АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
(МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ)

Книга I

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРИМЫКАЮЩИЕ ВОПРОСЫ

КИЕВ — 1993

М.Г.Крейн

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В трех книгах

УДК 517

Избранные труды крупнейшего украинского математика XX века Марка Григорьевича Крейна содержат оригинальные исследования автора по комплексному анализу, экстраполяции, интерполяции, эрмитово-положительным функциям, банаховым пространствам, теории операторов; спектральной теории струны, задаче рассеяния и вопросам устойчивости. Представленные здесь работы оказали и продолжают оказывать исключительно плодотворное влияние на развитие современной математики. Содержание опубликованных работ во многом отражает фундаментальный вклад М.Г.Крейна в математические науки.

Для математиков, физиков.

Вибрані твори великого українського математика XX століття Марка Григоровича Крейна вміщують оригінальні дослідження автора по комплексному аналізу, екстраполяції, інтерполяції, ермітово-позитивним функціям, банаховим просторам, теорії операторів; спектральній теорії струни, задачі розсіяння і питанням стійкості. Представлені тут роботи здійснювали і продовжують здійснювати виключно плідний вплив на розвиток сучасної математики. Зміст опублікованих робіт багато в чому відображає фундаментальний внесок М.Г.Крейна в математичні науки.

Для математиків, фізиків.

Ответственный за выпуск *В.Д.Кошманенко*

Издатель **А.М.Самойленко**

Утверждено к печати ученым советом Института математики АН Украины

Без. объявл.

ISBN 5-7702-0681-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее издание вошли избранные труды одного из крупнейших математиков XX в. — Марка Григорьевича Крейна (1907–1989). Полный список трудов содержит 317 наименований, однако ограниченность объема издания не позволяет отразить все их многообразие. Редколлегия ограничилась следующими областями исследований: I. Комплексный анализ, экстраполяция, интерполяция, эрмитово-положительные функции и примыкающие вопросы; II. Банаховы пространства и теория операторов; III. Спектральная теория струны и вопросы устойчивости. При этом статьи, содержание которых отражено в монографиях М.Г.Крейна, были исключены.

Отметим, что работы М.Г.Крейна по спектральной теории струны содержат изложение результатов, как правило, без доказательств. Подробное изложение доказательств значительной их части приведено в гл.6 книги: *Dym H., McKean H.P.* Gaussian Processes, Function Theory and Inverse Spectral Problem. – New York: Acad. Press, 1976. – 328 p. В ней также показана связь между исследованиями М.Г.Крейна по теории струны и теории целых операторов и исследованиями Луи де Бранжа по гильбертовым пространствам целых функций.

К сожалению, в настоящее издание не вошли исследования М.Г.Крейна по интегральным уравнениям с ядром, зависящим от разности, завершившие в известном смысле знаменитые исследования Винера и Хопфа. Однако читатель может ознакомиться со статьей: *Крейн М.Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, N 5.– С.3–120. То же можно сказать о большом цикле работ М.Г.Крейна по теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Эти работы частично отражены в книге: *Iohvidov I.S.*, *Krein M.G.*, *Langer H.* Introduction to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metrics // Math. Res. - 1982. - 120 p. Рекомендуем читателю, кроме книги: *Азизов Б.З.*, *Иохвидов И.С.* Теория линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. - М.: Наука, 1985. - 424 с., статью: *Крейн М.Г.* Введение в теорию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах // II летняя мат. школа (Ин-т математики АН Украины). - Киев. - 1965. - С.15-92. Здесь изложены общие идеи, развитые М.Г.Крейном в этой области.

Редколлегия

МАРК ГРИГОРЬЕВИЧ КРЕЙН

Вся жизнь Марка Григорьевича Крейна связана с Украиной. Он родился 3 апреля 1907 г. в многодетной семье в Киеве. Здесь в Трудовой школе пришло его первое увлечение математикой. В 1924 г. он уехал в Одессу, где продолжал заниматься самостоятельно. Встреча с С.И.Шатуновским и Н.Г.Чеботаревым окончательно решила судьбу М.Г.Крейна. После окончания аспирантуры под руководством Н.Г.Чеботарева Марк Григорьевич преподавал в Донецком горном институте, затем заведовал различными кафедрами Одесского университета и других вузов Одессы. Параллельно в 1934–1940 гг. он работал в НИИ математики при Харьковском университете, а в 1940–1941 и 1944–1955 гг. – в Киеве, возглавляя в Институте математики АН УССР отдел алгебры и функционального анализа. Степень доктора физико-математических наук была присуждена ему в 1958 г. без защиты диссертации; в 1959 г. он был избран членом-корреспондентом АН УССР. Скончался Марк Григорьевич Крейн 17 октября 1989 г. на 83-м году жизни.

Научное творчество М.Г.Крейна охватывает различные разделы алгебры, анализа, механики. Результаты, полученные Марком Григорьевичем в каждой из указанных областей, оказали существенное влияние на их развитие. Что касается функционального анализа, то, явившись живительным источником для исследований многих математиков как в нашей стране, так и за ее пределами, они в значительной степени определили современный облик этой ветви математики.

Поскольку диапазон математических интересов и достижений М.Г.Крейна довольно широк, мы коснемся лишь основных, на наш взгляд, направлений его исследований.

Важную роль в развитии функционального анализа и его приложений сыграли работы М.Г.Крейна по геометрии банаховых и линейных топологических пространств и операторам в них. Здесь прежде всего отметим введение и изучение банаховых пространств с фиксированным конусом векторов, пространств с двумя нормами, выпуклых множеств в линейных пространствах. Особую известность приобрели основополагающие теоремы Крейна–Мильмана и братьев Крейнов–Какутани.

Сочетание алгебраических и геометрических методов отчетливо просматривается в исследованиях Марка Григорьевича по теории топологических групп и однородных пространств. Гармонический анализ на коммутативной локально компактной группе и обнаружение своеобразного принципа двойственности для произвольных некоммутативных компактных групп, в частности тот факт, что структура однородного компакта полностью определяется алгеброй гармонических функций на нем, оказали заметное влияние на дальнейшее развитие абстрактного гармонического анализа.

М.Г.Крейн дал полное описание и классификацию самосопряженных (с.с.) положительных расширений положительного эрмитова оператора и применил их к исследованию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Привлекая и пополняя методы теории аналитических функций, он изучил эрмитовы операторы с равными дефектными числами и выделил среди них интересный класс операторов, названных им целыми, в теории которых были найдены аналоги всех основных конструкций неопределенного случая классической проблемы моментов. Эта теория позволила связать между собой и в некотором смысле завершить решение таких задач, как проблема моментов, проблема продолжения положительно определенных (п.о.) и винтовых функций, описание спектральных функций струны и т.п.; она привела к постановке и решению новых оригинальных задач в теории аналитических функций, явилась убедительным подтверждением высказывания Марка Григорьевича о том, что "крупные успехи в функциональном анализе будут достигнуты путем использования все более широкого арсенала современных средств теории аналитических функций и, с другой стороны, функциональный анализ, выступая в роли заказчика, будет стимулировать развитие последней".

М.Г.Крейн разработал общий метод направляющих функционалов, с помощью которого получил разложения по собственным функциям обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов. Тем самым результаты многолетних исследований Ж.Штурма, Ж.Лиувилля, В.А.Стеклова, Г.Вейля, относящиеся к уравнению второго порядка, были установлены и для дифференциальных уравнений произвольного порядка. На основании названного метода была также развита теория интегральных представлений положительно определенных ядер через элементарные, частными следствиями которой явились известные теоремы Бохнера, Бернштейна и др. об интегральном представлении положительно определенных экспериментально выпуклых и других функций.

М.Г.Крейн — один из создателей теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Его идея дефинизирующего многочлена и метода направляющих функционалов легли в основу интегральных представлений и продолжений эрмитово-индефинитных функций с конечным числом отрицательных квадратов, теории спектральных разложений самосопряженных и унитарных операторов в пространствах Понтрягина Π_χ, которая на данном этапе доведена до уровня, сравнимого с теорией соответствующих операторов в гильбертовом пространстве; геометрия так называемых пространств Крейна и операторы в них привлекают все большее внимание исследователей – теоретиков и практиков.

На протяжении многих лет Марка Григорьевича занимали вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. Разработанная А.М.Ляпуновым для уравнений второго порядка теория зон устойчивости после 50-летней паузы, вызванной серьезными трудностями, наконец была обобщена М.Г.Крейном методами функционального анализа на канонические системы с периодическими коэффициентами. Заложенные им основы теории устойчивости дифференциальных уравнений в банаховых пространствах позволили сделать это проще, а иногда и в более законченной форме, даже в случае систем с одной степенью свободы.

М.Г.Крейн внес функциональный вклад в теорию обратных задач для уравнения Штурма–Лиувилля, более общего уравнения струны и канонических систем дифференциальных уравнений. В частности, им была решена задача восстановления уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам и канонической системе по ее спектральной функции или по матрице рассеяния. При этом были использованы аналитический аппарат, развитый при изучении целых операторов, и теория систем уравнений Винера–Хопфа, получившая завершение в одном из циклов его работ, удостоенном премии им.Н.М.Крылова. Заметим, что в процессе этих исследований возникла теория акселерант, которую в случае канонических систем с двумя неизвестными функциями следует рассматривать как теорию континуальных аналогов ортогональных многочленов на окружности.

Идея и методы М.Г.Крейна далеко проникли также в теорию несамосопряженных операторов. Благодаря им эта теория в настоящее время предстает перед нами как "некий горный массив, имеющий своеобразную архитектуру, свой особый аналитический аппарат и, можно даже сказать, свое особое исчисление, притом с неожиданными выходами в различные области анализа" [227][†].

К сожалению, мы не имеем возможности хотя бы кратко остановиться на вопросах, касающихся осцилляционных матриц и интегральных ядер и их применения при изучении осцилляционных свойств решений дифференциальных уравнений произвольного порядка; теории ганкелевых операторов и связанной с ней серией задач интерполяции и продолжения в теории функций; аппроксимации функций; базисности в банаховых пространствах; теории возмущений самосопряженных операторов и др. Отметим лишь, что здесь Марку Григорьевичу тоже принадлежат результаты первостепенного значения.

Прочный идейный фундамент, заложенный в предыдущих ра-

[†]См. список литературы в конце книги.

ботах, лег в основу исследований М.Г.Крейна последующего десятилетия по теории операторов в гильбертовом пространстве и пространствах $\Pi_\varkappa$, ее различным приложениям в комплексном анализе и теории канонических систем дифференциальных уравнений. Как и прежде, их отличает умение связывать сложные математические задачи с механическими соображениями, видеть в частных технических решениях скрытые математические закономерности.

Среди них важное место занимает большая работа, по существу монография "О некоторых проблемах продолжения, тесно связанных с теорией эрмитовых операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$", выполненная совместно с Г.К.Лангером. К сожалению, пока лишь отдельные ее части опубликованы в разных зарубежных журналах: ч.I и II – [268, 276] (нем.яз.), ч.III – [287, 288] (англ.), ч.IV – [307] (англ.), ч.V еще не опубликована. В этой работе на базе уже развитой Марком Григорьевичем и его учениками теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой и новых полученных в ней результатов исследованы обобщенные классы функций Шура, Каратеодори, Неванлинны, положительно определенных и винтовых функций. В названных классах изучены соответствующие обобщения классических дискретных и континуальных задач продолжения: тригонометрической и степенной проблемы моментов, задачи Шура и Неванлинны–Пика, продолжения с конечного отрезка винтовых и положительно определенных функций. Здесь получили развитие рассмотренные ранее в дефинитном варианте теория акселерант, континуальные аналоги ортогональных многочленов, спектральная теория канонических систем.

В широком круге указанных выше и других задач гармонического анализа описание решений в матричнозначном вполне неопределенном случае дается в виде дробнолинейного преобразования над классом сжимающих голоморфных матриц-функций с матрицей-функцией коэффициентов преобразований, обладающей специфическими свойствами. Эта формула послужила начальной точкой при отыскании М.Г.Крейном и Д.З.Аровым [283, 298] решений с экстремальным значением нелинейного, так называемого энтропийного функционала, которому в ряде приложений отводится особая роль.

Продолжением работ [153, 228] можно считать рассмотренный совместно с Ф.Э.Мелик-Адамяном континуальный вариант задачи Нехари для прямоугольных, сжимающих на вещественной оси матриц-функций с принадлежащей винеровскому классу "главной частью" [301]. В неопределенном классе авторы не только описали все решения, но и из их множества выделили те, которые принадлежат винеровскому классу. Эти результаты были затем применены [309] к решению матрично-континуальных аналогов задач Шура и Каратеодори–Теплица.

Развивая далее предложенные им в обратных задачах спектральной теории струны методы, Марк Григорьевич в совместных с А.А.Нудельманом работах [277, 278, 282] решил задачу о восстановлении, возможно, сингулярной струны с трением на одном конце по последовательности собственных частот в предположении конечности статического момента относительно этого конца и связанные с такой струной задачи теории функций.

Спектральная задача для уравнения струны, возникшая в связи с известной в теории солитонов работой Н.И.Ахиезера, послужила мотивом для изучения М.Г.Крейном вместе с Б.Я.Левиным и А.А.Нудельманом вопроса о существовании специального представления многочлена, положительного на системе замкнутых интервалов [300]. Это специальное представление, как и решенная в [300] экстремальная задача для многочленов, является обобщением соответствующих задач Маркова, рассматривавшего лишь один интервал. Если в случае одного интервала специальное представление, фигурирующее у А.А.Маркова, всегда существовало, то, как оказалось, для системы интервалов это не так. Замечательно, что условие существования выражается как в терминах теории ортогональных многочленов, так и в терминах абелевых интегралов.

Возвращаясь к вопросу о восстановлении матрицы монодромии канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка по ее нижней строчке, имеющему непосредственное отношение к исследованию неопределенного случая краевой задачи Штурма–Лиувилля, он совместно с И.Е.Овчаренко распространил полученный в [129] результат на системы $2n$-го порядка, а именно были описаны все матрицы монодромии с наперед заданным блоком размерности $n \times n$ или блочной строкой [292].

В свое время обратные спектральные задачи для уравнения Шредингера привели М.Г.Крейна к использованию уравнений Винера–Хопфа. Состояние теории этих уравнений того времени не удовлетворяло Марка Григорьевича, и он, применяя теоремы Винера–Леви, шагнул далеко вперед в построении общей теории систем таких уравнений. В ее основе лежала факторизация матриц-функций. В [293, 310] проведено весьма полное исследование уравнения Винера–Хопфа с вполне монотонным на положительной и отрицательной полуосях суммируемым ядром $k(t)$. Сами же по себе проблемы факторизации функций, матриц-функций, операторов всегда были в поле зрения Марка Григорьевича. Работы [263, 273, 299, 304] посвящены факторизации матриц-функций, у которых хаусдорфово множество значений лежит внутри сектора комплексной плоскости раствора $\alpha < \pi$; для α-секториальных блочно-теплицевых матриц получены обобщения первой предельной теоремы Сеге, в определенной части являющиеся новыми даже для положительных ($\alpha = 0$) теплицевых матриц.

Тесное переплетение теоретических и прикладных тематик в творчестве М.Г.Крейна нашло отражение в многочисленных приложениях его результатов в различных областях науки и техники. Примерно через 20 лет после выхода в свет монографии [50] обнаружилось, что исследования Марка Григорьевича по обобщенной проблеме моментов дают возможность решать задачи оптимального управления систем с распределенными параметрами; в его теории продолжения положительно определенных функций и винтовых дуг содержалось решение ряда вопросов линейного прогнозирования стационарных процессов с конечного интервала времени; правило подсчета числа отрицательных собственных значений эрмитовых расширений положительного оператора применяется в теории устойчивости конструкций; данный

М.Г.Крейном метод определения критических частот в явлении параметрического резонанса используется в теории синхротронов с сильной фокусировкой. Контактные задачи теории упругости, теория волноводов, корабельных волн и волнового сопротивления, теория межмолекулярных взаимодействий, радиотехнические задачи — это далеко не полный перечень объектов приложений результатов Марка Григорьевича. В последнее время его исследования по топологическим группам нашли выход в теорию графов.

Описанными выше направлениями не исчерпывается весь круг математических интересов М.Г.Крейна. Его перу принадлежит около 300 работ, среди которых 10 фундаментальных монографий, и каждая из работ достойна пристального внимания и изучения, ибо в каждой из них есть что-то напутствующее. Поэтому не удивительно, что научные заслуги Марка Григорьевича получили широкое международное признание. Он был иностранным членом Американской академии искусств и наук, членом Национальной академии наук США, членом редколлегий нескольких международных математических журналов; его книги неоднократно переиздавались за рубежом. За фундаментальные достижения в функциональном анализе и его приложениях ему присуждена в 1983 г. международная премия Вольфа. "Scattering theory for automorphic functions".– Princeton Univ. Press, 1976 – одна из лучших книг известных американских математиков П.Лакса и Р.Филлипса, посвященная Марку Григорьевичу Крейну — "одному из математических гигантов нашего века". Признаться откровенно, не каждый ученый даже самого высокого академического ранга при своей жизни получает такие награды и признания.

Раннему расцвету таланта М.Г.Крейна как ученого сопутствовало столь же раннее раскрытие его как педагога. Марк Григорьевич в совершенстве владел этой самой великой на Земле профессией. Его лекции, доклады и просто беседы всегда были увлекательны, потому что они "возвышенные и земные". Не одному поколению математиков они привили любовь к науке, высокое стремление к образованию. Поэтому у него очень много учеников, и не только в Одессе. Созданная им в Украине школа функционального анализа добилась значимости и весомости в мире математики. Из ее недр вышло много известных ученых. Среди непосредственных учеников Марка Григорьевича 20 докторов и около 50 кандидатов физико-математических и технических наук. Эти цифры убедительно подтверждают необычайную талантливость М.Г.Крейна — человека, оставившего о себе потомкам долгую память[†].

Д.З.Аров, Ю.М.Березанский,
Н.Н.Боголюбов,
В.И.Горбачук, М.Л.Горбачук,
Ю.А.Митропольский,
Л.Д.Фаддеев

[†]См.: Успехи мат. наук. - 1987. - **42**, вып.4. - С.201–205.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ ИНТЕГРАЛАМИ ФУРЬЕ–СТИЛТЬЕСА

(Ученые записки Куйбышевского государственного педагогического и учительского института им. В.В. Куйбышева. – 1943. – Вып.7)

Основной задачей этой статьи является исследование условий, при которых функция $f(x)$, заданная в конечном или бесконечном интервале I, представима в этом интервале интервалом Фурье – Стилтьеса, т.е. в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (x \in I), \tag{$*$}$$

где $\sigma(t) \quad (-\infty < t < \infty)$ – некоторая функция ограниченной вариации, а также изучение и сравнение между собой возможных различных таких представлений одной и той же функции.

Для случая $I = (-\infty, \infty)$ эти условия были найдены S. Bochner [1, 2]; в этом случае функция $\sigma(t)$ в существенном определяется однозначно по данной функции $f(x)$.

Вопрос значительно усложняется, когда I – конечный интервал. В этом случае, если функция $f(x)$ допускает одно представление $(*)$, то она допускает бесчисленное множество таких представлений, и среди этих представлений особый интерес представляют те из них, для которых полная вариация функции $\sigma(t)$ принимает возможно меньшее значение (так называемые главные представления).

В одном из наших сообщений в Докладах Академии наук СССР [3] был исследован тот случай, когда интервал I симметричен относительно начала координат и среди представлений (∗) находится по крайней мере одно такое, для которого функция $\sigma(t)$ – неубывающая функция[†].

В настоящей статье исследуется общий случай.

В излагаемых ниже методах исключительную роль играют целые трансцендентные функции экспоненциального типа, ограниченные на всей вещественной оси. Одно из самых замечательных свойств этих функций было открыто академиком С.Н.Бернштейном [4]. Сравнительно недавно Б.М.Левитан [5] дополнил результаты С.Н.Бернштейна тем, что показал, что эти функции являются пределами определенным образом сходящихся к ним тригонометрических периодических полиномов. Ввиду важности для нас этого результата Б.М.Левитана, а также ввиду того, что нам удалось найти новое его доказательство, дающее возможность оценить скорость сходимости этих полиномов, мы приводим в §1 теорему Б.М.Левитана с ее доказательством.

§1. О целых трансцендентных функциях С.Бернштейна

1. Обозначим через B_A $(A > 0)$ совокупность всех целых трансцендентных функций $\varphi(z)$ $(z = x + iy)$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

$$1)\quad \tau(\varphi) = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\lg|\varphi(z)|}{|z|} \le A;$$

$$2)\quad \sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)| < \infty.$$

Условие 1), очевидно, означает, что функция $\varphi(z)$ является функцией экспоненциального типа, показатель которой $\le A(\tau(\varphi))$ – показатель функции.

Имеет место следующая замечательная теорема.

[†] Это представление, конечно, будет главным, и в этом случае только такие представления будут главными.

Теорема (С.Бернштейн [4]). *Если* $\varphi(z) \in B_A$, *то* †

$$|\varphi'(x)| \le A \sup_{-\infty<t<\infty} |\varphi(t)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{1}$$

Для установления некоторых свойств функций $\varphi \in B_A$ введем еще в рассмотрение класс W_A, состоящий из всевозможных целых функций $\varphi(z)$ экспоненциального типа, показатель которых $\tau(\varphi) \le A$ и обладающих тем свойством, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty.$$

Относительно этого класса функций имеет место

Теорема (R.Paley and N.Wiener [6]). *Для того чтобы функция* $\varphi(z)$ *принадлежала классу* W_A, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\varphi(z)$ *допускала представление*

$$\varphi(z) = \int_{-A}^{A} e^{iz\alpha}\Phi(\alpha)d\alpha,$$

где $\Phi(\alpha) \in L_2(-A, A)$ †† .

Заметим, что при этом согласно теореме Plancherel (см. [1])

$$\int_{-A}^{A} |\Phi(\alpha)|^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx.$$

---

†С.Бернштейн [4], кроме того, доказал, что, если при каком-либо значении x в (1) достигается знак равенства, то $\varphi(z) = C_1 \cos Az + C_2 \sin Az$, и этот факт мы нигде не используем. Изящное доказательство теоремы Бернштейна дано во втором томе книги Полиа и Сеге (см. [8], с.44, отд. IV, л.3. §5, № 201).

††Через $L_p(-A, A)$ $(p > 0)$ мы, как обычно, обозначаем совокупность всех измеримых функций $\Phi(\alpha)$ $(-\infty < \alpha < \infty)$, модуль которых в степени p суммируем на интервале $(-\infty, \infty)$.

Очевидно, что если $\varphi(z) \in B_A$, то функция

$$\Psi_h(z) = \left(\frac{2 \sin \frac{hz}{2}}{hz} \right)^2 \varphi(z) \in W_{A+h},$$

а следовательно, по теореме Paley – Wiener она допускает представление

$$\Psi_h(z) = \int_{-A-h}^{A+h} e^{iz\alpha} E_h(\alpha) d\alpha;$$

при этом, так как $\Psi_h(x) \in L_1 \quad (-\infty, \infty)$, то по формуле обращения

$$E_h(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \left(\frac{2 \sin \frac{hx}{2}}{hx} \right)^2 \varphi(x) dx$$

$$(-A - h < \alpha < A + h), \tag{2}$$

где

$$E_h(\alpha) \doteq 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| \geq A + h. \tag{3}$$

Положим $h = \frac{A}{n} \quad (n = 1, 2, ...)$ и

$$S_n(\varphi, x) = \sum_{k=-n}^{n} h E_h(kh) e^{ikhx} \quad (\varphi \in B_A).$$

Для дальнейшего изложения важную роль играет следующая теорема.

Теорема (Б.Левитан [5]). *Если $\varphi \in B_A$, то тригонометрические суммы $S_n(\varphi, x) \quad (n \to \infty)$ сходятся к $\varphi(x)$, притом равномерно в каждом конечном интервале. Кроме того,*

$$|S_n(\varphi, x)| \leq \sup_{-\infty < t < \infty} |\varphi(t)| \quad (-\infty < x < \infty, \quad n = 1, 2, ...)$$

и если $\varphi(x)$ *всюду неотрицательно, то и суммы* $S_n(\varphi, x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *обладают этим свойством* [†] .

Доказательство. Очевидно, что функция

$$\varphi_h(z) = \frac{2\sin\frac{h}{2}z}{hz}\varphi(z) \in B_{A+\frac{h}{2}}$$

и, следовательно,

$$\varphi_h(z) = \int_{-A-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} e^{i\alpha z}\Phi_h(\alpha)d\alpha, \tag{4}$$

где

$$\int_{-A-\frac{h}{2}}^{a+\frac{h}{2}} |\Phi_h(\alpha)|^2 d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\sin\frac{h}{2}x}{hx}\right)^2 |\varphi(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{C^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\sin\frac{h}{2}x}{hx}\right)^2 dx = \frac{C^2}{h}$$

$$(C = \sup_{-\infty<x<\infty} |\varphi(x)|). \tag{5}$$

Легко далее видеть, что

$$E_h(\alpha) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} \Phi_h(\alpha + t)dt$$

[†] В своей заметке [5] Б. Левитан доказал теорему для класса функций, иначе определенного, чем B_A; вскоре после того автор и Б. Левитан заметили, что класс функций, рассматриваемый в [5], есть не что иное, как класс B_A функций С. Бернштейна, по этому же поводу R.P.Boas [7] написал специальную заметку. Приводимое здесь доказательство первой части теоремы существенно отличается от доказательства самого Б. Левитана; из доказательства Б. Левитана не получается оценка скорости сходимости полиномов $S_n(\varphi, x)$ к $\varphi(x)$.

$$(-\infty < \alpha < \infty, \quad \Phi_h(\alpha) = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| \geq A + \frac{h}{2}). \tag{6}$$

Поэтому

$$S_n(\varphi, x) = \sum_{k=-n}^{n} \int\limits_{(k-0,5)h}^{(k+0,5)h} \Phi_h(\alpha) d\alpha e^{ikhx},$$

и в силу (4)

$$|\varphi_h(x) - S_n(\varphi, x)| =$$

$$= \Big| \sum_{k=-n}^{n} \int\limits_{(k-0,5)h}^{(k+0,5)h} (e^{i\alpha x} - e^{ikhx}) \Phi_h(\alpha) d\alpha \Big| \leq$$

$$\leq \frac{h|x|}{2} \int\limits_{-A-\frac{h}{2}}^{A+\frac{h}{2}} |\Phi_h(\alpha)| d\alpha. \tag{7}$$

Пользуясь для оценки интеграла неравенством Шварца, а затем (5) и припоминая также, что $h = A/n$, находим

$$|\varphi_h(x) - S_n(\varphi, x)| \leq \frac{AC\sqrt{1 + \frac{1}{2n}}}{\sqrt{n}} x.$$

Отсюда уже нетрудно заключить, что при некотором значении константы γ:

$$|\varphi(x) - S_n(\varphi, x)| \leq \frac{AC\gamma}{\sqrt{n}} |x| \qquad (-\infty < x < \infty, \quad n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Это неравенство доказывает первую часть теоремы Левитана. Интересно отметить, что константа γ вовсе не зависит от $\varphi \in B_A$.

Для доказательства второй части теоремы заметим, что в силу (6) и (2)

$$S_n(\varphi, x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{k}{N}\right) h E_h(kh) e^{ikhx} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha) \frac{\sin^2 \frac{h\alpha}{2}}{\frac{h}{2}\alpha^2} \left|\sum_{k=0}^{N} e^{ikh(x-\alpha)}\right|^2 d\alpha. \tag{9}$$

Отсюда

$$S_n(\varphi, x) \le C \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{h}{2}\alpha}{\frac{h}{2}\alpha^2} \left|\sum_{k=0}^{N}\right|^2 d\alpha = C$$

$$(-\infty < x < \infty).$$

Одновременно соотношение (9) показывает, что если $\varphi(x) \ge 0$ $(-\infty < x < \infty)$, то также $S_n(\varphi, x) \ge 0$ $(-\infty < x < \infty)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В дальнейшем нам придется иметь дело с функциями $\varphi(z) \in B_A$ частного вида:

$$\varphi(z) = \int_{-A}^{A} \Phi(\alpha) e^{i\alpha z} d\alpha, \tag{10}$$

где $\Phi(\alpha)$ — измеримая, интегрируемая в интервале $(-A, A)$ функция.

При доказательстве теоремы Левитана для таких функций нет надобности пользоваться теоремой Paley–Wiener, и оценка (8) может быть уточнена. В самом деле, если функция $\varphi(z)$ имеет вид (10), то, полагая $\Phi(\alpha) = 0$ при $|\alpha| > A$, мы в этом случае непосредственно находим, что в (4)

$$\Phi_h(\alpha) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Phi(\alpha + t) dt \quad (-\infty < \alpha < \infty).$$

Так как по известной теореме Lebesgue

$$\omega(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\alpha + \xi) - \Phi(\alpha)| d\alpha \to 0 \ \text{ при } \ \xi \to 0,$$

то при $n \to \infty$ также стремится к нулю интеграл

$$\varepsilon_n = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_h(\alpha) - \Phi(\alpha)| d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|1/h \int_{-h/2}^{h/2} [\Phi(\alpha + t) - \Phi(\alpha)] dt\right| d\alpha \leq$$

$$\leq 1/h \int_{-h/2}^{h/2} \omega(\xi) d\xi. \qquad (11)$$

В этом случае из (7) следует, что

$$|\varphi_h(x) - S_n(\varphi, x)| \leq \frac{A|x|}{2n} \left[\int_{-A}^{A} |\Phi(\alpha)| d\alpha + \varepsilon_n\right] \quad (\varepsilon_n \to 0).$$

Очевидно также, что это неравенство сохранит свой смысл (при другом $\varepsilon_n \to 0$), если в нем заменить $\varphi_h(x)$ на $\varphi(x)$.

Пусть теперь $f(\alpha)$ $(-A < \alpha < A)$ – некоторая неопределенная функция. Покажем, что в рассматриваемом случае

$$\sigma_n = \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh) f(kh) \to \int_{-A}^{A} \Phi(\alpha) f(\alpha) d\alpha \qquad (12)$$

при $h = A/n \to 0$.

В самом деле, из стремления к нулю интеграла (11) при $n \to \infty$ вытекает, что [†]

$$\int_{-A-h/2}^{A+h/2} \Phi_h(\alpha) f(\alpha) d\alpha \to \int_{-A}^{A} \Phi(\alpha) f(\alpha) d\alpha \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

[†] При этом $f(\alpha)$ произвольно доопределяется в интервалах $(A, \frac{3}{2}A), (-\frac{3}{2}A, -A)$ с единственным условием сохранения непрерывности во всем интервале $(-\frac{3A}{2}, \frac{3A}{2})$.

С другой стороны, в силу (6) и (11)

$$|\sigma_n - \int\limits_{-A-h/2}^{A+h/2}| = \left|\sum_{k=-n}^{n} \int\limits_{(k-0,5)h}^{(k+0,5)h} [f(kh) - f(\alpha)]\Phi_h(\alpha)d\alpha\right| \leq$$

$$\leq \delta\left(\frac{h}{2}\right) \int\limits_{-A-h/2}^{A+h/2} |\Phi_h(\alpha)|d\alpha = \delta\left(\frac{h}{2}\right)\left[\int\limits_{-A}^{A} |\Phi(\alpha)|d\alpha + \varepsilon_n\right],$$

где ε_n и

$$\delta\left(\frac{h}{2}\right) = \max_{|\alpha-\beta|\leq h/2} |f(\alpha) - f(\beta)|$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, соотношение (12) доказано.

2. Известно, что если целая функция $\varphi(z)$ имеет конечный экспоненциальный тип, то тот же тип имеет ее производная.

Поэтому если $\varphi(z) \in B_A$ и $|\varphi(x)| \leq C \quad (-\infty < x < \infty)$, то из неравенства С.Бернштейна $|\varphi'(x)| \leq AC \quad (-\infty < x < \infty)$ вытекает неравенство $|\varphi''(x)| \leq A^2C \quad (-\infty < x < \infty)$ и вообще

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq A^kC \quad (-\infty < x < \infty, \quad k = 1, 2, ...).$$

Откуда

$$|\varphi(x + iy)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!} i^k y^k\right| \leq Ce^{A|y|}$$

и аналогично

$$|\varphi'(x + iy)| \leq Ce^{A|y|}.$$

Из последнего неравенства следует, что всякое семейство функций $\{\varphi(z)\} \subset B_A$, равномерно ограниченных на вещественной оси, компактно в следующем смысле: из всякой его бесконечной части можно выделить последовательность функций $\{\varphi_n(z)\}$, равномерно сходящихся в каждой конечной части комплексной плоскости к некоторой функции $\varphi_0(z)$. Так как при этом предельная функция также удовлетворяет неравенству $|\varphi_0(z)| \leq Ce^{A|y|}$, то и она принадлежит B_A.

Пользуясь этим и теоремой Б.Левитана, докажем необходимую для дальнейшего изложения лемму.

Лемма 1. *Если $\varphi(z) \in B_A$ и $\varphi(x) \geq 0$ при $-\infty < x < \infty$, то существует функция $\psi(z) \in B_{A/2}$ такая , что*

$$\varphi(x) = |\psi(x)|^2 \quad (-\infty < x < \infty), \tag{13}$$

при этом функция $\psi(x)$ может быть построена так, что все ее нули лежат в верхней полуплоскости $y \geq 0$.

Доказательство. По теореме Б. Левитана полиномы

$$S_n(e^{ihx}) = S_n(\varphi, x) = \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)e^{ikhx} \quad (h = A/n)$$

неотрицательны. Следовательно, по теореме Fejer – Riesz (см. Полиа и Сеге [8], с.89) найдется полином

$$P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)}\zeta^k,$$

все корни которого лежат в круге $|\zeta| \leq 1$, и такой, что

$$S_N(e^{ihx}) = |P_n(e^{ihx})|^2. \tag{14}$$

Так как по теореме Б. Левитана полиномы $S_n(e^{ihx})$ равномерно ограничены на вещественной оси той же константой, что и $\varphi(z)$, то и функции

$$\psi_n(z) = e^{-i(A/2)z}P_n(e^{ihz}) \in B_{A/2} \quad (n = 1, 2, ...)$$

равномерно ограничены на вещественной оси и, следовательно, образуют компактное свойство в смысле равномерной сходимости на каждом конечном интервале действительной оси.

Пусть $\psi(z)$ – предельная функция для последовательности $\{\psi_n(z)\}$. Тогда $\psi(z) \in B_{A/2}$ и так как $S_n(\varphi, x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$, то из (14) находим

$$\varphi(x) = |\psi(x)|^2.$$

Так как, кроме того, все корни полиномов $P_n(\zeta)$ лежат в круге $|\zeta| \leq 1$, то корни функций $\psi_n(z)$, а следовательно, и функции $\psi(z)$ лежат в верхней полуплоскости.

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть (см. начало доказательства теоремы 3), что если показатель типа функции $\varphi(z)$ в точности равен $A(\tau(\varphi) = A)$, то функция $\psi(z) \in B_{A/2}$ леммы 1 определяется однозначно с точностью до постоянного множителя $e^{i\alpha}$ $(-\infty < < \alpha < \infty)$ при условии †, что все ее нули лежат в верхней полуплоскости: $y \geq 0$. Если же $\tau(\varphi) \leq A$, то она определяется с точностью до множителя $e^{i(\alpha+\beta z)}$, где $-\infty < \alpha < \infty$, $-A + \tau(\varphi) \leq \leq 2\beta \leq A - \tau(\varphi)$. Отсюда уже легко заключить, что построенная последовательность тригонометрических полиномов $\psi_n(z)$ не только компактна, но всегда сходится к функции $\psi(z)$, для которой $\tau(\psi) = 0,5\tau(\varphi)$.

§2. Вспомогательные предложения функционального анализа

Обозначим через C_∞ линейную совокупность всех непрерывных функций $\varphi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, принимающих, вообще говоря, комплексные значения и обладающих тем свойством, что для них имеет смысл:

$$\varphi(\infty) = \lim_{|t|\to\infty} \varphi(t).$$

Совокупность C_∞ можно рассматривать, как некоторое линейное нормирование (полное) пространства с нормой. Обычными методами функционального анализа (см. Банах [9], гл. IV, §4) устанавливается, что всякий линейный (т.е. аддитивный, однородный и непрерывный) функционал $\Phi(\varphi)$ $(\varphi \in C_\infty)$ допускает

---

†Это условие существенно хотя бы потому, что если $\varphi(x) = |\psi(x)|^2$, то также $\varphi(x) = |\psi_1(x)|^2$, где $\psi_1(x) = \frac{x-\overline{\alpha}}{x-\alpha}\psi(x)$ (α – какой-либо корень функции $\psi(z)$).

представление

$$\Phi(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)d\sigma(t) + \mu\varphi(\infty) \quad (\varphi \in C_\infty), \tag{15}$$

где $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ – комплексно-значная функция ограниченной вариации, а μ – некоторая константа.

В дальнейшем мы всякую функцию ограниченной вариации $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ будем считать нормированной так, что

$$\sigma(-\infty) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{\sigma(t+0) + \sigma(t-0)}{2}$$

$$(-\infty < t < \infty).$$

При этом условии функция $\sigma(t)$ в представлении (15) определяется однозначно и

$$\operatorname{Var} \sigma + |\mu| = \| \Phi \| = \sup_{\varphi \in C_\infty} \frac{|\Phi(\varphi)|}{\| \varphi \|}.$$

Мы часто будем пользоваться следующими предложениями:

А. *Пусть $L \subset C_\infty$ – некоторая линейная совокупность функций из C_∞ таких, что $\varphi(\infty) = 0$, а $\Phi(\varphi)$ – линейный функционал, определенный в L. Тогда существует функция ограниченной вариации $\sigma(t)$ такая, что*

$$\Phi(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)d\sigma(t) \quad (\varphi \in L), \tag{16}$$

где

$$\operatorname{Var} \sigma = \| \Phi \|_L = \sup_{\varphi \in L} \frac{|\Phi(\varphi)|}{\| \varphi \|}. \tag{17}$$

Для доказательства этого предложения достаточно продолжить функционал Φ с пространства L на все C_∞ с сохранением нормы и затем воспользоваться представлением (15). Чтобы получить также (17), остается заметить, что в данном случае $\mu = 0$, как это легко заключить из равенства $\| \Phi \| = \| \Phi \|_L$ и того, что

$$|\Phi(\varphi)| = |\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\sigma(t)| \leq \| \varphi \| \times$$

$$\times \operatorname{Var} \sigma = (\| \Phi \| - |\mu|) \| \varphi \| \quad (\varphi \in L).$$

В. *Пусть линейная совокупность $L \subset C_\infty$ содержит 1 и обладает тем свойством, что если $\varphi \in L$, то $\overline{\varphi} \in L$. Тогда всякий однородный аддитивный положительный функционал $\Phi(\varphi)$, определенный в L, допускает представление:*

$$\Phi(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\sigma(t) + \mu \varphi(\infty) \quad (\varphi \in L),$$

где $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ - неубывающая функция ограниченной вариации, а $\mu \geq 0$.

Заметим, что функционал $\Phi(\varphi)$ $(\varphi \in L)$ называется положительным, если $\Phi(\varphi) \geq 0$ при $\varphi(t) \geq 0$ $(-\infty \leq t \leq \infty)$.

Для доказательства предложения В заметим, что Φ - линейный функционал и

$$\| \Phi \|_L = \Phi(1).$$

В самом деле, если $\varphi \in L$ - вещественная функция, то

$$\| \varphi \| \cdot 1 \pm \varphi(t) \geq 0 \text{ при } -\infty < t < \infty,$$

а следовательно, в силу однородности, аддитивности и положительности функционала Φ имеем $\| \varphi \| \Phi(1) \pm \Phi(\varphi) \geq 0$, т. е. $|\Phi(\varphi)| \leq \Phi(1) \| \varphi \|$. Откуда для произвольной функции $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x) \in L$ имеем

$$|\Phi(\varphi)| = \max_\alpha |\Phi(\varphi_1) \cos \alpha +$$

$$+ \Phi(\varphi_2) \sin \alpha| = \max_\alpha |\Phi(\varphi_1 \cos \alpha + \varphi_2 \sin \alpha)| \leq$$

$$\leq \Phi(1) \max_{\alpha} \| \varphi_1 \cos\alpha + \varphi_2 \sin\alpha \| = \Phi(1) \| \varphi \| .$$

Обозначим той же буквой Φ продолжение функционала Φ на все C_∞ с сохранением нормы. Так как норма $\| \Phi \|$ расширенного функционала равна в данном случае Φ (1), то для его представления (15) имеем

$$\Phi(1) = \mathrm{Var}\, \sigma + |\mu|.$$

С другой стороны, из (15) следует, что

$$\Phi(1) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t) + \mu.$$

Откуда $\mu = |\mu| \geq 0$, а $\sigma(t)$ – неубывающая функция.

§3. Представление функций интегралами Фурье–Стилтьеса

1. Обозначим через R_A совокупность функций $f(x)[x \in (-A, A)]$, представимых в виде интеграла Фурье – Стилтьеса:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad [x \in (-A, A)], \tag{20}$$

где $\sigma(t) \quad (-\infty < t < \infty)$ – некоторая, вообще говоря, комплексно-значная функция ограниченной вариации.

На интервал $(-A, A)$ мы никаких ограничений не накладываем. Он может быть конечным открытым или замкнутым, либо бесконечным. Очевидно, R_A – линейная совокупность непрерывных функций; известно также (см. [10], гл. VI), что R_A – кольцо, т.е. если $f_1 \in R_A$ и $f_2 \in R_A$, то также $f_1 f_2 \in R_A$, при этом, если функциям f_1 и f_2 отвечают функции ограниченной вариации σ_1 и σ_2, то их произведению $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ отвечает функция ограниченной вариации:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(t-s) d\sigma_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(t-s) d\sigma_1(s).$$

Совокупность R_A можно рассматривать как линейное нормированное пространство (или даже – кольцо), полагая

$$\| f \|_A = \inf \operatorname{Var} \sigma,$$

где infimum распространяется на все функции σ, дающие представление (20).

Заметим, что в случае конечного A кольцо R_A является весьма широким классом функций. Так, например, в это кольцо входит любая абсолютно непрерывная функция $f(x)$ $[x \in (-A, A)]$, производная которой имеет суммируемый квадрат в интервале $(-A, A)$. В самом деле, такую функцию можно всегда доопределить для всех x, чтобы она была периодической функцией с периодом $T > 2A$ и чтобы она сохранила при этом свои прежние свойства в интервале $(-T/2, T/2)$, но тогда она, как известно, разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд, а это разложение является частным случаем представления (20)[†].

Следующая теорема дает критерий того, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу R_A и имела там норму $\leq M$.

Теорема 1[††]. *Для того чтобы непрерывная функция* $f(x)$ $[x \in (-A, A)]$ *допускала представление*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t), \tag{21}$$

где $\operatorname{Var} \sigma \leq M$, *необходимо и достаточно, чтобы при любых комплексных* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *и вещественных* $x_1 \in (-A, A), \ldots, x_n \in \in (-A, A)$ *выполнялось неравенство*[†††]

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)\right| \leq M \sup_{-\infty<t<\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ix_k t}\right|. \tag{22}$$

[†] Кстати, Г.Е.Шилов, опираясь на теорию нормированных колец, показал, что каждая функция $f(x) \in R_A$ $(A < \infty)$ при любом $T > 2A$ может быть разложена в интервале $(-A, A)$ в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд с периодом T. Отсюда и из теоремы N. Wiener [11] легко следует, что не всякая непрерывная функция входит в R_A.

[††] Для $A = \infty$ теорема была установлена иным путем S. Bochner [2] и может быть обобщена на случай функций на топологических группах [12].

[†††] Из доказательства теоремы будет вытекать, что достаточно, чтобы условие (22) выполнялось при x_i вида $r_i A$, где r_i – правильная дробь.

Доказательство. Необходимость условия (22) получается тривиально, ибо в силу (21)

$$|\sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)| = |\int_{-\infty}^{\infty} (\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ix_k t}) d\sigma(t)| \leq$$

$$\leq \operatorname{Var} \sigma \sup_{-\infty<t<\infty} |\sum_{k=1}^{n} c_k e^{ix_k t}|.$$

Для доказательства достаточности условия предположим сперва, что A – конечное число и интервал $(-A, A)$ замкнут. Введем в рассмотрение линейную совокупность L_A, состоящую из всех целых функций $\varphi(t)(-\infty < t < \infty)$ вида

$$\varphi(t) = \int_{-A}^{A} \Phi(x) e^{itx} dx \quad (-\infty < t < \infty), \tag{23}$$

где $\Phi(x)$ – произвольная измеримая интегрируемая функция в интервале $(-A, A)$.

Совокупность L_A можно рассматривать как подпространство в C_∞, ибо если $\varphi \in L_A$, то $\varphi(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Определим в L_A функционал $F(\varphi) = F_f(\varphi)$, полагая

$$F(\varphi) = \int_{-A}^{A} f(x)\Phi(x) dx. \tag{24}$$

Покажем, что если выполняется условие (22), то $F(\varphi)$ – линейный функционал в $L_A \subset C_\infty$ и

$$\| F \|_{L_A} = \sup_{\varphi \in L_A} \frac{|F(\varphi)|}{\| \varphi \|} \leq M \quad (\| \varphi \| = \max_{-\infty<t<\infty} |\varphi(t)|).$$

Образуем для произвольно выбранной функции $\varphi \in L_A \subset B_A$ полином Левитана:

$$S_n(\varphi, t) = \sum_{k=-n}^{n} h E_h(kh) e^{ikht} \quad (h = \frac{A}{n}).$$

В силу (22)

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)f(kh)\right| \le M \sup_{-\infty<t<\infty} |S_n(\varphi,t)| \le M \parallel \varphi \parallel .$$

С другой стороны, при $n \to \infty$ левая часть первого неравенства, как было выяснено в замечании §1 (см. формулу (12)), стремится к выражению (24).

Таким образом, действительно, $|F(\varphi)| \le M \parallel \varphi \parallel$ $(\varphi \in \dot{L}_A)$.

Применяя к функционалу $F(\varphi)$ предложение A (§2), получаем

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)d\sigma(t), \tag{25}$$

где Var $\sigma \le M$.

Вставляя в левую часть (25) выражения для φ из (23) и сопоставляя с (24), находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-A}^{A} \Phi(x)e^{ixt}dx\right] d\sigma(t) =$$

$$= \int_{-A}^{A} \Phi(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\sigma(t)\right] dx = \int_{-A}^{A} \Phi(x)f(x)dx.$$

Ввиду того что в этом равенстве $\Phi(x)$ – произвольная измеримая интегрируемая в интервале $(-A, A)$ функция, заключаем из него, что

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}d\sigma(t) \quad (-A \le x \le A). \tag{26}$$

Таким образом, теорема 1 для случая конечного замкнутого интервала $(-A, A)$ доказана. Случай открытого конечного интервала аналогичен случаю бесконечного интервала. Поэтому мы остановимся только на последнем случае.

Итак, пусть функция $f(x)$ задана на всей вещественной оси и условие (22) выполняется при любых комплексных $c_1, c_2, ..., c_n$ и произвольных вещественных $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n = 1, 2, ...)$.

Обозначим через L_∞ логическую сумму всех пространств L_A, где A принимает любое положительное значение. Таким образом, некоторая функция $\varphi \in L_\infty$, если при достаточно большом A она допускает представление (23). Исходя из этого представления функции $\varphi \in L_\infty$, определим по-прежнему формулой(24) функционал $F(\varphi)$. Этот функционал будет уже линейным функционалом во всем L_∞ с нормой $\| F \|_{L_\infty} \leq M$ и, следовательно, по лемме A будет допускать представление (25) во всем L_∞. Отсюда в силу приведенных выше рассуждений будет следовать, что равенство (26) имеет место в любом конечном интервале $(-A, A)$, а следовательно, вообще

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-\infty \leq x \leq \infty),$$

где $\operatorname{Var} \sigma \leq \| f \|_\infty$. Так же , как раньше, заключаем, что $\| f \|_\infty < < M$.

Теорема доказана.

2. Так как в случае конечного интервала $(-A, A)$ кольцо R_A по сути не зависит от того, открыт или замкнут интервал $(-A, A)$ (кольца, соответствующие одно – открытому, а другое – замкнутому интервалу, состоят из одних и тех же функций, если последние рассматривать внутри интервала $(-A, A)$), то мы впредь при $A < \infty$ будем предполагать интервал $(-A, A)$ замкнутым (если только не будет оговорено противное).

Лемма 2. *Пусть f – некоторая фиксированная функция из R_A. Если функция $\varphi(z) \in B_A$, то интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\sigma(t) \tag{27}$$

не зависит от выбора функции σ, дающей представление (21) функции f.

Доказательство. В самом деле, образуем для функции $\varphi(z)$ полиномы Левитана

$$S_n(\varphi, t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k^{(n)} e^{i\frac{kA}{n}t} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как полиномы $S_n(\varphi, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены на действительной оси и сходятся к $\varphi(t)$ равномерно на всякой конечной части плоскости, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\sigma(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\varphi, t) d\sigma(t).$$

С другой стороны, если функция $\sigma(t)$ дает представление (21), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_n(\varphi, t) d\sigma(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k^{(n)} f(k\frac{A}{n}) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и, следовательно, не зависит от выбора функции σ. Отсюда следует лемма 2.

Если $\varphi \in L_A$, то интеграл (27) совпадает с функционалом $F_f(\varphi)$, построенным при доказательстве теоремы 1. Поэтому положим, вообще,

$$F_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\sigma(t), \tag{28}$$

где σ – какая-либо функция ограниченной вариации, дающая представление (21) функции f.

Линейную совокупность B_A, подобно совокупности $L_A \subset B_A$, будем рассматривать как линейное нормированное пространство с равномерной нормой

$$\| \varphi \| = \sup_{-\infty < t < \infty} |\varphi(t)|.$$

При таком условии $F_f(\varphi)$ $(\varphi \in B_A)$ будет линейным функционалом в B_A; кроме того,

$$\| F_f \|_{L_A} = \| F_f \|_{B_A} = \| f \|_A. \tag{29}$$

В самом деле, в силу (28)

$$\sup_{\varphi\in L_A} \frac{|F_f(\varphi)|}{\|\varphi\|} \leq \sup_{\varphi\in B_A} \frac{|F_f(\varphi)|}{\|\varphi\|} \leq \inf \operatorname{Var} \sigma = \| f \|_A. \tag{30}$$

С другой стороны, в силу предложения А существует такое $\sigma_0(t)$, что

$$F_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) d\sigma_0(t) \quad (\varphi \in L_A) \tag{31}$$

и

$$\operatorname{Var} \sigma_0 = \| F_f \|_{L_A}.$$

Повторяя далее рассуждения, проводившиеся при доказательстве теоремы 1, выведем из (31), что

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma_0(t) \quad (-A \leq x \leq A).$$

Откуда

$$\| f \|_A \leq \operatorname{Var} \sigma_0.$$

Сопоставляя с (30), находим (29), а также, что

$$\| f \|_A = \operatorname{Var} \sigma_0.$$

Этим самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. *Среди представлений*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-A \leq x \leq A) \tag{32}$$

функции $f(x) \in R_A$ $(0 < A < \infty)$ *всегда найдется по крайней мере одно представление, для которого*

$$\operatorname{Var} \sigma = \| f \|_A. \tag{33}$$

Представления (32), удовлетворяющие условию (33), будем называть главными.

В силу того, что функционал $F_f(\varphi)$ $(\varphi \in B_A)$ изображается интегралом (28), он обладает тем свойством†, что если последовательность $\{\varphi_n\} \subset B_A$ равномерно ограничена на всей вещественной оси и сходится к $\varphi(x)$ равномерно на каждой конечной части этой оси, то

$$F_f(\varphi_n) \to F_f(\varphi) \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда легко следует

Лемма 3. *Для всякого* $f \in R_A$ $(0 < A < \infty)$ *существует целая функция* $\varphi_0(t) \in B_A$ *такая, что*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |\varphi_0(t)| = 1, \quad F_f(\varphi_0) = \| f \|_A. \tag{34}$$

Доказательство. В самом деле, в силу (29) существует последовательность $\{\varphi_n\} \subset B_A$ такая, что

$$\| \varphi_n \| \leq 1, \quad F_f(\varphi_n) \to \| f \|_A \text{ при } n \to \infty.$$

Эта последовательность компактна в смысле равномерной сходимости на каждом конечном интервале действительной оси (см. §1, p. 2). Пусть φ_0 будет предельной функцией некоторой подпоследовательности $\{\varphi_{n_\nu}\}$. Тогда

$$\| \varphi_0 \| \leq 1, \quad F_f(\varphi_0) = \lim_{\nu\to\infty} F_f(\varphi_{n_\nu}) = \| f \|_A.$$

Так как, кроме того,

$$F_f(\varphi_0) \leq \| F_f \| \cdot \| \varphi_0 \| = \| f \|_A \cdot \| \varphi_0 \|,$$

то

$$\| \varphi_0 \| = \sup_{-\infty<t<\infty} \varphi_0(t) = 1.$$

Теорема 3. *Для всякой функции* $f(x) \in R_A$ $(0 < A < \infty)$ *имеет место по крайней мере один из двух случаев*††: *в одном*

† Нетрудно показать, что это свойство характеристично для функционалов $F_f(\varphi)$ $(\varphi \in B_A)$, т.е. если некоторый линейный функционал $F(\varphi)$ $(\varphi \in B_A)$ обладает этим свойством, то найдется такое $f \in R_A$, что $F(\varphi) = F_f(\varphi)$ $(\varphi \in$ $\in B_A)$.

†† Таким образом, эти случаи, вообще говоря, не исключают друг друга.

случае каждое из главных представлений функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x+\alpha)t} d\tau(t), \tag{35}$$

где константы α $(-A \leq \alpha \leq A)$ и β $(-\infty < \beta < \infty)$ сохраняют одно и то же значение для всех главных представлений, а $\tau(t)$ – неубывающая функция, изменяющаяся вместе с главным представлением; в другом – главное представление функции единственно, и функция σ в этом представлении есть чистая функция скачков, скачки которой расположены в нулях некоторой целой функции $\varphi \in B_A$.

Доказательство. Действительно, пусть функция $\sigma_0(t)$ дает главное представление функции $f(\text{Var } \sigma_0 = \| f \|_A)$, а $\varphi_0 \in B_A$ – функция, для которой имеет место (34).

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) d\sigma_0(t) = \text{Var } \sigma_0 \sup_{-\infty<t<\infty} |\varphi_0(t)| = 1. \tag{36}$$

Так как при любых $a < b$

$$\left|\int_a^b \varphi_0(t) d\sigma(t)\right| \leq \int_a^b |\varphi_0(t)| \cdot |d\sigma(t)| \leq \int_a^b |d\sigma(t)| = \text{Var}_a^b \sigma,$$

то из (36) следует, что

$$\int_{-\infty}^{t} \varphi_0(t) d\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^{t} |\varphi_0(t)| \cdot |d\sigma_0(t)| =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} |d\sigma_0(t)| = \tau(t) \quad (-\infty < t < \infty). \tag{37}$$

Рассмотрим 2 случая:

1. $|\varphi_0(t)| \equiv 1$ $(-\infty < t < \infty)$. В этом случае целая функция $\varphi_0(z)$ не имеет нулей, ибо если бы в некоторой точке $z(\mathrm{Im} z \neq 0)$ функция $\varphi_0(z)$ обращалась бы в нуль, то в сопряженной точке она бы имела полюс (согласно принципу симметрии Римана–Шварца), что невозможно. Таким образом, $\varphi_0(z) = e^{g(z)}$, где $g(z)$ – целая функция. Принимая еще во внимание, что функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа $(\tau(\varphi) \leq A)$ и $|\varphi(t)| = 1$ $(-\infty < t < < \infty)$, заключаем, что $g(z)$ – линейная функция с чисто мнимыми коэффициентами, т.е.

$$\varphi_0(z) = e^{-i(\alpha z+\beta)}, \quad \text{где} \quad -A \leq \alpha \leq A, \quad -\infty < \beta < \infty.$$

Тогда в силу (37)

$$e^{i\beta} \int_{-\infty}^{t} e^{i\alpha t} d\tau(t) = e^{i\beta} \int_{-\infty}^{t} e^{i\alpha t} \varphi_0(t) d\sigma_0(t) = \int_{-\infty}^{t} d\sigma_0(t),$$

откуда следует представление (33).

2. $|\varphi_0(z)| \not\equiv 1$ $(-\infty < t < \infty)$. В этом случае из (36) вытекает, что $\sigma_0(t)$ – есть чистая функция скачков, скачки которой расположены в нулях целой функции

$$\chi(t) = 1 - \varphi_0(t)\overline{\varphi_0(t)} \ \ (-\infty < t < \infty).$$

Так как функция $\chi(z) \in B_{2A}$ и неотрицательна при $-\infty < t < < \infty$, то по лемме 1 существует функция $\psi(z) \in B_A$ такая, что

$$\chi(t) = |\psi(t)|^2 \quad (-\infty < t < \infty).$$

Таким образом, для окончания доказательства теоремы осталось показать, что скачки функции $\sigma_0(t)$, будучи расположены в нулях функции $\psi(z) \in B_A$, однозначно определяются равенством

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma_0(t) \ \ (-A \leq x \leq A).$$

Последнее же имеет место в силу следующего простого предложения †.

Лемма 4. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x} \quad (-A \leq x \leq A), \tag{38}$$

где

$$\sum_{1}^{\infty} |c_n| < \infty,$$

а λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *суть вещественные корни некоторой целой функции* $\psi(z)$ *экспоненциального типа с показателем* $\tau(\psi) \leq A$, *обладающей тем свойством, что*

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{|\psi(x)|}{|x|} < \infty. \tag{39}$$

При этих условиях коэффициенты c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *однозначно определяются функциями* $f(x)$ *и* $\psi(z)$.

Доказательство. Перепишем (38) в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma_0(t) \quad (-A \leq x \leq A), \tag{38$^{\text{bis}}$}$$

где

$$\sigma_0(t) = \sum_{\lambda_n < t} c_n \quad (-\infty < t < \infty).$$

Положим

$$\omega(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t) - \psi(\zeta)}{t - \zeta} d\sigma_0(t) \quad (\mathrm{Im}\ z \neq 0),$$

где $\sigma_0(t)$ – какая-либо функция, дающая представление (38^{bis}). Так как в силу условия (39) функция $\frac{\psi(z)-\psi(\zeta)}{z-\zeta}$ принадлежит классу B_A,

† Для окончания доказательства теоремы 3, очевидно, нам нужен только тот частный случай леммы 4, когда целая функция $\psi(z) \in B_A$.

то согласно лемме 2 функция $\omega(\zeta)$ не зависит от выбора функции σ, дающей представление (38^{bis}).

С другой стороны, так как скачки функции σ_0 расположены в нулях функции $\psi(t)$, то

$$\omega(\zeta)+\psi(\zeta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_0(t)}{t-\zeta}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\psi(t)d\sigma_0(t)}{t-\zeta}=0.$$

Откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_0(t)}{t-\zeta}=\sum_{1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k-\zeta}=-\frac{\omega(\zeta)}{\psi(\zeta)},$$

и, следовательно, коэффициенты c_k $(k=1,2,...)$ однозначно определяются как residus функции ω/ψ, соответствующие полюсам λ_k $(k=1,2,...)$.

Таким образом, лемма 4, а следовательно, и теорема 3 доказаны.

3. Как известно, функция $f(x)$ $[x\in(-A,A)]$ называется эрмитовой, если $f(-x)=\overline{f(x)}$ при $x\in(-A,A)$.

Легко показать, что если функция $f(x)\in R_A$ эрмитова, то в каждом ее главном представлении функция σ вещественна и, в частности, в теореме 3 в (35) можно положить

$$\alpha=0,\quad e^{i\beta}=\pm1.$$

В самом деле, если главное представление эрмитовой функции $f(x)$ имеет вид (35), то из него вытекает, что

$$f(x)=\frac{f(x)+\overline{f(-x)}}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\cos(\alpha t+\beta)d\tau(t).$$

Откуда по определению величины $\| f\|_A$ будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\cos(\alpha t+\beta)|d\tau(t)\geq\| f\|_A=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau(t),$$

и так как здесь знак > невозможен, то либо $\alpha = 0, \cos\beta = \pm 1$, либо скачки функции $\tau(t)$ сосредоточены в корнях одного из двух уравнений

$$\cos(\alpha t + \beta) - 1 = 0,$$

$$\cos(\alpha t + \beta) + 1 = 0.$$

В том и другом случае, очевидно,

$$f(x) = \pm \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\tau(t).$$

Если же главное представление функции $f(x)$ не имеет вида (35), то по теореме 3 оно единственно. С другой стороны, в силу его

$$f(x) = \frac{f(x) + \overline{f(-x)}}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\left[\frac{\sigma(t) + \overline{\sigma}(t)}{2}\right],$$

и так как

$$\mathrm{Var}\left[\frac{\sigma + \overline{\sigma}}{2}\right] \le \mathrm{Var}\ \sigma = \| f \|_A,$$

то непременно

$$\frac{\sigma(t) + \overline{\sigma}(t)}{2} = \sigma(t) \quad (-\infty < t < \infty),$$

т.е. $\sigma(t)$ – вещественная функция.

4. Ниже мы приводим критерий того, чтобы функция $f(x)$ допускала представление (35), в котором $\alpha = 0, e^{i\beta} = 1$. Для этого нам понадобится понятие эрмитово-положительной функции.

Функция $f(x)$ $[x \in (-A, A)]$ † называется эрмитово-положительной (сокращенно э.п.), если при любых вещественных $x_1 \in (-A, A), ..., x_n \in (-A, A)$ и любых комплексных $\xi_1, ..., \xi_n$ $(n = 1, 2, ...)$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\, \xi_j \overline{\xi}_k \ge 0. \tag{40}$$

† Интервал $(-A, A)$ может быть конечным или бесконечным.

Легко видеть, что э.п. функция эрмитова, т.е. $f(-x) = \overline{f(x)}$ $[x \in (-A, A)]$. Если положить в (40) $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$; $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \eta$, то найдем, что

$$f(0)|\xi|^2 + 2\mathrm{Re}\ \{[f(x) - f(y)]\xi\eta\} + 2[f(0) - \mathrm{Re}\ f(x-y)]\ |\eta|^2 \geq 0.$$

Откуда

$$|f(x) - f(y)| \leq 2[f(0) - \mathrm{Re}\ f(x-y)].$$

Последнее неравенство показывает, что если у э.п. функции $f(x)$ ее вещественная часть Re $f(x)$ непрерывна в точке 0, то функция $f(x)$ равномерно непрерывна в интервале $(-A, A)$†. Ввиду этого при $A < \infty$ такую функцию можно всегда считать заданной и непрерывной в замкнутом интервале $(-A, A)$, полагая

$$f(\pm A) = \lim_{x \to \pm A} f(x).$$

Теперь мы сформулируем упомянутый выше критерий следующим образом.

Теорема 4. *Для того чтобы функция* $f(x)[x \in (-A, A)]$ *допускала представление*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad [x \in (-A, A)]. \tag{41}$$

где $\sigma(t)$ *– некоторая неубывающая функция ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывной эрмитово-положительной функцией.*

Эта теорема была установлена нами ранее [3]††. Систематичности ради, а также с целью выяснения естественности методов этой статьи мы докажем ее сейчас тем же методом, что и теорему 1.

---

†Ср. с [13].

††Для случая $A = \infty$ теорема была доказана S. Bochner [1]. Опираясь на теорему S. Bochner, автор [3] доказал теорему для случая $A < \infty$. В связи с этим интересно заметить, что в приводимом ниже доказательстве теорема 4 сперва доказывается для $A < \infty$, а затем уже для $A = \infty$.

Доказательство. Так как из (41) следует непрерывность функции $f(x)$, а также тождество

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\xi_j\xi_k = \int_{-\infty}^{\infty} |\sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{ix_jt}|^2 d\sigma(t),$$

то необходимость условия очевидна.

Для доказательства достаточности этого условия рассмотрим сперва случай, когда $A < \infty$ (и, следовательно, функцию $f(x)$ можно считать заданной и непрерывной в замкнутом интервале $(-A, A)$).

Введем в рассмотрение линейную совокупность $L_A^* \subset B_A$ функций $\varphi^*(t)$ вида

$$\varphi^*(t) = c + \int_{-A}^{A} \Phi(x) e^{ixt} dx,$$

где c – произвольная комплексная константа, а $\Phi(x)$ $(-A \leq x \leq A)$ – произвольная интегрируемая функция[†].

Далее положим

$$F_f(\varphi^*) = cf(0) + \int_{-A}^{A} f(x)\Phi(x)dx. \tag{42}$$

Покажем, что аддитивный однородный функционал $F_f(\varphi^*)$ положителен. В самом деле, если

$$\varphi^*(t) = c + \varphi(t) \geq 0 \quad (-\infty < t < \infty),$$

где $\varphi \in L_A$, то полином Левитана

$$S_n(\varphi^*, t) = c + S_n(\varphi, t) =$$

$$= c + \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)e^{ikht} \quad (h = A/n)$$

[†] Таким образом, $\varphi^* = c + \varphi$, где $\varphi \in L_A$ (см. §1).

не отрицателен при вещественном t . Следовательно, по теореме Fejer–Riesz [8] существует тригонометрический полином

$$T_n(t) = \sum_{j=0}^{n} \xi_j e^{ijkt}$$

такой, что

$$c + \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)e^{ikht} = |T_n(t)|^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \xi_j \overline{\xi}_k e^{i(j-k)ht}.$$

Тогда

$$cf(0) + \sum_{k=-n}^{n} hE_h(kh)f(kh) = \sum_{j,k=1}^{n} f((j-k)h)\xi_j \overline{\xi}_k.$$

Так как f – э.п. функция, то левая часть равенства неотрицательна; с другой стороны, правая часть этого равенства при $n \to \infty$ стремится к (42) (см. формулу (12) замечания §1), чем и доказана положительность функционала $F_f(\varphi^*)$.

В силу предложения В (§2) найдется такая неубывающая функция $\sigma(t)$, что для любой функции

$$\varphi(t) = \int_{-A}^{A} \Phi(x)e^{ixt}dx \in L_A$$

будет иметь место равенство

$$F_f(\varphi) = \int_{-A}^{A} \Phi(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)d\sigma(t).$$

Отсюда заключаем, что

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}d\sigma(t) \quad (-A \leq x \leq A).$$

Таким образом, для случая $A < \infty$ теорема доказана. Случай $A = \infty$ легко сводится к случаю $A < \infty$ подобно тому, как это сделано при доказательстве теоремы 1.

5. Сопоставляя теоремы 1 и 4, а также сказанное в рубрике 3, приходим к следующему заключению.

Теорема 5. *Если непрерывная эрмитова функция $f(x) \in R_A$, равно как и функция $-f(x)$, не являются э.п. функциями, то главное представление функции $f(x)$ единственно и имеет вид*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x} \quad [x \in (-A, A)],$$

где коэффициенты c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ вещественны[†], *а показатели λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ суть вещественные корни некоторой целой функции $\varphi(z) \in B_A$.*

6. Если непрерывная функция $f(x)$ $(-A \leq x \leq A)$ эрмитово-положительна, то по теореме 4 она допускает представление

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-A \leq x \leq A),$$

где $\sigma(t)$ – некоторая неубывающая функция, и все такие представления и только такие представления являются главными. Очевидно также, что в этом случае $\| f \|_A = f(0)$.

Возникают вопросы:

1) Когда главное представление непрерывной э.п. функции единственно ?

2) Если главное представление непрерывной э.п. функции не единственно[††], то каков общий вид главного представления, каковы наиболее замечательные свойства этих представлений и т.д.?

Эти вопросы аналогичны классической проблеме моментов. Их первое решение было опубликовано в уже цитировавшемся ис-

[†] И, конечно, удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \| f \|_A$.

[††] В этом случае главных представлений имеется континуум.

следовании автора [3]. В настоящее время результаты этого исследования существенно дополнены А.П. Артеменко и автором. Полное изложение всех полученных в этом направлении результатов должно составить содержание отдельного мемуара. Приведем, однако, следующее следствие этих исследований для кольца R_A.

Теорема 6. *Для каждой функции $f(x) \in R_A$ при произвольном $\varepsilon > 0$ существует бесчисленное множество представлений вида*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x} \quad [x \in (-A, A)],$$

где

$$\sum_{1}^{\infty} |c_n| \leq \| f \|_A + \varepsilon,$$

а числа λ_n $(n = 1, 2, ...)$ суть вещественные корни некоторой целой функции экспоненциального типа, показатель которой $\tau(\varphi) = A$.

7. В дополнение к теореме 4 заметим еще, что если э.п. функция $f(x)$ $(-A < x < A)$ не непрерывна, но измерима, то, как можно показать, она допускает разложение

$$f(x) = f_0(x) + f_c(x), \tag{43}$$

где $f_0(x)$ – э.п. функция, почти всюду равная нулю, а $f_c(x)$ – непрерывная э.п. функция†. Возможно, что при этом всегда для $A = \infty$ функция $f_0(x)$ равна нулю всюду, за исключением счетного числа точек!

Разложение, аналогичное (43), можно также получить для измеримых функций $f(x)$ $(-A < x < A)$, удовлетворяющих условию (22) теоремы 1.

†Для случая $A = \infty$ это предложение было доказано А П Артеменко, а в общем случае $(0 < A \leq \infty)$ автором.

Список литературы

[1] *Bochner S.* Fouriersche Integrale. – Leipzig, 1932.

[2] *Bochner S.* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1934. – **11**, N 271.

[3] *Крейн М.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1940. – **26**, № 1.

[4] *Бернштейн С.* Экстремальные свойства полиномов. – М.: ОНТИ, 1937. – Гл.III , §10. – С.134.

[5] *Левитан Б.* Об одном обобщении неравенств С.Н. Бернштейна и H. Bohr's // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**, № 4.

[6] *Paley R.E.A.C., Wiener N.* Fourier transforms in the complex domain. – 1934. – P.13.

[7] *Boas R.P.* Remarks on a theorem of B. Lewitan // Мат. сб. – 1939. – **5 (47)**. – С.185–187.

[8] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: ОНТИ, 1938. – **11**.

[9] *Banach S.* Theorie des opérations linéares. – Warszawa, 1932.

[10] *Гливенко В.* Интеграл Стилтьеса. – М.: ОНТИ, 1936.

[11] *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: ГОНТИ, 1939.

[12] *Крейн М.* Об одном кольце функций на топологической группе // Докл. АН СССР. – 1940. – **29**, № 4.

[13] *Райков Д.* О положительно определенных функциях // Там же. – **26**, № 9.

[14] *Райков Д.* Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой // Там же. – **28**, № 4.

[15] *Повзнер А.* О позитивных функциях на абелевой группе // Там же.

К ТЕОРИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА†

(Известия АН СССР. Сер. матем. – 1947. – № 11)

Реферат

В статье исследуются целые функции, логарифм модуля которых имеет положительную гармоническую мажоранту как в верхней, так и в нижней полуплоскости. К этому классу функций принадлежат, в частности, целые функции $f(z)$ с простыми вещественными нулями, обладающие тем свойством, что $f^{-1}(z)$ разлагается в простую сумму элементарных дробей. Оказывается, что эти функции всегда не выше экспоненциального типа и обладают особой регулярностью роста.

При построении теории эрмитовых операторов с индексом дефекта (1,1) и ее приложений к обобщенной проблеме моментов [1] автору пришлось пользоваться различными положениями теории функций комплексного переменного и, в частности, использовать ряд новых характеристик некоторых классов целых функций экспоненциального типа.

---

† Развитие и применение результатов этой статьи даны в работах автора: Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m,m) // Укр. мат. журн. – 1949. – № 2. – С.1–66; К теории целых матриц-функций экспоненциального типа // Там же. – 1951.– **3**, № 2. – С.164–173. (***Прим. ред.***)

Так как эти характеристики, возможно, сами по себе представляют некоторый интерес, а опубликование развернутого изложения полученных автором результатов по спектральной теории эрмитовых операторов по ряду обстоятельств затягивается, автор посвящает этим характеристикам настоящую статью.

§1. Функции класса (N) в единичном круге

1. В дальнейшем нам понадобятся некоторые из результатов R.Nevanlinna ([2] и [3]) относительно класса функций, который определяется ниже.

Пусть G – некоторая односвязная область комплексной плоскости. Условимся говорить, что функция $f(z)$ $(z \in G)$ есть функция класса (N) в G, если она голоморфна внутри G и $\overset{+}{\log}|f(z)|$[†] имеет в G гармоническую мажоранту. Последнее условие означает, что найдется по крайней мере одна гармоническая в G функция $U(z)$, для которой

$$\overset{+}{\log}|f(z)| \leq U(z) \quad (z \in G).$$

Очевидно, при взаимно однозначном конформном отображении области G на некоторую область G' всякая функция класса (N) в G перейдет в некоторую функцию класса (N) в G'.

Как показал R.Nevanlinna, для того чтобы некоторая функция $F(z)$ $(|z| < 1)$ была класса (N) в единичном круге, необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее представление:

$$F(z) = \varepsilon B(z) \exp\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\sigma(t) \right) \quad (|z| < 1), \tag{1}$$

где $|\varepsilon| = 1$, $\sigma(t)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ – некоторая вещественная функция ограниченной вариации, а $B(z)$ – функция Бляшке. т.е. ко-

† $\overset{+}{\log} a = \frac{1}{2}(|\log a| + \log a) \quad (a > 0)$.

нечное или бесконечное произведение вида

$$B(z) = z^{\lambda} \Pi \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (|z| < 1), \tag{2}$$

где натуральное $\lambda \geq 0$, а $|\alpha_k| < 1 \quad (k = 1, 2, \ldots)$ и в случае бесконечного произведения †

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < \infty. \tag{3}$$

Другим условием того, чтобы голоморфная функция $F(z)$ $(|z| < 1)$ была класса (N) в единичном круге, является

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(re^{i\varphi})| d\varphi < \infty. \tag{4}$$

Мы будем также пользоваться результатом В.И. Смирнова [4] (см. также [3], с. 102), согласно которому для того чтобы голоморфная функция $F(z) \quad (z \in G)$ была класса (N) в G, достаточно, чтобы ее вещественная (или мнимая) часть сохраняла в G знак.

Заметим, наконец, что совокупность всех функций класса (N) в некоторой области образует линейное кольцо; при этом, если две функции входят в это кольцо и их частное голоморфно в G, то и это частное входит в кольцо.

2. После этих предварительных замечаний докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Для всякой функции Бляшке $B(z)$ найдется возрастающая и стремящаяся к единице последовательность положительных чисел $\{r_n\}$ такая, что равномерно относительно φ*

$$\lim_{n \to \infty} (1 - r_n) \log |B(r_n e^{i\varphi})| = 0 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi). \tag{5}$$

† Как известно, условие (3) является необходимым и достаточным условием сходимости произведения (2).

Доказательство. Положим

$$m(r) = \min_{0\leq\varphi\leq 2\pi} |B(re^{i\varphi})| \quad (0 < r < 1).$$

Так как

$$\left|\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_k z}\right|^2 = 1 - \frac{(1-a_k^2)(1-r^2)}{|1-\overline{\alpha}_k z|^2} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{(1-a_k^2)(1-r^2)}{(1-a_k r)^2} = \left(\frac{r-a_k}{1-a_k r}\right)^2,$$

где $r = |z| < 1, \quad a_k = |\alpha_k| \quad (k = 1, 2, ...)$, то, согласно (2),

$$r^{-\lambda} m(r) \geq \prod_1^\infty \left|\frac{r-a_k}{1-a_k r}\right| = B_1(r) \quad (0 < r < 1),$$

где

$$B_1(z) = \prod_1^\infty \frac{a_k - z}{1 - a_k z} \quad (|z| < 1).$$

Рассмотрим, с другой стороны, функцию

$$\varphi(\zeta) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_k}\right),$$

где

$$\zeta_k = \frac{1+a_k}{1-a_k} > 0 \quad (k = 1, 2, ...).$$

Так как

$$\sum_1^\infty \frac{1}{\zeta_k} = \sum_1^\infty \frac{1-a_k}{1+a_k} < \sum_1^\infty (1-a_k) < \infty,$$

то $\varphi(\zeta)$ есть целая функция от ζ нулевого рода и, следовательно, минимального типа. Таким образом (см. [5]), при любом $\theta \quad (0 \leq \leq \theta < 2\pi)$

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup \frac{\log|f(\rho e^{i\theta})|}{\rho} = 0.$$

В частности, так как $f(-\rho) > 1 \quad (\rho > 0)$, то

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\log f(-\rho)}{\rho} = 0$$

и, следовательно, найдутся такие $\rho_1 < \rho_2 < \cdots \quad (\rho_n \to \infty)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|f(\rho_n)|}{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|f(-\rho_n)|}{\rho_n} = 0.$$

С другой стороны, как нетрудно проверить,

$$B_1(z) = \frac{f(\zeta)}{f(-\zeta)} \quad \text{при} \quad z = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}.$$

Стало быть, полагая

$$r_n = \frac{\rho_n - 1}{\rho_n + 1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

найдем, что

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\rho_n + 1} \log\left|\frac{f(\rho_n)}{f(-\rho_n)}\right| = \lim_{n\to\infty} (1 - r_n) \log B_1(r_n),$$

и так как

$$\lambda \log r + \log|B_1(r)| \le \log m(r) \le \log|B(re^{i\varphi})| < 0$$

$$(0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r < 1),$$

то лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $B(z)$ - функция Бляшке, а Γ - некоторый некасательный гладкий путь, идущий внутри единичного круга $|z| < 1$ в точку 1. Тогда*

$$\lim_{z\to 1} \sup |1 - z| \log|B(z)| = 0 \quad (z \in \Gamma). \tag{6}$$

Доказательство. В самом деле, верхний предел, стоящий в левой части равенства, во всяком случае неположителен. С другой стороны, если $\{r_n\}$ - последовательность такая, что имеет место (5), то, определяя числа $z_n \in \Gamma$ так, чтобы $|z_n| = r_n$ (начиная с некоторого значения натурального n), будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} |1 - z_n| \log|B(z_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{|1 - z_n|}{1 - r_n} \lim (1 - r_n) \log|B(z_n)| = 0,$$

ибо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|1-z_n|}{1-r_n}=\cos\theta,$$

где $\theta=\theta(\Gamma)$ – угол, образуемый касательной к Γ в точке 1 с осью X.

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ – функция класса (N) в единичном круге, а Γ и $\theta=\theta(\Gamma)$ имеют вышеуказанный смысл. Тогда*

$$\limsup_{z\to 1}|1-z|\log|F(z)|=d\cos\theta \quad (z\in\Gamma), \tag{7}$$

где число d не зависит от выбора пути Γ.

Доказательство. Согласно представлению (1),

$$\log F(z)=\log B(z)+\frac{d}{2}\frac{1+z}{1-z}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma_0(t)+i\log\varepsilon,$$

где d – удвоенный скачок функции $\sigma(t)$ в точке 0 ($2d=\sigma(+0)-$ $-\sigma(-0)$), а $\sigma_0(t)$ – соответственно измененная функция $\sigma(t)$. Таким образом, если положить

$$F_1(z)=F(z)/\varepsilon B(z),$$

то

$$|1-z|\log|F_1(z)|=\frac{d}{2}|1-z|+d\cos\varphi+|1-z|\mathrm{Re}\,\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d\sigma_0(t)\Big),$$

где φ определяется из равенства

$$z=1-\rho e^{i\varphi}\quad \Big(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\Big).$$

Заметим, что $\varphi\to\theta$ при $z\to 1$ $(z\in\Gamma)$.

С другой стороны, очевидно, что, каково бы ни было $\delta>0$ $(\delta<\pi)$ при $z\in\Gamma$,

$$\limsup_{z\to 1}|1-z|\mathrm{Re}\,\Big(\int_{-\pi}^{\pi}\Big)\le\limsup_{z\to 1}\Big|\int_{-\pi}^{\pi}\Big|=\limsup_{z\to 1}\Big|(1-z)\int_{-\delta}^{\delta}\Big|\le$$

$$\leq 2 \lim_{z\to 1} \frac{|1-z|}{1-|z|} \int_{-\delta}^{\delta} d\sigma_0(t) = \frac{2}{\cos\theta}[\sigma_0(\delta) - \sigma_0(-\delta)],$$

а так как последняя величина сколь угодно мала вместе с δ, то

$$\lim_{z\to 1} |1-z| \log |F_1(z)| = d\cos\theta \quad (z \in \Gamma).$$

Это равенство в соединении с (6) дает (7).

Теорема доказана.

