М.Г. Крейн

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В трех книгах

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
(МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ)

Книга II

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

КИЕВ — 1996

УДК 517

Избранные труды крупнейшего украинского математика XX века Марка Григорьевича Крейна содержат оригинальные исследования автора по комплексному анализу, экстраполяции, интерполяции, эрмитово-положительным функциям, банаховым пространствам, теории операторов; спектральной теории струны, задаче рассеяния и вопросам устойчивости. Представленные здесь работы оказали и продолжают оказывать исключительно плодотворное влияние на развитие современной математики. Содержание опубликованных работ во многом отражает фундаментальный вклад М.Г.Крейна в математические науки.

Для математиков, физиков.

Вибрані твори великого українського математика XX століття Марка Григоровича Крейна вміщують оригінальні дослідження автора з комплексного аналізу, екстраполяції, інтерполяції, ермітово-позитивних функцій, банахових просторів, теорії операторів; спектральній теорії струни, задачі розсіяння і питань стійкості. Представлені тут роботи здійснювали і продовжують здійснювати виключно плідний вплив на розвиток сучасної математики. Зміст опублікованих робіт багато в чому відображає фундаментальний внесок М.Г.Крейна в математичні науки.

Для математиків, фізиків.

Ответственный за выпуск *В.Д. Кошманенко*

Утверждено к печати ученым советом Института математики НАН Украины

Без. объявл.

ISBN 966-02-0098-6

ON REGULARLY CONVEX SETS IN THE SPACE CONJUGATE TO A BANACH SPACE

(совместно с В.Л. Шмульяном)

(Annals of Mathematics. — 1940. — V.41, N 2)

Introduction

Here and throughout this paper we denote by E a Banach space (a linear, normed, and complete space) and by E^* its conjugate space[†].

A set $K \subset E^*$ will be called *regularly convex* if for every $g \notin K$ ($g \in E^*$) there exists an element $x_0 \in E$ such that

$$\operatorname*{Sup}_{f \in K} f(x_0) < g(x_0).$$

The space E^* itself we consider as regularly convex.

Any closed sphere $\sigma(f_0; \rho)$ ($f_0 \in E^*, \rho > 0$), i.e. the set of all elements $f \in E^*$ such that $|f - f_0| \leq \rho$ gives us one of the simplest examples of a regularly closed set. We obtain a still more simple example if we consider the set of all $f \in E^*$ such that $c_1 \leq f(y) \leq$ $\leq c_2$ where y is an arbitrari element from E and $c_1 \leq c_2$ any real constants.

Observe that if K is a linear subspace of E^* then the expression regularly convex denotes the same as regularly closed (see Banach [2, p.116]).

It is easily en that only convex sets in E^* may be regularly convex. Furthermore, every regularly convex set is always closed and

[†]The terminology used will be that of Banach's well known book [2]. Numerals in brackets refer to the list of references at the end of the paper.

moreover weakly closed in the sense of weak convergence of functionals.

It is also clear that the intersection of regularly convex sets taken in arbitrary number is empty or is also a regularly convex set. In view of this fact, for every set $S \subset E^*$ there exists the smallest regularly convex set containing the set S (namely, the intersection of all regularly convex sets containing S). This set K will be called† the *regularly convex envelope* of S.

In the first chapter of our paper we state some general properties of regularly convex sets, in particular, in §1 we study the properties of bounded regularly convex sets. Theorem 1, which gives a representation of elements of the regularly convex envelope of a bounded set by the elements of the set itself, is the central theorem of this paragraph.

On the basis of this theorem we show that the linear aggregate and the convex envelope of a finite number of regularly convex bounded sets are also regularly convex. Most of the theorems of §1 may also be obtained by developing some transfinite methods proposed first by Banach (see [2], p.116–122). Establishing a simple lemma we have succeeded in finding a quite elementary method of proving all these theorems. Fotmulated in a more particular form, this lemma has been used in the classical moment problem long ago (see M. Riesz [12]; Achyeser–Krein [1], Article 2; I.J. Schoenberg [14]; L. Kantorovitch [5]). But it seems that in this paper the lemma is for the first time applied to the study of regularly convex sets. In §2 we extend a part of our results to regularly convex unbounded sets. The fundamental result of this paragraph is that a set is regularly convex if and only if its intersection with every bounded regularly convex set is regularly convex.

The proof of this theorem is based on an idea of Banach's as in §1 Banach's transfinite methods are not used. Only after having established all the main properties of regularly convex sets do we prove in §3 that a set is regularly convex if and only if it is convex and transfinitely closed. This criterion is a generalization of that of Banach's that gives the conditions under which a linear subspace of E^*

† In analogy with the definitions of linear envelope or convex envelope of a set.

is regularly closed (convex). The idea of our proof differs somewhat from that of Banach. Furthermore, we show that it is useful to define transfinitely closedness in a somewhat different way than it was defined by Banach. In §4 it is shown that the criterion of regular convexity of a set may be considerably simplified if the space E or the set itself are separable.

In chapter II we show that the study of factor-spaces introduced by Banach ([2], p.232) and Hausdorff [4] is closely related to that of regularly convex sets. For instance, it is shown that a linear set belonging to E^* is regularly closed (convex) if and only if it is the conjugate space to a factor-space E/G ($G \subset E$). By means of similar propositions we state that if G is a linear subspace of E then $(G^*)^*$ is a linear subspace of $(E^*)^*$ (see §1); if E is regular ($(E^*)^* = E$) then so are G and E/G, and conversely (see §2). If the unit sphere of E is weakly compact, then the space G and E/G both have the same property, and conversely (see §3).

In chapter III we study the regularly convex envelopes of weakly compact sets. As has been remarked by S. Mazur [9], the convex envelope of a compact set of E is compact. Using considerably more complicated means, we state the analogous propositions for sets from E or E^* which are weakly compact in any sense. The case in which the set belongs to E has been already discussed in another place (see M. Krein [7] and V. Smulian [17]). The results concerning this case are now obtained from a more general standpoint. The theorems on convex envelopes of weakly compact sets permit us to formulate the fixed point theorems of Schauder in a somewhat more general form than formulated by Schauder [12].

Chapter I

1. Bounded regularly convex sets. Let S be an arbitrary set. Denote by Q_s the linear space of all real-valued bounded functions $\varphi(s)$ defined over S with the usual definition of the norm

$$\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}_{s \in S} |\varphi(s)|.$$

An additive homogeneous (distributive) functional $\mathfrak{p}$ defined over

Q_s shall be said to be *nonnegative*, if $\varphi(s) \geq 0$ $(s \in S)$ implies $\mathfrak{p}(\varphi) \geq 0$[†]. Such a functional is always continuous, i.e. belongs to Q_s^* (Q_s^* is the conjugate space to Q_s). In fact, for every $\varphi \in Q_s$ we have

$$\|\varphi\|\varepsilon(s) \pm \varphi(s) \geq 0$$

where $\varepsilon(s) \equiv 1$ $(s \in S)$. Therefore, $\mathfrak{p}$ being nonnegative we obtain $\|\varphi\|\mathfrak{p}(\varepsilon) \pm \mathfrak{p}(\varphi) \geq 0$, and consequently

$$\|\mathfrak{p}\| = \operatorname{Sup}\frac{|\mathfrak{p}(\varphi)|}{\|\varphi\|} = \mathfrak{p}(\varepsilon) < \infty.$$

A nonnegative functional $\mathfrak{p}$ will be said to be normalized if $\|\mathfrak{p}\| = 1$ $(\mathfrak{p}(\varepsilon) = 1)$. The set of all nonnegative normalized functionals $\mathfrak{p} \in Q_s^*$ will be denoted by $\mathfrak{P}_s$.

Lemma[††]. *Let L be a linear subspace of Q_s and let $\varepsilon(s) \in L$. If a distributive functional $\mathfrak{p}_0$ defined over L takes nonnegative values over nonnegative functions $\varphi \in L$, then there exists a nonnegative functional $\mathfrak{p} \in Q_s^*$ such that $\mathfrak{p}(\varphi) = \mathfrak{p}_0(\varphi)$ for all $\varphi \in L$.*

P r o o f. Let $\psi_1(s) \in Q_s - L$. Denote by $\varphi'(s) \in Q_s$ (or $\varphi''(s) \in Q_s$) any function such that for all $s \in S$

$$\varphi'(s) \leq \psi_1(s) \quad (\text{or} \quad \psi_1(s) \leq \varphi''(s)). \tag{1}$$

Such functions exist for $\varepsilon(s) \in L$ and $-\|\psi_1\|\varepsilon(s) \leq \psi_1(s) \leq \|\psi_1\|\varepsilon(s)$.

It follows from (1) that always $\mathfrak{p}(\varphi') \leq \mathfrak{p}(\varphi'')$ and therefore that there exists such a ξ such that

$$\operatorname{Sup}\mathfrak{p}(\varphi') \leq \xi \leq \operatorname{Inf}\mathfrak{p}(\varphi''). \tag{2}$$

Consider the linear space $L_1 \supset L$ formed by all functions ψ of the form: $\psi(s) = \varphi(s) + t\psi_1(s)$, where $\varphi \in L$ and t is an arbitrari real number. Put $\mathfrak{p}_1(\psi) = \mathfrak{p}(\varphi) + t\xi$. The functional $\mathfrak{p}_1$ defined over L_1,

---

[†]It may be easily show that if an additive functional $\mathfrak{p}$ has the property that $\varphi(s) \geq 0$ implies $\mathfrak{p}(\varphi) \geq 0$, then it is necessarily homogeneous and consequently distributive, i.e. $\mathfrak{p}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\mathfrak{p}(\varphi) + \mu\mathfrak{p}(\psi)$ $(\varphi, \psi \in Q_s)$.

[††]This lemma is a particular form of a more general one (see Krein [6]). As was indicated in the introduction, this lemma has its origin in the classical moment problem.

is obviously distributive. It is also easy to see that in virtue of (2), the functional $\mathfrak{p}_1$ takes nonnegative values over nonnegative functions $\psi \in L_1$.

Thus we see that it suffices to well order the set $Q_s - L$ in order to arrive by the above described extension of the functional $\mathfrak{p}_0(\varphi)$ to the functional $\mathfrak{p}(\varphi)$ looked for.

From now on S will denote a bounded set in E^*. In this case to every $x \in E$ corresponds a function $\varphi_x(f) \in Q_s$ defined as follows $\varphi_x(f) = f(x)$ $(f \in S)$. Obviously $\varphi_{ax+by}(f) = a\varphi_x(f) + b\varphi_y(f)$. Now every $\mathfrak{p} \in Q_s^*$ generates a functional $g(x)$ $(x \in E)$ by the formula $g(x) = \mathfrak{p}(\varphi_*)$. Obviously $g \in E^*$ since $g(x+y) = g(x) + g(y)$ and

$$|g(x)| \leq \|\mathfrak{p}\| \operatorname*{Sup}_{f \in S} |f(x)| < C|x|.$$

We shall write for g, $g = \mathfrak{p}(S)$.

Theorem 1. *Let S be a bounded set in E^*. Then the regularly convex envelope K of S coincides with the set of all elements $g \in E^*$ which may be obtained by the formula*

$$g = \mathfrak{p}(S) \tag{3}$$

where $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_s$.

P r o o f. Denote by K_1 the set of all $g \in E^*$ which may be obtained by formula (3).

The set K_1 contains the set K. In fact, to every point $f_0 \in S$ corresponds the functional $\mathfrak{p}_{f_0} \in \mathfrak{P}_s$ defined as follows $\mathfrak{p}_{f_0}(\varphi) = \varphi(f_0)$ $(\varphi \in Q_s)$, and for which we obviously have $\mathfrak{p}_{f_0}(S) = f_0$.

The set K_1 is regularly closed. In fact, let $g_0 \notin K_1$. Denote by L the linear subspace consisting of all functions $\psi(f) \in Q_s$ of the form $\psi(f) = \varphi_x(f) + c\varepsilon(f)$ $(x \in E, -\infty < c < \infty)$. Put $\mathfrak{p}_0(\psi) = g_0(x) + c$. The functional $\mathfrak{p}_0$ defined over L in general may be many-valued. We state that there exists at least one function

$$\psi_0(f) = f(x_0) + c_0 \geq 0 \quad (f \in S) \tag{4}$$

such that

$$\mathfrak{p}_0(\psi_0) = g_0(x_0) + c_0 < 0. \tag{5}$$

In fact, admitting the contrary, $\psi(f) \geq 0$ $(f \in S)$ implies $\mathfrak{p}_0(\psi) \geq 0$ and, in particular, if $\psi(f) \equiv 0$ $(f \in S)$ then $\mathfrak{p}_0(\psi) = 0$, which shows that $\mathfrak{p}_0$ is singlevalued. As $\mathfrak{p}_0$ is also additive and $\varepsilon(f) \in L$, there exists by the Lemma a nonnegative functional $\mathfrak{p} \in Q_s^*$ such that $\mathfrak{p}(\psi) = \mathfrak{p}_0(\psi)$ $(\psi \in L)$. But then $|\mathfrak{p}| = \mathfrak{p}(\varepsilon) = \mathfrak{p}_0(\varepsilon) = 1$, i.e. $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_s$ and furthermore $g_0(x) = \mathfrak{p}_0(\varphi_x) = \mathfrak{p}(\varphi_x)$ $(x \in E)$, i.e. $g_0 = \mathfrak{p}(S) \in$ $\in K_1$, which contradicts our supposition.

Thus there exists an element $x_0 \in E$ and a constant c_0 such that (4) and (5) hold and consequently

$$\operatorname*{Sup}_{f \in S} f(-x_0) \leq c_0 < g_0(-x_0),$$

which shows that K_1 is regularly closed.

Thus K_1 being regularly closed and containing S, contains also K. It remains to show that every element of K_1 belongs to K. Admitting the contrary, let $g_0 \in K_1$ and $\notin K$. Then K being regularly closed there exists an element x_0 such that

$$\operatorname*{Sup}_{f \in K} f(x_0) < g_0(x_0).$$

On the other hand as $g_0 \in K_1$, there exists a $\mathfrak{p}_0 \in \mathfrak{P}_s$ such that $g = \mathfrak{p}_0(S)$. Therefore

$$g_0(x_0) = \mathfrak{p}_0(f(x_0)) \leq \operatorname*{Sup}_{f \in S} f(x_0) \leq \operatorname*{Sup}_{f \in K} f(x_0) < g_0(x_0),$$

which is impossible. The theorem is thus proved.

Corollary 1. *For every $x \in E$*

$$\operatorname*{Sup}_{f \in S} f(x) = \operatorname*{Sup}_{g \in K} g(x).$$

In fact, if $g \in K$ then $g = \mathfrak{p}(S)$ $(\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_s)$ and therefore

$$g(x) = \mathfrak{p}(\varphi_x) \leq \operatorname*{Sup}_{f \in S} \varphi_x(f) = \operatorname*{Sup}_{f \in S} f(x).$$

Corollary 2. *If for any pair $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $f(x_1) = f(x_2)$ for $f \in S$, then $g(x_1) = g(x_2)$ for $g \in K$.*

In fact, if $g = \mathfrak{p}(S)$ ($\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_s$) then $g(x_1) = \mathfrak{p}(\varphi_{x_1}) = \mathfrak{p}(\varphi_{x_2}) = g(x_2)$ for $\varphi_{x_1}(f) = f(x_1) = f(x_2) = \varphi_{x_2}(f)$.

REMARK. Let R_s be a linear subspace of Q_s containing the function $\varepsilon(f) \equiv 1$ and all functions $\varphi_x(f)$ ($x \in E$). Denote by $\mathfrak{P}_s^R$ the set of all functionals $\mathfrak{p} \in R_s^*$ which are positive (i.e., take nonnegative values over nonnegative functions $\varphi \in R_s$) and have the unit norm ($\|\mathfrak{p}\| = 1$). It is easy to see that theorem 2 remains true if we replace in it the set $\mathfrak{P}_s$ by the set $\mathfrak{P}_s^R$.

Before passing to the next theorem we will consider an example applying theorem 2 in the form indicated in the Remark.

Let S be a sequence $\{f_i\}_1^\infty \in E^*$ converging weakly to an element $f_0 \in E^*$ ($\lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) = f_0(x)$ for every $x \in E$). In this case the space Q_s is equivalent to the space (m), for every function $\varphi(f) \in Q_s$ is determined by its values $\xi_1 = \varphi(f_i)$ $(i = 1, 2, ...)$ and $\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}\limits_{f\in S} |\varphi(f)| = \operatorname*{Sup}\limits_{1\leq i\leq\infty} |\xi_i|$.

The set R of all functions $\varphi \in Q_s$ such that

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(f_i)$$

exixts, form a linear subspace of Q_s which evidently is equivalent to the space (c). Therefore to every functional $\mathfrak{p} \in R^*$ (see Banach [2], p.65–67) corresponds a sequence $\{c_i\}_0^\infty$ such that

$$\mathfrak{p}(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi(f_i) + c_0 \lim_{i\to\infty} \varphi(f_i) \quad (\varphi \in R),$$

hence $\|\mathfrak{p}\| = \sum\limits_{i=0}^{\infty} |c_i|$ and $c_i \geq 0$ $\quad (i = 1, 2, ...)$ if the functional $\mathfrak{p}$ is positive.

Since the function $\varepsilon(f)$ and every function $\varphi_x(f) = f(x)$ ($x \in E$) belong to R we can apply to S theorem 2 (in extended form), and so we find that the *regularly convex envelope K of the set $S = \{f_i\}_1^\infty$ consists of all elements $g \in E^*$, which admit the representation*

$$g(x) = \sum_{0}^{\infty} c_i f_i(x) \quad (x \in E), \tag{$*$}$$

where

$$c_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \text{ and } \sum_0^\infty c_i = 1. \tag{**}$$

As $(*)$ and $(**)$ imply that $g = \sum\limits_0^\infty c_i f_i$ we conclude that the regularly convex envelope K of the set $S = \{f_i\}_1^\infty$ coincides with its convex closed envelope.

Theorem 2. *Let $S_1, S_2, \ldots, S_n$ be a system of bounded sets in E^* and let $K_1, K_2, \ldots, K_n$ be the corresponding system of the regularly convex envelopes of S_i $(i = 1, 2, \ldots, n,\ K_i \supset S_i)$. Then the regularly convex envelope K of the logical sum $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$*† *coincides with the convex envelope K' of the sum $K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n$.*

P r o o f. Obviously K being convex and containing all K_i contains also K^1. It remains to show that, conversely, $K \subset K^1$. In proving this we may suppose without loss of generality that all sets S_i $(i = = 1, 2, \ldots, n)$ are disjoint, for in the contrary case we replace the sets S_i be sets S_i' defined as follows:

$$S_1' = S_1,\ S_k' = S_k - S_k S_1 - S_k S_2 - \ldots - S_k S_{k-1} \quad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Take any $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_s$. Our theorem will be proved if we show that $g = \mathfrak{p}(S)$ belongs to the convex envelope of the sum $K' = K_1 \cup K_2 \cup \cup \ldots \cup K_n$.

Put $\mu_i = \mathfrak{p}(\varepsilon_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, where

$$\varepsilon_i(f) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad f \in S_i, \\ 0 & \text{for} \quad f \in S - S_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{6}$$

Obviously $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = 1$.

To every function $\varphi_i \in Q_{s_i}$ corresponds a function φ determined as follows:

$$\varphi(f) = \begin{cases} \varphi(f) & \text{for} \quad f \in S_i, \\ 0 & \text{for} \quad f \in S - S_i. \end{cases}$$

Put $\psi_i(\varphi_i) = \mathfrak{p}(\varphi)$. Thus our functional $\mathfrak{p} \in \mathfrak{P}_s$ generates n functionals $\psi_i \in Q_{s_i}^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, which, obviously, are nonnegative and have respectively the norms $\|\psi_i\| = \mathfrak{p}(\varepsilon_i(f)) = \mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

† I.e. the union of all elements belonging to at least one of the sets $S_1, \ldots, S_n$.

Define for each $\mu_i > 0$ the functional $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}_s$ by the formula

$$\mathfrak{p}_i = \frac{1}{\mu_i}\psi_i.$$

Observe now that each function $\varphi \in Q_s$ generates a function in each of Q_{s_i} $(i = 1, 2, ..., n)$. We shall denote this function by the same letter φ. As for every $\varphi \in Q_s$

$$\varphi(f) = \sum_1^n \varepsilon_i(f)\varphi(f)$$

we obtain

$$\mathfrak{p}(\varphi) = \sum_1^n \mathfrak{p}(\varepsilon_i\varphi) = \sum_{\mu_i>0} \mu_i\mathfrak{p}_i(\varphi).$$

In particular, as $g(x) = \mathfrak{p}(f(x))$ $(x \in E)$, we have

$$g(x) = \sum_{\mu_i>0} \mu_i\mathfrak{p}_i(f(x)) = \sum_{\mu_i>0} \mu_i g_i(x) \quad (x \in E),$$

where $g_i = \mathfrak{p}_i(S_i) \in K_i$.

Consequently, recalling that $\sum_{\mu_i>0} \mu_i = 1$, we conclude that $g = \sum \mu_i g_i$ belongs to the convex envelope of the sum $K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n$, which completes our proof.

Corollary. *If $K_1, K_2, ..., K_n$ are bounded regularly convex sets in E^*, then their convex envelope is also regularly convex.*

To obtain this corollary we put $S_i = K_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ in Theorem 2 just proved.

If $a_1, a_2, ..., a_n$ are any real numbers we understand by $a_1S_1 + a_2S_2 + ... + a_nS_n$ the set of all f that admit the representation $f = a_1f_1 + ... + a_nf_n$ where $f_i \in S_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

The method used by proving the last Theorem permits also to prove the

Theorem 3. *Let $S_1, ..., S_n$ and $K_1, ..., K_n$ have the same meaning as in the preceding Theorem. Then the regularly convex envelope $\mathfrak{K}$ of the set $\mathfrak{S} = a_1S_1 + ... + a_nS_n$ coincides with the set $\mathfrak{K} = a_1K_1 + a_2K_2 + ... + a_nK_n$.*

P r o o f. In proving the Theorem we may assume all $a_i > 0$ for some $a_j < 0$ we may replace such an a_j by $-a_j$ and the corresponding K_j by $-K_j$ without changing $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$ and $\mathfrak{S}$; if, furthermore, some $a_i = 0$, then we exclude from our considerations such a_l's and the corresponding K_l.

If we replace every set S_i by the set $S_i + g$ $(i = 1, 2, ..., n)$, where $g \in E^*$ is a fixed element, the sets $\mathfrak{K}$ and $\mathfrak{K}'$ are replaced respectively by the sets $\mathfrak{K} + g_1$ and $\mathfrak{K}' + g_1$, where $g_1 = \left(\sum\limits_1^n a_i\right) g$. Therefore we may assume also that every set S_i lies at a positive distance from zero. But then evidently we may choose constants $\lambda_1 > 0, ..., \lambda_n > 0$ such that all the sets $S_i' = \lambda_i S_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ are disjoint. Hereby

$$\mathfrak{S} = \sum_1^n \frac{a_i}{\lambda_i} S_i',$$

$$\mathfrak{K}' = \sum_i^n \frac{a_i}{\lambda_i} K_i',$$

where $K_i' = \lambda_i K_i$ is the regularly convex envelope of the set S_i' $(i = 1, 2, ..., n)$. In view of this we may also suppose without loss of generality that the given sets are disjoint.

It is easy to see that $\mathfrak{K} \supset \mathfrak{K}'$. It remains to show that $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}'$. Put $S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$ and let $\varepsilon_i(f) \in Q_s$ $\quad (i = 1, 2, ..., n)$, be the functions defined in (6). Consider now any nonnegative functional $\mathfrak{p} \in Q_s^*$ satisfying the following conditions

$$\mathfrak{p}(\varepsilon_i) = a_i \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{7}$$

We state that $g = \mathfrak{p}(S) \in \mathfrak{K}'$. In fact, reasoning as above in proving the preceding Theorem, we can state that the functional $\mathfrak{p}$ generates n functionals $\mathfrak{p}_i \in \mathfrak{P}_{s_i}$ such that for every $\varphi \in Q_s$

$$\mathfrak{p}(\varphi) = \sum_1^n \mathfrak{p}(\varepsilon_i \varphi) = \sum_1^n a_i \mathfrak{p}_i(\varphi) \tag{8}$$

and therefore putting $g_i = \mathfrak{p}_i(S_i) \in K_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$, we find

$$g = \sum_1^n a_i g_i \in \mathfrak{K}'.$$

Take now $g_0 \in E^*$ which does not belong to $\mathfrak{K}'$. Denote by L the linear subspace consisting of all functions $\psi(f) \in Q_s$ of the form $\psi(f) = c_1\varepsilon_1(f) + ... + c_n\varepsilon_n(f) + f(x)$, where $x \in E$ and c_i $(i = 1, 2, ...$ $..., n)$ are arbitrary real numbers. In this space let $\mathfrak{p}_0(\psi) = c_1 a_1 +$ $+ ... + c_n a_n + g_0(x)$.

The functional $\mathfrak{p}_0$ defined over L may be many-valued. We state that there exists at least one function

$$\psi_0(f) = f(x_0) + c_1^0\varepsilon_1(f) + ... + c_n^0\varepsilon_n(f) \geq 0 \quad (f \in S) \tag{9}$$

such that

$$\mathfrak{p}_0(\psi_0) = g_0(x_0) + c_1^0 a_1 + ... + c_n^0 a_n < 0. \tag{10}$$

For in the contrary case if a $\psi(f) \geq 0$ $(f \in S)$ then $\mathfrak{p}_0(\psi) \geq 0$ and, in particular, $\psi(f) \equiv 0$ and then $\mathfrak{p}_0(\psi) = 0$, that is $\mathfrak{p}_0$ is a single-valued (evidently additive) functional taking over nonnegative functions $\varphi(f) \in L$ nonnegative values. Since furthermore $\varepsilon(f) =$ $= \varepsilon_1(f) + ... + \varepsilon_n(f)$, we may apply our Lemma and conclude that there exists a nonnegative functional $\mathfrak{p} \in Q_s^*$ such that $\mathfrak{p}(\psi) = \mathfrak{p}_0(\psi)$ for every $\psi \in L$. In particular

$$\mathfrak{p}(\varepsilon_i) = \mathfrak{p}_0(\varepsilon_i) = a_i \quad (i = 1, 2, ..., n) \tag{11}$$

and furthermore $g_0(x) = \mathfrak{p}_0(\varphi_x) = \mathfrak{p}(\varphi_x)$, i.e. $g_0 = \mathfrak{p}(S)$. But by the above $g_0 \in \mathfrak{K}'$, which contradicts our supposition.

Thus there exists such an element $x_0 \in E$ and numbers $c_1^0, ..., c_n^0$ such that (9) and (10) hold. Now observe that (9) is equivalent to the system of the following inequalities: $f_i(x_0) + c_1^0 \geq 0$ for all $f_i \in S_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Multiplying these inequalities respectively by $a_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ and adding them up we obtain

$$f(x_0) + a_1 c_1^0 + ... + a_n c_n^0 \geq 0 \ \text{ for all } f \in \mathfrak{S}. \tag{12}$$

Therefore comparing (12) and (10) we find

$$\operatorname*{Sup}_{f \in \mathfrak{K}} f(-x_0) = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathfrak{S}} f(-x_0) \leq a_1 c_1^0 + ... + a_n c_n^0 < g_0(-x_0).$$

Hence $g_0 \notin \mathfrak{K}$. Thus if $g_0 \notin \mathfrak{K}'$, then $g_0 \notin \mathfrak{K}$, i.e. $\mathfrak{K}' \supset \mathfrak{K}$. The Theorem is proved.

Corollary 1. *If $K_1, K_2, ..., K_n$ are bounded regularly convex sets in E^*, then whatever be the numbers $a_1, ..., a_n$ the set $a_1K_1+...+a_nK_n$ is also regularly convex.*

To obtain this corollary we put $S_i = K_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ in the Theorem just proved.

Corollary 2. *Let $K \subset E^*$ be a regularly convex bounded set and $\rho > 0$ an arbitrary fixed number. The logical sum K_ρ of all spheres $\sigma(f, \rho)$ of radius ρ and with center f in K is also regularly convex.*

In fact, $K_\rho = K + \sigma(\theta, \rho)$ and both K and $\sigma(\theta, \rho)$ are regularly closed.

We shall now prove the following Theorem.

Theorem 4. *Let $K_1 \subset E^*$ and $K_2 \subset E^*$ be two disjoint regularly convex bounded sets. Then the distance d between K_1 and K_2 is positive, and to every $d' < d$ $(d' > 0)$ corresponds an $x_0 \in E$ such that*

$$\operatorname*{Sup}_{f\in K_1} f(x_0) < \operatorname*{Inf}_{f\in K_2} f(x_0) - d'|x_0|. \tag{13}$$

P r o o f. By Corollary 1 to Theorem 3 the set $K = K_1 - K_2$ is regularly convex. As K_1 and K_2 are disjoint, so the element zero, $\theta \subset E$, does not belong to K and consequently lies at a positive distance from K. Obviously, d is also the dictance between K_1 and K_2.

By Corollary 2 to Theorem 3 the set $K_{d'}$ is regularly convex and does not contain the zero θ. Consequently by the definition of regularly convex sets there exists an $x_0 \in E$ such that

$$\operatorname*{Sup}_{f\in K_{d'}} f(x_0) < 0.$$

Take an $f_0 \in K$, then $\sigma(f_0, d') \subset K_{d'}$; hence

$$\operatorname*{Sup}_{f\in\sigma(f_0,d')} f(x_0) = f_0(x_0) + d'|x_0| < 0.$$

Consequently

$$\operatorname*{Sup}_{f\in K} f(x_0) < -d'|x_0|. \tag{14}$$

Obviously (14) is equivalent to (13).

2. Unbounded regularly convex sets. We now pass to the study of unbounded regularly convex sets in E^*. First of all we shall state the following Theorem, fundamental in the sequel.

Theorem 5. *In order that an unbounded set $K \subset E^*$ be regularly convex it is necessary and sufficient that the intersection of K with every bounded regularly convex set be also regularly convex.*

P r o o f†. The necessity of the indicated condition in trivial. It remains to show its sufficiency, that is if K satisfies this condition, then to any given $g_0 \notin K$ corresponds an $x_0 \in E$ such that

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < g(x_0).$$

Denote by d the distance of g from K. Obviously $d > 0$. Take any sequence $\varepsilon_1 = 1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 >, \ldots, \varepsilon_n \to 0$ and a $d' < d$ $(d' > 0)$. We will now form by recurrence a sequence $\{x_i\}_1^\infty$ possessing the property: if for some $f \in E^*$ and some natural number n the following conditions

$$f \in K, \; f(x_i) \geq g(x_i) - \frac{d'|x_i|}{\varepsilon_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

hold, then

$$|f - g| > \frac{d'}{\varepsilon_{n+1}}. \tag{16}$$

To obtain the first element x_1 of this sequence we consider the set H_1 of all f such that

$$f \in K \quad \text{and } |f - g| \leq \frac{d'}{\varepsilon_2}$$

the set H_1 the being the intersection of K with the sphere $\sigma(g, d'/\varepsilon_2)$ is by the assumed condition a regularly convex bounded set. As g lies at a distance $\geq d$ from H_1, there exists such an x_1 that

$$\sup_{f \in H_1} f(x_1) < g(x_1) - d'|x_1|.$$

Obviously, by this choice of x_1 the conditions $f \in K$, $f(x_1) \geq g(x_1) - -d'|x_1|$ imply $|g - f| > d'/\varepsilon_2$. Let now $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be formed so that

†The main idea of this proof is borrowed from Banach ([2], p.120–121).

(15) implies (16). Then x_{n+1} can be obtained as follows: Consider the set H_{n+1} of all $f \in E^*$ which satisfy the conditions (15) and belong to the sphere

$$|g - f| \le \frac{d'}{\varepsilon_{n+2}}. \tag{17}$$

If the set H_{n+1} is empty, take for x_{n+1} an arbitrary element different from zero. In another case H_{n+1} being the intersection of K and of $n+1$ regularly convex sets of which one is bounded (namely, the sphere $\sigma(g, d'/\varepsilon_{n+2})$) is itself regularly convex. As the conditions (15) imply (16), the set H_{n+1} lies at a distance $> d'/\varepsilon_{n+1}$ from g, and therefore there exists an x_{n+1} such that

$$\operatorname*{Sup}_{f \in H_{n+1}} f(x_{n+1}) < g(x_{n+1}) - \frac{d'|x_{n+1}|}{\varepsilon_{n+1}}.$$

Consequently, if

$$f \in K, \quad f(x_i) \ge g(x_i) - \frac{d'|x_i|}{\varepsilon_i} \quad (i = 1, 2, ..., n+1), \tag{18}$$

then $f \notin H_{n+1}$, which is possible if (17) does not hold, that is $|g - f| > > d'/\varepsilon_{n+2}$.

Thus the existence of the required sequence $\{x_i\}_1^\infty$ is proved. It follows from the definition of this sequence that if $f \in K$ then at least one of the inequalities $f(x_i) \le g(x_i) - d'|x_i|/\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, ...)$ is true, i.e.

$$\operatorname*{Sup}_{1 \le i \le \infty} \varepsilon_i \frac{g(x_i) - f(x_i)}{|x_i|} > d'. \tag{19}$$

Putting

$$y_i = \varepsilon_i \frac{x_i}{|x_i|} \quad (i = 1, 2, ...),$$

we may write the relation (19) in the form:

$$\operatorname{Sup}\{g(y_i) - f(y_i)\} > d'. \tag{20}$$

Denote by K_0 the set of all sequences $\{f(y_i)\}_1^\infty$, where $f \in K$. As $|y_i| = \varepsilon_i \to 0$, we have $\lim\limits_{i \to \infty} f(y_i) = 0$ and therefore $K_0 \subset (c_0)$ where

(c_0) is the space of all sequences $\xi = \{\xi_i\}_1^\infty$ converging toward zero with the definition of the norm $||\xi|| = \sup_{1 \leq i \leq \infty} |\xi_i|$.

The inequalities (20) show that the sequence $\{g(y_i)\}_1^\infty \in (c_0)$ is at a distance $\geq d'$ from K_0. Furthermore, as K is convex, so is K_0.

Therefore there exists in (c_0) a hyperplane

$$a_1\xi_i + a_1\xi_2 + \cdots = a_0\Big(\sum_1^\infty |a_i| = 1\Big), \tag{21}$$

which passes through the point $\{g_0(y_i)\}_1^\infty$, i.e.

$$\sum_1^\infty a_i g_0(y_i) = a_0, \tag{22}$$

and whose distance from K_0 is $\geq d'$. The last fact can be expressed by a suitable choice of the sign of a_0 as follows:

$$\sum_1^\infty a_i f_0(y_i) \leq a_0 - d' \quad (f \in K). \tag{23}$$

Putting then

$$x_0 = \sum_1^\infty a_i y_i \tag{24}$$

we obtain from (22) and (23) that

$$f(x_0) \leq g(x_0) - d' \quad (f \in K), \tag{25}$$

which completes the proof of our Theorem.

Theorem 6. *In order that a linear subspace $F \subset E^*$ be regularly closed it is necessary and sufficient that there exists in F a bounded regularly convex set K which has in F interior points (i.e. is in F a convex body).*

P r o o f. To show the necessity of the condition, take in F any bounded set S containing in F interior points. Form then the regularly convex envelope K of S. As the intersection of K and F (if F is regularly closed) must be also regularly convex, it coincides with K. Therefore $K \subset F$ satisfies all the requirements of our Theorem.

Conversely, let F contain a bounded regularly closed body K. Obviously, we may suppose that the null element $\theta \in K$, for in the contrary case we bring about this situation by a suitable translation of K in F. Let now K' be any bounded regularly closed set. It is clear that for a sufficiently large λ the intersection of K' and F coincides with the intersection D of K' and λK. But K' and λK being regularly closed, so is D, which proves our Theorem.

Theorem 7. *If $K_1, K_2, ..., K_n$ are regularly convex sets in E^* and if furthermore all these sets except maybe one are bounded, then the set $K = a_1K_1 + \cdots + a_nK_n$ is regularly convex whatever the constants $a_1, a_2, ..., a_n$ maybe.*

P r o o f. In the case in which all sets $K_1, ..., K_n$ are bounded the Theorem coincides with Corollary 1 of Theorem 3. Let then $K_1, ..., K_{n-1}$ be bounded and K_n unbounded ($a_n \neq 0$). Put

$$C_i = \operatorname*{Sup}_{f \in K_i} |f| \quad (i = 1, 2, ..., n-1).$$

Take now any bounded set $H \subset E^*$:

$$C = \operatorname*{Sup}_{f \in H} |f| < \infty.$$

Choose a number $R > 0$ such that

$$|a_n|R - \sum_{1}^{n-1} |a_i|C_i > C.$$

Denote by K_n' the intersection of K_n with the sphere $\sigma(\theta, R)$ and put $K' = a_1K_1 + \cdots + a_{n-1}K_{n-1} + a_nK_n'$. The sets $K_1, ..., K_{n-1}, K_n'$ being regularly convex and bounded, so is the set K' and, consequently, the intersection $K' \cap H$. But it is easy to see that by our choice of R we have $K \cap H = K' \cap H$. Thus $K \cap H$ is regularly convex, which proves our Theorem.

Corollary. *Corollary 2 of Theorem 3 remains true if K is an unbounded regularly convex set.*

Consequently, Theorem 4, being based on the two corollaries of Theorem 3, also admits a generalization, namely:

Theorem 8. *Theorem 4 remains true if one of the sets K_1, K_2 is bounded and another is unbounded.*

Observe also that for the case in which K_1 is unbounded and K_2 consists of only one element g, this Theorem is a consequence of the inequality (25), for it follows from (24) that

$$|x_a| \leq \sum_1^\infty |a_i||y_i| \leq \sum_1^\infty |a_i| = 1$$

and consequently (25) implies

$$\operatorname*{Sup}_{f \in K} f(x_0) \leq g(x_0) - d'|x_0|.$$

3. Transfinite methods. In this paragraph we will outline another method for studying the regularly convex set which is based on some ideas of Banach (see [2], p.118–126).

Let ϑ be a limit ordinal. Denote by (p_ϑ) the linear space of bounded transfinite sequences of real numbers $X = \{\xi_\alpha\}_1^\vartheta$ of the type ϑ $(1 \leq \alpha < \vartheta)$, in which the operations of addition and multiplication by a scalar are defined as follows:

1°. *If* $X = \{\xi_\alpha\}$, $Y = \{\eta_\alpha\}$, then $X + Y = \{\xi_\alpha + \eta_\alpha\}$.

2°. *If* $X = \{\xi_\alpha\}$ *and* λ *is a scalar, then* $\lambda X = \{\lambda \xi_\alpha\}$.

Put

$$p(X) = \overline{\lim_{\alpha \to \vartheta}} \xi_\alpha.$$

Obviously, the functional $p(X)$ has the properties:

$$p(X+Y) \leq p(X) + p(Y), \ p(\lambda X) = \lambda p(X), \ \lambda \geq 0.$$

By the well-known Theorem of Banach (see [2], p.29) there exists an additive functional $\mathfrak{p}(X)$, such that

$$\mathfrak{p}(X) \leq p(X) \quad (X \in (p_\vartheta)), \tag{a}$$

and consequently

$$-p(-X) \leq \mathfrak{p}(X) \quad (X \in (p_\vartheta)). \tag{b}$$

Put for arbitrary $X = \{\xi_\alpha\}_1^\vartheta \in (p_\vartheta)$

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha \to \vartheta} \xi_\alpha = \mathfrak{p}(X).$$

It follows from (a) and (b) that

$$\varliminf_{\alpha\to\vartheta} \xi_\alpha \le \operatorname*{Lim}_{\alpha\to\vartheta} \xi_\alpha \le \varlimsup_{\alpha\to\vartheta} \xi_\alpha \quad (\{\xi_\alpha\}_1^\vartheta \in (P_\vartheta)). \tag{26}$$

Furthermore, as $\mathfrak{p}(X)$ is an additive functional we have

$$\operatorname*{Lim}_{\alpha\to\vartheta}\{\lambda\xi_\alpha + \mu\eta_\alpha\} = \lambda \operatorname*{Lim}_{\alpha\to\vartheta} \xi_\alpha + \mu \operatorname*{Lim}_{\alpha\to\vartheta} \eta_\alpha. \tag{27}$$

From now on in this paragraph we shall agree to associate with every limit ordinal ϑ a fixed operation $\operatorname*{Lim}\limits_{\alpha\to\vartheta}$ on (p_v) to the real axis, which possesses the properties (26) and (27).

Let now $\{f_\alpha\}_1^\vartheta$ be any ordered sequence of the type ϑ ($1 \le \alpha < \vartheta$), the element of which belong to E^* and are bounded in their totality, i.e.

$$\operatorname*{Sup}_{1\le\alpha<\vartheta} |f_\alpha| < \infty.$$

As for every $x \in E$ the sequence $\{f_\alpha(x)\}$ is bounded, we may make correspond to the sequence $\{f_\alpha\}_1^\vartheta$ a functional defined as follows:

$$f_0(x) = \operatorname*{Lim}_{\alpha\to\xi} f_\alpha(x) \quad (x \in E).$$

In virtue of (26) and (27) the functional $f_0(x)$ is additive and

$$|f_0(x)| \le \operatorname*{Sup}_{1\le\alpha<\vartheta} |f_\alpha(x)| \le \operatorname*{Sup}_{1\le\alpha<\vartheta} |f_\alpha| \cdot |x|.$$

Therefore $f_0 \in E^*$ and

$$|f_0| \le \operatorname*{Sup}_{1\le\alpha<\vartheta} |f_\alpha|. \tag{28}$$

Modifying slightly Banach's definition ([2], p.119), we shall call the functional f_0 *transfinite limit* of the sequence $\{f_\alpha\}$ and we shall write

$$f_0 = \lim_{\alpha\to\vartheta} f_\alpha. \tag{29}$$

Now it is natural to say that a set $K \subset E^*$ is *transfinitely closed* if it contains the transfinite limits of all ordered bounded sequences $\{f_\alpha\}$ belonging to it.

Theorem 9. *In order that a set $K \subset E^*$ be regularly convex it is necessary and sufficient that it be transfinitely closed.*

P r o o f. The condition is necessary. In fact, if a bounded ordered sequence $\{f_\alpha\}$ $(1 \leq \alpha < \vartheta)$ belongs to the regularly convex set K, then the functional

$$f_0 = \operatorname*{Lim}_{\alpha \to \vartheta} f_\alpha$$

also belongs to K for in the contrary case there exists an $x_0 \in E^*$ such that

$$\operatorname*{Sup}_{1 \leq \alpha < \vartheta} f_\alpha(x_0) \leq \operatorname*{Sup}_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0),$$

which is incompatible with (26).

In proving the sufficiency of our condition we may suppose without loss of generality that K is bounded. In fact, it K is transfinitely closed then by (28) so is the intersection of $K^{(n)}$ with the sphere $\sigma(\theta, n)$. On the other hand if we show that $K^{(n)}$ is regularly closed, then so will K be, by Theorem 5.

