного ознакомления с теорией циклов. В вещественно-аналитическом случае конструкции § 9.2 являются когомологическими вариантами результатов, хорошо известных специалистам в области

теории гомологий (особенно после появления работ [Borel-Moore 1], [Borel-Haefliger 1], [Herrera 1], [Bloom-Herrera 1], [Poly 1] и [Verdier 4]).

Формула Римана-Роха для конструктивных пучков на комплексных многообразиях была предложена в качестве гипотезы Гротендиком. Она была доказана Макферсоном [MacPherson 1], который ввел так называемое локальное препятствие Эйлера (см. [Schwartz 1]) и доказал, что изоморфизм между группой циклов и группой конструктивных функций коммутирует с функтором прямого образа. Затем в работах Сабба и Гинзбурга (см. [Sabbah 1], [Гинзбург 1] и [Ginsburg 2]) были построены функториальные операции на лагранжевых циклах и получены результаты (в комплексном случае), аналогичные результатам § 9.3. Наши методы, однако, существенно отличаются от методов этих двух авторов.

Теорема о характеристике Эйлера-Пуанкаре первоначально была доказана Касиварой для голономных $\mathcal{D}$ -модулей. Касивара ввел инвариант, оказавшийся эквивалентным инварианту Макферсона (см. [Brylinski-Dubson-Kashiwara 1]). Затем Дабсон [Dubson 1] в комплексном случае и Касивара [Kashiwara 7] в вещественном случае показали, что эта формула может быть интерпретирована как формула пересечения. Конструкция характеристического класса из § 9.4 сравнительно недавняя (предыдущее построение принадлежит Касиваре и использует формулу (9.4.10)).

Мы не будем давать обзора результатов, связанных с формулой Лефшеца. Напомним только, что Вердье первым указал, что формализм двойственности Гротендика может быть применен для вывода общих формул следа для соответствий между конструктивными пучками в этальном случае (см. [SGA 5, exposé III]). Результаты § 9.6, в сущности, новые, они были анонсированы Касиварой [Kashiwara 8] в 1988 г. Необходимо упомянуть, что формула Лефшеца для многообразий с краем была впервые доказана в работе [Brenner-Shubin 1], где были введены понятия расширяющихся и сжимающихся пространств.

Отметим, наконец, что в недавней работе [Schapira-Schneiders 1] (см. также [Schapira 4]) была предложена конструкция характеристических классов для более широкого класса пучков, включающего $\mathcal{D}$ -модули.

Превратные пучки

Хотя превратные пучки — сравнительно новый объект исследований, они играют важную роль в таких областях математики, как алгебраическая геометрия и теория представлений групп. Систематическое изложение этой теории в аналитическом случае в литературе найти трудно, хотя в этих вопросах достигнуто достаточно глубокое понимание.

В этой главе мы определим превратные пучки на вещественно-аналитическом многообразии X и покажем, что они образуют абелеву подкатегорию категории $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Затем мы рассмотрим комплексный случай. Мы докажем, что превратность является микролокальным свойством, т. е. что объект из $D_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ превратен в том и только в том случае, когда он является чистым объектом со сдвигом $-\dim_{\mathbb{C}} X$ в общих точках своего микроносителя. Так как теория Морса применима к микролокальным задачам, то мы можем доказать теорему об обращении в нуль для превратных пучков на многообразии Штейна. Затем мы докажем сохранение превратности при действии функторов специализации, микролокализации и действии преобразования Фурье–Сато. Для этого нам понадобятся дополнительные сведения из гомологической алгебры. В § 10.1 мы введем понятие t -структуры, что позволит нам строить абелевы подкатегории в триангулированных категориях.

Читатель может ознакомиться со следующими работами по теории превратных пучков: [Beilinson–Bernstein–Deligne 1], [Goresky–MacPherson 2,3] (см. также [Borel et al. 1] и [Гельфанд–Манин 1]).

Мы придерживаемся соглашений 8.0.

10.1. t -структуры

Пусть D — триангулированная категория (см. § 1.5).

Определение 10.1.1. Пусть $D^{\leq 0}$ и $D^{\geq 0}$ — полные подкатегории в D . Мы назовем пару $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ t -структурой на D , если выполнены следующие условия (здесь $D^{\leq n} = D^{\leq 0}[-n]$, $D^{\geq n} = D^{\geq 0}[-n]$);

- (i) $D^{\leq -1} \subset D^{\leq 0}$ и $D^{\geq 1} \subset D^{\geq 0}$;
- (ii) $\text{Hom}_D(X, Y) = 0$ при $X \in \text{Ob}(D^{\leq 0})$ и $Y \in \text{Ob}(D^{\geq 1})$;

- (iii) для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ существует выделенный треугольник $X_0 \rightarrow X \rightarrow X_1 \xrightarrow{+1}$ в $\mathbf{D}$, такой, что $X_0 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq 0})$ и $X_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 1})$.

Полная подкатегория $\mathcal{C} = \mathbf{D}^{\leq 0} \cap \mathbf{D}^{\geq 0}$ называется *сердцевинной* t -структуры.

Замечание 10.1.2. (i) Понятие t -структуры самосопряжено, т. е. если $(\mathbf{D}^{\leq 0}, \mathbf{D}^{\geq 0})$ есть t -структура на $\mathbf{D}$, то $((\mathbf{D}^{\geq 0})^{\circ}, (\mathbf{D}^{\leq 0})^{\circ})$ является t -структурой на противоположной триангулированной категории $\mathbf{D}^{\circ}$.

(ii) Если $(\mathbf{D}^{\leq 0}, \mathbf{D}^{\geq 0})$ есть t -структура на $\mathbf{D}$, то $(\mathbf{D}^{\leq n}, \mathbf{D}^{\geq n})$ также является t -структурой на $\mathbf{D}$.

Дадим несколько примеров.

Примеры 10.1.3. (i) Пусть $\mathcal{C}$ — абелева категория, а $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathcal{C})$ — ее производная категория. Обозначим через $\mathbf{D}^{\leq 0}(\mathcal{C})$ (соответственно $\mathbf{D}^{\geq 0}(\mathcal{C})$) полную подкатегорию в $\mathbf{D}$, состоящую из таких объектов $X \in \mathbf{D}(\mathcal{C})$, что $H^j(X) = 0$ при $j > 0$ (соответственно $j < 0$). Тогда $(\mathbf{D}^{\leq 0}(\mathcal{C}), \mathbf{D}^{\geq 0}(\mathcal{C}))$ является t -структурой на $\mathbf{D}(\mathcal{C})$. Действительно, выделенный треугольник $\tau^{\leq 0} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq 1} X \xrightarrow{+1}$ удовлетворяет аксиоме (iii) определения 10.1.1. Сердцевинной t -структуры $(\mathbf{D}^{\leq}(\mathcal{C}), \mathbf{D}^{\geq}(\mathcal{C}))$ является $\mathcal{C}$.

(ii) Пусть A — нётерово коммутативное кольцо и $\text{gld}(A) < \infty$. Пусть X — вещественно-аналитическое многообразие. Тогда $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) = \mathbf{D}^{\leq 0}(A_X) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ и $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X) = \mathbf{D}^{\geq 0}(A_X) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ образуют t -структуру на $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Пусть D_X — функтор двойственности (определение 3.1.6). Тогда образы подкатегорий $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ и $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ при действии D_X образуют t -структуру на $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$. Такая t -структура будет рассматриваться в следующем параграфе.

До конца этого параграфа пара $(\mathbf{D}^{\leq 0}, \mathbf{D}^{\geq 0})$ будет обозначать t -структуру на триангулированной категории $\mathbf{D}$.

Предложение 10.1.4. (i) Включение $\mathbf{D}^{\leq n} \rightarrow \mathbf{D}$ (соответственно $\mathbf{D}^{\geq n} \rightarrow \mathbf{D}$) имеет правый сопряженный функтор $\tau^{\leq n} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}^{\leq n}$ (соответственно левый сопряженный функтор $\tau^{\geq n} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}^{\geq n}$), т. е. существует морфизм $\tau^{\leq n} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{D}}$ (соответственно $\text{id}_{\mathbf{D}} \rightarrow \tau^{\geq n}$), такой, что отображение

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}^{\leq n}}(X, \tau^{\leq n} Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Y)$$

является изоморфизмом для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq n})$ и любого $Y \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ (соответственно $\text{Hom}_{\mathbf{D}^{\geq n}}(\tau^{\geq n} X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Y)$).

является изоморфизмом для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ и любого $Y \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq n})$.

(ii) Существует единственный морфизм $d: \tau^{\geq n+1}(X) \rightarrow \tau^{\leq n}(X)[1]$, такой, что цепочка $\tau^{\leq n}(X) \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n+1}(X) \xrightarrow{d} \tau^{\leq n}(X)[1]$ является выделенным треугольником. Кроме того, d является морфизмом функторов $\tau^{\geq n+1} \rightarrow [1] \circ \tau^{\leq n}$.

Функторы $\tau^{\leq n}$ и $\tau^{\geq n}$ называются функторами усечения по отношению к t -структуре.

Доказательство. Мы можем считать, что $n = 0$. По определению 10.1.1(iii) для $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ существует выделенный треугольник $X_0 \rightarrow X \rightarrow X_1 \xrightarrow{+1}$, где $X_0 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq 0})$ и $X_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 1})$.

Покажем, что морфизм $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(Y, X_0) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(Y, X)$ является изоморфизмом для любого $Y \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq 0})$ (соответственно морфизм $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(X_1, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Z)$ является изоморфизмом для любого $Z \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 1})$). Это утверждение следует из рассмотрения длинной точной последовательности

$$\text{Hom}(Y, X_1[-1]) \rightarrow \text{Hom}(Y, X_0) \rightarrow \text{Hom}(Y, X) \rightarrow \text{Hom}(Y, X_1)$$

(соответственно

$$\text{Hom}(X_0[1], Z) \rightarrow \text{Hom}(X_1, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(X_0, Z)),$$

а это дает (i) при $X_0 \simeq \tau^{\leq 0} X$ и $X_1 \simeq \tau^{\geq 1} X$ (см. упр. 1.2).

Первое утверждение из (ii) вытекает из определения 10.1.1(iii) и следующей леммы.

Лемма 10.1.5 Пусть $\mathbf{D}$ — триангулированная категория, а $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h_i} X[1]$ ($i = 1, 2$) — два выделенных треугольника. Если $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(X[1], Z) = 0$, то $h_1 = h_2$.

Доказательство. По (TR4) (см. предложение 1.4.4) существует морфизм треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h_1} & X[1] \\ \text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \phi \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{h_2} & X[1]. \end{array}$$

Следовательно, $g = \phi \circ g$ и $h_1 = h_2 \circ \phi$. Так как $(\text{id}_Z - \phi) \circ g = 0$, то по предложению 1.5.3 существует морфизм $\psi: X[1] \rightarrow Z$, такой, что $\text{id}_Z - \phi = \psi \circ h_1$. Но по условию леммы $\psi = 0$, т. е. $\phi = \text{id}_Z$, $h_1 = h_2$. $\square$

Докажем, наконец, что d является морфизмом функторов. Если $f: X \rightarrow Y$ — морфизм, то по (TR4) существует морфизм выделенных треугольников

$$\begin{array}{ccccccc} \tau^{\leq n} X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau^{\geq n+1} X & \xrightarrow{d(X)} & \tau^{\leq n} X[1] \\ \downarrow \tau^{\leq n} f & & \downarrow f & & \downarrow \phi & & \downarrow \tau^{\leq n} f[1] \\ \tau^{\leq n} Y & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & \tau^{\geq n+1} Y & \xrightarrow{d(Y)} & \tau^{\leq n} Y[1]. \end{array}$$

Из коммутативности среднего квадрата следует, что $\phi = \tau^{\geq n+1} f$. $\square$

Отметим, что

$$(10.1.1) \quad \begin{cases} \tau^{\leq n}(X[m]) \simeq \tau^{\leq n+m}(X)[m], \\ \tau^{\geq n}(X[m]) \simeq \tau^{\geq n+m}(X)[m]. \end{cases}$$

Мы будем писать $\tau^{\leq n}$ и $\tau^{\geq n}$ вместо $\tau^{\leq n-1}$ и $\tau^{\geq n+1}$ соответственно. Аналогичный смысл имеют обозначения $D^{\leq n}$ и $D^{\geq n}$.

Предложение 10.1.6. (i) Если $X \in \text{Ob}(D^{\leq n})$ (соответственно $X \in \text{Ob}(D^{\geq n})$), то морфизм $\tau^{\leq n} X \rightarrow X$ (соответственно $X \rightarrow \tau^{\geq n} X$) является изоморфизмом.

(ii) Пусть $X \in \text{Ob}(D)$. Тогда $X \in \text{Ob}(D^{\leq n})$ (соответственно $X \in \text{Ob}(D^{\geq n})$) в том и только в том случае, когда $\tau^{\geq n} X = 0$ (соответственно $\tau^{\leq n} X = 0$).

Доказательство. (i) следует из предложения 10.1.4.

(ii) следует из рассмотрения выделенного треугольника $\tau^{\leq n} X \rightarrow X \rightarrow \tau^{\geq n} X \xrightarrow{+1}$. $\square$

Предложение 10.1.7. Пусть $X' \rightarrow X \rightarrow X'' \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник в D . Если X' и X'' принадлежат $D^{\geq 0}$ (соответственно $D^{\leq 0}$), то и X принадлежит $D^{\geq 0}$ (соответственно $D^{\leq 0}$).

Доказательство. Докажем утверждение для случая $D^{\geq 0}$. Пусть X' и X'' принадлежат $D^{\leq 0}$. Тогда, согласно определению 10.1.1(i), (ii) $\text{Hom}(\tau^{< 0} X, X') = \text{Hom}(\tau^{< 0} X, X'') = 0$. Следовательно, $\text{Hom}(\tau^{< 0} X, X) = 0$, что дает $\tau^{< 0} X = 0$. Применение предложения 10.1.6(ii) завершает доказательство. $\square$

Предложение 10.1.8. Пусть a и b — целые числа.

(i) Если $b \geq a$, то $\tau^{\geq b} \circ \tau^{\geq a} \simeq \tau^{\geq a} \circ \tau^{\geq b} \simeq \tau^{\geq b}$ и $\tau^{\leq b} \circ \tau^{\leq a} \simeq \tau^{\leq a} \circ \tau^{\leq b} \simeq \tau^{\leq a}$.

(ii) Если $a > b$, то $\tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a} = \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} = 0$.

(iii) $\tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} \simeq \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a}$. Точнее, если $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$, то существует единственный морфизм $\phi: \tau^{\geq a} \circ \tau^{\leq b} X \rightarrow \tau^{\leq b} \circ \tau^{\geq a} X$, такой, что диаграмма

$$(10.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} \tau^{\leq b} X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \tau^{\geq a} X \\ \downarrow & & & & \uparrow \\ \tau^{\geq a} \tau^{\leq b} X & \xrightarrow{\phi} & & & \tau^{\leq b} \tau^{\geq a} X \end{array}$$

коммутативна и ϕ является изоморфизмом.

Доказательство. (i) Существование изоморфизма $\tau^{\geq a} \circ \tau^{\geq b} \simeq \tau^{\geq b}$ следует из предложения 10.1.6(i). Для любых $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ и $Y \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq b})$ имеем $\text{Hom}_{\mathbf{D}^{\geq b}}(\tau^{\geq b} \tau^{\geq a} X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(\tau^{\geq a} X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}^{\geq b}}(\tau^{\geq b} X, Y)$. Следовательно, $\tau^{\geq b} \tau^{\geq a} X \simeq \tau^{\geq b} X$.

Доказательство существования других изоморфизмов может быть получено с использованием соображений двойственности.

(ii) следует из предложения 10.1.6(ii).

(iii) По (ii) мы можем считать, что $b \geq a$. По (i) существуют выделенные треугольники

$$(10.1.3) \quad \begin{cases} \tau^{\leq b} \tau^{\geq a} X \longrightarrow \tau^{\geq a} X \longrightarrow \tau^{> b} X \xrightarrow{+1}, \\ \tau^{< a} X \longrightarrow \tau^{\leq b} X \longrightarrow \tau^{\geq a} \tau^{\leq b} X \xrightarrow{+1}. \end{cases}$$

Из предыдущего предложения вытекает, что $\tau^{\leq b} \tau^{\geq a} X$ и $\tau^{\geq a} \tau^{\leq b} X$ принадлежат $\mathbf{D}^{\geq a} \cap \mathbf{D}^{\leq b}$, откуда следуют существование и единственность ϕ . Покажем теперь, что ϕ — изоморфизм. Применим аксиому октаэдра TR5 к морфизмам $\tau^{< a} X \rightarrow \tau^{\leq b} X \rightarrow X$:

$$(10.1.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & \tau^{\geq a} X & & \\ & f \nearrow & & \nwarrow g & \\ \tau^{\geq a} \tau^{\leq b} X & & & & \tau^{> b} X \\ & \downarrow & \xrightarrow{+1} & \downarrow & \\ \tau^{< a} X & & & & X \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & \tau^{\leq b} X & & & \end{array}$$

Получаем выделенный треугольник

$$\tau^{\geq a} \tau^{\leq b} X \xrightarrow{f} \tau^{\geq a} X \xrightarrow{g} \tau^{> b} X \xrightarrow{+1}.$$

(Отметим, что f и g единственны.) Следовательно, $\tau^{\geq a} \tau^{\leq b} X \simeq \tau^{\leq b} \tau^{\geq a} X$. □

Пусть $\mathcal{C}$ — сердцевина категории $\mathbf{D}$.

Определение 10.1.9. Определим функтор $H^0: \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{C}$:

$$(10.1.5) \quad H^0(X) = \tau^{\geq 0} \tau^{\leq 0} X \simeq \tau^{\leq 0} \tau^{\geq 0} X.$$

Положим также

$$(10.1.6) \quad H^n(X) = H^0(X[n]) \simeq (\tau^{\geq n} \tau^{\leq n} X)[n].$$

Предложение 10.1.10. Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$, и пусть X принадлежит $\mathbf{D}^{\geq a}$ (соответственно $\mathbf{D}^{\leq a}$) для некоторого a . Тогда X принадлежит $\mathbf{D}^{\geq 0}$ (соответственно $\mathbf{D}^{\leq 0}$) в том и только в том случае, когда $H^n(X) = 0$ для всех $n < 0$ (соответственно $n > 0$).

Доказательство. Достаточно показать, что если $X \xrightarrow{\sim} \tau^{\geq a} X$ и $H^n(X) = 0$, то $X \xrightarrow{\sim} \tau^{> a} X$. Но это следует из рассмотрения выделенного треугольника

$$H^a(X)[-a] \longrightarrow \tau^{\geq a} X \longrightarrow \tau^{> a} X \xrightarrow{+1}. \quad \square$$

Предложение 10.1.11. (i) Сердцевина $\mathcal{C} = \mathbf{D}^{\leq 0} \cap \mathbf{D}^{\geq 0}$ является абелевой категорией.

(ii) Если $X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник в $\mathbf{D}$ и X' и X'' принадлежат $\mathcal{C}$, то и X принадлежит $\mathcal{C}$.

(iii) Если $0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}$, то существует единственный морфизм $h: Z \rightarrow X[1]$, такой, что $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \xrightarrow{h} X[1]$ является выделенным треугольником в $\mathbf{D}$.

Доказательство. (ii) следует из предложения 10.1.7.

(i) Из (ii) и из рассмотрения выделенного треугольника $X \longrightarrow X \oplus Y \xrightarrow{+1} Y$ следует, что $\mathcal{C}$ — аддитивная категория. Пусть $f: X \rightarrow$

Y — морфизм в $\mathcal{C}$. Включим f в выделенный треугольник $X \xrightarrow{f}$

$Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$. Тогда по предложению 10.1.7 объект Z принадлежит $D^{\leq 0} \cap D^{\geq -1}$. Докажем, что

$$(10.1.7) \quad \begin{cases} H^0(Z) \simeq \tau^{\geq 0} Z \simeq \operatorname{Coker} f \text{ и} \\ H^0(Z[-1]) \simeq \tau^{\leq 0}(Z[-1]) \simeq \operatorname{Ker} f. \end{cases}$$

Для этого рассмотрим объект $W \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ и длинные точные последовательности

$$\operatorname{Hom}(X[1], W) \rightarrow \operatorname{Hom}(Z, W) \rightarrow \operatorname{Hom}(Y, W) \rightarrow \operatorname{Hom}(X, W)$$

и

$$\operatorname{Hom}(W, Y[-1]) \rightarrow \operatorname{Hom}(W, Z[-1]) \rightarrow \operatorname{Hom}(W, X) \rightarrow \operatorname{Hom}(W, Y).$$

Так как $\operatorname{Hom}(X[1], W) = \operatorname{Hom}(W, Y[-1]) = 0$, $\operatorname{Hom}(Z, W) \simeq \operatorname{Hom}(\tau^{\geq 0} Z, W)$ и $\operatorname{Hom}(W, Z[-1]) \simeq \operatorname{Hom}(W, \tau^{\leq 0}(Z[-1]))$ (поскольку $W \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$), соотношения (10.1.7) доказаны.

Докажем теперь, что канонический морфизм $\operatorname{Coim} f \rightarrow \operatorname{Im} f$ является изоморфизмом.

Включим морфизм $Y \rightarrow \tau^{\geq 0} Z$ в выделенный треугольник $I \rightarrow Y \xrightarrow{+1} \tau^{\geq 0} Z$. Тогда по предложению 10.1.7 I принадлежит $D^{\geq 0}$.

Применим аксиому октаэдра к морфизмам $Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1} \tau^{\geq 0} Z$:

$$(10.1.8) \quad \begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ X & & & & \tau^{\leq 0} Z \\ & \nwarrow & \xrightarrow{+1} & \nearrow & \\ Y & & & & \tau^{\geq 0} Z \\ & \nearrow & \xrightarrow{+1} & \nwarrow & \\ & & Z & & \end{array}$$

Получаем выделенный треугольник $\tau^{\leq 0}(Z[-1]) \rightarrow X \rightarrow I \xrightarrow{+1}$. Следовательно, I принадлежит $D^{\leq 0}$, т. е. $I \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$. Так как $\tau^{\leq 0}(Z[-1]) \simeq \operatorname{Ker} f$, то, применяя (10.1.7) к выделенному треугольнику $\operatorname{Ker} f \rightarrow X \rightarrow I \xrightarrow{+1}$, получаем, что $I \simeq \operatorname{Coim} f$. Аналогично, применяя (10.1.7) к выделенному треугольнику $I \rightarrow Y \rightarrow \operatorname{Coker} f \xrightarrow{+1}$, получаем $I \simeq \operatorname{Im} f$, что доказывает (ii).

(iii) следует из леммы 10.1.5 и из (10.1.7). $\square$

Предложение 10.1.12. Функтор $H^0 : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{C}$ (см. определение 10.1.9) является когомологическим функтором.

Доказательство. Пусть $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$ — выделенный треугольник в $\mathbf{D}$. Покажем, что последовательность $H^0(X) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(Z)$ точна. Доказательство проведем в три шага.

(а) Предположим, что $X, Y, Z \in \text{Ob } \mathbf{D}^{\geq 0}$. Покажем точность последовательности $0 \rightarrow H^0(X) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(Z)$.

Пусть $W \in \text{Ob } (\mathcal{C})$. Тогда $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, H^0(X)) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, \tau^{\geq 0} X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, X)$. Следовательно, $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Z[-1]) = 0$ и требуемый результат вытекает из рассмотрения длинной точной последовательности

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Z[-1]) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Z).$$

(b) Предположим, что $Z \in \text{Ob } (\mathbf{D}^{\geq 0})$. Докажем точность последовательности $0 \rightarrow H^0(X) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(Z)$. Если $W \in \text{Ob } (\mathbf{D}^{< 0})$, то $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Z) = \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Z[-1]) = 0$, откуда $\text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{D}}(W, Y)$, т. е. $\tau^{< 0} X \rightarrow \tau^{< 0} Y$ — изоморфизм. Используем аксиому октаэдра:

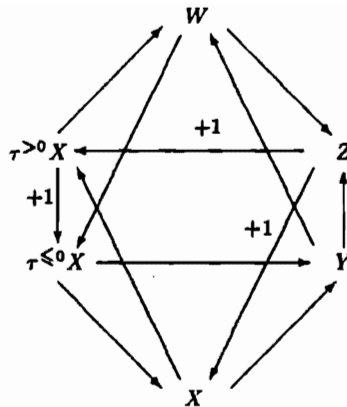
$$(10.1.9) \quad \begin{array}{ccccc} & & \tau^{\geq 0} Y & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \tau^{\geq 0} X & & & & Z \\ & \nwarrow & \xrightarrow{+1} & \nearrow & \\ & \tau^{< 0} X & & & Y \\ & \nwarrow & \xrightarrow{+1} & \nearrow & \\ & & Z & & \end{array}$$

и получаем выделенный треугольник $\tau^{\geq 0} X \rightarrow \tau^{\geq 0} Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$. Теперь достаточно применить (а).

(с) Утверждение, двойственное к (b), дает точность последовательности $H^0(X) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(Z) \rightarrow 0$, если $X \in \text{Ob } (\mathbf{D}^{\leq 0})$.

(d) Рассмотрим общий случай. Аксиома октаэдра, примененная к последовательности $\tau^{\leq 0} X \rightarrow X \rightarrow Y$,

(10.1.10)



дает выделенные треугольники $\tau^{\leq 0}X \rightarrow Y \xrightarrow{+1} W$ и $\tau^{> 0}X \rightarrow W \xrightarrow{+1} Z$. Применяя (с) к первому треугольнику, получаем, что последовательность $H^0(X) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(W)$ точна. Применяя (b) к треугольнику $W \rightarrow Z \xrightarrow{+1} \tau^{> 0}X[1]$, получаем, что последовательность $0 \rightarrow H^0(W) \rightarrow H^0(Z)$ точна, откуда вытекает точность последовательности $H^0(X) \rightarrow H^0(Y) \rightarrow H^0(Z)$. $\square$

Определение 10.1.13. Пусть D_i ($i = 1, 2$) — две триангулированные категории с определенными на них t -структурами $(D_i^{\leq 0}, D_i^{\geq 0})$. Пусть C_i — сердцевина категории D_i и $\varepsilon_i: C_i \rightarrow D_i$ — функтор включения. Пусть $F: D_1 \rightarrow D_2$ — функтор триангулированных категорий.

- (i) F называется t -точным слева (соответственно справа), если $F(D_1^{\geq 0}) \subset D_2^{\geq 0}$ (соответственно $F(D_1^{\leq 0}) \subset D_2^{\leq 0}$). Он называется t -точным, если он t -точен слева и справа.
- (ii) Положим

$${}^p F = H^0 \circ F \circ \varepsilon_1: C_1 \rightarrow C_2.$$

Предложение 10.1.14. Пусть D_1, D_2 и F такие же, как в определении 10.1.13, и пусть F является t -точным слева (соответственно справа). Тогда

- (i) Если $X \in \text{Ob}(D_1^{\geq 0})$ (соответственно $D_1^{\leq 0}$), то $H^0(F(X)) \simeq {}^p F(H^0(X))$.
- (ii) Функтор ${}^p F: C_1 \rightarrow C_2$ точен слева (соответственно справа).

Доказательство. Достаточно провести доказательство для t -точных слева функторов.

- (i) Пусть $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_1^{\geq 0})$. Применим F к выделенному треугольнику $H^0(X) \rightarrow X \rightarrow \tau^{>0}_+ X$ и получим выделенный треугольник $F(H^0(X)) \rightarrow F(X) \rightarrow F(\tau^{>0}_+ X) \xrightarrow{+1}$, где $F(\tau^{>0}_+ X) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_2^{\geq 0})$. Применение когомологического функтора $H^0(\cdot)$ к этому треугольнику завершает доказательство.
- (ii) Пусть $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ — точная последовательность в $\mathcal{C}_1$. Она порождает выделенный треугольник $X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{+1}$ в $\mathbf{D}_1$ (предложение 10.1.11). Применяя F , получаем выделенный треугольник $F(X) \rightarrow F(Y) \rightarrow F(Z) \xrightarrow{+1}$. Так как $F(X), F(Y)$ и $F(Z)$ принадлежат $\mathbf{D}_2^{\geq 0}$, то имеем точную последовательность $0 \rightarrow H^0(F(X)) \rightarrow H^0(F(Y)) \rightarrow H^0(F(Z))$. Остается применить (i). $\square$

Замечание 10.1.15. Если функтор $F: \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{D}_2$ t -точен, то он переводит $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ и функтор $F|_{\mathcal{C}_1}$ точен. Кроме того, $F|_{\mathcal{C}_1} \simeq {}^p F$ и $F(H^n(X)) \simeq H^n(F(X))$ для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_1)$.

Замечание 10.1.16. (i) Пусть $\mathbf{D}$ — триангулированная категория с t -структурой, как в примере 10.1.3(i). Тогда функторы усечения $\tau^{\leq n}$ и $\tau^{\geq n}$ совпадают с функторами, определенными в замечании 1.7.6.

(ii) Пусть $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ — аддитивный функтор абелевых категорий. Пусть F точен слева и категория $\mathcal{C}_1$ содержит достаточно много инъективных объектов. Тогда $RF: \mathbf{D}^+(\mathcal{C}_1) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathcal{C}_2)$ является t -точным слева, где t -структура на $\mathbf{D}^+(\mathcal{C}_i)$ индуцирована естественной t -структурой (см. пример 10.1.3(i)) на $\mathbf{D}(\mathcal{C}_i)$.

Предложение 10.1.17. Пусть $\tilde{\mathbf{D}}_i$ — триангулированная категория, $\mathbf{D}_i$ — ее полная триангулированная подкатегория и $(\mathbf{D}_i^{\leq 0}, \mathbf{D}_i^{\geq 0})$ есть t -структура на $\mathbf{D}_i$ ($i = 1, 2$). Пусть $f: \tilde{\mathbf{D}}_1 \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}_2$ и $g: \tilde{\mathbf{D}}_2 \rightarrow \tilde{\mathbf{D}}_1$ — функторы триангулированных категорий и f является сопряженным слева к g . Предположим, что $f(\mathbf{D}_1) \subset \mathbf{D}_2$ (соответственно $g(\mathbf{D}_2) \subset \mathbf{D}_1$) и $f|_{\mathbf{D}_1}$ t -точен справа (соответственно $g|_{\mathbf{D}_2}$ t -точен слева). Тогда для любого $Y \in \text{Ob}(\mathbf{D}_2^{\geq 0})$, такого, что $g(Y) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_1)$ (соответственно $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_1^{\leq 0})$, такого, что $f(X) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_2)$), $g(Y) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_1^{\geq 0})$ (соответственно $f(X) \in \text{Ob}(\mathbf{D}_2^{\leq 0})$).

Доказательство. Для любого $X \in \text{Ob}(\mathbf{D}_1^{\leq 0})$ (соответственно $Y \in$

$\text{Ob}(\mathbf{D}_2^{>0})$ имеем

$$\text{Hom}_{\mathbf{D}_1^{>0}}(X, \tau^{<0}g(Y)) \simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathbf{D}}_1}(X, g(Y)) \simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathbf{D}}_2}(f(X), Y) = 0$$

(соответственно имеем $\text{Hom}_{\mathbf{D}_2^{>0}}(\tau^{>0}f(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathbf{D}}_2}(f(X), Y) \simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathbf{D}}_1}(X, g(Y)) = 0$). Следовательно, $\tau^{<0}g(Y) = 0$ (соответственно $\tau^{>0}f(X) = 0$). $\square$

Следствие 10.1.18. Пусть $\mathbf{D}_i$ — триангулированная категория с t -структурой ($i = 1, 2$), и пусть $f: \mathbf{D}_1 \rightarrow \mathbf{D}_2$ и $g: \mathbf{D}_2 \rightarrow \mathbf{D}_1$ — функторы триангулированных категорий, где f является левым сопряженным к g . Тогда f является t -точным справа в том и только в том случае, когда g является t -точным слева.

10.2. Превратные пучки на вещественных многообразиях

Пусть p — отображение из $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$. Двойственное отображение p^* определяется формулой

$$(10.2.1) \quad p^*(n) = -p(n) - n.$$

Если оба отображения p и p^* являются невозрастающими, то мы назовем отображение p превратностью, т. е. p — превратность, если

$$(10.2.2) \quad p(n) - p(n+1) = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{для любого } n,$$

или, что эквивалентно,

$$(10.2.3) \quad 0 \leq p(n) - p(m) \leq m - n \quad \text{для любых } m, n, \quad n \leq m.$$

Определим отображение $p[k]$ формулой

$$(10.2.4) \quad p[k](n) = p(k+n).$$

Тогда

$$(10.2.5) \quad p^*[k]^*(n) = p[k](n) + k.$$

Пусть X — вещественно-аналитическое многообразие. Напомним, что $\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^b(X)$ обозначает полную подкатегорию в $\mathbf{D}^b(X)$, состоящую из слабо $\mathbb{R}$ -конструктивных объектов. Если S — подмножество в X , то через i_S мы обозначим вложение $S \hookrightarrow X$. Если S субаналитично, то его размерность определена корректно (см. § 8.2). Если $S = \emptyset$, то положим $\dim S = -\infty$.

Определение 10.2.1. Пусть p — превратность.

- (i) Через ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ мы обозначим полную подкатегорию в $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$, состоящую из объектов F , таких, что

$$(10.2.6) \quad \begin{cases} \dim(\operatorname{supp}(H^j(F))) < k \\ \text{для всех } j \text{ и } k, \text{ таких, что } j > p(k). \end{cases}$$

(или, что эквивалентно, $\dim(\operatorname{supp}(\tau^{>p(k)}(F))) < k$).

- (ii) Через ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ мы будем обозначать полную подкатегорию в $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$, состоящую из объектов F , таких, что

$$(10.2.7) \quad \begin{cases} H^j(i_S^!(F)) = 0 \text{ для всех локально замкнутых} \\ \text{субаналитических подмножеств } S \text{ и всех } j, \\ \text{таких, что } j < p(\dim S). \end{cases}$$

Положим

$$\begin{aligned} {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq n}(X) &= {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)[-n], \\ {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq n}(X) &= {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)[-n], \\ {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X) &= {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) \cap {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X). \end{aligned}$$

Положим также

$${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\geq n}(X) = {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq n}(X) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X).$$

Аналогично определяются ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\leq n}(X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^0(X)$.

Замечание 10.2.2. (i) Определение категорий ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ зависит только от значений $p(n)$ для $0 \leq n \leq \dim X$.

(ii) Если $p = 0$, то ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) = \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) = \{F \in \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X); H^j(F) = 0 \text{ для всех } j > 0\}$ и ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X) = \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X) = \{F \in \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X); H^j(F) = 0 \text{ для всех } j < 0\}$.

(iii) Если p' — превратность и $p(n) \leq p'(n)$ для всех n , то

$${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) \subset {}^{p'}\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) \quad \text{и} \quad {}^{p'}\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X) \subset {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X).$$

В частности, если $a \leq p(n) \leq b$ для всех n , то

$$(10.2.8) \quad \begin{cases} \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq a}(X) \subset {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) \subset \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq b}(X) \quad \text{и} \\ \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq b}(X) \subset {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X) \subset \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq a}(X). \end{cases}$$

(iv) Пусть группы когомологий объекта $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ локально постоянны. Тогда если $H^j(F) = 0$ при $j < p(\dim X)$, то $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$. Действительно, для локально замкнутого субаналитического S имеем $i_S^! F \simeq i_S^! \omega_X \otimes i_S^{-1} F \otimes \text{oz}_X[-\dim X] \simeq \omega_S \otimes i_S^{-1} F \otimes \text{oz}_X[\dim X]$, а $H^j(\omega_S) = 0$ при $j < -\dim S$ (по предложению 9.2.2). Следовательно, $H^j(i_S^! F) = 0$ при $j < p(\dim S) \leq p(\dim X) + \dim X - \dim S$.

Замечание 10.2.3. Определение может быть обобщено на случай субаналитического X (см. упр. 9.2). Большинство утверждений при таком обобщении остаются справедливыми.

Наша цель — доказать, что пара $({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X), {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ образует t -структуру. Для этого нам понадобятся вспомогательные результаты.

Предложение 10.2.4. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$ и $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ — субаналитическая стратификация равноразмерностными стратами.

- (i) Пусть когомологии объекта $i_{X_{\alpha}}^{-1} F$ локально постоянны для всех α . Тогда F принадлежит ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ в том и только в том случае, когда $H^j(i_{X_{\alpha}}^{-1} F) = 0$ для всех α и всех j , таких, что $j > p(\dim X_{\alpha})$.
- (ii) Пусть когомологии объекта $i_{X_{\alpha}}^! F$ локально постоянны для всех α . Тогда F принадлежит ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ в том и только в том случае, когда $H^j(i_{X_{\alpha}}^! F) = 0$ для всех α и всех j , таких, что $j < p(\dim X_{\alpha})$.

Доказательство. (i) следует из равенства

$$\dim(\text{supp}(H^j(F))) = \sup\{\dim X_{\alpha}; H^j(F)|_{X_{\alpha}} \neq 0\}.$$

(ii) Если $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$, то $H^j(i_{X_{\alpha}}^! F) = 0$ при $j < p(\dim X_{\alpha})$ по определению. Докажем обратное.

Пусть S — замкнутое субаналитическое множество. По условию объект $i_{X_{\alpha}}^! F$ сконцентрирован в степенях $\geq p(\dim X_{\alpha})$ и его когомологии локально постоянны. То есть, согласно замечанию 10.2.2(iv), $i_{X_{\alpha}}^! F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X_{\alpha}))$, где

$$\tilde{p}(n) = -n + p(\dim X_{\alpha}) + \dim X_{\alpha}.$$

По определению из этого следует, что $i_{S \cap X_{\alpha}}^! F = i_{S \cap X_{\alpha}}^! i_{X_{\alpha}}^! F$ сконцентрирован в степенях $\geq \tilde{p}(\dim(S \cap X_{\alpha})) = -\dim(S \cap X_{\alpha}) + p(\dim X_{\alpha}) + \dim X_{\alpha} \geq p(\dim(S \cap X_{\alpha})) \geq p(\dim S)$.

Полагая $X_k = \bigsqcup_{\dim X_\alpha \leq k} X_\alpha$, имеем

$$H^j_{X_k \cap S}(F)|_{(X_k \cap S \setminus X_{k-1} \cap S)} \simeq \bigoplus_{\dim X_\alpha = k} H^j_{X_\alpha \cap S}(F).$$

Но это равно нулю при $j < p(\dim S)$. Теперь мы можем применить результат упр. 2.25 и получить, что $H^j_S(F) = 0$ при $j < p(\dim S)$. $\square$

Условия (10.2.6) и (10.2.7) на первый взгляд не кажутся симметричными, но на самом деле являются таковыми. Покажем это.

Сначала дадим определение. Положим

$$(10.2.9) \quad \text{cosupp}^j(F) = \{x; H^j(i_x^! F) \neq 0\}.$$

Отметим, что если основное кольцо A является полем, то $i_x^{-1} H^j(D_X F) \simeq H^{-j}(i_x^! F)^*$, что дает

$$\overline{\text{cosupp}^j(F)} = \text{supp}(H^{-j}(D_X F)).$$

Предложение 10.2.5. Пусть F принадлежит $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$. Тогда $\text{cosupp}^j(F)$ является субаналитическим подмножеством в X , а $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ в том и только в том случае, когда

$$(10.2.10) \quad \begin{cases} \dim(\text{cosupp}^j(F)) < k & \text{для всех } j \text{ и всех } k, \\ \text{таких, что } j < p(k) + k. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим стратификацию $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, такую, что $i_{X_\alpha}^! F$ имеет локально постоянные когомологии. Тогда

$$(10.2.11) \quad i_x^! F \simeq i_x^! i_{X_\alpha}^! F \simeq (\sigma_{X_\alpha} \otimes i_{X_\alpha}^! F)_x[-\dim X_\alpha].$$

Следовательно,

$$\text{cosupp}^j(F) = \bigsqcup_\alpha \text{supp}(H^{j-\dim X_\alpha}(i_{X_\alpha}^! F)),$$

из чего вытекает, что $\text{cosupp}^j(F)$ субаналитично, а также эквивалентность утверждений (10.2.7) и (10.2.10) (предложение 10.2.4(ii)). $\square$

Отметим, что условие $j < p(k) + k$ эквивалентно условию $-j > p^*(k)$.

Следствие 10.2.6. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$, а $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ есть μ -стратификация, такая, что $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$. Пусть Y является d -мерным подмногообразием, трансверсальным всем стратам X_{α} . Предположим, что $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$ (соответственно $\text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$). Тогда $i_Y^{-1}F$ (соответственно $i_Y^!F$) принадлежит ${}^p[d]\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(Y)$ (соответственно ${}^p[d]\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(Y)$).

Предложение 10.2.7. Предположим, что $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$ и $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$. Тогда

$$(10.2.12) \quad H^j(R\mathcal{H}om(F, G)) = 0 \quad \text{при } j < 0,$$

(10.2.13) предпучок $U \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{D}(U)}(F|_U, G|_U)$ является пучком.

Доказательство. Пусть $S = \bigcup_{j < 0} \text{supp}(H^j(R\mathcal{H}om(F, G)))$, и пусть $S \neq \emptyset$. Тогда для $j < 0$ имеем

$$\begin{aligned} i_S^! H^j(R\mathcal{H}om(F, G)) &\simeq H^j(i_S^! R\mathcal{H}om(F, G)) \\ &\simeq H^j(R\mathcal{H}om(i_S^{-1}F, i_S^!G)). \end{aligned}$$

Пусть $k = \dim S$. Тогда объект $i_S^!G$ сконцентрирован в степенях $\geq p(k)$. С другой стороны, из условий на F следует, что $S' = \bigcup_{j > p(k)} \text{supp}(H^j(i_S^{-1}F))$ имеет размерность $< k$. Поэтому $S \setminus S' \neq \emptyset$. Так как $i_S^{-1}F|_{S \setminus S'}$ сконцентрирован в степенях $\leq p(k)$, то $R\mathcal{H}om(i_S^{-1}F, i_S^!G)|_{S \setminus S'}$ сконцентрирован в степенях ≥ 0 . Противоречие.