Замечание 1. Из наших рассуждений нетрудно усмотреть, что предельное равенство

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \rho \log |F_1(1-\rho e^{i\theta})| = d\cos\theta$$

имеет место равномерно относительно θ, изменяющегося в каком-либо интервале $-\gamma \leq \theta \leq \gamma \quad (0 < \gamma < \frac{\pi}{2})$ и, следовательно, относительно тех же θ предельное равенство (7) имеет место равномерно сверху, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ и $\gamma \quad (0 < \gamma < \frac{\pi}{2})$ найдется такое $\rho_\varepsilon > 0$, что

$$\rho \log |F(1-\rho e^{i\theta})| \leq d\cos\theta + \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < \rho < \rho_\varepsilon, \quad |\theta| \leq \gamma.$$

§2. Функции класса (N) в полуплоскости

1. Пусть $f(z) \quad (\operatorname{Im} z > 0)$ – функция класса (N) в верхней полуплоскости. Образуем функцию

$$F(\zeta) = f(z), \quad z = i\frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad \zeta = \frac{z-i}{z+i}, \tag{8}$$

которая, очевидно, будет класса (N) в единичном круге.

Заметив теперь, что преобразование $\zeta = \zeta(z)$ переводит всякий луч $z = re^{i\varphi} \quad (0 < r < \infty)$ в некоторую дугу окружности, начинающуюся в точке -1 и кончающуюся в точке 1, где ее касательная образует с осью X угол $\theta(\gamma) = \frac{\pi}{2} - \varphi$, а также, что

$$\lim_{|z|\to\infty} (|1-\zeta| \cdot |z|) = 2,$$

мы получим из теоремы 1 для $F(\zeta)$ первую часть следующего утверждения для $f(z)$.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ – функция класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда существует вещественная константа μ такая, что в любом секторе $\delta \le \varphi \le \pi - \delta$ $(0 < \delta < \pi)$ равномерно сверху:*

$$\lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} = \mu \sin\varphi \quad (0 < \varphi < \pi). \tag{9}$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ имеет конечное число нулей внутри угла $|\varphi - \varphi_0| < \delta$ $(0 < \delta < \varphi_0 < \pi)$, то в каждом внутреннем угле $|\varphi - \varphi_0| \le \delta_1$ $(\delta_1 < \delta)$ существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} = \mu \sin\varphi \quad (|\varphi - \varphi_0| < \delta_1).$$

Доказательство. Докажем вторую часть теоремы. Соответственно разложению

$$F(\zeta) = \varepsilon B(\zeta) F_1(\zeta),$$

где $F_1(\zeta)$ – функция без нулей класса (N) в единичном круге, мы можем написать

$$f(z) = b(z) f_1(z),$$

где $f_1(z)$ – функция без нулей класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z >$ > 0, причем

$$|b(z)| = \prod_1^\infty \left| \frac{z - z_k}{z - \overline{z}_k} \right|,$$

где $\{z_k\}$ – полная последовательность всех нулей функции $f(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge 0$.

Условие (3) теперь означает, что

$$\sum_{k=1}^\infty \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z_k}\right) < \infty.$$

В силу замечания 1 о функции F_1 можно утверждать, что в каждом угле $\gamma \le \varphi \le \pi - \gamma$ существует равномерный по φ предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|f_1(re^{i\varphi})|}{r} = \mu \sin\varphi. \tag{10}$$

Так как по условию внутри угла U_δ $(|\varphi - \varphi_0| < \delta)$ находится конечное число нулей функции $f(z)$, то при достаточно большом N

$$|z - z_k| \geq |z_k| \sin(\delta - \delta_1) \quad (z \in U_{\delta_1}, k > N),$$

где U_{δ_1} – угол $|\varphi - \varphi_0| \leq \delta_1$, и, следовательно,

$$\left|\frac{z - \overline{z}_k}{z - z_k}\right|^2 - 1 = \frac{\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z_k}{|z - z_k|^2} \leq \frac{1}{\sin^2(\delta - \delta_1)} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_k}\right)|z| \tag{11}$$

$$(z \in U_{\delta_1}, \quad k > N).$$

Таким образом, если для данного $\varepsilon > 0$ выбрать $N > 0$ так, чтобы имело место (11) и

$$\sin^{-2}(\delta - \delta_1) \sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_k}\right) < \varepsilon,$$

то мы будем иметь

$$\prod_{k=N+1}^{\infty} \left|\frac{z - \overline{z}_k}{z - z_k}\right| < \exp(\varepsilon|z|) \quad (z \in U_{\delta_1}),$$

а следовательно, при достаточно большом R_ε

$$1 \geq |b(z)| \geq \frac{1}{2} \exp(-\varepsilon|z|) \quad (z \in U_{\delta_1}, \quad |z| > R_\varepsilon).$$

Этим доказано, что внутри угла U_{δ_1} равномерно по φ

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log|b(re^{i\varphi})|}{r} = 0.$$

Это обстоятельство в соединении со сказанным относительно (10) дает второе утверждение теоремы 2.

2. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть $f(z)$ – функция, непрерывная в полуплоскости* $\operatorname{Im} z \geq 0$ *и голоморфная внутри нее. Если, кроме того, $f(z)$ удовлетворяет условиям:*

$$1^0. \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(x)|}{1 + x^2} dx < \infty,$$

$$2^0. \quad \lim_{|z|\to\infty} \sup \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty \quad (\mathrm{Im} z \geq 0),$$

то функция $f(z)$ *есть функция класса* (N) *в полуплоскости* $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Доказательство. Обозначим через K_R полукруг, имеющий диаметром отрезок $(-R, R)$ и лежащий в верхней полуплоскости.

Рассмотрим гармоническую внутри K_R функцию

$$U_R(z) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\log\frac{R-z}{R+z} = \frac{2}{\pi}\arg\frac{R-z}{R+z},$$

обращающуюся в 0 при вещественных z. Легко видеть, что

$$\text{a)} \qquad U_R(z) \geq 0 \quad \text{при} \quad z \in K_R,$$

$$\text{b)} \qquad U_R(Re^{i\varphi}) = 1 \quad (0 < \varphi < \pi), \tag{12}$$

$$\text{c)} \quad U_R(z) = \frac{4}{\pi}\frac{y}{R} + O\Big(\frac{z^2}{R^2}\Big) \quad (y = \mathrm{Im}\, z). \tag{13}$$

Условие 1^0 позволяет ввести в рассмотрение неотрицательную гармоническую функцию

$$H(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(t)|}{(x-t)^2+y^2}dt \quad (z = x+iy, y > 0).$$

Эта функция имеет непрерывные предельные значения $H(x)$, а именно,

$$H(x) = \overset{+}{\log}|f(x)| \geq \log|f(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{14}$$

В силу условия 2^0, найдутся константы $A > 1$ и $B > 0$ такие, что

$$|f(z)| \leq A\exp(B|z|) \quad (\mathrm{Im}\, z \geq 0). \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что имеет место неравенство

$$\log|f(z)| \leq H(z) + BRU_R(z) + \log A \quad (z \in K_R). \tag{16}$$

В самом деле, достаточно его проверить на границе K_R, состоящей из открытой полуокружности Γ_R и отрезка $(-R, R)$. На Γ_R неравенство (16) есть следствие (12) и (15), а на отрезке $(-R, R)$ – следствие неравенства (14).

Устремляя в неравенстве (16) R к ∞, мы, в силу (13), получаем

$$\log|f(z)| \leq H(z) + \frac{4}{\pi}By + \overset{+}{\log}|A| \quad (\operatorname{Im} z \geq 0).$$

Так как справа стоит неотрицательная гармоническая функция, то лемма 3 доказана.

Заметим, что условие 2^0 леммы выражает свойство, близкое свойству функций класса (N), утверждаемому в первой части теоремы 2. Что же касается условия 1^0 леммы, то здесь следует отметить, что для всякой функции $f(z)$ класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ существуют почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ по некасательным путям предельные значения $f(x)$, которые удовлетворяют условию 1^0 (см. [3], с. 81).

§3. Целые функции класса (N) в каждой из двух полуплоскостей

1. Для таких функций имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы целая функция $f(z)$ была функцией класса (N) в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

$$1^0. \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(x)|}{1+x^2}dx < \infty;$$

2^0. *Функция $f(z)$ – типа не выше экспоненциального*[†].

[†] Т.е.

$$h = \lim_{|z|\to\infty} \sup \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty.$$

Если при этом $h > 0$, то будем говорить, что $f(z)$ — экспоненциального типа.

Доказательство. Достаточность условий установлена в лемме 3; докажем необходимость.

Если $f(z)$ есть функция класса (N) в верхней полуплоскости, то для функции $F(\zeta)$, определяемой равенством (8) §2, найдется $M < \infty$ (см. [4], §1) такое, что

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(re^{i\varphi})| d\varphi \le M \quad (0 < r < 1), \tag{17}$$

а тогда

$$\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(\operatorname{ctg}\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(\theta)| d\theta \le \lim_{r\uparrow 1} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |F(re^{i\theta})| d\theta \le M.$$

Таким образом, f обладает свойством 1^0.

Умножая неравенство (17) на rdr и интегрируя в пределах 0,1, получаем

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \overset{+}{\log} |F(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \le \frac{M}{2}.$$

Переходя от F к f, найдем

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(z)|}{|i+z|^4} dx dy \le \frac{M}{2}.$$

Используя, аналогично, что f — класса (N) в нижней полуплоскости, получаем для всей плоскости

$$L = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(z)|}{1+|z|^4} dx dy < \infty.$$

Возьмем теперь произвольное комплексное ζ $(|\zeta| \ge 1)$ и обозначим через K_ζ круг с центром в точке ζ радиуса $R = |\zeta|$.

Пользуясь субгармоничностью функции $\overset{+}{\log}|f(z)|$, можно утверждать:

$$\overset{+}{\log}|f(\zeta)| \leq \frac{1}{\pi|\zeta|^2} \iint\limits_{K_\zeta} \overset{+}{\log}|f(z)|dxdy \leq$$

$$\leq \frac{1+16|\zeta|^4}{\pi|\zeta|^2} \iint\limits_{K_\zeta} \frac{\overset{+}{\log}|f(z)|dxdy}{1+|z|^4} < L\frac{1+16|\zeta|^4}{\pi|\zeta|^2} \leq \frac{17L}{\pi}|\zeta|^2 \quad (|\zeta| \geq 1).$$

Следовательно, найдутся такие $\alpha, \beta > 0$, что при любом z

$$|f(z)| \leq \alpha \exp(\beta|z|^2). \tag{18}$$

Пусть $0 < \delta < \frac{\pi}{4}$; введем в рассмотрение углы U_δ $(\delta \leq \leq \arg z \leq \pi - \delta)$ и V_δ $(|\arg z| \leq \delta)$.

В угле U_δ, согласно теореме 2, функция $f(z)$ имеет не более чем экспоненциальный рост. Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для угла U_δ^1, симметричного с углом U_δ относительно начала.

Что же касается угла V_δ, то так как его раствор $2\delta < \frac{\pi}{2}$ и так как, согласно только что отмеченному, на его сторонах функция $f(z)$ имеет не более чем экспоненциальный рост, то, учитывая (18), мы можем применить к $f(z)$ теорему Фрагмена–Линделефа и тогда найдем, что $f(z)$ будет не более чем экспоненциального типа и в угле V_δ .

Так как аналогичное заключение применимо и к углу V_δ^1, симметричному с V_δ относительно начала, то теорема доказана.

Как известно (см. [6] или [7]), всякая целая функция экспоненциального типа имеет непрерывную индикатрису

$$h(\varphi) = \lim_{r\to\infty} \sup \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi); \tag{19}$$

при этом для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R_\varepsilon > 0$ такое, что

$$r^{-1}\log|f(re^{i\varphi})| \leq h(\varphi) + \varepsilon \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad r > R_\varepsilon). \tag{20}$$

Для рассматриваемой функции $f(z)$ индикатриса $h(\varphi)$ находится по формуле (9) в верхней полуплоскости и по аналогичной формуле — в нижней полуплоскости.

Таким образом, в нашем случае

$$h(\varphi) = \begin{cases} \mu \sin\varphi & (0 \le \varphi \le \pi), \\ \mu' |\sin\varphi| & (0 \le \varphi \le \pi), \end{cases} \tag{21}$$

а следовательно, диаграмма† функции $f(z)$ есть отрезок мнимой оси, соединяющей точки μi и $-\mu' i$ $(\mu \ge -\mu')$.

2. Мы предоставляем читателю доказать следующее предложение, обобщающее теорему 3 в ее главной части:

Пусть функция $f(z)$ голоморфна всюду внутри круга $K : |z - -\alpha| < r$, за исключением точки α. Пусть, кроме того, круг K разбивается с помощью аналитической дуги, проходящей через точку α, на две области, в каждой из которых функция $f(z)$ класса (N). Тогда существует равномерный верхний предел

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup \log |f(\alpha + \beta e^{i\varphi})| = h(\varphi),$$

причем $h(\varphi)$ будет опорной функцией некоторого отрезка.

3. С помощью теоремы 3 немедленно устанавливается

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — целая функция, имеющая вещественные простые нули α_k $(k = 1, 2, ...)$, и такая, что при некотором натуральном $p \ge 0$*

$$1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^p |f'\alpha_k|} < \infty,$$

$$2) \quad \frac{1}{f(z)} = R(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f'(\alpha_k)} \left\{ \frac{1}{z - \alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k} + \frac{z}{\alpha_k^2} + \cdots + \frac{z^{p-1}}{\alpha_k^p} \right\}, \tag{22}$$

где $R(z)$ - некоторый полином.

Тогда $f(z)$ есть целая функция типа не выше экспоненциального, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(x)|}{1 + x^2} dx < \infty. \tag{23}$$

†Как показал Г. Полиа [6, 7], индикатриса $h(\varphi)$ всякой целой функции экспоненциального типа есть опорная функция к некоторому выпуклому контуру, который и называется диаграммой функции $f(z)$.

Доказательство. Разложение (22) можно проще записать так:

$$\frac{1}{f(z)} = R(z) + z^p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z - \alpha_k} \quad \left(\sum_{1}^{\infty} |c_k| < \infty\right).$$

С другой стороны, всякая функция $\varphi(z)$ вида

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{z - \alpha_k},$$

где $\rho_k > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$ принадлежит классу (N) в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, ибо

$$\operatorname{Im} \varphi(z)/\operatorname{Im} z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho_k}{|z - \alpha_k|^2} > 0.$$

Так как сумму, стоящую коэффициентом при z^p в (22), можно представить как

$$\varphi_1(z) - \varphi_2(z) + i\varphi_3(z) - i\varphi_4(z),$$

где функции $\varphi_k(z) \quad (k = 1, 2, 3, 4)$ – указанного выше вида, то эта сумма, а вместе с ней и функция $f^{-1}(z)$, принадлежат классу (N) в каждой из полуплоскостей (полиномы, очевидно, входят в линейное кольцо (N)).

Но если $f^{-1}(z)$ есть функция класса (N) в некоторой полуплоскости, то целая функция $f(z) = 1/f^{-1}(z)$ — также класса (N) в этой полуплоскости.

Следовательно, утверждения теоремы вытекают из теоремы 3[†].

[†] В одной из своих последних работ по теории эрмитовых операторов и проблеме моментов H.L.Hamburger [8] рассматривает целые функции $f(z)$ с вещественными нулями, удовлетворяющие двум условиям:

1) $f(z)$ — целая функция конечного рода,

2) для $f(z)$ имеет место разложение (22) при $p = 0$, $R(z) \equiv 0$.

Согласно нашей теореме, условие 1) есть следствие условия 2).

Замечание. Очевидно, согласно теореме 3, теорема 4 сохранит силу в предположении, что в разложении (22) функция $R(z)$ – не полином, а любая функция типа не выше экспоненциального, удовлетворяющая условию (23); при этом окажется, что $R(z)$ — полином степени не выше p. Последнее утверждение станет ясным из рассуждений, которые следуют ниже.

4. Для функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям теоремы 4, индикатриса роста будет иметь вид (21).

Ниже мы приведем еще одну характеристику роста этих функций.

Без ограничения общности можно предположить, что для функции $f(z)$ в разложении (22) $R(z) \equiv 0$, $p = 0$, т.е. что

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha_k - z}, \tag{24}$$

где

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

В самом деле, если имеет место разложение (22), то, полагая

$$Q(z) = (z - \beta_1)\ldots(z - \beta_q),$$

где q больше p и степени полинома $R(z)$, а $\beta_1 < \beta_2 < \cdots \beta_q$ отличны от нулей α_k, мы легко обнаружим, что для функции $f_1(z) = Q(z)f(z)$

$$f_1^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{q} \frac{b_k}{\beta_k - z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c'_k}{\alpha_k - z},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c'_k| < \infty$.

Пусть теперь μ и μ' $(\mu > -\mu')$ – числа, фигурирующие в формуле (21) для индикатрисы $f(z)$.

Рассмотрим функцию $\exp(-i\lambda z)f(z)$, где

$$-\mu' < \lambda < \mu. \tag{25}$$

В силу (22), будем иметь

$$\frac{e^{-i\lambda z}}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{-i\lambda\alpha_k}}{\alpha_k - z} + g(z),$$

где $g(z)$ — некоторая целая функция.

Левая часть этого равенства, так же как и сумма, стоящая справа, суть функции класса (N) в каждой из двух полуплоскостей. Следовательно, по теореме 3 целая функция $g(z)$ – типа не выше экспоненциального. С другой стороны, согласно (25) и (21)

$$\lim_{r\to\infty} g(re^{i\varphi}) = 0 \quad \text{при} \quad e^{i\varphi} \neq \pm 1,$$

следовательно, $g(z) \equiv 0$.

Из соображений непрерывности мы заключаем, что вообще†

$$\frac{e^{-i\lambda z}}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k e^{-i\lambda\alpha_k}}{\alpha_k - z} \qquad -\mu' \leq \lambda \leq \mu. \tag{26}$$

Заметим теперь, что индикатриса роста $h(\varphi, f_1)$ функции

$$f_1(z) = \exp\Bigl(i\frac{\mu - \mu'}{2}z\Bigr) f(z)$$

имеет вид

$$h(\varphi, f_1) = \frac{\mu - \mu'}{2}\sin\varphi + h(\varphi, f) = \frac{\mu + \mu'}{2}|\sin\varphi|.$$

Но тогда в разложении $f_1(z)$ в бесконечное произведение

$$f_1(z) = ce^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \Bigl(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Bigr) e^{z/\alpha_k},$$

† Из аналогичных соображений получается, что если индикаторная диаграмма функции $f(z)$ не сводится к точке и содержит в себе индикаторную диаграмму некоторой целой функции $F(z)$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{c_k F(\alpha_k)}{\alpha_k}\right| < \infty, \quad \text{то} \quad \frac{F(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k F(\alpha_k)}{z - \alpha_k}.$$

коэффициент γ вещественен и, следовательно, $f_1(z)$ может отличаться от вещественной функции только постоянным комплексным множителем.

Таким образом, мы доказали, что если некоторая целая функция $f(z)$ допускает представление (24) (или в более общем случае – представление (22)), то она имеет вид

$$f(z) = C\exp(i\nu z)f_1(z) \quad (-\infty < \nu < \infty),$$

где $f_1(z)$ — вещественная целая функция, допускающая представление того же типа.

Предположим поэтому сразу, что $f(z)$ — вещественная функция. Тогда $\mu = \mu'$ и из (26) при $\lambda = \mu$ находим

$$\left|\frac{\exp(-\mu i z)}{f(z)}\right| \leq \frac{\omega}{|y|} \quad (y = \operatorname{Im} z).$$

Таким образом, предельное равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} = \mu|\sin|\varphi \quad (0 < |\varphi| < \pi)$$

можно дополнить неравенством

$$|f(z)| \geq \frac{1}{\omega}|y|\exp(\mu|y|) \quad (y = r\sin\varphi = \operatorname{Im} z). \tag{27}$$

5. Распределение нулей целых функций экспоненциального типа, удовлетворяющих условию (23), изучалось многими авторами. В частности, N.Levinson [9] показал, что для таких функций

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_1(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_2(r)}{r} = \frac{\mu}{\pi}, \tag{28}$$

где $n_1(r)$ и $n_2(r)$ – число нулей функции, не превосходящих по модулю r и лежащих соответственно в правой и левой полуплоскостях.

Для функций $f(z)$, допускающих представление (24), мы можем добавить к (28) следующую оценку снизу для $n(r) = n_1(r)+$ $+n_2(r)$:

$$\int_0^r \frac{n(\rho)}{\rho}d\rho \geq \frac{2\mu r}{\pi} + \log r + C,$$

которая немедленно вытекает из (28) и формулы Якоби–Иенсена:

$$\int_0^r \frac{n(\rho)}{\rho} d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})| d\varphi - \log |f(0)|.$$

§4. Обобщение теоремы 4

1. Если отбросить в теореме 4 условие вещественности нулей $\alpha_k (k = 1, 2, ...)$, то она будет неверна. В самом деле, если, например, для некоторой функции $f(z)$ экспоненциального типа имеет место разложение (24), то также [†]

$$\frac{1}{f(z^2)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2\sqrt{\alpha_k}} \left\{ \frac{1}{z - \sqrt{\alpha_k}} - \frac{1}{z + \sqrt{\alpha_k}} \right\}, \tag{29}$$

вместе с тем $f(z^2)$ уже не будет экспоненциального типа. Ввиду этого представляет интерес следующая

Теорема 5. *Пусть $f(z)$ – целая функция, имеющая простые нули $\alpha_k \quad (k = 1, 2, ...)$, для которых*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Im}\ \alpha_k|}{|\alpha_k|^2} < \infty. \tag{30}$$

Если при этом

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z - \alpha_k} \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{c_k}{\alpha_k} \right| < \infty \right), \tag{31}$$

[†] Отметим, кстати, что из разложения (29) и теоремы 4 вытекает, что если в (22) или в (24) все $\alpha_k > 0 \quad (k = 1, 2, ...)$, то

$$\lim_{|z| \to \infty} \sup \frac{\log |f(z)|}{\sqrt{|z|}} < \infty.$$

то $f(z)$ – типа не выше экспоненциального и для $f(z)$ выполняется условие (23).

Доказательство[†]. Разобьем правую часть (31) на две суммы:

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c'_k}{z-\alpha'_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c''_k}{z-\alpha''_k} = g_1(z) + g_2(z),$$

где

$$\operatorname{Im} \alpha'_k > 0, \quad \operatorname{Im} \alpha''_k \le 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Положим

$$b(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z-\alpha'_k}{z-\overline{\alpha}'_k} \frac{i-\overline{\alpha}'_k}{i-\alpha'_k} \quad (\operatorname{Im} z > 0);$$

в силу (30) это произведение будет сходиться. Если мы теперь покажем, что функция $b(z)/f(z)$ – класса (N) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, то этим самым будет показано, что и функция $f(z)/b(z)$, а значит, и функция $f(z)$ – класса (N) в верхней полуплоскости.

Заметим теперь, что функция $\varphi(z)$ вида

$$\varphi(z) = \sum \frac{\rho_k}{z-\beta_k}, \tag{32}$$

где

$$\rho_k > 0, \quad \operatorname{Im} \beta_k < 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \sum \frac{\rho_k}{|\beta_k|} < \infty$$

есть функция класса (N) в верхней полуплоскости, ибо

$$-\operatorname{Im} \varphi(z) = \sum \frac{\rho_k \operatorname{Im}(z-\beta_k)}{|z-\beta_k|^2} \ge 0.$$

Так как функция $g_2(z)$ очевидным образом может быть представлена в виде линейной комбинации четырех функций φ_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ указанного типа, то $g_2(z)$, а с ней $b(z)g_2(z)$ – класса (N) в верхней полуплоскости.

[†] Доказательство было позднее дополнено автором. Другое доказательство приведено в книге: *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Наука, 1956.– Гл. V, §6. (*Прим. ред.*)

Для исследования произведения $b(z)g_1(z)$ представим каждый коэффициент c'_k в виде суммы

$$c'_k = c_k^{(1)} - c_k^{(2)} + ic_k^{(3)} - ic_k^{(4)} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где

$$c_k^{(1)} c_k^{(2)} = 0, \quad c_k^{(3)} c_k^{(4)} = 0,$$

$$c_k^{(j)} b'(\alpha_k) \geq 0, \quad b'(\alpha) = \frac{db(\alpha)}{d\alpha} \quad (k = 1, 2, \ldots; \ j = 1, 2, 3, 4);$$

соответственно этому разбиению будем иметь

$$g_1(z) = g^{(1)}(z) - g^{(2)}(z) + g^{(3)}(z) - g^{(4)}(z),$$

$$g^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^{(j)}}{z - \alpha'_k} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Покажем, что каждая из функций $g^{(j)}(z)b(z)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ есть функция класса (N) в верхней полуплоскости. Для этого положим

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \alpha'_k}{z - \overline{\alpha}'_k} \frac{i - \overline{\alpha}'_k}{i - \alpha'_k} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и представим каждый коэффициент c'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в виде суммы

$$c'_k = c_{kn}^{(1)} - c_{kn}^{(2)} + ic_{kn}^{(3)} - ic_{kn}^{(4)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$c_{kn}^{(1)} c_{kn}^{(2)} = 0, \quad c_{kn}^{(3)} c_{kn}^{(4)} = 0, \quad c_{kn}^{(j)} b'_n(\alpha_k) \geq 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, 3, 4). \tag{33}$$

Пусть

$$g_n^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{kn}^{(j)}}{z - \alpha'_k} \quad (j = 1, 2, 3, 4; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Так как

$$\lim_{n \to \infty} b'_n(\alpha'_k) = b'(\alpha'_k) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

то,

$$\lim_{n\to\infty} c_{kn}^{(j)} = c_k^{(j)} \quad (k = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, 3, 4).$$

Учитывая, что

$$|c_k^{(j)}| \le |c_k| \quad (k = 1, 2, \ldots; \; j = 1, 2, 3, 4)$$

и

$$|c_{kn}^{(j)}| \le |c_k| \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \; j = 1, 2, 3, 4, \quad n = 1, 2, \ldots),$$

мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} g_n^{(j)}(z) = g^{(j)}(z) \quad (j = 1, 2, 3, 4; \; z \ne \alpha_k; \; k = 1, 2, \ldots),$$

а следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} b_n(z) g_n^{(j)}(z) = b(z) g^{(j)}(z) \quad (j = 1, 2, 3, 4; \; \mathrm{Im}\, z > 0).$$

С другой стороны,

$$b_n(z) g_n^{(j)}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_{kn}^{(j)} b_n'(\alpha_k)}{z - \alpha_k'}$$

и, следовательно, согласно (33), того же типа, что и функция $\varphi(z)$ вида (32). Таким образом, при $\mathrm{Im}\, z > 0$

$$\mathrm{Im}\,(b_n(z) g^{(j)}(z)) \le 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4; \quad \mathrm{Im}\, z > 0).$$

Отсюда функции $b(z)g^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, а с ними и функции $b(z)g_1(z)$, $b(z)g_1(z) + b(z)g_2(z) = b(z)/f(z)$ – класса (N) в верхней полуплоскости.

Мы доказали, что $f(z)$ есть функция класса (N) в верхней полуплоскости. Аналогично показывается, что $f(z)$ – класса (N) в нижней полуплоскости. После этого остается вспомнить теорему 3, чтобы убедиться в справедливости теоремы 5.

Список литературы

[1] *Крейн М.* Об одном замечательном классе эрмитовых операторов // Докл. АН СССР. - 1944.- **44**, № 5.- С.191-195.

[2] *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. - М.: ОГИЗ, 1941. - Гл. 7, §1-3.

[3] *Привалов И.И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941.

[4] *Smirnoff V.* Sur le valeurs limites des functions réguliéres á l'intérieur d'un cercle // Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва. - 1929. - **2**. - С.22-37.

[5] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. - М.; Л., 1937.- Ч.1.

[6] *Polya G.* Uber die Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math.Zeitschr. - 1929. - **29**. - P.549-640.

[7] *Гельфонд А.О.* Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка // Успехи мат. наук.- 1937. - **3**. - С.148-151.

[8] *Hamburger H.L.* Hermitian Transformations of deficiency-index (l,l), Jacobi Matrices and undetermined moment problems // Amer.J. Math. - 1944. - **66**, N 4. - P.489-522.

[9] *Levinson N.* Gap and density theorems // Amer.Math.Soc. Coll. Publ. - 1940.- **26**, N 13.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА ХАРДИ И КОНТИНУАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ФУНКЦИЙ С ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬЮ†

(Совместно с П.Я. Нудельманом)

(Доклады Академии наук СССР. – 1973. – 209, № 3)

Через $\hat{L}^2(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, обозначается вещественное гильбертово пространство, состоящее из всех вещественных функций комплексного пространства $L^2(a,b)$. Через $\mathcal{F}$ обозначается ненормированный оператор Фурье–Планшереля в $L^2(-\infty,\infty)$, точнее, для $f \in L^2(-\infty,\infty)$

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)dt (= \lim_{N',N''\to\infty} \int_{-N''}^{N'} e^{-i\omega t} f(t)dt).$$

Всякое $L^2(a,b)$ (когда хотя бы одно из чисел a, b конечно) рассматривается как подпространство в $L^2(-\infty,\infty)$, состоящее из соответствующим образом усеченных функций. Через $H(\hat{H})$ обозначается подпространство в $L^2(-\infty,\infty)$, на которое оператор $\mathcal{F}$ отображает $L^2(0,\infty)$ $(\hat{L}^2(0,\infty))$. Таким образом, $F(\in H)$

---

†Подробное изложение результатов дано в статье авторов: Аппроксимация функций из $L_2(\omega_1,\omega_2)$ передаточными функциями линейных систем с минимальной энергией // Пробл. передачи информ. – 1975. – **2**, вып.2. – С.37-60. (*Прим.ред.*)

принадлежит $\hat{H}$ точно тогда, когда F – эрмитова функция, т.е. $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ почти всюду на оси.

Отправная задача. Задана некоторая эрмитова функция $F \in L^2(-1,1)$ и число ε $(0 < \varepsilon \leq \| F \| /2\pi)$. Требуется найти $g \in \hat{L}^2(0,\infty)$, имеющее наименьшую норму $\| g \|$ при условии, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1} |F(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega \leq \varepsilon^2, \quad G = \mathcal{F}(g). \tag{1}$$

Легко обнаруживается, что задача имеет одно и только одно решение (обозначаемое в дальнейшем g_ε), причем оно определяется из интегрального уравнения

$$\mu g(t) + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} g(s)ds = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \tag{2}$$

где $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$, а $\mu = \mu(\varepsilon)$ — некоторая положительная функция аргумента ε. Эта функция в свою очередь определяется из уравнения (16); оказывается, она монотонно стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ и, более того, $\mu = \sqrt{2\pi}\varepsilon / \| F \| + O(\varepsilon^2)$.

2. Наши выводы существенно опираются на результаты статьи [1]. В этой статье, в частности, показано, что функции

$$\chi_\tau(\omega) = \chi(\omega,\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\omega^2)}}\times$$
$$\times \exp\left(\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1+\omega}{1-\omega}\ln\frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \tag{3}$$

аргумента ω и параметра τ, $-1 < \omega_1\tau < 1$, образуют в $L^2(-1,1)$ полную ортогональную систему обобщенных функций, нормированных к δ-функции.

Отсюда следует, что вещественные функции

$$\varphi(t;\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \chi(\omega,\tau)\epsilon^{i\omega t}d\omega, \quad \tau = \text{th}\pi\lambda, \quad -\infty < t, \quad \lambda < \infty, \tag{4}$$

образуют полную ортогональную систему обобщенных функций в пространстве $B_1(\subset L^2(-\infty,\infty))^{\dagger}$. Точнее, для любой функции $f \in B_1$ существует в определенном смысле интеграл

$$F_\varphi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t;\lambda)dt, \tag{5}$$

при этом соответствие $f \to F_\varphi$ будет унитарным отображением всего B_1 на все $L^2(-\infty,\infty)$ с весом $p(\lambda) = 1/(2\mathrm{ch}^2\pi\lambda)$, так что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F_\varphi(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\mathrm{ch}^2\pi\lambda}, \tag{6}$$

и будет иметь место соответствующая формула обращения.

Функции φ связаны с определенной серией функций Уиттекера $M_{k,m}(z)$ (см. [2], с. 159), а именно: $\varphi(t;\lambda) = M_{-i\lambda,0}(2it)/(2it)^{1/2}$. Функция $\varphi(t;\lambda)$, будучи целой функцией, является единственным регулярным решением граничной задачи

$$\frac{d}{dt}\left(t\frac{d\varphi}{dt}\right) + t\varphi + 2\lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0;\lambda) = 1. \tag{7}$$

Если рассматривать ограничение функций $\varphi(t;\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, на полуось $0 \le t < \infty$ как фундаментальные функции граничной сингулярной задачи (7) на этой полуоси, то по общей теории Г.Вейля (см., например, [3]) эти функции должны порождать обобщенное преобразование Фурье с некоторым спектральным весом. Действительно, оказывается, для $f \in L^2(0,\infty)$ имеет определенный смысл интеграл

$$\tilde{f}_\varphi(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\varphi(t;\lambda)dt, \tag{8}$$

† Через B_1 обозначается подпространство всех целых функций из $L^2(-\infty,\infty)$ степени ≤ 1; иначе, B_1 можно определить как подпространство, на которое оператор $\mathcal{F}^{-1}$ отображает $L^2(-1,1)(\subset L^2(-\infty,\infty))$.

и соответственно $f \to \tilde{f}_\varphi$ унитарно отображает все $L^2(0,\infty)$ на все $L^2(-\infty,\infty;q)$ с весом $q(\lambda) = 1 + \mathrm{th}\pi\lambda$, так что

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^\infty |\tilde{f}_\varphi(\lambda)|^2 (1 + \mathrm{th}\pi\lambda) d\lambda, \tag{9}$$

и стало быть, имеет место формула обращения†

$$f(t) = \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_\varphi(\lambda)\varphi(t;\lambda)(1 + \mathrm{th}\pi\lambda) d\lambda. \tag{10}$$

3. Существенно, что ограничение функций $\varphi(t;\lambda)$ на $(0,\infty)$ дает полную систему обобщенных фундаментальных функций самосопряженного оператора K, задаваемого интегралом, стоящим в левой части (2), а именно:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)}\varphi(s;\lambda)ds = \frac{1 - \mathrm{th}\pi\lambda}{2}\varphi(t;\lambda), \quad 0 \le t < \infty. \tag{11}$$

Это обстоятельство позволяет получить решение g уравнения (2) при любом $f \in L^2(0,\infty)$ и комплексном $-\mu \notin (0,1)$†† по формуле

$$g(t) = \int_0^\infty \Gamma(t,s;-\mu) f(s) ds, \tag{12}$$

где

$$\Gamma(t,s;-\mu) = 2\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(t;\lambda)\varphi(s;\lambda)(1 + \mathrm{th}\pi\lambda)}{1 - \mathrm{th}\pi\lambda + 2\mu} d\lambda.$$

---

†Разумеется, в формулах (5),(8) и (10) сходимость интегралов следует понимать в смысле сходимости в метрике соответствующего пространства $L^2(-\infty,\infty;p)$, $L^2(-\infty,\infty;q)$ и $L^2(0,\infty)$. Авторы обязаны Г.Я. Попову указанием на то, что формулы обращения (8) и (10) известны и приведены в числе прочих (в другой записи) в [4], с. 274.

††Сегмент [0,1] составляет весь спектр (являющийся простым и непрерывным) оператора K. Этот попутно получаемый нами факт специально доказывался в статье [5]; там же указано, что он следует также из результатов статьи [6].

Для самого ядра оператора K получается разложение

$$\frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s;\lambda)\varphi(t;\lambda)}{\operatorname{ch}^2\pi\lambda} d\lambda, \quad 0 \le s, \quad t < \infty. \tag{14}$$

Разложения (13) и (14) сходятся равномерно в любом конечном квадрате ($0 \le s$, $t < a$; $a < \infty$) и сохраняют это свойство при дифференцировании по s и t любое число раз.

4. Для любого $F \in L^2(-1,1)$ положим

$$\check{F}(x) = F(\operatorname{th}\frac{x}{2})/\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}(\in L^2(-\infty,\infty)), \quad \Phi_F = \mathcal{F}(\check{F})/\sqrt{2\pi}.$$

Для эрмитова $F(F(-\omega) = \overline{F(\omega)})$ функция $\Phi_F(\lambda)$ будет вещественной. Так как в уравнении (2) для отправной задачи $f = \mathcal{F}^{-1}(F) \in$ $\in B_1$, и стоящий в левой части интеграл также дает целую функцию из B_1, то и решение задачи $g_\varepsilon \in B_1$. Формулы (12) и (13) позволяют получить g_ε в виде интеграла в пределах от $-\infty$ до ∞ от произведения $\Phi_F(\lambda)\varphi(t;\lambda)$ с весом $(1-\operatorname{th}\pi\lambda)/(1-\operatorname{th}\pi\lambda+2\mu)$, после чего получается, что

$$\int\limits_0^\infty g_\varepsilon^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\operatorname{th}\pi\lambda)\Phi_F^2(\lambda)d\lambda}{(1-\operatorname{th}\pi\lambda+2\mu)^2}. \tag{15}$$

Найдя g_ε, нетрудно уже получить соответствующее выражение для $G_\varepsilon = \mathcal{F}(g_\varepsilon)$. При подстановке $G = G_\varepsilon$ в (1) получается знак равенства и соответствующее вычисление левой части (1) приводит к соотношению

$$\frac{2\mu^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_F^2(\lambda)d\lambda}{1-\operatorname{th}\pi\lambda+2\mu} = \varepsilon^2, \tag{16}$$

из которого μ определяется как функция ε.

Теорема. *Для того чтобы заданная функция* $F \in L^2(-1,1)$ *совпадала почти всюду на* $(-1,1)$ *с некоторой функцией* $G_0 \in H$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\exp(\pi\lambda)\Phi_F(\lambda) \in L^2(-\infty,\infty)$.

При выполнении этого условия голоморфная в нижней полуплоскости функция класса Харди $G(\zeta)(\zeta = \omega + i\sigma,\ \sigma < 0)$, граничные значения которой для $\omega \in [-1, 1]$ дают $F(\omega)$, находится по формуле

$$G(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\zeta^2)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_F(\lambda) \exp\Big(i\lambda \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\Big) d\lambda,$$

$$\operatorname{Im} \zeta < 0. \tag{17}$$

Фигурирующие в правой части голоморфные в нижней полуплоскости ветви $\ln[(1+\zeta)/(1-\zeta)]$ и $\sqrt{1-\zeta^2}$ выделяются условиями, что при $\zeta \to \omega,\ -1 < \omega < 1$, первая стремится к вещественному, а вторая — к положительному числу.

Квадрат нормы $G_0(\omega) = G(\omega - i0)$ находится по формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |G_0(\omega)|^2 d\omega = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi_F(\lambda)|^2 d\lambda}{1 - \operatorname{th} \pi\lambda}. \tag{18}$$

Поясним, что указанный в теореме критерий эквивалентен условию конечности интеграла, стоящего в правой части (18).

Для случая, когда $F(\omega) = \overline{F(-\omega)}$ $(\in L^2(-1,1))$, последнее условие эквивалентно конечности предела $\| g_\varepsilon \|$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Отметим, что отправная задача этой статьи навеяна результатами статьи [7].

Если в интегральном уравнении (2) заменить верхний предел ∞ конечным числом $a(> 0)$ и рассматривать его для функций $g, f \in L^2(0, a)$, то мы получим уравнение, теории и приложениям которого посвящена обширная литература (см. [8–10], а также заметки [11, 12]). В связи с этим уравнением была получена счетная система функций с двойной ортогональностью. В отличие от этой дискретной системы (двойственной себе в смысле преобразования Фурье) континуальная система функций $\varphi(t; \lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, связана преобразованием Фурье с некоторой второй системой функций с двойной ортогональностью, притом уже в интервалах $(-1,1)$ и $(-\infty,\infty)$. Этой системой является система функций $\chi_\tau(\omega)$, $-1 < \tau < 1$, соответствующим образом экстраполированных на всю ось $(-\infty < \omega < \infty)$.

Примечание при корректуре. После того, как настоящая заметка была передана в печать, авторы узнали, благодаря Д.З. Арову, о работе [13], в которой также дано решение (другим способом и в другой форме) задачи о продолжении с конечного интервала функции класса Харди.

Список литературы

[1] *Koppelman W., Pincus J.D.* // Math. Zs. - 1959.- **71**, H. 4 - S. 399.

[2] *Уиттекер Е.Т., Ватсон Г.Н.* Курс современного анализа, ч. II, 1934.

[3] *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию.- М.: Наука, 1970.

[4] *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. I. - М.: Наука, 1965.

[5] *Landau H.J., Pollak H.O.* // Bull. Syst. Techn. J. - 1963. - **41**, N 4.

[6] *Widom H.* // Illinois J. Math. - 1960 - **40**, N 1.

[7] *Нудельман П.Я.* // Радиотехника. - 1971. - **26**, № 9.

[8] *Sõepian D., Pollak H.O.* // Bull. Syst. Techn. J. - 1961. - **40**, N 1.

[9] *Landau H.J., Pollak H.O.* // Ibid.

[10] *Функции* с двойной ортогональностью: Пер. с англ. – М.: Сов. радио, 1971.

[11] *Нудельман П.Я.* // Радиотехника и электротехника. – 1961. – **4**, № 2.

[12] *Нудельман П.Я.* // Там же. – 1970. – **5**, № 3.

[13] *Steiner A.* // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Mathematica. – 1970. – **459**, N 1.

ON A GENERALIZATION OF SOME INVESTIGATIONS OF G. SZEGÖ, V. SMIRNOFF AND A. KOLMOGOROFF

(Доклады Академии наук СССР. – 1945. – Том. XLVI, № 3)

Generalizing in the prezent paper the G. Szegö [2, 3] and V. Smirnoff [4] theory of orthogonal polynomials on a contour, as well as some of the results of A. Kolmogoroff [1], whick make this theory in a certain sense complete, we confine ourselves for want of space to the case of functions defined on the unit circle. The whole theory may be, however, developed also in the case of functions defined on an arbitrary Jordan contour (which need not be rectifiable).

1. In the sequel L denotes a linear aggregate of functions $f(e^{i\theta})$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ possesing the following properties:

1) If $f(e^{i\theta}) \in L$, then $e^{i\theta} f(e^{i\theta}) \in L$;

2) $1 \in L$.

If $\sigma(\theta) = \sigma(\theta - 0)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \sigma(0) = 0)$ is a non-decreasing function, then by L_σ we denote the corresponding Hilbert space of all σ-measurable and σ-integrable together with their squares functions $\varphi(\theta)$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi$) whith the usual definition of the scalar product:

$$(\varphi, \psi)_\sigma = \int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\overline{\psi(\theta)} d\sigma(\theta) \quad (\varphi, \psi \in L_\sigma).$$

By V_L we denote the aggregate of all non-decreasing functions $\sigma(\theta) = \sigma(\theta - 0)$ $(\sigma(0) = 0)$ for which $L \subset L_\sigma$.

Finally, by H_θ we denote the aggregate of all measurable and summable with their squares functions $F(e^{i\theta})$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$, the Fourier coefficients of which

$$c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\theta})e^{-ni\theta}\,d\theta$$

are equal to zero for $n < 0$. If $F(e^{i\theta}) \in H_\theta$, then by $F(z)$ $(|z| < 1)$ we shall denote the corresponding holomorphic function

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(F)z^n \qquad (|z| < 1).$$

The aggregate of all holomorphic functions $F(z)$ $(|z| < 1)$ corresponding to the functions $F(e^{i\theta}) \in H_\theta$ we shall denote by H_z.

Theorem 1. *Let $\sigma \in V_L$. Then L iz not dense in L_σ if and only if the following two conditions are satisfied:*

1^0

$$-\infty < \int_0^{2\pi} \log\sigma'(\theta)\,d\theta, \tag{1}$$

2^0 *There exists a function $F(e^{i\theta}) \in H_\theta$ such that*

$$\int_0^{2\pi} \frac{|F(e^{i\theta})|^2}{\sigma'(\theta)}\,d\theta < \infty$$

and $f(e^{i\theta})F(e^{i\theta}) \in H_\theta$ for any function $f \in L$.

P r o o f. Consider in L_σ the unitary operator U determined by the equality: $U_\varphi = e^{i\theta}\varphi(\theta)$ $(\varphi \in L_\sigma)$. Denote by $\bar{L}$ the closure of L in L_σ . Since $UL = L$, we have also, in virtue of the continuity of the operator U, $U\bar{L} \subset L$. If $\bar{L} \subset L_\sigma$, then $U\bar{L} = \bar{L}$. Conversely, if $U\bar{L} = \bar{L}$, then $U^k\bar{L} = \bar{L}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, and since $1 \in L$, $e^{ki\theta} = U^k 1 \in \bar{L}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, whence follows $\bar{L} \doteq L_\sigma$. Thus, the fact that L is not dense in L_σ is equivalent to the fact that $\bar{U}L \neq \bar{L}$.

But if $U\overline{L} \neq \overline{L}$ $(UL \in L)$, there is a function $\Phi(e^{i\theta}) \in \overline{L}$ such that

$$(\Phi, \Phi)_\sigma = 1, \quad (\Phi, Uf)_\sigma = 0 \text{ for } f \in L.$$

In particular, we shall have $(\Phi, U^k\Phi)_\sigma = 0$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$; thus

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) = 1, \quad \int_0^{2\pi} e^{ki\theta} |\Phi(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) = 0$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

But this is possible only in the case where

$$\int_0^{\vartheta} |\Phi(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) = \frac{\vartheta}{2\pi} \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Hense follows that p.p.

$$\sigma'(\theta) = \frac{1}{2\pi} |F_\sigma(e^{i\theta})|^2, \quad F_\sigma(e^{i\theta}) = \Phi^{-1}(e^{i\theta}) \tag{2}$$

and

$$\int_0^{\vartheta} |\Phi(e^{i\theta})|^2 d\sigma_s(\theta) = 0,$$

where

$$\sigma(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \sigma'(\theta) d\theta + \sigma_s(\vartheta) \quad (0 \leq \vartheta \leq 2\pi). \tag{3}$$

We apply now the fact that for any function $f \in \bar{L}$ we have $(\Phi, U^k f)_\sigma = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, *i.e.*

$$\int_0^{2\pi} e^{ki\theta} f(e^{i\theta}) \overline{\Phi(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ki\theta} f(e^{i\theta}) F_\sigma(e^{i\theta}) d\theta = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Thus

$$F_\sigma(e^{i\theta})f(e^{i\theta}) \in H_\theta \quad \text{for any} \quad f \in \bar{L}. \tag{4}$$

Putting in particular $f \equiv 1 \in L$, we find that $F_\sigma(e^{i\theta}) \in H_\theta$ and this in view of (2) implies 1^0 (cf. [5], ch. IV).

To prove the sufficiency of conditions 1^0, 2^0 let us put, starting from the function F given by 2^0

$$G(\theta) = e^{-i\theta}F(e^{i\theta})/\sigma'(\theta)$$

for those θ for which there exists a finite derivative $\sigma'(\theta) \neq 0$; for other θ we put $G(\theta) = 0$. Then

$$\int_0^{2\pi} |G(\theta)|^2 d\sigma(\theta) > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})G(\theta)d\sigma(\theta) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})F(e^{i\theta})(e^{i\theta})d\theta = 0 \quad (f \in L)$$

i. e. $\overline{L} \neq L_\sigma$. The theorem is proved.

2. If the condition 2^0 of Theorem 1 is satisfied, we have:

3) To every function $f(e^{i\theta}) \in L$ there corresponds a meromorphic function $f(z)$ $(|z| < 1)$ of bounded type such that p.p. $f(re^{i\theta}) \to$ $\to f(e^{i\theta})$ for $r \to 1$ †.

In fact, if $F(e^{i\theta}) \in H_\theta$ and $G(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})F(e^{i\theta}) \in H_\theta$ $(f \in L)$, we may put $f(z) = G(z) : H(z)$ $(|z| < 1)$, and since the holomorphic functions $G(z) \in H_z, F(z) \in H_z$ are of bounded type (cf. [5], ch. IV, VI), the function $f(z)$ will be of the same type.

Theorem 2. *If $\sigma \in V_L$ and L is not dense in L_σ, then there exists a convergent Blaschke product*

$$B(z) = z^p \prod \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \frac{|a|_k}{a_k} \quad (p \geq 0,\ 0 < |a_k| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots)$$

† A meromorphic function $g(z)$ $(|z| < 1)$ is called a function of bounded type II it is representable as a ratio of two bounded holomorphic functions; such a function is uniquely determined by its boundary values $g(e^{i\theta})$ existing for almost all θ (cf.[5], ch. VI).

possessing the property that every function $B(z)f(z)$ $(f \in L)$ is holomorphic for $|z| < 1$. If we choose the function $B(z)$ in such a way that it should not have "superfluous" zeros, then the function

$$F_\sigma(z) = \sqrt{2\pi} B(z) \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log \sigma'(\theta) d\theta\right\} \quad (|z| < 1) \qquad (5)$$

will possess the following properties:

a) $F_\sigma(z) \in H_z$ *and, moreover,* $F_\sigma(z)f(z) \in H_z$ *for every* $f \in L$;

b) p.p. $\sigma'(\theta) = 1/2\pi|F_\sigma(e^{i\theta})|^2$ *where* $F_\sigma(e^{i\theta}) = \lim_{r\uparrow 1} F_\sigma(re^{i\theta})$;

c) if we put $\Phi_\sigma(e^{i\theta}) = F_\sigma^{-1}(e^{i\theta})$ *at points where* $F_\sigma(e^{i\theta}) \neq 0$ *and where there its the finite derivative* $\sigma'(\theta)$ *, and put* $\Phi_\sigma(e^{i\theta}) = 0$ *at other points, then* $(e^{i\theta}) \in \bar{L}$ ($\bar{L}$ *being the closure of* L *in* L_σ);

d) whatever the orthonormed system $\{D_k\} \subset L$ *complete in* L, *we will have or any two points* z *and* $\zeta(|z| < 1, |\zeta| < 1)$ *different from the zeros of* $B(z)$

$$(1 - z\bar{\zeta}) \sum_{k=1}^{\infty} D_k(z)\overline{D_k(\zeta)} = F_\sigma^{-1}(z)\overline{F_\sigma^{-1}(\zeta)} . \qquad (6)$$

For want of space we omit the proof of this theorem.

Now the following theorem may be easily proved.

Theorem 3. *Under the conditions of Theorem 2 the following assertions are equivalent:*

α) *the meromorphic function* $g(z)$ $(|z| < 1)$ *is developable into the series*

$$g(z) = \sum_1^{\infty} c_k D_x(z), \quad \sum_1^{\infty} |c_k|^2 < \infty \quad (|z| < 1, \quad B(z) \neq 0); \qquad (7)$$

β) *the meromorphic function* $g(z)$ $(|z| < 1)$ *satisfies the condition* $F_\sigma(z)g(z) \in H_z$;

γ) *the meromorphic function* $g(z)(|z| < 1)$ *is of bounded type, and its boundary function* $g(e^{i\theta})$ *coincides almost averywhere with a certain function* $g_0(e^{i\theta}) \in \bar{L}$.

If (7) holds, then

$$\int_0^{2\pi} |g_0(e^{i\theta})|^2 d\sigma(\theta) = \sum_1^\infty |c_k|^2,$$

$$c_k = \int_0^{2\pi} g_0(e^{i\theta}) D_k(e^{i\theta}) d\sigma(\theta) \quad (k = 1, 2, ...), \tag{8}$$

where $g_0(e^{i\theta}) \in \bar{L}$ *almost everywhere coincides with* $g(e^{i\theta})$.

Corollary 1. In the case, where L is the set of all polynomials of $e^{i\theta}$, in Theorem 1 we must omit the condition 2^0 (it follows from the condition 1^0), and in Theorem 2 we have to put $B(z) = 1$. For this case Theorem 1 and the fundamental property c) from Theorem 2 of the function $F_\sigma(z)$ were established by A. Kolmogoroff [1] by means of the notions and arguments of the theory of stationary sequences.

Corollary 2. The orthonormed sequence $\{D_k\} \subset L$ may be constructed in such a way that the function $\zeta D_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, ..., \zeta = e^{i\theta})$ will be linearly expressible through a finite number of the same functions $D_j(\zeta)$ $(j = 1, 2, ...)$.

In fact, let $\{\chi_j\}$ be a certain system of functions from L whose linear envelope is dense in L. Let us denumerate the functions

$$\zeta^k \chi_j(\zeta) \quad (j, k = 1, 2, ...)$$

omittihg those of them which linearly depend on the foregoing ones. Orthonorming the sequense thus obtained by E. Schmidt's process, we arrive at the required sequence $\{D_k\}$.

If L possesses the properties 1), 2), 3) and the orthonormed sequence $\{D_k r\}$ satisfies the condition mentioned above, then we may assert that *eithe the series*

$$\rho(z) = \sum_1^\infty |D_k(z)|^2 \quad (|z| < 1) \tag{9}$$

dicerges everywhere and L is dense in L_σ, or L is not dense in L_σ and the series (9) (by Theorem 2) converges at all points z $(|z| < 1)$ where $B(z) \neq 0$.

C o r o l l a r y 3. If L is the set of all polynomials of $e^{i\theta}$, and $\sigma(\theta)$ is an absolutely continuous functinon satisfying the condition (1), then the formulations of Theorems 2 and 3 may be simplified in an obvious manner. In this case the Theorems 2 and 3 were established by G. Szegö [2] and V. Smirnoff [4] (cf. also [3]).

Concluding we may observe that the Theorems 1, 2 and 3 hang closely together with Theorem 8 of our paper [6].

References

[1] *Колмогоров А.Н.* Бюллетень МГУ. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. - **2**, вып.6; Bull. Acad. Sci. URSS. Ser. math. - 1943. - **5**, N 1.

[2] *Szegö G.*// Math. Z. - 1920. - **6**, II, 3/4; 1921. - **9**, II, 3/4.

[3] *Szegö G.* Orthogonal polynomials. - N.Y., 1939. - **12**, N 1.

[4] *Смирнов В.И.* // Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва. - 1932. - II, вып. 1. - С. 155; Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. math. et sci. nat. - 1932. - **VII**, $\mathcal{N}$ 3.

[5] *Привалов И.И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. - 1941.

[6] *Krein M.* // C.R. Acad. Sci. URSS. - 1944. - **XLIV**, N 6.

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ А.Н. КОЛМОГОРОВА

(Доклады АН СССР. – 1945.– Том XLVI, № 8)

Пусть $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty, \sigma(-\infty) = 0)$ – некоторая ограниченная неубывающая функция, а L_σ – гильбертово пространство всех σ-измеримых и σ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $\varphi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ с обычным определением скалярного произведения:

$$(\varphi, \psi)_\sigma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\bar{\psi}(\lambda) d\sigma(\lambda) \quad (\varphi, \psi \in L_\sigma).$$

Через $L_\sigma(E)$, где E – некоторое множество вещественных чисел t, мы обозначим линейную замкнутую оболочку в L_σ всех элементов $\exp(it\lambda) \in L_\sigma$, где $t \in E$.

А.Н. Колмогорову принадлежит постановка общей проблемы[†] из теории стационарных случайных функций, которая сводится к следующей аналитической проблеме: (К) даны два множества вещественных чисел E_1 и E_2. Какому условию должна удовлетворять неубывающая ограниченная функция $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ для того, чтобы $L_\sigma(E_1) = L_\sigma(E_2)$.

Для случая, когда E_1 – последовательность всех целых (положительных и отрицательных) чисел, меньших данного, а E_2 – последовательность всех целых чисел, равно как и для случая, когда E_1 состоит из конечного числа последовательных целых чисел, а E_2 – последовательность всех прочих целых чисел. Проблема

[†] Сформулирована А.Н. Колмогоровым в письме к автору.

(К) была решена в 1939 г. А.Н. Колмогоровым [1] (подробное решение см. [2, 3])[†].

В том же году, решая проблему продолжения эрмитово-положительных функций, автор попутно (вне всякой связи с исследованиями А.Н. Колмогорова) получил решение проблемы (К) для случая, когда E_1 - конечный интервал, а E_2 - вся бесконечная вещественная ось, однако за недостатком места [4] не сформулировал его. В настоящее время решение проблемы (К) для этого случая (и несколько более общей проблемы) указано автором в конце его заметки [5] о проблеме продолжения винтовых линий в гильбертовом пространстве.

А.Н. Колмогоров обратил внимание автора на особый интерес, который представляет проблема (К) для случая, когда E_1 есть полупрямая, а $E_2(\supset E_1)$ - вся вещественная ось. Ниже приводится решение проблемы (К) для этого случая[††], получающееся как следствие решения некоторого более общего вопроса (см. теорему 1 и ее следствие).

1. Обозначим через H_ζ класс всех голоморфных внутри верхней полуплоскости функций $\varphi(\zeta)$ $(I\zeta > 0)$ таких, что $|\varphi(\zeta)|^2$ имеет в этой полуплоскости гармоническую мажоранту. Голоморфная функция $\varphi(\zeta)$ $(I\zeta > 0)$ принадлежит классу H_ζ в том и только в том случае, если функция

$$f(z) = \varphi(\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = i\frac{1-z}{1+z}, \quad z = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \quad (|z| < 1)$$

принадлежит классу H_z, где через H_z обозначен класс всех голоморфных функций $f(z)$ $(|z| < 1)$ таких, что

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad \text{где} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty.$$

Другое необходимое и достаточное условие, чтобы функция

[†]Для второго случая А.Н. Колмогоров опубликовал решение при условии, что E_1 состоит лишь из одного целого числа [2, 3].

[††]При этом без ограничения общности мы предполагаем, что E_1 есть положительная полуось $t \geq 0$.

$\varphi(\xi) \in H_\zeta$, заключается в том, что $(\zeta + i)^{-1}\varphi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$†, где через $\mathfrak{H}_\zeta$ обозначен класс всех голоморфных функций $\varphi(\zeta)$ $(I\zeta > 0)$ таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda + i\mu)|^2 d\lambda < M_\psi < \infty, \quad \mu > 0.$$

Каждая функция $\varphi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$ почти везде на вещественной оси имеет предельные значения $\varphi(\lambda)$, к которым она стремится по любым некасательным путям. То же, конечно, относится и к функциям $\psi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$.

Через H_λ (соответственно H_θ и $\mathfrak{H}_\lambda$) мы обозначим множество всех граничных функций для функций $\varphi(\zeta) \in H_\zeta$ (соответственно $f(z) \in H_z$ и $\psi(\zeta) \in \mathfrak{H}_\zeta$).

В дальнейшем L_λ означает некоторое линейное множество функций из L_σ, обладающее следующими свойствами: 1) $1 \in L_\lambda$; 2) если $\varphi(\lambda) \in L_\lambda$, то $\exp(it\lambda)\varphi(\lambda) \in L_\lambda$ при $t \geq 0$.

Теорема 1. *Множество $L_\lambda \subset L_\sigma$ не плотно в L_σ в том и только в том случае, когда выполнены два условия:*

$$\text{a)} \qquad -\infty < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \sigma'(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda \quad (< \infty); \tag{1}$$

b) существует функция $\Gamma(\lambda) \in H_\lambda$ *такая, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(\lambda)|^2}{\sigma'(\lambda)} \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} < \infty \quad \text{и} \quad \Gamma(\lambda)\varphi(\lambda) \in H_\lambda$$

при любом $\varphi \in L_\lambda$.

Доказательство. Обозначим через $\overline{L_\lambda}$ замыкание L_λ в L_σ. В силу 2) если $\varphi \in \overline{L_\lambda}$, то также $\exp(it\lambda)\varphi(\lambda) \in \overline{L_\lambda}$ при $t \geq 0$. А так как каждая функция $p(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ вида

$$p(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda) q(t) dt, \quad \text{где} \int_{-\infty}^{\infty} |q(t)| dt < \infty \tag{2}$$

†Это предложение можно, например, усмотреть из теорем VII, IX статьи В.И. Крылова [6].

является пределом некоторой равномерно сходящейся в каждом конечном интервале и равномерно ограниченной последовательности тригонометрических полиномов $P_n(\lambda)$ $(n = 1, 2, ...)$ вида

$$P_n(\lambda) = \sum a_k^{(n)} \exp(it_k^{(n)}\lambda) \quad (t_k^{(n)} \geq 0),$$

то вместе с $\varphi \in \overline{L_\lambda}$ также $p(\lambda)\varphi(\lambda) \in \overline{L_\lambda}$.

В частности, полагая в (2) $c = -1$, $q(t) = \exp(-t)$ $(-\infty < t < < \infty)$, получаем $p(\lambda) = (i - \lambda)(i + \lambda)^{-1}$, и, следовательно,

$$\frac{i-\lambda}{i+\lambda}\varphi(\lambda) \in \overline{L_\lambda}, \quad \text{если} \quad \varphi(\lambda) \in \overline{L_\lambda}. \tag{3}$$

Положим

$$\tau(\theta) = \sigma(\operatorname{tg}(\theta/2)) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \tag{4}$$

и рассмотрим гильбертово пространство L_τ всех τ-измеримых и τ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $g(\theta)$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$. Очевидно, что преобразование

$$g(\theta) = \varphi(\lambda), \quad \lambda = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$$

устанавливает линейное изометрическое соответствие $T(g = T_\varphi)$ между L_σ и L_τ.

Пусть $L_\theta = TL_\lambda$, и значит, $\overline{L_\theta} = T\overline{L_\lambda}$ ($\overline{L_\theta}$ - замыкание L_θ в L_τ). В силу свойств 1) и 3) совокупности L_λ $1 \in L_\theta$ и, если $g \in L_\theta$, то $e^{i\theta}g(\theta) \in L_\theta$. А следовательно, по теореме 1 нашей заметки [7], L_θ не плотно в L_τ в том и только в том случае, если

α) $-\infty \int\limits_{-\pi}^{\pi} \log \tau'(\theta) d\theta$,

β) существует функция $G(\theta) \in H_\theta$ такая, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|G(\theta)|^2}{\tau'(\theta)} d\theta < \infty$$

и $G(\theta)g(\theta) \in H_\theta$ при любом $g(\theta) \in L_\lambda$.

Но если $\overline{L_\theta} \neq L_\tau$, то $\overline{L_\lambda} \neq L_\sigma$ и обратно; с другой стороны, в силу (4) условие а) эквивалентно условию α), а условие β) –

условию b), если иметь в виду преобразование $G(\theta) = \Gamma(\lambda)$ ($\lambda = \mathrm{tg}\theta/2$), преобразование (4) и сказанное ранее о классах H_θ и H_λ.

Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы линейная оболочка L_λ^+ *множества функций* $\exp(it\lambda) \in L_\lambda$ $(t \geq 0)$ *не была плотной в* L_σ, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\sigma(\lambda)$ *удовлетворяла условию (1).*

2. При выполнении условий a) и b) теоремы 1 или, что то же, условий $\alpha), \beta)$, на основании теоремы 2 [6] можно утверждать, что существует сходящееся произведение Бляшке

$$B(z) = z^p \Pi \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \, \frac{|a_k|}{a_k} \quad (p \geq 0, \quad 0 < |a_k| < 1, \quad k = 1, 2, ...)$$

такое, что значения каждой функции

$$B(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \quad (f(e^{i\theta}) \in L_\theta)$$

почти всюду совпадают с предельными значениями некоторой мероморфной внутри единичного круга функции ограниченного вида. Кроме того, если $B(z)$ выбрать так, чтобы оно не имело "лишних" нулей и положить

$$F_\tau(z) = \sqrt{2\pi} B(z) \exp\Big(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log \tau'(\theta) d\theta\Big), \tag{5}$$

то функция $F_\tau(z)$ будет обладать следующими свойствами:

$I'. F_\tau(z) \in H_z$, $F_\tau(e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) \in H_\theta$ при любой $f(e^{i\theta}) \in L_\theta$.

II'. $\tau'\theta = \frac{1}{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2$ (почти всюду).

III'. Если положить: $\Phi_\tau(e^{i\theta}) = F^{-1}(e^{i\theta})$ в точках θ, где $F_\tau(e^{i\theta}) \neq 0$ и существует конечная производная $\tau'(\theta)$ и $\Phi_\tau(e^{i\theta}) = 0$ в прочих точках, то $\Phi_\tau(e^{i\theta}) \in \overline{L_\theta}$.

Полагая

$$\sqrt{2} F_\tau(z) = (\zeta + i) D(\zeta), \quad B(z) = b(\zeta), \quad z = \frac{i - \zeta}{i + \zeta} \quad (I\zeta < 0),$$

из (4), (5) получаем

$$D(\zeta) = \sqrt{2\pi} b(\zeta) \exp\Big(\frac{1}{4\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \lambda\zeta}{\lambda - \zeta} \frac{\log \sigma'(\lambda)}{1 + \lambda^2} d\lambda\Big). \tag{6}$$

В силу $I' - III'$ будем иметь:

I. $D(\zeta) \in H_\zeta$, $D(\lambda)\varphi(\lambda) \in H_\lambda$ при любом $\varphi(\lambda) \in \overline{L_\lambda}$.

II. $\sigma'(\lambda) = \frac{1}{2\pi}|D(\lambda)|^2$ (почти всюду).

III. Если положить $Q(\lambda) = (i + \lambda)^{-1}D^{-1}(\lambda)$ для тех λ, где $D'(\lambda) \neq 0$ и существует конечная производная $\sigma'(\lambda)$ и $Q(\lambda) = 0$ при прочих λ, то $Q(\lambda) \in \overline{L_\lambda}$.

Так как $D(\zeta) \in H_\zeta$, то (см.[8])

$$D(\zeta) = \int_0^\infty \exp(i\zeta t)\gamma(t)dt, \quad D(\lambda) = \lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} \exp(it\lambda)\gamma(t)dt,$$

где

$$\gamma(t) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\exp(-i\lambda t)\gamma(t)dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|D(\lambda)|^2d\lambda.$$

Теорема 2[†]. *Расстояние* $d(s)$ $(s > 0)$ *элемента* $\exp(is\lambda)$ *от* L *в метрике пространства* L_σ *находится по формуле*

$$d(s) = \int_0^s |\gamma(t)|^2dt \quad (s > 0).$$

Из-за недостатка места мы вынуждены опустить доказательство теоремы 2.

З а м е ч а н и е. Из правила построения $B(z)$ и $b(\zeta)$ вытекает, что если L_λ есть L_λ^+, т.е. линейная оболочка элементов $\exp(it\lambda)$ $(t \geq 0)$, то в (6) следует положить $b(s) \equiv 1$. В этом случае, легко видеть, $d(s) > 0$ при всех $s > 0$.

Полученные нами результаты можно истолковать как некоторые предложения, относящиеся к проблеме продолжения полубесконечных унитарных линий ξ_t $(-\infty < t \leq a)$ (см. [5]). Эти предложения обобщаются на случай полубесконечных винтовых линий.

[†] Ср. с теоремой 2 статьи А.Н. Колмогорова [3].

Список литературы

[1] *Kolmogoroff A.* // C. R. – 1939. – **208**. – P.2043.

[2] *Колмогоров А.Н.* // Бюллетень Моск. ун-та. – 1941. – **2**, № 6.

[3] *Колмогоров А.Н.* // Изв. АН СССР. Сер.Мат. – 1941. – **5**, № 1.

[4] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. – 1940. – **XXVI**, № 1.

[5] *Крейн М.Г.* // Там же. – 1944. – **XLV**, № 4.

[6] *Крылов В.И.* // Мат. сб. – 1939. – **6**, № 1. – С.95.

[7] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. – 1945. – **XLV**, № 3.

[8] *Paley R.E.A.C., Wiener N.* Fourier Transforms in the Complex Domain. – N. Y., 1934.

ОБ ОСНОВНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ И ФИЛЬТРАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(Доклады АН СССР. – 1954. – Том XCIV, № 1)

Пусть $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty. \tag{1}$$

Обозначим через Λ_∞ гильбертово пространство σ-измеримых и σ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $F(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ с обычным определением скалярного произведения (F, G) $(F; G \in \Lambda_\infty)$ как интеграла по всей оси от $F(\lambda)\overline{G(\lambda)}d\sigma(\lambda)$.

Пусть $I = (a, b)$ $(-\infty \le a < b < \infty)$ – некоторый интервал вещественной оси $(-\infty < t < \infty)$. Обозначим через Λ_I линейную замкнутую оболочку в Λ_∞ семейства функций аргумента λ:

$$\frac{\exp(it_2\lambda) - \exp(it_1\lambda)}{i\lambda} = \int_{t_1}^{t_2} \exp(i\lambda s)ds \quad (t_1, t_2 \in I).$$

Заметим, что если $\sigma(\lambda)$ – функция ограниченной вариации, то Λ_I можно определить проще, а именно как линейную замкнутую оболочку в Λ_∞ семейства функций $\exp(it\lambda)$ $(t \in I)$. Можно поставить два вопроса:

1. *Каков критерий того, что* $\Lambda_I = \Lambda_\infty$?

2. *Если $\Lambda_I \neq \Lambda_\infty$, то как аналитически выразить ортогональную проекцию $P_I F$ любого элемента $F \in \Lambda_\infty$ на Λ_I ?*

Для случая $I = (-\infty, a)$ вопрос 1 был решен автором еще в 1944 г. [1] и, более того (когда $\sigma(\lambda)$ ограниченной вариации), было найдено $P_I F$ для $F(\lambda) = \exp(it\lambda)$ $(t > a)$.[†] При частных предположениях относительно функций σ и F вопрос об эффективном определении $P_I F$ для $I = (-\infty, a)$ изучался Н. Винером [3], который выяснил его прикладную роль в технике (см. также [4]). Аналитически сформулированные вопросы 1 и 2 можно переформулировать как вопросы теории упреждения (экстраполяции) и фильтрации стационарных случайных процессов по их наблюдению в промежутке времени I. Естественно, что наибольший интерес должны представлять проблемы 1, 2 для случая, когда I – конечный интервал. Однако их исследование в этом случае становится особенно трудным. Не подозревая той прикладной роли, которую имеют проблемы 1, 2, ряд существенных результатов, прямо к ним относящихся, для случая конечного интервала I автор получил еще в 1940 г. [5], а затем в 1943–1944 гг. [6]. В настоящее время удалось получить в некотором отношении полное решение этих проблем. Ниже оно приводится для случая нечетной функции $\sigma(\lambda)$, так как изложение решения в самом общем случае требует предварительных публикаций. Впрочем, в задачах теории вещественных стационарных случайных процессов только этот случай и играет роль.

Рассматривая конечный интервал I , можно без ограничения общности принять, что $I = (-a, a)$, и тогда удобней будет писать вместо Λ_I и P_I соответственно Λ_a и P_a .

1. **Решение проблемы 1.** Итак, пусть $\sigma(-\lambda) = -\sigma(\lambda)$ $(0 < < \lambda < \infty,\ \sigma(0) = 0)$. Положим

$$\tau(\lambda) = 2\sigma(\sqrt{\lambda} - 0) \quad (0 < \lambda < \infty, \quad \tau(0) = 0).$$

[†] Эти результаты были получены автором в ответ на вопрос, поставленный А.Н. Колмогоровым [1]; в 1950 г. их повторил Л. Карунен [2].

В силу (1):

$$\int_0^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda} < \infty.$$

Следовательно [7, 8], $\tau(\lambda)$ будет главной спектральной функцией некоторой струны S, натянутой единичной силой между точками $x = 0$ и $x = l(\leq \infty)$, причем длина l и масса $M(x)$ любого открытого справа отрезка $[0, x)$ $(0 < x < l;\ M(0) = 0)$ струны S будут однозначно определяться функцией $\tau(\lambda)$.

Теорема 1. *Для того чтобы* $\Lambda_a = \Lambda_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$t(x) = \int_0^x \sqrt{M'(s)}ds \leq a \quad (\ 0 < x \leq l\ )$$

и чтобы для всех $x = x_a$, *для которых* $t(x) = a$; $M(x_a) = M(l)$.

2. Рассмотрим случай, когда $\Lambda_a \neq \Lambda_\infty$.

Обозначим через x_{a-0} и x_{a+0} соответственно наименьший и наибольший корень уравнения $t(x) = a$. Таким образом, если $x_{a-0} < x_{a+0}$, то в интервале (x_{a-0}, x_{a+0}) функция $M(x)$ будет иметь почти всюду производную, равную нулю, но никакой больший интервал, содержащий интервал (x_{a-0}, x_{a+0}), уже этим свойством не будет обладать.

Построим решение интегрального уравнения

$$\varphi(x; \lambda) = 1 - \lambda \int_0^x (x-s)\varphi(s;\lambda)dM(s) \quad (\ 0 \leq x < l\ ).$$

Обозначим через $L_M^{(2)}(0, \xi)$, где $0 < \xi \leq l$, совокупность всех функций $f(x)$ $(\ 0 \leq x \leq l\ )$, M-измеримых и удовлетворяющих условию:

$$\int_0^{\xi} |f(x)|^2 dM(x) < \infty.$$

Теорема 2. *Целыми функциями* $F(\lambda)$ *вида*

$$F(\lambda) = \int_0^{x_{a-0}} f(x)\varphi(x;\lambda^2)dM(x) \quad (\, f \in L_M^{(2)}(0, x_{a-0}))$$

исчерпываются все четные функции из Λ_a .

Целыми функциями $G(\lambda)$ *вида*

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{x_{a-0}} g(x)\varphi'(x;\lambda^2)dx$$

$$\Big(\int_0^{x_{a-0}} |g(x)|^2 dx < \infty; \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dx}\Big)$$

исчерпываются все нечетные функции из Λ_a .

Теорема 3. *Целыми функциями* $F(\lambda)$ *вида*

$$F(\lambda) = \int_0^{x_{a+0}} f(x)\varphi(x;\lambda^2)dM(x) \quad (\, f \in L_M^{(2)}(0, x_{a+0}))$$

исчерпываются все четные целые функции $F(\lambda)$, *удовлетворяющие условиям*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) < \infty, \quad \overline{\lim_{\zeta\to\infty}} \frac{\ln|F(\zeta)|}{|\zeta|} \le a \tag{2}$$

$$(\zeta = \lambda + i\mu).$$

Целыми функциями $G(\lambda)$ *вида*

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\int_0^{x_{a+0}} g(x)\varphi'(x;\lambda^2)dx$$

$$\left(\int_0^{x_{a+0}} |g(x)|^2 dx < \infty \right)$$

исчерпываются все нечетные целые функции $G(\lambda)$ *, удовлетворяющие условиям (2).*

При $d\sigma = d\lambda/\pi$ будем иметь: $l < \infty$, $dM = dx$, $\varphi(x;\lambda^2) = \cos\lambda x$, $\varphi'(x;\lambda^2)/\lambda = -\sin\lambda x$ и теоремы 2, 3 перейдут в известную теорему Палей–Винера [9].

3. Решение проблемы 2. Пусть $F \in \Lambda_\infty$. Образуем функции

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\varphi(x;\lambda^2)d\sigma(\lambda),$$

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} F(\lambda)\varphi'(x;\lambda^2)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda};$$

в первом пределе имеется в виду сходимость $L_M^{(2)}(0,l)$, во втором – сходимость в $L^{(2)}(0,l)$, т.е. сходимость в средне-квадратичном на интервале $(0,l)$. Решение проблемы 2 для $I = (-a,a)$ дается формулой

$$P_a F(\lambda) = \int_0^{x_{a-0}} f(x)\varphi(x;\lambda^2)dM(x) + \frac{1}{\lambda}\int_0^{x_{a-0}} g(x)\varphi'(x;\lambda^2)dx.$$

Приведем также формулу для квадрата расстояния F до Λ_a:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda) - P_a F(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) = \int_{x_{a-0}}^{l} |f(x)|^2 dM(x) +$$

$$+ \int_{x_{a-0}}^{l} |g(x)|^2 dx.$$

Семейство проекционных операторов P_a $(a \geq 0,\ P_0 = I)$ образует некоторое спектральное разложение единицы, при этом оператор P_a – слабо непрерывная слева функция аргумента a: $P_{a-0} = P_a$ $(a \geq 0)$. Точка $a \geq 0$ будет точкой слабой непрерывности справа: $P_{a+0} = P_a$ в том и только в том случае, когда $M(x_{a+0}+0) = M(x_{a-0}-0)$, т.е., когда точки x_{a-0} и x_{a+0} суть точки непрерывности функции $M(x)$ и между ними функция $M(x)$ сохраняет постоянное значение.

4. Пусть $l^*(\leq l)$ – наибольшая из точек роста функции $M(x)$. Если функция $M(x)$ при $x \geq +0$ и $< l^*$ имеет две абсолютно непрерывные производные, причем $M'(x) > 0$ при $x \geq +0$, то, полагая

$$T = \int_0^l \sqrt{M'(x)}dx, \quad t = \int_0^x \sqrt{M'(s)}ds,$$

$$\Phi(t,\lambda) = \sqrt[4]{M'(x)}\varphi(x,\lambda) \quad (0 \leq x < l),$$

мы получаем, что $\Phi(t,\lambda)$ является нормированным решением ($\Phi(0,\lambda) = [M'(+0)]^{1/4}$) дифференциальной системы :

$$\frac{d^2u}{dt^2} - q(t)u + \lambda u = 0, \quad u'(0) + (m\lambda - h)u(0) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \tag{3}$$

где

$$q(t) = \frac{\Phi''(t,0)}{\Phi(t,0)} \quad (0 \leq t < T); \quad h = \frac{M''(+0)}{2[M'(+0)]^{3/2}};$$

$$\sqrt{M'(+0)}m = M(+0) = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda)} \ (\geq 0).$$

В этом случае для любого $F \in \Lambda_\infty$ будем иметь[†]

$$P_aF(\lambda) \doteq \int_0^a f(t)\Phi(t,\lambda^2)dt +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^a g(t)\psi(t,\lambda^2)dt + m\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)d\sigma(\lambda), \tag{4}$$

[†]При $m = 0$ последний член правой части (4) полагается равным нулю независимо от того, имеет ли смысл интеграл, при котором стоит m.

где

$$\psi(t,\lambda) = \Phi(t,0)\frac{d}{dt}\left[\frac{\Phi(t,\lambda)}{\Phi(t,0)}\right] \quad (0 \le t < T), \tag{5}$$

$$f(t) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} F(\lambda)\Phi(t,\lambda^2)d\sigma(\lambda), \tag{6}$$

$$g(t) = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N} F(\lambda)\psi(t,\lambda^2)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda},$$

причем пределы понимаются в смысле сходимости в средне-квадратичном на интервале $(0,T)$. Кроме того, будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda) - P_a F(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_a^T |f(t)|^2 dt + \int_a^T |g(t)|^2 dt \quad (0 < a \le T).$$

Обратно, если у какой-либо системы (3) (с $m \ge 0$, $-\infty < h < \infty$) спектр положителен и $\Phi(t,\lambda)$ есть решение системы (3), нормированное, например, условием $\Phi(0,\lambda) = 1$, а $\tau(\lambda)$ $(0 < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ – соответствующим образом нормированная ортогональная спектральная функция (какая-либо, если она не определяется единственным образом), то для функции

$$\sigma(\lambda) = \operatorname{sign}\lambda\tau(\lambda^2) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

Λ_a будет отлично от Λ_∞ только при $a < T$, и при $a < T$ проблема 2 будет решаться формулами (4), (5) и (6).

Таким образом, эффективное решение проблем 1, 2 упирается в эффективное построение функций $M(x)$, $\varphi(x,\lambda)$ (а в некоторых случаях одной только функции $\Phi(t,\lambda)$), соответствующих в указанном выше смысле данной функции $\sigma(\lambda)$. Ряд случаев, когда возможно такое эффективное построение, мы указали в предыдущей заметке [8]. В следующей заметке мы покажем, что это возможно всякий раз, когда функция σ аналитична и $d\sigma/d\lambda$ есть рациональная функция, а также во многих других случаях (например, когда $d\sigma/d\lambda$ получается делением единицы на тригонометрический многочлен).

Список литературы

[1] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. - 1945. - **46**, № 8.

[2] *Kazhunen K.* // Ark. f. Mat. - 1950. - **1**, N 2.

[3] *Wiener N.* // Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, 1950.

[4] *Яглом А.* // Успехи матем. наук. - 1952. - **7**, № 5.

[5] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. - 1940. - **24**, № 1.

[6] *Крейн М.* // Там же. - 1944. - **44**, № 5; **45**, № 4; № 5.

[7] *Крейн М.* // Там же. - 1952. - **87**, № 6.

[8] *Крейн М.* // Там же. - 1953. - **93**, № 4.