Thus suppose K bounded and transfinitely closed. Denote by K' the regularly convex envelope of K. To prove our Theorem it remains to show that $K' = K$. Take a $g \in K'$. Let us well order the elements of E

$$E = \{x_\alpha\} \quad (\alpha < \vartheta).$$

To prove that $g \in K$ we show that to every $\vartheta_1 \leq \vartheta$ corresponds at least one $f \in K$ such that

$$f(x_\alpha) = g(x_\alpha) \quad (\alpha < \vartheta_1). \tag{30}$$

Let first $\vartheta_1 = n + 1$ be an integer. Consider the set $\mathfrak{K}_n \subset R_n$ (R_n is n-dimensional Euclidean space) of all points $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, where

$$\xi_1 = f(x_1), \ldots, \xi_n = f(x_n) \quad (f \in K). \tag{31}$$

It is easily seen that $\mathfrak{K}_n$ is convex and closed (the latter in virtue of the transfinite closedness of K). We state that the point

$$\eta_1 = g(x_1), \ldots, \eta_n = g(x_n) \tag{32}$$

belongs to $\mathfrak{K}_n$. In fact, in the contrary case there exists by a Theorem of Minkowski a system of numbers $\alpha_1, ..., \alpha_n$ such that

$$\operatorname*{Sup}_{(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathfrak{K}_n} \sum_1^n a_i\xi_i < \sum_1^n \alpha_i\eta_i,$$

which by (31) and (32) may be written as follows

$$\operatorname*{Sup}_{f\in K} f\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right) < g\left(\sum_1^n \alpha_i x_i\right).$$

Since $g \in K'$ this inequality contradicts corollary 1 of Theorem 1. Thus $(\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathfrak{K}_n$, i.e. for $\vartheta_1 = n + 1$ there exists a $f \in K$ such that (30) holds.

Now we can apply the transfinite induction. Indeed let the limit ordinal ϑ_1 have the property: to every $\beta < \vartheta_1$ corresponds a $f_\beta \in K$, such that

$$f_\beta(x_\alpha) = g(x_\alpha) \quad (\alpha < \beta).$$

Then K being transfinitely closed the functional

$$f_{\vartheta_1} = \operatorname*{Lim}_{\beta\to\vartheta_1} f_\beta$$

belongs to K and, furthermore, as it satisfier the conditions $f_{\vartheta_1}(x_\alpha) = g(x_\alpha)$ $(\alpha < \vartheta_1)$, the possibility of applying the transfinite induction is established. This completes the proof of our Theorem.

The reader who is familiar with the book of Banach has probably remarked that Theorem 9 presents a generalization of Banach's Theorem concerning transfinitely closed subspaces ([2], Lemmas 2, 3, p.119–122). Our method of proving Theorem 9 is slightly different from that of Banach, though it is possible also to prove this Theorem following his methods.

It is easy to see that Theorem 7 may be obtained as an almost immediate corollary of Theorem 9. However, we should meet some difficulties in this deduction of the Theorem if we had difined transfinitely closed sets exactly as Banach difined them.

We also find in interesting that all the main properties of regularly convex sets may be obtained as has been shown in the preceding paragraphs without resorting to transfinite limits.

4. Separable sets. The criterion that a set $K \subset E^*$ is regularly convex is much simplified in the cases in which the space E or the set K itself are separable. We begin with

Theorem 10. *Let E be a separable Banach space. Then a set $K \subset E^*$ is regularly convex if and only if it is convex and weakly closed (as a set of linear functionals)*†.

Proof. The necessity of the indicated condition being trivial, we shall prove its sufficiency. Thus let $K \in E^*$ be a convex and weakly closed set. As the sphere $\sigma_n = \sigma(\theta, n)$ is also convex and weakly closed, so is the intersection, K_n, of K and σ_n. Now if we prove that K_n is regularly convex, then so will be the set K (by Theorem 5). Therefore in proving that K is regularly convex, we may suppose at once that K is bounded.

Let $g \in K'$, where K' in the regularly convex envelope of the set K. Our Theorem will be proved if we show that $g \in K$. Let $\{x_n\}$ be a dense sequence in E. Since E is separable, K is weakly compact. Therefore we may reason the same way as in proving Theorem 9 and show that to every $n = 1, 2, \ldots$ corresponds a $f_n \in K$ such that

$$f_n(x_i) = g(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

K being weakly compact, there exists a subsequence $\{f_{n_\nu}\}$ and an $f_0 \in K$ such that $f_0(x) = \lim f_{n_\nu}(x)$ $(x \in E)$. Then in virtue of (33), $f_0(x_i) = g(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ and consequently $g = f_0 \in K$. Thus the Theorem is proved.

One can easily obtain Theorem 10 from Theorem 9 as Banach had done by proving his particular case (see footnote van in p.25), but we wished to show how the Theorem may be proved without transfinite limits.

Lemma 1. *Whatever be the separable subspace $F \subset E^*$, there exists a separable subspace $G \subset E$ such that $F \subset G^*$*††.

Proof. Let $\{f_m\}_1^\infty$ be a sequence dense in F. To every f_n corresponds a sequence $\{x_{mn}\}_{n=1}^\infty$ such that

---

†For the particular case when K is a linear subspace of E^* one can find this Theorem in the book of Banach ([2], p.124).

††See V. Šmulian [15] and [16].

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|f_m(x_{mn})|}{|x_{mn}|}=|f_m| \quad (n=1,2,...).$$

Denote by G the linear envelope of the set $\{x_{mn}\}$ $(m,n=1,2,...)$. It is easy to see that $|f|_E=|f|_G$ if $f\in F$. Therefore we may write $F\subset G^*$.

Lemma 2. *Let S be a separable bounded set in E^*. If for each sequence $\{f_n\}\subset S$ the functional*

$$f_0=\operatorname*{Lim}_{n\to\omega} f_n$$

belongs to H, then the set H is weakly compact (in the sense of weak convergence of functionals)[†].

Here we denote by $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty}$ an arbitrary fixed operation (generalized limit) corresponding to the first infinite ordinal number $\vartheta=\omega$ which was defined in the preceding paragraph.

P r o o f. Take an arbitrary sequence $\{f_n\}_1^\infty\subset S$. Denote by F the linear envelope of the set S. As the set F is separable, there exists by the preceding Lemma a separable subspace $G\subset E$, such that $F\subset G^*$. Let $\{x_i\}_1^\infty$ be a sequence dense in G. It is clear that if $f',f''\in F$ and $f'(x_i)=f''(x_i)$ $(i=1,2,...)$, then $f'=f''$. Choose by the diagonal process of Cantor a subsequence $\{f_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ such that there exists $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x_i)$ for each $i=1,2,...$.

We now assert that $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x)$ exists for every $x\in E$. Admit the contrary, i.e. that for some $x_0\in E$ the $\lim_{\nu\to\infty} f_{n_\nu}(x_0)$ does not exist. Then we can form two subsequences $\{f_{p_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ and $\{f_{q_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ such that there exist two different $\lim_{\nu=\to\infty} f_{p_\nu}(x_0)$ and $\lim_{\nu\to\omega} f_{q_\nu}(x_0)$. On the other hand putting

$$f'=\operatorname*{Lim}_{\nu\to\infty} f_{p_\nu}, \qquad f''=\operatorname*{Lim}_{\nu\to\omega} f_{q_\nu}$$

we obtain that

$$f'x_i=\lim_{\nu\to\infty} f_{p_\nu}(x_i)=\lim_{\nu\to\infty} f_{q_\nu}(x_i)=f''(x_i) \quad (i=1,2,...) \tag{34}$$

[†]This Lemma is taken from a paper of V. Šmulian [16], where it is proved in a somewhat more general form.

and

$$f'(x_0) \neq f''(x_0). \tag{35}$$

Since by the condition of our Lemma $f' \in S \subset F$, $f'' \in S \subset F$, the relations (34) and (35) are in contradiction.

We shall say that a set $S \subset E^*$ is a *locally weakly compact* set if every bounded sequence $\{f_n\} \subset S$ contains a subsequence $\{f_{n_\nu}\}$ which converges weakly to a functional belonging to S.

Theorem 11. *In order that a separable set K be regularly convex it is necessary and sufficient that K be convex and locally weakly compact*†.

P r o o f. To prove the necessity of our condition, consider the intersection K_n of K with the sphere $\sigma(\theta, n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. If K is regularly convex then so is K_n. Therefore, by Theorem 9, K_n satisfies the conditions of Lemma 2 and is consequently weakly compact. Hence K is locally weakly compact.

To prove the sufficiency of our condition we take an arbitrary $g \notin K$. Consider the linear envelope F of the set $\{K, g\}$. By Lemma 1, there exists a separable subspace $G \subset E$ such that $F \subset G^*$ and consequently $K \subset G^*$ and $g \in G^*$. K being locally weakly compact as a set of E^*, it is the same regarded as a set of G^*. Consequently K is weakly closed as a set of G^* and, being convex, is by Theorem 10 regularly convex as a set of G^*. Hence there exists an element $x_0 \in G$ such that

$$\operatorname*{Sup}_{f \in H} f(x_0) < g(x_0),$$

which completes our proof.

Chapter II

1. Principal properties of factor-spaces. If G is a linear subspace of E, we denote by E/G the factor group, obtained from E and G if we consider E and G as a group and a subgroup, respectively, with respect to the addition operation of the elements. The elements of E/G will be denoted by Greek letters $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. So every element

---

† The particular case of this Theorem, when K is a linear subspace was already established by V. Šmulian [15].

$\xi \in E/G$ can be considered as a set of elements $x \in E$ such that, if $x_0 \in \xi$, then the element x belongs to ξ if and only if $x - x_0 \in G$.

It is easy to see (see Hausdorff [4]) that E/G becomes a Banach space if the multiplication of the elements $\xi \in E/G$ by a scalar and the norm $|\xi|$ are defined as follows:

The product $\lambda\xi$ is the element $\eta \in E/G$ which contains all elements λ where $x \in \xi$; the norm

$$|\xi| = \operatorname*{Inf}_{x\in\xi} |x| = \operatorname*{Inf}_{u\in G} |x_0 - u| \qquad (x_0 \in \xi).$$

If F is a linear subspace of E^*, we may consider also the factor space E^*/F. The elements of the latter we shall denote by Greek letters $\varphi, \psi, \chi, \dots$.

Lemma. *If G is closed linear subspace of E, and F*[†] *is the set of all elements $f \in E^*$ such that*

$$f(x) = 0 \qquad (x \in G) \tag{36}$$

then G is the set of all elements $x \in E$ such that,

$$f(x) = 0 \qquad (f \in F). \tag{37}$$

Conversely, if F is a linear, regularly closed subspace of E^*, and G[††] *is the set of all elements $x \in E$ for which (37) holds, then F is the set of all elements $f \in E^*$ such that (36) holds.*

P r o o f. To prove the first statement we have to show that if $x_0 \notin G$ then there exists an $f_0 \in F$ such that $f_0(x_0) \neq 0$. But if $x_0 \notin G$, G being closed, there exists an $f_0 \in E^*$ such that $f_0(x_0) = 1$ and $f_0(x) = 0$ for $x \in G$. As the last condition signifies that $f \in F$, the statement is proved. The second part of the Lemma follows from the difinition of regularly closed subspace of E^*.

Theorem 12. *If F is a regularly closed subspace of E^*, and G denotes the set of all elements $x \in E$ such that $f(x) = 0$ for $f \in F$, then*

$$F = (E/G)^* \text{ and } G^* = E^*/F. \tag{38}$$

[†] Obviously, F is regularly closed.

[††] Obviously, G is closed.

P r o o f. To prove the first of these equalities let us put for every $f \in F$, $f(\xi) = f(x)$, if $\xi = \xi_x$ contains x. Obviously, $f(\xi)$ is an additive single-valued functional defined on E/G. As $|f(\xi_x)| = |f(x)| = |f(x-u)| \leq |f|_E \cdot |x-u|$ for $u \in G$, $|f(\xi_x)| \leq |f|_E \cdot \mathrm{Inf}|x-u| = |f|_E \cdot |\xi_x|$. Thus $f(\xi)$ is a linear functional defined on $H = E/G$ with the norm

$$|f|_H \leq |f|_E. \tag{39}$$

Conversely, let $f(\xi)$ denote a linear functional defined on E/G. Putting $f(x) = f(\xi)$ if $x \in \xi$ we obtain an additive functional defined on E and satisfying the condition

$$f(x) = 0 \qquad (x \in G). \tag{40}$$

As $|f(x)| = |f(\xi)| \leq |f|_H|\xi| \leq |f|_H|x| \ \ (x \in \xi)$, $\ f \in E^*$, and

$$|f|_E \leq |f|_H. \tag{41}$$

Further, by (40) and the Lemma $f \in F$. Also every functional $f \in (E/G)^*$ generates a functional denoted by the same letter $f \in F$ and conversely.

Comparing (39) and (41), we see that $|f|_E = |f|_H$, which completes the proof of the first equality (38).

Now let $f_0(x)$ be a linear functional defined on $G (f_0 \in G^*)$. Let φ_0 denote the set of all $f \in E^*$ such that

$$f(x) = f_0(x) \quad \text{for} \quad x \in G.$$

According to the Theorem of Hahn–Banach the set φ_0 is not empty and moreover contains at least one element f' such that $|f'|_E = |f|_G$. If $g_0 \in \varphi_0$, then $g \in \varphi_0$ $(g \in E^*)$ if and only if $g(x) = g_0(x)$ for $x \in G$, i.e. $g - g_0 \in F$. Hence we can consider the set φ_0 as an element of E^*/F. Obviously

$$|\varphi_0| = \operatorname*{Inf}_{f \in F} |f|_E \leq |f'|_E = |f_0|_G.$$

Thus every element $f \in G^*$ generates an element $\varphi = \varphi_f \in E^*/F$ such that

$$|\varphi_f| \leq |f|_G. \tag{42}$$

Conversely, given an element $\varphi_0 \in E^*/F$, for each pair $g_1 \in \varphi_0$ and $g_2 \in \varphi_0$, we have $g_1(x) = g_2(x)$ for $x \in G$. Consequently, φ_0 determines an element $f_0 \in G^*$ such that $f_0(x) = g(x)$ for $x \in G$ and every $g \in \varphi_0$. Since $|f_0|_G \leq |g|_E$ for $g \in \varphi_0$,

$$|f_0|_G \leq \operatorname*{Inf}_{g \in F} |g|_E = |\varphi_0|. \tag{43}$$

Thus every element $\varphi \in E^*/F$ generates an element $f \in G^*$ such that $\varphi = \varphi_f$, and (43) holds. Comparing (42) and (43) we see that $|f|_G = |\varphi_f|$, which completes the proof of the second part of the Theorem.

In view of the Lemma we can give another from to our Theorem.

Theorem 12′. *If G is a linear closed subspace of E and F is the set of all functionals $f \in E^*$ such that $f(x) = 0$ for $x \in G$, then $G^* = E/F$ and $F = (E/G)^*$.*

Using the notations of the last Theorem, let us now consider the spaces E^{**} and G^{**} conjugate to the spaces E^* and G^*, respectively. Let L be the set of all elements $\mathfrak{p} \in E^{**}$ such that $\mathfrak{p}(f) = 0$ for $f \in F$. Then according to the last Theorem L is the space conjugate to the space E^*/F, which in turn is the conjugate space of G. Thus $G^{**} = L \subset E^{**}$. We obtain thus

Theorem 13. *If G is a linear subspace of E, then G^{**} may be regarded as a subspace of E^{**}.*

2. **1.** The Banach space E is said to be regular if to every $\mathfrak{p} \in E^{**}$ corresponds an $x \in E$ such that $\mathfrak{p}(f) = f(x)$ for $f \in E^*$. A.J. Plessner has remarked that every linear closed subspace of a regular space is also regular†. This proposition is an immediate consequence of the proof of Theorem 13. The following Theorem complements the proposition of A.J. Plessner.

Theorem 14. *Let G be a linear closed subspace of E. In order that E be regular it is necessary and sufficient that G and E/G be regular.*

P r o o f. Let E be regular. Then, as we already know, G is regular. We have to show that the factor space E/G is also regular.

†This fact is an immediate consequence of the criterion for the regularity of the Banach space which was also indicated by Plessner. A simple proof of this criterion was proposed by V. Gantmacher and V. Šmulian [3].

Keeping the notations of the preceding paragraph we may state that the space conjugate to E/G is a subspace of the regular space E^* and consequently is regular. But if $F = (E/G)^*$ is regular, then so is E/G[†].

Conversely, let G and E/G be regular. Let $\mathfrak{p}_0 \in E^{**}$. Considering the functional $\mathfrak{p}_0(f)$ on $F = (E/G)^*$, we find in view of the regularity of E/G that there exists a $\xi_{x_0} \in E/G$, such that

$$\mathfrak{p}_0(f) = f(\xi_{x_0}) = f(x_0) \quad \text{for} \quad f \in F.$$

On the other hand putting $\mathfrak{p}_1(f) = \mathfrak{p}(f) - f(x_0)$ for $f \in E^*$, we obtain that $\mathfrak{p}_1(f) = 0$ for $f \in F$. Therefore, considering $\mathfrak{p}_1$ as a linear functional defined on $E^*/F = G^*$, we find that $\mathfrak{p} \in G^{**}$. Since G is regular, there exists a $x_1 \in G$ such that

$$\mathfrak{p}_1(\varphi_f) = \varphi_f(x_1) \quad \text{for} \quad \varphi_f \in E^*/F$$

or

$$\mathfrak{p}_1(f) = f(x_1) \quad \text{for} \quad f \in E^*.$$

Thus

$$\mathfrak{p}_0(f) = f(x_0 + x_1) = f(x) \quad \text{for} \quad f \in E^*,$$

which completes the proof of the Theorem.

2. A set $\mathfrak{M}$ of a Banach-space E will be said to be *weakly compact* if every sequence $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{M}$ contains a subsequence $\{x_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ which converges *to an element of* E.

In proving the next Theorem we shall rely upon two propositions[††]:

A) The unit sphere of a regular Banach space is weakly compact.

B) The unit sphere of a Banach space E is weakly compact if and only if the unit sphere of the conjugate space is weakly compact.

[†] This follows from the proposition of Plessner: A Banach space is regular if and only if its conjugate space is regular ([8], p.115).

[††] These propositions have been proved by V. Gantmacher and V. Šmulian [3]. The proposition A), as well as the proposition of Plessner indicated above, have been recently repeated by Pettis [11].

Theorem 15. *Let G be a linear, closed subspace of E. In order that the unit sphere of the space E be weakly compact it is necessary and sufficient that the unit spheres of the spaces G and E/G be weakly compact.*

P r o o f. If the unit sphere of G is weakly compact then it is easy to see that the unit sphere of G is weakly compact. Furthermore, given a bounded sequence

$$\{\xi_n\}_1^\infty \subset E/G \qquad (|\xi_n| < \rho, \quad n = 1, 2, ...),$$

we may choose such $x_n \in \xi_n$ so that also $|x_n| < \rho \quad (n = 1, 2, ...)$. But then there exists a subsequence $\{x_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ that converges weakly to an $x_0 \in E$ and this implies that the sequence $\{\xi_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ converges weakly to ξ_{x_0}.

Conversely, let the unit spheres of G and E/G be weakly compact. In proving that the unit sphere of E is weakly compact it is sufficient to prove the statement in the special case when the space E/G is separable. In fact, given a bounded sequence $\{x_n\}_1^\infty \subset E$, we may form the linear, closed envelope E_1 of the set $\{G, x_1, x_2, ...\}$. Then E_1/G, is separable and being a subspace of E/G has a weakly compact unit sphere. Therefore if our Theorem is established for the case when the factor-space is separable, the unit sphere of E_1 will be weakly compact and consequently the given sequence, $\{x_n\} \subset E_1$, will contain a subsequence $\{x_{n_\nu}\}_{\nu=1}^\infty$ which will converge weakly to an $x_0 \in E_1 \subset F$.

Thus we suppose without loss of generality that the factor-space E/G is separable and consequently regular. On the other hand, to prove that the unit sphere of E is weakly compact it is sufficiently by B) to show that the unit sphere of E^* is weakly compact. To this purpose let us consider the space $F = (E/G)^* \subset E^*$ and $E^*/F = G^*$. The space F is regular, and by A) the unit spheres of F and E^*/F are weakly compact.

But as above by proving that E^* possesses the required property we may suppose that E^*/F is separable and consequently regular. Then, according to Theorem 14, E^* is regular and consequently its unit sphere is by A) weakly compact, which completes the proof of the Theorem.

3. Linear envelopes of regularly convex sets. The results of this paragraph complete in some respect those of the preceding paragraph.

Let F be the linear envelope of a bounded, regularly convex set $K \subset E^*$. Denote by G the set of all elements x such that $f(x) = 0$ for $f \in K$, and by $(E/G)_K$ the factor group E/G with the new definition of the norm, namely

$$|\xi|_K = \operatorname*{Sup}_{f \in K} |f(x)| \qquad (\xi \in E/G), \tag{44}$$

where x is an arbitrary element belonging to ξ. The set K being bounded, put

$$C = \operatorname*{Sup}_{f \in K} |f|.$$

Then from (44)

$$|\xi|_K \leq C|x|. \tag{45}$$

Moreover since for every $u \in G$

$$|\xi|_K = \operatorname*{Sup}_{f \in K} |f(x-u)| \leq C|x-u|,$$

we find also that

$$|\xi|_K \leq C \operatorname*{Inf}_{u \in G} |x-u| = C|\xi|.$$

For every $f \in F$: $f(x) = f(y)$, if only $x - y \in G$; therefore we can define $f(\xi)$ as equal to $f(x)$, where $x \in \xi$. Obviously, $f(\xi)$ is an additive, single-valued functional defined over $(E/G)_K$. Moreover $f(\xi)$ is continuous over $(E/G)_K$. In fact, every $f \in F$ admits the representation $f(\xi) = \text{const}\,(f_1(\xi) - f_2(\xi))$, where $f_i \in K$ $(i = 1, 2)$. Since, in virtue of (44), $|f_i(\xi)| \leq |\xi|_K$ $(i = 1, 2)$, we see that

$$|f|_K = \operatorname{Sup} \frac{|f(\xi)|}{|\xi|_K} < \infty. \tag{46}$$

Conversely, let $f_0(\xi)$ denote a linear functional defined over $(E/G)_K$. Putting $f_0(x) = f_0(\xi)$ if $x \in \xi$ we obtain an additive functional defined over E for which by (45)

$$|f_0(x)| = |f_0(\xi)| \leq |f_0|_K |\xi|_K \leq C|f_0|_K|x|. \tag{47}$$

Thus f_0 is a linear functional belonging to E^*. We will show that moreover $f_0 \in F$. To this purpose we denote by K^+ the convex envelope of the sum of the set K and the symmetrie set $-K$. By corollary 1 of Theorem 2, K^+ is regularly closed. Obviously,

$$|\xi|_K = \operatorname*{Sup}_{f \in K^+} f(x) \qquad (x \in \xi). \tag{48}$$

In proving that $f_0 \in F$ it is sufficient to show that each $f_1 = \lambda f_0 \in \in K^+$ if $|\lambda| \leq 1/|f_0|_K$. Admitting for some f_1 the contrary, there will exist an $x_0 \in E$ such that

$$\operatorname*{Sup}_{f \in K^+} f(x_0) < f_1(x_0) = f_1(\xi_0) \leq |\xi_0|_K \quad (x_0 \in \xi_0). \tag{49}$$

But this contradicts (48). Thus $f_1 \in K^+$. Observe also that, conversely, if $f \in K$, then $|f|_K = 1$, for according to (44) $|f(\xi)| \leq |\xi|_K$. Denote by F_K the vector space F in which is introduced the norm $|f|_K$ defined by (46). Then we may formulate the result obtained as follows:

Theorem 16. *The Banach space F_K is the conjugate space to the space $(E/G)_K$, furthermore, the set K^+ is its unit sphere.*

The space F_K being a conjugate space is complete. On the other hand it follows from (45) that $|f| \leq C|f|_K$ $(f \in F)$. Therefore in virtue of a wellknown Theorem of Banach (see [2], p.41) if F is closed the two norms $|f|$ and $|f|_K$ define the same topology in F, which implies the existence of a constant C_1 such that $|f|_K \leq C_1|f|$ $(f \in F)$. Consequently in this case the intersection R of the sphere $\sigma(\theta, 1) \subset \subset E^*$ with F coincides with the intersection of the sphere $\sigma(\theta, 1)$ with the set C_1K. The last two sets being regularly convex, so is the set R. Recalling Theorem 6 we arrive at

Theorem 17. *If the linear envelope F of a bounded, regularly convex set $K \subset E^*$ is closed, then it is regularly closed.*

Note also the following

Theorem 18. *If $K \subset E^*$ is a bounded regularly convex, separable set, then the factor-space $(E/G)_K$ is separable.*

P r o o f. Evidently K^+ is also separable and being bounded and regularly closed is by Theorem 11 weakly compact as a set of functionals. Then by Theorem 22, which we shall prove in the sequel, the set K^+ is a weakly continuous image of a compact metric set. But K^+ being the unit sphere of the conjugate space to the space $(E/G)_K$, the aforesaid property of K^+ implies (by the Lemma which will be proved at the beginning of the following paragraph) the separability of the space $(E/G)_K$.

Chapter III

1. Weakly compact sets in the conjugate space. In this paragraph we use the notions *weakly convergent, weakly compact*, etc. for sequences, sets, etc. of elements from E^* in the sense which is usually adopted for functionals. To avoid a misunderstanding we will say also that a set $S \subset E^*$ is *weakly compact in* E^* if every sequence $\{f_n\}_1^\infty \subset S$ contains a subsequence $\{f_{n_\nu}\}$, converging weakly to an element $f_0 \in E^*$; if furthemore, whatever be the sequence $\{f_n\}$, the corresponding elements f_0 all belong to S, then S is simply called *weakly compact* (or *weakly compact in itself)*.

We first prove some Lemmas:

Lemma 1. *In order that a Banach space E be separable it is necessary and sufficient that the unit sphere $\sigma = \sigma(\theta, 1)$ of the conjugate space E^* be a weakly continuous image of a compact metric set.*

P r o o f. If E is separable, then there exists a sequence $\{x_n\}_1^\infty$ dense in the unit sphere $\|x\| \leq 1$. We introduce a new distance $\rho(g, f)$ between two elements $g \in E^*$ and $f \in E^*$ as follows:

$$\rho(g, f) = \operatorname*{Sup}_{1 \leq n < \infty} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{n}. \tag{50}$$

As E is separable, σ is weakly compact. It is easy to see that σ becomes by this new metric a compact metric set, in which the metric convergence coincides with the originally weak convergence. Thus σ can be looked at as a weakly continuous one-to-one image of a compact metric set.

Let now conversely σ be a weakly continuous image of a compact metric set T. Then σ is the range of a weakly continuous function f_t defined over T $(t \in T)$. To every $x \in E$ we make correspond a continuous function $\varphi_x(t)$ $(t \in T)$ as follows: $\varphi_x(t) = f_t(x)$ $(t \in T)$.

Thus the space E is isometrically transformed into a linear subspace of the space $[T]$ consisting of all continuous functions $\varphi(t)$ with the usual definition of the norm: $\|\varphi\| = \operatorname*{Sup}_{t\in T}|\varphi(t)|$. But the space $[T]$ is separable, and, consequently, so is E.

Given a set $S \subset E^*$ we denote by $\widetilde{S}$ the weak closure of S, i.e. the totality of all elements of S and of all their weak limits.

Lemma 2. *If E separable and $S \subset E$ is bounded, then the weak closure $\widetilde{S}$ of S is weakly compact and consequently weakly closed.*

P r o o f. Take in E^* a sphere $\sigma(\theta, r)$, which contains S. In proving the preceding Lemma we have shown, E being separable, that σ can be regarded as a metric compact set in which the metric convergence coincides with the weak convergence. But then $\widetilde{S}$ is the metric closure of S in σ and, consequently, is metrically closed and also weakly closed.

From Theorem 10 and Lemma 2 follows

Theorem 19. *If E is separable and $S \subset E^*$ is bounded, then the weak closure $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ of the convex envelope $S_{\text{conv.}}$ of S coincides with the regularly convex envelope K of S.*

P r o o f. Since K is convex and regularly closed (and consequently weakly closed) we have $\widetilde{S}_{\text{conv.}} \subset K$. On the other hand it is evident that $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ is convex and, being by Lemma 2 weakly closed, it is by Theorem 10 regularly convex. Hence $K \subset \widetilde{S}_{\text{conv.}}$

It is now easy to prove the

Theorem 20. *Let $S \subset E^*$ be a weakly continuous image of a compact metric set T. The weak closure $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ of the convex envelope $S_{\text{conv.}}$ of S coincides with the regularly convex envelope K of S. Furthermore, the set $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ itself is a weakly continuous one-to-one image of a compact metric set.*

P r o o f. Obviously S is a bounded set and therefore K is bounded. Starting from K, introduce in the same way as in Chap. II, §3 the linear subspace $G \subset E$, the factor-space $(E/G)_K$, and the conjugate space $F_K = (E/G)^*_K$. The set S can be regarded as a set in E^* or as a set in F_K. But it is easy to see that in both cases the set $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ remains the same. Therefore, recalling Theorem 19, we see that our Theorem will be proved if we show that the space $(E/G)_K$ is separable. To this end we reason in like manner as in proving

Lemma 1. By the condition of our Theorem there exists a weakly continuous function f_t $(t \in T)$, the range of which coincides with S. Make correspond to every $\xi \in (E/G)_K$ the function $\varphi_\xi(t)$ defined as follows:

$$\varphi_\xi(t) = f_t(x) \qquad (t \in T),$$

where $x \in \xi$. As in virtue of corollary 1 of Theorem 1

$$|\xi|_K = \operatorname*{Sup}_{x \in K} |f(x)| = \operatorname*{Sup}_{x \in S} |f(x)| = \operatorname*{Sup}_{t \in T} |f_t(x)| = \operatorname*{Sup}_{t \in T} |\varphi_\xi(t)|, \tag{51}$$

the correspondence $\xi \leftrightarrow \varphi_\xi$ between $(E/G)_K$ and the subspace of the space $[T]$ consisting of all continuous functions $\varphi(t)$ defined over T is a linear, isometric one. But the space $[T]$ being separable so is the space $(E/G)_K$, which completes the proof of our Theorem.

Theorem 21. *Let $S \subset E^*$ be weakly compact in E^*. If $\widetilde{S}$ is separable, then it is a weakly continuous one-to-one image of a compact metric set.*

P r o o f. Let F be the linear envelope of $\widetilde{S}$. Evidently, F is separable and consequently, by Lemma 1 of Ch.I, §4, there exists a separable subspace $G \subset E$ such that $F \subset G^*$. On the other hand, if G is separable, we can apply Theorem 19 to the set $\widetilde{S}$. Thus we obtain that $\widetilde{S}$, considered as a subset of G^*, is a weakly continuous one-to-one image of a compact metric set T.

Denote by f_t the image of $t \in T$ in $\widetilde{S}$; then $t_n \to t_0$ implies

$$f_{t_n} \to f_{t_0}(x) \tag{52}$$

for every $x \in G$. Our Theorem will be proved if we show that (52) holds for every $x \in E$. Admit the contrary, i.e. that there exists an $x_0 \in E$ such that

$$\limsup_{n \to \infty} |f_{t_n}(x_0) - f_{t_0}(x_0)| > 0. \tag{53}$$

As S is weakly dense in $\widetilde{S}$, the antecedent of S in T is dense in T. Therefore there exist points $t'_n \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$ such that

$$\rho(t_n, t'_n) < \frac{1}{n}, \qquad f_{t'_n} \in S \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

On the other hand, S being weakly compact there exists a subsequence $\{f_{t'_{n_\nu}}\}$ converging weakly to an $f_0 \in \widetilde{S}$ as a set of functionals of E^*, that is

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{t'_{n_\nu}}(x) = f_0(x) \qquad (x \in E).$$

As for every $x \in G$ the function $f_t(x)$ is continuous on the compact T and, consequently, uniformly continuous on T, we have also that

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{t_{n_\nu}}(x) = f_0(x) \qquad (x \in G). \tag{54}$$

From (52) and (54) we conclude that $f_0(x) = f_{t_0}(x)$ for every $x \in G$ and, consequently,

$$f_0(x) = f_{t_0}(x) \qquad (x \in E) \tag{55}$$

for $|f' - f''|_E = |f' - f''|_G$, if $f', f'' \in F$. Comparing (53), (54) and (55) we come to a contradiction. Thus the Theorem is proved.

Theorem 22. *Let $S \subset E^*$ be weakly compact in E^*. If $\widetilde{S}$ is separable, then $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ coincides with the regularly convex envelope K of S. Furthermore, $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ is a weakly continuous one-to-one image of a compact metric set.*

P r o o f. As K is weakly closed the set $S' = \widetilde{S} \subset K$. In virtue of Theorem 21 we can apply to S' Theorem 20, thus we obtain that $K = \widetilde{S}'_{\text{conv.}}$ is a weakly continuous image of a compact metric set. Since furthermore the set $\widetilde{S}'_{\text{conv.}}$ coincides in this case with the set $\widetilde{S}_{\text{conv.}}$ the Theorem is proved.

2. Weakly compact sets in E. Every element $x \in E$ generates an element $X \in E^{**}$ (E^{**} denotes the conjugate space to the space E^*) by the formula

$$X(f) = f(x) \qquad (f \in E^*).$$

This element X will be denoted by x^{**}.

If a sequence $\{x_n\}_1^\infty$ converges weakly to an element x_0, then the corresponding sequence $\{x_n^{**}\}_1^\infty$ converges weakly (as a set of functionals defined over E^*) to the element x_0^{**}. This permits us to deduce from the theorems which have been proved in the preceding paragraph some properties of weakly compact sets in the space E. The weak compactness of sets in E is understood here in the same sense as in §2, i.e. a set $G \subset E$ will be said to be *weakly compact* in E if every sequence $\{x_n\}_1^\infty \subset G$ contains a subsequence $\{x_{n_\nu}\}$ which converges weakly to an element $x_0 \in E$.

Thus according to this definition if a set $G \subset E$ is weakly compact in E the corresponding set $G^{**} \subset E^{**}$ is weakly compact in E^{**} as a set of functionals defined over E^*, the converse in general not being true.

Theorem 23. *If $G \subset E$ is a weakly compact set in E its weak closure $\widetilde{G}$ (i.e. the totality of all elements of G and their weak limits) is weakly compact and weakly closed.*

P r o o f. Take an arbitrary sequence $\{x_m\}_1^\infty \subset \widetilde{G}$. Choose in G for every x_m a sequence $\{x_{mn}\}_{n=1}^\infty$, which converges weakly to x_n $(n = 1, 2, ...)$. Denote by E_1 the linear, closed envelope of the set $G_1 = \{x_{mn}\}$ $(m, n = 1, 2, ...)$. As every closed linear subspace of E is weakly closed, we have $\widetilde{G}_1 \subset E_1$ and therefore $\widetilde{G}_1$ is separable. Considering now G_1 and $\widetilde{G}_1$ as sets in E^{**} and applying to them Theorem 21 we conclude that $\widetilde{G}_1$ is a weakly continuous image of a compact metric set and consequently is weakly compact and weakly closed. Hence the sequence $\{x_n\}_1^\infty \subset \widetilde{G}_1$ contains a subsequence $\{x_{n_\nu}\}$ converging weakly to an element $x_0 \in \widetilde{G}_1 \subset \widetilde{G}$, which proves our Theorem.

Theorem 24. *If a set $G \subset E$ is weakly compact in E, so is the convex envelope K of G.*

P r o o f. Let $\{x_n\}_1^\infty \subset K$. Then every x_n $(n = 1, 2, ...)$ is a limit of a sequence of points z of the form $z = \sum \mu_i y_i$, where $y_i \in G$, $\mu_i > 0$ $(i = 1, 2, ...)$ and $\sum \mu_i = 1$. Therefore there exists a countable set $G_1 \subset G$ such that its convex envelope contains the sequence $\{x_n\}_1^\infty$. The linear, closed envelope E_1 of G_1 is separable and consequently so is the set $\widetilde{G}_1 \subset E_1$. If we show that the convex envelope of $\widetilde{G}_1$ is weakly compact in E, then we can state that the sequence $\{x_n\}_1^\infty \subset \subset \widetilde{G}_1$ contains a subsequence $\{x_{n_\nu}\}$ converging weakly to an element of E, which, consequently, proves our Theorem. Thus we see that to prove our Theorem it is sufficient to prove it in the special case when E is separable and the set $G \subset E$ is weakly closed.

Consider the set $G^{**} \subset E^{**}$ of all elements $x^{**} \in E^{**}$ corresponding to the elements $x \in G$. The set G being supposed weakly compact and separable, then so is the set G^{**} (considered as a set of functionals defined over E^*). Therefore we can apply to G^{**} Theorem 22 and conclude that H, the regularly convex envelope of G^{**}, is weakly compact and weakly closed. Thus to show that the convex envelope of G is weakly compact in E it is sufficient to verify that every element of H is generated by an element of E.

Let $X_0 \in H$; then by Theorem I $X_0 = \mathfrak{p}_0(G^{**})$, where $\mathfrak{p}_0 \in \mathfrak{P}_{G^{**}}$. Consequently, for every $f \in E^*$, $X_0(f) = \mathfrak{p}_0(\varphi_f)$, where

$$\varphi_f(x^{**}) = x^{**}(f) = f(x) \qquad (x^{**} \in G^{**}).$$

The space E being separable, in order to prove that there exists an $x_0 \in E$ such that $X_0 = x_0^{**}$, i.e. such that $X_0(f) = f(x_0)$ $(f \in E^*)$, it is sufficient to show (see Banach [2], p.131) that the functional $X_0(f)$ $(f \in E^*)$ is weakly continuous.

Let a sequence $\{f_n\}_1^\infty \in E^*$ converge weakly to an element $f_0 \in E^*$. Then

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{f_n}(X) = \varphi_{f_0}(X) \qquad (X \in G^{**}). \tag{56}$$

Let L be the linear space of all weakly continuous functions $\varphi(X)$ $(X \in G^{**})$, which we shall consider as a subspace of $Q_{G^{**}}$ (see Chap.I, §1). According to Theorem 21 we may introduce in G^{**} such a metric that G^{**} becomes a compact metric set and L the set of all continuous functions defined over this set. Evidently $\varphi_f \in L$ $(f \in E^*)$ and

$$\|\varphi_f\| = \operatorname*{Sup}_{X\in G^{**}} |\varphi_f(X)| \leq C|f|,$$

where C depends only on G^{**}.

Consequently, the relation (56) means (see Banach [2], p.224) that the sequence $\{\varphi_{f_n}\}$ converges weakly to φ_{f_0} in the sense of weak convergence of elements of L and, consequently, of elements of L. But then

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{p}_0(\varphi_{f_n}) = \mathfrak{p}_0(\varphi_{f_0}),$$

i.e. $X_0(f_n) \to X_0(f_0)$, which completes the proof of our Theorem.

Corollary. *If a set $G \subset E$ is weakly compact in E, then its convex closed envelope K is weakly compact in itself.*

In fact, K being convex and closed is also weakly closed†. Consequently K is the weak closure of the convex envelope K_1 of G. By Theorem 24, K_1 is weakly compact in E and consequently K is weakly closed in itself according to Theorem 23.

3. Invariant points of transformations. Generalizing some investigations of G.D. Birkhoff and O.D. Kellogg, J. Schauder among other has established the following Theorem:

A. *Let $F(x)$ be a continuous operation, which transforms a convex, closed set $H \subset E$ into its compact part. Then $F(x)$ has a fixed point, i.e. there exists such an $x_0 \in H$ that $F(x_0) = x_0$.*

Using this Theorem, J. Schauder obtains, in addition, the Theorem

B. *Let E be a separable Banach space and let $H \subset E$ be a convex, weakly compact and weakly closed set. If a weakly continuous operation $F(x)$ defined over H transforms the set H into its part, then $F(x)$ has a fixed point $x_0 \in H$ $(F(x_0) = x_0)$.*

The results of the preceding paragraph permit one to obtain from J. Schauder's propositions A and B two generalizations of proposition B.

Theorem 25. *Let $H \subset E$ be a convex, closed set. If a weakly continuous operation $F(x)$ defined over H transforms H into its separable and weakly compact part in E, then $F(x)$ has a fixed point.*

P r o o f. Let H_1 be smallest convex, closed set containing $G = F(H)$. By the corollary to Theorem 24 the set H_1 is weakly compact and weakly closed. Furthermore, H_1, being evidently separable, belongs to a separable space E_1. On the other hand we have, obviously, $F(H_1) \subset F(H) \subset H_1$. To prove our Theorem it remains to apply J. Schauder's proposition B to the operation $F(x)$ considered over H_1.

Theorem 26. *Let $K \subset E^*$ be a convex, separable and weakly closed set. If a weakly continuous operation $F(f)$ transforms K into its weakly compact part G in E^*, then $F(f)$ has a fixed point.*

† S. Mazur [10], p.80.

P r o o f. Let K_1 be the smallest convex and weakly closed set containing the set $G = F(K)$. By Theorem 22 K_1 is weakly compact, weakly closed, and separable. Denote by F the linear envelope of the set K_1. In virtue of Lemma I of Chap.I, §4, we can built a linear, separable space $E_1 \subset E$ such that $F_1 \subset E_1^*$. As E_1 is separable we can introduce a new norm in E_1^* such that every sphere $\sigma(\theta, r) \in E_1$ and consequently the set K_1 becomes by the new norm a compact metric set in which the convergence in the new sense coincides with the original weak convergence (see the proof of the Lemma I, §1). After this our Theorem becomes an immediate consequence of Theorem A of J. Schauder.

REFERENCES

[1] *Achyeser N. and Krein M.* On some questions in the moment problem (in Russian). — Kharkoff, 1939.

[2] *Banach S.* Theorie des operations lineaires. — Warszawa, 1932.

[3] *Gantmacher V. and Šmulian V.* Sur les espaces lineaires dont la sphere unitaire est faiblement compacte // C.R. Acad. Sci. URSS. — 1937. — **17**, N 3. — P.91–94.

[4] *Hausdorf F.* Zur theorie der linearen metrischen Räume // Journ. fur reine und angew. Math. — 1932. — **167**. — P.294–311.

[5] *Kantorovitch L.* On the moment problem for a finite interval // C.R. Acad. Sci. URSS. — 1937. — **14**. — P.531–537.

[6] *Krein M.* Sur les fonctionelles positives additives dans les espaces lineaires normes // Comm. Soc. Math. de Kharkoff. Ser.4. — 1937. — **XIV**. — P.227–237.

[7] *Krein M.* Sur quelques questions de la geometrie des ensembles convexes situes dans un espace lineaire norme et complet // C. R. Acad. Sci. URSS. — 1937. — **14**. — P.5–7.

[8] *Lusternik L.* Principal notions of Functional Analysis (in Russian) // Advances of Mathematics. — 1936. — **1**. — P.77–140.

[9] *Mazur S.* Über convexe Mengen in linearen normierten Räumen // Studia Mathematica. — 1933. — **4**. — P.70–84.

[10] *Mazur S.* Über die kleinste konvexe Mengen, die eine gegebene kompacte Menge enthält // Ibid. — 1930. — **2**. — P.7–9.

[11] *Pettis B.* A note on regular Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1938. — **44**. — P.420–428.