Свойство (10.2.13) следует из (10.2.12), так как $\text{Hom}_{\mathbf{D}(U)}(F|_U, G|_U) \simeq H^0(U; R\mathcal{H}om(F, G)) \simeq \Gamma(U; H^0(R\mathcal{H}om(F, G)))$. $\square$

Теперь мы можем доказать основной результат данного параграфа.

Теорема 10.2.8. Для любой превратности p пара $({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X), {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ образует t -структуру на $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$. Более того, если A нётерово, то пара $({}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X), {}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ образует t -структуру на $\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^b(X)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$. Мы должны доказать, что

(а) $\text{Hom}_{\mathbf{D}^b(X)}(F, G) = 0$ для любого $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$ и любого $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 1}(X))$;

- (b) ${}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) \subset {}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\leq 1}(X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X) \supset {}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\geq 1}(X)$;
 (c) если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^b(X))$, то существует выделенный треугольник $F' \rightarrow F \xrightarrow{+1} F''$, где $F' \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$, а $F'' \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\geq 1}(X))$.

Так как (a) следует из предыдущего предложения, а (b) очевидно, то остается доказать (c).

Выберем возрастающую μ -фильтрацию $\{X_k\}_k$ на X (см. определение 8.3.25), такую, что

$$(10.2.14) \quad \begin{cases} X_k \setminus X_{k-1} \text{ является } k\text{-мерным многообразием} \\ \text{для всех } k \text{ и } F|_{X_k \setminus X_{k-1}} \text{ имеет локально} \\ \text{постоянные когомологии.} \end{cases}$$

Рассмотрим условие

$$(10.2.15)_k \quad \begin{cases} \text{существует выделенный треугольник} \\ F' \rightarrow i_{X \setminus X_k}^{-1} F \xrightarrow{+1} F'' \text{ в } \mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^b(X \setminus X_k), \\ \text{где } F' \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X \setminus X_k)), \\ F'' \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{R}-c}^{\geq 1}(X \setminus X_k)) \text{ и } F'|_{X_j \setminus X_{j-1}} \\ \text{и } F''|_{X_j \setminus X_{j-1}} \text{ имеют локальные постоянные} \\ \text{когомологии при } j \geq k. \end{cases}$$

Так как $(10.2.15)_k$ выполняется при $k \gg 0$, то достаточно доказать $(10.2.15)_{k-1}$, если имеет место $(10.2.15)_k$. Пусть $F' \rightarrow i_{X \setminus X_k}^{-1} F \xrightarrow{+1} F''$ — выделенный треугольник, удовлетворяющий $(10.2.15)_k$.

Пусть $j: X \setminus X_k \hookrightarrow X \setminus X_{k-1}$ — открытое вложение, а $i: X_k \setminus X_{k-1} \hookrightarrow X \setminus X_{k-1}$ — замкнутое вложение. Морфизм $F' \rightarrow i_{X \setminus X_k}^{-1} F$ дает нам морфизм $j_! F' \rightarrow i_{X \setminus X_{k-1}}^{-1} F$. Включим этот морфизм в выделенный треугольник

$$(10.2.16) \quad j_! F' \rightarrow i_{X \setminus X_{k-1}}^{-1} F \rightarrow G \xrightarrow{+1}.$$

Имеем цепочку морфизмов $\tau^{\leq p(k)} i_* i^! G \rightarrow i_* i^! G \rightarrow G$. Включим композицию этих морфизмов в выделенный треугольник

$$(10.2.17) \quad \tau^{\leq p(k)} i_* i^! G \rightarrow G \rightarrow \tilde{F}'' \xrightarrow{+1}.$$

Наконец, включим композицию морфизмов $i_{X \setminus X_{k-1}}^{-1} F \rightarrow G \rightarrow \tilde{F}''$ в выделенный треугольник

$$(10.2.18) \quad \tilde{F}' \longrightarrow i_{X \setminus X_{k-1}}^{-1} F \longrightarrow \tilde{F}'' \xrightarrow{+1}.$$

Покажем, что

$$(10.2.19) \quad \tilde{F}'' \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{\omega \mathbb{R}-c}^{\geq 1}(X \setminus X_{k-1})),$$

$$(10.2.20) \quad \tilde{F}' \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{\omega - \mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X \setminus X_{k-1})).$$

По построению $j^{-1} \tilde{F}'' \simeq F''$ и $j^{-1} \tilde{F}' \simeq F'$. Следовательно, по предложению 10.2.4 достаточно доказать, что

$$(10.2.21) \quad i^! \tilde{F}'' \text{ сконцентрирован в степенях } \geq p(k) + 1,$$

$$(10.2.22) \quad i^{-1} \tilde{F}' \text{ сконцентрирован в степенях } \leq p(k).$$

Применяя функтор $i^!$ к выделенному треугольнику (10.2.17), получаем выделенный треугольник

$$(10.2.23) \quad \tau^{\leq p(k)} i^! G \longrightarrow i^! G \longrightarrow i^! \tilde{F}'' \xrightarrow{+1}.$$

Следовательно, $i^! \tilde{F}'' \simeq \tau^{\geq p(k)+1} i^! G$, что доказывает (10.2.21).

Теперь применим аксиому октаэдра (§ 1.4) к выделенным треугольникам (10.2.16), (10.2.17), (10.2.18):

$$(10.2.24) \quad \begin{array}{ccccc} & & \tilde{F}' & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ j_! F' & \xleftarrow{+1} & & \xrightarrow{\tau^{\leq p(k)} i_* i^! G} & \\ \downarrow & & & & \uparrow +1 \\ i_{X \setminus X_{k-1}}^{-1} F & \xrightarrow{+1} & & \xrightarrow{\quad} & F'' \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & G & & \end{array}$$

Получаем выделенный треугольник

$$(10.2.25) \quad j_! F' \longrightarrow \tilde{F}' \longrightarrow \tau^{\leq p(k)} i_* i^! G \xrightarrow{+1}.$$

Следовательно, $i^{-1}\tilde{F}' \simeq \tau^{\leq p(k)} i^! G$, что доказывает (10.2.22).

Легко проверяется, что $\tilde{F}'$ и $\tilde{F}''$ имеют локально постоянные когомологии на $X_j \setminus X_{j-1}$ при $j \geq k$. Этот факт дает возможность продолжить индукцию. Если A нётерово, то те же рассуждения проходят в категории $\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$. $\square$

Функтор $U \mapsto {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(U)$, где U открыто в X , ведет себя как пучок. Точнее, имеет место

Предложение 10.2.9. Категория ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X)$ является стеком, т. е. если $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ — открытое покрытие многообразия X , $F_i \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(U_i))$ и даны изоморфизмы $f_{ij} : F_j|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} F_i|_{U_{ij}}$, удовлетворяющие условиям коцикла $(f_{ij}|_{U_{ijk}}) \circ (f_{jk}|_{U_{ijk}}) = f_{ik}|_{U_{ijk}}$ для любых i, j, k , то найдутся $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X))$ и изоморфизмы $f_i : F|_{U_i} \xrightarrow{\sim} F_i$, такие, что $f_{ij} \circ f_j|_{U_{ij}} = f_i|_{U_{ij}}$.

Кроме того, семейство $(F, \{f_i\}_i)$ единственно с точностью до изоморфизма (здесь $U_{ij} = U_i \cap U_j$, $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$).

Доказательство. (а) Единственность. следует из предложения 10.2.7.

(б) Докажем сначала существование семейства $(F, \{f_i\}_i)$ в случае конечного I . Проведем индукцию по $\#I$. Достаточно доказать утверждение для случая $\#I = 2$, $I = \{1, 2\}$. В этом случае F определяется с помощью выделенного треугольника

$$i_{U_{12}!}(F_1|_{U_{12}}) \longrightarrow i_{U_1!}F_1 \oplus i_{U_2!}F_2 \longrightarrow F \xrightarrow{+1},$$

где морфизм $i_{U_{12}!}(F_1|_{U_{12}}) \rightarrow i_{U_2!}F_2$ определен морфизмом f_{21} .

(с) Рассмотрим общий случай. Согласно пп. (а) и (б), мы можем считать, что $I = \mathbb{N}$ и $U_n \subset U_{n+1}$ для всех n . Представим $F_n \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(U_n))$ инъективным комплексом $I_n \in \text{Ob}(\mathbf{C}^+(\mathcal{M}\text{od}(A_{U_n})))$. Тогда изоморфизмы $F_n \xrightarrow{\sim} F_{n+1}|_{U_n}$ порождают гомоморфизмы $I_n \rightarrow I_{n+1}|_{U_n}$ и, следовательно, гомоморфизмы $\varphi_n : i_{U_n!}I_n \rightarrow i_{U_{n+1}!}I_{n+1}$. Пусть теперь $F = \varinjlim_n I_n$. Достаточно доказать, что естественный

морфизм $I_n \rightarrow i_{U_n}^{-1}F$ является квазиизоморфизмом. Но это следует из того факта, что $(I_n)_x$ для $x \in U_n$ квазиизоморфен $(I_m)_x$ при $m \geq n$. $\square$

Мы будем обозначать через ${}^p\tau^{\leq n}$ и ${}^p\tau^{\geq n}$ функторы усечения, ассоциированные с t -структурой $({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X), {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$, т. е.

$$(10.2.26) \quad \begin{cases} {}^p\tau^{\leq n} : \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X) \rightarrow {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq n}(X), \\ {}^p\tau^{\geq n} : \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X) \rightarrow {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq n}(X). \end{cases}$$

Через ${}^p H^n$ обозначим n -е когомологии по отношению к этой t -структуре. А именно,

$$(10.2.27) \quad {}^p H^n: \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X) \rightarrow {}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X).$$

Мы сохраним те же обозначения для ${}^p \mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^0(X)$ в случае нётерова A .

Теперь мы займемся изучением функториальных свойств t -структур, порожденных превратностями.

Предложение 10.2.10. Пусть Y — локально замкнутое субаналитическое подмножество в X .

- (i) Функтор $i_Y! i_Y^{-1}$ переводит объекты категории ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ в объекты той же категории (т. е. этот функтор t -точен справа).
- (ii) Функтор $Ri_Y * i_Y^!$ переводит объекты категории ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ в объекты той же категории (т. е. этот функтор t -точен слева).

Доказательство. (i) Так как $i_Y!$ и i_Y^{-1} являются точными функторами, то они коммутируют с функтором $H^j(\cdot)$. Таким образом, утверждение вытекает из включения $\text{supp}(i_Y! i_Y^{-1}(F)) \subset \text{supp}(F)$.

(ii) Имеем $(i_Y^! i_Y * i_Y^! F)_{Y \cap S} \simeq i_Y^! F$. Значит, результат следует из определений. $\square$

Предложение 10.2.11. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а d — целое число. Пусть $\dim f^{-1}(x) \leq d$ для всех $x \in X$. Тогда

- (i) f^{-1} переводит объекты категории ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ в объекты из ${}^p[-d] \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(Y)$.
- (ii) $f^!$ переводит объекты категории ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ в объекты из ${}^p[-d] \mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq -d}(Y)$.

Доказательство. (i) следует из того, что

$$\begin{aligned} \dim(\text{supp}(H^j(f^{-1}F))) &= \dim(f^{-1}(\text{supp}(H^j(F)))) \\ &\leq \dim(\text{supp}(H^j(F))) + d. \end{aligned}$$

(ii) следует из предложения 10.2.5 и равенств

$$\begin{aligned} \text{cosupp}^j(f^! F) &= \{y \in Y; H^j(i_y^! f^! F) \neq 0\} \\ &= \{y \in Y; H^j(i_{f(y)}^! F) \neq 0\} \\ &= f^{-1}(\text{cosupp}^j(F)), \end{aligned}$$

что дает

$$\dim(\text{cosupp}^j(f^! F)) \leq \dim(\text{cosupp}^j(F)) + d.$$

$\square$

Предложение 10.2.12. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, а d — целое число. Пусть $\dim f^{-1}(x) \leq d$ для всех $x \in X$.

- (i) Пусть $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(Y))$, а $Rf_!G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$. Тогда $Rf_!G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq d}(X))$.
- (ii) Пусть $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(Y))$, а $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$. Тогда $Rf_*G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq d}(X))$.

Доказательство. Это утверждение следует из предыдущего предложения, предложения 10.1.17 и того факта, что f^{-1} и Rf_* так же, как $Rf_!$ и $f^!$, являются сопряженными функторами. $\square$

Предложение 10.2.13. Пусть основное кольцо A является полем. Тогда функтор двойственности D_X (с.м. определение 3.1.16) переводит объекты категорий ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ в объекты категорий ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X)$ соответственно.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $i_x^{-1}(D_X F) \simeq \text{Hom}(i_x^! F, A)$ и $i_x^!(D_X F) \simeq \text{Hom}(i_x^{-1} F, A)$, и из предложения 10.2.5. $\square$

Отметим следующий полезный результат.

Предложение 10.2.14. Пусть Y — замкнутое подмногообразие в X , а $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$.

- (i) $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$ в том и только в том случае, когда $F|_{X \setminus Y} \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X \setminus Y))$ и $i_Y^{-1}F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(Y))$.
- (ii) $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ в том и только в том случае, когда $F|_{X \setminus Y} \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X \setminus Y))$ и $i_Y^!F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(Y))$.

Доказательство. (i) следует из того, что $\text{supp } H^j(F) = \text{supp } H^j(F|_{X \setminus Y}) \cup \text{supp } H^j(i_Y^{-1}F)$.

(ii) следует из того, что $\text{cosupp}^j(F) = \text{cosupp}^j(F|_{X \setminus Y}) \cup \text{cosupp}^j(i_Y^!F)$. $\square$

10.3. Превратные пучки на комплексных многообразиях

Пусть X — комплексное многообразие. Положим

$${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\leq 0}(X) = {}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X) \cap \mathbf{D}_{w-C-c}(X).$$

Аналогично определим ${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\geq 0}(X)$, ${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^0(X)$, ${}^p\mathbf{D}_{C-c}^{\leq 0}(X)$, ${}^p\mathbf{D}_{C-c}^{\geq 0}(X)$, ${}^p\mathbf{D}_{C-c}^0(X)$ и т. д.

В предложении 10.2.4 мы можем выбрать X_α комплексными многообразиями, и тогда ${}^p\mathbf{D}_{\psi-\mathbf{C}-c}^{\leq 0}(X)$ и пр. зависят только от значений p в точках $2\mathbb{Z}$. В последующем мы будем выбирать p таким, чтобы $p = p^*$ на $2\mathbb{Z}$, т. е.

$$(10.3.1) \quad p(n) = -n/2 \quad \text{для четных } n.$$

Мы назовем p *средней превратностью*.

Соглашение 10.3. В данном параграфе, если не утверждается обратное, все многообразия и морфизмы многообразий являются комплексно-аналитическими.

Для комплексно-аналитического множества S через $\dim S$ мы будем обозначать его комплексную размерность, а через $\dim_{\mathbb{R}} S$ — его вещественную размерность.

Следовательно, для объекта F из $\mathbf{D}_{\psi-\mathbf{C}-c}^b(X)$ справедливо утверждение

$$(10.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\psi-\mathbf{C}-c}^{\leq 0}(X)) \text{ в том и только в том случае,} \\ \text{когда } \dim \text{supp}(H^j(F)) \leq -j \text{ для всех } j; \end{array} \right.$$

$$(10.3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\psi-\mathbf{C}-c}^{\geq 0}(X)) \text{ в том и только в том случае,} \\ \text{когда } H_S^j(F)|_S = 0 \text{ для любого локально замкнутого} \\ \text{комплексно-аналитического подмножества} \\ S \subset X \text{ при } j < -\dim S; \end{array} \right.$$

(Последнее условие эквивалентно такому: $\dim \text{cosupp}^j(F) \leq j$.)

Выберем комплексную μ -стратификацию $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, такую, что $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$. Тогда

$$(10.3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\psi-\mathbf{C}-c}^{\leq 0}(X)) \text{ в том и только в том случае,} \\ \text{когда } F_x \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq -\dim X_{\alpha}}(\mathcal{M}\text{od}(A))) \text{ для всех } x \in X_{\alpha} \\ \text{и всех } \alpha; \end{array} \right.$$

$$(10.3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\psi-\mathbf{C}-c}^{\geq 0}(X)) \text{ в том и только в том случае,} \\ \text{когда } (R\Gamma_{\{x\}}(F))_x \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq \dim X_{\alpha}}(\mathcal{M}\text{od}(A))) \text{ для всех} \\ x \in X_{\alpha} \text{ и всех } \alpha; \end{array} \right.$$

Определение 10.3.1. Объект из ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^0(X)$ называется *превратным пучком*.

Отметим, что в общем случае превратный пучок пучком не является, но мы называем его пучком из-за его локальных свойств, доказанных в предложении 10.2.9.

Пример 10.3.2. Пусть Y — замкнутое подмногообразие в X . Тогда $A_Y[\dim X]$ — превратный пучок.

Сформулируем комплексные аналоги предложений 10.2.11 и 10.2.12.

Предложение 10.3.3. Пусть d — целое число и $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий, такой, что $\dim f^{-1}(x) \leq d$ для всех $x \in X$. Тогда

- (i) f^{-1} переводит объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\leq 0}(X)$ в объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\leq d}(Y)$;
- (ii) $f^!$ переводит объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(X)$ в объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\geq -d}(Y)$;
- (iii) если $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\leq 0}(Y))$ и $Rf_!G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^b(X))$, то $Rf_!G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\leq d}(X))$;
- (iv) если $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(Y))$ и $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^b(X))$, то $Rf_*G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\geq -d}(X))$.

Утверждения теоремы 10.2.8 остаются справедливыми в комплексном случае: для доказательства мы должны выбрать фильтрацию $\{X_j\}$, такую, что X_j являются комплексно-аналитическими многообразиями.

Теорема 10.3.4 Пара $({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\leq 0}(X), {}^p\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(X))$ образует t -структуру на $\mathbf{D}_{\mathcal{W}-\mathcal{C}-c}^b(X)$. Если основное кольцо A нётерово, то пара $({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^{\leq 0}(X), {}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(X))$ образует t -структуру на $\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^b(X)$.

Следующее предложение является следствием предложения 10.2.13.

Предложение 10.3.5. Если кольцо A является полем, то функтор двойственности D_X отображает объекты из ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(X)$ в объекты из ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^{\leq 0}(X)$ и обратно.

Следующее предложение также легко доказать.

Предложение 10.3.6. Пусть X и Y — комплексные многообразия.

- (i) Если $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X))$, $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(Y))$, то $F \boxtimes^L G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X \times Y))$.
- (ii) Если основное кольцо является полем, $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X))$ и $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(Y))$, то $F \boxtimes G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X \times Y))$.
- (iii) Если $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X))$ и $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(Y))$, то $R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G) \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X \times Y))$.

(Здесь q_1 и q_2 — проекции $X \times Y$ на X и Y соответственно.)

Доказательство. (i) Выберем комплексно-аналитические μ -стратификации $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, $Y = \bigsqcup_{\beta} Y_{\beta}$, такие, что $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$, $\text{SS}(G) \subset \bigsqcup_{\beta} T_{Y_{\beta}}^* Y$. Тогда утверждение следует из предложения 10.2.4, так как

$$i_{X_{\alpha} \times Y_{\beta}}^{-1} \left(F \boxtimes^L G \right) \simeq i_{X_{\alpha}}^{-1} F \boxtimes^L i_{Y_{\beta}}^{-1} G.$$

(ii) следует из (i) и из того, что $F \boxtimes G \simeq D_{X \times Y} (D_X F \boxtimes D_Y G)$.

(iii) Имеем

$$i_{X_{\alpha} \times Y_{\beta}}^! R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G) \simeq R\mathcal{H}om(i_{X_{\alpha}}^{-1}F \boxtimes A_{Y_{\beta}}, \omega_{X_{\alpha}} \boxtimes i_{Y_{\beta}}^!G).$$

По условию $i_{X_{\alpha}}^{-1}F$ сконцентрирован в степенях $\leq -\dim X_{\alpha}$, а $\omega_{X_{\alpha}} \boxtimes i_{Y_{\beta}}^!G$ сконцентрирован в степенях $\geq -2 \dim X_{\alpha} - \dim Y_{\beta}$. Поэтому объект $i_{X_{\alpha} \times Y_{\beta}}^! R\mathcal{H}om(q_1^{-1}F, q_2^!G)$ сконцентрирован в степенях $\geq -\dim(X_{\alpha} \times Y_{\beta})$. $\square$

Введем понятие микролокальной превратности.

Определение 10.3.7. ${}^{\mu}\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq n}(X)$ (соответственно ${}^{\mu}\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq n}(X)$) есть полная подкатегория в $\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X)$, состоящая из объектов F , таких, что тип L объекта F со сдвигом 0 в каждой невырожденной точке из $\text{SS}(F)$ удовлетворяет равенству $H^j(L) = 0$ для всех $j > n - \dim$ (соответственно $j < n - \dim X$).

Из предложения 7.5.9 и упр. II. 7 (см. также упр. 7.4) вытекает эквивалентность следующих трех условий на $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X))$:

$$(10.3.6) \quad F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X)) \text{ (соответственно } {}^{\mu}\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X)).$$

$$(10.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Для каждой невырожденной точки } p \in SS(F), \\ \text{такой, что } \pi: SS(F) \rightarrow X \text{ имеет постоянный} \\ \text{ранг в окрестности точки } p, \text{ существуют} \\ \text{подмногообразие } Y \text{ и } L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(A))), \\ \text{такие, что } F \simeq L_Y[\dim Y] \text{ в } \mathbf{D}^b(X; p) \text{ и } H^j(L) = 0 \\ \text{для всех } j > 0 \text{ (соответственно } j < 0). \end{array} \right.$$

$$(10.3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Условие (10.3.7) выполняется для некоторой точки} \\ p \text{ из неприводимой компоненты микроносителя} \\ SS(F) \text{ для всех его неприводимых компонент.} \end{array} \right.$$

Одной из задач этого раздела является доказательство равенств ${}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X) = {}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X)$ и ${}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X) = {}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X)$.

Для этого нам прежде всего понадобится теорема об обращении в нуль для превратных пучков на многообразиях Штейна (обзор свойств многообразий Штейна см. в книге [Hörmander 1]). Напомним, что такое многообразие голоморфно вкладывается в $\mathbb{C}^N$ (при некотором N) как замкнутое подмногообразие.

Теорема 10.3.8. Пусть X — многообразие Штейна.

- (i) $H^j(X; F) = 0$ для любого $F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X))$ при $j > 0$.
- (ii) $H_c^j(X; F) = 0$ для любого $F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X))$ при $j < 0$.

Доказательство, использующее теорию Морса, похоже на доказательство предложения 5.4.20.

Доказательство. Вложим X в $\mathbb{C}^N$ как замкнутое подмногообразие. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$, $\Lambda = SS(F)$, а $\Lambda_0 = \{p \in \Lambda_{\text{reg}}; \pi: \Lambda_{\text{reg}} \rightarrow X \text{ имеет постоянный ранг в окрестности точки } p\}$. Тогда Λ_0 — субаналитическое подмногообразие и $\dim_{\mathbb{R}}(\Lambda \setminus \Lambda_0) < \dim_{\mathbb{R}} X$. Применяя предложение 8.3.27, найдем точку $z_0 \in \mathbb{C}^N$, такую, что, полагая $\varphi(x) = |x - z_0|^2$ для $x \in X$ и $\Lambda_{\varphi} = \{(x, d\varphi(x)); x \in X\} \subset T^*X$, имеем

$$(10.3.9) \quad \Lambda_{\varphi} \cap \Lambda \subset \Lambda_0 \text{ и пересечение трансверсально.}$$

Возьмем точку $p \in \Lambda_{\varphi} \cap \Lambda$ и положим $x_0 = \pi(p)$. Так как $p \in \Lambda_0$, то $F \simeq L_Y[\dim Y]$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$ и в $\mathbf{D}^b(X; p^a)$ для некоторого комплексного подмногообразия Y и объекта $L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(A)))$. Так как $\Lambda_0 = T_Y^*X$ в окрестности точки p и пересечение Λ и Λ_{φ} трансверсально в p , то гессиан функции $\varphi|_Y$ в точке x_0 невырожден (см. § 7.5). С

другой стороны, форма $\partial\bar{\partial}\varphi$ положительно определена на $T_{X_0}\mathbb{C}^N$ и, следовательно, на $T_{x_0}Y$, что дает такое утверждение:

$$(10.3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{количество положительных собственных} \\ \text{значений гессиана } \text{Hess}(\varphi|_Y) \text{ не менее } \dim Y. \end{array} \right.$$

В самом деле, (10.3.10) вытекает из следующего элементарного результата из линейной алгебры:

Пусть V есть n -мерное комплексное векторное пространство, а B — вещественная симметричная билинейная форма на подлежащем вещественном пространстве $V^{\mathbb{R}}$. Продолжим B до $\mathbb{C}$ -линейной формы $\tilde{B}$ на $V^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq V \oplus \bar{V}$. Тогда если эрмитова форма $\tilde{B}(x, \bar{x})$ положительно определена на V , то B имеет не менее n положительных собственных значений.

Таким образом, мы можем выбрать локальную систему координат $(x_1, \dots, x_{2d})$ на Y так, чтобы

$$(10.3.11) \quad \varphi(x) = x_1^2 + \dots + x_l^2 - \dots - x_{2d}^2 + \varphi(x_0),$$

где $d = \dim Y$ и $l \geq d$, откуда получаем

$$(10.3.12) \quad \begin{aligned} (H_{\{x; \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}}^j(F))_{x_0} \\ \simeq (H_{\{x_1^2 + \dots + x_l^2 - \dots - x_{2d}^2 \geq 0\}}^{j+d}(L_{\mathbb{R}^{2d}}))_0 \\ \simeq H^{j+d-(2d-l)}(L) \\ = H^{j+l-d}(L). \end{aligned}$$

Аналогично

$$(10.3.13) \quad (H_{\{x; \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}}^j(F))_{x_0} \simeq H^{j+d-l}(L).$$

Так как $l \geq d$, мы получаем, что

$$(10.3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X)), \text{ то} \\ (H_{\{x; \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}}^j(F))_{x_0} = 0 \text{ при } j > 0, \end{array} \right.$$

$$(10.3.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{\omega-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X)), \text{ то} \\ (H_{\{x; \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}}^j(F))_{x_0} = 0 \text{ при } j < 0. \end{array} \right.$$

По микролокальной теореме Бертини–Сарда (предложение 8.3.12) $\varphi(\pi(\Lambda_\varphi \cap \Lambda))$ является дискретным множеством, содержащимся в $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Положим $t_0 = -\infty$ и $\varphi(\pi(\Lambda_\varphi \cap \Lambda)) = \{t_1, t_2, \dots\}$.

По предложению 5.4.4 $SS(R\varphi_* F) \subset \bigcup_i T_{\{t_i\}}^* \mathbb{R}$. Следовательно, $R\varphi_* F$ постоянен на открытых интервалах $]t_{i-1}, t_i[$ ($i \geq 1$). Положив

$$V_i = R\Gamma(]-\infty, t_{i+1}[; R\varphi_* F),$$

$$V_i^c = R\Gamma_c(]-\infty, t_{i+1}[; R\varphi_* F),$$

получаем для $i \geq 1$ выделенные треугольники

$$(10.3.16) \quad (R\Gamma_{[t_i, +\infty[}(R\varphi_* F))_{t_i} \longrightarrow V_i \longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{+1},$$

$$(10.3.17) \quad V_{i-1}^c \longrightarrow V_i^c \longrightarrow (R\Gamma_{]-\infty, t_i]}(R\varphi_* F))_{t_i} \xrightarrow{+1}.$$

Пусть теперь $F \in \text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-c}^{\leq 0}(X))$. Так как

$$\text{supp}((R\Gamma_{\{\varphi(x) \geq t_i\}}(F))|_{\varphi^{-1}(t_i)}) = \varphi^{-1}(t_i) \cap \pi(SS(F) \cap \Lambda_\varphi),$$

то

$$H^j(R\Gamma_{[t_i, +\infty[}(R\varphi_* F))_{t_i} \simeq \bigoplus_p H^j(R\Gamma_{\{\varphi(x) \geq t_i\}}(F))_p,$$

где p пробегает конечное множество $\varphi^{-1}(t_i) \cap \pi(SS(F) \cap \Lambda_\varphi)$. По (10.3.14) эти группы когомологий обращаются в нуль при $j > 0$, а выделенный треугольник (10.3.16) дает следующие свойства:

$$H^j(V_i) \simeq H^j(V_{i-1}) \quad \text{при } j > 0,$$

$$H^0(V_i) \rightarrow H^0(V_{i-1}) \quad \text{сюрьективен.}$$

Поэтому семейство $\{H^{j-1}(V_i)\}_i$ удовлетворяет условию Миттаг–Лефлера при $j > 0$, и по предложению 2.7.1

$$\begin{aligned} H^j(X; F) &\simeq H^j(\mathbb{R}; R\varphi_* F) \simeq \varinjlim_i H^j(V_i) \\ &\simeq H^j(V_0) = 0 \quad \text{при } j > 0. \end{aligned}$$

Аналогично, если $F \in \text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-c}^{\geq 0}(X))$, то $H^j(R\Gamma_{\{t \leq t_i\}}(F))_{t_i} = 0$ при $j < 0$. Следовательно,

$$H^j(V_{i-1}^c) \simeq H^j(V_i^c) \quad \text{при } j < 0.$$

Это дает

$$\begin{aligned} H_c^j(X; F) &\simeq H_c^j(\mathbb{R}; R\varphi_* F) \simeq \varinjlim_i H^j(V_i^c) \\ &\simeq H^j(V_0^c) = 0 \quad \text{при } j < 0. \end{aligned}$$

□

Лемма 10.3.9. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$, а $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ — такая стратификация, что $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$. Пусть Y — подмногообразие в X , пересекающее все страты X_{α} трансверсально.

- (i) Предположим, что $F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X))$. Тогда $i_Y^{-1}F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq -\text{codim } Y}(Y))$ и $i_Y^!F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq \text{codim } Y}(Y))$.
- (ii) Предположим, что $F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X))$. Тогда $i_Y^{-1}F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq -\text{codim } Y}(Y))$ и $i_Y^!F \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq \text{codim } Y}(Y))$.

Доказательство. Из трансверсальности пересечения следует, что $T_Y^*X \cap (\bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X) \subset T_X^* X$. Следовательно, морфизм i_Y не характеристичен для F , и мы можем применить предложение 5.4.13 и получить

$$i_Y^{-1}F \otimes \omega_{Y/X} \simeq i_Y^!F,$$

$$\text{SS}(i_Y^{-1}F) \subset \bigsqcup_{\alpha} T_{Y \cap X_{\alpha}}^* Y.$$

Пусть $y \in Y \cap X_{\alpha}$. По следствию 8.3.24 существует точка $p \in Y \times_X T_{X_{\alpha}}^* X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} \overline{T_{X_{\beta}}^* X}$, такая, что $\pi(p) = y$. Тогда $F \simeq L_{X_{\alpha}}$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$ для некоторого $L \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{M}\text{od}(A)))$ и $i_Y^{-1}F \simeq L_{X_{\alpha} \cap Y}$ в $\mathbf{D}^b(Y; {}^t i_Y'(p))$ по предложению 6.1.9.

Теперь (i) и (ii) следует из (10.3.6), (10.3.7) и (10.3.8). $\square$

Рассмотрим специализацию превратных пучков.

Предложение 10.3.10. Пусть Y — гладкая гиперповерхность в X , и пусть F принадлежит $\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X)$. Предположим, что $F|_{X \setminus Y} \in \text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X \setminus Y))$ (соответственно $\text{Ob}({}^{\mu}\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X \setminus Y))$). Тогда $\nu_Y(F)|_{\dot{T}_Y X}$ принадлежит ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(\dot{T}_Y X)$ (соответственно ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(\dot{T}_Y X)$).

Доказательство. Мы проведем доказательство в три шага.

(а) Пусть X открыто в $\mathbb{C}$ и $Y = \{0\}$. Если $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$ и $F|_{X \setminus Y}$ сконцентрирован в степенях ≤ -1 (соответственно ≥ -1), то $\nu_Y(F)$ обладает тем же свойством.

(b) Докажем, что для всех $p \in \dot{T}_Y X$

$$(10.3.18) \quad \begin{cases} i_p^{-1}\nu_Y(F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq -1}(\mathcal{M}\text{od}(A))) \\ \text{(соотв. } i_p^!\nu_Y(F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 1}(\mathcal{M}\text{od}(A)))) \end{cases}$$

Выберем локальную голоморфную систему координат $(z_1, \dots, z_n)$ на X , такую, что $Y = \{z_1 = 0\}$ и $p = (0; \partial/\partial z_1)$. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ —

морфизм, заданный первой координатой z_1 . Обозначим через $B(\varepsilon)$ открытый шар в X с центром 0 радиуса $\varepsilon > 0$. Обозначим через j_ε вложение $B(\varepsilon) \hookrightarrow X$ и через f_ε отображение $f \circ j_\varepsilon$. Обозначим через $T_Y f$ отображение $T_Y X \rightarrow T_{\{0\}} \mathbb{C}$. Применение предложения 4.2.4 дает нам изоморфизмы

$$(10.3.19) \quad \begin{cases} (T_Y f)_* \nu_Y(Rj_{\varepsilon*} j_\varepsilon^{-1} F) \simeq \nu_{\{0\}}(Rf_* Rj_{\varepsilon*} j_\varepsilon^{-1} F), \\ (T_Y f)! \nu_Y(Rj_{\varepsilon!} j_\varepsilon^{-1} F) \simeq \nu_{\{0\}}(Rf! Rj_{\varepsilon!} j_\varepsilon^{-1} F). \end{cases}$$

С другой стороны, по лемме 8.4.7

$$(10.3.20) \quad \begin{cases} i_p^{-1} \nu_Y(F) \simeq \varinjlim_U R\Gamma(U; \nu_Y(F)), \\ i_p^! \nu_Y(F) \simeq \varprojlim_U R\Gamma_c(U; \nu_Y(F)), \end{cases}$$

где U пробегает семейство открытых окрестностей точки p в $T_Y X$, что дает

$$(10.3.21) \quad \begin{cases} i_p^{-1} \nu_Y(F) \simeq \varinjlim_\varepsilon \nu_{\{0\}}(Rf_{\varepsilon*} j_\varepsilon^{-1} F)_v, \\ i_p^! \nu_Y(F) \simeq \varprojlim_\varepsilon R\Gamma_{\{v\}} \nu_{\{0\}}(Rf_{\varepsilon!} j_\varepsilon^{-1} F), \end{cases}$$

где $v = (0, \partial/\partial z_1) \in T_{\{0\}} \mathbb{C}$. Из предложения 8.5.9 мы знаем, что $Rf_{\varepsilon*} j_\varepsilon^{-1} F|_U$ и $Rf_{\varepsilon!} j_\varepsilon^{-1} F|_U$ принадлежат $\mathbf{D}_{w-c-c}^b(U)$ для достаточно малой окрестности U точки $0 \in \mathbb{C}$.

Докажем, что

$$(10.3.22) \quad \begin{cases} Rf_{\varepsilon*} j_\varepsilon^{-1} F \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(U \setminus \{0\})) \\ (\text{соотв. } Rf_{\varepsilon!} j_\varepsilon^{-1} F \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(U \setminus \{0\}))). \end{cases}$$

Выберем комплексную μ -стратификацию $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$, такую, что $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_\alpha T_{X_\alpha}^* X$. Тогда по микролокальной теореме Бертини-Сарда (предложение 8.3.12)

$$\bigsqcup_\alpha (B(\varepsilon) \times_X T_{X_\alpha}^* X) \cap T_{\{f^{-1}(t)\}}^* X \subset T_X^* X \quad \text{при } 0 < |t| \ll \varepsilon.$$

Применяя лемму 10.3.9, получаем, что если $F \in \text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X))$ (соответственно $\text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X))$), то $i_{f_\varepsilon^{-1}(t)}^{-1} j_\varepsilon^{-1}(F)$ (соответственно $i_{f_\varepsilon^{-1}(t)}^{-1} j_\varepsilon^{-1}(F)$) принадлежит ${}^\mu \mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 1}(f_\varepsilon^{-1}(t))$ (соответственно ${}^\mu \mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq -1}(f_\varepsilon^{-1}(t))$).

Так как $f_\epsilon^{-1}(t)$ является многообразием Штейна, то мы можем применить теорему 10.3.8. Получаем

$$R\Gamma(f_\epsilon^{-1}(t); i_{f_\epsilon^{-1}(t)}^! j_\epsilon^{-1} F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq 1}(\mathcal{M}\text{od}(A)))$$

(соответственно $R\Gamma_c(f_\epsilon^{-1}(t); i_{f_\epsilon^{-1}(t)}^{-1} j_\epsilon^{-1} F) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq -1}(\mathcal{M}\text{od}(A)))$). Так как

$$(Rf_{\epsilon*} j_\epsilon^{-1} F)_t \simeq (R\Gamma_{\{t\}} Rf_{\epsilon*} j_\epsilon^{-1} F)_\epsilon[2] \simeq R\Gamma(f_\epsilon^{-1}(t); i_{f_\epsilon^{-1}(t)}^! j_\epsilon^{-1} F)[2]$$

и

$$(Rf_{\epsilon!} j_\epsilon^{-1} F)_t \simeq R\Gamma_c(f_\epsilon^{-1}(t); i_{f_\epsilon^{-1}(t)}^{-1} F),$$

то получаем (10.3.22), что вместе с (10.3.21) и (а) дает нам (10.3.18).

(с) Закончим доказательство предложения.

Пусть μ -стратификация $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ такова, что существует $A_0 \subset A$, для которого

$$(10.3.23) \quad \begin{cases} \text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X, \\ Y = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha, \\ \text{SS}(\nu_Y(F)|_{\dot{T}_Y X}) \subset \bigsqcup_{\alpha \in A_0} (T_{X_\alpha}^* Y \times \dot{T}_Y X). \end{cases}$$

Пусть $x \in X_\alpha$, а подмногообразие $Z \subset X$ пересекает X_α в x трансверсально и $\dim Z + \dim X_\alpha = \dim X$. Применяя обратное преобразование Фурье–Сато к изоморфизмам, определенным в теореме 6.7.1, получаем изоморфизмы

$$(10.3.24) \quad \begin{cases} \nu_Y(F)|_{Z \times_Y T_Y X} \simeq \nu_{Z \cap Y}(i_Z^{-1} F), \\ R\Gamma_{Z \times_Y T_Y X} \nu_Y(F) \simeq \nu_{Z \cap Y}(i_Z^! F). \end{cases}$$

Пусть $p \in \{x\} \times_Y \dot{T}_Y X \simeq \{x\} \times_{Z \cap Y} \dot{T}_{Z \cap Y} Z$. Тогда

$$(10.3.25) \quad \begin{cases} \nu_Y(F)_p \simeq \nu_{Z \cap Y}(i_Z^{-1} F)_p, \\ R\Gamma_{\{p\}} \nu_Y(F) \simeq R\Gamma_{\{p\}} \nu_{Z \cap Y}(i_Z^! F). \end{cases}$$

Применяя лемму 10.3.9, получаем, что $i_Z^{-1}(F)|_{Z \setminus Y}$ (соответственно $i_Z^!(F)|_{Z \setminus Y}$) принадлежит ${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbf{C}-c}^{\leq -\text{codim } Z}(Z \setminus Y)$ (соответственно ${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbf{C}-c}^{\geq \text{codim } Z}(Z \setminus Y)$). Используя (b), получаем

$$\nu_{Z \cap Y}(i_Z^{-1} F)_p \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{-1-\dim X_\alpha}(\mathcal{M}\text{od}(A)))$$

(соответственно $R\Gamma_{\{p\}} \nu_{Z \cap Y}(i_Z^{-1} F)_p \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 1+\dim X_\alpha}(\mathcal{M}\text{od}(A)))$).

Теперь требуемый результат вытекает из (10.3.25) и (10.3.4) (соответственно из (10.3.25) и (10.3.5)). $\square$

Следствие 10.3.11. Пусть Y — гладкая гиперповерхность в X , определенная уравнением $\{f = 0\}$, и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X))$. Пусть $F|_{X \setminus Y} \in \text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X \setminus Y))$ (соответственно $\text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X \setminus Y))$). Тогда

- (i) $\psi_f(F)[-1]$ принадлежит ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(Y)$ (соответственно ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(Y)$);
- (ii) если, кроме того, $i_Y^{-1}(F)$ (соответственно $i_Y^{-1}(F)$) принадлежит ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(Y)$ (соответственно ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(Y)$), то $\phi_f(F)$ принадлежит ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(Y)$ (соответственно ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(Y)$).

Доказательство. (i) следует из предложений 8.6.3 и 10.3.10.

(ii) следует из (i) и рассмотрения выделенных треугольников (8.6.7). $\square$

Теперь мы можем доказать один из основных результатов этого параграфа.

Теорема 10.3.12. Имеют место равенства

$${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X) = {}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X)$$

и

$${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X) = {}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X).$$

Доказательство. (a) Пусть $t: X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — проекция. Если F принадлежит ${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X)$ (соответственно ${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X)$), то $F \boxtimes A_{\mathbb{C}}[1]$ принадлежит ${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X \times \mathbb{C})$ (соответственно ${}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X \times \mathbb{C})$). Тогда $\psi_t(F \boxtimes A_{\mathbb{C}}[1])[-1] \simeq F$ принадлежит ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X)$ (соответственно ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X)$) по предложению 10.3.10.