[9] *Ахиезер Н.И.* // Лекции по теории аппроксимации, 1943.

О ПРОБЛЕМЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭРМИТОВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ †.

(Доклады АН СССР. – 1940. – Том XXVI, № 1)

1. Через $\mathfrak{B}_A$ $(0 < A \leq \infty)$ мы будем обозначать совокупность всех непрерывных функций, определенных в открытом интервале $(-A, A)$ и удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) функция $f(x)$ является эрмитовой, т.е. $f(-x) = \overline{f(x)}$ $(-A < x < A)$;

2) каковы бы ни были числа $0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, эрмитова форма

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(x_j - x_k)\xi_j\bar{\xi}_k \tag{1}$$

неотрицательна.

S. Bochner [1] впервые доказал, что класс функций $\mathfrak{B}_\infty$ совпадает с классом всех тех функций $F(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, которые допускают представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

†Одновременно другим путем близкие результаты были получены А.П. Артеменко, учеником М.Г. Крейна. Они были опубликованы значительно позднее: *Артеменко А.П.* Эрмитово-положительные функции и позитивные функционалы // Теория функций, функцион. анализ и их прилож. – 1984. – Вып. 41. – С.3–16; Вып. 42. – С.3–21. (*Прим. ред.*)

где $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ – некоторая неубывающая функция ограниченной вариации $(\sigma(\infty)-\sigma(-\infty) < \infty)$. Эта теорема допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Для того чтобы заданная в интервале $(-A, A)$ функция $f(x)$ допускала представление*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-A < x < A), \tag{3}$$

где $\sigma(t)$ – некоторая неубывающая функция ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathfrak{B}_A$.

Необходимость условия тривиальна. Идея доказательства его достаточности заключается в следующем.

Обозначим через L_A линейную совокупность всех функций $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ix_k t}, \tag{4}$$

где $-A < x_k < A$, а c_k – некоторые комплексные числа $(k = 1, 2, ..., n; \quad n = 1, 2, ...)$. Определим на пространстве L_A линейный (т.е. аддитивный и однородный) функционал $\Phi(\varphi)$, положив для $\varphi(t)$ вида (4)

$$\Phi(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k).$$

Без особого труда можно показать, что если $f(x) \in \mathfrak{B}_A$, то функционал $\Phi(\varphi)$ положителен, т.е. $\Phi(\varphi) \geq 0$ при $\varphi(t) \geq \geq 0$ $(-\infty < t < \infty)$. Распространим тогда функционал $\Phi(\varphi)$ на все пространство L_∞, сохранив его положительность, а затем положим $F(x) = \Phi(e^{ixt})$ $(-\infty < x < \infty)$. Тогда $f(x) = F(x)$ при $-A < x < A$ и

$$\sum_{j,k=1}^{n} F(x_j - x_k)\xi_j\bar{\xi}_k = \Phi\Big(|\sum_{j=1}^{k} \xi_j e^{ix_j t}|^2\Big) \geq 0$$

при любых $x_j \in (-\infty, \infty)$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Кроме того, функция $F(x)$ непрерывна. Это вытекает из следующего общего замечания, которым автор обязан А.П. Артеменко.

Если функция $f(x)$ $(-A < x < A)$ непрерывна в точке 0 и эрмитово положительна в открытом инварианте $(-A, A)$ [т.е. удовлетворяет условиям 1), 2)], то она равномерно непрерывна в этом интервале [это остроумное замечание легко получается из рассмотрения формы (1) при $n = 3$].

Таким образом, $F(x) \in \mathfrak{B}_\infty$, а следовательно, допускает представление (2). Откуда $f(x)$ допускает представление (3).

Если $f(x) \in \mathfrak{B}_A$ $(0 < A < \infty)$, то существует $\lim\limits_{x \to A} f(x)$, поэтому без ограничения общности мы будем в дальнейшем считать, что каждая функция $f(x) \in \mathfrak{B}_A$ $(0 < A < \infty)$ определена в замкнутом интервале $(-A, A)$.

Неубывающие функции $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ в представлении (3) мы будем всегда так нормировать, что

$$\sigma(-\infty) = 0, \quad \sigma(t) = \frac{\sigma(t-0) + \sigma(t+0)}{2} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Совокупность всех нормированных функций $\sigma(t)$, дающих представление (3), обозначим через V_f. В зависимости от того, состоит ли V_f из одной или многих функций $\sigma(t)$, мы будем говорить, что проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{B}_A$ определенна или неопределенна.

Дальнейшая часть статьи посвящена решению вопроса, когда имеет место тот или иной случай [определенности или неопределенности проблемы продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{B}_A$]. Построенная нами теория представляет удивительно много аналогий с классической проблемой моментов; ее результаты в отдельных своих частях напоминают результаты исследований Hamburger [2], R. Nevanlinna [3, 4], M. Riesz [5, 6] и H. Weyil [7] по проблеме моментов, проблеме Nevanlinna–Pick и теории дифференциальных уравнений. Однако наши методы во многих отношениях отличны от методов названных авторов.

2. Обозначим через B_A совокупность всех целых комплексных функций $g(t)$, обладающих следующими двумя свойствами:

1) $\sup|g(t)| < \infty \quad (-\infty < t < \infty)$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty} r^{-1}M(r) \leq A$ $(\exp M(r) = \max\limits_{0\leq\varphi\leq 2\pi} |g(re^{i\varphi})|)$, а через B_A^+ – совокупность всех целых комплексных функций $g(t)$ таких, что $g(t)e^{iAt} \in B_a$. Очевидно, $B_A^+ \subset B_a$.

Из недавних исследований Б.М. Левитана [8] вытекает, что для каждой функции $g(t) \in B_A$ можно построить последовательность тригонометрических полиномов

$$T_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(kA/n)t},$$

ограниченных по модулю константой $C = \sup|g(t)|$ и сходящихся равномерно в каждом конечном интервале к функции $g(t)$. Из этого предложения непосредственно следует

Лемма 1. *Пусть* $g(t) \in B_A$, $f(x) \in \mathfrak{B}_A$, $\sigma(t) \in V_f$. *Тогда величина*

$$\Phi_f(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)d\sigma(t)$$

зависит только от f *и* g *и не зависит от* σ.

Таким образом, если $f \in \mathfrak{B}_A$ зафиксировать, то $\Phi_f(g)$ будет некоторым линейным и, очевидно, положительным функционалом, определенным на B_A. Нам понадобится также следующая лемма:

Лемма 2. *Если* $g(t) \in B_A$, $Iz_k > 0$, $c_k = a_k + ib_k$ *и функция*

$$\varphi(t) = g(t) + \Re\left\{\sum_{1}^{n} \frac{c_k}{t - z_k}\right\} \geq 0,$$

то существует такая функция $P(t) \in B_A^+$ *и такие константы* $\gamma_k = \alpha_k + i\beta_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$, *что*

$$\varphi(t) = |P(t) + \sum_{1}^{n} \frac{\gamma_k}{t - z_k}|^2.$$

При этом выражение, стоящее под знаком модуля, можно так построить , чтобы его нули лежали в одной полуплоскости $Iz \geq 0$.

При $c_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, очевидно, $\gamma_k = 0$ $(k = 1, 2, ..., n)$, и это предложение следует рассматривать как обобщение известной теоремы Feyer – Riesz [9] о неотрицательных полиномах.

Условимся относить к каждой функции $\sigma(t) \in V_f$ аналитическую функцию $w_\sigma(z)$ $(Iz > 0)$, определяемую равенством

$$w_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}.$$

Проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{B}_A$ является, очевидно, определенной тогда и только тогда, когда $w_\sigma(z)$ не зависит от $\sigma \in V_f$.

Теорема 2. *Проблема продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{B}_A$ является определенной, если существует какая-либо неотрицательная функция $g(t) \in B_A$ $(g(t) \not\equiv 0)$, для которой $\Phi_f(g) = 0$.*

Действительно, согласно лемме 2 $g(t) = |P(t)|^2$, где $P(t) \in$ $\in B_A^+$. Поэтому, если положить

$$Q(z) = \Phi_f\Big(\frac{P(t) - P(z)}{t - z}\Big) \quad (Iz > 0),$$

то при $\sigma(t) \in V_f$, в силу неравенства Шварца,

$$|P(z)w_\sigma(z) + Q(z)| = \Big|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{t - z} d\sigma(t)\Big| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |P(t)|^2 d\sigma(t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{|t - z|^2} = 0.$$

Следовательно, $w_\sigma(z) = -Q(z)\{P(z)\}^{-1}$ не зависит от $\sigma(t)$.

3. В силу теоремы 2 мы можем в дальнейшем ограничиться рассмотрением только несингулярного случая, когда при любом $P(t) \in B_A^+$ $(P(t) \not\equiv 0)$ выполняется условие $\Phi_f(|P(t)|^2) > 0$.

Определим тогда в B_A^+ скалярное произведение двух элементов $P, Q \in B_A^+$ равенством $(P, Q) = \Phi_f(P(t)\overline{Q}(t))$.

Легко видеть, что тогда B_A^+ обратится в некоторое пространство, обладающее всеми основными свойствами пространства Гильберта, кроме свойства метрической полноты. Пусть $\{D_k(t)\}_1^\infty$ – некоторая замкнутая ортонормированная система функций из B_A^+; положим

$$E_k(z) = \Phi_f\left\{\frac{D_k(t) - D_k(z)}{t - z}\right\}.$$

С помощью леммы 2 и некоторых соображений функционального характера можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть z ($\mathrm{I}z > 0$)- некоторая произвольно фиксированная точка комплексной плоскости. Тогда совокупность всех возможных значений $w_\sigma(z)$ ($\sigma(t) \in V_f$) совпадает с замкнутым кругом $C(z)$ в плоскости w, который можно задать неравенством*[†]

$$\frac{w - \bar{w}}{z - \bar{z}} = \sum_{k=1}^{\infty} |w\bar{D}_k(z) + \bar{E}_k(z)|^2.$$

Этот круг может свестись к точке. Если для какого-нибудь z круг $C(z)$ сводится к точке, то это имеет место для всякого иного z. В этом и только в этом случае проблема продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{B}_A$ является определенной.

После этого можно установить также следующие теоремы:

Теорема 4. *Для того чтобы проблема продолжения функции $f(x) \in \mathfrak{B}_A$ была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\bar{D}_k(z)|^2 \tag{5}$$

сходился равномерно в каждой конечной плоскости z.

При выполнении этого условия сумма ряда (5) для $Iz = y \geq 0$ является монотонно возрастающей функцией от y. Кроме того, будет также сходиться и притом равномерно в каждой конечной

[†] Если $\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$, то мы полагаем $\bar{\varphi}(z) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 z + \cdots$.

области ряд $\sum_1^\infty |\bar{E}_k(z)|^2$. Положим для этого случая:

$$U_1(z) = 1 - z\sum_1^\infty \bar{D}_k(z)E_k(0), \quad U_2(z) = -z\sum_1^\infty \bar{D}_k(z)D_k(0);$$

$$V_1(z) = z\sum_1^\infty \bar{E}_k(z)E_k(0), \quad V_2(z) = 1 + z\sum_1^\infty \bar{E}_k(z)D_k(0).$$

Функции $U_i(z)$ и $V_i(z)$ $(i = 1, 2)$, очевидно, являются целыми функциями.

Теорема 5. *Если проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{B}_A$ является неопределенной, то: 1) уравнение*

$$w = \frac{V_1(z) + tV_2(z)}{U_1(z) + tU_2(z)} \quad (-\infty < t < \infty)$$

является параметрическим уравнением границы окружности $C(z)$; 2) общий вид аналитической функции $w_\sigma(z)$ $(Iz > 0)$ получается по формуле:

$$w = \frac{V_1(z) + \tau(z)V_2(z)}{U_1(z) + \tau(z)U_2(z)},$$

где $\tau(z)$ – произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция, удовлетворяющая там условию $I\tau(z) \geq 0$.

4. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^A f(x-y)\varphi(y)dy \quad (f \in \mathfrak{B}_A).$$

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ – его полная ортонормированная система фундаментальных функций, а $\{\lambda_n\}$ – соответствующая последовательность характеристических чисел.

Соединяя теоремы 2 и 4, можно получить следующий, во многих случаях практически удобный критерий.

Теорема 6. *Для того чтобы проблема продолжения функции $f \in \mathfrak{B}_A$ была неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) для любой функции

$$\tau(x) = \frac{\tau(x+0)+\tau(x-0)}{2} \not\equiv \text{const} \quad (0 \le x \le A)$$

ограниченной вариации

$$\int_0^A \int_0^A f(x-y)d\tau(x)d\tau(y) > 0;$$

2) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left| \int_0^A e^{ixt}\varphi_n(x)dx \right|^2 < \infty$$

сходится при любом t $(-\infty < t < \infty)$.

Функция $f(x) = 1 - |x|$ $(|x| \le A)$ входит в $\mathfrak{B}_A$ тогда и только тогда, если $0 < A \le 2$. В силу теоремы 6 при $0 < A < 2$ проблема продолжения будет неопределенной, а при $A = 2$ будет определенной, и представление

$$1 - |x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x \quad (-2 \le x \le 2)$$

будет единственным представлением типа (3) функции $1 - |x|$ в интервале $(-2, 2)$.

Список литературы

[1] *Bochner S.* Fouriersche Integrale. – Leipzig, 1932.

[2] *Hamburger H.* // Math. Annalen. – 1920–1921. – **81, 82**.

[3] *Nevanlinna R.* // Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Ser. A. – 1922. – **18**.

[4] *Nevanlinna R.* // Ibid. – 1929. – **32**.

[5] *Riesz M.* // Ark. för Matematik, Astronomi och Fysik. - 1921. 1922, 1923. - **16, 17**.

[6] *Riesz M.* // Acta Szeged, 1, Fasc. 4. - 1923.

[7] *Weyl H.* // Annales of Mathematics. - 1935. - **36**, N 1.

[8] *Левитан Б.Љ* // Докл. АН СССР. - 1937. - **XV**, № 4.

[9] *Polya u. Szegö* // Aufgaben und Lehrsatze, Berlin 19, S. 274-275.

О ПРОБЛЕМЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ВИНТОВЫХ ДУГ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Доклады АН СССР. – 1944. – Том XLV, № 4)

1. Непрерывную кривую $\xi = \xi_t \ [t \in (a, b)]$ † в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ $(\xi \in \mathfrak{H})$ мы называем винтовой дугой, если при любых $r, r+s, r+t$, принадлежащих интервалу (a, b) , скалярное произведение

$$B(s,t) = (\xi_{r+s} - \xi_r, \xi_{r+t} - \xi_r) \tag{1}$$

вполне определяется значениями s и t, следовательно, не зависит от r††.

Если, кроме того, $a = -\infty$, $b = \infty$, то кривая $\xi = \xi_t$ $(-\infty < < t < \infty)$ называется винтовой линией.

Нетрудно видеть, что кривая $\xi = \xi_t$ $(-\infty < t < \infty)$ будет винтовой линией в том и только в том случае, когда ее можно представить в виде

$$\xi_t = K_t f \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{2}$$

где K_t $(-\infty < t < \infty)$ – некоторая однопараметрическая непрерывная группа движений пространства $\mathfrak{H}$, а f – вектор из $\mathfrak{H}$. Линии (2) изучались А.Н. Колмогоровым [1] (у него же см. точное определение группы движений K_t).

---

†Интервал (a, b) мы считаем замкнутым, если он конечен; если же какой-либо его конец лежит на бесконечности, то мы его не причисляем к интервалу. Это же замечание относится и к другим интервалам, которые мы будем рассматривать.

††Таким образом, функция $B(s, t)$, в частности, определена для всех $s, t \in \in (0, l)$, где $l = b - a$.

Если пространство $\mathfrak{H}$ вещественно (т.е. в нем определено произведение вектора только на вещественный скаляр и скалярное произведение двух любых его векторов всегда вещественно), то определение винтовой дуги можно упростить, так как независимость от r произведения (1) эквивалентна независимости от r расстояния

$$\| \xi_{r+t} - \xi_r \| \quad [r,\ r+t \in (a,b)].$$

Для этого случая винтовые линии изучали J.von Neumann и J. Schoenberg [2].

В дальнейшем, если не оговорено противное, $\mathfrak{H}$ предполагается комплексным гильбертовым пространством.

Винтовую линию $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}_t$ $(-\infty < t < \infty)$ будем называть полным (винтовым) продолжением дуги $\xi = \xi_t$ $[t \in (a,b)]$, если она имеет дугу своим отрезком, т.е. $\tilde{\xi}_t = \xi_t$ при $t \in (a,b)$.

Обозначим через L_ξ наименьшее замкнутое линейное многообразие, содержащее дугу ξ_t $[t \in (a,b)]$, т.е. замыкание множества точек η вида

$$\eta = \sum_1^n \lambda_j \xi_{t_j} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $t_j \in (a,b)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ а λ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – произвольные комплексные числа, дающие в сумме единицу.

Теорема 1. *Всякая винтовая дуга* ξ_t $[t \in (a,b),\ b - a < \infty]$ *имеет по крайней мере одно полное винтовое продолжение* $\tilde{\xi}_t$ $(-\infty < t < \infty)$, *расположенное в* L_ξ[†].

Если винтовая дуга ξ_t $[t \in (a,b)]$ неоднозначно продолжаема, т.е. она имеет различные полные винтовые продолжения, то те из них, которые расположены целиком в L_ξ, мы будем называть каноническими продолжениями дуги ξ_t.

[†] Если $a = -\infty, b < \infty$ или $-\infty < a, b = \infty$, то существование полного винтового продолжения $\tilde{\xi}_t$ можно утверждать только при условии, что ортогональное дополнение к L_ξ и $\mathfrak{H}$ бесконечномерно. Автор обязан А.Н. Колмогорову замечанием, что в этих случаях может оказаться, что у дуги отсутствуют продолжения, лежащие в L_ξ .

2. Непрерывную дугу ξ_t $[t \in (a,b)]$ будем называть унитарной дугой, если найдется такой центр $p \in \mathfrak{H}$, что скалярное произведение $(\xi_t - p, \xi_s - p)$ будет функцией только от $t - s$. Из этого условия, в частности, вытекает, что унитарная дуга расположена целиком на некоторой сфере $S(p,R)$ $(R > 0)$, т.е.

$$\| \xi_t - p \| = R \quad [t \in (a,b)].$$

Легко видеть, что всякая унитарная дуга есть винтовая дуга. Ясно также, что у всякой унитарной дуги имеется центр, принадлежащий L_ξ. Может случиться (см. теорему 3), что у унитарной дуги в L_ξ находится более одного центра; в этом случае их существует там бесчисленное множество. Если $p \in L_\xi$ – некоторый центр унитарной дуги ξ_t $[t \in (a,b)]$, то точка $q \in L_\xi$ $(q \neq p)$ будет центром этой же дуги в том и только в том случае, если

$$(q - p, \xi_t) = \alpha + i\beta t \quad [t \in (a,b)], \tag{4}$$

где α – некоторая комплексная постоянная, а β – некоторая вещественная постоянная, отличная от нуля. Из (4) следует, что если унитарная дуга ξ_t $[t \in (a,b)]$ является унитарной линией (т.е. $a = -\infty, b = \infty$), то у нее имеется один и только один центр в L_ξ. Расстояние унитарной линии ξ_t $(-\infty < t < \infty)$ до ее центра $p \in L_\xi$ будем называть радиусом этой линии.

Полное унитарное продолжение унитарной дуги определим аналогично полному винтовому продолжению винтовой дуги.

Теорема 2. *Всякая дуга ξ_t $[t \in (a,b), b - a < \infty]$ с центром $p \in L_\xi$ имеет одно и только одно полное унитарное продолжение $\tilde{\xi}_t$ $(-\infty < t < \infty)$ с тем же центром p, причем это продолжение всегда расположено в L_ξ.*

Теорема 3. *Если винтовая дуга ξ_t $[t \in (a,b), b - a < \infty]$ неоднозначно продолжаемая, то она имеет бесчисленное множество канонических продолжений. Среди этих продолжений находится одно и только одно неограниченное продолжение ξ_t^e $(-\infty < t < \infty)$, причем оно имеет вид*

$$\xi_t^e = ut + \eta_t \quad (-\infty < t < \infty), \tag{5}$$

где η_t $(-\infty < t < \infty)$ *– некоторая унитарная линия, расположенная в* L_ξ*, а* u *– некоторый вектор из* L_ξ*, ортогональный к* η_t $(-\infty < t < \infty)$.

Все другие канонические продолжения ξ_t^e $(-\infty < t < \infty)$ дуги ξ_t суть унитарные линии, и их радиусы заполняют некоторый интервал (ρ, ∞). Среди этих продолжений находится одно и только одно продолжение минимального радиуса и два и только два продолжения любого радиуса $R > \rho$.

Из теоремы 3, в частности, следует, что если винтовая дуга ξ_t $[t \in (a,b), b-a < \infty]$ неоднозначно продолжаемая, то она есть некоторая унитарная дуга. Можно также показать, что каково бы ни было линейное замкнутое сепарабельное многообразие L, заключающее в себе L_ξ и центр $q \in L$ $(q \bar{\in} L_\xi)$ дуги ξ_t (неоднозначно продолжаемой), всегда найдется бесчисленное множество различных полных унитарных продолжений $\tilde{\xi}_t$ $(-\infty < t < \infty)$ дуги ξ_t, имеющих тот же центр q и для которых $L_{\tilde{\xi}} = L_\xi$.

Из теорем 2, 3 также вытекает, что унитарная дуга однозначно продолжается до унитарной линии в том и только в том случае, когда у нее имеется только один центр в L_ξ. Этот критерий теряет силу, если положенное в основу гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ предположить вещественным (см. приводимое ниже замечание).

З а м е ч а н и е . Если $\mathfrak{H}$ – вещественное гильбертово пространство, то данное определение унитарной дуги эквивалентно определению унитарной дуги, как винтовой дуги, располагающейся на некоторой сфере, причем центром дуги и будет центр любой сферы, содержащей эту дугу. Теперь у унитарной дуги ξ_t будет единственный центр в L_ξ, который будет ортогональной проекцией на L_ξ всякого иного центра этой дуги (L_ξ по-прежнему будет определяться как замыкание множества точек $\eta \in \mathfrak{H}$ вида (3), но с вещественными λ_j). Теоремы 1, 2 сохраняют силу. Теорему 3 придется сформулировать иначе – неоднозначно продолжаемая винтовая дуга ξ_t $(-\infty < t < \infty)$ будет теперь иметь только два канонических продолжения: одно ξ_t^e вида (5) и другое – унитарное продолжение, радиус которого будет наименьшим в сравнении с радиусами всех других полных унитарных продолжений дуги.

3. Для формулировки дальнейших положений нам понадобятся следующие обозначения. Через $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ мы будем обозначать ограниченную неубывающую функцию, нормированную так, что

$$\sigma(-\infty) = 0,\ \sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

а через L_σ – гильбертово пространство всех σ-измеримых и σ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $f(\lambda)$ с естественным определением скалярного произведения:

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\overline{f(\lambda)}d\sigma(\lambda) \quad (g, f \in L_\sigma).$$

Очевидно, что при любом t $(-\infty < t < \infty)$ функция

$$\varphi_t(\lambda) = (\exp(it\lambda) - 1)\frac{\lambda + i}{\lambda} \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

принадлежит всякому L_σ.

Теорема 4. *Всякой винтовой дуге* ξ_t $[t \in (a, b)]$ *отвечает по крайней мере одна неубывающая ограниченная функция* $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *такая, что*[†]

$$B(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_s(\lambda)\overline{\varphi_t(\lambda)}d\sigma(\lambda). \tag{6}$$

Если $b - a < \infty$, то винтовая дуга ξ_t продолжается однозначно в том и только в том случае, когда ей отвечает только одна функция $\sigma(\lambda)$ с указанным свойством.

Для винтовой линии первая часть теоремы 4 была установлена (в несколько иной формулировке) А.Н. Колмогоровым [4].

[†]Определение функции $B(s, t)$ дано в формуле (1).

Общий случай теоремы можно было бы свести к случаю А.Н.Колмогорова, если бы удалось найти не основанное на теореме 4 (как это имеет место у нас) доказательство существования хотя бы одного полного продолжения у любой винтовой дуги.

Обозначим через V_ξ совокупность всех функций $\sigma(\lambda)$, отвечающих, в указанном в теореме 4 смысле, винтовой дуге ξ_t $[t \in \in (a, b)]$.

В силу теоремы 4, если $\tilde{\xi}_t$ – полное продолжение дуги ξ_t, то $V_{\tilde{\xi}}$ состоит только из одной функции $\sigma(\lambda) \in V_\xi$. Об этой функции $\sigma(\lambda)$ будем говорить, что она порождается полным продолжением $\tilde{\xi}_t$ дуги ξ_t. Нетрудно показать, что если два различных продолжения $\tilde{\xi}_t$ и $\tilde{\xi}'_t$ $(-\infty < t < \infty)$ одной и той же дуги порождают одинаковую функцию $\sigma(\lambda)$, то эти продолжения эквивалентны, т.е. между $L_{\tilde{\xi}}$ и $L_{\tilde{\xi}'}$ можно установить изометрическое соответствие, в силу которого $\tilde{\xi}_t \longleftrightarrow \tilde{\xi}'_t$ $(-\infty < t < \infty)$. Предполагая, что ортогональное дополнение L_ξ до $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, можно далее утверждать, что каждой функции $\sigma \in V_\xi$ отвечает некоторый класс эквивалентных полных продолжений $\tilde{\xi}_t$ дуги ξ_t $[t \in (a, b)]$, ее порождающих.

Отправляясь от какой-либо функции $\sigma \in V_\xi$, построим функцию

$$g_\xi(t) = i\beta t + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{it\lambda} - 1 - \frac{it\lambda}{1+\lambda^2}\right] \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} d\sigma(\lambda)$$

$$[t \in (-l, l)^{-\infty}, \quad l = b - a], \tag{7}$$

где β – произвольно выбранная вещественная постоянная.

В силу (6)

$$B_\xi(s, t) = g_\xi(s-t) - g_\xi(s) - g_\xi(-t). \tag{8}$$

Функция $g(t)$ принадлежит к классу $\mathfrak{G}_l$, который мы исследовали в нашей предыдущей работе [3]. Пользуясь обозначениями этой работы, можно в силу (8) утверждать, что $V_\xi = V_g$. Теория винтовых дуг оказывается теснейшим образом связанной с теорией функций класса $\mathfrak{G}_l$. Так, например, каждое каноническое продолжение $\tilde{\xi}_t$ дуги ξ_t порождает каноническую (в смысле статьи [3]) функцию $\sigma(\lambda) \in V_g$, и обратно, каждая каноническая функция $\sigma(\lambda) \in V_g$ порождается некоторым каноническим продолжением $\tilde{\xi}_t$ дуги ξ_t. Этот факт имеет следующий интересный смысл.

Пусть некоторая функция $\sigma(\lambda)$ и функция $g(t)$ $[t \in (-l, l)]$ связаны соотношением типа (7) (т.е. $g(t) \in \mathfrak{G}_l, \sigma \in V_g$). Тогда для того, чтобы линейная оболочка системы функций от λ $\varphi_t(\lambda)$ $[t \in \in (0, l)]$ была плотна в L_σ, необходимо и достаточно, чтобы либо функция σ была канонической , либо чтобы в V_g иных функций, кроме нее, не было.

Все результаты этой и предыдущей заметки получены на основе наших исследований по обобщенной проблеме моментов [4]. Их детальное обоснование будет изложено в готовящейся к печати монографии: "О некоторых специальных классах эрмитовых операторов и обобщенной проблеме моментов".

Список литературы

[1] *Колмогоров А.* // Докл. АН СССР. - 1940. - **XXVI**, № 1.

[2] *von Neumann J., Schoenberg J.* // Trans. Am. Math. Soc. - 1941. - **50**.

[3] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. - 1944. - **XLV**, № 3.

[4] *Крейн М.* // Там же. - **XLIV**, № 6.

ВИНТОВЫЕ ЛИНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ И ЛОРЕНЦОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(Успехи матем. наук. – 1948. – Том III, вып. 3(25))

Пусть H – либо $(n+1)$-мерное эвклидово пространство ($n = 1, 2, \ldots$), либо вещественное гильбертово пространство. Пусть $\{e_k\}$ – некоторый полный ортонормированный базис пространства H, а J – оператор, определяемый равенством

$$Jx = (x, e_1)e_1 - \sum_{k>1}(x, e_k)e_k.$$

Обозначим через L полость двуполостного гиперболоида:

$$(Jx, x) = 1,$$

выделяемую неравенством: $(x, e_1) > 0$.

В L введем новую метрику, определяя расстояние $d(x, y)$ между двумя точками $x, y \in L$ формулой

$$\operatorname{ch}\frac{d(x, y)}{R} = (x, e_1)(y, e_1) - \sum_{k>1}(x, e_k)(y, e_k) \quad (R > 0).$$

Так, метризованное множество L мы обозначим через L_R и назовем *пространством Лобачевского радиуса кривизны R*. Если H $(n+1)$-мерно, то L_R изометрично обычному n-мерному пространству Лобачевского (при надлежащем выборе в последнем масштабе длины). Если же H бесконечномерно, то L_R будет называться *бесконечномерным пространством Лобачевского.*

Без труда устанавливается **предложение:**

Пусть Q - некоторое абстрактное множество, а $\rho(p,q)$ - неотрицательная симметрическая функция, определенная для всех $p,q \in Q$ такая, что $\rho(p,p) = 0$ $(p \in Q)$. Для того, чтобы существовало отображение $q \to x_q$ множества Q в бесконечномерное L_R, в силу которого

$$\rho(p,q) = d(x_p, x_q) \quad (p,q \in Q),$$

необходимо и достаточно, чтобы для любой системы точек

$$q_1 \in Q, ..., q_m \in Q \quad (m = 1,2,...)$$

квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{m} \operatorname{ch} \frac{\rho(q_i,q_k)}{R} \xi_i \xi_k \tag{$*$}$$

имела не более одного положительного квадрата.

Если же, кроме того , выполняется то условие, что при любом выборе системы точек q_i $(i = 1,2,...,m;$ $m = 1,2,...)$ ранг формы $(*)$ не прывышает $n+1$, то в этом и только в этом случае указанное отображение возможно в n-мерное пространство Лобачевского.

Непрерывная линия $x = x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ метрического пространства M называется *винтовой линией* , если при любых s,t $(-\infty < s,\ t < \infty)$ расстояние $d(x(s),x(t))$ есть функция разности $s-t$:

$$d(x(s),x(t)) = \Delta(s-t).$$

Четную функцию $\Delta(t)$ назовем *метрической функцией* винтовой линии.

Теорема. *Для того чтобы функция $\Delta(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ была метрической функцией некоторой винтовой линии S пространства L_R данного радиуса R, необходимо и достаточно, чтобы эта функция допускала одно из двух представлений:*

1) либо представление

$$\operatorname{ch}\frac{\Delta(t)}{R} = \mu \operatorname{ch}\rho t - \int_0^\infty \cos\lambda t d\sigma(\lambda), \tag{1}$$

где $\mu, \rho > 0$, *а* $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(0 \leq \lambda < \infty,\ \sigma(0) = 0)$ - *ограниченная неубывающая функция такая, что*

$$\mu - \int_0^\infty d\sigma(\lambda) = 1;$$

2) либо представление:

$$\operatorname{ch}\frac{\Delta(t)}{R} = 1 + \int_0^\infty \frac{\sin^2\lambda t}{\lambda^2} d\tau(\lambda), \tag{2}$$

где $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(0 \leq \lambda < \infty,\ \tau(0) = 0)$ - *неубывающая функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_1^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^2} < \infty.$$

Представление, допускаемое функцией $\Delta(t)$, *определяется ею единственным образом.*

Из этих представлений вытекает, что винтовые линии могут быть трех типов: *гиперболического*, которому соответствует представление (I) и для которого, следовательно,

$$\Delta(t) \sim R\rho t \quad \text{при} \quad |t| \to \infty;$$

эллиптического, которому соответствует представление (II) с функцией τ , удовлетворяющей условиям:

$$\tau(+0) = \tau(0)\ (=0), \quad \int_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^2} < \infty;$$

винтовые линии этого типа характеризуются тем, что они ограничены; наконец, *параболического* типа, объединяющего оставшиеся случаи. Винтовые линии параболического типа не ограничены, но для них

$$\Delta(t) = \log[\tau(+0)t^2 + o(t^2)] \quad \text{при} \quad |t| \to \infty.$$

Наименьшее линейное многообразие, содержащее винтовую линию S, будет иметь конечное число измерений m, если функция σ или соответственно функция τ будут иметь конечное число p точек роста, при этом в случае (I): $m = 2p$ или $2p+1$ соответственно тому, будет ли $\sigma(+0) > 0$ или $=0$, а в случае (II): $m = 2p$.

Винтовые линии в вещественном гильбертовом пространстве изучались Нейманом и Шенбергом [1], а в комплексном гильбертовом пространстве – А. Н. Колмогоровым [2], который исходил из определения винтовой линии, как траектории непрерывной однопараметрической группы движений пространства (в вещественном случае оба определения совпадают).

Соответственно этому обобщением винтовых линий S в L_R будут линии γ, представляющие собой траектории непрерывной однопараметрической абелевой группы U_t $(-\infty < t < \infty)$ лоренцовых преобразований в вещественном или комплексном гильбертовом пространстве H. Поясним, что *лоренцовым преобразованием* в H мы называем однозначное отображение U пространства H на самое себя, при котором

$$(JU_x, Uy) = (Jx, y) \quad (x, y \in H).$$

Лоренцовы преобразования U также делятся на 3 типа: гиперболический, эллиптический и параболический (см. [3]). Первые два имеют простую спектральную структуру, а третий – значительно более сложную.

После того, как докладчику удалось построить своего рода спектральный анализ параболических преобразований, оказалось возможным полное исследование линий γ в самом общем случае.

Докладчик остановился также на связи его исследования с исследованиями Л.С. Понтрягина [4] по эрмитовым операторам в пространствах с индефинитной метрикой.

Список литературы

[1] *v.Neumann J., Schoenberg I.J.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **50**, N2.

[2] *Колмогоров А.Н.* // Докл. АН СССР. – 1940. – **XXVI**, *N* 1.

[3] *Крейн М.Г., Рутман М.А.* // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 1.

[4] *Понтрягин Л.С.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1944. – **8**.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ГАНКЕЛЕВЫ МАТРИЦЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ КАРАТЕОДОРИ–ФЕЙЕРА И И.ШУРА

(Совместно с В.М.Адамяном и Д.З.Аровым)

(Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Том 2, вып. 4)

Введение

В этой работе мы будем придерживаться обозначений, введенных в [1]. В частности, если $f(\zeta)$ $(\zeta = e^{i\theta})$ – суммируемая функция $(f(\zeta) \in L_1)$, то через $c_k(f)$ $(k = 0, \pm 1, ...)$ обозначаются ее коэффициенты Фурье,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \oint f(\zeta)\zeta^k d\theta, \quad k = 0, \pm 1, ... \tag{0.1}$$

Как и в [1], ненулевой последовательности $\{\gamma_j\}_1^\infty$ $(\sum |\gamma_j| > 0)$ будем относить бесконечную ганкелеву матрицу $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$.

В [1] рассматривалась следующая обобщенная задача Каратеодори–Фейера.

З а д а ч а А). Среди всех функций f из L_∞ с заданной "главной частью"

$$\pi_- f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\zeta^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} \tag{0.2}$$

найти ту, которая наименее уклоняется от нуля в метрике L_∞.

Решение задачи A) мы назвали минифункцией (для матрицы $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$).

В отправной теореме работы [1] среди прочих результатов содержалась следующая теорема Z.Nehari [2].

Для того чтобы существовала функция $f(\zeta)$ из L_∞ с заданной "главной частью" (0.2), необходимо и достаточно, чтобы ганкелева матрица $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ была ограниченной. При выполнении этого условия существует решение f_μ задачи A) и $\| f_\mu \|_\infty = \| \Gamma \|$, где $\| \Gamma \|$ – норма матрицы Г.

Если задача A) имеет единственное решение f_μ, то будем называть минифункцию f_μ недеформируемой. В противном случае минифункцию будем называть деформируемой.

В [1] подробно исследован случай, когда матрица Г имеет достижимую норму, т.е. в ℓ_2 существует Г-экстремальный вектор

$$\xi : \| \Gamma\xi \| = \| \Gamma \| \, \| \xi \| > 0.$$

В частности, показано, что такой матрице Г отвечает единственная минифункция f_μ .

Достижимость нормы у матрицы Г является лишь достаточным условием единственности минифункции. В §2 настоящей статьи мы получим необходимое и достаточное условие единственности минифункции. Для случая, когда задача A) имеет не единственное решение (минифункции деформируемы), в §4 будет дано описание всех решений. Используемые здесь методы существенно отличны от применявшихся в [1] . В частности, нами широко будет использована теория обобщенных резольвент и теория обобщенных спектральных функций изометрического оператора. Именно на этом пути будет получено описание всех решений также и следующей задачи C)†:

З а д а ч а C). Среди всех функций $f(\zeta)$ из L_∞ с заданной "главной частью" (0.2) найти ту, уклонение которой от нуля в метрике L_∞ не превосходит заданного числа $\rho > 0$.

Решение задачи C) будем называть $(\Gamma; \rho)$-функцией.

---

†Задача B) – обобщенная задача Ф. Рисса – была полностью исследована нами в [1].

Согласно теореме Z. Nehari задача C) имеет смысл лишь для ограниченных матриц $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ и лишь при $\rho > \| \Gamma \|$. При $\rho = \| \Gamma \|$ понятие $(\Gamma;\rho)$-функции, очевидно, совпадает с понятием минифункции.

Очевидно, что задача C) для финитной последовательности $\{\gamma_j\}_1^\infty$ ($\gamma_j = 0$ при всех достаточно больших j) равносильна известной задаче И. Шура [3]:

З а д а ч а C_0). Найти функцию $f(\zeta)$ из H_∞^+ с заданными первыми $n+1$ членами разложения функции в ряд Маклорена

$$f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots,$$

для которой $\| f \|_\infty \le \rho$.

В конце §4 для $\rho > \| \Gamma \|$ приводятся формулы, дающие явные выражения через Γ и ρ функций, с помощью которых записывается общее решение задачи C). Возможно, что эти формулы не были известны даже для классической задачи C_0).

§1. Изометрический оператор $V_{\Gamma;\rho}$. Основная лемма

Пусть $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ – ограниченная ганкелева матрица и ρ – фиксированное число, причем $\rho \ge s = \| \Gamma \|$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\ell = \ell_2 \oplus \ell_2$ векторов

$$g = (\xi;\eta),\ \xi,\ \eta \in \ell_2,$$

оператор $H_{\Gamma;\rho}$, определяемый матрицей

$$H_{\Gamma;\rho} = \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\rho}\bar{\Gamma} \\ \frac{1}{\rho}\Gamma & I \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Наряду с обычным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ рассмотрим в ℓ новое скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{\Gamma;\rho}$, полагая для $g, g' \in \ell$

$$(g,g')_{\Gamma;\rho} = (H_{\Gamma;\rho}\, g, g'). \tag{1.2}$$

Так как $\rho \ge s$, то $H_{\Gamma;\rho} \ge 0$, и потому новое скалярное произведение семидефинитно. При $\rho > s$ оператор $H_{\Gamma;\rho}$ ограниченно обратим. Новая метрика в этом случае эквивалентна обычной, поскольку

$$(1-\frac{s}{\rho})(g,g) \leq (g,g)_{\Gamma;\rho} \leq (1+\frac{s}{\rho})(g,g).$$

Обозначим гильбертово пространство векторов из ℓ с метрикой $(\cdot,\cdot)_{\Gamma;\rho}$ $(\rho > s)$ через $\ell_{\Gamma;\rho}$. При $\rho = s$ через $\ell_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{\Gamma;\rho}$ обозначим гильбертово пространство, которое получается после факторизации и пополнения ℓ по новой метрике $(\cdot,\cdot)_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} (\cdot,\cdot)_{\Gamma;\rho}$ $(\rho = s)$. Необходимость в факторизации ℓ возникает лишь в случае, когда норма матрицы Γ достигается, т.е. существует Γ-экстремальный вектор

$$\xi : \| \Gamma_\xi \| = \| \Gamma \| \cdot \| \xi \| > 0, \qquad \xi \in \ell_2.$$

Через T обозначим оператор сдвига в ℓ: если $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$, $\eta = \{\eta_k\}_1^\infty$, то $T(\xi;\eta) = (\xi';\eta')$, где

$$\xi' = (\eta_1, \xi_1, \xi_2, \ldots), \quad \eta' = (\eta_2, \eta_3, \ldots).$$

Подпространства $\ell_2 \oplus \{0\}$ и $\{0\} \oplus \ell_2$ векторов из $\ell = \ell_2 \oplus \ell_2$ вида $g_+ = (\xi;0)$ и $g_- = (0;\eta), \xi, \eta \in \ell_2$ обозначим соответственно через ℓ_2^+ и ℓ_2^-. Так как $(g_\pm, g'_\pm)_{\Gamma;\rho} = (g_\pm, g'_\pm)$ $(\rho \geq s)$ для $g_\pm, g'_\pm \in \ell_2^\pm$, то ℓ_2^+ и ℓ_2^- можно рассматривать как подпространства в $\ell_{\Gamma;\rho}$, причем

$$\overline{\ell_2^+ + \ell_2^-} = \ell_{\Gamma;\rho} \ \ (= \ell_2^+ + \ell_2^- \ \text{ при } \rho > s). \tag{1.3}$$

Замыкание, разумеется, понимается в метрике $\ell_{\Gamma;\rho}$.

Легко проверить, что оператор T отображает изометрично в $\ell_{\Gamma;\rho}$ линеал $T^*\ell_2^- + \ell_2^+$ на линеал $\ell_2^- + T\ell_2^+$. Замыкание этого изометрического отображения обозначим через $V_{\Gamma;\rho}$. Изометрический оператор $V_{\Gamma;\rho}$ в пространстве $\ell_{\Gamma;\rho}$ имеет область определения

$$= \overline{T^*\ell_2^- + \ell_2^+} \ \ (= T^*\ell_2^- + \ell_2^+ \ \text{ при } \rho > s) \tag{1.4}$$

и область значений

$$\Delta_V = \overline{\ell_2^- + T\ell_2^+} \ \ (= \ell_2^- + T\ell_2^+ \ \text{ при } \rho > s). \tag{1.5}$$

При $\rho > s$ новая метрика в ℓ эквивалентна обычной, и потому в этом случае изометрический оператор $V_{\Gamma;\rho}$ имеет индекс дефекта (1.1). Как будет видно из дальнейшего, при $\rho = s$ оператор $V_\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} V_{\Gamma;\rho}$ может иметь индексы дефекта (1,1) либо (0,0).

Обозначим:

$$e_+ = (e;0)(\in \ell_2^+), \qquad e_- = (0;e)(\in \ell_2^-),$$

где $e = \{\delta_{1k}\}_1^\infty$ – вектор из ℓ_2, первая координата которого равна единице, а остальные – нулю.

Основная лемма. *При любом ρ $(\rho \geq s = \| \Gamma \|)$ формулой*

$$f(e^{i\theta}) = 2\pi\rho e^{-i\theta}\frac{d}{d\theta}(E_\theta e_+, e_-)_{\Gamma;\rho} \tag{1.6}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие между обобщенными спектральными функциями E_θ изометрического оператора $V_{\Gamma;\rho}$ и $(\Gamma;\rho)$-функциями $f(e^{i\theta})$.

Доказательство. Пусть E_θ – произвольная обобщенная спектральная функция изометрического оператора $V_{\Gamma;\rho}$, а U – (минимальное) унитарное расширение этого оператора в некоторое гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ $(\supset \ell_{\Gamma;\rho})$, порождающее спектральную функцию E_θ. Так как при любом $k > 0$

$$U^{\pm k}e_\pm = T^{\pm k}e_\pm \ \ (\in \ell_2^\pm \subset \ell_{\Gamma;\rho} \subset \mathfrak{H}),$$

то векторы $U^{\pm k}e_\pm$ $(-\infty < k < \infty)$ попарно ортогональны. Поэтому для любых двух тригонометрических многочленов

$$g(\zeta) = \Sigma g_k\zeta^k \ \text{ и } \ h(\zeta) = \Sigma h_k\zeta^k$$

имеем

$$\left|\int_0^{2\pi} h(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d(E_\theta e_+, e_-)_{\Gamma;\rho}\right| = |(h(U)e_+, g(U)e_-)_{\mathfrak{H}}| \leq$$

$$\leq \| h(U)e_+ \|_{\mathfrak{H}} \| g(U)e_- \|_{\mathfrak{H}} = \sqrt{\Sigma|h_k|^2}\sqrt{\Sigma|g_k|^2}.$$

откуда следует, что функция $(E_\theta e_+, e_-)_{\Gamma;\rho}$ абсолютно непрерывна и норма в L_2 оператора умножения на функцию

$$f(e^{i\theta}) = 2\pi\rho e^{-i\theta}\frac{d}{d\theta}(E_\theta e_+, e_-)_{\Gamma;\rho}$$

не превосходит ρ, т.е. $\| f \|_\infty \leq \rho$. Кроме того, при $k \geq 1$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\oint f(\zeta)\zeta^k d\theta = \rho\int_0^{2\pi} e^{i(k-1)\theta}\frac{d}{d\theta}(E_\theta e_+, e_-)_{\Gamma;\rho}d\theta =$$

$$= \rho(U^{k-1}e_+, e_-) = \rho(T^{k-1}e_+, e_-)_{\Gamma;\rho} = \rho(T^{k-1}e_+, H_{\Gamma;\rho}e_-).$$

Так как $T^{k-1}e_+ = (e_k; 0)$, где

$$e_k = \{\delta_{kj}\}_{j=1}^{\infty}, \quad \text{а} \quad H_{\Gamma;\rho}e_- = (\frac{1}{\rho}\bar{\Gamma}e; e),$$

то

$$\rho(T^{k-1}e_+, H_{\Gamma;\rho}e_-) = \rho(e_k, \frac{1}{\rho}\bar{\Gamma}e)_2 = \gamma_k,$$

т.е. функция $f(e^{i\theta})$, определяемая формулой (1.6), является $(\Gamma;\rho)$-функцией.

Пусть теперь $f(\zeta)$ – произвольная $(\Gamma;\rho)$-функция. Введем обозначения:

$$S(\zeta) = \frac{1}{\rho}f(\zeta), \quad \Sigma(\zeta) = 1 - |S(\zeta)|^2, \quad L_2^\Sigma = \overline{\Sigma(\zeta)L_2},$$

$$L_f = L_2 \oplus L_2^\Sigma. \tag{1.7}$$

Рассмотрим изометрическое изображение F пространства $\ell_{\Gamma;\rho}$ в пространство L_f, задаваемое на векторах $g = (\xi;\eta)$ из ℓ (ℓ – плотно в $\ell_{\Gamma;\rho}$ при $\rho = s$ и ℓ совпадает с $\ell_{\Gamma;\rho}$ при $\rho > s$) формулой

$$Fg = [\eta_-(\zeta) + S(\zeta)\xi_+(\zeta)] \oplus \Sigma^{1/2}(\zeta)\xi_+(\zeta), \tag{1.8}$$

где для $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty (\in \ell_2)$, $\quad \eta = \{\eta_k\}_1^\infty (\in \ell_2)$

$$\xi_+(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k\zeta^{k-1}, . \quad \eta_-(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty \eta_k\zeta^{-k}. \tag{1.9}$$

Согласно (1.8)

$$\tilde{e}_+ \stackrel{\text{def}}{=} Fe_+ = S(\zeta) \oplus \Sigma^{1/2}(\zeta), \quad \tilde{e}_- \stackrel{\text{def}}{=} Fe_- = \bar{\zeta} \oplus 0. \qquad (1.10)$$

Оператор $\tilde{U}$ умножения на ζ векторов из L_f является (минимальным) унитарным расширением изометрического оператора $\tilde{V}_{\Gamma;\rho} = F\tilde{V}_{\Gamma;\rho}F^{-1}|F\mathcal{D}_V$, а спектральной функцией оператора $\tilde{U}$ является оператор умножения векторов из L_f на характеристическую функцию промежутка $[0,\theta)$. Поэтому для спектральной функции $\tilde{E}_\theta$ оператора $\tilde{V}_{\Gamma;\rho}$, порожденной унитарным расширением $\tilde{U}$, справедливо выражение

$$(\tilde{E}_\theta \tilde{e}_+, \tilde{e}_-)_{L_f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\theta \zeta S(\zeta) d\theta. \qquad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что спектральная функция $\tilde{E}_\theta = F^{-1}\tilde{E}_\theta F$ оператора $V_{\Gamma;\rho}$ связана с функцией $f(\zeta)$ формулой (1.6).

Единственность определения спектральной функции E_θ по $(\Gamma;\rho)$-функции $f(e^{i\theta})$ с помощью формулы (1.6) следует из того, что $(E_\theta e_\pm, e_\pm)_{\Gamma;\rho} = \frac{\theta}{2\pi}$ и л.з.о. $\{E(\Delta)e_+, E(\Delta')e_-\} = \ell_{\Gamma;\rho}\Delta, \Delta' \subset \subset [0, 2\pi]$.

Лемма доказана†.

§2. Критерий единственности минифункции

Теорема 2.1. *Для того чтобы ограниченной ганкелевой матрице* Γ *отвечала единственная минифункция, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\rho \downarrow s}((\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}e, e)_2 = \infty. \qquad (2.1)$$

† Во второй части доказательства, по существу, мы воспользовались функциональной моделью унитарного сцепления двух полуунитарных операторов $V_+ = V_{\Gamma;\rho}|\ell_2^+$ и $V_- = V_{V;\rho}^{-1}|\ell_2^-$ по субоператору рассеяния $S(\zeta)$ этого сцепления [4].

Напомним, что

$$s = \| \Gamma \|, \quad e = \{\delta_{1k}\}_1^\infty (\in \ell_2).$$

Условие (2.1) означает, что $e \notin (s^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2} \ell^2$.

Из основной леммы следует, что матрица Γ обладает деформируемой минифункцией тогда и только тогда, когда оператор $V_{\Gamma;\rho}$ имеет индекс дефекта (1,1). Для последнего же необходимо и достаточно, чтобы оба функционала $\Phi_{e_+}(g) \overset{\text{def}}{=} (g, e_+)$ и $\Phi_{e_-}(g) \overset{\text{def}}{=} (g, e_-)$ были непрерывны в пространстве ℓ_Γ. Действительно, если, например, функционал $\Phi_{e_+}(g)$ ограничен в ℓ_Γ, то в этом и только в этом случае его можно записать в виде $(g, h)_{\ell_\Gamma}$, где $0 \neq h (\in \ell_\Gamma \ominus \Delta_V)$ – дефектный вектор оператора V_Γ. Последнее следует из того, что $\Phi_{e_+}(g) = 0$ при $g \in \ell_2^- + T\ell_2^+$ и $\Phi_{e_+}(e_+) = 1 \neq 0$.

При исследовании свойства непрерывности функционалов $\Phi_{e_\pm}$ воспользуемся следующим предложением, фактически содержащимся в [5].

Лемма 2.1. *Пусть H – ограниченный неотрицательный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство, получаемое пополнением линеала $\mathfrak{H}$ по метрике $(\cdot,\cdot)_H$,*

$$(g, g')_H \overset{\text{def}}{=} (Hg, g'), \quad g, g' \in \mathfrak{H} . \tag{2.2}$$

Тогда для того чтобы для данного $h (\in \mathfrak{H})$ линейный функционал $\Phi_h(g) = (g, h)$, $g \in \mathfrak{H}$ был непрерывен в $\mathfrak{H}_H$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} ((H + \varepsilon I)^{-1} h, h) < \infty \tag{2.3}$$

или , что одно и то же, $h \in H^{1/2}\mathfrak{H}$.

Применим теперь эту лемму к оператору $H = H_{\Gamma;\rho}$ при $\rho = s (= \| \Gamma \|)$ в пространстве $\mathfrak{H} = \ell (= \ell_2 \pm \ell_2)$.

Лемма 2.2. *Пусть $g_+ = (\xi; 0) \in \ell_2^+$ $(g_- = (0; \eta) \in \ell_2^-)$. Тогда для того чтобы функционал $\Phi_{g_+}(g) = (g, g_+)$ $(\Phi_{g_-}(g) = (g, g_-))$, $g \in \ell$, был непрерывен в ℓ_Γ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{\rho \downarrow s} ((\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1} \xi, \xi) < \infty \quad (\lim_{\rho \downarrow s} ((\rho^2 I - \Gamma\bar{\Gamma})^{-1} \eta, \eta) < \infty). \tag{2.4}$$

Действительно, из леммы 2.1 следует, что функционал $\Phi_{g_+}(g)$ ограничен в том и только в том случае, если

$$\lim_{\rho\downarrow s}(H_{\Gamma;\rho}^{-1}g_+, g_+) < \infty \quad . \tag{2.5}$$

Уравнение $H_{\Gamma;\rho}g', = g_+$ можно переписать в виде системы уравнений в ℓ_2:

$$\xi' + \frac{1}{\rho}\bar{\Gamma}\eta' = \xi, \quad \eta' + \frac{1}{\rho}\Gamma\xi' = 0, \tag{2.6}$$

решение которой при $\rho > s$ записывается в виде

$$\xi' = (I - \frac{1}{\rho^2}\bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}\xi, \quad \eta' = -\frac{1}{\rho}\,\Gamma\,(I - \frac{1}{\rho^2}\bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}\xi. \tag{2.7}$$

Поэтому

$$(H_{\Gamma;\rho}^{-1}g_+, g_+) = (g', g_+) = (\xi', \xi)_2 = ((I - \frac{1}{\rho^2}\bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}\xi, \xi). \tag{2.8}$$

Из (2.5) и (2.8) получаем (2.4).

Аналогично получается второе условие (2.4).

Так как

$$((\rho^2 I - \Gamma\bar{\Gamma})^{-1}e, e)_2 = ((\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}e, e)_2, \quad \rho > s,$$

то при $g_\pm = e_\pm$ на основании леммы 2.2 получаем, что оба функционала $\Phi_{e_+}(g)$ и $\Phi_{e_-}(g)$ $(g \in 1)$ непрерывны в ℓ_Γ в том и только в том случае, если предел, стоящий в левой части (2.1), конечен. Этим завершается доказательство теоремы 2.1. Попутно мы показали, что оператор V_Γ имеет равные индексы дефекта.

§3. Канонические $(\Gamma;\rho)$-функции

Условимся называть $(\Gamma;\rho)$-функцию $f(\zeta)$ канонической, если: 1) изометрический оператор $V_{\Gamma;\rho}$ имеет индекс дефекта (1,1), 2) в формуле (1.6) функции $f(\zeta)$ соответствует ортогональная спектральная функция (т.е. полученная по унитарному расширению оператора $V_{\Gamma;\rho}$ без выхода из пространства $\ell_{\Gamma;\rho}$).

Напомним, что при $\rho > \| \Gamma \|$ условие 1) всегда выполняется, а при $\rho = \| \Gamma \|$ это условие означает, что минифункция $f(\zeta)$ деформируема.

Докажем важную для нас теорему.

Теорема 3.1. *Если* $f(\zeta)$ – *каноническая* $(\Gamma;\rho)$*-функция, то*

$$|f(\zeta)| = \rho \qquad \text{(почти всюду)}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Для произвольной $(\Gamma;\rho)$-функции $f(\zeta)$ рассмотрим

$$S(\zeta) = \frac{1}{\rho} f(\zeta), \quad \Sigma(\zeta) = |S(\zeta)|^2, \quad L_2^\Sigma = \Sigma^{\frac{1}{2}}(\zeta) L_2 \ (\subset L_2),$$

$$L_f = L_2 \oplus L_2^\Sigma$$

и определяемое формулой (1.8) изометрическое отображение F пространства $\ell_{\Gamma;\rho}$ в L_f. Введем обозначения:

$$\tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} = F\ell_{\Gamma;\rho}, \ \ \mathcal{D}_\pm = F\ell_2^\pm, \ \ \mathcal{D}_{\tilde{V}} = F\mathcal{D}_V, \ \ \Delta_{\tilde{V}} = F\Delta_V. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\mathcal{D}_- = H_2^- \oplus \{0\}, \ \ \mathcal{D}_+ = \{S\xi_+ \oplus \Sigma^{1/2}\xi_+, \ \xi_+ \in H_2^+\} \tag{3.3}$$

и в силу (1.3), (1.4) и (1.5)

$$\tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} = \overline{\mathcal{D}_- + \mathcal{D}_+}, \quad \mathcal{D}_{\tilde{V}} = \overline{\xi\mathcal{D}_- + \mathcal{D}_+}, \quad \Delta_{\tilde{V}} = \overline{\mathcal{D}_- + \zeta\mathcal{D}_+}. \tag{3.4}$$

Поэтому

$$L_f \ominus \tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} = \{\xi_+ \oplus \varphi : \bar{S}\xi_+ + \Sigma^{1/2}\varphi \in H_2^-, \ \xi_+ \in H_2^+\}, \tag{3.5}$$

$$L_f \ominus \mathcal{D}_{\tilde{V}} = \{\mathring{\xi}_+ \oplus \varphi : \bar{S}\,\mathring{\xi}_+ + \Sigma^{1/2}\varphi \in H_2^-, \ \mathring{\xi}_+ \in \bar{\xi}H_2^+\}, \tag{3.6}$$

$$L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}} = \{\xi_+ \oplus \varphi : \bar{S}\xi_+ + \Sigma^{1/2}\varphi \in \zeta H_2^-, \ \xi_+ \in H_2^+\}. \tag{3.7}$$

Для $(\Gamma;\rho)$-функции $f(\zeta)$, удовлетворяющей условию теоремы, имеем $L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}} = \tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} \ominus \Delta_{\tilde{V}}$, причем $\dim(L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}}) = 1$. Покажем, что это возможно лишь, когда $\Sigma(\zeta) = 0$ почти всюду. Тем самым теорема будет доказана.

На основании (3.7) дефектное подпространство $L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}}$ состоит из векторов $\xi_+ \oplus \varphi(\in L_f)$ таких, что

$$\bar{S}\xi_+ + \Sigma^{1/2}\varphi = \overset{\circ}{\eta}_-, \tag{3.8}$$

где

$$\xi_+ \in H_2^+, \quad \overset{\circ}{\eta}_- \in \zeta H_2^-, \quad \varphi \in L_2^\Sigma \ (= \overline{\Sigma^{1/2} L_2}).$$

Пусть $\operatorname{ess\,sup}\limits_{|\zeta|=1} \Sigma(\zeta) > 0$, т.е. существует множество $M(\subset [0, 2\pi])$ положительной меры и число $\delta > 0$ такие, что $\operatorname{ess\,inf}\limits_{\theta\in M} \Sigma(e^{i\theta}) \geq \delta$. Рассмотрим функцию $0 \neq \alpha(\zeta) \in H_\infty^+$, у которой $\operatorname{Im}\limits_{\theta\notin M} \alpha(e^{i\theta}) = 0$. (Такую функцию можно построить хотя бы по формулам

$$\alpha(z) = \exp\{-h^2(z)\}, \qquad h(z) = \frac{i}{2\pi} \oint \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \psi(\zeta) d\theta,$$

$$\psi \in L_\infty, \quad \psi(e^{i\theta}) = 0 \ \text{ при } \ \theta \notin M.)$$

Наряду с $\xi_+, \overset{\circ}{\eta}_-$ и φ соотношению (3.8) удовлетворяют также функции

$$\xi'_+ = \xi_+ \alpha (\in H_2^+), \quad \overset{\circ}{\eta}{}'_- = \overset{\circ}{\eta}\bar{\alpha}(\in \zeta H_2^-)$$

и

$$\varphi'(\zeta) = \begin{cases} \Sigma^{-1/2}(\zeta)[\overset{\circ}{\eta}{}'_-(\zeta) - \overline{S(\zeta)}\xi'_+(\zeta)] & \text{при} \quad \theta \in M, \\ \varphi(\zeta)\,\alpha(\zeta) & \text{при} \quad \theta \notin M, \end{cases}$$

т.е. $\xi'_+ \oplus \varphi' \in L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}}$. Взяв $\alpha(\zeta) \neq \text{const}$, получим противоречие условию одномерности дефектного подпространства. Итак, свойство (3.1) имеет место.

Теорема 3.2. *Каноническая* $(\Gamma; \rho)$*-функция* $f(\zeta)$ *представима в виде*

$$f(\zeta) = \rho \frac{\overline{\varphi_e(\zeta)}}{\varphi_e(\zeta)}, \quad (= \rho \ \operatorname{sign}\ \varphi_e^2(\zeta)), \qquad \text{где } \varphi_e(\zeta) \in H_2^+. \tag{3.9}$$

Функция $\varphi_e(\zeta)$ *в (3.9) определяется по* $f(\zeta)$ *, а значит, и по* $\operatorname{sign}\varphi_e^2(\zeta)$ *с точностью до постоянного вещественного множителя и является внешней.*

Доказательство. Пусть $(\Gamma;\rho)$-функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условию теоремы. Тогда согласно теореме 3.1 для $S(\zeta) = \frac{1}{\rho}f(\zeta)$ имеем $|S(\zeta)| = 1$ и, следовательно, $L_f = L_2$, и уравнение (3.8), определяющее дефектный вектор, можно переписать в виде

$$\overline{S(\zeta)}\xi_+(\zeta) = \overset{\circ}{\eta}_-(\zeta), \quad \xi_+ \in H_2^+, \quad \overset{\circ}{\eta}_- \in H_2^-, \tag{3.10}$$

откуда $S(\zeta) = \xi_+(\zeta)/\overline{\overset{\circ}{\eta}_-(\zeta)}$. Учитывая каноническое представление функций $\xi_+(\zeta)$ и $\overset{\circ}{\eta}_-(\zeta)$ из H_2^+ (в виде произведения внутренней и внешней функций) и то, что $|\xi_+(\zeta)| = |\overset{\circ}{\eta}_-(\zeta)|$ (почти всюду), получаем, что

$$S(\zeta) = \varphi_i(\zeta)\,\frac{\varphi_e(\zeta)}{\overline{\varphi_e(\zeta)}},$$

где φ_i и φ_e – соответственно внутренняя и внешняя функция, $\varphi_e \in H_2^+$. Если бы $\varphi_i \neq \mathrm{const}$, то имели бы в одномерном подпространстве $L_f \ominus \Delta_{\tilde V}$ два неколлинеарных вектора φ_e и $\varphi_i\varphi_e$, что невозможно. Следовательно, $\varphi_i = b$ – константа. Относя множитель $b^{1/2}$ к φ_e, получим представление (3.9). Из одномерности дефектного подпространства $L_f \ominus \Delta_{\tilde V}$ следует также, что в представлении (3.9) функция $\varphi_e(\in H_2^+)$ определяется по $f(\zeta)$ с точностью до мультипликативной константы. Поскольку $f(\zeta) = \rho\,\mathrm{sign}\,\varphi_e^2(\zeta)$, эта константа вещественна.

Замечание 3.1. Из теоремы 3.1 следует, что если матрице Г отвечает не единственная минифункция, то найдутся минифункции с постоянным значением модуля. Полное описание всех таких функций будет дано позже (см. замечание 4.3). Если же матрице Г отвечает единственная минифункция, то последняя не обязательно имеет постоянное значение модуля.

В самом деле, пусть

$$f(\zeta) = \chi(\zeta)\overline{b(\zeta)}, \tag{3.11}$$

где $\chi(e^{i\theta})$ – характеристическая функция промежутка

$$(\pi - \alpha, \pi + \alpha), \quad 0 < \alpha < \pi, \quad b(\zeta) = \exp\{\zeta + 1/\zeta - 1\}.$$

Покажем, что определяемая формулой (3.11) функция $f(\zeta)$ является недеформируемой минифункцией. Достаточно убедиться в том, что соотношению

$$\overline{f(\zeta)}\xi_+(\zeta) + (1 - |\overline{f}(\zeta)|^2)^{1/2}\varphi(\zeta) = \overset{\circ}{\eta}_-(\zeta), \quad \xi_+ \in H_2^+ ,$$

$$\overset{\circ}{\eta}_- \in H_2^- \tag{3.12}$$

удовлетворяют лишь $\xi_+ = \overset{\circ}{\eta}_- = \varphi = 0$.

Тогда согласно (3.6) $L_f = \mathcal{D}_{\tilde{V}}$, т.е. V_Γ – унитарный оператор.

Учитывая (3.11), соотношение (3.12) можно переписать в виде

$$b(\zeta)\xi_+(\zeta) + [1 - \chi(\zeta)][\varphi(\zeta) - b(\zeta)\xi_+(\zeta)] = \overset{\circ}{\eta}_-(\zeta). \tag{3.13}$$

После замены переменной $\lambda = i\frac{1+z}{1-z}$ и деления обеих частей равенства (3.13) на $\lambda + i$ получим

$$e^{i\lambda}G_+(\lambda) + [1 - X(\lambda)][G(\lambda) - e^{i\lambda}G_+(\lambda)] = \overset{\circ}{G}_-(\lambda), \tag{3.14}$$

где $G_+(\lambda) = \frac{1}{\lambda+i}\xi_+\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)$ – функция класса Харди $H_2(\Pi_+)$, в верхней полуплоскости

$$\Pi_+(\mathrm{Im}\lambda > 0),$$

$$\overset{\circ}{G}_-(\lambda) = \frac{1}{\lambda + i}\overset{\circ}{\eta}_-\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right) = \frac{a}{\lambda + i} + G_-(\lambda), \quad a = \text{const},$$

$G_-(\lambda)$ – функция класса Харди $H_2(\Pi_-)$, в нижней полуплоскости $\Pi_-(\mathrm{Im}\lambda > 0)$, $1 - X(\lambda) = 1 - \chi\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)$ – характеристическая функция промежутка $(-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}, \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})$. Переходя к преобразованиям Фурье в равенстве (3.14) и применяя теорему Пэли–Винера, убеждаемся, что равенство (3.14) возможно лишь при

$$a = G_+(\lambda) = G_-(\lambda) = [1 - X(\lambda)][G(\lambda) - e^{i\lambda}G_+(\lambda)] = 0.$$

Следовательно, в (3.13) $\xi_+ = \overset{\circ}{\eta}_- = [1 - \chi]\varphi = 0$. Учитывая, что $\varphi \in [1 - \chi]L_2$, получаем также, что $\varphi = 0$.

Итак, $f(\zeta) = \chi(\zeta)\overline{b(\zeta)}$ – недеформируемая минифункция, и у нее $|f(\zeta)| = 0$ при $\theta \notin (\pi-\alpha, \pi+\alpha)$, $|f(\zeta)| = 1$ при $\theta \in (\pi-\alpha, \pi+\alpha)$.

Ясно также, что $f(\zeta)$ не представима в виде $\xi_+(\zeta)/\overset{\circ}{\eta}_-(\zeta), \xi_+ \in$ $\in H_2^+$, $\overset{\circ}{\eta}_- \in \zeta H_2^-$.

Замечание 3.2. Пусть для $f(\zeta)(\in L_\infty)$ имеем $|f(\zeta)| = \mathrm{const}$ (почти всюду). Тогда для того чтобы $f(\zeta)$ была недеформируемой минифункцией, необходимо и достаточно, чтобы $f(\zeta)$ не допускала факторизации вида

$$f(\zeta) = \xi_+(\zeta)/\zeta\eta_-(\zeta), \quad \xi_+ \in H_2^+, \quad \eta_- \in (\zeta)H_2^-. \tag{3.15}$$

Действительно, для $\rho = \| f \|_\infty$, $S = \frac{1}{\rho} f$ будем иметь $|S(\zeta)| = 1$ (почти всюду). Поэтому $\Sigma(\zeta) = 1 - |S(\zeta)|^2 = 0, L_f = L_2$. Равенство (3.6) в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$L_f \ominus \mathcal{D}_{\tilde{V}} = \{\overset{\circ}{\xi}_+ : \overset{\circ}{\xi}_+ \in \bar{\zeta} H_2^+, \quad \bar{S} \overset{\circ}{\xi}_+ \in H_2^-\}. \tag{3.16}$$

Из (3.16) видно, что $L_f \neq \mathcal{D}_{\tilde{V}}$ тогда и только тогда, когда $f(\zeta)$ факторизуема в виде (3.15). Остается вспомнить, что $f(\zeta)$ – недеформируемая минифункция тогда и только тогда, когда оператор $V_{\Gamma;\rho}$ унитарен, т.е. $L_f = \mathcal{D}_{\tilde{V}}$.

Пример. Пусть M – измеримое множество положительной неполной меры на единичной окружности $|\zeta| = 1$, $\chi_M(\zeta)$ – характеристическая функция этого множества, $\gamma_k(M) = c_k(\chi_M(\zeta))$ – коэффициенты Фурье функции $\chi_M(\zeta)$, т.е. $\gamma_k(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_M \zeta^k d\theta$, $\Gamma(M)$ – ганкелева матрица $(\gamma_{j+k-1}(M))_1^\infty$. Оказывается, функция $f(\zeta) = \chi_M(\zeta) - \frac{1}{2}$ является минифункцией для $\Gamma(M)$ и притом единственной. Действительно, $|f(\zeta)| = \mathrm{const}(= 1/2)$, и функция $f(\zeta)$ не представима в виде (3.15), ибо из этого представления следовало бы равенство $\zeta^2\eta_-^2(\zeta) = 4\xi_+^2(\zeta)$, $\eta_- \in H_2^-$, $\xi_+ \in H_2^+$, которое возможно лишь при $\xi_+(\zeta) = \mathrm{const}$, $\zeta\eta_-(\zeta) = \mathrm{const}$.

Замечание 3.3. Доказательство теоремы 3.1 показывает, что справедливо более сильное утверждение, чем сформулированное в ней.

Если $(\Gamma;\rho)$-функции $f(\zeta)$ отвечает в (1.6) спектральная функция E_θ, соответствующая унитарному расширению оператора $V_{\Gamma;\rho}$ в некоторое пространство $\mathfrak{H}$ $(\supset \ell_{\Gamma;\rho})$ и $0 < \dim(\mathfrak{H} \ominus \Delta_V) <$ $< \infty$, то $|f(\zeta)| = \rho$ почти всюду.

З а м е ч а н и е 3.4. Если $(\Gamma;\rho)$-функция представима в виде (3.9), где $\varphi_e^{\pm 1}(\zeta)$ – внешняя функция из H_2^+, то $\dot{f}(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция.

Действительно, из (3.9) и (3.7) следует, что $L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}} \neq \{0\}$, а из условия $\varphi_e^{-1} \in H_2^+$ легко получается, что $\dim L_f \ominus \Delta_{\tilde{V}} = 1$.

З а м е ч а н и е 3.5. Пусть $f(\zeta)$ – функция, все значения которой лежат на дуге окружности $|f| = \rho$ длины, меньшей $\pi\rho$. Тогда $f(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция для соответствующей матрицы Γ , причем $\rho >\| \Gamma \|$.

Для простоты можно считать, что $\rho = 1$ и указанная выше дуга окружности длины 2α $(0 < \alpha < \pi/2)$ расположена в правой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси, так что $\mathrm{Re} f(\zeta) \geq \cos\alpha$. Тогда

$$|f(\zeta) - \cos\alpha| \leq \sin\alpha < 1 \quad (= \| f \|_\infty), \tag{3.17}$$

и потому $f(\zeta)$ не есть минифункция. Так как $|f(\zeta)| = \mathrm{const}$ $(= 1)$ и $f(\zeta)$ не является минифункцией, то на основании замечания 3.2 заключаем, что $f(\zeta)$ факторизуется в виде(3.15). Поскольку функция $\overline{f(\zeta)}$ удовлетворяет тем же условиям, что и $f(\zeta)$, то для нее также имеет место представление вида (3.15). Отсюда следует, что в представлении (3.15) для $f(\zeta)$ функция $\xi_+(\zeta)$ – внешняя, $\xi_+^- \in L_2$ и $\zeta\overline{\xi_+(\zeta)} = \varepsilon\overline{\xi_+(\zeta)}$, где $\varepsilon = \mathrm{const}, |\varepsilon| = 1$. Применяя замечание 3.4, получаем, что $f(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция.

З а м е ч а н и е 3.6. Результат, полученный Хельсоном и Сеге в [6], позволяет сформулировать следующее утверждение:

Для того чтобы функция $f(\zeta) = \rho\frac{\overline{\varphi_e(\zeta)}}{\varphi_e(\zeta)}$, $\varphi_e \in H_2^+$, была канонической $(\Gamma;\rho)$-функцией с $\rho > s$ $(=\| \Gamma \|)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi_e(\zeta)$ удовлетворяла условию

$$\ln|\varphi_e(\zeta)| = r(\zeta) + \widetilde{q(\zeta)}, \tag{3.18}$$

где вещественное $r \in L_\infty$, а $\widetilde{q(\zeta)}$ – функция, гармонически сопряженная к некоторой функции $q(\zeta)$ из L_∞ с $\| q \|_\infty < \frac{\pi}{4}$.

§4. Описание всех $(\Gamma;\rho)$-функций

Пусть $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – фиксированная каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция, $\|\Gamma\|\leq\rho<\infty$, и пусть $f(\zeta)$ – произвольная $(\Gamma;\rho)$-функция, рассматриваемая для тех же Γ и ρ, что и $\overset{\circ}{f}(\zeta)$. Если E_θ и $\overset{\circ}{E}_\theta$ – спектральные функции оператора $V_{\Gamma;\rho}$, связанные формулой (1.6) соответственно с $f(\zeta)$ и $\overset{\circ}{f}(\zeta)$, то

$$f(e^{i\theta})-\overset{\circ}{f}(e^{i\theta})=2\pi\rho e^{-i\theta}\frac{d}{d\theta}((E_\theta-\overset{\circ}{E}_\theta)e_+,e_-)_{\Gamma;\rho}. \tag{4.1}$$

Поэтому при $|z|<1$

$$\begin{aligned}\pi_+[f-\overset{\circ}{f}](z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(\zeta)-\overset{\circ}{f}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\\&=\rho\oint\frac{d((E_\theta-\overset{\circ}{E}_\theta)e_+,e_-)_{\Gamma;\rho}}{\zeta-z}=\\&=\rho((R_z-\overset{\circ}{R}_z)e_+,e_-)_{\Gamma;\rho},\end{aligned} \tag{4.2}$$

где R_z – обобщенная резольвента оператора $V_{\Gamma;\rho}$, соответствующая спектральной функции E_θ, $\overset{\circ}{R}_z$ – резольвента унитарного расширения $\overset{\circ}{U}$ оператора $V_{\Gamma;\rho}$ без выхода из пространства $\ell_{\Gamma;\rho}$, соответствующая спектральной функции $\overset{\circ}{E}_\theta$.

Так как

$$(\pi_-f)(\zeta)=(\pi_-\overset{\circ}{f})(\zeta)\Big(=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\zeta^{-k}\Big),$$

то

$$f(\zeta)-\overset{\circ}{f}(\zeta)=(\pi_+f)(\zeta)-(\pi_+\overset{\circ}{f})(\zeta)=\lim_{r\uparrow1}\pi_+[f-\overset{\circ}{f}](r\zeta),$$

и следовательно,

$$f(\zeta)-\overset{\circ}{f}(\zeta)=\rho\lim_{r\uparrow1}((R_{r\zeta}-\overset{\circ}{R}_{r\zeta})e_+,e_-)_{\Gamma;\rho}. \tag{4.3}$$

Поскольку $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция, для $\overset{\circ}{S}(\zeta) = \frac{1}{\rho}\overset{\circ}{f}(\zeta)$ имеем $|\overset{\circ}{S}(\zeta)| = 1$ и $\tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} = L_{\overset{\circ}{f}} = L_2$, а формула (1.8), определяющая отображение $\overset{\circ}{F}$ пространства $\tilde{\ell}_{\Gamma;\rho}$, переписывается в виде

$$\overset{\circ}{F} g = \eta_-(\zeta) + \overset{\circ}{S}(\zeta)\xi_+(\zeta), \quad g = (\xi,\eta)(\in 1). \tag{4.4}$$

Оператор $\overset{\circ}{U}$ в представлении $\overset{\circ}{F}$ есть оператор $\overset{\circ}{\tilde{U}}$ умножения на ζ функций из L_2, а образом дефектного вектора $g \in \ell_{\Gamma;\rho} \ominus \Delta_V$ при отображении $\overset{\circ}{F}$, как было показано в §3, является внешняя функция $\varphi_e(\zeta)$ из H_2^+, дающая представление (3.9) функции $\overset{\circ}{f}(\zeta)$

$$\overset{\circ}{f}(\zeta) = \rho\frac{\overline{\varphi_e(\zeta)}}{\varphi_e(\zeta)}. \tag{4.5}$$

Будем предполагать дефектный вектор нормированным, так что $\| \varphi_e \|_2 = 1$. Согласно (1.10)

$$\tilde{e}_- = \overset{\circ}{F} e_- = \bar{\zeta}, \quad \tilde{e} = \overset{\circ}{F} e_+ = \overset{\circ}{S}(\zeta). \tag{4.6}$$

Если $f(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция, т.е. R_z – резольвента некторого унитарного расширения U оператора $V_{\Gamma;\rho}$ без выхода из пространства $\ell_{\Gamma;\rho}$, то, поскольку $\overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e = \bar{\zeta}\varphi_e \in \tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} \ominus \mathcal{D}_{\tilde{V}}$, а $\varphi_e \in \tilde{\ell}_{\Gamma;\rho} \ominus \Delta_{\tilde{V}}$, для $\tilde{U} = \overset{\circ}{F}\, U\, \overset{\circ}{F}{}^{-1}$ будем иметь

$$\tilde{U}\, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e = \bar{\varepsilon}\varphi_e, \quad \varepsilon = \text{ const}, \quad |\varepsilon| = 1, \quad \tilde{U}h = \overset{\circ}{\tilde{U}}, \quad h \in L_2 \ominus \{\bar{\zeta}\varphi_e\}.$$

Поэтому

$$\tilde{U}h = \zeta h + (\bar{\varepsilon} - 1)(h, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2\varphi_e, \quad h \in L_2. \tag{4.7}$$

Для $\tilde{R}_z = \overset{\circ}{F}\, R_z\, \overset{\circ}{F}{}^{-1}$ и $\overset{\circ}{\tilde{R}}_z = \overset{\circ}{F}\, \overset{\circ}{R}_z\, \overset{\circ}{F}{}^{-1}$ из (4.7) легко получается формула

$$\tilde{R}_z h - \overset{\circ}{\tilde{R}}_z h = \frac{(1-\bar{\varepsilon})(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z h, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2}{1 - (1-\bar{\varepsilon})(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_e, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2}\, \overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_e$$

и, следовательно,

$$((\tilde{R}_z - \overset{\circ}{\tilde{R}}_z)\tilde{e}_+, \tilde{e}_-)^2 = \frac{(1-\bar{\varepsilon})(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \tilde{e}_+, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2}{1-(1-\tilde{\varphi})(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_e, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2} (\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_e, \tilde{e}_-)_2. \quad (4.8)$$

Имеем, далее, в силу (4.6)

$$(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \tilde{e}_+, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{\zeta - z} \frac{\varphi_e(\zeta)}{\overline{\varphi_e(\zeta)}} \overline{\zeta \varphi_e(\zeta)} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_e(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \varphi_e(z), \quad (4.9)$$

$$(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_e, \tilde{e}_-)_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\varphi_e(\zeta)}{\zeta - z} \zeta d\theta = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_e(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \varphi_e(z), \quad (4.10)$$

$$(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_o, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\varphi_e(\zeta)}{\zeta - z} \overline{\zeta \varphi_e(\zeta)} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{|\varphi_e(\zeta)|^2}{\zeta - z} \zeta d\zeta. \quad (4.11)$$

Обозначим через $\chi(z)$ функцию, связанную с $\varphi_e(\zeta)$ соотношением

$$\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\zeta + z}{\zeta - z} |\varphi(\zeta)|^2 d\theta. \quad (4.12)$$

Тогда, учитывая, что

$$\| \varphi_e \|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \oint |\varphi_e(\zeta)|^2 d\theta = 1.$$

согласно (4.11) получаем

$$(\overset{\circ}{\tilde{R}}_z \varphi_e, \overset{\circ}{\tilde{U}}{}^* \varphi_e)_2 = \frac{1}{1-\chi(z)}. \quad (4.13)$$

Равенства (4.8), (4.9), (4.10) и (4.13) дают

$$((R_z - \overset{\circ}{R}_z)e_+, e_-)_{\Gamma;\rho} = \frac{(\varepsilon - 1)[1-\chi(z)]\varphi_e^2(z)}{1-\varepsilon\chi(z)}, \quad (4.14)$$

а из (4.3), (4.5) и (4.14) получаем, что

$$f(\zeta) = \rho\frac{\varphi_e(\zeta)}{\overline{\varphi_e(\zeta)}} + \rho\frac{(\varepsilon-1)[1-\chi(\zeta)]\varphi_e^2(\zeta)}{1-\varepsilon\chi(\zeta)}. \tag{4.15}$$

Так как из (4.12) следует, что

$$|\varphi_e(\zeta)|^2 = \frac{1-|\chi(\zeta)|^2}{|1-\chi(\zeta)|^2}, \tag{4.16}$$

то из (4.15) после элементарных преобразований находим, что

$$f(\zeta) = \rho\frac{1-\chi(\zeta)}{1-\overline{\chi(\zeta)}}\frac{\varepsilon-\overline{\chi(\zeta)}}{1-\varepsilon\chi(\zeta)}\frac{\varphi_e(\zeta)}{\overline{\varphi_e(\zeta)}}. \tag{4.17}$$

Итак, произвольная каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция $f(\zeta)$ представима в виде (4.17), где $\varepsilon = \mathrm{const}, |\varepsilon| = 1$, а $\chi(\zeta)$ – граничное значение функции $\chi(z)$, определяемой по $\varphi_e(\zeta)$ формулой (4.12). Обозначим через B множество всех функций $\mathcal{E}(\zeta)$ из H^+_∞, для которых $\| \mathcal{E} \|_\infty \le 1$.