[12] *Riesz M.* Sur le probleme des moments (Troisieme note) // Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik. — 1923. — **17**. — P.1–52.

[13] *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in funktionalräumen // Studia Mathematica. — 1930. — **2**. — P.171–180.

[14] *Schoenberg I.J.* Convex domains and linear combinations of continuous functions // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**. — P.273–280.

[15] *Šmulian V.* Sur les ensembles regulierement fermes et faiblement compacts dans l'espace du type (B) // C.R. Acad. Sci. URSS. — 1938. — **18**. — P.405–407.

[16] *Šmulian V.* On the inclusion principle in the space of (B) type // Recueil Mathematique, Moscou. — 1939. — **5**.

[17] *Šmulian V. (Chmoulyan W.)* Sur les ensembles faiblement compacts dans les espaces lineaires normes // Comm. Soc. Math. de Kharkoff. Ser.4. — 1937. — **XIV**. — P.239–242.

ON EXTREME POINTS OF REGULAR CONVEX SETS

(совместно с Д.П. Мильманом)

(Studia Mathematica. — 1940. — V.9)

Let E be a Banach space (a linear normed complete space) and let $\overline{E}$ be the space of linear functionals adjoint to it.

A set $K \subset \overline{E}$ is called *regularly convex*[†] if for every $f_0 \in \overline{E}$ not belonging to K such an element $x_0 \in E$ can be found that

$$\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0).$$

It is obvious that every regularly convex set is convex.

Let $f_0 \in \overline{E}$, $x_i \in E(|x_i| \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., n)$ and $\varepsilon > 0$; then by the neighbourhood $U(f_0; x_1, ..., x_n, \varepsilon)$ we shall mean the set of all $f \in \overline{E}$ such that

$$|f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

All possible neighbourhoods $U(f_0;\ x_1, ..., x_n, \varepsilon)$, where $f_0 \in E$, $x_i \in \overline{E}$, $|x_i| \leq 1$ $(i = 1, 2, ..., n;\ \ n = 1, 2, ...,)$ and $\varepsilon > 0$, define in E a certain topology, which is called *weak topology (Tychonoff's topology)*[††].

From Tychonoff's theorem on bicompactness of the topological product of segments, as it has been pointed out by Vera Gantmacher

[†]This definition has been lorrowed by us from the work: *Krein M.G. and Šmulyan V.J.* On regularly closed sets etc. // Annals of Mathematics. — 1940. — **41**.

[††]*Tychonoff A.* Über topologische Erweiterung von Raumen // Mathem. Annalen. — 1929. — **102**. — P.548.

and V. Šmulyan†, results the following proposition:

A. *A bounded convex set $K \subset \overline{E}$ is regularly convex if and only if it is bicompact in the weak topology.*

A point of a convex closed set is called an *extreme point* if it is not an inner point of any segment belonging to the given set.

We now prove the theorem.

Theorem. *Let $K \subset \overline{E}$ be a bounded regularly convex set. Then the set S of extreme points of K is not empty and its regularly convex envelope†† coincides with K.*

P r o o f. According to proposition A, K is a bicompact set in the weak topology. To every element $x \in E$ corresponds a function $\varphi_x(f) = f(x)$ continuous on the bicompact set K.

Let $\{x_\alpha\}$ $(\alpha < \vartheta)$ be the set of all the elements of E with $|x| \le 1$ well ordered in any way.

Correspondingly to the sequence $\{x_a\}$ $(a < \vartheta)$ we form a sequence of bicompact sets $\{K_\alpha\}$ $(\alpha < \vartheta)$, each one containing the following $(K_\alpha \supset K_\beta$ for $\alpha < \beta < \vartheta)$, by induction.

Define K_1 as a set of those elements $f \in K$ on which the function $\varphi_{x_1}(f)$ reaches its maximum. The set K_1 is closed in the weak topology, and consequently is bicompact. Now let all K_α be defined for $\alpha < \xi$ $(\xi < \vartheta)$. If ξ is not a limiting number, then we denote by K_ξ the set of those $f \in K_{\xi-1}$ on which the function $\varphi_{x_\xi}(f)$ considered on $K_{\xi-1}$ reaches its maximum.

If ξ is a limiting number, then we denote by K'_ξ the intersection of all K_α, with $\alpha < \xi$; since $K_1 \supset K_2 \supset \dots K_\alpha \supset K_{\alpha+1} \supset \dots$ are bicompact, so K'_ξ is non-empty. K_ξ will now denote the set of all the points of K'_ξ, on which the function $\varphi_{x_\xi}(f)$ $(f \in K'_\xi)$ reaches its maximum.

Denote by P the non-empty intersection of all K_α $(1 \le \alpha < \vartheta)$. If $g, f \in P$ then $g, f \in K_\alpha$ and consequently

$$f(x_\alpha) = g(x_\alpha) \qquad (1 \le \alpha < \vartheta),$$

---

†*Šmulyan V.* Sur les topologies differentes dans l'espace de Banach // Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. de l'URSS. — 1939. — **23**, N 4. — P.23.

††That is the smallest regularly convex set containing S.

whence $g = f$. Thus P consists of one point g. We shall prove that this point g is an extreme point of the set K. We assume the contrary, i. e. that with some $f_1, f_2, \in K$ $(f_1 \neq f_2)$ and some t $(0 < t < 1)$

$$g = tf_1 + (1-t)f_2. \tag{1}$$

Take the first K_ξ to which neither of the elements f_1, f_2 belong. Consider two cases. Let ξ not be a limiting number. Then $f_1, f_2 \in K_{\xi-1}$, and consequently

$$g(x_\xi) = \sup_{f \in K_{\xi-1}} f(x_\xi) \geq f_i(x_\xi) \qquad (i = 1, 2),$$

the equality sign being excluded at least for one of f_1, f_2 (namely for that f_i which is not included in K_ξ). Whence

$$g(x_\xi) = tg(x_\xi) + (1-t)g(x_\xi) > tf_1(x_\xi) + (1-t)f_2(x_\xi), \tag{2}$$

which contradicts to (1).

Let now ξ be a limiting number. Then $f_1, f_2 \in K_\alpha$ with $\alpha < \xi$, and consequently $f_1, f_2 \in K'_\xi$. Whence

$$g(x_\xi) = \sup_{f \in K'_\xi} f(x_\xi) \geq f_i(x_\xi) \qquad (i = 1, 2),$$

the equality sign being, as before, excluded, and consequently (2) holds, which contradicts to (1).

Thus we have proved that the point g is an extreme point of the set K, and consequently the set S is not empty.

We now prove that the reqularly convex envelope K' of the set S coincides with K. It is evident that $K' \subset K$. Assuming that K' does not coincide with K, we take an element $f_0 \in K - K'$. Since K' is regularly convex, there exists an element $x_0 \in E$ $(|x_0| = 1)$ such that

$$\sup_{f \in K'} f(x_0) < f_0(x_0). \tag{3}$$

Consider then the set K_0 of those $f \in K$ on which the function $\varphi_{x_0}(f) = f(x_0)$ $(f \in K)$ reaches its maximum. Evidently the set $K_0 \subset K$ is in the weak topology a certain convex bicompact set, and consequently is a reqularly convex set. Whence, in virtue of the facts already proved, K_0 has an extremė point g_0, which is an extreme point of K (for it is easily seen that every extreme point of the set K_0 is also an extreme point of the set K); on the other hand, in virtue of (3) and the definition of the set K_0, the intersection of K_0 with K', and consequently, with S is empty. We have come to a contradiction, which completes our proof.

Corollary. *If a space E is regular (reflective), then any bounded convex closed set is the convex closed envelope of the set of its extreme points.*

M. Krein and V. Šmulyan† have proved that if $S < \overline{E}$ is a bounded set, then its regularly convex envelope consists of those and only those $g \in \overline{E}$ that admit the representation

$$g(x) = M\{\varphi_x(f)\} \qquad (x \in E, \quad \varphi_x(f) = f(x)),$$

where $M\{\varphi\}$ is a certain mean value defined on the space of all bounded and continuous in the weak topology functions $\varphi(f)(f \in S)$.

As it has been shown by A. Markoff††, to every mean value $M\{\varphi\}$ corresponds in a unique way an additive non-negative function $\mu(e)$ of sets $e \subset S$ $(\mu(S) = 1)$ possessing a number of properties and such that

$$M\{\varphi\} = \int \varphi(f) d\mu(e),$$

where the integral is understood in the sense of Frechet-Stieltjes†††.

Owing to all this, our theorem permits us to say that every point of a regularly convex space is, in a certain sense, the centre of gravity of masses, distributed on the extreme points of this set.

Notice that the unit sphere $|f| \leq 1$ of the adjoint space is regularly convex and therefore if $\overline{E}$ is infinite-dimensional, then the sphere has an infinite set of extreme points. Hence:

---

†See their work quoted in footnote, p.44.

††*Markoff A.* On mean values and exterior densities // Recueil Mathematique. — 1938. — **4 (46)**, 1.

†††For more details see A. Markoff loc. cit.

If the unit sphere of an infinite-dimensional space E has a finite number of extreme points, then E is not adjoint to any Banach space.

We shall now give two examples to which this remark is applicable.

1. Let Q be a topological space and let C_Q be a linear set of all the bounded continuous functions $\varphi(q)(q \in Q)$, with the definition of the norm:

$$||\varphi|| = \sup_{q \in Q} |\varphi(q)|.$$

It is easily seen that in this case the point $\varphi(q)$ of the unit sphere $K(||\varphi|| \leq 1)$ of the space C_Q is an extreme point for K if and only if $|\varphi(q)| \equiv 1$ $(q \in Q)$. Therefore, if the space Q is decomposed on α components† then K has exactly 2^α extreme points.

In virtue of this, if α is a finite number and C_Q is infinite-dimensional (the latter, for instance, is carried out if Q contains an infinite number of points and is completely regular)††, then E is not adjoint to any Banach space.

2. Let Q be an arbitrary abstract set, and let $\mu(e)$ be an additive function of the subsets $e \in Q$, forming a certain Borelcorpus B. Let the corpus B besides that possess in respect to $\mu(e)$ the following property: if $\mu(e) > 0$ for a set $e \in B$, then there exists a sub-division of e: $e = e_1 + e_2$ $(e_1, e_2 \in B)$ such that $\mu(e_1) > 0$ and $\mu(e_2) > 0$.

Denote by L_Q^μ a linear set of all the functions $\varphi(q)(q \in Q)$ measurable and absolutely integrable in respect to the function $\mu(e)$, the

---

† I. e. on disjointed closed connected parts.

†† Selim Krein has called our attention to the fact that in order that the space C_Q (with a finite α) should be infinite-dimensional, it is necessary and sufficient that Q should contain an infinite number of points and that the number of dimensions should be greater than α. The necessity of the conditions is obvious. To prove their sufficiency we show that if C_Q is finitely-dimensional, then the number of dimensions of C_Q exactly equals α. In fact, in this case the unit sphere K in C_Q contains exactly m (m is the number of dimensions of C_Q) linearly independent extreme points φ. But as we know, for every such point $\varphi(q) = \pm 1$ and consequently there is exactly α of such linearly independent points, and accordingly $m = \alpha$.

norm φ being defined by the equality:

$$||\varphi|| = \int\limits_Q |\varphi(q)| d\mu(e).$$

It is easily seen that the unit sphere $||\varphi|| \leq 1$ in the space L_Q^μ does not have extreme points and therefore L_Q^μ is not adjoint to any Banach space.

For the space (L) this result (in a more considerable general form) has been obtained by I.M. Gelfand[†].

[†] *Gelfand I.* Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren // Recueil Mathematique. — 1938. — **4 (46)**, 2. — P.265.

ON AN INNER CHARACTERISTIC OF THE SET OF ALL CONTINUOUS FUNCTIONS DEFINED ON A BICOMPACT HAUSDORFF SPACE†

(совместно с С.Г. Крейном)

(Доклады АН СССР. — 1940. — Том 27, № 5)

1. In what follows E denotes a linear semi-ordered space, i.e., a linear set, in which for some elements x the relation $x > \theta$ (θ is the zero element of the set) is defined, satisfying the following axioms:

Axiom I. *If $x > \theta$, then $x \neq \theta$.*

Axiom II. *If $x > \theta$ and $y > \theta$, then $x + y > \theta$.*

Axiom III. *For every element x there exists an element $x_+ > \theta$ (the positive part of x), such that $x_+ - x \geq \theta$ and $x' - x_+ \geq \theta$ for any x' that verifies two conditions $x' \geq \theta$ and $x' - x \geq \theta$.*

Axiom IV. *If $\lambda > 0$ and $x > \theta$, then $\lambda x > \theta$.*

We shall write $x_1 > x_2$ (or, what is the same, $x_2 < x_1$), if $x_1 - -x_2 > \theta$.

Denote by x_- (the negative part of x) the element $(-x)_+$ and by $|x|$ (the absolute value of x) the element $x_+ + x_-$. Thus

$$x = x_+ - x_-, \qquad |x| = x_+ + x_-.$$

The axioms I–IV and their various consequences were considered before by L. Kantorovitch [1].

We suppose also that besides axioms I–IV the following is verified.

---

†Подробное изложение дано в статье авторов: Sur l'espace des fonctions continues sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnees // Матем. сб. — 1943. — **13**, №1. — С.1–38. (*Прим. ред.*)

Axiom V. *There exists in E an element $u > \theta$ such that for every $x \neq \theta$ $(x \in E)$ the set of positive numbers t for which $-tu < x < tu$ is non-empty and its greatest lower bound is different from zero.*

This greatest lower bound will be denoted by $\|x\|_u$. It is easily seen that $\|x\|_u$ satisfies all the axioms of the norm, i.e.

$$\|x\|_u > 0 \quad \text{for} \quad x \neq \theta, \qquad \|\lambda x\|_u = |\lambda| \, \|x\|_u$$

and

$$\|x + y\|_u \leq \|x\|_u + \|y\|_u \qquad (x, y \in E, \quad -\infty < \lambda < \infty).$$

If there exists an element u satisfying the conditions of the axiom V, then there exists an infinite number of such elements, all the norms $\| x \|_u$ being, however, topologically equivalent.

The element u being fixed, we denote by E_u the linear semi-ordered space E normed with the aid of $\| x \|_u$.

A linear functional $f(x)$ defined over E_u $(f \in \overline{E}_u)$ will be called *positive* (written $f > \theta$) if for every $x > \theta$, $f(x) \geq 0$. Using the method suggested by F. Riesz [2] (see also L. Kantorovitch [3]) it is easily shown, that the relation $f > \theta$ just defined turns the space $\overline{E}_u$ (adjoint to E_u) into a linear semi-ordered space. It is obvious that if $f > \theta$, then

$$\| f \|_u = \sup_{-u<x<u} |f(x)| = f(u).$$

Denote by H_u the set of all linear positive functionals having the norm 1, i. e. the totality of all linear functionals $f \in \overline{E}_u$, for which

$$f > 0 \quad \text{and} \quad f(u) = 1.$$

It is easily seen that the set H_u is regularly convex†, i.e. for every $f_0 \overline{\in} H_u (f_0 \in \overline{E}_u)$ an element $x_0 \in E_u$ can be found such that

$$\sup_{f \in H_u} f(x_0) < f_0(x_0).$$

† About regularly convex sets see [4].

As it has been shown by M. Krein and D. Milman [5], the following general proposition holds:

"Let $K \subset \overline{E}$ be a regularly convex set of linear functionals. Then the set S of extreme points of K† is non-empty and, moreover, K is the smallest regularly convex set containing S".

Thus, the set H_u has extreme points, the totality of which shall be denoted by S_u.

Theorem 1. *A necessary and sufficient condition for a point $f \in$ $\in H_u$ to be an extreme point of H_u $(f \in S_u)$ is that $|f(x)| = f(|x|)$ $(x \in E_u)$.*

Introduce now into the space $\overline{E}_u$ the weak topology (Tychonoff's topology [6]) by aid of all possible neighbourhoods

$$U(f_0; x_1, ..., x_n, \varepsilon)[f_0 \in \overline{E}_u, x_1 \in E_u, ..., x_n \in E_u \quad (n = 1, 2, ...), \varepsilon > 0]$$

the neighbourhood $U(f_0; x_1, ..., x_n, \varepsilon)$ meaning the set of all $f \in \overline{E}_u$ such that

$$|f(x_i) - f_0(x_j)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Theorem 2. *The set S_u is a bicompact Hausdorff space in the weak topology. Besides, if*

1°. *E_u is separable, then S_u is a compact metrizable space.*

2°. *$\overline{E}_u$ is separable, then S_u is a countable metrizable compact space.*

3°. *E_u is n-dimensional (n is a natural number), then S_u consists of n points.*

In proving this theorem and the following one, we use the following

Lemma. *Let Q be a bicompact Hausdorff space and $E(Q)$ a linear totality of continuous functions $\varphi(q)$ $(q \in Q)$, posessing the properties:*

1° *For every two points $q_1 \in Q$, $q_2 \in Q$ and two numbers a_1, a_2 can be found a function $\varphi(q) \in E(Q)$ such that $\varphi(q_1) =$ $= a_1$, $\varphi(q_2) = a_2$.*

† A point f of a convex set K is called *extreme point* of K, if it is not a mean point of any segment belonging to K.

2°. *If $\varphi(q) \in E(Q)$, then $|\varphi(q)| \in E(Q)$*[†].

Then every continuous function $\psi(q) \quad (q \in Q)$ is a limit of a uniformly converging sequence $\{\varphi_n(q)\} \in E(Q)$.

We now formulate the fundamental

Theorem 3. *Associate with every $x \in E_u$ a continuous function on the bicompact Hausdorff space $S_u : \varphi_x(f) = f(x)$ $(f \in S_u)$.*

Then the linear correspondence $x \longleftrightarrow \varphi_x(f)$ possesses the following properties:

1°. *The relation $x < y$ holds if and only if $\varphi_x(f) \leq$ and $\not\equiv \varphi_y(f)$ $(f \in S_u)$.*

2°. $||x||_u = \sup|\varphi_x(f)| \quad (f \in S_u)$.

3°. $\varphi_u(f) \equiv 1 \quad (f \in S_u)$.

4°. *Every continuous function $\varphi(f) \quad (f \in S_u)$ is a limit of a uniformly converging sequence $\varphi_{x_n}(f) \quad (x_n \in E_u, \quad n = 1, 2, \ldots)$.*

Evidently, the space $C(Q)$ of all continuous functions, defined over a bicompact Hausdorff set Q, satisfies all axioms I–V, the relation $\varphi > \theta$ $[\varphi \in C(Q)]$ meaning that $\varphi(q) \geq 0$ and $\varphi(q) \not\equiv 0 \quad (q \in Q)$ and u being any continuous positive function $u(q) \in C(Q)$. Since the space $C(Q)$ is, besides, complete by the norm $\| \varphi \|_u$, from theorem 3 follows

Theorem 4. *In order that a linear semi-ordered space E should be isomorphic to the space of all continuous functions defined over a bicompact Hausdorff set, it is necessary and sufficient that the axiom V should be verified in E and that E should be complete by the norm $\| x \|_u$.*

Observe, that if E is n-dimensional, then from theorems 2, 4 follows, that E is isomorphic to the n-dimensional Euclidean space; this particular fact has been recently established by Youdine [7].

The following corollary of the theorem 4 presents a generalization of a theorem of E. Čech [8].

[†]This condition can be replaced by a weakened one: $|\varphi(q)|$ is a limit of a uniformly converging sequence $\{\varphi_n(q)\} \in E(Q)$.

Theorem 5. *Let T be a topological space, and E a linear set of bounded continuous real functions $\varphi(t)$ $(t \in T)$ containing the unit complete (in the sense of the uniform convergence) and such that if $\psi \in E$, then $|\psi| \in E$.*

Then there exists a continuous mapping $q = \beta(t)$ of the space T in a bicompact Hausdorff space Q such that βT is dense in Q and the totality E coincides with the totality of all functions $\{\varphi[\beta(t)]\}$, where $\varphi(q)$ $(q \in Q)$ is any continuous function over Q. The space Q is uniquely defined up to a homeomorphism.

Observe that the linear space satisfying the axioms I, II, IV, V (without axiom III) has been studied by M. Krein [14, 9]. The same author considered the set H_u for proving different theorems, among them the theorem about the isomorphism of abstract spaces (satisfying only the axioms I, II, IV, V) to subspaces of the space of continuous functions. The authors are indebted to Bogoliouboff for calling their attention to the expedience of considering extreme points of the set H_u.

2. The following proposition establishes a connexion between our results and the researches of I. Gelfand and G. Šilov [10].

Theorem 6. *Let the space E_u be complete by the norm $\| x \|_u$. Then there is in E_u an uniquely defined commutative operation of multiplication xy $(x, y \in E_u)$ which turns E_u into a ring with unit u and for which $xy \geq \theta$, if $x > \theta$ and $y > \theta$. This operation being established, a necessary and sufficient condition that a functional $f \neq \theta$ should belong to S_u, is that $f(xy) = f(x)f(y)$ $(x, y \in E_u)$.*

3. We illustrate our results by an example. This example has been considered recently by I. Gelfand [11] with the aid of the theory of normed rings, but we go somewhat further.

Let M[†] be an additive subgroup of the group I of all real numbers, and $B(M)$ the set of all almost periodic Bohr functions $x(t)(-\infty < t < \infty)$ with Fourier exponents belonging to M. Evidently, $B(M)$ is a linear space satisfying the axioms I–V, provided that $x > \theta$ means

$$x(t) \geq 0, \quad x(t) \not\equiv 0 \quad (-\infty < t < \infty)$$

[†] I. Gelfand considered the case $M = I$.

and

$$u(t) \equiv 1 \quad (-\infty < t < \infty).$$

As it was shown by A. Artemenko [12], if we associate with every linear functional $f \in \overline{B(M)}$ the function $\varphi(\lambda) = f(e^{i\lambda t})$, we bring the set of all positive functionals $f > \theta \quad [f \in \overline{B(M)}]$ into an one-to-one correspondence with the set of all positive definite functions in M† [A function $\varphi(\lambda) = \overline{\varphi(-\lambda)} \not\equiv 0$ is said to be *positive definite* in M if for any n points $\lambda_1, ..., \lambda_n$ of $M \quad (n = 1, 2, ...)$ we have

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(\lambda_j - \lambda_k)\xi_j\xi_k \geq 0 \tag{1}$$

for arbitrary complex $\xi_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$].

A positive definite function $\varphi(\lambda) \quad (\lambda \in M)$ shall be said to have the finite rank p, if every hermitian form (1) has a rank $\leq p$ and at least one of them has the rank p.

From the above general result of A. Artemenko and theorem 6 immediately follows, that to the set S_u corresponds the set of all positive definite functions $\chi(\lambda)$ of rank 1 and such that $\chi(0) = 1$, or, what is the same, the set of all characters of the group M††

$$[\chi(\lambda + \mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu), \quad |\chi(\lambda)| = \chi(0) = 1, \ \lambda, \ \mu \in M].$$

We shall now state the following proposition:

A positive definite function $\varphi(\lambda) \quad (\lambda \in M)$ has a finite rank p if and only if $\varphi(\lambda)$ admits of the representation

$$\varphi(\lambda) = \rho_1\chi_1(\lambda) + \rho_2\chi_2(\lambda) + \cdots + \rho_p\chi_p(\lambda)$$

where $\rho_j > 0 \quad (j = 1, 2, ..., p)$ and $\chi_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, ..., p)$ are p different characters of the group M. If $\varphi(\lambda)$, being of rank p, is continuous at the point $\lambda = 0$ (in the usual metric for real numbers), then $\chi_j(\lambda) = e^{i\alpha_j\lambda} \quad (\lambda \in M)$, where $-\infty < \alpha_j < \infty$ $(j = 1, 2, ..., p)$.

---

†A. Artemenko considered the case $M = I$, but his considerations hold for an arbitrary additive subgroup $M \subset I$.

††Compare with Gelfand [11].

This proposition represents a generalization of O. Caratheodory's [13] well known proposition on singular Toeplits forms (see also [9]).

REFERENCES

[1] *Kantorovitch L.* // Rec. Math. — 1937. — **2 (44)**, N 1.

[2] *Riesz F.* // Atti del congresso intern. dei Matematici (Bologna). — 1928. — **III**, 143 (VI).

[3] *Kantorovitch L.* // C.R. Acad. Sci. URSS. — 1936. — **I (X)**, N 7 (84).

[4] *Krein M. and Šmulian V.* // Ann. of Math. — 1939.

[5] *Krein M. and Milman D.* // Studia Math. — 1940. — **IX**.

[6] *Tychonoff A.* // Math. Ann. — 1929. — **102**.

[7] *Youdine A.* // C.R. Acad Sci. URSS. — 1939. — **XXIII**, N 5.

[8] *Čech E.* // Ann. Math. — 1937. — **38** (823).

[9] *Achyeser N. and Krein M.* О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков, 1938.

[10] *Gelfand I.* // C.R. Acad. Sci. URSS. — 1939. — **XXIII**, N 5.

[11] *Gelfand I.* // Ibid. — 1939. — **XXV**, N 7.

[12] *Artemenko A.* // Comm. Soc. Math. de Kharkoff. Ser.4. — 1939. — **16**.

[13] *Caratheodory C.* // Rend. di Palermo. — 1911. — **XXXII**.

[14] *Krein M.* // C.R. Acad. Sci. URSS. — 1940. — **XXVIII**, N 1.

ОБ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРАХ С ДЕФЕКТ-ИНДЕКСАМИ, РАВНЫМИ ЕДИНИЦЕ

(Доклады АН СССР. — 1944. — Том XLIII, №8)

В настоящей и следующих заметках будут изложены основные положения теории, частными следствиями которой явятся классические результаты H. Hamburger [1], R. Nevanlinna [2], M. Riesz [3, 4], T. Carleman [5], и др. по проблеме моментов, а также [6] об интерполировании ограниченных голоморфных функций в единичном круге и автора [7] по проблеме продолжения эрмитово-положительных функций.

1. Пусть $\mathfrak{H}$ означает некоторое гильбертово пространство, а A — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$. Таким образом, область определения $\mathfrak{D}$ оператора A плотна в $\mathfrak{H}$, а оператор A замкнут и $(Ag, f) = (g, Af)$ $(g, f \in \mathfrak{D}_A)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_z$, где z — произвольное комплексное число, множество элементов $\varphi \in \mathfrak{H}$ вида $\varphi = Af - zf$ $(f \in \mathfrak{D}_A)$. Как известно, для любого недействительного z $(Iz \neq 0)$ множество $\mathfrak{M}_z$ замкнуто.

Легко видеть, что множество $\mathfrak{H}_0$, являющееся пересечением всех множеств $\mathfrak{M}_z$, приводит оператор A и что в $\mathfrak{H}_0$ оператор A является самосопряженным; кроме того, $\mathfrak{H}_0$ содержит всякое иное подпространство в $\mathfrak{H}$, обладающее этими двумя свойствами. Без ограничения общности наших исследований мы можем предположить, что $\mathfrak{H}_0$ состоит только из нуль-элемента, т.е. что

$$\prod_{Iz\neq 0} \mathfrak{M}_z = (0). \tag{1}$$

Однопараметрическое семейство E_t $(-\infty < t < \infty)$ ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$ будем называть *спектральной функцией оператора* A, если для любого $f \in \mathfrak{H}$:

1° $(E_t f, f)$ не убывает при возрастании t;

2° $E_t f$ — непрерывная слева функция t;

3° $E_t f \to 0$ при $t \to -\infty$ и $E_t f \to f$ при $t \to \infty$ и, кроме того,

4° для любого $f \in \mathfrak{D}_A$

$$(Af, Af) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_t f, f), \qquad Af = \int_{-\infty}^{\infty} t dE_t f. \tag{2}$$

Из исследований М.А. Неймарка [8] легко вытекает, что сходимость первого из написанных в (2) интегралов Стильтьеса влечет сильную сходимость 2-го интеграла. С помощью этих же исследований без труда показывается, что данное нами определение спектральной функции оператора совпадает с определением Карлемана–Стона [5,9].

Если при любом t $(-\infty < t < \infty)$ оператор E_t является оператором проектирования $(E_t^2 = E_t)$, то в этом случае $E_s E_t = E_{\min(s,t)}$ $(-\infty < s, t < \infty)$ и спектральная функция оператора A называется *ортогональной*.

Каждой спектральной функции E_t оператора A соответствует своя "обобщенная" резольвента R_z $(Iz \neq 0)$, для которой

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_t f}{t - z} \qquad (f \in \mathfrak{H}, \quad Iz \neq 0). \tag{3}$$

Если $f \in \mathfrak{M}_z$, то $R_z f \in \mathfrak{D}_A$, не зависит от выбора резольвенты и определяется из соотношения $(A - zE)R_z f = f$.

2. Предположим теперь, что дефект-индексы оператора A равны 1, т.е. что при $Iz \neq 0$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{M}_z$ в $\mathfrak{H}$ одномерно.

Пусть u — вектор из $\mathfrak{H}$, который не принадлежит $\mathfrak{M}_z$ хотя бы при одном значении z из верхней полуплоскости и одном значении из нижней полуплоскости.

Теорема 1. *При указанном выборе вектора и множество $\mathcal{E}_u$ всех точек α $(I\alpha \neq 0)$, для которых $u \in \mathfrak{M}_\alpha$ не имеет невещественных предельных точек и, более того, произведение*

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{E}} \left| \frac{\alpha + z}{\alpha - z} \right| \qquad (Iz \neq 0, \quad z \in \mathcal{E}_u)$$

сходится, каково бы ни было подмножество $\mathcal{E} \in \mathcal{E}_u$.

Зафиксируем элемент u и назовем его *масштабом.*

Теорема 2. *Каждому элементу $f \in \mathfrak{H}$ соответствует функция $f_u(z)$ $(Iz \neq 0)$, которая внутри каждой из 2-х полуплоскостей $Iz > 0$ и $Iz < 0$ не имеет иных особенностей, кроме полюсов, принадлежащих множеству $\mathcal{E}_u$, и для которой*

$$f - f_u(z)u \in \mathfrak{M}_z, \text{ если } \quad f_u(z) \neq \infty \ \ (Iz \neq 0).$$

3. Обозначим через $\mathfrak{H}_u$ совокупность всех функций $f_u(z)$ $(f \in \in \mathfrak{H})$.

Теорема 3. *Соответствие $f \in f_u(z)$ является одно-однозначным линейным соответствием между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_u$, при котором $u \to 1$. Это соответствие обладает тем свойством, что если $g = Af$ $(f \in \mathfrak{D}_A)$, то $g_u(z) = zf_u(z)$.*

4. Обозначим через V_u совокупность неубывающих функций $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, порождаемых спектральными функциями E_t оператора A; $\sigma(t) = (E_t u, u)$ $(-\infty < t < \infty)$. Очевидно, $\sigma(t) = \sigma(t-0)$ $(-\infty < t < \infty)$, $\sigma(-\infty) = 0$, $\sigma(\infty) = (u, u)$.

Теорема 4. *Для того чтобы две спектральные функции $E(t)$ оператора A совпадали, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им функции $\sigma \in V_u$ совпадали.*

Функцию $\sigma \in V_u$ будем называть *канонической*, если она порождается некоторой ортогональной спектральной функцией оператора A.

Известно, что вещественная функция ограниченной вариации $\sigma(t) = \sigma(t-0)$ $(\sigma(-\infty) = 0)$ вполне определяется своим интегралом

$$w_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} \qquad (Iz \neq 0). \tag{4}$$

Ниже мы найдем общий вид функции $w_\sigma(z)$, соответствующей произвольной функции $\sigma(t) = (E_t u, u) \in V_u$; заметим, что в этом случае (см. [3])

$$w_\sigma(z) = (R_z u, u). \tag{5}$$

5. Легко видеть, что из условия (1) и равенства дефект-индексов оператора A единице легко вытекает сепарабельность пространства $\mathfrak{H}$.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — некоторая ортонормированная, полная система элементов в $\mathfrak{H}$. Положим для сокращения

$$\varphi_{ku}(z) = \varphi_k(z) \quad (k = 1, 2, ...).$$

Так как $\varphi_k - \varphi_k(z)u \in \mathfrak{M}_z$ $(k = 1, 2, ...)$, то элемент $R_z\{\varphi_k - \varphi_k(z)u\}$, а следовательно, и выражение

$$\psi_k(z) = (R_z[\varphi_k - \varphi_k(z)u], u) \quad (k = 1, 2, ...)$$

не зависит от выбора обобщенной резольвенты оператора A.

Очевидно, $\psi_k(z)$ $(Iz \neq 0,\ k = 1, 2, ...)$ есть мероморфная функция внутри верхней и нижней полуплоскости, полюсы которой принадлежат множеству $\mathcal{E}_u$.

Условимся для любой функции $\varphi(z)$ сокращенно обозначать через $\overline{\varphi}(z)$ выражение $\overline{\varphi(\bar{z})}$.

Теорема 5. *Для любого z $(Iz \neq 0)$ множество точек $w_\sigma(z)$ $(\sigma \in V_u)$ заполняет некоторый круг $C(z)$, лежащий целиком внутри той же полуплоскости, что и точка z. Этот круг сводится к точке в том и только в том случае, когда $z \in \mathcal{E}_u$. Центр $\zeta(z)$ и радиус $r(z)$ круга $C(z)$ находятся по формулам*

$$\zeta(z) = \frac{i - 2y\sum\limits_1^\infty \overline{\varphi_k(z)}\psi_k(z)}{2y\sum\limits_1^\infty |\varphi_k(z)|^2},$$

$$r(z) = \frac{1}{2y\left(\sum\limits_1^\infty |\varphi_k(z)|^2 \sum\limits_1^\infty |\varphi_k(\bar{z})|^2\right]^{1/2}}. \tag{6}$$

Уравнение границы круга $C(z)$ в плоскости w можно представить в виде

$$\frac{w-\bar{w}}{z-\bar{z}}=\sum_{1}^{\infty}|w\varphi_k(z)+\psi_k(z)|^2. \tag{7}$$

Точка $w_\sigma(z)$ попадает на границу круга $C(z)$ в том и только в том случае, когда функция $\sigma\in V_u$ является канонической, при этом каждой точке w границы $C(z)$ соответствует одна и только одна каноническая функция.

С этой теоремой тесно связана следующая

Теорема 6. *Граница круга $C(z)$ $(Iz\neq 0)$, может быть задана следующим параметрическим уравнением:*

$$w=\frac{p_0(z)+\tau p_1(z)}{q_0(z)+\tau q_1(z)}\qquad(-\infty<\tau<\infty), \tag{8}$$

где $q_i(z)$, $p_i(z)$ $(i=0,1)$ суть мероморфные функции внутри верхней и нижней полуплоскости (с полюсами, принадлежащими множеству $\mathcal{E}_u$) и которые связаны с функциями $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(z)$ $(k=1,2,...)$ следующими соотношениями:

$$q_0(z)\overline{q_1(\zeta)}-q_1(z)\overline{q_0(\zeta)}=(z-\overline{\zeta})\sum_{1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\zeta)},$$

$$p_0(z)\overline{p_1(\zeta)}-p_1(z)\overline{p_0(\zeta)}=(z-\overline{\zeta})\sum_{1}^{\infty}\psi_k(z)\overline{\psi_k(\zeta)}, \tag{9}$$

$$q_0(z)\overline{p_1(\zeta)}-q_1(z)\overline{p_0(\zeta)}=1+(z-\overline{\zeta})\sum_{1}^{\infty}\varphi_k(z)\overline{\psi_k(\zeta)},$$

где z и ζ — две произвольные невещественные точки, не принадлежащие множеству $\mathcal{E}_u$.

Нетрудно также показать, что соотношениями (9) функции $q_i(z)$, $p_i(z)$ $(i=0,1)$ вполне определяются с точностью до линейного преобразования

$$p_0^*(z)=e^{i\theta}(\alpha p_0(z)+\beta p_1(z)),$$

$$q_0^*(z)=e^{i\theta}(\alpha q_0(z)+\beta q_1(z)),$$

$$p_1^*(z) = e^{i\theta}(\gamma p_0(z) + \delta p_1(z)),$$
$$q_1^*(z) = e^{i\theta}(\gamma q_0(z) + \delta q_1(z)),$$

где $0 \le \theta < 2\pi$, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — произвольные вещественные числа такие, что $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Если в некоторой окрестности вещественной точки ξ все функции $\varphi_k(z)$ $(k = 1, 2, ...)$ голоморфны, то это же (см. [10], теорема 15) имеет место и для функций $\psi_k(z)$ $(k = 1, 2, ...)$ и в этом же случае функции $q_i(z)$, $p_i(z)$ $(i = 0, 1)$ могут быть построены по формулам

$$q_0(z) = 1 - (z - \xi)\sum_1^\infty \overline{\psi_k(\xi)}\varphi_k(z),$$

$$q_1(z) = -(z - \xi)\sum_1^\infty \overline{\varphi_k(\xi)}\varphi_k(z),$$

$$p_0(z) = (z - \xi)\sum_1^\infty \overline{\psi_k(\xi)}\varphi_k(z),$$

$$p_1(z) = 1 + (z - \xi)\sum_1^\infty \overline{\varphi_k(\xi)}\psi_k(z).$$

Теорема 7. *Каждой функции $\tau(z)$, голоморфной внутри верхней полуплоскости и удовлетворяющей условию*

$$I\tau(z) \ge 0 \qquad (Iz > 0),$$

а также функции $\tau(z) \equiv \infty$ отвечает одна и только одна неубывающая ограниченная функция $\sigma(t) = \sigma(t - 0)$ $(-\infty < t < \infty$, $\sigma(-\infty) = 0)$ такая, что

$$\frac{p_0(z) + \tau(z)p_1(z)}{q_0(z) + \tau(z)q_1(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z}. \tag{10}$$

Получаемое таким образом множество функций $\sigma(t)$ совпадает с множеством V_u[†]*.*

[†]При передаче настоящей заметки в печать автор узнал, что близкий результат к теореме 8 получен также М.А. Неймарком [10].

Из этой теоремы следует, что неубывающая ограниченная функция $\sigma(t) = \sigma(t-0)$ $(-\infty < t < \infty, \sigma(-\infty) = 0)$ принадлежит V_u в том и только в том случае, если при любом z $(Iz > 0)$ точка $w_\sigma(z)$ принадлежит кругу $C(z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Hamburger H.* // Math. Annalen. — 1920–1921. — **81, 82**.

[2] *Nevanlinna R.* // Ann. Acad. Sci. Fenn., A. — 1922. — **18**.

[3] *Riesz M.* // Arkiv för mat. astr. och fys. — 1921, 1922, 1923. — **16, 17**.

[4] *Riesz M.* // Acta Szeged. — 1923. — **1**, N 4.

[5] *Carleman T.* Sur les équations intégrales á noyau réel et sýmétrique. — Uppsala, 1923.

[6] *Nevanlinna R.* // Ann. Acad. Sci. Fenn., A. — 1922. — **32**.

[7] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. — 1940. — **XXVI**, №1.

[8] *Неймарк М.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — **4**, №3. — С.277–318.

[9] *Stone M.H.* Linear transformations in Hilbrert space. — New York, 1932.

[10] *Неймарк М.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1943–1944.

ОБ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРАХ С ДЕФЕКТ-ИНДЕКСАМИ, РАВНЫМИ ЕДИНИЦЕ. II

(Доклады АН СССР. — 1944. — Том XLIV, №4)

1. Придерживаясь тех же определений и обозначений, что и в предыдущей заметке [1], сформулируем прежде всего следующую теорему.

Теорема 1. *Если u-функция $f_u(z)$ некоторого элемента $f \in \in \mathfrak{H}$ голоморфна на вещественном интервале $\Delta = (a, b)$, то для любой спектральной функции E_t оператора A*

$$E_\Delta f = \int_a^b f_u(t) dE_t u, \qquad E_\Delta = E_b - E_a.$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает

Теорема 2. *Если u-функции $g_u(z)$ и $f_u(z)$ элементов $g, f \in \mathfrak{H}$ голоморфны на всей вещественной оси, то для любой $\sigma \in V_u$*

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_u(t) \overline{f_u(t)} d\sigma(t).$$

2. Условимся всякую неубывающую функцию ограниченной вариации $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ нормировать так, что

$$\sigma(t) = \sigma(t - 0) \quad (-\infty < t < \infty), \quad \sigma(-\infty) = 0.$$

Ко всякой такой функции $\sigma(t)$ будем относить гильбертово пространство $L_\sigma^{(2)}$, состоящее из всех σ-измеримых и σ-интегрируемых вместе со своим квадратом функций $f(t)$ вещественного аргумента t $(-\infty < t < \infty)$.

Теорема 2 показывает, что множество $\mathfrak{R}_u$ всех голоморфных на вещественной оси функций $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ является некоторым подпространством в $L_\sigma^{(2)}$ $(\sigma \in V_u)$, при этом метрика, устанавливаемая в $\mathfrak{R}_u$ как части $L_\sigma^{(2)}$, не зависит от выбора $\sigma \in V_u$. Эта метрика совпадает с той, которая имеется в $\mathfrak{R}_u$ как части $\mathfrak{H}_u$, если последнее пространство метризовать путем переноса в него метрики из $\mathfrak{H}$, пользуясь алгебраическим изоморфизмом $f \leftarrow \rightarrow f_u(z)$. Имея в виду эту метризацию $\mathfrak{H}_u$, рассмотрим тот случай, когда $\mathfrak{R}_u$ плотно в $\mathfrak{H}_u$.

Теорема 3. *Если множество $\mathfrak{R}_u$ всех голоморфных на вещественной оси функций $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ плотно в $\mathfrak{H}_u$, то множество $V(u)$ состоит из тех и только тех неубывающих функций ограниченной вариации $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, для которых $(g, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_u(t)\overline{f_u(t)}d\sigma(t)$ при любых $g_u(z)$, $f_u(z) \in \mathfrak{R}_u$. При этом функция $\sigma \in V_u$ будет канонической в том и только в том случае, когда $\mathfrak{R}_u$ плотно в $L_\sigma^{(2)}$. При выполнении этого условия между $L_\sigma^{(2)}$ и $\mathfrak{H}_u$ (а следовательно, и $\mathfrak{H}$) как полными замыканиями $\mathfrak{R}_u$ устанавливается изометрическое соответствие. В силу этого соответствия оператор умножения на аргумент в $L_\sigma^{(2)}$ индуцирует в $\mathfrak{H}$ оператор, являющийся самосопряженным расширением оператора A.*

Под "оператором умножения на аргумент" в $L_\sigma^{(2)}$ мы понимаем оператор, преобразующий элемент $f(t) \in L_\sigma^{(2)}$ в элемент $tf(t)$ и область определения которого состоит из всех тех $f(t) \in L_\sigma^{(2)}$, для которых $tf(t) \in L_\sigma^{(2)}$.

Теорема 4. *Если множество $\mathfrak{R}_u$ плотно в $\mathfrak{H}_u$, то всякая каноническая функция $\sigma \in V_u$ имеет почти всюду производную, равную нулю.*

Возможен случай, когда $\mathfrak{R}_u = \mathfrak{H}_u$, т.е. каждая функция $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ голоморфна на действительной оси. В этом случае содержание теорем 3, 4 допускает некоторые упрощения и уточнения, которые мы укажем позже (см. рубрику 5 этой заметки, а также следующую нашу заметку [2]).