(b) Обратно, пусть F принадлежит ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X)$ (соответственно ${}^p \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(X)$). Возьмем μ -стратификацию $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, такую, что $\text{SS}(F) \subset \bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$. Будем рассуждать по индукции. Достаточно доказать, что

$$(10.3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{если } X_{\alpha} \text{ — замкнутый страт и} \\ F|_{X \setminus X_{\alpha}} \in \text{Ob}({}^\mu \mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^{\leq 0}(X \setminus X_{\alpha})), \\ \text{то тип } L \text{ объекта } F \text{ в общей точке} \\ \text{многообразия } T_{X_{\alpha}}^* X \text{ со сдвигом } 0 \text{ удовлетворяет} \\ \text{равенству } H^j(L) = 0 \text{ при } j > -\dim X \\ \text{(соответственно } j \geq -\dim X). \end{array} \right.$$

Выберем подмногообразие Z , пересекающее X_α трансверсально в точке x . Так как μ -превратности и p -превратности сохраняются функтором i_Z^{-1} с тем же сдвигом (следствие 10.2.6 и лемма 10.3.9), то, заменяя X на Z и F на $i_Z^{-1}F$, мы можем считать, что $X_\alpha = \{x\}$. Найдем голоморфную функцию f , такую, что $f(x) = 0$ и $df(x) = p \in T_{\{x\}}^*X \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} \overline{T_{X_\beta}^*X}$. Так как $\text{supp}(\phi_f(F))$ содержится в $\pi(\text{SS}(F) \cap A_f)$, то он сконцентрирован в $\{x\}$. Кроме этого, $\phi_f(F)_x \simeq \phi_f(L_{\{x\}}) = L$. Значит, мы получаем требуемый результат, так как, согласно следствию 10.3.11, $\phi_f(F) \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(f^{-1}(0)))$ (соответственно ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(f^{-1}(0))$). $\square$

Следствие 10.3.13. *Функторы $\psi_f[-1]$ и ϕ_f , действующие из $\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X)$ в $\mathbf{D}_{w-c-c}^b(f^{-1}(0))$, являются t -точными по отношению к t -структуре, заданной средней превратностью.*

Доказательство. Если $df \neq 0$, то утверждение вытекает из следствия 10.3.11 и теоремы 10.3.12. В противном случае нужно применить результат упр. 8.15 к вложению графика морфизма f . $\square$

Напомним, что мы положили ${}^pH^0 = {}^p\tau^{\leq 0} \circ {}^p\tau^{\geq 0}$ и ${}^pH^n = {}^pH^0 \circ [n]$.

Следствие 10.3.14. *Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$. Тогда*

$$(10.3.27) \quad \text{SS}({}^pH^j(F)) \subset \text{SS}(F).$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что ${}^pH^j(\phi_f(F)) \simeq \phi_f({}^pH^j(F))$ (следствие 10.3.13 и предложения 8.6.4). $\square$

Рассмотрим теперь функториальные операции на превратных пучках.

Предложение 10.3.15 (точность слева функтора f^{-1} и точность справа функтора $f^!$). *Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий.*

- (i) *Функтор f^{-1} переводит объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X)$ в объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq \dim Y/X}(Y)$.*
- (ii) *Функтор $f^!$ переводит объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X)$ в объекты категории ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq -\dim Y/X}(Y)$.*

Доказательство. Представим f как композицию отображения графика и проекции. Отдельно рассмотрим случай, когда f гладок и когда f — замкнутое вложение.

Если f — гладкий морфизм, то результат вытекает из предложения 10.3.3, так как в этом случае $f^! \simeq f^{-1} \otimes \text{oz}_{Y/X}[2 \dim Y/X]$.

Если f — замкнутое вложение, то будем рассуждать по индукции и редуцируем утверждение к случаю, когда Y — гиперповерхность, заданная уравнением $\{g = 0\}$. Тогда результат вытекает из рассуждения выделенного треугольника (8.6.7) и следствия 10.3.13. $\square$

Следствие 10.3.16. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$, и пусть отображение $f: Y \rightarrow X$ нехарактеристично относительно F . Тогда

- (i) f нехарактеристично относительно ${}^p H^j(F)$, ${}^p \tau \geq j$ и ${}^p \tau \leq j$;
- (ii) если $F \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^0(X))$, то $f^{-1}F \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\dim Y/X}(Y))$ и $f^!F \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{-\dim Y/X}(Y))$;
- (iii) ${}^p H^j(f^{-1}(F)) \simeq f^{-1}({}^p H^{j-\dim Y/X}(F))[\dim Y/X]$,
 ${}^p H^j(f^!(F)) \simeq f^!({}^p H^{j+\dim Y/X}(F))[-\dim Y/X]$.

Доказательство. (i) вытекает из следствия 10.3.14.

(ii) следует из предложения 10.3.15, так как $f^!(F) \simeq f^{-1}(F) \otimes_{\text{ог}_{Y/X}}[2 \dim Y/X]$.

(iii) следует из (i) и (ii). $\square$

Предложение 10.3.17. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. Предположим, что любая точка $x \in X$ имеет открытую окрестность U , такую, что $f^{-1}(U)$ является многообразием Штейна.

- (i) Если $G \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(Y))$, $Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$, то $Rf_*G \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(X))$.
- (ii) Если $G \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(Y))$, $Rf_!G \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-c-c}^b(X))$, то $Rf_!G \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(X))$.

Доказательство. Так как результат очевиден, если f — замкнутое вложение, то, представляя f в виде композиции графика и проекции, будем считать f гладким.

Пусть $G \in \text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(Y))$ (соответственно $\text{Ob}({}^p \mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(Y))$). Выберем μ -стратификацию $X = \bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$, такую, что $\text{SS}(Rf_*G)$ (соответственно $\text{SS}(Rf_!G)$) содержится в $\bigsqcup_{\alpha} T_{X_{\alpha}}^* X$. Для точки $x \in X_{\alpha}$ найдем подмногообразие $Z \subset X$, пересекающее X_{α} трансверсально в x и такое, что $\dim Z + \dim X_{\alpha} = \dim X$. Теперь, учитывая (10.3.4) и (10.3.5), достаточно показать, что

$$(10.3.28) \quad \begin{cases} i_x^{-1} i_Z^! Rf_*G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq \dim X_{\alpha}}(\mathcal{M}\text{od}(A))) \\ \text{(соотв. } i_x^! i_Z^{-1} Rf_!G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq -\dim X_{\alpha}}(\mathcal{M}\text{od}(A)))) \end{cases}$$

Пусть $\tilde{f}: f^{-1}(Z) \rightarrow Z$ — ограничение морфизма f . Тогда $i_Z^! Rf_*G \simeq R\tilde{f}_* i_{f^{-1}(Z)}^! G$ и $i_Z^{-1} Rf_!G \simeq R\tilde{f}_! i_{f^{-1}(Z)}^{-1} G$. Следовательно, для достаточно

малой штейновой открытой окрестности точки x имеем

$$(10.3.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} i_x^{-1} i_Z^! Rf_* G \simeq R\Gamma(U; i_Z^! Rf_* G) \\ \simeq R\Gamma(\tilde{f}^{-1}(U); i_{f^{-1}(Z)}^! G) \\ (\text{соотв. } i_x^! i_Z^{-1} Rf_* G \simeq R\Gamma_c(U; i_Z^{-1} Rf_* G) \\ \simeq R\Gamma_c(\tilde{f}^{-1}(U); i_{f^{-1}(Z)}^{-1} G)). \end{array} \right.$$

Так как $i_{f^{-1}(Z)}^! G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\leq \dim X_\alpha}(f^{-1}(Z)))$ (соответственно $i_{f^{-1}(Z)}^{-1} G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\geq -\dim X_\alpha}(f^{-1}(Z)))$), то (10.3.28) по предложению 10.3.15 следует из (10.3.29) и теоремы 10.3.8. $\square$

Предложение 10.3.18. Пусть E — комплексное векторное расслоение над X со слоем размерности n . Тогда преобразование Фурье-Сато переводит объекты из ${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\leq 0}(E) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$ и объекты из ${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\geq 0}(E) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$ в объекты из ${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\leq n}(E^*) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E^*)$ и в объекты из ${}^p\mathbf{D}_{w-C-c}^{\geq n}(E^*) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E^*)$ соответственно.

Доказательство. Пусть F принадлежит $\mathbf{D}_{w-C-c}^b(E) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} E \times_X E^* & \xrightarrow{\gamma} & E^* \times \mathbb{C} & & \\ \swarrow p_1 & & \swarrow \text{pr} & \searrow t & \\ E & & E^* & & \mathbb{C} \xrightarrow{\text{Re}} \mathbb{R} \end{array}$$

где p_1 и p_2 (соответственно pr и t) обозначают первую и вторую проекции, определенные на $E \times_X E^*$ (соответственно на $E^* \times \mathbb{C}$), а γ — отображение $(x, y) \mapsto (y, \langle x, y \rangle)$. Тогда по определению 3.7.8 имеем

$$(10.3.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} F^\wedge \simeq R p_{2*} R\Gamma_{\gamma^{-1}(E^* \times (\text{Re})^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}))}(p_1^{-1} F) \\ \simeq R p_{2*} ((p_1^{-1} F)_{\gamma^{-1}(E^* \times (\text{Re})^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0}))}). \end{array} \right.$$

Используя первый изоморфизм из (10.3.30), получаем

$$\begin{aligned} F^\wedge &\simeq R \text{pr}_* R\Gamma_{\gamma^{-1}(E^* \times (\text{Re})^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0}))}(p_1^{-1} F) \\ &\simeq R \text{pr}_* R\Gamma_{E^* \times (\text{Re})^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})}(R\gamma_* p_1^{-1} F). \end{aligned}$$

Так как $R\gamma_* p_1^{-1} F$ $\mathbb{C}^\times$ -коничен по отношению к действию $\mathbb{C}^\times$ на $\mathbb{C}$, то

$$(10.3.31) \quad F^\wedge \simeq \phi_t R\gamma_* p_1^{-1} F.$$

Аналогично, используя второй изоморфизм из (10.3.30), получаем

$$(10.3.32) \quad \begin{aligned} F^\wedge &\simeq R \operatorname{pr}_1((R\gamma_! p_1^{-1} F)_{E^*} \times (\operatorname{Re})^{-1}(\mathbb{R}_{\leq 0})) \\ &\simeq \phi_t(R\gamma_! p_1^{-1} F). \end{aligned}$$

Если F принадлежит ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq 0}(E) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$ (соответственно ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq 0}(E) \cap \mathbf{D}_{\mathbb{R}^+}^b(E)$), то по предложению 10.3.3 $p_1^{-1}F$ принадлежит ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\leq n}(E \times_X E^*)$ (соответственно ${}^p\mathbf{D}_{w-c-c}^{\geq n}(E \times_X E^*)$). Теперь мы можем применить предложение 10.3.17 к отображению γ и завершить доказательство использованием t -точности ϕ_t (следствие 10.3.13). $\square$

Предложение 10.3.19. Пусть Y — замкнутое подмногообразие в X коразмерности n . Тогда функторы $\nu_Y: \mathbf{D}_{w-c-c}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{w-c-c}^b(T_Y X)$ и $\mu_Y[\operatorname{codim} Y]: \mathbf{D}_{w-c-c}^b(X) \rightarrow \mathbf{D}_{w-c-c}^b(T_Y^* X)$ являются t -точными.

Доказательство. Сначала рассмотрим комплексный аналог нормальной деформации, введенной в § 4.1.

Мы можем предположить, что X открыто в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ и $Y = \{z' = 0\}$, где $z = \{z', z''\}$, $z' \in \mathbb{C}^n$, $z'' \in \mathbb{C}^m$. Пусть f — отображение из $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$, заданное формулой $(t, z', z'') \mapsto (tz', z'')$, и пусть $\tilde{X} = f^{-1}(X)$. Ограничение морфизма f на $\tilde{X}$ мы будем по-прежнему обозначать через f .

Пусть $Z = t^{-1}(0) \subset \tilde{X}$. Отображение Tf определяет морфизм $T_Z f: T_Z \tilde{X} \rightarrow T_Y X$. Отождествляя $T_Y X$ с $Y \times \mathbb{C}^n$ и $T_Z \tilde{X}$ с $Z \times \mathbb{C}$, получаем, что морфизм $T_Z f$ задается формулой $(z', z'', \tau) \mapsto (z'', \tau z')$. Пусть $s: Z \rightarrow T_Z \tilde{X}$ — сечение, заданное формулой $(z', z'') \mapsto (z', z'', 1)$. Тогда $T_Z f$ отождествляет $s(Z)$ с $T_Y X$.

Применяя теперь предложение 4.2.5 к гладкому отображению $T_Z f|_{T_Z \tilde{X}}$, получаем изоморфизмы

$$\begin{aligned} \nu_Y(F) &\simeq (T_Z f \circ s)^{-1} \nu_Y(F) \\ &\simeq s^{-1} (T_Z f)^{-1} \nu_Y(F) \\ &\simeq s^{-1} \nu_Z(f^{-1} F) \\ &\simeq \psi_t(f^{-1} F). \end{aligned}$$

Утверждение о ν_Y следует из того, что отображения $F \mapsto (f^{-1}(F)[1])|_{t \neq 0}$ и $\psi_t[-1]$ сохраняют t -структуру, ассоциированную со средней превратностью. Теперь применение предложения 10.3.18 завершает доказательство. $\square$

Следствие 10.3.20. (i) Пусть $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathcal{C}-c}^{\leq 0}(X))$, и пусть $G \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(X))$. Тогда $\mu\text{hom}(F, G)[\dim X] \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathcal{C}-c}^{\geq 0}(T^*X))$.

(ii) Пусть основное кольцо A является полем. Тогда если F и G принадлежат ${}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^0(X)$, то $\mu\text{hom}(F, G)[\dim X] \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{\mathcal{C}-c}^0(T^*X))$.

Доказательство. (i) следует из предложения 10.3.6 и предыдущего предложения, примененного к диагонали $X \times X$.

(ii) следует из (i) и предложения 8.4.14, так как

$$\mathbf{D}_{T^*X}(\mu\text{hom}(F, G)[\dim X]) \simeq \mu\text{hom}(G, F) \otimes_{\mathcal{O}_X} [\dim X]. \quad \square$$

Упражнения к гл. 10

Упражнение 10.1. Пусть $\mathbf{D}$ — триангулированная категория с t -структурой. Если $X \in \text{Ob}(\mathbf{D})$, то пусть $d^n(X): \tau^{>n}X \rightarrow (\tau^{\leq n}X)[1]$ — морфизм d , определенный в предложении 10.1.4.

(i) Докажите, что при $b \geq a$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tau^{>a}X & \xrightarrow{d^a(X)} & (\tau^{\leq a}X)[1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau^{>b}X & \xrightarrow{d^b(X)} & (\tau^{\leq b}X)[1] \end{array}$$

коммутативна.

(ii) Докажите, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} (\tau^{>n}X)[1] & \xrightarrow{d^n(X)[1]} & (\tau^{\leq n}X)[1] \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \tau^{>n-1}(X[1]) & \xrightarrow{d^{n-1}(X[1])} & \tau^{\leq n-1}(X[1]) \end{array}$$

антикоммутативна.

Упражнение 10.2. Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ — нётерова отделимая схема, такая, что $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным кольцом для любого $x \in X$, т. е. $\text{gld}(\mathcal{O}_{X,x}) < \infty$. Предположим, что X равноразмерностна и имеет размерность d . Пусть $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X)$ — полная подкатегория в $\mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X)$, состоящая из объектов с когерентными когомологиями. Определите

функтор двойственности $D(F) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(F, \mathcal{O}_X)[d]$ из $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X)$ в $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X)$.

- (i) (a) Докажите, что $\mathbf{D}^b(\text{Coh}(\mathcal{O}_X)) \simeq \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X)$, где $\text{Coh}(\mathcal{O}_X)$ — это абелева категория когерентных $\mathcal{O}_X$ -модулей (это утверждение верно для всех нётеровых схем X).
- (b) Докажите, что $D \circ D \simeq \text{id}$.
- (ii) Определите полные подкатегории в $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X)$ формулами

$${}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\leq 0}(\mathcal{O}_X) = \{F \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X); \dim \text{supp}(\tau^{>p(k)} F) < k \text{ для всех } k\}$$

$${}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\geq 0}(\mathcal{O}_X) = \{F \in \mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_X); H_Z^j(F) = 0 \text{ для всех замкнутых подмножеств } Z \text{ и всех } j < p(\dim Z)\}.$$

(Здесь p обозначает превратность.)

- (a) Докажите, что D переводит ${}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\leq 0}(\mathcal{O}_X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\geq 0}(\mathcal{O}_X)$ в ${}^{p*}\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\geq 0}(\mathcal{O}_X)$ и ${}^{p*}\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\leq 0}(\mathcal{O}_X)$ соответственно.
- (b) Докажите, что пара $({}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\leq 0}(\mathcal{O}_X)$ и ${}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\geq 0}(\mathcal{O}_X))$ образует t -структуру.
- (c) Докажите, что $U \mapsto {}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^0(\mathcal{O}_U)$ является стеком (см. предложение 10.2.9).

(Указание. Используйте результат Гротендика [Grothendieck 5]: для любого когерентного идеала I и любого объекта $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{O}_X))$ с квазикогерентными пучками когомологий $H_Z^n \simeq \varinjlim_k \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^n(\mathcal{O}_X/I^k, F)$, где $Z = \text{supp}(\mathcal{O}_X/I)$.)

Упражнение 10.3. Пусть A — кольцо дискретного нормирования.

Докажите, что любая t -структура на $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(A))$ является либо естественной, либо, с точностью до сдвига, двойственной к естественной. Другими словами, если $X = \text{Spec}(A)$, то она равна $({}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\leq 0}(\mathcal{O}_X), {}^p\mathbf{D}_{\text{coh}}^{\geq 0}(\mathcal{O}_X))$ для некоторой превратности p (см. упр. 10.2). (Указание. Используйте упр. 1.18 и для t -структуры $(\mathbf{D}^{\leq 0}, \mathbf{D}^{\geq 0})$ на $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od^f(A))$ сначала докажите, что если $A \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 0})$ и $A \notin \text{Ob}(\mathbf{D}^{\geq 1})$, то $A \in \text{Ob}(\mathbf{D}^{\leq 0})$.)

Упражнение 10.4. Пусть X — вещественно-аналитическое многообразие и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$. Положим $d = \dim \text{supp}(F)$. В предположении, что $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X))$ (соответственно ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X)$) докажите, что $H^j(X; F) = 0$ при $j > p(d) + d$ (соответственно $H^j(X; F) = 0$ при $j < p(d)$).

Упражнение 10.5. Пусть X — вещественно-аналитическое многообразие, U открыто и субаналитично в X , j — вложение $U \hookrightarrow X$ и p — превратность. Для $F \in \text{Ob}({}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X))$ пусть ${}^p j_* j^{-1} F = {}^p H^0(j_* j^{-1} F)$ и ${}^p j_* j^{-1} F = {}^p H^0(Rj_* j^{-1} F)$ (см. § 10.1). Докажите эквивалентность следующих двух условий:

- (i) F изоморфен образу ${}^p j_* j^{-1} F \rightarrow {}^p j_* j^{-1} F$ в ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X)$;
- (ii) F не имеет ненулевых подобъектов и факторобъектов с носителями в $X \setminus U$ в ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^0(X)$.

Упражнение 10.6. Пусть X — комплексное многообразие и $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^b(X))$. Докажите, что $\text{SS}(F) = \bigcup_j \text{SS}({}^p H^j(F))$.

Упражнение 10.7. Пусть X — комплексное многообразие, а $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ — точная последовательность в ${}^p\mathbf{D}_{w-\mathbb{C}-c}^0(X)$. Докажите, что $\text{SS}(F) = \text{SS}(F') \cup \text{SS}(F'')$.

Упражнение 10.8. Предположим, что основное кольцо A является полем. Пусть X — комплексное многообразие размерности n , а F — превратный пучок на X .

- (i) Пусть Z замкнуто в X . Докажите, что $H^{-n}(F)|_Z$ удовлетворяет «принципу аналитического продолжения», т. е. носитель любого сечения этого пучка на открытом подмножестве $U \subset Z$ замкнут и открыт в U .
- (ii) Пусть Z — замкнутое субаналитическое подмножество в X , а $x \in Z$ — неизолированная точка в Z . Докажите, что $(H_Z^n(F))_x = 0$. (Указание. Используйте соображения двойственности.)

Упражнение 10.9. Пусть Y — комплексная гиперповерхность в комплексном многообразии X . Докажите, что $M_Y[\dim X - 1]$ является превратным пучком для любого A -модуля M .

Упражнение 10.10. Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}_{w-\mathbb{R}-c}^b(X))$, Z — локально-замкнутое субаналитическое подмножество в X и $j \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $H_Z^j(F) = 0$ для всех $j < r$ в том и только в том случае, когда $\dim(Z \cap \text{cosupp}^j(F)) < j - r$ для всех j .

Замечания

Источником теории превратных пучков являются, с одной стороны, «когомологии пересечений» Горески и Макферсона (см. [Goresky-MacPherson 1]) — удачная попытка обобщить теорию двойственности

Пуанкаре на случай пространств с особенностями, а с другой — теория голономных $\mathcal{D}$ -модулей (обе теории тесно связаны, см. гл. 11). Уже в 1975 г. Касивара [Kashiwara 3] показал, что если $\mathcal{M}$ — голономный $\mathcal{D}$ -модуль на комплексном многообразии X , то комплекс $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)[\dim_{\mathbb{C}} X]$ превратен, и дал следующую формулировку «проблемы Римана–Гильберта» (см. [Ramis 1, p. 287]): определить плотную абелеву подкатегорию holreg абелевой категории голономных $\mathcal{D}$ -модулей, такую, что функтор $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(*, \mathcal{O}_X)$ индуцирует эквивалентность категорий $\mathbf{D}_{\mathrm{holreg}}^b(\mathcal{D}_X)$ и $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$. Эта проблема была решена в 80-х гг. (см. [Kashiwara 6], [Mebkhout 1]). Из существования такой эквивалентности немедленно вытекает существование абелевой подкатегории в $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$, соответствующей абелевой подкатегории holreg в $\mathbf{D}_{\mathrm{holreg}}^b(\mathcal{D}_X)$. Это и есть категория превратных пучков.

Собственно теория превратных пучков создана Габбером и Бейлинсоном, Бернштейном и Делинем [Beilinson–Bernstein–Deligne 1]. Большинство результатов данной главы хорошо известны. Результаты о t -структурах в § 10.1 извлечены из упомянутой выше работы Бейлинсона, Бернштейна и Делиня, им же принадлежит теорема 10.2.8. Центральный результат — о сохранении превратности при действии функтора исчезающего цикла — принадлежит Горески и Макферсону [Goresky–MacPherson 3] (в работе [Beilinson–Bernstein–Deligne 1] этот результат доказан в этальном случае). Микролокальная интерпретация превратности была дана в работе [Kashiwara–Schapira 3] (в случае $A = \mathbb{C}$). Отметим, наконец, интересную конструкцию превратных пучков в работе [MacPherson–Vilonen 1].

Приложения к $\mathcal{O}$ -модулям и $\mathcal{D}$ -модулям

По определению комплексное многообразие X оснащено пучком колец $\mathcal{O}_X$ голоморфных функций. Структура пучка $\mathcal{O}_X$ и теория $\mathcal{O}_X$ -модулей к настоящему времени хорошо изучены, и мы не собираемся здесь объяснять эту теорию с самого начала. Мы ограничимся только несколькими основными фактами, касающимися алгебраической структуры пучка $\mathcal{O}_X$, его вялой размерности и операций над $\mathcal{O}_X$. Ссылки даются на работы [Banica-Stanasila 1], [Cartan 2], [Hörmander 1] и [Serre 1].

Затем мы вводим пучок колец $\mathcal{D}_X$ голоморфных дифференциальных операторов конечного порядка на X . Как и в предыдущем случае, теория $\mathcal{D}_X$ -модулей хорошо изучена и наше изложение будет очень кратким. Его цель — дать основные понятия (включая понятие характеристического многообразия) и описать операции над $\mathcal{D}_X$ -модулями. Далее мы напомним классическую теорему Коши-Ковалевской и ее обобщение на случай $\mathcal{D}_X$ -модулей, а также выведем формулу

$$(11.0.1) \quad SS(R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \subset \mathrm{char}(\mathcal{M}),$$

где $\mathrm{char}(\mathcal{M})$ — характеристическое многообразие модуля $\mathcal{M}$ (это включение в действительности является равенством, см. § 11.4). В качестве приложения формулы (11.0.1) немедленно получается с помощью результатов § 8.5 конструктивность комплекса $R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ для случая голономного модуля $\mathcal{M}$; легко также показать, что этот комплекс является превратным.

Более подробное изложение теории $\mathcal{D}_X$ -модулей можно найти в работах [Björk 1], [Kashiwara 5] и [Schapira 2].

После этого мы изучаем пучок $\mathcal{O}_X$ «микролокально». Введя кольцо $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ микролокальных операторов, мы даем набросок доказательства важной теоремы, которая утверждает, что голоморфные контактные преобразования можно локально «проквантовать» над $\mathcal{O}_X$. В конце главы рассматривается пучок $\mathcal{C}_M$ микрофункций Сато на вещественно-аналитическом многообразии M . С использованием формулы (11.0.1) и результатов гл. 5 и 6 воспроизведение многих классических результатов теории дифференциальных уравнений

в частных производных становится легким упражнением. В частности, это относится к результатам об эллиптических уравнениях, аналитическом волновом фронте, микрогиперболических системах и распространении особенностей.

Уже ясно, что цель этой главы состоит не в том, чтобы дать полное или систематическое изложение теории аналитических (микро)дифференциальных уравнений, а в том, что ввести читателя в эту теорию и помочь ему лучше разобраться в основополагающей работе [Sato-Kawai-Kashiwara 1] в свете теории микронесителей пучков.

В данной главе все пучки, если не оговорено противное, суть пучки векторных пространств над $\mathbb{C}$.

11.1. Пучок $\mathcal{O}_X$

Пусть X — комплексное многообразие комплексной размерности n , и пусть $\mathcal{O}_X$ — пучок колец голоморфных функций на X . Мы начнем с описания взаимосвязей между многообразием X и подлежащим вещественно-аналитическим многообразием $X^{\mathbb{R}}$.

Обозначим через $\bar{X}$ комплексно-сопряженное к X многообразие. Это такое комплексное многообразие, что $\bar{X}^{\mathbb{R}} = X^{\mathbb{R}}$, но голоморфные функции на $\bar{X}$ суть антиголоморфные функции на X . Итак, имеется изоморфизм колец $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{X}}$, $u \mapsto \bar{u}$, причем $\overline{\bar{u}} = u$ для $u \in \mathbb{C}$ и $u \in \mathcal{O}_X$.

Отождествим многообразие $X^{\mathbb{R}}$ с диагональю в $X \times \bar{X}$. Тогда произведение $X \times \bar{X}$ есть комплексификация многообразия $X^{\mathbb{R}}$. Если через $\mathcal{A}_{X^{\mathbb{R}}}$ обозначить пучок (комплекснозначных) вещественно-аналитических функций, то $\mathcal{A}_{X^{\mathbb{R}}} = \mathcal{O}_{X \times \bar{X}}|_{X^{\mathbb{R}}}$.

Кроме того,

$$TX^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = TX \times_X T\bar{X}.$$

Композиция отображений

$$TX^{\mathbb{R}} \rightarrow TX^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq TX \times_X T\bar{X} \rightarrow TX$$

задает изоморфизм

$$(11.1.1) \quad TX^{\mathbb{R}} \simeq (TX)^{\mathbb{R}}$$

вещественно-аналитических векторных расслоений над $X^{\mathbb{R}}$ и по двойственности изоморфизм

$$(11.1.2) \quad T^*X^{\mathbb{R}} \simeq (T^*X)^{\mathbb{R}}.$$

Пусть ϕ — вещественная функция класса C^1 на многообразии $X^{\mathbb{R}}$. Последний изоморфизм сопоставляет вектору $d\phi(x) \in T_x^* X^{\mathbb{R}}$ вектор $\partial\phi(x) \in T_x^* X$, где $d\phi$ — вещественный дифференциал, а $\partial\phi$ — его голоморфная компонента.

Пусть α_X (соответственно $\alpha_{X^{\mathbb{R}}}$) — комплексная (соответственно вещественная) каноническая 1-форма на многообразии T^*X (соответственно $T^*X^{\mathbb{R}}$). Тогда $\alpha_{\bar{X}} = \bar{\alpha}_X$ и $\alpha_{X \times \bar{X}} = \alpha_X + \alpha_{\bar{X}}$. Поэтому

$$(11.1.3) \quad \alpha_{X^{\mathbb{R}}} = 2 \operatorname{Re} \alpha_X.$$

Пусть $z = (z_1, \dots, z_n)$ — система голоморфных координат на X , и пусть $(z; \zeta)$ — ассоциированные с ней координаты на T^*X , так что $\alpha_X = \sum_j \zeta_j dz_j$. Если $z = x + \sqrt{-1}y$ и $\zeta = \xi + \sqrt{-1}\eta$, то

$$(11.1.4) \quad \alpha_{X^{\mathbb{R}}} = 2 \sum_j (\xi_j dx_j - \eta_j dy_j).$$

Эта форма индуцирует гамильтоново векторное поле $H_h^{\mathbb{R}}$ для любой вещественнозначной функции h на $T^*X^{\mathbb{R}}$.

Всюду в дальнейшем, если путаница исключена, мы отождествляем $(T^*X)^{\mathbb{R}}$ с $T^*X^{\mathbb{R}}$ и даже иногда пишем T^*X и X вместо $T^*X^{\mathbb{R}}$ и $X^{\mathbb{R}}$.

Напомним теперь некоторые основные понятия, связанные с когерентностью. Пусть $(X, \mathcal{A}_X)$ — окольцованное пространство. Если не оговорено противное, под $\mathcal{A}_X$ -модулем будем понимать левый $\mathcal{A}_X$ -модуль.

Говорят, что $\mathcal{A}_X$ -модуль M *конечно свободен*, если он изоморфен модулю $\mathcal{A}_X^N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Он называется *локально конечно свободным*, если у каждой точки $x \in X$ есть такая открытая окрестность U , что $M|_U$ — конечно свободный $\mathcal{A}_X|_U$ -модуль.

Точная последовательность $\mathcal{A}_X$ -модулей

$$(11.1.5) \quad M_s \rightarrow \dots \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

называется *s-представлением* $\mathcal{A}_X$ -модуля M . Такое представление называется *конечно свободным* или *локально конечно свободным*, если все M_j обладают соответствующим свойством.

Резольвентой длины m называется со-представление с $M_j = 0$ при $j > m$.

Говорят, что $\mathcal{A}_X$ -модуль M *локально имеет конечный тип* (соответственно *конечное представление*), если он локально допускает конечно свободное 0-представление (соответственно 1-представление), т. е. если локально на X существует точная последовательность $\mathcal{A}_X^N \rightarrow M \rightarrow 0$ (соответственно $\mathcal{A}_X^{N_1} \rightarrow \mathcal{A}_X^{N_0} \rightarrow M \rightarrow 0$).

Определение 11.1.1. (i) $\mathcal{A}_X$ -модуль M называется *когерентным*, если он локально имеет конечный тип и если для любого открытого множества U любой $\mathcal{A}_U$ -подмодуль локально конечного типа локально имеет конечное представление.

(ii) Пучок $\mathcal{A}_X$ называется *когерентным*, если он когерентен как левый $\mathcal{A}_X$ -модуль.

(iii) Пучок $\mathcal{A}_X$ называется *нётеровым*, если он когерентен, стебель $\mathcal{A}_{X,x}$ нётеров для любого $x \in X$ и, наконец, для любого открытого подмножества $U \subset X$ любое возрастающее семейство когерентных подмодулей произвольного когерентного $\mathcal{A}_X|_U$ -модуля локально стабилизируется.

Обозначим через $\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{A}_X)$ категорию левых когерентных модулей над когерентным кольцом $\mathcal{A}_X$. Эта категория абелева.

Вернемся к случаю комплексного многообразия X комплексной размерности n .

Теорема 11.1.2. (i) Пучок колец $\mathcal{O}_X$ нётеров (и, в частности, когерентен).

(ii) Пусть M — когерентный $\mathcal{O}_X$ -модуль. Тогда локально на многообразии X модуль M допускает конечно свободную резольвенту длины n .

Результат о когерентности пучка $\mathcal{O}_X$ принадлежит Ока [Ока 1]. Свойство (ii) известно под названием *теоремы Гильберта о сизигиях*.

Теорема 11.1.3. Пусть Z — локально замкнутое подмножество многообразия X , и пусть $x \in X, x \notin \text{Int } Z$. Тогда

$$H_Z^j(\mathcal{O}_X)_x = 0 \text{ при } j \notin [1, n].$$

Разумеется, тривиальность группы $H_Z^0(\mathcal{O}_X)_x$ эквивалентна хорошо известному *принципу аналитического продолжения*. Тривиальность групп $H_Z^j(\mathcal{O}_X)_x$ при $j > n$ доказана в [Malgrange 1] (см. также § 9.11 гл. 2).

В заключение обсудим операции над пучком $\mathcal{O}_X$.

Пусть $(Y, \mathcal{O}_Y)$ — другое комплексное многообразие. Тогда имеется естественный морфизм

$$(11.1.6) \quad \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{X \times Y}$$

пучков на $X \times Y$. Пусть теперь задано голоморфное отображение $f: Y \rightarrow X$. Тогда имеется естественный морфизм

$$(11.1.7) \quad f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$$

пучков на Y . Этот морфизм есть не что иное, как композиция с отображением f , которая переводит голоморфную функцию ϕ на многообразии X в голоморфную функцию $\phi \circ f$ на многообразии Y . Сложнее дать описание прямого образа.

Пусть $\mathcal{O}_X^{(p)}$ обозначает пучок голоморфных p -форм на X . Положим

$$(11.1.8) \quad \Omega_X = \mathcal{O}_X^{(n)} \otimes \sigma_{X^*},$$

где σ_X — ориентирующий пучок на многообразии $X^{\mathbb{R}}$ и $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

Разумеется, комплексное многообразие X всегда ориентируемо, и в большинстве случаев можно забыть о пучке σ_X .

Пучок Ω_X является обратимым $\mathcal{O}_X$ -модулем, т. е. локально он свободен и имеет ранг 1 над $\mathcal{O}_X$. Если $\mathcal{L}$ — обратимый $\mathcal{O}_X$ -модуль, то мы полагаем

$$(11.1.9) \quad \mathcal{L}^{\otimes -1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X).$$

Разумеется, $\mathcal{L}^{\otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X$.

Элемент объема порождает пучок Ω_X над $\mathcal{O}_X$. Существование элемента объема гарантировано лишь локально.

Теорема 11.1.4. *В категории $\mathbf{D}^b(X)$ существует естественный морфизм*

$$Rf_* \Omega_Y[\dim_{\mathbb{C}} Y] \rightarrow \Omega_X[\dim_{\mathbb{C}} X].$$

Этот морфизм функториален относительно композиции отображений.

Напомним (см. § 2.9), что этот морфизм может быть получен следующим образом.

Пусть $\mathcal{D}b_Y^{(p,q)}$ — пучок форм-распределений на $Y^{\mathbb{R}}$ бистепени (p, q) относительно Y и $\bar{Y}$. Положим $m = \dim_{\mathbb{C}} Y$, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $l = m - n$. Существует морфизм «интегрирования»

$$f_* \mathcal{D}b_{Y^{\mathbb{R}}}^{(p,q)} \otimes \sigma_Y \rightarrow \mathcal{D}b_{X^{\mathbb{R}}}^{(p-l, q-l)} \otimes \sigma_X,$$

который и дает нужный морфизм при замене пучков Ω_Y и Ω_X их резольвентами. Дольбо с коэффициентами соответственно в $\mathcal{D}b_Y^{(m, \cdot)}$ и $\mathcal{D}b_X^{(n, \cdot)}$.

В качестве приложения этой теоремы построим *фундаментальный класс*, ассоциированный с подмногообразием $Z \subset X$ (комплексной) коразмерности d .

Пусть $\mathcal{I}$ — определяющий идеал подмногообразия Z в X , т. е. пучок идеалов кольца $\mathcal{O}_X$, порождаемых сечениями, обращающимися в нуль на Z . Тогда имеется естественный морфизм

$$(11.1.10) \quad \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{O}_X^{(1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z,$$

задаваемый формулой $f \mapsto df$. Из этого морфизма получаем морфизм

$$(11.1.11) \quad \wedge^d(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \rightarrow \mathcal{O}_X^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z.$$

Но

$$\wedge^d(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \simeq \mathcal{O}_Z^{(n-d) \otimes -1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{(n)}.$$

Поэтому мы получаем морфизм

$$(11.1.12) \quad \mathcal{O}_Z \rightarrow \mathcal{O}_Z^{(n-d)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{(d)} \otimes \mathcal{O}_X^{(n) \otimes -1}.$$

С другой стороны, в теореме 11.1.4 определен морфизм

$$\Omega_Z \rightarrow H_Z^d(\Omega_X).$$

Умножая тензорно на $\mathcal{O}_X^{(d)} \otimes \mathcal{O}_X^{(n) \otimes -1}$ и комбинируя результат с формулой (11.1.12), мы получаем морфизм

$$(11.1.13) \quad \mathcal{O}_Z \rightarrow H_Z^d(\mathcal{O}_X^{(d)}) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z.$$

Определение 11.1.5. Образ сечения 1 пучка $\mathcal{O}_Z$ под действием морфизма (11.1.13) называется *фундаментальным классом* подмногообразия Z многообразия X и обозначается через δ_Z .

Пример 11.1.6. Пусть подмногообразие Z задается уравнениями $f_1 = \dots = f_d = 0$, причем $df_1 \wedge \dots \wedge df_d \neq 0$ на Z . Тогда δ_Z есть класс формы $\frac{1}{(2\pi i)^d} \left(\frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_d}{f_d} \right)$.

Здесь $1/f_1 \dots f_d$ — образ в $H_Z^d(X; \mathcal{O}_X)$ элемента группы $H^{d-1}(X \setminus Z; \mathcal{O}_X)$, полученного путем рассмотрения открытого покрытия $\{f_j \neq 0\}_{j=1, \dots, d}$ множества $X \setminus Z$ (см. упр. 2.26).

11.2. $\mathcal{D}_X$ -модули

Прежде всего напомним некоторые основные факты о фильтрованных кольцах и модулях (см. [Scharira 2]).

Все кольца предполагаются унитарными (т. е. кольцами с единицей 1). Если не оговорено противное, под модулем понимается унитарный левый модуль (т. е. левый модуль, на котором 1 действует как тождественное отображение).

Фильтрованное кольцо A (или кольцо с фильтрацией) над $\mathbb{Z}$ — это кольцо (также обозначаемое через A), оснащенное таким семейством подгрупп $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, что

$$(11.2.1) \quad \begin{cases} A_k \subset A_{k+1} \text{ для любого } k, 1 \in A_0, \\ A_k \cdot A_l \subset A_{k+l} \text{ для любых } k, l \text{ и } A = \bigcup_k A_k. \end{cases}$$

Фильтрованным модулем (или модулем с фильтрацией) M над A называется A -модуль M , оснащенный таким семейством подгрупп $\{M_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, что

$$(11.2.2) \quad \begin{cases} M_k \subset M_{k+1} \text{ для любого } k, \\ A_l \cdot M_k \subset M_{k+l} \text{ для любых } k, l \text{ и } M = \bigcup_k M_k. \end{cases}$$

Говорят, что фильтрации $\{M_k\}_k$ и $\{M'_k\}_k$ на M эквивалентны, если существует такое $r \in \mathbb{N}$, что $M_{k-r} \subset M'_k \subset M_{k+r}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. В частности, любая фильтрация $\{M_k\}_k$ на M эквивалентна сдвинутой на r фильтрации, которая обозначается через $M_{[r]}$ и задается формулой

$$(M_{[r]})_k = M_{k+r} \text{ для } k \in \mathbb{Z}.$$

Морфизмом фильтрованных A -модулей $\psi: M \rightarrow N$ называется такой морфизм A -модулей, что $\psi(M_k) \subset N_k$ для всех k .

Пусть $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ — точная последовательность A -модулей, и пусть модуль M снабжен некоторой фильтрацией. Тогда индуцированная фильтрация на L задается формулой $L_k = L \cap M_k$, а фильтрация образа на N — формулой $N_k = \psi(M_k)$.

Последовательность $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ фильтрованных A -модулей называется *строго точной*, если она является точной последовательностью A -модулей, а фильтрация на L (соответственно на N) совпадает с индуцированной фильтрацией (соответственно фильтрацией образа). *Фильтрованная прямая сумма $M \oplus M'$* двух фильтрованных модулей M и M' определяется следующим образом:

$$(M \oplus M')_k = M_k \oplus M'_k.$$

Таким образом, категория фильтрованных A -модулей аддитивна. Следует, однако, иметь в виду, что эта категория не является абелевой. Например, фильтрованный морфизм $A \xrightarrow{\text{id}} A_{[1]}$ — мономорфизм и эпиморфизм, но, вообще говоря, не изоморфизм фильтрованных A -модулей.

По определению *конечно свободным фильтрованным A -модулем* называется фильтрованный A -модуль, изоморфный конечной прямой сумме модулей вида $A_{[r]}$.

Конечно свободным s -представлением фильтрованного A -модуля M называется строго точная последовательность фильтрованных A -модулей

$$(11.2.3) \quad L_s \rightarrow \dots \rightarrow L_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

в которой все L_j конечно свободны.

Фильтрованный модуль M называется *модулем конечного типа*, если он допускает конечно свободное 0-представление. В этом случае говорят, что фильтрация на M *хорошая*.

Фильтрованное кольцо A называется *нётеровым* (или *фильтрованным нётеровым*), если любой подобъект модуля конечного типа в категории фильтрованных A -модулей сам является модулем конечного типа. Это условие эквивалентно тому, что для любого A -модуля M , снабженного хорошей фильтрацией, и любого подмодуля N в M , снабженного такой фильтрацией, что $N \rightarrow M$ — фильтрованный морфизм, эта фильтрация хорошая. Если A — фильтрованное нётерово кольцо и, кроме того, для любого $\alpha \in A_{-1}$ элемент $1 - \alpha$ обратим, то A называется *кольцом Зарисского*.

Это определение фильтрованных нётеровых колец слегка отличается от определения 1.1.2 в гл. 2 книги [Schapira 2]. В действительности, как заметил ван Ойстейен (Van Oystaeyen), это последнее является слишком слабым и из него не вытекает, что $\text{gr}(A)$ — нётерово кольцо. В частности, предложение 1.1.7 в цитированной книге частично ошибочно. (Эта ошибка не имеет никаких последствий для оставшейся части указанной книги. Чтобы исправить ее, достаточно заменить слабое определение фильтрованного нётерова кольца определением, которое мы дали только что.)