Убедимся в том, что формула (4.17) при подстановке вместо константы ε произвольной функции $\mathcal{E}(\zeta) \in B$ также дает $(\Gamma;\rho)$-функцию (уже не обязательно каноническую). Заметим прежде всего, что из (4.12) следует

$$\chi(0) = 0, \quad \chi \in B, \quad \ln\frac{1-|\chi(\zeta)|^2}{|1-\chi(\zeta)|^2} \in L_1. \tag{4.18}$$

Так как $1-\chi(\zeta) \in H^+_\infty$, то $\ln|1-\chi(\zeta)| \in L_1$, а потому из (4.18) следует

$$\ln(1-|\chi(\zeta)|) \in L_1. \tag{4.19}$$

Поэтому, в частности, $|\chi(\zeta)| < 1$ (почти всюду), и, следовательно, при любой функции $\varepsilon = \mathcal{E}(\zeta)(\in B)$ формулой (4.17) определяется функция $f(\zeta)$ с $\| f \|_\infty \le \rho$. Рассмотрим разность $f(\zeta) - \overset{\circ}{f}(\zeta)$. Элементарными преобразованиями получим

$$f(\zeta) - \overset{\circ}{f}(\zeta) = \rho\frac{[\mathcal{E}(\zeta)-1][1-|\chi(\zeta)|^2]}{[1-\overline{\chi(\zeta)}][1-\mathcal{E}(\zeta)\chi(\zeta)]}\frac{\varphi_e(\zeta)}{\overline{\varphi_e(\zeta)}}. \tag{4.20}$$

На основании (4.16) из (4.20) следует

$$h(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} f(\zeta) - \overset{\circ}{f}(\zeta) = \rho \frac{[\mathcal{E}(\zeta) - 1][1 - \chi(\zeta)]\varphi_e^2(\zeta)}{1 - \mathcal{E}(\zeta)\chi(\zeta)} \ . \tag{4.21}$$

Так как $\mathcal{E}(\zeta)\chi(\zeta) \in B$, то $1 - \mathcal{E}(\zeta)\chi(\zeta)$ – внешняя функция (см. [7], с.111, упр.12; с.201). Получаем, что $h(\zeta) \in L_\infty$ и $h(\zeta)$ есть отношение функции из H_1^+ к внешней функции (из H_∞^+). Поэтому $h(\zeta) \in H_\infty^+$. Следовательно, $\pi_-[f - \overset{\circ}{f}](\zeta) = 0$. Итак, $\| f \|_\infty \le \rho$ и $\pi_- f = \pi_- \overset{\circ}{f}$, т.е. $f(\zeta)$ – $(\Gamma; \rho)$-функция.

Пусть теперь $f(\zeta)$ – любая $(\Gamma; \rho)$-функция. Рассмотрим функцию $\varepsilon = \mathcal{E}(\zeta)$, связанную с $f(\zeta)$ равенством (4.17). Выразим ее через $f(\zeta)$:

$$\mathcal{E}(\zeta) = \left[\rho \frac{\psi(\zeta)}{\overline{\psi(\zeta)}} \overline{\chi(\zeta)} + f(\zeta)\right] \left[\rho \frac{\psi(\zeta)}{\overline{\psi(\zeta)}} + \chi(\zeta) f(\zeta)\right]^{-1}, \tag{4.22}$$

где через $\psi(\zeta)$ обозначена функция

$$\psi(\zeta) = [1 - \chi(\zeta)]\varphi_e(\zeta). \tag{4.23}$$

Так как $\| f \|_\infty \le \rho$, то в силу (4.22) $\| \mathcal{E} \|_\infty \le 1$. Положив $\varepsilon =$ $= 0$ в (4.17), находим, что функция $- \rho \frac{\psi(\zeta)}{\overline{\psi(\zeta)}} \overline{\chi(\zeta)}$ является $(\Gamma; \rho)$-функцией, а потому

$$h_1(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \rho \frac{\psi}{\overline{\psi}} \overline{\chi} + f \in H_\infty^+ \ . \tag{4.24}$$

С другой стороны, так как $f(\zeta)$ и $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ являются $(\Gamma; \rho)$-функциями, то $f - \overset{\circ}{f} \in H_\infty^+$, т.е.

$$f - \rho \frac{\psi}{\overline{\psi}} \frac{1 - \overline{\chi}}{1 - \chi} = \frac{1}{1 - \chi} \left[f - f\chi - \rho \frac{\psi}{\overline{\psi}} + \rho \overline{\chi} \frac{\psi}{\overline{\psi}}\right] \in H_\infty^+ \ .$$

Учитывая (4.24), отсюда получаем, что

$$h_2(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} f\chi + \rho \frac{\psi}{\overline{\psi}} \in H_\infty^+ \ . \tag{4.25}$$

Итак, $\| \mathcal{E} \|_\infty \leq 1$ и $\mathcal{E}(\zeta) = h_1(\zeta)/h_2(\zeta)$, где $h_1, h_2 \in H^+_\infty$.

Оказывается, однако, что $\mathcal{E} \in H^+_\infty$. Имеет место следующая

Теорема 4.1. *Пусть* $\overset{\circ}{f}(\zeta) = \rho\frac{\overline{\varphi_e(\zeta)}}{\varphi_e(\zeta)}$ *– фиксированная каноническая* $(\Gamma;\rho)$*-функция и* $\chi(z)$ *– функция, определяемая по* $\varphi_e(\zeta)$ *формулой (4.12),*

$$\frac{1+\chi(z)}{1-\chi(z)} = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\zeta+z}{\zeta-z}|\varphi_e(\zeta)|^2 d\theta,$$

$$\psi(\zeta) = [1-\chi(\zeta)]\varphi_e(\zeta), \quad \Psi(\zeta) = \psi^{-1}(\zeta). \tag{4.26}$$

Тогда формулой

$$f(\zeta) = \rho\frac{\overline{\Psi(\zeta)}}{\Psi(\zeta)}\,\frac{\mathcal{E}(\zeta) - \overline{\chi(\zeta)}}{1-\mathcal{E}(\zeta)\chi(\zeta)} \tag{4.27}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех $(\Gamma;\rho)$*-функций* $f(\zeta)$ *и множеством всех функций* $\mathcal{E}(\zeta)$ *из* B. *При этом множеству всех канонических* $(\Gamma;\rho)$*-функций соответствует множество* $\mathcal{E} = \mathrm{const}, |\mathcal{E}| = 1$. *Функции* $\chi(\zeta)$ *и* $\Psi(\zeta)$ *определяются по матрице* Γ *и числу* $\rho(\geq s)$ *с точностью до постоянных множителей, по модулю равных единице,* $\psi(\zeta)$ *– внешняя функция из* H^+_∞.

Полное доказательство теоремы 4.1 можно получить, если воспользоваться описанием обобщенных резольвент изометрического оператора с индексом дефекта (1,1), аналогичным тому, которое было предложено одним из авторов [8] для симметрического оператора с индексом дефекта (1,1).

Последнее утверждение теоремы 4.1 следует из того, что согласно (4.12)

$$(1+\chi(z))/(1-\chi(z)) = ((\overset{\circ}{U}+zI)(\overset{\circ}{U}-zI)^{-1}g,g)_{(\Gamma;\rho)}, \tag{4.28}$$

где g из дефектного подпространства $\ell_{\Gamma;\rho}\ominus\Delta_V$, а $\overset{\circ}{U}$ – унитарное расширение оператора $V_{\Gamma;\rho}$ без выхода из пространства $\ell_{\Gamma;\rho}$. Функция $\chi(z)$, как видно из формулы (4.28), является характеристической функцией (в смысле М.С. Лившица [9]) изометрического оператора $V_{\Gamma;\rho}$ и ввиду этого определяется по оператору $V_{\Gamma;\rho}$ с точностью до мультипликативной константы, по модулю равной единице. Из (4.16) и (4.26) видно, что $\psi(\zeta)$ – внешняя функция, для которой $|\psi(\zeta)|^2 = 1 - |\chi(\zeta)|^2$.

З а м е ч а н и е 4.1. Характеристическая функция $\chi(z)(\in B)$ оператора $V_{\Gamma;\rho}$ удовлетворяет условиям

$$\chi(0) = 0, \quad \ln(1 - |\chi(\zeta)|) \in L_1. \tag{4.29}$$

Более того, для любого числа ε, $|\varepsilon| = 1$, в представлении Ф.Рисса–Херглотца

$$\frac{1+\varepsilon\chi(z)}{1-\varepsilon\chi(z)} = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\sigma_\varepsilon(\theta) \tag{4.30}$$

функция $\sigma_\varepsilon(\theta)$ абсолютно непрерывна и

$$\ln \sigma'_\varepsilon(\theta) \in L_1. \tag{4.31}$$

Функцию $\chi(z) \in B$ ($\chi(0) = 0$), для которой справедливо последнее утверждение, будем называть устойчивой.

Можно показать, что если для $\chi(z)(\in B, \chi(0) = 0)$ при некотором числе ε, $|\varepsilon| = 1$, в (4.30) для функции $\sigma_\varepsilon(\theta)$ выполняется условие (4.31), то при всех ε ($|\varepsilon| = 1$) оно выполняется и почти при всех ε (на множестве полной лебеговой меры окружности $|\varepsilon| = 1$) функция $\sigma_\varepsilon(\theta)$ абсолютно непрерывна. Легко строятся примеры функций χ, для которых существуют значения ε ($|\varepsilon| = 1$) такие что в представлении (4.30) функция $\sigma_\varepsilon(\theta)$ не является абсолютно непрерывной, хотя условие (4.31) и выполняется.

Сформулированное выше предложение означает, что характеристическая функция $\chi(z)$ изометрического оператора $V_{\Gamma;\rho}$ является устойчивой.

Остается открытым вопрос, является ли произвольная устойчивая функция $\chi(\zeta) \in B$ ($\chi(0) = 0$) характеристической функцией некоторого изометрического оператора $V_{\Gamma;\rho}$.

З а м е ч а н и е 4.2. Из формулы (4.21) видно, что разность между произвольной $(\Gamma;\rho)$-функцией $f(\zeta)$ и канонической $(\Gamma;\rho)$-функцией $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ является внешней функцией (из H^+_∞). Следовательно, если $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция, а $b(\zeta)$ – внутренняя функция ($b(\zeta)\not\equiv \text{const}$), то функция

$$f(\zeta)=\overset{\circ}{f}(\zeta)+b(\zeta)h(\zeta),\quad 0\neq h\in H^+_\infty$$

не является $(\Gamma;\rho)$-функцией, т.е.

$$\|\overset{\circ}{f}+bh\|_\infty,\quad T>\|\overset{\circ}{f}\|_\infty,\quad 0\neq h\in H^+_\infty. \tag{4.32}$$

Отсюда получаем, что если $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция, а $b(\zeta)$ – произвольная внутренняя функция ($b(\zeta)\not\equiv$ const), то $\overline{b(\zeta)}\,\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – недеформируемая минифункция.

Из формулы (4.21) также следует, что если $(\Gamma;\rho)$-функциям $f(\zeta)$ и $f_1(\zeta)$ отвечают в (4.27) соответственно функции $\mathcal{E}(\zeta)$ и $\mathcal{E}_1(\zeta)$ (из B), то

$$f(\zeta)-f_1(\zeta)=\rho\frac{[\mathcal{E}(\zeta)-\mathcal{E}_1(\zeta)][1-\chi(\zeta)]\varphi_e^2(\zeta)}{[1-\mathcal{E}(\zeta)\chi(\zeta)][1-\mathcal{E}_1(\zeta)\chi(\zeta)]}. \tag{4.33}$$

Следовательно, функции $f(\zeta)-f_1(\zeta)$ ($\in H^+_\infty$) и $\mathcal{E}(\zeta)-\mathcal{E}_1(\zeta)$ ($\in H^+_\infty$) имеют один и тот же внутренний множитель в их каноническом представлении в виде произведения внутренней и внешней функций.

Отсюда легко получить, что если при некотором z_0, $|z_0|<1$, для $b(\zeta)=(\zeta-z_0)/(1-\bar{z}_0\zeta)$ и $\overset{\circ}{f}(\zeta)(\zeta)$ имеет место неравенство (4.32) при любом h ($\neq 0$), то либо $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – каноническая $(\Gamma;\rho)$-функция с $\rho=\|\overset{\circ}{f}\|_\infty$, либо $\overset{\circ}{f}(\zeta)$ – недеформируемая минифункция.

З а м е ч а н и е 4.3. Поскольку $|\chi(\zeta)|<1$ почти при всех ζ ($|\zeta|=1$), то $(\Gamma;\rho)$-функция $f(\zeta)$ имеет $|f(\zeta)|=\rho$ почти всюду на окружности $|\zeta|=1$ тогда и только тогда, если соответствующая ей по формуле (4.27) функция $\mathcal{E}(\zeta)$ является внутренней.

В заключение параграфа сформулируем две теоремы, доказательства которых опускаются из-за недостатка места и будут даны в другой работе.

Теорема 4.2. *Пусть* $\rho > \| \Gamma \|$, *а* $p(\zeta)$ *и* $q(\zeta)$ *– функции из* H_2^+, *определяемые по матрице* Γ *и числу* ρ *формулами*

$$p(\zeta) = \left[(I - \frac{1}{\rho^2}\bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}e\right]_+(\zeta),$$

$$q(\zeta) = \frac{1}{\rho}\zeta\left[\bar{\Gamma}(I - \frac{1}{\rho^2}\Gamma\bar{\Gamma})^{-1}e\right]_+(\zeta). \tag{4.34}$$

Тогда в формуле (4.27)

$$a\Psi(\zeta) = p(\zeta), \quad \chi(\zeta) = \varepsilon\frac{q(\zeta)}{p(\zeta)}, \tag{4.35}$$

где a *– константа,* $|a|^2 = \left(\left(I - \frac{1}{\rho^2}\bar{\Gamma}\Gamma\right)^{-1}e, e\right)_2$, $\varepsilon = -a/\bar{a}$ *и, таким образом, формула*

$$f(\zeta) = \rho\frac{\mathcal{E}(\zeta)\overline{p(\zeta)} + q(\zeta)}{p(\zeta) + \mathcal{E}(\zeta)q(\zeta)} \quad (\mathcal{E} \in B) \tag{4.36}$$

дает полное описание множества всех $(\Gamma; \rho)$*-функций.*

Выражения (4.34) для функций $p(\zeta)$ и $q(\zeta)$ в формуле (4.36), по-видимому, не были ранее известны даже для классической задачи И.Шура (т.е. когда матрица Γ финитна).

Заметим также, что функция $p(\zeta)$ однозначно определяется по $q(\zeta)$ и числу $|a|$, ибо $p(\zeta)$ – внешняя функция из H_2^+, $p(0) = |a|^2$ (> 0) и

$$|p(\zeta)|^2 - |q(\zeta)|^2 = |a|^2 \qquad (|\zeta| = 1). \tag{4.37}$$

При фиксированном $\rho \geq s(=\| \Gamma \|)$ совокупность всех $(\Gamma; \rho)$-функций образует выпуклое множество. Его крайние точки, т.е. $(\Gamma; \rho)$-функции, не представимые в виде среднего арифметического двух различных $(\Gamma; \rho)$-функций, назовем экстремальными $(\Gamma; \rho)$-функциями.

Теорема 4.3. *Для фиксированных* Γ *и* $\rho(\geq s)$ *эквивалентны следующие утверждения:*

а) $f(\zeta)$ *– экстремальная* $(\Gamma; \rho)$*-функция;*

б) $(\Gamma; \rho)$*-функция* $f(\zeta)$ *удовлетворяет условию* $\ln(\rho - |f(\zeta)|) \notin L_1$;

в) функция $\mathcal{E}(\zeta)$, *соответствующая* $(\Gamma;\rho)$-*функции* $f(\zeta)$ *по формуле (4.27), удовлетворяет условию* $\ln(1-|\mathcal{E}(\zeta)|)\notin L_1$.

Как показано в [7] (с.197), последнее условие для $\mathcal{E}(\zeta)$ $(\in B)$ равносильно тому, что $\mathcal{E}(\zeta)$ есть крайняя точка шара $B(\subset H_\infty^+)$. Впрочем, это утверждение можно рассматривать как частный случай теоремы 4.3, когда $\Gamma = 0$.

§5. Матрицы Гильберта–Шура и соответствующие им $(\Gamma;\rho)$-функции

В качестве примера бесконечной ганкелевой матрицы рассмотрим матрицу Гильберта–Шура

$$\Gamma_\alpha = \left(\frac{1}{j+k+\alpha-1}\right)_1^\infty, \tag{5.1}$$

где α – фиксированный вещественный параметр, не равный целому числу.

Матрица Γ_α соответствует последовательности

$$\gamma_k^{(\alpha)} = 1/(k+\alpha), \quad k\ge 1 \tag{5.2}$$

коэффициентов Фурье функции

$$f_\alpha(\zeta) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{i\alpha(\theta-\pi)} \quad (\zeta = e^{i\theta},\ 0\le\theta<2\pi). \tag{5.3}$$

Известно (см. [10–12]), что

$$\|\Gamma_\alpha\| = \begin{cases} \pi/|\sin\pi\alpha| & \text{при} \quad -\infty<\alpha\le -1/2; \\ \pi & \text{при} \quad -1/2<\alpha<\infty. \end{cases} \tag{5.4}$$

Поэтому справедливо следующее предложение.

Функция $f_\alpha(\zeta)$ является минифункцией при таких и только таких значениях α:

$$-\infty<\alpha\le -1/2,\quad \alpha=(2\nu-1)/2 \ (\nu = 1,2,\dots). \tag{5.5}$$

Отметим, что при $\alpha < -1/2$ матрица Γ_α имеет достижимую норму $\| \Gamma_\alpha \| = \pi/|\sin \pi\alpha|$.

Это следует из представления функции $f_\alpha(\zeta)$ в виде

$$f_\alpha(\zeta) = -\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{\bar{\zeta}\ \overline{\varphi_{-\alpha-1}(\zeta)}}{\varphi_{-\alpha-1}(\zeta)}, \tag{5.6}$$

где

$$\varphi_\beta(\zeta) = |1-\zeta|^\beta \exp\left\{i\beta\frac{\theta-\pi}{2}\right\}(= \lim_{r\uparrow 1}(1-r\zeta)^\beta \in H_2^+,\quad \beta > -\frac{1}{2}),$$

и замечания 2.1 работы [1].

Число $\pi = \| \Gamma_{-1/2} \|$ не является s-числом матрицы $\Gamma_{-1/2}$. Матрице $\Gamma_{-1/2}$ отвечает недеформируемая минифункция.

Первая часть этого утверждения известна [10], но может быть получена как следствие теоремы 2.1 работы [1] и следующей леммы, доказательство которой мы предоставляем читателю.

Лемма 5.1. *При $-1/2 < \beta < 1/2$ из равенства*

$$\frac{\overline{\varphi_\beta(\zeta)}}{\varphi_\beta(\zeta)} = \frac{\zeta\eta_-(\zeta)}{\xi_+(\zeta)},\ \xi_+ \in H_2^+,\quad \eta_- \in H_2^-,$$

следует, что $\xi_+ = \mathrm{const}\ \varphi_\beta(\zeta)$.

Вторая часть предложения вытекает из замечания 3.2 и леммы 5.1.

Из замечания 3.2 следует, что все минифункции $f_\alpha(\zeta)$ при $\alpha = (2\nu-1)/2 \quad (\nu = 1, 2, ...)$ являются деформируемыми.

Действительно, эти минифункции представимы в виде (3.9)

$$f_\alpha(\zeta) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \frac{\overline{\varphi_\alpha(\zeta)}}{\varphi_\alpha(\zeta)} \quad (\varphi_\alpha \in H_2^+).$$

Из замечания 3.4, теоремы 3.2 и леммы 5.1 вытекает, что $(\Gamma_\alpha; \pi/ /|\sin \pi\alpha|)$-функция $f_\alpha(\zeta)$ является канонической лишь при $-1/2 < < \alpha \le 1/2$.

Остановимся подробнее на случае $\alpha = 1/2$. Так как $f_{1/2}(\zeta)$ представима в виде

$$f_{1/2}(\zeta) = \pi\frac{\overline{\varphi_{1/2}(\zeta)}}{\varphi_{1/2}(\zeta)},\quad \| \varphi_{1/2} \|_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \tag{5.7}$$

то для $\Gamma = \Gamma_{1/2}$ характеристическая функция $\chi(\zeta)$ изометрического оператора V_Γ определяется формулой

$$\frac{1+\chi(\zeta)}{1-\chi(\zeta)} = \frac{1}{4}\lim_{r\uparrow 1}\oint \frac{e^{i\varphi}+r\zeta}{e^{i\varphi}-r\zeta}|1-e^{i\varphi}|d\varphi = \frac{\pi}{2}|\cos\frac{\theta}{2}| -$$

$$-i\cos\frac{\theta}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{\theta-\pi}{4}|.$$

Формулу (4.27), дающую описание всех минифункций, удобно в данном случае записать в виде

$$f(\zeta) = -i\pi e^{i\frac{\theta}{2}}\frac{\tau(\zeta)-\frac{\pi}{2}|\cos\frac{\theta}{2}|-i\cos\frac{\theta}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{\theta-\pi}{4}|}{\tau(\zeta)+\frac{\pi}{2}|\cos\frac{\theta}{2}|-i\cos\frac{\theta}{2}\ln|\operatorname{tg}\frac{\theta-\pi}{4}|}, \qquad (5.8)$$

где $\tau(z)$ $(= (1+\mathcal{E}(z))/(1+\mathcal{E}(z)),\ \mathcal{E}\in B)$ - произвольная функция, конформно отображающая диск $|z|<1$ в правую полуплоскость $\operatorname{Re}\tau \geq 0$.

Примечание при корректуре. Во время печатания статьи авторы познакомились со статьей Д.Сарасона [13], в которой в иных терминах для частного случая ганкелевых матриц Г ставится задача отыскания критерия единственности минифункции, а также и задача С). Любопытно, что Д. Сарасон выражает сомнение в существовании простого критерия единственности и указывает на отсутствие подходов к решению задачи С). По некоторым результатам предыдущая статья авторов [1] пересекается со статьей [13] (см. в [13] теорему 2 и утверждение 5.1).

Авторы обнаружили также, что существование и построение минифункции для случая рациональной "главной части " $\pi_- f$ (т.е. когда ганкелева матрица Г имеет конечный ранг) было получено еще в [14], а затем в [6].

Список литературы

[1] *Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори–Фейера и Ф.Рисса // Функц. анализ. - 1968. - **2**, вып. 1. - С. 1–19.

[2] *Nehari Z.* On bounded bilinear forms // Ann. Math. – 1957. – **65**, N1.

[3] *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // J. reine angew. Math. – 1917. – **147, 148**.

[4] *Адамян В.М., Аров Д.З.* Об унитарных сцеплениях полуунатарных операторов // Матем. исследования (Кишинев). – 1968. – **1**, вып. 2. – С. 3–64.

[5] *Крейн М.Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов. I // Мат. сб. – 1947. – **20**. – С. 431–498.

[6] *Helson H., Szegö G.* A Problem in Prediction Theory //Ann. Math. Pura end Appl. – 1960. – **51**. – P. 107–138.

[7] *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963.

[8] *Ахиезер Н.И., Глазман И. М.* Теория линейных операторог в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.

[9] *Лившиц М.С.* Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1946. – **19**. – С. 239–262.

[10] *Ingham A.E.* A note on Hilbert's inequality // J. London Math. Soc. – 1936. – **11**. – P. 237–240.

[11] *Hill C.K.* The Hilbert bound of a certain doubly-infinite matrix // Ibid. – 1957. – **32**. – P. 7–17.

[12] *Rosenblum M.* On the Hilbert matrix. I, II // Proc Amer. Math. Soc. – 1958. – **9**. – P. 137–140, 581–585.

[13] *Sarason D.* Generalized interpolation in H^∞ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **127**, N2. – P. 180–203.

[14] *Геронимус Я.Л.* О некоторых экстремальных свойствах аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1948. – **12**. – С. 324–336.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПАР ШМИДТА ГАНКЕЛЕВА ОПЕРАТОРА И ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ШУРА–ТАКАГИ

(Совместно с В.М.Адамяном и Д.З.Аровым)

(Матем. сб. – 1971. – Том 86 (128), № 1 (9))

§0. Постановка задачи. Основные результаты

Настоящая работа представляет собой продолжение наших исследований [1, 2], посвященных бесконечным ганкелевым матрицам и связанным с ними аппроксимационным задачам. Вместе с тем эту статью можно читать независимо.

Пусть $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ – ограниченная в ℓ_2 ганкелева матрица. Обозначим через $s_\infty(\Gamma)$ самую правую точку спектра сгущения[†] неотрицательного оператора $(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}$ (черта здесь и в дальнейшем обозначает комплексное сопряжение). Предполагая, что спектр $\sigma[(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}]$ содержит правее точки $s_\infty(\Gamma)$ собственные числа, обозначим их с учетом кратности через $s_0(\Gamma) \geq s_1(\Gamma) \geq \dots$. Если эта последовательность содержит $m(< \infty)$ членов, то мы полагаем $s_{m+1}(\Gamma) = s_{m+2}(\Gamma) = \cdots = s_\infty(\Gamma)$. Таким образом, если $s = s_\varkappa(\Gamma) \quad (> s_\infty(\Gamma))$, то ему отвечает p-мерный линеал пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$ $(\xi, \eta \in \ell_2)$:

$$\Gamma\xi = s\eta, \quad \bar{\Gamma}\eta = s\xi,$$

где p – кратность собственного числа $s(\in \sigma[(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}])$.

[†]Спектр сгущения оператора состоит из предельных точек его спектра и собственных чисел бесконечной кратности.

В соответствии с общим определением [3] элементы упорядоченной последовательности $s_n(\Gamma)_0^\infty$ мы будем называть s-числами матрицы Г. Как известно [3], для члена этой последовательности с номером $\varkappa$ справедливо равенство

$$s_\varkappa(\Gamma) = \min \| \Gamma - K \|, \tag{0.1}$$

где минимум берется по всем ограниченным операторам K в ℓ_2 , размерность которых не превосходит $\varkappa$. В частности, равенство в (0.1) достигается на $\varkappa$-м отрезке ряда Шмидта:

$$K_\varkappa(\Gamma) = \sum_{j=0}^{\varkappa-1} s_j(\Gamma)(\cdot,\xi_j)\eta_j,$$

где $\{\xi_j, \eta_j\}$ – пары Шмидта, отвечающие s-числам $s_j(\Gamma)$.

Так как для ганкелевой матрицы Г отрезок ряда Шмидта $K_\varkappa(\Gamma)$, вообще говоря, уже не является ганкелевой матрицей, то нетривиальной является задача аппроксимации матрицы Г бесконечными ганкелевыми матрицами фиксированного конечного ранга. Полагая

$$d_\varkappa(\Gamma) = \inf \| \Gamma - K \|,$$

где нижняя грань берется по множеству $G^{[\varkappa]}$ всех ограниченных ганкелевых матриц, ранг которых не превосходит $\varkappa$, очевидным образом получаем лишь неравенства

$$d_\varkappa(\Gamma) \geq s_\varkappa(\Gamma), \quad \varkappa \geq 0.$$

Тем не менее справедлива

Теорема 0.1. *Для любой ограниченной ганкелевой матрицы*

$$d_\varkappa(\Gamma) = \min_{\Lambda \in G^{[\varkappa]}} \| \Gamma - \Lambda \| = s_\varkappa(\Gamma), \ \varkappa \geq 0. \tag{0.2}$$

Сравнительно легко доказывается, что нижняя грань в (0.2) достигается. Действительно, последовательность $\{\Lambda_k\}$ матриц из $G^{[\varkappa]}$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \| \Gamma - \Lambda_k \| = d_\varkappa(\Gamma), \tag{0.3}$$

ограничена в совокупности ($\| \Lambda_k \| \leq \| \Gamma \| + d_\varkappa(\Gamma) + \varepsilon$) и потому слабо компактна. Если Λ – слабый предел подпоследовательности $\{\Lambda_{k_i}\} \subset G^{[\varkappa]}$, то $\Lambda \in \Gamma^{[\varkappa]}$, поскольку миноры матрицы Λ являются пределами соответствующих миноров матриц Λ_{k_i}. Из (0.3) следует, что

$$\| \Gamma - \Lambda \| \leq d_\varkappa(\Gamma),$$

причем знак $<$, очевидно, должен быть отброшен.

Полное доказательство теоремы 0.1 непосредственно связано с решением (не менее интересной) задачи аппроксимации ограниченной функции $f(\zeta)$, заданной на окружности $|\zeta| = 1$. Для ее формулировки введем в рассмотрение класс $H_\infty^{[\varkappa]}$ ($\varkappa \geq 0$ – целое число) всех ограниченных на окружноси $|\zeta| = 1$ функций $g(\zeta)$, представимых в виде

$$g(\zeta) = r(\zeta) + h(\zeta),$$

где $r(\zeta)$ – правильная рациональная функция, имеющая полюсы лишь в круге $|z| < 1$, число которых (с учетом их порядка) не превосходит $\varkappa$, а $h(\zeta)$ – функция из H_∞ †.

Заметим, что при $\varkappa > 0$ множество $H_\infty^{[\varkappa]}$ не является даже выпуклым.

З а д а ч а $A^{[\varkappa]}$. *Дана ограниченная функция* $f(\zeta)$ ($\in L_\infty$). *Требуется найти ее наилучшую аппроксимацию в метрике* L_∞ *функциями из* $H_\infty^{[\varkappa]}$ *для данного* $\varkappa$ ($= 0, 1, 2, \ldots$).

Точнее, требуется найти

$$D_\varkappa(f) = \inf_{h \in H_\infty^{[\varkappa]}} \| f - h \|_\infty$$

и функцию $h(\zeta)$, удовлетворяющую условиям

$$\| f - h \| = D_\varkappa(f), \quad h \in H_\infty^{[\varkappa]}.$$

Каждой суммируемой на окружности $|\zeta| = 1$ функции $f(\zeta)$ поставим в соответствие бесконечную ганкелеву матрицу $\Gamma(f) =$

---

† Определение встречающихся в работе пространств H_p и $L_p (1 \leq p \leq \infty)$ и свойства принадлежащих этим пространствам функций см., например, в [4].

$= (c_{j+k-1}(f))_1^\infty$, составленную из коэффициентов Фурье $c_k(f)$ функции $f(\zeta)$,

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \zeta^k f(\zeta)d\theta,\ \zeta = e^{i\theta}.$$

Теорема 0.2. *Для любой ограниченной функции* $f(\zeta)(\in L_\infty)$ *задача* $A^{[\varkappa]}$ *разрешима, более того,* $D_\varkappa(f) = s_\varkappa(f)$, *где* $\Gamma = \Gamma(f)$.

Теоремы 0.1 и 0.2 легко сводимы друг к другу. В этом можно убедиться, если учесть следующие два обстоятельства.

Во-первых, согласно теореме Нехари [5] бесконечная ганкелева матрица Γ ограничена в том и только том случае, если существует $f \in L_\infty$ такие, что $\Gamma = \Gamma(f)$, и для всякой такой функции f имеем $\| \Gamma \| = D_0(f)$.

Во-вторых, по известной теореме Кронекера (см. [6], гл. XVI) $\Gamma \in G^{[\varkappa]}$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{j=1}^\infty \gamma_j\zeta^{-j}$ определяет правильную рациональную функцию степени, не большей $\varkappa$ (с полюсами внутри единичного круга).

Вывод теорем 0.1 и 0.2 существенно опирается на исследование функций $\xi_+(\zeta)$ и $\eta(\zeta)$, порождаемых парами Шмидта $\{\xi, \eta\}$ ганкелевой матрицы Γ. Если $\xi = \{\xi_j\}_1^\infty$, $\eta = \{\eta_j\}_1^\infty$, то мы полагаем:

$$\xi_+(\zeta) = \sum_{j=1}^\infty \xi_j\zeta^{j-1},$$

$$\eta_-(\zeta) = \sum_{j=1}^\infty \eta_j\zeta^{-j}.$$

Если $\{\xi, \eta\}$ – пара Шмидта, отвечающая s-числу $s_\varkappa(\Gamma)(< s_{\varkappa-1}(\Gamma))$, имеющему кратность $p(\le \infty)$, то, как оказывается, отношение $\eta_-(\zeta)/\xi_+(\zeta)$ является унимодулярной функцией ($|\xi_+(\zeta)| = |\eta_-(\zeta)|$ почти всюду), не зависящей от выбранной пары. Этот результат, как и более тонкий, дающий полное описание всех пар функций $\xi_+(\zeta), \eta_-(\zeta)$, отвечающих данному s-числу $s_\varkappa(\Gamma)$, устанавливается в §1. Согласно теореме 1.2, например, в случае простого s-числа $s_\varkappa(\Gamma)$ ($s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_\varkappa(\Gamma) > s_{\varkappa+1}(\Gamma)$) соответствующая функция $\xi_+(\zeta)$, определенная теперь с точностью до скалярного множителя, имеет точно $\varkappa$ нулей внутри единичного круга и, более того, допускает представление $\xi_+(\zeta) = \prod_{j=1}^{\varkappa}(\zeta - \alpha_j)\varphi_e(\zeta)$, где $|\alpha_j| < 1$ $(j = 1, 2, ..., \varkappa)$, а $\varphi_e(\zeta)$ – внешняя функция[†].

Решение $h(\zeta)$ задачи $A^{[\varkappa]}$ для функции $f(\zeta)(\in L_\infty)$ в случае, когда $s_\varkappa(\Gamma)(\Gamma = \Gamma(f))$ является собственным числом матрицы $(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}$, оказывается единственным и может быть получено по формуле

$$h(\zeta) = f(\zeta) - s_\varkappa(\Gamma)\eta_-(\zeta)/\xi_+(\zeta),$$

где функции $\eta_+(\zeta)$ и $\xi_-(\zeta)$ построены по паре Шмидта $\{\xi, \eta\}$ матрицы Γ, отвечающей s-числу $s_\varkappa(\Gamma)$.

Если же число $s_\varkappa(\Gamma)$ не является собственным числом матрицы $(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}$, то задача $A^{[\varkappa]}$ имеет единственное решение в том и только том случае, когда выполняется условие

$$\lim_{\rho \downarrow s_\varkappa(\Gamma)}((\rho^2 - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}e, e) = \infty, \tag{0.4}$$

где $e = \{1, 0, ...\}$ – орт в ℓ_2.

Этот критерий единственности так же, как и описание всех решений задачи $A^{[\varkappa]}$ в случае, когда условия единственности не выполнены, могут быть получены на том же пути, на котором в [2] нами была исследована задача A (т.е. задача $A^{[\varkappa]}$ при $\varkappa = 0$). Этот же подход позволяет изучить и следующую обобщенную задачу Шура–Такаги.

Задача $C_\rho^{[\varkappa]}$. *Даны число $\rho > 0$, целое $\varkappa \geq 0$ и (ненулевая) последовательность комплексных чисел $\{\gamma_k\}_1^\infty$. Найти ограниченную функцию $f(\zeta)(\in L_\infty)$ такую, что $\| f \|_\infty \leq \rho$ и разность*

$$r(\zeta) = \sum_1^\infty \gamma_k \zeta^{-k} - \sum_1^\infty c_k(f)\zeta^{-k}$$

[†] Функция $\varphi(\zeta)$ класса H_p называется внешней, если $\ln|\varphi(0)| = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \ln|\varphi(\zeta)|d\theta$, и внутренней, если $|\varphi(\zeta)| = 1$ (почти всюду на окружности $|\zeta| = 1$), см. [4].

правильная рациональная функция, имеющая полюсы лишь в круге $|z| < 1$, *правильно (т.е. с учетом кратности) сосчитанное число которых не больше* $\varkappa$.

Очевидно, что задача $C_\rho^{[\varkappa]}$ имеет решение лишь, когда матрица $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ является ограниченной (это следует из теоремы Нехари) и $\rho \geq s_\varkappa(\Gamma)$.

При $s_\varkappa(\Gamma) \leq \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$ индефинитная метрика, определенная на линеале $\mathfrak{L} = \ell_2 \oplus \ell_2$ с помощью матрицы

$$H_{\Gamma,\rho} = \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\rho}\Gamma \\ \frac{1}{\rho}\bar{\Gamma} & I \end{pmatrix}$$

по формуле

$$[g,g']_{\Gamma,\rho} = (H_{\Gamma,\rho}g,g'),\ \ g,g' \in \mathfrak{L},$$

содержит точно $\varkappa$ отрицательных квадратов. После факторизации и пополнения линеала $\mathfrak{L}$ получим пространство Понтрягина $\Pi_\varkappa$. В этом пространстве рассмотрим изометрический (в индефинитной метрике) оператор, который получается замыканием оператора V, определенного на векторах $g = (\eta,\xi)(\in L)$ с нулевой первой координатой η_1 у вектора $\eta = \{\eta_k\}_1^\infty$, как сдвиг вправо:

$$V(...,\eta_2,0;\xi_1,\xi_2,...) = (...,\eta_2;0,\xi_1,\xi_2,...).$$

Оказывается, что спектральные функции различных унитарных расширений оператора V (как без выхода из $\Pi_\varkappa$, так и с выходом из него) дают различные решения задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$, задача $C_\rho^{[\varkappa]}$ имеет единственное решение лишь в случае, когда построенный изометрический оператор является унитарным. Это соображение и приводит к условию (0.4).

Первоначально многие результаты этой работы были нами получены именно на таком пути. Этот путь, возможно, является более глубоким, но он менее элементарен, чем тот, который мы выбрали в предлагаемой статье

Для вывода формул, дающих описание всех решений задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ в случае $\varkappa > 0$, нам предварительно пришлось обобщить известную теорему Руше о числе нулей суммы двух аналитических функций.

В последней части работы показано, как полученные результаты могут быть перенесены на интегральный оператор в $L_2(0,\infty)$ с ганкелевым ядром, т.е. ядром, зависящим от суммы аргументов. Здесь выяснены также дополнительные аналитические свойства решений рассматриваемых задач и пар Шмидта в важном частном случае, когда ядро интегрируемо. Укажем, кстати, что подобный анализ возможен и в дискретном случае для ганкелевых матриц $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ таких, что $\sum_1^\infty |\gamma_k| < \infty$ (для $\varkappa = 0$ это было уже сделано в [1]).

Для финитной последовательности $\{\gamma_k\}_1^\infty$ ($\gamma_k = 0$ при $k > N$) задача $A^{[\varkappa]}$ и аналитические свойства пар Шмидта, отвечающих s-числу $s_\varkappa(\Gamma)$ матрицы $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, были ранее исследованы Т. Такаги [7] (см. также [8]). Часть результатов параграфа 1 была получена ранее Кларком [9] в предположении, что матрица Γ вещественна ($\bar{\Gamma} = \Gamma$). В интересных работах Кларка [9, 10] содержатся также другие результаты о ганкелевых матрицах, которых мы, однако, не касаемся.

§1. Бесконечные ганкелевы матрицы и оператор сдвига в ℓ_2

1. Каждому вектору $\xi \in \ell_2$ мы будем ставить в соответствие две функции $\xi_+(\zeta)(\in H_2)$ и $\xi_-(\zeta)(\in L_2 \ominus H_2)$, полагая

$$\xi_+(\zeta) = \sum_1^\infty \xi_j \zeta^{j-1}, \quad \xi_-(\zeta) = \sum_1^\infty \xi_j \zeta^{-j}.$$

Обозначим через T оператор правого сдвига в ℓ_2. Оператор T и его сопряженный T^* действуют на вектор $\xi \in \ell_2$ по формулам $T\xi = \{0, \xi_1, \xi_2, ...\}$, $T^*\xi = \{\xi_2, \xi_3, ...\}$. При отображении $\xi \to \xi_+(\zeta)$ пространства ℓ_2 на пространство Харди H_2 правый сдвиг переходит в оператор умножения на ζ, а каждый ограниченный оператор Q, перестановочный с T, переходит в оператор умножения на некоторую функцию $\varphi(\zeta) \in H_\infty$. В дальнейшем для обозначения оператора Q мы будем пользоваться символом $\varphi(T)$, если для любого $\xi \in \ell_2$

$$(Q\xi) \longleftrightarrow \varphi(\zeta)\xi_+(\zeta), \quad \varphi \in H_\infty.$$

Легко видеть, что бесконечная ограниченная матрица $\Gamma = (\gamma_{j,k})_1^\infty$ тогда и только тогда будет ганкелевой, когда она удовлетворяет перестановочному соотношению

$$T^*\Gamma = \Gamma T, \tag{1.1}$$

равносильному бесконечной системе равенств

$$\gamma_{j+1,k} = \gamma_{j,k+1} \quad (j,k = 1,2,...).$$

Непосредственным следствием соотношения (1.1) является

Лемма 1.1. *Если ганкелевы матрицы Γ и Γ' совпадают хотя бы на одном векторе $\xi \in \ell_2$, т.е. $\Gamma\xi = \Gamma'\xi$, то они совпадают на инвариантном относительно сдвига подпространстве в ℓ_2, натянутом на векторы $T^n\xi$, $n \geq 0$.*

На основании известной теоремы Бьерлинга [4] инвариантное относительно T подпространство, натянутое на векторы $T^n(\zeta)$, $n \geq 0$, представимо в виде $b(T)\ell_2$, где $b(\zeta)$ – внутренний множитель функции $\xi_+(\zeta)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

1.1^0. *Совпадение ганкелевых матриц Γ и Γ' хотя бы на одном векторе ξ , для которого функция $\xi_+(\zeta)$ является внешней, есть критерий их равенства на всем пространстве ℓ_2.*

Если же для вектора ξ , на котором матрицы Γ и Γ' совпадают, функция $\xi_+(\zeta)$ не является внешней и имеет внутренний множитель $b(\zeta)$, то на всем пространстве совпадают матрицы $\Gamma b(T)$ и $\Gamma' b(T)$, которые также являются ганкелевыми в силу соотношения (1.1).

Операция эрмитова сопряжения, примененная к любой ганкелевой матрице Γ, переводит ее в комплексно сопряженную матрицу $\bar{\Gamma}$. Оператор, комплексно сопряженный к оператору $\overline{\varphi(T)}$, где $\varphi(\zeta) \in H_\infty$, записывается в виде $\hat{\varphi}(T)$, где $\hat{\varphi}(\zeta) = \overline{\varphi(\bar{\zeta})}$ ($\in H_\infty$). Поэтому имеет место следующее предложение.

1.2⁰. *Для любой ганкелевой матрицы* Γ *и любой функции* $\varphi(\zeta) \in H_\infty$ *справедливо перестановочное соотношение*[†]

$$\Gamma\varphi(T) = \hat{\varphi}^*(T)\Gamma, \tag{1.2}$$

обобщающее(1.1).

В самом деле,

$$\Gamma\varphi(T) = \overline{\bar{\Gamma}\hat{\varphi}(T)} = (\bar{\Gamma}\hat{\varphi}(T))^* = \hat{\varphi}^*(T)\Gamma.$$

1.3⁰. *Для ганкелевых матриц* Γ *и* Γ', *связанных зависимостью*

$$\Gamma' = \Gamma\varphi(T),$$

где $\varphi(\zeta) \in H_\infty$ *и* $\| \varphi \|_\infty \le 1$, *справедливо неравенство*

$$\bar{\Gamma}\Gamma \ge \bar{\Gamma}'\Gamma'.$$

Действительно, согласно условию предложения оператор $\hat{\varphi}(T)$ изоморфен оператору умножения в H_2 на функцию $\hat{\varphi}(\zeta)$, модуль которой почти всюду не превосходит единицы. Следовательно, $\| \hat{\varphi}(T) \|$ $(=\| \hat{\varphi}^*(T) \|) \le 1$. Поэтому для любого вектора $\xi \in \ell_2$ в силу (1.2) имеем

$$(\bar{\Gamma}\Gamma\xi, \xi) - (\bar{\Gamma}'\Gamma'\xi, \xi) = \| \Gamma\xi \|^2 - \| \hat{\varphi}^*(T)\Gamma\xi \|^2 \ge 0.$$

1.4⁰. *Пусть норма ганкелевой матрицы* Γ *достигается на некотором векторе* $\xi \in \ell_2$, *т.е.* $\| \Gamma\xi \| = \| \Gamma \| \cdot \| \xi \|$. *Обозначим через* $b_1(\zeta)$ *внутренний множитель функции* $\xi_+(\zeta)$, *а через* $b_2(\zeta)$ *внутренний множитель функции* $\overline{(\Gamma\xi)_+(\bar{\zeta})}$. *Тогда норма* Γ *достигается на каждом векторе* ξ' *вида*

$$\xi' = b'(T)b_1^*(T)\xi, \tag{1.3}$$

где $b'(\zeta)$ *– любой внутренний делитель произведения* $b_1(\zeta)b_2(\zeta)$*[††]. *В частности, норма* Γ *достигается на векторе* $\xi^0 = b_1^*(T)\xi$, *для которого функция* $\xi^0_+(\zeta)$ *является внешней.*

[†] Через $\psi^*(T)$ сокращенно обозначается сопряженный к $\psi(T)$ оператор $[\psi(T)]^*$.

[††] Т.е. $b'(\zeta)$ – внутренняя функция, для которой $b_1(\zeta)b_2(\zeta)/b'(\zeta) \in H_\infty$.

Это предложение является прямым следствием 1.2^0 и 1.3^0 и того очевидного факта, что для любой внутренней функции $b(\zeta)$ оператор $b(T)$ изометрически отображает все пространство ℓ_2 на его часть, а произведение $b(T)b^*(T)$ является ортогональным проектором на $b(T)\ell_2$. Именно, на основании предположения о том, что $\Gamma\xi \in \hat{b}_2(T)\ell_2$ †, получаем

$$\| \Gamma b_2(T)\xi \| = \| \hat{b}_2^*(T)\Gamma\xi \| = \| \hat{b}_2(T)\hat{b}_2^*(T)\Gamma\xi \| = \| \Gamma\xi \| =$$

$$= \| \Gamma \| \cdot \| b_2(T)\xi \|,$$

откуда следует, что норма Γ достигается на векторе $b_2(T)\xi$. Если, далее, $b'(\zeta)$ – любой внутренний делитель произведения $b_1(\zeta)b_2(\zeta)$, то в силу 1.3^0:

$$\| \Gamma b'(T)b_1^*(T)\xi \| \geq$$

$$\geq \| (\Gamma b'^*(T)b_2(T)b_1(T))b'(T)b_1^*(T)\xi \| =$$

$$= \| \Gamma b_2(T)\xi \| = \| \Gamma \| \cdot \| \xi \| = \| \Gamma \| \cdot \| b'(T)b_1^*(T)\xi \|$$

и, значит,

$$\| \Gamma b'(T)b_1^*(T)\xi \| = \| \Gamma \| \cdot \| b'(T)b_1^*(T)\xi \| .$$

Множество векторов L_Γ из ℓ_2, на которых достигается норма матрицы Γ, совпадает с множеством собственных векторов матрицы $\bar{\Gamma}\Gamma$, отвечающих собственному числу $\| \Gamma \|^2$, и потому является подпространством в ℓ_2 . Входящий в L_Γ линеал, натянутый на векторы вида (1.3), имеет размерность. на единицу большую степени внутренней функции $b_1(\zeta)b_2(\zeta)$ ††. Поэтому степень внутренней функции $b_1(\zeta)b_2(\zeta)$ не может превосходить размерности подпространства L_Γ.

Допустим, что L_Γ имеет размерность $n < \infty$. Тогда в нем можно найти вектор ξ^0, у которого первые $n-1$ координат равны нулю. Предыдущий анализ показывает, что в этом случае

---

† Функция $\hat{b}(\zeta)$ является внутренней, коль скоро $b(\zeta)$ – внутренняя функция.

†† Степень внутренней функции принимается равной бесконечности, если эта функция не рациональна .

все векторы ξ пространства L_Γ могут быть описаны с помощью формулы

$$\xi = P(T)T^{*\ n-1}\xi^0, \tag{1.4}$$

где $P(\zeta)$ – произвольный многочлен, степень которого не больше, чем $n-1$.

Из 1.4^0 следует, что для вектора ξ^0 в формуле (1.4) функция $\zeta^{-n+1}\xi^0_+(\zeta)$ является внешней.

Аналогичные соображения показывают, что справедливо и следующее предложение.

1.5^0. *Если степень внутренней функции $b(\zeta)$ меньше размерности подпространства L_Γ, то норма матрицы Γ достигается на подпространстве $b(T)\ell_2$.*

Предложение 1.6^0 очевидно, но из него вытекает важное следствие 1.7^0.

1.6^0. *Если ганкелевы матрицы Γ и Γ' совпадают на инвариантном относительно сдвига подпространстве $b(T)\ell_2$, то область значений их разности $\Gamma-\Gamma'$ ортогональна к подпространству $\hat{b}(T)\ell_2$.*

1.7^0. *Если норма ограниченной ганкелевой матрицы Γ достигается на инвариантном относительно сдвига подпространстве $b(T)\ell_2$, где $b(\zeta)$ – внутренняя функция , а ограниченная ганкелева матрица Λ аннулируется на $b(T)\ell_2$, то*

$$\| \Gamma + \Lambda \| \geq \| \Gamma \|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда Λ – нуль-матрица.

Действительно, на основании условия этого предложения и 1.4^0 в ℓ_2 найдется вектор ξ^0, для которого функция $\xi^0_+(\zeta)$ является внешней и

$$\| \Gamma\xi^0 \| = \| \Gamma \| \cdot \| \xi^0 \|,$$

$$\| \Gamma b(T)\xi^0 \| = \| \hat{b}^*(T)\Gamma\xi^0 \| = \| \Gamma \| \cdot \| \xi^0 \| .$$

Так как $\| \hat{b}^*(T)\Gamma\xi^0 \| = \| \Gamma\xi^0 \|$, то $\Gamma\xi^0 \in \hat{b}(T)\ell_2$, и в силу 1.6^0 векторы $\Gamma\xi^0$ и $\Lambda\xi^0$ ортогональны. Поэтому

$$\| (\Gamma + \Lambda)\xi^0 \|^2 = \| \Gamma\xi^0 \|^2 + \| \Lambda\xi^0 \|^2 \geq \| \Gamma \|^2 \cdot \| \xi^0 \|^2,$$

причем равенство может иметь место тогда и только тогда, когда $\Lambda\xi^0 = 0$. Но если матрица Λ аннулируется на векторе ξ^0 и $\xi^0_+(\zeta)$ – внешняя функция, то согласно 1.1^0 матрица Λ совпадает с нуль-матрицей на всем пространстве ℓ_2.

2. Напомним, что для ограниченной ганкелевой матрицы Γ упорядоченная пара векторов $\{\xi,\eta\}$ из ℓ_2 будет парой Шмидта, отвечающей числу $s(>0)$, если $\Gamma\xi = s\eta$, $\bar{\Gamma}\eta = s\xi \quad (\xi \neq 0)$.

Лемма 1.2. *Каковы бы ни были две пары Шмидта* $\{\xi^{(1)},\eta^{(1)}\}$ *и* $\{\xi^{(2)},\eta^{(2)}\}$ *ограниченной ганкелевой матрицы* Γ, *отвечающие одному и тому же числу* $\bar{s}$ (>0), *для них всегда выполняется равенство*[†]

$$\xi^{(1)}_+\overline{\xi^{(2)}_+(\zeta)} = \eta^{(1)}_-(\eta)\overline{\eta^{(2)}_-(\zeta)}. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для пар Шмидта $\{\xi^{(1)},\eta^{(1)}\}$ и $\{\xi^{(2)},\eta^{(2)}\}$ при любом $n \geq 0$ в силу соотношения (1.1) имеем

$$(T^{*n}\xi^{(1)},\xi^{(2)})(=\frac{1}{\bar{s}}(\bar{\Gamma}T^n\eta^{(1)},\xi^{(2)})) = (T^n\eta^{(1)},\eta^{(2)}).$$

Последнее равенство означает совпадение соответствующих неотрицательных коэффициентов Фурье функций $\xi^{(1)}_+(\zeta)\overline{\xi^{(2)}_+(\zeta)}$ и $\eta^{(1)}_-(\zeta)\overline{\eta^{(2)}_-(\zeta)}$, принадлежащих L_1. Меняя ролями пары $\{\xi^{(1)},\eta^{(1)}\}$ и $\{\xi^{(2)},\eta^{(2)}\}$ и переходя к комплексно сопряженным величинам, получаем, что неположительные коэффициенты Фурье у этих функций также совпадают. Поэтому имеет место равенство (1.5).

Следствие 1.1. Отношение $\varphi_{\bar{s}}(\zeta) = \eta_-(\zeta)/\xi_+(\zeta)$ *не зависит от выбора пары Шмидта* $\{\xi,\eta\}$ *из множества пар, отвечающих одному и тому же числу* $\bar{s}$, *и является унимодулярной функцией*[††].

Следствие 1.1 непосредственно выводится из леммы 1.2, если воспользоваться равенством (1.5) в частном случае, когда $\xi^{(1)} = \xi^{(2)}$ и, значит, $\eta^{(1)} = \eta^{(2)}$.

С помощью функции $\varphi_{\bar{s}}(\zeta)$ построим ганкелеву матрицу, полагая $\Gamma_{\bar{s}} = \bar{s}\Gamma(\varphi_{\bar{s}})$. В силу следствия 1.1 и теоремы Нехари [5]

[†]Здесь и в дальнейшем две функции связываются знаком равенства, если их значения могут отличаться лишь на множестве меры нуль.

[††]Т.е. $|\varphi_{\bar{s}}(\zeta)| = 1$.

справедливо неравенство $\| \Gamma_{\tilde{s}} \| \leq \tilde{s}$. С другой стороны, любая пара Шмидта $\{\xi, \eta\}$ матрицы Γ, отвечающая числу $\tilde{s}$, является парой Шмидта для $\Gamma_{\tilde{s}}$, отвечающей тому же числу. Действительно, используя теорему о свертке, для любого $j \geq 1$ получаем

$$\tilde{s}\eta_j = \tilde{s}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \zeta^j \eta_-(\zeta)d\theta =$$

$$= \tilde{s}\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \zeta^j \varphi_{\tilde{s}}(\zeta)\xi_+(\zeta)d\theta = \sum_1^\infty c_{j+k-1}(\tilde{s}\varphi_{\tilde{s}})\xi_k = (\Gamma_{\tilde{s}}\xi)_j,$$

и точно так же

$$\tilde{s}\xi_j = (\overline{\Gamma}_{\tilde{s}}\eta)_j.$$

Поэтому $\| \Gamma_{\tilde{s}} \| = \tilde{s}$.

Так как матрицы Γ и $\Gamma_{\tilde{s}}$ имеют общую пару Шмидта, отвечающую числу $\tilde{s}$, то на основании 1.1^0 они совпадают на некотором инвариантном относительно сдвига T подпространстве в ℓ_2. Пусть $a(T)\ell_2$, где $a(\zeta)$ – некоторая внутренняя функция, максимальное такое подпространство. Тогда $a(\zeta)$ является наибольшим общим делителем совокупности функций $\{\xi_+(\zeta)\}$ для всего множества пар Шмидта $\{\xi, \eta\}$ матрицы Γ , отвечающих числу $\tilde{s}$.

Действительно, пусть $\{\xi, \eta\}$ – такая пара. Так как $\Gamma\xi = \Gamma_{\tilde{s}}\xi$ $(= \tilde{s}\eta)$, то $\xi \in a(T)\ell_2$ и потому $\xi_+(\zeta) = a(\zeta)b(\zeta)\xi_+^0(\zeta)$, где $b(\zeta)$ – внутренняя, а $\xi_+^0(\zeta)$ – внешняя функция, т.е. $a(\zeta)$ – общий делитель рассматриваемой совокупности функций. Поскольку $\| \Gamma_{\tilde{s}} \| = \tilde{s}$, в силу 1.4^0 пару Шмидта матрицы $\Gamma_{\tilde{s}}$, отвечающую числу $\tilde{s}$, образуют также векторы $a(T)\xi^0$ и $\hat{b}(T)\eta$, т.е.

$$\Gamma_{\tilde{s}}a(T)\xi^0 = \tilde{s}\hat{b}(T)\eta, \quad \bar{\Gamma}_{\tilde{s}}\hat{b}(T)\eta = \tilde{s}a(T)\xi^0.$$

Но $a(T)\xi^0 \in a(T)\ell_2$ и потому $\Gamma a(T)\xi^0 = \Gamma_{\tilde{s}}a(T)\xi^0$. Из равенства $\bar{\Gamma}\eta = \tilde{s}a(T)b(T)\xi^0$ получаем также, что $\bar{\Gamma}b(T)\eta = \tilde{s}a(T)\xi^0$. Таким образом, $a(T)\xi^0$, $\hat{b}(T)\eta$ – пара Шмидта матрицы Γ , отвечающая числу $\tilde{s}$, и поскольку $\xi_+^0(\zeta)$ – внешняя функция, $a(\zeta)$ – наибольший общий делитель рассматриваемой совокупности функций $\{\xi_+(\zeta)\}$.

Если $\Gamma\xi = \tilde{s}\eta$, $\bar{\Gamma}\eta = \tilde{s}\xi$, то, переходя к комплексно сопряженным величинам, получаем $\Gamma\bar{\eta} = \tilde{s}\bar{\xi}$, $\bar{\Gamma}\bar{\xi} = \tilde{s}\bar{\eta}$, т.е. $\{\bar{\eta}, \bar{\xi}\}$ – пара

Шмидта матрицы Γ, отвечающая числу $\tilde{s}$. Поэтому $a(\zeta)$ является делителем как $\xi_+(\zeta)$, так и $\overline{\zeta\eta_-(\zeta)}$.

Отсюда и из соображений, приведенных в доказательстве 1.4^0, следует, что норма матрицы $\Gamma_{\tilde{s}}$ достигается на векторе из инвариантного подпространства $a^2(T)\ell_2$ и что кратность $\| \Gamma_{\tilde{s}} \|$ $(= \tilde{s})$ как s-числа матрицы $\Gamma_{\tilde{s}}$ равна числу линейно независимых пар Шмидта матрицы Γ , отвечающих числу $\tilde{s}$, плюс удвоенная степень внутренней функции $a(\zeta)$. Аналогично, норма матрицы $\Gamma a(T)(= \Gamma_{\tilde{s}}a(T))$ совпадает с числом $\tilde{s}$ и является s-числом, кратность которого меньше кратности $\tilde{s}$ как s-числа матрицы $\Gamma_{\tilde{s}}$ на число, равное степени $a(\zeta)$.

Лемма 1.3. *Если $\tilde{s}$ совпадает с s-числом $s_\varkappa(\Gamma)$ матрицы Γ и $s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_\varkappa(\Gamma) = \cdots = s_{\varkappa+\nu-1}(\Gamma) > s_{\varkappa+\nu}(\Gamma)$, то степень внутренней функции $a(\zeta)$ равняется $\varkappa$.*

Доказательство. Пусть m – степень внутренней функции $a(\zeta)$. Ганкелева матрица $\Gamma a(T)$ в силу 1.1^0 совпадает с матрицей $\Gamma_{s_\varkappa}a(T)$, а потому и ее норма совпадает с числом $s_\varkappa$ и является s-числом кратности $m+\nu$. Так как

$$a^*(T)\bar{\Gamma}\Gamma a(T) \leq \Gamma\bar{\Gamma}$$

(см. 1.3^0), то на основании теоремы о минимаксимальных свойствах собственных чисел неотрицательных операторов выводим, что s-числа операторов Γ и $\Gamma a(T)$ подчинены неравенствам

$$s_n(\Gamma) \geq s_n(\Gamma a(T)), \quad n = 0, 1, ...,$$

откуда следует, что $m \leq \varkappa$, поскольку

$$s_{\varkappa+\nu}(\Gamma) < s_{\varkappa+\nu-1}(\Gamma) = s_{m+\nu-1}(\Gamma a(T)) \leq s_{m+\nu-1}(\Gamma).$$

С другой стороны, ранг ганкелевой матрицы $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}$ не превосходит m, так как $(\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa})a(T)\ell_2 = \{0\}$, $\dim[\ell_2 \ominus a(T)\ell_2] = m$[†]. На основании (0.1) получаем, что

$$s_\varkappa(\Gamma) = \| \Gamma_{s_\varkappa} \| = \| \Gamma - (\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}) \| \geq s_m(\Gamma).$$

[†]Это равенство хорошо известно; впрочем, его вывод приведен в §4 при доказательстве леммы 4.1.

Лемма доказана.

Те же соображения, которые были использованы в ходе доказательства леммы 1.3, приводят также и к следующим предложениям.

1.8^0. Если $\tilde{s} = s_{\varkappa}(\Gamma)$ и

$$s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_{\varkappa}(\Gamma) = s_{\varkappa+1}(\Gamma) = \cdots = s_{\infty}(\Gamma),$$

то степень внутренней функции $a(\zeta)$ не меньше числа $\varkappa$.

Если $\tilde{s} < s_{\infty}(\Gamma)$, то функция $a(\zeta)$ имеет бесконечную степень.

3. Ганкелева матрица $\Gamma_{\tilde{s}}$, построенная по любым векторам ξ, η, образующим пару Шмидта для матрицы Γ и числа $\tilde{s}$ в случае, когда $\tilde{s}$ совпадает с одним из s-чисел $s_{\varkappa}(\Gamma)(\varkappa < \infty)$, обладает одним замечательным свойством. Именно, справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть $s_{\varkappa}(\Gamma)$ является собственным числом матрицы $(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}$, причем $s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_{\varkappa}(\Gamma) = \cdots = s_{\varkappa+r}(\Gamma)^{\dagger}$. Тогда существует одна и только одна ограниченная ганкелева матрица Λ с рангом, не превосходящим $\varkappa + r$, такая, что*

$$\| \Gamma - \Lambda \| = s_{\varkappa}(\Gamma). \tag{1.6}$$

Эта матрица определяется с помощью равенства

$$\Lambda = \Gamma - \Gamma_{s_{\varkappa}}$$

и имеет ранг, равный числу $\varkappa$.

Ниже приводится доказательство всех утверждений теоремы, за исключением существования требуемой матрицы Λ для случая $s_{\varkappa}(\Gamma) = s_{\infty}(\Gamma)$. Доказательство последнего дано в следующем параграфе.

Предположим, что $s_{\varkappa+r}(\Gamma) = \| \Gamma \|$. В данном случае размерность подпространства всех векторов, на которых достигается норма матрицы Γ, не меньше числа $\varkappa+r+1$, и поэтому в силу 1.5^0 и 1.7^0 в множестве $G^{[\varkappa+r]}$ ограниченных ганкелевых матриц с рангом, не превосходящим $\varkappa + r$, условию (1.6) удовлетворяет только

†При $\varkappa = 0$ мы полагаем $s_{-1}(\Gamma) = \infty$.

нуль-матрица. Кроме того, так как пары Шмидта матрицы Γ, отвечающие числу $s_{\varkappa}(\Gamma) = \| \Gamma \|$ являются также парами Шмидта для матрицы $\Gamma_{s_{\varkappa}}$ и числа $\| \Gamma \|$ и среди этих пар существует пара $\{\xi, \eta\}$ такая, что $\xi_+(\zeta)$ – внешняя функция (см. 1.4^0), то ввиду 1.1^0 матрицы $\Gamma^s_{\varkappa}$ и Γ совпадают на всем пространстве.

Допустим теперь, что

$$\| \Gamma \| \geq s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_{\varkappa}(\Gamma) = \cdots = s_{\varkappa+r}(\Gamma) > s_{\infty}(\Gamma).$$

При этих условиях на основании леммы 1.3 можно утверждать, что разность $\Gamma - \Gamma_{s_{\varkappa}}$ аннулируется лишь на подпространстве $a(T)\ell_2$, где $a(\zeta)$ – внутренняя функция степени $\varkappa$. Таким образом, матрица $\Gamma - \Gamma_{s_{\varkappa}}$ имеет ранг $\varkappa$, и для нее, очевидно, выполняется равенство (1.6). Из леммы 1.3 и определения матрицы $\Gamma_{s_{\varkappa}}$ следует также, что для матрицы $\Gamma_{s_{\varkappa}}$ размерность подпространства всех векторов, на которых достигается ее норма $s_{\varkappa}(\Gamma)$, не меньше числа $2\varkappa + r + 1$. Значит, для любой матрицы $\Lambda \in G^{[\varkappa+r]}$ в силу 1.5^0 и 1.7^0 имеем

$$\| \Gamma - \Lambda \| = \| \Gamma_{s_{\varkappa}} + (\Gamma - \Gamma_{s_{\varkappa}}) - \Lambda \| \geq s_{\varkappa}(\Gamma),$$

причем знак равенства может иметь место только тогда, когда $\Lambda = \Gamma - \Gamma_{s_{\varkappa}}$.

Учитывая 1.8^0, последнее рассуждение можно повторить и в том случае, когда $s_{\varkappa}(\Gamma)$ является собственным числом матрицы $(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}$ таким, что

$$\| \Gamma \| \geq s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_{\varkappa}(\Gamma) = \cdots = s_{\infty}(\Gamma).$$

Действительно, если при этом степень k функции $a(\zeta)$ конечна, то ранг матрицы $(\Gamma - \Gamma_{s_{\varkappa}}) - \Lambda$ (при $\Lambda \subset G^{[\varkappa+r]}$) не превосходит $k + \varkappa + r$, а размерность подпространства всех векторов, на которых достигается норма $s_{\varkappa}(\Gamma)$ матрицы $\Gamma_{s_{\varkappa}}$, не меньше числа $2k + r + 1$, причем $2k + r + 1 - (\varkappa + k + r) \geq 1$. Если же степень внутренней функции $a(\zeta)$ является бесконечной, то множество всех векторов, на которых достигается норма $s_{\varkappa}(\Gamma)$ матрицы $\Gamma_{s_{\varkappa}} a(T)$, образует бесконечномерное подпространство в ℓ_2. Поэтому для любой внутренней функции $b(\zeta)$ конечной степени согласно 1.5^0 существует в подпространстве $b(T)\ell_2$ вектор, на котором достигается норма $s_\varkappa(\Gamma)$ матрицы $\Gamma_{s_\varkappa} a(T)$ и, следовательно, в подпространстве $a(T)b(T)\ell_2$ существует вектор, на котором достигается норма $s_\varkappa(\Gamma)$ матрицы $\Gamma_{s_\varkappa}$. Мы приходим к следующему заключению: если и в этом случае существует матрица $\Lambda \subset G^{[\varkappa+r]}$ такая, что $\| \Gamma - \Lambda \| = s_\varkappa(\Gamma)$, то она должна обязательно совпадать с матрицей $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}$.

Сразу же укажем на вытекающее из теоремы 1.1 важное дополнение к лемме 1.3.

Следствие 1.2. Если $\tilde{s} = s_\varkappa(\Gamma)$ и $s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_\varkappa(\Gamma) = s_\infty(\Gamma)$, то степень внутренней функции $a(\zeta)$ равняется $\varkappa$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 1.1 ранг матрицы $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}$ не превосходит числа $\varkappa$. С другой стороны, матрица $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}$ не аннулируется ни на одном ненулевом векторе из подпространства $\ell_2 \ominus a(T)\ell_2$ и аннулируется на подпространстве $a(T)\ell_2$. Значит, ранг матрицы $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}$ совпадает со степенью внутренней функции $a(\zeta)$, а так как эта последняя не может быть меньше, чем $\varkappa$, то степень $a(\zeta)$ в точности равна $\varkappa$.

Заметим, что теорема 1.1 содержит утверждение теоремы 0.1, если $s_\varkappa(\Gamma) > s_\infty(\Gamma)$. Таким образом, мы уже полностью доказали теорему 0.1 и, следовательно, теорему 0.2 при дополнительном условии $s_\varkappa(\Gamma) > s_\infty(\Gamma)$.

Сформулируем теперь теорему, в которой собраны сведения об аналитических свойствах пар Шмидта бесконечных ганкелевых матриц, полученные в этом параграфе.

Теорема 1.2. *Пусть Γ - бесконечная ограниченная ганкелева матрица и s^2 $(s > 0)$ является собственным числом матрицы $\bar{\Gamma}\Gamma$. Тогда функции $\xi_+(\zeta)$ и $\eta_-(\zeta)$, порожденные парой Шмидта ξ, η для матрицы Γ и числа s , факторизуются в виде*

$$\xi_+(\zeta) = b_+(\zeta)a(\zeta)\varphi(\zeta),$$

$$\eta_-(\zeta) = \bar{\zeta}\, \overline{b_-(\zeta)}\, \overline{a(\zeta)}\, \overline{\varphi(\zeta)},$$

где $\varphi(\zeta)$ - внешняя функция, $b_\pm(\zeta)$ - внутренняя функция, сумма степеней которых не превосходит уменьшенную на единицу кратность s^2 как собственного числа матрицы $\bar{\Gamma}\Gamma$, а $a(\zeta)$ - вну-

тренняя функция, не зависящая от выбора пары Шмидта среди множества пар, отвечающих числу s.

Если $s = \| \Gamma \|$, то $a(\zeta) \equiv 1$; если $s = s_{\varkappa}(\Gamma)$ и $\| \Gamma \| \geq s_{\varkappa-1}(\Gamma) > s_{\varkappa}(\Gamma) \geq s_{\infty}(\Gamma)$, то степень $a(\zeta)$ совпадает с числом $\varkappa$; если $s < s_{\infty}(\Gamma)$, то внутренняя функция $a(\zeta)$ имеет бесконечную степень. Если s^2 является собственным числом конечной кратности n, то все пары Шмидта ξ, η, отвечающие числу s, описываются формулой

$$\xi_+(\zeta) = P(\zeta)a(\zeta)\psi(\zeta),$$

$$\eta_-(\zeta) = \zeta^{-n}P(\zeta)\overline{a(\zeta)}\ \overline{\psi(\zeta)},$$

где $\psi(\zeta)$ - внешняя функция из H_2, определяемая однозначно по Γ при дополнительном условии $\psi(0) > 0$, а $P(\zeta)$ - произвольный многочлен степени, не большей, чем $n-1$.

Доказательство последней части теоремы полностью проведено в случае, когда $s_{\varkappa}(\Gamma) = \| \Gamma \|$. Для того, чтобы установить его в общем случае, нужно перейти к вспомогательной матрице Γ_s (для нее $s = \| \Gamma_s \|$) и заметить, что те и только те пары Шмидта $\{\xi, \eta\}$ для матрицы Γ_s и числа s являются парами Шмидта для Γ и s, которые удовлетворяют условиям $\xi \in a(T)\ell_2$ и $\eta \in \hat{a}(T)\ell_2$.

В заключение приведем теорему о единственности решения задачи $A^{[\varkappa]}$, аналогичную теореме 1.1.

Теорема 1.3. *Если функция $f(\zeta) \in L_\infty$ такова, что для нее $s_{\varkappa}(\Gamma)$, $\varkappa < \infty$ является собственным числом матрицы $(\bar{\Gamma}\Gamma)^{1/2}$, где $\Gamma = \Gamma(f)$, то существует одна и только одна функция $h(\zeta)$ из $H_\infty^{[\varkappa]}$, удовлетворяющая условию*

$$\| f - h \|_\infty = s_{\varkappa}(\Gamma),$$

и эта функция определяется по любой паре Шмидта $\{\xi, \eta\}$, отвечающей s-числу $s_{\varkappa}(\Gamma)$ матрицы Γ , согласно формуле

$$h(\zeta) = f(\zeta) - s_{\varkappa}(\Gamma)\eta_-(\zeta)/\xi_+(\zeta). \tag{1.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как ранг матрицы $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa}$ не превосходит $\varkappa$, то согласно теореме Кронекера, цитированной во введении, функция $h(\zeta)$, определяемая по формуле (1.7), должна принадлежать множеству $H_\infty^{[\varkappa]}$.

Допустим, что функция $h_1(\zeta)$ также является решением задачи $A^{[\varkappa]}$. В силу теоремы 1.1 существует лишь одна ганкелева матрица Λ ранга, не превосходящего $\varkappa$, такая, что $\| \Gamma - \Lambda \| = s_\varkappa(\Gamma)$, а именно, матрица $\Gamma - \Gamma_{s_\varkappa} = \Lambda$. Стало быть, $\Gamma(h_1) = \Gamma - \Gamma_{s_\varkappa} = \Gamma_h$ и потому разность $h(\zeta) - h_1(\zeta) \in H_\infty$. Разность $h_1(\zeta) - h(\zeta)$ представляет собой решение задачи $A^{[0]}$ для функции $s_\varkappa(\Gamma)\eta_-(\zeta)/\xi_+(\zeta)$, но, как было показано в работе [11], а затем и в [1]†, задача $A^{[0]}$ имеет только одно решение, если норма матрицы $\Gamma(\Gamma = \Gamma(f))$ достигается. Поскольку для функции $s_\varkappa(\Gamma)\eta_-(\zeta)/\xi_+(\zeta)$ таким решением является тождественный нуль, $h_1(\zeta) = h(\zeta)$.

§2. Канонические решения обобщенной задачи Шура–Такаги. Завершение доказательства теорем 0.1 и 0.2

1. Для завершения доказательства теорем 0.1 и 0.2 нам осталось показать, что для $f \in L_\infty$ равенства

$$D_\varkappa(f) = d_\varkappa(\Gamma) = s_\varkappa(\Gamma) \quad (\Gamma = \Gamma(f)) \tag{2.1}$$

имеют место и при условии

$$s_\infty(\Gamma) = s_\varkappa(\Gamma) < s_{\varkappa-1}(\Gamma). \tag{2.2}$$

Так как при этом

$$D_{\varkappa+i}(f) = d_{\varkappa+i}(\Gamma) \le d_\varkappa(\Gamma) = s_\varkappa(\Gamma) =$$

$$= s_{\varkappa+i}(\Gamma) \le d_{\varkappa+i}(\Gamma) = D_{\varkappa+i}(\Gamma),$$

† Мы пользуемся случаем указать, что теорема 3.2 работы [1], дающая критерий полной непрерывности ганкелевой матрицы, также принадлежит П.Хартману [11], о чем, к сожалению, авторы узнали лишь после выхода их работ [1, 2].

то будем также иметь

$$D_{\varkappa+i}(f) = d_{\varkappa+i}(\Gamma) = s_{\varkappa+i} \quad (i > 0).$$

Равенство (2.1) при условии (2.2) будет установлено, если мы покажем, что при любом $\delta > 0$ в интервале $(s_\varkappa(\Gamma),\ s_\varkappa(\Gamma) + \delta)$ найдется число ρ, для которого имеет по крайней мере одно решение задача $C_\rho^{[\varkappa]}$. Мы покажем, что задача $C_\rho^{[\varkappa]}$ имеет однопараметрическое семейство так называемых канонических решений при любом $\rho(s_\varkappa(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma))$, для которого отлична от нуля величина

$$a_\rho = ((\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1} e, e), \tag{2.3}$$

где e – орт $\{1, 0, ...\}$.

Заметим, что так как a_ρ есть аналитическая функция от ρ в рассматриваемом интервале и

$$\frac{da_\rho}{d\rho} = -2\rho((\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-2} e, e) < 0,$$

то a_ρ может обратиться в этом интервале в нуль не более одного раза.

Введем в рассмотрение следующие векторы и функции, играющие фундаментальную роль во всем последующем.

Положим

$$R_\rho = (\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}, \quad p = \rho R_\rho e,$$

$$q = T\bar{\Gamma}\bar{R}_\rho e, \quad p_\rho(\zeta) = p_+(\zeta), \quad q_\rho(\zeta) = q_+(\zeta). \tag{2.4}$$

Отметим, что

$$p_\rho(0) = \rho a_\rho, \quad q_\rho(0) = 0. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Если $\rho\ (> 0)$ таково, что $s_\varkappa(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$ и $a_\rho \neq 0$, то задача $C_\rho^{[\varkappa]}$ имеет однопараметрическое семейство решений*

$$f_{\varepsilon,\rho}(\zeta) = \rho \frac{\overline{p_\rho(\zeta)}\varepsilon + \overline{q_\rho(\zeta)}}{p_\rho(\zeta) + q_\rho(\zeta)\varepsilon}, \tag{2.6}$$

где параметр ε пробегает единичную окружность $|\varepsilon| = 1$.

Решения $f_{\varepsilon,\rho}$ именуются в дальнейшем $(\Gamma; \rho)$-каноническими.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть число $\rho(> 0)$ удовлетворяет условиям леммы. Для множества векторов $\chi_\varepsilon = p + \varepsilon q$ с параметром ε, пробегающим окружность $|\varepsilon| = 1$, справедливы равенства

$$\Gamma\chi_\varepsilon = T^*(\rho T\Gamma R_\rho e + \varepsilon\Gamma\bar{\Gamma}R_\rho e) = \rho T^*(\bar{q} + \varepsilon\bar{p}),$$

т.е.

$$\Gamma\chi_\varepsilon = \varepsilon\rho T^*\overline{\chi_\varepsilon}. \tag{2.7}$$

Рассмотрим матрицу $\Gamma' = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, получающуюся из Γ дописыванием сверху одной строки, так, что $\gamma'_k = \gamma_{k-1}$ при $k > 1$, $\gamma'_1 = \gamma_0$ – произвольное комплексное число. Такая матрица связана с матрицей Γ и числом γ_0 операторным соотношением в ℓ_2:

$$\Gamma' = (\cdot, h)e + T\Gamma, \quad h = \bar{\gamma}_0 e + T\bar{\Gamma}e.$$

Так как $\bar{\Gamma}'\Gamma' = \bar{\Gamma}\Gamma + (\cdot, h), h$, то в силу известных неравенств для s-чисел [3]

$$s_{k+1}(\Gamma') \le s_k(\Gamma) \le s_k(\Gamma') \le s_{k-1}(\Gamma),$$

и потому в случае, когда $s_{k-1}(\Gamma) > s_k(\Gamma') > s_k(\Gamma)$, s-число $s_k(\Gamma)$ является простым.

Рассмотрим теперь матрицу $\Gamma'_\varepsilon = (\gamma'_{j+k-1})_1^\infty$, у которой $\gamma'_1 = \gamma_0$ – произвольная точка окружности

$$\gamma_0(\varepsilon) = \frac{1}{a_\rho}(p, T\bar{\Gamma}e) + \frac{1}{a_\rho}\varepsilon, \quad |\varepsilon| = 1. \tag{2.8}$$

Из соотношений (2.7) и (2.8) следует, что векторы χ_ε и $\varepsilon\bar{\chi}_\varepsilon$ образуют пару Шмидта матрицы Γ'_ε, отвечающую числу ρ. Так как при этом $s_\varkappa(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$, то $\rho = s_\varkappa(\Gamma'_\varepsilon)$ и $s_\varkappa(\Gamma'_\varepsilon)$ – простое s-число, т.е. $s_{\varkappa+1}(\Gamma'_\varepsilon) < s_\varkappa(\Gamma'_\varepsilon) < s_{\varkappa-1}(\Gamma'_\varepsilon)$.