3. Точку a мы будем называть *регулярной точкой изучаемого оператора* A, если множество $\mathfrak{M}_a = (A - aE)\mathfrak{D}_A$ ($\mathfrak{D}_A$ — область определения оператора A) замкнуто.

Таким образом, всякая невещественная точка a есть регулярная точка оператора A.

Нетрудно также показать, что для того, чтобы вещественная точка a была регулярной, необходимо, чтобы в некоторой окрестности точки a, кроме конечного числа собственных чисел, не находилось никаких иных точек спектра любого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A, — и достаточно, чтобы это условие выполнялось хотя бы для одного из самосопряженных расширений $\widetilde{A}$.

Отсюда явствует, что достаточно малая окрестность регулярной точки также состоит из регулярных точек. Без труда показывается также, что если некоторый вещественный интервал целиком состоит из регулярных точек, то находящиеся в этом интервале собственные числа двух различных самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора A между собой перемежаются.

Кроме того, для любой точки a этого интервала найдется одно и только одно самосопряженное расширение $\widetilde{A}$, имеющее в этой точке собственное число. Кстати, заметим, что при сделанных предположениях относительно оператора A (простота оператора и равенство дефект-индексов единице) всякое собственное число любого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A — первой кратности.

Теорема 5. *Для того чтобы некоторая точка a была регулярной точкой оператора A, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность точки a и такое целое $p \geq 0$, что любая функция вида $(z-a)^p f(z)$, где $f(z) \in \mathfrak{H}_u$, голоморфна в этой окрестности. Указанное условие будет выполнено, если оно выполняется, когда $f(z)$ пробегает некоторую последовательность $\{f_n(z)\} \subset \mathfrak{H}_u$, линейная оболочка которой плотна в $\mathfrak{H}_u$.*

Из теоремы 5 легко следует, что если a — регулярная точка оператора A, то при соответствующем выборе масштаба u все функции $f(z) \in \mathfrak{H}$ голоморфны в одной и той же окрестности точки a, и обратно, — если масштаб u можно выбрать так, чтобы выполнялось указанное условие, то a — регулярная точка оператора A.

Вторая часть теоремы 5 легко вытекает из следующего предложения.

Теорема 6. *Множество $\mathfrak{H}_u$ обладает тем свойством, что для каждого комплексного a и положительного r существует константа $C = C(a, r)$ такая, что если некоторая функция $f_u(z) \in \mathfrak{H}_u$ голоморфна в круге $|z - a| < r$, то*

$$|f_u(z)| \leq C \parallel f \parallel, \quad |z - a| < \frac{1}{2}r \quad (\parallel f \parallel = (f, f)^{1/2}).$$

4. Точку a будем называть *u-регулярной точкой оператора A*, если существует такая окрестность точки a, в которой все функции $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ голоморфны.

Из теоремы 5 нетрудно вывести, что u-регулярная точка — это такая регулярная точка a оператора A, для которой $u \overline{\in} \mathfrak{M}_a$.

Отправляясь от какой-либо полной ортонормированной системы $\{\varphi_k\}$ $\mathfrak{H}$, построим, как это было показано в рубрике 4 заметки [1], последовательности функций $\{\varphi_k(z)\}$ и $\{\psi_k(z)\}$. Тогда из теоремы 6 выводим, что точка a будет u-регулярной в том и только в том случае, когда существует такая окрестность точки a, в которой все функции $\varphi_k(z)$ $(k = 1, 2, ...)$ одновременно голоморфны. Оказывается, что в регулярной точке также все функции $\psi_k(z)$ $(k = 1, 2, ...)$ голоморфны и имеет место следующая теорема.

Теорема 7. *Бесконечные ряды*

$$\sum_1^\infty |\varphi_k(z)|^2, \qquad \sum_1^\infty |\psi_k(z)|^2$$

равномерно сходятся на любом ограниченном замкнутом множестве u-регулярных точек.

Из теоремы 6 следует также, что если z есть некоторая фиксированная u-регулярная точка оператора A, то $f_u(z)$ $(f \in \mathfrak{H})$ есть линейный функционал в $\mathfrak{H}$. Легко вычислить норму этого функционала — оказывается,

$$\sup_{f \in \mathfrak{H}_u} \frac{|f_u(z)|}{\parallel f \parallel} = \Big(\sum_1^\infty |\varphi_k(z)|^2\Big)^{1/2} = \frac{1}{d\,(u; \mathfrak{M}_z)},$$

где $d(u; \mathfrak{M}_z)$ — расстояние элемента u от $\mathfrak{M}_z$.

Положим $D(z) = \sum\limits_1^\infty |\varphi_k(z)|^2$.

5. Оператор A будем называть *регулярным*, если любая точка комплексной плоскости является для него регулярной.

Сравнительно несложно доказывается следующая

Теорема 8. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) оператор A регулярен;

б) одно из самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора A (тогда и каждое другое) имеет своим обратным оператором вполне непрерывный оператор;

в) при соответствующем выборе масштаба "u" все функции $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ голоморфны на действительной оси.

Если для регулярного оператора масштаб u выбран так, как указано в *в)*, то мы его будем называть *регулярным масштабом.* Оказывается, что регулярный масштаб может быть всегда выбран так, чтобы полюсы любой из функций $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ лежали внутри верхней полуплоскости. При другом выборе регулярного масштаба можно достичь того, что $\mathfrak{H}_u$ будет вещественного типа, т.е. обладать свойством, что если $f(z) \in \mathfrak{H}_u$, то также $\overline{f}(z) \in \mathfrak{H}_u$.

Если A — регулярный оператор, а u — регулярный масштаб, то $\mathfrak{H}_u = \mathfrak{R}_u \subset L_\sigma^{(2)}$ при любом $\sigma \in V_u$. По теореме 3 функция $\sigma \in V_u$ будет канонической в том и только том случае, когда $\mathfrak{H}_u = L_\sigma^{(2)}$, т.е. когда каждая функция из $L_\sigma^{(2)}$ совпадает почти всюду (в смысле σ-меры) с некоторой функцией из $\mathfrak{H}_u$. С другой стороны, из теоремы 8 и общих замечаний, помещенных в начале рубрики 3, следует, что в рассматриваемом случае каждая каноническая функция $\sigma \in V_u$ есть чистая функция скачков, точки скачков которой сгущаются только на бесконечности; при этом точки скачков двух различных канонических функций $\sigma \in V_u$ строго между собой перемежаются, а точки скачков всех возможных канонических функций заполняют всю действительную ось.

Таким образом, равенство $\mathfrak{H}_u = L_\sigma^{(2)}$ для канонической функции $\sigma \in V_u$ означает, что для каждой функции $f(t) \in L_\sigma^{(2)}$ найдется функция на $\mathfrak{H}_u$ (вообще говоря, зависящая от σ), которая совпадает с функцией $f(t)$ во всех точках скачков канонической функции $\sigma \in V_u$.

Теорема 9. *Если A — регулярный оператор, а u — регулярный масштаб, то для того чтобы мероморфная в комплексной плоскости z функция $f(z)$ принадлежала множеству $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором значении константы C выполнялось всюду неравенство*

$$|f(z)| \leq CD(z)$$

и чтобы хотя бы для одной канонической функции $\sigma \in V_u$ выполнялось условие

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\sigma(t) < \infty.$$

Очевидно, что последнее условие будет выполнено, если функция $f(z)$ ограничена на вещественной оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. — 1944. — **XLIII**, № 8.

[2] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. — 1944. — **XLIV**, № 5.

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ КЛАССЕ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Доклады АН СССР. — 1944. — Том XLIV. — № 5)

Теория, развернутая в заметках [1, 2], позволяет обнаружить один новый замечательный класс эрмитовых операторов.

1. Простой эрмитов оператор A с дефект-индексами, равными единице, будем называть целым оператором, если существует масштаб u (называемый целым масштабом) такой, что каждому вектору $f \in \mathfrak{H}$ соответствует целая функция $f_u(z)$.

Если A — целый эрмитов оператор, то в силу теоремы 8 [2] он регулярен и, таким образом, любое его самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ имеет своим обратным некоторый вполне непрерывный оператор. Выбирая для оператора A в качестве u целый масштаб, можно будет утверждать на основании теоремы 3 [2], что ограниченная неубывающая функция $\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < < \infty,\ \ \sigma(-\infty) = 0)$ принадлежит V_u в том и только том случае, если для любых двух элементов $g, f \in \mathfrak{H}$ имеет место равенство

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_u(t)\overline{f_u(t)}d\sigma(t).$$

При этом пространство $\mathfrak{H}_u \subset L_\sigma^{(2)}$ будет совпадать с $L_\sigma^{(2)}$ в том и только том случае, если функция $\sigma \in V_u$ является канонической.

2. Масштаб u эрмитова оператора A называется вещественным, если из $f(z) \in \mathfrak{H}_u$ вытекает, что также

$$\bar{f}(z) \in \mathfrak{H}_u \quad (\bar{f}(z) = \overline{f(\bar{z})}).$$

Теорема 1. *У целого эрмитова оператора A всегда существует вещественный целый масштаб. Последний определяется с точностью до скалярного множителя.*

В последующих утверждениях, не оговаривая этого, мы предполагаем, что A — целый оператор, а u — целый вещественный масштаб.

Положим

$$D(z) = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|f_u(z)|^2}{(f,f)}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Функция $D(z)$ обладает следующими свойствами:*

1) функция $D(x+iy)$ есть четная функция от y, монотонно растущая вместе с $|y|$;

2) имеют место неравенства

$$(u,u)e^{2h|y|} \leq D(x+iy) \leq e^{2h|y|+o(r)} \quad (r = \sqrt{x^2+y^2}), \tag{2}$$

где $h \geq 0$;

3) $\log D(z)$ есть непрерывная субгармоническая функция, имеющая в верхней полуплоскости гармоническую мажоранту, а именно:

$$\log D(x+iy) \leq 2hy + \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log D(t)}{(t-x)^2+y^2} dt < \infty \quad (y > 0). \tag{3}$$

Число h, однозначно соответствующее целому оператору A, будем называть типом оператора A.

Так как в силу (1)

$$|f_u(z)| \leq (f,f)^{1/2} D^{1/2}(z),$$

то из теоремы 2 вытекает, что любая функция $f_u(z) \in \mathfrak{H}_u$ обладает определенными свойствами в смысле роста ее модуля; отсюда можно вывести ряд следствий относительно расположения и частоты ее нулей, однако, за недостатком места, мы их опустим.

Заметим еще, что, в силу неравенства (2) и теоремы 9 [2], $\mathfrak{H}_u$ содержит в себе совокупность L_h всех целых функций $f(z)$, удовлетворяющих двум условиям:

$$\overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{\log|f(z)|}{|z|} \leq h, \qquad \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| < \infty.$$

В частности, $\mathfrak{H}_u$ содержит в себе все функции $v(z)$ вида $v(z) = Ce^{i\alpha z}$, где $-h \le \alpha \le h$. Можно показать, что элемент $v \in \mathfrak{H}$ будет целым масштабом оператора A в том и только в том случае, если $v_u(z) = Ce^{i\alpha z}$ $(C \neq 0; \;\; -h \le \alpha \le h)$.

В рубрике 4B) будет построен пример оператора A, для которого L_h плотно в $\mathfrak{H}$.

3. Пусть $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — некоторая полная ортонормированная система элементов в $\mathfrak{H}$; положим для сокращения

$$\varphi_k(z) = \varphi_{ku}(z) \qquad (k = 1, 2, ...),$$

тогда

$$D(z) = \sum_1^\infty |\varphi_k(z)|^2.$$

Введем еще "сопряженные" с $\varphi_k(z)$ $(k = 1, 2, ...)$ функции (см. раздел 5 [1])†

$$\psi_k(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_k(z) - \varphi_k(t)}{z - t} d\sigma(t) \qquad (\sigma \in V_u, \;\; k = 1, 2, ...). \tag{4}$$

Так как u — вещественный масштаб, то без ограничения общности мы можем предположить, что функции $\varphi_k(z)$ $(k = 1, 2, ...)$ вещественны при вещественном z.

Полагая тогда (см. формулы 9 [1])††

$$q_0(z) = 1 - z \sum_1^\infty \varphi_k(z)\psi_k(0),$$

$$q_1(z) = -z \sum_1^\infty \varphi_k(z)\varphi_k(0), \tag{5}$$

†Легко видеть, что интегралы (4) не зависят от выбора функции $\sigma \in V_k$ (см. раздел 5 [1]).

††Ряды (6) сходятся абсолютно и равномерно в каждой конечной области в силу того, что этим свойством обладают ряды $\Sigma|\varphi_k(z)|^2$ и $\Sigma|\psi_k(z)|^2$ (см. теорему 7 [2]).

$$p_0(z) = z \sum_{1}^{\infty} \psi_k(0)\psi_k(z),$$

$$p_1(z) = 1 + z \sum_{1}^{\infty} \varphi_k(0)\psi_k(z),$$

будем иметь тождества

$$q_0(z)q_1(\zeta) - q_1(z)q_0(\zeta) = (z-\zeta) \sum_{1}^{\infty} \varphi_k(z)\varphi_k(\zeta),$$

$$p_0(z)p_1(\zeta) - p_1(z)p_0(\zeta) = (z-\zeta) \sum_{1}^{\infty} \psi_k(z)\psi_k(\zeta), \tag{6}$$

$$q_0(z)p_1(\zeta) - q_1(z)p_0(\zeta) = 1 + (z-\zeta) \sum_{1}^{\infty} \varphi_k(z)\psi_k(\zeta).$$

Согласно теореме 7 [1], соотношение

$$\frac{p_0(z) + \tau(z)p_1(z)}{q_0(z) + \tau(z)q_1(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} \quad (Iz > 0)$$

приводит в одно-однозначное соответствие функции $\sigma \in V_u$ с функциями $\tau(z)$, голоморфными внутри верхней полуплоскости и имеющими там неотрицательную мнимую часть, если только исключить функцию $\sigma_\infty \in V_u$, соответствующую $\tau(z) = \infty$; при этом функция $\sigma \in V_u$ будет канонической в том и только в том случае, когда функция $\tau(z)$ сводится к вещественной константе (конечной или бесконечной).

Отсюда, пользуясь тождествами (6), легко выводим, что точки роста (скачков) канонической функции $\sigma_\xi(t)$, имеющей скачок в точке ξ, совпадают с корнями целого трансцендентного уравнения

$$q_0(z)q_1(\xi) - q_1(z)q_0(\xi) = 0$$

или, что то же, уравнения

$$(z-\xi) \sum_{1}^{\infty} \varphi_k(\xi)\varphi_k(z) = 0, \tag{7}$$

причем эти корни все вещественны и просты. Кроме того, находим

$$\sigma_\xi(\xi+0)-\sigma_\xi(\xi-0)=\frac{p_0(\xi)q_1(\xi)-p_1(\xi)q_0(\xi)}{q_0'(\xi)q_1(\xi)-q_1'(\xi)q_0(\xi)}=$$

$$=\left[\sum_1^\infty \varphi_k^2(\xi)\right]^{-1}=D^{-1}(\xi).$$

Следовательно, если

$$\cdots<\xi_{-2}<\xi_{-1}<\xi_0=\xi<\xi_1<\xi_2<\cdots$$

суть все корни уравнения (7), то, полагая

$$\rho(\xi)=D^{-1}(\xi)\qquad(-\infty<\xi<\infty),$$

приходим к следующей формуле для $\sigma_\xi(t)$:

$$\sigma_\xi(t)=\sum_{\xi_j<t}\rho(\xi_j)\qquad(-\infty<\xi<\infty).$$

Следующая теорема является аналогом и, если угодно, обобщением известной теоремы Чебышева в проблеме моментов [3,4].

Теорема 3. *Для любой функции $\sigma\in V_u$ справедливы оценки*

$$\sigma(\xi+0)\le\sum_{\xi_j\le\xi}\rho(\xi_j),$$

$$\sigma(\xi+0)\ge\sum_{\xi_j<\xi}\rho(\xi_j),$$

причем знак "равно" хотя бы в одном из этих соотношений возможен в том и только в том случае, когда функция $\sigma\in V_u$ совпадает с функцией σ_ξ.

С помощью теоремы 2 можно показать, что левая часть уравнения (7) (которую мы обозначим через $Q_\xi(z)$) удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{\log|Q_\xi(z)|}{|z|}=h,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\log|Q_\xi(re^{i\varphi})|}{r}=h|\sin\varphi|\qquad(e^{i\varphi}\neq\pm1),\tag{8}$$

причем в последнем равенстве стремление к пределу совершается равномерно на всяком замкнутом множестве значений φ, для которых $e^{i\varphi}\neq\pm1$.

Обозначая далее через $n(r)$ число корней ξ_j, находящихся внутри интервала $(-r,r)$, можно показать, что†

$$\frac{2h}{\pi}-\frac{1}{2R}\log R+O\Big(\frac{1}{R}\Big)\le\frac{1}{R}\int_0^R\frac{n(r)}{r}dr\le$$

$$\le\frac{2h}{\pi}+O\Big(\frac{1}{R}\Big),\quad n(R)=O(R)\quad(R\to\infty).$$

4. Приведем примеры целых эрмитовых операторов.

А) Пусть для последовательности вещественных чисел проблема моментов

$$s_k=\int_{-\infty}^{\infty}t^k d\sigma(t)\qquad(k=0,1,2,...)\tag{9}$$

имеет бесчисленное множество различных неубывающих решений $\sigma(t)$ $(\sigma(-\infty)=0,\ \sigma(t-0)=\sigma(t))$. Обозначим через L множество всевозможных полиномов от t с комплексными коэффициентами. Определим скалярное произведение двух полиномов

$$P(t)=\sum\alpha_k t^k,\qquad Q(t)=\sum\beta_\ell t^\ell,$$

положив

$$(P,Q)=\sum s_{k+\ell}\alpha_k\bar\beta_\ell.$$

В L определим оператор A', положив для любого полинома $P(t)$ $A'P=tP(t)$. Замкнем неполное гильбертово пространство L' до полного $\mathfrak{H}$, а затем продолжим оператор A до замкнутого

† При $h=0$ первое из равенств (8), как известно, влечет стремление к нулю отношения $n(R)/R$ при $R\to\infty$.

эрмитова оператора A в $\mathfrak{H}$. Тогда оператор A будет целым эрмитовым оператором нулевого типа ($h = 0$)†. Целым масштабом u оператора A будет полином, тождественно равный 1. При таком выборе масштаба множество V_u будет совпадать с множеством всех нормированных решений проблемы (9). Все наиболее важные результаты по проблеме моментов [5, 6] будут простыми следствиями нашей общей теории.

B) Пусть $F(x)$ $(-2h \le x \le 2h)$ — непрерывная неоднозначно продолжаемая эрмитово-положительная функция, т.е. функция, допускающая бесчисленное множество существенно различных представлений (см. [6]):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} d\sigma(t) \quad (-2h \le x \le h), \tag{10}$$

где $\sigma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — ограниченная неубывающая функция. Обозначим через L совокупность целых функций $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \int_{-h}^{h} e^{itx} d\alpha(x) \ \ (-\infty < t < \infty), \tag{11}$$

где $\alpha(x)$ $(-h \le x \le h)$ — комплексно-значная функция ограниченной вариации.

Определим в L скалярное произведение, положив для $\varphi \in L$ и $\psi \in L$

$$(\varphi, \psi) = \int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} F(x-y) d\alpha(x) d\overline{\beta(y)},$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ $(-h \le x \le h)$ — функции ограниченной вариации, дающие изображение (11) для φ и ψ соответственно.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ замыкание L до полного гильбертова пространства и рассмотрим в $\mathfrak{H}$ замкнутый эрмитов оператор A,

†Равенство $h = 0$ для данного оператора требует особого доказательства, впрочем, не сложного.

получающийся как замыкание оператора A', определенного равенством $A'\varphi = t\varphi$ на всех тех $\varphi \in L$, для которых $t\varphi \in L$.

Оказывается, оператор A — целый эрмитов оператор типа h. Целым масштабом для A будет любой элемент $\varphi \in L$ вида $\varphi(t) = Ce^{i\alpha t}$ $(C \neq 0,\ -h \leq \alpha \leq h)$. Масштаб будет вещественным, если $\alpha = 0$. При $C = 1$ множество V_u будет совпадать с множеством ограниченных неубывающих функций, дающих представление (10) функции $F(x)$ (см. также [7]).

Отсюда можно получить ряд существенных дополнений к исследованиям автора [6] по проблеме продолжения эрмитово-положительных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. — 1943. — XLIII. — № 8.

[2] *Крейн М.Г.* // ДАН СССР. — 1944. — XLIV. — № 4.

[3] *Чебышев П.* // Journal de Liouville. — 1874.

[4] *Марков А.* Сообщ. и протоколы Харьк. мат. об-ва, 1833. — II часть; *его же*: Исчисление вероятностей, Приложение I. — 1924.

[5] *Shohat J.A. and Tamarkin J.D.* The problem of moments, chap.2. — New York, 1943.

[6] *Крейн М.* // ДАН СССР, 1940. — XXVI. — № 1.

[7] *Лившиц М.* // ДАН СССР. — 1944. — XIIV. — № 1.

О РЕЗОЛЬВЕНТАХ ЭРМИТОВА ОПЕРАТОРА С ИНДЕКСОМ ДЕФЕКТА (m, m)

(Доклады АН СССР. — 1946. — Том LII. — № 8)

В одном из наших предыдущих исследований [1] мы указали способ получения всех обобщенных резольвент R_z заданного в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ эрмитова оператора A с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения $D(A)$ и с индексом дефекта (1,1)[†].

В настоящей заметке мы обобщаем этот результат и находим общий вид резольвенты R_z эрмитова оператора A для того случая, когда его индекс дефекта (m, m), где m — произвольное натуральное число.

Если оператор A положителен (т.е. $(Af, f) \geq 0$ при $f \in D(A)$), то у него найдутся резольвенты R_z, весь спектр которых расположен в интервале $(0, \infty)$; мы также находим общий вид всех этих резольвент.

1. Если оператор A имеет индекс дефекта (m, m), то при любом невещественном z уравнение $A^*\varphi - z\varphi = 0$ (A^* — максимально сопряженный к A оператор) будет иметь точно m (и не более) линейно независимых решений $\varphi_1(z), \varphi_2(z), ..., \varphi_m(z)$, которые мы построим как вектор-функции от z некоторым специальным образом.

Пусть A^0 — некоторое самосопряженное расширение оператора A, а $R_z^0 = (A^0 - zI)^{-1}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$ — соответствующая резольвента. Тогда линейно независимые решения $\varphi_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ уравнения $A^*\varphi - z\varphi = 0$ (где z — любая невещественная точка или, более того, любая регулярная точка резольвента R_z^0) можно построить так, чтобы для любых двух регулярных

[†]Другое решение этого вопроса было дано М.А. Наймарком [2].

точек z и ζ

$$\varphi_j(z) = \varphi_j(\zeta) + (z-\zeta)R_z^0\varphi_j(\zeta) \quad (j = 1, 2, ..., m). \tag{1}$$

Для этого для какого-либо $\zeta = \zeta_0$ $(\mathrm{Im}\,\zeta_0 \neq 0)$ выбираем произвольную систему линейно независимых решений $\varphi_1^0, ..., \varphi_n^0$ уравнения $A^*\varphi - \zeta_0\varphi = 0$ и затем, полагая в (1)

$$\zeta = \zeta_0, \quad \varphi_j(\zeta_0) = \varphi_j^0 \qquad (j = 1, 2, ..., m),$$

определим оттуда $\varphi_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ для любой регулярной точки z оператора R_z.

Введем в рассмотрение матрицу-функцию m-го порядка

$$Q(z) = \| \, q_{jk}(z) \, \|_1^m = \| \, ((z - z_0)\varphi_j(z) + iy_0\varphi_j(\bar{z}_0), \varphi_k(z_0)) \, \|_1^m,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$ — произвольно выбранная регулярная точка резольвенты R_z.

С помощью (1) нетрудно показать, что матрицы-функции $Q(z)$, отвечающие различным выборам точки z_0, могут отличаться друг от друга только на эрмитову матрицу, не зависящую от z.

Обозначим через $\mathfrak{N}_m$ класс всех голоморфных в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$ матриц-функций $F(z) = \| \, f_{jk}(z) \, \|_1^m$, обладающих свойством, что при любых комплексных $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$

$$\mathrm{Im}\,(\xi^* F(z)\xi) = \mathrm{Im}\,\left(\sum_{j,k=1}^{m} f_{jk}(z)\xi_k\bar{\xi}_j\right) \geq 0 \quad (\mathrm{Im}\, z > 0).$$

Легко видеть, что $Q(z) \in \mathfrak{N}_m$, и, более того, что соответствующая ей эрмитова форма $\mathrm{Im}\,(\xi^* Q(z)\xi)$ строго положительна при $\mathrm{Im}\, z > 0$.

Пользуясь известным интегральным представлением функций $f(z)$, голоморфных в верхней полуплоскости и отображающих ее на свою часть (см., например, [3], с.52), можно получить общую формулу для произвольной матрицы $F(z) \in \mathfrak{N}_m$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{N}}_m$ класс $\mathfrak{N}_m$, пополненный бесконечными матрицами-функциями $F(z)$, задаваемыми в виде

$$f(z) = S^* \begin{Vmatrix} G_p(z) & 0 \\ 0 & \infty I_q \end{Vmatrix} S \qquad (p + q = m), \tag{2}$$

где $G_p(z)$ — некоторая конечная матрица-функция из $\mathfrak{N}_p$, I_q — единичная матрица порядка q, S — неособенная числовая матрица порядка m, а S^* — матрица, эрмитово-сопряженная с S.

Если $F(z) \in \mathfrak{N}_m$ и хотя бы для одного z ($\text{Im } z > 0$) эрмитова форма $\text{Im }(\xi^* F(z)\xi)$ строго положительна, то это же будет иметь место и для любого z ($\text{Im } z > 0$); в этом случае матрица $F(z)$ неособенна и $-F^{-1}(z) \in \mathfrak{N}_m$.

По этой причине, если $F(z) \in \mathfrak{N}_m$, то всегда имеет смысл матрица-функция $(F(z)+Q(z))^{-1}$ ($\text{Im } z > 0$). Если же $F(z)$ имеет вид (2), то мы будем полагать:

$$(F(z)+Q(z))^{-1} = \lim_{t\to\infty}(F_t(z)+Q(z))^{-1} \quad (\text{Im } z > 0),$$

где $F_t(z)$ получается из $F(z)$ путем замены в (2) символа ∞ на t. Это определение всегда имеет смысл, и нетрудно сообразить, как вычисляется написанный предел.

Заметим, что формула (3) тогда и только тогда дает резольвенту R_z некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A, когда $F(z)$ есть постоянная эрмитова матрица.

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда эрмитов оператор A положителен.

В этом случае, согласно нашим предыдущим исследованиям ([5], теорема 2), у оператора A есть два положительных самосопряженных расширения $A^{(\mu)}$ и $A^{(M)}$, резольвенты которых $R_z^{(\mu)}$ и $R_z^{(M)}$ обладают тем свойством, что при любом $a > 0$ и $f \in \mathfrak{H}$:

$$(R_{-a}^{(\mu)}f, f) \leq (R_{-a}f, f) \leq (R_{-a}^{(M)}f, f),$$

где R_z — произвольная обобщенная резольвента оператора с неотрицательным спектром. Если $A^{(\mu)} = A^{(M)}$, то в этом (и только этом) случае оператор A имеет единственное положительное самосопряженное расширение и, более того, единственную резольвенту R_z, с неотрицательным спектром.

Нас будет интересовать тот случай, когда $A^{(\mu)} \neq A^{(M)}$. Этот случай имеет место тогда и только тогда ([5], теорема 3), когда среди решений $\varphi(\neq 0)$ уравнения $A^*\varphi + \varphi = 0$ найдется хотя бы одно, принадлежащее области изменения $\mathcal{R}(A^{(\mu)})$ оператора $A^{(\mu)}$.

Предполагая по-прежнему, что индекс дефекта оператора A есть (m, m), где m — натуральное число[†], построим, как было указано в предыдущей рубрике, системы вектор-функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ..., $\varphi_m(z)$, полагая при этом $R_z^0 = R_z^{(\mu)}$.

Напомним теперь, что спектральной функцией оператора A называется [1, 4] однопараметрическое семейство $E(\lambda)$ $(-\infty < < \lambda < \infty)$ ограниченных самосопряженных операторов, обладающее тем свойством, что для любого $f \in \mathfrak{H}$ $(E(\lambda)f, f)$ — неубывающая функция от λ, $E(\lambda)f$ — непрерывная слева функция от λ, $E(\lambda)f \to 0$ при $t \to -\infty$ и $E(\lambda)f \to f$ при $t \to \infty$ и, кроме того, для любого $f \in D(A)$

$$(Af, Af) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)f, f), \quad Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)f.$$

Спектральной функции $E(\lambda)$ отвечает некоторая обобщенная резольвента R_z $(\mathrm{Im}\ z \neq 0)$ оператора A

$$R_z f = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\lambda)f}{\lambda - z} \quad (f \in \mathfrak{H})$$

и функция $E(\lambda)$ вполне определяется заданием R_z при $\mathrm{Im}\ z > 0$.

Теорема 1. *Совокупность всех обобщенных резольвент R_z оператора A задается формулой*[††]

$$R_z = R_z^0 - \sum_{j,k=1}^{m} (\cdot, \varphi_j(z)) h_{jk}(z) \varphi_k(z) \qquad (\mathrm{Im}\ z > 0), \tag{3}$$

где

$$\| h_{jk}(z) \|_1^m = (Q(z) + F(z))^{-1},$$

а $F(z)$ — произвольная матрица-функция из класса $\widetilde{\mathfrak{N}}_m$. Без ограничения общности мы можем предположить, что векторы

[†]Высказанные ранее в рубрике 2 утверждения относились к любому положительному эрмитову оператору A с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения.

[††]Через $(\cdot, \varphi)\psi$, где $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$ мы обозначаем оператор, относящий каждому вектору $f \in \mathfrak{H}$ вектор $(f, \varphi)\psi$.

$\varphi_1(-1), \ldots, \varphi_p(-1)$ $(p \le m)$ составляют базис множества тех решений φ уравнения $A^*\varphi+\varphi = 0$, которые принадлежат $\mathcal{R}(A^{(\mu)})$. Положим тогда

$$P(z) = -z \lim_{\varepsilon \uparrow 0} \| (\varphi_j(z), \varphi_k(-\xi)) \|_1^p.$$

Нетрудно показать, что предел $P(z)$ существует для всех неположительных z и что для этих z

$$P(z) = -z \left\| \int_0^\infty \frac{\lambda + a}{\lambda - z} \frac{d(E^{(\mu)}(\lambda)\varphi_j(-a), \varphi_k(-a))}{\lambda} \right\|_1^p \quad (a > 0),$$

где $E^{(\mu)}(\lambda)$ — спектральная функция оператора $A^{(\mu)}$.

Имеет место

Теорема 2. *Совокупность всех имеющих неотрицательный спектр обобщенных резольвент R_z $(\mathrm{Im}\, z > 0)$ с неотрицательным спектром оператора A задается формулой*

$$R_z = R_z^{(\mu)} - \sum_{j,k=1}^{p} (\cdot, \varphi_j(\bar{z}))h_{jk}(z)\varphi_k(z), \tag{4}$$

где

$$\| h_{jk}(z) \|_1^p = (P(z) + F(z))^{-1},$$

а $F(z)$ — произвольная матрица-функция из класса $\widetilde{\mathfrak{N}}_p$, такая, что также $zF(z) \in \widetilde{\mathfrak{N}}_p$.

Заметим, что условие $zF(z) \in \mathfrak{N}_p$ для $F(z) \in \mathfrak{N}_p$ эквивалентно тому, что матрица-функция $F(z)$ аналитически продолжаема на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль положительной оси и при $z = x$ $(-\infty < x < \infty)$ обращается в эрмитову матрицу, которой соответствует неотрицательная эрмитова форма. В частности, всем этим условиям удовлетворяет матрица $P(z) \in \mathfrak{N}_p$, для которой эрмитова форма $\xi^* P(x)\xi$ $(-\infty < x < 0)$ строго положительна.

Заметим еще, что резольвента $R_z^{(\mu)}$ получается по формуле (4) при $F(z) \equiv 0$.

Из теоремы 2 вытекает, что если $p = 1$ (каковой случай всегда имеет место при $m = 1$, $A^{(\mu)} \neq A^{(M)}$, то для любых фиксированных z ($\operatorname{Im} z > 0$) и $f \in \mathfrak{H}$ точки комплексной плоскости w вида $w = (R_z f, f)$, где R_z — произвольная обобщенная резольвента оператора A, имеющая неотрицательный спектр, заполняют некоторую выпуклую луночку, ограниченную двумя дугами окружностей, пересекающихся под углом $\pi - \arg z$ (угол измеряется изнутри луночки).

Теорема 2 находит интересные применения в обобщенной проблеме моментов на полуоси [6] (стилтьесовского типа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.* // ДАН СССР. — 1944. — **XLIII**, № 8.

[2] *Наймарк М.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1943. — № 7. — С.285.

[3] *Ахиезер Н., Крейн М.* О некоторых вопросах теории моментов, 1938.

[4] *Наймарк М.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — **4**, № 3. — С.277.

[5] *Крейн М.* // ДАН СССР. — 1945. — **XLVIII**, № 5.

[6] *Крейн М.* // ДАН СССР. — 1944. — **XLIV**, № 6.

ТЕОРИЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ. I

(Математический сборник. — Том 20 (62), № 3)

Согласно J. von Neumann'у [1], линейный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *эрмитовым*, если его область определения $D(T)$ плотна в $\mathfrak{H}$ и $(Tg,f)=(g,Tf)$ для любых $g,f\in D(T)$. Эрмитов оператор T называется *полуограниченным снизу*, если

$$m(T)=\inf_{f\in D(T)}\frac{(Tf,f)}{(f,f)}>-\infty\,.$$

В своей фундаментальной работе (см. [1], с.103) J. von Neumann высказал предположение, что всякий полуограниченный эрмитов оператор T имеет по крайней мере одно полуограниченное самосопряженное (гипермаксимальное) расширение $\widetilde{T}$, для которого

$$m(\widetilde{T})=m(T).$$

Это предположение было позже доказано M.H. Stone'ом [7] и иначе K. Friedrichs'ом [2], которые, однако, оставили открытым вопрос о единственности такого решения $\widetilde{T}$†.

Нам удалось показать, что такое расширение будет единственным только при выполнении некоторых условий, которые соблюдаются не для всякого полуограниченного оператора. Этот результат мы получаем попутно, решая более общую задачу, именно, задачу о нахождении всех самосопряженных решений $\widetilde{T}$ опе-

† При этом вопрос имеет смысл ставить только для простого эрмитова оператора; только в этом случае отрицательный ответ нетривиален (см. [12]).

ратора T, для которых $m(\widetilde{T}) \geq \gamma$, где γ — произвольно выбранное число, не превосходящее $m(T)$. Переходя от рассмотрения полуограниченного оператора T к положительному оператору $S = T - \gamma Im(S) > 0$, мы сводим последнюю задачу к задаче нахождения всех положительных самосопряженных расширений $\widetilde{S}$ оператора S. Оказывается, что среди таких расширений найдутся 2 "крайних" расширения S_μ и S_M ("жесткое" и "мягкое" расширения), обладающие рядом замечательных экстремальных свойств.

В частности, для того чтобы положительный самосопряженный оператор S' был расширением оператора S, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$((S_\mu + aI)^{-1} f, f) \leq ((S' + aI)^{-1} f, f) \leq$$

$$\leq ((S_m + aI)^{-1} f, f),$$

где a — произвольно выбранное положительное число.

Читатель, знакомый с работой K. Friedrichs'a, обнаружит из наших рассмотрений (см. теорему [10, гл. I], что прием расширения положительного оператора S, предложенный этим автором, всегда приводит к жесткому расширению S_μ.

Так как почти все эрмитовы операторы, рассматриваемые в задачах математической физики, полуограничены, то наши результаты находят различные применения в задачах математической физики. В частности, найденные нами формулы перехода от какого-либо положительного самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ оператора S к жесткому расширению (см. теорему 12, гл. I) позволяют дать новые эффективные методы построения функций Грина для различных краевых задач в частных производных (см. гл. III).

Отправным пунктом нашего метода исследования является то обстоятельство, что проблему отыскания самосопряженного расширения положительного эрмитова оператора S можно свести к проблеме отыскания самосопряженного расширения с сохранением нормы линейного ограниченного оператора A с неплотной в $\mathfrak{H}$ областью определения $D(A)$, удовлетворяющего условию эрмитовости[†]:

$$(Ag, f) = (g, Af) \quad (g, f \in D(A)).$$

В самом деле, если S — замкнутый положительный эрмитов оператор и $S \neq S^*$, то, как легко видеть, равенством

$$A(f + Sf) = f - Sf \quad (f \in D(A))$$

определяется некоторый ограниченный эрмитов оператор A, область определения которого

$$D(A) = (I + S)D(S)$$

замкнута и составляет правильное подпространство в $\mathfrak{H}$, причем

$$\| A \| = \sup_{f \in D(A)} \frac{|Af|}{|f|} = 1.$$

Нетрудно показать, что если расширить оператор A до некоторого ограниченного самосопряженного оператора $\widetilde{A}$ с нормой $\| \widetilde{A} \| = 1$ и положить затем $\widetilde{S} = (I - \widetilde{A})(I + \widetilde{A})^{-1}$, то мы получим общий вид положительного самосопряженного расширения $\widetilde{S}$ оператора S.

Поэтому главу I мы начинаем (§ 1,2) с теорем о самосопряженных расширениях ограниченных эрмитовых операторов A с неплотной в $\mathfrak{H}$ областью определения $D(A)$, теорем, которые, возможно, сами по себе представляют некоторый интерес. На основе этих теорем исследуются затем самосопряженные расширения полуограниченных эрмитовых операторов.

Особое внимание мы уделяем (§ 6, 7, частично § 8) неограниченным эрмитовым операторам с конечным индексом дефекта, имея в виду их особую роль в одномерных граничных проблемах.

В главе II положения общей теории применяются для изучения одномерных краевых задач. Эти исследования представляют собой некоторое обобщение и завершение более ранних работ автора [3, 4]. Благодаря общим понятиям и предложениям главы I

[†]Мы разрешаем себе некоторую вольность и называем операторы A указанного типа также эрмитовыми.

теперь удается достигнуть большей идейности и краткости в рассуждениях. Результаты этой главы можно легко обобщить на различные классы одномерных краевых задач для дифференциальных систем.

В главе III результаты общей теории применяются для изучения многомерных краевых задач в частных производных. Общие понятия главы I приводят нас к новым проблемам в краевых задачах. Получаемые здесь новые характеристики функций Грина и методы их конструкций могут иметь прикладное значение.

Основные результаты главы I без доказательства были опубликованы в одном из наших сообщений [5] в Докладах Академии наук СССР. В этом же журнале опубликовано наше сообщение [6] , в котором устанавливаются результаты, примыкающие и частично дополняющие § 6 гл.I.

В основном мы придерживаемся терминологии и обозначений книги Stone'а [7].

Глава I

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Оператор $H_{\mathfrak{N}}$

1. Везде в дальнейшем $\mathfrak{H}$ означает некоторое гильбертово пространство.

Мы будем рассматривать различные эрмитовы операторы, действующие в $\mathfrak{H}$. Ввиду отсутствия стабильной терминологии поясним, что линейный оператор A с областью определения $D(A)$ ($D(A) \subset \mathfrak{H}, AD(A) \subset \mathfrak{H}$) мы будем называть *эрмитовым*, если

$$(Ag, f) = (g, Af) \qquad (g, f \in D(A)).$$

В этом и двух других параграфах мы будем рассматривать непрерывные эрмитовы операторы A. Как известно, линейный оператор A непрерывен в том и только в том случае, если он ограничен, т.е. имеет конечную норму:

$$\| A \| = \sup_{f \in D(A)} \frac{|Af|}{|f|} < \infty.$$

Если эрмитов оператор A определен на всем $\mathfrak{H}$ $(D(A) = \mathfrak{H})$, то он ограничен и

$$\| A \| = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{(Af, f)}{(f, f)}.$$

Такой оператор мы будем называть *ограниченным самосопряженным оператором.*

В этом параграфе мы предполагаем всякий раз, когда не оговорено противное, что операторы, о которых идет речь, суть ограниченные самосопряженные операторы.

Условимся писать $A < B$ или $B > A$, если $A \neq B$ и $(Af, f) \leq \leq (Bf, f)$ $(f \in \mathfrak{H})$.

В дальнейшем H означает положительный оператор $(H > > 0)$. Для такого оператора существует один и только один положительный оператор, квадрат которого равен H; его мы будем обозначать через $H^{1/2}$.

Если

$$Hf = \int_0^1 \lambda dE(\lambda) f \quad (f \in \mathfrak{H}; \ell = \| H \|)$$

— спектральное разложение оператора H, то

$$H^{1/2} f = \int_0^\ell \lambda^{1/2} dE(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

В дальнейшем важную роль будет играть следующая

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое замкнутое подпространство из $\mathfrak{H}$, а H — положительный оператор. Тогда среди множества Q всех операторов C, удовлетворяющих двум условиям*[†]*:*

1) $C \leq H$;

[†]Как обычно принято, через $\mathfrak{N}(A)$ мы обозначаем множество всех значений Af $(f \in D(A))$: таким образом, $AD(A) = \mathfrak{N}(A)$.

2) $\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}$,

найдется всегда максимальный оператор (т.е. оператор, больший чем всякий другой оператор C ***данного множества). Если этот оператор обозначить через*** $H_{\mathfrak{N}}$, ***то***

$$H_{\mathfrak{N}} = H^{1/2}P, \tag{1.1}$$

где $P_{\mathfrak{H}}$ ***— оператор ортогонального проектирования на пространство*** $\mathfrak{L}$, ***состоящее из всех векторов*** $f \in \mathfrak{H}$, ***для которых*** $H^{1/2}f \in \mathfrak{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о[†]. Обозначим через D ортогональное дополнение к $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{H}$:

$$D = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}.$$

Тогда для любого $C \in Q$

$$(Cf, g) = 0, \quad Cg = 0 \quad (f \in \mathfrak{H}, \quad g \in D),$$

откуда

$$(Cf, f) = (C(f-g), f-g) \quad (f \in \mathfrak{H}, \ g \in D).$$

Так как $C \leq H$, то находим далее:

$$(Cf, f) \leq (H(f-g), f-g) = |(H^{1/2}(f-g))| \quad (f \in \mathfrak{H}, \quad g \in \mathfrak{H})$$

и, следовательно,

$$(Cf, f) \leq \inf_{g \in D} |H^{1/2}f - H^{1/2}g|^2. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathfrak{L}$ — множество всех векторов h, ортогональных к $H^{1/2}D$, а $P_{\mathfrak{L}}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{L}$. Из неравенства (1.2) получаем

$$(Cf, f) \leq |P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}f| = (H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

[†]Приводимое ниже доказательство теоремы значительно проще первоначального доказательства автора. Упрощением доказательства автор обязан И.М. Гельфанду.

Очевидно, оператор $H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2} \leq H$.