Градуированное кольцо $\text{gr}(A)$ определяется так:

$$(11.2.4) \quad \text{gr}(A) = \bigoplus_k A_k / A_{k-1}.$$

Аналогично если M — фильтрованный A -модуль, то (градуированный) $\text{gr}(A)$ -модуль $\text{gr}(M)$ определяется так:

$$(11.2.5) \quad \text{gr}(M) = \bigoplus_k M_k / M_{k-1}.$$

Порядком элемента $u \in M$ называется наименьшее число $k \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, для которого $u \in M_k$ (мы считаем по определению, что $M_{-\infty} = 0$). Порядок обозначается через $\text{ord}(u)$.

Через σ_k обозначается проекция $M_k \rightarrow \text{gr}(M)$. Если $\text{ord}(u) = k$, то мы пишем $\sigma(u)$ вместо $\sigma_k(u)$.

Предложение 11.2.1. *Предположим, что $\text{gr}(A)$ нётерово (как градуированное кольцо) и $A_k = 0$ при $k < 0$. Тогда A — фильтрованное нётерово кольцо.*

Доказательство представляет собой легкое упражнение.

Предположим теперь, что кольцо $\text{gr}(A)$ коммутативно. Тогда можно определить скобку Пуассона на $\text{gr}(A)$, полагая для $\bar{a} \in A_k/A_{k-1}$, $\bar{b} \in A_l/A_{l-1}$

$$(11.2.6) \quad \{\bar{a}, \bar{b}\} = \sigma_{k+l-1}([a, b]),$$

где a (соответственно b) — любой элемент в A_k (соответственно в A_l), удовлетворяющий условию $\sigma_k(a) = \bar{a}$ (соответственно $\sigma_l(b) = \bar{b}$), а $[a, b] = ab - ba$.

Пусть M есть A -модуль конечного типа. Его можно наделить хорошей фильтрацией, выбрав набор образующих $(v_j)_{j=1}^N$ и полагая $M_k = \sum_j A_k v_j$. Очевидно, что любые две хорошие фильтрации модуля конечного типа эквивалентны. Теперь легко доказать, что радикал аннулятора модуля $\text{gr}(M)$ представляет собой градуированный идеал кольца $\text{gr}(A)$, который зависит только от M , а не от выбора хорошей фильтрации. Он обозначается через $\text{Icgr}(M)$. Итак,

$$(11.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{a} \in \text{Icgr}(M) \text{ — однородный элемент порядка } k \Leftrightarrow \\ \text{существует } l \in \mathbb{N}, \text{ такое, что } aM_n \subset M_{n+kl-1} \\ \text{для любого } n \text{ и любого } a \in A_{kl}, \\ \text{удовлетворяющего условию } \sigma(a) = \bar{a}^l. \end{array} \right.$$

Пусть A — фильтрованное нётерово кольцо. Рассмотрим точную последовательность

$$(11.2.8) \quad 0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

A -модулей конечного типа. Можно оснастить M хорошей фильтрацией, а L (соответственно N) — индуцированной фильтрацией (соответственно фильтрацией образа). Тогда (11.2.8) становится точной последовательностью фильтрованных модулей и последовательность

$$(11.2.9) \quad 0 \rightarrow \text{gr}(L) \rightarrow \text{gr}(M) \rightarrow \text{gr}(N) \rightarrow 0$$

сама является точной. Поэтому

$$(11.2.10) \quad \text{Icar}(M) = \text{Icar}(L) \cap \text{Icar}(N).$$

Более того, справедлив важный результат, принадлежащий Габберу [Gabber 1].

Теорема 11.2.2. Пусть $\text{gr}(A)$ — коммутативная нётерова алгебра над $\mathbb{Q}$. Тогда для любого A -модуля M конечного типа идеал $\text{Icar}(M)$ инволютивен, т. е.

$$\{\text{Icar}(M), \text{Icar}(M)\} \subset \text{Icar}(M).$$

Пусть теперь X — топологическое пространство. Пучок A фильтрованных колец на X — это пучок колец A , снабженный семейством пучков подгрупп $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, таким, что $A_k \subset A_{k+1}$, 1 есть сечение пучка A_0 , $A_k \cdot A_l \subset A_{k+l}$ и A является объединением пучков A_k . Аналогично определяется понятие фильтрованного A -модуля, конечно свободного фильтрованного A -модуля и т. д.

Говорят, что фильтрация A -модуля M хорошая, если локально на X существует фильтрованная точная последовательность $\mathcal{L} \rightarrow M \rightarrow 0$, в которой пучок $\mathcal{L}$ конечно свободен.

Предложение 11.2.3. Пусть A — пучок фильтрованных колец на X . Предположим, что $\text{gr}(A)$ когерентен как градуированное кольцо (соответственно нётеров) и для каждого $x \in X$ фильтрованное кольцо $A_{X,x}$ является кольцом Зарисского. Тогда

- (i) A когерентен (соответственно нётеров) как пучок колец;
- (ii) если M есть A -модуль, снабженный хорошей фильтрацией, то M когерентен как A -модуль в том и только в том случае, когда $\text{gr}(M)$ когерентен как градуированный модуль;
- (iii) если M когерентен и снабжен хорошей фильтрацией, а N — когерентный подмодуль в M , то индуцированная фильтрация на N является хорошей.

Доказательство см. в [Björk 1] или [Scharira 2].

Предположим теперь, что X — комплексное многообразие комплексной размерности n . Через $\mathcal{D}_X$ мы обозначаем пучок колец голоморфных дифференциальных операторов конечного порядка на X . Это подалгебра в $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$, порожденная $\mathcal{O}_X$ и векторными полями.

Фильтрация на $\mathcal{D}_X$ определяется рекурсивно:

$$(11.2.11) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_X(m) = 0 & \text{при } m < 0, \\ \mathcal{D}_X(m) = \{P \in \mathcal{D}_X; [P, \mathcal{O}_X] \subset \mathcal{D}_X(m-1)\}. \end{cases}$$

В частности, $\mathcal{D}_X(0) = \mathcal{O}_X$.

Градуированное кольцо $\text{gr}(\mathcal{D}_X)$ естественно изоморфно подкольцу $\mathcal{O}_{[T^*X]}$ кольца $\pi_*(\mathcal{O}_{T^*X})$, состоящему из сечений, которые полиномиальны на слоях векторного расслоения $\pi: T^*X \rightarrow X$.

Пусть $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ — локальная система голоморфных координат на X , а $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на T^*X . Дифференциальный оператор P порядка m имеет вид

$$(11.2.12) \quad P(x; D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha,$$

где a_α — голоморфные функции, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, а $D_j = \partial/\partial x_j$ (мы используем также обозначение D_{x_j}).

Главный символ $\sigma_m(P)$ — функция на T^*X , такая, что

$$(11.2.13) \quad \sigma_m(P)(x; \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Главный символ $\sigma_m(P)$ определен на T^*X внутренним образом. Можно также рассмотреть *полный символ* оператора P , который имеет вид

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

но эта функция зависит от выбора локальных координат $(x_1, \dots, x_n)$. Произведение $P \circ Q$ двух дифференциальных операторов дается (в выбранных локальных координатах) *формулой Лейбница*

$$(P \circ Q)(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} P(x; \xi) \cdot \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} Q(x; \xi),$$

где $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ при $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Применяя предложение 11.2.3 и хорошо известные результаты об $\mathcal{O}_{[T^*X]}$, мы получаем следующее утверждение:

Предложение 11.2.4. (i) Кольцо $\mathcal{D}_X$ когерентно и нётерово справа и слева.

(ii) Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль, снабженный хорошей фильтрацией. Тогда $\text{gr}(\mathcal{M})$ когерентен. Более того, если $\mathcal{N}$ — когерентный подмодуль в $\mathcal{M}$, то индуцированная фильтрация на $\mathcal{N}$ является хорошей.

Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Локально можно снабдить $\mathcal{M}$ хорошей фильтрацией и определить градуированный идеал

$\text{Isar}(\mathcal{M})$ в $\text{gr}(\mathcal{D}_X)$. Это когерентный градуированный идеал, который зависит только от $\mathcal{M}$ и потому определен глобально. Многообразие его нулей в T^*X , т. е. множество общих нулей всех сечений этого идеала, называется *характеристическим многообразием* модуля $\mathcal{M}$ и обозначается через $\text{char}(\mathcal{M})$. В силу (11.2.10) мы видим, что если $0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$ — точная последовательность когерентных $\mathcal{D}_X$ -модулей, то

$$(11.2.14) \quad \text{char}(\mathcal{M}) = \text{char}(\mathcal{L}) \cup \text{char}(\mathcal{N}).$$

Предположим, что $\mathcal{M}$ снабжен хорошей фильтрацией, и положим

$$\tilde{\text{gr}}(\mathcal{M}) = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{[T^*X]}} \pi^{-1} \text{gr}(\mathcal{M}).$$

Поскольку функтор $\mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}_{[T^*X]}} \pi^{-1}(\cdot)$ точен на категории $\mathcal{O}_{[T^*X]}$ -модулей, имеем

$$(11.2.15) \quad \text{char}(\mathcal{M}) = \text{supp}(\tilde{\text{gr}}(\mathcal{M})).$$

По теореме 11.2.2 и предложению 11.2.3 $\text{char}(\mathcal{M})$ является замкнутым аналитическим множеством в T^*X , инволютивным и коническим относительно действия группы $\mathbb{C}^\times$ (ср. упр. 8.8).

В частности, $\dim_{\mathbb{C}}(\text{char}(\mathcal{M})) \geq n$. Если $\dim_{\mathbb{C}}(\text{char}(\mathcal{M})) \leq n$, то $\mathcal{M}$ называется *голономным* модулем.

Пример 11.2.5. Предположим, что $\mathcal{M}$ имеет одну образующую u с определяющими соотношениями $P_j u = 0, j = 1, \dots, N$. Пусть $\mathcal{J}$ — левый идеал в $\mathcal{D}_X$, порожденный операторами P_j . Тогда $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_X / \mathcal{J}$ и

$$\text{char}(\mathcal{M}) = \{(x; \xi); \sigma(P)(x; \xi) = 0 \text{ для любых } P \in \mathcal{J}\}.$$

Разумеется, $\text{char}(\mathcal{M})$ может быть строго меньше множества $\{(x; \xi); \sigma(P_j)(x; \xi) = 0 \text{ при } j = 1, \dots, N\}$. В действительности, хотя элементы P_j и порождают $\mathcal{J}$, может случиться, что элементы $\sigma(P_j)$ не порождают $\text{gr}(\mathcal{J})$. Тем не менее идеал $\text{gr}(\mathcal{J})$ локально конечно порожден.

Как следствие инволютивности множества $\text{char}(\mathcal{M})$ мы получаем такое утверждение:

Предложение 11.2.6. Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Тогда локально на X модуль $\mathcal{M}$ допускает конечно свободную резольвенту длины n .

Другими словами, локально на X существует комплекс

$$(11.2.16) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^{N_n} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{D}_X^{N_1} \xrightarrow{P_0} \mathcal{D}_X^{N_0} \longrightarrow 0,$$

точный везде, кроме степени 0, и такой, что $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_X^{N_0} / \mathcal{D}_X^{N_1} P_0$.

Пример 11.2.7. Пусть Z — замкнутое подмногообразие комплексной коразмерности d в X .

Гомоморфизм $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}^d(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X) \simeq H_Z^d(R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_X)) \rightarrow H_Z^d(\mathcal{O}_X)$ инъективен, и мы обозначим через $\mathcal{B}_{Z|X}$ или через $H_{[Z]}^d(\mathcal{O}_X)$ порожденный его образом $\mathcal{D}_X$ -модуль. Если $x_1, \dots, x_n$ — такая система локальных координат на X , что $Z = \{x_1 = \dots = x_d = 0\}$, то $\mathcal{B}_{Z|X}$ порождается классом u элемента $1/x_1 \dots x_d$, и эта образующая удовлетворяет соотношениям

$$x_1 u = \dots = x_d u = D_{d+1} u = \dots = D_n u = 0.$$

Иными словами,

$$\mathcal{B}_{Z|X} \simeq \mathcal{D}_X / (\mathcal{D}_X x_1 + \dots + \mathcal{D}_X x_d + \mathcal{D}_X D_{d+1} + \dots + \mathcal{D}_X D_n).$$

Заметим, что пучок $\mathcal{B}_{Z|X}$ когерентен и $\text{char}(\mathcal{B}_{Z|X}) = T_Z^* X$. Рассматривая регулярную последовательность $(x_1, \dots, x_d, D_{d+1}, \dots, D_n)$ в $\mathcal{D}_X$ и соответствующий комплекс Кошуля (ср., например, [Schapira 2, Appendix B.4]), мы получаем свободную резольвенту длины n пучка $\mathcal{B}_{Z|X}$.

Обозначим через $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)$ (соответственно $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X^{op})$) абелеву категорию левых (соответственно правых) $\mathcal{D}_X$ -модулей.

Категории $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)$ и $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X^{op})$ эквивалентны. В действительности имеется естественный изоморфизм

$$(11.2.17) \quad \mathcal{O}_X^{(n)} \simeq \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X),$$

превращающий $\mathcal{O}_X^{(n)}$ в правый когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Если $\mathcal{M}$ — левый $\mathcal{D}_X$ -модуль, то $\mathcal{O}_X^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ снабжается структурой правого $\mathcal{D}_X$ -модуля следующим образом.

Для $v \in \mathcal{O}_X^{(n)}$, $u \in \mathcal{M}$ и векторного поля θ полагаем

$$(v \otimes u)\theta = (v\theta) \otimes u - v \otimes \theta u$$

и продолжаем это действие до действия кольца $\mathcal{D}_X$ на $\mathcal{O}_X^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$. Аналогичным образом определяется левое действие кольца $\mathcal{D}_X$ на $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{(n) \otimes -1}$, где $\mathcal{N}$ — правый $\mathcal{D}_X$ -модуль.

Функторы $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{O}_X^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ и $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{(n) \otimes -1}$ дают нужную эквивалентность.

Обозначим через $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$ (соответственно $\mathbf{D}_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_X^{op})$) полную подкатегорию производной категории $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X))$ (соответственно

$\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X^{op}))$), состоящую из объектов с когерентными когомологиями.

Категория $\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X)$ имеет достаточно инъективных объектов (в силу предложения 2.4.3), и для каждого $x \in X$ мы имеем $\mathrm{gld}(\mathcal{D}_{X,x}) \leq n$ (это легко выводится из предложения 11.2.6). Поэтому функторы $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \cdot)$ и $\cdot \otimes_{\mathcal{D}_X}^L \cdot$ корректно определены на $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)^\circ \times \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$ и $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X^{op}) \times \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X)$ и принимают значения в $\mathbf{D}^+(\mathbb{C}_X)$ и $\mathbf{D}^b(\mathbb{C}_X)$ соответственно.

В заключение этого параграфа напомним кратко основные операции над $\mathcal{D}_X$ -модулями.

На $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X)$ (и поэтому и на $\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X^{op})$) имеется любопытная инволюция, аналогичная функтору двойственности (см. § 3.4) в теории пучков. Положим

$$(11.2.18) \quad \mathcal{K}_X = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}[\dim_{\mathbb{C}} X].$$

Заметим, что на $\mathcal{K}_X$ имеются две естественные структуры левого $\mathcal{D}_X$ -модуля. Для $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X))$ положим

$$(11.2.19) \quad \mathcal{M}^* = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{K}_X).$$

Очевидно, это объекты категории $\mathbf{D}^b(\mathcal{M}od(\mathcal{D}_X))$ (благодаря структуре бимодуля на $\mathcal{K}_X$, ср. упр. 2.23), и немедленно проверяется, что $\mathcal{M}^* \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_X))$. Более того,

$$(11.2.20) \quad \mathcal{M}^{**} \simeq \mathcal{M}.$$

Пусть теперь Y — еще одно многообразие.

Если $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{N}$) — левый $\mathcal{D}_X$ -модуль (соответственно $\mathcal{D}_Y$ -модуль), мы определим левый $\mathcal{D}_{X \times Y}$ -модуль, полагая

$$(11.2.21) \quad \mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N} = \mathcal{D}_{X \times Y} \otimes_{\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{D}_Y} (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}).$$

Легко проверить, что если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ когерентны, то таков же и $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}$. Кроме того,

$$(11.2.22) \quad \mathrm{char}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}) = \mathrm{char}(\mathcal{M}) \times \mathrm{char} \mathcal{N}.$$

Наконец, пусть $f: Y \rightarrow X$ — голоморфное отображение.

Мы снабдим пучок $\mathcal{O}_Y \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$ естественной структурой правого $f^{-1}\mathcal{D}_X$ -модуля. Кроме того, его можно снабдить структурой левого $\mathcal{D}_Y$ -модуля следующим образом.

Пусть Θ_X (соответственно Θ_Y) — пучок голоморфных векторных полей на X (соответственно на Y). Если v — сечение пучка Θ_Y , то дифференциал $f': TY \rightarrow Y \times_X TX$, будучи применен к v , определяет сечение $f'(v)$ пучка $\Theta_Y \otimes_{f^{-1}\Theta_X} f^{-1}\Theta_X$, которое локально на Y может быть записано в виде конечной суммы $\sum_j a_j \otimes w_j$. Рассмотрим сечение пучка $\Theta_Y \otimes_{f^{-1}\Theta_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$ вида $a \otimes u$. Мы положим

$$v(a \otimes u) = v(a) \otimes u + \sum_j a a_j \otimes w_j \circ u.$$

Если локальные системы координат $(x_1, \dots, x_n)$ на X и $(y_1, \dots, y_m)$ на Y выбраны так, что $f = (f_1, \dots, f_n)$, то

$$(11.2.23) \quad D_{y_k}(a \otimes u) = \frac{\partial a}{\partial y_k} \otimes u + \sum_{j=1}^n a \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \otimes D_{x_j} \circ u.$$

Затем левое действие пучка Θ_Y на $\Theta_Y \otimes_{f^{-1}\Theta_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$ естественно расширяется до левого действия пучка $\mathcal{D}_Y$.

Определение 11.2.8. Пучок $\Theta_Y \otimes_{f^{-1}\Theta_X} f^{-1}\mathcal{D}_X$, снабженный указанной структурой $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_X)$ -бимодуля, обозначается через $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$. Его каноническое сечение $1 \otimes 1$ обозначается через $1_{Y \rightarrow X}$.

Бимодуль $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ определяет два функтора

$$\begin{aligned} D_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}(\cdot): \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X) &\rightarrow \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y), \\ \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X}: \mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y^{op}) &\rightarrow \mathbf{D}^b(f^{-1}\mathcal{D}_X^{op}). \end{aligned}$$

Если $g: Z \rightarrow Y$ — другое голоморфное отображение, то имеется канонический изоморфизм

$$(11.2.24) \quad \mathcal{D}_{Z \rightarrow Y} \overset{L}{\otimes}_{g^{-1}\mathcal{D}_Y} g^{-1}\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq \mathcal{D}_{Z \rightarrow X}.$$

Пример 11.2.9. (i) Пусть $x = (x', x'')$ — система координат на X , и пусть $Y = \{x \in X; x' = 0\}$. Тогда как $\mathcal{D}_X^{op}$ -модуль $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$ изоморфен $\mathcal{D}_X / (x') \cdot \mathcal{D}_X$, где $(x') \cdot \mathcal{D}_X$ — правый идеал, порожденный координатами (x') . Любое сечение этого пучка может быть записано в виде $P(x'', D_{x'}, D_{x''})$ (т. е. в виде дифференциального оператора на X , не зависящего от x').

(ii) Пусть $x = (x', x'')$ — система координат на Y , и пусть $f: Y \rightarrow X$ — проекция $(x', x'') \mapsto (x'')$. Тогда $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \simeq \mathcal{D}_Y / (D_{x'}) \cdot \mathcal{D}_Y$ и сечение этого пучка может быть записано в виде $P(x, x'', D_{x''})$, т. е. в виде дифференциального оператора на Y , не зависящего от $D_{x'}$.

Определение 11.2.10. (i) Пусть $\mathcal{M}$ — левый $\mathcal{D}_X$ -модуль (или, более общо, $\mathcal{M} \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X))$). Определим обратный образ $\underline{f}^{-1}\mathcal{M}$ пучка $\mathcal{M}$ относительно f формулой

$$\underline{f}^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \overset{L}{\otimes}_{\underline{f}^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M} \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y)).$$

(ii) Пусть $\mathcal{N}$ — правый $\mathcal{D}_Y$ -модуль (или, более общо, $\mathcal{N} \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_Y^{op}))$). Определим прямой образ $\underline{f}_*\mathcal{N}$ (соответственно собственный прямой образ $f_!\mathcal{N}$) пучка $\mathcal{N}$ относительно f формулой

$$\underline{f}_*\mathcal{N} = Rf_* \left(\mathcal{N} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \right) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X^{op}))$$

(соответственно

$$f_!\mathcal{N} = Rf_! \left(\mathcal{N} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \right) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X^{op})).$$

Напомним без доказательства основные результаты, касающиеся обратных образов и принадлежащие Касиваре [Kashiwara 5]. (Относительно прямых образов см. [Kashiwara 4], [Houzel-Schapira 1], [Schneiders 1] и [Boutet de Monvel-Malgrange 1].)

Как обычно, через f_π и ${}^t f'$ мы обозначаем естественные отображения из $Y \times_X T^*X$ в T^*X и T^*Y соответственно.

Определение 11.2.11. Пусть $\mathcal{M}$ — левый когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Говорят, что f нехарактеристично относительно $\mathcal{M}$, если

$$T_Y^*X \cap f_\pi^{-1}(\text{char}(\mathcal{M})) \subset Y \times_X T_X^*X.$$

Предложение 11.2.12. Пусть f нехарактеристично относительно когерентного $\mathcal{D}_X$ -модуля $\mathcal{M}$. Тогда

- (i) $H^j(\underline{f}^{-1}\mathcal{M}) = 0$ при $j \neq 0$,
- (ii) $H^0(\underline{f}^{-1}\mathcal{M})$ (обозначаемое просто через $\underline{f}^{-1}\mathcal{M}$) — когерентный $\mathcal{D}_Y$ -модуль.
- (iii) $\text{char}(\underline{f}^{-1}\mathcal{M}) = {}^t f' f_\pi^{-1}(\text{char}(\mathcal{M}))$.

11.3. Голоморфные решения $\mathcal{D}_X$ -модулей

Напомним сначала без доказательства классическую теорему Коши-Ковалевской в усиленной форме, принадлежащей Лере ([Leray 3]; ср., например, [Scharira 2]).

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — голоморфные координаты на $\mathbb{C}^n$, а $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на $T^*\mathbb{C}^n$. Мы снабдим $\mathbb{C}^n$ обычной эрмитовой структурой $((x, x') = \sum_j x_j \bar{x}'_j)$ и обозначим через $B(x_0, \rho)$ открытый шар радиуса ρ с центром в x_0 . Мы используем также обозначение $x = (x_1, x')$ и через $B'(x_0, \rho)$ обозначаем пересечение шара $B(x_0, \rho)$ с гиперповерхностью $\{x \in \mathbb{C}^n; x_1 = x_{0,1}\}$, где $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})$.

Пусть X — открытое подмножество в $\mathbb{C}^n$, и пусть P — голоморфный дифференциальный оператор порядка m , определенный в X . Тогда P записывается в виде

$$(11.3.1) \quad P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha.$$

Мы предполагаем, что

$$(11.3.2) \quad a_{(m,0,\dots,0)} \equiv 1.$$

Пусть $x_0 \in X$. Положим

$$Y_{x_0} = \{x \in X; x_1 = x_{0,1}\}.$$

Пусть f — сечение пучка $\mathcal{O}_X$. Определим первые m следов сечения f на Y_{x_0} как сечение пучка $(\mathcal{O}_{Y_{x_0}}^m)$, задаваемое формулой

$$(11.3.3) \quad \gamma_{x_0}(f) = (f|_{Y_{x_0}}, D_{x_1} f|_{Y_{x_0}}, \dots, D_{x_1}^{m-1} f|_{Y_{x_0}}).$$

Рассмотрим задачу Коши

$$(11.3.4) \quad \begin{cases} Pf = g, \\ \gamma_{x_0}(f) = (h). \end{cases}$$

Теорема 11.3.1. Пусть $x \in X$. Существуют такие $r > 0$, $\rho_0 > 0$, $\delta > 0$, что для любого $\rho > 0$, удовлетворяющего условию $\rho \leq \rho_0$, любого $x_0 \in X$, удовлетворяющего условию $|x - x_0| \leq r$, любого $g \in \mathcal{O}_X(B(x_0, \rho))$ и любого $(h) \in \mathcal{O}_{Y_{x_0}}^m(B'(x_0, \rho))$ задача Коши (11.3.4) имеет единственное решение $f \in \mathcal{O}_X(B(x_0, \delta\rho))$.

Прежде всего мы выведем отсюда полезный результат о продолжении, принадлежащий Зернеру [Zerner 1]; см. также [Hörmander 3, Theorem 11.4.7].

Предложение 11.3.2. Пусть φ — такая вещественная функция класса C^1 на X , что $\sigma(P)(x; \partial\varphi(x)) \neq 0$ на X . Пусть $\Omega = \{x \in X; \varphi(x) < 0\}$, и пусть $f \in \mathcal{O}_X(\Omega)$ — такое сечение, что Pf голоморфно продолжается в окрестность точки $x_0 \in \partial\Omega$. Тогда f голоморфно продолжается в окрестность точки x_0 .

Доказательство. Если $d\varphi(x_0) = 0$, то P обратим в некоторой окрестности точки x_0 и утверждение доказано. Пусть $d\varphi(x_0) \neq 0$. Выберем такую систему локальных координат $(x_1, \dots, x_n)$ вблизи x_0 , что $x_0 = 0$ и $\varphi(x) = \operatorname{Re} x_1 - \psi(\operatorname{Im} x_1, x')$, где $d\psi(0) = 0$. Мы можем предположить, что P удовлетворяет условиям (11.3.1) и (11.3.2).

Положим $x_\varepsilon = (-\varepsilon, 0, \dots, 0)$ и будем пользоваться обозначениями теоремы 11.3.1. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} Pf_\varepsilon = Pf, \\ \gamma_{x_\varepsilon}(f_\varepsilon) = \gamma_{x_\varepsilon}(f). \end{cases}$$

Тогда $f_\varepsilon = f$ и f_ε голоморфна в шаре $B(x_\varepsilon, \delta R)$, где δ может быть выбрано не зависящим от ε , а R удовлетворяет условию

$$-\varepsilon < \psi(0, x') \quad \text{при} \quad |x'| < R.$$

Поскольку $d\psi(0) = 0$, мы имеем $\psi(0, x') = o(|x'|)$, и $B(x_\varepsilon, \delta R)$ будет окрестностью нуля, если ε выбрать достаточно малым. $\square$

Теорема 11.3.3. Пусть X — комплексное многообразие, а $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Тогда

$$\operatorname{SS}(R\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) = \operatorname{char}(\mathcal{M}).$$

Доказательство. Здесь мы докажем только включение $\subset$. Относительно противоположного включения см. замечание 11.4.5.

(а) Предположим сначала, что $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$. Пусть $p \in T^*X$ и $\sigma(P)(p) \neq 0$. Если $p \in T_X^*X$, то P — обратимая функция в окрестности точки p и $R\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) = 0$ в этой окрестности. Предположим, что $p \notin T_X^*X$, и выберем такую локальную систему координат, что $p = (x_0; \xi_0)$, где $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$.

Мы применим предложение 5.1.1. Положим

$$H_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re}(x - x_0, \xi_0) \geq -\varepsilon\},$$

$$L_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re}(x - x_0, \xi_0) = -\varepsilon\},$$

$$\gamma_\delta = \{x \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Im} x_1 = 0, -\operatorname{Re} x_1 \geq \delta|x'|\}.$$

Выберем $R, \delta, 0 < R \ll 1$ и $0 < \delta \leq 1$, таким образом, чтобы

$$(11.3.5) \quad \sigma(P)(x; \xi) \neq 0 \quad \text{для} \quad |x - x_0| \leq R, \quad \xi \in \gamma_\delta^\circ \setminus \{0\}.$$

Затем мы выберем $\varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1$, таким образом, чтобы $(x + \gamma_\delta) \cap L_\varepsilon \subset B(x_0, R)$ при $|x - x_0| \leq R/2$.

Объект $R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ может быть представлен комплексом

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Кроме того, если K выпукло и компактно, то хорошо известно, что $H^i(K; \mathcal{O}_X) = 0$ при $i > 0$, т. е. $R\Gamma(K; \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X(K)$ (ср. [Hörmander 1]). Для доказательства того факта, что $p \notin \text{SS}(R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X))$, достаточно, таким образом, показать, что комплексы

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap H_\varepsilon) \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap H_\varepsilon) \longrightarrow 0$$

и

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap L_\varepsilon) \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap L_\varepsilon) \longrightarrow 0$$

квазиизоморфны при $|x - x_0| \leq R/2$.

Поскольку P сюръективен на пространстве $\mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap L_\varepsilon)$ по теореме 11.3.1, остается показать, что

$$(11.3.6) \quad \begin{cases} f \in \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap L_\varepsilon), \\ Pf \in \text{Im}(\mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap H_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap L_\varepsilon)) \Rightarrow \\ f \in \mathcal{O}_X((x + \gamma_\delta) \cap H_\varepsilon). \end{cases}$$

Но (11.3.6) легко вытекает из предложения 11.3.2 ввиду (11.3.5) с помощью рассуждения, аналогичного использованному в доказательстве предложения 5.1.1.

(b) Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $p \in T^*X$, $p \notin \text{char}(\mathcal{M})$. Выберем систему образующих $(u_1, \dots, u_N)$ модуля $\mathcal{M}$ в окрестности точки $\pi(p)$. Для каждого j существует такой оператор P_j , что $P_j u_j = 0$ и $\sigma(P_j)(p) \neq 0$. Положим $\mathcal{L} = \bigoplus_{j=1}^N \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P_j$ и определим $\mathcal{D}_X$ -линейный морфизм $\psi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, полагая $\psi(1 \bmod \mathcal{D}_X P_j) = u_j$. Пусть $\mathcal{K} = \text{Ker } \psi$. Мы получаем точную последовательность когерентных $\mathcal{D}_X$ -модулей

$$(11.3.7) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Пусть U — такая окрестность точки p , что $U \cap \text{char}(\mathcal{M}) = \emptyset$, $U \cap \text{char}(\mathcal{L}) = \emptyset$ (и, следовательно, $U \cap \text{char}(\mathcal{K}) = \emptyset$). Пусть вещественная

функция φ класса C^1 на X и точка $x_0 \in X$ таковы, что $\varphi(x_0) = 0$ и $d\varphi(x_0) \in U$.

Для краткости обозначим функтор $(R\Gamma_{\{\varphi \geq 0\}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\cdot, \mathcal{O}_X))_{x_0}$ через $S_\varphi(\cdot)$. Согласно первой части доказательства, $S_\varphi(\mathcal{L}) = 0$. Применяя $S_\varphi(\cdot)$ к точной последовательности (11.3.7) и переходя к когомологиям, мы получаем длинную точную последовательность

$$0 \rightarrow H^0(S_\varphi(\mathcal{M})) \rightarrow H^0(S_\varphi(\mathcal{L})) \rightarrow H^0(S_\varphi(\mathcal{K})) \rightarrow H^1(S_\varphi(\mathcal{M})) \rightarrow \dots$$

Теперь очевидно, что $H^0(S_\varphi(\mathcal{M})) = 0$. Поскольку $\mathcal{K}$ удовлетворяет тем же предположениям, что и $\mathcal{M}$, мы имеем $H^0(S_\varphi(\mathcal{K})) = 0$. По индукции получаем $H^j(S_\varphi(\mathcal{M})) = 0$ для всех j , что и завершает доказательство.

Замечание 11.3.4. Доказанное включение наиболее полезно в приложениях.

Теперь мы изучим некоторые операции над голоморфными решениями $\mathcal{D}$ -модулей. Пусть $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{N}$) — левый $\mathcal{D}_X$ -модуль (соответственно $\mathcal{D}_Y$ -модуль). Имеется канонический морфизм

$$(11.3.8) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \boxtimes R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_Y) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X \times Y}}(\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}, \mathcal{O}_{X \times Y}).$$

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — голоморфное отображение. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ — два левых $\mathcal{D}_X$ -модуля, то в $\mathbf{D}^b(C_Y)$ имеется естественный морфизм

$$(11.3.9) \quad f^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(f^{-1}\mathcal{M}, f^{-1}\mathcal{L}).$$

Этот морфизм получается следующим образом (ср. упр. 2.23). Сначала заменим $\mathcal{L}$ комплексом $\mathcal{L}'$ инъективных $\mathcal{D}_X$ -модулей. Затем выберем ограниченную резольвенту P' бимодуля $\mathcal{D}_Y \rightarrow X$, состоящую из $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_X)$ -бимодулей, плоских над $f^{-1}\mathcal{D}_X$. Наконец, выберем $\mathcal{D}_Y$ -инъективную резольвенту $\mathcal{J}'$ модуля $P' \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{L}'$. Тогда мы имеем морфизмы

$$\begin{aligned} f^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{L}) &\simeq f^{-1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{L}') \\ &\rightarrow \mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{D}_X}(f^{-1}\mathcal{M}, f^{-1}\mathcal{L}') \\ &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y} \left(P' \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M}, P' \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{L}' \right) \\ &\rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y} \left(P' \otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X} f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{J}' \right) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(f^{-1}\mathcal{M}, f^{-1}\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Теорему Коши–Ковалевской можно распространить на системы.

Теорема 11.3.5. *Предположим, что f нехарактеристично относительно M . Тогда естественный морфизм*

$$f^{-1}R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(f^{-1}M, \mathcal{O}_Y)$$

является изоморфизмом.

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$Y \xrightarrow[g]{} Y \times X \xrightarrow[p]{} X,$$

где g — отображение графика ($y \mapsto (y, f(y))$), а p — проекция. В силу (11.2.24) достаточно доказать этот результат для p и g по отдельности. Для случая p нужно доказать, что

$$p^{-1}R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{Y \times X}}(\mathcal{O}_Y \boxtimes M, \mathcal{O}_{Y \times X}).$$

Это утверждение легко сводится к случаю $M = \mathcal{D}_X$, когда оно есть не что иное, как лемма Пуанкаре.

Поэтому с самого начала можно предположить, что f — иммерсия. Применяя индукцию по $\text{codim } Y$, мы можем даже считать, что Y — гиперповерхность. Тогда то же доказательство, что и в теореме 11.3.3, сводит дело к случаю, когда $M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$.

Выберем локальную систему координат $(x_1, \dots, x_n)$, в которой $Y = \{x_1 = 0\}$. Мы можем предполагать, что P удовлетворяет (11.3.1) и (11.3.2). Вычислим индуцированную систему $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P) \simeq \mathcal{D}_X / (x_1 \mathcal{D}_X + \mathcal{D}_X P)$. Теорема Вейерштрасса о делении (для дифференциальных операторов) утверждает, что для любого $S \in \mathcal{D}_{X,x}$ существует единственная пара $(Q, R) \in \mathcal{D}_{X,x}^2$, такая, что

$$\begin{cases} S = Q \circ P + R, \\ R = \sum_{j=0}^{m-1} R_j(x, D_{x'}) D_1^j. \end{cases}$$

Таким образом, S единственным образом записывается в виде

$$S = Q \circ P + x_1 T + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{R}_j(x', D_{x'}) D_{x_1}^j.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_X} (\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P)$ — свободный модуль ранга m над $\mathcal{D}_Y$, порожденный элементами $1_{Y \rightarrow X} \otimes u, \dots, 1_{Y \rightarrow X} \otimes D_{x_1}^{m-1} u$, где u есть образующая $1 \bmod \mathcal{D}_X P$ модуля $\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$.

Теперь теорема 11.3.4 перефразируется следующим образом:

$$\begin{cases} \text{Ker}(\mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X)|_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y^m, \\ \text{Coker}(\mathcal{O}_X \xrightarrow{P} \mathcal{O}_X)|_Y = 0, \end{cases}$$

а это частный случай теоремы 11.3.1. □

Замечание 11.3.6. Аналогичный результат, принадлежащий Шнайдерсу [Schneiders 1], справедлив и для прямых образов.

Мы закончим этот раздел доказательством того факта, что комплекс голоморфных решений голономного $\mathcal{D}_X$ -модуля является превратным.

Теорема 11.3.7. Пусть M является голономным $\mathcal{D}_X$ -модулем. В этом случае объект $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)$ принадлежит категории $\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^b(X)$ (т. е. является $\mathbb{C}$ -конструктивным) и, кроме того, комплекс $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)[\dim_{\mathbb{C}} X]$ превратен.

Доказательство. Положим $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)[\dim_{\mathbb{C}} X]$.

(а) Сначала докажем, что F является $\mathbb{C}$ -конструктивным.

По теореме 11.3.3 и теореме 8.5.5 F слабо $\mathbb{C}$ -конструктивен. Поэтому остается доказать, что для любых $x_0 \in X$ и $j \in \mathbb{Z}$ векторное пространство $H^j(F)_{x_0}$ конечномерно.

Выберем локальную карту в окрестности точки x_0 и обозначим через $B(x_0, \varepsilon)$ открытый шар радиуса ε с центром в точке x_0 . Положим $F_\varepsilon = R\Gamma(B(x_0, \varepsilon); F)$. По лемме 8.4.7 естественные морфизмы $F_\varepsilon \rightarrow F_{\varepsilon'}$ суть квазиизоморфизмы при $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon \ll 1$. Для вычисления F_ε выберем (используя предложение 11.2.6) конечно свободное представление модуля M

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_X^{N_0} \rightarrow \dots \xrightarrow{P_0} \mathcal{D}_X^{N_0} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Тогда F_ε представляется комплексом

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{N_0}(B(x_0, \varepsilon)) \xrightarrow{P_0} \dots \rightarrow \mathcal{O}_X^{N_0}(B(x_0, \varepsilon)) \rightarrow 0$$

(поскольку $H^j(B(x_0, \varepsilon); \mathcal{O}_X) = 0$ при $j \neq 0$). Пространство $\mathcal{O}_X(B(x_0, \varepsilon))$ естественно снабжается структурой пространства Фреше, и морфизм ограничения $\mathcal{O}_X(B(x_0, \varepsilon)) \rightarrow \mathcal{O}_X(B(x_0, \varepsilon'))$ компактен при $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Поэтому требуемый результат вытекает из следующей леммы, доказательство которой получается прямым применением одной теоремы Шварца [Schwartz 1].

Лемма 11.3.8. Пусть F' и G' — два ограниченных комплекса линейных непрерывных отображений пространств Фреше, и пусть $u: F' \rightarrow G'$ — непрерывный линейный морфизм. Предположим, что для любого j линейное отображение $u^j: F^j \rightarrow G^j$ компактно и что u — квазиизоморфизм. Тогда для каждого $j \in \mathbb{Z}$ пространства $H^j(F')$ конечномерны.

(б) Наконец, докажем, что F превратен. Пусть $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Пусть S — комплексное подмногообразие комплексной коразмерности d .

Тогда $H_S^j(F) = 0$ при $j < d - n$, поскольку $H_S^j(\mathcal{O}_X) = 0$ при $j < d$ (ср. (2.9.14)). Поэтому F принадлежит категории ${}^p\mathbf{D}_{\mathbb{C}-c}^{\geq 0}(\mathbb{C}_X)$.

Пусть теперь $j \in \mathbb{N}$ фиксировано, и положим $Y = \text{supp}(H^j(F))$.

Поскольку F $\mathbb{C}$ -конструктивен, Y есть замкнутое комплексно-аналитическое множество. Докажем, что $\dim_{\mathbb{C}} Y \leq -j$. Поскольку достаточно доказать это неравенство в точках общего положения множества Y , мы можем считать в силу предложения 8.2.10, что $\text{char}(\mathcal{M}) \cap \pi^{-1}(Y) \subset T_Y^*X$. Пусть $x \in Y$. Выберем подмногообразие Z , трансверсальное Y в точке x , $\dim_{\mathbb{C}} Y + \dim_{\mathbb{C}} Z = n$. Вложение $f: Z \hookrightarrow X$ нехарактеристично относительно $\mathcal{M}$; поэтому по теореме 11.3.5 имеем $F|_Z \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Z)[n]$.

Теперь $f^{-1}\mathcal{M}$ допускает конечно свободную резольвенту длины $\dim_{\mathbb{C}} Z$ в силу предложения 11.2.6, и поэтому $H^k(F|_Z)_x = H^{k+n}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{O}_Z)) = 0$ при $k + n > \dim_{\mathbb{C}} Z$. Так как $H^j(F|_Z)_x \neq 0$, мы получаем $j \leq \dim_{\mathbb{C}} Z - n = -\dim_{\mathbb{C}} Y$, что и требовалось.

11.4. Микролокальное изучение пучка $\mathcal{O}_X$

Пусть X — комплексное многообразие комплексной размерности n , а S — комплексное подмногообразие комплексной коразмерности d .

Предложение 11.4.1. *Комплекс $\mu_S(\mathcal{O}_X)$ сосредоточен в степени d .*

Доказательство. Тривиальность групп $H^j(\mu_S(\mathcal{O}_X))$ при $j < d$ следует из (2.9.14). Доказательство тривиальности при $j > d$ — легкое упражнение (ср. [Sato-Kawai-Kashiwara 1]). $\square$

Пусть Y — другое комплексное многообразие. Мы положим

$$(11.4.1) \quad \Omega_{X \times Y/Y} = \mathcal{O}_{X \times Y} \otimes_{q_1^{-1}\mathcal{O}_X} q_1^{-1}\Omega_X.$$

Определение 11.4.2. (i) Положим

$$\mathcal{C}_{S|X}^{\mathbb{R}} = H^d(\mu_S(\mathcal{O}_X)).$$

(ii) Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий. Мы полагаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} &= H^n(\mu_{\Delta_f}(\Omega_{X \times Y/Y})), \\ \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}} &= H^n(\mu_{\Delta_f}(\Omega_{X \times Y/X}^a)), \end{aligned}$$

где a — антиподальное отображение. При $f = \text{id}_X$ мы пишем $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ вместо $\mathcal{E}_{X \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$.