По теореме 1.1 получаем, что матрица $\Lambda - \Gamma'_\varepsilon - \Gamma(\bar{\zeta}f_{\varepsilon,\rho})$ имеет ранг $\varkappa$. Поэтому, если $\mathring{f} \in L_\infty$ и $\Gamma(\bar{\zeta}\mathring{f}) = \Gamma'_\varepsilon$, то $\bar{\zeta}\mathring{f} - \bar{\zeta}f_{\varepsilon,\rho} \in H_\infty^{[\varkappa]}$ и, следовательно $\mathring{f} - f_{\varepsilon,\rho} \in H_\infty^{[\varkappa]}$†. Так как при этом $\Gamma(\mathring{f}) = \Gamma$, то $(\pi_- \mathring{f})(\zeta) = \sum_1^\infty \gamma_k\zeta^{-k}$. Таким образом, $\| f_{\varepsilon,\rho} \| = \rho$ и $r_{\varepsilon,\rho}\sum_1^\infty \times$

†Здесь и в дальнейшем через π^- обозначается ортопроектор из L_2 на $L_2 \ominus \ominus H_2$. Через π_+ в дальнейшем обозначается ортопроектор из L_2 на H_2.

$\times\gamma_k\zeta^{-k} - \pi_- f_{\varepsilon,\rho}(\zeta)$ – правильная рациональная функция, все полюсы которой расположены в круге $|z| < 1$, причем их точное число (т.е. с учетом кратности) не превосходит $\varkappa$ (так как $\rho < < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$, то это число в точности равно $\varkappa$). Следовательно, функция $f_{\varepsilon,\rho}(\zeta)$, определяемая формулой (2.6), является решением задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$.

Лемма доказана.

Тем самым закончено доказательство теорем 0.1 и 0.2.

2. Остановимся теперь на некоторых свойствах введенных функций $p_\rho(\zeta)$ и $q_\rho(\zeta)$.

Лемма 2.2. *Если $\rho > 0$ таково, что $s_\varkappa(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$ и $a_\rho \neq 0$, то при любом значении параметра ε, $|\varepsilon| = 1$, функция $\chi_\varepsilon(z) = p_\rho(z) + \varepsilon q_\rho(z)$ имеет точно $\varkappa$ нулей в круге $|z| < 1$, после выделения которых остается внешняя функция.*

Утверждение следует из теоремы 1.2, если учесть, что векторы χ_ε и $\varepsilon\bar{\chi}_\varepsilon$ образуют пару Шмидта матрицы Γ'_ε, отвечающую простому s-числу $s_\varkappa(\Gamma'_\varepsilon)(= \rho)$.

З а м е ч а н и е 2.1. При доказательстве леммы 2.1 было получено, что $r_{\varepsilon,\rho}(z)$ имеет точно $\varkappa$ полюсов в круге $|z| < 1$. Поскольку при этом $r_{\varepsilon,\rho}(z) = \pi_-(\mathring{f} - f_{\varepsilon,\rho})$ и $\bar{\zeta}(\mathring{f} - f_{\varepsilon,\rho}) \in H_\infty^{[\varkappa]}$, точка $z = 0$ не является полюсом функции $r_{\varepsilon,\rho}(z)$. Если $a(z)$ – конечное произведение Бляшке, построенное по всем $\varkappa$ полюсам функции $r_{\varepsilon,\rho}(z)$ (или функции $\pi_-\bar{\zeta}(\mathring{f} - f_{\varepsilon,\rho})$), то $a(T)\ell_2$ – ядро матрицы $\Gamma'_\varepsilon - \Gamma(\bar{\zeta} f_{\varepsilon,\rho})$. Поэтому (см. §1) функция $a(\zeta)$ является наибольшим внутренним делителем для функции $p_\rho(\zeta) + \varepsilon q_\rho(\zeta)$. Получаем, что множество полюсов функции $r_{\varepsilon,\rho}(z)$ (с учетом их кратности) совпадает с множеством нулей в круге $|z| < 1$ функции $p_\rho(z) + \varepsilon q_\rho(z)$.

Отметим, наконец, важное для дальнейшего тождество.

Лемма 2.3. *Если $\rho^2(> 0)$ – регулярная точка матрицы $\bar{\Gamma}\Gamma$, то функции $p_\rho(\zeta)$ и $q_\rho(\zeta)$ удовлетворяют тождеству*

$$|p_\rho(\zeta)|^2 - |q_\rho(\zeta)|^2 = a_\rho. \tag{2.9}$$

Эта лемма доказывает так же, как и лемма 1.2. Важно только заметить, что векторы p и $T^*\bar{q}$ образуют (единственное) решение неоднородной системы

$$\Gamma\xi = \rho\eta, \quad \bar{\Gamma}\eta = \rho\xi - e \quad (p = \xi, \quad T^{*}\bar{q} = \eta).$$

§3. Описание всех решений обобщенной задачи Шура

1. Обозначим через B единичный шар из H_∞ :

$$B = \{\mathcal{E} : \mathcal{E} \in H_\infty, \ \| \mathcal{E} \| \le 1\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть $\rho > \| \Gamma \|$, а $p_\rho(\zeta), q_\rho(\zeta) (\in H_2)$ – функции, определяемые по матрице Γ и числу ρ формулами (2.4). Тогда функциями*

$$f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta) = \rho \frac{\mathcal{E}(\zeta)\overline{p_\rho(\zeta)} + \overline{q_\rho(\zeta)}}{p_\rho(\zeta) + \mathcal{E}(\zeta) q_\rho(\zeta)} \quad (\mathcal{E} \in B) \tag{3.1}$$

исчерпываются все решения задачи $C_\rho(\Gamma)(= C_\rho^{[0]})$.

Доказательству теоремы предпошлем три простые леммы.

Лемма 3.1. *Если $f, g \in H_2$, $|f(\zeta)| \ge |g(\zeta)|$ (почти всюду) и $f(\zeta)$ – внешняя функция, то таковой будет и функция $f(\zeta)+$ $+g(\zeta)$.*

Доказательство. Положим $\chi(\zeta) = g(\zeta)/f(\zeta)$; тогда $\chi \in B^{\dagger}$ и $f + g = f(1 + \chi)$. Достаточно показать, что $1 + \chi$ – внешняя функция, а это следует из того, что $Re(1 + \chi(\zeta)) \ge 0$ (см. [4], с.111).

Лемма 3.2. *Пусть $f, g \in H_2$, $|f(\zeta)| \ge |g(\zeta)|$ (почти всюду) и $f/(f + g) \in L_1$. Тогда, если $f(\zeta) + g(\zeta)$ – внешняя функция, то такой будет и функция $f(\zeta)$.*

Доказательство. Так как $f(\zeta) + g(\zeta)$ – внешняя функция, то из условия $f/(f + g) \in L_1$ следует, что

$$w(\zeta) = \frac{f(\zeta) - g(\zeta)}{f(\zeta) + g(\zeta)} \in H_1.$$

---

† Функции, представимые в виде отношения функции из H_∞ к внешней функции из H_∞, образуют класс D. Если $q \in D$ и $q \in L_p$, то $q \in H_p (1 \le p \le$ $\le \infty)$.

Поэтому при $|z| < 1$ значение $Rew(\zeta)(\geq 0)$ выражается интегралом Пуассона через граничные значения $Rew(\zeta)(\geq 0)$. Из неотрицательности ядра Пуассона заключаем, что $Rew(z) \geq 0$, т. е. $|f(z)| \geq |g(z)|(|z| < 1)$. Таким образом, $g(\zeta) = f(\zeta)h(\zeta)$, $f + g = f(1 + h)$, где $h \in B$ и поскольку по условию $f + g$ – внешняя функция, то таковым будет и множитель f[†].

Лемма 3.3. *Пусть $f, g \in H_2$, $f + g$ – внешняя функция и почти всюду*

$$|f(\zeta)|^2 - |g(\zeta)|^2 \geq c \ \ (> 0). \tag{3.2}$$

Тогда f – внешняя функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В самом деле, для $\chi = g/f$ из (3.2) следует, что $|f(\zeta)|^2(1 - |\chi(\zeta)|^2) \geq c$, $(1 - |\chi(\zeta)|^2)^{-1} \leq c^{-1}|f(\zeta)|^2$, откуда $(1 - |\chi|^2)^{-1} \in L_1$. Так как $|1 + \chi(\zeta)|^{-1} \leq (1 - |\chi(\zeta)|)^{-1} \leq 2(1 - |\chi|^2)^{-1}$, то $f/(f+g) = (1+\chi)^{-1} \in L_1$. Остается вспомнить лемму 3.2.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3.1. Если $\rho \geq \| \Gamma \|$, то в соотношении $|p_\rho(\zeta)|^2 - |q_\rho(\zeta)|^2 = a_\rho$ величина $a_\rho = (R_\rho e, e) > 0$.

Согласно лемме 2.2 функция $p_\rho + q_\rho$ – внешняя и, стало быть, по лемме 3.3 функция p_ρ – внешняя. Поэтому в силу леммы 3.1 при любой функции $\mathcal{E} \in B$ функция $p_\rho + \mathcal{E} q_\rho$ – внешняя. Согласно лемме 2.1 при каждом $\mathcal{E}(\zeta) \equiv \mathcal{E} =$ const $(|\varepsilon| = 1)$ функция $f_{\mathcal{E},\rho}$ является решением задачи $C_\rho (= C_\rho^{[0]})$, т.е.

$$(\pi_- f_{\varepsilon,\rho})(\zeta) = \sum_1^\infty \gamma_k \zeta^{-k}, \ \ \| f_{\varepsilon,\rho} \|_\infty \leq \rho. \tag{3.3}$$

Функция $f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta)$ при любом $\mathcal{E} \in B$ удовлетворяет условию $\| f_{\varepsilon,\rho} \|_\infty \leq \rho$, ибо $|p_\rho(\zeta)| > |q_\rho(\zeta)|$ (почти всюду). Кроме того, из (2.9) и (3.1) следует, что

$$f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta) - f_{\varepsilon,\rho}(\zeta) = \frac{a_\rho(\mathcal{E}(\zeta) - \varepsilon)}{[p_\rho(\zeta) + q_\rho(\zeta)\mathcal{E}(\zeta)][p_\rho(\zeta) + q_\rho(\zeta)\varepsilon]}. \tag{3.4}$$

Так как в правой части этого равенства стоит отношение функции из H_∞ к внешней функции из H_1, то $f_{\mathcal{E},\rho} - f_{\varepsilon,\rho}$ – функция

[†] Из доказанных лемм следует, что если $b(\zeta)$ – внутренняя функция, отличная от константы, то $1/(1 + b) \notin L_1$.

класса D. Так как при этом $f_{\mathcal{E},\rho} - f_{\varepsilon,\rho} \in L_\infty$, то $f_{\mathcal{E},\rho} - f_{\varepsilon,\rho} \in H_\infty$, а поэтому, согласно (3.3),

$$(\pi_- f_{\mathcal{E},\rho})(\zeta) = (\pi_- f_{\varepsilon,\rho})(\zeta) = \sum_1^\infty \gamma_k \zeta^{-k}.$$

Таким образом, при любой $\mathcal{E} \in B$ функция $f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta)$ является решением задачи B_ρ.

Пусть теперь $f(\zeta)$ – произвольное решение задачи C_ρ. Определим $\mathcal{E}(\zeta)$ так, чтобы $f(\zeta)$ было равно левой части в (3.1). Тогда $|\mathcal{E}(\zeta)| \le 1$. Нам остается убедиться в том, что $\mathcal{E}(\zeta) \in H_\infty$. Для $\varepsilon =$ const, $|\varepsilon| = 1$ разность $g(\zeta) = f(\zeta) - f_{\varepsilon,\rho}(\zeta)$ принадлежит H_∞ и равна левой части равенства (3.4). Отсюда следует, что $\mathcal{E}(\zeta)$ представима в виде $\mathcal{E}(\zeta) = h(\zeta)/b(\zeta)$, где $h \in B$, b – внутренняя функция, не имеющая нетривиального общего внутреннего делителя с $h(\zeta)$, причем

$$a_\rho(h(\zeta) - \varepsilon b(\zeta)) \doteq$$

$$= g(\zeta)[p_\rho(\zeta)b(\zeta) + q_\rho(\zeta)h(\zeta)][p_\rho(\zeta) + q_\rho(\zeta)\varepsilon].$$

Из последнего равенства заключаем, что при любом ε, $|\varepsilon| = 1$, функция $h(\zeta) - \varepsilon b(\zeta)$ делится на внутренний множитель $b_1(\zeta)$ функции $p_\rho(\zeta)b(\zeta) + q_\rho(\zeta)h(\zeta)$, т.е. $(h - \varepsilon b)/b_1 \in H_\infty$. Но тогда $h/b_1 \in H_\infty$, $b/b_1 \in H_\infty$, т.е. $b_1(\zeta)$ – общий внутренний делитель функций $h(\zeta)$ и $b(\zeta)$. Поэтому $b_1(\zeta) \equiv$ const, и, следовательно, $p_\rho(\zeta)b(\zeta) + q_\rho(\zeta)h(\zeta)$ – внешняя функция. С другой стороны, так как $|h(\zeta)| = |b(\zeta)\mathcal{E}(\zeta)| \le 1$, то почти всюду

$$|b(\zeta)p_\rho(\zeta)|^2 - |q_\rho(\zeta)h(\zeta)|^2 \ge$$

$$\ge |p_\rho(\zeta)|^2 - |q_\rho(\zeta)|^2 = a_\rho(> 0).$$

На основании леммы 3.3 заключаем, что bp_ρ – внешняя функция, а значит $b(\zeta) \equiv$ const и $\mathcal{E} \in H_\infty$.

Теорема доказана.

2. Если мы положим ($\rho > \| \Gamma \|$)

$$X_\rho(z) = q_\rho(z)/p_\rho(z), \quad \Phi_\rho(z) = \sqrt{a_\rho}/p_\rho(z), \tag{3.5}$$

то соотношение (2.9) примет вид

$$|X_\rho(\zeta)|^2 + |\Phi_\rho(\zeta)|^2 = 1, \tag{3.6}$$

а формула (3.1) – вид

$$f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta) = \rho\frac{\Phi_\rho(\zeta)}{\overline{\Phi_\rho(\zeta)}}\frac{\mathcal{E}(\zeta) + \overline{X_\rho(\zeta)}}{1 + \mathcal{E}(\zeta)X_\rho(\zeta)}. \tag{3.7}$$

Имеет место

Теорема 3.2. *Функция X_ρ обладает следующими свойствами:*

$$1)\ \ X_\rho \in B, \quad 2)\ \ X_\rho(0) = 0,$$
$$3)\ \ (1 - |X_\rho|)^{-1} \in L_1.$$

Функция $\Phi_\rho \in B$ является внешней и выражается через X_ρ по формуле

$$\Phi_\rho(z) = \exp\Big(\frac{1}{4\pi i}\oint\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\ln[1 - |X_\rho(\zeta)|^2]\frac{d\zeta}{\zeta}\Big) \quad (|z| < 1). \tag{3.8}$$

Функцией X_ρ и числом ρ вполне определяется исходная матрица Γ[†].

Доказательство. Как было выяснено в начале доказательства теоремы 3.1, функция $p_\rho (\in H_2)$ – внешняя, поэтому из (3.6) следует, что $\Phi_\rho, X_\rho \in B$, причем Φ_ρ – внешняя функция и $\Phi_\rho^{(-1)} \in H_2$. Так как $q_\rho(0) = 0$, то $X_\rho(0) = 0$. В силу (3.6) $(1 - |X_\rho|^2)^{-1} = |\Phi_\rho^{-1}|^2 \in L_1$, откуда следует 3). Так как Φ_ρ – внешняя функция из B и $\ln|\Phi_\rho(\zeta)| = \frac{1}{2}\ln(1 - |X_\rho(\zeta)|^2)$. то отсюда следует (3.8).

Вспоминая, что C_ρ есть решение задачи и полагая, например. в (3.7) $\mathcal{E} = 0$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\zeta^{-k} = \pi_-\Big(\rho\frac{\Phi_\rho}{\bar{\Phi}_\rho}\bar{X}_\rho\Big) \quad \Big(= \pi_-\rho\frac{\bar{q}_\rho}{p_\rho}\Big).$$

Так как в правой части все определяется через ρ и X_ρ, то теорема доказана.

[†]Стоит заметить, что при умножении матрицы Γ на скаляр α функция X_ρ трансформируется по закону $X_{\rho|\alpha|}(z, \alpha\Gamma) = X_\rho(z; \Gamma)$.

3. Отметим некоторые следствия теоремы 3.1 и укажем на одну проблему, возникающую в связи с ней, и теоремы Хартмана.

Согласно теореме Хартмана [11], для того чтобы существовала непрерывная функция f такая, что $\Gamma(f) = \Gamma$, необходимо и достаточно , чтобы $\Gamma \in \mathfrak{S}_\infty$, т.е. оператор Γ был вполне непрерывен. Более того [11] , при выполнении последнего условия при любом $\rho > \| \Gamma \|$ будут существовать непрерывные $(\Gamma;\rho)$-функции (т.е. функции f, для которых $\Gamma(f) = \Gamma$ и $\| f \| \leq \rho$ (см. также [1], §3).

Таким образом, при $\Gamma \in \mathfrak{S}_\infty$ и при любом $\rho > \| \Gamma \|$ среди функций $f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta)$ найдутся непрерывные. Авторам не известно, как описать все те функции $\mathcal{E} \in B$, которым соответствуют непрерывные функции $f_{\mathcal{E},\rho}$.

При $\Gamma \in \mathfrak{S}_\infty$ может случиться, что функции p_ρ и q_ρ окажутся непрерывными. В этом случае поставленная задача решается тривиально.

Если функции p_ρ и q_ρ непрерывны†, то функция $f_{\mathcal{E},\rho}$ в силу (2.9) будет непрерывна точно тогда, когда функция $\mathcal{E}(\zeta)$ непрерывна.

Функция $f_{\mathcal{E},\rho}$ будет непрерывна и будет иметь постоянный модуль, равный ρ, точно тогда, когда $\mathcal{E}(\zeta)$ – конечное произведение Бляшке степени $n = \operatorname{ind} f_{\mathcal{E},\rho}$.

Первое утверждение следует непосредственно из выражения $\mathcal{E}(\zeta)$ через $f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta)$, получающееся путем обращения формулы (3.1). Поясним второе утверждение.

Если функция $f_{\mathcal{E},\rho}$ непрерывна и $|f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta)| = \rho$, то $\mathcal{E} \in A$ и $|\mathcal{E}(\zeta)| = 1$, а отсюда уже следует, что $\mathcal{E}$ – произведение Бляшке конечной степени $(= \operatorname{ind} \mathcal{E})$. С другой стороны, если $|\mathcal{E}(\zeta)| = 1$, то при всех ζ $(|\zeta| = 1)$

$$f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta) = \rho \mathcal{E}(\zeta) \frac{\overline{F(\zeta)}}{F(\zeta)}, \tag{3.9}$$

где $F(\zeta) = p_\rho(\zeta) + \mathcal{E}(\zeta) q_\rho(\zeta)$. Так как внешняя функция непре-

---

†Т.е. если $p_\rho, q_\rho \in A$. Легко показывается, что если $f \in H_1$ и функция $f(\zeta)$ $(|\zeta| = 1)$ непрерывна $(f \in C)$, то $f(z) \in A$, т.е. функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

рывна и согласно (2.9) $\min|F(\zeta)| > 0$, то $\operatorname{ind} F = \operatorname{ind} \bar{F} = 0$, а поэтому $\operatorname{ind} f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta) = \operatorname{ind} \mathcal{E}(\zeta)$.

Непрерывность функций p_ρ и q_ρ будет иметь место, в частности, тогда, когда для $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j| < \infty. \tag{3.10}$$

Более того, в этом случае[†] $p_\rho, q_\rho \in W_+$.

В самом деле, при выполнении условия (3.10) матрица Γ, а с ней и $\overline{\Gamma}$ порождают вполне непрерывные операторы в ℓ_1. Следовательно, вполне непрерывный оператор будет порождаться и матрицей $\Gamma\overline{\Gamma}$ и ℓ_1 , причем спектр этого оператора будет совпадать со спектром оператора $\bar{\Gamma}\Gamma$ в ℓ^2 (см, §7, лемма 7.1). Поэтому при $\rho >\| \Gamma \|$ и $\xi \in \ell_1$ векторы $\eta = (\rho^2 - \bar{\Gamma}\Gamma)^{-1}\xi$ и Γ_η также принадлежат ℓ_1. Полагая $\xi = e$, получаем $p_\rho, q_\rho \in W_+$.

Легко видеть, что $f_{\mathcal{E},\rho}$ будет принадлежать алгебре W в том и только в том случае, когда $\mathcal{E} \in B \cap W_+$.

Нам осталось также немного добавить , чтобы получить предложение 3.1^0.

Если $f \in C$, $|f(\zeta)| \equiv \rho$ $(|\zeta| = 1)$ *и* $\pi_- f \in W_-$, *то* $f \in W$. *При этом:*

1) если $\operatorname{ind} f < 0$, *то в этом и только этом случае* f *будет минифункцией* $(\rho =\| \Gamma(f) \|)$, *более того, в этом случае* ρ *будет* s*-числом матрицы* Γ *точно кратности* $n = -\operatorname{ind} f$;

2) если $\operatorname{ind} f = 0$, *то в этом и только этом случае* f *будет канонической* $(\Gamma; \rho)$*-функцией с* $\rho >\| \Gamma \|$;

3) если $\operatorname{ind} f > 0$, *то* $\| \Gamma(f) \| < \rho$ *и* $f = f_{\mathcal{E},\rho}$, *где* $\mathcal{E}$ *- конечное произведение Бляшке с* $\operatorname{ind} \mathcal{E} = \operatorname{ind} f$.

[†]Как обычно, через W обозначается винеровская алгебра непрерывных $f \in C$, для которых

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty,$$

а через W_+ и $W_-(= \overline{W}_+)$ - ее комплесно сопряженные подалгебры: $W_+ = \{f : f \in W, \pi_- f = 0\}$.

Доказательство. В самом деле, если f – некоторая минифункция (т.е. $\| \Gamma(f) \| = \| f \|_\infty$ и $\pi_- f \in W_-$, то по теореме 4.1 из [1] функция $f \in W$, $|f(\zeta)| = \| \Gamma(f) \|$ и для $\rho = \| \Gamma(f) \|$ справедливо второе утверждение из 1).

С другой стороны, если выполнены все три условия предложения 3.1^0 и $\rho > \| \Gamma(f) \|$, то функции p_ρ, q_ρ, отвечающие матрице $\Gamma = \Gamma(f)$ со свойством (3.10) ($\pi_- f \in W_-$), принадлежат классу W_+ и $f = f_{\mathcal{E},\rho}$, где $\mathcal{E}$ – конечное произведение Бляшке с $\operatorname{ind} \mathcal{E} = \operatorname{ind} f$. Таким образом, в этом случае для f будут справедливы утверждения 2) и 3). Кроме того, в этом случае $F = p + \mathcal{E} q \in W_+$ (ибо $p, q, \mathcal{E} \in W_+$), $\bar{F} \in W_-$ и так как $|F(\zeta)| > 0$ ($|\zeta| = 1$), то согласно (3.1) по теореме Винера $f = f_{\mathcal{E},\rho} \in W$.

Предложение доказано[†].

Его можно дополнить утверждениями, уточняющими поведение функции f при наличии соответствующего уточнения поведения части $\pi_- f$. В качестве иллюстрации укажем, что если третье условие предложения 3.1^0: $\pi_- f \in W_-$ заменить более жестким, а именно, что при некотором $\nu > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^\nu |c_j(f)| < \infty,$$

то тогда также

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^\nu |c_k(f)| < \infty,$$

или, если функция $\pi_- f$ аналитична на единичной окружности, то и сама функция f аналитична на ней (по этому поводу см. [1], §4).

[†]При доказательстве предложения 3.1^0 была использована теорема 4.1 из [1]. Отмеченные свойства функции $f_{\mathcal{E},\rho}$ при выполнении условия (3.10) позволяют доказать по-новому и саму теорему 4.1, если воспользоваться тем, что при $\pi_- f \in W_-$ всегда найдется натуральное N (см. [1], §3), для которого $\| \Gamma(\zeta^N f) \| < \rho = \| f \|_\infty$. При таком N функция $f_N = \zeta^N f$ будет допускать представление (3.1) с $p = p_N (\in W_+)$ и $q = q_N (\in W_+)$, строящимися по матрице $\Gamma_N = \Gamma(\zeta^N f)$, откуда уже можно получить утверждение 1) предложения 3.1^0.

§4. Обобщенная теорема Руше

Начнем со вспомогательного предложения.

Лемма 4.1. *Пусть b – внутренняя функция конечной степени b_1, а $n_1 > n$ – внутренняя функция степени $n_1 > n$ ($n_1 \leq \leq \infty$). Тогда $b_1 b$ – недеформируемая минифункция*[†].

Доказательство. По теореме о свертке имеем

$$[\bar{\Gamma}(b_1)\xi](\zeta) = [\pi_-^{-} b_1 \xi_+](\zeta),$$

$$[\bar{\Gamma}(\bar{b}_1)\eta](\zeta) = [\pi_+ b_1 \eta_-](\zeta), \quad \xi, \eta \in \ell_2,$$

так что для

$$[\bar{\Gamma}(\bar{b}_1)\Gamma(\bar{b}_1)\xi]_+(\zeta) = [\pi_+ b_1 \pi_- \bar{b}_1 \xi_+](\zeta) =$$

$$= \xi_+(\zeta) - [\pi_+ b_1 \pi_+ \bar{b}_1 \xi_+](\zeta).$$

В последнем равенстве мы учли, что b_1 – внутренняя функция, $b_1 \bar{b}_1 = 1$. Получаем, что $\bar{\Gamma}(\bar{b}_1)\Gamma(\bar{b}_1) = I - b_1(T)b_1^*(T)$, т.е. это оператор ортогонального проектирования из ℓ_2 на $\ell_2 \ominus b_1(T)\ell_2$. Если $b_1(\zeta)$ разлагается в виде произведения k (нетривиальных) внутренних множителей $\beta_i(\zeta) : b_1(\zeta) = \prod_{i=1}^{k} \beta_i(\zeta)$, то подпространство $\ell_2 \ominus b_1(T)\ell_2$ разлагается в ортогональную сумму k подпространств:

$$\ell_2 \ominus b_1(T)\ell_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus [B_j(T)\ell_2 \ominus B_{j+1}(T)\ell_2],$$

где

$$B_j = \prod_{i=0}^{j-1} \beta_i(\zeta), \quad \beta_0(\zeta) = 1 \quad (1 \leq j \leq k).$$

Отсюда легко заключить, что размерность подпространства $\ell_2 \ominus b_1(T)\ell_2$ совпадает со степенью n_1 внутренней функции b_1

[†]Согласно [2], функция f ($\in L_\infty$) называется недеформируемой минифункцией, если для любого $hH_\infty, h \neq 0$, норма $\| f - h \|_\infty > \| f \|_\infty$, т.е. $h = 0$ является единственным решением задачи $A^{[0]}$ для функции f.

(если $\beta_j(\zeta)$ – элементарный множитель Бляшке, то подпространство $B_j(T)\ell_2 \ominus B_{j+1}(T)\ell_2$ одномерно). Итак, $\bar{\Gamma}(\bar{b}_1)\Gamma(\bar{b}_1)$ – ортопроектор из ℓ_2 на подпространство $\ell_2 \ominus b_1(T)\ell_2$ размерности $n_1(> n)$.

Поэтому согласно предложению 1.5^0 в подпространстве $b(T)\ell_2$ найдется вектор $b(T)\xi \neq 0$ ($\xi \in \ell_2$), на котором достигается норма оператора $\Gamma(\bar{b}_1)$, так что

$$\| \Gamma(\bar{b}_1 b)\xi \| = \| \Gamma(\bar{b}_1) b(T)\xi \| = \| b(T)\xi \| = \| \xi \| .$$

Таким образом, у матрицы $\Gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma(\bar{b}_1 b)$ число $s_0(\Gamma) = 1$ является собственным для $\bar{\Gamma}\Gamma$, и утверждение леммы следует из теоремы 1.3.

Заметим, что при $n_1 < \infty$ ($n_1 > n$) утверждение леммы вытекает из утверждения 1) предложения 3.1^0.

Теорема 4.1. *Пусть $f, g \in D, f + g \neq 0$, причем 1) $|f(\zeta)| \geq$ $\geq |g(\zeta)|$ (почти всюду). Тогда степень внутреннего множителя b_1 функции $f + g$ не больше степени внутреннего множителя b функции f.*

Если же выполняется еще условие 2) $f/(f + g) \in L_1$, то степени b и b_1 равны.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно принять, что $f = b$, а $g \in B$, так как от деления функций f и g на внешний множитель функции f общий случай сводится к рассматриваемому.

Обозначим через h внешний множитель функции $f + g = b + g$, так что $b + g = b_1 h$. Из $\bar{b}_1 b + \bar{b}_1 g = h (\in H_\infty)$ следует

$$\Gamma(\bar{b}_1 b) = \Gamma(-\bar{b}_1 g), \quad \| \bar{b}_1 b - h \|_\infty = \| \bar{b}_1 g \|_\infty \leq 1 = \| \bar{b}_1 b \|_\infty .$$

Таким образом, функция $\bar{b}_1 b$ не является недеформируемой минифункцией.

Поэтому, если степень n функции b конечна, то по лемме 4.1 также и степень n_1 функции b_1 конечна и, более того, $n_1 \leq n$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что если $n_1 < \infty$ и выполняется условие 2), то $n < \infty$ и, более того, $n = n_1$.

При $n_1 < \infty$ матрица $\Gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma(\bar{b}_1 b)$ имеет ранг, не больший n_1 и поэтому $\| \Gamma \|$ будет ее s-числом конечной кратности. Если бы $\| \Gamma \| = \| \bar{b}_1 b \|_\infty = 1$, то по теореме 1.3 функция $\bar{b}_1 b$ была бы недеформируемой минифункцией, что заведомо не так. Таким образом, $\| \Gamma \| < 1$, и для $\rho = 1$ по формуле (2.4) можно будет построить функции $p_1(\zeta)$ и $q_1(\zeta)$, которые в данном случае (из-за конечности ранга Γ) окажутся рациональными функциями, притом непрерывными на единичной окружности[†].

По теореме 3.1 функциям $\bar{b}_1 b$ и $\bar{b}_1 g$ в формуле (3.1) будут отвечать соответственно функции $\mathcal{E}_b$ и $\mathcal{E}_g$ из B, причем, так как $|\overline{b_1(\zeta)} b(\zeta)| = 1$, то будем иметь

$$|\mathcal{E}_b(\zeta)| = 1 \geq |\mathcal{E}_g(\zeta)| \quad \text{(почти всюду)}. \tag{4.1}$$

С другой стороны, согласно общей формуле

$$f_{\mathcal{E}_1,\rho}(\zeta) - f_{\mathcal{E}_2,\rho}(\zeta) = \rho a_\rho[\mathcal{E}_1(\zeta) - \mathcal{E}_2(\zeta)]/$$

$$/[p_\rho(\zeta)\mathcal{E}_1(\zeta) + q_\rho(\zeta)][p_\rho(\zeta)\mathcal{E}_2(\zeta) + q_\rho(\zeta)] \tag{4.2}$$

для разности двух функций $f_{\mathcal{E}_1}$ и $f_{\mathcal{E}_2}$ (ср. с (3.4)) в данном случае ($\rho = 1$, $f_{\mathcal{E}_1} = \bar{b}_1 b$, $f_{\mathcal{E}_2} = -\bar{b}_1 g$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_b$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_g$) будем иметь

$$\mathcal{E}_b(\zeta) - \mathcal{E}_g(\zeta) = a^{-1} h(\zeta)[p_1(\zeta) + \mathcal{E}_b(\zeta) q_1(\zeta)] \times$$

$$\times [p_1(\zeta) + \mathcal{E}_g(\zeta) q_1(\zeta)], \tag{4.3}$$

где $a = (R_\rho e, e)$, $\rho = 1$.

В силу условия 2) теоремы $h^{-1} \in L_1$. С другой стороны, при любом $\mathcal{E} \in B$ в силу тождества (2.9) имеем

$$|p_1(\zeta) + \mathcal{E}_b(\zeta) q_1(\zeta)| \geq |p_1(\zeta)| - |q_1(\zeta)| \geq$$

$$\geq a/(|p_1(\zeta)| + |q_1(\zeta)|) \geq a/2 \max |p_1(\zeta)|.$$

Поэтому из (4.3) следует, что $(\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_g)^{-1} \in L_1$. Кроме того, так как при любом $\mathcal{E} \in B$ функция $p_1 + \mathcal{E} q_1$ является внешней (см.

[†]Только последнее свойство (непрерывность) и используется в дальнейшем. Оно следует, например, из того, что Γ удовлетворяет условию (3.10) ($\Gamma(\overline{b_1} b) = \Gamma(\pi_-(\overline{b_1} b))$) , а $\pi_-(\overline{b_1} b)$ – рациональная функция, все полюсы которой расположены внутри единичной окружности).

доказательство теоремы 3.1), то из (4.3) следует также, что $\mathcal{E}_b - \mathcal{E}_g$ – внешняя функция.

Вспоминая (4.1), заключаем на основании леммы 3.2, что $\mathcal{E}_b$ – внешняя функция, откуда $\mathcal{E}_b = \varepsilon = \text{const}$ ($|\varepsilon| = 1$).

Таким образом, функция $\bar{b}_1 b$ является непрерывной $(\Gamma; \rho)$-канонической функцией ($\rho = 1$), к которой применимо предложение 3.1^0. Из непрерывности $b = b_1(\bar{b}_1 b)$ и b_1 следует непрерывность $b = b_1(\bar{b}_1 b)$, откуда b – конечное произведение Бляшке. В силу утверждения 2) предложения 3.1^0, $\text{ind}\,(\bar{b}_1 b) = 0$, т.е. $\text{ind}\, b = \text{ind}\, b_1 = n_1$.

Теорема доказана.

Следствие 4.1 (обобщение леммы 3.3). *Пусть* $f, g \in H_2$ *и почти всюду*

$$|f(\zeta)|^2 - |g(\zeta)|^2 \geq c \quad (> 0).$$

Тогда при любом $\mathcal{E} \in B$ *степень внутреннего множителя функции* $f + \mathcal{E}g$ *совпадает со степенью внутреннего множителя функции* f.

В самом деле, при любом $\mathcal{E} \in B$ имеем

$$|f(\zeta)|^2 - |\mathcal{E}(\zeta)g(\zeta)|^2 \geq |f(\zeta)|^2 - |g(\zeta)|^2 \geq c$$

почти всюду, а отсюда уже следует (см. доказательство леммы 3.3), что $f/(f + \mathcal{E}g) \in L_1$.

З а м е ч а н и е 4.1. Условие 2) для второго утверждения теоремы 4.1 существенно. Оказывается, для любой внутренней функции b можно указать функцию $g \in B$ такую, чтобы $b+g$ было внешней функцией и, кроме того, выполнялось условие $\ln|b+g| = \ln(1 - |g|) \in L_1$. Действительно, выбрав произвольно $a > 0$, положим $g(\zeta) = (1+a)^{-2}(1 - ab(\zeta))(a - b(\zeta))$. Очевидно, $|g(\zeta)| \leq 1, g\bar{b} = -|g\bar{b}| = -|g|$, а поэтому $1 - |g(\zeta)| = |b(\zeta) + g(\zeta)|$. Так как $0 \neq b+g \in H_\infty$, то $\ln|b+g| \in L_1$, а также $b+g = a(1+a)^{-2}(1+b)^2$, то вместе с функцией $1 + b(b \in B)$ и функция $b + g$ является внешней.

§5. Описание всех решений задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ при $\varkappa > 0$

1. В этом параграфе всюду предполагается, что

$$s_\varkappa(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma) \quad (\varkappa \geq 1). \tag{5.1}$$

Тогда возможны три случая: $a_\rho \gtreqless 0$. Случаи $a_\rho > 0$ и $a_\rho < 0$ трактуются аналогично, а случай $a_\rho = 0$ требует дополнительных рассмотрений.

Из лемм 2.2 и 2.3 и следствия 4.1 непосредственно вытекает

Лемма 5.1. *Пусть $a_\rho > 0$ ($a_\rho < 0$), тогда при любом $\mathcal{E} \in \in B$ степень внутреннего множителя функции $p_\rho + \mathcal{E}q_\rho$ (функции $q_\rho + \mathcal{E}p_\rho$) равна $\varkappa$.*

Эту лемму дополним следующей леммой.

Лемма 5.2. *Пусть $a_\rho \neq 0$; тогда функции p_ρ и q_ρ не имеют общих нулей. и, следовательно, при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ функции $p_\rho + \varepsilon_1 q_\rho$ и $p_\rho + \varepsilon_1 q_\rho$ не имеют общих нулей (внутри единичного круга).*

Доказательство. Согласно лемме 2.1 при любом ε ($|\varepsilon| = 1$) функция $f_{\varepsilon,\rho}$, определяемая равенством (2.6), является решением задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$, а функция

$$r_{\varepsilon,\rho}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} - (\pi_- f_{\varepsilon,\rho})(\zeta) \tag{5.2}$$

является правильной рациональной, имеющей полюсы лишь в круге $|z| < 1$, причем последние совпадают (с учетом кратности) с нулями функции $p_\rho + \varepsilon q_\rho$ (см. замечание 2.1).

Из (5.2) следует, что

$$r_{\varepsilon_1,\rho} - r_{\varepsilon_2,\rho} = -\pi_-(f_{\varepsilon_2,\rho} - f_{\varepsilon_1,\rho})$$

при $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ ($|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1$), а поэтому, согласно (4.2),

$$r_{\varepsilon,\rho} - r_{\varepsilon,\rho} + \frac{q_\rho(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(p_\rho + \varepsilon_1 q_\rho)(p_\rho + \varepsilon_2 q_\rho)} \in H_\infty. \tag{5.3}$$

Если бы некоторая точка α ($|\alpha| < 1$) была бы общим нулем функций $p_\rho + \varepsilon_j q_\rho$ ($j = 1, 2$) кратностей k_1 и k_2 соответственно.

то она была бы для стоящей в левой части (5.3) разности полюсом порядка, не большего $\max(k_1, k_2)$, а для стоящей там же дроби – полюсом порядка $k_1 + k_2$, что невозможно.

Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Все решения задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ исчерпываются при $a_\rho > 0$ функциями*

$$f_{\mathcal{E},\rho} = \rho \frac{\bar{p}_\rho \mathcal{E} + \bar{q}_\rho}{p_\rho + q_\rho \mathcal{E}} \quad (\mathcal{E} \in B), \tag{5.4}$$

а при $a_\rho < 0$ – функциями

$$f_{\mathcal{E},\rho} = \rho \frac{\bar{p}_\rho + \mathcal{E}\bar{q}_\rho}{p_\rho \mathcal{E} + q_\rho} \quad (\mathcal{E} \in B). \tag{5.4'}$$

Доказательство приведем для случая $a_\rho > 0$ (при переходе к случаю $a_\rho < 0$ функции p_ρ и q_ρ меняются ролями). Для этого случая утверждение теоремы 5.1 следует рассматривать как прямое обобщение теоремы 3.1 (формулы (3.1) и (5.4) внешне совпадают) на более общую ситуацию (условие $\rho > \| \Gamma \|$ заменяется условием (5.1) и условием $a_\rho > 0$).

Выбрав произвольное число ε ($|\varepsilon| = 1$) и функцию $\mathcal{E} \in B$, рассмотрим разность $f_{\mathcal{E},\rho} - f_{\varepsilon,\rho} (\in L_\infty)$, для которой справедливо равенство (3.4). Из (3.4) и леммы 5.1 следует, что разность $f_{\mathcal{E},\rho} - f_{\varepsilon,\rho} \in H_\infty^{[2\varkappa]}$, причем ее полюсы внутри единичного круга (с учетом кратностей) содержатся в множестве нулей функций $p_\rho + \mathcal{E} q_\rho$ и $p_\rho + \varepsilon q_\rho$.

Учитывая (5.2), заключаем, что функция

$$r_{\mathcal{E},\rho}(\zeta) = \sum_1^\infty \gamma_k \zeta^{-k} - (\pi_- f_{\mathcal{E},\rho})(\zeta) \quad (= r_{\varepsilon,\rho}(\zeta) - \pi_-(f_{\mathcal{E},\rho} - f_{\varepsilon,\rho})(\zeta))$$

также является правильной рациональной функцией, все полюсы которой содержатся в множестве нулей внутри единичного круга функций $p_\rho + \mathcal{E} q_\rho$ и $p_\rho + \varepsilon q_\rho$. Замечая, с другой стороны, что множество полюсов функции никак не связано с выбором числа ε ($|\varepsilon| = 1$) и что согласно лемме 5.2 множества нулей функций $p_\rho + \varepsilon q_\rho$ при различных ε не пересекаются, мы приходим к выводу.

что полюсы функции $r_{\mathcal{E},\rho}$ (и с учетом кратности) содержатся в множестве нулей функции $p_\rho+\mathcal{E}q_\rho$ и поэтому их число не больше $\varkappa$ (так как $|f_{\mathcal{E},\rho}(\zeta)| \le \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$, то такое число полюсов функции $r_{\mathcal{E},\rho}$ равно $\varkappa$). Таким образом, $f_{\mathcal{E},\rho}$ – решение задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ при любом $\mathcal{E} \in B$.

Остается показать, что любое решение f задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ совпадает с некоторым $f_{\mathcal{E},\rho}$ при соответствующем выборе $\mathcal{E} \in B$. Не заботясь пока о том, чтобы $\mathcal{E} \in B$, выберем $\mathcal{E}$ так, чтобы функция f была равна правой части равенства (5.4). Так как почти всюду $|f(\zeta)| \le \rho$ и $|p_\rho(\zeta)| > |q_\rho(\zeta)|$, то $|\mathcal{E}(\zeta)| \le 1$ (почти всюду). Кроме того, выбрав снова произвольное ε ($|\varepsilon| = 1$), можно будет утверждать, что $f - f_{\varepsilon,\rho} \in H_\infty^{[2\varkappa]}$. С другой стороны, эта разность равна правой части равенства (3.4). Отсюда заключаем, что $\mathcal{E} = h/b$, где $h \in B$, а b – внутренняя функция, не имеющая общего внутреннего (нетривиального) делителя с h. Полагая в правой части (3.4) $\mathcal{E} = h/b$ и заменяя левую часть в (3.4) на разность $f - f_{\varepsilon,\rho}$, записанную предварительно в виде $g_{\mathcal{E},\varepsilon}/b_\varepsilon b_{\mathcal{E}}$, где $g_{\mathcal{E},\varepsilon} \in H_\infty, b_\varepsilon$ – внутренний множитель функции $p_\rho+\varepsilon q_\rho$, а $b_{\mathcal{E}}$ – конечное произведение Бляшке, имеющее своими нулями $\varkappa$ полюсов функции

$$\sum_1^\infty \gamma_k\zeta^{-k} - (\pi_- f)(\zeta)\ (\in H_\infty^{[\varkappa]}).$$

получим

$$a_\rho(h - \varepsilon b) = g_{\mathcal{E},\varepsilon}(p_\rho b + hq_\rho)(p_\rho + \varepsilon q_\rho)/b_{\mathcal{E}}b_\varepsilon. \qquad (5.5)$$

Так как b_ε – внутренний множитель функции $p_\rho + \varepsilon q_\rho$, то из (5.5) заключаем, что функция

$$a_\rho(h - \varepsilon b)b_{\mathcal{E}}/(p_\rho b + q_\rho h) \in H_2,$$

откуда ввиду произвольности выбора ε ($|\varepsilon| = 1$) следует уже, что $b_{\mathcal{E}}h/(p_\rho b+q_\rho h) \in H_2$ и $bb_{\mathcal{E}}/(p_\rho b+q_\rho h) \in H_2$. Так как b и h не имеют общего нетривиального внутреннего делителя, то из этих соотношений вытекает, что внутренний множитель функции $p_\rho b + q_\rho h$ является делителем функции и, стало быть, имеет степень, не большую $\varkappa$. С другой стороны, к функциям $f = p_\rho b$ и $g = q_\rho h$

применимо следствие 4.1, в силу которого степень внутреннего множителя функции $p_\rho b + q_\rho h$ будет равна $\varkappa+$ степень b. Следовательно, $b(\zeta) \equiv$ const , т.е. $\mathcal{E} \in B$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5.1. Попутно нами доказано, что при любом $\mathcal{E} \in B$ множество полюсов функции $f_{\mathcal{E},\rho} - \sum_1^\infty \gamma_k \zeta^{-k}$ внутри единичного круга совпадает (считая с кратностями) с множеством нулей функции $p_\rho + \mathcal{E} q_\rho$ внутри единичного круга.

2. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $a_\rho = 0$. Для этого нам придется продолжить изучение векторов p_ρ, q_ρ ($\in \ell_2$), определенных в §2. Напомним, что при любом ε ($|\varepsilon| = 1$) вектор $\chi_{\rho,\varepsilon} = p_\rho + \varepsilon q_\rho$ удовлетворяет соотношению (2.7). Предполагая, что выполняется условие (5.1), продифференцируем почленно соотношение (2.7); тогда получим

$$\Gamma w_{\rho,\varepsilon} = \varepsilon\rho T^* \bar{w}_{\rho,\varepsilon} + \varepsilon T^* \bar{\chi}_{\rho,\varepsilon}, \tag{5.6}$$

где

$$w_{\rho,\varepsilon} = \frac{dp_\rho}{d\rho} + \varepsilon\frac{dq_\rho}{d\rho} (= R_\rho e - 2\rho^2 R_\rho^2 e - 2\rho\varepsilon T\bar{\Gamma}\bar{R}_\rho^2 e). \tag{5.7}$$

Если $a_\rho = 0$, то $(\chi_{\rho,\varepsilon}, e) = (p_\rho, e) = \rho a_\rho = 0$.

Пусть теперь χ – некоторый вектор из ℓ_2, для которого $\Gamma\chi = \varepsilon\rho T^*\bar{\chi}$ ($|\varepsilon| = 1$) и $(\chi, e) = 0$. Так как $TT^* = I - (\cdot, e)e$, то $T\Gamma\chi = \varepsilon\rho\bar{\chi}$, и $\bar{\Gamma}T\Gamma\chi = \varepsilon\rho\bar{\Gamma}\bar{\chi} = \rho^2 T^*\chi$. Вспоминая, что $\bar{\Gamma}T = T^*\bar{\Gamma}$, получаем $T^*(\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)\chi = 0$, откуда $(\rho^2 I - \bar{\Gamma}\Gamma)\chi = ce$, где c – некоторая константа , т.е. $\chi = cp_\rho$. Применяя этот вывод к вектору $\chi_{\rho,\varepsilon}$ (при $a_\rho = 0$), заключаем, что векторы p_ρ и q_ρ линейно зависимы: $p_\rho = -\varepsilon_\rho q_\rho$. В силу тождества (2.9) $|p_\rho(\zeta)|^2 = |q_\rho(\zeta)|^2$ при $a_\rho = 0$, а поэтому из равенства $p_\rho + \varepsilon_\rho q_\rho = 0$ вытекает, что $|\varepsilon_\rho| = 1$.

Нам осталось немного добавить, чтобы получить следующее предложение.

Лемма 5.3. *Пусть выполняется (5.1) и* $a_\rho = 0$. *Тогда* $p_\rho + \varepsilon_\rho q_\rho = 0$, *где*

$$\varepsilon_\rho = (p_\rho, T\bar{\Gamma}e), \quad |\varepsilon_\rho| = 1. \tag{5.8}$$

Формулой

$$\chi - \alpha w_\rho + i\beta p_\rho \quad (-\infty < \alpha, \quad \beta < \infty),$$

где

$$w_\rho = \frac{dp_\rho}{d\rho} + \varepsilon_\rho \frac{dq_\rho}{d\rho}$$

исчерпываются все решения уравнения:

$$\Gamma\chi = \varepsilon_\rho \rho T^* \bar{\chi}, \tag{5.9}$$

при этом $(\chi, e) = \alpha(w_\rho, e)$, $(w_\rho, e) < 0$.

Доказательство. Для получения значения ε_ρ умножим равенство $p_\rho = -\varepsilon_\rho q_\rho$ почленно на $T\bar{\Gamma}e$. Вспоминая (2.4), получаем

$$(p_\rho, T\bar{\Gamma}e) = -\varepsilon_\rho(\bar{\Gamma}R_\rho e, \bar{\Gamma}e) = -\varepsilon_\rho(\Gamma\bar{\Gamma}R_\rho e, e) =$$

$$= \varepsilon_\rho[(e, e) - \rho^2(\bar{R}_\rho e, e)],$$

а так как $(e, e) = 1$, $(\bar{R}_\rho e, e) = \bar{a}_\rho = 0$, то отсюда получается требуемое выражение для ε_ρ.

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_\rho$ в (5.6), находим, что $\chi = w_\rho$ есть решение уравнения (5.9). Из (5.7) следует, что $(w_\rho, e) = -2\rho^2(R_\rho^2 e, e) < 0$. Если некоторое решение χ уравнения (5.9) удовлетворяет услогию $(\chi, e) = 0$, то по доказанному выше $\chi = cp_\rho$. Из уравнения (2.7) следует, что $\Gamma p_\rho = \rho T^* \bar{q}_\rho = -\varepsilon_\rho \rho T^* p_\rho$. Поэтому $\chi = cp_\rho$ будет решением уравнения (5.9) в том и только том случае, когда $c = i\beta(-\infty < \beta < \infty$.

Лемма доказана.

Положим $w_\rho(\zeta) = w_{\rho+}(\zeta)$ $(a_\rho = 0)$.

Лемма 5.4. *При* $a_\rho = 0$ *имеет место тождество*

$$\mathrm{Re}\,(\bar{p}_\rho(\zeta) w_\rho(\zeta)) = -\rho(R_\rho^2 e, e) < 0. \tag{5.10}$$

Доказательство. При любом ρ из интервала (5.1) имеет место тождество (2.9), которое можно продифференцировать по ρ[†]. При рассматриваемом значении ρ, для которого $a_\rho = 0$. мы можем после дифференцирования заменить q_ρ на $-\varepsilon_\rho \bar{p}_\rho$, а q_ρ на $-\bar{\varepsilon}_\rho p_\rho$, а это уже даст (5.10).

Так же, как и при доказательстве леммы 2.1, по любому решению $\chi_t = w_\rho + itp_\rho$ $(-\infty < t < \infty)$ уравнения (5.9) мы можем определить комплексное число $\gamma_0 = \gamma_0(t)$ так, чтобы для матрицы $\Gamma' = (\gamma'_{j+k-1})_1^\infty$, где $\gamma'_1 = \gamma_0$, а $\gamma'_k = \gamma_{k-1}$ при $k > 1$, векторы $\chi_t, \bar{\chi}_t$ давали пару Шмидта :

$$\Gamma' \chi_t = \varepsilon_\rho \rho \bar{\chi}_t.$$

Для этого следует определить γ_0 из уравнения

$$\gamma_0(w_\rho, e) = \varepsilon_\rho \rho(\bar{w}_\rho, e) - (\Gamma T \chi_t, e).$$

Поскольку матрица Γ' является одноступенчатым продолжением матрицы Γ, число ρ будет простым s-числом матрицы Γ', причем $\rho = s_\varkappa(\Gamma')$.

Таким образом, в рассматриваемом случае вместо леммы 2.2 будет иметь место

Лемма 5.5. ***Функция $w_\rho + itp_\rho$ при любом вещественном $t(-\infty < t < \infty)$ имеет точно $\varkappa$ нулей внутри единичого круга, после выделения которых она становится внешней функцией***[††].

Рассуждая теперь аналогично тому, как при доказательстве леммы 2.1, мы покажем, что функции

$$\varepsilon_\rho \rho \frac{\bar{w}_\rho - it\bar{p}_\rho}{w_\rho + itp_\rho} \quad (-\infty \le t \le \infty) \tag{5.11}$$

[†] Могут возникнуть сомнения относительно законности дифференцирования по ρ соотношения (2.9), справедливого на единичной окружности всюду, за исключением множества меры нуль, зависящего, вообще говоря, от ρ. Но соотношение (2.9) равносильно последовательности равенств $(p_\rho, T^* p_\rho) - (q_\rho, T^* q_\rho) = a_\rho \delta_{0k}$, где $\delta_{0k} = 1$ при $k = 0$ и $\delta_{0k} = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$, каждое из которых уже можно продифференцировать по ρ , после чего мы получим систему равенств, эквивалентную (5.10).

[††] На функцию p_ρ также распространяется утверждение леммы 5.5: это следует, например, из приводимого ниже тождества (5.14) и того, что $2p_\rho = Q_\rho - P_\rho$.

образуют однопараметрическое семейство решений задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ †.
Эти решения следует называть (Г; ρ)-каноническими для рассматриваемого значения ρ . Обозначим через $\mathbf{P}$ класс всех функций $F(z)$ ($|z| < 1$), голоморфных внутри единичного круга и отображающих его в правую полуплоскость: $\mathrm{Re}\, f \geq 0$, с присоединением к нему несобственной функции $F \equiv \infty$.

Теорема 5.2. *Если $s_\varkappa(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$ и $a_\rho = 0$ то функциями*

$$f_F = \varepsilon_\rho \rho \frac{\bar{w}_\rho + F\bar{p}_\rho}{w_\rho - Fp_\rho} \qquad (F \in \mathbf{P}) \tag{5.12}$$

исчерпываются все решения задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$.

Доказательство. Когда F пробегает все $\mathbf{P}$, то $\mathcal{E} = (1-F)/(1+F)$ пробегает все B. Совершая в (5.12) подстановку $F = (1 - \mathcal{E})/(1 + \mathcal{E})$, получаем

$$f_F = \varepsilon_\rho \rho \frac{\bar{P}_\rho \mathcal{E} + \bar{Q}_\rho}{P_\rho + \mathcal{E} Q_\rho}, \tag{5.13}$$

где $P_\rho = w_\rho - p_\rho, \quad Q_\rho = w_\rho + p_\rho$.

Из соотношения (5.10) следует, что почти всюду

$$|P_\rho(\zeta)|^2 - |Q_\rho(\zeta)|^2 \equiv c^2 > 0 \ \ (c^2 = 4\rho(R_\rho^2 e, e). \tag{5.14}$$

Так как, кроме того, $P_\rho, Q_\rho \in H_2$ и согласно лемме 5.5 внутренний множитель у $P_\rho + \varepsilon Q_\rho$ ($|\varepsilon| = 1$) имеет степень, равную $\varkappa$, то после представления функций в виде (5.13) (вполне аналогичному виду (5.4) функций f_F) полностью воспроизводится доказательство теоремы 5.1.

Теорема доказана.

---

† При $t = \pm\infty$ функцию (5.11), естественно, понимаем, как равную $-\rho\varepsilon_\rho p_\rho / p_\rho$. Этот случай требует особого рассмотрения, на чем мы не останавливаемся, так как само утверждение относительно функций (5.11) целиком покрывается теоремой 5.2.

§6. Классические интерполяционные проблемы

1. Теоремы 5.1 и 5.2 содержат, в частности, решение задачи, обобщающей задачу Такаги [7] в том же направлении, в котором задача Шура [12] обобщала известную задачу Каратеодори–Фейера [13].

Задача ST$[n,\varkappa]$. *Заданы комплексные числа* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, *положительное число* ρ *и целое число* $\varkappa$. *Требуется найти все функции* $\varphi \in H_\infty^{[\varkappa]}$ *регулярные в окрестности точки* $z = 0$, *имеющие там разложение*

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + O(z^n) \tag{6.1}$$

и такие, что

$$\operatorname*{sup\,ess}_{|\zeta|=1} |\varphi(\zeta)| \le \rho.$$

При $\varkappa = 0$ эта задача совпадает с упоминавшейся задачей Шура. Задача Такаги состоит в том, что отыскивается функция $\varphi \in H_\infty^{[\varkappa]}$, имеющая в окрестности точки $z = 0$ разложение (6.1), и для которой $\sup, \operatorname{ess}|\varphi(\zeta)|$ имеет возможно меньшее значение.

Если мы положим $\gamma_k = \alpha_{n-k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $f(\zeta) = \zeta^{-n}\varphi(\zeta)$, то налагаемые условия на функцию φ в задаче ST перейдут для f в условия:

$$1)\ \| f \|_\infty \le \rho, \quad 2)\ f(\zeta) - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \zeta^{-k} \in H_\infty^{[\varkappa]},$$

и 3) разность $r(z) = f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k z^{-k}$ не должна иметь точку $z = 0$ своим полюсом.

Если бы мы отбросили условие 3), то полученная задача для функции f оказалась бы задачей $C_\rho^{[\varkappa]}(\Gamma)$, соответствующей частному случаю матрицы $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})$ (а именно, случаю, когда она финитна: $\gamma_k = 0$ при $k > n$ и, следовательно, $s_k(\Gamma) = 0$ при $k > n$). Как мы знаем (см. §1, 2), задача $C_\rho^{[\varkappa]}$ в данном случае имеет решение точно тогда, когда $\rho \ge s_\varkappa(\Gamma)$; при этом решение f будет единственным в том и только том случае, когда $\rho = s_\varkappa(\Gamma)$.

Однако при $\rho = s_{\varkappa}(\Gamma)$ может случиться, что единственное решение $C_\rho^{[\varkappa]}$ задачи не будет удовлетворять условию 3).

Таким образом, задача Шура–Такаги может иметь решение лишь при $\rho \geq s_{\varkappa}(\Gamma)$, причем при $\rho = s_{\varkappa}(\Gamma)$ у этой задачи либо существует единственное решение, либо ни одного. Случай $\rho = s_{\varkappa}(\Gamma)$ $(0 < \varkappa < n)$ подробно изучен Такаги [7а, 7б] (в особенности, во второй статье [7б], где он исправляет ошибку, допущенную в первой [7а]). Независимо его результаты переоткрывались и частично дополнялись в [10, ?] (см. также [8]).

Мы рассмотрим здесь случай, когда $s_{\varkappa}(\Gamma) < \rho < s_{\varkappa-1}(\Gamma)$. Введем в рассмотрение треугольные матрицы

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{6.2}$$

и положим

$$D_k(\rho) = \det(\rho^2 I_k - A_k^* A_k) \quad (k = 1, 2, ..., n). \tag{6.3}$$

Так как $\gamma_k = \alpha_{n-k}$ $(k = 1, 2, ..., n), \gamma_k = 0$ $(k > n)$, то, как можно легко видеть, числа $s_0(\Gamma) \geq s_1(\Gamma) \geq \cdots \geq s_{n-1}(\Gamma)$ будут последовательными по убыванию неотрицательными корнями уравнения $D_n(s) = 0$, т.е. $s_k(\Gamma) = s_k(A_n)$ $(k = 1, 2, ..., n)$ †.

Если $D_n(\rho) \neq 0$, то $a_\rho = D_{n-1}(\rho)/D_n(\rho)$. Функция $p_\rho(z)$ будет многочленом не выше $(n-1)$-й степени

$$p_\rho(z) = \rho \frac{\Delta_n(z, \rho)}{D_n(\rho)}, \tag{6.4}$$

где $\Delta_n(z, \rho)$ – определитель матрицы, получающейся из матрицы $\rho^2 I_n - A_n^* A_n$ путем замены ее последней строки строчной z^{n-1}, $z^{n-2}, ..., 1$. Многочлен $q_\rho(z)$ степени не выше n получается по формуле

$$q_\rho(z) = z \frac{\Delta_n'(z, \rho)}{D_n(\rho)}, \tag{6.5}$$

† Если $\alpha_0 \neq 0$, то $D_k(0) = \det(-A_k^* A) = (-1)^n |\alpha_0|^{2n} \neq 0$ и в этом случае все $s_k(\Gamma) > 0$ при $0 \leq k < n$.

где $\Delta'_n(z,\rho)$ – определитель, получающийся из матрицы $\rho^2 I_n - A_n^* A_n$ путем замены ее последнего столбца столбцом из многочленов $\bar{\alpha}_0$; $\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_0 z; \ldots; +\bar{\alpha}_{n-1} + \bar{\alpha}_{n-2} z + \ldots + \bar{\alpha}_1 z^{n-1}$.

Теоремы 5.1 и 5.2 позволяют сформулировать следующий результат.

Пусть $s_{\varkappa}(A_n) < \rho < s_{\varkappa-1}(A_n)$, *тогда при* $D_n(\rho)D_{n-1}(\rho) > 0$ *все решения задачи* $\mathrm{ST}[n,\varkappa]$ *даются формулой*

$$\varphi(z) = \rho \frac{z p_\rho^*(z)\mathcal{E}(z) + q_\rho^*(z)}{p_\rho(z) + q_\rho(z)\mathcal{E}(z)} \quad (\mathcal{E} \in B), \tag{6.6}$$

при $D_n(\rho)D_{n-1}(\rho) < 0$ *– формулой*

$$\varphi(z) = \rho \frac{z p_\rho^*(z) + q_\rho^*(z)\mathcal{E}(z)}{p_\rho(z)\mathcal{E}(z) + q_\rho(z)} \quad (\mathcal{E} \in B; \mathcal{E}(0) \neq 0), \tag{6.7}$$

и при $D_{n-1}(\rho) = 0$ *– формулой*

$$\varphi(z) = \rho \frac{w_\rho(z) + zF(z)p_\rho^*(z)}{w_\rho(z) - F(z)p_\rho(z)} \quad (F \in \mathbf{P}, F \not\equiv \infty), \tag{6.8}$$

где

$$p_\rho^*(z) = z^{n-1}\overline{p_\rho\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad q_\rho^*(z) = z^n \overline{q_\rho\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

и

$$w_\rho(z) = z^n \overline{w_\rho\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

В формуле (6.7) в сравнении с формулой (5.4′) появилось дополнительное условие $\mathcal{E}(0) \neq 0$, а в формуле (6.8) в сравнении с формулой (5.12) – дополнительное условие $F \not\equiv \infty$ в связи с необходимостью обеспечения регулярности функции $q(z)$ в точке $z = 0$.

2. Как уже отмечалось, часть результатов Такаги была независимо получена Н.И. Ахиезером [14], который также установил ряд фактов, имеющих отношение к следующей задаче.

Задача $\mathrm{PA}[n,\varkappa]$. *Заданы различные точки* $z_1, \ldots, z_n$ *внутри единичного круга* ($|z_k| < 1; k = 1, 2, \ldots, n$), *комплексных чисел* w_1, $\ldots, w_n$, *положительное число* ρ *и целое число* $\varkappa \geq 0$. *Требуется* *найти все регулярные в точках $z = z_k$ функции $\varphi \in H_\infty^{[\varkappa]}$ такие, что*

$$\varphi(z_k) = w_k \quad (k = 1, 2, ..., n) \tag{6.9}$$

и

$$\sup_{|\zeta|=1} \text{ess}\, |\varphi(\zeta)| \le \rho. \tag{6.10}$$

При $\varkappa = 0$ эта задача была исследована Г. Пиком [16] и Р.Неванлинна [15]; первый получил критерий существования функций $\varphi \in H_\infty$, удовлетворяющих условиям (6.9) и (6.10), а второй в обобщение исследований И. Шура [12] дал описание всех таких функций. Критерий Пика состоит в эрмитовой неотрицательности матрицы

$$G_n(\rho) = \left(\frac{\rho^2 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k}\right)_1^n.$$

Из этого результата легко усматривается аппроксимационный смысл наибольшего корня ρ_0 уравнения $\det G_n(\rho) = 0$. Аппроксимационный смысл других положительных корней этого уравнения впервые выяснил Н.И. Ахиезер [14].

Эти результаты могут быть легко осмыслены и дополнены с излагаемых здесь позиций. Без ограничения общности можно считать, что все $z_j \ne 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$, в противном случае мы могли бы этого добиться, например, проделав над аргументом z преобразование, где $z \to (z - \alpha)/(1 - \bar{\alpha} z)$, $\alpha \ne z_k$ $(k = 1, 2, ..., n;\ |\alpha| < < 1)$.

Положим

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}.$$

Тогда, если φ – решение задачи PA$[n, \varkappa]$, то

$$\frac{\varphi(z)}{b_n(z)} = \sum_{p=1}^{n} \frac{w_p}{b_n'(z_p)(z - z_p)} + \psi(z) \quad (= \gamma_-(z) + \psi(z)).$$

где $\psi \in H_\infty^{[\varkappa]}$. Имеем

$$\gamma_-(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \zeta^{-j},$$

где

$$\gamma_j = \sum_{p=1}^{n} \frac{w_p}{b'_n(z_p)} z_p^{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots). \tag{6.11}$$

Таким образом, $f(\zeta) = \varphi(\zeta)\overline{b_n(\zeta)}$ есть решение задачи $C_\rho^{[\varkappa]}$ для последовательности чисел $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$, получаемой по формуле (6.11), причем это решение удовлетворяет тому дополнительному условию, что функция $f(\zeta) - \gamma_-(\zeta)(\in H_\infty^{[\varkappa]})$ не имеет точки z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) своими полюсами. Это заключение, очевидно, допускает обращение.

Так как в данном случае матрица $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})$ имеет конечный ранг, не больший n, то сравнительно просто могут быть вычислены все связанные с ней функции и величины. В частности,

$$\rho^{2n} \det\left(I - \frac{1}{\rho^2}\bar{\Gamma}\Gamma\right) = c \det G_n(\rho) \left(c^{-1} = \det\left(\frac{1}{1 - \bar{z}_j z_k}\right)_1^n\right),$$

и, следовательно, последовательность s-чисел

$$s_0(\Gamma) \geq s_1(\Gamma) \geq \dots \geq s_{n-1}(\Gamma)$$

совпадает с последовательностью неотрицательных корней $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \dots \geq \rho_{n-1}$ уравнения $\det G_n(\rho) = 0$. Поэтому задача PA$[n, \varkappa]$ может иметь решение только при $\rho \geq \rho_\varkappa$. Аналогично тому, как и в предыдущей задаче ST$[n, \varkappa]$, при $\rho = \rho_\varkappa$ задача PA$[n, \varkappa]$ либо имеет единственное решение, либо не имеет ни одного.

При $\rho_\varkappa < \rho < \rho_{\varkappa-1}$ у задачи PA$[n, \varkappa]$ всегда будут существовать решения, и, пользуясь теоремами 5.1 и 5.2, можно дать полное описание всех этих решений. Из формулы (2.4) в данном случае следует, что

$$p_\rho(z) = \rho(\det G_n(\rho))^{-1} \det \begin{pmatrix} \frac{\rho^2 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} & \frac{b_n(z)}{z - z_j} \\ \frac{\overline{b_n(0)}}{\bar{z}_k} & \frac{\overline{b_n(0)} b_n(z)}{\rho^2} \end{pmatrix}_{j,k=1}^{n} \tag{6.12}$$

и

$$q_\rho(z) = z(\det G_n(\rho))^{-1} \det \begin{pmatrix} \frac{\rho^2 - w_j \bar{w}_k}{1 - z_j \bar{z}_k} & \frac{b_n(0)}{z_j} \\ \frac{\bar{w}_k}{1 - \bar{z}_k z} & 0 \end{pmatrix}_{j,k=1}^{n}, \tag{6.13}$$

а поэтому для $a_\rho = \frac{1}{\rho}p_\rho(0)$ получаем

$$a_\rho = |b_n(0)|^2\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{\det P_n(\rho)}{\det G_n(\rho)}\right),$$

где

$$P_n(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho^2 - w_j\bar{w}_k}{1 - z_j\bar{z}_k} & \frac{1}{z_j} \\ \frac{1}{\bar{z}_k} & 0 \end{pmatrix}_{j,k=1}^{n} . \tag{6.14}$$

Введем, кроме того, рациональные функции

$$\tilde{p}_\rho(z) = b_n(z)\bar{p}_\rho\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\rho}{\det G_n(\rho)} \times$$

$$\times \det \begin{pmatrix} \frac{\rho^2 - w_j\bar{w}_k}{1 - z_j\bar{z}_k} & \frac{b_n(0)}{z_j} \\ \frac{z}{1 - \bar{z}_k z} & \frac{b_n(0)}{\rho^2} \end{pmatrix}_{j,k=1}^{n} \tag{6.15}$$

и

$$\tilde{q}_\rho(z) = b_n(z)\bar{q}_\rho\left(\frac{1}{z}\right).$$

Тогда, если, например, $a_\rho > 0$, то в силу теоремы 5.1 все решения задачи PA$[n, \varkappa]$ будут получаться по формуле

$$\varphi(z) = \frac{\tilde{p}_\rho(z)\mathcal{E}(z) + \tilde{q}_\rho(z)}{p_\rho(z) + q_\rho(z)\mathcal{E}(z)}, \tag{6.16}$$

где $\mathcal{E} \in B$ и, кроме того,

$$p_\rho(z_k) + q_\rho(z_k)\mathcal{E}(z_k) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6.17}$$

Из теоремы 5.1 явствует, как следует переписать формулу (6.16) и условия (6.17) в случае, когда $a_\rho < 0$, а из теоремы 5.2 – в случае, когда $a_\rho = 0$.

При $\rho > \rho_0$ условия $a_\rho > 0$ и (6.17) выполняются автоматически, и формула (6.16) с произвольным $\mathcal{E} \in B$ дает полное описание всех решений известной задачи Неванлинна–Пика.

Задача PA$[n, \varkappa]$ *обобщается на случай* $n = \infty$. *При* $\varkappa = 0$ *такая обобщенная задача была изучена в фундаментальной работе Р. Неванлинна [15] на основе обобщенного алгоритма Шура.*

Если $\varphi \in H_\infty$, а последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k| < 1$, $k = 1, 2,$) такова, что $\sum(1 - |z_k|) = \infty$, то по известной теореме Бляшке функция φ определяется единственным образом своими значениями $w_k = \varphi(z_k)$ ($k = 1, 2, ...$). Поэтому вопрос единственности и описания всех решений задачи Неванлинна–Пика возникает лишь в случае, когда ряд $\sum(1 - |z_k|)$ сходится, т.е. когда сходится бесконечное произведение Бляшке

$$b(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \; (= \lim_{n\to\infty} nb_n(z)).$$

В этом случае делением $\varphi(z)$ на $b(z)$ задача снова сводится к задаче $C_\rho(\Gamma) = C_\rho^{[0]}(\Gamma)$.

Из выражения (6.14) для $a_\rho = a_\rho^{(n)}$ можно получить следующий критерий.

При условии

$$\sum_1^\infty (1 - |z_k|) < \infty$$

разрешимая задача Неванлинна–Пика имеет единственное решение $\varphi(\in \rho B, \varphi(z_k) = w_k,\; k = 1, 2, ...)$ в том и только в том случае, когда

$$\lim_{n\to\infty} (\det P_n(\rho)/ \det G_n(\rho)) = -\infty. \tag{6.18}$$

Если последнее условие не выполняется, то все решения задачи даются формулой (6.16) с произвольной функцией $\mathcal{E} \in B$, где $p_\rho, q_\rho, \tilde{p}_\rho, \tilde{q}_\rho$ суть равномерные пределы в каждом круге $|z| \le r < 1$ соответствующих функций для укороченной проблемы Неванлинна–Пика (задачи PA$[n, 0]$).

Мы не имеем возможности останавливаться на различных аналитических свойствах этих функций, вытекающих из общих результатов нашей работы [2](см. также [17]).

§7. Континуальный аналог

1. Рассмотрим оператор Γ в гильбертовом пространстве $L_2(0, \infty)$, действующий формально как интегральный оператор с

ядром, зависящим от суммы аргументов (аналитическая структура которого будет уточняться в дальнейшем по мере надобности):

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^\infty \Gamma(t+s)f(s)ds \quad (0 \le t < \infty, f \in L_2(0,\infty)). \quad (7.1)$$

Оператор Г, как легко видеть, обладает свойством

$$\Gamma T_\tau = T_\tau^* \Gamma \quad (0 < \tau < \infty), \quad (7.2)$$

где T_τ – полугруппа правых сдвигов в $L_2(0,\infty)$: для f $\in L_2(0,\infty)$

$$(T_\tau f)(t) = \begin{cases} f(t-\tau) & \text{при} \quad t > \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t < \tau. \end{cases}$$

Ограниченный оператор Г в $L_2(0,\infty)$, обладающий свойством (6.2), мы будем называть ганкелевым.

Как известно, полугруппа T_τ имеет генератор

$$A = s - \lim_{\tau \downarrow 0}(T_\tau - I)/i\tau, \quad (7.3)$$

который совпадает с замыканием оператора дифференцирования $i\frac{d}{dt}$, определенного на множестве гладких финитных функций, обращающихся в нуль при $t = 0$. Множество регулярных точек оператора A совпадает с открытой нижней полуплоскостью, а его резольвента на этом множестве действует по формуле

$$(R_z f)(t) = -i \int_0^t e^{-iz(t-s)} f(s)ds, \quad \mathrm{Im} z < 0. \quad (7.4)$$

Пусть T – когенератор полугруппы T_τ, т.е.

$$T = (A - iI)(A + iI)^{-1}. \quad (7.5)$$

Тогда T – полуунитарный оператор

$$T^*T = I, \; TT^* = I - (\cdot, e)e,$$

где e – орт $e(t) = \sqrt{2}e^{-t}$ из $L_2(0,\infty)$. Векторы $T^k e$, $k \geq 0$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0,\infty)$, отличающийся лишь числовым множителем от системы функций Чебышева–Лагерра. Из (7.2) следует, что

$$\Gamma T = T^* \Gamma. \tag{7.6}$$

Поэтому в базисе $\{T^k e\}$ оператору Γ соответствует ограниченная ганкелева матрица. Обратно, если Γ – произвольная ограниченная ганкелева матрица, то в рассматриваемом базисе в $L_2(0,\infty)$ ею определяется оператор, для которого справедливо равенство (7.2), т.е. ганкелев оператор в $L_2(0,\infty)$. Таким образом, установлен изоморфизм между ганкелевыми операторами в $L_2(0,\infty)$ и ганкелевыми матрицами. Этот изоморфизм дает возможность перенести результаты, полученные для ганкелевых матриц, на ганкелевы операторы в $L_2(0,\infty)$.

В частности, теорема Гехари приводит к утверждению: оператор Γ в $L_2(0,\infty)$ в том и только в том случае является ограниченным ганкелевым, если на плотном в $L_2(0,\infty)$ множестве гладких финитных функций, обращающихся в нуль при $t = 0$, он действует по формуле (7.1), где ядро $\Gamma(t)$ является обобщенной функцией, совпадающей при $t > 0$ с преобразованием Фурье некоторой функции класса L_∞ на вещественной оси.

Мы не будем приводить аналогов всех теорем о ганкелевых операторах в $L_2(0,\infty)$, сформулированных ранее для ганкелевых матриц. Ограничимся тем, что приведем континуальный аналог теоремы 1.2 – теорему 7.1 и ее детализацию (теорема 7.2) для важного случая, когда ядро $\Gamma(t) \in L_1$. Для этого же случая будет изучено решение задачи, являющейся континуальным аналогом задачи $A^{[\varkappa]}$.

Упорядоченную систему пар функций $\xi_k(t)$, $\eta_k(t)$ $(1 \leq k \leq m)$ из $L_2(0,\infty)$ будем называть D_0-цепочкой длины m, если

1) $\eta_k(t) = \overline{\xi_k(t)}$ $(1 \leq k \leq m)$,

2) функции $\xi_k(t)$ $(1 \leq k < m)$ абсолютно непрерывны в любом конечном интервале,

3) $\xi_{k+1}(t) = \frac{d}{dt}\xi_k(t)$, $\xi_k(0) = 0$, $1 \leq k \leq m$.

Условие 3) иначе означает, что

$$\xi_k(t) = \int_0^t \xi_{k+1}(s)ds, \quad 1 \le k < m.$$

Очевидно, произвольная D_0-цепочка является линейно независимой системой пар.

Если D_0-цепочка длины m такова, что у нее функция $\xi_m(t)$ также является абсолютно непрерывной на любом конечном интервале и $\xi_m(0) \ne 0$, то буудем ее называть D-цепочкой длины m. Такое определение D-цепочки согласуется с ранее введенным определением ее в [18] при исследовании уравнений Винера–Хопфа. При рассмотрении ганкелева оператора в $L_2(0,\infty)$ обнаруживается ситуация, аналогичная той, которая была известна для уравнений Винера–Хопфа [18, 19]. Справедлива следующая теорема, которая будет уточнена в предположении суммируемости ядра, определяющего ганкелев оператор по формуле (7.1).

Теорема 7.1. *Пусть $s_k(\Gamma)$ является s-числом ограниченного ганкелева оператора Γ в $L_2(0,\infty)$ таким, что*

$$s_{k+m}(\Gamma) < s_{k+m-1}(\Gamma) = \cdots = s_k(\Gamma) < s_{k-1}(\Gamma) \quad (s_{-1}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \infty).$$

Тогда существует D_0-цепочка $\{\xi_j(t), \overline{\xi_j(t)}\}$ $(1 \le j \le m)$ длины m, которая образует базис в (линейном) множестве всех пар Шмидта оператора Γ, отвечающих s-числу $s_k(\Gamma)$, у этой цепочки функция $\xi_1(t)$ определяется с точностью до вещественного постоянного множителя и ее производная $(m-1)$-го порядка $\xi_m(t)$ имеет преобразование Фурье

$$\hat{\xi}_m(\lambda)\Big(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\lambda t}\xi_m(t)dt\Big)$$

такое, что

$$\hat{\xi}_m(\lambda) = \prod_{j=1}^k (\lambda - \beta_j)\varphi(\lambda),$$

где β_j $(1 \le j \le k)$ - все нули функции $\hat{\xi}_m(\lambda)$, лежащие в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\ \lambda > 0$, число которых (с учетом их кратности) в точности равно k, $\varphi(\lambda)$ - внешняя функция класса Харди H_2 в верхней полуплоскости[†].

Доказательство теоремы 7.1 получается на основании следующих простых соображений. Каждой функции $\xi(t) \in L_2(0, \infty)$ отвечает вектор $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty \in \ell_2$, составленный из обобщенных коэффициентов Фурье $\xi_k = \int\limits_0^\infty \xi(t)e_k(t)dt$ в разложении $\xi(t)$ по ортонормированной системе функций $\{e_k(t) = (T^{k-1}e)(t)\}_1^\infty$, где $e(t) = \sqrt{2}e^{-t}$. Функция $\xi_+(\zeta) \in H_2$, построенная по вектору ξ, связана с Фурье-образом $\hat{\xi}(\lambda)$ функции $\xi(t)$ с помощью преобразования

$$\hat{\xi}(\lambda)\Big(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\xi(t)dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\lambda + i}\xi_+\Big(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{7.7}$$

Преобразование (7.7) представляет собой изометрическое отображение множества аналитических в единичном круге функций класса H_2 на множество аналитических в верхней полуплоскости функций класса $\hat{H}_2$, при котором подмножество внешних функций из H_2 отображается на подмножество внешних функций из H_2. При этом преобразовании генератор A полугруппы T_τ переходит в оператор умножения на λ, определенный на тех $\hat{\xi}(\lambda)(\in \hat{H}_2)$, для которых $\lambda\hat{\xi}(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$, резольвента R_z оператора A переходит в оператор деления на $\lambda - z$.

[†] Напомним, что согласно известной теореме Пэли–Винера преобразование Фурье изометрически отображает $L_2(0, \infty)$ на класс Харди $\hat{H}_2$ функций $f(\lambda)$, аналитических в верхней полуплоскости, для которых

$$\sup_{y>0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dx < \infty.$$

С учетом этих связей и указанного изоморфизма между ганкелевыми операторами в $L_2(-\infty,\infty)$ и ганкелевыми матрицами в ℓ_2 теорема 7.1 тривиально выводится из теоремы 1.2.

2. Исследуем теперь важный частный случай, когда ядро $\Gamma(t)$ является обыкновенной функцией и, более того, $\Gamma(t) \in L_1(0,\infty)$.

Обозначим через $C^{(1)}(0,\infty)$ банахово пространство абсолютно непрерывных функций на полуоси $(0,\infty)$, в котором норма определяется по формуле

$$\| f \| = \max_{0\le t\le\infty} |f(t)| + \int_0^\infty |f'(t)|dt.$$

Используя известные критерии компактности в пространствах $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$ и в пространстве непрерывных функций $C(0,\infty)$, легко проверить, что выражением (7.1) с ядром $\Gamma(t) \in$ $\in L_1(0,\infty)$ определяется вполне непрерывное отображение в себя каждого из пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$ и $C^{(1)}(0,\infty)$. То же самое, очевидно, можно сказать и об операторах $\bar{\Gamma}\Gamma$ и $\Gamma\bar{\Gamma}$, задаваемых с помощью ядер $K(t,s)$ и $\overline{K(t,s)}$,

$$K(t,s) = \int_0^\infty \bar{\Gamma}(t+s')\Gamma(s'+s)ds'.$$

Любое решение интегрального уравнения

$$\int_0^\infty K(t,s)f(s)ds = \lambda f(t), \quad \lambda > 0, \tag{7.8}$$

принадлежащее одному из пространств L_p, $1 \le p < \infty$, или $C^{(1)}(0,\infty)$, одновременно принадлежит каждому из этих пространств. Этот результат легко выводится из следующей общей леммы .