По определению, $\mathfrak{L}$ элемент $h \in \mathfrak{L}$ в том и только в том случае, если

$$(h, H^{1/2}g) = 0 \quad (g \in D),$$

т.е.

$$(H^{1/2}h, g) = 0 \quad (g \in D),$$

или иначе, $H^{1/2}h \in \mathfrak{N}$.

Следовательно, $\mathfrak{N}(H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2}) \subset \mathfrak{N}$.

Таким образом, оператор $H^{1/2}P_{\mathfrak{L}}H^{1/2} \in Q$, и теорема доказана.

2. Отметим ряд свойств оператора $H_{\mathfrak{N}}$.

Из формулы (1.1) вытекает, что $\mathfrak{N}(H_{\mathfrak{N}}) \subset \mathfrak{N}(H^{1/2})$, а следовательно,

$$\mathfrak{N}(H_{\mathfrak{N}}) \subset \mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}(H^{1/2}).$$

Очевидно также, что множество $\mathfrak{L}$ не изменится, если заменить $\mathfrak{N}$ на $\overline{\mathfrak{N}(H)}$; таким образом,

α) $\qquad H_{\mathfrak{N}} = H_{\overline{\mathfrak{N}(H)}}$.

Нетрудно теперь заключить, что

β) *Оператор $H_{\mathfrak{N}} = 0$ в том и только в том случае, когда*[†]

$$\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}(H^{1/2}) = (O).$$

В силу α), в пояснении нуждается только то обстоятельство, что $H_{\mathfrak{N}} \neq 0$, если $\mathfrak{N}(H) \neq 0$. Но, если

$$\varphi \in \mathfrak{N}(H), \quad \varphi \neq 0,$$

то найдется элемент $\psi \in \mathfrak{L}$ такой, что

$$\varphi = H^{1/2}\psi.$$

Пронормируем φ так, чтобы $|\psi| = 1$, тогда получим

$$|(f,\varphi)|^2 = |(f, H^{1/2}\psi)|^2 = |(H^{1/2}f, \psi)|^2 \leq |H^{1/2}f|^2 = (Hf, f).$$

[†] (O) — множество, состоящее только из элемента $O (\in \mathfrak{H})$.

Таким образом, оператор C_φ

$$C_\varphi f = (f, \varphi)\varphi$$

обладает свойствами 1), 2) теоремы 1, а следовательно,

$$0 < C_\varphi < H_{\mathfrak{N}}.$$

γ) *Равенство*

$$H_{\mathfrak{N}} f = Hf \tag{1.3}$$

имеет место для тех и только тех $f \in \mathfrak{H}$, для которых $Hf \in \mathfrak{N}$.

В самом деле, равенство (1.3) эквивалентно тому, что

$$|P_{\mathfrak{L}} H^{1/2} f| = (H_{\mathfrak{N}} f, f) = (\dot{H} f, f) = |H^{1/2} f|^2.$$

А из этого равенства вытекает, что

$$P_{\mathfrak{L}} H^{1/2} f = H^{1/2} f, \quad \text{т.е.} \quad H^{1/2} f \in \mathfrak{L}.$$

Но элемент $g = H^{1/2} f \in \mathfrak{L}$ тогда и только тогда, если $H^{1/2} g \in \mathfrak{N}$, т.е. $Hf \in \mathfrak{N}$.

δ) Если существует ограниченный обратный оператор H^{-1}, то оператор $H_{\mathfrak{N}}$, рассматриваемый только в $\mathfrak{N}$, имеет там обратный оператор. Если последний обозначить через $H_{\mathfrak{N}}^{(-1)}$, то[†]

$$H_{\mathfrak{N}}^{(-1)} f = P_{\mathfrak{N}} H^{-1} P_{\mathfrak{N}} f \quad (f \in \mathfrak{N}).$$

В самом деле, согласно γ),

$$(\overline{H}_{\mathfrak{N}} f, f) = (Hf, f) \tag{1.4}$$

для всякого $f \in H^{-1}\mathfrak{N}$. Совершая в (1.4) подстановку:

$$f = H^{-1} g \quad (g \in \mathfrak{N}),$$

[†] $P_{\mathfrak{N}}$ — оператор, ортогонально проектирующий $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$. Предложение δ) в дальнейшем нигде не используется. Но оно интересно тем, что в случае конечномерного пространства $\mathfrak{H}$ матрица, изображающая оператор $H_{\mathfrak{N}}$ в подходящем базисе, может быть получена из соответствующей матрицы оператора H с помощью простых рациональных операций.

получаем

$$(H^{-1}H_{\mathfrak{N}}H^{-1}g,g) = (H^{-1}g,g) \qquad (g \in \mathfrak{N}).$$

Представляя здесь элемент g в виде $g = P_{\mathfrak{N}}f$ $(f \in \mathfrak{H})$ и пользуясь тем, что

$$H_{\mathfrak{N}}f = H_{\mathfrak{N}}P_{\mathfrak{N}}f = P_{\mathfrak{N}}H_{\mathfrak{N}}f \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

получим далее, что

$$(RH_{\mathfrak{N}}Rg,g) = (Rg,g), \tag{1.5}$$

где через R мы обозначили оператор, действующий в $\mathfrak{N}$ и определяемый там равенством

$$Rg = P_{\mathfrak{N}}H^{-1}P_{\mathfrak{N}}g = P_{\mathfrak{N}}H^{-1}g \quad (g \in \mathfrak{N}).$$

Так как

$$(Rg,g) = (H^{-1}g,g) \geq \frac{1}{\ell}(g,g) \quad (g \in \mathfrak{N}, \quad \ell = \| H \|),$$

то существует ограниченный обратный оператор R^{-1} и, совершая в равенстве (1.5) подстановку

$$g = R^{-1}f \qquad (f \in \mathfrak{N}),$$

мы найдем, что

$$H_{\mathfrak{N}}f = R^{-1}f \quad (f \in \mathfrak{N}),$$

что и составляет утверждение δ).

3. Ниже мы приведем формулы, по которым удобно вычислять $H_{\mathfrak{N}}$ в различных конкретных задачах.

Предварительно заметим, что элемент $\varphi \in \mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$ в том и только в том случае, когда

$$|\varphi| = \left(\int_0^\ell \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

При выполнении этого условия

$$\varphi = H^{\frac{1}{2}}\psi,$$

где

$$\psi = \int\limits_0^{\ell} \frac{dE(\lambda)\varphi}{\sqrt{\lambda}} \left(= H^{(-\frac{1}{2})}\varphi\right). \tag{1.6}$$

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — множество всех нулей оператора H, а $\mathfrak{H}_+$ — его ортогональное дополнение.

Определенный на множестве $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}}) \in \mathfrak{H}_+$ равенством (1.6) оператор $H^{(-\frac{1}{2})}$ (вообще говоря, неограниченный) есть обратный оператор для $H^{\frac{1}{2}}$, рассматриваемого в $\mathfrak{H}_+$, и когда φ пробегает $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$, то $\psi = H^{(-\frac{1}{2})}\varphi$ пробегает все $\mathfrak{H}_+$.

На $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$ введем новое скалярное произведение $[\varphi, \chi]$, положив

$$[\varphi, \chi] = (H^{(-\frac{1}{2})}\varphi, H^{(-\frac{1}{2})}\chi).$$

При таком определении скалярного произведения множество $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$ есть полное гильбертово пространство, изометричное пространству $\mathfrak{H}$, ибо

$$[\varphi, \chi] = (H^{(-\frac{1}{2})}\varphi, H^{(-\frac{1}{2})}\chi).$$

Заметим, что так как

$$[\varphi] = \sqrt{[\varphi, \varphi]} \geq \frac{1}{\sqrt{\ell}}|\varphi| \quad (\varphi \in \mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})),$$

то всякая сходящаяся по норме $[\varphi]$ последовательность $\{\chi_n\} \subset \subset \mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$ будет и подавно сходящейся по норме $|\varphi|$ (и, конечно, к тому же пределу).

Обозначим через $\mathfrak{L}_+$ замкнутое множество тех векторов $f \in \in \mathfrak{H}_+$, для которых $H^{\frac{1}{2}} f \subset \mathfrak{N}$. Иными словами, или, еще иначе,

$$\mathfrak{L}_+ = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}_+ = H^{(-\frac{1}{2})}\mathfrak{N}(H).$$

Если $f \in \mathfrak{L}$, т.е. $H^{\frac{1}{2}} f \in \mathfrak{N}$, то, представляя f в виде $f = f_0 + f_+$, где $f_0 \in \mathfrak{H}_0$, $f_+ \in \mathfrak{H}_+$, будем иметь

$$H^{\frac{1}{2}} f = 0, \qquad H^{\frac{1}{2}} f_+ = H^{\frac{1}{2}} f_\in \mathfrak{N},$$

откуда $f_0 \in \mathfrak{L}$ и $f_+ \subset \mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{L}$.

Таким образом,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \oplus \mathfrak{L}_+, \qquad \mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L} \cap \mathfrak{H}_0$$

и

$$P_{\mathfrak{L}} = P_{\mathfrak{L}_0} + P_{\mathfrak{L}_+}.$$

Так как $\mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{H}_+$, то

$$P_{\mathfrak{L}_0} H^{\frac{1}{2}} = 0, \quad P_{\mathfrak{L}} H^{\frac{1}{2}} = P_{\mathfrak{L}_+} H^{\frac{1}{2}},$$

а следовательно, формулу (1.1) для $H_{\mathfrak{N}}$ можно заменить формулой

$$H_{\mathfrak{N}} = H^{\frac{1}{2}} P_{\mathfrak{L}_+} H^{\frac{1}{2}}. \tag{1.7}$$

Пусть $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ — некоторая полная в $\mathfrak{N}(H)$ ортонормированная система (в смысле скалярного произведения $[\varphi, \chi]$):

$$[\varphi_\mu, \varphi_\nu] = \delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu \in N).$$

Покажем, что тогда

$$H_{\mathfrak{N}} f = \sum_{\nu \in N}^{[\,]} (f, \varphi_\nu) \varphi_\nu, \tag{1.8}$$

причем, если N — бесконечное множество, то для любого $f \in \mathfrak{H}$ среди коэффициентов (f, φ_ν), $\nu \in N$ только счетное число будет отлично от нуля, и стоящий справа ряд будет сильно сходиться в смысле нормы $[f]$[†], а значит, и подавно в смысле нормы $|f|$.

В самом деле, полной ортонормированной системе $\{\varphi_\nu\}$ в $\mathfrak{N}(H)$ отвечает полная ортонормированная система (в обычном смысле) $\{\psi_\nu\}$ в $\mathfrak{L}_+$, где

$$\psi_\nu = H^{-\frac{1}{2}} \varphi_\nu, \qquad \varphi_\nu = H^{\frac{1}{2}} \psi_\nu \quad (\nu \in N). \tag{1.9}$$

Поэтому имеем

$$P_{\mathfrak{L}_+} H^{\frac{1}{2}} f = \sum_{\nu \in N} (H^{\frac{1}{2}} f, \psi_\nu) \psi_\nu = \sum_{\nu \in N} (f, \varphi_\nu) \psi_\nu. \tag{1.10}$$

[†] Что мы отмечаем значком [ ] над Σ.

С другой стороны, принимая во внимание, что если $\chi_n \to \chi$, то

$$\left[H^{\frac{1}{2}}\chi_n - H^{\frac{1}{2}}\chi\right] \to 0,$$

мы из равенств (1.7), (1.9) и (1.10) получим

$$H_{\mathfrak{N}}f = H^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{\nu\in N}(f,\varphi_\nu)\,\psi_\nu\Big) = \sum_{\nu\in N}^{[\,]}(f,\varphi_\nu)\varphi_\nu,$$

что и требовалось доказать.

4. Остановимся еще на случае, когда $\mathfrak{N}(H)$ конечномерно.

ε) *Если* $\mathfrak{N}(H)$ — n*-мерное пространство с базисом* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_n\}$, *то*

$$H_{\mathfrak{N}}f = \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk}(f,\varphi_j)\varphi_k, \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{1.11}$$

где матрица $\Gamma_n = \|\,\gamma_{jk}\,\|_1^n$ *является обратной по отношению к матрице*

$$\Phi = \|\,[\varphi_j,\varphi_k]\,\|_1^n.$$

В самом деле, нетрудно проверить, что сумма, стоящая справа в равенстве (1.11)), не изменяется при замене базиса $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ $\ldots, \varphi_n\}$ на какой-либо другой базис. С другой стороны, если базис $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ выбрать так, чтобы

$$[\varphi_j,\varphi_k] = \delta_{jk} \quad (j,k = 1,2,\ldots,n),$$

то $\Gamma_n = \Phi_n^{-1}$ будет единичной матрицей и сумма, стоящая в правой части равенства (1.11), перейдет в сумму

$$\sum_{j=1}^{n}(f,\varphi_j)\varphi_j,$$

равную $H_{\mathfrak{N}}f$ согласно соотношению (1.8).

Заметим, что формулу (1.11) можно записать еще так:

$$H_{\mathfrak{N}}f = -\frac{1}{|\Phi_n|}\begin{vmatrix} 0 & (f,\varphi_1)\cdots(f,\varphi_n) \\ \varphi_1 & \\ \vdots & \Phi_n \\ \varphi_n & \end{vmatrix}. \tag{1.12}$$

Если $\mathfrak{N}$ — одномерно, $\mathfrak{N}(H) = \mathfrak{N}$ и $\varphi \in \mathfrak{N}$ $(\varphi \neq 0)$, то мы находим

$$H_{\mathfrak{N}} f = \frac{(f,\varphi)}{[\varphi]^2}\varphi \quad (f \in \mathfrak{H}). \tag{1.13}$$

Эта формула верна также и в том случае, когда $\mathfrak{N}(H) = (0)$, а значит, $H_{\mathfrak{N}} = 0$, ибо в этом случае $\varphi \overline{\in} \mathfrak{N}(H^{\frac{1}{2}})$, и можно считать

$$[\varphi]^2 = \int\limits_0^\ell \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} = \infty.$$

Если формулу (1.13) сопоставить с тем, что, согласно теореме 1,

$$H_{\mathfrak{N}} = \max C,$$

где C удовлетворяет условиям

$$\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}, \qquad C \le H,$$

то легко найдем†, что

$$\sup_{f\in\mathfrak{H}} \frac{|(f,\varphi)|^2}{(Hf,f)} = \int\limits_0^\ell \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{\lambda} \quad (\varphi \in \mathfrak{H}). \tag{1.14}$$

Это равенство нетрудно доказать непосредственно, а из него уже получится (1.13).

5. Пусть теперь $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — какая-либо последовательность элементов из $\mathfrak{N}(H)$, линейная оболочка которой плотна в $\mathfrak{N}(H)$ в смысле нормы $[f]$††, и пусть

$$\Phi_n = \|\,[\varphi_j,\varphi_k]\,\|_1^n \quad (n = 1,2,\ldots).$$

---

†В самом деле, если $\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}$, то $Cf = \alpha(f,\varphi)\varphi$; если же $C \le H$, то $\alpha|(f,\varphi)| \le (Hf,f)$, т.е.

$$\alpha \le \alpha_H = \inf \frac{(Hf,f)}{|(f,\varphi)|^2},$$

откуда $H_{\mathfrak{N}} f = \alpha_H (f,\varphi)\varphi$. Сравнивая это равенство с (1.13), получаем (1.24).

††Можно утверждать существование таких последовательностей, если $\mathfrak{L}$ сепарабельно, а значит, и подавно, если $\mathfrak{L}$ сепарабельно.

После всего сказанного нетрудно видеть, что

$$H_{\mathfrak{N}} f = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|\Phi_n|} \begin{vmatrix} 0 & (f,\varphi_1)\cdots(f,\varphi_n) \\ \varphi_1 & \\ \vdots & \Phi_n \\ \varphi_n & \end{vmatrix}, \tag{1.15}$$

причем предел справа существует не только в смысле старой нормы $|f|$, но и в смысле нормы $[f]$.

В самом деле, так как выражение, стоящее под знаком предела, не изменяется при замене векторов $\varphi_1, ..., \varphi_n$ любыми линейно независимыми векторами $\varphi'_1, ..., \varphi'_n$, выражающимися линейно через $\varphi_1, ..., \varphi_n$, то оно не изменится при замене последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательностью $\{\varphi'_k\}_1^{\infty}$, полученной из первой путем постепенной ортонормализации по отношению к скалярному произведению $[\varphi, \psi]$. Поэтому мы можем сразу предположить, что

$$[\varphi_j, \varphi_k] = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, ...).$$

Но тогда соотношение (1.15) переходит в соотношение

$$H_{\mathfrak{N}} f = \sum_1^{\infty} (f, \varphi_j)\varphi_j \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

которое уже было установлено в п.3.

§ 2. Операторы A_μ и A_M

1. *В настоящем параграфе мы будем рассматривать ограниченные эрмитовы операторы A.* Без ограничения общности можно всегда предполагать, что область определения $D(A)$ такого оператора замкнута. Нас будет интересовать тот случай, когда $D(A)$ — правильная часть (подпространство) $\mathfrak{H}$; для этого случая имеет место следующая

Теорема 2. *У всякого эрмитова ограниченного оператора A существует по крайней мере одно самосопряженное расширение, имеющее ту же норму, что и A.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предположить, что $\| A \| = 1$. Так как для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$|(Ag, f)| \leq \| A \| \cdot |g| \cdot |f| = |g| \cdot |f|,$$

то $(Ag, f) \quad (g \in D(A))$ — линейный непрерывный функционал на $D(A)$. Следовательно, по лемме Ф. Рисса, любому $f \in \mathfrak{H}$ однозначно отвечает некоторый элемент $h \in D(A)$ такой, что

$$(Ag, f) = (g, h) \quad (g \in D(A)), \tag{2.1}$$

при этом $|h| \leq |f|$.

Положим

$$h = A^0 f \quad (f \in \mathfrak{H}, \quad A^0 f \in D(A)). \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что оператор A^0 линеен, причем

$$A^0 f = PAf \quad (f \in D(A)).$$

Пусть $\mathfrak{N}$ — оператор ортогонального проектирования $\mathfrak{H}$ на $D(A)$. Из равенств (2.1) и (2.2) находим, что при $f, g \in D(A)$

$$(g, A^0 f) = (Ag, f) = (g, Af) = (g, PAf),$$

откуда

$$A^0 f = PAf \qquad (f \in D(A)).$$

Пусть $\mathfrak{N}$ — ортогональное дополнение к $D(A)$ в D:

$$\mathfrak{H} = D(A) \oplus \mathfrak{N},$$

а $\{e_\nu\}_{\nu \in N}$ — некоторый ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Так как для любого $f \in D(A)$

$$Af - A^0 f = Af - PAf \in \mathfrak{N},$$

то

$$Af = A^0 f + \sum_{\nu \in N} c_\nu(f) e_\nu \qquad (f \in D(A)),$$

где

$$c_\nu(f) = (Af, e_\nu) \qquad (\nu \in N).$$

Так как, по предположению, $\| A \| = 1$, то

$$|Af|^2 = |A^0 f|^2 + \sum_{\nu \in N} |c_\nu(f)|^2 \le |f|^2. \tag{2.3}$$

Положим

$$(g, f)_1 = (g, f) - (A^0 g, A^0 f) \qquad (g, f \in \mathfrak{H})$$

в силу соотношения (2.3),

$$(f, f)_1 \ge 0 \quad (f \in \mathfrak{H})$$

и мы можем положить

$$|f|_1 = \sqrt{(f, f)_1} = \sqrt{|f|^2 - |A^0 f|^2} \qquad (\ge 0). \tag{2.4}$$

Отождествляя в $\mathfrak{H}$ всякие два элемента f и f', для которых $|f - f'|_1 = 0$, и замыкая $\mathfrak{H}$ по новой норме $|f|_1$, мы получаем из $\mathfrak{H}$ некоторое новое гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$.

Обозначим через D_1 замыкание $D(A)$ и $\mathfrak{H}_1$. В силу (2.3), при любом $f \in D(A)$

$$\sum_{\nu \in N} |c_\nu(f)|^2 \le |f|_1^2. \tag{2.5}$$

Отсюда заключаем, что $c_\nu(f)$ $(\nu \in N)$ есть линейный, ограниченный (непрерывный) функционал на $D(A)$, рассматриваемом как множество элементов из $\mathfrak{H}_1$; следовательно, он однозначно расширяется с сохранением непрерывности на D_1. Ясно также, что при этом соотношение (2.5) сохранит силу для любого $f \in D_1$.

По лемме Ф. Рисса для каждого $\nu \in N$ найдется элемент $h_\nu \in$ $\in D_1$ такой, что

$$c_\nu(f) = (f, h_\nu)_1 \qquad (f \in D_1). \tag{2.6}$$

Положим для любого $\nu \in N$

$$\gamma_\nu(f) = (f, h_\nu) \quad (f \in \mathfrak{H}_1). \tag{2.7}$$

Пусть P_1 — оператор ортогонального проектирования $\mathfrak{H}_1$ на D_1. Тогда, в силу равенств (2.6) и (2.7),

$$\gamma_\nu(f) = \gamma_\nu(P_1 f) = c_\nu(P_1 f) \quad (f \in \mathfrak{H}_1),$$

откуда, принимая во внимание неравенство (2.5), имеем

$$\sum_{\nu\in N} |\gamma_\nu(f)|^2 = \sum_{\nu\in N} |c_\nu(P_1 f)|^2 \leq |P_1 f|^2 \leq |f_1|^2 \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2.8}$$

Положим

$$A_1 f = A^0 f + \sum_{\nu\in N} \gamma_\nu(f) e_\nu \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Так как $\gamma_\nu(g) = c_\nu(g)$ при $g \in D(A)$, то

$$A_1 g = Ag \qquad (g \in D(A)), \tag{2.9}$$

кроме того, в силу соотношений (2.8) и (2.4),

$$|A_1 f|^2 = |A^0 f|^2 + \sum_{\nu\in N} |\gamma_\nu(f)|^2 \leq |A_0 f|^2 + |f|_1^2 = |f|^2,$$

т.е.

$$\| A \| = 1.$$

Рассмотрим оператор A_1^*, сопряженный с оператором A_1. Принимая во внимание равенства (2.1) и (2.2), найдем, что при $g \in$ $\in D(A)$

$$(A_1^* g, f) = (g, A_1 f) = (g, A^0 f) = (Ag, f) \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

откуда

$$A_1^* g = Ag, \quad g \in D(A). \tag{2.10}$$

Но тогда самосопряженный оператор

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2}(A_1 + A_1^*)$$

будет требуемым самосопряженным расширением оператора A, ибо, согласно (2.4) и (2.10),

$$\widetilde{A} g = Ag \qquad (g \in D(A)),$$

а, кроме того,

$$1 = \| A \| \le \| \widetilde{A} \| \le \frac{1}{2}(\| A_1 \| + \| A_1^* \|) = 1,$$

т.е. $\| A \| = 1$.

Теорема доказана.

2. Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что A — эрмитов оператор, для которого

$$D(A) = \overline{D(A)} \neq \mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \| A \| = 1.$$

Через $\mathfrak{N}$ мы будем обозначать ортогональное дополнение к $D(A)$:

$$\mathfrak{H} = D(A) \oplus \mathfrak{N}.$$

Через $\mathfrak{H}(A)$ мы будем обозначать множество всех самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ оператора A, для которых $\| \widetilde{A} \| = 1$.

Согласно теореме 2, множество $\mathfrak{H}(A)$ не пусто; более того, имеет место

Теорема 3. *Множество $\mathfrak{H}(A)$ имеет минимальный элемент A_μ и максимальный элемент A_M, и оно состоит из тех и только тех ограниченных самосопряженных операторов A', которые удовлетворяют условию*

$$A_\mu \le A' \le A_M.$$

Доказательство. Если $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$, то оператор A' будет самосопряженным продолжением оператора A в том и только в том случае, если он представляется в виде

$$A' = \widetilde{A} + C,$$

где C — самосопряженный оператор, аннулирующийся на элементах из $D(A)$

$$Cf = 0 \qquad (f \in D(A)).$$

Последнее условие эквивалентно тому, что

$$\mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N} \qquad (\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus D(A)). \tag{2.11}$$

С другой стороны, $\| A' \| \leq 1$ в том и только в том случае, если

$$|(A'f, f)| \leq |f|^2 \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

т.е.

$$-(f + \widetilde{A}f, f) \leq (Cf, f) \leq (f - \widetilde{A}f, f).$$

По теореме 1 последние неравенства, при условии (2.11), имеют место тогда и только тогда, если

$$-(I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}} \leq C \leq (I - \widetilde{A})_{\mathfrak{N}}. \tag{2.12}$$

В частности, условия (2.11) и (2.12) удовлетворяются, если положить C равным $(I - A)_{\mathfrak{N}}$ или $-(I + A)_{\mathfrak{N}}$.

Таким образом, операторы

$$\begin{aligned} A_\mu &= \widetilde{A} - (I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}}, \\ A_M &= \widetilde{A} + (I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

принадлежат $\mathfrak{H}(A)$, и если A' — некоторое самосопряженное расширение оператора A, то $A' \in \mathfrak{H}(A)$ тогда и только тогда, когда

$$A_\mu \leq A' \leq A_M. \tag{2.14}$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что всякий самосопряженный оператор A', удовлетворяющий условию (2.14), есть расширение оператора A.

Из (2.14) вытекает, что

$$R = A' - A_\mu \geq 0, \qquad R \leq A_M - A_\mu,$$

с другой стороны, так как

$$A_\mu f = A_M f = Af \qquad (f \in D(A)),$$

то

$$0 \leq (Rf, f) \leq (A_M f, f) - (A_\mu f, f) = 0, \qquad f \in D(A),$$

т.е.

$$(Rf, f) = 0 \quad (f \in D(A)),$$

а так как $R \geq 0$, то отсюда и

$$Rf = A'f - Af = 0.$$

Теорема доказана.

Согласно (2.13), если $\widetilde{A} = A_\mu$, то

$$(I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{2.15}$$

Если же $\widetilde{A} = A_M$, то

$$(I - \widetilde{A})_{\mathfrak{N}} = 0. \tag{2.16}$$

С другой стороны, согласно свойству β) оператора H_β (см. § 1), равенства (2.15) и (2.16) эквивалентны соответственно равенствам:

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}((I + \widetilde{A})^{1/2}) = (0), \quad \mathfrak{N} \cap \mathfrak{R}((I - \widetilde{A})^{1/2}) = (0). \tag{2.17}$$

Отсюда следует

Теорема 4. *Пусть оператор $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ и*

$$\widetilde{A}f = \int\limits_{-1}^{1} \lambda dE(\lambda)f \qquad (f \in \mathfrak{H}) \tag{2.18}$$

— его спектральное разложение. Тогда для того чтобы $\widetilde{A} = A_\mu$ (соответственно $A = A_M$), необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$J(\varphi, A) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{1+\lambda},$$

и соответственно

$$J(\varphi, -A) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda},$$

равнялся ∞ для любого $\varphi \in \mathfrak{N}$.

Оператор A будет единственным самосопряженным расширением с нормой ≤ 1 оператора A в том и только в том случае, когда одновременно

$$J(\varphi, A) = J(\varphi, -A) = \infty \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}).$$

В самом деле, элемент $f \in \mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{N}((I+A)^{1/2})$, когда соответствующий интеграл $J(f, \pm A) < \infty$; поэтому условия первого утверждения теоремы эквивалентны соответственно условиям (2.17). Второе же утверждение теоремы есть следствие первого, ибо $\widetilde{A}$ будет единственным оператором в $\mathfrak{H}(A)$ тогда и только тогда, когда одновременно $\widetilde{A} = A_\mu$ и $\widetilde{A} = A_M$.

3. Эрмитову оператору $A(\| A \| \leq 1)$ мы будем относить свое "скалярное произведение" и "норму", полагая

$$(g, f)_A = (g, f) + (Ag, f), \qquad |g|_A = \sqrt{(g, g)_A}.$$

Каждому расширению $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ будет отвечать, по тем же формулам, свое скалярное произведение $(g, f)_{\widetilde{A}}$ и норма $|g|_{\widetilde{A}}$ $(g, f \in \in \mathfrak{H})$, представляющие собой соответствующие расширения скалярного произведения $(g, f)_A$ и нормы $|g|_A$.

Из первой формулы (2.17) легко следует

Теорема 5. *Для совпадения оператора $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ с оператором A_μ необходимо и достаточно, чтобы множество $D(A)$ было плотно в $\mathfrak{H}$ по норме $|f|_{\widetilde{A}}$.*

Доказательство. В силу (2.15), равенство $\widetilde{A} = A_\mu$ эквивалентно тому, что

$$H_{\mathfrak{N}} = 0,$$

где $H = I + \widetilde{A}$.

С другой стороны, так как $D(A) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$, то, согласно установленному при доказательстве теоремы 1, для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(H_{\mathfrak{N}} f, f) = \inf_{g \in D(A)} (H(f-g), f-g) = \inf_{g \in D(A)} |f-g|^2_{\widetilde{A}},$$

откуда и следует теорема.

4. Ниже будет дан критерий того, чтобы существовал единственный оператор $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ — критерий, в котором будет фигурировать только оператор A (а не его какое-либо расширение).

Предварительно заметим, что если соотношение (1.14) применить к оператору $H = I - \widetilde{A}^2$, где $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ имеет спектральное разложение (2.18), то найдем

$$\sup_{f\in\mathfrak{H}} \frac{|(f,\varphi)|^2}{|f|^2 - |\widetilde{A}f|^2} = \int_{-1}^{1} \frac{d|E(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda^2} \qquad (\varphi \in \mathfrak{H}), \tag{2.19}$$

а если здесь заменить φ на $\widetilde{A}(\varphi)$, то получим

$$\sup_{f\in\mathfrak{H}} \frac{|(\widetilde{A}f,\varphi)|^2}{|f|^2 - |\widetilde{A}f|^2} = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda^2 d|E(\lambda)\varphi|^2}{1-\lambda^2} \qquad (\varphi \in \mathfrak{H}). \tag{2.20}$$

Теорема 6. *Для того чтобы эрмитов оператор* A ($\| A \| \leq \leq 1$) *имел единственное самосопряженное расширение* $\widetilde{A}$ *с нормой* ≤ 1, *необходимо и достаточно для любого вектора* $\varphi \perp \perp D(A)$ $(\varphi \neq 0)$ *выполнения условия*

$$\sup_{f\in D(A)} \frac{|(Af,\varphi)|^2}{|f|^2 - |Af|^2} = \infty. \tag{2.21}$$

Доказательство. Покажем сперва, что если $A_\mu < A_M$, то условие (2.21) не будет выполняться для всех $\varphi \perp D(A)$ (т.е. $\varphi \in \mathfrak{N}$).

В самом деле, если $A_\mu < A_M$, то, полагая

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2}(A_\mu + A_M),$$

будем иметь, в силу (2.13),

$$\frac{1}{2}(A_M - A_\mu) = A_M - \widetilde{A} = \widetilde{A} - A_\mu = (I - \widetilde{A})_{\mathfrak{N}} = (I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}}.$$

Пусть $\chi_0 \in \mathfrak{N}$ таково, что

$$\varphi_0 = (I - \widetilde{A})_{\mathfrak{N}}\chi_0 = (I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}}\chi_0 \neq 0;$$

тогда $\varphi_0 \in \mathfrak{N}$ и, согласно теореме 1,

$$\varphi_0 \in \mathfrak{N}[(I - A)^{\frac{1}{2}}], \qquad \varphi_0 \in \mathfrak{N}[(I + A)^{\frac{1}{2}}],$$

а следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)\varphi_0|^2}{1 \pm \lambda} < \infty.$$

Отсюда, согласно равенству (2.20), получим

$$\sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|(\widetilde{A}f, \varphi_0)|^2}{|f|^2 - |\widetilde{A}f|^2} < \infty;$$

а значит, подавно

$$\sup_{f \in D(A)} \frac{|(Af, \varphi_0)|^2}{|f|^2 - |Af|^2} < \infty. \tag{2.22}$$

Таким образом, условие теоремы достаточно для того, чтобы $A_\mu = A_M$. Докажем теперь, что оно также необходимо. Для этого следует доказать, что если для некоторого $\varphi_0 \in \mathfrak{N}$ ($\varphi_0 \neq \neq 0$) выполняется условие (2.22), то $A_\mu < A_M$.

Отправляясь от какого-либо оператора $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$, введем в пространстве $\mathfrak{H}$ новое скалярное произведение $(f, g)_1$ и новую норму $|g|_1$, полагая

$$(g, f)_1 = (g, f) - (\widetilde{A}g, \widetilde{A}f), \qquad |g|_1 = \sqrt{(g, g)_1}.$$

Так как $\widetilde{A}f = Af$ при $f \in D(A)$, то условие (2.22) означает, что функционал

$$c(f) = (Af, \varphi_0) \qquad (f \in D(A))$$

непрерывен по норме $|f|_1$ на линейном множестве $D(A)$. Обозначим через $\widetilde{c}(f)$ $(f \in \mathfrak{H})$ его линейное непрерывное по норме $|f|_1$ расширение на все пространство $\mathfrak{H}$. Тогда будем иметь

$$|\widetilde{c}(f)| \leq \gamma |f|_1 \leq \gamma |f| \qquad (f \in \mathfrak{H}), \tag{2.23}$$

где $\gamma > 0$ — некоторая константа. Отсюда $\widetilde{c}(f)$ есть непрерывный функционал и по старой норме, а поэтому найдется элемент $h \in \mathfrak{H}$ такой, что

$$\widetilde{c}(f) = (f, h) \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2.24}$$

Но тогда, согласно (2.19) и (2.23),

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1-\lambda^2} = \sup \frac{|\widetilde{c}(f)|^2}{|f|_1^2} \le \gamma^2,$$

а следовательно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1 \pm \lambda} < \infty. \tag{2.25}$$

С другой стороны, так как

$$(f, h - \widetilde{A}\varphi_0) = (f, h) - (Af, \varphi_0) = \widetilde{c}(f) - c(f) = 0, \quad f \in D(A),$$

т.е. $h - \widetilde{A}\varphi_0 \perp D(A)$, то

$$h = \widetilde{A}\varphi_0 - \varphi_1 \qquad (\varphi_1 \in \mathfrak{N}).$$

Кроме того, если в неравенстве

$$\Big(\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)(g-h)|^2}{1 \pm \lambda}\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)g|^2}{1 \pm \lambda}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)h|^2}{1 \pm \lambda}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

положить

$$g = \widetilde{A}\varphi_0 \pm \varphi_0, \qquad g - h = \varphi_1 \pm \varphi_0,$$

то, учитывая (2.25) и соотношение

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)g|^2}{1 \pm \lambda} = \int_{-1}^{1} (1 \pm \lambda) d|F(\lambda)\varphi_0|^2 < \infty,$$

мы найдем, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{d|F(\lambda)(\varphi_1 \pm \varphi_0)|^2}{1 \pm \lambda} < \infty.$$

Так как $\varphi_1 \pm \varphi_0 \in \mathfrak{N}$ и, по крайней мере, один из векторов $\varphi_1 \pm \varphi_0$ отличен от нуля (ибо $\varphi_0 \ne 0$), то по теореме 4 в $\mathfrak{H}(A)$ содержатся операторы, отличные от $\widetilde{A}$, т.е. $A_\mu < A_M$.

Теорема доказана.

5. Эрмитов оператор A с замкнутой областью определения $D(A) \neq \mathfrak{H}$ будем называть *простым*, если $D(A)$ не содержит ни одного линейного подпространства, инвариантного по отношению к A.

Если оператор A не является простым, то теоретико-множественная сумма всех инвариантных подпространств $\mathfrak{L} \in D(A)$ дает максимальное инвариантное подпространство $\mathfrak{L}_M$. Разлагая для этого случая $\mathfrak{H}$ и $D(A)$ в прямые ортогональные суммы:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_M \pm \mathfrak{H}_1, \quad D(A) = \mathfrak{L}_M \oplus D_1 \quad (D_1 \in \mathfrak{H}_1),$$

мы сведем вопрос о нахождении возможных самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ ($\| \widetilde{A} \| \leq 1$) оператора A к вопросу о нахождении всевозможных самосопряженных расширений $\widetilde{A}_1$ ($\| \widetilde{A}_1 \| \leq 1$) оператора A_1, действующего уже в $\mathfrak{H}_1$ и совпадающего на $D_1 = D_1(A)$ с оператором A[†].

Естественно поставить вопрос: всегда ли простой оператор $\widetilde{A}$ ($\| \widetilde{A} \| \leq 1$) имеет расширения $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ с простым спектром? Можно показать, что вопрос этот имеет отрицательный ответ. Однако, *если ортогональное дополнение к $D(A)$ одномерно, то любое самосопряженное расширение*

$$\widetilde{A}f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dF(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

имеет простой спектр.

В самом деле, пусть $\varphi \perp D(A)$ ($\varphi \neq 0$). Рассмотрим линейную замкнутую оболочку $\mathfrak{H}_0$ множества $F(\lambda)\varphi$ ($-\infty < \lambda < \infty$) и ее ортогональное дополнение $\mathfrak{N}$: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{N}$. Как известно, $\widetilde{A}\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_0$ и $\widetilde{A}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. С другой стороны, так как $\varphi \in \mathfrak{H}_0$, то $\varphi \perp \mathfrak{N}$ и, следовательно, $\mathfrak{N} \subset D(A)$. Но A — простой оператор и, значит, $\mathfrak{N} = (0)$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, что и доказывает утверждение.

[†] В частности, по этой причине совершенно тривиально решается вопрос об определении общего вида оператора $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$, когда $D(A)$ инвариантно по отношению к A, т.е. когда A — самосопряженный оператор в $D(A)$.

Опираясь на теорему 4, нетрудно построить примеры простых эрмитовых операторов A ($\| A \| \leq 1$), для которых имеет место тот или другой случай:

1) $A_\mu = A_M$, 2) $A_\mu < A_M$.

Прежде всего заметим, что если хотя бы одна из точек $-1, 1$ не принадлежит спектру какого-либо расширения $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$, то обязательно имеет место случай 2). В самом деле, тогда один из интегралов $\int(\varphi, \pm A)$ конечен при любом $\varphi \in \mathfrak{H}$ и утверждение следует из теоремы 4.

Отсюда, если $\| A \| \leq 1$, то всегда имеет место случай 2), ибо, по теореме 1, существует $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$ такой, что $\| \widetilde{A} \| = \| A \| = \ell < 1$ и спектр такого оператора будет лежать в интервале $(-\ell, \ell)$.

Если $\| A \| = 1$ и обе точки $-1, 1$ принадлежат спектру некоторого $\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A)$, то возможен как тот, так и другой случай.

В самом деле, пусть B — некоторый самосопряженный оператор со спектральным разложением:

$$Bf = \int_{-1}^{1} \lambda dF(\lambda) f \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

и пусть точки -1 и 1 принадлежат спектру оператора B. Тогда всегда можно будет выбрать такое $\varphi_0 \in \mathfrak{H}$.

Обозначим через D совокупность всех векторов f, ортогональных к φ_0, и положим $Af = Bf$ $(f \in D)$. Тогда, по теореме 4, оператор B будет единственным самосопряженным расширением с нормой ≤ 1 оператора A ($A_\mu = A_M = B$).

Наоборот, если мы выберем $\varphi_0 \neq 0$ так, чтобы хоть один из интегралов $\int(\varphi_0, \pm B)$ был конечен, то будет иметь место случай 2) ($A_\mu < A_M$).

Если, кроме того, оператор B имеет простой спектр, то, выбирая φ_0 так, чтобы имел место тот или другой случай, мы можем этот выбор производить среди тех элементов $\varphi \in \mathfrak{H}$, для которых линейная замкнутая оболочка множества $F(\lambda)\varphi$ $(-1 \leq \leq \lambda \leq 1)$ совпадает с $\mathfrak{H}$, и тогда оператор A будет простым.

В пояснение этого утверждения заметим, что если линейное замкнутое множество $\mathfrak{L} \subset D$ таково, что $A\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$, а значит, $B\mathfrak{L} \subset \subset \mathfrak{L}$, то также $F(\lambda)\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}$ $(-1 \leq \lambda \leq 1)$. С другой стороны, по построению $D \perp \varphi_0$, и, следовательно, $\varphi_0 \perp F(\lambda)\mathfrak{L}$ $(-1 < \lambda < 1)$, т.е. для любого $f \in \mathfrak{L}$

$$(\varphi_0, F(\lambda)f) = (F(\lambda)\varphi_0, f) = 0 \quad (-1 \leq \lambda \leq 1).$$

Поэтому, если φ_0 выбрано так, что линейная замкнутая оболочка элементов $F(\lambda)\varphi_0$ $(-1 \leq \lambda \leq 1)$ дает все $\mathfrak{H}$, то $\varphi_0 = 0$, т.е. $\mathfrak{L} = (0)$, оператор A — простой.

§ 3. Положительные самосопряженные расширения положительных операторов

1. Эрмитов оператор S $(\neq 0)$ (ограниченный или неограниченный) называют *положительным* (и пишут: $S > 0$), если

$$(Sf, f) \geq 0 \qquad (f \in D(S)). \tag{3.1}$$

Из (3.1) вытекает

$$\begin{aligned} |f + Sf|^2 &= |f|^2 + 2(Sf, f) + |Sf|^2 \geq |f|^2, \\ |f + Sf|^2 &\geq |f|^2 - 2(Sf, f) + |Sf|^2 \geq |f - Sf|^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Поэтому, если положить

$$A(f + Sf) = f - Sf \qquad (f \in D(S)), \tag{3.3}$$

то мы тем самым отнесем оператору S оператор $A = A(S)$, для которого

$$D(A) = (I + S)D(S)$$

и который обладает следующими двумя свойствами:

$$1)\ \| A \| \leq 1, \qquad 2)\ Ag + g \neq 0 \quad (g \in D(A), \quad g \neq 0). \tag{3.4}$$

Первое из неравенств (3.2) показывает, что оператор $I + S$ однозначно преобразует множество $D(S)$ в множество $D(A)$. Поясним еще свойство 2) оператора A. Если $g \in D(A)$, $g \neq 0$, то найдется такое $f \in D(S), f \neq 0$, что $g = f + Sf$, но тогда, в силу (3.3),

$$Ag + g = 2f \neq 0.$$

Заметим еще, что оператор A, как и S, — эрмитов оператор. В самом деле, если $g_k \in D(A)$ $(k = 1, 2)$, то

$$g_k = f_k + Sf_k \quad (f_k \in D(S), \ \ k = 1, 2)$$

и, следовательно,

$$(Ag_1, g_2) = (f_1 + Sf_1, f_2 - Sf_2) = (f_1, f_2) + (Sf_1, Sf_2) =$$
$$= (f_1 - Sf_1, f_2 + Sf_2) = (g_1, Ag_2).$$

Зависимость (3.3) между операторами A и S можно записать еще в следующем виде:

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}.$$

Легко видеть, что по оператору A всегда можно восстановить оператор S. Если $f \in D(S)$, то из соотношений

$$g = f + Sf, \quad Ag = f - Sf$$

находим

$$f = \frac{1}{2}(g + Ag), \quad Sf = \frac{1}{2}(g - Ag).$$

А так как, когда g пробегает $D(A)$, f пробегает все $D(S)$, то мы приходим к выводу, что оператор S вполне определяется равенством

$$S(g + Ag) = g - Ag \quad (g \in D(A)), \tag{3.5}$$

которое мы будем записывать еще так:

$$S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Пусть теперь A — произвольный эрмитов оператор, обладающий свойствами (3.4). Покажем, что равенство (3.5) определяет положительный эрмитов оператор S, через который оператор A выражается по формуле (3.3).