Фундаментальный класс множества Δ_f в $X \times Y$ задает сечение пучка $H_{\Delta_f}^n(\Omega_{X \times Y/Y})$, и оно определяет глобальное сечение пучка $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$, которое мы обозначим через $1_{Y \rightarrow X}$ (в действительности это определение согласуется с определением 11.2.8). При $f = \text{id}_X$ мы пишем 1_X вместо $1_{X \rightarrow X}$. Носителем пучков $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$ является множество $T_{\Delta_f}^*(X \times Y) \simeq Y \times_X T^*X$.

Изучим композицию пучков $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$.

Если X, Y, Z — три многообразия, то через p_{ij} обозначим проекцию из $T^*X \times T^*Y \times T^*Z$ на (i, j) -ю компоненту, а через p_{ij}^a — композицию проекции p_{ij} с антиподальным отображением на j -й компоненте. Аналогичным образом определяются проекции на произведении $T^*W \times T^*X \times T^*Y \times T^*Z$, соответствующем четырем многообразиям W, X, Y, Z .

Лемма 11.4.3. (i) Для $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ и $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$ существует канонический морфизм $Rp_{13}!(p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z})) \rightarrow \mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \Omega_{X \times Z/Z})[-\dim_{\mathbb{C}} Y]$.

(ii) При $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(W \times X))$, $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ и $K_3 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$ имеет место коммутативная диаграмма, которая расположена далее на с. 587, где $F_1 = Rp_{13}!(p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_1, \Omega_{W \times X/X}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{X \times Y/Y})) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(T^*X \times T^*Y))$ и $F_2 = Rp_{13}!(p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_3, \Omega_{Y \times Z/Z})) \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(T^*Y \times T^*Z))$, а α и β суть морфизмы, индуцированные морфизмами, указанными в (i), а именно

$$F_1 \rightarrow \mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \Omega_{W \times Y/Y})[-\dim X] \quad \text{и}$$

$$F_2 \rightarrow \mu\text{hom}(K_2 \circ K_3, \Omega_{X \times Z/Z})[-\dim X] \quad \text{соответственно.}$$

Доказательство. (i) Применяя предложение 4.4.11, мы получаем морфизм

$$Rp_{13}!(p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z})) \rightarrow \mu\text{hom}(K_1 \circ K_2, \Omega_{X \times Y/Y} \circ \Omega_{Y \times Z/Z}).$$

Комбинируя его с морфизмами (см. теорему 11.1.4)

$$\begin{aligned} \Omega_{X \times Y/Y} \circ \Omega_{Y \times Z/Z} &\simeq Rp_{13}!(q_{12}^{-1} \Omega_{X \times Y/Y} \otimes q_{23}^{-1} \Omega_{Y \times Z/Z}) \\ &\rightarrow Rq_{13}!(\Omega_{X \times Y \times Z/Z}) \\ &\rightarrow \Omega_{X \times Z/Z}[-\dim_{\mathbb{C}} Y], \end{aligned}$$

получаем требуемый результат.

$$\begin{array}{ccccc}
Rp_{14}^a(p_{12}^{a-1} \mu hom(K_1, \Omega_{W \times X/X}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu hom(K_2, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes p_{34}^{a-1} \mu hom(K_3, \Omega_{Y \times Z/Z})) & & & & \\
\swarrow \sim & & & & \searrow \sim \\
Rp_{13}^a(p_{12}^{a-1} F_1 \otimes p_{23}^{a-1} \mu hom(K_3, \Omega_{Y \times Z/Z})) & Rp_{13}^a(p_{12}^{a-1} \mu hom(K_1, \Omega_{W \times X/X}) \otimes p_{23}^{a-1} F_2) & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
Rp_{13}^a(p_{12}^{a-1} \mu hom(K_1 \circ K_2, \Omega_{W \times Y/Y})[-\dim X] \otimes p_{23}^{a-1} \mu hom(K_3, \Omega_{Y \times Z/Z})) & Rp_{13}^a(p_{12}^{a-1} \mu hom(K_1, \Omega_{W \times X/X}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu hom(K_2 \circ K_3, \Omega_{X \times Z/Z})[-\dim Y]) & & & \\
\swarrow & & \searrow & & \\
\mu hom(K_1 \circ K_2 \circ K_3, \Omega_{W \times Z/Z})[-\dim X - \dim Y] & & & &
\end{array}$$

(ii) Доказательство оставляется читателю. □

Пусть $g: Z \rightarrow Y$ и $f: Y \rightarrow X$ — морфизмы комплексных многообразий. Мы сохраняем те же обозначения, что и в предложении 4.4.9 (в частности, см. диаграмму 4.4.13, где ${}^t f'$ — отображение $Z \times_X T^* X \rightarrow Z \times_Y T^* Y$, а g_π — отображение $Z \times_X T^* X \rightarrow Y \times_X T^* X$).

Предложение 11.4.4. (i) На $Z \times_X T^* X$ имеются естественные морфизмы

$$\begin{aligned} {}^t f' - 1 \mathcal{E}_{Z \rightarrow Y}^{\mathbb{R}} \otimes g_\pi^{-1} \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathcal{E}_{Z \rightarrow X}^{\mathbb{R}}, \\ g_\pi^{-1} \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}} \otimes {}^t f' - 1 \mathcal{E}_{Y \leftarrow Z}^{\mathbb{R}} &\rightarrow \mathcal{E}_{X \leftarrow Z}^{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

и образ произведения $1_{Z \rightarrow Y} \otimes 1_{Y \rightarrow X}$ относительно первого из этих морфизмов равен $1_{Z \rightarrow X}$. Кроме того, если $h: W \rightarrow Z$ — другой морфизм комплексных многообразий, то композиция морфизмов на $p_3^{-1} \mathcal{E}_{W \rightarrow Z}^{\mathbb{R}} \otimes p_2^{-1} \mathcal{E}_{Z \rightarrow Y}^{\mathbb{R}} \otimes p_1^{-1} \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ ассоциативна; это остается верным и при обращении стрелок. Здесь p_1, p_2 и p_3 — отображения из $W \times_X T^* X$ в $Y \times_X T^* X$, $Z \times_Y T^* Y$ и $W \times_Z T^* Z$ соответственно.

(ii) Пучок $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ снабжен естественной структурой кольца с единицей 1_X , а $\mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}$ (соответственно $\mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$) есть $({}^t f'^{-1} \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}}, f_\pi^{-1} \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})$ -бимодуль (соответственно $(f_\pi^{-1} \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}, {}^t f'^{-1} \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}})$ -бимодуль).

(iii) Пусть $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(C_X))$ и $j \in \mathbb{Z}$. Тогда $H^j(\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X))$ (соответственно $H^j(\mu\text{hom}(F, \Omega_X))$) снабжено естественной структурой левого (соответственно правого) $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ -модуля.

Доказательство. (i) Используя лемму 11.4.3 и введенные в ней обозначения, мы получаем морфизм

$$\begin{aligned} R p_{13}^a (p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(C_{\Delta}, \Omega_{X \times Y/Y}) \times p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(C_{\Delta}, \Omega_{Y \times Z/Z})) \\ \rightarrow \mu\text{hom}(C_{\Delta}, \circ C_{\Delta}, \Omega_{X \times Z/Z})[-\dim_{\mathbb{C}} Y]. \end{aligned}$$

Поскольку $C_{\Delta}, \circ C_{\Delta}$ изоморфно $C_{\Delta, \circ}$, остается перейти к когомологиям в обеих частях. Доказательство ассоциативности композиции мы оставляем читателю, а тот факт, что $1_{Z \rightarrow Y} \otimes 1_{Y \rightarrow X}$ дает $1_{Z \rightarrow X}$ — классический результат исчисления фундаментальных классов. Второй морфизм определяется аналогично.

(ii) вытекает из (i).

(iii) Доказательство аналогично доказательству п. (i). □

Замечание 11.4.5. Пучок колец $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ над T^*X называется *кольцом микролокальных операторов* на X . Его ограничение на нулевое сечение X в T^*X обозначается через $\mathcal{D}_X^{\infty}$ и называется *кольцом дифференциальных операторов бесконечного порядка*. Это последнее естественным образом содержит кольцо $\mathcal{D}_X$ дифференциальных операторов (конечного порядка), введенное в § 2. В действительности кольцо $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ содержит подкольцо $\mathcal{E}_X$, называемое *кольцом микродифференциальных операторов* (конечного порядка), ограничение которого на X совпадает с $\mathcal{D}_X$. Мы не собираемся вводить кольцо $\mathcal{E}_X$ в данной книге и отсылаем читателя к работам [Sato-Kawai-Kashiwara 1], [Björk 1] и [Scharira 1]. Заметим лишь, что работать с кольцом $\mathcal{E}_X$ значительно проще, чем с $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$; в частности, оно когерентно и нётерово.

Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Используя пучок $\mathcal{E}_X$ (и тот факт, что пучок $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ строго плоский над $\mathcal{E}_X$), можно показать, что

$$(11.4.2) \quad \text{char}(\mathcal{M}) = \text{supp} \left(\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M} \right).$$

Поскольку $\text{char}(\mathcal{M}) = \text{char}(\mathcal{M}^*)$ (ср. (10.2.19)), мы получаем

$$(11.4.3) \quad \begin{aligned} \text{char}(\mathcal{M}) &= \text{supp} \left(\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X} \pi^{-1}\mathcal{M}^* \right) \\ &= \text{supp}(\mathcal{R}\text{Hom}_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})) \\ &= \text{supp}(\mu_{\Delta} \mathcal{R}\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_{X \times X})). \end{aligned}$$

Теперь легко завершить доказательство теоремы 11.3.3 (ср. [Kashiwara-Scharira 3, Theorem 10.1.1]).

Далее мы применим теорему 7.5.11. Пусть X, Y, Z — три комплексных многообразия, $\Lambda_1 \subset T^*(X \times Y)$ и $\Lambda_2 \subset T^*(Y \times Z)$ — два конических комплексных лагранжевых подмногообразия и $\tilde{p}_1 = (p_X, p_Y^a) \in \Lambda_1, \tilde{p}_2 = (p_Y, p_Z^a) \in \Lambda_2$. Предположим, что

$$(11.4.4) \quad p_2^a|_{\Lambda_1}: \Lambda_1 \rightarrow T^*Y \quad \text{и} \quad p_1|_{\Lambda_2}: \Lambda_2 \rightarrow T^*Y \quad \text{трансверсальны.}$$

Предложение 11.4.6. Пусть $K_1 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y; (p_X, p_Y^a)))$ и $K_2 \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z; (p_Y, p_Z^a)))$, причем $\text{SS}(K_i) \subset \Lambda_i$ в окрестности точки $\tilde{p}_i$ ($i = 1, 2$). Пусть выполнено предположение (11.4.4) и, кроме того, K_i — простой пучок со сдвигом нуль вдоль Λ_i ($i = 1, 2$). Тогда

$$(a) \quad K_1 \circ_{\mu} K_2[\dim_{\mathbb{C}} Y] \text{ — простой пучок со сдвигом нуль вдоль } \Lambda_1 \circ \Lambda_2;$$

(b) имеется такой естественный морфизм $(p_1^{-1}\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}, p_3^{-1}\mathcal{E}_Z^{\mathbb{R}})$ -бимодуля в окрестности точки (p_X, p_Z^a) :

$$(11.4.5) \quad p_{13*}^a \left(p_{12}^{a-1} H^0(\mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y})) \otimes_{p_2^{-1}\mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}}} p_{23}^{a-1} H^0(\mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z})) \right) \rightarrow H^0 \left(\mu\text{hom} \left(K_1 \circ_{\mu} K_2 [\dim_{\mathbb{C}} Y], \Omega_{X \times Z/Z} \right) \right),$$

где p_{ij}^a — композиция проекции p_{ij} и антиподального отображения на j -м пространстве.

Доказательство. (a) следует из теоремы 7.5.11 (ср. упр. 7.5).

(b) В силу предложения 7.3.1 мы можем предположить, что (K_1, K_2) удовлетворяет (7.3.3) и (7.3.4), а $K_1 \circ_{\mu} K_2 = \varprojlim_V (K_1)_{X \times V} \circ K_2$, где V пробегает открытую систему окрестностей точки $\pi(p_Y)$.

По лемме 11.4.3 мы имеем морфизмы

$$(11.4.6) \quad Rp_{13*}^a (p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z})) \rightarrow \mu\text{hom}(K_1 \circ K_2 [\dim_{\mathbb{C}} Y], \Omega_{X \times Z/Z}) \rightarrow \mu\text{hom} \left(K_1 \circ_{\mu} K_2 [\dim_{\mathbb{C}} Y], \Omega_{X \times Z/Z} \right).$$

Применим теперь ту же лемму с X, Y, Y, Z и с $K_1, \mathcal{C}_{\Delta_Y}$ и K_2 .

Тогда морфизмы α и β из $Rp_{13*}^a (p_{12}^{a-1} \mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}} \otimes p_{23}^{a-1} \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z}))$ в $\mu\text{hom}(K_1 \circ_{\mu} K_2 [\dim_{\mathbb{C}} Y], \Omega_{X \times Z/Z})$, полученные с помощью отображений $\mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y}) \otimes \mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}} \rightarrow \mu\text{hom}(K_1, \Omega_{X \times Y/Y})$ и $\mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}} \otimes \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z}) \rightarrow \mu\text{hom}(K_2, \Omega_{Y \times Z/Z})$, равны между собой. Переходя к группам когомологий, мы получаем требуемый результат. $\square$

С помощью предложения 11.4.6 мы теперь можем определить действие комплексных канонических преобразований на образе пучка $\mathcal{O}_X$ в $\mathbf{D}^b(X; p)$.

Пусть Y — комплексное многообразие той же размерности, что и X , и пусть U_X и U_Y — открытые подмножества в T^*X и T^*Y соответственно. Пусть $\Lambda \subset U_X \times U_Y^a$ — замкнутое комплексное лагранжево подмногообразие, и предположим, что

$$(11.4.7) \quad p_1|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow U_X \quad \text{и} \quad p_2^a|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow U_Y \quad \text{— изоморфизмы.}$$

Обозначим через χ комплексное контактное преобразование, ассоциированное с Λ , т. е. $\chi = (p_1|_\Lambda) \circ (p_2^a|_\Lambda)^{-1}$. Пусть объект $K \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X \times Y))$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(11.4.8) \quad \begin{cases} K \text{ когомологически конструктивен,} \\ (p_1^{-1}(U_X) \cup p_2^{a-1}(U_Y)) \cap \text{SS}(K) \subset \Lambda, \\ K \text{ прост с нулевым сдвигом вдоль } \Lambda. \end{cases}$$

Заметим, что для заданного Λ , удовлетворяющего (11.4.7), локально всегда существует K , удовлетворяющий (11.4.8). Это следует из того же рассуждения, что и в доказательстве следствия 7.2.2. По теореме 7.2.1 функтор $\Phi_K: G \rightarrow Rq_{1!}(K \otimes q_2^{-1}G)$ из $\mathbf{D}^b(Y; U_Y)$ в $\mathbf{D}^b(X; U_X)$ корректно определен и представляет собой эквивалентность категорий. Пусть $p = (p_X, p_Y^a) \in \Lambda$, и пусть

$$(11.4.9) \quad s \in H^0(\mu\text{hom}(K, \Omega_{X \times Y/X}))_p.$$

Согласно лемме 11.4.3, взяв $Z = \{\text{pt}\}$, мы получаем морфизмы

$$\begin{aligned} R p_{1!}(\mu\text{hom})(K, \Omega_{X \times Y/X}) \otimes p_2^{a-1} \mu\text{hom}(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y) \\ \rightarrow \mu\text{hom}(\Phi_K(\mathcal{O}_Y), R q_{1!}(\Omega_{X \times Y/X} \otimes q_2^{-1}(\mathcal{O}_Y))) \\ \rightarrow \mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}(\mathcal{O}_Y), \mathcal{O}_X), \end{aligned}$$

где последняя стрелка получается из

$$R q_{1!} \Omega_{X \times Y/X}[n] \rightarrow \mathcal{O}_X.$$

Итак, сечение s из (11.4.9) определяет морфизм

$$(11.4.10) \quad \alpha(s): \Phi_{K[n]}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X \quad \text{в } \mathbf{D}^b(X; p_X).$$

Объясним, как вычислять композицию таких морфизмов.

Пусть Z — третье многообразие той же размерности, U_Z — открытое подмножество в T^*Z , $\Lambda' \subset U_Y \times U_Z^a$ — лагранжево многообразие, а $K' \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y \times Z))$. Предположим, что (U_Y, U_Z, Λ', K') удовлетворяет условию, аналогичному (11.4.8). Пусть $p' = (p_Y, p_Z^a) \in \Lambda$ и $s' \in H^0(\mu\text{hom}(K', \Omega_{Y \times Z/Y}))_{p'}$. Положим $\Lambda'' = \Lambda \circ \Lambda'$, $K'' = K \circ K'[n]$. Тогда K'' — простой пучок с нулевым сдвигом вдоль Λ'' и

$$\Phi_{K[n]} \circ \Phi_{K'[n]} = \Phi_{K''[n]}.$$

Мы получаем в $D^b(X; p)$ морфизмы

$$\Phi_{K'[n]}(\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\Phi_{K[n]}(\alpha(s'))} \Phi_{K[n]}(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{\alpha(s)} \mathcal{O}_X.$$

Предложение 11.4.7. *Имеет место равенство*

$$\alpha(s) \circ \Phi_{K[n]}(\alpha(s')) = \alpha(s \circ s'),$$

где $s \circ s'$ — образ элемента $s \otimes s'$ под действием морфизма, указанного в предложении 11.4.6.

Доказательство вытекает из леммы 11.4.3.

Следствие 11.4.8. *Пусть $p \in T^*X$. Тогда имеется естественный морфизм колец*

$$\mathcal{E}_{X,p}^{\mathbb{R}} \rightarrow \text{Hom}_{D^b(X;p)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X).$$

Доказательство. Это частный случай предложения 11.4.7 при $\Lambda = \Lambda' = T_{\Delta}^*(X \times X)$ и $K = K' = \mathbb{C}_{\Delta}[-n]$. $\square$

Теорема 11.4.9. (i) *Пусть выполнены условия (11.4.7) и (11.4.8), и пусть $p = (p_X, p_Y^a) \in \Lambda$. Тогда существует элемент $s \in H^0(\mu\text{hom}(K, \Omega_{X \times Y/X}))_p$, такой, что*

$$(11.4.11) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbb{R}} \ni P \mapsto Ps \text{ и } \mathcal{E}_{Y,p_Y}^{\mathbb{R}} \ni Q \mapsto sQ \\ \text{дают изоморфизмы} \\ \mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} H^0(\mu\text{hom}(K, \Omega_{X \times Y/X}))_p \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}_{Y,p_Y}^{\mathbb{R}}. \end{cases}$$

(ii) *Для такого s морфизм $\alpha(s): \Phi_{K[n]}(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mathcal{O}_X$ является изоморфизмом в $D^b(X; p_X)$ и $\alpha(s)$ согласованно с действием пучка $\mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbb{R}}$ на $\mathcal{O}_X$ в $D^b(X; p_X)$ и пучка $\mathcal{E}_{Y,p_Y}^{\mathbb{R}}$ на $\mathcal{O}_Y$ в $D^b(Y; p_Y)$.*

Доказательство. (i) Мы здесь примем на веру существование элемента s , удовлетворяющего (11.4.11). Конструкция такого s проведена в работе [Kashiwara 5] (ср. также [Scharira 2, ch. 1, § 5]). (В цитированных работах конструкция проведена в контексте колец $\mathcal{E}_X$ и $\mathcal{E}_Y$, но доказательство справедливо и для $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{E}_Y^{\mathbb{R}}.$)

(ii) Пусть $K^* = r_*K$, где r — каноническое отображение $X \times Y \rightarrow Y \times X$ (см. § 7.2), и пусть $s' \in H^0(\mu\text{hom}(K^*, \Omega_{Y \times X/Y}))_{p'}$, где $p' = (p_Y, p_X^a)$, а s' удовлетворяет условию (11.4.11). Тогда $s'' = s \circ s'$ задает автоморфизм пучка $\mathcal{E}_{X,p_X}^{\mathbb{R}}$. Поскольку $K \circ K^* \simeq \mathbb{C}_{\Delta}$ (ср. доказательство теоремы 7.2.1), $\mu\text{hom}(K \circ K^*[-n], \Omega_{X \times X/X})$ изоморфен $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ и автоморфизм $s \circ s'$ обратим. В силу предложения 11.4.7 отсюда

следует, что $\alpha(s)$ имеет правый обратный. Аналогично доказывается, что $\alpha(s)$ имеет левый обратный. Итак, $\alpha(s)$ — изоморфизм.

Наконец, опять в силу предложения 11.4.7, при $P \in \mathcal{E}_{X, p_X}^{\mathbb{R}}$, $Q \in \mathcal{E}_{Y, p_Y}^{\mathbb{R}}$ мы имеем

$$\alpha(s) \circ \Phi_{K[n]}(Q) = \alpha(s \circ Q) = \alpha(P \circ s) = P \circ \alpha(s). \quad \square$$

Определение 11.4.10. Изоморфизм $\alpha(s)$ в теореме 11.4.9 называется *квантованным контактным преобразованием* над χ .

Любое контактное преобразование можно локально проквантовать, но «квантование» не единственно (имеется много сечений s , удовлетворяющих (11.4.11)).

Следствие 11.4.11. В ситуации теоремы 11.4.9 пусть s удовлетворяет (11.4.11). Тогда $\alpha(s)$ для любого $G \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(Y))$ определяет изоморфизм $\chi_* \mu\text{hom}(G, \mathcal{O}_Y) \simeq \mu\text{hom}(\Phi_{K[n]}(G), \mathcal{O}_X)$ в окрестности точки p_X .

Напомним, что χ — контактное преобразование, ассоциированное с Λ .

Доказательство получается применением теорем 7.2.1 и 11.4.9. $\square$

Это следствие имеет много приложений, в частности, когда выбирается $G = \mathbb{C}_N$ для вещественного подмногообразия N в Y , но мы их не рассматриваем здесь (ср. [Kashiwara–Schapira 3]).

Замечание 11.4.12. $H^j(\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X))$ для $F \in \text{Ob}(\mathbf{D}^b(X))$ имеет структуру $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ -модуля, как показано в предложении 11.4.4. Но нам неизвестно, можно ли определить $\mu\text{hom}(F, \mathcal{O}_X)$ как объект категории $\mathbf{D}(\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})$.

11.5. Микрофункции

Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие размерности n , а X — его комплексификация.

Определение 11.5.1. Положим

$$\begin{aligned} C_M &= H^n(\mu_M(\mathcal{O}_X) \otimes \sigma_{M/X}), \\ B_M &= C_M|_M = H_M^n(\mathcal{O}_X) \otimes \sigma_{M/X}. \end{aligned}$$

Пучок C_M (соответственно B_M) называется *пучком микрофункций Сато* (соответственно *гиперфункций Сато*) на M .

Как обычно, в определении C_M мы для краткости пишем $\sigma_{M/X}$ вместо $\pi^{-1}\sigma_{M/X}$.

Предложение 11.5.2. (i) Комплекс $\mu_X(\mathcal{O}_X)$ сосредоточен в степени n .

(ii) Пучок $\mathcal{C}_M|_{T_M^*X}$ конически вялый (т. е. его прямой образ в $T_M^*X/\mathbb{R}^+$ является вялым).

(iii) Пучок $\mathcal{B}_M$ вялый.

(iv) На M имеется естественная точная последовательность пучков

$$(11.5.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{A}_M \rightarrow \mathcal{B}_M \rightarrow \pi_* \mathcal{C}_M \rightarrow 0.$$

Напомним, что $\mathcal{A}_M = \mathcal{O}_X|_M$ — пучок вещественно-аналитических функций на M .

Доказательство. (i) следует из (2.9.14) и теоремы 11.1.3.

(ii) Используя следствие 11.4.11, можно показать, что $\mathcal{C}_M|_{T_M^*X}$ локально изоморфен пучку $H^1(\mu_N(\mathcal{O}_X))$, где N — гладкая граница строго псевдовыпуклого открытого подмножества Ω в X . Если γ — отображение $T_M^*X \rightarrow T_M^*X/\mathbb{R}^+$, то отсюда следует, что $\gamma_* \mathcal{C}_M$ локально изоморфен пучку $H^1_{(X \setminus \Omega)}(\mathcal{O}_X|_{\overline{\Omega}})$, а этот пучок вялый в силу (2.9.16).

(iii) Пусть Z — локально замкнутое подмножество в M . Тогда $R\Gamma_Z \mathcal{B}_M = R\Gamma_Z(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_{M/X}[n]}$ сосредоточен в степени нуль по теореме 11.1.3.

(iv) Это частный случай выделенного треугольника (4.3.1). $\square$

Заметим, что из следствия 11.4.11 вытекает, что локально можно определить действие аналитических контактных преобразований на пучке $\mathcal{C}_M$.

Обозначим через sp изоморфизм

$$(11.5.2) \quad \text{sp}: \mathcal{B}_M \xrightarrow{\sim} \pi_* \mathcal{C}_M.$$

Определение 11.5.3. Пусть u — гиперфункция на M . Носитель микрофункции $\text{sp}(u)$ в T_M^*X называется *сингулярным носителем* гиперфункции u и обозначается через $\text{SS}(u)$.

Таким образом, $\text{SS}(u)$ — замкнутое коническое подмножество в T_M^*X и $\text{SS}(u) \subset M \times_X T_X^*X$ тогда и только тогда, когда u вещественно-аналитична.

Объясним понятие *граничного значения* голоморфной функции (см. [Scharira 3]). Пусть Ω — открытое подмножество в X , удовлетворяющее условиям

$$(11.5.3) \quad \begin{cases} \overline{\Omega} \supset M \text{ и вложение } j: \Omega \hookrightarrow X \text{ гомеоморфно} \\ \text{вложению открытого выпуклого} \\ \text{подмножества в } \mathbb{R}^{2n} \text{ локально на } X. \end{cases}$$

В соответствии с этим предположением $R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\overline{\Omega}}, \mathbb{C}_X) \simeq \mathbb{C}_{\Omega}$. Применяя функтор $R\mathcal{H}om(\cdot, \mathbb{C}_X)$ к морфизму $\mathbb{C}_{\overline{\Omega}} \rightarrow \mathbb{C}_M$, мы получаем в $\mathcal{D}^b(X)$ морфизм

$$(11.5.4) \quad \omega_{M/X} \rightarrow \mathbb{C}_{\Omega}.$$

(Напомним, что $\omega_{M/X} \simeq R\mathcal{H}om(\mathbb{C}_M, \mathbb{C}_X) \simeq \sigma_{M/X}[-n]$.)

Применяя к (11.5.4) функтор $\mu\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{O}_X)$, мы получаем морфизм, который снова обозначим через b :

$$(11.5.5) \quad b: \mu\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\Omega}, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mu_M(\mathcal{O}_X) \otimes \sigma_{M/X}[n]$$

и, в частности,

$$(11.5.6) \quad b: j_* j^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{B}_M.$$

Именно последний морфизм и называется обычно *граничным морфизмом*.

Если f принадлежит $\Gamma(\Omega; \mathcal{O}_X)$, то он определяет элемент в $H^0(T^*X; \mu\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\Omega}, \mathcal{O}_X))$. Поскольку $\mu\mathcal{H}om(\mathbb{C}_{\Omega}, \mathcal{O}_X)$ имеет носитель $SS(\mathbb{C}_{\Omega})$, из (11.5.5) мы получаем, что

$$(11.5.7) \quad SS(b(f)) \subset T_M^*X \cap SS(\mathbb{C}_{\Omega})$$

(см. [Delort–Lebeau 1] относительно дальнейших результатов на эту тему).

Заметим, что любая гиперфункция может быть получена как сумма граничных значений голоморфных функций. Выражая явность пучка $\mathcal{C}_M$ в терминах граничных значений, мы получаем знаменитую *теорему об остром клине* (см. [Martineau 2]).

Изучим теперь решения в микрофункциях $\mathcal{D}_X$ -модулей. В действительности большинство из формулируемых нами результатов справедливо в более общем контексте $\mathcal{E}_X$ - или даже $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ -модулей (напомним, что $\mathcal{C}_M$ есть $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ -модуль в силу предложения 11.4.4), но мы предпочитаем для простоты ограничиться $\mathcal{D}_X$ -модулями.

Предложение 11.5.4. Пусть M — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Тогда

$$(i) \quad SS(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{C}_M)) \subset C_{T_M^*X}(\text{char}(M)).$$

В частности,

$$(ii) \quad \text{supp}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{C}_M)) \subset T_M^*X \cap \text{char}(M).$$

Доказательство. Нужно применить теорему 6.4.1 к $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)$ и теорему 11.3.3. $\square$

Если P — дифференциальный оператор, то мы видим из этого результата, что P является изоморфизмом пучка $\mathcal{C}_M$ на множестве $T_M^*X \setminus \{\sigma(P)^{-1}(0)\}$ и что если u — гиперфункция, то $SS(u) \subset SS(Pu) \cup \{\sigma(P)^{-1}(0)\}$.

Определение 11.5.5. (i) Когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль $\mathcal{M}$ называется *эллиптическим*, если $T_M^*X \cap \text{char}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

(ii) Пусть $\theta \in T_{T_M^*X}T^*X$. Говорят, что θ *микрогиперболична* относительно $\mathcal{M}$, если $\theta \notin C_{T_M^*X}(\text{char}(\mathcal{M}))$.

Если $\theta \in T^*M$ (напомним вложение $T^*M \hookrightarrow T_{T_M^*X}T^*X$, см. § 6.2), то говорят просто, что θ *гиперболична* относительно $\mathcal{M}$.

В силу предложения 11.5.4 если $\mathcal{M}$ эллиптичен, то морфизм

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M) \rightarrow R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M)$$

является изоморфизмом (достаточно применить $R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \cdot)$ к точной последовательности (11.5.1)).

Если θ микрогиперболична, то $\theta \notin \text{SS}(R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M))$. Если θ гиперболична, то $\theta \notin \text{SS}(R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M))$.

Классической темой в теории дифференциальных уравнений в частных производных является *распространение особенностей*.

Пусть U — открытое подмножество в T^*X , а f — голоморфная функция на U . Предположим, что $\text{Im } f$ равна нулю на T_M^*X . Тогда для любого $p \in U \cap T_M^*X$ бихарактеристика b_p , проходящая через p в инволютивном подмногообразии $\{\text{Im } f = 0\}$ многообразия $(T^*X)^{\mathbb{R}}$, содержится в T_M^*X в окрестности точки p (см. приложение).

Предложение 11.5.6. Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль, и пусть f — голоморфная функция на $U \subset T^*X$. Предположим, что

$$\text{Im } f|_{T_M^*X \cap U} = 0, \quad \text{char}(\mathcal{M}) \cap U \subset \{f = 0\}.$$

Тогда для любой бихарактеристики b многообразия $\{\text{Im } f = 0\}$ пучки $\text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M)|_b$ локально постоянны ($j \in \mathbb{N}$).

Доказательство. В силу предложения 11.5.4 $\text{SS}(R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M))$ содержится в $C_{T_M^*X}(\{f^{-1}(0)\}) = \{\theta \in T^*T_M^*X; (\theta, H_f) = 0\}$. Поэтому достаточно применить предложение 5.4.5(ii). $\square$

Пример 11.5.7. (i) Пусть X — комплексное многообразие. На $X^{\mathbb{R}} = \mathcal{D}_{X \times \overline{X}}$ -модуль $\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ является эллиптическим. Это *система Коши-Римана*. Заметим, что

$$(11.5.8) \quad \mathcal{O}_X \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{B}_{X^{\mathbb{R}}}) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_{X \times \overline{X}}}(\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{B}_{X^{\mathbb{R}}}).$$

(ii) Пусть $(z) = (z_1, \dots, z_n)$ — система голоморфных координат на X , (z, ζ) — соответствующие координаты на T^*X , где $z = x +$

$\sqrt{-1}y$, $\zeta = \xi + \sqrt{-1}\eta$, и пусть $M = \{z \in X; y = 0\}$, так что $T_M^*X = \{y = \xi = 0\}$.

Говорят, что оператор P эллиптический, гиперболический и т. д., если ассоциированная система $M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$ является эллиптической, гиперболической и т. д. Тогда оператор P эллиптивен, если $\sigma(P)(x; i\eta) \neq 0$ при $\eta \neq 0$. В частности, оператор Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^N D_j^2$ эллиптивен.

(iii) Пусть координаты (z, ζ) те же, что и выше, и пусть $p = (x_0; i\eta_0) \in T_M^*X$, $\theta_0 \in (T_{T_M^*X} T^*X)_p$. Тогда θ_0 микрогиперболична для P в точке p , если

$$(11.5.9) \quad \begin{cases} \sigma(P)((x; i\eta) + \varepsilon\theta) \neq 0 \\ \text{при } |x - x_0| + |\eta - \eta_0| + |\theta - \theta_0| + \varepsilon \ll 1, \varepsilon > 0. \end{cases}$$

В действительности, используя локальную версию теоремы Бохнера о трубке (см. [Komatsu 2]), достаточно проверить (11.5.9) при $\theta = \theta_0$. Волновой оператор $\square = D_1^2 - \sum_{j=2}^n D_j^2$ удовлетворяет (11.5.9) с $\eta_0 = 0$, $\theta = dx_1$.

(iv) Предположим, что $\sigma(P)$ веществен на T_M^*X . Если u — решение-микрофункция уравнения $Pu = 0$, то $\text{supp}(u)$ — объединение интегральных кривых гамильтонова поля $H_{\text{Im } \sigma(P)}^{\mathbb{R}}$. Напомним, что для вещественной функции h на T^*X поле $H_h^{\mathbb{R}}$ задается формулой (см. 11.1.4)

$$H_h^{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial h}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{\partial h}{\partial y_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \frac{\partial h}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Поэтому

$$H_{\text{Im } \sigma(P)}^{\mathbb{R}}|_{T_M^*X} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \text{Re } \sigma(P)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \eta_j} - \frac{\partial \text{Re } \sigma(P)}{\partial \eta_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Теперь мы опишем основные операции над микрофункциями. Пусть N — другое вещественно-аналитическое многообразие, и пусть Y — комплексификация многообразия N .

Естественный морфизм (предложение 4.3.6)

$$\mu_M(\mathcal{O}_X) \boxtimes \mu_N(\mathcal{O}_Y) \rightarrow \mu_{M \times N}(\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_Y)$$

в комбинации с морфизмом $\mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{X \times Y}$ определяет морфизм

$$(11.5.10) \quad \mathcal{C}_M \boxtimes \mathcal{C}_N \rightarrow \mathcal{C}_{M \times N}.$$

Пусть теперь $f: N \rightarrow M$ — вещественно-аналитическое отображение; той же буквой f обозначим его комплексификацию $f: Y \rightarrow X$. Рассмотрим отображения (см. 4.3)

$$(11.5.11) \quad T_N^* Y \xleftarrow{f'_N} N \times_M T_M^* X \xrightarrow{f_{N*}} T_M^* X.$$

В силу предложения 4.3.5 имеется естественный морфизм

$$R^i f'_N! (\omega_{N/M} \otimes f_{N*}^{-1} \mu_M(\mathcal{O}_X)) \rightarrow \mu_N(f^{-1} \mathcal{O}_X \otimes \omega_{Y/X}).$$

Комбинируя его с морфизмом $f^{-1} \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$, мы получаем морфизм

$$(11.5.12) \quad R^i f'_N! f_{N*}^{-1} \mathcal{C}_M \rightarrow \mathcal{C}_N.$$

Это означает, что если u — микрофункция, определенная на открытом подмножестве U в $T_M^* X$, и если W — открытое подмножество в $T_N^* Y$, такое, что $f'_N: f_{N*}^{-1}(\text{supp}(u)) \cap (f'_N)^{-1}W \rightarrow W$ — собственное отображение, то можно определить обратный образ f^*u микрофункции u относительно f как микрофункцию на W . В частности, если u — гиперфункция на M и отображение f'_N собственное на $f_{N*}^{-1}(\text{SS}(u))$, то можно определить гиперфункцию f^*u , причем $\text{SS}(f^*u)$ содержится в $f'_N f_{N*}^{-1}(\text{SS}(u))$. Если $f: N \rightarrow M$ — иммерсия, то обычно пишут $u|_N$ вместо f^*u .

Для определения прямых образов введем пучок $\mathcal{V}_M = \mathcal{A}_M^{(n)} \otimes \sigma_M$ аналитических плотностей на M (и аналогично введем $\mathcal{V}_N$). В силу предложения 4.3.4 имеется естественный морфизм

$$Rf_{N*}! f'^{-1}_N \mu_N(\Omega_Y) \rightarrow \mu_M(Rf_* \Omega_Y).$$

Комбинируя его с морфизмом интегрирования (теорема 11.1.4), мы получаем морфизм

$$(11.5.13) \quad Rf_{N*}! f'^{-1}_N \left(\mathcal{C}_N \otimes_{\mathcal{A}_N} \mathcal{V}_N \right) \rightarrow \mathcal{C}_M \bigotimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{V}_M.$$

В частности, если v — «плотность гиперфункции» на N , т. е. $v \in \Gamma(N; B_N \otimes_{\mathcal{A}_N} \mathcal{V}_N)$, и отображение f собственное на $\text{supp}(v)$, то можно определить прямой образ f_*v плотности v при отображении f . Это гиперфункция на M , и $\text{SS}(f_*v)$ содержится в $f_{N*} f'^{-1}_N(\text{SS}(v))$. Заметим, что если отображение $f: N \rightarrow M$ гладкое, то $N \times_M T_M^* X$ есть гладкое подмногообразие V в $T_N^* Y$ и $\text{SS}(f_*v)$ содержится в образе под

действием отображения f_* множества $SS(v) \cap V$. Часто пишут $\int_f v$ вместо $f_* v$.

Предыдущие конструкции можно обобщить, рассматривая операции на решениях-микрофункциях микродифференциальных систем. Однако мы ограничимся $\mathcal{D}_X$ -модулями и будем рассматривать только обратные образы.

Пусть $f: N \rightarrow M$ то же, что и выше. Используя морфизм (11.3.9) и предложение 4.3.5, мы получаем естественный морфизм

$$(11.5.14) \quad R^t f'_N! f_{N\pi}^{-1} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{C}_N).$$

Предположим, в частности, что f нехарактеристично относительно M . Тогда $f^{-1}\mathcal{M}$ сосредоточен в степени нуль и, более того, $'f'_N$ конечен на $f_{N\pi}^{-1}(\text{supp}(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M)))$ в силу предложения 11.5.4, поскольку $'f'$ конечен на $f_{\pi}^{-1}(\text{char}(\mathcal{M}))$. Поэтому в данном случае для каждого $j \in \mathbb{N}$ морфизм (11.5.14) индуцирует морфизм

$$(11.5.15) \quad 'f'_N! f_{N\pi}^{-1} \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) \rightarrow \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_Y}^j(f^{-1}\mathcal{M}, \mathcal{C}_N).$$

Иными словами, обратный образ f^* и решения-микрофункции системы M есть решение-микрофункция системы $f^{-1}M$.

Применяя теорему 6.7.1 к $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ и используя теорему 11.3.5, мы можем решить задачу Коши в микрофункциях для микрогиперболической системы. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 11.5.8. Пусть V — открытое подмножество в T_N^*Y . Предположим, что

- (i) f нехарактеристично относительно M (т. е. $T_Y^*X \cap f_{\pi}^{-1}(\text{char}(\mathcal{M})) \subset Y \times_X T_X^*X$),
- (ii) $f_{N\pi}|_{f'^{-1}(V)} : 'f'^{-1}(V) \rightarrow T_M^*X$ нехарактеристично относительно $\mathcal{C}_{T_M^*X}(\text{char}(\mathcal{M}))$,
- (iii) $'f'^{-1}(V) \cap f_{\pi}^{-1}(\text{char}(\mathcal{M})) \subset Y \times_X T_M^*X$.

Тогда морфизм (11.5.14) является изоморфизмом на V .

Пример 11.5.9. Пусть $(z; \zeta)$ — координаты на T^*X , как в примере 11.5.7(ii), и пусть $\zeta = (\zeta_1, \zeta')$. Пусть N — гиперповерхность $\{x_1 = 0\}$ в M , и пусть P — дифференциальный оператор порядка m , гиперболический в направлениях $\pm dx_1$, т. е. удовлетворяющий условиям

$\sigma(P)(x; i\eta + t\theta) \neq 0$ для любых $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и любых $(x; \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ при $\theta = (1, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$(11.5.16) \quad \begin{cases} Pu = 0, & \gamma(u) = (w) \\ \text{при } \gamma(u) = (u|_N, \dots, \partial^{m-1}u|_N, \partial^{m-1}x_1|_N). \end{cases}$$

Применяя предложение 11.5.8, мы получаем, что для любого сечения $(w) \in B_N^n$ существует единственное сечение $u \in B_M|_N$, являющееся решением задачи (11.5.16). Кроме того, оператор $P: B_M|_N \rightarrow B_M|_N$ сюръективен.

Упражнения к гл. 11

Упражнение 11.1. (i) Пусть $\mathcal{M}$ — левый когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль, а $\mathcal{M}^*$ определен, как в (11.2.19). Докажите изоморфизм

$$(11.Y.1) \quad \Omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}[-n] \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, \mathcal{O}_X),$$

где $n = \dim_{\mathbb{C}} X$.

(ii) Положим $DR(\mathcal{M}) = \Omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}$. Докажите, что если $\mathcal{M}$ голономен, то $DR(\mathcal{M})$ — превратный пучок на X .

Упражнение 11.2. (i) Докажите, что морфизм (11.3.8) является изоморфизмом, если предположить, что $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$ голономен.