Лемма 7.1. *Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство, на котором заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, и пусть B_1 и B_2 – банаховы пространства, получающиеся в результате пополнения $\mathcal{L}$ по нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно. Обозначим через K линейное отображение $\mathcal{L}$ в себя, которое может быть расширено по* *непрерывности до вполне непрерывных операторов K_1 и K_2 соответственно в B_1 и B_2. Тогда операторы K_1 и K_2 имеют одни и те же собственные векторы (принадлежащие пересечению $B_1 \cap B_2$).*

Доказательство. Если $\| f \|_1 \leq \| f \|_2$ или $\| f \|_2 \leq \leq \| f \|_1$ при всех f из $\mathcal{L}$, то утверждение леммы известно [20]. Общий случай сводится к этому путем введения на $\mathcal{L}$ третьей нормы $\| \cdot \|_3 = \| \cdot \|_1 + \| \cdot \|_2$, мажорирующей две данные. Действительно, как легко видеть, отображение K продолжается до вполне непрерывного оператора в банаховом пространстве B_3, которое получается пополнением $\mathcal{L}$ по норме $\| \cdot \|_3$.

Для того чтобы убедиться в справедливости сформулированных выше утверждений относительно решений уравнения (7.8), теперь достаточно заметить, что пересечение пространств $L_1(0,\infty)$ и $C^{(1)}(0,\infty)$ переводится оператором $\Gamma\bar{\Gamma}$ в себя и является плотным линеалом в каждом из пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$ и $C^{(1)}(0,\infty)$. Такое же утверждение, очевидно, справедливо и для уравнения с комплексно сопряженным ядром $\bar{K}(t,s)$. Используя приведенные факты, выясним, какую дополнительную информацию о парах Шмидта оператора Γ в $L_2(0,\infty)$ можно получить, когда $\Gamma(t) \in L_1(0,\infty)$. Имеет место

Теорема 7.2. *Пусть ганкелев оператор Γ определяется формулой (7.1) с суммируемым ядром $\Gamma(t)(\in L_1(0,\infty))$. Тогда оператор Γ является вполне непрерывным в $L_2(0,\infty)$, и, если $s_k(\Gamma)$ — его s-число, такое, что*

$$s_{k+m}(\Gamma) < s_{k+m-1}(\Gamma) = \cdots = s_k(\Gamma) < s_{k-1}(\Gamma), \tag{7.9}$$

то существует D-цепочка $\xi_j(t), \overline{\xi_j(t)}$, $1 \leq j \leq m$, длины m, которая образует базис в множестве всех пар Шмидта оператора Γ, отвечающих s-числу $s_k(\Gamma)$. Функция $\xi_m(t)$ этой цепочки в дополнение к свойству, сформулированному в теореме 7.1, обладает еще тремя следующими:

1) $\xi_m(t) \in L_1(0,\infty) \cap C^{(1)}(0,\infty)$, т.е. $\xi_m(t)$ суммируема на полуоси $(0,\infty)$ вместе со своей производной;

2) ее преобразование Фурье $\hat{\xi}_m(\lambda)$ не имеет нулей на вещественной оси (за исключением точек $\lambda = \pm\infty$, где $\hat{\xi}_m(\pm\infty) =$

$= \lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \hat{\xi}_m(\lambda) = 0$ *);*

3) отношение $\overline{\hat{\xi}_m(\lambda)}/\hat{\xi}_m(\lambda)$ *представимо в виде*

$$\overline{\hat{\xi}_m(\lambda)}/\hat{\xi}_m(\lambda) = -\overline{\xi_m(0)}/\xi_m(0) + \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\psi(t)dt, \qquad (7.10)$$

где $\psi(t) \in L_1(-\infty,\infty)$.

Из свойства 1) для функции $\xi_m(t)$ следует, что все функции $\xi_m(t)$ ($\in L_2(0,\infty)$, $1 \le k \le m$) рассматриваемой D-цепочки являются суммируемыми.

Доказательство теоремы. Так как функции $\xi_m(t)$ и $\overline{\xi_m(t)}$ образуют пару Шмидта ганкелева оператора Γ с суммируемым ядром $\Gamma(t)$, то функция $\xi_m(t)$ удовлетворяет уравнению (7.8) с $\lambda = s_k(\Gamma)$, и, следовательно, $\xi_m(t) \in L_1(0,\infty) \cap C^{(1)}(0,\infty)$. Покажем, что $\xi_m(0) \neq 0$. Пусть это не так. Тогда, применяя к обеим частям равенства

$$\int\limits_0^\infty \Gamma(t+s)\xi_m(s)ds \Big(= \int\limits_t^\infty \Gamma(\tau)\xi_m(\tau - t)d\tau\Big) = s_k(\Gamma)\overline{\xi_m(t)} \qquad (7.11)$$

оператор дифференцирования $i\frac{d}{dt}$, получаем, что функция $\xi_{m+1}(t) \overset{\text{def}}{=} i\frac{d}{dt}\xi_m(t)$ ($\in L_1(0,\infty)$) удовлетворяет равенству (7.11), а значит, и уравнению (7.8). Поэтому $\xi_{m+1}(t) \in L_2(0,\infty)$, и функции $\xi_{m+1}(t), \overline{\xi_{m+1}(t)}$ образуют пару Шмидта оператора Γ, отвечающую s-числу $s_k(\Gamma)$. Так как D_0-цепочка $\xi_j(t), \overline{\xi_j(t)}$ $(1 \le$ $\le j \le m)$, образует базис в множестве таких пар, то $\xi_{m+1}(t)$ является линейной комбинацией функций $\xi_j(t)$ $(1 \le j \le m)$. Вспоминая, что

$$\xi_j(t) = \frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}\xi_1(t), \quad 1 \le j \le m,$$

$$\xi_{m+1}(t) = i\frac{d^m}{dt^m}\xi_1(t)$$

и $\xi_j(0) = 0$ $(1 \le j \le m)$, получаем, что $\xi_1(t)$ является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с нулевыми начальными условиями, и, следовательно, $\xi_1(t) \equiv 0$, что невозможно. Итак, $\xi_m(0) \neq 0$ и $\xi_m(t) \in L_1(0,\infty) \cap C^{(1)}(0,\infty)$, т.е. функция $\xi_m(t)$ обладает свойством 1) и рассматриваемая D_0-цепочка $\xi_k(t), \overline{\xi_k(t)}$ $(1 \leq k \leq m)$ является D-цепочкой.

Пусть для функции $\xi_m(t)$ не выполняется свойство 2) и в некоторой точке λ_0 на вещественной прямой для преобразования Фурье $\hat{\xi}_m(\lambda)$ имеем $\hat{\xi}_m(\lambda_0) = 0$. Введем в рассмотрение функцию $u(t)$ из $C^{(1)}(0,\infty)$, полагая

$$u(t) = ie^{-i\lambda_0 t} \int\limits_t^\infty e^{i\lambda_0 s} \xi_m(s) ds. \tag{7.12}$$

Сделанное предположение позволяет получить с помощью простых выкладок равенство

$$(\Gamma u)(t) = -i \int\limits_0^\infty \Gamma(t+s) \int\limits_0^s e^{-i\lambda_0(s-\tau)} \xi_m(\tau) d\tau ds =$$

$$= -i \int\limits_0^\infty e^{-i\lambda_0 \tau} \int\limits_\tau^\infty \Gamma(t+s) \xi_m(s-\tau) ds d\tau =$$

$$= -is_k(\Gamma) \int\limits_0^\infty e^{-i\lambda_0 \tau} \overline{\xi_m(t+\tau)} d\tau = s_k(\Gamma) \overline{u(t)}.$$

Таким образом, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (7.8) и потому принадлежит $L_2(0,\infty)$, а $u(t)$ и $\overline{u(t)}$ образуют пару Шмидта оператора Γ в $L_2(0,\infty)$, отвечающую s-числу $s_k(\Gamma)$. Так как $\xi_j(t), \overline{\xi_j(t)}$ $(1 \leq j \leq m)$ – базис в множестве таких пар, то

$$u(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda^{j-1} \xi_1(\lambda),$$

где $\alpha_j = \text{const}$ $(1 \leq j \leq m)$. Переходя к преобразованию Фурье, получаем, что $\hat{u}\lambda = \sum_{j=1}^m \alpha_j \lambda^{j-1} \hat{\xi}_1(\lambda)$, где $\hat{u}(\lambda)$ и $\hat{\xi}_1(\lambda)$ – преобразования Фурье функций $u(t)$ и $\xi_1(t)$ соответственно. С другой стороны, прямое вычисление преобразования Фурье функции

$u(t)$, определенной формулой (7.12), показывает, что

$$\hat{u}\lambda = \lambda^{m-1}\hat{\xi}_1(\lambda)/(\lambda - \lambda_0).$$

Получаем абсурдное равенство $\lambda^{m-1}/(\lambda - \lambda_0) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \lambda^{j-1}$.

Нам осталось доказать, что преобразование Фурье $\hat{\xi}_m(\lambda)$ функции $\xi_m(t)$ обладает свойством 3). Так как $\xi_m(t) \in L_1(0,\infty) \cap$ $\cap\, C^{(1)}(0,\infty)$, то

$$\lambda\hat{\xi}_m(\lambda)(= i\xi_m(0) + i\int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}\frac{d}{dt}\xi_m(t)dt) \in W,$$

где W – винеровское кольцо функций на прямой, представимых в виде суммы константы с преобразованием Фурье от суммируемой функции. Функция $(\lambda+i)\hat{\xi}_m(\lambda)$ не обращается в нуль на всей вещественной оси, включая точки

$$\lambda = \pm\infty(\lim_{\lambda\to\pm\infty}(\lambda + i)\hat{\xi}_m(\lambda) = i\xi_m(0) \neq 0).$$

На основании известной теоремы Винера можно утверждать, что $1/(\lambda+i)\hat{\xi}_m(\lambda) \in W$. Так как $\frac{\lambda+i}{\lambda-i} \in W$ и W – кольцо, то приходим к заключению, что

$$\overline{\hat{\xi}_m(\lambda)}/\hat{\xi}_m(\lambda)\Big(= \frac{\lambda+i}{\lambda-i}\,\frac{\overline{(\lambda+i)\hat{\xi}_m(\lambda)}}{(\lambda+i)\hat{\xi}_m(\lambda)}\Big) \in W.$$

Кроме того, имеем

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}\overline{\hat{\xi}_m(\lambda)}/\hat{\xi}_m(\lambda)(= (= (\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\overline{\hat{\xi}_m(\lambda)})/$$

$$/(\lim_{\lambda\to\pm\infty}\lambda\hat{\xi}_m(\lambda))) = -\overline{\xi_m(0)}/\xi_m(0),$$

т.е.

$$\overline{\hat{\xi}_m(\lambda)}/\hat{\xi}_m(\lambda) = -\overline{\xi_m(0)}/\xi_m(0) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\psi(t)dt,$$

где $\psi(t) \in L_1(-\infty,\infty)$.

3. Полученные результаты позволяют исследовать следующую аппроксимационную задачу, являющуюся аналогом задачи $A^{[\varkappa]}$.

Обозначим через $H_\infty^{[\varkappa]}$ множество всех функций, представимых в виде суммы $r(\lambda)+h(\lambda)$, где $r(\lambda)$ – правильная рациональная функция от λ, имеющая полюсы лишь внутри верхней полуплоскости, число которых (с учетом их кратности) не превосходит $\varkappa$, $h(\lambda)$ – функция класса Харди $\hat{H}_\infty$, т.е. граничное значение аналитической в верхней полуплоскости функции $h(x+iy)$, для которой $\sup\limits_{y>0}|h(x+iy)| < \infty$. Множество $H_\infty^{[\varkappa]}$ получается из множества $\acute{H}_\infty^{[\varkappa]}$ простой заменой аргумента $z = (\lambda - i)/(\lambda + i)$.

Задача $A^{[\varkappa]}(-\infty,\infty)$. Дана ограниченная на вещественной оси функция $f(\lambda)(\in L_\infty(-\infty,\infty))$. Требуется найти расстояние $D_\varkappa(f)$ функции $f(\lambda)$ до множества $\hat{H}_\infty^{[\varkappa]}$:

$$D_\varkappa(f) = \min_{g\in\hat{H}_\infty^{[\varkappa]}} \| f - g \|_\infty$$

и найти функцию $g(\lambda) \in \hat{H}_\infty^{[\varkappa]}$, для которой $\| f - g \| = D_\varkappa(f)$.

Остановимся на том случае этой общей задачи, когда функция $f \in W$. Без ограничения общности можно считать, что $f \in W_-^0$, т.е.

$$f(\lambda) = f_\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-i\lambda t}\Gamma(t)dt$$

$$(-\infty < \lambda < \infty; \quad \Gamma \in L_1(-\infty,\infty)).$$

Функция $\Gamma(t)$ совпадает при $t > 0$ с обобщенным преобразованием Фурье ограниченной функции $f_\Gamma(\lambda)$. Так как ганкелев оператор, определяемый ядром $\Gamma(t)$ по формуле (7.1), является вполне непрерывным, то при каждом $\varkappa \geq 0$ существует единственная функция $g(\lambda) \in \hat{H}_\infty^{[\varkappa]}$ такая, что $\| f_\Gamma - g \| = D_\varkappa(f) \quad (= s_\varkappa(\Gamma))$ и эта функция может быть определена по формуле

$$g(\lambda) = f_\Gamma(\lambda) - s_\varkappa(\Gamma)\overline{\hat{\xi}(\lambda)}/\hat{\xi}(\lambda), \tag{7.13}$$

где $\hat{\xi}(\lambda)$ – преобразование Фурье от функции $\xi(t)(\in L_2(0,\infty))$ такой, что $\xi(t), \overline{\xi(t)}$ – пара Шмидта оператора Г, отвечающая s-числу $s_{\varkappa}(\Gamma)$ (см. теорему 1.3). Теорема 7.2 дает возможность утверждать, что функция $g(\lambda)$, определяемая формулой (7.13), представима в виде

$$g(\lambda) = s_{\varkappa}(\Gamma)\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\psi(t)dt, \tag{7.14}$$

где $\varepsilon = \mathrm{const}$, $|\varepsilon| = 1$, $\psi(t) \in L_1(-\infty,\infty)$.

Таким образом, наилучшая аппроксимация в равномерной метрике функции из винеровского кольца W функциями из $\hat{H}_{\infty}^{[\varkappa]}$ реализуется на функции из того же кольца W. Этот результат распространяется на ряд других колец функций (дискретные аналоги при $\varkappa = 0$ см. в [1], §4).

При $\varkappa = 0$ этот результат дополняет для скалярного случая теорему 1 из работы [21].

Список литературы

[1] *Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори–Фейера и Ф. Рисса // Функц. анализ. – 1968. – **2**, вып. 1. – С. 1–19.

[2] *Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г.* Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори–Фейера и И. Шура // Там же. – Вып. 4. – С. 1–17.

[3] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965.

[4] *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: ИЛ, 1963.

[5] *Nehari Z.* On bounded bilinear forms // Ann. Math. – 1957. – **65**, N1. – P. 153–162.

[6] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966.

[7] *Takagi T.* On an algebraic problem related to an analytic theorem of Caratheodory ahd Fejer // Japan J. Math. – a) 1924. – **1**. – P. 83–93; b) 1925. – **2**. – P. 13–17.

[8] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965.

[9] *Clark D.* On the spectra of bounded Hermitian Hankel matrices // Amer. J. Math. – 1968. – **90**, N 2. – P. 627–656.

[10] *Clark D.* Hankel forms, Toeplitz formz and meromorfic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **134**, N 1. – P. 109–116.

[11] *Hartman P.* On completely continuous Hankel matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – **9**, N6. – P. 862–866.

[12] *Schur I.* Uber Potenzreihen, die im Inner des Einheitskreises beschrankt sind // J. reine angew. Math. – 1918. – **148**. – P. 122–145.

[13] *Caratheodory C. und Fejer.* Uber den Zusammenhang der Extremal von harmonishen Functionen mit ihner Koeffizienten und uber den Picard-Landauschen Satz // Rend. Circolo Mat. Palermo. – 1911. – **32**. – P. 218–239.

[14] *Ахиезер Н.И.* Об одной minimum-проблеме теории функций и о числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга // Изв. АН СССР. – 1931. – *N* 9. – С. 1169–1189.

[15] *Nevanlinna R.* Uber beschrankte analitische Funktionen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A. – 1929. – **32**. – P. 1–75.

[16] *Pick G.* Uber die Beschrankungen analytischen Functionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden // Math. Ann. – 1916. – **77**. – P. 7–237.

[17] *Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г.* Об ограниченных операторах, коммутирующих со сжатием класса единичного ранга неунитарности // Функц. анализ. – 1969. – **3**, вып. 3. – С. 86–87.

[18] *Крейн М.Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **XIII**, вып. 5. – С. 3–120.

[19] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Там же. – Вып. 2. – С. 3–72.

[20] *Гохберг И.Ц., Замбицкий М.К.* О нормально разрешимых операторах в пространствах с двумя нормами // Изв. АН Молд. ССР. – 1964. – № 6. – С. 80–84.

[21] *Крейн М.Г., Мелик-Адамян Ф.Э.* Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы // Функц. анализ. – 1970. – **4**, вып. 4. – С. 73–75.

[22] *Адамян В.М., Крейн М.Г.* Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. – 1971.– **VI**, № 2-3. – С. 181-206†.

†**Примечание при корректуре.** Во время печатания настоящей статьи была выполнена работа [22], в которой изложенные здесь и в работах [1, 2] методы и результаты получили дальнейшее развитие.

БЕСКОНЕЧНЫЕ БЛОЧНО-ГАНКЕЛЕВЫ МАТРИЦЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПРОБЛЕМЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ

(Совместно с В.М.Адамяном и Д.З.Аровым)

(Известия Академии наук Армянской ССР. – 1971. – Том VI, № 2-3)

В этой статье мы продолжим наши исследования [1а-г] по бесконечным ганкелевым матрицам и их приложениям. Здесь мы обобщаем полученные ранее результаты на случай, когда элементами бесконечной ганкелевой матрицы являются не числа, а блоки-операторы, действующие из одного гильбертова пространства N_1 в другое N_2.

Все рассматриваемые гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными. Для двух гильбертовых пространств H_1 и H_2 через $[H_1, H_2]$ обозначается пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2.

Если N – фиксированное гильбертово пространство, то через $\ell_2^+(N)$ обозначается гильбертово пространство односторонних последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty$ векторов $\xi_k \in N$, для которых

$$\| \xi \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \| \xi_k \|^2 < \infty.$$

Естественно N рассматривать как подпространство в $\ell_2^+(N)$ векторов ξ, у которых все "координаты" $\xi_k = 0$ при $k > 1$.

Оператор $\Gamma \in [\ell_2^+(N_1), \ell_2^+(N_2)]$ называется ганкелевым, если он определяется блочно-ганкелевой матрицей $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, где блоки $\gamma_k \in [N_1, N_2]$ $(k = 1, 2, ...)$:

$$\Gamma\{\xi_j\}_1^\infty = \{\eta_j\}_1^\infty, \quad \eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1}\xi_k, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{0.1}$$

Множество всех ганкелевых операторов из $[\ell_2^+(N_1), \ell_2^+(N_2)]$ в дальнейшем обозначается через $H^+(N_1, N_2)$.

Пусть $L_\infty(N_1, N_2)$ – пространство слабо измеримых† на единичной окружности $C = \{\zeta : |\zeta| = 1\}$ оператор-функций $F(\zeta)$ со значениями из $[N_1, N_2]$ с нормой

$$\| F \|_\infty = \text{ess sup} \| F(\zeta) \| < \infty.$$

Класс операторов $H^+(N_1, N_2)$ играет особую роль в гармоническом анализе функций из $L_\infty(N_1, N_2)$.

Теорема 0.1. *Пусть заданы последовательность $\{\gamma_k\}_1^\infty$ операторов из $[N_1, N_2]$ и число $\rho > 0$. Для того, чтобы существовала оператор-функция $F \in L_\infty(N_1, N_2)$ такая, что*††

$$c_{-k}(F) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_C \zeta^k F(\zeta)|d\zeta| = \gamma_k \quad (k = 1, 2 \dots) \tag{0.2}$$

и

$$\| F \|_\infty \le \rho, \tag{0.3}$$

***необходимо и достаточно**, чтобы матрицей $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ определялся по формуле (0.1) оператор $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ и чтобы $\rho \geq \| \Gamma \|$.*

В скалярном случае $(\dim N_1 = \dim N_2 = 1)$ это предложение впервые было установлено Нехари [2] как обобщение классического результата И. Шура [3].

---

†В силу сепарабельности рассматриваемых гильбертовых пространств все слабо измеримые абстрактные функции, встречающиеся в работе, являются одновременно сильно измеримыми.

††Интеграл в правой части равенства (0.2) понимается в слабом смысле.

Функция $F(\zeta)(\in L_\infty(N_1, N_2))$, удовлетворяющая при фиксированных γ_k $(k = 1, 2, ...)$ и $\rho(> 0)$ условиям (0.2) и (0.3), называется $(\Gamma; \rho)$-функцией. При $\rho = \| \Gamma \|$ она также называется Г-минифункцией.

Даже для скалярного случая после работы [2] оставался открытым вопрос об описании всех $(\Gamma; \rho)$-функций и, в частности, вопрос о единственности Г-минифункции.

Решение этих вопросов авторы получили в [1б] на основе теории расширения изометрических операторов. Попутно было получено новое доказательство теоремы Нехари, которое непосредственно переносится на общий случай $(1 \leq \dim N_k \leq \infty, \quad k = = 1, 2)$.

Для случая $\dim N_1 = \dim N_2$ $(\leq \infty)$ доказательство теоремы 0.1, являющееся прямым обобщением скалярного варианта доказательства теоремы, приведенного в [2] и [1а], фактически содержится в статье [4]. В статье [5] для того же случая $(\dim N_1 = = \dim N_2 \leq \infty)$ показано, что теорема 0.1 является простым следствием одного сравнительно недавнего результата Б.С.Надя и Ч.Фояша (см. [16], теорема II.2.3). В настоящей работе попутно получается еще одно доказательство теоремы 0.1 в самом общем случае.

В §1 мы показываем, что при фиксированных $\Gamma(\in H^+(N_1, N_2))$ и $\rho(\geq \| \Gamma \|)$ "нулевые" коэффициенты Фурье $c_0(F)$ всевозможных $(\Gamma; \rho)$-функций $F(\zeta)$ заполняют операторный квази-шар $K(\Gamma; \rho)$ в $[N_1, N_2]$, центр $\gamma_0^{(\text{ц})}(\Gamma; \rho)$ и полурадиусы $R_{\text{л}}(\Gamma; \rho)$ и $R_{\text{п}}(\Gamma; \rho)$ (левый и правый) которого находятся по оператору Г и числу ρ с помощью следующих процедур.

Положим

$$R_{\rho^2} = (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1}, \quad \overset{*}{R}_{\rho^2} = (\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-1},$$

где I_k – единичный оператор в пространстве $\ell_2^+(N_k)$ $(k = 1, 2)$, и далее

$$G(\Gamma; \rho) = [P_1 R_{\rho^2} | N_1]^{-1/2} \quad (>> 0),$$

$$\overset{*}{G}(\Gamma; \rho) = [P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} | N_2]^{-1/2} \quad (>> 0),$$

где P_k – ортопроекторы в $\ell_2^+(N_k)$ на N_k $(k = 1, 2)$.

Через $T_k (k = 1, 2)$ обозначим операторы правого сдвига в $\ell_2^+(N_k)$:

$$T_k\{\xi_1, \xi_2, ...\} = \{0, \xi_1, \xi_2, ...\}, \quad \{\xi_j\}_1^\infty \in \ell_2^+(N_k) \quad (k = 1, 2).$$

Подчеркнем, что для оператора $\Gamma \in [\ell_2^+(N_1), \ell_2^+(N_2)]$ равенство

$$\Gamma T_1 = T_2^* \Gamma$$

является характеристическим для принадлежности Γ классу $H^+(N_1, N_2)$.

При $\rho > \| \Gamma \|$ "параметрическое" уравнение квази-шара $K(\Gamma; \rho)$ записывается в виде

$$c_0 = \gamma_0^{\text{ц}}(\Gamma; \rho) + R_{\text{л}}(\Gamma; \rho) E R_{\text{п}}(\Gamma; \rho), \quad E \in B(N_1, N_2),$$

где

$$R_{\text{л}}(\Gamma; \rho) = \rho^{-1/2} \overset{*}{G}(\Gamma; \rho), \quad R_{\text{п}}(\Gamma; \rho) = \rho^{-1/2} G(\Gamma; \rho),$$

$$\gamma_0^{\text{ц}}(\Gamma; \rho) = \begin{cases} -P_2 \Gamma T_1^* R_{\rho^2} G^2(\Gamma; \rho), \\ -\overset{*}{G}{}^2 (\Gamma; \rho) P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma | N_1, \end{cases}$$

а $B(N_1, N_2)$ – множество всех сжимающих операторов $E \in [N_1, N_2]$ ($\| E \| \leq 1$).

При $\rho = \| \Gamma \|$ соответствующий квази-шар $K(\Gamma)$ ($= K(\Gamma; \| \Gamma \|)$) получается как предельный для семейства последовательно вложенных друг в друга квази-шаров $K(\Gamma; \rho')$ при $\rho' \uparrow \| \Gamma \|$.

Для определенности мы всюду предполагаем, что $\dim N_1 \leq \leq \dim N_2$. Через E_k $(k = 1, 2)$ обозначается единичный оператор в N_k.

В § 2, 3 показывается, что при $\rho > \| \Gamma \|$ коэффициенту $c_0(F)$, лежащему на "остове" квази-шара $K(\Gamma; \rho)$ $(E^* E = E_1)$, отвечает одна и только одна $(\Gamma; \rho)$-функция $F(\zeta)$ $(c_0 = c_0(F))$; последняя называется канонической $(\Gamma; \rho)$-функцией.

При изучении $(\Gamma; \rho)$-функций с $\rho > \| \Gamma \|$ фундаментальную роль играют операторы

$$P = \rho R_{\rho^2} G(\Gamma; \rho) \quad (\in [N_1, \ell_2^+(N_1)]),$$

$$Q = T_2\Gamma R_{\rho^2} G(\Gamma;\rho) \quad (\in [N_1, \ell_2^+(N_2)]),$$

$$\overset{*}{P} = \rho \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}(\Gamma;\rho) \quad (\in [N_2, \ell_2^+(N_2)]),$$

$$\overset{*}{Q} = T_1\Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}(\Gamma;\rho) \quad (\in [N_2, \ell_2^+(N_1)]).$$

"Положительные" коэффициенты Фурье $c_j(F)$ $(j = 1, 2, ...)$ любой канонической $(\Gamma;\rho)$-функции $F(\zeta)$ могут быть найдены с помощью рекуррентных соотношений

$$c_j(F) = \rho^{-1}\Big[\sum_{k=0}^{j-1} c_k(F)X_{j-k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k X_{j+k+1}\Big] G(\Gamma;\rho),$$

где

$$X_k = P_1 T_1^{*k-1}(P + \overset{*}{Q}\, E) \quad (k = 1, 2, ...).$$

В § 6 в предположении, что $\dim N_k < \infty$ $(k = 1, 2)$ дано описание всех $(\Gamma;\rho)$-функций для $\rho > \| \Gamma \|$, аналогичное тому, которое в скалярном случае было сформулировано авторами в [1б] (теорема 4.2) и доказано в [1г]. При этом же предположении показано (§5), что $\det G(\Gamma;\rho) = \det \overset{*}{G}(\Gamma;\rho)$ и тем самым установлено, что если один из предельных полурадиусов $R_{л}(\Gamma)(= \lim\limits_{\rho\downarrow \|\Gamma\|} R_{л}(\Gamma;\rho))$ и $R_{п}(\Gamma)(= \lim R_{п}(\Gamma;\rho))$ не вырождается, то это же имеет место и для другого. Последний результат допускает обобщение на тот случай, когда выполняется всего лишь одно условие: $P_1\Gamma$ (или, что равносильно, $P_2\Gamma^*$) – оператор Гильберта–Шмидта, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Sp}(\gamma_k^*\gamma_k) < \infty. \tag{0.4}$$

Это условие, в частности, выполняется, если хотя бы одно из чисел $\dim \overset{*}{N}_k$ $(k = 1, 2)$ конечно.

Важный класс ганкелевых операторов Γ со свойством (0.4) будет исследован в другом месте. Для операторов этого класса (а значит, и, подавно, для операторов $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ с $\dim N_k < \infty$, $k = 1, 2$) удается дать прозрачное описание не только множества всех $(\Gamma;\rho)$-функций при любом $\rho > \| \Gamma \|$, но и множества всех Г-минифункций во вполне неопределенном случае (т.е. когда предельные полурадиусы $R_{\text{л,п}}(\Gamma)$ не вырождаются).

В другом месте будут также рассмотрены приложения полученных результатов в вопросах экстраполяции матриц и оператор-функций различных классов. В частности, с новых позиций будет получен ряд известных результатов по матричной проблеме Неванлинны–Пика [6–8] по более общей матричной проблеме Д. Сарасона [4], которая, как будет показано, включает в себя проблему продолжения эрмитово-положительных матриц с отрезка (см. [9–11]), а также ряд дополнений к ним.

Интересные детали возникают в том случае, когда оператор Γ оказывается вполне непрерывным. Следует отметить, что для одного специального важного класса таких операторов (с $\dim N_1 = \dim N_2 < \infty$) описание $(\Gamma;\rho)$-функций при $\rho > \| \Gamma \|$ получено в работе [12] , в которой одновременно выяснилась связь рассматриваемого круга вопросов с теорией S-матриц канонических дифференциальных операторов.

Считаем своим долгом указать, что стимулом к установлению теоремы о совпадении детерминантов левого и правого полурадиусов $R_{\text{л,п}}(\Gamma)$ послужил соответствующий результат В.П. Потапова и И.В. Ковалишиной [13, 14] по матричной проблеме Неванлинна–Пика (личное сообщение весной 1970 г.).

§ 1. Одноступенчатые $(\Gamma;\rho)$-продолжения

1. Пусть $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ определяется блочно-ганкелевой матрицей (γ_{j+k-1}); тогда всякий оператор $\Gamma^{(1)} (\in H^+(N_1, N_2))$ с блочно-ганкелевой матрицей $(\gamma^{(1)}_{j+k-1})$, где $\gamma_1^{(1)} = \gamma_0$ – произвольный оператор из $[N_1, N_2]$, а $\gamma_k^{(1)} = \gamma_{k-1}$ при $k = 1, 2, \ldots$, будет называться одноступенчатым Г-продолжением. Для такого оператора $\Gamma^{(1)}$ имеем: $\| \Gamma \| \leq \| \Gamma^{(1)} \|$ и

$$\Gamma^{(1)} = \gamma_0 P_1 + T_2 \Gamma + P_2 \Gamma T_1^*. \tag{1.1}$$

Если наряду с (1.1) для фиксированного числа $\rho (\geq \| \Gamma \|)$ имеем $\| \Gamma^{(1)} \| \leq \rho$, то оператор $\Gamma^{(1)}$ называется одноступенчатым $(\Gamma;\rho)$-

продолжением, если же $\| \Gamma^{(1)} \| = \| \Gamma \|$, то – одноступенчатым минипродолжением.

Оказывается, множество всех одноступенчатых $(\Gamma;\rho)$-продолжений при $\rho > \| \Gamma \|$ допускает простое описание:

Теорема 1.1. *Для* $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ *и* $\rho > \| \Gamma \|$ *одноступенчатые* $(\Gamma;\rho)$*-продолжения (1.1) определяются теми и только теми* $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$, *которые принадлежат операторному квазишару*

$$\gamma_0 = -P_2\Gamma T_1^* R_{\rho^2} G^2(\Gamma;\rho) +$$

$$+\rho^{-1} \overset{*}{G}(\Gamma;\rho) E G(\Gamma;\rho), \quad E \in B(N_1, N_2). \tag{1.2}$$

Доказательство. Условие $\| \Gamma^{(1)} \| \leq \rho$ означает, что

$$\rho^2 I_2 - \Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)*} = \rho^2 I_2 - \Gamma\Gamma^* - (\gamma_0 + T_2\Gamma)P_1(\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*) \geq 0$$

или, что одно и то же, $I_2 - A^*A \geq 0$, где

$$A = P_1(\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*)\overset{*}{R}{}_{\rho^2}^{1/2}, \quad \overset{*}{R}{}_{\rho^2}^{1/2} = (\rho^2 I_2 - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \; (>> 0).$$

Так как условие $I_2 - A^*A \geq 0$ равносильно условию $I_1 - AA^* \geq 0$, то приходим к неравенству

$$P_1 - P_1(\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*)\overset{*}{R}_{\rho^2}(\gamma_0 + T_2\Gamma)P_1 \geq 0. \tag{1.3}$$

Заметим теперь, что произвольное $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$ однозначно представимо в виде (1.2) при некотором $E \in [N_1, N_2]$. Подставим это выражение в (1.3). Так как при этом

$$(\gamma_0^* P_2 + P_1\Gamma^* T_2^*)\overset{*}{R}_{\rho^2}\gamma_0 = -P_1\Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}{}^2 P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2}\gamma_0 +$$

$$+\rho^{-1} G E^* \overset{*}{G} P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2}\gamma_0 + P_1\Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2}\gamma_0 =$$

$$= -P_1\Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}{}^2 \overset{*}{G}{}^{-2} \gamma_0 + \rho^{-1} G E^* \overset{*}{G} \overset{*}{G}{}^{-2} \gamma_0 +$$

$$+P_1\Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2}\gamma_0 = \rho^{-1} G E^* \overset{*}{G}{}^{-1} \gamma_0 =$$

$$= -\rho^{-1} G E^* \overset{*}{G} P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 + \rho^{-2} G E^* \overset{*}{G}{}^{-1} \overset{*}{G} E G =$$

$$= -\rho^{-1} G E^* \overset{*}{G} P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 + \rho^{-2} G E^* E G,$$

где $G = G(\Gamma;\rho)$, $\overset{*}{G} = \overset{*}{G}(\Gamma;\rho)$ и

$$\gamma_0^* P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 = -P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}{}^2 P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 +$$

$$+\rho^{-1} G E^* \overset{*}{G} P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1,$$

то неравенство (1.3) равносильно следующему условию на $E(\in [N_1, N_2])$:

$$P_1 - \rho^{-2} G E^* E G P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}{}^2 P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 -$$

$$-P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 \geq 0. \tag{1.4}$$

Убедимся теперь в том, что справедливо тождество

$$P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \overset{*}{G}{}^2 P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 -$$

$$-P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 = \rho^{-2} G^2 P_1, \tag{1.5}$$

в силу которого неравенство (1.4) равносильно

$$G(E_1 - E^* E) G \geq 0.$$

Тем самым доказательство теоремы будет завершено. Для $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ легко убедиться в справедливости равенства

$$\Gamma T_1^* = T_2 \Gamma + P_2 \Gamma T_1^* - T_2 \Gamma P_1,$$

которое с учетом основного соотношения $\Gamma T_1 = T_2^* \Gamma$ дает

$$(\rho^2 I_2 - \Gamma\Gamma^*) T_2 = T_2(\rho^2 I_2 - \Gamma\Gamma^*) + T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* - P_2 \Gamma T_1^* \Gamma^*,$$

или

$$T_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} = \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 + \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} - \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 \Gamma T_1^* \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2}, \tag{1.6}$$

откуда

$$\overset{*}{R}_{\rho^2} = T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 + T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} - T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 \Gamma T_1^* \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2}.$$

Поэтому

$$P_1\Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 = P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \Gamma P_1 -$$

$$- P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \Gamma P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 \Gamma T_1^* \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \Gamma P_1 =$$

$$= -P_1 + \rho^2 G^{-2} P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 -$$

$$-\rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma G^{-2} P_1 + \rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 \Gamma T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_1.$$

Получаем, что

$$\rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 =$$

$$= -G^2 P_1 + \rho^2 P_1 + \rho^2 P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 \Gamma T_1^* \overset{*}{R}_{\rho^2} G_2 P_1,$$

т.е.

$$P_1 - P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1 + P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 \Gamma T_1^* R_{\rho^2} G^2 P_1 =$$

$$= \rho^{-2} G^2 P_1.$$

Для доказательства (1.5) остается проверить, что

$$P_2 \Gamma T_1^* R_{\rho^2} G^2 P_1 = G^2 P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma P_1. \tag{1.7}$$

На основании (1.6) имеем

$$P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 = P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2^* P_2 -$$

$$- P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \Gamma P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 +$$

$$+ P_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} \Gamma T_1 \Gamma^* P_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 =$$

$$= P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 - \rho^2 P_1 R_{\rho^2} P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 +$$

$$+ \rho^2 P_1 R_{\rho^2} T_1 \Gamma^* P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2,$$

откуда вытекает, что

$$P_1 R_{\rho^2} P_1 \Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 = P_1 R_{\rho^2} T_1 \Gamma^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2,$$

или

$$G^{-2}P_1\Gamma^* T_2^* \overset{*}{R}_{\rho^2} P_2 = P_1 R_{\rho^2} T_1 \Gamma^* \overset{*}{G}^{-2} P_2,$$

что дает (1.7).

Теорема доказана.

2. Как видно из (1.2), операторы

$$R_л(\Gamma;\rho) = \rho^{-1/2}\overset{*}{G}(\Gamma;\rho), \quad R_п(\Gamma;\rho) = \rho^{-1/2}G(\Gamma;\rho)$$

являются левым и правым полурадиусами операторного квази-шара (1.2). Для центра этого квази-шара получили два выражения, а именно

$$\gamma_0^ц(\Gamma;\rho) = \begin{cases} -P_2\Gamma T_1^* R_{\rho^2} G^2(\Gamma;\rho), \\ -\overset{*}{G}{}^2(\Gamma;\rho) P_2 \overset{*}{R}_{\rho^2} T_2 \Gamma | N_1. \end{cases}$$

Из проведенных выкладок видно, что $\| \Gamma^{(1)} \| = \rho$ в том и только в том случае, когда для $E \in B(N_1, N_2)$ в (1.2) имеем $\| E \| \ (= \| E^* \|) = 1$, причем в этом случае нормы операторов $\Gamma^{(1)}$ и E, если достигаются, то одновременно.

3. Множество $K(\Gamma;\rho)$ операторов $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$, представимых в виде (1.2), мы назвали операторным квази-шаром, так как по определению множество $K \subset [N_1, N_2]$ называется квази-шаром с центром $\gamma^{(ц)} \in [N_1, N_2]$, если оно состоит из всех операторов γ вида

$$\gamma = \gamma^{(ц)} + R_л E R_п \quad (E \in B(N_1, N_2)).$$

где $R_п(\in [N_1, N_1])$ и $R_л(\in [N_2, N_2])$ суть некоторые фиксированные неотрицательные операторы, называемые соответственно правым и левым полурадиусами квази-шара K.

Центр $\gamma^{(ц)}$, будучи центром симметрии квази-шара K, определяется по K единственным образом.

Квази-шар K вырождается в точку в том и только в том случае, когда хотя бы один из полурадиусов $R_л$ и $R_п$ равен нулю; в этом случае шар состоит только из своего центра и называется тривиальным.

Если квази-шар K нетривиален, то его полурадиусы $R_л$ и $R_п$ определяются с точностью до умножения и деления на положительное число $r > 0 : R_п \to rR_п, \ R_л \to r^{-1}R_л$.

Если $K^{(1)} \supset K^{(2)} \supset ... \supset K^{(n)} \supset ...$ есть последовательность вложенных друг в друга квази-шаров, то их пересечение есть снова некоторый квази-шар, причем его центр есть слабый предел центров квази-шаров $K^{(n)}$. Кроме того, правые и левые полурадиусы $R_{л}^{(n)}$ и $R_{п}^{(n)}$ квази-шаров $K^{(n)}$ могут быть так выбраны, чтобы они составляли невозрастающие последовательности $R^{(n)} \geq R^{(n+1)}$ $(n = 1, 2, ...)$. Тогда их сильные пределы $R_{п} = s - \lim_{n\to\infty} R_{п}^{(n)}$ и $R_{л} = s - \lim_{n\to\infty} R_{л}^{(n)}$ будут соответственно правым и левым полурадиусами пересечения K.

Все сформулированные выше утверждения об операторных квази-шарах установлены в [15] †.

Введенные в теореме 1.1 квази-шары $K(\Gamma; \rho)$ $(\rho > \| \Gamma \|)$, очевидно, образуют гнездящееся однопараметрическое семейство квази-шаров: $K(\Gamma; \rho) \supset K(\Gamma; \rho')$ при $\rho > \rho' (> \| \Gamma \|)$, с невозрастающими полурадиусами. Следовательно, согласно сказанному выше, существует непустое пересечение

$$K(\Gamma) = \bigcap_{\rho > \|\Gamma\|} K(\Gamma; \rho)$$

и оно является квази-шаром с центром

$$\gamma_0^{ц} = w - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \gamma_0^{ц}(\Gamma; \rho)$$

и полурадиусами

$$R_{п}(\Gamma) = s - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \| \Gamma \|^{-1/2} [P_1(\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} | N_1]^{-1/2},$$

$$R_{л}(\Gamma) = s - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} \| \Gamma \|^{-1/2} [P_2(\rho^2 I_2 - \Gamma \Gamma^*)^{-1} | N_2]^{-1/2}.$$

Таким образом, на основании теоремы 1.1 получается

Теорема 1.2. *Одноступенчатые* Γ*-минипродолжения определяются теми и только теми* $\gamma_0 \in [N_1, N_2]$, *которые принадлежат квази-шару*

$$K(\Gamma) : \gamma_0 = \gamma_0^{(ц)} + R_{л}(\Gamma) E R_{п}(\Gamma) \quad (E \in B(N_1, N_2)).$$

† В работе [15] квази-шар именуется просто шаром, а полурадиусы – радиусами.

В качестве непосредственного следствия теоремы 1.2 получается первое утверждение следующего предложения:

Теорема 1.3. *Для* $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ *существует единственное одноступенчатое* Γ*-минипродолжение в том и только в том случае, когда выполняется хотя бы одно из двух условий:*

$$a) \quad s - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} [P_1(\rho^2 I_1 - \Gamma^*\Gamma)^{-1}|N_1]^{-1/2} = 0,$$

$$a^*) \quad s - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} [P_2(\rho^2 I_2 - \Gamma\Gamma^*)^{-1}|N_2]^{-1/2} = 0. \tag{1.8}$$

Условия а) и а) эквивалентны соответственно условиям б) и б*):*

$$б) \quad N_1 \cap (\| \Gamma \|^2 I_1 - \Gamma^*\Gamma)^{1/2} \ell_2^+(N_1) = \{0\},$$

$$б^*) \quad N_2 \cap (\| \Gamma \|^2 I_2 - \Gamma\Gamma^*)^{1/2} \ell_2^+(N_2) = \{0\}.$$

Докажем, например, эквивалентность условий а) и б). Пусть выполняется условие а) и

$$g \in N_1 \cap (\| \Gamma \|^2 I_1 - \Gamma^*\Gamma)^{1/2} \ell_2^+(N_1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} ((\rho^2 I_1 - \Gamma^*\Gamma)^{-1} g, g) = \\ &= \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} = (G^{-2}(\Gamma;\rho) g, g) = \\ &= \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} = \| G^{-1}(\Gamma;\rho) g \|^2 < \infty. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Поскольку $s - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} G(\Gamma;\rho) = 0$ и семейство векторов $h_\rho = G^{-1}(\Gamma;\rho)$ ограничено, то

$$g = G(\Gamma;\rho) h_\rho = w - \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} G(\Gamma;\rho) h_\rho = 0.$$

Таким образом, из а) следует б) . Пусть теперь условие а) не выполняется и при некотором $h \in N_1$ имеем

$$g = \lim_{\rho \downarrow \|\Gamma\|} G(\Gamma;\rho) h \neq 0.$$

Тогда для вектора g выполняется (1.9) и потому

$$g \in N_1 \cap (\| \Gamma \|^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{1/2} \ell_2^+(N_1).$$

В дальнейшем нам понадобится следующий достаточный признак единственности Г-минипродолжения.

Следствие 1.1. Если ρ^2 является собственным числом оператора $\Gamma^*\Gamma$ ($\Gamma\Gamma^*$), а отвечающее ему собственное подпространство $L \subset \ell_2^+(N_1)$ ($\overset{*}{L} \subset \ell_2^+(N_2)$) таково, что $\overline{P_1 L} = N_1$ ($\overline{P_2 \overset{*}{L}} = N_2$), то одноступенчатое Г-минипродолжение единственно.

В самом деле, если, например, $\overline{P_1 L} = N_1$, то для

$$g = (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{1/2} f \quad (f \in \ell_2^+(N_1))$$

будем иметь: $g \perp L$. Поэтому, если, кроме того, $g \in N_1$, то $g = P_1 g \perp \overline{P_1 L} = N_1$, откуда $g = 0$. Таким образом, выполняется условие б) теоремы 1.3.

§2. Одноступенчатые канонические $(\Gamma; \rho)$-продолжения

Без ограничения общности будем предполагать, что

$$(n_1 =) \ \dim N_1 \leq \dim N_2 \ (= n_2).$$

В противном случае вместо $\Gamma(\in H^+(N_1, N_2))$ можно было бы рассматривать $\Gamma^*(\in H^+(N_2, N_1))$. В этом параграфе мы остановимся подробнее на тех одноступенчатых $(\Gamma; \rho)$-продолжениях $\Gamma^{(1)}$ ($\rho > \| \Gamma \|$), которым отвечают в (1.2) изометрические отображения E пространства N_1 в N_2, т.е. $E^* E = E_1$. Такие $(\Gamma; \rho)$-продолжения назовем каноническими. В дальнейшем фундаментальную роль играет

Теорема 2.1. *Для канонического одноступенчатого продолжения $\Gamma^{(1)}$, определяемого оператором $E(\in B(N_1, N_2))$, имеют место равенства*

$$\Gamma^{(1)}(P + \overset{*}{Q} E) = \rho(Q + \overset{*}{P} E); \quad \Gamma^{(1)*}(Q + P^* E) = \rho(P + \overset{*}{Q} E), \quad (2.1)$$

и линеалы

$$L_\rho = (P + \overset{*}{Q} E)N_1, \quad \overset{*}{L}_\rho = (Q + \overset{*}{P} E)N_1$$

являются собственными подпространствами соответственно операторов $\Gamma(1)^*\Gamma^{(1)}$ *и* $\Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)*}$, *отвечающими собственному числу* ρ^2.

Все точки интервала $(\| \Gamma \|^2, \rho^2)$ *являются регулярными точками оператора* $\Gamma^{(1)*}\Gamma^{(1)}$, *или, что эквивалентно, оператора* $\Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)*}$.

З а м е ч а н и е 2.1. Из формул (2.1) следует

$$P_1 L_\rho = N_1, \quad P_2 \overset{*}{L}_\rho = N_2.$$

Действительно,

$$P_1 L_\rho = P_1 P N_1 = \rho G^{-2}(\Gamma;\rho) N_1 = N_1;$$

$$P_2 \overset{*}{L}_\rho = P_2 \overset{*}{P} E N_1 = \rho \overset{*}{G}^{-2}(\Gamma;\rho) N_2 = N_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. В справедливости равенств (2.1) можно убедиться, если учесть, что при любом $E \in [N_1, N_2]$

$$\Gamma(P + \overset{*}{Q} E) = \rho T_2^*(Q + \overset{*}{P} E),$$

$$\Gamma^*(Q + \overset{*}{P} E) = \rho T_2^*(P + \overset{*}{Q} E).$$

и использовать формулы (1.1), (1.2), (1.7), а также условие $E^* E = E_1$. Из (2.1) видно, что линеалы L_ρ и $\overset{*}{L}_\rho$, определяемые формулами (2.2), являются собственными для операторов $\Gamma^{(1)*}\Gamma^{(1)}$ и $\Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)*}$ соответственно. Их максимальность вытекает из замечания 2.1. Действительно, из (2.3) следует, что если бы существовал собственный вектор оператора $\Gamma^{(1)*}\Gamma^{(1)}$, отвечающий собственному значению ρ^2 и не принадлежащий L_ρ, то существовал бы собственный вектор $\xi \overline{\in} L_\rho$ и $P_1\xi = 0$, т.е. вида

$$\xi = T_1 h, \quad 0 \neq h \in \ell_2^+(N_1).$$

Но тогда имели бы

$$\| \Gamma^{(1)}\xi \| = \| \Gamma^{(1)} \| \| \xi \| = \rho \| h \| .$$

С другой стороны, на основании (1.1)

$$\| \Gamma^{(1)}\xi \| = \| \Gamma^{(1)} T_1 h \| = \| T_2^* \Gamma^{(1)} h \| = \| \Gamma h \| .$$

Так что $\| \Gamma h \| \geq \rho \| h \|$, а это противоречит условию $\| \Gamma \| < \rho$. Аналогично проверяется максимальность $\overset{*}{L}_\rho$.

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Из рассуждений, аналогичных проведенным в начале доказательства теоремы 1.1, следует, что точка $\lambda > \| \Gamma \|^2$ регулярна для оператора $\Gamma^{(1)}\Gamma^{(1)*}$ точно тогда, когда обратим в N_2 оператор

$$\Phi(\lambda) = E_1 - P_1(\gamma_0^* P_2 + \Gamma^* T_2^*)\overset{*}{R}_\lambda(\gamma_0 + T_2\Gamma)P_1|N_1,$$

$$\overset{*}{R}_\lambda = (\lambda I_2 - \Gamma\Gamma^*)^{-1}.$$

С другой стороны, $\Phi(\rho^2)$ совпадает с сужением на N_1 левой части неравенства (1.3), которое, как было показано, равно $\overset{*}{\rho}{}^{-2} G(E_1 - E^* E)G = 0$. При $\lambda > \| \Gamma \|^2$ оператор-функция $\Phi(\lambda)$ с ростом λ возрастает, в частности, равномерно положителен оператор $-\Phi(\lambda) = \Phi(\rho^2) - \Phi(\lambda)$ при $\rho^2 > \lambda > \| \Gamma \|^2$. В самом деле, так как из спектрального разложения резольвенты R_λ следует

$$((\overset{*}{R}_\lambda - \overset{*}{R}_{\rho^2})g, g) \geq c(\lambda) \| g \|^2 \quad (g \in \ell_2^+(N_2)),$$

где $c(\lambda) = (\rho^2 - \lambda)/\lambda\rho^2$, то

$$-(\Phi(\lambda)f, f) \geq c(\lambda) \| g \|^2 \quad (\rho^2 > \lambda > \| \Gamma \|^2),$$

где

$$\| g \| = \| (\gamma_0 + T_2\Gamma)f \| = \| \overset{*}{R}{}_{\rho^2}^{-1/2} \overset{*}{R}{}_{\rho^2}^{1/2} (\gamma_0 + T_2\Gamma)f \| \geq$$

$$\geq \rho^{-1} \| \overset{*}{R}{}_{\rho^2}^{1/2} (\gamma_0 + T_2\Gamma)f \| = \rho^{-1} \| f \|, \quad f \in N_1.$$

В последнем равенстве мы еще раз учли, что $\Phi(\rho^2) = 0$. Таким образом,

$$-(\Phi(\lambda)f, f) \geq [(\rho^2 - \lambda)/\lambda\rho^4] \| f \|^2 \quad (f \in N_1),$$

а следовательно, оператор $\Phi(\lambda)$ ограниченно обратим при $\| \Gamma \|^2 < < \lambda < \rho^2$.

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что ρ^2 является изолированным собственным числом оператора $\Gamma^{(1)*}\Gamma^{(1)}$ с максимальным собственным подпространством $L_\rho (= (P + \overset{*}{Q}E)N_1)$, причем $P_1 L_\rho = N_1$. Так как $\| \Gamma^{(1)} \| = \rho$, то одноступенчатое $(\Gamma^{(1)}; \rho)$-продолжение будет $\Gamma^{(1)}$-минипродолжением. К этому минипродолжению применимо следствие 1.1, откуда получается

Теорема 2.2. *Если* $\Gamma^{(1)}$ – *произвольное каноническое одноступенчатое* $(\Gamma; \rho)$-*продолжение* $(\rho > \| \Gamma \|)$, *то для него одноступенчатое* $\Gamma^{(1)}$-*минипродолжение* $\Gamma^{(2)}$ *единственно.*

§ 3. Полные $(\Gamma; \rho)$-продолжения

1. Если N – произвольное гильбертово пространство, то $\ell_2^+(N)$ можно рассматривать как подпространство $\ell_2(N)$ двусторонних последовательностей $h = \{h_k\}_{-\infty}^{\infty}$ векторов $h_k \in N$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, для которых

$$\| h \|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \| h_k \|^2 < \infty.$$

Ортопроектор $\ell_2(N)$ на $\ell_2^+(N)$ будем обозначать через P_+. Для оператора T правого сдвига в $\ell_2^+(N)$ минимальным унитарным расширением является оператор U правого сдвига в

$$\ell_2(N) : U\{h_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{h'_k\}_{-\infty}^{\infty}, \quad \text{где } h'_k = h_{k-1} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Пусть N_1 и N_2 – два произвольных гильбертовых пространства, а U_1 и U_2 – операторы правого сдвига соответственно в $\ell_2(N_1)$ и

$\ell_2(N_2)$. Оператор $\tilde{\Gamma}$ из $[\ell_2(N_1), \ell_2(N_2)]$ назовем полным ганкелевым, если он определяется некоторой блочно-ганкелевой матрицей $(\tilde{\gamma}_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$:

$$\tilde{\Gamma}\{h_k\}_{-\infty}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_{j+k-1} h_k \right\}_{-\infty}^{\infty},$$

$$\{h_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell_2(N_1), \quad \tilde{\gamma}_k \in [N_1, N_2], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Для такого оператора (и только такого) справедливо соотношение

$$\tilde{\Gamma} U_1 = U_2^* \tilde{\Gamma}.$$

Подпространство всех полных ганкелевых операторов из $[\ell_2(N_1), \ell_2(N_2)]$ обозначим через $H(N_1, N_2)$. Пусть Γ – фиксированный оператор из $H^+(N_1, N_2)$. Оператор $\tilde{\Gamma}(\in H(N_1, N_2))$ назовем полным Γ-продолжением, если

$$\Gamma = P_+ \tilde{\Gamma} | \ell_2^+(N_1).$$

Если оператор $\Gamma(\in H^+(N_1, N_2))$ определяется блочно-ганкелевой матрицей $(\gamma_{j+k-1})_1^{\infty}$, то оператор $\tilde{\Gamma}(\in H(N_1, N_2))$ является полным Γ-продолжением в том и только в том случае, когда он определяется блочно-ганкелевой матрицей $(\tilde{\gamma}_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$, у которой $\tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ при $k = 1, 2, \dots$.

Очевидно, для любого полного Γ-продолжения $\tilde{\Gamma}$: $\| \tilde{\Gamma} \| \geq \geq \| \Gamma \|$. Если для фиксированного числа $\rho(\geq \| \Gamma \|)$ полное Γ-продолжение таково, что $\| \tilde{\Gamma} \| \leq \rho$, то будем его называть полным $(\Gamma; \rho)$-продолжением, а если при этом $\rho = \| \Gamma \|$, то полным Γ-минипродолжением и обозначать через $\tilde{\Gamma}_\mu$. Справедлива

Теорема 3.1. *Для любого* $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$ *существует полное* Γ*-минипродолжение* $\tilde{\Gamma}_\mu$*. Оно единственно в том и только том случае, когда одноступенчатое* Γ*-минипродолжение единственно, т.е. когда выполняется хотя бы одно из условий (1.8).*

Доказательство. По теореме 1.2 для Γ существует хотя бы одно одноступенчатое Γ-минипродолжение. Пусть

$$\{\Gamma^{(p)}\}_1^{\infty} \subset H^+(N_1, N_2),$$

причем $\Gamma^{(p)}$ является одноступенчатым $\Gamma^{(p-1)}$-минипродолжением ($p = 1, 2, \ldots$; $\Gamma^{(0)} = \Gamma$). Тогда $\| \Gamma^{(p)} \| = \| \Gamma \|$ и, если оператору Γ отвечает блочно-ганкелева матрица $(\gamma_{j+k-1})_1^\infty$, то продолжениям $\Gamma^{(p)}$ отвечают блочно-ганкелевы матрицы $(\gamma_{j+k-1-p})_1^\infty$, где блоки $\gamma_0, \gamma_{-1}, \ldots, \gamma_{-p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ – некоторые операторы из $[N_1, N_2]$. Рассмотрим составленную из полученной таким образом двухсторонней последовательности блоков $\{\gamma_k\}_{-\infty}^\infty$ $(\gamma_k \in [N_1, N_2])$ матрицу $(\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^\infty$.

Очевидно, что этой матрицей определяется полное Γ-минипродолжение, т.е. формулой

$$\tilde{\Gamma}\{h_k\}_{-\infty}^\infty = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}_{j+k-1} h_k \right\}_{j=-\infty}^\infty$$

определяется оператор $\tilde{\Gamma} \in H(N_1, N_2)$ и $\| \tilde{\Gamma} \| = \| \Gamma \|$.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. В силу него, если для оператора $\Gamma(\in H^+(N_1, N_2))$ полное Γ-минипродолжение $\tilde{\Gamma}_\mu$ единственно, то и одноступенчатое Γ-минипродолжение $\Gamma^{(1)}$ единственно. Чтобы убедиться в обратном утверждении, достаточно проверить, что если $\Gamma^{(1)}$ определяется единственным образом, то это же имеет место для $\Gamma^{(2)}$.

Так как $\Gamma = T_2^* \Gamma^{(1)}$, то

$$\Gamma^* \Gamma = \Gamma^{(1)*} T_2 T_2^* \Gamma^{(1)} = \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)} - \Gamma^{(1)*} P_2 \Gamma^{(1)} \geq \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)},$$

а поэтому $(\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} \leq (\rho^2 I_1 - \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)})^{-1}$. Стало быть,

$$G^{-2}(\Gamma; \rho) = P_1 (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma)^{-1} | N_1 \leq$$

$$\leq P_1 (\rho^2 I_1 - \Gamma^{(1)*} \Gamma^{(1)})^{-1} | N_1 = G^{-2}(\Gamma^{(1)}; \rho),$$

так что $G(\Gamma^{(1)}; \rho) \leq G(\Gamma; \rho)$. Аналогично получается:

$$\overset{*}{G}(\Gamma^{(1)}; \rho) \leq \overset{*}{G}(\Gamma; \rho).$$

Из этих неравенств и теоремы 2.2 уже непосредственно следует, что вместе с $\Gamma^{(1)}$ единственным образом определяется и его $\Gamma^{(1)}$-минипродолжение $\Gamma^{(2)}$.

Теорема доказана.

Следствие 3.1. Если у оператора $\Gamma(\in H^+(N_1, N_2))$ *число* $\rho^2 = \| \Gamma \|^2$ *является собственным для* $\Gamma^*\Gamma$ $(\Gamma\Gamma^*)$ *и соответствующее ему собственное подпространство* L (L^*) *таково, что* $\overline{P_1 L} = N_1$ $(P_2 \overset{*}{L} = N_2)$, *то полное* Γ*-минипродолжение* $\tilde{\Gamma}_\mu$ *единственно.*

2. Остановимся подробнее на важном для дальнейшего случае, когда выполняются условия следствия 3.1, притом в усиленной форме. Пусть, например, вместо условия $\overline{P_1 L} = N_1$ выполняется условие: оператор P_1 проектирует L однозначно на все N_1.

По теореме Банаха оператор, обратный к сужению

$$P_1|L \ (\in [L, N_1]),$$

ограничен. Обозначим его через X. Тогда, если $Y = \rho^{-1}\Gamma X$, то, поскольку L – собственное подпространство оператора $\Gamma^*\Gamma$, отвечающее собственному числу $\rho^2 = \| \Gamma^*\Gamma \|$, будем иметь

$$\Gamma X = \rho Y, \quad \Gamma^* Y = \rho X. \tag{3.1}$$

Для (единственного) полного Γ-минипродолжения $\tilde{\Gamma}$ получаем

$$\| P_+ \tilde{\Gamma} X h \| = \| \Gamma X h \| = \rho \| X h \| = \| \tilde{\Gamma} \| \cdot \| X h \| \quad (h \in N_1),$$

откуда видно, что $\Gamma X = P_+ \tilde{\Gamma} X = \tilde{\Gamma} X$. Аналогично получается, что $\Gamma^* Y = P_+ \tilde{\Gamma}^* Y = \tilde{\Gamma}^* Y$. Таким образом, имеем

$$\tilde{\Gamma} X = \rho Y, \ \ \tilde{\Gamma}^* Y = \rho X. \tag{3.2}$$

Положим

$$X_k = P_1 T_1^{*\,k-1} X \ \ (\in [N_1, N_1]),$$

$$Y_k = P_2 T_2^{*\,k-1} Y \ \ (\in [N_1, N_2]) \ \ (k = 1, 2, \ldots),$$

так что

$$X h = \sum_{k=1}^{\infty} T_1^{k-1} X_k h = \{X_k h\}_1^{\infty} \ \ (\in \ell_2^+(N_1)),$$

$$Yh = \sum_{k=1}^{\infty} T_2^{k-1} Y_k h = \{Y_k h\}_1^{\infty} \quad (\in \ell_2^+(N_2)) \quad (h \in N_1).$$

Если $(\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$ – матрица, отвечающая оператору $\tilde{\Gamma}$, то соотношения (3.1) эквивалентны системе равенств (сходимость понимается в сильном смысле):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1} X_k = \rho Y_j, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1}^* Y_k = \rho X_j \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

а соотношения (3.2) дополнительно дают систему равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1} X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{j+k-1}^* Y_k = 0 \quad (j = 0, -1, -2, \ldots). \tag{3.3}$$

Из определений оператора X и последовательности $\{X_k\}_1^{\infty}$ следует, что $X_1 = E_1$. Система равенств (3.3) дает возможность по матрице $(\gamma_{j+k-1})_1^{\infty}$, отвечающей оператору Γ, и по последовательности $\{X_k\}_2^{\infty}$ найти все известные блоки γ_k $(k = 0, -1, -2, \ldots)$ матрицы $(\gamma_{j+k-1})_1^{\infty}$. Действительно, из (3.3) последовательно получаем: при $j = 0$

$$\gamma_0 = -\sum_{k=2}^{\infty} \gamma_{k-1} X_k = -\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k X_{k+1},$$

при $j = -1$

$$\gamma_{-1} = -\sum_{k=2} \gamma_{k-2} X_k = -\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k X_{k+2}$$

и т.д.

Для операторов $X(\in [N_1, \ell_2^+(N_1)])$ и $Y(\in [N_1, \ell_2^+(N_2)])$, удовлетворяющих при $\rho \neq 0$ соотношениям (3.1), справедливы равенства

$$X^* T_1^k X = Y^* T_2^{*\,k} Y \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.4}$$

Действительно, при $k \geq 0$

$$Y^* T_2^{*\,k} Y = \rho^{-1} Y^* T_2^{*\,k} \Gamma X = \rho^{-1} Y^* \Gamma T_1^k X = X^* T_1^k X.$$

Полученные в этом пункте соотношения принимают особенно прозрачный вид в теоретико-функциональной интерпретации.

Рассмотрим следующие изоморфизмы пространств $\ell_2(N_1)$ и $\ell_2(N_2)$ на пространства $L_2(N_1)$ и $L_2(N_2)$ соответственно:

$$\xi_+(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_k \zeta^{k-1}, \quad \text{если} \quad \{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell_2(N_1)$$

и

$$\eta_-(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \eta_k \zeta^{-k}, \quad \text{если} \quad \{\eta_k\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell_2(N_2).$$

Равенства здесь понимаются в смысле сходимости в среднем. При этих изоморфизмах подпространства $\ell_2^+(N_1)$ и $\ell_2^+(N_2)$ перейдут соответственно в подпространства Харди $H_2(N_1)$ и $H_2^-(N_2) = L_2(N_2) \ominus H_2(N_2)$. Ортопроекторы на эти подпространства обозначим через π_+ и π_-. Если $\tilde{\Gamma}(\in H(N_1, N_2))$ - произвольный полный ганкелев оператор и ему отвечает матрица $(\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$, то при рассматриваемых изоморфизмах он перейдет в оператор "умножения" на оператор-функцию $F(\zeta)$ со значениями из $[N_1, N_2]$:

$$F(\zeta)h = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_j \zeta^{-j} h, \quad h \in N_1,$$

для

$$\xi(\zeta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_k \zeta^{k-1} \in L_2(N_1)$$

будем иметь

$$F(\zeta)\zeta(\xi) = \sum_{-\infty}^{\infty} \eta_j \zeta^{-j} \in L_2(N_2),$$

где

$$\eta_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{j+k-1} \xi_k \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$

причем

$$\| \tilde{\Gamma} \| = \| F \|_{\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta \in C} \| F(\zeta) \| .$$

Для определенных ранее операторов X и Y определим соответствующие им оператор-функции $X_+(\zeta)$ и $Y_-(\zeta)$:

$$X_+(\zeta)h = [Xh]_+(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k\zeta^{k-1}h,$$

$$Y_-(\zeta)h = [Yh]_-(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k\zeta^{-k}h, \quad h \in N_1.$$

Тогда соотношения (3.1) и (3.2) можно переписать в виде

$$(\pi_- FX_+)(\zeta) = \rho Y_-(\zeta), \quad (\pi_+ F^* Y_-)(\zeta) = \rho X_+(\zeta), \tag{3.5}$$

$$F(\zeta)X_+(\zeta) = \rho Y_-(\zeta), \quad F^*(\zeta)Y_-(\zeta) = \rho X_+(\zeta). \tag{3.6}$$

Система равенств (3.4) означает, что равны все коэффициенты Фурье у функций

$$(X_+(\zeta)h', X_+(\zeta)h'') \quad \text{и} \quad Y_-(\zeta)h', Y_-(\zeta)h'' \quad (h', h'' \in N_1),$$

т.е. эти функции почти всюду совпадают. В этом (слабом) смысле имеет место равенство

$$X_+^*(\zeta), X_+(\zeta) = Y_-^*(\zeta), Y_-(\zeta). \tag{3.7}$$

Функциональные рассмотрения упрощаются и приводят к интересным результатам, если предположить конечномерность пространств N_1 и N_2, т.е. что $n_k = \dim N_k < \infty$ $(k = 1, 2)$. Тогда из сходимости рядов Фурье в среднем квадратичном для оператор-функций со значениями из $[N_j, N_k]$ $(j, k = 1, 2)$ в сильном смысле следует их равномерная сходимость в среднем квадратичном. Так, например, для введенных в предыдущем параграфе оператор-функций $X_+(\zeta)$ и $Y_-(\zeta)$ будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \int_C \| X_+(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} X_k\xi^{k-1} \|^2 \, |d\zeta| = 0,$$

$$\int_C \| X_+(\zeta) \|^2 |d\zeta| < \infty;$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_C \| Y_-(\zeta) - \sum_{k=1}^{n} Y_k \zeta^{-k} \|^2 \, |d\zeta| = 0,$$

$$\int_C \| Y_-(\zeta) \|^2 |d\zeta| < \infty.$$

Для оператор-функции $X_+(\zeta)$ ее детерминант $\det X_+(\zeta)$ есть функция класса Харди H_{2/n_1}. Так как $\det X_1 (= 1) \neq 0$, то $\det X_+(\zeta) \neq \neq 0$ почти всюду на единичной окружности. Поэтому равенство (3.6) можно переписать в виде

$$F(\zeta) = \rho Y_-(\zeta) X_+^{-1}(\zeta). \tag{3.8}$$

Соотношения (3.8) и (3.7) показывают, что оператор-функция $F(\zeta)$ почти при всех ζ изометрически отображает все N_1 в N_2. Можно показать, что оператор-функция $X_+(\zeta)$ является внешней, т.е.

$$(0 =) \ln \det X_1 = \ln \det X_+(0) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_C \ln |\det X_+(\zeta)| |d\zeta|.$$

Внешней также является оператор-функция $\zeta^{-1} Y_-(\zeta^{-1})$ в смысле общего определения, которое, например, имеется в [16].

3. Пусть теперь $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$, $\rho > \| \Gamma \|$ и $\Gamma^{(1)}$ – произвольное каноническое одноступенчатое $(\Gamma; \rho)$ продолжение, определяемое изометрическим параметром E ($E^* E = E_1$) по формулам (1.1), (1.2). На основании теоремы 2.1 для $\Gamma^{(1)} (\in H^+(N_1, N_2))$ применимы построения п.2 и роль операторов X и Y будут играть соответственно операторы $P + \overset{*}{Q} E$ и $Q + \overset{*}{P} E$ (нормировка $X_1 = E_1$ в этих рассмотрениях несущественна, важно лишь, чтобы оператор X_1 был ограниченно обратим). Таким образом, если $\tilde{\Gamma}^{(1)}$ – (единственное) полное $\Gamma^{(1)}$-минипродолжение, то оно определяется из соотношения

$$\tilde{\Gamma}^{(1)} (P + \overset{*}{Q} E) = \rho (Q + \overset{*}{P} E),$$

$$\tilde{\Gamma}^{(1)*} (Q + \overset{*}{P} E) = \rho (P + \overset{*}{Q} E).$$

Так как $\Gamma^{(1)}T_1 = T_2^*\Gamma^{(1)} = \Gamma$, то $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^{(1)}U_1 = U_2^*\tilde{\Gamma}^{(1)}$ – полное $(\Gamma;\rho)$-продолжение. Для него имеем

$$\tilde{\Gamma}(P + \overset{*}{Q}\,E) = \rho U_2(Q + \overset{*}{P}\,E),$$

$$\tilde{\Gamma}^{+}U_2(Q + \overset{*}{P}\,E) = \rho(P + \overset{*}{Q}\,E). \tag{3.9}$$

Определим оператор-функции $P_\pm(\zeta)$ и $Q_\pm(\zeta)$ по формулам

$$P_+(\zeta)h = [Ph]_+(\zeta), \quad Q_+(\zeta)h = [\overset{*}{Q}h]_+(\zeta) \quad (h \in N_1),$$

$$P_-(\zeta)g = [\overset{*}{P}g]_+(\bar{\zeta}), \quad Q_-(\zeta)g = [Qg]_+(\bar{\zeta}) \quad (g \in N_2).$$

Тогда, если полному $(\Gamma;\rho)$-продолжению $\tilde{\Gamma}$ отвечает матрица $(\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$, то для оператор-функции $F(\zeta)$, определенной по формуле (3.8), соотношения (3.9) перепишутся в виде

$$F(\zeta)[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E] = \rho[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E],$$

$$F^*(\zeta)[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E] = \rho[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]. \tag{3.10}$$

Таким образом, блоки γ_k $(k = 0, \pm1, \pm2, ...)$ матрицы $(\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$, отвечающей полному $(\Gamma;\rho)$-продолжению $\tilde{\Gamma}$ – суть коэффициенты Фурье оператор-функции $F(\zeta)$, и неизвестные блоки γ_k $(k = 0, -1, -2, ...)$, однозначно определяются по известным блокам и оператор-функциям $[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]$ и $[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E]$ из функциональных соотношений (3.10). В этом смысле

$$F(\zeta) = \rho[Q_-(\zeta) + P_-(\zeta)E][P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]^{-1}. \tag{3.11}$$

Получаемое таким образом полное $(\Gamma;\rho)$-продолжение будем называть каноническим.

В случае, когда $n_k (= \dim N_k, k = 1, 2) < \infty$, формула (3.11) понимается в обычном смысле, т.е. как равенство, имеющее место почти всюду при $|\zeta| = 1$.

§ 4. Основные тождества

Установим ряд тождеств для четверки операторов $P, \overset{*}{P}, \overset{*}{Q}, Q$, играющих в дальнейшем фундаментальную роль. Напомним, что по указанной четверке операторов определяется четверка оператор-функций $P_+(\zeta)$, $P_-(\zeta)$,$Q_+(\zeta)$,$Q_-(\zeta)$ по формулам

$$P_+(\zeta)h = [Ph]_+(\zeta), \quad Q_-(\zeta)h = [Qh]_+(\bar{\zeta}) \quad (h \in N_1),$$

$$P_-(\zeta)g = [\overset{*}{P} g]_+(\bar{\zeta}), \quad Q_+(\zeta)g = [\overset{*}{Q} g]_+(\zeta) \quad (g \in N_2), \tag{4.1}$$

где для вектора $\xi = \{\xi_k\}_1^\infty \in \ell_2^+(N)$ через $\xi_+(\zeta)$ обозначена вектор-функция $\xi_+(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \zeta^{k-1}$ класса Харди $H_2(N)$. Произведение $P_+^*(\zeta)P_+(\zeta)$, которое будет встречаться ниже, можно понимать в слабом смысле

$$(P_+^*(\zeta)P_+(\zeta)h', h'') \overset{\mathrm{def}}{=} (P_+(\zeta)h', P_+(\zeta)h'') \quad (h', h'' \in N_1).$$

Правая часть определена почти при всех ζ , так как под знаком скалярного произведения стоят вектор-функции из класса Харди $H_2(N_1)$. Аналогично понимаются такого рода произведения для любой пары оператор-функций из рассматриваемой четверки.

Теорема 4.1. *Для операторов $P, \overset{*}{P}, \overset{*}{Q}, Q$, построенных по $\Gamma(\in H^+(N_1, N_2))$ и числу $\rho(> \| \Gamma \|)$, справедливы тождества*

$$P_+^*(\zeta)P_+(\zeta) - Q_-^*(\zeta)Q_-(\zeta) = E_1,$$

$$P_-^*(\zeta)P_-(\zeta) - Q_+^*(\zeta)Q_+(\zeta) = E_2 \quad \text{(почти всюду)}, \tag{4.2}$$

$$P_-^*(\zeta)Q_-(\zeta) - Q_+^*(\zeta)P_+(\zeta) = 0.$$

Доказательство. Покажем, что имеют место следующие соотношения:

$$P^* T_1^k P - Q^* T_2^{*\ k} Q = \delta_{0k} E_1,$$

$$\overset{*}{P}{}^* T_2^k \overset{*}{P} - \overset{*}{Q}{}^* T_1^{*\ k} \overset{*}{Q} = \delta_{0k} E_2,$$

$$\overset{*}{P}{}^* T_2^k Q - \overset{*}{Q}{}^* T_1^{*\ k} P,$$

$$\overset{*}{P}{}^{*} T_2^{*k} Q - \overset{*}{Q}{}^{*} T_1^k P, \tag{4.3}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, а $\delta_{00} = 1, \delta_{0k} = 0$ при $k > 0$.

Заметим для этого, что

$$T_2 \Gamma P = \rho Q, \quad \Gamma^* T_2^* Q = \rho P - G.$$

Из второго равенства получаем, что $P^* = \rho^{-1}(G + Q^* T_2 \Gamma)$. Поэтому

$$P^* T_1^k P = \rho^{-1}(G P_1 + Q^* T_2 \Gamma) T_1^k P =$$

$$= \rho^{-1} Q^* T_2^{*k} T_2 \Gamma P = Q^* T_2^{*k} Q$$

при $k > 0$ и

$$P^* P - Q^* Q = P^* P - \rho^{-2} P^* \Gamma^* \Gamma P =$$

$$= \rho^{-2} P^* (\rho^2 I_1 - \Gamma^* \Gamma) P = G P_1 R_{\rho^2} G = E_1.$$

Таким образом, доказана первая система равенств в (4.3). Аналогично из соотношений

$$T_1 \Gamma^* \overset{*}{P} = \rho \overset{*}{Q}, \quad \Gamma T_1^* \overset{*}{Q} = \rho \overset{*}{P} - \overset{*}{G}$$

выводится вторая система равенств в (4.3).

Имеем, далее, при $k \geq 0$

$$\overset{*}{P}{}^{*} T_2^k Q = \rho^{-1}(\overset{*}{G} P_2 + \overset{*}{Q}{}^{*} T_1 \Gamma^*) T_2^k Q =$$

$$= \rho^{-1} \overset{*}{Q}{}^{*} T_1^{*k} \Gamma^* \Gamma R_{\rho^2} G =$$

$$= \rho \overset{*}{Q}{}^{*} T_1^{*k} R_{\rho^2} G = \overset{*}{Q}{}^{*} T_1^{*k} P$$

и при $k > 0$

$$\overset{*}{Q}{}^{*} T_1^k P = \rho^{-1} \overset{*}{P}{}^{*} \Gamma T_1^* T_1^k P =$$

$$= \rho^{-1} \overset{*}{P}{}^{*} T_2^{*k} T_2 \Gamma P = \overset{*}{P}{}^{*} T_2^{*k} Q.$$

Тем самым доказана последняя система равенств в (4.3).

Из первой системы равенств в (4.3) получаем для $h', h'' \in N_1$

$$(T_1^k Ph', Ph'') - (Qh', T_2^k Qh'') = \delta_{0k}(h', h''),$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \zeta^k(P_+(\zeta)h', P_+(\zeta)h'')|d\zeta| -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \zeta^k(Q_-(\zeta)h', Q_-(\zeta)h'')|d\zeta| = \delta_{0k}(h', h'')$$

при $k \geq 0$. В силу произвольности $h', h''(\in N_1)$ последняя система равенств имеет место при всех целых k. Тем самым доказано первое тождество в (4.2). Аналогично из (4.3) получаются остальные два тождества в (4.2).

Теорема доказана.

§5. Аналитические свойства функций $P_\pm(\zeta)$ и $Q_\pm(\zeta)$ в конечномерном случае ($\dim N_k < \infty, k = 1, 2$)

1. В этом и следующем параграфах мы будем предполагать, что числа $n_1 = \dim N_1 \leq n_2 = \dim N_2 < \infty$.

При этом введенные ранее оператор-функции $P_+(\zeta)$ и $P_-(\zeta)$ можно рассматривать как квадратные матрицы-функции порядков n_1 и n_2, а $Q_+(\zeta)$ и $Q_-(\zeta)$ – соответственно как прямоугольные $(n_1 \times n_2)$ и $n_2 \times n_1)$ – матрицы-функции.

Обозначим через $U(\zeta)$ квадратную матрицу-функцию порядка $n_1 + n_2$, имеющую вид

$$U(\zeta) = \begin{pmatrix} P_+(\zeta) & Q_+(\zeta) \\ Q_-(\zeta) & P_-(\zeta) \end{pmatrix},$$

а через J – матрицу

$$J = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что тождества (4.2) выражают тот факт, что матрица-функция $U(\zeta)$ удовлетворяет соотношению

$$U^*(\zeta)JU(\zeta) = J \quad (\text{почти всюду}),$$

т.е. является J-унитарной (п.в.). Так как $n_1 + n_2 < \infty$, то J-унитарной будет и матрица-функция $U^*(\zeta)$, т.е. $U(\zeta)JU^*(\zeta) = J$, а поэтому наряду с (4.2) имеют место тождества:

$$\begin{gathered} P_+(\zeta)P_+^*(\zeta) - Q_+(\zeta)Q_+^*(\zeta) = E_1, \\ P_-(\zeta)P_-^*(\zeta) - Q_-(\zeta)Q_-^*(\zeta) = E_2 \quad (\text{почти всюду}), \\ P_+(\zeta)Q_-^*(\zeta) - Q_+(\zeta)P_-^*(\zeta) = 0. \end{gathered} \tag{5.1}$$

2. Из тождеств (4.2) (или (5.1)) вытекает, что матрицы $P_\pm(\zeta)$ обратимы и что $\| P_\pm^{-1}(\zeta) \| \leq 1$ (п.в.). Введем в рассмотрение функцию $\chi(\zeta)$, полагая

$$\chi(\zeta) = P_+^{-1}(\zeta)Q_+(\zeta) \quad (= Q_-^*(\zeta)P_-^{*^{-1}}(\zeta)). \tag{5.2}$$

На основании (5.1) имеем

$$\| \chi(\zeta) \|^2 = \| \chi(\zeta)\chi^*(\zeta) \| = \| E_1 - P_+^{*-1}(\zeta)P_+^{*-1}(\zeta) \| =$$

$$= 1 - \| P_+(\zeta) \|^2 < 1 \quad (\text{п.в.}).$$

Так как все элементы матриц $P_\pm(\zeta)$ являются функциями из пространства L_2, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \| P_\pm(\zeta) \|^2 |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi}\int_C \mathrm{Sp}(P_\pm^*(\zeta)P_\pm(\zeta))|d\zeta| < \infty.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_C (1 - \| \chi(\zeta) \|)^{-1}|d\zeta| \leq \frac{1}{\pi}\int_C (1 - \| \chi(\zeta) \|)^2 |d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_C \| P_+(\zeta) \|^2 |d\zeta| < \infty,$$

так что
$$(1-\|\chi(\zeta)\|)^{-1}\in L_1. \tag{5.3}$$

Как было показано в конце § 3, для каждой изометрической матрицы E $(E^*E=E_1)$ элементы матрицы-функции $F_E(\zeta)$
$$F_E(\zeta)=\rho[Q_-(\zeta)+P_-(\zeta)E][P_+(\zeta)+Q_+(\zeta)E]^{-1} \tag{5.4}$$
суть ограниченные функции, а ее коэффициенты Фурье $\{\tilde\gamma_j(E)\}_{-\infty}^{\infty}$ являются блоками некоторого полного канонического $(\Gamma;\rho)$-продолжения $\tilde\Gamma$, так что $\tilde\gamma_j(E)=\gamma_j$ при $j>0$.