Действительно, равенством (3.5) определится оператор S с областью определения $D(S)$, в которую одно-однозначно преобразуется множество $D(A)$, с помощью оператора $I + A$, т.е.

$$D(S) = (I + A)D(A).$$

Так как равенство (3.5) отличается от равенства (3.3) только тем, что A и S всюду поменялись местами, то, рассуждая в отношении оператора S так же, как мы рассуждали выше в отношении оператора A, мы докажем, что S — эрмитов оператор и что имеет место соотношение (3.3).

Остается еще показать, что для S выполняется условие (3.1). Для этого заметим, что если $f \in D(S)$, то найдется такое $g \in D(A)$, что $f = g + Af$, и тогда, по определению (3.5): $Sf = g - Af$, а следовательно,

$$(Sf, f) = (g - Af, g + Af) = |g|^2 - |Ag|^2 \geq 0.$$

Итак, наше утверждение доказано.

С помощью него и теоремы 1 нетрудно доказать теорему, высказанную в виде предположения J.von Neumann'ом [1] и доказанную затем M.H. Stone'ом (см. [7], теорему 9.21) и K. Friedrichs'ом [2].

Теорема 7. *Всякий положительный эрмитов оператор S, область определения которого $D(S)$ плотна в $\mathfrak{H}$, имеет, по крайней мере, одно положительное самосопряженное расширение.*

Доказательство†. Построим по оператору S эрмитов оператор $A = (I-S)(I+S)^{-1}$, у которого, как мы знаем, $\| A \| \leq 1$. Пусть $\widetilde{A}$ — какое-либо самосопряженное расширение оператора A с нормой $\| \widetilde{A} \| \leq 1$. Легко видеть, что

$$\widetilde{A}g + g \neq 0 \quad \text{при} \quad g \neq 0 \quad (g \in \mathfrak{H}). \tag{3.6}$$

В самом деле, если допустить, что при некотором $\varphi \neq 0$ имеем $\widetilde{A}\varphi + \varphi = 0$, то при любом $g \in \mathfrak{H}$: $(\varphi, g + \widetilde{A}g) = (\varphi + \widetilde{A}\varphi, g) = 0$, и, значит, подавно $(\varphi, Ag + g) = 0$ при $g \in D(A)$, т.е. $\varphi \perp (I + A)D(A)$. Но $(I + A)D(A) = D(S)$, а $D(S)$, как всюду плотное в $\mathfrak{H}$ множество, не может быть ортогонально к $\varphi \neq 0$. Мы пришли к противоречию.

Так как оператор $\widetilde{A}$ обладает двумя свойствами (3.4), то можно построить положительный эрмитов оператор $\widetilde{S} = (I-\widetilde{A})(I+\widetilde{A})^{-1}$,

---

†Простое доказательство предложил также H. Freudenthal [2], оно основано на идеях K. Friedrichs'а и опять-таки не дает возможности описать все положительные самосопряженные расширения оператора S.

являющийся, очевидно, расширением оператора $S = (I - A)(I + A)^{-1}$. Кроме того, так как оператор $\widetilde{A}$ является самосопряженным, а точка -1, в силу (3.6), не принадлежит его точечному спектру, то и оператор $(I + \widetilde{A})^{-1}$, а вместе с ним и оператор

$$\widetilde{S} = 2(I + \widetilde{A})^{-1} - I$$

— самосопряженный.

Теорема доказана.

Из приведенных рассуждений ясно также, что расширениями, заданными формулой

$$\widetilde{S} = (I - \widetilde{A})(I + \widetilde{A})^{-1},$$

где

$$\widetilde{A} \in \mathfrak{H}(A), \qquad A = (I - S)(I + S)^{-1},$$

исчерпываются все положительные самосопряженные расширения эрмитова оператора $S > 0$. Множество всех этих расширений мы в дальнейшем будем обозначать через $\mathfrak{P}\,(S)$.

Прежде чем перейти к исследованию множества $\mathfrak{P}\,(S)$, заметим еще, что теорема 7 может быть сформулирована в несколько более общей форме для полуограниченных операторов.

Эрмитов оператор T называется *полуограниченным снизу*, если

$$m(T) = \inf_{f \in D(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

Теорема 7′. *Всякий полуограниченный снизу эрмитов оператор T, область определения которого $D(T)$ плотна в $\mathfrak{H}$, имеет, по крайней мере, одно полуограниченное снизу самосопряженное расширение $\widetilde{T}$, для которого $m(\widetilde{T}) = m(T)$.*

В самом деле, эрмитов оператор

$$S = T - m(T)I$$

положителен и $\overline{D(S)} = \overline{D(T)} = \mathfrak{H}$, следовательно, он имеет самосопряженное $\widetilde{S}$, а тогда

$$\widetilde{T} = \widetilde{S} + m(T)I$$

будет нужным полуограниченным снизу самосопряженным расширением оператора T.

2. Исследуя самосопряженные расширения $\widetilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$, мы без ограничения общности можем предполагать, что эрмитов оператор S замкнут, т.е. что его область определения $D(S)$ есть полное нормированное пространство по отношению к норме

$$|f|_S = \sqrt{|f|^2 + |Sf|^2}.$$

Так как

$$|Sf + f|^2 = |Sf|^2 + 2(Sf, f) + |f|^2 \geq |Sf|^2 + |f|^2,$$

$$|Sf + f|^2 \leq |Sf|^2 + 2|Sf| \cdot |f| + |f|^2 \leq 2(|Sf|^2 + |f|^2),$$

то линейное преобразование

$$g = Sf + f \qquad (f \in D(S)),$$

преобразующее одно-однозначно $D(S)$ в $D(A)$, обладает тем свойством, что

$$|f|_S \leq |g| \leq 2|f|_S$$

и, значит, устанавливает взаимно непрерывное соответствие между $D(S)$ (с нормой $|f|_S$) и $D(A)$ (с нормой $|f|$). Следовательно, если S — замкнутый оператор, то $D(A)$ — замкнутое множество в $\mathfrak{H}$ (и, между прочим, обратно).

Если $D(A) = \mathfrak{H}$, то A является самосопряженным оператором и таковым же будет оператор S.

Следовательно, если $S \neq S^*$, то размерность n ортогонального дополнения $\mathfrak{N}_{-1}$ к $D(A)$ отлична от нуля.

Заметим, что $\mathfrak{N}_{-1}$ совпадает с множеством всех решений уравнения

$$S^*\varphi + \varphi = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{N}_{-1}$ есть собственное подпространство оператора S^*, отвечающее собственному числу -1. Легко видеть, что его размерность совпадает с размерностью $n(\mathfrak{N}_z)$ собственного подпространства $\mathfrak{N}_z$ оператора S^*, отвечающего любому комплексному числу $z \overline{\in} (0, \infty)$.

Пусть $\widetilde{S}$ — какое-либо положительное самосопряженное расширение оператора S, а

$$\widetilde{S}f = \int_0^\infty \lambda dF(\lambda)f \quad (f \in D(S))$$

— его спектральное разложение. Пусть $z\overline{\in}(-\infty, 0)$. Положим

$$Vf = \int_0^\infty \frac{\lambda+1}{\lambda-1} dE(\lambda)f \qquad (f \in \mathfrak{H});$$

очевидно, V — непрерывный оператор, имеющий непрерывный обратный оператор V^{-1}, причем

$$V^{-1}f = \int_0^\infty \frac{\lambda-z}{\lambda+1} dE(\lambda)f, \qquad V^*f = \int_0^\infty \frac{\lambda+1}{\lambda-\bar{z}} dE(\lambda)f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Если $\varphi \in \mathfrak{N}_z$, т.е. $S^*\varphi - z\varphi = 0$, то

$$(Sf - \bar{z}f, \varphi) = 0, \qquad (V^*(Sf - \bar{z}f),\ V^{-1}\varphi) = 0 \qquad (f \in D(S)).$$

Но

$$V^*(Sf - \bar{z}f) = Sf + f \qquad (f \in D(S))$$

и, следовательно,

$$(Sf + f, V^{-1}\varphi) = 0 \qquad (f \in D(S)).$$

Таким образом,

$$V^{-1}\varphi \subset \mathfrak{N}_{-1}, \quad \text{т.е.} \quad V^{-1}\mathfrak{N}_z \subset \mathfrak{N}_{-1}.$$

Меняя ролями -1 и z, V^{-1} и V, мы также докажем, что

$$V\mathfrak{N}_{-1} \subset \mathfrak{N}_z.$$

Следовательно,

$$V\mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{N}_z; \qquad V^{-1}\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_{-1},$$

т.е. оператор V устанавливает линейное одно-однозначное непрерывное соответствие между замкнутыми подпространствами $\mathfrak{N}_{-1}$ и $\mathfrak{N}_z$ и, следовательно,

$$\dim \mathfrak{N}_z = \dim \mathfrak{N}_{-1}.$$

Итак, положительный эрмитов оператор S всегда имеет индекс дефекта (n, n), где $n = \dim \mathfrak{N}_{-1}$.

3. Среди самосопряженных расширений $\widetilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$ мы выделим два "крайних" самосопряженных расширения:

$$S_\mu = (I - A_\mu)(I + A_\mu)^{-1} \quad \text{и} \quad S_M = (I - A_M)(I + A_M)^{-1},$$

где A_μ и A_M — соответственно минимальное и максимальное самосопряженное расширение с нормой ≤ 1 оператора

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}.$$

Расширение S_μ мы будем называть *жестким расширением*, а S_M — *мягким расширением* оператора S.

Если $S_\mu = S_M$, то в этом случае и только в этом случае S имеет единственное положительное самосопряженное расширение.

Путем простых преобразований из теоремы 4 получается

Теорема 8. *Пусть $S(\overline{D(S)} = \mathfrak{H})$ — некоторый положительный эрмитов оператор, $\mathfrak{N}_{-a}$ (a — произвольное положительное число) — множество всех решений φ уравнения*

$$S^*\varphi + a\varphi = 0,$$

а $\widetilde{S}$ — некоторый оператор из $\mathfrak{P}(S)$, имеющий спектральное разложение

$$\widetilde{S}f = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda) f \qquad (f \in D(\widetilde{S})). \tag{3.7}$$

Тогда для выполнения равенства $\widetilde{S} = S_\mu$ $(\widetilde{S} = S_M)$ необходимо *и достаточно, чтобы при любом* $\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}$

$$\int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty,$$

и соответственно (3.8)

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty.$$

Следовательно, оператор $\widetilde{S}$ *будет единственным положительным самосопряженным расширением оператора* S *тогда и только тогда, когда*

$$\int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)\varphi|^2 = \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}).$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предположить, что $a = 1$, иначе мы заменили бы оператор S на оператор $S_1 = (1/a)S$, для которого $\mathfrak{N}_{-1}(S_1) = \mathfrak{N}_{-a}(S)$.

Но при $a = 1$ $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{-a}$ совпадает с ортогональным дополнением к $D(A)$. С другой стороны, согласно теореме 4, оператор

$$\widetilde{A} = (I - \widetilde{S})(I + \widetilde{S})^{-1}$$

будет совпадать с A_μ, если

$$J(\varphi; A) = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}), \tag{3.9}$$

и с A_M, если

$$J(\varphi; -A) = 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}). \tag{3.9$'$}$$

А так как в силу разложения (3.7)

$$\widetilde{A}f = \int_0^\infty \frac{1-\lambda}{1+\lambda} dE(\lambda)f = \int_{-1}^1 \mu dF(\mu)f \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

где

$$F(\mu) = (I - F(\lambda)) \qquad \left(\mu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad 0 \le \lambda < \infty\right),$$

то

$$J(\varphi, \pm A) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\,|\,F(\mu)\,\varphi|^2}{1 \pm \mu} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} (1 + \lambda^{\pm 1})\, d\,|\,E(\lambda)\varphi|^2 = \frac{1}{2}\,|\varphi|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty} \lambda^{\pm 1}\, d\,|E(\lambda)\varphi|^2.$$

Таким образом, условия (3.9) и (3.9′) эквивалентны соответствующим условиям (3.8).

Теорема доказана.

4. Теорема 6 позволяет дать совсем простой критерий существования у S единственного положительного самосопряженного расширения.

Теорема 9. *Для того чтобы положительный оператор S ($\overline{D(S)} = \mathfrak{H}$, $S \neq S^*$) имел только одно положительное самосопряженное расширение $\widetilde{S}$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}$ (a — правильно выбранное положительное число):*

$$\inf_{f \in D(S)} \frac{(Sf, f)}{|(f, \varphi)|^2} = 0. \tag{3.10}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что a выбрано равным 1.

Теорема 9 будет доказана, если мы покажем, что при $A = (I - S)(I + S)^{-1}$ условие (3.10) эквивалентно условию (2.21) теоремы 6. Но если $S^*\varphi + \varphi = 0$, то $\varphi \perp f + Sf$ при $f \in D(S)$, а следовательно,

$$(SF, \varphi) = -(f, \varphi), (f, \varphi) = -\frac{1}{2}(Sf - f, \varphi) = -\frac{1}{2}(Ag, \varphi)$$

$$\text{при} \qquad g = f + Sf.$$

С другой стороны, при $g = f + Sf$ ($Ag = f - Sf$)

$$4(Sf, f) = |g|^2 - |Ag|^2.$$

Припоминая еще, что если f пробегает $D(S)$, то $g = f + Sf$ пробегает $D(A)$, находим

$$\sup_{f\in D(S)} \frac{|(f,\varphi)|^2}{(Sf,f)} = \sup_{f\in D(A)} \frac{|(Ag,\varphi)|^2}{|g|^2 - |Ag|^2} \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_{-a}).$$

Теорема доказана.

5. В силу теоремы 9, если для оператора $S(\overline{D(S)} = \mathfrak{H}, S \neq S^*)$ величина

$$m(S) = \inf_{f\in D(S)} \frac{(Sf,f)}{(f,f)}$$

положительна, то $S_\mu \neq S_M$. В самом деле,

$$\sup_{f\in D(S)} \frac{|(f,\varphi)|^2}{(Sf,f)} \leq |\varphi|^2 \sup_{f\in D(S)} \frac{(f,f)}{(Sf,f)} = \frac{|\varphi|^2}{m(S)}.$$

Таким образом, условие $m(S) = 0$ является необходимым условием того, чтобы существовало единственное самосопряженное положительное расширение у оператора S.

Однако это условие не является достаточным, даже в том случае, когда оператор S — простой[†]. Это легко обнаружить, используя примеры операторов A, рассмотренные в конце §4, но мы проделаем это независимо.

Пусть H — некоторый неограниченный положительный самосопряженный оператор, имеющий простой непрерывный спектр, в состав которого входит точка 0, и пусть

$$Hf = \int_0^\infty \lambda dE(\lambda) f \qquad (f \in D(H))$$

— его спектральное разложение.

[†]Для непростого эрмитова оператора S утверждение тривиально (см. [12]). Эрмитов оператор $S (= S^*)$ называется простым, если $\mathfrak{H}$ не содержит подпространства $\mathfrak{L}$, приводящего S и в котором S — самосопряженный оператор.

Выберем в качестве φ ($\| \varphi \| = 1$) вектор, для которого линейная замкнутая оболочка множества $E(\lambda)\varphi$ $(0 \le \lambda < \infty)$ совпадает с $\mathfrak{H}$ и

$$\int_0^\infty \lambda d|E(\lambda)\varphi|^2 = \infty; \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} d|E(\lambda)\varphi|^2 < \infty. \tag{3.11}$$

Обозначим через $D(S)$ множество тех $f \in D(H)$, для которых

$$(f + Hf, \varphi) = 0, \tag{3.12}$$

и положим

$$Sf = Hf \quad \text{для} \quad f \in D(S).$$

В силу первого из условий (3.11), $\varphi \in D(H)$; отсюда легко получить, что $D(S)$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Действительно, допуская противное, т.е. что существует элемент $h \in \mathfrak{H}$ $(h \neq 0)$ такой, что

$$(f, h) = 0 \quad \text{при} \quad f \in D(S),$$

мы, полагая

$$\psi = (H + I)^{-1}h, \qquad h = H\psi + \psi,$$

получаем

$$(f, H\psi + \psi) = (Hf + f, \psi) = 0$$

при любом f, удовлетворяющем условию (3.12). Так как при f, пробегающем $D(H)$, вектор $f + Hf$ пробегает все $\mathfrak{H}$, то отсюда следует, что $\psi = c\psi (c \neq 0)$. Но $\psi \in D(H + I) = D(H)$, а следовательно, и $\varphi \in D(H)$. Мы пришли к противоречию.

Предлагая читателю проверить, что S — простой оператор, покажем, что $m(S) = 0$.

Так как точка 0 входит в непрерывный спектр оператора H, то при любом $\varepsilon > 0$ найдутся два линейно независимых вектора f_k $(k = 1, 2)$ такие, что

$$E(\lambda)f_k = f_k \quad \text{при} \quad \lambda > \varepsilon \quad (k = 1, 2). \tag{3.13}$$

Тогда при некотором α вектор

$$f = \cos\alpha f_1 + \sin\alpha f_2$$

будет удовлетворять условию (3.12), т.е. $f \in D(S)$ и, в силу (3.13), мы будем иметь

$$(Sf, f) = (Hf, f) = \int_0^\varepsilon \lambda d(E(\lambda)f, f) \le \varepsilon(f, f),$$

откуда $m(S) = 0$. С другой стороны, в силу соотношений (3.11), оператор S имеет бесконечно много различных положительных самосопряженных расширений.

§ 4. Об экстремальных свойствах самосопряженных расширений $\widetilde{S}_\mu$ и $\widetilde{S}_M$

1. Пусть $T(\overline{D(T)} = \mathfrak{H})$ — некоторый замкнутый эрмитов оператор, полуограниченный снизу, т.е.

$$m(T) = \inf_{f \in D(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

Вместе с K. Friedrichs'ом [2] введем в рассмотрение множество $D[T] \subset \mathfrak{H}$, определяемое следующим образом.

Элемент $f \in D[T]$ тогда и только тогда, если существует последовательность $\{f_n\} \subset D(T)$ такая, что

$$1) \qquad f_n \to f \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

$$2) \qquad (T(f_m - f_n),\ f_m - f_n) \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty. \tag{4.1}$$

Очевидно, что

$$D(T) \subset D[T].$$

Из последующих рассуждений будет следовать, что в случае неограниченного оператора T (а только этот случай и будет нас интересовать) $D(T)$ всегда составляет правильную часть $D[T]$. Ясно также, что

$$D[T] = D[T + aI] \quad (-\infty < a < \infty).$$

Если для элемента $f \in D[T]$ и последовательности $f_n \subset D(T)$ имеют место соотношения 1) и 2), то условимся говорить, что последовательность $\{f_n\}$ T — сходится к элементу f и писать

$$f_n \xrightarrow{T} f. \tag{4.2}$$

Очевидно, что если имеет место (4.2), то справедливо и соотношение

$$f_n \xrightarrow{T+aI} f$$

при любом вещественном a.

Лемма 1 (K. Friedrichs). *Если $g, f \in D[T]$, а $\{g_n\}$ и $\{f_n\}$ — какие-либо последовательности из $D(T)$, T-сходящиеся соответственно к g и f, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} (Tg_n, f_n), \tag{4.3}$$

и этот предел вполне определяется элементами g и f.

Доказательство. Для доказательства этого предложения, очевидно, достаточно установить его справедливость для какого-либо оператора $T' = aI + T$. Поэтому без ограничений общности мы можем предположить, что T — положительный оператор: $T > 0$.

Пусть $\widetilde{T}$ — какое-либо положительное самосопряженное расширение оператора T $(\widetilde{T} \in \mathfrak{P}(T))$ и

$$\widetilde{T}f = \int\limits_0^\infty \lambda dE(\lambda)f \tag{4.4}$$

— его спектральное представление. Введем в рассмотрение еще самосопряженный оператор $\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}$

$$\widetilde{T}^{\frac{1}{2}} = \int\limits_0^\infty \lambda^{\frac{1}{2}} dE(\lambda)f \qquad (f \in D(T^{\frac{1}{2}})),$$

где $D(\widetilde{T}^{\frac{1}{2}})$ — множество тех $f \in \mathfrak{H}$, для которых

$$\int\limits_0^\infty \lambda d|E(\lambda)f|^2 < \infty. \tag{4.5}$$

Очевидно,

$$D(\widetilde{T}) \subset D(\widetilde{T}^{\frac{1}{2}})$$

и

$$(\widetilde{T}g, f) = (\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}g, T^{\frac{1}{2}}f) \qquad (g, f \in D(\widetilde{T})).$$

Поэтому, если некоторая последовательность $\{f_n\} \subset D(T)$ удовлетворяет условию 2), то это равносильно тому, что

$$|\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f_m - \widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f_n| \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty,$$

если же, кроме того, выполняется условие 1), то в силу замкнутости оператора

$$f \in D(\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}); \qquad \widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f_n \to \widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f.$$

Итак, если

$$g_n \xrightarrow{T} g, \qquad f_n \xrightarrow{T} f,$$

то $g, f \in D(T^{\frac{1}{2}})$ и последовательности $\{\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}g_n\}$ и $\{\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f_n\}$ сходятся соответственно к $\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}g$ и $\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f$; но тогда

$$\lim_{n\to\infty}(Tg_n, f_n) = \lim_{n\to\infty}(\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}g_n, T^{\frac{1}{2}}f_n) = (\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}g, \widetilde{T}^{\frac{1}{2}}f).$$

Лемма доказана.

Предел (4.3) мы будем обозначать через $T[g, f]$.

Таким образом, $T[g, f]$ — билинейный эрмитов функционал, определенный для всех $g, f \in D(T)$.

Попутно мы доказали следующую лемму:

Лемма 2. *Если* $T > 0; \widetilde{T} \in \mathfrak{P}\ (T)$, *то*

$$D[T] \subset D(\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}) \tag{4.6}$$

и

$$T[g, f] = (\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}g, T^{\frac{1}{2}}f) \quad (g, f \in D[T]). \tag{4.7}$$

Лемма 3. *Если положить*

$$(g, f)_T = (g, f) + T[g, f], \qquad |g|_T = \sqrt{(g, g)_T} \qquad (g, f \in D[T]),$$

то $D[T]$ будет полным гильбертовым пространством (по отношению к скалярному произведению $(g, f)_T$, а $D(T)$ — его всюду плотным подмножеством.

Для установления леммы достаточно заметить, что если $\{f_n\} \subset \subset D(T)$ и $f \in D[T]$, то утверждение

$$f_n \xrightarrow{T} f$$

равносильно утверждению

$$|f_n - f|_T \to 0.$$

Без труда устанавливается также

Лемма 4. *Если T — положительный самосопряженный оператор, то*

$$D[T] = D(\widetilde{T}^{\frac{1}{2}}) \tag{4.8}$$

и

$$T[g, f] = (T^{\frac{1}{2}}g, T^{\frac{1}{2}}f) \qquad (g, f \in D[T]). \tag{4.9}$$

Доказательство. Так как при условиях леммы 4 $T = \widetilde{T}$, то равенство (4.9) есть следствие (4.7), а для доказательства (4.8), в силу соотношения (4.6), остается только установить, что

$$D(T^{\frac{1}{2}}) \subset D[T]. \tag{4.10}$$

Пусть $f \in D[T^{\frac{1}{2}}]$; следовательно, если предположить, что (4.4) есть спектральное разложение для $T = \widetilde{T}$, то будет иметь место соотношение (4.5).

Положим

$$f_n = \int_0^n dE(\lambda)f = E(n)f \qquad (n = 1, 2, ...);$$

тогда

$$f_n \subset D(T) \qquad (n = 1, 2, ...) \text{ и } f_n \to f,$$

и, кроме того,

$$(T(f_{n+p} - f_p), f_{n+p} - f_p) = \int_n^{n+p} \lambda d|E(\lambda)f|^2 \to 0$$

$$\text{при} \quad n \to \infty, \quad p > 0,$$

т.е. $f \in D[T]$.

Соотношение (4.10), а вместе с ним и лемма 4 доказаны.

2. Так же, как и в предыдущем параграфе, всюду в дальнейшем S — замкнутый, положительный эрмитов оператор, для которого

$$\overline{D(S)} = \mathfrak{H}, \quad S^* \neq S.$$

После доказанных лемм без труда устанавливается следующая характеристика жесткого расширения S_μ оператора S.

Теорема 10. *Среди всевозможных самосопряженных полуограниченных снизу расширений оператора S существует только одно расширение $\widetilde{S}$, для которого $D(\widetilde{S}) \subset D[S]$. Этим расширением является оператор S_μ и для него*

$$D[S_\mu] = D[S]. \tag{4.11}$$

Доказательство. Рассмотрим сперва расширение $\widetilde{S} \in \mathfrak{P}\,(S)$, получаемое по формуле

$$\widetilde{S} = (I - \widetilde{A})(I + \widetilde{A})^{-1},$$

где

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}.$$

Если для какого-либо такого расширения

$$D(\widetilde{S}) \subset D[S], \tag{4.12}$$

то, по лемме 3, множество $D(S)$ будет $\widetilde{S}$-плотно (т.е. плотно по норме $|f|_{\widetilde{S}}$ в множестве $D(\widetilde{S})$.

С другой стороны, если $f \in D(\widetilde{S})$, то

$$f = g + Ag \quad \text{при} \quad g = f + \widetilde{S}f$$

и, следовательно,

$$(f, f) + (\widetilde{S}f, f) = (g, g) + (Ag, g), \quad \text{т.е.} \quad |f|_{\widetilde{S}} = |g|_{\widetilde{A}}.$$

А поэтому, если множество $D(S)$ $\widetilde{S}$-плотно в $D(\widetilde{S})$, то множество $D(A) = (I+S)\ D(S)$ плотно по норме $|g|_{\widetilde{A}}$ в $D(\widetilde{A}) = (I+\widetilde{S})\ D(S) = \mathfrak{H}$. Но тогда по теореме 4 $\widetilde{A} = A_\mu$ и, следовательно, $\widetilde{S} = S_\mu$.

Обратно, если $\widetilde{S} = S_\mu$ (т.е. $\widetilde{A} = A_\mu$), то по теореме 4 множество $D(A)$ плотно по норме $|g|_{\widetilde{A}}$ в $\mathfrak{H}$, а следовательно, множество $D(S)$ $\widetilde{S}$-плотно в $D(S)$. А так как по лемме 3 $D(S)$ есть $\widetilde{S}$-замыкание множества $D(S)$, то $D(\widetilde{S}) \subset D([S])$ и $\widetilde{S}$ — замыкание множества $D(\widetilde{S})$ дает $D[S]$. С другой стороны, по той же лемме 3, это замыкание совпадает с $D[\widetilde{S}]$. Отсюда

$$D[S] = D[\widetilde{S}] \quad (S = S_\mu).$$

Соотношение (4.11) доказано.

Нам осталось показать, что из (4.11) следует равенство $\widetilde{S} = S_\mu$ не только в том случае, когда $\widetilde{S} \in \mathfrak{P}(S)$, а также и в более общем случае, когда $\widetilde{S}$ — произвольное полуограниченное снизу самосопряженное расширение оператора S.

В этом последнем случае подбираем $a > 0$ так, чтобы $\widetilde{S} + aI > 0$; тогда из (4.12) найдем

$$D(\widetilde{S} + aI) = D(\widetilde{S}) \subset D[S] = D[S + aI],$$

а следовательно, согласно уже доказанному,

$$\widetilde{S} + aI = (S + aI)_\mu.$$

Так как, в частности, соотношение (4.12) имеет место при $\widetilde{S} = S_\mu$, то также

$$\dot{S}_\mu + aI = (S + aI)_\mu,$$

откуда $S = S_\mu$.

Теорема доказана.

3. Теорема 10 позволяет естественным образом расширить понятие о жестком расширении эрмитова оператора T на тот случай, когда оператор T полуограничен снизу.

Самосопряженное полуограниченное снизу расширение T' полуограниченного оператора $T(\overline{D(T)} = \mathfrak{H})$ называется *жестким расширением оператора* T, если

$$D(T') \subset D[T]. \tag{4.13}$$

Так как при любом a $(-\infty < a < \infty)$

$$D(T') = D(T' + aI), \qquad D[T] = D[T + aI],$$

то соотношение (4.13) равносильно тому, что

$$D(T' + aI) \subset D[T + aI]. \tag{4.14}$$

Если теперь a выбрать так, чтобы оба оператора $T + aI$ и $T' + aI$ были положительны, то, по теореме 10, из (4.14) будет следовать, что

$$T' + aI = (T + aI)_\mu. \tag{4.15}$$

Обратно, если $T + aI > 0$, то оператор T', определяемый из равенства (4.15), будет жестким расширением оператора T.

Таким образом, жесткое расширение для полуограниченного оператора T всегда существует и единственно. Его мы будем обозначать через T_μ. В силу единственности расширения T_μ из (4.14), где $T' = T_\mu$, заключаем:

$$(T + aI)_\mu = T_\mu + aI \qquad (-\infty < a < \infty). \tag{4.16}$$

Согласно этому соотношению, если $T + aI > 0$, то и $T_\mu + aI > 0$, отсюда

$$m(\widetilde{T}) = m(T). \tag{4.17}$$

Очевидно также, что для любого иного полуограниченного расширения $\widetilde{T}$ оператора T

$$m(\widetilde{T}) \leq m(T).$$

4. Для дальнейшего нам понадобятся следующие 2 леммы:

Лемма 5. *Пусть H_1 и H_2 — два положительных ограниченных самосопряженных оператора и пусть $H_1 \leq H_2$, т.е.*

$$(H_1 f, f) \leq (H_2 f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{4.18}$$

Тогда

$$\mathfrak{R}\left(H_1^{\frac{1}{2}}\right) \subset \mathfrak{R}\left(H_2^{\frac{1}{2}}\right). \tag{4.19}$$

Если, кроме того, 0 не есть собственное число оператора H_1, то неравенство (4.18) эквивалентно неравенству:

$$|H_2^{-\frac{1}{2}} f|^2 \leq |H_1^{-\frac{1}{2}} f|^2 \qquad (f \in D(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}(H_1^{-\frac{1}{2}})). \tag{4.20}$$

Доказательство. Предположим сперва, что

$$H_2 f \neq 0 \quad \text{при} \quad f \neq 0. \tag{4.21}$$

Неравенство (4.18) эквивалентно неравенству

$$|H_1^{\frac{1}{2}} f| \leq |H_2^{\frac{1}{2}} f| \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{4.22}$$

Определим на $\mathfrak{N}(H_1^{\frac{1}{2}})$ оператор B равенством

$$BH_2^{\frac{1}{2}} f = H_1^{\frac{1}{2}} f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

В силу (4.22), $|Bf| \leq |f|$; в силу (4.21), множество $\mathfrak{N}(H_2^{\frac{1}{2}})$ плотно в $\mathfrak{H}$, следовательно, непрерывный оператор B однозначно расширяется на все $\mathfrak{H}$. Переходя в равенстве

$$H_1^{\frac{1}{2}} = BH_2^{\frac{1}{2}} \tag{4.23}$$

к сопряженным операторам, получаем

$$H_1^{\frac{1}{2}} = H_2^{\frac{1}{2}} B^*, \tag{4.24}$$

откуда

$$\mathfrak{N}(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}(H_2^{\frac{1}{2}} B^*) \subset \mathfrak{N}(H_2^{\frac{1}{2}}).$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда условие (4.21) не выполняется. В этом случае мы можем разложить $\mathfrak{H}$ в ортогональную сумму $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{L}$ — множество нулей оператора H_2. Но если $H_2\mathfrak{L} = 0$, то, в силу (4.18), и $H_1\mathfrak{L} = 0$. Из $H_k\mathfrak{L} = 0 \quad (k = 1,2)$ вытекает, что $\mathfrak{N}(H_k) \in \mathfrak{H}_1$ $(k = 1,2)$, и для доказательства нашей леммы нам достаточно рассмотреть операторы H_1 и H_2 в $\mathfrak{H}_1$ — но тогда мы придем к рассмотренному уже случаю.

Если теперь 0 не есть собственное число оператора H_1, то то же будет и для H_2; тогда существуют самосопряженные операторы H_1^{-1}, H_2^{-1}, а значит, и операторы $H_1^{-\frac{1}{2}}, H_2^{-\frac{1}{2}}$, причем

$$D(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{R}(H_1^{-\frac{1}{2}}).$$

Из равенства (4.24) легко находим

$$H_2^{-\frac{1}{2}} f = B^* H_1^{-\frac{1}{2}} f \qquad (f \in D(H_1^{-\frac{1}{2}})),$$

а так как

$$\| B^* \| = \| B \| \leq 1, \tag{4.25}$$

т.е.

$$\| B^* g \| \leq |g| \quad (g \in \mathfrak{H}),$$

то

$$|H_2^{-\frac{1}{2}} f|^2 = |B^* H_1^{-\frac{1}{2}} f|^2 \leq |H_1^{-\frac{1}{2}} f|^2 \qquad (f \in D(H_1^{-\frac{1}{2}})).$$

Обратно, если имеет место неравенство (4.20), то, полагая

$$B^* H_1^{-\frac{1}{2}} f = H_2^{-\frac{1}{2}} f \qquad (f \in D(H_1^{-\frac{1}{2}})), \tag{4.26}$$

мы определим на всем $\mathfrak{H}$ (ибо $\mathfrak{R}(H_1^{-\frac{1}{2}}) = D(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{H}$) линейный ограниченный оператор B^* с нормой ≤ 1.

Подставляя в равенство (4.26) $f = H_1^{\frac{1}{2}} g \quad (g \in \mathfrak{H})$ и применяя к обеим частям $H_2^{\frac{1}{2}}$, получаем (4.24), а следовательно, и (4.23), где B — сопряженный к B^* оператор. Соотношение (4.23), если учесть (4.25), влечет неравенство

$$(H_1 f, f) = |H_1^{\frac{1}{2}} f|^2 = |B H_2^{\frac{1}{2}} f|^2 = (H_2 f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Лемма доказана.

Замечание 4.1. Стоит отметить следующее следствие леммы 5: если $H_1 \leq H_2$ и $m(H_1) > 0$, то $H_2^{-1} \leq H_1^{-1}$.

Действительно, если $m(H_1) > 0$, то $H_k^{-1}, H_k^{-\frac{1}{2}}$ $(k = 1, 2)$ — ограниченные операторы, и

$$|H_k^{-\frac{1}{2}} f|^2 = (H_k^{-1} f, f) \qquad (f \in \mathfrak{H}, \;\; k = 1, 2),$$

а поэтому неравенство (4.20) означает, что $H_2^{-1} \leq H_1^{-1}$.

Лемма 6. *Пусть S_1 и S_2 — положительные самосопряженные операторы, a — произвольно выбранное положительное число. Тогда для того чтобы*

$$(S_1 + aI)^{-1} \leq (S_2 + aI)^{-1}, \tag{4.27}$$

необходимо и достаточно выполнения двух следующих условий:

1) $D[S_1] \subset D[S_2]$;

2) $S_1[f,f] \geq S_2[f,f]$ *при* $f \in D[S_1]$.

Доказательство. Операторы

$$H_k = (S_k + aI)^{-1} \qquad (k = 1,2)$$

суть ограниченные положительные самосопряженные операторы ($0 < H_k \leq a^{-1}I$; $k = 1,2$). Поэтому, если имеет место неравенство (4.27), т.е. $H_1 \leq H_2$, то, согласно лемме 5,

$$\mathfrak{N}(H_1^{\frac{1}{2}}) \subset \mathfrak{N}(H_2^{\frac{1}{2}}), \qquad |H_2^{-\frac{1}{2}} f| \leq |H_1^{-\frac{1}{2}} f|$$

$$(f \in D(H_1^{-\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}\,(H_1^{\frac{1}{2}})), \tag{4.28}$$

а так как

$$\mathfrak{N}(H_k^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}((S_k + aI)^{-\frac{1}{2}}) = D((S_k + aI)^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= D[S_k + a] = D[S_k], \qquad k = 1,2$$

и

$$|H_k^{-\frac{1}{2}} f|^2 = |(S_k + aI)^{\frac{1}{2}} f|^2 = S_k[f,f] + a|f|^2$$

$$(f \in D[S_k], \qquad k = 1,2),$$

то мы приходим к условиям 1) и 2).

Обратно, если условия 1) и 2) выполняются, то имеют место соотношения (4.28), а они, согласно лемме 5, эквивалентны неравенству $H_1 < H_2$, или, что то же, (4.27).

Лемма доказана.

Замечание 4.2. Легко видеть, что если заменить в лемме 5 условие $a > 0$ условием $a > -m(S_k)$ $(k = 1,2)$, то лемма сохранит силу.

Теорема 11. *Пусть* $S(\overline{D(S)} = \mathfrak{H},\quad S \neq S^*)$ *— положительный эрмитов оператор, а* $\widetilde{S}$ *— его положительное самосопряженное расширение; тогда при любом* $a > 0$

$$(S_\mu + aI)^{-1} \leq (\widetilde{S} + aI)^{-1} \leq (S_M + aI)^{-1}, \tag{4.29}$$

а следовательно,

$$D[S_\mu] \subset D[\widetilde{S}] \subset D[S_M]$$

и

$$S_M[f, f] \leq \widetilde{S}[f, f] \qquad (f \in D[S]).$$

Мы не выписываем соответствующего неравенства для S_μ *и* $\widetilde{S}$*, так как, согласно леммам 2 и 4,*

$$S[f, f] = S_\mu[f, f] = \widetilde{S}[f, f] \qquad (f \in D[S_\mu]).$$

Доказательство. Как мы знаем, операторам $S_\mu, \widetilde{S}, S_M$ соответствуют операторы $A_\mu, \widetilde{A}, A_M$, связанные неравенством

$$A_\mu \leq \widetilde{A} \leq A_M. \tag{4.30}$$

А так как

$$\widetilde{A} = (I - \widetilde{S})(I + \widetilde{S})^{-1} = 2(I + \widetilde{S})^{-1} - I$$

и аналогичные равенства имеют место для A_μ и A_M, то (4.30) дает неравенство (4.29) при $a = 1$. Но тогда, согласно лемме 5, будет иметь место (4.30), что, в свою очередь, влечет (4.29) при любом $a > 0$.

Теорема доказана.

Заметим, что после того как доказана справедливость неравенства (4.29) при $a = 1$, справедливость его при любом $a > 1$ получается без труда с помощью предложения, сформулированного в замечании 4.1.

5. Существование первого из неравенств (4.29) можно утверждать при более общих предположениях относительно $\widetilde{S}$.

Пусть $\widetilde{S}$ — какое-либо полуограниченное снизу расширение оператора S (который тоже можно предположить полуограниченным снизу). Тогда

$$(S_\mu + aI)^{-1} \le (\widetilde{S} + aI)^{-1} \quad \text{при} \quad a > -m(\widetilde{S}). \tag{4.31}$$

Для того чтобы в этом убедиться, достаточно выписать первое из неравенств (4.29) в применении к операторам

$$S_\mu - m(S)I, \qquad \widetilde{S} - m(S)I,$$

представляющим собой первый — жесткое, а второй — какое-либо самосопряженное положительное расширение оператора S.

§ 5. Случай, когда $m(S) > 0$

1. В этом случае неравенство (4.31) справедливо, в частности, при $a = 0$, т.е.

$$S_\mu^{-1} \le \widetilde{S}^{-1}.$$

Покажем, что, более того, справедливо следующее утверждение:

Теорема 12. *Если $m(\widetilde{S}) > 0$, то*

$$S_\mu^{-1} = \widetilde{S}^{-1} - (\widetilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0}, \tag{5.1}$$

где $\mathfrak{N}_0$ — множество всех решений φ уравнения

$$S^*\varphi = 0. \tag{5.2}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предположить, что $m(\widetilde{S}) > 1$, а следовательно, и $m(S) > 1$.

Положим

$$S_1 = S - I, \qquad \widetilde{S}_1 = \widetilde{S} - I,$$

тогда

$$S_{1\mu} = S_\mu - I.$$

Положим, далее,

$$A = (I - S_1)(I + S_1)^{-1},$$

тогда операторы

$$\begin{cases} A_\mu = (I - S_{1\mu})(I + S_{1\mu})^{-1} = 2S_\mu^{-1} - I, \\ \widetilde{A} = (I - \widetilde{S}_1)(I + \widetilde{S}_1)^{-1} = 2\widetilde{S}^{-1} - I \end{cases} \tag{5.3}$$

будут представлять собой первый — минимальное, второй — некоторое ограниченное ($\| A \| \leq 1$) самосопряженное расширение оператора A.

Согласно формуле (2.13),

$$A_\mu = \widetilde{A} - (I + \widetilde{A})_{\mathfrak{N}_0}, \tag{5.4}$$

где $\mathfrak{N}_0$ — множество всех векторов, ортогональных к

$$D(A) = (I + S_1)D(S) = SD(S),$$

или, что то же самое, множество всех решений уравнения (5.2).

В силу (5.3), равенство (5.4) эквивалентно тому, что

$$2S_\mu^{-1} - I = 2\widetilde{S}^{-1} - I - (2\widetilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0},$$

а это, в свою очередь, эквивалентно соотношению (5.1).

Теорема доказана.

Напомним, что, согласно (1.8), соотношение (5.1) можно записать еще в следующем виде:

$$S_\mu^{-1} f = \widetilde{S}^{-1} f - \sum_{\nu \in N} (f, \varphi_\nu)\varphi_\nu \qquad (f \in \mathfrak{H}), \tag{5.5}$$

при этом система векторов $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in N}$ получается следующим образом.

Множество

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N} \cap D(\widetilde{S}^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N} \cap D[S] \tag{5.6}$$

превращаем в гильбертово пространство, полагая скалярное произведение двух элементов $g, f \in \mathfrak{L}$ равным:

$$\widetilde{S}[g, f] = (\widetilde{S}^{\frac{1}{2}} g, \widetilde{S}^{\frac{1}{2}} f). \tag{5.7}$$

Тогда в качестве системы $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in N}$ можно взять произвольную полную ортонормированную систему в $\mathfrak{L}$, так что

$$\widetilde{S}[\varphi_\nu, \varphi_\mu] = \delta_{\nu\mu} \quad (\mu, \nu \in N). \tag{5.8}$$

Напомним, что ряд, фигурирующий в правой части соотношения (5.5), содержит не более счетного числа членов, отличных от нуля, и сходится сильно; более того, для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}\left[f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_{\nu_k})\varphi_{\nu_k},\ \ f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_{\nu_k})\varphi_{\nu_k}\right] = 0,$$

где $\{\nu_k\}_1^\infty$ — последовательность значений $\nu \in N$, для которых $(f, \varphi_\nu) \neq 0$.

2. В рассматриваемом случае $(m(S) > 0)$ оператор S_M обладает очень простой характеристикой.