(ii) Аналогично, пусть $\mathcal{M}$ (соответственно $\mathcal{N}$) — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль (соответственно $\mathcal{D}_Y$ -модуль). Предположим, что $\mathcal{M}$ или $\mathcal{N}$ голономен. Докажите изоморфизм

$$(11.Y.2) \quad \left(\Omega_X \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M} \right) \boxtimes \left(\Omega_Y \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{N} \right) \simeq \Omega_{X \times Y} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{X \times Y}} (\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{N}).$$

(Указание. Примените теорему 11.3.7 и немного функционального анализа.)

Упражнение 11.3. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие размерности n , а X — комплексификация многообразия M . Пусть $\mathcal{M}$ — голономный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Докажите, что

$$(11.Y.3) \quad \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M) = 0 \quad \text{при } j \geq n.$$

(Указание. Используйте упр. 10.8.)

Упражнение 11.4. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие, X — комплексификация многообразия M , а K — компактное подмножество в M . Докажите, что можно естественным образом отождествить $\Gamma_K(M; B_M \otimes_{A_M} V_M)$ с пространством $(\mathcal{O}_X(K))'$, сопряженным к топологическому векторному пространству $\mathcal{O}_X(K) = \Gamma(K; \mathcal{O}_X)$. (В частности, $\Gamma_K(M; B_M)$ естественным образом наделяется топологией FS -пространства.)

См. [Sato 1], [Martineau 1] и [Schapira 1].

Упражнение 11.5. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие, X — комплексификация многообразия M , а $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Предположим, что

$$(11.У.4) \quad \begin{cases} \text{глобально на } X \text{ } \mathcal{M} \text{ допускает конечно} \\ \text{свободную резольвенту (вида (11.2.16))}, \end{cases}$$

$$(11.У.5) \quad \mathcal{M} \text{ эллиптичен.}$$

Пусть $\Omega \subset\subset M$ — относительно компактное открытое подмножество с гладкой границей. Пусть

$$(11.У.6) \quad \begin{cases} \text{гиперболична относительно } \mathcal{M} \\ \text{т. е. } \theta \notin C_{T_M^*X}(\text{char}(\mathcal{M})) \forall \theta \notin T_{\partial\Omega}^*\mathcal{M}. \end{cases}$$

Докажите, что пространства $H^j(R\Gamma(\Omega, R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, B_M)))$ конечномерны.

(Указание. Пусть $\mathcal{M}^*$ — конечно свободная резольвента модуля $\mathcal{M}$. Докажите изоморфизм $R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, A_M(\overline{\Omega})) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}^*, B_M(\Omega))$. Затем используйте тот факт, что $B_M(\Omega) \simeq (\Gamma_{\partial\Omega}(M; B_M) \rightarrow \Gamma_{\overline{\Omega}}(M; B_M))[1]$ — комплекс FS -пространств, а $A_M(\overline{\Omega})$ есть DFS -пространство, и примените функциональный анализ.)

Дальнейшие результаты см. в работах [Schapira-Schneiders 1] и [Schapira 4].

Упражнение 11.6. Пусть X — комплексное многообразие, а $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль. Докажите, что если $\theta \in T^*X$ нехарактеристично относительно $\mathcal{M}$ (т. е. $\theta \notin \text{char}(\mathcal{M})$), то θ , рассматриваемое как вектор в $T^*X^{\mathbb{R}}$, гиперболично относительно $\mathcal{M} \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{X}}$ (т. е. $\theta \notin C_{T_X^{\mathbb{R}}(X \times \overline{X})}(\text{char}(\mathcal{M}) \times T_X^*\overline{X})$).

Упражнение 11.7. Пусть X — комплексное многообразие, а $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль, удовлетворяющий (11.У.4). Пусть $\Omega \subset \subset X$ — открытое подмножество с гладкой границей. Предположим, что $T_{\partial\Omega}^* X \cap \text{char}(\mathcal{M}) = \emptyset$. Докажите, что пространства $H^j(R\Gamma(\Omega; R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)))$ конечномерны.

(Указание. Используйте упр. 11.6 и 11.7.)

Частный случай этого утверждения см. в [Вопу–Scharira 1].

Упражнение 11.8. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм комплексных многообразий.

(i) Докажите, что в $\mathbf{D}^b(\mathcal{D}_X^{\text{op}})$ имеется естественный морфизм

$$Rf_* \left(\Omega_Y \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \right) [\dim_{\mathbb{C}} Y] \rightarrow \Omega_X [\dim_{\mathbb{C}} X]$$

(это уточнение теоремы 11.1.4, см. [Schneiders 1]).

(ii) Пусть $\mathcal{N}$ — правый когерентный $\mathcal{D}_Y$ -модуль. Постройте морфизмы

$$(11.У.7) \quad Rf_!(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \Omega_Y [\dim_{\mathbb{C}} Y])) \\ \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(f_* \mathcal{N}, \Omega_X [\dim_{\mathbb{C}} X]),$$

$$(11.У.8) \quad Rf_*(R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}, \Omega_Y [\dim_{\mathbb{C}} Y])) \\ \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(f_* \mathcal{N}, \Omega_X [\dim_{\mathbb{C}} X]).$$

(iii) Пусть $f: N \rightarrow M$ — морфизм вещественно-аналитических многообразий, и той же буквой f обозначим комплексификацию $f: Y \rightarrow X$ морфизма f . Пусть $\mathcal{N}$ — когерентный правый $\mathcal{D}_Y$ -модуль.

Постройте естественный морфизм

$$Rf_{N\pi}! {}^t f'^{-1}_N R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y} \left(\mathcal{N}, \mathcal{C}_N \otimes_{\mathcal{A}_N} \mathcal{V}_N \right) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left(f_* \mathcal{N}, \mathcal{C}_N \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{V}_M \right).$$

(iv) В ситуации (iii) предположим, что отображение f собственное над $N \cap \text{supp}(\mathcal{N})$. Постройте естественный морфизм

$$(11.У.9) \quad \Gamma \left(N; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y} \left(\mathcal{N}, \mathcal{B}_N \otimes_{\mathcal{A}_N} \mathcal{V}_M \right) \right) \\ \rightarrow \Gamma \left(M; \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X} \left(H^0(f_* \mathcal{N}), \mathcal{B}_M \otimes_{\mathcal{A}_M} \mathcal{V}_M \right) \right)$$

(т. е. если v — плотность гиперфункции на N , являющаяся решением системы $\mathcal{N}$, то $\int_f v$ есть решение системы $H^0(f_* \mathcal{N})$).

Упражнение 11.9. Пусть X — комплексное многообразие, а N — вещественно-аналитическое подмногообразие коразмерности d , удовлетворяющее условию

$$(11.Y.10) \quad TN \oplus \sqrt{-1}TN = N \times_X TX.$$

Пусть Y — комплексификация многообразия N . Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы отображений, где δ — диагональное вложение:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \times \bar{X} \\ \uparrow & & \uparrow \delta \\ N & \xrightarrow{i} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{g} & X \times \bar{X} \\ & \searrow f & \uparrow q_1 \\ & & X \end{array}$$

Положим $\mathcal{M} = g^{-1}(\mathcal{D}_X \boxtimes \mathcal{O}_{\bar{X}})$.

(i) Докажите, что $Y \times_X T^*X = \text{char}(\mathcal{M})$. (Заметим, что отображение f гладкое.)

(ii) Докажите изоморфизм

$$f^{-1}\mathcal{O}_X \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y).$$

(iii) Докажите изоморфизм

$$\mu_N(\mathcal{O}_X) \otimes_{\text{or}_{N/X}} [d] \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_N).$$

(Указание. Используйте следствие 6.7.4.)

См. [Kashiwara-Kawai 1].

Замечание. $\mathcal{D}_Y$ -модуль $\mathcal{M}$ называется *индуцированной системой Коши-Римана*.

Упражнение 11.10. Пусть M — вещественно-аналитическое многообразие, N — подмногообразие, X — комплексификация многообразия M , а Y — комплексификация подмногообразия N в X . Пусть $\mathcal{M}$ — когерентный $\mathcal{D}_X$ -модуль, такой, что Y нехарактеристично относительно $\mathcal{M}$.

(i) Докажите следующий изоморфизм на Y :

$$R\text{Hom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y) \simeq R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\Gamma_Y(\mathcal{O}_X)) \otimes \omega_{Y/X}^{\otimes -1}$$

(используйте следствие 5.4.11).

(ii) Докажите следующий изоморфизм на N :

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, B_N) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_N(B_M)) \otimes \omega_{N/M}^{\otimes -1}.$$

(iii) Пусть Ω — такое открытое подмножество в M , что $\overline{\Omega} \supset N$ и вложение $\Omega \hookrightarrow M$ локально гомеоморфно вложению в $\mathbb{R}^n$ выпуклого открытого подмножества. Постройте граничный морфизм

$$b : R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_N(B_M))|_N \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, B_N).$$

(Указание. Используйте (11.5.4). См. [Schapira 3].)

Упражнение 11.11. Пусть X — комплексное многообразие, U — открытое подмножество в T^*X , $p \in U$, и пусть $\mathcal{M}'$ — ограниченный комплекс конечно свободных левых $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ -модулей на U ,

$$\mathcal{M}' : 0 \rightarrow (\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})^{N_d} \rightarrow \dots \xrightarrow{P_0} (\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}})^{N_0} \rightarrow 0$$

(здесь P_j — действующие справа матрицы, элементами которых являются сечения пучка $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ на U).

(i) Используя следствие 11.4.8, покажите, что комплекс

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{N_0} \xrightarrow{P_0} \dots \rightarrow \mathcal{O}_X^{N_d} \rightarrow 0$$

корректно определен в $\mathbf{D}^b(X; p)$. Мы обозначим его $\text{Sol}_p(\mathcal{M}')$.

(ii) Покажите, что $\text{SS}(\text{Sol}_p(\mathcal{M}')) \subset \text{supp}(\mathcal{M}')$ в окрестности точки p . (Напомним, что $\text{supp}(\mathcal{M}') = \bigcup_j \text{supp}(H^j(\mathcal{M}'))$.)

См. [Kashiwara-Schapira 3, § 11.4].

Замечания

Подробное обсуждение исторических аспектов теории когерентных $\mathcal{O}_X$ -модулей выходит за рамки этой книги. Подчеркнем лишь, что она связана с именами Ока [Oka 1], Картана [Cartan 2] и Серра [Serre 1], и отошлем читателя к работе [Hörmander 1] за обзором соответствующих результатов.

Точно так же мы не делаем обзор теории $\mathcal{D}_X$ -модулей и отсылаем читателя к библиографическим замечаниям в [Schapira 2], напомним

лишь, что эта теория появилась в 70-х годах в работах [Kashiwara 1] и [Bernstein 1,2].

Классическая теорема Коши–Ковалевской была уточнена Лере [Leraу 3], который получил теорему 11.3.1. Затем она была обобщена на системы в двух разных направлениях. Одно из них [Kashiwara 1] относится к «задаче Коши» (теорема 11.3.5). Другое связано с «распространением»; это теорема 11.3.3, полученная в [Kashiwara–Schapira 2,3] после частных результатов, установленных в работах [Zerner 1], [Bony–Schapira 1] и [Kashiwara 5]. Теорема 11.3.7 была получена еще в работе [Kashiwara 3]. Она послужила отправной точкой для многих важных исследований; интересующегося читателя мы отсылаем к книге [Björk 2].

Кольцо $\mathcal{E}_X$ микролокальных операторов (предложение 11.4.4) и разнообразные естественно связанные с ним модули были построены в работе [Sato–Kawai–Kashiwara 1], где были развиты идеи микролокализации и микрофункций, принадлежащие Сато [Sato 2]. Именно он [Sato 1] в 1959 г. ввел гиперфункции как суммы граничных значений голоморфных функций и проинтерпретировал их в терминах локальных когомологий. В настоящее время при изучении этих граничных значений и в особенности при попытке осмыслить теорему об острие клина [Martineau 2] понятие микрофункции выглядит весьма естественным. Как показано в § 5, оно является эффективным инструментом при изучении линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Теория вещественных квантованных канонических преобразований восходит к Маслову [1] и систематически развивалась Хёрмандером [Hörmander 2] в C^∞ -случае и Сато, Каваи и Касиварой [Sato–Kawai–Kashiwara 1] в аналитическом случае. Эти авторы доказали, что пучки микрофункций и микролокальных операторов локально сохраняются под действием таких преобразований, что является частным случаем следствия 11.4.11. Подчеркнем тот факт, что теорема 11.4.9, принадлежащая Касиваре и Шапира [Kashiwara–Schapira 3], является значительно более сильной, поскольку она рассматривает сам пучок $\mathcal{O}_X$, а не его микролокализации. Следствие 11.4.11 имеет красивые приложения, касающиеся обращения в нуль когомологий микролокализации пучка $\mathcal{O}_X$ вдоль вещественных подмногообразий или когомологий систем микродифференциальных уравнений с простыми характеристиками. Для краткости мы не включили сюда эти результаты и отсылаем читателя к работам [Kashiwara–Schapira 3,4].

По аналитическим уравнениям в частных производных имеется обширная литература, и § 5 дает только взгляд на этот предмет, отправной точкой которого служит предложение 11.5.4(ii), полученное в работе [Sato 2]. Типичными являются предложение 11.5.6 (см.

[Sato-Kawai-Kashiwara 1]), которое к настоящему времени существенно уточнено многими авторами (см. обзор в работе [Tose 1]), и утверждения относительно гиперболических уравнений, начиная с работы [Bony-Schapira 2] (где рассматривался случай одного уравнения), которые далее развивались в [Kashiwara-Schapira 1], где были получены предложения 11.5.4(ii) и 11.5.8. Та же техника теперь используется для изучения краевых задач, к которым мы здесь не обращались (за исключением формул (11.5.5) и (11.5.7), полученных в [Schapira 3]). Подчеркнем, что функтор μhom позволяет нам определить новые пучки микрофункций и новые волновые фронты, хорошо приспособленные к краевым задачам (см. [Schapira 3], [Kataoka 2] и [Uchida 1]).

В заключение отметим, что при исследовании аналитических особенностей распределений большинство исследователей используют «преобразование Фурье–Бросса–Ягольнитцера», введенное Шёстрандом ([Sjostrand 1]; ср., например, [Delort-Lebeau 1]). Однако теперь можно распространить метод, использованный в §§ 4 и 5 на исследование граничных значений голоморфных функций умеренного роста (т. е. распределений), используя функтор ТН (гомоморфизмы «медленного роста»), введенный в [Kashiwara 6], и его микролокализацию, функтор $T\mu\text{hom}$ [Andronikof 1].

Симплектическая геометрия

Мы собрали здесь основные сведения из симплектической геометрии, используемые повсеместно в этой книге. В §1 и 2 мы обсуждаем некоторые основные понятия, касающиеся симплектических векторных пространств и однородных симплектических многообразий. Все результаты хорошо известны и более или менее элементарны. Поэтому мы опускаем некоторые доказательства, которые читатель может найти в работах [Арнольд 2], [Duistermaat 1], [Abraham–Marsden 1] и в особенности [Hörmander 4, гл. 21].

В §3 мы вводим индекс инерции тройки лагранжевых плоскостей. Наше изложение близко к данному в работе [Lion–Vergne 1], и для удобства читателя мы приводим все доказательства. Мы также даем сводку некоторых свойств этого индекса, необходимых в гл. 7, в виде упражнений.

П.1. Симплектические векторные пространства

В этом и следующем параграфе мы рассматриваем симплектические пространства в вещественном случае, хотя теория остается той же самой и для комплексного случая.

Пусть E — вещественное конечномерное векторное пространство. *Симплектической формой* σ на E называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма на E . Векторное пространство E , снабженное симплектической формой σ , называется *симплектическим векторным пространством*. Размерность такого пространства всегда четна.

Пусть (E_1, σ_1) и (E_2, σ_2) — два симплектических векторных пространства. Линейное отображение $u: E_1 \rightarrow E_2$ называется *симплектическим*, если $u^* \sigma_2 = \sigma_1$. Симплектическое отображение всегда инъективно.

Через $Sp(E)$ обозначается группа симплектических автоморфизмов симплектического векторного пространства E . Это замкнутая подгруппа группы $GL(E)$ линейных автоморфизмов пространства E .

Пример П.1.1. Пусть V — вещественное конечномерное векторное пространство, а V^* — двойственное пространство. Пространство $E = V \oplus V^*$ естественным образом снабжено симплектической структурой:

для $(x; \xi)$ и $(x'; \xi')$ из $V \oplus V^*$ мы полагаем

$$(П.1.1) \quad \sigma((x; \xi), (x'; \xi')) = \langle x', \xi \rangle - \langle x, \xi' \rangle.$$

Эта форма называется *естественной симплектической формой* на E .

Если $E = V \oplus V^*$ и u — линейный изоморфизм пространства V , то отображение $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$ является симплектическим автоморфизмом пространства E .

Пусть (E, σ) — симплектическое векторное пространство. Поскольку форма σ невырождена, она определяет линейный изоморфизм H из E^* в E по формуле

$$(П.1.2) \quad \langle \theta, v \rangle = \sigma(v, H(\theta)), \quad v \in E, \quad \theta \in E^*.$$

Этот изоморфизм называется *гамильтоновым изоморфизмом*. Если $\theta \in E^*$, то иногда пишут H_θ вместо $H(\theta)$ и называют H_θ *гамильтоновым вектором* коектора θ .

Поскольку H — изоморфизм, кососимметрическая билинейная форма на E^* , заданная формулой $(u, v) \mapsto \sigma(H_u, H_v)$, есть симплектическая форма на E^* . Она называется *скобкой Пуассона* и обозначается через $\{u, v\}$.

Таким образом,

$$(П.1.3) \quad \{u, v\} = \sigma(H_u, H_v) = \langle v, H_u \rangle.$$

Пусть ρ — линейное подпространство в E . Мы полагаем

$$(П.1.4) \quad \rho^\perp = \{x \in E; \sigma(x, \rho) = 0\}.$$

Тогда

$$\rho^{\perp\perp} = \rho, \quad (\rho_1, \rho_2)^\perp = \rho_1^\perp \cap \rho_2^\perp, \quad (\rho_1 \cap \rho_2)^\perp = \rho_1^\perp + \rho_2^\perp.$$

Пространство $\rho^\perp$ называется *косоортогональным дополнением* к ρ .

Определение П.1.2 Линейное подпространство ρ в E называется *изотропным* (соответственно *лагранжевым*, *инволютивным*), если $\rho \supset \rho^\perp$ (соответственно $\rho = \rho^\perp$, $\rho \supset \rho^\perp$).

Некоторые авторы пользуются термином «коизотропное» вместо «инволютивное».

Заметим, что если ρ изотропно (соответственно лагранжево или инволютивно), то $\dim \rho \leq n$ (соответственно $\dim \rho = n$ или $\dim \rho \geq n$), где $n = \frac{1}{2} \dim E$.

Прямая (гиперплоскость) всегда изотропна (инволютивна). Если $\dim \rho = n$ и ρ либо изотропно, либо инволютивно, то ρ лагранжево.

Пусть ρ изотропно. Тогда пространство $\rho^\perp/\rho$ можно снабдить естественной симплектической структурой, полагая $\sigma(\dot{x}, \dot{y}) = \sigma(x, y)$, где $\dot{x}$ (соответственно $\dot{y}$) есть образ вектора x (соответственно y) в $\rho^\perp/\rho$. (Мы обозначаем той же буквой σ и симплектическую форму на $\rho^\perp/\rho$.)

Если λ — линейное подпространство в E , то мы полагаем

$$(П.1.5) \quad \lambda^\rho = ((\lambda \cap \rho^\perp) + \rho)/\rho.$$

В частности, $E^\rho = \rho^\perp/\rho$. Тогда легко проверить, что

$$(П.1.6) \quad (\lambda^\perp)^\rho = (\lambda^\rho)^\perp.$$

В частности, если λ лагранжево в E , то λ^ρ лагранжево в E^ρ .

Обратно, обозначим через i вложение $\rho^\perp \hookrightarrow E$ и через j проекцию $\rho^\perp \rightarrow \rho^\perp/\rho$. Тогда если μ — лагранжево подпространство в $\rho^\perp/\rho$, то $ij^{-1}(\mu)$ — лагранжево подпространство в E , содержащее ρ .

Симплектическое пространство, описанное в примере П.1.1, не является таким уж частным случаем. В действительности справедливо следующее утверждение.

Предложение П.1.3. Пусть λ_0 — лагранжево подпространство в E . Тогда существует такое лагранжево подпространство λ_1 в E , что $E = \lambda_0 \oplus \lambda_1$. Кроме того, для такого лагранжева подпространства λ_1 отображение $u: \lambda_0 \oplus \lambda_1^* \rightarrow E$, задаваемое формулой $u(x, y) = x - H(y)$, является симплектическим изоморфизмом. Здесь $H(y)$ задается посредством цепочки отображений $\lambda_0^* \simeq (E/\lambda_1)^* \xrightarrow{H} E^* \xrightarrow{H} E$.

Доказательство. (i) Пусть ρ — изотропное пространство, такое, что $\rho \cap \lambda_0 = \{0\}$. Если $\rho \neq \rho^\perp$, то $\rho^\perp \not\subset \lambda_0 + \rho$, поскольку иначе мы имели бы $\rho \supset (\rho^\perp \cap \lambda_0)$ и, следовательно, $\rho^\perp \cap \lambda_0 = \{0\}$, что противоречит условию $\dim \rho^\perp > n$. Выберем $e \in \rho^\perp \setminus (\lambda_0 + \rho)$. Тогда $\rho + \mathbb{R}e$ изотропно и $(\rho + \mathbb{R}e) \cap \lambda_0 = \{0\}$. С помощью индукции по $\dim \rho$ получаем λ_1 .

(ii) Пусть x и x' лежат в λ_0 , а y и y' — в λ_0^* . Тогда

$$\sigma(x - H(y), x' - H(y')) = -\sigma(x, H(y')) + \sigma(x', H(y)) = -\langle y', x \rangle + \langle y, x' \rangle.$$

Поэтому отображение u симплектическое. Так как $\dim(\lambda_0 \oplus \lambda_0^*) = \dim E$, то u есть изоморфизм. $\square$

Пусть (E, σ) — симплектическое векторное пространство. Через E^a мы обозначим пространство E , снабженное симплектической формой $-\sigma$, т. е. $E^a = (E, -\sigma)$.

Для двух симплектических векторных пространств (E_1, σ_1) и (E_2, σ_2) прямая сумма $E_1 \oplus E_2$ также является симплектическим пространством со структурой $\sigma_1 \oplus \sigma_2$.

Пусть E_i ($i = 1, 2, 3$) — три симплектических векторных пространства. Мы обозначим (i, j) -ю проекцию, определенную на $E_1 \times E_2 \times E_3$, через p_{ij} (например, p_{13} есть проекция на $E_1 \times E_3$).

Предложение П.1.4. Пусть λ и μ — два лагранжевых подпространства в $E_1 \oplus E_2^a$ и $E_2 \oplus E_3^a$ соответственно. Положим $\lambda \circ \mu = p_{13}(p_{12}^{-1}\lambda \cap p_{23}^{-1}\mu)$. Тогда $\lambda \circ \mu$ — лагранжево подпространство в $E_1 \oplus E_3^a$.

Доказательство. Диагональ Δ в $E_2^a \oplus E_2$ является лагранжевым подпространством. Поэтому $\rho = \{0\} \times \Delta \times \{0\}$ — изотропное подпространство в $E_1 \oplus E_2^a \oplus E_2 \oplus E_3$. Поскольку $E_1 \oplus E_3 = (E_1 \oplus E_2^a \oplus E_2 \oplus E_3)^{\rho}$ и $\lambda \circ \mu = (\lambda \oplus \mu)^{\rho}$, мы получаем требуемый результат. $\square$

Изучим теперь симплектические базисы. Пусть (E, σ) — симплектическое векторное пространство размерности, скажем, $2n$.

Базис $(e_1, \dots, e_n; f_1, \dots, f_n)$ называется симплектическим, если, обозначая через $(e_1^*, \dots, e_n^*; f_1^*, \dots, f_n^*)$ сопряженный базис в E^* , мы имеем

$$(P.1.7) \quad \sigma = \sum_{j=1}^n f_j^* \wedge e_j^*.$$

Разумеется, условие (П.1.7) эквивалентно условию

$$(P.1.8) \quad \begin{cases} \sigma(e_j, e_k) = \sigma(f_j, f_k) = 0, \\ \sigma(e_j, f_k) = -\sigma(f_k, e_j) = -\delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n, \end{cases}$$

где δ_{jk} — символ Кронекера ($\delta_{jk} = 1$ при $j = k$ и $\delta_{jk} = 0$ в противном случае).

Для такого симплектического базиса симплектический изоморфизм H , определенный формулой (П.1.2), удовлетворяет соотношениям

$$(P.1.9) \quad H(e_j^*) = -f_j, \quad H(f_j^*) = e_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Пусть J и K — два подмножества в $\{1, \dots, n\}$, и пусть $((e_j)_{j \in J}, (f_k)_{k \in K})$ — линейно независимое семейство, удовлетворяющее соотношениям (П.1.8). Тогда легко доказать, что это семейство можно дополнить до симплектического базиса. В частности,

если ρ — изотропное (соответственно лагранжево или инволютивное) подпространство, то существует такой симплектический базис, что ρ порождается векторами $(e_1, \dots, e_j)$ (соответственно $(e_1, \dots, e_n)$ или $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_k)$) для некоторых j и k .

Обозначим через $G(E, n)$ грассманиан n -мерных линейных подпространств в E (напомним, что $\dim E = 2n$). Это компактное многообразие (см., например, [Griffith-Harris 1]). Обозначим через $\Lambda(E)$ подмножество в $G(E, n)$, состоящее из всех лагранжевых плоскостей. Это замкнутое (гладкое) многообразие, которое называется *лагранжевым грассманианом*.

Пусть $\mu \in \Lambda(E)$. Положим

$$(П.1.10) \quad \Lambda_\mu(E) = \{\lambda \in \Lambda(E); \lambda \cap \mu = \{0\}\}.$$

Предположим, что в E задан симплектический базис, и пусть $(x; \xi)$ обозначает соответствующие линейные координаты (т. е. каждое $p \in E$ записывается в виде $p = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + \xi_j f_j)$). Для любого $\lambda \in G(E, n)$ существуют $n \times n$ -матрицы A и B , такие, что

$$(П.1.11) \quad \text{матрица } (A, B) \text{ имеет ранг } n, \lambda = \{(x; \xi); B\xi = Ax\}.$$

Тогда $\lambda \in \Lambda(E)$, если и только если $A^t B$ — симметрическая матрица.

Заметим, что в этом случае $B\xi = Ax$, если и только если $x = {}^t Bz$ и $\xi = {}^t Az$ для некоторого $z \in \mathbb{R}^n$.

Пусть μ — лагранжево подпространство $\{x = 0\}$. Тогда $\lambda \in \Lambda_\mu(E)$, если $\lambda = \{(x; \xi); \xi = Ax\}$ для некоторой симметрической матрицы A . Поэтому $\Lambda_\mu(E)$ открыто и плотно в $\Lambda(E)$ и изоморфно $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

Мы иногда будем говорить, что некоторое свойство «Р» выполнено для плоскостей λ *общего положения* ($\lambda \in \Lambda(E)$), если существует такое открытое плотное подмножество Ω в $\Lambda_\mu(E)$, что это свойство «Р» выполнено при $\lambda \in \Omega$.

Мы также встретимся со следующей ситуацией: λ лагранжево в E и содержит прямую ρ . Мы ищем $\mu \in \Lambda(E)$, для которого $\mu \cap \lambda = \rho$. Рассмотрим отображения $i: \rho^\perp \rightarrow E$ и $j: \rho^\perp \rightarrow \rho^\perp/\rho$. Тогда достаточно выбрать $\mu' \in \Lambda(E^\rho)$ с $\mu' \cap \lambda^\rho = 0$ и положить $\mu = i(j^{-1}(\mu'))$. Для краткости будем говорить, что для подпространства μ общего положения с $\mu \supset \rho$ мы имеем $\lambda \cap \mu = \rho$.

П.2. Однородные симплектические многообразия

Все рассматриваемые здесь многообразия и морфизмы многообразий считаются вещественными класса C^∞ или вещественно-аналитическими. Если не оговорено противное, рассматриваемые

вещественные функции на многообразиях считаются C^∞ -гладкими или вещественно-аналитическими. Однако большинство устанавливаемых нами результатов остаются верными с соответствующими изменениями и для комплексно-аналитических многообразий.

Пусть X — многообразие. Через $\tau: TX \rightarrow X$ мы обозначаем его касательное, а через $\pi: T^*X \rightarrow X$ — кокасательное расслоения. Через $\dot{TX}$ и $\dot{T}^*X$ мы обозначаем расслоения TX и T^*X с удаленным нулевым сечением, а через $\dot{\tau}$ и $\dot{\pi}$ — сужения отображений τ и π на $\dot{TX}$ и $\dot{T}^*X$ соответственно. Напомним, что если M — подмногообразие в X , то нормальное и кокасательное расслоения $T_M X$ и $T_M^* X$ к M в X определяются следующими точными последовательностями векторных расслоений над M :

$$(P.2.1) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow TM \rightarrow M \times_X TX \rightarrow T_M X \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow T_M^* X \rightarrow M \times_X T^* X \rightarrow T^* M \rightarrow 0. \end{cases}$$

Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий. С f ассоциированы морфизмы

$$(P.2.2) \quad \begin{cases} TY \xrightarrow{f'} Y \times_X TX \xrightarrow{f_*} TX, \\ T^*Y \xleftarrow{f'^*} Y \times_X T^*X \xrightarrow{f_*^*} T^*X. \end{cases}$$

В частности, если рассмотреть проекцию $\pi: T^*X \rightarrow X$, то мы получим отображение $\pi^*: T^*X \times_X T^*X \rightarrow T^*T^*X$.

Ограничивая это отображение на диагональ в $T^*X \times_X T^*X$, мы получаем отображение $T^*X \rightarrow T^*T^*X$, которое является сечением расслоения $T^*T^*X \rightarrow T^*X$, т. е. дифференциальной формой степени 1 (1-формой). Эта 1-форма на T^*X называется канонической 1-формой и обозначается через α_X или просто через α , если путаница исключена.

Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — система локальных координат на X . Тогда x_j — вещественные функции, определенные на некотором открытом подмножестве U и удовлетворяющие на U условию $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \neq 0$. Для каждого $x \in U$ набор $(dx_1, \dots, dx_n)$ определяет базис в векторном пространстве $T_x^* X$, и любой вектор $\xi \in T_x^* X$ единственным образом записывается в виде $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$. Система $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ называется системой координат на T^*X , ассоциированной с координатной системой $(x_1, \dots, x_n)$. Легко проверяется, что каноническая 1-форма α_X есть не что иное, как форма $\sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$. Пусть $\sigma = d\alpha$. Тогда $\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ — симплектическая форма на T^*X (т. е. σ для каждого $p \in T^*X$ индуцирует симплектическую структуру

на векторном пространстве $T_p T^* X$. Другими словами, многообразие $T^* X$ снабжено естественной симплектической структурой $d\alpha$. Теперь мы можем распространить на $T^* X$ некоторые из понятий, введенных в § 1.

Подмногообразие V в $T^* X$ называется *изотропным* (соответственно *лагранжевым* или *инволютивным*), если для любого $p \in V$ касательное пространство $T_p V$ обладает соответствующим свойством в $T_p T^* X$. Если f — вещественная функция, определенная на некотором открытом подмножестве U в $T^* X$, то *гамильтоново векторное поле* H_f функции f — это векторное поле на U , представляющее собой образ df относительно гамильтонова изоморфизма $H: T^* T^* X \simeq TT^* X$.

Скобка Пуассона двух функций f и g определяется формулой

$$(П.2.3) \quad \{f, g\} = H_f(g) = d\alpha(H_f, H_g).$$

Легко проверить соотношения

$$(П.2.4) \quad \begin{cases} \{f, g\} = -\{g, f\}, \\ \{f, hg\} = h\{f, g\} + g\{f, h\}, \\ \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0. \end{cases}$$

В частности, $[H_f, H_g] = H_{\{f, g\}}$, где $[u, v] = uv - vu$ — коммутатор векторных полей u и v .

Пусть $(x_1, \dots, x_n)$ — система локальных координат на X , (x, ξ) — ассоциированные координаты на $T^* X$ и f — вещественная функция на $U \subset T^* X$. Тогда

$$(П.2.5) \quad H_f = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

Подмногообразие V в $T^* X$ инволютивно тогда и только тогда, когда скобка Пуассона $\{f, g\}$ равна нулю на V для любых двух функций f и g , равных нулю на V . Действительно, векторное расслоение $(TV)^\perp$ порождается векторными полями H_f , соответствующими таким функциям f , что $f|_V = 0$. Поэтому условие $(TV)^\perp \subset TV$ эквивалентно условию $H_f(g) = 0$ для любых f, g , таких, что $f|_V = 0, g|_V = 0$. Далее в силу (П.2.4) мы находим, что если V инволютивно, то подрасслоение $(TV)^\perp$ в TV удовлетворяет условиям интегрируемости Фробениуса (т. е. пучок сечений расслоения $(TV)^\perp$ замкнут относительно скобки $[\cdot, \cdot]$). По теореме Фробениуса (см. [Hörmander 4, Appendix C]) инволютивное многообразие V расслаивается на листы, которые называются *бихарактеристическими листами* многообразия V . Заметим, что размерность этих листов совпадает с коразмерностью многообразия V . В частности, если V лагранжево, то листы открыты в V .

Пример П.2.1. Пусть Z — подмногообразие в X . Многообразие $Z \times_X T^*X$ инволютивно, а T_Z^*X лагранжево. Обратим внимание на предельный случай $Z = X$, в котором мы получаем лагранжево многообразие T_X^*X , т. е. нулевое сечение кокасательного расслоения T^*X .

1-форма α индуцирует на T^*X структуру, более богатую, чем просто структура симплектического многообразия, а именно *однородную симплектическую структуру*, которую мы сейчас и опишем.

Пусть $H(\alpha)$ — образ формы α при гамильтоновом изоморфизме. Если координаты $(x; \xi)$ выбраны, как и выше, то мы имеем

$$(П.2.6) \quad \alpha = \sum_j \xi_j dx_j, \quad H(\alpha) = -\sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}.$$

Итак, $-H(\alpha)$ — это просто радиальное векторное поле на T^*X (т. е. инфинитезимальный генератор действия группы $\mathbb{R}^+$ на T^*X). Это поле называется также *эйлеровым векторным полем*.

Мы скажем, что подмножество S в T^*X является *коническим* (соответственно *локально коническим*), если оно инвариантно (соответственно локально инвариантно) относительно действия группы $\mathbb{R}^+$. Таким образом, S является локально коническим тогда и только тогда, когда его пересечение с любой орбитой группы $\mathbb{R}^+$ открыто в этой орбите. Функция f , определенная на открытом подмножестве U в T^*X , называется *однородной*, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению $H(\alpha)f = kf$ для некоторого $k \in \mathbb{C}$. Заметим, что подмногообразие V является локально коническим, если и только если поле $H(\alpha)$ касательно к V или, эквивалентным образом, V локально определяется однородными уравнениями.

Локально коническое подмногообразие изотропно тогда и только тогда, когда $\alpha|_V \equiv 0$, поскольку $\langle \alpha, v \rangle = d\alpha(v, H(\alpha))$ при $v \in TT^*X$.

Говорят, что локально коническое инволютивное подмногообразие V *регулярно*, если $\alpha|_V$ всюду отлично от нуля. Это эквивалентно локальному существованию однородных функций $f_1, \dots, f_r$, равных нулю на V , где $r = \text{codim } V$, таких, что

$$(П.2.7) \quad \begin{cases} \{f_i, f_j\} = 0 \text{ на } V \text{ для любых } i, j \in \{1, \dots, r\}, \\ df_1 \wedge \dots \wedge df_r \wedge \alpha \neq 0 \text{ на } V. \end{cases}$$

Эквивалентное условие заключается в том, что эйлерово векторное поле не касательно ни к одному бихарактеристическому листу ни в одной точке.

Пример П.2.2. Пусть Z — подмногообразие в X . Тогда $Z \times_X T^*X$ регулярно и инволютивно вне T_Z^*X .

Соглашение П.2.3. В данном приложении, если не оговорено противное, все подмногообразия в T^*X предполагаются локально коническими.

Пусть $\rho(p)$ — линейное подпространство в $T_p T^*X$, порожденное эйлеровым векторным полем в точке p . Если $p \in T^*_\chi X$, то $\rho(p) = \{0\}$, в противном случае $\rho(p)$ — прямая.

Если V — (локально коническое) подмногообразие, то для любого $p \in V$ касательное пространство $T_p V$ содержит $\rho(p)$. Пусть $p \in T^*X$. Мы полагаем

$$(П.2.8) \quad \lambda_0(p) = T_p \pi^{-1} \pi(p).$$

Это лагранжево линейное подпространство в $T_p T^*X$.

Пусть Λ — лагранжево подмногообразие. Коранг проекции $\pi|_\Lambda : \Lambda \rightarrow X$ по определению есть размерность пространства $T_p \Lambda \cap \lambda_0(p)$. На T^*X этот коранг равен по меньшей мере единице, поскольку и $T_p \Lambda$, и $\lambda_0(p)$ содержат $\rho(p)$. Если коранг постоянен и равен, скажем, d , то локально на Λ множество $\pi(\Lambda)$ является гладким подмногообразием M в X коразмерности d и $\Lambda = T^*_M X$. В частности, если в некоторой точке p коранг равен единице, то в окрестности этой точки Λ является конормальным расслоением к некоторой гиперповерхности.

Пусть теперь X и Y — два многообразия одинаковой размерности, и пусть U_X (соответственно U_Y) — открытое подмножество в T^*X (соответственно T^*Y). Пусть χ — диффеоморфизм U_X на U_Y . Если $\chi^*(d\alpha_Y) = d\alpha_X$, то говорят, что χ — *симплектический изоморфизм*. Если, кроме того, χ однороден (т. е. коммутирует с действием группы $\mathbb{R}^+$), то $\chi^*(\alpha_Y) = \alpha_X$ и мы будем говорить, что χ — *контактное преобразование*, хотя это в действительности не совсем верно, поскольку контактная структура — это структура, получающаяся на факторпространстве $T^*X/\mathbb{R}^+$.

Пусть χ — однородный диффеоморфизм $U_X \xrightarrow{\sim} U_Y$, и пусть Λ_χ — его график в $U_X \times U_Y$. Обратный образ $\chi^*(\beta)$ 1-формы β на U_Y характеризуется условием $(\chi^*(\beta) - \beta)|_{\Lambda_\chi} \equiv 0$. Пусть Λ_χ^α — образ графика Λ_χ при антиподальном отображении на T^*Y . Условие $\chi^*(\alpha_Y) = \alpha_X$ выполнено тогда и только тогда, когда $(\alpha_X + \alpha_Y)|_{\Lambda_\chi^\alpha} \equiv 0$, т. е. Λ_χ^α изотропно и, следовательно, лагранжево. Другими словами, χ является контактным преобразованием тогда и только тогда, когда Λ_χ^α — (локально коническое) лагранжево подмногообразие в $T^*(X \times Y)$.

Мы называем Λ_χ^α *лагранжевым многообразием, ассоциированным с графиком контактного преобразования χ* .

Пусть (y) — система локальных координат на Y , и пусть $(y; \eta)$ — соответствующие координаты на T^*Y . Тогда однородное отображение $\chi: U_X \rightarrow U_Y$ задается двумя наборами функций, а именно однородными степени 0 функциями f_j и однородными степени 1 функциями

g_k ($1 \leq j, k \leq n$), с помощью уравнений $y_j = f_j$, $\eta_k = g_k$. Отображение χ является контактным преобразованием тогда и только тогда, когда Λ_χ^α инволютивно, т. е. тогда и только тогда, когда

$$(П.2.9) \quad \{f_j, f_k\} = 0, \quad \{g_j, g_k\} = 0, \quad \{f_j, g_k\} = -\delta_{jk}.$$

Пример П.2.4. Пусть $(x; \xi)$ — координаты на $T^*\mathbb{R}^n$, и пусть $\varphi(\xi)$ — однородная степени 1 функция, определенная на некотором открытом подмножестве U в $(\mathbb{R}^n)^*$ (например, $\varphi(\xi) = (\sum_j \xi_j^2)^{1/2}$ на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Тогда отображение $\chi: (x; \xi) \mapsto (x + \varphi'(\xi); \xi)$ является контактным преобразованием.

Следующий результат полезен при построении контактных преобразований.

Предложение П.2.5. Пусть V — регулярное инволютивное подмногообразие в T^*X и $p \in V \cap T^*X$. Пусть λ — такое линейное лагранжево подпространство в $T_p T^*X$, что $\rho(p) \subset \lambda \subset T_p V$ (напомним, что $\rho(p)$ — прямая, порожденная зйлеровым векторным полем). Тогда существует такое лагранжево многообразие $\Lambda \subset T^*X$, что $\Lambda \subset V$ и $T_p \Lambda = \lambda$.

Доказательство. Пусть $n = \dim X$, $r = \text{codim } V$. Пусть $(f_1, \dots, f_r)$ — система однородных функций, равных нулю на V и удовлетворяющих (П.2.7). Если $r = n - 1$, то мы полагаем $e = \alpha(p)$; в противном случае выбираем $v \in \lambda^\perp \setminus (T_p V + \mathbb{R}H(\alpha))$ и полагаем $e = H^{-1}(v)|_V$. В соответствии с классической теорией дифференциальных уравнений мы можем найти такую функцию g на V , что

$$\begin{cases} H(\alpha)|_V(g) = 0, & H_{f_j}|_V(g) = 0 \quad (j \leq r), \\ dg(p) = e, & g(p) = 0, \end{cases}$$

поскольку e не касается бихарактеристического листа, проходящего через p .