В силу тождеств (4.2) определение (5.4) эквивалентно следующему:
$$F_E(\zeta)=\rho[P_-^*(\zeta)+EQ_-^*(\zeta)]^{-1}[Q_+^*(\zeta)+EP_+^*(\zeta)]. \tag{5.5}$$

Из этих же тождеств следует, что для любых сжимающих E_1 и E_2
$$F_{E_2}(\zeta)-F_{E_1}(\zeta)=$$
$$=\rho[P_-^*(\zeta)+E_2Q_-^*(\zeta)]^{-1}(E_2-E_1)[Q_+(\zeta)E_1+P_+(\zeta)]^{-1}, \tag{5.6}$$
при этом для F_{E_2} используется формула (5.5), а для F_{E_1} - формула (5.4).

Будем говорить, что матрица-функция принадлежит классу Харди H_p $(0<p\le\infty)$, если все ее элементы являются функциями из этого класса. Согласно сказанному выше, "отрицательные" коэффициенты Фурье у матриц-функций F_{E_1} и F_{E_2} для изометрических E_1,E_2 совпадают, и поэтому разность этих матриц-функций принадлежит H_∞. По построению матрицы-функции $[P_+(\zeta)+Q_+(\zeta)E_1]$ и $[P_-^*(\zeta)+E_2Q_-^*(\zeta)]$ принадлежат классу H_2. На основании (5.6) отсюда следует, что $(E_2-E_1)[P_+(\zeta)+Q_+(\zeta)E_1]^{-1}$ и $[P_-^*(\zeta)+E_2Q_-^*(\zeta)]^{-1}(E_2-E_1)$ также входят в H_2.

Заметим теперь, что при фиксированной изометрической матрице E_1 изометрическую матрицу E_2 можно подобрать так, чтобы произведение $(E_2^*-E_1^*)(E_2-E_1)$ было невырожденной матрицей (например, положить $E_2=-E_1$), а при фиксированном значении E_2 надлежащим выбором матрицы E_1 можно добиться того, чтобы наперед заданный вектор $h\in N_2$ входил в область значений отображения E_2-E_1. В силу этих соображений классу

H_2 будут принадлежать матрицы-функции $[P_+(\zeta)+Q_+(\zeta)E_1]^{-1}$ и $[P_-^*(\zeta)+E_2Q_-^*(\zeta)]^{-1}$.

3. Образуем с помощью произвольной сжимающей $(n_2 \times n_1)$-матрицы E функцию класса H_1

$$\Phi_E(z) = [P_+(z) + Q_+(z)E]^{-1}[P_+(z) - Q_+(z)E] \quad (|z| < 1).$$

Для ее граничных значений согласно (5.2) имеем

$$\Phi_E(\zeta) = [E_1 + \chi(\zeta)E]^{-1}[E_1 - \chi(\zeta)E],$$

и так как $\| \chi(\zeta) \| < 1$ (п.в.), то

$$\Phi_E^*(\zeta) + \Phi_E(\zeta) > 0 \quad (\text{п.в.}).$$

Используя представление матрицы-функции $\Phi_E(z)$ в точках круга $|z| < 1$ в виде интеграла Пуассона от ее граничных значений, непосредственно убеждаемся в том, что выполняется неравенство $\Phi_E^*(z) + \Phi_E(z) > 0$. Поэтому в круге $|z| < 1$ матрица-функция $\Phi_E(z)$ представима в виде

$$\Phi_E(z) = [E_1 + \tilde{\chi}(z)]^{-1}[E_1 - \tilde{\chi}(z)],$$

где $\tilde{\chi}(z)$ – голоморфная матрица-функция такая, что $\| \tilde{\chi}(z) \| < 1$. Граничные значения $\tilde{\chi}(\zeta)$ матрицы-функции $\tilde{\chi}(z)$ почти в каждой точке ζ должны совпадать с $\chi(\zeta)E$. Следовательно, $\chi(\zeta)E$ – матрица-функция класса H_∞.

Так как это утверждение справедливо при произвольном выборе изометрического отображения E , то $\chi(\zeta)$ также принадлежит классу H_∞.

Наконец, умножив $[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E]^{-1}$ слева на $[E_1 + \chi(\zeta)E]$, приходим к заключению, что матрица-функция $P_+^{-1}(\zeta)$ входит в класс H_2, а значит, в силу ее ограниченности, и в класс H_∞. Точно так же можно показать, что матрица-функция $(P_-^*)^{-1}(\zeta)$ входит в класс H_∞.

4. Так как $\det P_+(\zeta) \in H_{2/n_1}, [\det P_+(\zeta)]^{-1} \in H_\infty$, то

1^0. $\det P_+(\zeta)$ – внешняя функция, а значит $P_+(\zeta)$ – внешняя матрица-функция, т.е.

$$\det P_+(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\ln|\det P_+(\zeta)||d\zeta|\right\} \qquad (5.7)$$

(здесь учтено, что $\det P_+(0) > 0$). Точно так же

$$\det(P_-^*)(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\ln|\det P_-^*(\zeta)||d\zeta|\right\}. \tag{5.8}$$

В силу второго тождества в (4.3) и первого тождества в (5.1)

$$|\det P_+(\zeta)|^2 = \det(E_1 - Q_+(\zeta)Q_+^*(\zeta)) =$$

$$= \det(E_2 - Q_+^*(\zeta)Q_+(\zeta)) = |\det P_-(\zeta)|^2.$$

Из равенств (5.7) и (5.8) поэтому следует

$$2^0.\ \det P_+(z) = \det(P_-^*)(z) \quad (|z| < 1). \tag{5.9}$$

Условие (5.3), как известно (см., например, [17]), является достаточным для разрешимости левой факторизационной задачи в классе H_∞ для матрицы-функции $E_1 - \chi(\zeta)\chi^*(\zeta)$. В классе внешних матриц-функций, принимающих положительные значения в точке $z = 0$, решение этой задачи единственно. Так как

$$E_1 - \chi(\zeta)\chi^*(\zeta) = P_+^{-1}(\zeta)P_+^{-1*}(\zeta), \tag{5.10}$$

то $P_+^{-1}(\zeta)$, а следовательно, $P_+(\zeta)$ и $Q_+(\zeta)(= P_+(\zeta)\chi(\zeta))$ определяются однозначно по $\chi(\zeta)$. Аналогично $(P_-^*)^{-1}(\zeta)$ является единственным решением правой факторизационной задачи

$$E_2 - \chi^*(\zeta)\chi(\zeta) = P_-^{-1}(\zeta)(P_-^*)^{-1}(\zeta) \tag{5.11}$$

в классе внешних матриц-функций, принимающих положительные значения в точке $z = 0$ и, следовательно,

$$P_-(\zeta) \text{ и } Q_-(\zeta)\ (= P_-(\zeta)\chi^*(\zeta))$$

однозначно определяются по $\chi(\zeta)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 5.1. *Пусть* $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$, $\rho > \|\Gamma\|$ *и* n_k $(= \dim N_k,\ k = 1,2) < \infty$. *Тогда матрица-функция* $\chi(z)$, *определяемая по формуле (5.2), является голоморфной в круге* $|z| < 1$ *и обладает свойствами:*

$$1)\ \chi(0) = 0, \quad 2)\ \| \chi(z) \| < 1 \quad (|z| < 1), 3)\ (1 - \| \chi(z) \|)^{-1} \in L_1. \tag{5.12}$$

По матрице-функции $\chi(\zeta)$ *однозначно восстанавливаются матрицы-функции* $P_\pm(\zeta)$ *и* $Q_\pm(\zeta)$.

5. Поскольку левый и правый полурадиусы $R_л(\Gamma;\rho)$ и $R_п(\Gamma;\rho)$ операторного квази-шара (1.2) выражаются через $P_+(0)$ и $(P_-^*)(0)$: $R_л(\Gamma;\rho) = \rho^{1/2}P_+(0), R_п(\Gamma;\rho) = \rho^{1/2}(P_-^*)(0)$, то из равенства (5.9) вытекает

$$3^0.\ \det R_л(\Gamma;\rho) = \det R_п(\Gamma;\rho). \tag{5.13}$$

Устремляя $\rho \downarrow \| \Gamma \|$, получаем предложение:

Теорема 5.2. *Пусть* $\dim N_k < \infty$ $(k = 1,2)$, *тогда для любого* $\Gamma \in H^+(N_1, N_2)$

$$\det R_л(\Gamma) = \det R_п(\Gamma)$$

и, стало быть, если один из полурадиусов $R_л(\Gamma), R_п(\Gamma)$ *не вырождается, то это же имеет место для второго.*

§6. Описание полных $(\Gamma;\rho)$-продолжений в конечномерном случае

Пусть $\tilde\Gamma = (\tilde\gamma_{j+k-1})_{-\infty}^{\infty}$ – некоторое полное $(\Gamma;\rho)$-продолжение блочно-ганкелевой матрицы $\Gamma = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ и пусть $F(\zeta;\tilde\Gamma)$ – $(n_2 \times n_1)$-матрица-функция, задаваемая с помощью ряда Фурье

$$F(\zeta;\tilde\Gamma) = \sum_{-\infty}^{\infty} \tilde\gamma_j \zeta^{-j}. \tag{6.1}$$

Выше уже указывалось, что для любого полного $(\Gamma;\rho)$-продолжения $\tilde\Gamma$ матрица-функция $F(\zeta;\tilde\Gamma)$ измерима и ограничена в том смысле, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in C} \| F(\zeta;\tilde\Gamma) \| \le \rho \quad (\rho > \| \Gamma \|). \tag{6.2}$$

Матрицы-функции $F(\zeta;\tilde{\Gamma})$, связанные с $(\Gamma;\rho)$-продолжениями $\tilde{\Gamma}$ по формуле (6.1), будем называть $(\Gamma;\rho)$-функциями. $(\Gamma;\rho)$-функции, которые соответствуют каноническим $(\Gamma;\rho)$-продолжениям, естественно называть каноническими. Подчеркнем, что согласно теоретико-функциональной интерпретации, проведенной в §3, любая $(n_2\times n_1)$-матрица-функция $F(\zeta)$, удовлетворяющая условию (6.2) и такая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_C F(\zeta)\zeta^j|d\zeta| = \gamma_j \quad (j=1,2,\dots), \tag{6.3}$$

является $(\Gamma;\rho)$-функцией. Поэтому задача об описании всех $(\Gamma;\rho)$-продолжений $\tilde{\Gamma}$ сводится к задаче об описании всех $(\Gamma;\rho)$-функций, т.е. всех $(n_2\times n_1)$-матриц-функций, подчиненных условиям (6.3) и (6.2).

Обозначим через $B(n_2\times n_1)$ множество $(n_2\times n_1)$-матриц-функций $E(\zeta)$ класса H_∞ таких, что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in C} \| E(\zeta) \| \le 1. \tag{6.4}$$

Теорема 6.1. *Формулой*

$$F_E(\zeta) = \rho[Q_-(\zeta)+P_-(\zeta)E(\zeta)][P_+(\zeta)+Q_+(\zeta)E(\zeta)]^{-1} \tag{6.5}$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством всех матриц-функций $E(\zeta)$ из $B(n_2\times n_1)$ и множеством всех $(\Gamma;\rho)$-функций.

Доказательство. Так как матрица-функция

$$U(\zeta) = \begin{pmatrix} P_+(\zeta) & Q_+(\zeta) \\ Q_-(\zeta) & P_-(\zeta) \end{pmatrix}$$

J-унитарна при почти всех ζ, то преобразование (6.5) отображает множество всех $(n_2\times n_1)$-матриц-функций, удовлетворяющих условию (6.4), на множество всех $(n_2\times n_1)$-матриц-функций, удовлетворяющих условию (6.2) †.

† Мы используем здесь тот факт, что если матрица $A=(A_{jk})_1^2$, где блоки A_{jk} размерности $n_j\times n_k$ является J-унитарной, то преобразование $E\to (A_{21}+A_{22}E)(A_{11}+A_{12}E)^{-1}$ отображает шар $E^*E\le I$ всех сжимающих $(n_2\times n_1)$-матриц взаимно-однозначно на себя.

Остается выяснить, какими дополнительными свойствами должны обладать матрицы-функции $E(\zeta)$, чтобы для соответствующих матриц-функций $F_E(\zeta)$ имели место равенства (6.3).

Пусть $E_1(\zeta)$ и $E_2(\zeta)$ – произвольные матрицы-функции из $B(n_2 \times n_1)$. Для разности матриц-функций $F_{E_2}(\zeta)$ и $F_{E_1}(\zeta)$ так же, как и в § 5, получаем

$$(G_{E_1,E_2}(\zeta) \overset{\text{def}}{=})F_{E_2}(\zeta) - F_{E_1}(\zeta) =$$

$$= \rho[P_-^*(\zeta) + E_2(\zeta)Q_-^*(\zeta)]^{-1} - [E_2(\zeta) -$$

$$-E_1(\zeta)][P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E_1(\zeta)]^{-1}. \tag{6.6}$$

Предположим сначала, что ess sup $\| E_k(\zeta) \| < 1$ $(k = 1, 2)$. Тогда из теоремы 5.1 и предложения 1^0 ,§5 будет следовать , что

$$[P_+(\zeta) + Q_+(\zeta)E_1(\zeta)]^{-1} =$$

$$= [E_1 + \chi(\zeta)E_1(\zeta)]^{-1}P_+^{-1}(\zeta) \in H_\infty.$$

Аналогично: $[(P_-^*)(\zeta) + E_2(\zeta)(Q_-^*)(\zeta)]^{-1} \in H_\infty$. Таким образом, при сделанных предположениях относительно $E_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$ матрица-функция $G_{E_1,E_2}(\zeta)$ будет принадлежать классу Харди H_∞, т.е. будут совпадать "отрицательные" коэффициенты у функций $F_{E_1}(\zeta)$ и $F_{E_2}(\zeta)$.

Положим, далее, $E_k(\zeta) = r\tilde{E}_k(\zeta)$ $(k = 1, 2)$, где $0 \le r < 1$, а $\tilde{E}_k(\zeta)$ – уже произвольные матрицы-функции из $B(n_2 \times n_1)$. Так как

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta \in C} \| G_{r\tilde{E}_1, r\tilde{E}_2}(\zeta) \| \le 2\rho$$

и для почти всех ζ

$$\lim_{r \uparrow 1} G_{r\tilde{E}_1, r\tilde{E}_2}(\zeta) = G_{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2}(\zeta),$$

то

$$\lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_C \zeta^j G_{r\tilde{E}_1, r\tilde{E}_2}(\zeta)|d\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_C \zeta^j G_{\tilde{E}_1, \tilde{E}_2}(\zeta)|d\zeta| = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому при любых $E_1(\zeta)$ и $E_2(\zeta)$ из $B(n_2 \times n_1)$ "отрицательные" коэффициенты Фурье у матриц-функций $F_{E_1}(\zeta)$ и $F_{E_2}(\zeta)$ совпадают.

Предположим теперь, что для некоторой $(n_2 \times n_1)$-матрицы-функции $E_0(\zeta)$, удовлетворяющей условию (6.4), матрица-функция $F_{E_0}(\zeta)$ имеет те же отрицательные коэффициенты Фурье, что и все матрицы-функции $F_E(\zeta)$ при $E(\zeta) \in B(n_2 \times n_1)$.

Рассмотрим соотношение (6.6) при $E_1(\zeta) = E_0(\zeta)$ и $E_2(\zeta) = = 0$. Так как матрица-функция $G_{E_0,0}(\zeta)$ по предположению принадлежит классу H_∞, то матрица-функция

$$(P_-^*)(\zeta)G_{E_0,0}(\zeta)P_+(\zeta) \; (= -E_0(\zeta)[E_1 + \chi(\zeta)E_0(\zeta)]^{-1}) \qquad (6.7)$$

принадлежит классу H_1. Поэтому классу H_1 будет принадлежать и матрица-функция

$$\Phi_{E_0}(\zeta) = [E_1 - \chi(\zeta)E_0(\zeta)][E_1 + \chi(\zeta)E_0(\zeta)]^{-1} =$$

$$= E_1 + 2\chi(\zeta)P_-^*(\zeta)G_{E_0,0}(\zeta)P_+(\zeta).$$

Используя в точности те же рассуждения, что и в п.3 § 5, выводим отсюда, что произведение $\chi(\zeta)E_0(\zeta)$ входит в H_∞, а значит, ввиду (6.7) в H_∞ входит и матрица-функция $E_0(\zeta)$.

Для завершения доказательства теоремы остается вспомнить, что еще в § 3 было показано, что формула (6.5) с постоянными изометрическими E дает описание всех канонических $(\Gamma;\rho)$-функций.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 6.1. Формулой (6.5) устанавливается взаимнооднозначное соответствие между множеством всех матриц-функций $E(\zeta)$ из $B(n_2 \times n_1)$, удовлетворяющих условию

$$E^*(\zeta)E(\zeta) = E_1,$$

и множеством всех $(\Gamma;\rho)$-функций $F_E(\zeta)$, удовлетворяющих условию

$$F_E^*(\zeta)F_E(\zeta) = \rho^2 E_1.$$

2. Из доказательства теоремы 6.1 вытекает следующее предложение.

Пусть $\chi(z)$ – произвольная голоморфная в круге $|z| < 1$ $(n_1\times \times n_2)$-матрица-функция, удовлетворяющая условиям (5.12). Определим по ней четверку матриц-функций $P_\pm(\zeta)$ и $Q_\pm(\zeta)$ следующим образом: $P_+^{-1}(\zeta)((P_-^*)^{-1}(\zeta))$ – внешняя матрица-функция, принимающая при $z = 0$ положительное значение и являющаяся решением левой (правой) факторизационной задачи (5.10) (задачи (5.11)), а $Q_+(\zeta) = P_+(\zeta)\chi(\zeta), Q_-(\zeta) = P_-(\zeta)\chi^*(\zeta)$. Если с помощью построенной четверки матриц-функций образовать по формуле (6.5) с произвольным $\rho > 0$ семейство матриц-функций F_E ($E \in B(n_2\times n_1)$), то все они будут иметь одинаковые "отрицательные" коэффициенты Фурье $\gamma_k = c_{-k}(F_E)$ $(k = 1,2,\ldots)$. Более того, для блочно-ганкелевой матрицы $\Gamma = \Gamma(\chi;\rho) = (\gamma_{j+k-1})_1^\infty$ формулой (6.5) будут описываться все $(\Gamma;\rho)$-функции. При этом, однако, может оказаться, что $\| \Gamma \| = \rho$.

Формулу (6.5) можно переписать з виде

$$F_E(\zeta) = \rho\psi_-^{-1}(\zeta)[\chi^*(\zeta) + E(\zeta)][E_1 + \chi(\zeta)E(\zeta)]^{-1}\psi_+(\zeta), \qquad (6.8)$$

где $\psi_\pm(\zeta) = P_\pm^{-1}(\zeta)$, так что $\psi_+ \in B(n_1 \times n_2)$, а $\psi_-^* \in B(n_2 \times n_1)$.

Для скалярного случая $(n_1 = n_2 = 1)$ эта формула получена авторами еще в [16] при более общих предположениях относительно функции χ . Для этого случая указано было также, когда $\| \Gamma \| < \rho$.

Список литературы

[1] *Адамян В.М., Аров Д.З., Крейн М.Г.* а) О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори–Фейера и Ф. Рисса // Функц. анализ и его прилож. - 1968. - **2**, вып. 1. - С.1–19;

б) Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори–Фейера и И. Шура // Там же. - Вып. 4. - С.1–17;

в) Об ограниченных операторах, коммутирующих с сжатием класса C_{00} единичного ранга неунитарности // Там же. - 1969. - **3**, вып. 3. - С.86–87;

г) Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги // Мат. сб. – 1971. – **85**, $\mathcal{N}$ 1. – С.33–73.

[2] *Nehari Z.* On bounded bilinear forms // Ann. Math. – 1957. – **65**, N 1. – P.153–162.

[3] *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitkreises beschränkt sind // J. reine angew. Math. – 1917. – **147**.

[4] *Sarason D.* Generalized interpolation in H^∞ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – **127**, N2. – P.180–203.

[5] *Page Lavon B.* Bounded and compact vectorial Hankel operators // Ibid. – 1970. – **150**, N2. – P.529–539.

[6] *Nevanlinna R.* Über beschränkte analytische Funktionen // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A. – 1929. – **32**, No 7

[7] *Крейн М.Г.* Об обобщенной проблеме моментов //ДАН СССР. – 1944. – **44**. – С.239–243.

[8] *Sz.Nagy B., Koranyi A.* Relations d'une probleme de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace Hilbertien // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. – 1956. – N7. – P.295–302.

[9] *Крейн М.Г.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // ДАН СССР. – 1940. – **26**. – С.17–21.

[10] *Крейн М.Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // УМЖ. – 1949. – **1:2**. – С.3–66.

[11] *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев, 1965. – Гл. VIII. – С.1–798.

[12] *Крейн М.Г., Мелик-Адамян Ф.Э.* Некоторые приложения теоремы о факторизации унитарной матрицы // Функц. анализ и его прилож. – 1970. – **4**, вып. 4. – С.73–75.

[13] *Потапов В.П.* Общие теоремы теории аналитических J-нерастягивающих матриц-функций: Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций. – Харьков, сент., 1971.

[14] *Ковалишина И.В.* Аналитические и J-нерастягивающие матрицы-функции и классические задачи анализа // Там же.

[15] *Шмульян Ю.Л.* Операторные шары // Функциональный анализ, теория функций и их приложения (Харьков). – 1968. – Вып. 6. - С.68–81.

[16] *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970.

[17] *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1963. - С.1–284.

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ ЯДЕР НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

(Доклады Академии наук СССР. – 1946. – Том LIII, № 1)

Метод, о котором будет идти речь, покоится на одном общем положении теории эрмитовых операторов в гильбертовом пространстве, полученном нами путем обобщения одной простой, но весьма замечательной теоремы М. Лившица ([1], теорема 2, а также [2], теорема 1).

Для формулировки этого положения нам потребуется ввести ряд понятий и обозначений.

1. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторое пространство, удовлетворяющее всем аксиомам гильбертова пространства, кроме, может быть, аксиомы полноты.

Под линейным функционалом в $\mathfrak{H}$ мы будем понимать всякий аддитивный однородный (но не обязательно непрерывный) функционал $\Phi(f)$, определенный на всем $\mathfrak{H}$.

Линейный оператор A в $\mathfrak{H}$ будем называть эрмитовым, если его область определения $\vartheta(A)$ плотна в $\mathfrak{H}$ и $(Ag, f) = (g, Af)$ для любых двух элементов $g, f \in \vartheta(A)$.

Через V_p $(p = 1, 2, ...)$ обозначим класс всех эрмитовых матриц-функций $T(\lambda) = \| \tau_{jk}(\lambda) \|_1^p$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ таких, что для любых комплексных векторов $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p$ выражение

$$\sum_{j,k=1}^{p} \tau_{jk}(\lambda)\bar{\xi}_j\xi_k$$

есть неубывающая функция от λ.

Теорема 1. *Пусть A - некоторый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, для которого существуют линейные функционалы $\Phi_j(f;\lambda)$ ($j = 1,2,...,p$), аналитически зависящие (при любом фиксированном $f \in \mathfrak{H}$) от вещественного параметра $\lambda \in (-\infty,\infty)$ и обладающие следующим свойством: каковы бы ни были $f_0 \in \mathfrak{H}$ и $\lambda_0 \in (-\infty,\infty)$, уравнение*

$$Ag - \lambda_0 g = f_0$$

имеет решение $g \in \vartheta(A)$ тогда и только тогда, если

$$\Phi_j(f_0;\lambda_0) = 0 \quad (j = 1,2,...,p).$$

При этих условиях существует матрица-функция $T(\lambda) \in V_p$ такая, что для любых двух элементов $g,f \in \mathfrak{H}$:

$$(g,f) = \sum_{j,k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(g;\lambda)\overline{\Phi_k(f;\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda). \tag{1}$$

Если, кроме того, оператор A положителен ($(Af,f) \geq 0$ при $f \in \vartheta(A)$), то среди матриц-функций $T(\lambda) \in V_p$, дающих представление (1), найдется, по крайней мере, одна матрица-функция, тождественно аннулирующаяся при $\lambda \in (-\infty,0)$.

2. Приведем примеры на применение теоремы 1.

Пусть $I = (a,b)$ - конечный или бесконечный интервал ($-\infty \leq a < b \leq \infty$), при этом он может быть открытым или замкнутым у каждого из концов a, b, если этот конец конечен; бесконечные концы мы всегда не включаем в интервал I.

Пусть $K(x,y)$ $(x,y \in I)$ - эрмитово положительно-определенное ядро.

Обозначим через $\mathfrak{H}(K)$ линейное множество всех функций $f(x)$ $(x \in I)$, имеющих ограниченную вариацию и принимающих постоянное значение в какой-либо окрестности всякого открытого конца интервала I (если таковой имеется), при этом скалярное произведение двух функций $g,f \in \mathfrak{H}(K)$ определим равенством†

$$(g, f) = \int_I \int_I K(x, y) dg(x) \overline{df(y)}.$$

Если теперь нам удастся определить в $\mathfrak{H}$ (K) эрмитов оператор A , так, чтобы ему отвечали, в смысле теоремы 1, функционалы $\Phi_j(f; \lambda)$ $(j = 1, 2, ..., p)$, имеющие вид

$$\Phi_j(f; \lambda) = \int_I \varphi_j(x; \lambda) df(x),$$

где $\varphi_j(x; \lambda)$ $(j = 1, 2, ..., p)$ – некоторые непрерывные функции от $x \in I$, то, применяя теорему 1 к функциям $g = e_s, f = e_t$ $(s, t \in I)$ [$e_\xi(x)$ $(\xi \in I)$ обозначает функцию, равную 0 при $x \le \xi$ и 1 при $x > \xi$], найдем, что

$$K(s, t) = \sum_{j,k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(s; \lambda) \overline{\varphi_k(t; \lambda)} d\tau_{jk}(\lambda). \qquad (2)$$

В частности, условия относительно существования и вида функционалов Φ_j $(j = 1, 2, ..., p)$ будут выполнены, если оператор A порождается некоторым дифференциальным оператором $L(h) = \sum_0^n a_k h^{(k)}$ (где, например, $a_n = 1$, а $a_k = a_k(x)$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ суть комплекснозначные непрерывные функции от $x \in I$) и некоторой системой линейных однородных граничных условий в концах, принадлежащих I (при этом независимых условий должно быть не меньше $n + 1$, если оба конца a, b принадлежат I, и не меньше одного, если только один конец принадлежит I).

В данном случае термин "порождается" имеет тот смысл, что множество $\vartheta(A)$ определяется как совокупность элементов $g \in \mathfrak{H}$ (K), обладающих следующими свойствами:

1^0 функция $g(x)$ абсолютно непрерывна и имеет $n - 1$ абсолютно непрерывных производных $g^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, ..., n - 1)$;

† Всякие две функции $f_1, f_2 \in \mathfrak{H}$ (K), для которых $(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = 0$, будут считаться тождественными в $\mathfrak{H}$ (K); в частности, в $\mathfrak{H}$ (K) не будут различаться функции, отличающиеся друг от друга на константу.

2^0 функция $h(x) = g'(x)$ удовлетворяет заданным граничным условиям;

3^0 функция

$$f(x) = h^{(n-1)}(x) + \int\limits^{x} \sum_{0}^{n-1} p_k(x) h^{(k)}(x) dx$$

принадлежит $\mathfrak{H}\ (K)$, при этом сам оператор A определяется равенством $Ag = f$.

Для такого оператора A функциями $\varphi_j(x;\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., p)$ будут служить линейно независимые решения дифференциального (точнее, квази-дифференциального) уравнения $L'(\varphi) - \lambda\varphi = 0$, удовлетворяющие системе граничных условий, союзной с заданной системой (определение союзной системы граничных условий см., например [3], гл. IX), при этом L'– союзный с L оператор, т.е.

$$L'(h) = a_0 h - \frac{d}{dx}\Big[a_1 h - \frac{d}{dx}\Big[a_2 h - ... - \frac{d}{dx}\Big[a_{n-1} h - \frac{d}{dx}\Big]...\Big]\Big].$$

Разумеется, для получения представления (2) ядра $K(x, y)$ через получаемые так функции $\varphi_j(x;\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., p)$ необходимо еще, чтобы оператор L и выбранные граничые условия были так связаны с ядром $K(x, y)$, чтобы порождаемый ими оператор A в $\mathfrak{H}\ (K)$ был эрмитов.

Приведем ряд примеров, когда все перечисленные условия существования представления (2) выполняются.

a) Пусть $I = (0, l)$ $(0 \in I, l \le \infty)$, а эрмитово положительно-определенное ядро $K(x, y)$ имеет вид $K(x, y) = F(x - y)$ $(x, y \in \in I)$. В этом случае можно положить $L(h) = -ih'$ и ввести одно граничное условие $h(0) = 0$, если $l \overline{\in} I$, и два условия $h(0) = h(l) = = 0$, если $l \in I$.

Тогда $p = 1, \varphi_1(x;\lambda) = \exp(i\lambda x)$, и представление (2) даст (при $l = \infty$) известную теорему Бохнера [4], а также ее обобщение [5] на случай $l < \infty$.

b) Пусть $K(x, y) = F(x + y)$ $(x, y \in I = (a, b))$. В этом случае полагаем $L(h) = h'$ и для каждого конца $c = a, b$, принадлежащего I, вводим условие $h(c) = 0$. Тогда $p = 1$, а $\varphi_1(x;\lambda) = \exp(\lambda x)$, и (2) дает нам теорему С.Н. Бернштейна [6] об абсолютно конвексных функциях.

c) Пусть теперь $I = (0, l)$ $(0 \in I)$, а положительно-определенное ядро $K(x, y)$ имеет вид $2K(x, y) = F(x + y) + F(x - y)$ $(x, y \in \in I)$. В этом случае мы можем положить $L(h) = h''$ и ввести одно граничное условие $h'(0) = 0$, если $l \overline{\in} I$, и граничные условия $h'(0) = h(l) = h'(l) = 0$, если $l \in I$.

Снова имеем $p = 1$, а $\varphi_1(x; \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x$. Следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{2}(F(x + y) + F(x - y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x \cos\sqrt{\lambda}y d\tau(\lambda) \quad (x, y \in I),$$

где $\tau(\lambda) \in V_1$. Рассматривая это равенство при $y = 0$, придем к теореме:

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывная функция* $F(x)$ $(x \in \in (0, 2l))$ *допускала представление*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}x d\tau(\lambda) \quad (x \in (0, 2l)),$$

где $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *- некоторая неубывающая функция, необходимо и достаточно, чтобы ядро* $F(x+y)+F(|x-y|)$ $(x, y \in \in (0, l))$ *было положительно-определенным.*

Аналогично устанавливается

Теорема 3. *Для того чтобы непрерывная функция* $F(x)$ $(x \in \in (0, 2a); F(0) = 0)$ *допускала представление*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}x}{\lambda} d\tau(\lambda) \quad (x \in (0, 2a)),$$

где $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *- некоторая неубывающая функция, необходимо и достаточно, чтобы ядро* $F(x+y) - F(|x-y|)$ *было положительно-определенным.*

Тем же методом можно доказать, что ядро $K(x, y) = F(x+y)+ +G(x - y)$ $(x, y \in (0, l))$, где $F(x)$ $(x \in (0, 2l))$ и $G(x)$ $(x \in$

$\in (-l,l))$ – некоторые непрерывные функции, будет положительно-определенным тогда и только тогда, если оно допускает представление (2), в котором

$$p_1 = 2, \varphi_1(x;\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x, \quad \varphi_2(x;\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$$

(и, разумеется, $\| \tau_{jk}(\lambda) \|_1^2 \in V_2$).

Если мы пожелаем воспользоваться для получения теорем, аналогичных теоремам 2,3, вместо оператора $L(h) = h''$, оператором $L(h) = h'' + \rho h$, где $\rho = \rho(x)$ $(x \in I)$ – произвольная измеримая функция, интегрируемая на каждой конечной части интервала I, то мы, естественно, придем к ядрам $K(x,y)$ того типа, который рассматривался А.Я. Повзнером [7], и получим различные теоремы, обобщающие его теорему 5.

В этой заметке мы совершенно не касались вопроса о том, когда матрица $T(\lambda)$ в том или ином представлении определяется в существенном однозначно. Обобщение наших исследований [8] об эрмитовых операторах с индексом дефекта (1,1) на случай индекса-дефекта (m,m) позволяет дать ответ и на этот вопрос.

Список литературы

[1] *Лившиц М.С.* // ДАН. – 1944. – **44,** № 1.

[2] *Крейн М.Г.* // Там же. – № 6.

[3] *Айнс Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939.

[4] *Bochner S.* Vorlesungen über Fouriersche Integrale. – Leipzig, 1934. – S. 74–76.

[5] *Крейн М.Г.* // ДАН. – 1940. – **26,** № 1.

[6] *Bernstein S.* // Acta Math. – 1928. – **52.**

[7] *Повзнер А.Я.* // ДАН. – 1944. – **43,** № 9.

[8] *Крейн М.Г.* // Там же. – **43,** № 8; **44,** № 4; **44,** № 5.

О ЛОГАРИФМЕ БЕЗГРАНИЧНО РАЗЛОЖИМОЙ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Доклады АН СССР. – 1944. – Том XLV, №3)

Как известно, комплекснозначная функция $\Phi(p,q) \not\equiv 0$ двух аргументов p и q, пробегающих некоторое множество Q, называется эрмитово-положительным ядром, если для любых $p_1 \in Q$, $\dots, p_n \in Q$ $(n = 1, 2, \dots)$ форма

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Phi(p_j, p_k)\xi_j\bar{\xi}_k$$

не отрицательна.

Обозначим через $\mathfrak{P}_a$ $(0 < a \leq \infty)$ совокупность всех непрерывных функций $f(x)$ $(-a \leq x \leq a)$† таких, что функция $f(x - y)$ $(0 \leq x, y \leq a)$ – эрмитово-положительное ядро [а следовательно, $f(-x) = \overline{f(x)}$ $(-a \leq x \leq a)$].

Через $\mathfrak{G}_a$ $(0 < a \leq \infty)$ обозначим совокупность непрерывных функций $g(x)$ $(-a \leq x \leq a)$ таких, что $g(-x) = \overline{g(x)}$ $(-a \leq x \leq a)$ и функция

$$\Phi_g(x,y) = g(x-y) + g(0) - g(x) - g(-y)$$

есть эрмитово-положительное ядро.

Очевидно, что если $g(x) \in \mathfrak{G}_a$, то функция $g_1(x) = g(x) + \alpha +$ $+ i\beta x$, где α, β – произвольные вещественные постоянные, также

---

† Если $a = \infty$, то значения $x = \pm a$, разумеется, исключаются.

принадлежит классу $\mathfrak{G}_a$, при этом $\Phi_g \equiv \Phi_{g_1}$. Нетрудно показать, что и обратно, если для двух каких-либо функций $g \in \mathfrak{G}_a, g_1 \in \mathfrak{G}_a$ тождественно $\Phi_g = \Phi_{g_1}$, то

$$g_1(x) = g(x) + \alpha + i\beta x \ (-a \leq x \leq a),$$

где α, β – вещественные постоянные.

Функцию $f(x) \in \mathfrak{P}_a$ будем называть безгранично разложимой, если для любого натурального $n > 0$ найдется функция $f_n(x) \in \mathfrak{P}_a$ такая, что $f(x) \equiv [f_n(x)]^n \ (-a \leq x \leq a)$. Совокупность всех безгранично разложимых функций обозначим через $\mathfrak{P}_a^*$.

Заметим, что

$$\mathfrak{P}_a^* \subset \mathfrak{P}_a \subset \mathfrak{G}_a.$$

Функция $F(x) \in \mathfrak{P}_\infty$ называется продолжением в $\mathfrak{P}_\infty$ функции $f(x) \in \mathfrak{P}_a$, если $F(x) \equiv f(x) \ (-a \leq x \leq a)$. Аналогично устанавливается понятие о продолжении функции $f(x) \in \mathfrak{P}_a^*$ в $\mathfrak{P}_\infty^*$ и продолжении функции $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ в $\mathfrak{G}_\infty$.

Как было установлено [1], всякая функция $f(x) \in \mathfrak{P}_a (0 < a \leq \infty)$ имеет по крайней мере одно продолжение в $\mathfrak{P}_\infty$. Пользуясь этим фактом, а также рассуждениями, родственными тем, которыми Шенберг [2] пользовался в аналогичном вопросе, нетрудно доказать следующее предложение.

Теорема 1. *Для того, чтобы некоторая функция $f(x)$ $(-a \leq x \leq a)$ принадлежала классу $\mathfrak{P}_a^*$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = \exp g(x) \ (-a \leq x \leq a),$$

где $g(x)$ $(-a \leq x \leq a)$ – некоторая функция класса $\mathfrak{G}_a$.

Таким образом, если функция $f(x) \in \mathfrak{P}_a^*$, то $f(x) \neq 0$ всюду в интервале $-a \leq x \leq a$.

Теорема 2. *Для того, чтобы некоторая функция $g(x)$ $(-a \leq x \leq a)$ принадлежала классу $\mathfrak{G}_a$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$g(x) = \alpha + i\beta x +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i\lambda x} - 1 - \frac{i\lambda x}{1+\lambda^2} \right) \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} d\sigma(\lambda) \ (-a \leq x \leq a), \qquad (1)$$

где $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ - некоторая ограниченная неубывающая функция, а α и β - вещественные постоянные.

Функцию $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ мы будем нормировать условиями:

$$\sigma(-\infty) = 0, \quad \sigma(\lambda - 0) = \sigma(\lambda) \ (-\infty < \lambda < \infty). \tag{2}$$

Теорема 2 может быть быстро доказана с помощью теоремы 1 нашей предыдущей заметки [3].

Соединяя теоремы 1, 2, мы получаем представление любой функции $f(x) \in \mathfrak{P}_a^*$, которое для случая $a = \infty$ было установлено еще Леви [4]. Метод А.Я. Хинчина [5] доказательства теоремы Леви позволяет сравнительно просто получить требуемое представление функции $f(x) \in \mathfrak{P}_a^*$ также и в случае $a < \infty$.

Для вещественных функций $g(x)$ представление [1] в формулировке теоремы 2 можно заменить следующим:

$$g(x) = \alpha - \int_0^\infty \frac{\sin^2 \lambda x}{\lambda^2}(1+\lambda^2)d\tau(\lambda) \ (-a \le x \le a),$$

где $\tau(\lambda)$ $(0 \le \lambda < \infty)$ - ограниченная неубывающая функция, а α - вещественная постоянная. В такой формулировке теорему 2 для случая $a = \infty$ следует считать установленной Нейманом и Шенбергом [6].

Из теоремы 2 непосредственно следует, что всякая функция $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ имеет по крайней мере одно продолжение в $\mathfrak{G}_\infty$, а следовательно, и всякая функция $f(x) \in \mathfrak{P}_a^*$ имеет по крайней мере одно продолжение в $\mathfrak{P}_\infty^*$.

Так как при $a = \infty$ неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ [нормированная условиями (2)] определяется единственным образом [4, 5], то каждое продолжение $G(x) \in \mathfrak{G}_\infty$ функции $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ порождается одной и только одной нормированной неубывающей ограниченной функцией $\sigma(\lambda)$, дающей представление (1) функции $g(x)$.

Обозначим через V_g совокупность всех нормированных функций $\sigma(\lambda)$, дающих представление (1) данной функции. Положим для любого вещественного ξ

$$\rho(\xi) = \max[\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)], \ \sigma \in V_g.$$

Очевидно, что если V_g состоит только из одной функции $\sigma(\lambda)$, то $\rho(\xi) = 0$ всюду, за исключением, может быть, счетного множества значений ξ. Тем более интересна

Теорема 3. *Если функция $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ $(a < \infty)$ неоднозначно продолжается в $\mathfrak{G}_\infty$, то*

1) $\rho(\xi) > 0$ $(-\infty < \xi < \infty)$ и $\rho^{-1}(\xi)$ есть целая трансцендентная функция ξ;

2) для любого вещественного ξ существует одна и только одна "каноническая функция" $\sigma_\xi(\lambda) \in V_g$ такая, что

$$\sigma_\xi(\xi + 0) - \sigma_\xi(\xi - 0) = \rho(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty);$$

3) точки роста канонической функции $\sigma_\xi(\lambda)$ имеют единственную точку сгущения на бесконечности;

4) точки роста двух различных канонических функций $\sigma_{\xi'}(\lambda)$ и $\sigma_{\xi''}(\lambda)$ $(-\infty < \xi', \xi'' < \infty)$ перемежаются.

Из-за недостатка места мы опускаем формулы, по которым вычисляются функции $\rho(\xi)$ и $\sigma_\xi(\lambda)$ и которые позволяют получить различные характеристики роста целой функции $\rho^{-1}(\xi)$ и характеристики плотности расположения точек скачков функций $\sigma_\xi(\lambda)$.

Теорема 4. *Для того, чтобы функция $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ $(a < \infty)$ неоднозначно продолжалась в $\mathfrak{G}_\infty$, необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функции*

$$g(x) + \frac{1}{\varepsilon}, \; g(x) + \varepsilon x^2 \quad (-a \le x \le a)$$

принадлежали соответственно классам $\mathfrak{P}_a$ и $\mathfrak{G}_a$.

Рассуждения, которыми мы пользуемся при доказательстве теоремы 4, позволяют также установить новый критерий неоднозначной продолжаемости функции $f(x) \in \mathfrak{P}_a$ $(a < \infty)$.

Теорема 5. *Для того, чтобы некоторая функция $f(x) \in \in \mathfrak{P}_a$ $(a < \infty)$ неоднозначно продолжалась в $\mathfrak{P}_\infty$, необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функции*

$$f(x) - \varepsilon, \; f(x) + \varepsilon x^2 \quad (-a \le x \le a)$$

принадлежали соответственно классам $\mathfrak{P}_a$ и $\mathfrak{G}_a$.

Во многих случаях удобно пользоваться следующим частным критерием.

Теорема 6. *Если функция* $g(x) = \overline{g(-x)}$ $(-a \le x \le a,\quad a < < \infty)$ *имеет в интервале* $0 \le x \le a$ *абсолютно непрерывную производную*[†], *то она принадлежит классу* $\mathfrak{G}_a$ *в том и только том случае, когда для любой непрерывной функции* $\varphi(x)$ $(0 \le \le x \le a)$ *выполняется неравенство*

$$\int_0^a \int_0^a g''(x-y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}dxdy \le -\Re\{g'(+0)\}\int_0^a |\varphi(x)|^2 dx. \qquad (3)$$

Если это условие выполняется и, кроме того, $\Re\{g'(+0)\} < < 0$[††], *то для того чтобы функция* $g(x)$ *имела единственное продолжение в* $\mathfrak{G}_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы в (3) достигался знак равенства хотя бы для одной непрерывной функции* $\varphi(x) \not\equiv 0$.

Заметим, что указанное условие однозначной продолжаемости функции $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ является достаточным также и в том случае, когда $\Re\{g'(+0)\} = 0$. Интересно также, что если знак равенства в (3) достигается при $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ $(\varphi_0(x) \not\equiv 0)$, то точки роста той единственной функции $\sigma(\lambda)$, которая дает представление (1), являются λ-корнями уравнения

$$\int_0^a e^{i\lambda x}\varphi_0(x)dx = 0.$$

Из теоремы 3 следует, что если некоторая функция $g(x) = = \overline{g(-x)}$ $(-a \le x \le a)$ имеет в интервале $0 \le x \le a$ абсолютно непрерывную производную и $\Re\{g'(+0)\} < 0$, то, сужая достаточно интервал $(-a, a)$, можно будет утверждать, что $g(x) \in \mathfrak{G}_a$ и неоднозначно продолжается в $\mathfrak{G}_\infty$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что если некоторая функция $f(x) = \overline{f(-x)}$ $(-a \le x \le a)$ имеет

[†] При этом под производной функции $g(x)$ в точке 0 мы понимаем правую производную $g'(+0)$.

[††] Заметим, что при выполнении (3) всегда $\Re\{g'(+0)\} \le 0$.

абсолютно непрерывную производную в интервале $(0 \le x \le a)$ и $f(0) > 0$, $\Re\{f'(+0)\} < 0$, то в достаточно суженном интервале $-a_1 \le x \le a_1$ функция $f(x) \in \mathfrak{P}^*_{a_1}$ и неоднозначно продолжается в $\mathfrak{P}^*_\infty$.

В частности, при достаточно малом $a > 0$ функция $f_a(x) = 1 - |x|$ $(-a \le x \le a)$ принадлежит классу $\mathfrak{P}^*_a$. На основании теорем 1, 6 можно утверждать существование максимального значения a (< 1), при котором $f_a(x) \in \mathfrak{P}^*_a$. Для этого значения a функция $f_a(x)$ являет собой пример функции, которая однозначно продолжается в $\mathfrak{P}^*_a$, но неоднозначно в $\mathfrak{P}_\infty$.

Можно доказать следующий общий факт: если некоторая функция $f(x) \in \mathfrak{P}^*_a$ и неоднозначно продолжается в $\mathfrak{P}^*_\infty$, то у нее всегда существуют продолжения, принадлежащие классу $\mathfrak{P}_\infty$, но не классу $\mathfrak{P}^*_\infty$.

Заметим, что всякая непрерывная положительная четная функция $f(x)$ $(-a \le x \le a)$ принадлежит классу $\mathfrak{P}_a$, если она выпукла в интервале $0 \le x \le a$, а следовательно, принадлежит также классу $\mathfrak{P}^*_a$, если она в том же интервале экспоненциально выпукла. Так как такую функцию всегда можно продолжить с сохранением перечисленных свойств, то она всегда неоднозначно продолжаема в $\mathfrak{P}_\infty$ соответственно в $\mathfrak{P}^*_\infty$.

Известно, что функция $\varphi_\gamma(x; a) = \exp(-|x|^\gamma)$ $(-a \le |x| \le a)$ при $0 < \gamma \le 2$ принадлежит $\mathfrak{P}^*_a$ (при $\gamma > 2$ эта функция не принадлежит даже классу $\mathfrak{P}_a$). Можно доказать, что при $0 < \gamma < 2$ эта функция неоднозначно продолжаема в $\mathfrak{P}^*_\infty$ (при $\gamma = 2$ функция $\varphi_\gamma(x; a)$, будучи голоморфной в точке 0, однозначно продолжается даже в $\mathfrak{P}_\infty$).

Теория функций $g(x)$ класса $\mathfrak{G}_a$ теснейшим образом связана с проблемой продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве [7]. Все основные результаты этой и следующей заметки [7] получены простым применением исследований автора по обобщенной проблеме моментов.

Список литературы

[1] *Крейн М.* // ДАН СССР. – 1940. – **XXVI**, № 1.

[2] *Schoenberg J.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1938. – **44**. – P.522.

[3] *Крейн М.* // ДАН СССР. – 1944. – **XLIV**, № 6.

[4] *Lévy P.* // Ann.d. R.Scuola Norm.di Pisa. – 1934. – **II**, N3. – P.337.

[5] *Хинчин А.* Предельные законы для сумм независимых случайных величин, 1938.

[6] *Von Neumann J., Schoenberg J.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1941. – **50**.

[7] *Крейн М.* // ДАН СССР. – 1944. – **XLV**, № 4.

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ПРЕДЛОЖЕНИЙ О МНОГОЧЛЕНАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ

(Доклады АН СССР. – 1955. – Том 105, № 4)

1. *Пусть* $\mu \geq 0; H(t) = \overline{H(-t)}$ $(-T < t < T;\ T < \infty)$ - *функция, суммируемая в каждом интервале* $(-r, r)$ $(r < T)$.

Если для любой непрерывной функции $\varphi(t)$ $(0 \leq t < T)$ *выполняется неравенство*

$$\mu \int_0^r |\varphi(s)|^2 ds + \int_0^r \int_0^r H(t-s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}dtds \ (0 < r < T), \qquad (1)$$

то в этом и только в этом случае найдется неубывающая функция $\sigma(\lambda)(-\infty < \lambda < \infty; \sigma(0) = 0, \sigma(\lambda - 0) = \sigma(\lambda))$ *такая, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty$$

и

$$\int_0^r (t-s)H(s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{i\lambda t}{1+\lambda^2} - e^{i\lambda t}\right)\frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda^2} +$$

$$+\left(i\gamma - \frac{\mu}{2}\operatorname{sign} t\right)t \quad (-T < t < T), \qquad (2)$$

где γ *– вещественная постоянная.*

Это предложение в несколько иной формулировке было установлено автором еще в 1944 г. ([1],теорема 6).

Простоты ради в дальнейшем будет рассматриваться тот случай, когда $\mu = 1$, $T = \infty$. В этом случае спектральная функция σ в представлении (2) определяется единственным образом. Если, кроме того, предположить, что в (1) знак равенства возможен лишь при $\varphi \equiv 0$, то условие (1) (при $\mu = 1$, $T = \infty$) будет означать, что при любом положительном r у эрмитова ядра $H(t-s)$ $(0 \leq t, s \leq r)$ существует эрмитова резольвента $\Gamma_r(t,s) = \overline{\Gamma_r(s,t)}$ $(0 \leq t, s \leq r)$, удовлетворяющая соотношению

$$\Gamma_r(t,s) = \int_0^r H(t-u)\Gamma_r(u,s)du = H(t-s) \quad (0 \leq s, t \leq r).$$

Согласно общей формуле (4) из [2] будем иметь

$$\partial\Gamma_r(t,s)/\partial r = -\Gamma_r(r,s)\Gamma_r(t,r) \quad (0 \leq r < \infty; \;\; 0 \leq s, t \leq r). \tag{3}$$

Очевидно также, что

$$\Gamma_r(t,s) = \Gamma_r(r-s)(r-t). \tag{4}$$

2. Положим

$$P(r;\lambda) = e^{i\lambda r}(1 - \int_0^r \Gamma_r(s,0)e^{-i\lambda s}ds) \quad (0 \leq r < \infty), \tag{5}$$

$$P_*(r;\lambda) = 1 - \int_0^r \Gamma_r(0,s)e^{i\lambda s}ds \quad (0 \leq r < \infty). \tag{6}$$

При помощи (3) и (4) легко получим

$$dP(r;\lambda)/dr = i\lambda P(r;\lambda) - \overline{A(r)}P_*(r;\lambda),$$
$$dP_*(r;\lambda)/dr = -A(r)P(r;\lambda), \quad A(r) = \Gamma_r(0,r). \tag{7}$$

Отсюда без труда получается соотношение

$$|P_*(r;\lambda)|^2 - |P(r;\lambda)|^2 = 2\mathrm{Im}\,\lambda \int_0^r |P(s;\lambda)|^2 ds \quad (0 \leq r < \infty), \tag{8}$$

в силу которого, как легко видеть, при любом $r > 0$ все нули целой функции $P(r;\lambda)$ располагаются внутри верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\ \lambda \geq 0$.

Оказывается, что для любой финитной (обрывающейся) функции $f(r) \in L_2(0,\infty)$ имеет место равенство:

$$\int_0^\infty |f(r)|^2 dr = \int_{-\infty}^\infty |F(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda),$$

где

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(r)P(r;\lambda)dr.$$

Таким образом, соответствие $f(r) \to F(\lambda)$ порождает унитарное отображение U_P всего $L_2(0,\infty)$ на некоторую часть $L_2^{(\sigma)}$.

Из одного старого результата автора [3] следует

Теорема 1. *Отображение U_P будет унитарным отображением всего $L_2(0,\infty)$ на все $L_2^{(\sigma)}$ в том и только том случае, когда расходится (равен $-\infty$) интеграл*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln\sigma'(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda. \tag{9}$$

Иными средствами устанавливается следующая теорема:

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

I. Интеграл (9) имеет конечное значение.

II. Хотя бы для одного λ $(\mathrm{Im}\ \lambda > 0)$ интеграл

$$\int_0^\infty |P(r;\lambda)|^2 dr \tag{10}$$

имеет конечное значение.

III. Хотя бы для одного $\lambda(\mathrm{Im}\ \lambda > 0)$ функция $P_*(r;\lambda)$ $(0 \leq \leq r < \infty)$ ограничена.

IV.(V). На любом ограниченном замкнутом множестве точек λ открытой полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *интеграл (10) сходится равномерно (существует равномерно сходящийся предел*

$$\Pi(\lambda) = \lim_{r\to\infty} P_*(r;\lambda)). \tag{11}$$

Отметим еще следующие соотношения, имеющие место при выполнении условий I–V:

$$\Pi(\lambda)\overline{\Pi(\mu)} = (\lambda-\bar{\mu})\int\limits_0^\infty P(r;\lambda)\overline{P(r;\mu)}dr \quad (\operatorname{Im}\lambda>0, \operatorname{Im}\mu>0),$$

$$\sqrt{2\pi}\Pi(\lambda) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t\lambda}{t-\lambda}\cdot\frac{\ln\sigma'(t)}{1+t^2}dt + (\alpha+\beta\lambda)i\right\}, \tag{12}$$

где $\alpha\in(-\infty,\infty)$, а $\beta\geq 0$.

Формула (12) интересна тем, что показывает независимость функции $\Pi(\lambda)$ от функций $\sigma_d(\lambda)$ и $\sigma_s(\lambda)$ из разложения $\sigma = \sigma_a + +\sigma_d + \sigma_s$ функции σ на ее абсолютно непрерывную часть σ_a, функцию скачков σ_d и сингулярную часть σ_s.

Согласно (12) в каждой точке λ , где существует производная $\sigma_a'(\lambda)$, будем иметь:

$$2\pi\sigma_a(\lambda) = \lim|\Pi(\lambda+i\varepsilon)|^{-2} \quad \text{при} \quad \varepsilon\downarrow 0.$$

Заметим еще, что условия I–V выполняются, если $A(r)\in \in L_2(0,\infty)$ или $A(r)\in L_1(0,\infty)$, при этом соответственно справедливы соотношения:

$$\Pi(\lambda) = 1 - \int\limits_0^\infty A(s)P(s;\lambda)ds \quad (\operatorname{Im}\lambda>0), \tag{13}$$

$$\Pi(\lambda) = \exp\Big(-\int\limits_0^\infty A(s)\frac{P(s;\lambda)}{P_*(s;\lambda)}ds\Big) = P_*(\ell;r) + 0(\int\limits_1^\infty |A(r)|dr)$$

$$(\operatorname{Im}\lambda>0, \quad \ell\to\infty).$$

Поэтому при $A(r) \in L_1(0,\infty)$ функция $\Pi(\lambda)$ ($\mathrm{Im}\ \lambda \geq 0$) непрерывна и ограничена снизу и сверху:

$$|\Pi(\lambda)|^{\pm 1} \leq \exp(\int_0^\infty |A(r)|dr) \quad (\mathrm{Im}\ \lambda \geq 0). \tag{14}$$

Кроме того, в этом случае функция $\sigma(\lambda)$ непрерывно дифференцируема и $2\pi\sigma'(\lambda) = |\Pi(\lambda)|^{-2}$ $(-\infty < \lambda < \infty)$.

Указанные в пп. 2 и 3 предложения и соотношения являются континуальными аналогами результатов, полученных для ортогональных многочленов Г. Сегё [4], А.Н. Колмогоровым, Я.Л. Геронимусом [5, 6] и другими. В частности, теорему 2 следует сравнить с теоремой 21.1 из [5], а соотношения (13) и (14) – с соотношениями Я.Л. Геронимуса (26.7) и (26.6) из [5]. На исследование функций $P(r;\lambda)$ нас также натолкнула оригинальная работа П.Д. Калафати [7].

3. Положим

$$\mathcal{E}(r;\lambda) = e^{-i\lambda r}P(2r;\lambda) = \Phi(r;\lambda) + i\Psi(r;\lambda),$$

$$\mathcal{E}(-r;\lambda) = \overline{\mathcal{E}(r,\lambda)} = \Phi(r;\lambda) - i\Psi(r;\lambda).$$

При помощи первого уравнения (7) легко получим

$$d\Phi/dr = -\lambda\Psi - a(r)\Phi + b(r)\Psi, \quad \Phi(0;\lambda) = 1,$$

$$d\Psi/dr = \lambda\Phi + b(r)\Phi + a(r)\Psi, \quad \Psi(0;\lambda) = 0, \tag{15}$$

где $a(r) = 2\mathrm{Re}\ A(2r)$, $b(r) = 2\mathrm{Im}\ A(2r)$ – локально суммируемые функции.

Исследование дифференциальной системы (15) позволяет утверждать, что соответствие

$$f(r) \to F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r)\mathcal{E}(r;\lambda)dr, \tag{16}$$

определенное на финитных функциях $f(r) \in L_2(-\infty,\infty)$, порождает унитарный оператор $U_{\mathcal{E}}$, отображающий всегда все $L_2(-\infty,\infty)$ на все $L_2^{(2\sigma)}$.

Функции $\mathcal{E}(r;\lambda), \Phi(r;\lambda), \Psi(r;\lambda)$ соответственно аналогичны функциям $\exp(i\lambda r), \cos\lambda r, \sin\lambda r$.

Разумеется, указанное свойство обобщенного преобразования Фурье имеет своим следствием то обстоятельство, что если $F(\lambda) = U_{\mathcal{E}} f$ и $F(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ – финитная функция из $L_2^{(\sigma)}$, то $f(r)$ получится как интеграл от $F(\lambda)\mathcal{E}(x;\lambda)d\sigma(\lambda)$ в пределах от $-\infty$ до ∞.

Здесь мы отправлялись от ядра $H(t-s)$ (или порождающей его спектральной функции $\sigma(\lambda)$) и пришли к системе (15). Можно было бы поступить наоборот: задаться произвольными измеримыми локально суммируемыми функциями $a(r)$ и $b(r)$ и непосредственно доказать существование спектральной функции $\sigma(\lambda)$, для которой преобразование (16) при его замыкании (как оператора) будет давать унитарный оператор, отображающий все $L_2(-\infty,\infty)$ на все $L_2^{(\sigma)}$.

Формулой (2) и соотношением $a(r) + ib(r) = 2\Gamma_{2r}(0,2r)$ решена задача о восстановлении системы (15) по ее спектральной функции $\sigma(\lambda)$.

Заметим, что если функция $2\pi\sigma(\lambda)$ является интегралом от рациональной функции $R(\lambda) = 1+0(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, то система (15) (т.е. функции $a(r)$ и $b(r)$) находятся при помощи рациональных операций, коль скоро определены полюсы и нули функции $R(\lambda)$.

Здесь одновременно получено обобщение и упрощение выводов статьи [2]. Чтобы лучше это себе уяснить, остановимся еще на случае, когда функция $H(t)$ вещественна, т.е. $\sigma(\lambda)$ – нечетная функция. В этом случае $b(r) \equiv 0$. Нетрудно тогда исключить из уравнений (15) любую из функций Φ, Ψ. Предполагая для упрощения, что функция $H(t)$, а значит, и функция $a(r) = 2\Gamma_{2r}(0,2r)$ абсолютно непрерывны, легко найдем, что функции $\Psi(r;\lambda)$ и $\Phi(r;\lambda)$ являются определенными решениями дифференциальных систем второго порядка

$$\Psi'' - V(r)\Psi + \lambda^2\Psi = 0, \quad \Psi(0;\lambda) = 0, \quad \Psi'(0;\lambda) = \lambda;$$

$$\Phi'' - V_1(r)\Phi + \lambda^2\Phi = 0, \quad \Phi(0;\lambda) = 1, \quad \Phi'(0;\lambda) + a(0)\Phi(0;\lambda) = 0,$$

где $V(r) = a^2(r) + a'(r)$, $V_1(r) = a^2(r) - a'(r)$ $(0 \leq r < \infty)$

Таким образом, функция $\mathcal{E}(r;\lambda)$ конструируется из решений Φ, Ψ различных уравнений. Легко видеть, что функция

$$\Psi(r;\lambda) = -\lambda^{-1}\Phi(r;0)[\Phi(r;\lambda)/\Phi(r;0)]'.$$

Эти обстоятельства уже были выяснены автором ранее [8].

Список литературы

[1] *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. - 1944. - **45**, № 3.

[2] *Крейн М.Г.* // Там же. - 1954. - **97**, № 1.

[3] *Крейн М.Г.* // Там же. - 1948. - **6**, № 8.

[4] *Szegё G.* Orthogonal Polynomials, 1939.

[5] *Геронимус Я.Л.* // Зап. Харьк. матем. обш-ва. Сер. 4. - 1948. - **19**.

[6] *Геронимус Я.Л.* Теория ортогональных многочленов, 1950.

[7] *Калафати П.Д.* // ДАН СССР. - 1955. - **105**, № 4.

[8] *Крейн М.Г.* // Там же. - 1954. - **94**, № 1.

О КОНТИНУАЛЬНОМ АНАЛОГЕ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ ИЗ ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

(Доклады АН СССР. – 1957. – Том 113, № 5)

1. Пусть $\varphi(r;\lambda)$ – решение дифференциальной системы

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} - V(r)\varphi + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0;\lambda) = 1,$$

$$\varphi'(0;\lambda) = h \quad (0 \le r < r_\infty), \qquad (S_{0,h})$$

где h – некоторое вещественное число; $V(r)$ $(0 \le r < r_\infty; r_\infty \le \infty)$ – вещественная непрерывная функция; λ – комплексный параметр.

Условимся в следующих обозначениях. Если комплексные числа α_j $(j = 1, 2, \dots, p)$ все различны между собой, то символом

$$W_*(\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \dots, \varphi_{\alpha_p}) \qquad (1)$$

будем обозначать функцию от r, получающуюся из формально составленного определителя Вронского W для функций $\varphi(r;\alpha_1), \dots$ $\dots, \varphi(r;\alpha_p)$ путем замены каждой четной производной $\varphi^{(2k)}(r;\alpha_j)$ на $(-\alpha_j)^k\varphi(r;\alpha_j)$ и нечетной $\varphi^{(2k+1)}(r;\alpha_j)$ на $(-\alpha_j)^k\varphi'(r;\alpha_j)$. Легко видеть, что если потенциал $V(r)$ непрерывно дифференцируем по крайней мере $p-3$ раз, а следовательно, функция $\varphi(r;\lambda)$ по крайней мере $p-1$ раз, то выражение (1) будет в точности совпадать с обычным определителем Вронского W указанной системы функций.

Полагая $\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)...(\lambda - \alpha_p)$, будем писать

$$V_{\mathcal{P}}(r) = V(r) - 2\frac{d^2}{dr^2}\ln W_*(\varphi_{\alpha_1}, ..., \varphi_{\alpha_p}), \tag{2}$$

$$\varphi_{\mathcal{P}}(r;\lambda) =$$
$$= (-1)^p \mathcal{P}^{-1}(\lambda) W_*(\varphi_\lambda, \varphi_{\alpha_1}, ..., \varphi_{\alpha_p}) / W_*(\varphi_{\alpha_1}, ..., \varphi_{\alpha_p}). \tag{3}$$

Случай, когда некоторые из чисел α_j совпадают друг с другом, можно рассматривать как предельный по отношению к тому, когда все эти числа различны. Исходя из этого, нетрудно сообразить, как естественно будет определить функции $V_{\mathcal{P}}(r)$ и $\varphi_{\mathcal{P}}(r)$ в случае произвольного многочлена

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + \cdots + a_p.$$

Можно показать (см. [1]), что $V_{\mathcal{P}}(r)$ при $r \to 0$ имеет поведение:

$$V_{\mathcal{P}}(r) = p(p-1)/r^2 + O(1).$$

Как известно, у системы $(S_{0,h})$ всегда существует , по крайней мере, одна спектральная функция τ, т.е. неубывающая функция

$$\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0) \quad (-\infty < \lambda < \infty; \quad \tau(-\infty) = 0)$$

такая, что для всякой функции $f(r) \in L_2(0, r_\infty)$, равной нулю в некоторой левой окрестности точки r_∞:

$$\int\limits_0^\infty |f(r)|^2 dr = \int\limits_{-\infty}^\infty |\int\limits_0^{r_\infty} f(r)\varphi(r;\lambda)dr|^2 d\tau(\lambda). \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $\tau(\lambda)$ – некоторая спектральная функция системы $(S_{0,h})$, а $\mathcal{P}(\lambda) = \lambda^p + \cdots + a_p$ – многочлен, неотрицательный на спектре функции τ . Тогда функция*

$$\tau_{\mathcal{P}}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \mathcal{P}(\mu)d\tau(\mu)$$

будет спектральной функцией дифференциальной системы

$$\psi'' - V_{\mathcal{P}}(r)\psi + \lambda\psi = 0, \quad \lim_{r\downarrow 0} r^{-p}\psi(r;\lambda) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2p-1)} \qquad (5)$$

с непрерывным потенциалом $V_{\mathcal{P}}(r)$ $(0 \leq r < r_\infty)$, *определяемым по формуле (2). Решением* $\psi(r;\lambda)$ *этой системы будет функция* $\varphi_{\mathcal{P}}(r;\lambda)$, *определяемая по формуле (3).*

Таким образом, утверждается, что равенство (4) не нарушится, если в нем произвести замену функции $\varphi(r;\lambda)$ на $\varphi_{\mathcal{P}}(r;\lambda)$ и функции $\tau(\lambda)$ на $\tau_{\mathcal{P}}(\lambda)$.

Это утверждение следует рассматривать как континуальный аналог известного (соответственно переформулированного) правила Кристоффеля (см., например, [2], с. 198) о преобразовании, испытываемом ортогональными многочленами по некоторому весу при умножении последнего на неотрицательный полином.

2. Пусть, например, $r_\infty < \infty$ и функция $V(r) \in C(0, r_\infty)$ (или, более обще: $V(r) \in L_1(0, r_\infty)$). Тогда, добавив к системе $(S_{0,h})$ какое-либо граничное условие: $\varphi'(r_\infty;\lambda) + H\varphi(r_\infty;\lambda) = 0$ с вещественным $H(\leq \infty)$, мы получим краевую задачу Штурма–Лиувилля с некоторым спектром: $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, который одновременно будет спектром (множеством точек роста) некоторой спектральной (ортогональной) функции τ системы $(S_{0,h})$. Если положить

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{p-1}),$$

то на основании теоремы 1 можно будет утверждать, что спектр системы (5) с дополнительным условием: $\psi(r_\infty;\lambda) = 0$, если $p = 1$, и $\psi(r;\lambda) \in L_2(0, r_\infty)$, если $p > 1$, будет состоять из укороченной последовательности $\{\lambda_n\}_p^\infty$, причем $\{\varphi_{\mathcal{P}}(r;\lambda_n)\}_p^\infty$, будет соответствующей последовательностью фундаментальных функций. Этот частный результат был ранее получен Крумом [1] и послужил толчком к установлению общей теоремы 1.

Отметим, в частности, еще следующий вывод из теоремы 1, получающийся при более общем выборе многочлена $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_{k_1})(\lambda - \lambda_{k_2})\ldots(\lambda - \lambda_{k_n}).$$

Последовательность $\{\varphi_n(r)\}_0^\infty$ фундаментальных функций любой регулярной задачи Штурма–Лиувилля на интервале (a,b) всегда обладает следующим свойством:

Пусть целые числа $(0 \leq)\ k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ *таковы, что произведение* $(k-k_1)(k-k_2)\ldots(k-k_p)$ *неотрицательно при* $k = 0,1,2,\ldots$, *тогда определитель* $W_*(\varphi_{k_1},\varphi_{k_2},\ldots,\varphi_{k_n})$ *сохраняет знак внутри* (a,b).

3. Теорема 1 вместе с предыдущими результатами [3] позволяет указать простую процедуру восстановления дифференциальной системы по ее спектральной функции τ вида

$$\tau(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda R(\mu)\frac{d\mu}{\sqrt{\mu}} \quad (\lambda \geq 0); \quad \tau(\lambda) = 0\ (\lambda \leq 0), \tag{6}$$

где $R(\lambda)$ – некоторая рациональная функция, неотрицательная на положительной оси. Здесь идет речь о восстановлении по функции τ непрерывного потенциала $V(r)$ $(0 \leq r < \infty)$, а также константы h в случае системы $(S_{0,h})$ (с $r_\infty = \infty$) и функции $V(r) = p(p-1)/r^2 + q(r)$ $(0 \leq r < \infty)$ в случае системы:

$$\psi'' - \left[\frac{p(p-1)}{r^2} + q(r)\right]\psi + \lambda\psi = 0,$$

$$\lim_{r\downarrow 0} r^{-p}\psi(r;\lambda) = \frac{1}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2p-1)}, \tag{S_p}$$

где $q(r)$ $(0 \leq r < \infty)$ – некоторая непрерывная функция, а p – натуральное число.

В первом случае должно быть $R(\lambda) = 1 + o(1)$, а во втором $R(\lambda) = \lambda^p + o(\lambda^p)$ при $\lambda \to \infty$. При выполнении этих необходимых условий задача будет иметь единственное решение. Так как во втором случае функция $R(\lambda)$ всегда может быть представлена в виде $R(\lambda) = \mathcal{P}_1(\lambda)R_1(\lambda)$, где $\mathcal{P}_1(\lambda)$ – многочлен степени p, неотрицательный при $\lambda \geq 0$, а $R_1(\lambda)$ – рациональная функция, конечная при $\lambda \geq 0$ и такая, что $R_1(\lambda) = 1 + o(1)$ при $\lambda \to \infty$, то, на основании теоремы 1, достаточно привести решение задачи для первого случая. Путь получения эффективного решения задачи для этого случая был указан еще в [3]. Приведем окончательные формулы.

Пусть $R(\lambda) = P(\lambda)/Q(\lambda)$, где $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ – несократимые многочлены степени n со старшими коэффициентами, равными единице. Так как $Q(k^2) > 0$ при вещественном k, то $Q(k^2) = Q_+(k)Q_-(k)$, где $Q_+(k)$ – многочлен степени n со старшим коэффициентом единица, имеющий корни только внутри верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, k > 0$, а $Q_-(k) = (-1)^n Q_+(-k) = \bar{Q}_+(k)$. Положим

$$C(r;k) = \frac{i^n}{2}[Q_+(k)e^{ikr} + Q_+(-k)e^{-ikr}],$$

$$S(r;k) = \frac{i^n}{2i}[Q_+(k)e^{ikr} - Q_+(-k)e^{-ikr}]. \tag{7}$$

Предполагая, далее, что

$$P(k^2) = (k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)\dots(k^2 - k_n^2),$$

где все k_j^2 $(j = 1, 2, \dots, n)$ различны, можно утверждать, что рассматриваемой спектральной функции τ отвечает система $(S_{0,h})$ с $r_\infty = \infty$,

$$V(r) = -2\frac{d^2}{dr^2}\ln W(C(r;k_1), \dots, C(r;k_n)) \tag{8}$$

и h, равным произведению на $-2i$ суммы всех вычетов внутри верхней полуплоскости функции $R(k^2) - 1$. Примечательно, что для решения φ этой системы можно дать явную формулу, а именно:

$$\varphi(r;\lambda) = \frac{W(C(r;k), C(r;k_1), \dots, C(r;k_n))}{P(\lambda)W(C(r;k_1), \dots, C(r;k_n))}. \tag{9}$$

Заслуживает также быть отмеченным то, что, если в последнем выражении заменить функции

$$C(r,k), C(r,k_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

на соответствующие функции

$$S(r,k), S(r,k_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

то вместо функции φ мы получим умноженное на $k = \sqrt{\lambda}$ решение ψ системы (S_p) (для случая $p = 1$) с $V(r) = q(r)$ выражающимся по формуле (8) с заменой $C(r,k_j)$ соответствующими функциями $S(r,k_j)$ $(j=1,2,...,n)$, при этом указанной дифференциальной системе (S_1) будет отвечать спектральная функция $\tau(\lambda)$, имеющая следующее выражение:

$$\tau(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\lambda R(\mu)\sqrt{\mu}d\mu \quad (\lambda\geq 0);\quad \tau(\lambda)=0 \quad (\lambda\leq 0).$$

Естественно, все указанные в п. 3 результаты непосредственно обобщаются на случай, когда многочлен $P(\lambda)$ имеет кратные корни.

4. Для упрощения окончательных формулировок мы предполагали всюду, что функции $V(r)$ и $q(r)$ непрерывны в $(0,r_\infty]$; однако все наши выводы нетрудно переформулировать на тот случай, когда эти функции принадлежат классу $L_1(0,r_\infty]$, т.е. суммируемы в каждом интервале $(0,\ell)$, где $\ell<r_\infty$.

Теорема 2. *Для того чтобы данная неубывающая функция*

$$\tau(\lambda)=\tau(\lambda-0)\quad(-\infty<\lambda<\infty;\ \tau(-\infty)=0)$$

была спектральной функцией некоторой системы $(S_{0,h})$ *с потенциалом* $V(r)\in L_1(0,r_\infty]$, *где* r_∞ $(0<r_\infty\leq\infty)$ *задано, необходимо и достаточно, чтобы:*

1) функция

$$\Pi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda}d\tau(\lambda)\quad(0\leq t<2r_\infty)$$

была конечной и имела две абсолютно непрерывные производные на любом сегменте $(0,\ell)$ $(\ell<2r_\infty)$;

2) $\Pi'(0)=1$;

3) $\lim\limits_{\rho\to\infty}\sup(N(\rho)/\sqrt{\rho})\geq r_\infty/\pi$, *где* $N(\rho)$ *- число точек спектра функции* τ *в интервале* $(0,\rho)$.

Впервые эта теорема была указана в [4] (см. теорему 6), однако там при ее формулировке по недосмотру было опущено третье условие теоремы 2. Некоторые из методов, необходимых при ее доказательстве, приведены также в [5]. Напомним еще, что "переходная" функция $\Pi(t)$ однозначно определяется системой $(S_{0,h})$ (не зависит от выбора ее спектральной функции), при этом $\Pi''(0) = -h$, а функция $\Pi'''(2r)$ всегда той же гладкости, что и функция $V(r)$ $(0 \leq r < r_\infty)$. Последнее означает, что если одна из функций $\Pi'''(2r), V(r)$ непрерывна или абсолютно непрерывна, или, более того, имеет некоторое число непрерывных (абсолютно непрерывных) производных в каждом сегменте $(0, \ell)$ полуоткрытого интервала $(0, r_\infty]$, то этим же свойством будет обладать и другая функция.

Теорема 3. *Для того чтобы неубывающая функция*

$$\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0) \quad (-\infty < \lambda < \infty; \ \tau(-\infty) = 0)$$

была спектральной функцией некоторой системы (S_p) с непрерывной функцией $q(r)$ $(0 \leq r < r_\infty)$ и натуральным p, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\tau_*(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{d\tau(\mu)}{(\mu^2 + 1)^{p/2}}$$

была спектральной функцией некоторой системы $(S_{0,h})$ с непрерывным потенциалом $V(r)$ $(0 \leq r < r_\infty)$, при этом функция $q(r)$ $(0 \leq r < r_\infty)$ всегда будет той же гладкости, что и потенциал $V(r)$ $(0 \leq r < r_\infty)$.

Так как асимптотическое поведение спектральных функций систем $(S_{0,h})$ хорошо изучено [6, 7], то теорема 3 позволяет сделать ряд заключений об асимптотическом поведении спектральных функций систем (S_p) (в частности, уточнить результат, полученный для них в [6])[†].

[†] Автор пользуется случаем указать, что в формуле (17) этой статьи перед знаком интеграла пропущен коэффициент 2.

Список литературы

[1] *Сгитт М.М.* // Quart. J. Math. Oxford. – 1955. – **2**, N 6.

[2] *Гончаров Л.В.* Теория приближения и интерполирования функций, 1934.

[3] *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. – 1954. – **94**, $\mathcal{N}$ 6.

[4] *Крейн М.Г.* // Там же. – 1953. – **88**, $\mathcal{N}$ 3.

[5] *Крейн М.Г.* // Там же. – 1954. – **97**, $\mathcal{N}$ 1[†].

[6] *Левитан Б.М.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – **19**, $\mathcal{N}$ 1.

[7] *Марченко В.А.* //Там же. – $\mathcal{N}$ 6.

[†]Интересно отметить, что при $k_j = -\bar{k}_j$, продолжая аналитически формулу (8) на всю ось $-\infty < r < \infty$, получаем безотражательные потенциалы, соответствующие n-солитонным решениям уравнения Кортевега де Фриза. (*Прим. ред.*)

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ ПЛАНШЕРЕЛЯ НА СЛУЧАЙ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ НА КОММУТАТИВНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

(Доклады АН СССР. – 1941. – Том XXX, № 6)

Недавно И.М. Гельфанду [1], Д.А. Райкову [1, 2] и А.Я. Повзнеру [3] удалось обобщить ряд важных предложений теории интегралов Фурье–Стильтьеса на тот случай, когда интегралы берутся по коммутативной топологической группе, удовлетворяющей некоторым ограничениям. В настоящей заметке мы покажем, что аналогичное обобщение допускает также классическая теорема Планшереля. Так же, как и первые два упомянутых автора, мы при этом нигде не пользуемся, кроме самых первых общих фактов и понятий, тонкими результатами теории Л.С. Понтрягина [4] коммутативных топологических групп. В основу наших рассуждений положена обобщенная теорема Bochner'a, которую, как показал Д.А. Райков [2], можно доказать на основе теории колец, не прибегая к результатам Л.С. Понтрягина.

Пусть G – локально компактная группа, удовлетворяющая 2-й аксиоме счетности, а X – группа ее непрерывных характеров, топологизированная известным образом†.

† Следуя Л.С.Понтрягину, мы под непрерывным характером χ группы G будем понимать непрерывное гомоморфное отображение группы G на топологическую группу вращений окружности. Наши рассуждения сохраняют силу и при других предположениях относительно группы G (см. [1]).

Из общей теоремы A. Haar'а [5] следует, что на группе G можно построить вполне аддитивную меру борелевских множеств, причем эта мера определяется единственным образом с точностью до мультипликативной постоянной [6,7]. Построив такую меру и соответствующий ей интеграл, введем в рассмотрение пространство $L_p(G)$ $(p \geq 1)$ суммируемых на G в p-й степени функций $f(g)$. Каждому $f \in L_1(G)$ отнесем его преобразование Фурье[†]:

$$\varphi(\chi) = P_\chi(f) = \int f(g) \exp(i\chi g) dg \quad (\chi \in X).$$

Из определения топологии на X легко следует, что

1^0. Если $f \in L_1(G)$, то $\varphi(\chi) \quad (\chi \in X)$ есть непрерывная функция на X, причем $\varphi(\chi) \to 0$ при $\chi \to \infty$[††].

Обозначим через $\mathfrak{M}_+$ множество всех непрерывных функций $f \in L_1(G)$, для которых $P_\chi(f) \geq 0$ при всех $\chi \in X$, а через $\mathfrak{M}$ – линейную комплексную оболочку $\mathfrak{M}_+$.

2^0. Если $f \in \mathfrak{M}$, то функции $f(-g)$, $\overline{f(g)}$, $\exp(i\alpha g) f(g)$ $(\alpha \in X)$ и $f(g+a)$ $(a \in G)$ также принадлежат $\mathfrak{M}$.

Утверждение следует пояснить только для функции $f(g+a)$; для этого заметим, что если $f \in \mathfrak{M}_+$, то $2f(g) - f(g+a) - f(g-a) \in \mathfrak{M}_+$ и $2f(g) - if(g+a) + if(g-a) \in \mathfrak{M}_+$, откуда $f(g+a) \in \mathfrak{M}$.