Теорема 13. *Если $m(S) > 0$, то $\mathfrak{N}_0 \subset D(S_M)$ и $S_M\varphi = 0$ $(\varphi \in \mathfrak{N}_0)$. Никакое другое самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S этим свойством не обладает.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{S}$ — какой-либо оператор из $\mathfrak{P}(S)$, для которого $m(\widetilde{S}) = m(S) > 0$. При таком выборе $\widetilde{S}$ оператор

$$\widetilde{A} = (I - \widetilde{S})(I + \widetilde{S})^{-1} \in \mathfrak{H}(A) \quad (A = (I - S)(I + S)^{-1})$$

не будет иметь точки 1 в своем спектре и, следовательно, самосопряженный оператор $(I - \widetilde{S})^{-1}$ ограничен. Но тогда, согласно предложению γ), § 1

$$(I - \widetilde{A})\varphi = (I - \widetilde{A})_{\mathfrak{N}^{-1}}\varphi \quad (\varphi \in (I - \widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}), \tag{5.9}$$

где $\mathfrak{N}_{-1}$ — множество всех векторов ψ, ортогональных к

$$D(A) = (I + S)D(S). \tag{5.10}$$

С другой стороны, как мы знаем (см. (2.13)),

$$A_M = \widetilde{A} + (I - \widetilde{A})_{\mathfrak{N}^{-1}}$$

и, следовательно, в силу равенства (5.9),

$$A_M\varphi = \varphi \qquad (\varphi \in (I - \widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}). \tag{5.11}$$

А так как

$$D(S_M) = (I + A_M)\mathfrak{H},$$

то, согласно (5.11),

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi + A_M\varphi) \in D(S_M) \qquad (\varphi \in (I - \widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}) \tag{5.12}$$

и, кроме того,

$$\begin{gathered} S_M\varphi = \frac{1}{2}S_M(\varphi + A_M\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi - A_M\varphi) = 0 \\ (\varphi \in (I - \widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}). \end{gathered} \tag{5.13}$$

Заметим теперь, что так как $\mathfrak{N}_{-1}$ есть ортогональное дополнение к $D(A)$, то $(I-\widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}$ будет ортогональным дополнением к $(I - \widetilde{A})D(A)$. С другой стороны, в силу соотношения (5.10),

$$(I - \widetilde{A})D(A) = (I - \widetilde{A})(I + S)D(S) = (I - \widetilde{A})(I + \widetilde{S})D(S) =$$

$$= \left[I + \widetilde{S} - \widetilde{A}(I + \widetilde{S})\right] D(S) = 2\widetilde{S}D(S) = SD(S),$$

откуда $(I-\widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1}$ есть ортогональное дополнение к $SD(S)$, т.е.

$$(I - \widetilde{A})^{-1}\mathfrak{N}_{-1} = \mathfrak{N}_0.$$

Это равенство в соединении с (5.12) и (5.13) доказывает первую часть теоремы 13.

Пусть теперь S_1 — какое-либо самосопряженное расширение оператора S, обладающее тем свойством, что

$$\mathfrak{N}_0 \subset D(S_1), \qquad S_1\varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0). \tag{5.14}$$

Докажем, что $S_1 = S_M$.

Для этого заметим, что всякий вектор $f \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде ортогональной суммы:

$$f = \varphi + g, \quad \text{где} \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0, \qquad g \in \mathfrak{M} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}_0,$$

при этом, если $f \in D(S_1)$, то, в силу (5.14), также $g \in D(S_1)$ и $S_1 f = S_1 g$.

Из (5.14) вытекает также, что

$$\mathfrak{N}(S_1) \perp \mathfrak{N}_0, \quad \text{т.е.} \quad \mathfrak{N}(S_1) \subset \mathfrak{M}. \tag{5.15}$$

Таким образом, $\mathfrak{M}$ приводит оператор S_1 и для области определения $D_0(S_1)$ оператора S_1 в $\mathfrak{M}$ имеем[†]

$$D_0(S_1) = P_{\mathfrak{M}} D(S_1) = D(S_1) \cap \mathfrak{M}.$$

С другой стороны, так как S_1 есть расширение S, то $\mathfrak{N}(S_1) \supset \supset \mathfrak{N}(S) = \mathfrak{M}$[††], а следовательно, при сопоставлении с (5.15) находим

$$S_1 D_0(S_1) = \mathfrak{N}(S_1) = \mathfrak{M}.$$

Полученное равенство показывает, что оператор S_1 имеет в $\mathfrak{M}$ обратный оператор $S_1^{(-1)}$, который к тому же ограничен.

Пусть теперь $\widetilde{S}$ — какое-либо самосопряженное расширение оператора S, такое, что $m(\widetilde{S}) > 0$.

Всякому вектору $g \in \mathfrak{M}$ отвечает вектор

$$f = S_1^{(-1)} g \in \mathfrak{M}, \tag{5.16}$$

для которого $S_1 f = g$. С другой стороны, так как $\mathfrak{N}(S) = \mathfrak{M}$, то g отвечает также некоторый вектор $f_1 \in D(S)$ такой, что

$$\widetilde{S} f_1 = S f_1 = S_1 f_1 = g \quad (= S_1 f),$$

откуда

$$f_1 = \widetilde{S}^{-1} g, \quad S^*(f_1 - f) = S_1(f_1 - f) = 0$$

и, значит,

$$f_1 = f + \varphi \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0),$$

[†] $P_{\mathfrak{M}}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{M}$.

[††] Так как $\mathfrak{N}_0$ есть ортогональное дополнение к $\mathfrak{N}(S)$, то $\mathfrak{N}(S)$ плотно в $\mathfrak{M}$. С другой стороны, так как по условию $m(S) > 0$, то, как легко видеть, $\mathfrak{N}(S)$ замкнуто. Отсюда $\mathfrak{N}(S) = \mathfrak{M}$.

а так как $f \in \mathfrak{M}$, то

$$f = P_{\mathfrak{M}} f_1 = P_{\mathfrak{M}} \widetilde{S}^{-1} g.$$

Сопоставляя с равенством (5.16), мы видим, что

$$S_1^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}} \, \widetilde{S}^{-1} g \qquad (g \in \mathfrak{M}).$$

Таким образом, оператор $S_1^{(-1)}$ не зависит от выбора самосопряженного расширения S_1, обладающего свойством (5.14), а следовательно, свойство (5.14) однозначно определяет оператор S_1, откуда $S_1 = S_M$.

Теорема доказана.

Попутно мы доказали, что оператор S_M имеет в $\mathfrak{M}$ обратный ограниченный оператор $S_M^{(-1)}$ и

$$S_M^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}} \widetilde{S}^{-1} g \qquad (g \in \mathfrak{M}), \tag{5.17}$$

где $\widetilde{S}$ — произвольное самосопряженное расширение оператора S, подчиненное единственному условию: $m(\widetilde{S}) > 0$.

3. Теперь нетрудно также выяснить, что представляет собой множество $D[S_M]$.

Для этого заметим, что если $f \in D(S_M)$, то

$$h = S_M f \in \mathfrak{M}.$$

С другой стороны, в силу равенства $\mathfrak{N}(S) = \mathfrak{M}$, найдется такое $g \in D(S)$, что

$$S_M g = S g = h,$$

а следовательно,

$$S_M(f - g) = 0, \qquad \varphi = f - g \in \mathfrak{N}_0.$$

Таким образом, элемент $f \in D(S_M)$ всегда допускает представление:

$$f = g + \varphi \quad (g \in D(S), \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0). \tag{5.18}$$

Очевидно также, что и обратно, если некоторый элемент $f \in \in \mathfrak{H}$ допускает представление (5.18), то $f \in D(S_M)$.

Так как $\mathfrak{N}_0 \perp D(S)$, то в представлении (5.18)

$$\varphi \perp Sg = S_M g = S_M f$$

и, следовательно,

$$(S_M f, f) = (Sg, g). \tag{5.19}$$

Пусть теперь

$$f \in D[S], \quad \{f_n\} \subset D(S) \quad \text{и} \quad f_n \xrightarrow{S} f.$$

Последнее, как известно (см. п.4.1), означает, что

1) $f_n \to f$ при $n \to \infty$;

2) $(S_M(f_m - f_n), (f_m - f_n)) \to 0$ при $m, n \to \infty$.

Полагая, согласно (5.18),

$$f_n = g_n + \varphi_n \quad (g_n \in D(S), \quad \varphi_n \in \mathfrak{N}_0, \quad n = 1, 2, \ldots),$$

получаем, в силу равенств (5.19):

$$(S_M(f_m - f_n),\ f_m - f_n) = (S(g_m - g_n),\ g_m - g_n) \geq m(S)|g_m - g_n|^2$$

$$(m, n = 1, 2, \ldots),$$

а следовательно, условие 2) для последовательности $\{f_n\}$ влечет за собой существование элемента $g \in \mathfrak{H}$ такого, что

1′) $g_n \to g$ при $n \to \infty$,

и при этом

2′) $(S(g_m - g_n), g_m - g_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$.

Условия 1′), 2′) означают, что $g_n \xrightarrow{S} g$ и, таким образом, $g \in D[S]$.

С другой стороны, из 1) и 1′) вытекает, что

$$\varphi_n \to \varphi = f - g.$$

Так как $\mathfrak{N}_0$ — замкнутое множество, то $\varphi \in \mathfrak{N}_0$.

Таким образом,

$$f = g + \varphi \quad (g \in D[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0). \tag{5.20}$$

Так как

$$\mathfrak{N}_0 \subset D(S_M) \subset D[S_M], \quad D[S] \subset D[S_M],$$

то и обратно, если некоторый элемент $f \in \mathfrak{H}$ допускает представление (5.20), то $f \in D[S]$.

Итак, доказана

Теорема 14. *Если* $m(S) > 0$, *то*

$$D(S_M) = D(S) + \mathfrak{N}_0, \quad D[S_M] = D[S] + \mathfrak{N}_0 .$$

При формулировке этой теоремы мы пользуемся обозначением, согласно которому под символом $E_1 + E_2 + \cdots + E_p$, где $E_k \in \mathfrak{H}$ $(k = 1, 2, ..., p)$, понимается совокупность элементов g вида: $g = g_1 + g_2 + \cdots + g_k$, где $g_k \in E_k$ $(k = 1, 2, ..., p)$.

Лемма 7. *Если* $m(S) > 0$, *то*

$$D(S^*) = D(S_\mu) + \mathfrak{N}_0. \tag{5.21}$$

Доказательство. Пусть $f \in D(S^*)$ и $S^*f = h$, $g = S_\mu^{-1}h$. Тогда

$$g \in D(S_\mu) \quad \text{и} \quad S_\mu g = f.$$

С другой стороны, так как оператор S^* есть расширение оператора S_μ, то также

$$S^*g = h, \quad S^*(f - g) = 0$$

и, следовательно, $\varphi = f - g \in \mathfrak{N}_0$. Таким образом,

$$f = g + f \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0, \quad g \in D(S_\mu)),$$

т.е.

$$D(S^*) \subset D(S_\mu) + \mathfrak{N}_0.$$

С другой стороны, имеем

$$\mathfrak{N}_0 \subset D(S^*), \quad D(S_\mu) \subset D(S^*), \quad \mathfrak{N}_0 + D(S_\mu) \subset D(S^*),$$

откуда следует равенство (5.21).

Теорема 15. *Если $m(S) > 0$, то для всякого полуограниченного расширения $\widetilde{S}$ оператора S*

$$D[\widetilde{S}] = D[S] + \mathfrak{N}_0', \quad \text{где} \quad \mathfrak{N}_0' = \mathfrak{N}_0 \cap D[\widetilde{S}]. \tag{5.22}$$

Доказательство. Предположим сперва, что $m(\widetilde{S}) \geq 0$. Тогда, согласно теореме 11 и 14,

$$D[\widetilde{S}] \subset D[S_M] = D[S] + \mathfrak{N}_0 \tag{5.23}$$

и так как

$$D[S] \subset D[\widetilde{S}], \tag{5.24}$$

то мы приходим к соотношению (5.22).

Пусть теперь $m(S) < 0$. Выбирая тогда $a > -m(S)$, мы сможем применить неравенство (5.23) к операторам $S + aI$ и $\widetilde{S} + aI$ и тогда найдем

$$D[\widetilde{S}] = D[\widetilde{S} + aI] \subset D[S + aI] + \mathfrak{N}_a = D[S] + \mathfrak{N}_a, \tag{5.25}$$

где $\mathfrak{N}_a$ есть множество решений ψ уравнения

$$S^*\psi + a\psi = 0.$$

Так как $\mathfrak{N}_a \in D(S^*)$, то, согласно лемме 7 и теореме 10,

$$\mathfrak{N}_a \subset D(S_\mu) + \mathfrak{N}_0 \subset D[S] + \mathfrak{N}_0,$$

что в сочетании с соотношением (5.25) дает

$$D[\widetilde{S}] \subset D[S] + \mathfrak{N}_0.$$

Последнее же вместе с (5.25) влечет равенство (5.22).

Теорема доказана.

Лемма 8. *Если $\widetilde{S}$ — полуограниченное снизу расширение оператора $S(m(S) > 0)$ и*

$$g \in D[S], \qquad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap D[\widetilde{S}],$$

то $\widetilde{S}[g, \varphi] = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предположить, что

$$m(\widetilde{S}) > -1.$$

Тогда, согласно лемме 3, $D[S]$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(g, f)_S = (g, f) + S[g, f] \quad (g, f \in D[S]),$$

при этом $D(S)$ плотно в этом пространстве.

Следовательно, для элемента $g \in D[S] \subset D[\widetilde{S}]$ найдется последовательность $\{g_n\} \in D(S)$ такая, что

$$(g - g_n, g - g_n)_S \to 0, \qquad g_n \to g. \tag{5.26}$$

А так как, согласно лемме 4, при $\widetilde{T} = \widetilde{S} + I$

$$(g, f)_{\widetilde{S}} = \widetilde{T}[g, f] = (\widetilde{T}^{\frac{1}{2}} g, \widetilde{T}^{\frac{1}{2}} f),$$

то (5.26) означает, что

$$\widetilde{T}^{\frac{1}{2}} g_n \to \widetilde{T} g,$$

а следовательно,

$$\widetilde{S}[g, \varphi] + (g, \varphi) = \widetilde{T}[g, \varphi] = (\widetilde{T}^{\frac{1}{2}} g, T^{\frac{1}{2}} \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{T}^{\frac{1}{2}} g_n, \widetilde{T}^{\frac{1}{2}} \varphi). \tag{5.27}$$

С другой стороны, так как

$$\{g_n\} \subset D(S) = D(T) \subset D(\widetilde{T}),$$

то из равенства (5.27) вытекает далее, что

$$\widetilde{S}[g, \varphi] + (g, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (\widetilde{T} g_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty} (T g_n, \varphi) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [(S g_n, \varphi) + (g_n, \varphi)] = (g, \varphi),$$

ибо $\varphi \perp \mathfrak{N}(S)$.

Лемма доказана.

Теорема 16[†]. *Если $\widetilde{S}$ — полуограниченное расширение оператора $S(m(S) > 0)$, то для положительности $\widetilde{S}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\widetilde{S}[\varphi, \varphi] \geq 0 \qquad (\varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap D[S]). \tag{5.28}$$

Доказательство. Действительно, $\widetilde{S} > 0$ в том и только в том случае, если

$$\widetilde{S}[f, f] \geq 0 \quad (f \in D[S]). \tag{5.29}$$

Таким образом, условие (5.28) необходимо; но оно и достаточно, ибо, если $f \in D[S]$, то, согласно теореме 15,

$$f = g + \varphi \quad (g \in D[S], \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap D[\widetilde{S}]),$$

а тогда, в силу леммы 8,

$$\widetilde{S}[f, f] = S[g, g] + S[\varphi, \varphi] \geq \widetilde{S}[\varphi, \varphi]$$

и, следовательно, неравенство (5.28) влечет (5.29).

Теорема доказана.

Теорема 17. *Если $\widetilde{S}_k$ $(k = 1, 2)$ — полуограниченные расширения оператора S $(m(S) > 0)$, то для того чтобы хотя бы при одном $a > m(S_k)$ $(k = 1, 2)$ (а тогда и при всех таких a) имело место неравенство*

$$(S_1 + aI)^{-1} \leq (S_2 + aI)^{-1},$$

необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\mathfrak{N}_0 \cap D[S_1] \subset \mathfrak{N}_0 \cap D[S_2] \tag{5.30}$$

и

$$S_2[\varphi, \varphi] \leq S_1[\varphi, \varphi] \quad (\varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap D[\widetilde{S}_1]). \tag{5.31}$$

[†]Для того случая, когда $n < \infty$, (n, n) — индекс дефекта оператора S, нами позже будет доказано более общее предложение (см. теорему 19, §6).

Доказательство. Согласно лемме 6, §4, для доказательства теоремы достаточно установить, что условие (5.30) эквивалентно соотношению

$$D[S_1] \subset D[S_2] \tag{5.32}$$

и что при выполнении (5.32) условие (5.31) эквивалентно следующему неравенству:

$$S_2[f, f] \leq S_1[f, f] \qquad (f \in D[S_1]). \tag{5.33}$$

Эквивалентность(5.30) и (5.32) вытекает очевидным образом из теоремы 15.

С другой стороны, если $f \in D[S_1] \subset D[S_2]$, то, согласно той же теореме,

$$f = g + \varphi$$

$$(g \in D(S), \quad \varphi \in \mathfrak{N}_0 \cap D[S_1])$$

и поэтому, в силу леммы 8,

$$S_1[f, f] - S_2[f, f] = S_1[\varphi, \varphi] - S_2[\varphi, \varphi].$$

Теорема доказана.

§ 6. Полуограниченные операторы с конечным дефектным числом[†]

1. Сформулируем прежде всего следующую теорему:

Теорема 18. *Если полуограниченный снизу оператор T имеет конечное дефектное число $n(T) < \infty$, то всякое его самосопряженное расширение $\widetilde{T}$ также полуограничено и, более того, спектр такого расширения в интервале $(-\infty, m(T))$ состоит из конечного числа собственных чисел, сумма кратностей которых не превосходит $n(T)$.*

Доказательство этой теоремы не представляет никакого труда. Однако, так как в следующем параграфе будет доказано более

[†]Дефектным числом эрмитова оператора с индексом дефекта (n, n) называется кардинальное число n.

общее предложение (теорема 21), то мы опустим доказательство теоремы 18.

Теорема 15 позволяет установить более тонкое предложение†.

Теорема 19. *Пусть* $\widetilde{S}$ *— некоторое самосопряженное расширение оператора* S*, для которого* $m(S) > 0$ *и дефектное число* n *которого конечно; пусть, далее,* $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r\}$ *— некоторый базис пересечения множеств* $\mathfrak{N}_0$ *и* $D[\widetilde{S}]$*. Тогда* $\nu(\widetilde{S})$ *— сумма кратностей отрицательных собственных чисел оператора* $\widetilde{S}$ *— в точности равна числу отрицательных квадратов формы*

$$\sum_{j,k=1}^{r} \widetilde{S}[\varphi_j, \varphi_k]\xi_j\bar{\xi}_k. \tag{6.1}$$

Доказательство. Согласно лемме 4 (§4), для любого $f \in D(T)$ имеем††

$$\widetilde{S}[f,f] = \int_m^{\infty} \lambda d|E(\lambda)f|^2 \geq \int_m^{0} \lambda d|E(\lambda)f|^2 = \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j |(f, \psi_j)|^2,$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ — полная ортонормированная система собственных векторов $\widetilde{S}$, отвечающих отрицательным собственным числам

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_\nu \quad (< 0)$$

оператора S.

В частности, полагая

$$f = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \varphi_k,$$

†Легко сообразить, что теорема 18 является следствием теоремы 19; однако на это обстоятельство мы сослаться не можем, так как при доказательстве последней мы будем опираться на теорему 18, предполагая установленным, что отрицательный спектр оператора $\tilde{S}$ состоит из конечного числа собственных чисел.

††Мы предполагаем, что $m = m(\tilde{S}) < 0$, ибо справедливость теоремы при $m(\tilde{S}) \geq 0$ очевидна.

получаем

$$\sum_{j,k=1}^{r} \widetilde{S}[\varphi_j, \varphi_k]\xi_j\bar{\xi}_k \geq \sum_{j=1}^{\nu} \mu_j \left|\sum_{k=1}(\varphi_k, \psi_j \xi_k)\right|^2 .$$

Отсюда вытекает, что число p отрицательных квадратов формы (6.1) не больше ν.

С другой стороны, согласно теореме 15, имеем

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{r} a_{jk}\varphi_k + \chi_j \quad (\chi_j D[S]; \quad j = 1, 2, ..., \nu),$$

а следовательно,

$$\psi = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j \psi_j = \sum_{k=1}^{r} \xi_k \varphi_k + \chi = \varphi + \chi,$$

где

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{r} a_{jk}\eta_j \qquad (k = 1, 2, ..., r),$$

$$\chi = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j \chi_j \in D[S].$$

Но тогда, согласно лемме 8,

$$\widetilde{S}[\psi, \psi] = \widetilde{S}[\varphi, \varphi] + \widetilde{S}[\chi, \chi] = \widetilde{S}[\varphi, \varphi] + S[\chi, \chi] \geq \widetilde{S}[\varphi, \varphi].$$

Таким образом,

$$\widetilde{S}[\psi, \psi] = \sum_{j=1}^{\nu} |\mu_j \eta_j|^2 \geq \sum_{j,k} \widetilde{S}[\varphi_j, \varphi_k]\zeta_j\zeta_k = \widetilde{S}[\varphi, \varphi],$$

откуда $\nu \leq p$.

Теорема доказана.

2. Для дальнейшего нам понадобятся некоторые общие положения, относящиеся к произвольным эрмитовым операторам с индексом дефекта (n, n), где $n < \infty$.

Пусть $H(\overline{D(H)} = \mathfrak{H})$ — некоторый такой оператор, $\widetilde{H}$ — его некоторое самосопряженное расширение и

$$R_\lambda = (\widetilde{H} - \lambda I)^{-1}$$

— резольвента оператора $\widetilde{H}$, существующая для всех регулярных значений λ (т.е. значений λ, не принадлежащих спектру $\widetilde{H}$).

Выбирая произвольно λ_0 ($J(\lambda_0) \neq 0$), построим какой-либо ортонормированный базис $\{\varphi_1(\lambda_0), ..., \varphi_n(\lambda_0)\}$ множества $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ всех решений φ уравнения $H^*\varphi - \lambda_0\varphi = 0$ и положим для любого регулярного λ

$$\varphi_j(\lambda) = \varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)R_\lambda\varphi_j(\lambda_0) \qquad (j = 1, 2, ..., n).$$

Пользуясь функциональным уравнением резольвенты

$$R_\mu = R_\lambda + (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda,$$

нетрудно показать, что тогда для любых двух регулярных значений μ и λ

$$\varphi_j(\mu) = \varphi_j(\lambda) + (\mu - \lambda)R_\mu\varphi_j(\lambda) \qquad (j = 1, ..., n). \tag{6.2}$$

Полагая здесь $\mu = \lambda_0$, мы придем к заключению, что при любом регулярном λ векторы $\varphi_1(\lambda), ..., \varphi_n(\lambda)$ линейно независимы. Покажем, что они составляют базис множества $\mathfrak{N}_\lambda$ решений уравнения

$$H^*\varphi = \lambda\varphi. \tag{6.3}$$

В самом деле, так как

$$H^*R_\lambda f = \widetilde{H}R_\lambda f = f + \lambda R_\lambda f \qquad (f \in \mathfrak{H}),$$

то, согласно определению (6.2),

$$H^*\varphi_j\lambda = H^*\varphi_j(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)H^*R_\lambda\varphi_j(\lambda) = \lambda_0\varphi_j(\lambda_0) +$$

$$+(\lambda - \lambda_0)(\varphi_j(\lambda_0) + \lambda R_\lambda\varphi_j(\lambda_0)) = \lambda\varphi_j(\lambda) \qquad (j = 1, 2, ..., n).$$

Введем в рассмотрение унитарный оператор

$$U_\lambda = (\widetilde{H} - \overline{\lambda I})(H - \lambda I)^{-1} = I + (\lambda - \bar{\lambda})R_\lambda. \tag{6.4}$$

Заменяя в равенстве (6.3) значение μ на λ, а λ на $\bar{\lambda}$, находим

$$U_\lambda \varphi_j(\bar{\lambda}) = \varphi_j(\lambda) \qquad (j = 1, ..., n). \tag{6.5}$$

Так как по построению $\{\varphi_1(\lambda_0), ..., \varphi_n(\lambda_0)\}$ — ортонормированный базис, а U_λ и $U_{\bar{\lambda}} = U_\lambda^{-1}$ — унитарные операторы, то базис

$$\{\varphi_1(\bar{\lambda}_0), ..., \varphi_n(\bar{\lambda}_0)\}$$

множества $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ решений φ уравнения $H^*\varphi - \bar{\lambda}_0\varphi = 0$ также ортонормирован.

Учитывая, что $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}$ есть ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}(H - -\lambda_0 I)$, мы заключаем, что при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$f_{\lambda_0} = f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\varphi_k(\lambda_0) \in \mathfrak{R}(H - \lambda_0 I),$$

а следовательно, при любом $f \in \mathfrak{H}$ выражение

$$U_{\lambda_0}\Big(f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\varphi_k(\bar{\lambda}_0)\Big) = f_{\lambda_0} + (\lambda - \bar{\lambda})(H - \lambda_0 I)^{-1} f_{\lambda_0} \tag{6.6}$$

не зависит от выбора расширения $\widetilde{H}$ оператора H.

Пусть теперь $\widetilde{H}'$ — некоторое отличное от $\widetilde{H}$ самосопряженное расширение оператора H и пусть, в согласии с предыдущими обозначениями,

$$R'_\lambda = (\widetilde{H}' - \lambda I)^{-1}, \qquad U'_\lambda = I + (\lambda - \lambda')R'_\lambda.$$

Так как к оператору U'_λ применимы те же рассуждения, что и к оператору U_λ, то, в силу сказанного о векторе (6.6),

$$U'_{\lambda_0}\Big(f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\varphi_k(\bar{\lambda}_0)\Big) =$$

$$= U_{\lambda_0}\Big(f - \sum_1^n (f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\varphi_k(\lambda_0)\Big) \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{6.7}$$

Оператор U'_{λ_0}, так же как и оператор U_{λ_0}, преобразует изометрически $\mathfrak{N}'_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$, поэтому

$$U'_{\lambda_0}\varphi_k(\bar{\lambda}_0) = \sum_{j=1}^{n} u_{jk}\varphi_j(\lambda_0) \qquad (k = 1, 2, ..., n), \tag{6.8}$$

где $\|u_{jk}\|_1^m$ — некоторая числовая унитарная матрица.

Сопоставляя равенства (6.4), (6.5), (6.7) и (6.8), находим

$$R'_{\lambda_0}f = R_{\lambda_0}f + \frac{1}{\lambda_0 - \bar{\lambda}_0}\sum_{j,k=1}^{n}(u_{jk} - \delta_{jk})(f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\varphi_j(\lambda_0) \ \ (f \in \mathfrak{H}). \tag{6.9}$$

Обозначим через r ранг матрицы $\|u_{jk} - \delta_{jk}\|_1^n$. За счет имеющегося произвола в выборе ортонормированного базиса $\{\varphi_1(\lambda_0), ..., \varphi_k(\lambda_0)\}$ соотношение (6.8) можно будет привести к виду

$$R'_{\lambda_0}f = R_{\lambda_0}f - \sum_{j,k=1}^{r}\alpha_{jk}(f, \varphi_k(\bar{\lambda}_0))\varphi_j(\lambda_0) \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{6.10}$$

где $\|\alpha_{jk}\|_1^r$ — некоторая неособенная матрица.

Введем в рассмотрение матрицу

$$Q(\lambda_0) = \|Q_{jk}(\lambda_0)\|_1^r = \|\alpha_{jk}\|^{-1} \tag{6.11}$$

и, далее, для любой регулярной точки λ оператора $\widetilde{H}$ — матрицу

$$Q(\lambda) = Q(\lambda_0) + (\lambda - \lambda_0)\|\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\bar{\lambda}_0)\|_1^r. \tag{6.12}$$

С помощью уравнений (6.3) нетрудно показать, что для любых регулярных точек λ и μ оператора $\widetilde{H}$

$$Q(\lambda) = Q(\mu) + (\lambda - \mu)\|(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\mu))\|_1^r. \tag{6.13}$$

Кроме того, если для некоторого регулярного λ

$$\det Q(\lambda) \neq 0, \tag{6.14}$$

то[†]

$$R'_\lambda = R_\lambda - \sum_{j,k=1}^{r} Q_{jk}^{(-1)}(\lambda)(f, \varphi_j(\lambda))\varphi_k(\lambda) \quad (f \in \mathfrak{H}). \tag{6.15}$$

Для $\lambda = \lambda_0$ это равенство следует из (6.10) и (6.11). Для любого другого регулярного λ, удовлетворяющего условию (6.14), это равенство устанавливается путем непосредственной проверки того, что даваемое им выражение для $R'_\lambda f$ удовлетворяет уравнению

$$R'_\lambda f = R'_{\lambda_0} f + (\lambda - \lambda_0) R'_\lambda R'_{\lambda_0} f \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Так как $\det Q(\lambda_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки λ_0 условие (6.14) будет выполняться.

Покажем, что условие (6.14) выполняется для любого значения λ, регулярного одновременно для $\widetilde{H}$ и $\widetilde{H}'$.

Для этого сперва заметим, что так как $\det Q(\lambda)$ — голоморфная функция в окрестности всякой регулярной для $\widetilde{H}$ точки λ, то такая точка не может быть точкой сгущения нулей этого детерминанта и, следовательно, в любой ее окрестности найдутся значения λ, для которых будут иметь место соотношения (6.14) и (6.15).

С другой стороны, если λ_1 — также регулярная точка оператора $\widetilde{H}$, то, отправляясь от значения λ, мы сможем доказать, что в некоторой окрестности точки λ_1

$$R'_\lambda f = R_\lambda f - \sum_{j,k=1}^{r_1} P_{jk}^{(-1)}(f, \varphi_j^*(\bar{\lambda}))\varphi_k^*(\lambda) \quad (f \in \mathfrak{H}), \tag{6.16}$$

где $\varphi_1^*(\lambda), \ldots, \varphi_{r_1}^*(\mu)$ — некоторые линейно независимые решения уравнения (6.1), удовлетворяющие функциональным уравнениям типа (6.3). Сравнивая равенства (6.15) и (6.16) для тех значений λ, для которых эти равенства одновременно имеют место,

[†]Через $Q_{jk}^{(-1)}$ мы обозначаем элементы обратной матрицы Q^{-1}. Заметим, кстати, что формулы (6.3), (6.13), (6.15) аналогичны известным формулам H. Bateman'а [8] в теории интегральных уравнений (см. также: *Канторович-Крылов*, Приближенное решение дифференциальных уравнений в частных производных. — М.-Л., 1936).

мы находим, что $r_1 = r$ и что существует неособенная числовая матрица $\|C_{jk}\|_1^r$ такая, что при любом λ, регулярном для $\widetilde{H}$,

$$\varphi_j^*(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} C_{kj}\varphi_k(\lambda) \qquad (j = 1, 2, ..., r)$$

и тогда[†]

$$P(\lambda) = C^* Q(\lambda) C \tag{6.17}$$

для всех λ, для которых имеют место равенства (6.15) и (6.16), а значит, и для всех регулярных точек λ оператора $\widetilde{H}$. В частности, из соотношения (6.17) при $\lambda = \lambda_1$ найдем

$$\det Q(\lambda_1) = \det P(\lambda_1) |\det C|^2 \neq 0.$$

Наше утверждение доказано.

3. После этих предварительных соображений докажем следующую теорему.

Теорема 20. *Пусть $S, \widetilde{S}$ и $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ — таковы же, как и в теореме 17. Если 0 — регулярная точка оператора, то*

$$S_\mu^{-1} f = \widetilde{S}^{-1} f - \sum_{j,k=1}^{r} \alpha_{jk}(f, \varphi_j)\varphi_k \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

где $\|\alpha_{jk}\|_1^r$ — несингулярная эрмитова матрица, обладающая тем свойством, что число отрицательных квадратов формы

$$\sum_{j,k=1}^{r} \alpha_{jk}\xi_j\bar{\xi}_k$$

в точности равно сумме кратностей отрицательных собственных чисел оператора $\widetilde{S}$.

Доказательство. Мы будем пользоваться результатами п.2 применительно к случаю

$$H = S, \quad \widetilde{H} = \widetilde{S}, \qquad \widetilde{H}' = S_\mu.$$

[†] C^* — матрица, комплексно-сопряженная и транспонированная по отношению к матрице $C = \|C_{jk}\|_1^r$.

Так как значения
$$a > -m(\widetilde{S}), 0$$
суть регулярные значения для $\widetilde{H}$ и $\widetilde{H}'$, то, согласно формуле (6.15),
$$(S_\mu + aI)^{-1} f =$$
$$= (\widetilde{S} + aI)^{-1} f - \sum_{j,k=1}^{r_1} Q_{jk}^{(-1)}(-a)(f, \varphi_j(-a))\varphi_k(-a). \tag{6.18}$$

С другой стороны, при рассматриваемых значениях a к операторам $S + aI$ и $S_\mu + aI$ применима теорема 12, в силу которой
$$(S_\mu + aI)^{-1} = (\widetilde{S} + aI)^{-1} - (\widetilde{S} + aI)^{-1}_{\mathfrak{N}_{-a}},$$
где $\mathfrak{N}_{-a}$ — множество всех решений уравнения $S^*\varphi + a\varphi = 0$. Таким образом,
$$(\widetilde{S} + aI)^{-1}_{\mathfrak{N}_{-a}} f = \sum_{j,k=1}^{r_1} Q_{jk}^{(-1)}(-a)(f, \varphi_j(-a))\varphi_k(-a) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Припоминая теперь предложение ε из §1, мы заключаем, что система $\{\varphi_1(-a), ..., \varphi_{r_1}(-a)\}$ образует базис пересечения
$$\mathfrak{N}_{-a} \cap D((\widetilde{S} + aI)^{\frac{1}{2}}) = \mathfrak{N}_{-a} \cap D[\widetilde{S}] \tag{6.19}$$
и что
$$Q_{jk}(-a) = \int\limits_{m(S)}^{\infty} (\lambda + a) d(E(\lambda)\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)) =$$
$$= \widetilde{S}[\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)] + a(\varphi_j(-a), \varphi_k(-a)) \quad (j, k = 1, ..., r_1). \tag{6.20}$$

Заметим теперь, что если некоторая вектор-функция $\varphi(\lambda)$ (λ пробегает множество регулярных точек оператора $\widetilde{S}$) удовлетворяет функциональному уравнению
$$\varphi(\lambda) = \varphi(\mu) + (\lambda - \mu) R_\lambda \varphi(\mu)$$
$$(R_\lambda = (\widetilde{S} - \lambda I)^{-1}) \tag{6.21}$$
и хотя бы для одного регулярного значения λ вектор $\varphi(\lambda) \in D(\widetilde{S})$, то это же имеет место для всех регулярных значений λ.

В самом деле, если $\varphi(\mu) \in D[\widetilde{S}]$, то, так как $R_\lambda\varphi(\mu) \in D(\widetilde{S}) \subset \subset D[\widetilde{S}]$ в силу уравнения (6.21) также $\varphi(\lambda) \in D[\widetilde{S}]$. Поэтому, если система $\{\varphi_1(-a), ..., \varphi_{r_1}(-a)\}$ составляет базис множества (6.19), то система $\{\varphi_1(0), ..., \varphi_{r_1}(0)\}$ будет составлять базис множества

$$\mathfrak{N}_0 \cap D[\widetilde{S}]$$

и, следовательно, может быть выбрана в качестве базиса $\{\varphi_1, ...$ $..., \varphi_r\}$, о котором идет речь в теореме 20 (и, стало быть, $r_1 = r$).

В равенстве (6.18) значение a можно заменить любым регулярным значением λ оператора $\widetilde{S}$. В частности, мы можем положить там $a = 0$ и тогда получим

$$S_\mu^{-1} f = \widetilde{S}^{-1} f - \sum_{j,k=1}^{r} Q_{jk}^{(-1)}(0)(f, \varphi_j(0))\varphi_k(0). \tag{6.22}$$

С другой стороны, если в обеих частях равенства (6.20) заменить a на λ, то мы получим там аналитические функции от λ и, так как они совпадают при всех достаточно больших положительных значениях аргумента, они тождественно равны при всех λ, регулярных для $\widetilde{S}$. Следовательно, в (6.20) можно положить $a = 0$.

Таким образом,

$$Q_{jk}(0) = \widetilde{S}[\varphi_j(0), \varphi_k(0)] \quad (j, k = 1, ..., r), \tag{6.23}$$

что вместе с равенством (6.22) и теоремой 19 дает теорему 20.

Замечание 6.1. Из соотношения (6.23) вытекает, что если 0 — регулярная точка оператора $\widetilde{S}$, то форма (6.1) несингулярна. Нетрудно убедиться в том, что ранг формы (6.1) всегда равен $r - d$, где $d(\geq 0)$ — кратность числа 0, как собственного числа оператора $\widetilde{S}$.

§ 7. Эрмитовы операторы со спектральным люком

Хотя основной задачей настоящей работы является исследование самосопряженных расширений полуограниченных операторов, тем не менее целесообразно привести вытекающие из наших рассмотрений следствия в теории самосопряженных расширений произвольных эрмитовых операторов.

1. Пусть H — некоторый эрмитов оператор, область определения которого $D(H)$ плотна в $\mathfrak{H}$.

Конечный интервал (a, b) условимся называть *люком* оператора H, если

$$\left| Hf - \frac{a+b}{2} f \right| \geq \frac{b-a}{2} |f| \qquad (f \in D(H)).$$

Если H — самосопряженный оператор, то утверждение, что (a, b) — люк оператора, равносильно, как легко видеть, утверждению, что (a, b) есть интервал регулярности оператора H (т.е. что интервал (a, b) состоит исключительно из регулярных точек оператора H).

Имеет место

Теорема 21. *Если эрмитов оператор $H(\overline{D(H)} = \mathfrak{H})$ имеет люк (a, b), то он допускает самосопряженные расширения*†*, и среди последних найдется по крайней мере одно расширение, для которого интервал (a, b) является интервалом регулярности.*

Доказательство. Если вместо оператора H рассматривать оператор

$$H_1 = \frac{2}{b-a}\left(H - \frac{a+b}{2} I\right),$$

то мы будем иметь случай, когда $a = -1$, $b = 1$. Поэтому без ограничения общности можно сразу принять, что $a = -1$, $b = 1$, т.е. что оператор H удовлетворяет условию

$$|Hf| \geq |f| \qquad (f \in D(H)). \tag{7.1}$$

Определим на множестве $\mathfrak{R}(A)$ эрмитов оператор A, полагая

$$AHf = f \qquad (f \in D(H)).$$

Таким образом, $D(A) = \mathfrak{R}(H)$ и, в силу условия 7.1,

$$|Ag| \leq |g| \qquad (g \in D(A)),$$

---

†Это утверждение теоремы было установлено еще J.N.Calkin'ым (см. [9], теорема 2).

т.е. $\|A\| \leq 1$. По теореме 2, оператор A допускает по крайней мере одно самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ с нормой ≤ 1 ($\|\widetilde{A}\| \leq \leq 1$). Покажем, что 0 не есть собственное число оператора $\widetilde{A}$.

В самом деле, допустив существование вектора $\varphi \neq 0$, для которого $\widetilde{A}\varphi = 0$, мы сможем утверждать, что $\varphi \perp \mathfrak{N}(\widetilde{A})$; но последнее невозможно, ибо

$$\mathfrak{N}(\widetilde{A}) \subset \mathfrak{N}(A) = D(H), \qquad \overline{D(H)} = \mathfrak{H}.$$

Но если 0 не есть собственное число оператора $\widetilde{A}$, то существует оператор $\widetilde{H} = \widetilde{A}^{-1}$, являющийся вместе с $\widetilde{A}$ самосопряженным оператором. Так как $\| \widetilde{A} \| \leq 1$, то

$$|\widetilde{H}f| \geq |f| \qquad (f \in D(\widetilde{H})),$$

т.е. интервал $(-1, 1)$ есть люк или, что то же самое для данного случая, интервал регулярности оператора $\widetilde{H}$. Так как самосопряженный оператор $\widetilde{H}$ является, очевидно, расширением оператора H, то теорема доказана.

Мы предоставляем читателю возможность получить с помощью остальных теорем §2 соответствующие критерии того, когда оператор H с люком (a, b) допускает единственное самосопряженное расширение $\widetilde{H}$ с интервалом регулярности (a, b).

2. Следующая теорема, как было ранее указано, имеет своим следствием теорему 18.

Теорема 22. *Если дефектное число $n(> 0)$ эрмитова оператора H с люком (a, b) конечно, то спектр любого самосопряженного расширения $\widetilde{H}$ оператора H внутри (a, b) состоит из конечного числа собственных чисел, сумма кратностей которых не превосходит n.*[†]

Доказательство. Пусть $\widetilde{H}$ — некоторое самосопряженное расширение оператора H, для которого (a, b) есть интервал регулярности, а $\widetilde{H}$ — какое-либо другое самосопряженное расширение оператора H. В каждой регулярной точке λ операторов $\widetilde{H}$

[†]Легко видеть, что если S — эрмитов оператор, то $m(S) = b(> -\infty)$ в том и только в том случае, когда при любом $a < b$ интервал (a, b) есть люк оператора S; следовательно, теорема 18 вытекает из теоремы 22.

и $\widetilde{H}'$ соответствующие этим операторам резольвенты R_λ и R'_λ связаны соотношением

$$R'_\lambda f = R_\lambda f + \sum_{j,k=1}^{r} Q_{jk}^{(-1)}(\lambda)(f, \varphi_j(\lambda))\varphi_k(\lambda) \quad (f \in \mathfrak{H}) \tag{7.2}$$

где $r \leq n$, а вектор-функции $\varphi_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, ..., r)$ и матрица $Q(\lambda) = \|Q_{jk}(\lambda)\|_1^r$ голоморфны на множестве регулярных точек оператора R_λ (см. §6, п.2). Отсюда заключаем, что спектр оператора $\widetilde{H}$ внутри интервала (a, b) состоит из изолированных собственных чисел (которые суть нули $\det Q(\lambda)$).

Предположим сперва, что точка $c = \dfrac{a+b}{2}$ — регулярная точка для $\widetilde{H}'$ и H. Тогда в равенстве (7.2) можно будет положить $\lambda = c$ и мы получим

$$R'_c f = R_c f - \sum_{j,k=1}^{r} Q_{jk}^{(-1)}(c)(f, \varphi_j(c))\varphi_k(c). \tag{7.3}$$

Одновременно заметим, что так как (a, b) — люк оператора $\widetilde{H}$, то

$$|R_c f| \leq \frac{2}{b-a}|f| \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{7.4}$$

Допустим теперь, вопреки утверждению теоремы, что существует ортонормированная система $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ $(n > r)$ собственных векторов оператора $\widetilde{H}$, для которой

$$\widetilde{H}'\psi_j = \mu_j\psi_j, \qquad a < \mu_j < b \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Тогда для любого вектора $f \neq 0$ вида

$$f = \xi_1\psi_1 + \cdots + \xi_n\psi_n$$

имеет место неравенство

$$|R_c f| = \left|\sum_{j=1}^{r} \frac{\xi}{c - \mu_j}\psi_j\right| > \frac{2}{b-a}\left|\sum_{j=1}^{r} \xi_j\psi_j\right| = \frac{2}{b-a}|f|.$$

С другой стороны, если $n > r$, то всегда найдется система чисел $\zeta_1, ..., \zeta_r$, из которых не все равны нулю, такая, что

$$(f, \varphi_k(c)) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(\psi_j, \varphi_k(c)) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n),$$

и для нее, в силу (7.3) и (7.4), будем иметь

$$|R'_c f| = |R_c f| \leq \frac{2}{b-a}|f|.$$

Мы пришли к противоречию.