Положим $V_1 = \{q \in V; g(q) = 0\}$. Тогда V_1 — коническое многообразие с требуемыми свойствами, если $r = n - 1$; в противном случае V_1 — регулярное инволютивное подмногообразие. В последнем случае мы применяем индукцию по r . $\square$

Пусть X, Y, Z — три многообразия. Через p_1 и p_2 мы обозначаем проекции на первый и второй сомножитель, определенные на $T^*X \times T^*Y$ или на $T^*Y \times T^*Z$; далее, p_{ij} обозначает (i, j) -ю проекцию, определенную на $T^*X \times T^*Y \times T^*Z$. Положим $p_2^a = a \circ p_2$, где a — антиподальное отображение. Пусть $\Lambda_1 \subset T^*(X \times Y)$ и $\Lambda_2 \subset T^*(Y \times Z)$ —

два лагранжевых многообразия. Пусть $(p_X, p_Y^a) \in \Lambda_1, (p_Y, p_Z^a) \in \Lambda_2$. Предположим, что

$$(П.2.10) \quad \begin{cases} \text{отображения } p_2^a|_{\Lambda_1}: \Lambda_1 \rightarrow T^*Y \text{ и } p_1|_{\Lambda_2}: \Lambda_2 \rightarrow T^*Y \\ \text{транскверсальны в точке } p_Y. \end{cases}$$

Заменим Λ_1 и Λ_2 на $\Lambda_1 \cap U$ и $\Lambda_2 \cap V$, где U и V — достаточно малые открытые окрестности точек (p_X, p_Y^a) и (p_Y, p_Z^a) соответственно; тогда отображение p_{13} индуцирует изоморфизм многообразия $\Lambda_1 \times_{T^*Y} \Lambda_2$ на некоторое лагранжево подмногообразие Λ в $T^*(X \times Z)$. Мы полагаем

$$(П.2.11) \quad \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$$

(см. лемму 7.4.4 и определение 7.4.5).

Предложение П.2.6. Пусть Λ_1 — лагранжево подмногообразие в $T^*(X \times Y)$, и пусть $(p_X, p_Y^a) \in \Lambda_1$, причем $p_Y \notin T_Y^*Y$. Предположим, что отображение $p_1|_{\Lambda_1}: \Lambda_1 \rightarrow T^*X$ гладкое. Тогда существуют многообразие Z той же размерности, что и Y , и лагранжево многообразие $\Lambda_2 \subset T^*(Y \times Z)$, определенное в окрестности точки (p_Y, p_Z^a) , такие, что

- (i) $\Lambda_2 = T_S^*(Y \times Z)$, где S — гиперповерхность в $Y \times Z$;
- (ii) Λ_2 ассоциировано с графиком некоторого контактного преобразования (т. е. $p_1|_{\Lambda_2}$ и $p_2^a|_{\Lambda_2}$ суть локальные изоморфизмы);
- (iii) $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = T_{S'}^*(X \times Z)$, где S' — гиперповерхность в $X \times Z$.

Доказательство. Положим $E_X = T_{p_X}T^*X, E_Y = T_{p_Y}T^*Y$, и пусть E_Y^a обозначает пространство E_Y , снабженное противоположной симплектической структурой. Тогда пара (p_1, p_2^a) задает симплектический изоморфизм $T_{(p_X, p_Y^a)}T^*(X \times Y) \simeq E_X \times E_Y^a$, и мы отождествим лагранжевы подпространства в $T_{(p_X, p_Y^a)}T^*(X \times Y)$ с их образами в $E_X \times E_Y^a$.

Пусть ρ_X обозначает линейное подпространство, порожденное эйлеровым векторным полем в точке p_X в пространстве E_X ; аналогично введем подпространства ρ_Y в E_Y , ρ_{XY} в $E_X \times E_Y^a$ и ρ_{YY} в $E_Y \times E_Y^a$. Положим

$$\lambda_1 = T_{(p_X, p_Y^a)}\Lambda, \lambda_{0X} = T_{p_X}\pi^{-1}\pi(p_X), \lambda_{0Y} = T_{p_Y}\pi^{-1}\pi(p_Y)$$

и отождествим λ_1 и λ_{0X} с лагранжевыми подпространствами в $E_X \times E_Y^a$ и E_X соответственно.

В силу предположения, что $p_1|_{\lambda_1}: \lambda_1 \rightarrow E_X$ сюръективно, мы получаем, что $p_2^a|_{\lambda_1}: \lambda_1 \rightarrow E_Y$ инъективно (см. упр. П.4). Кроме того, $p_2^{-1}(\rho_Y) \cap \lambda_1 = \rho_{XY}$. Поскольку $p_2(p_1^{-1}(\lambda_{0X}) \cap \lambda_1)$ лагранжево в E_Y

(предложение П.1.4), для лагранжева подпространства $\lambda \subset E_Y$ общего положения, такого, что $\rho_Y \subset \lambda$, мы имеем

$$\lambda \cap p_2(p_1^{-1}(\lambda_0 X) \cap \lambda_1) = \rho_Y.$$

Отсюда следует, что $\rho_{XY} = p_2^{-1}(\lambda) \cap p_1^{-1}(\lambda_0 X) \cap \lambda_1$, так что

$$(P.2.12) \quad \begin{cases} \rho_{XY} = (\lambda_0 X \times \lambda) \cap \lambda_1 \text{ для лагранжева} \\ \text{подпространства } \lambda \subset E_Y^a \text{ общего положения,} \\ \text{такого, что } \rho_Y \subset \lambda. \end{cases}$$

Тогда для лагранжева подпространства $\mu \subset E_Y \times E_Y^a$ общего положения, такого, что $\rho_{YY} \subset \mu$, мы имеем

$$(P.2.13) \quad p_1|_{\mu}: \mu \rightarrow E_Y \text{ и } p_2|_{\mu}: \mu \rightarrow E_Y^a \text{ — изоморфизмы,}$$

$$(P.2.14) \quad (\lambda_0 Y \times \lambda_0 Y) \cap \mu = \rho_{YY}.$$

Поскольку $\lambda = p_1(\mu \cap p_2^{-1}(\lambda_0 Y))$ находится в общем положении, в дальнейшем мы можем считать, что λ удовлетворяет условию (П.2.12). Тогда

$$(P.2.15) \quad (\lambda_1 \circ \mu) \cap (\lambda_0 X \times \lambda_0 Y) = \rho_{XY}.$$

Возьмем теперь Y , ρ_Y и $\lambda_0 Y$ в качестве Z , p_Z и $\lambda_0 Z$ соответственно. В силу предложения П.2.5 мы можем найти такое лагранжево многообразие $\lambda_2 \subset T^*(Y \times Z)$, что $T_{(p_Y, p_Z^a)} \lambda_2 = \mu$. Тогда λ_2 удовлетворяет всем требуемым условиям в силу (П.2.13), (П.2.14) и (П.2.15). $\square$

Следствие П.2.7. Пусть $\Lambda \subset T^*X$ — лагранжево многообразие, и пусть $p \in \Lambda$. Тогда существует такое контактное преобразование χ , определенное в окрестности точки p , что $\chi(\Lambda)$ представляет собой конормальное расслоение к некоторой гиперповерхности и, более того, лагранжево многообразие, ассоциированное с графиком преобразования χ , является конормальным расслоением к некоторой гиперповерхности.

Доказательство. Данное утверждение является частным случаем предложения П.2.5 при $X = \{pt\}$.

Следствие П.2.8. Пусть $\Lambda \subset T^*(X \times Y)$ — лагранжево многообразие, ассоциированное с контактным преобразованием (т. е. $p_1|_{\Lambda}$ и $p_2^a|_{\Lambda}$ — локальные изоморфизмы). Тогда локально на Λ существуют

подмногообразие Z той же размерности, что и X , и два лагранжевых многообразия $\Lambda_1 \subset T^*(X \times Z)$ и $\Lambda_2 \subset T^*(Z \times Y)$, такие, что Λ_1 и Λ_2 ассоциированы с контактными преобразованиями, являются конормальными расслоениями к некоторым гиперповерхностям в $X \times Z$ и $Z \times Y$ соответственно и удовлетворяют условию $\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2$.

Доказательство. В силу предложения П.2.6 существует такое контактное преобразование χ , что если Λ_2 — лагранжево подмногообразие, ассоциированное с его графиком, то Λ_2 и $\Lambda \circ \Lambda_2$ являются конормальными расслоениями к некоторым гиперповерхностям. Тогда $\Lambda = (\Lambda \circ \Lambda_2) \circ \Lambda_3$, где Λ_3 — лагранжево многообразие, ассоциированное с χ^{-1} . $\square$

В заключение данного параграфа напомним следующий хорошо известный результат.

Предложение П.2.9. Пусть Λ — коническое подмногообразие в T^*X и $p \in \Lambda$. Предположим, что Λ изотропно (соответственно лагранжево или регулярно инволютивно). Тогда существует такое контактное преобразование χ , определенное в окрестности точки p , что $\chi(p) = (0; dx_n) \in T^*\mathbb{R}^n$ и $\Lambda = \{(x; \xi); x = 0, \xi_1 = \dots = \xi_r = 0 \text{ (} r < n \text{)}\}$ (соответственно $\Lambda = \{(x; \xi); x = 0\}$ или $\Lambda = \{(x; \xi); \xi_1 = \dots = \xi_p = 0 \text{ (} p < n \text{)}\}$).

Доказательство оставляем читателю в качестве упражнения.

П.3. Индекс инерции

Пусть (E, σ) — вещественное симплектическое векторное пространство размерности $2n$, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — три лагранжевых подпространства. (В данном параграфе, если не оговорено противное, подпространствами называются линейные подпространства.)

Определение П.3.1. Индексом инерции тройки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, обозначаемым через $\tau_E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ (или просто $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$), называется сигнатура квадратичной формы q , определенной на $3n$ -мерном векторном пространстве $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$ формулой

$$q(x_1, x_2, x_3) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, x_3) + \sigma(x_3, x_1).$$

Этот индекс также иногда называют *индексом Маслова*.

В подходящем базисе пространства $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$ форма q может быть представлена диагональной матрицей, на диагонали которой стоят p_+ единиц, p_- минус единиц и $3n - p_+ - p_-$ нулей. Тогда сигнатура формы q , обозначаемая через $\text{sgn}(q)$, равна $p_+ - p_-$.

Индекс τ обладает следующими свойствами.

Теорема П.3.2. (i) $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ антисимметричен по отношению к перестановкам λ_j , т. е.

$$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\tau(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3) = -\tau(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2).$$

(ii) τ удовлетворяет «условию коцикла»: для любой четверки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ лагранжесвых подпространств

$$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) - \tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) + \tau(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) - \tau(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = 0.$$

(iii) Если лагранжесвы подпространства $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ непрерывным образом движутся в лагранжесвом грассманиане $\lambda(E)$ так, что $\dim(\lambda_1 \cap \lambda_2)$, $\dim(\lambda_2 \cap \lambda_3)$ и $\dim(\lambda_3 \cap \lambda_1)$ остаются постоянными, то $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ остается постоянным.

(iv) $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = n + \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) + \dim(\lambda_2 \cap \lambda_3) + \dim(\lambda_3 \cap \lambda_1) \pmod{2\mathbb{Z}}$.

(v) Если ρ — изотропное подпространство, содержащееся в $(\lambda_1 \cap \lambda_2) + (\lambda_2 \cap \lambda_3) + (\lambda_3 \cap \lambda_1)$, то

$$\tau_E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tau_{E^\rho}(\lambda_1^\rho, \lambda_2^\rho, \lambda_3^\rho).$$

(vi) Пусть $E^a = (E, -\sigma)$ — векторное пространство E , снабженное симплектической формой $-\sigma$. Тогда

$$\tau_{E^a}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\tau_E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

(vii) Пусть (E_1, σ_1) и (E_2, σ_2) — два симплектических векторных пространства, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (соответственно μ_1, μ_2, μ_3) — тройка лагранжесвых подпространств в E_1 (соответственно E_2). Тогда

$$\tau_{E_1 \oplus E_2}(\lambda_1 \oplus \mu_2, \lambda_2 \oplus \mu_2, \lambda_3 \oplus \mu_3) = \tau_{E_1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \tau_{E_2}(\mu_1, \mu_2, \mu_3).$$

(Здесь $E_1 \oplus E_2$ снабжено симплектической формой $\sigma_1 \oplus \sigma_2$.)

Доказательство (i) очевидно, поскольку квадратичная форма $q(x_1, x_2, x_3)$ антисимметрична относительно перестановки λ_j .

(iii) Для $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ в $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$ положим

$$B(x, y) =$$

$$\sigma(x_1, y_2) + \sigma(x_2, y_3) + \sigma(x_3, y_1) + \sigma(y_1, x_2) + \sigma(y_2, x_3) + \sigma(y_3, x_1).$$

По определению вполне изотропным подпространством I формы q называется пространство

$$(П.3.1) \quad I = \{x \in \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3; B(x, y) = 0 \text{ для любого } y\}.$$

Поскольку $B(x, y) = \sigma(y_1, x_2 - x_3) + \sigma(y_2, x_3 - x_1) + \sigma(y_3, x_1 - x_2)$, мы имеем

$$I = \{(x_1, x_2, x_3) \in \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3; x_2 - x_3 \in \lambda_1, x_3 - x_1 \in \lambda_2, x_1 - x_2 \in \lambda_3\}.$$

Положим $y_1 = x_2 + x_3 - x_1$, $y_2 = x_3 + x_1 - x_2$, $y_3 = x_1 + x_2 - x_3$. Тогда

$$y_1 \in \lambda_2 \cap \lambda_3, \quad y_2 \in \lambda_3 \cap \lambda_1, \quad y_3 \in \lambda_1 \cap \lambda_2.$$

Более того,

$$2x_1 = y_2 + y_3, \quad 2x_2 = y_3 + y_1, \quad 2x_3 = y_1 + y_2.$$

Таким образом, линейное преобразование $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$ изоморфно отображает I на $(\lambda_1 \cap \lambda_2) \oplus (\lambda_2 \cap \lambda_3) \oplus (\lambda_3 \cap \lambda_1)$. Поскольку ранг формы q (обозначаемый через $\text{rk}(q)$) равен $3n - \dim I$, мы получаем

$$(П.3.2) \quad \text{rk}(q) = 3n - \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) - \dim(\lambda_2 \cap \lambda_3) - \dim(\lambda_3 \cap \lambda_1).$$

В силу условий, наложенных в (iii), мы получаем, что $\text{rk}(q)$ постоянен. Поскольку q движется непрерывным образом, если λ_i движутся непрерывным образом, отсюда следует (iii).

(iv) Мы имеем

$$(П.3.3) \quad \text{sgn}(q) = \text{rk}(q) \bmod 2\mathbb{Z}.$$

Поэтому (iv) следует из (П.3.2).

(ii) Предположим временно, что λ_1 и λ_2 пересекаются трансверсально, и обозначим через p_1 и p_2 проекции

$$p_i: E = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \rightarrow \lambda_i \quad (i = 1, 2).$$

Для x и y в E мы имеем

$$\begin{aligned} \sigma(p_1(x), y) &= \sigma(p_1(x), p_1(y) + p_2(y)) \\ &= \sigma(p_1(x), p_2(y)) \\ &= \sigma(x, p_2(y)). \end{aligned}$$

Лемма П.3.3. *Предположим, что λ_1 и λ_2 трансверсальны. Тогда индекс $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ равен сигнатуре квадратичной формы q_3 на λ_3 , задаваемой формулой*

$$q_3(x_3) = -\sigma(p_1(x_3), p_2(x_3)) = -\sigma(p_1(x_3), x_3).$$

Доказательство леммы П.3.3. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$. Тогда

$$\begin{aligned} q(x) &= \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, x_3) + \sigma(x_3, x_1) \\ &= \sigma(x_1, x_2) - \sigma(p_1(x_3), x_2) - \sigma(x_1, p_2(x_3)) \\ &= \sigma(x_1 - p_1(x_3), x_2 - p_2(x_3)) - \sigma(p_1(x_3), p_2(x_3)). \end{aligned}$$

Линейное преобразование $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - p_1(x_3), x_2 - p_2(x_3), x_3)$ устанавливает эквивалентность квадратичной формы $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \sigma(x_1 - p_1(x_3), x_2 - p_2(x_3))$ форме $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \sigma(x_1, x_2)$. Поэтому ее сигнатура равна нулю, что и доказывает лемму. $\square$

Лемма П.3.4. Пусть λ_j ($j = 1, 2, 3$) и μ — четверка лагранжесовых подпространств, такая, что $\lambda_j \cap \mu = \{0\}$ ($j = 1, 2, 3$). Тогда

$$(П.3.4) \quad \tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu) + \tau(\lambda_2, \lambda_3, \mu) + \tau(\lambda_3, \lambda_1, \mu)$$

Доказательство леммы П.3.4. По лемме П.3.3 правая часть формулы (П.3.4) представляет собой сигнатуру следующей квадратичной формы на $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$:

$$q'(y_1, y_2, y_3) = \sigma(p_1(y_2), y_2) + \sigma(p_2(y_3), y_3) + \sigma(p_3(y_1), y_1),$$

где p_j на этот раз обозначает проекцию

$$p_j: \lambda_j \oplus \mu \rightarrow \lambda_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим линейный автоморфизм пространства $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$, заданный формулами

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + p_1(y_2), & x_2 &= y_2 + p_2(y_3), & x_3 &= y_3 + p_3(y_1), \\ y_1 &= (x_1 - p_1(x_2) + p_1(x_3))/2, & y_2 &= (x_2 - p_2(x_3) + p_2(x_1))/2, \\ y &= (x_3 - p_3(x_1) + p_3(x_2))/2. \end{aligned}$$

Простое вычисление показывает, что

$$(П.3.5) \quad q(x_1, x_2, x_3) = q'(y_1, y_2, y_3).$$

Таким образом, лемма доказана. $\square$

Окончание доказательства теоремы П.3.2. Выберем лагранжево подпространство μ , трансверсальное ко всем λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$), и применим (П.3.4). Тогда (ii) следует из (i).

(v) Мы разобьем доказательство на несколько шагов.

(a) Пусть сначала $\rho \subset \lambda_1 \cap \lambda_2 \cap \lambda_3$. Тогда квадратичная форма q на $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$ является прообразом соответствующей квадратичной формы на $\lambda_1^\rho \oplus \lambda_2^\rho \oplus \lambda_3^\rho$ при сюръективном отображении $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3 \rightarrow \lambda_1^\rho \oplus \lambda_2^\rho \oplus \lambda_3^\rho$. Отсюда следует утверждение для данного случая.

(b) Предположим теперь, что $\rho \subset \lambda_2 \cap \lambda_3$ и $\lambda_3^\rho = \lambda_1^\rho$. Рассмотрим квадратичную форму q'' на $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus (\lambda_1 \cap \rho^\perp) \oplus \rho$, определенную формулой

$$q''(x_1, x_2, u, v) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, u + v) + \sigma(u + v, x_1).$$

Тогда $q''(x_1, x_2, u, v) = \sigma(x_1, x_2) + \sigma(x_2, u) + \sigma(v, x_1) = \sigma(x_1 - u, x_2 - v)$. Поэтому сигнатура формы q'' равна нулю. По предположению $\lambda_3 = (\lambda_1 \cap \rho^\perp) + \rho$. Отсюда вытекает, что сигнатура формы q на $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \lambda_3$ совпадает с сигнатурой формы q'' . Поэтому в данном случае $\tau = 0$.

(c) Положим $\tilde{\lambda}_i = (\lambda_i \cap \rho^\perp) + \rho = (\lambda_i + \rho) \cap \rho^\perp$, $i = 1, 2, 3$. Мы имеем

$$(П.3.6) \quad \lambda_1^{\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2} = \tilde{\lambda}_1^{\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2}.$$

Действительно, из включений $\rho \subset \lambda_1 + \lambda_2 \cap \lambda_3 \subset \lambda_1 + \lambda_2 \cap \rho^\perp$ вытекает, что

$$\rho \subset \lambda_1 + (\lambda_1 + \rho) \cap \lambda_2 \cap \rho^\perp \subset \lambda_1 + \tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2.$$

Мы получаем $\tilde{\lambda}_1 \subset \lambda_1 + (\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2)$ и, таким образом,

$$\tilde{\lambda}_1 \subset [\lambda_1 + (\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2)] \cap (\tilde{\lambda}_1 + \lambda_2),$$

откуда

$$(П.3.7) \quad \tilde{\lambda}_1^{\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2} = \tilde{\lambda}_1^{\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_2}.$$

Поскольку оба пространства в (П.3.7) лагранжевы, отсюда следует (П.3.6). Аналогично,

$$(П.3.8) \quad \lambda_1^{\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_3} = \tilde{\lambda}_1^{\tilde{\lambda}_1 \cap \lambda_3}.$$

Поэтому, согласно (b), мы получаем

$$(П.3.9) \quad \tau(\lambda_1, \tilde{\lambda}_1, \lambda_j) = 0 \quad \text{для } j = 2, 3.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \tau(\lambda_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_1) + \tau(\lambda_2, \lambda_3, \tilde{\lambda}_1) + \tau(\lambda_3, \lambda_1, \tilde{\lambda}_1) \\ &= \tau(\tilde{\lambda}_1, \lambda_2, \lambda_3). \end{aligned}$$

Повторяя это рассуждение, получаем

$$\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \tau(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3),$$

и член в правой части равен $\tau(\lambda_1^\rho, \lambda_2^\rho, \lambda_3^\rho)$ в силу (a).

Пункты (vi) и (vii) очевидны. □

Замечание П.3.5. Условие коцикла, введенное в п. (ii) теоремы П.3.2, наглядно показано на рис. П.3.1.

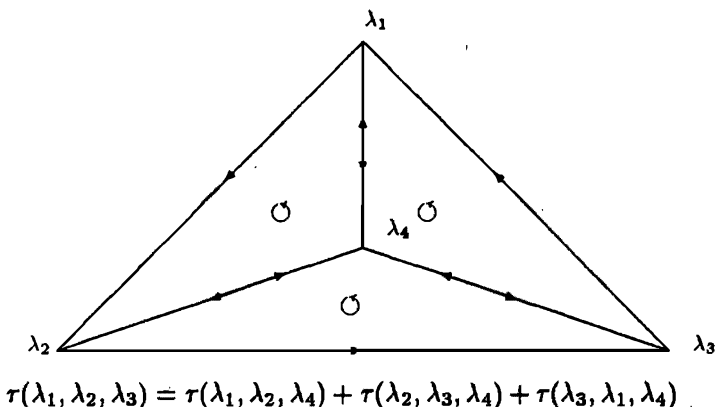


Рис. П.3.1.

Мы явно вычислим индекс Маслова в частном случае. Предположим, что пространство E снабжено симплектическим базисом. Пусть $(x; \xi)$ — соответствующие линейные координаты. Пусть A и B — две матрицы размера $n \times n$, удовлетворяющие предположению (П.1.11) и такие, что матрица $A^t B$ симметрическая. Положим

$$\lambda_1 = \{x = 0\}, \quad \lambda_2 = \{\xi = 0\}, \quad \lambda_3 = \{(x; \xi); Ax = B\xi\}.$$

Предложение П.3.6. Мы имеем $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\operatorname{sgn}(A^t B)$.

Доказательство. Обозначим через p_1 и p_2 проекции из $E = \lambda_1 \oplus \lambda_2$ на λ_1 и λ_2 соответственно. Согласно лемме П.3.3, число $-\tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ есть сигнатура квадратичной формы q_3 на λ_3 , заданной формулой

$$q_3((x; \xi)) = \sigma(p_1(x; \xi), p_2(x; \xi)) = \sigma(\xi, x) = \langle \xi, x \rangle.$$

Отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в λ_3 , действующее по формуле $z \mapsto ({}^t Bz, {}^t Az)$, является линейным изоморфизмом. Поэтому $\langle \xi, x \rangle = \langle z, A^t Bz \rangle$, откуда следует нужный результат. $\square$

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — лагранжевы подпространства, причем $N \geq 3$. Пусть μ — еще одно лагранжево подпространство. По теореме П.3.2 (ii) мы имеем тождество

$$\begin{aligned} (\text{П.3.10}) \quad & \tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \tau(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) + \dots + \tau(\lambda_1, \lambda_{N-1}, \lambda_N) \\ & = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu) + \tau(\lambda_2, \lambda_3, \mu) + \dots + \tau(\lambda_{N-1}, \lambda_N, \mu) \\ & \quad + \tau(\lambda_N, \lambda_1, \mu). \end{aligned}$$

Оно наглядно показано на рис. П.3.2 (для $N = 5$).

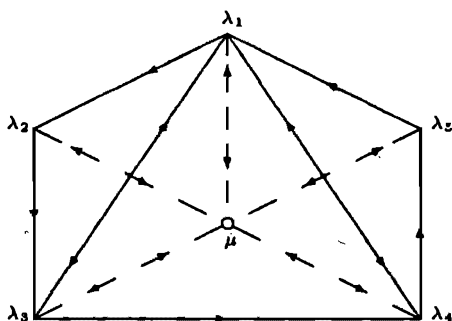


Рис. П.3.2

Определение П.3.7. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ — лагранжевы подпространства, $N \geq 3$. Индекс $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ определяется как левая часть формулы (П.3.10).

Предложение П.3.8. (i) $\tau(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \tau(\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_N, \lambda_1) = -\tau(\lambda_N, \lambda_{N-1}, \dots, \lambda_1)$.

(ii) Предположим, что $N \geq 4$ и $j \in \{3, \dots, N-1\}$. Тогда $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \tau(\lambda_1, \dots, \lambda_j) + \tau(\lambda_1, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_N)$.

(iii) Если λ_j непрерывным образом двигаются так, что $\dim(\lambda_1 \cap \lambda_2), \dim(\lambda_2 \cap \lambda_3), \dots, \dim(\lambda_{N-1} \cap \lambda_N)$ и $\dim(\lambda_N \cap \lambda_1)$ остаются постоянными, то и $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ остается постоянным.

(iv) $\tau(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \equiv nN + \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) + \dots + \dim(\lambda_N \cap \lambda_1) \pmod{2\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Пункты (i) и (ii) очевидны в силу определения и теоремы П.3.2. Пункты (iii) и (iv) немедленно следуют из теоремы П.3.2 и из (П.3.10) при выборе лагранжева подпространства μ трансверсальным к каждому из подпространств λ_j . $\square$

Как и выше, через E^a мы обозначим пространство E , снабженное симплектической формой $-\sigma$, а через a — тождественное отображение $E \rightarrow E^a$. Если λ — подпространство в E , то через λ^a мы обозначаем его образ при отображении a . Тогда $\tau_{E^a}(\lambda_1^a, \lambda_2^a, \lambda_3^a) = -\tau_E(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Предложение П.3.9. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ — четыре лагранжевых подпространства в E , и пусть Δ — диагональ в $E^a \oplus E$ (которая является лагранжевой). Тогда

$$(П.3.11) \quad \tau_{E^a \oplus E}(\lambda_1^a \oplus \lambda_2, \mu_1^a \oplus \mu_2, \Delta) = \tau_E(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_1).$$

Доказательство. Обозначим левую часть (П.3.11) через τ . Тогда $\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, где

$$\tau_1 = \tau(\lambda_1^a \oplus \lambda_2, \mu_1^a \oplus \mu_2, \lambda_1^a \oplus \mu_2),$$

$$\tau_2 = \tau(\mu_1^a \oplus \mu_2, \Delta, \lambda_1^a \oplus \mu_2),$$

$$\tau_3 = \tau(\Delta, \lambda_1^a \oplus \lambda_2, \lambda_1^a \oplus \mu_2).$$

Далее,

$$\tau_1 = \tau(\lambda_1^a, \mu_1^a, \lambda_1^a) + \tau(\lambda_2, \mu_2, \mu_2) = 0,$$

$$\tau_2 = \tau(\mu_1^a, \mu_2^a, \lambda_1^a),$$

$$\tau_3 = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2)$$

(для вычисления τ_2 и τ_3 мы применили теорему П.3.2(v) с $\rho = \{0\} \oplus \mu_2$ и $\rho = \lambda_1^a \oplus \{0\}$ соответственно). Поэтому $\tau = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2) - \tau(\mu_1, \mu_2, \lambda_1) = \tau(\lambda_1, \lambda_2, \mu_2, \mu_1)$. $\square$

В заключение параграфа опишем действие симплектической группы $Sp(E)$ на пространстве $\Lambda^3(E)$ троек лагранжевых подпространств в E .

Для $r = (r_0, r_1, r_2, r_3, d) \in \mathbb{N}^4 \times \mathbb{Z}$ мы полагаем

$$W_r = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \Lambda^3(E); \quad \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2 \cap \lambda_3) = r_0, \\ \dim(\lambda_1 \cap \lambda_2) = r_3, \quad \dim(\lambda_2 \cap \lambda_3) = r_1, \\ \dim(\lambda_3 \cap \lambda_1) = r_2, \quad \tau(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = d\}.$$

Тогда $Sp(E)$ естественно действует на $\Lambda^3(E)$ и W_r инвариантны относительно $Sp(E)$. Рассмотрим условия

$$(П.3.12) \quad \begin{cases} 0 \leq r_0 \leq r_1, r_2, r_3 \leq n, & r_1 + r_2 + r_3 \leq n + 2r_0, \\ |d| \leq n + 2r_0 - (r_1 + r_2 + r_3), \\ d \equiv n + r_1 + r_2 + r_3 \pmod{2\mathbb{Z}}. \end{cases}$$

Можно легко показать, что эти условия необходимы и достаточны для непустоты W_r . Действие группы $Sp(E)$ на $\Lambda^3(E)$ имеет конечное число орбит. Эти орбиты суть множества W_r , где r удовлетворяет (П.3.12). Поскольку мы не используем этот результат, мы оставляем доказательство в качестве упражнения.

Упражнения к приложению

Упражнение П.1. Пусть $(x) = (x_1, \dots, x_n)$ — система локальных координат на X , и пусть $(x; \xi)$ — соответствующие координаты на T^*X . Пусть $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p): X \rightarrow \mathbb{R}^p$ — гладкое отображение. Положим $S = \{x; \varphi(x) = 0\}$ (здесь $d\varphi \wedge \dots \wedge d\varphi_p \neq 0$ и S — гладкая поверхность). Пусть $x_0 \in S$, $p = (x_0; \sum_i a_i d\varphi_i(x_0)) \in T^*_S X$. Докажите, что

$$T^*_S X = \left\{ (x; \xi); \varphi(x) = 0, \quad \xi_j = \sum_{i=1}^p \lambda_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \right\},$$

$$T_p T^*_S X = \left\{ (x; \xi); \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0) x_j = 0, \quad i = 1, \dots, p, \right.$$

$$\left. \xi_j = \sum_{i=1}^p \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_0) \lambda_i + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial^2 \varphi_i(x_0)}{\partial x_k \partial x_j} x_k, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Упражнение П.2. Пусть Λ — замкнутое коническое лагранжево подмногообразие в T^*X . Докажите, что существует подмногообразие M в X , такое, что $\Lambda = T^*_M X$.

Упражнение П.3. Пусть X и Y — два многообразия одинаковой размерности, и пусть f — такая вещественная функция на $X \times Y$, что $df \neq 0$ на $S = \{f = 0\}$. Положим $\Lambda = T^*_S(X \times Y)$. Докажите, что $p_1|_\Lambda$ и $p_2^*|_\Lambda$ — локальные изоморфизмы (Λ на T^*X и Λ на T^*Y соответственно) и тогда и только тогда, когда определитель $\begin{pmatrix} 0 & d_y f \\ d_x f & d_{xy}^2 f \end{pmatrix}$ не обращается в нуль на S .

Упражнение П.4. Пусть (E_1, σ_1) и (E_2, σ_2) — два симплектических векторных пространства, и пусть Λ — лагранжево линейное подпространство в $E_1 \oplus E_2$.

Докажите, что $p_1|_\Lambda$ инъективно тогда и только тогда, когда $p_2|_\Lambda$ сюръективно.

Упражнение П.5. Пусть $f: Y \rightarrow X$ — морфизм многообразий, и пусть $\tilde{p} \in Y \times_X T^*X$.

(а) Пусть Λ_Y — лагранжево подмногообразие в T^*Y . Предположим, что отображение f' является чистым относительно Λ_Y в точке

p_Y . Докажите, что если U — достаточно малая окрестность точки p , то $f_\pi(U \cap {}^i f'^{-1}(\Lambda_Y))$ — гладкое лагранжево многообразие.

(b) Пусть Λ_X — лагранжево подмногообразие в T^*X . Предположим, что отображение f_π является чистым относительно Λ_X в точке p_X . Докажите, что если U — достаточно малая окрестность точки p , то ${}^i f'(U \cap f_\pi^{-1}(\Lambda_X))$ — гладкое лагранжево многообразие.

Упражнение П.6. Пусть E_1 и E_2 — два симплектических векторных пространства, ν — лагранжево подпространство в $E_1 \oplus E_2^a$, а λ_i и μ_i — два лагранжевых подпространства в E_i ($i = 1, 2$). Докажите, что

$$\begin{aligned} \tau_{E_1 \oplus E_2^a}(\lambda_1 \oplus \lambda_2^a, \mu_1 \oplus \mu_2^a, \nu) \\ = \tau_{E_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu \circ \mu_2) - \tau_{E_2}(\lambda_2, \mu_2, \lambda_1 \circ \nu^a) \\ = \tau_{E_1}(\lambda_1, \mu_1, \nu \circ \lambda_2) - \tau_{E_2}(\lambda_2, \mu_2, \mu_1 \circ \nu^a). \end{aligned}$$

Упражнение П.7. Пусть (E, σ) — комплексное симплектическое векторное пространство. Снабдим подлежащее вещественное векторное пространство $E^{\mathbb{R}}$ вещественной симплектической формой $2 \operatorname{Re} \sigma$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — три комплексных лагранжевых подпространства в E . Докажите, что $\tau_{E^{\mathbb{R}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$.

Упражнение П.8. Пусть E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — симплектические векторные пространства, и пусть $\lambda_i \subset E_i \oplus E_{i+1}^a$ ($i = 1, 2, 3$) — лагранжевы плоскости.

Докажите, что $(\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ \lambda_3 = \lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ \lambda_3)$.

Упражнение П.9. Пусть (E_i, μ_i) — пара, состоящая из симплектического векторного пространства E_i и лагранжевой плоскости μ_i в E_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Тогда для лагранжевых плоскостей $\lambda_1 \subset E_1 \oplus E_2^a$ и $\lambda_2 \subset E_2 \oplus E_3^a$ мы полагаем (ср. (7.5.10))

$$\tau(\lambda_1: \lambda_2) = \tau_{E_2}(\mu_2, \lambda_2 \circ \mu_3, \mu_1 \circ \lambda_1^a).$$

Пусть теперь λ_i — лагранжева плоскость в $E_i \oplus E_{i+1}^a$ ($i = 1, 2, 3$). Докажите равенство

$$\tau(\lambda_1: \lambda_2 \circ \lambda_3) + \tau(\lambda_2: \lambda_3) = \tau(\lambda_1 \circ \lambda_2: \lambda_3) + \tau(\lambda_1: \lambda_2).$$

(Указание. Используйте упр. П.6 и докажите, что обе части равны

$$\tau_{E_2 \oplus E_3^a}(\mu_2 \oplus \mu_3^a, \mu_1 \circ \lambda_1^a \oplus \lambda_3^a \circ \mu_4^a, \lambda_2).)$$

Упражнение П.10. Пусть E_i — симплектическое векторное пространство, и пусть λ_i и μ_i — два лагранжевых подпространства в E_i ($i = 1, 2, 3$). Пусть ν и ν' — лагранжевы подпространства в $E_1 \oplus E_2^a$ и $E_2 \oplus E_3^a$, соответственно. Докажите, что

$$\begin{aligned} & \tau_{E_1 \oplus E_2^a}(\lambda_1 \oplus \lambda_2^a, \nu, \mu_1 \oplus \mu_2^a) + \tau_{E_2 \oplus E_3^a}(\lambda_2 \oplus \lambda_3^a, \nu', \mu_2 \oplus \mu_3^a) \\ & \quad - \tau_{E_1 \oplus E_3^a}(\lambda_1 \oplus \lambda_3^a, \nu \circ \nu', \mu_1 \oplus \mu_3^a) \\ & = \tau_{E_2}(\lambda_2, \nu' \circ \lambda_3, \lambda_1 \circ \nu^a) - \tau_{E_2}(\mu_2, \nu' \circ \mu_3, \mu_1 \circ \nu^a). \end{aligned}$$

(Указание. Используйте упр. П.6.)

Замечания

Симплектическая геометрия и контактная геометрия — классические предметы, восходящие к Гамильтону и Якоби, и мы не даем здесь их обзора. Как указано в начале приложения, результаты первых двух параграфов хорошо известны, их можно найти, например, в работе Хёрмандера [Hörmander 4].

В 1965 г. для того чтобы вычислять асимптотические разложения в окрестности каустики (т. е. когда проекция гладкого лагранжева многообразия не имеет постоянного ранга), Маслов [Маслов 1] (ср. также [Keller 1]) ввел индекс замкнутой кривой на лагранжевом подмногообразии симплектического пространства. Его теория была прояснена и переформулирована Арнольдом [Арнольд 1], а затем Хёрмандером [Hörmander 2] и Лере [Leray 4], которые определили индекс трех трансверсально пересекающихся лагранжевых плоскостей. Наконец, Касивара (ср. [Lion-Vergne 1]) определил индекс τ в общем случае простым способом, который мы изложили здесь. Заметим, что в цитированной работе [Lion-Vergne 1] индекс τ обобщен на случай локального поля.

Список литературы¹⁾

- Арпольд В. И. [1] О характеристическом классе, входящем в условие квантования. — Функц. анализ и его прилож., т. 1 (1967), вып. 1, с. 1–14.
- [2] Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.
- Бернштейн И. Н. [1] Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами. — Функц. анализ и его прилож., т. 5 (1971), вып. 2, с. 1–16.
- [2] Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру. — Функц. анализ и его прилож., т. 6 (1972), вып. 4, с. 26–40.
- Бреннер А. В., Шубин М. А. [1] Теорема Атьи–Ботта–Лефшеца для многообразий с краем. — Функц. анализ и его прилож., т. 15 (1981), вып. 4, с. 67–68.
- Габриэлов А. М. [1] О проекциях полуаналитических множеств. — Функц. анализ и его прил., т. 2 (1968), вып. 4, с. 18–30.
- Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы голологической алгебры. Т. 1. Введение в теорию когомологий и производные категории. — М.: Наука, 1988.
- Гинзбург В. А. Теорема об индексе дифференциальных систем и геометрия многообразий с особенностями. — ДАН СССР, т. 281 (1985), No. 3, с. 521–525.
- Головин В. Д. [1] Гомологии аналитических пучков и теорема двойственности. — М.: Наука, 1986.
- Маслов В. П. [1] Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
- Abraham R, Marsden J. E. [1] Foundation of Mechanics. Cummings Publ. (1978).
- Andronikof E. [1] Microlocalisation tempérée. Mémoires de la Soc. Math. de France (1994).
- Banica C., Stănăsiu O. [1] Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes. Vol. I–II. Gauthier–Villars–Bordas (1977).
- Beilinson A. A., Bernstein J., Deligne P. [1] Faisceaux pervers. Astérisque 100 (1982).
- Bengel G., Schapira P. [1] Décomposition microlocale analytique des distributions. Ann. Inst. Fourier Grenoble 29, 101–124 (1979).

¹⁾ Работы, первоначально вышедшие на русском языке, вынесены в начало списка литературы. — Прим. ред.

- Berthelot P., Breen L., Messing W. [1] *Théorie de Dieudonné cristalline II. Lect. Notes Math.* 930. Springer, Berlin Heidelberg New York (1982).
- Bierstone E., Milman P. D. [1] Semi-analytic and sybanalytic sets. *Publ. Math. I. H. E. S.* 67, 5–42 (1988).
- Björk J.-E. [1] *Rings of differential operators. North-Holland Math. Lib.* (1979).
- [2] *Analytic D-Modules. Kluwer Publ.* To appear.
- Bloom T., Herrera M. [1] De Rham cohomology of an analytic space. *Invent. Math.* 7, 275–296 (1969).
- Bony J.-M., Schapira P. [1] Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. *Invent. Math.* 17, 95–105 (1972).
- [2] Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy. In: *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Komatsu H. (Ed.), *Proceedings Katata 1971. Lect. Notes Math.* 287, 82–98. Springer, Berlin Heidelberg New York (1973).
- [3] Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 26, 81–140 (1976).
- Borel A. [1] The Poincaré duality in generalized manifolds. *Michigan Math. J.* 4, 227–239 (1957).
- Borel A. et al [1] *Intersections cohomology. Progress in Math.* 50, Birkhäuser, Boston (1984).
- Borel A., Haefliger A. [1] La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique. *Bull. Soc. Math. France* 89, 461–513 (1961).
- Borel A., Moore J. C. [1] Homology theory for locally compact spaces. *Michigan Math. J.* 7, 137–159 [1960].
- Bott R. [1] Lectures on Morse theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc.* 7, 331–358 (1982).
- Bourbaki N. [1] *Algèbre, Chapitre 10. Éléments de Mathématiques. Masson* (1980). [Имеется перевод: Бурбаки Н. Алгебра, гл. 10. — М.: Наука, 1987.]
- Boutet de Monvel L., Malgrange B. [1] Le théorème de l'indice relatif. *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 23, 151–192 (1990).
- Bredon G. E. [1] *Sheaf theory. McGraw-Hill* (1967). [Имеется перевод: Бредон Г. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.]
- Brylinski J.-L. [1] (Co-)homologie d'intersection et faisceaux pervers. *Sém. Bourbaki* 585 (1981–82).
- [2] Transformations canonique, dualité projective, théorie de Lefschetz. *Astérisque* 140/141, 3–134 (1986).
- Brylinski J.-L., Malgrange B., Verdier J.-L. [1] Transformée de Fourier géométrique I. *C. R. Acad. Sci.* 297, 55–58 (1983).