3^0. Если $f \in \mathfrak{M}_+$, то $f(g)$ – эрмитово-положительная функция. Откуда, если $f \in \mathfrak{M}_+$, то $f(0) \geq |f(g)|$; если $f \in \mathfrak{M}$, то $f \in L_{1,2}(G)$[†††].

Это предложение легко доказывается с помощью теоремы 1 заметки Д.А. Райкова [2].

[†] Если под знаком интеграла не указана область интегрирования, то это следует понимать так, что интегрирование берется по всей группе.

[††] Нам иногда удобно будет себе представить, что множество X вложено в бикомпактное хаусдорфово множество X_∞, получаемое из X путем присоединения к нему абстрактной точки ∞, причем под окрестностью точки ∞ понимается любая совокупность всех точек, не принадлежащих какому-либо компакту $F \subset X$.

[†††] $L_{1,2}(G)$ – пересечение $L_1(G)$ и $L_2(G)$.

4^0. Если $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}$ или, более обще, $f_1, f_2 \in L_{1,2}(G)$, то

$$f(g) = f_1(g) * f_2(g) = \int f_1(g-h) f_2(h) dh \in \mathfrak{M}.$$

Это легко следует из того, что если $f = f_1 * f_2$, то

$$P_\chi(f) = P_\chi(f_1) P_\chi(f_2) \quad (\chi \in X).$$

Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех непрерывных функций $\varphi P f$, где f пробегает $\mathfrak{M}$. В силу 4^0 и 2^0 имеет место

5^0. $\mathfrak{N}$ – линейное кольцо. Если $\varphi = Pf \in \mathfrak{M}$, то и функции $\bar{\varphi}(\chi)$, $\varphi(\chi+\alpha) = P_\chi\{\exp(i\alpha g) f(g)\}$, $\varphi(\chi)\exp(i\chi a) = P_\chi\{f(g+a)\}$ принадлежат $\mathfrak{M}$.

Для любой функции $\varphi = Pf \in \mathfrak{M}$, положим

$$I(\varphi) = f(0) \quad (\varphi \in \mathfrak{N}). \tag{1}$$

Очевидно, функционал $I(\varphi)$ однороден и аддитивен; кроме того, в силу 4^0 он положителен, т.е. $I(\varphi) > 0$ при $\varphi(\chi) \geq 0, \not\equiv 0$ $(\chi \in X)$; отсюда следует его однозначность. Из двух последних равенств предложения 5^0 следует, что

$$I\{\varphi(\chi+\alpha)\} = I\{\varphi(\chi)\} \quad (\alpha \in X) \tag{2}$$

и для любого $f \in \mathfrak{M}$

$$f(g) = I\{\varphi(\chi)\exp(-i\chi g)\}, \text{ где } \quad \varphi(\chi) = \int f(g)\exp(i\chi g) dg. \tag{3}$$

6^0. Любая вещественная (неотрицательная) непрерывная функция $\psi(\chi)$ $(\chi \in X)$, стремящаяся к нулю при $\chi \to \infty$, есть равномерный предел некоторой последовательности вещественных (соответственно неотрицательных) функций из $\mathfrak{N}$.

Для вещественного ψ предложение легко следует из общих теорем M.H. Stone [8] о подкольцах колец непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном множестве.

Для неотрицательных ψ следует рассмотреть $\sqrt{\psi}$ и применить 6^0 для первого случая.

7^0. Пусть $F \subset X$ – компакт, а $v(\chi) \in \mathfrak{N}$ удовлетворяет условиям:

$$v(\chi) \geq 0 \text{ при } \chi \in X, \quad v(\chi) > 1 \text{ при } \chi \in F.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $u(\chi) \in \mathfrak{N}$ такая, что:

$$0 \leq u(\chi) \leq v(\chi) \text{ при } \chi \in X, \quad 1 < u(\chi) < 1 + \varepsilon \text{ при } \chi \in F.$$

Это предложение доказывается с помощью 6^0 и того, что $\mathfrak{N}$ – кольцо.

8^0. Обозначим через Г совокупность всех непрерывных функций $\varphi(\chi)$ $(\chi \in X)$, обращающихся в нуль в окрестности точки ∞, а через $\mathfrak{N}_1$ – линейную оболочку $\mathfrak{N}$ и Г. Тогда существует одно и только одно однородное, аддитивное и положительное расширение I_1, функционала I на $\mathfrak{N}_1$.

Действительно, пусть ψ – произвольно выбранная функция из Г. Обозначим через φ_- и φ_+ произвольные функции из $\mathfrak{N}$ такие, что $\varphi_-(\chi) \leq \psi(\chi) \leq \varphi_+(\chi)$ $(\chi \in X)$. Тогда, если I_1 – требуемое расширение функционала I, то $I(\varphi_-) \leq I_1(\psi) \leq I(\varphi_+)$. Если мы докажем, что $\sup I(\varphi_-) = \inf I(\varphi_+)$, то эта величина и будет единственно возможным значением $I_1(\psi)$.

Не нарушая общности, можем считать, что $|\psi(\chi)| \leq 1$ $(\chi \in X)$. Пусть $F \subset X$ – компакт, вне которого $\psi(\chi) = 0$. Выберем такое $u_\varepsilon(\chi) \in \mathfrak{N}$, что $1 < u_\varepsilon(\chi) < 1 + \varepsilon$ при $\chi \in F$, $0 \leq u_\varepsilon(\chi) \leq 1 + \varepsilon$ при $\chi \in X$, и, кроме того, такое $\varphi_\varepsilon \in \mathfrak{N}$, что $|\psi(\chi) - \varphi_\varepsilon(\chi)| < \varepsilon$ $(\chi \in X)$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$|\psi(\chi) - \varphi_\varepsilon(\chi)u_\varepsilon(\chi)| < 2\varepsilon u_\varepsilon(\chi) \quad (\chi \in X). \tag{4}$$

Следовательно, если положить $\varphi_\pm(\chi) = \pm 2\varepsilon u_\varepsilon(\chi) + \varphi_\varepsilon(\chi)u_\varepsilon(\chi)$, то $\varphi_-(\chi) \leq \psi(\chi) \leq \varphi_+(\chi)$ $(\chi \in X)$ и, с другой стороны, $0 \leq I(\varphi_+) - -I(\varphi_-) \leq 4\varepsilon I(u_\varepsilon)$. Заставляя теперь ε пробегать последовательность $\varepsilon_n \to 0$ и выбирая так $u_{\varepsilon_n}(\chi)$, чтобы $u_{\varepsilon_n}(\chi) \geq u_{\varepsilon_{n+1}}(\chi)$ $(\chi \in \in X, n = 1, 2, \ldots)^\dagger$, получим $4\varepsilon_n I(u_{\varepsilon_n}) \to 0$.

Предложение 8^0 доказано.

Расширенный функционал I_1 будем теперь обозначать той же буквой I; тогда о равенстве (2) можно будет утверждать, что оно

†Что возможно в силу 7^0.

имеет место для любого $\varphi \in \mathfrak{N}_1$. Это свойство функционала I и его положительность позволяют сделать следующий вывод [см. J.v. Neumann [9], A.A. Марков [10]].

9^0. Функционалу I соответствует на X инвариантная мера Haar'a $\mu(\mathcal{E})$ $(\mathcal{E} \subset X)$ такая, что

$$I(\varphi) = \int \varphi(\chi) d\mu(\chi) \quad (\varphi \in \Gamma). \tag{5}$$

При этом $\mu(\mathcal{E})$ определяется следующим образом. Если $H \subset \subset X$ - открытое множество с компактным замыканием, то $\mu(H) = \sup I(\varphi)$, где φ - любая функция, удовлетворяющая условиям: $0 \leq \varphi(\chi) \leq 1$ при $\chi \in H$ и $\varphi(\chi) = 0$ при $\chi \overline{\in} H$. Если $\mathcal{E} \subset X$ - произвольное множество, то $\mu(\mathcal{E}) = \inf \sum \mu(H_n)$, где $\{H_n\}$ - какая-либо система множеств предыдущего типа такая, что $\mathcal{E} \subset \sum H_n$.

Вместо $\int \ldots d\mu(\chi)$ будем писать просто $\int \ldots d\chi$.

10^0. Для любого $f \in \mathfrak{M}$ имеем

$$f(g) = \int \varphi(\chi) \exp(-i\chi g) d\chi, \quad \text{где} \quad \varphi(\chi) = \int f(g) \exp(i\chi g) dg. \tag{6}$$

В силу (3) достаточно показать, что (6) имеет место для любого $\varphi = Pf$, где $f \in \mathfrak{M}_+$. Пусть U - некоторая симметрическая окрестность нуля. Тогда также

$$f_U(g) = f(g) - \frac{1}{|U|} \int\limits_U f(g-h) \exp(i\chi h) dh \in \mathfrak{M}_+ \quad (|U| = \text{mes}\, U),$$

ибо

$$Pf_U = \varphi(\chi) \Big\{ 1 - \frac{1}{|U|} \int\limits_U \exp(i\chi g) dg \Big\} \geq 0 \quad (\chi \in X).$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно малой окрестности U

$$I\Big\{\varphi(\chi)\Big[1 - \frac{1}{|U|} \int \exp(i\chi g) dg\Big]\Big\} =$$
$$= f(0) - \frac{1}{|U|} \int\limits_U f(h) \exp(-i\chi h) dh < \varepsilon. \tag{7}$$

Выберем компактное множество $F \subset X$ так, чтобы

$$1 - \frac{1}{|U|} \int\limits_U \exp(i\chi g)dg > \frac{1}{2} \quad \text{при } \chi \overline{\in} F. \tag{8}$$

Заключим F в открытое множество H (с компактным замыканием) и построим непрерывную функцию $\omega(\chi)$ такую, что $0 \le \omega(\chi) \le 1$ при $\chi \in X$, $\quad \omega(\chi) = \begin{cases} 1 & (\chi \in F), \\ 0 & (\chi \overline{\in} H). \end{cases}$ Тогда при H, достаточно близком к F, будем иметь

$$0 \le I(\varphi\omega) - \int\limits_F \varphi(\chi)d\chi = \int\limits_{H-F} \omega(\chi)\varphi(\chi)d\chi \le \int\limits_{H-F} \varphi(\chi)d\chi < \varepsilon.$$

С другой стороны, в силу (7) и (8)

$$0 \le I(\varphi) - I(\varphi\omega) = I\{(1-\omega)\varphi\} < 2I\Big\{\varphi(\chi)\times$$

$$\times\Big[1 - \frac{1}{|U|}\int\limits_U \exp(i\chi g)dg\Big]\Big\} < 2\varepsilon.$$

Откуда $0 \le I(\varphi) - \int\limits_F \varphi(\chi)d\chi < 3\varepsilon$.

Предложение 10^0 доказано.

На группе характеров X введем в рассмотрение классы функций $L_p(X)$, аналогичные классам $L_p(G)$; кроме того, в классах $L_2(G)$ и $L_2(X)$ введем обычным образом скалярное произведение и норму $\| \dots \|$, превращающие их в пространства Гильберта.

11^0. Если $f \in L_{1,2}(G)$, то $Pf \in L_2(X)$ и $\| Pf \| = \| f \|$. Действительно, если $f \in L_{1,2}(G)$ и $\varphi = Pf$, то $|\varphi(\chi)|^2 = P_\chi F$, где $F(g) = \int f(g+h)\overline{f(h)}dh \in \mathfrak{M}_+$. Откуда $F(0) = \int |f(h)|^2 dh = I\{|\varphi(\chi)|^2\} = \int |\varphi(\chi)|^2 d\chi$.

12^0. Множество $\mathfrak{N}$ плотно в $L_2(X)$.

Для этого достаточно доказать, что замыкание множества $\mathfrak{N}$ в $L_2(X)$ содержит Г. Но если $\psi \in \Gamma$ $\;(|\psi(\chi)| \le 1)$, то для функций $\varphi_{\varepsilon_n}(\chi) \in \mathfrak{N}$ и $u_{\varepsilon_n}(\chi) \in \mathfrak{N}$, введенных при доказательстве 8^0, в силу (4)

$$\int |\psi(\chi) - \varphi_{\varepsilon_n}(\chi)u_{\varepsilon_n}(\chi)|^2 d\chi <$$

$$< 4\varepsilon_n^2 \int |u_{\varepsilon_n}(\chi)|^2 d\chi \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Пусть $f \in L_2(G)$, а $\varphi \in L_2(X)$; условимся писать $\varphi = \mathbf{P}f$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $D_\varepsilon \subset G$ такой, что

$$\| \varphi(\chi) - \int\limits_D f(g) \exp(i\chi g) dg \| < \varepsilon$$

для всякого компакта $D \supset D_\varepsilon$.

Аналогично определим преобразование $f = \mathbf{Q}\varphi$, преобразующее функции $\varphi \in L_2(X)$ в функции $f \in L_2(G)$†.

Теорема. *Преобразование* $\mathbf{P}f$ *имеет смысл для любого* $f \in \in L_2(G)$ *и является линейным изометрическим преобразованием всего* $L_2(G)$ *на все* $L_2(X)$. *Преобразование* $\mathbf{Q}\varphi$ *имеет смысл для любого* $\varphi \in L_2(X)$ *и является обратным по отношению к преобразованию* $\mathbf{P}$: $\mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = 1$.

Доказательство. Действительно, в силу 10^0 и определения $\mathbf{P}$: $\mathbf{P}f = Pf$, если $f \in L_{1,2}(G)$. С другой стороны, так как $L_{1,2}(G)$ плотно в $L_2(G)$, то в силу 11^0 операция Pf может быть продолжена с сохранением непрерывности, а значит, линейности и изометричности на все $L_2(G)$. Легко видеть, что это расширение совпадает с Pf. В силу 12^0 $\mathbf{P}L_2(G) = L_2(X)$. Аналогично, если $\varphi \in \mathfrak{N}$ ($\subset L_2(X)$), то

$$\mathbf{Q}\varphi = \int \varphi(\chi) \exp(-i\chi g) d\chi = \mathbf{P}^{-1}\varphi.$$

Так как $\mathfrak{N}$ плотно в $L_{1,2}(X)$, то нетрудно заключить, что это равенство имеет место для всех $\varphi \in L_{1,2}(X)$. Но тогда вообще $Q\varphi = P^{-1}\varphi$ ($\varphi \in L_2(X)$).

Пользуясь доказанной теоремой, нетрудно показать, что множество $\mathfrak{M}_+$ есть не что иное, как совокупность всех непрерывных интегрируемых эрмитово-положительных функций.

Заканчивая статью, заметим еще, что также известные в теории вероятностей теоремы о сходимости характеристических

† При этом вместо функции $\exp(i\chi g)$ придется воспользоваться функцией $\exp(-i\chi g)$.

функций распределений переносятся на той случай, когда случайным элементом является произвольный элемент группы G.

Список литературы

[1] *Гельфанд И.М., Райков Д.А.* // ДАН СССР. - 1940. - **XXVIII**, № 3.

[2] *Райков Д.А.* // Там же. - № 4.

[3] *Повзнер А.Я.* // Там же.

[4] *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы, 1938.

[5] *Saks S.* (приложение S. Banach'a) Théorie de l'intégrale. - Варшава, 1933; Успехи мат. наук. - 1936. - II.

[6] *v. Neumann J.* // Мат. сб. - 1936. - **1**, № 5.

[7] *Kakutani S.* // Proc. Imp. Acad. Tokyo. - 1938. - **XIV**.

[8] *Stone M.H.* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1937. - **41**. - P.375.

[9] *v.Neumann J.* Compositio Matematica. - 1935. - **I**, N1.

[10] *Марков А.А.* // Мат. сб. - 1938. - **4**, № 1. - С.165.

ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ БИКОМПАКТНОЙ ГРУППЫ И КВАДРАТНОЙ БЛОК-АЛГЕБРЫ

(Доклады АН СССР. – 1949. – Том LXIX, № 6)

Как известно, всякой бикомпактной группе G соответствует так называемая представляющая алгебра функций $\mathcal{G}(G)$, получающаяся как линейная комплексная оболочка элементов всех линейных непрерывных представлений группы G. В работе [1] автор доказал, что всякий линейный алгебраически положительный функционал на $\mathcal{G}(G)$ скалярно положителен, и отсюда получил, что группа G всегда изоморфна группе представлений представляющей алгебры $\mathcal{G}(G)$ (определение группы представлений алгебры $\mathcal{G}(G)$ приводится ниже). Д.А. Райков обратил внимание автора на то, что последнее предложение уже получено ранее другим методом Т. Таннака [2], который назвал его (а за ним и другие авторы [3]) принципом двойственности, имея в виду, что оно является обобщением известного принципа двойственности Л.С. Понтрягина [4] для коммутативных бикомпактных и дискретных групп. Вместе с тем предложение Таннака не является полным обобщением указанного принципа двойственности Л.С. Понтрягина: в то время как у Л.С. Понтрягина двойственные классы групп определяются независимо друг от друга, класс алгебр, двойственных к некоммутативным бикомпактным группам, не получил у Таннака независимой алгебраической характеристики.

Упоминавшаяся теорема об алгебраически положительных функционалах на алгебрах $\mathcal{G}(G)$ была доказана на основе свойств построенного нами [5] на группе G полного нормированного кольца функций $R(G)$, которое следует рассматривать как наиболее естественный аналог кольца абсолютно сходящихся тригонометрических рядов.

Оказывается, что более полное использование этого кольца приводит к полному обобщению принципа двойственности Л.С. Понтрягина.

В этой заметке лишний раз подтверждается важность для теории групп методов замечательной теории нормированных колец И.М. Гельфанда [6].

1. Пусть $\mathcal{G}$ – некоторая коммутативная алгебра (с конечным или бесконечным базисом) над полем комплексных чисел. Отображение $a \to \bar{a}$ алгебры $\mathcal{G}$ называется инволюцией, если оно совпадает со своим обратным, сохраняет групповые операции сложения и умножения и относит элементу λa $(a \in \mathcal{G},\ \lambda$ – комплексное число) элемент $\bar{\lambda}\bar{a}$.

Коммутативная алгебра $\mathcal{G}$ с единицей e и инволюцией $a \to \bar{a}$ называется квадратной блок-алгеброй, если она обладает базисом, который можно разбить на непересекающиеся совокупности U_ν ("блоки") по n_ν^2 $(\nu \in N)$ элементов (n_ν называется порядком блока U_ν), расположенных в виде квадратных матриц

$$U_\nu = \| u_{jk}^{(\nu)} \| \quad (j,k = 1,2,\dots,n_\nu;\ \nu \in \mathbb{N})$$

с соблюдением следующих 5 условий:

1^0. В "блок-базис" $\mathcal{U} = \{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ входит блок, состоящий из одного элемента e .

2^0. Если блок $U = \| u_{jk} \|_1^n \in \mathcal{U}$, то и блок $\bar{U} = \| \bar{u}_{jk} \|_1^n$ или блок, ему эквивалентный $\in \mathcal{U}$, при этом

$$UU^* = \| \delta_{jk} e \|_1^n, \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k), \\ 0 & (j \neq k), \end{cases} \tag{1}$$

где U^* – матрица, получаемая из U путем транспонирования.

3^0. Всяким двум блокам $U, V \in \mathcal{U}$ порядков m, n соответствует числовая унитарная матрица $\mathcal{E}_{UV}$ порядка mn такая, что кронекерово произведение

$$U \times V = \mathcal{E}_{UV}^{-1}(W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_P)\mathcal{E}_{UV}, \tag{2}$$

где $W_k \in \mathcal{G}$ $(k = 1, ..., p)$, а $\oplus$ – знак прямого сложения в том числе, как оно употребляется для матриц.

4^0. Если $V = \bar{U}$, то $W_1 = e$, а $W_2, ..., W_p$ отличны от e.

5^0. Если $V \neq \overline{U}$, то ни один из блоков $W_1, W_2, ..., W_p$ не совпадает с e.

Нетрудно убедиться в том, что условие (1), при выполнении всех прочих условий из $1^0 - 4^0$, эквивалентно тому, что в матрице $\mathcal{E}_{U\bar{U}} =\| \varepsilon_{ii';kk'} \|$ элементы первой строки имеют следующие модули:

$$|\varepsilon_{11,kk'}| = \frac{1}{\sqrt{n}}\delta_{kk'} \quad (k, k' = 1, 2, ..., n). \tag{3}$$

2. Отображение g блок-базиса $\mathcal{U} = \{U_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ в систему $\{g(U_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ числовых унитарных матриц $g(U_\nu)$ $(\nu \in \mathbb{N})$ соответственно тех же порядков, что и матрицы U_ν $(\nu \in \mathbb{N})$ назовем представлением алгебры $\mathcal{G}$, если все соотношения (1) и (2) сохраняют силу при замене U, V и W_k $(k = 1, ..., p)$ на $g(U), g(V)$ и $g(W_k)$ $(k = 1, 2, ..., p)$.

Совокупность всех представлений g алгебры $\mathcal{G}$ обозначим через $G(\mathcal{G})$. Легко видеть, что всякие два представления $g, h \in G(\mathcal{G})$ порождают третье представление $f \in G(\mathcal{G})$, определяемое равенством:

$$f(U_\nu) = g(U_\nu)h(U_\nu) \quad (\nu \in \mathbb{N}).$$

Положим $f = gh$. Нетрудно показать, что при таком определении произведения $G(\mathcal{G})$ становится группой, причем единицей этой группы будет представление, относящее каждому блоку U_ν $(\nu \in \mathbb{N})$ единичную матрицу порядка $n_\nu (\nu \in \mathbb{N})$. Эта группа станет бикомпактной топологической группой, если ввести в нее топологию следующим образом. Под окрестностью элемента $g_0 \in$ $\in G(\mathcal{G})$ будем понимать всякое множество всех элементов $g \in$ $\in G(\mathcal{G})$, удовлетворяющих системе неравенств вида

$$\| g(U_k) - g_0(U_k) \|_c < \varepsilon \quad (k = 1, 2, ..., n).$$

Здесь ε – любое положительное число, а $U_1, ..., U_n$ – произвольная система любого числа блоков из $\mathcal{U}$.

Поясним еще, что, если $A = \| a_{ik} \|_1^n$ $(n = 1, 2, ...)$ – некоторая матрица с комплексными элементами, то через $\| A \|$ мы обозначаем наибольшее характеристическое число эрмитово-положительной матрицы $\sqrt{AA^*}$. Функционал $\| A \|_c$ является некоторой нормой в пространстве всех матриц n-го порядка. В дальнейшем нам понадобится и сопряженная к $\| A \|_c$ норма $\| A \|_\ell$, определяемая равенствами (см. (7)):

$$\| A \|_\ell = \sup_{\|z\|_c = 1} |\sigma(Az)| = \sigma(\sqrt{AA^*}) = \sigma(\sqrt{A^*A}).$$

Через $\sigma(C)$ мы обозначаем след матрицы C.

3. Сформулируем теперь

Принцип двойственности. *Пусть G – некоторая бикомпактная группа; тогда ее представляющая алгебра $G(\mathcal{G})$ есть квадратная блок-алгебра.*

Пусть $\mathcal{G}$ – некоторая абстрактно заданная квадратная блок-алгебра.

Пусть $\mathcal{G}$ – некоторая абстрактно заданная квадратная блок-алгебра, а $G(\mathcal{G})$ – ее группа представлений. Тогда $\mathcal{G}$ изоморфно представляющей алгебре $\mathcal{G}(G)$ своей группы представлений $G = G(\mathcal{G})$.

Доказательство. Первая часть теоремы устанавливается весьма просто. Приведем доказательство второй части.

Итак, пусть $\mathcal{G}$ – некоторая блок-алгебра с блок-базисом $\mathcal{U} = \{U_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$.

Рассмотрим линейное множество R формальных бесконечных сумм

$$\varphi = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \sigma(A_\nu U_\nu), \tag{4}$$

в которых A_ν – квадратные матрицы порядков $n_\nu (\nu \in \mathbb{N})$, удовлетворяющие условию

$$\| \varphi \| = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \| A_\nu \|_\ell < \infty.$$

Легко видеть, что R – банахово (полное нормированное) пространство.

Алгебру $\mathcal{G}$ можно рассматривать как плотную часть R. Легко проверяется, что, в силу условия 3^0, для $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$:

$$\| \varphi\psi \| \leq \| \varphi \| \cdot \| \psi \| . \tag{5}$$

Следовательно, операция умножения, заданная в $\mathcal{G}$, может быть расширена на все R с сохранением свойства (3), после чего R станет полным нормированным кольцом.

Обозначим через G_1 бикомпактное множество всех максимальных идеалов кольца R. Кольцо гомоморфно некоторому кольцу $R(G_1)$ непрерывных функций на G_1 (см. (6)), и при этом гомоморфизме всякий элемент $\varphi \in R$ переходит в функцию $\varphi(g_1)$ ($g_1 \in \in G_1$) такую, что $|\varphi(g_1)| \leq \| \varphi \|$ $(g_1 \in G_1)$. В частности, матрица $U \in \mathcal{U}$ перейдет в матрицу-функцию $U_n(g)$ такую, что для любой комплексной матрицы $A = \| a_{ik} \|_1^n$ того же порядка

$$|\sigma(AU(g_1))| \leq \| \sigma(AU) \| = \| A \|_\ell \quad (g_1 \in G_1).$$

Но тогда

$$\| U(g_1) \|_c = \max_{\|A\|_\ell = 1} |\sigma(AU(g_1))| \leq 1 \quad (g_1 \in G_1). \tag{6}$$

В силу соотношения (3) матрица $\bar{U} \in \mathcal{U}$ переходит в матрицу, получающуюся транспонированием из матрицы $U^{-1}(g)$ и, таким образом, также

$$\| U^{-1}(g_1) \|_c = \| \bar{U}(g_1) \|_c \leq 1. \tag{7}$$

Сопоставляя (6) и (7), заключаем, что $U(g_1)$ $(g_1 \in G_1)$ есть унитарная матрица.

После этого ясно, что отображение $U_\nu \to U_\nu(g_1)$ $(\nu \in \mathbb{N})$, порождаемое максимальным идеалом g_1, есть некоторое представление алгебры $\mathcal{G}$.

Нетрудно также убедиться в том, что и, наоборот, всякое представление $U_\nu \to g(U_\nu)$ $(\nu \in \mathbb{N})$ алгебры $\mathcal{G}$ порождает некоторый максимальный идеал $g_1 \in G_1$ такой, что $g(U_\nu) = U_\nu(g_1)$

($\nu \in \mathbb{N}$). Для этого достаточно заметить, что представление $U_\nu \to g(U_\nu)$ ($\nu \in \mathbb{N}$) порождает непрерывное отображение $\varphi \to \to g(\varphi)$ кольца R в поле комплексных чисел, если положить для $\varphi \in R$, имеющего вид (2):

$$g(\varphi) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \sigma(A_\nu g(U_\nu))..$$

Таким образом, $G(\mathcal{G})$ и G_1 находятся в одно-однозначном соответствии. Если вспомнить, как определялась топология на $G(\mathcal{G})$ и как она определяется на множестве максимальных идеалов [9], то обнаружится, что это соответствие топологическое.

Мы можем, следовательно, отождествить G_1 и $G = G(\mathcal{G})$, при этом $U_\nu(g)$ ($g \in G$) становятся непрерывными унитарными представлениями группы G.

Таким образом, гомоморфизм $R \to R(G_1) = R(G)$ порождает гомоморфизм алгебры $\mathcal{G} \subset R$ в алгебру $\mathcal{G}(G) \subset R(G)$. Чтобы последний гомоморфизм был изоморфизмом, достаточно, чтобы отображение $R \to R(G)$ было изоморфизмом, т.е. чтобы R не имело радикала. Это устанавливается следующим образом.

Пусть ε – тот индекс из $\mathbb{N}$, для которого $U_\varepsilon = \ell$. Положим для всякого $\varphi \in R$ вида (4):

$$F(\varphi) = A_\varepsilon.$$

Здесь A_ε– некоторое комплексное число. Таким образом, $F(\varphi)$ – некоторый линейный функционал и притом непрерывный, так как

$$|F(\varphi)| = |A_\varepsilon| \leq \| \varphi \| \quad (\varphi \in R).$$

Легко видеть, что, в силу условий $4^0, 5^0$, для всяких $\varphi, \psi \in \mathcal{G}$, где φ имеет вид (4), а

$$\psi = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \sigma(B_\nu U_\nu),$$

имеет место равенство

$$F(\varphi, \bar{\psi}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \sigma(A_\nu B_\nu^*) h_\nu^{-1}.$$

В силу непрерывности F это равенство будет иметь место и для любых $\varphi, \psi \in R$. В частности, $F(\varphi\psi) \geq 0$ и знак равенства имеет место только при $\varphi = 0$. Но нормированное кольцо с инволюцией, на котором можно определить строго позитивный функционал, по теореме Д.А. Райкова, никогда не имеет радикала (см. [8, 9]).

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. - 1941. - **30**, $\mathcal{N}$ 1.

[2] *Tannaka T.* // Tohoku Math. Journ. - 1938. - **45**, N 1.

[3] *Шевалле К.* Теория групп Ли, 1946.

[4] *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы, 1938.

[5] *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. - 1941. -**30**, $\mathcal{N}$ 1.

[6] *Гельфанд И.М., Райков Д.А., Шилов Г.Е.* // Усп. матем. наук. - 1946. - **1**, вып.2. - С.48.

[7] *v.Neumann J.* // Изв. Ин-та матем. и мех. при Томск. гос. ун-те. - 1937. - **1**. - С.289.

[8] *Райков Д.А.* // ДАН СССР. - 1946. - **54**, $\mathcal{N}$ 5.

[9] *Гельфанд И.М., Наймарк М.А.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. - 1948. - **12**. - С.445.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ, ИЛИ НА ПОЛУОСИ, ИЛИ ВНЕ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА [†]

(Совместно с А.А. Нудельманом)

(Математические исследования. – 1981. – Вып. 61)

Настоящая статья посвящена обобщению на произвольные целые функции следующих хорошо известных предложений.

Предложение I. *Всякий алгебраический многочлен $f(x)$ положительный на $(-\infty,\infty)$, допускает представление*

$$f(z)=A^2(z)+B^2(z), \tag{1}$$

где $A(z)$ и $B(z)$ – вещественные алгебраические многочлены, которые могут быть выбраны так, чтобы все их корни были простыми, вещественными и перемежались.

Предложение II. *Всякий алгебраический многочлен $P(z)$, положительный на $[0,\infty)$, допускает представление*

$$f(z)=C^2(z)+zD^2(z), \tag{2}$$

[†] Далеко идущее обобщение этих результатов дано в статье: *Krein M.G., Levin B.Ja., Nudelman A.A.* On special representations of polinomials that are positive on a system of closed intervals and some applications // Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics. – N.Y.: Oxford Univ. Press, 1990. – P. 56–140. (*Прим. ред.*)

где $C(z)$ и $D(z)$ – вещественные алгебраические многочлены. Эти многочлены могут быть выбраны, и притом единственным способом так, чтобы выполнялись условия: 1) степень $D(z)$ либо равна степени $C(z)$, либо меньше ее на единицу; 2) $C(0) > 0$, $D(0) > 0$; 3) корни $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ соответственно многочленов $C(z)$ и $D(z)$ все простые, положительные и перемежаются таким образом, что

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \ldots .$$

При надлежащей нормировке многочленов $A(z)$ и $B(z)$, у которых все корни вещественные, простые и перемежаются, их отношения представляются в виде

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \alpha + \beta z + \sum_{j=1}^{m} \frac{\rho_j}{\xi_j - z},$$

где α – вещественное число, $\beta \geq 0$, $\rho_j > 0$, ξ_j – корни $A(z)$.

Таким образом, отношение B/A входит в класс $\mathcal{R}$ функций, голоморфных в открытой верхней полуплоскости и имеющих в ней неотрицательную мнимую часть.

Поэтому при обобщении предложения I будем требовать, чтобы отношение B/A входило в класс $\mathcal{R}$.

Исходя из аналогичных соображений, при обобщении предложения II будем требовать, чтобы отношение D/C принадлежало классу S тех функций из $\mathcal{R}$, которые регулярны и неотрицательны на отрицательной полуоси.

При тех или иных предположениях о росте целой функции близкие задачи решались рядом авторов [1 – 4] (см. также [5]). В обобщение предложения I ставилась задача о представлении неотрицательной на $(-\infty, \infty)$ функции $f(z)$ в виде

$$f(z) = h(z)\bar{h}(z), \tag{3}$$

где $h(z)$ – целая функция, растущая "вдвое медленнее", чем $f(z)$, и не имеющая корней в нижней полуплоскости. При выполнении для вещественных $A(z)$ и $B(z)$ условия $B/A \in \mathcal{R}$ имеем Im $(B/A) < 0$ при Im $z < 0$, вследствие чего уравнение $B/A = i$, а вместе с ним и функция $h(z) = A(z)+iB(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, так что при этом условии представление (1) одновременно дает факторизацию (3). Обратное, однако, неверно: из того, что $h(z) = A(z) + iB(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, вообще говоря, не следует, что B/A (или $-B/A$) $\in \mathcal{R}$ [3].

Таким образом, здесь предложения I и II при более жестких связях, накладываемых на функции $A(z), B(z)$ (соответственно $C(z), D(z)$), обобщаются без каких-либо ограничений на рост функции $f(z)$ (теоремы 1 и 3). Эти связи эквивалентны тому, что

$$|h(z)/\bar{h}(z)| \leq 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \geq 0.$$

Впрочем, для установления теоремы 1 оставалось немного добавить к тому, что было известно. В частности, достаточность условия (9) в теореме 1 получена иным путем в книге Л. де Бранжа [6]. В дополнение к теоремам 1 и 3 здесь устанавливаются формулы, позволяющие находить все возможные пары функций $A(z)$, $B(z)$, соответственно $C(z), D(z)$, подчиняющиеся указанным связям и дающие представление (1), соответственно (3) (теоремы 2 и 4). Отметим, что потребность в этих формулах возникла при решении одной обратной задачи из теории спектральных функций струны [7].

Из предложения II для многочлена $f(z)$ степени $2n$, положительного в $(-\infty, a]$ и $[b, \infty)$, путем преобразования

$$f(z) \to p(\zeta) = (1-\zeta)^{2n} f((b\zeta - a)/(1-\zeta))$$

получается

Предложение III. *Всякий алгебраический многочлен $f(z)$, положительный в $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$, допускает представление*

$$f(z) = A^2(z) + (z-a)(z-b)B^2(z), \tag{4}$$

причем многочлены $A(z)$ и $B(z)$ могут быть выбраны, и притом единственным способом, так, чтобы выполнялись условия: $A(b) > 0$ и отношение $(z-a)B(z)/A(z)$ принадлежит классу $\mathcal{S}(E)$ тех функций из $\mathcal{R}$, которые регулярны и неотрицательны в интервале (a, b).

Это предложение также обобщается на случай целых функций (теорема 5), причем это обобщение по понятной причине не может быть получено из обобщения предложения II путем указанного выше преобразования для многочленов.

Представление типа (4) получено А.М. Рыбалко [8] для целых функций экспоненциального типа при несколько иных условиях на функции $A(z)$ и $B(z)$.

Представления (1), (2), (4) для многочленов играли важную роль в исследованиях П.Л.Чебышева и его школы при нахождении решений ряда экстремальных задач, а впоследствии – в других проблемах конструктивной теории функций.

При решении вопроса о нахождении всех пар (A, B), удовлетворяющих нужным условиям, пришлось рассмотреть функциональное уравнение Пелли

$$X^2(z) + R(z)y^2(z) = 1$$

при $R(z) = (z-a)(z-b)$. Изучение этого уравнения в случае, когда R – многочлен и X, Y должны быть многочленами, восходит еще к мемуару Абеля [9]. Ряд результатов, относящихся к этому уравнению для случая, когда $R(z)$ – целая функция того или иного класса, а $X(z)$ и $Y(z)$ – целые функции не выше экспоненциального типа, получены в теории λ-зон устойчивости решений задачи Штурма–Лиувилля с периодическими коэффициентами [10, 11].

Сравнительно недавно обнаружилось, что представления (1), (2), (4) играют фундаментальную роль при построении естественных континуальных ортогональных систем функций в пространстве $L^2(-\infty, \infty, \Omega)$, где Ω – некоторый вес специального вида [12 – 16]. Новому подходу к этим вопросам авторы надеются посвятить отдельную статью.

§1. Вспомогательные предложения

1. Приведем необходимые для дальнейшего сведения о функциях классов $\mathcal{R}, \mathcal{S}(E)$ и $\mathfrak{S}$ (подробное изложение см. в [17, 18]).

Как уже было сказано, функция $F(z)$ относится к классу $\mathcal{R}$, если она голоморфна в верхней полуплоскости и $\operatorname{Im} F(z) \geq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$[†].

Хорошо известно, что $F \in \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда имеет место представление

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\right) d\sigma(t) \quad (\operatorname{Im} z > 0), \qquad (5)$$

где $\bar{\alpha} = \alpha$, $\beta \geq 0$, $d\sigma(t) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+t^2)^{-1} d\sigma(t) < \infty$. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что если функция $F \in \mathcal{R}$ регулярна и вещественна в некотором интервале вещественной оси, то в этом интервале $d\sigma(t) = 0$. Легко видеть, что $F \in \mathcal{R}$ тогда и только тогда, когда $-1/F \in \mathcal{R}$.

Для конечного или бесконечного интервала $[a, b]$ положим $E = (-\infty, \infty) \setminus [a, b]$ и обозначим через $\mathcal{S}(E)$ класс функций, входящих в $\mathcal{R}$, регулярных и неотрицательных в (a, b). Если $a = -\infty, b = 0$, то соответствующий класс функций обозначается через $\mathcal{S}$. Функция $F(z)$ принадлежит $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $-1/zF(z) \in \mathcal{S}$, а также тогда и только тогда, когда $zF(z^2) \in R$[††]. В связи с последним утверждением заметим, что функция $G(z)$ допускает представление $G(z) = zF(z^2)$, где $F \in \mathcal{S}$, в том и только в том случае, когда она принадлежит классу $\mathfrak{G}$ тех функций из $\mathcal{R}$, которые обладают свойством $G(-\bar{z}) = -\overline{G(z)}$.

В случае, когда (a, b) – конечный интервал, если положить $\zeta = (b-z)/(a-z), \Phi(\zeta) = F(z)$, то $F \in \mathcal{S}(E)$ в том и только том случае, когда $\Phi \in \mathcal{S}$. Пользуясь приведенными выше критериями принадлежности Φ классу $\mathcal{S}$, получаем, что $F \in \mathcal{S}(E)$ тогда и только тогда, когда $(z-a)/(b-z)F(z) \in \mathcal{S}(E)$, а также тогда и только тогда, когда $\zeta F[(b - a\zeta^2)/(1-\zeta^2)] \in \mathcal{R}$, т.е. тогда и

[†]Требование голоморфности можно заменить требованием мероморфности в верхней полуплоскости; при выполнении этого требования из того, что $\operatorname{Im} F(z) \geq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$, вытекает голоморфность $F(z)$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

[††]Функцию $F(z) \in \mathcal{S}(E)$ естественно считать аналитически продолженной в нижнюю полуплоскость посредством формулы $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$.

только тогда, когда $[(b-z)/(a-z)]F[(ab-z^2)/(a+b-2z)] \in \mathcal{R}$. В дальнейшем этот критерий применяется при $a=-1, b=1$; в этом случае последнее условие принимает вид $\frac{z-1}{z+1}F\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) \in \mathcal{R}$.

К каждому из классов $\mathcal{R}, \mathfrak{S}$ и $\mathcal{S}(E)$ удобно причислять функцию $F(z) \equiv \infty$.

2. Отметим предложения, которые можно рассматривать как "законы композиции" функций того или иного класса, не выводящие из этого класса.

а) Если $u, v \in \mathcal{R}$, то

$$F = \frac{u+v}{1-uv} \in \mathcal{R}.$$

Действительно, $1-u(z)v(z) \neq 0$ при $\mathrm{Im}\ z > 0$, так как $\mathrm{Im}\ u(z) > 0$ и $\mathrm{Im}\ (1/v(z)) < 0$, и

$$\mathrm{Im}\ F(z) = \frac{\mathrm{Im}\ u(z)(1+|v(z)|^2) + \mathrm{Im}\ v(z)(1+|u(z)|^2)}{|1-u(z)v(z)|^2}.$$

б) Если $u, v \in \mathcal{S}$, то

$$F(z) = \frac{u(z)+v(z)}{1-zu(z)v(z)} \in \mathcal{S}.$$

Действительно, положив $U(z) = zu(z^2)\ \ (\in \mathcal{R})$,

$$V(z) = zv(z^2)\ \ (\in \mathcal{R}),$$

получим, что

$$zF(z^2) = \frac{U(z)+V(z)}{1-U(z)V(z)} \in \mathcal{R}.$$

Будем для простоты считать, что $a=-1, b=1$.

в) Если $u, v \in \mathcal{S}(E)$, то

$$F(z) = \frac{u(z)+v(z)}{1-[(z-1)/(z+1)]u(z)v(z)} \in \mathcal{S}(E).$$

Действительно, если

$$U(z) = \frac{z-1}{z+1}u\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)(\in \mathcal{R}), \quad V(z) = \frac{z-1}{z+1}v\left(\frac{z^2+1}{2z}\right),$$

то

$$\frac{z-1}{z+1}F\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)=\frac{U(z)+V(z)}{1-U(z)V(z)}\in\mathcal{R}.$$

§2. Некоторые специальные задачи типа проблемы Неванлинны–Пика

1. **З а д а ч а** $(\mathcal{R};i)$. Пусть

$$z=\{\zeta_k\}\quad(\operatorname{Im}\zeta_k>0,\ \zeta_k\to 1)$$

– заданная последовательность комплексных чисел. Через $(\mathcal{R};i)$ обозначим задачу нахождения всех функций $F\in\mathcal{R}$, для которых последовательность z является последовательностью корней разности $F-i$ (и ее соответствующих производных в случае совпадения нескольких значений ζ_k). Одной из таких функций является $F_0(\zeta)\equiv i$. Для существования других решений задачи $(\mathcal{R};i)$ необходимо, чтобы сходилось произведение Бляшке

$$\varphi(z)=\prod_k[(\zeta-\zeta_k)/(\zeta-\bar{\zeta}_k)],$$

что равносильно выполнению условия

$$\sum_k\operatorname{Im}\zeta_k<\infty.$$

Покажем, что это условие является также достаточным для существования решений, отличных от F_0, и найдем формулу, дающую все решения.

Пусть F – какое-либо решение задачи $(\mathcal{R};i)$. Так как $\operatorname{Im}\ F(\zeta)\geq$ ≥ 0 при $\operatorname{Im}(\zeta)>0$, то при $\operatorname{Im}\zeta>0$ функция $(F(\zeta)-i)/(F(\zeta)+i)$ по модулю ≤ 1 после деления ее на произведение Бляшке $\varphi(\zeta)$ ввиду того, что множество корней функции φ, считая с кратностями, входит в множество корней функции $F-i$ и $|\varphi(\zeta)|=1$ при $\operatorname{Im}\zeta=0$. Таким образом,

$$\frac{F(\zeta)-i}{F(\zeta)+i}=\varphi(\zeta)\frac{\Omega(\zeta)-i}{\Omega(\zeta)+i},\tag{7}$$

где $\Omega \in \mathcal{R}$. Обратно, каждой $\Omega \in \mathcal{R}$ формула (7) ставит в соответствие некоторое решение задачи $(\mathcal{R}; i)$. Следовательно, множество всех решений задачи $(\mathcal{R}; i)$ описывается формулой

$$F = \frac{[(\varphi + 1)/2]\Omega + (\varphi - 1)/2i}{-[(\varphi - 1)/2i]\Omega + (\varphi + 1)/2},$$

в которой Ω пробегает класс $\mathcal{R}$.

2. **З а д а ч а** $(\mathcal{S}; i/\sqrt{\zeta})^{\dagger}$. Пусть $z = \{\zeta_k\}$ – сходящаяся к единице последовательность чисел, расположенных в верхней полуплоскости и, возможно, на отрицательной вещественной полуоси. При этом количество отрицательных членов последовательности предполагается четным. Под задачей $(\mathcal{S}; i/\sqrt{\zeta})$ понимается задача нахождения всех $F \in \mathcal{S}$, для которых z является последовательностью корней (с учетом кратностей) разности $F(\zeta) - i/\sqrt{\zeta}$. Одно из ее решений – функция $F_0()\zeta) = i/\sqrt{\zeta}$. Для существования других решений необходимо выполнение условия (6), которое оказывается и достаточным. Для доказательства и нахождения всех решений рассмотрим вспомогательную задачу $(\mathcal{R}; i)$, связанную с последовательностью, составленной из чисел $\sqrt{\zeta_k}$ и $-\sqrt{\overline{\zeta_k}}$ при $\operatorname{Im} \zeta_k > 0$ и $\sqrt{\zeta_k}$ при $\zeta_k < 0$. Из условия (6) при $\zeta_k \to 1$ вытекает сходимость ряда $\sum \operatorname{Im} \sqrt{\zeta_k}$ и, следовательно, произведения

$$\psi(\zeta) = \prod_{\operatorname{Im} \zeta_k > 0} \frac{\zeta - \sqrt{\zeta_k}}{\zeta - \sqrt{\overline{\zeta_k}}} \prod_{\zeta_k < 0} (\zeta - \sqrt{\zeta_k}).$$

Произведение Бляшке $\varphi(\zeta)$, отвечающее вспомогательной задаче, представляется в виде $\varphi(\zeta) = \psi(\zeta)/\psi(-\zeta)$, так что ее решения описываются формулой

$$G(\zeta) = \frac{[(\psi(\zeta) + \psi(-\zeta))/2]\Omega(\zeta) + (\psi(\zeta) - \psi(-\zeta))/2i}{-[(\psi(\zeta) - \psi(-\zeta))/2i]\Omega(\zeta) + (\psi(\zeta) + \psi(-\zeta))/2},$$

---

†Здесь и в дальнейшем имеется в виду та ветвь $\sqrt{\zeta}$ в разрезанной вдоль $[0, \infty)$ плоскости, которая имеет положительную мнимую часть в верхней полуплоскости.

где $\Omega \in \mathcal{R}$. Легко видеть, что при $\Omega \in \mathcal{R}$ также $G \in \mathfrak{G}$ и, обратно, если $G \in \mathfrak{G}$, то и $\Omega \in \mathfrak{G}$. Полагая $\Omega(\zeta) = \zeta\omega(\zeta^2)$ $(\omega \in \mathcal{S}), G(\zeta) = \zeta F(\zeta^2)$ и заменяя ζ и $\sqrt{\zeta}$, получаем, что решения задачи $(\mathcal{S}; i/\sqrt{\zeta})$ описываются формулой

$$F(\zeta) = \\ = \frac{[(\psi(\sqrt{\zeta}) + \psi(-\sqrt{\zeta}))/2]\omega(\zeta) + (\psi(\sqrt{\zeta}) - \psi(-\sqrt{\zeta}))/2i\sqrt{\zeta}}{-\zeta[(\psi(\sqrt{\zeta}) - \psi(-\sqrt{\zeta}))/2i]\omega(\zeta) + (\psi(\sqrt{\zeta}) + \psi(-\sqrt{\zeta}))/2}, \tag{8}$$

в которой ω пробегает класс $\mathcal{S}$.

3. **З а д а ч а** $(\mathcal{S}(E); \sqrt{(z-a)/(b-z)})$. Пусть $z = \{z_k\}$ $(z_k \to \infty)$ - последовательность комплексных чисел, расположенных в верхней полуплоскости и, возможно, в (a, b); количество чисел, попавших в (a, b), предполагается четным. Требуется описать все $\Phi \in \mathcal{S}(E)$, для которых последовательность z является последовательностью корней (с учетом кратностей) разности $\Phi(z) - \sqrt{(z-a)/(z-b)}$. Заменой $\zeta = (z-b)/(z-a)$ эта задача сразу сводится к задаче $(\mathcal{S}; i/\sqrt{\zeta})$ для последовательности $\{\zeta_k\}, \zeta_k = (z_k - b)/(z_k - a)$. При этом условие (6) эквивалентно условию

$$\sum_k \operatorname{Im}\,(-1/z_k) < \infty.$$

При выполнении этого условия описание всех решений Φ задачи $(\mathcal{S}(E); \sqrt{(z-a)/(b-z)})$ дается с помощью формулы (8), в которой следует положить $\zeta = (b-z)/(z-a)$, $\Phi(z) = F(z)$.

§3. Целые функции, положительные в $(-\infty, \infty)$

Ниже используется следующее

Утверждение A[19]. *Пусть мероморфная функция* $\Phi(z)$ *удовлетворяет условиям:* $|\Phi(z)| \le 1$ *при* $\operatorname{Im} z \ge 0$ *и* $|\Phi(z)| \ge 1$ *при* $\operatorname{Im} z \le 0$. *Тогда* Φ *допускает представление*

$$\Phi(z) = e^{(a+ib)i}\chi(z),$$

где $\bar{a} = a, b \ge 0$,

$$\chi(z) = \prod_j [(1 - \frac{z}{z_j})/(1 - \frac{z}{\bar{z}_j})];$$

$\operatorname{Im} z_j > 0$ *(если Φ не имеет корней, то $\chi(z) \equiv 1$). При этом, если число корней z_j бесконечно велико, то выполняется условие*

$$\sum_j \operatorname{Im}(-1/z_j) < \infty, \tag{9}$$

обеспечивающее сходимость произведения χ.

Теорема 1. *Для того чтобы целая функция $f(z)$, положительная на $(-\infty, \infty)$, допускала представление*

$$f(z) = A^2(z) + B^2(z), \tag{10}$$

где A и B – целые вещественные функции, не имеющие общих корней, и такие, что $B/A \in \mathcal{R}$, необходимо и достаточно, чтобы для корней z_j функции $f(z)$, лежащих в верхней полуплоскости, выполнялось условие (9).

Доказательство. Необходимость вытекает из того, что при $B/A \in \mathcal{R}$ функция $\Phi = (A+iB)/(A-iB)$ удовлетворяет условиям утверждения A и что ее корни совпадают с корнями f, лежащими в верхней полуплоскости. Докажем достаточность.

Используя каноническое произведение Вейерштрасса, представим f в виде

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{p_j(z)} \prod_j \left(1 - \frac{z}{\bar{z}_j}\right) e^{\bar{p}_j(z)} =$$

$$= e^{g(z)} \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)\left(1 - \frac{z}{\bar{z}_j}\right) e^{2p_j(z)}.$$

Здесь g – вещественная целая функция, $2p_j(z) = p_j(z) + \bar{p}_j(z)$ – вещественные многочлены.

Так как $f(z) = e^{g(z)} p^2(z)\chi(z)$, где $p(z) = \prod_j \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{p_j(z)}$, то после введения функций

$$A_0(z) = e^{g(z)/2} p(z)(\chi(z) + 1)/2,$$

$$B_0(z) = e^{g(z)/2} p(z)(\chi(z) - 1)/2i$$

придем к равенству

$$f(z) = A_0^2(z) + B_0^2(z).$$

Отметим следующие свойства функций A_0 и B_0:

а) A_0 и B_0 – целые функции (так как каждый полюс мероморфной функции $\chi \pm 1$ является корнем той же кратности функции p).

б) A_0 и B_0 – вещественные функции (так как $\bar{\chi}(z) = 1/\chi(z)$ и $\bar{p}(z)/\chi(z) = p(z)$).

в) A_0 и B_0 не имеют общих корней (это очевидно) .

г) $B_0/A_0 = i(1-\chi)/(1+\chi)$ – (так как $|\chi(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$). Отсюда и из свойства в), в частности, следует, что все корни A_0 и B_0 вещественные, простые и перемежаются.

Пару (A, B) целых вещественных функций без общих корней, осуществляющую представление (10) при выполнении условия $B/A \in \mathcal{R}$ назовем $\mathcal{R}$-парой для f.

Теорема 2. *Множество всех $\mathcal{R}$-пар для f получается из пары (A_0, B_0) по формулам*

$$\begin{cases} A(z) = A_0(z)\cos(\alpha + \beta z) - B_0(z)\sin(\alpha + \beta z), \\ B(z) = A_0(z)\sin(\alpha + \beta z) + B_0(z)\cos(\alpha + \beta z), \end{cases} \tag{11}$$

где α пробегает множество вещественных чисел, а β – множество неотрицательных чисел.

Доказательство. Для произвольных $\alpha = \bar{\alpha}$ и $\beta \geq 0$ очевидно, что A и B – вещественные целые функции, не имеющие общих корней, $A^2 + B^2 = A_0^2 + B_0^2 = f$. Так как $u = \operatorname{tg}(\alpha + \beta z) \in \mathcal{R}$ при $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta \geq 0$ и $v = B_0/A_0 \in \mathcal{R}$, то $B/A = (u+v)/(1-uv) \in \mathcal{R}$, т.е. (A, B) есть $\mathcal{R}$-пара для f.

Обратно, пусть (A, B) есть $\mathcal{R}$-пара для f. Тогда, согласно утверждению A), поскольку $\chi = (A_0 + iB_0)/(A_0 - iB_0)$, получаем, что при некоторых $\alpha = \bar{\alpha}$ и $\beta \geq 0$

$$\frac{A(z) + iB(z)}{A(z) - iB(z)} = e^{2(\alpha+\beta z)i}\frac{A_0(z) + iB_0(z)}{A_0(z) - iB_0(z)}. \tag{12}$$

Освободившись от знаменателей и отделив при вещественных z вещественные и мнимые части, после несложных преобразований найдем, что при вещественных, а значит, и при всех имеет место тождество $(A_0(z)A(z) + B_0(z)B(z))\sin(\alpha + \beta z) = (A_0(z)B(z) - A(z)B_0(z))\cos(\alpha + \beta z)$, которое можно переписать в виде $AB_1 = BA_1$, если положить

$$\begin{cases} A_1(z) = A_0(z)\cos(\alpha+\beta z) - B_0(z)\sin(\alpha+\beta z), \\ B_1(z) = A_0(z)\sin(\alpha+\beta z) + B_0(z)\cos(\alpha+\beta z). \end{cases} \tag{13}$$

Так как $f = A_1^2 + B_1^2 = A_1^2 + (A_1B/A)^2 = (A_1/A)^2 f$, то $A_1^2(z) = A^2(z)$ и $B_1^2(z) = B^2(z)$. Поэтому $A(z) = \pm A_1(z)$ и $B(z) = \pm B_1(z)$, причем знаки должны быть одни и те же, поскольку $B/A \in \mathcal{R}$ и $B_1/A_1 \in \mathcal{R}$.

Если $A = A_1, B = B_1$, то (13) совпадает с (11), если же $A = -A_1, B = -B_1$, то (13) переходит в (11) в результате замены в (13) α на $\alpha + \pi$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось во введении, если с произвольной $\mathcal{R}$-парой (A, B) для f связать функцию $h = A + iB$, то получим целую функцию без корней в нижней полуплоскости, осуществляющую представление: $f(z) = h(z)\bar{h}(z)$. Так как в силу (11) $h^2(z) = f(z)h(z)/\bar{h}(z) = f(z)\chi(z)e^{2(\alpha+\beta z)i}$, причем $\alpha = 0$, $\beta = 0$ для $h_0 = A_0 + iB_0$, то, повторив рассуждения из [5, с. 569] применительно к нашему случаю, придем к следующим выводам:

а) если f – целая функция уточненного порядка $\rho(p)$ типа σ, то h_0 имеет тот же порядок и тип $\sigma/2$;

б) если при этом $\rho > 1$, то для любой $\mathcal{R}$-пары функция h имеет порядок $\rho(p)$ и тип $\sigma/2$.

§4. Целые функции, положительные на $[0, \infty)$

Переходя к целым функциям, положительным на $[0, \infty]$, пару (C, D) вещественных целых функций без общих корней, осуществляющих представление

$$f(z) = C^2(z) + zD^2(z) \tag{14}$$

при выполнении условий

$$C(0) > 0, \quad D/C \in \mathcal{S}, \tag{15}$$

будем называть $\mathcal{S}$-парой для f.

Теорема 3. *Для того чтобы для целой функции f, положительной на $[0,\infty)$, существовала $\mathcal{S}$-пара (C,D), необходимо и достаточно, чтобы для корней z_j этой функции, расположенных в замкнутой верхней полуплоскости, выполнялось условие*

$$\sum_j \operatorname{Im}\left(-1/\sqrt{z_j}\right) < \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Если для f имеет место (14) и (15), то, положив $C(\zeta) = f(\zeta^2), A(\zeta) = C(\zeta^2), B(\zeta) = \zeta D(\zeta^2)$, получим, что (A,B) есть $\mathcal{R}$-пара для целой функции G, положительной на $(-\infty,\infty)$. Вещественность и отсутствие общих корней у A и B очевидны, а включение $B/A \in \mathcal{R}$ следует из того, что $D/C \in \mathcal{S}$. Так как корнями G, лежащими в верхней полуплоскости, являются числа $\sqrt{z_j}$ и $-\sqrt{\bar{z}_j}$, то из теоремы 1 выводим, что выполняется условие (16).

Обратно, при выполнении (16) для функции $G(\zeta) = f(\zeta^2)$ можно построить $\mathcal{R}$-пару (A_0,B_0). Так как корни G симметричны относительно мнимой оси, то g в представлении $G(\zeta) = e^{g(\zeta)}p^2(\zeta)\times$ $\times\chi(\zeta)$ – четная функция, а $p(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$ обладают дополнительными свойствами $p(-\zeta) = \bar{p}(\zeta)$ и $\chi(-\zeta) = \bar{\chi}(\zeta)$. Поэтому A_0 – четная, а B_0 – нечетная функции, так что если положить $A_0(\zeta) = C_0(\zeta^2)$ и $B_0(\zeta) = \zeta D_0(\zeta^2)$, то пара (C_0,D_0) оказывается $\mathcal{S}$-парой для f.

Теорема 4. *1) Множество всех $\mathcal{S}$-пар (C,D) для f получается из "главной пары" (C_0,D_0) по формулам*

$$\left\{\begin{aligned} C(z) &= C_0(z)\cos\beta\sqrt{z} - \sqrt{z}D_0(z)\sin\beta\sqrt{z}, \\ D(z) &= C_0(z)(\sin\beta\sqrt{z})/\sqrt{z} + D_0(z)\cos\beta\sqrt{z}, \end{aligned}\right. \tag{17}$$

где β пробегает множество неотрицательных чисел.

2) Главная пара (C_0,D_0) обладает следующим экстремальным свойством: для любой отличной от нее $\mathcal{S}$-пары (C,D) для f при каждом $x > 0$:

$$\operatorname{sign}\left(\frac{D(-x)}{C(-x)} - \frac{D_0(--x)}{C_0(-x)}\right) = \operatorname{sign} f(-x).$$

Доказательство. 1) Каждая $\mathcal{S}$-пара (C,D) для функции f порождает $\mathcal{R}$-пару (A,B) для функции $G(\zeta) = f(\zeta^2)$:

: $A(\zeta) = C(\zeta^2)$, $B(\zeta) = \zeta D(\zeta^2)$, в которой $A(\zeta)$ – четная, $B(\zeta)$ – нечетная функции, $A(0) > 0$. Обратно, каждая $\mathcal{R}$-пара (A, B) для функции $G(\zeta) = f(\zeta^2)$, в которой $A(\zeta)$ – четная, а $B(\zeta)$ – нечетная, $A(0) > 0$, порождает $\mathcal{S}$-пару $(C(z), D(z))$ для $f(z)$: $C(z) = A(\sqrt{z})$, $D(z) = B(\sqrt{z})/\sqrt{z}$. Этим свойством обладают те и только те пары (A, B), которые получаются по формулам (11) при $\alpha \equiv 0$ $(\mathrm{mod} 2\pi)$ и при $\beta \geq 0$, откуда и следует первое утверждение теоремы.

2) Согласно (16) имеем

$$\frac{D(z)}{C(z)} = \frac{C_0(z)\omega(z) + D_0(z)}{-zD_0(z)\omega(z) + C_0(z)},$$

где $\omega(z) = (\mathrm{tg}\beta\sqrt{z})/\sqrt{z} \in \mathcal{S}$ $(\beta > 0)$. Поэтому

$$\frac{D(z)}{C(z)} - \frac{D_0(z)}{C_0(z)} =$$

$$= \frac{f(z)\omega(z)}{C_0(z)(-zD_0(z)\omega(z) + C_0(z))}. \tag{18}$$

Так как $D_0/C_0 \in \mathcal{S}$, то эта функция положительная при $z = -x < 0$, а так как $C_0(z)$ не имеет нулей на $(-\infty, 0]$ и $C_0(0) > 0$, то $C_0(-x) > 0$ и $D_0(-x) > 0$. Кроме того, $\omega(-x) > 0$. Поэтому знак разности (18) совпадает со знаком $f(-x)$.

З а м е ч а н и е. Если, кроме условия (16), выполняется условие $\sum_j (1/|z_j|) < \infty$, так что сходится произведение

$$Q(z) = \prod_{\mathrm{Im}\, z_j > 0} [(1 - z/\sqrt{z_j})(1 + z/\sqrt{\bar{z}_j})] \prod_{z_j < 0} (1 - z/\sqrt{z_j}),$$

а сама функция f допускает представление

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{\mathrm{Im}\, z_j > 0} [(1 - z/z_j)(1 - z/z_j)] \prod_{z_j < 0} (1 - z/z_j),$$

то C_0 и D_0 можно определить формулами

$$C_0(z) = e^{g(z)/2}(Q(\sqrt{z}) + Q(-\sqrt{z}))/2.$$

$$D_0(z) = e^{g(z)/2}(Q(\sqrt{z}) - Q(-\sqrt{z}))/2i\sqrt{z}.$$

При этом, так как у каждой из функций C и D, образующих $\mathcal{S}$-пару для f, все корни положительны, на основании теоремы Линделефа [5, с.42] можно сделать вывод, что $e^{-g(z)/2}C(z)$ и $e^{-g(z)/2}D(z)$ имеют нулевой род.

§5. Целые функции, положительные на E

Теорема 5. *Для того чтобы целая функция $f(z)$, положительная при $z \in E = (-\infty, \infty)\backslash(a, b)$, допускала представление*

$$f(z) = A^2(z) + (z-a)(z-b)B^2(z), \tag{19}$$

где A и B – вещественные целые функции, не имеющие общих корней, и $(z-a)B(z)/A(z) \in \mathcal{S}(E)$, необходимо и достаточно, чтобы для корней z_j функции f, лежащих в верхней полуплоскости, выполнялось условие

$$\sum_j \mathrm{Im}\ (-1/z_j) < \infty. \tag{20}$$

Доказательство. *Необходимость.* Из (19) вытекает

$$\left(\sqrt{\frac{z-a}{b-z}} - \frac{(z-a)B(z)}{A(z)}\right)\left(\sqrt{\frac{z-a}{b-z}} + \frac{(z-a)B(z)}{A(z)}\right) =$$

$$= \frac{z-a}{(b-a)A^2(z)}f(z).$$

Второй множитель в левой части положителен при $z \in (a, b)$ и имеет положительную мнимую часть в верхней полуплоскости. Следовательно, отличные от $z = a$ корни первого множителя, лежащие в (a, b) и в верхней полуплоскости, совпадают, с учетом их кратностей, с соответствующими корнями f. Поэтому функция $F(z) = (z-a)B(z)/A(z)$ является отличным от $F_0(z) = \sqrt{(z-a)/(b-z)}$ решением задачи $(\mathcal{S}(E); \sqrt{(z-a)/(b-z)})$, связанной с последовательностью $\{z_j\}$ корней функции f, вследствие чего выполняется условие (20) (см. §1).

Имея в виду дальнейшее, уместно заметить, что наряду с функцией $F(z) = (z-a)B(z)/A(z)$ классу $\mathcal{S}(E)$ принадлежит также функция

$$(z-a)/(b-z)F(z) = A(z)/(b-z)B(z),$$

которая, что легко проверить, также является решением задачи $\left(\mathcal{S}(E);\ \sqrt{(z-a)/(b-z)}\right)$.

Достаточность. Разложение функции f в каноническое произведение Вейерштрасса приводит к представлению

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{\operatorname{Im} z_j > 0} [(1 - z/z_j)(1 - z/\bar{z}_j)] e^{2r_j(z)} \prod_{k=1}^{2\nu} (z - x_k),$$

где g – целая вещественная функция, $r_j(z)$ – вещественный многочлен, x_k – корни f, расположенные внутри (a, b). Для простоты будем считать, что $a = -1$, $b = 1$. При выполнении условия (20) сходится произведение Бляшке

$$\chi(z) = \prod_j [(1 - z/z_j)(1 - z/\bar{z}_j)],$$

так что

$$f(z) = e^{g(z)} p^2(z) \chi(z) Q(z),$$

где

$$p(z) = \prod_j (1 - z/\bar{z}_j) e^{r_j(z)},\ Q(z) = \prod_{k=1}^{2\nu} (z - x_k).$$

Положим $\zeta = (z-1)/(z+1)$, $\zeta_j = (z_j - 1)/(z_j + 1)$, $\varepsilon_k = (x_k - 1)/(x_k + 1)$. При этом, если использовать обозначения §2,

$$\chi(z) = \prod_j [(\zeta - \zeta_j)/(\zeta - \bar{\zeta}_j)] \prod_j [(1 + \bar{\zeta}_j)/(1 + \zeta_j)] = \varphi(\zeta)/\varphi(-1),$$

а произведение $\chi(z)Q(z)$ представится в виде

$$\chi(z)Q(z) = \frac{\psi(\sqrt{\zeta})\psi(-\sqrt{\zeta})}{\varphi(-1)(1-\zeta)^{2\nu}}. \tag{21}$$

Введем функции

$$\begin{cases} A_0(z) = e^{g(z)/2}p(z)\dfrac{\psi(\sqrt{\zeta})+\psi(-\sqrt{\zeta})}{2\sqrt{\varphi(-1)}(1-\zeta)^{\nu}} = e^{g(z)/2}p(z)a_0(z), \\ B_0(z) = e^{g(z)/2}p(z)\dfrac{\psi(\sqrt{\zeta})+\psi(-\sqrt{\zeta})}{4i\sqrt{\varphi(-1)}(1-\zeta)^{\nu-1}\sqrt{\zeta}} = e^{g(z)/2}p(z)b_0(z). \end{cases} \tag{22}$$

Легко видеть, что

$$A_0^2(z) + (z^2-1)B_0^2(z) = A_0^2(z) + \frac{4\zeta}{(1-\zeta)^2}B_0^2(z) = f(z).$$

Выясним свойства функций A_0 и B_0 :

а) функции $a_0(z)$ и $b_0(z)$ однозначны. Так как особенностями функции $\psi(\zeta)$ являются полюсы $\sqrt{\zeta_j}$ порядка ν_j, сгущающиеся к точке $\zeta = 1$, то особенностями функций $a_0(z)$ и $b_0(z)$ являются полюсы z_j порядка ν_j , сгущающиеся к точке $z = \infty$, т.е. a_0 и b_0 – мероморфные функции, полюсы которых совпадают, с учетом их кратностей, с корнями функции p . Таким образом, A_0 и B_0 – целые функции. Ясно, что они не имеют общих корней.

б) Проверим, что A_0 и B_0 – вещественные функции.

Действительно, вспоминая, что

$$\psi(\zeta) = \prod_{\operatorname{Im}\zeta_j>0}[(\zeta-\sqrt{\zeta_j})/(\zeta-\sqrt{\bar{\zeta}_j})]\prod_{\zeta_j<0}(\zeta-\sqrt{\zeta_j}),$$

найдем

$$\bar{\psi}(\zeta) = \frac{1}{\psi(\zeta)}\prod_{\zeta_j<0}(\zeta^2-\zeta_j).$$

Поэтому, принимая во внимание, что $|\varphi(-1)| = 1$, имеем

$$\bar{A}_0(z) = e^{g(z)/2}\bar{p}(z)\frac{(\psi(\sqrt{\zeta})+\psi(-\sqrt{\zeta}))\varphi(-1)Q(z)(1-\zeta)^{\nu}}{\psi(\sqrt{\zeta})\psi(-\sqrt{\zeta})2\sqrt{\varphi(-1)}}.$$

Учитывая (21), получаем

$$\bar{A}_0(z) = e^{g(z)/2}\frac{\bar{p}(z)}{\chi(z)}\,\frac{\psi(\sqrt{\zeta})+\psi(-\sqrt{\zeta})}{2\psi(\sqrt{\zeta})\psi(-\sqrt{\zeta})(1-\zeta)^{\nu}} = A_0(z),$$

так как $\bar{p}(z)/\chi(z) = p(z)$. Аналогично проверяется, что $\bar{B}_0(z) = B_0(z)$.

в) Докажем, что $(z+1)B_0(z)/A_0(z) \in \mathcal{S}(E)$. В силу (22) для этого достаточно доказать, что классу $\mathcal{S}$ принадлежит функция

$$i\frac{\psi(\sqrt{\zeta}) + \psi(-\sqrt{\zeta})}{\sqrt{\zeta}(\psi(\sqrt{\zeta}) - \psi(-\sqrt{\zeta}))} \quad \left(\zeta = \frac{z-1}{z+1}\right),$$

а это, в свою очередь, равносильно тому, что классу $\mathcal{R}$ принадлежит функция

$$i\frac{(\psi(\zeta)/\psi(-\zeta)) + 1}{(\psi(\zeta)/\psi(-\zeta)) - 1}.$$

Последнее очевидно, так как $|\psi(\zeta)/\psi(-\zeta)| < 1$ при $\operatorname{Im}\zeta > 0$.

Теорема доказана.

§6. Описание всех $\mathcal{S}(E)$-пар, дающих представление функции f

Лемма. *Каждая пара вещественных целых функций X и Y, удовлетворяющих функциональному уравнению Пелля*

$$X^2(z) + (z-a)(z-b)Y^2(z) = 1$$

и условию

$$(z-a)Y(z)/X(z) \in \mathcal{S}(E)$$

имеет вид

$$X(z) = \cos(\gamma\sqrt{(z-a)(z-b)}),$$

$$Y(z) = \sin(\gamma\sqrt{(z-a)(z-b)})/\sqrt{(z-a)(z-b)},$$

где $\gamma > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать $a = -1$, $b = 1$. Пусть X и Y – одна из рассматриваемых пар. Положив $z = \operatorname{ch}\zeta$, придем к тождеству

$$X^2(\operatorname{ch}\zeta) + \operatorname{sh}^2\zeta Y^2(\operatorname{ch}\zeta) = 1,$$

из которого следует, что функция G, определяемая равенством

$$X(\mathrm{ch}\zeta) + i\mathrm{sh}Y(\mathrm{ch}\zeta) = e^{iG(\zeta)}, \tag{23}$$

обладает следующими свойствами:

1^0. G – целая функция;

2^0. $G(\zeta)$ вещественно при вещественных ζ;

3^0. $G(\zeta)$ вещественно при $\zeta = x + i\pi (x = \bar{x})$;

4^0. G – нечетная функция.

Из (23) получаем

$$X(\mathrm{ch}\zeta) = \cos G(\zeta), \quad Y(\mathrm{ch}\zeta) = \sin G(\zeta)/\mathrm{sh}\zeta$$

или

$$X(z) = \cos G(\ln(z + \sqrt{z^2 - 1})),$$
$$Y(z) = \sin G(\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}))/\sqrt{z^2 - 1}. \tag{24}$$

Так как $(z+1)Y(z)/X(z) \in \mathcal{S}(E)$, то (см. §1)

$$\frac{z-1}{z+1}\Big(\frac{z^2+1}{2z} + 1\Big)Y\Big(\frac{z^2+1}{2z}\Big)/X\Big(\frac{z^2+1}{2z}\Big) \in \mathcal{R},$$

т.е. $\mathrm{tg}H(z) \in \mathcal{R}$, где $H(z) = G(\ln z)$. Функция H голоморфна в верхней полуплоскости и, поскольку

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{tg}H(z) = \frac{\mathrm{sh}[2\ \mathrm{Im}\ H(z)]}{2|\cos H(z)|^2} \geq 0 \ \text{ при } \ \mathrm{Im}\ z > 0,$$

то $\mathrm{Im}\ H(z) \geq 0$ при $\mathrm{Im}\ z > 0$, т.е. $H \in \mathcal{R}$.

В силу свойства 2^0 функции G функция H голоморфна и вещественна при $z > 0$, а в силу свойства 3^0 она голоморфна и вещественна при $z < 0$. Поэтому в представлении (5) $d\sigma(t)$ при $t \neq 0$ и, следовательно,

$$H(z) = \alpha + \beta z - \frac{\rho}{z},$$

где $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta \geq 0$, $\rho \geq 0$.

Из свойства 4^0 вытекает, что $H(1/z) = -H(z)$, откуда следует, что $\alpha = 0, \beta = \rho$. Поэтому $G(\ln z) = \rho(z - 1/z)$ и $G(\ln(z+$

$+\sqrt{z^2-1})) = 2\rho\sqrt{z^2-1}$. Используя в (24) последнее равенство, получим утверждение леммы:

$\mathcal{S}(E)$-парой для f назовем пару целых вещественных функций A, B без общих корней, осуществляющих представление (19) при выполнении условия $(z-a)B(z)/A(z) \in \mathcal{S}(E)$.

Теорема 6. *Множество всех $\mathcal{S}(E)$-пар для целой функции f, положительной на $E = (-\infty, \infty)\backslash(a,b)$, описывается формулами*

$$A(z) = A_0(z)\cos(\gamma\sqrt{(z-a)(z-b)}) - \sqrt{(z-a)(z-b)}B_0(z)\times$$
$$\times\sin(\gamma\sqrt{(z-a)(z-b)}),$$
$$B(z) = A_0(z)\sin(\gamma\sqrt{(z-a)(z-b)})\sqrt{(z-a)(z-b)} - B_0(z)\times$$
$$\times\cos(\gamma\sqrt{(z-a)(z-b)}), \tag{25}$$

где γ пробегает множество неотрицательных чисел.

Доказательство. Снова будем считать $a=-1, b=1$. Проверим прежде всего, что при каждом $\gamma > 0$ формулы (25) дают $\mathcal{S}(E)$-пару для f. Равенство $A^2(z) + (z^2-1)B^2(z) = f(z)$ проверяется непосредственно. Докажем, что $(z+1)B(z)/A(z) \in \in \mathcal{S}(E)$. Это следует из того, что отношение можно представить в виде

$$\frac{(z+1)B(z)}{A(z)} = \frac{u(z)+v(z)}{1-[(z-1)/(z+1)]u(z)v(z)}, \tag{26}$$

где

$$u(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}\operatorname{tg}(\gamma\sqrt{z^2-1}) \in \mathcal{S}(E), \quad v(z) = \frac{(z+1)B_0(z)}{A_0(z)} \in \mathcal{S}(E).$$

(см.§ 1).

Обратно, пусть A и B – некоторая $\mathcal{S}(E)$-пара для f. Определим функции X и Y из равенств

$$A(z) = A_0(z)X(z) - (z^2-1)B_0(z)Y(z),$$
$$B(z) = B_0(z)X(z) + A_0(z)Y(z), \tag{27}$$

что

$$\begin{cases} X(z) = (A(z)A_0(z) + (z^2-1)B(z)B_0(z))/f(z), \\ Y(z) = (A_0(z)B(z) - A(z)B_0(z))/f(z). \end{cases} \tag{28}$$

Функции X и Y – вещественные и удовлетворяют функциональному уравнению Пелля

$$X^2(z)+(z^2-1)Y^2(z)=1.$$

Докажем, что X и Y – целые функции. Так как решениями задачи $(\mathcal{S}(E);\sqrt{(z-a)/(b-z)})$, связанной с корнями f, служат функции $(z+1)B(z)/A(z)$, $(z+1)B_0(z)/A_0(z)$ и $A(z)/(1-z)B(z)$, то каждый корень f является корнем не меньшей кратности разности этих решений

$$\frac{(z+1)B_0(z)}{A_0(z)}-\frac{A(z)}{(1-z)B(z)}=\frac{A(z)A_0(z)+(z^2-1)B(z)B_0(z)}{(1-z)A_0(z)B(z)},$$

$$\frac{(z+1)B(z)}{A(z)}-\frac{(z+1)B_0(z)}{A_0(z)}=\frac{(z+1)(A_0(z)B(z)-A(z)B_0(z))}{A_0(z)A(z)}$$

Таким образом, равенства (28) определяют целые функции X и Y.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что $(z+1)Y(z)/X(z)\in\mathcal{S}(E)$, после чего можно будет воспользоваться утверждением леммы. Как уже отмечалось, $(z+1)\times B(z)/$ $/A(z)$ есть одно из решений задачи $(\mathcal{S}(E);\sqrt{(1+z)/(1-z)})$ для корней, лежащих в верхней полуплоскости и в $(-1,1)$. Если сопоставить формулы (22) и (8), то окажется, что описание всех решений этой задачи можно получать по формуле

$$F(z)=\frac{A_0(z)\Omega(z)+\frac{2}{1-\zeta}B_0(z)}{-\frac{2\zeta}{1-\zeta}B_0(z)\Omega(z)+A_0(z)},$$

т.е. по формуле

$$F(z)=\frac{A_0(z)\Omega(z)+(z+1)B_0(z)}{-(z-1)B_0(z)\Omega(z)+A_0(z)},$$

где Ω пробегает $\mathcal{S}(E)$. Из равенства (27) усматриваем, что $F(z)=$ $=(z+1)B(z)/A(z)$ получается при $\Omega(z)=(z+1)Y(z)/X(z)$, т.е. $(z+1)Y(z)/X(z)\in\mathcal{S}(E)$, что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] *Крейн М.Г.* О представлении функций интегралами Фурье–Стильеса // Уч. зап. Куйбышев. пед. ин-та. – 1943. – Вып. 7. – С.123–148.

[2] *Ахиезер Н.И.* К теории целых функций конечной степени // ДАН СССР. – 1948. – **63**, № 5. – С.475–478.

[3] *Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н.* Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1949. – **XXVI**.

[4] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1968. – 330 с.

[5] *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: ГТТИ, 1956.

[6] *de Branges L.* Hilbrert spaces of entire functions. – Prentice-Hall, 1968.

[7] *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* О прямых и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны // ДАН СССР. – 1979. – **247**. – С.1046–1049.

[8] *Рыбалко А.М.* Об одном представлении целых функций класса A, положительных на вещественной оси // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – 1968. – Вып. 7. – С.53–58.

[9] *Abel N.H.* Sur l'integration de la formule differentielle $\frac{\rho dx}{\sqrt{Rx}} R$ et ρ étant des functiones entiéres // Oeuvpes complétes. – 1839. – **1**.

[10] *Крейн М.Г.* Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости // ДАН СССР. – 1953. – **93**, № 5. – С.767–770.

[11] *Марченко В.А., Островский И.В.* Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. – 1975. – **97**, № 4. – С.540–606.

[12] *Ахиезер Н.И.* Об одном обобщении преобразования Фурье и теоремы Винера–Палей // ДАН СССР. - 1954. - **96**, № 5. - С.889–892.

[13] *Гурарий В.П.* Преобразование Фурье пространства $L^2(-\infty,\infty)$ с весом // Мат.сб. - 1962. - **58**, № 4. - С.439–452.

[14] *Рыбалко А.М.* О преобразовании Фурье в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ с весом // Тр. Физ.-тех. ин-та низких температур АН УССР. Мат. физика, функц. анализ. - 1969. - Вып. 1. - С.147–164.

[15] *Ахиезер Н.И.* Замечание к статье А.М. Рыбалко "О преобразовании Фурье в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ с весом" // Там же. - С.165–171.

[16] *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* О некоторых предложениях типа теорем Фурье–Планшереля и Винера–Пейли, получаемых методами теории спектральных функций // Функц. анализ. - 1979. - **XXIII**, № 4. - С.79–80.

[17] *Кац И.С., Крейн М.Г.* R-функции – аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя. [Дополнение I к кн.: *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи.] - М.: Мир, 1968. - С.629-647.

[18] *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. - М.: Наука, 1973.

[19] *Крейн М.Г.* Об одном специальном классе целых и мероморфных функций. [Статья VI в кн.: *Ахиезер Н.И., Крейн М.Г.* О некоторых вопросах теории моментов.] - Харьков: ГОНТИ, 1938.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

М.Г.Крейн

Избранные труды: В 3 кн.

Книга I

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРИМЫКАЮЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *И.Г.Васинюк*

Компьютерный набор *В.В.Башинская*

Компьютерная верстка *В.М.Чирков*

Подп. в печ. 13.12.93. Формат 60 × 90/16. Бум. офс. № 1. Гарн. "Мысль". Офс. печ. Физ. печ. л. 18,85. Усл. печ. л. 18,85. Зак. № 449.

Оригинал-макет подготовлен на персональных компьютерах и отпечатан в Институте математики АН Украины.
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.