- Brylinski J.-L., Dubson A., Kashiwara M. [1] Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler locale. C. R. Acad. Sci. 293, 573-576 (1981).
- Cartan H. [1] Sémin. Ec. Norm. Sup. (1950-51), Benjamin (1967).
— [2] Sémin. Ec. Norm. Sup. (1951-52, 1953-54, 1960-61), Benjamin (1967).
- Cartan H., Chevalle C. [1] Sémin. Ec. Norm. Sup. (1955-56), Benjamin (1967).
- Cartan H., Eilenberg S. [1] Homological Algebra. Princeton Univ. Press (1956). [Имеется перевод: Картаан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра. — М.: ИЛ, 1960.]
- D'Agnolo A., Schapira P. [1] An inverse image theorem for sheaves with applications to the Cauchy problem. Duke Math. J. 64, 151-472 (1991).
- Deligne P. [1] Cohomologie à support propre. In [SGA 4], exposé XVII.
— [2] Le formalisme des cycles évanescents. In [SGA 7], exposé XIII.
- Delort J.-M. [1] Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits. Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 23, 257-310 (1990).
- Delort J.-M., Lebeau G. [1] Microfonctions lagrangiennes. J. Math. Pures Appl. 67, 39-84 (1988).
- Denkowska Z., Łojasiewicz S., Stasica J. [1] Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques. Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 27, 529-536 (1979).
- Dubson A. [1] Formules pour l'indice des complexes constructibles et D -modules holonomes. C. R. Acad. Sci. 298, 113-116 (1984).
- Duistermaat J. J. [1] Fourier integral operators. Lect. Notes Courant Inst. New York (1973).
- Freyd P. [1] Abelian categories, an introduction to the theory of functors. Harper and Row, New York (1964).
- Fulton W. [1] Intersection theory. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokio (1984). [Имеется перевод: Фултон У. Теория пересечений. — М.: Мир, 1989.]
- Gabber O. [1] The integrability of the characteristic variety. Amer. J. Math. 103, 445-468 (1981).
- Gabriel P., Zisman M. [1] Calculus of fractions and homotopy theory. Springer, Berlin Heidelberg New York (1967). [Имеется перевод: Габриэль П., Цисман М. Категория частных и теория гомотопий. — М.: Мир, 1971.]
- Ginsburg V. [1] см. Гинзбург В. А. [1].
— [2] Characteristic cycles and vanishing cycles. Invent. Math. 84, 327-402 (1986).
- Godement R. [1] Topologie algébriques et théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1958). [Имеется перевод: Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: ИЛ, 1961.]

- Goresky M., MacPherson R. [1] Intersection homology II. *Invent. Math.* 71, 77–129 (1983).
- [2] Stratified Morse theory. Springer, Berlin Heidelberg (1988). [Имеется перевод: Горески М., Макферсон Р. Стратифицированная теория Морса. — М.: Мир, 1991.]
- [3] Morse theory and intersection homology theory. In: *Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Asterisque 101/102*, 135–192 (1983).
- Grauert H. [1] On Levi's problem and the embedding of real analytic manifolds. *Ann. Math.* 68, 460–472 (1958).
- Griffiths P., Harris J. [1] Principles of algebraic geometry. John Wiley & Sons (1978). [Имеется перевод: Гриффитс П., Харрис Дж. Основы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1980.]
- Grothendieck A. [1] Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tohoku Math. J.* 9, 119–221 (1957). [Имеется перевод: Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. — М.: ИЛ, 1961.]
- [2] Techniques de descente et théorème d'existence en géométrie algébrique II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules. *Sém. Bourbaki* 195 (1959–60).
- [3] Eléments de géométrie algébrique III. *Publ. Math. I. H. E. S.* 11 (1961), 17 (1963).
- [4] Résidus et dualité. Pré-notes pour un «Séminaire Hartshorne», manuscrit (1963).
- [5] Dix exposés sur la théorie des schémas. North-Holland, Amsterdam (1968).
- Guillemin V., Quillen D., Sternberg S. [1] The integrability of characteristics. *Comm. Pure Appl. Math.* 23, 39–77 (1970).
- Guillemin V., Pollack A. [1] Differential topology. Prentice Hall (1974).
- Guillemin V., Sternberg S. [1] Symplectic techniques in physics. Cambridge Univ. Press (1984).
- Hardt R. M. [1] Stratification of real analytic mappings and images. *Invent. Math.* 28, 193–208 (1975).
- [2] Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps. *Invent. Math.* 38, 207–217 (1977).
- Hartshorne R. [1] Residues and duality. *Lect. Notes Math.* 20. Springer, Berlin Heidelberg New York (1966).
- Henry J.-P., Merle M., Sabbah C. [1] Sur la condition de Thom stricte pour un morphisme analytique complexe. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 17, 227–268 (1984).
- Herrera M. [1] Integration on a semi-analytic set. *Bull. Soc. Math. France* 94, 141–180 (1966).
- Hilton P.J., Stammbach U. [1] A course in homological algebra. Springer, New York Berlin Heidelberg (1970).

- Hironaka H. [1] Subanalytic sets. In: Number theory, algebraic geometry and commutative algebra (in honour to Y. Akizuki). Kinokuniya, Tokyo 453–493 (1973).
- [2] Introduction to real analytic sets and real analytic maps. Istituto «L. Tonelli» Pisa (1973).
- [3] Stratification and flatness. Real and complex geometry. Oslo 1976, Sythoff & Noordhoff 199–265 (1977).
- Hörmander L. [1] An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand, Princeton (1966). [Имеется перевод: Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. — М.: Мир, 1968].
- [2] Fourier integral operators I. Acta Math. 127, 79–183 (1971).
- [3] The analysis of linear partial differential operators I. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1983). [Имеется перевод: Хёрмандер Л. Теория линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. I. — М.: Мир, 1986.]
- [4] The analysis of linear partial differential operators III–IV. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1985). [Имеется перевод: Хёрмандер Л. Теория линейных дифференциальных операторов с частными производными, т. 3, 4. — М.: Мир, 1987, 1988.]
- Hotta R., Kashiwara M. [1] The invariant holonomic system on a semi-simple Lie algebra. Invent. Math. 75, 327–358 (1984).
- Houzel C., Schapira P. [1] Images directes des modules différentiels. C. R. Acad. Sci. 298, 461–464 (1984).
- Illusie L. [1] Deligne's l -adic Fourier transform. Proc. Symp. Pure Math. 46, 151–163 (1987).
- Iversen B. [1] Cohomology of sheaves. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1987).
- [2] Cauchy residues and de Rham homology. L'Enseig. Math. 35, 1–17 (1989).
- Kashiwara M. [1] Algebraic study of systems of partial differential equations. Thesis. Univ. Tokyo (1970).
- [2] Index theorem for maximally overdetermined systems of linear differential equations. Proc. Japan Acad. 49, 803–804 (1973).
- [3] On the maximally overdetermined systems of linear differential equations I. Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ. 10, 563–579 (1975).
- [4] b -functions and holonomic systems. Invent. Math. 38, 33–53 (1976).
- [5] Systems of microdifferential equations. Progress in Math. 34, Birkhäuser, Boston (1983).
- [6] The Riemann–Hilbert problem for holonomic systems. Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ. 20, 319–365 (1984) (or: Faisceaux constructibles et systèmes holonomes d'équations aux dérivées partielles à points singuliers réguliers. Sémin. Eq. Dér. Part. Publ. Ec. Polytechnique (1979/1980)).

- [7] Index theorem for constructible sheaves. In: *Systèmes différentiels et singularités*, A. Galligo, M. Maisonobe, Ph. Granger (Ed.). *Astérisque* 130, 193–209 (1985).
- [8] Character, character cycle, fixed point theorem and group representation. *Adv. Stud. Pure Math.* 14, 369–378 (1988).
- Kashiwara M., Kawai T. [1] On the boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations. *Proc. Japan Acad.* 48, 712–715 (1971) and 49, 164–168 (1972).
- [2] Second microlocalisation and asymptotic expansions. In: *Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory*. D. Iagolnitzer (Ed.). *Lect. Notes Phys.* 126, 21–76. Springer, Berlin Heidelberg New York (1980).
- [3] On holonomic systems of microdifferential equations, III. *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* 17, 813–979 (1981).
- Kashiwara M., Monteiro-Fernandes T. [1] Involutivité des variétés microcaractéristiques. *Bull. Soc. Math. France* 114, 393–402 (1986).
- Kashiwara M., Schapira P. [1] Micro-hyperbolic systems. *Acta Math.* 142, 1–55 (1979).
- [2] Micro-support des faisceaux. In: *Journées complexes Nancy, Mai 1982* (Publ. Inst. Elie Cartan), or: *C. R. Acad. Sci.* 295, 487–490 (1982).
- [3] Microlocal study of sheaves. *Astérisque* 128 (1985).
- [4] A vanishing theorem for a class of systems with simple characteristics. *Invent. Math.* 82, 579–592 (1985).
- Kataoka K. [1] Microlocal theory of boundary value problems I–II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 27, 355–399 (1980) and 28, 31–56 (1981).
- Katz N., Laumon G. [1] Transformation de Fourier et majoration de sommes d'exponentielles. *Publ. Math. I. H. E. S.* 62, 146–202 (1985).
- Keller J. B. [1] Corrected Bohr–Sommerfeld quantum conditions for non-separable systems. *Ann. Phys.* 4, 180–188 (1958).
- Komatsu H. [1] Resolution by hyperfunctions of sheaves of solutions of differential equations with constant coefficients. *Math Ann.* 176, 77–86 (1968).
- [2] A local version of the Bochner's tube theorem *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 19, 201–214 (1972).
- Kuo J. C. [1] The ratio test for analytic Whitney stratifications. In: *Proc. Liverpool singularities symposium*. *Lect. Notes Math.* 192. Springer, Berlin Heidelberg New York (1971).
- Laumon G. [1] Transformée de Fourier, constante d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil. *Publ. Math. I. H. E. S.* 65, 131–210 (1987).
- Lazzeri F. [1] Morse theory on singular spaces. *Astérisque* 7/8, 263–268 (1973).

- Lebeau G. [1] Equations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non linéaires. *Invent. Math.* 95, 277–323 (1988).
- Leray J. [1] L'anneau d'homologie d'une représentation. *C. R. Acad. Sci.* 222, 1367–1368. Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation. *Idem*, 1419–1422 (1946).
- [2] L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. *J. Math. Pures Appl.* 29, 1–139 (1950).
- [3] Problème de Cauchy I. *Bull. Soc. Math. France* 85, 389–430 (1957). [Имеется перевод: Лере Ж. Задача Коши I. — Сб. «Математика», 3:5 (1959), с. 57–89.]
- [4] Lagrangian analysis. M. I. T. Press, Cambridge Mass. London (1981), or: Cours Collège de France (1967/77).
- Lion G., Vergne M. [1] The Weil representation, Maslov index and theta series. *Progress in Math.* 6, Birkhäuser, Boston (1980). [Имеется перевод: Лион Ж., Вернь М. Представления Вейля, индекс Маслова и θ -ряды. — М.: Мир, 1983.]
- Lojasiewicz S. [1] Ensembles semi-analytiques. *Inst. Hautes Etudes Sci. Bures-sur-Yvette* (1964).
- [2] Triangulation of semi-analytic sets. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 18, 449–474 (1964).
- MacLane S. [1] Homology theory. Academic Press (1963). [Имеется перевод: Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966.]
- MacPherson R. [1] Chern classes for singular varieties. *Ann. Math.* 100, 423–432 (1974).
- MacPherson R., Vilonen K. [1] Elementary construction of perverse sheaves. *Invent. Math.* 84, 403–435 (1986).
- Malgrange B. [1] Faisceaux sur les variétés analytiques réelles. *Bull. Soc. Math. France* 85, 231–237 (1957).
- [2] Transformation de Fourier géométrique. *Sém. Bourbaki* 692 (1987–88). [Имеется перевод: Мальгранж Б. Геометрическое преобразование Фурье. — В кн.: Труды семинара Н. Бурбаки за 1988 г. — М., Мир, 1990.]
- Martineau A. [1] Les hyperfonctions de M. Sato. *Sém. Bourbaki* 214 (1960–61).
- [2] Théorème sur le prolongement analytique du type «Edge of the Wedge». *Sém. Bourbaki* 340 (1967/68).
- Mebkhout Z. [1] Une équivalence de catégories — Une autre équivalence de catégories. *Comp. Math.* 51, 55–62 and 63–64 (1984).
- Milnor J. M. [1] Morse theory. *Ann. Math. Studies* 51, Princeton Univ. Press (1963). [Имеется перевод: Милнор Дж. Теория Морса. — М.: Мир, 1965.]
- [2] Singular points of complex hypersurfaces. *Ann. Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press (1968).

- Mitchell B. [1] Theory of categories. Pure App. Math. 17, Academic Press (1965).
- Northcott D. G. [1] An introduction to homological algebra. Cambridge Univ. Press (1960).
- Oka K. [1] Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Iwanami Shoten, Tokyo (1961).
- Pignoni N. [1] Density and stability of Morse functions on a stratified space. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 593-608 (1979).
- Poly J.-B. [1] Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques. Thèse Univ. Poitiers (1974).
- Ramis J.-P. [1] Additif II à "variations sur le thème GAGA". Lect. Notes Math. 694. Springer, Berlin Heidelberg New York (1978).
- de Rham G. [1] Variétés différentiables. Hermann, Paris (1955) or: Differentiable manifolds. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984). [Имеется перевод: де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. — М.: ИЛ, 1956.]
- Remmert R., Stein K. [1] Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 126, 263-306 (1953).
- Sabbah C. [1] Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux. In: Systèmes différentiels et singularités, A. Galligo, M. Maisonobe, Ph. Granger (Ed.). Astérisque 130, 161-192 (1985).
- Sato M. [1] Theory of hyperfunctions I-II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8, 139-193 and 387-436 (1959-1960).
- [2] Hyperfunctions and partial differential equations. In: Proc. Int. Conf. on Functional Analysis and Related Topics. Tokyo Univ. Press, Tokyo, 91-94 (1969).
- Sato M., Kawai T., Kashiwara M. [1] Hyperfunctions and pseudo-differential equations. In: Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Komatsu H. (Ed.), Proceedings Katata 1971. Lect. Notes Math. 287, 265-529. Springer, Berlin Heidelberg New York (1973).
- Schapira P. [1] Théorie des hyperfonctions. Lect. Notes Math. 126. Springer, Berlin Heidelberg New York (1970).
- [2] Microdifferential systems in the complex domain. Springer, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1985).
- [3] Microfunctions for boundary values problems. In: Algebraic analysis, 809-819 (Papers dedicated to M. Sato) M. Kashiwara, T. Kawai (Ed.). Academic Press (1988).
- [4] Sheaf theory for partial differential equations. Proc. Inter. Cong. Math. Kyoto 1990, Springer-Verlag.
- Schapira P., Scheiders J.-P. [1] Paires elliptiques I. Finitude et dualité. C. R. Acad. Sci. 311, 83-86 (1990); II. Classes d'Euler et indice. C. R. Acad. Sci. 312, 81-84 (1991).
- Schapira P., Tose N. [1] Morse inequalities for $\mathbb{R}$ -constructible sheaves: Adv. in Math. 93, 1-8 (1992).

- Schneiders J.-P. [1] Un théorème de dualité relative pour les modules différentiels. C. R. Acad. Sci. 303, 235–238 (1986).
- Schwartz L. [1] Homomorphismes et applications complètement continues. C. R. Acad. Sci. 236, 2472–2473 (1953).
- [2] Théorie des distributions. Hermann, Paris (1966).
- Schwartz M.-H. [1] Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. C. R. Acad. Sci. 260. 3262–3264, 3535–3537 (1965).
- Serre J.-P. [1] Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. 61, 197–278 (1955). [Имеется перевод: В кн.: Расслоенные пространства. — М.: ИЛ, 1958, с. 372–450.]
- [SHS] Sémin. Heidelberg–Strasbourg (1966–67). Dualité de Poincaré. Publ. I. R. M. A. 3, Strasbourg (1969).
- [SGA 2] Sémin. géométrie algébrique (1962), by Grothendieck A. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux. North-Holland, Amsterdam (1968).
- [SGA 4] Sémin. géométrie algébrique (1963–64), by Artin M., Grothendieck A. and Verdier J.-L. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Lect. Notes Math. 269, 270, 305. Springer, Berlin Heidelberg New York (1972–73).
- [SGA 4 $\frac{1}{2}$] Sémin. géométrie algébrique, by Deligne P. Cohomologie étale. Lect. Notes Math. 569. Springer, Berlin Heidelberg New York (1977).
- [SGA 5] Sémin. géométrie algébrique (1965–66) by Grothendieck A. Cohomologie l -adique et fonctions L. Lect. Notes in Math. 589. Springer, Berlin Heidelberg New York (1977).
- [SGA 6] Sémin. géométrie algébrique (1966–67) by Berthelot P., Illusie L. and Grothendieck A. Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch. Lect. Notes Math. 225. Springer, Berlin Heidelberg New York (1971).
- [SGA 7] Sémin. géométrie algébrique (1967–69). Groupes de monodromie en géométrie algébrique. Part I by Grothendieck A. Lect. Notes Math. 288. Springer, Berlin Heidelberg New York (1972). Part II by Deligne P. and Katz N. Lect. Notes Math. 340. Springer, Berlin Heidelberg New York (1973).
- Sjöstrand J. [1] Singularités analytiques microlocales. Astérisque 95 (1982).
- Sullivan D. [1] Combinatorial invariants of analytic spaces. Proceedings of Liverpool singularities symposium I. Lect. Notes Math. 192, 165–168. Springer, Berlin Heidelberg New York (1971).
- Tamm M. [1] Subanalytic sets in the calculus of variations. Acta Math. 146, 167–199 (1981).
- Thom R. [1] Ensembles et morphismes stratifiés. Bull. A. M. S. 75, 240–284 (1969).

- Teissier B. [1] Sur la triangulation des morphismes sous-analytiques. Publ. Math. I. H. E. S. 70 (1989).
- Tose N. [1] Propagation theorem for sheaves and applications to microdifferential systems. J. Math. Pures Appl. 68, 137–151 (1989).
- Trotman D. [1] Comparing regularity conditions on stratifications. Proc. Symp. Pure Math. 40, 575–585 (1983).
- [2] Une version microlocale de la condition (w) de Verdier. Ann. Inst. Fourier Grenoble 39, 825–829 (1989).
- Uchida M. [1] Microlocal analysis of diffraction at the corner of an obstacle. To appear, or: Sémin. Eq. Dér. Part. Publ. Ec. Polyt. (1989/90).
- Verdier J.-L. [1] Dualité dans les espaces localement compacts. Sémin. Bourbaki 300 (1965–66).
- [2] Catégories dérivées, état 0. In [S.G.A.4 $\frac{1}{2}$].
- [3] Stratifications de Whitney et théorème de Bertini–Sard. Invent. Math. 36, 295–312 (1976).
- [4] Classe d'homologie associée à un cycle. In Sémin. Géom. anal. A. Douady, J.-L. Verdier (Ed.). Astérisque 36–37, 101–151 (1976).
- [5] Spécialisation de faisceaux et monodromie modérée. In: Analyse et topologie sur les espaces singuliers. Astérisque 101–102, 332–364 (1981).
- Wells R. O. Jr. [1] Differential analysis on complex manifolds. Springer, New York Berlin Heidelberg (1980). [Имеется перевод: Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1976.]
- Whitney H. [1] Local properties of analytic varieties. In: Differential and combinatorial topology (A symposium in honor of Marston Morse). Princeton Univ. Press, 205–244 (1965).
- [2] Tangents to an analytic variety. Ann. Math. 81, 496–549 (1965).
- [3] Complex analytic varieties. Addison Wesley, Reading Mass (1972).
- Zerner M. [1] Domaine d'holomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles. C. R. Acad. Sci. 272, 1646–1648 (1971).

Список обозначений и соглашений

Общие понятия

$\mathbb{N}$:	множество неотрицательных целых чисел
$\mathbb{Z}$:	кольцо целых чисел
$\mathbb{Q}$:	поле рациональных чисел
$\mathbb{R}$:	поле вещественных чисел
$\mathbb{C}$:	поле комплексных чисел
$\mathbb{R}^+$:	мультипликативная группа положительных вещественных чисел
$\mathbb{R}^-$:	множество отрицательных вещественных чисел
$\mathbb{R}_{\geq 0}$ (соотв. $\mathbb{R}_{\leq 0}$):	$\{c \in \mathbb{R}; c \geq 0$ (соотв. $c \leq 0\})$
$\mathbb{C}^\times$:	мультипликативная группа ненулевых комплексных чисел
$\#A$:	число элементов конечного множества A
$A \setminus B$:	дополнение к подмножеству B в A
$\delta_{i,j}$:	символ Кронекера, $\delta_{i,j} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{i,j} = 1$ при $i = j$
$\bar{S}$:	замыкание подмножества S
∂S :	$\bar{S} \setminus S$, см. (9.2.4)
$X \times_S Y$:	расслоенное произведение над S , см. обозначения 2.3.12
$\mathbb{R}^n$:	n -мерное евклидово пространство
$\varinjlim$:	индуктивный предел
$\varprojlim$:	проективный предел
$\varinjlim$:	ind-объект, см. § 1.11
$\varprojlim$:	pro-объект, см. § 1.11
$\{x_n\}_{n \in I}$:	последовательность, занумерованная множеством I ($I = \mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$)
$x_n \xrightarrow{n} x$:	последовательность $\{x_n\}_n$ сходится к x
$\{\text{pt}\}$:	множество, состоящее из единственного элемента
$\square$:	означает, что квадрат декартов

Многообразия

$X, Y, \dots$:	вещественные или комплексные многообразия
δ или $\delta_X : X \hookrightarrow X \times X$:	диагональное вложение
$\tau : TX \rightarrow X$:	касательное векторное расслоение к X
$\pi : T^*X \rightarrow X$:	кокасательное векторное расслоение к X

$T_M X$:	нормальное векторное расслоение к подмногообразию M многообразия X , см. П.2.1
$T_M^* X$:	конормальное векторное расслоение к подмногообразию M многообразия X , см. П.2.1
$T_X^* X \simeq X$:	нулевое сечение, отождествленное с X
E_γ :	векторное пространство E с γ -топологией, см. § 3.5
X_γ :	пространство X с γ -топологией, см. § 3.5
φ_γ :	непрерывное отображение $X \rightarrow X_\gamma$, см. § 3.5
$f: Y \rightarrow X$:	морфизм многообразий
$f _N: N \rightarrow M$:	морфизм, индуцированный морфизмом f ($N \subset Y$, $M \subset X$)
Tf :	$TY \xrightarrow{f'} T \times_X TX \xrightarrow{f_*} TX$, см. (4.1.8)
$T_N f$:	$T_N Y \xrightarrow{f'_N} N \times_M T_M X \xrightarrow{f_{Nr}} T_M X$, см. (4.1.9), $T^* Y \xleftarrow{f'} Y \times_X T^* X \xrightarrow{f_*} T^* X$, см. (4.3.2), $T_N^* Y \xleftarrow{f'_N} N \times_M T_M^* X \xrightarrow{f_{Nr}} T_M^* X$, см. (4.3.3)
$f': T_Y^* X$:	$\ker(f': Y \times_X T^* X \rightarrow T^* Y)$, см. (4.3.4)
α_X :	отображение $X \rightarrow \{\text{pt}\}$
$\bar{X}$:	комплексно-сопряженное к комплексному многообразию X многообразие, см. § 11.1
$X^{\mathbb{R}}$:	подлежащее вещественное многообразие комплексного многообразия X , см. § 11.1
$\dim Y/X, \text{codim}_X Y$:	относительные размерность и коразмерность, см. обозначение 3.3.8
$\dim X, \dim_{\mathbb{R}} X$:	размерность многообразия X , см. § 2.9 и обозначение 3.3.8 (за исключением § 10.3)
$\dim_{\mathbb{C}} X$:	комплексная размерность многообразия X , см. § 2.9

Векторные расслоения

$\tau: E \rightarrow Z$:	векторное расслоение над Z
$\pi: E^* \rightarrow Z$:	двойственное векторное расслоение
Z :	отождествляется с нулевым сечением векторного расслоения над Z
$\dot{E} = E \setminus Z, \dot{E}^* = E^* \setminus Z$:	
$\dot{\tau} = \tau _{\dot{E}}, \dot{\pi} = \pi _{\dot{E}^*}$:	
α :	антиподальное отображение на E
S^a :	образ подмножества S при действии a , $S \subset E$
S° :	полярное множество для $S \subset E$, см. (3.7.6)
e :	эйлерово векторное поле, см. § 5.5

- $A + B$: сумма в векторном расслоении, см. (5.4.5)
 $S = \dot{E} \setminus \mathbb{R}^+$: сферическое расслоение, ассоциированное с векторным расслоением E , см. (3.6.3)
 $T^*(E \setminus Z)$: относительное кокасательное расслоение, см. (5.5.3)

Нормальные конусы

- $C_M(S)$: нормальный конус к S вдоль M , см. определение 4.1.1
 $C(S_1, S_2)$: нормальный конус к $S_1 \times S_2$ вдоль диагонали, см. определение 4.1.1.
 $C_\mu(A, B), f^\#(A, B), f_\infty^\#(A, B), f^\#(A), f_\infty^\#(A), A \hat{+} B, A \hat{+}_\infty B$: см. определение 6.2.3
 $N(S) = TX \setminus C(X \setminus S, S)$: см. определение 5.3.6
 $N^*(S) = N(S)^\circ$: см. определение 5.3.6
 $\tilde{X}_M$: нормальная деформация подмногообразия M в X , см. § 4.1

Симплектическая геометрия

- σ : симплектическая форма, см. § П.1
 α_X или α : каноническая 1-форма на T^*X , см. § П.2
 H : гамильтонов изоморфизм, см. § П.1
 H_f : гамильтоново векторное поле, см. § П.2
 $\{\cdot, \cdot\}$: скобка Пуассона, см. § П.2
 $\tau(\cdot, \cdot, \cdot)$: индекс инерции, § П.3
 E^ρ : $\rho^\perp / \rho$, ρ изотропно в E , § П.1
 $\lambda^\rho = (\lambda \cap \rho^\perp + \rho) / \rho$, λ лагранжево, ρ изотропно, см. § П.1
 $\lambda_1 \circ \lambda_2$: композиция лагранжевых плоскостей, § П.1
 $\Lambda_1 \circ \Lambda_2$: композиция лагранжевых многообразий, см. определение 7.4.5
 Λ_φ : лагранжево многообразие, ассоциированное с φ , см. (7.5.1)
 $\lambda_0(p) = T_p \pi^{-1} \pi(p)$, см. (7.5.2)
 $\lambda_\Lambda(p) = T_p \Lambda$
 τ_φ : см. (7.5.3)
 $\tau(\lambda_1 : \lambda_2)$: см. (7.5.10)

Алгебра

- A : кольцо (все кольца имеют единицу)
 A -модуль: левый A -модуль (все модули унитарны)
 A^{op} : противоположное к кольцу A кольцо (A^{op} -модуль — это правый A -модуль)

$\mathcal{C}$:	категория, $\text{Ob}(\mathcal{C})$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, \cdot)$ см. § 1.1
$\mathcal{C}^{\circ}$:	противоположная категория, см. § 1.1
id :	тождественный морфизм
$\mathcal{C}^{\vee}$:	категория функторов из $\mathcal{C}^{\circ}$ в $\mathbf{Set}$
$\mathcal{C}^{\wedge}$:	$\mathcal{C}^{\circ \vee \circ}$
$\text{Ker}, \text{Coker}, \text{Im}, \text{Coim}$:	см. § 1.2
$\mathcal{C}^*(\mathcal{C})$:	$* = \emptyset, +, -, b$: категории комплексов в категории $\mathcal{C}$, см. § 1.3
$\text{K}^*(\mathcal{C})$:	$* = \emptyset, +, -, b$: см. определение 1.3.4
$\text{Ht}(X, Y)$:	группа морфизмов из X в Y , гомотопных нулю, см. § 1.3
$\text{K}(\mathcal{C})$:	группа Гротендика категории $\mathcal{C}$, см. упр. 1.27
$X[k]$:	сдвинутый комплекс, см. определение 1.3.2
$\tau^{\leq}, \tau^{\geq}$:	функторы усечения, см. (1.3.10), (1.3.11), § 10.1
$H^k(X)$:	k -е когомологии комплекса X , см. определение 1.3.5
$M(f)$:	конус морфизма f , см. § 1.4
$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \underset{+1}{\longrightarrow}$:	треугольник, см. обозначение 1.5.8
$\mathcal{C}_S$:	локализация категории $\mathcal{C}$ по S , см. определение 1.6.2
$\mathcal{C}/N$:	локализация категории $\mathcal{C}$ по N , см. обозначение 1.6.8
$\mathbf{D}^*(\mathcal{C}), * = \emptyset, +, -, b$:	производные категории, см. определение 1.7.1
RF :	правый производный функтор функтора F , см. определение 1.8.1
LF :	левый производный функтор функтора F , см. § 1.8
$\mathbf{D}_{\mathcal{C}}^*(\mathcal{C})$:	полная подкатегория в $\mathbf{D}^*(\mathcal{C})$, состоящая из комплексов, когомологии которых (как объекты) принадлежат $\mathcal{C}'$, см. § 1.7
$H_I(X), H_{II}, s(X)$:	комплексы, ассоциированные с двойным комплексом, см. § 1.9
$N \otimes_A M$ или $N \otimes M$:	тензорное произведение (над кольцом A)
$\text{Hom}_A(N, M)$ или $\text{Hom}(N, M)$:	группа гомоморфизмов (над кольцом A)
$\text{Tor}_n^A(N, M) = H^{-n}(N \otimes_A^L M)$:	, см. пример 1.10.12
$\text{Ext}_A^n(N, M) = H^n(R\text{Hom}_A(N, M))$:	
M-L:	Миттаг-Лефлер, см. § 1.12
$\oplus$:	прямая сумма, см. § 1.2
$X \times_Z Y$:	произведение над Z , см. упр. 1.6
$X \oplus_Z Y$:	прямая сумма над Z , см. упр. 1.6
$\text{Ext}^j(X, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(\mathcal{C})}(X, Y[j])$:	см. упр. 1.17
$\text{hd}(\mathcal{C})$:	гомологическая размерность категории $\mathcal{C}$, см. упр. 1.17

$\mathrm{gld}(A)$:	глобальная гомологическая размерность кольца A , см. упр. 1.28
$\mathrm{wgl}(A)$:	слабая глобальная размерность кольца A , см. упр. 1.29
tr	след, см. упр. 1.32
χ :	характеристика Эйлера–Пуанкаре, см. упр. 1.32
$b_j(V) = \dim H^j(V)$,	см. (5.4.17)
$b_j^*(V) = (-1)^j \sum_{k \leq j} (-1)^k b_k(V)$,	см. упр. 1.34 и (5.4.18)

Пучки

$F, G, H, \dots$:	пучки, $\mathcal{R}$ — пучок колец на пространстве X
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(F, G)$ или $\mathrm{Hom}(F, G)$:	пучок $\mathcal{R}$ -гомоморфизмов $\mathcal{R}$ -модуля F в G , см. определение 2.2.7
$\mathrm{Hom}(F, G) = \Gamma(X; \mathrm{Hom}(F, G))$	
$\mathcal{R}^{\mathrm{op}}$:	противоположное кольцо
$F \otimes_{\mathcal{R}} G$ или $F \otimes G$:	тензорное произведение $\mathcal{R}$ -модулей F и G над $\mathcal{R}$, см. определение 2.2.8
$F _Z$:	ограничение пучка F на Z
$F_x = F _{\{x\}}$:	стебель предпучка F в x
$s _Z, s_x$:	ограничение сечения s на Z и росток сечения s в x
$\mathrm{supp}(s)$:	носитель сечения s
$\Gamma(X; F)$:	глобальное сечение пучка F на X
$\Gamma(Z; F) = \Gamma(Z; F _Z)$	
$f^{-1}F$:	обратный образ пучка F , см. определение 2.3.1
f_*F :	прямой образ пучка F , см. определение 2.3.1
$f_!F$:	прямой образ с собственными носителями, см. (2.5.1)
$f^\#$:	см. определение 2.7.4
F_Z :	пучок на X , такой, что $F_Z _Z = F _Z$, $F_Z _{X \setminus Z} = 0$, Z локально замкнуто, см. § 2.3
$\Gamma_Z(F)$:	пучок сечений пучка F с носителем в Z , см. § 2.3
$M_X = a_X^{-1}M$:	постоянный пучок на X со стеблем M (M есть A -модуль)
$M_Z = (M_X)_Z$, $Z \subset X$, Z локально замкнуто	
$F \boxtimes_S G$:	внешнее тензорное произведение (пучок на $X \times_S Y$), см. обозначение 2.3.12
$\Gamma_c(X; F) = a_{X!}F$:	глобальное сечение с компактными носителями, см. (2.5.2)
$Rf_*, R\Gamma_Z, R\Gamma(X, \cdot), Rf_!, \otimes^L, \boxtimes^L, R\mathrm{Hom}$:	производные функторы соответствующих функторов, см. § 2.6
$H_Z^j(F), H_Z^j(X; F), H_c^j(X; F), \mathcal{E}xt_R^j(F, G), \mathrm{Ext}_R^j(F, G), \mathrm{Tor}_R^j(F, G)$:	см. обозначения 2.6.8

$\mathrm{wgl}d(\mathcal{R})$:	см. определение 2.6.2
$\mathrm{supp}(F)$:	замыкание множества $\bigcup_j \mathrm{supp} H^j(F)$, см. (2.6.34) и § 2.2
$\mathcal{C}(\mathcal{U}; F)$:	комплекс Чеха, связанный с семейством открытых подмножеств, см. § 2.8
$f^!$:	правый сопряженный функтора $Rf_!$, см. § 3.1
$D_X F = R\mathcal{H}om(F, \omega_X)$,	см. определение 3.1.16
$D'_X F = R\mathcal{H}om(F, A_X)$,	см. определение 3.1.16
$\int_X$:	морфизм $H_c^n(X; \omega_X) \rightarrow A$, см. (3.3.15)
$F^\wedge$:	преобразование Фурье—Сато, см. определение 3.7.8
$F^\vee$:	обратное преобразование Фурье—Сато, см. определение 3.7.8
Φ_K, Ψ_K :	функтор, ассоциированный с ядром K , см. определение 3.6.1 и 7.1.3
$K_1 \circ K_2$:	композиция ядер, см. (3.6.2) и (7.1.2)
$K_1 \circ_\mu K_2$:	микролокальная композиция ядер, см. определение 7.3.2
$\nu_M(F)$:	специализация объекта F вдоль M , см. определение 4.2.2
$\mu_M(F)$:	микролокализация объекта F вдоль M , см. определение 4.3.1
$f_\mu^{-1}, f_\mu^!, f_\mu^*, f_\mu^*$:	микролокальные операции, см. § 6.1
$\mu\mathcal{H}om(G \rightarrow F), \mu\mathcal{H}om(F \leftarrow G), \mu\mathcal{H}om(F, G)$:	функторы микролокализации, см. определение 4.4.1
$\mathrm{SS}(F)$:	микроноситель объекта F , см. § 5.1
$D^*(X) = D^*(A_X)$ ($*$ = $\emptyset, +, b, -$):	производная категория категории пучков A -модулей, см. § 2.6
$\mathcal{N}(X, Y; \Omega_X, \Omega_Y)$:	категория ядер, см. определение 7.1.1
$\mathcal{N}(X, Y; p_X, p_Y)$:	категория ядер, см. определение 7.3.7
ϕ_f :	функтор исчезающего цикла, см. § 8.6
ψ_f :	функтор близкого цикла, см. § 8.6
${}^p H^k$:	превратные когомологии, см. § 10.2

Специальные пучки

ω_X :	ориентирующий пучок, см. определение 3.3.3
$\omega_{Y/X}$:	относительный ориентирующий пучок, см. определение 3.3.3 и (3.3.3)
ω_X :	дуализирующий комплекс, см. определение 3.1.16
$\omega_{Y/X}$:	относительный дуализирующий комплекс, см. определение 3.1.16
$\mathcal{D}\delta_M$:	пучок распределений, см. п. 2.9.6
B_M :	пучок гиперфункций, см. п. 2.9.6 и определение 11.5.1

$\mathcal{V}_M$:	пучок плотностей на многообразии, см. п. 2.9.5
$\mathcal{C}_M$:	пучок микрофункций, см. определение 11.5.1

Пучки на комплексных многообразиях

$\mathcal{O}_X$:	пучок голоморфных функций на X
$\mathcal{O}_X^{(p)}$:	пучок голоморфных p -форм
Ω_X :	$\mathcal{O}_X^{(n)} \otimes \text{oz}_X$ ($n = \dim_{\mathbb{C}} X$)
$\mathcal{D}_X$:	пучок колец голоморфных дифференциальных операторов конечного порядка, см. § 11.2
$\mathcal{D}_{Y \rightarrow X}$:	бимодуль дифференциальных операторов из Y в X , см. определение 11.2.8
$\text{Icar } \mathcal{M}$:	см. (11.2.7)
$\text{char}(\mathcal{M})$:	характеристическое многообразие $\mathcal{D}_X$ -модуля $\mathcal{M}$, см. (11.2.14)
$\mathcal{K}_X = \mathcal{D}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes -1}[\dim_{\mathbb{C}} X]$,	см. (11.2.18)
$\mathcal{N}^* = R\text{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{K}_X)$,	см. (11.2.19)
$\boxtimes$:	внешнее тензорное произведение в категории $\mathcal{D}_X$ -модулей, см. (11.2.21)
$f^{-1}\mathcal{M}$:	обратный образ в категории $\mathcal{D}_X$ -модулей, см. определение 11.2.10
$f_*\mathcal{N}, f_!\mathcal{N}$:	прямой образ в категории $\mathcal{D}_X$ -модулей, см. определение 11.2.10
$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}, \mathcal{E}_{Y \rightarrow X}^{\mathbb{R}}, \mathcal{E}_{X \leftarrow Y}^{\mathbb{R}}$:	кольцо и бимодули голоморфных микролокальных операторов, см. определение 11.4.2 и предложение 11.4.3
$\mathcal{C}_{S X}^{\mathbb{R}}$:	пучок микрофункций на комплексном подмногообразии S , см. определение 11.4.2

Категории

$\mathbf{Set}$:	категория множеств
$\mathbf{Ab}$:	категория абелевых групп
$\text{Mod}(A)$:	абелева категория левых A -модулей
$\text{Mod}^f(A)$:	категория конечно порожденных левых A -модулей
$\text{Mod}(\mathcal{R})$:	категория пучков $\mathcal{R}$ -модулей ($\mathcal{R}$ — пучок колец на X)
$\text{Mod}(A_X)$:	категория пучков A -модулей на X
$\mathbf{Sh}(X) = \text{Mod}(\mathbb{Z}_X)$:	категория пучков абелевых групп на X
$\mathbf{D}(A) = \mathbf{D}(\text{Mod}(A))$,	см. обозначение 1.7.14 и (2.6.1)
$\mathbf{D}(A) = \mathbf{D}(A_X) = \mathbf{D}(\text{Mod}(A_X))$,	см. § 2.6 и, в частности, обозначение 2.6.11
$\mathbf{D}^b(X; \Omega)$:	локализация категории $\mathbf{D}^b(X)$ на $\Omega \subset T^*X$, см. § 6.1

- $D^b(X; p) = D^b(X; \{p\})$: локализация категории $D^b(X)$ в p , см. § 6.1
- $D_{\mathbb{R}^+}^+(E)$ подкатегория категории $D^+(E)$, состоящая из конечных объектов, см. определение 3.7.1
- $\text{Cons}(S)$, $w\text{-Cons}(S)$: категории S -конструктивных и слабо S -конструктивных пучков, см. § 8.1
- $D_{S-c}^b(S)$ и $D_{w-S-c}^b(S)$: подкатегории категории $D^b(|S|)$, состоящие из S -конструктивных и слабо S -конструктивных объектов, см. § 8.1
- $\mathbb{R}\text{-Cons}(X)$ и $w\text{-}\mathbb{R}\text{-Cons}X$: категории $\mathbb{R}$ -конструктивных и слабо $\mathbb{R}$ -конструктивных пучков на X , см. определение 8.4.3
- $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$ и $D_{w-\mathbb{R}-c}^b(X)$: подкатегории категории $D^b(X)$, состоящие из $\mathbb{R}$ -конструктивных и слабо $\mathbb{R}$ -конструктивных объектов, см. § 8.4
- $D_{C-c}^b(X)$ и $D_{w-C-c}^b(X)$: , см. § 8.5
- $K_{\mathbb{R}-c}(X)$: группа Гротендика категории $D_{\mathbb{R}-c}^b(X)$, см. § 9.7
- $({}^p D_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X), {}^p D_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ и т. д. : t -структура, связанная с превратностью p , см. § 10.2
- $({}^\mu D_{w-\mathbb{R}-c}^{\leq 0}(X), {}^\mu D_{w-\mathbb{R}-c}^{\geq 0}(X))$ и т. д. : t -структура, определенная микролокально, см. § 10.3

Циклы, следы и конструктивные функции

- $\chi(F)(x)$, $\chi_c(F)(x)$, $\chi(X; F)$, $\chi_c(X; F)$: характеристики (индексы) Эйлера-Пуанкаре, см. § 9.1
- tr_X : морфизм следа, см. (9.1.3)
- $\int_X: H_c^0(X, \omega_X) \rightarrow k$ см. § 3.3 и § 9.1
- $CS_p(F)$: пучок субаналитических p -цепей со значениями в F , см. определение 9.2.1
- $CS_p^X = CS_p(A_X) = CS_p$
- $\partial_p: CS_p \rightarrow CS_{(p-1)}$: граничный оператор, см. (9.2.10)
- ZS_p^X : пучок субаналитических p -циклов на X , см. определение 9.2.5
- $C_1 \cap C_2$: пересечение двух циклов, см. определение 9.2.12
- $\#(C_1 \cap C_2)$: индекс пересечения двух циклов, см. определение 9.2.12
- $\mathcal{L}_X$: пучок лагранжевых циклов, см. определение 9.3.1
- f^*, f_* : обратный и прямой образы лагранжевых циклов, см. определение 9.3.3
- $\boxtimes$: внешнее произведение циклов, см. (9.3.2)
- $[T_Y^* X]$: лагранжев цикл, ассоциированный с $Y \hookrightarrow X$, см. пример 9.3.4
- $[\sigma_0]$: цикл, определенный нулевым сечением, см. определение 9.3.5