Итак, если точка $c = \dfrac{a+b}{2}$ есть собственное число оператора $\widetilde{H}$, то спектр оператора $\widetilde{H}$ внутри интервала (a, b) будет состоять из собственных чисел, сумма кратностей которых $\leq r$, а значит, и подавно $\leq n$.

Предположим теперь, что c — собственное число оператора $\widetilde{H}'$. В этом случае любая точка c_1, отличная от c и достаточно близкая к c, будет регулярной точкой оператора $\widetilde{H}'$ и, следовательно, в силу уже доказанного, во всяком интервале с центром в точке c_1, заключающемся в (a, b), спектр оператора $\widetilde{H}'$ будет состоять из собственных чисел, сумма кратностей которых $\leq n$, а следовательно, это же будет иметь место и во всем открытом интервале (a, b).

Теорема доказана.

Замечание 7.1. Тем же методом можно без труда доказать, что если спектр некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{H}$ оператора H $(1 \leq m(H) < \infty)$ внутри интервала (a, b) состоит из конечного числа собственных чисел, сумма кратностей которых $\leq n$, то спектр всякого иного самосопряженного расширения $\widetilde{H}'$ оператора H внутри (a, b) будет состоять из конечного числа собственных чисел, сумма кратностей которых $\leq m + n$.

3. Вещественную точку λ условимся называть *регулярной точкой эрмитова оператора H*, если она является регулярной точкой хотя бы одного самосопряженного расширения $\widetilde{H}$ оператора H.

В силу теоремы 21, это определение эквивалентно такому: ***точка λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ называется регулярной точкой эрмитова оператора, если некоторая ее окрестность является люком оператора H.***

Для случая, когда $n(H) < \infty$, имеет место

Теорема 23. *Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_s$ — регулярные точки эрмитова оператора H, а $p_1, P_2, ..., p_s$ — натуральные числа такие, что $p_1 + p_2 + \cdots + p_s = n(H)$. Тогда существует по крайней мере одно самосопряженное расширение $\widetilde{H}$ оператора H, для которого λ_j $(j = 1, 2, ..., s)$ является собственным числом кратности не меньшей p_j $(j = 1, 2, ..., s)$*[†].

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_s$ — регулярные точки оператора H, то найдутся положительные числа $\delta_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., s)$ такие, что

$$|Hf - \lambda_j f| \geq \delta_j |f| \qquad (f \in D(H)). \tag{7.5}$$

Пусть $\widetilde{H}_1$ — какое-либо самосопряженное расширение оператора H, для которого λ_1 — регулярная точка. Обозначим через R'_λ резольвенту оператора H'_1 и построим с помощью нее голоморфные на множестве регулярных точек оператора $\widetilde{H}_1$ вектор-функции $\varphi_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., n)$, составляющие базис решений уравнения $H^*\varphi = \lambda\varphi$.

Обозначим через $D(H_1)$ множество векторов $f \in \mathfrak{H}$ вида

$$f = \sum_{j=1}^{p_1} \xi_j \varphi_j(\lambda_1) + g \qquad (g \in D(H)) \tag{7.6}$$

и положим

$$H_1 f = \lambda_1 \sum_{j=1}^{p_1} \xi_j \varphi_j(\lambda_1) + Hg.$$

Таким образом, в частности, имеем

$$H_1 \varphi_j(\lambda_1) = \lambda_1 \varphi_j(\lambda_1) \qquad (j = 1, 2, ..., p_1).$$

[†]Теорему 23 следует считать впервые установленной H. Hamburger'ом ([10], теорема 12), хотя она у него нигде не формулируется в той форме, которую мы ей придали. Наше доказательство существенно отличается от доказательства Hamburger'a.

Нетрудно проверить, что оператор H_1 есть некоторое эрмитово расширение оператора H_1^*. Поэтому всякое решение φ уравнения

$$H_1^*\varphi = \lambda\varphi \qquad (J\lambda \neq 0) \tag{7.7}$$

является одновременно решением уравнения $H^*\varphi = \lambda\varphi$ и, следовательно, имеет вид

$$\varphi = c_1\varphi_1(\lambda) + c_2\varphi_2(\lambda) + \cdots + c_n\varphi_n(\lambda), \tag{7.8}$$

где c_j $(j = 1, ..., n)$ — некоторые комплексные постоянные.

Для того чтобы вектор φ вида (7.8) действительно был решением уравнения (7.7), необходимо и достаточно, чтобы

$$(\varphi, H_1 f - \lambda f) = 0 \qquad (f \in D(H_1)). \tag{7.9}$$

Подставим сюда вместо f его выражение из равенства (7.6); так как при $f = g \in D(H)$ условие (7.9) выполняется при любом φ вида (7.8), мы найдем, что это условие эквивалентно выполнению равенства

$$(\varphi, \varphi_k(\lambda)) = \sum_{j=1}^{n} c_j(\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\lambda)) = 0 \qquad (k = 1, 2, ..., n_1). \tag{7.10}$$

Так как матрица

$$\|\varphi_j(\lambda), \varphi_k(\lambda)\|_1^n \tag{7.11}$$

при $\lambda = \lambda_1$ обращается в матрицу Грамма, которая несингулярна, то и при комплексных λ $(J\lambda \neq 0)$, достаточно близких к λ_1, матрица (7.11) будет несингулярна. Следовательно, при этих же λ ранг матрицы системы уравнений (7.10) относительно неизвестных $c_1, c_2, ..., c_n$ точно равен p_1, и, значит, эта система имеет точно $n - p_1$ линейно независимых решений.

Таким образом, при λ, достаточно близких к λ_1, уравнение (7.7) имеет точно $n - p_1$ линейно независимых решений, т.е.

$$n(H_1) = n(H) - p_1.$$

Покажем теперь, что точки $\lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_s$ суть регулярные точки также и для H_1. Для этого, представляя $f \in D(H_1)$ согласно равенству (7.6) в виде

$$f = \varphi + g \qquad (g \in D(H)) \qquad (H_1\varphi = H^*\varphi = \lambda_1\varphi),$$

учитывая неравенства (7.5) и тот факт, что $\varphi \perp \widetilde{H}g - \lambda_1 g$, находим

$$|H_1 f - \lambda_j f|^2 = |Hg - \lambda_j g + (\lambda_j - \lambda_1)\varphi|^2 =$$
$$= |Hg - \lambda_1 g| + (\lambda_j - \lambda_1|^2|\varphi|^2 \geq \delta_j^2|g|^2 + |\lambda_j - \lambda_1|^2|\varphi|^2$$
$$(j = 2, 3, ..., s).$$

Положим

$$\delta'_j = \min(\delta_j, \lambda_j - \lambda_1) \qquad (j = 2, 3, ..., s);$$

тогда

$$\delta_j^2|g|^2 + |\lambda_j - \lambda_1|^2|\varphi|^2 \geq \delta_j'^2(|g|^2 + |\varphi|^2) \geq \frac{1}{2}\delta_j'^2|g + \varphi|^2.$$

Таким образом,

$$|H_1 f - \lambda_j f| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\delta'_j|f| \qquad (j = 2, 3, ..., s),$$

т.е. точки λ_j $(j = 2, 3, ..., s)$ суть регулярные точки оператора H_1.

Аналогично тому, как по оператору H строится оператор H_1, можно, отправляясь от оператора H_1, образовать его эрмитово продолжение H_2, для которого λ_2 есть собственное число порядка p_2,

$$n(H_2) = n(H) - p_1 - p_2\,,$$

и для которого точки $\lambda_2, ..., \lambda_s$ суть регулярные точки. Продолжая этот процесс далее, мы придем к самосопряженному оператору H_s, который будет удовлетворять всем условиям теоремы 23 и для которого, между прочим, λ_s будет собственным числом точно кратности p_s.

Теорема доказана.

Замечание 7.2. При доказательстве теоремы не обязательно было нумеровать числа λ_j $(j = 1, 2, ..., s)$ по их возрастанию. Поэтому из нашего доказательства теоремы вытекает, что всегда существует самосопряженное расширение $\widetilde{H}$ оператора H, которое удовлетворяет всем условиям теоремы и для которого произвольно фиксированное λ_k будет собственным числом точно кратности p_k.

Если же все точки λ_j $(j = 1, 2, ..., s)$ принадлежат одному и тому же люку оператора H, то можно будет, более того, утверждать, что существует самосопряженное расширение $\widetilde{H}$, для которого каждое λ_j $(j = 1, 2, ..., s)$ будет собственным числом точно кратности p_j $(j = 1, 2, ..., s)$. Это утверждение непосредственно следует из сопоставления теорем 22 и 23.

Заметим, наконец, что из указанного нами способа расширения оператора H до требуемого оператора $\widetilde{H}$ вытекает, что последний никогда не определяется единственным образом, если $s > 0$ и, наоборот, определяется единственным образом, если $s = 1$.

4. Согласно второму определению регулярной точки эрмитова оператора (см. п.2, §7), если открытый интервал (a, b) есть люк эрмитова оператора H, то все точки этого интервала суть регулярные точки оператора H.

Обратное утверждение неверно, т.е. если все точки открытого интервала (a, b) суть регулярные точки оператора H, то вовсе не обязательно, чтобы интервал (a, b) был люком оператора H. Согласно теореме 23, в этом случае (в предположении, что $n(H) < \infty$) можно будет только утверждать, что спектр любого самосопряженного расширения $\widetilde{H}$ оператора H внутри интервала (a, b) состоит из изолированного множества собственных чисел конечной кратности†. Последнее утверждение, как будет следовать из помещаемой ниже теоремы 24, в случае простого оператора H допускает обращение.

Напомним, что эрмитов оператор H $(H \neq H^*)$ называется простым, если $\mathfrak{H}$ не содержит никакого собственного подпространства, которое приводит H и в котором H — самосопряженный оператор.

Прежде чем сформулировать теорему 24, сделаем следующее замечание относительно простых эрмитовых операторов H с индексом дефекта (n, n), причем для простоты ограничимся случаем, когда $n < \infty$.

Пусть $\widetilde{H}$ — некоторое самосопряженное расширение простого

---

†Ибо, по теореме Гейне–Бореля, каждый внутренний по отношению к (a, b) интервал (a_1, b_1) можно будет покрыть конечным числом люков оператора H.

оператора H, а R_λ — резольвента $\widetilde{H}$. Образуем, как было показано в п.2 §6, линейно независимые голоморфные вектор-функции $\varphi_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ $(J\lambda \neq 0)$ и покажем, что если для некоторого вектора $f \in \mathfrak{H}$

$$(f, \varphi_j(\lambda)) \equiv 0 \quad (j = 1, 2, ..., m, \quad J\lambda \neq 0), \tag{7.12}$$

то $f = 0$.

В самом деле, допуская противное, рассмотрим множество $\mathfrak{H}_0$ всех векторов $f \in \mathfrak{H}$, для которых имеет место тождество (7.12). Прежде всего для любого λ $(J\lambda \neq 0)$ имеем

$$R_\lambda \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0,$$

ибо, если $f \in \mathfrak{H}_0$, то в силу соотношений (6.3),

$$\left(R_\lambda f, \varphi_j(\mu)\right) = \left(f, R_{\bar\lambda}\varphi_j(\mu)\right) = \frac{\left(f, \varphi_j(\bar\lambda)\right) - \left(f, \varphi_j(\mu)\right)}{\bar\lambda - \mu} = 0$$

$$(j = 1, 2, ..., n, \quad \mu \neq \bar\lambda),$$

т.е. $R_\lambda f \in \mathfrak{H}_0$.

С другой стороны, так как система $\{\varphi_1(\lambda), ..., \varphi_n(\bar\lambda)\}$ образует базис ортогонального дополнения к $\mathfrak{N}(H - \lambda I)$ $(J\lambda \neq 0)$, то каждому элементу $f \in \mathfrak{H}_0$ отвечает вектор $g = g(\lambda)$ $(J\lambda \neq 0)$ такой, что

$$Hg - \bar\lambda g = f, \quad \text{т.е.} \quad g = R_\lambda f \in D(H).$$

Таким образом, оператор H определен на множестве

$$D_1 = R_\lambda^s \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$$

и если его рассматривать в $\mathfrak{H}_0$ на D_1, то там он самосопряжен, ибо $(H - \lambda I)D_1 = \mathfrak{H}_0$ $(J\lambda \neq 0)$.

Пусть теперь

$$g \in D(H), \qquad f = (H - \lambda I)g \qquad (J\lambda \neq 0).$$

Разложим вектор f:

$$f = f_0 + f_1 \quad (f_0 \in \mathfrak{H}_0, \quad f_1 \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0),$$

тогда получим

$$g = R_\lambda f = R_\lambda f_0 + R_\lambda f_1 = g_0 + g_1,$$

при этом $g_0 = R_\lambda f_0 \in D_1 \subset D(H)$. Кроме того, так как $f_1 \perp \mathfrak{H}_0$, то $f_1 \perp R_{\bar\lambda}\mathfrak{H}_0$, а следовательно, $g_1 = R_{\bar\lambda} f_1 \perp \mathfrak{H}_0$. Таким образом, каждый вектор $g \in D(H)$ имеет своей проекцией на $\mathfrak{H}_0$ некоторый вектор $g_0 \in D_1 \subset D(H)$ т.е. $\mathfrak{H}_0$ приводит H.

Мы пришли к противоречию, ибо, по предположению, H — простой оператор.

Утверждение доказано.

Теорема 24†. *Пусть $H(\overline{D(H)} = \mathfrak{H}$ — простой эрмитов оператор с индексом дефекта (n, n), где $1 < n < \infty$. Для того чтобы каждая точка открытого интервала (a, b) была регулярной точкой оператора H, необходимо (достаточно), чтобы спектр любого (хотя бы одного) самосопряженного расширения $\widetilde{H}$ оператора H внутри (a, b) состоял из изолированного множества собственных чисел.*

Доказательство. Необходимость условия, как уже отмечалось, следует из теоремы 23 независимо от того, простой ли оператор H или нет.

Докажем достаточность указанного условия.

Итак, пусть у H существует самосопряженное расширение $\widetilde{H}$, спектр которого внутри (a, b) состоит из изолированного множества собственных чисел $\{\lambda_j\}$. Тогда всякая точка λ, отличная от точек $\lambda_j (j = 1, 2, ...)$, будет регулярной точкой оператора $\widetilde{H}$, а значит, и H. Остается показать, что и точки λ_j $(j = 1, 2, ...)$ регулярны.

Заметим, что если $\lambda' < \lambda''$ — две точки интервала (a, b), между которыми нет точек последовательности $\{\lambda_j\}_1^\infty$, то интервал (λ', λ'') является люком оператора $\widetilde{H}$, а значит, и оператора H. Следовательно, по теореме 22, спектр любого иного самосопряженного расширения $\widetilde{H}'$ оператора H внутри интервала

†Теорема 24 также содержится в результатах упомянутой уже статьи H. Hamburger'a [10]. Для случая $n = 1$ автор пользовался ею в своих предыдущих исследованиях (см. [10]). Наше доказательство отлично от доказательства H. Hamburger'a.

(λ', λ'') состоит из конечного числа собственных чисел, а внутри всего интервала (a, b) — из изолированного множества собственных чисел.

Пусть, по-прежнему, $\{\varphi_1(\lambda), ..., \varphi_n(\lambda)\}$ — базис множества решений уравнения $H^*\varphi - \lambda\varphi = 0$, построенный по известному способу с помощью резольвенты R_λ оператора $\widetilde{H}$.

Покажем теперь, что кратность любого собственного числа $\lambda_0 \in \{\lambda_j\}_1^\infty$ не превосходит n. Допуская противное, мы сможем утверждать существование собственного вектора ψ $(\widetilde{H}\psi = = \lambda_0\psi, \quad \psi \neq 0)$ такого, что

$$(\psi, \varphi_j(\lambda)) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n),$$

где λ — произвольно выбранная регулярная точка оператора $\widetilde{H}$. Но тогда $\psi = \mathfrak{N}(H - \lambda I)$, а следовательно,

$$\psi = (\lambda_0 - \lambda) R_\lambda \psi \in D(H), \qquad H\psi = \lambda_0\psi.$$

Мы пришли к противоречию, ибо, согласно определению простого оператора H, он не может иметь собственных векторов.

Пусть $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_p\}$ $(p \leq n)$ — базис множества собственных векторов ψ $(\widetilde{H}\psi = \lambda_0\psi)$.

Заметим, что для любого собственного вектора

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \xi_k \psi_k \qquad \Big(\sum_1^p |\xi_k|^2 > 0\Big) \tag{7.13}$$

и регулярной точки λ оператора $\widetilde{H}$ по крайней мере одно из скалярных произведений

$$(\varphi_j(\lambda), \psi) \quad (j = 1, 2, ...) \tag{7.14}$$

отлично от нуля. В самом деле, если допустить, что для некоторого регулярного λ все эти произведения равны нулю, то тогда и при всяком другом регулярном μ:

$$(\varphi_j(\mu), \psi) = (\varphi_j(\lambda) + (\mu - \lambda) R_\mu \varphi_j(\lambda), \psi) =$$

$$= (\varphi_j(\lambda), \psi + (\bar{\mu} - \bar{\lambda}) R_{\bar{\mu}} \psi) = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - \mu} (\varphi_j(\lambda), \psi) = 0$$

$$(j = 1, 2, ..., n),$$

что противоречит простоте оператора H.

Внося в (7.14) выражение ψ из формулы (7.13), мы найдем, что отмеченный факт означает следующее: при любом регулярном λ матрица

$$\|\varphi_j(\lambda), \psi_k\| \quad (j = 1, 2, ..., n; \quad k = 1, 2, ..., p)$$

имеет ранг, равный p.

Рассматривая эту матрицу при каком-либо вещественном регулярном $\lambda = \alpha$ и имея в виду, что базисы $\{\varphi_1(\lambda), ..., \varphi_n(\lambda)\}$ и $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_p\}$ определяются с точностью до линейных несингулярных преобразований, мы придем к выводу, что без ограничения общности можно предположить

$$(\varphi_j(\alpha), \psi_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \qquad (j, k = 1, 2, ..., p). \tag{7.15}$$

Положим тогда для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$R'_\alpha f = R_\alpha f - \sum_{j=1}^{p} (f, \varphi_j(\alpha))\, \varphi_j(\alpha). \tag{7.16}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $H^* - \alpha I$ и учитывая при этом, что

$$H^* \varphi_j(\alpha) - \alpha \varphi_j(\alpha) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., p),$$

находим

$$(H^* - \alpha I) R'_\alpha f - (H^* - \alpha I) R_\alpha f = (\widetilde{H} - \alpha I) R_\alpha f = f.$$

Это равенство показывает, что $R'_\alpha f \neq 0$, если $f \neq 0$, и, следовательно, для самосопряженного оператора R'_α существует обратный самосопряженный оператор $(R'_\alpha)^{-1}$.

Положим

$$H' = (R'_\alpha)^{-1} + \alpha I \qquad (D(H') = \mathfrak{N}(R'_\alpha)).$$

Нетрудно убедиться в том, что оператор H' есть расширение оператора H.

В самом деле, если $g \in D(H)$ и

$$f = Hg - \alpha g = \widetilde{H}g - \alpha g,$$

то $(f, \varphi_j(\alpha)) = 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$ и, следовательно, согласно определению (7.16),

$$R'_\alpha f = R_\alpha f = g,$$

откуда $g \in D(H')$ и

$$H'g - \alpha g = (H' - \alpha I)R'_\alpha f = f = Hg - \alpha g,$$

т.е. $H'g = Hg$.

Точка λ_0 для расширения H' может быть либо регулярной точкой, либо изолированным собственным числом. Если мы покажем, что имеет место первый случай, т.е. что равенство

$$H'\chi - \lambda_0 \chi = 0 \tag{7.17}$$

влечет $\chi = 0$, то теорема будет доказана (ибо λ_0 — произвольно выбранная точка последовательности $\{\lambda_j\}$).

Из равенства (7.17) вытекает, что

$$(\lambda_0 - \alpha)R'_\alpha \chi = R'_\alpha(H'\chi - \alpha\chi) = \chi,$$

а следовательно, в силу определения (7.16),

$$\chi - (\lambda_0 - \alpha)R_\alpha \chi = -(\lambda_0 - \alpha)\sum_1^p (\chi, \varphi_j(\alpha))\varphi_j(\alpha). \tag{7.18}$$

С другой стороны, система $\{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_p\}$, будучи базисом множества решений уравнения $\widetilde{H}\psi = \lambda_0\psi$, будет также базисом множества решений уравнения

$$\psi - (\lambda_0 - \alpha)R_\alpha \psi = 0. \tag{7.19}$$

Если умножить обе части равенства (7.18) на ψ_k $(k = 1, 2, ..., p)$ и принять во внимание (7.15), то мы найдем

$$(\chi, \varphi_k(\alpha)) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., p) \tag{7.20}$$

и, следовательно, в равенстве (7.18) правую часть можно заменить нулем. Таким образом, χ есть решение уравнения (7.19) и, стало быть,

$$\chi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \cdots + c_p\psi_p.$$

Внося теперь это выражение для χ в равенство (7.20) и воспользовавшись снова (7.15), мы найдем, что $c_k = 0$, $k = 1, 2, ..., p$, т.е. $\chi = 0$.

Теорема доказана.

5. Спектр самосопряженного оператора $\widetilde{H}$ условимся называть *дискретным*, если он состоит из изолированного множества собственных чисел конечной кратности.

Из теоремы 24 можно заключить, что если некоторое самосопряженное расширение $\widetilde{H}$ оператора $H (1 \le n(H) < \infty)$ имеет дискретный спектр, то и всякое иное самосопряженное расширение $\widetilde{H}'$ этого оператора имеет дискретный спектр.

В самом деле, если спектр $\widetilde{H}$ дискретен и H — простой оператор, то, по теореме 24, вещественная ось состоит из одних регулярных точек и поэтому, в силу теоремы 22, спектр любого иного самосопряженного расширения $\widetilde{H}'$ состоит из изолированного множества собственных чисел кратности $\le n$.

В случае же, когда оператор H — не простой, мы придем к тому же выводу, пользуясь разложениями:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1,$$

$$H = H_0 \oplus H_1,$$

где $\mathfrak{H}_0$ — максимальное пространство[†], которое приводит H и в котором H (сводясь к H_0) — самосопряженный оператор, $\mathfrak{H}_1$ — его ортогональное дополнение, а H_0 и H_1 — эрмитовы операторы, порождаемые оператором H соответственно в $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$.

[†]Из рассуждений, проведенных перед доказательством теоремы 24, следует, что $\mathfrak{H}_0$ есть совокупность всех векторов f, ортогональных к векторам $\varphi_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ при любом λ $(I\lambda \ne 0)$.

§ 8. Полуограниченные операторы, допускающие расширения с дискретным спектром

Пусть T — полуограниченный (снизу) оператор, а $\widetilde{T}$ — его полуограниченное самосопряженное расширение, имеющее дискретный спектр. Тогда спектральное разложение оператора $\widetilde{T}$ принимает вид

$$\widetilde{T}f = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(\widetilde{T})(f, \varphi_j)\varphi_j,$$

где $\{\varphi_j\}_1^{\infty}$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора $\widetilde{T}$ и

$$\lambda_1(\widetilde{T}) \leq \lambda_2(\widetilde{T}) \leq \cdots \leq \lambda_n(\widetilde{T}) \leq \cdots$$

— соответствующий ряд собственных чисел, в котором каждое собственное число фигурирует столько раз, какова его кратность.

Если, кроме того, $1 \leq n(T) < \infty$, то, согласно теореме 18 и замечанию, сделанному в конце предыдущего параграфа, в этом случае всякое самосопряженное расширение оператора T будет иметь полуограниченный снизу и притом дискретный спектр. Если же $n(T) = \infty$, то это утверждение неверно ни в одной своей части.

Ввиду этого представляет интерес следующая

Теорема 25. *Если некоторое самосопряженное полуограниченное расширение $\widetilde{T}$ эрмитова оператора T $(1 \leq n(T) \leq \infty)$ имеет дискретный спектр, то жесткое расширение T_μ оператора T имеет дискретный спектр, при этом*

$$\lambda_j(\widetilde{T}) \leq \lambda_j(T_\mu) \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{8.1}$$

где $\lambda_j(\widetilde{T}), \lambda_j(T_\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — последовательные собственные числа операторов T и T_μ.

Доказательство. Если мы заменим в теореме данные операторы T, $\widetilde{T}$ и T_μ соответственно операторами

$$S = T + aI, \quad \widetilde{S} = \widetilde{T} + aI, \quad S_\mu = T_\mu + aI,$$

где a — какое-либо вещественное число, и докажем теорему для операторов $\widetilde{S}$ и S_μ, то, очевидно, тем самым она будет доказана и для данных операторов.

Выберем $a > m(\widetilde{T})$; тогда $m(\widetilde{S}) > 0$ и, согласно теореме 12,

$$S_\mu^{-1} = \widetilde{S}^{-1} - (\widetilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0}, \tag{8.2}$$

где $\mathfrak{N}_0$ — множество решений уравнения $S^*\varphi = 0$.

Так как, по условию, спектр оператора $\widetilde{S}$ дискретен и положителен, то оператор $\widetilde{S}^{-1}$, а с ним и оператор $(\widetilde{S}^{-1})_{\mathfrak{N}_0}$ вполне непрерывны†. Стало быть, и оператор S_μ^{-1} вполне непрерывен, а значит, спектр оператора S_μ дискретен.

Если

$$\lambda_1(\widetilde{S}) \le \lambda_2(\widetilde{S}) \le \cdots, \lambda_1(S_\mu) \le \lambda_2(S_\mu) \le \cdots$$

$$(0 < \lambda_1(\widetilde{S}),\ 0 < \lambda_1(S_\mu))$$

суть последовательности собственных чисел, расположенных по возрастанию, соответственно, операторов $\widetilde{S}$ и S_μ, то

$$\lambda_1^{-1}(\widetilde{S}) \ge \lambda_2^{-1}(\widetilde{S}) \ge \cdots, \lambda_1^{-1}(S_\mu) \ge \lambda_2^{-1}(S_\mu) \ge \cdots$$

суть последовательности собственных чисел, расположенных по убыванию, соответственно, операторов $\widetilde{S}^{-1}$ и S_μ^{-1}. А так как, согласно соотношению (8.2),

$$S_\mu^{-1} \le \widetilde{S}^{-1},$$

то, в силу известных мини-максимальных свойств собственных чисел вполне непрерывных операторов,

$$\lambda_j^{-1}(S_\mu^{-1}) \le \lambda_j^{-1}(\widetilde{S}^{-1}), \text{ т.е. } \lambda_j(\widetilde{S}) \le \lambda_j(S_\mu) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Теорема доказана.

---

†Согласно теореме 1 (см. формулу (1.1)), если самосопряженный оператор H вполне непрерывен, то при любом замкнутом множестве $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ оператор $H_{\mathfrak{N}}$ также вполне непрерывен (ибо произведение всяких двух операторов, из которых один ограничен, а другой вполне непрерывен, есть вполне непрерывный оператор).

Замечание 8.1. В том случае, когда $n(T) < \infty$, можно утверждать больше, чем дает (8.1), а именно:

$$\lambda_j(\widetilde{T}) \le \lambda_j(T_\mu) \le \lambda_{j+n}(\widetilde{T})$$

$$(j = 1, 2, \ldots).$$

В самом деле, если бы для некоторого значения j имело место неравенство $\lambda_{j+n}(\widetilde{T}) < \lambda_j(T_\mu)$, то внутри интервала $(-\infty, \lambda_j(T_\mu))$ находилось бы $j-1$ собственных чисел (считая с их кратностями) оператора T_μ и $j+n$ собственных чисел оператора $\widetilde{T}$, что невозможно, согласно замечанию 7.1.

Теорема 26. *Если некоторое самосопряженное полуограниченное расширение $\widetilde{S}$ оператора S, для которого $m(S) > 0$, имеет дискретный спектр, то и расширение S_M оператора S, рассматриваемое в $\mathfrak{M}_0$, где $\mathfrak{M}_0$ — ортогональное дополнение к нулевому собственному подпространству $\mathfrak{N}_0$ оператора S_M, имеет дискретный спектр.*

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, оператор S_μ имеет дискретный спектр. С другой стороны, согласно формуле (5.17), попутно доказанной при доказательстве теоремы 13, имеем

$$S_M^{(-1)} g = P_{\mathfrak{M}_0} S_\mu^{-1} g$$

$$(g \in \mathfrak{M}_0),$$

где $S_M^{(-1)}$ — оператор, обратный для S_M в $\mathfrak{M}_0$, а $P_{\mathfrak{M}_0}$ — оператор ортогонального проектирования на $\mathfrak{M}_0$.

Так как оператор S_μ имеет дискретный спектр, то оператор S_μ вполне непрерывен, а следовательно, таковым же является оператор $S_M^{(-1)}$ и, значит, оператор S_M имеет в $\mathfrak{M}_0$ дискретный спектр.

Замечание 8.2. Напомним, что $\mathfrak{N}_0$ представляет собой множество решений φ уравнения $S^*\varphi = 0$ и имеет число измерений, равное $n(S)$, которое может быть бесконечным. Если же $n(S) < \infty$, то теорему можно сформулировать проще, а именно так:

S_M *имеет дискретный спектр.*

Для этого случая можно утверждать, что каково бы ни было положительное самосопряженное расширение $\widetilde{S}$ оператора S, его собственные числа всегда удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_j(S_\mu) \leq \lambda_j(\widetilde{S}) \leq \lambda_j(S_M) \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{8.3}$$

В самом деле, согласно теореме 11, при $a > 0$:

$$(S_\mu + aI)^{-1} \leq (\widetilde{S} + aI)^{-1} \leq (S_M + aI)^{-1}.$$

Все фигурирующие здесь обратные операторы вполне непрерывны и поэтому неравенства между ними влекут соответствующие неравенства между их последовательными (по убыванию) собственными числами.

Таким образом, справедливы неравенства

$$\frac{1}{\lambda_j(S_\mu) + a} \leq \frac{1}{\lambda_j(\widetilde{S}) + a} \leq \frac{1}{\lambda_j(S_M) + a} \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

откуда и вытекают соотношения (8.3).

Заметим также, что если S — простой оператор, то, как можно доказать, имеют место строгие неравенства

$$\lambda_j(S_M) < \lambda_j(S_\mu) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Список литературы

[1] *J. von Neumann.* Allgemeine Eigenwert theorie Hermitescher Functionaloperatoren // Math. Ann. — 1929. — N 102. — P.49–131.

[2] *Friedrichs K.* Spectraltheorie halbeschrĕnkter Operatoren and Anwendung auf die Spectralzerlegung von Differentialoperatoren // Math. Ann. — 1934. — N 109. — P.465–487.

[3] *Krein M.* Sur les operateurs differentiels autoadjoints et leurs functions de Green symetriques // Rec. Math. — 1937. — 2(44). — P.1023–1072.

[4] *Krein M.* Sur les divelоppements des fonctions arbitraires en Séries de fonctions fondamentales d'un probleme aux limites quelconques // Rec. Math. — 1937. — 2(44). — P.923–932.

[5] *Крейн М.* О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных эрмитовых операторов // ДАН СССР. — 1945. — **XVIII**, № 5. — С.303–306.

[6] *Крейн М.* Об обобщенных резольвентах эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // ДАН СССР. — **II**, № 8.

[7] *Stone M.N.* Linear Transformations in Hilbrert space // Duke Math. J. — 1940. — N 7. — P.504–508.

[8] *Beteman H.* Messenges of Mathematics. — 1908. — 37(12).

[9] *Calkin J.W.* Symmetric transformations in Hilbert space // Duke Math. J. — 1940. — N7. — P.504–508.

[10] *Hamburger H.J.* Contributions to the Theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m) // Ann. of Math. — 1944. — **45**, N 1. — P.59–99.

[11] *Крейн М.* Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице // ДАН СССР. — 1944. — **XLIV**, № 4. — С.131–134.

[12] *Freudenthal H.* Uber die Friedrichssche Forsetzung halbbeschränkter Operatoren // Akad. van Wetenschappen te Amsterdam. — 1936. — **XXXIX**, N 7.

ПРО ЕРМІТОВІ ОПЕРАТОРИ З НАПРЯМНИМИ ФУНКЦІОНАЛАМИ

(Сборник трудов Института математики АН УССР. — 1948. — Том 10)

Ця стаття присвячена докладному обгрунтуванню та дальшому розвитку основної теореми нашої нотатки [1] "Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения", яка повідомлена без доведення і є узагальненням однієї важливої теореми М.С. Лівшица [2].

За браком місця тут не подані різноманітні застосування цієї теореми щодо представлення функцій у вигляді інтегралів Стільтьєса.

Цим застосуванням ми сподіваємося присвятити окрему статтю, в якій, зокрема, буде подано розв'язок питання про відшукування загального вигляду неперервної функції $f(r)$ $(0 \le r \le \le R,\ \ R \le \infty)$, додатно означеної всередині гіперкулі радіуса R n-мірного або нескінченномірного простору сталої кривизни $k \le 0$ (простору Евкліда) (Гільберта, Лобачевського, Лобачевського–Гільберта)†.

---

†Нехай Q — деяка метрична множина з функцією віддалі $d(p,q)(p,q \in Q)$. Функція $f(r)$, означена для всіх значень $r = d(p,q)(p,q \in Q)$, називається за Schoenberg'ом додатно означеною на Q, якщо функція $\Phi(p,q) = f[d(p,q)]$ є додатно означене ядро на Q, тобто для будь-яких $q_1 \in Q, \dots, q_n \in \in Q$ і дійсних $\xi_1, \dots, \xi_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ виконується нерівність

$$\sum_{j,k=1}^{n} \Phi(q_j, Q_k)\xi_j\xi_k \ge 0.$$

§ 1. Основні означення

1. Нехай $\mathfrak{L}$ — деяка лінійна множина, а A — деякий лінійний в $\mathfrak{L}$ оператор, область означення якого $\mathfrak{D}(A)(\subset \mathfrak{L})$, взагалі кажучі, складає правильну частину $\mathfrak{L}$ $[\mathfrak{D}(A) \neq \mathfrak{L}]$.

О з н а ч е н н я 1. Нехай $\Phi_j(f;\lambda)$ $(j = 1,...,p)$ — лінійні функціонали, означені на всій $\mathfrak{L}$, і такі, що залежать від дійсного параметра λ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Система функціоналів Φ_j $(j = 1,...,p)$ називається ***напрямною системою*** для оператора A, якщо вона має такі властивості:

1. При любому фіксованому $f \in \mathfrak{L}$ функції $\Phi_j(f;\lambda)$ $(j = 1,...,p)$ є аналітичні функції від λ на всій дійсній осі.

2. Хоч би при одному значенні λ функціонали $\Phi_j(f;\lambda)$ $(j = 1,...,p)$ лінійно незалежні†.

3. Які б не були елементи $f_0 \in \mathfrak{L}$ та скаляр λ_0 $(-\infty < \lambda_0 < \infty)$, рівняння $A\chi - \lambda_0\chi = f_0$ має розв'язок в тому і лише в тому випадку, коли

$$\Phi_j(f_0;\lambda_0) = 0 \quad (j = 1,2,...,p).$$

Із означення напрямної системи функціоналів оператора A легко випливають такі її властивості:

a) *Якщо* $\chi \in \mathfrak{D}(A)$, *то*††

$$\Phi_j(A\chi;\lambda) \equiv \lambda\Phi_j(\chi;\lambda) \quad (j = 1,2,...,p).$$

Дійсно, на підставі умови 3 означення та лінійності функціоналів Φ_j,

$$0 = \Phi_j(A\chi - \lambda\chi;\lambda) = \Phi_j(A\chi;\lambda) - \lambda\Phi_j(\chi;\lambda) \qquad (j = 1,2,...,p).$$

b) *Якщо для деякого* $f \in \mathfrak{L}$ *і деякого дійсного* λ_0

$$\Phi_j(f;\lambda_0) = 0 \qquad (j = 1,2,...,p), \tag{1}$$

---

†В нашій нотатці [1] умова 2 помилково була випущена в формулюванні основної теореми.

††Символом $\equiv$ ми позначаємо тотожну рівність щодо λ.

то знайдеться таке $\chi \in \mathfrak{D}(A)$, *що*

$$\Phi_j(\chi; \lambda) \equiv \frac{\Phi_j(f; \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)} \qquad (j = 1, 2, ..., p). \tag{2}$$

Справді, із (1) випливає існування такого $\chi \in \mathfrak{D}(A)$, що

$$A\chi - \lambda_0\chi = f.$$

Застосовуючи до обох частин цієї рівності функціонали Φ та користуючись а), ми одержимо (2).

с) *Для довільного скінченного інтервалу* I *дійсної осі знайдуться елементи* $u_j \in \mathfrak{L}$ $(j = 1, 2, ..., p)$ *такі, що детермінант*

$$\Delta(\lambda) = |\Phi_j(u_k; \lambda)|_1^p \neq 0, \quad \text{коли} \quad \lambda \in I.$$

Справді, згідно з умовою 2 означення, при деякому $\lambda = a$ функціонали $\Phi_j(f; a)$ $(j = 1, 2, ..., p)$ лінійно незалежні. Отже, лінійна множини всіх векторів $\mathfrak{X}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p)$ вигляду

$$\xi_j = \Phi_j(f; a) \qquad (f \in \mathfrak{L})$$

p-мірна і, значить, знайдуться такі $f_k \in \mathfrak{L}$ $(k = 1, 2, ..., p)$, що детермінант

$$|\Phi_j(f_k; a)|_1^p \neq 0.$$

Покладемо

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta(f_1, f_2, ..., f_p; \lambda) = |\Phi_j(f_k; \lambda)|_1^p \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

тоді

$$\Delta_1(a) \neq 0.$$

Через те, що $\Delta_1(\lambda)$ — аналітична функція на всій дійсній осі, то твердження с), очевидно, буде доведено, якщо ми покажемо, що рівність

$$\Delta(f_1, f_2, ..., f_p; \lambda_0) = 0 \quad (-\infty < \lambda_0 < \infty) \tag{3}$$

тягне за собою існування таких $f'_k \in \mathfrak{L}$, що

$$\Delta(f'_1, f'_2, ..., f'_p; \lambda) = \frac{\Delta(f_1, f_2, ..., f_p; \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)}.$$

Із (3) випливає існування таких c_k $(k = 1, 2, ..., p)$, що

$$\sum_{k=1}^{p} c_k \Phi_j(f_k; \lambda_0) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., p), \quad \sum_{1}^{p} |c_k| \neq 0. \qquad (4)$$

Серед чисел c_k не всі рівні нулю; нехай, наприклад, $c_p \neq 0$. Покладаючи тоді

$$f_p^* = \frac{\sum_{1}^{p} c_k f_k}{c_p},$$

будемо мати, згідно з (4): $\Phi_j(f_p^*; \lambda_0) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., p)$, а значить, згідно з b), знайдеться таке $f_p' \in \mathfrak{L}$, що

$$\Phi_j(f_p'; \lambda) = \frac{\Phi_j(f_p^*; \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)} \qquad (j = 1, 2, ..., p).$$

Але тоді при $f_k' = f_k$ $(k = 1, 2, ..., p-1)$ та знайденому f_p' будемо мати

$$\Delta(f_1', ..., f_{p-1}', f_p'; \lambda) = \frac{\Delta(f_1^*, ..., f_{p-1}^*, f_p^*; \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)} = \\ = \frac{\Delta(f_1, ..., f_{p-1}, f_p; \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)}.$$

Твердження c) доведено.

2. Введемо:

О з н а ч е н н я 2. Лінійну множину $\mathfrak{L}$ назвемо *квазігільбертовим* простором, якщо в ній задано функціонал (g, f) $(g, f \in \mathfrak{L})$, який має такі властивості:

I $(g, f) = \overline{(f, g)} \quad (g, f \in \mathfrak{L})$

II $(g_1 + g_2, f) = (g_1, f) + (g_2, f) \quad (g_1, g_2, f \in \mathfrak{L})$

III $(\lambda g, f) = \lambda(g, f) \quad (g, f \in \mathfrak{L}$, λ-скаляр$)$

IV $(g, g) \geq 0 \quad (g \in \mathfrak{L})$.

Таким чином, функціонал (g, f) має всі властивості звичайного скалярного добутку, крім, можливо, одного $(g, g) > 0$, при $g \neq 0$.

Для квазіскалярного добутку (g,f) залишається справедливою нерівність Шварца

$$|(g,f)|^2 \leq (g,g)(f,f). \tag{5}$$

На основі її множина $\widehat{0}$ всіх тих $g \in \mathfrak{L}$, для яких $(g,g) = 0$, лінійна.

Розглянемо фактор-простір

$$\widehat{\mathfrak{L}} = \frac{\mathfrak{L}}{\widehat{0}}.$$

Елементами його будуть лінійні підмножини $G \subset \mathfrak{L}$, які мають ту властивість, що коли $g \in G$, то G складається з тих і тільки тих $g' \in \mathfrak{L}$, для яких $g' - g \in \widehat{0}$. Якщо $G \in \widehat{\mathfrak{L}}$ та $g \in G$, то умовимося писати: $G = \widehat{g}$.

Додавання в $\widehat{\mathfrak{L}}$ та множення на скаляр λ визначається так, що, коли $G = \widehat{g}$, $H = \widehat{h}$ та $f = g + h$, то $G + H = F$, де $F = \widehat{f}$; коли $G = \widehat{g}$, $f = \lambda g$, то $\lambda G = F$, де $F = \widehat{f}$.

На основі (5), коли $g \in \widehat{0}$, то $(g,f) = 0$ при довільному $f \in \mathfrak{L}$. Звідси легко зробити висновок, що коли $G, F \in \widehat{\mathfrak{L}}$, то (g,f) не залежить від вибору $g \in G$ та $f \in F$, і можна покласти

$$(G,F) = (g,f) \quad (g \in G, \quad f \in F).$$

Легко бачити, що функціонал (G,F), так визначений на всіх $G, F \in \widehat{\mathfrak{L}}$, буде мати всі властивості скалярного добутку (цебто властивості I–III і властивість $(G,G) > 0$ при $G \neq \widehat{0}$). Введення цього добутку в $\widehat{\mathfrak{L}}$ обертає $\widehat{\mathfrak{L}}$, якщо воно скінченномірне, в унітарний простір та, якщо $\widehat{\mathfrak{L}}$ нескінченномірне, — в деякий, взагалі кажучи, неповний гільбертовий простір, який, за відомим правилом, може бути доповнений до гільбертового простору.

Таким чином, квазігільбертовий простір $\mathfrak{L}$ завжди породжує або деякий унітарний простір, або деякий гільбертовий простір. В тому і другому випадку породжуваний простір ми будемо позначати через $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$.

Нехай $\{g_n\} \subset \mathfrak{L}$ та $g \in \mathfrak{L}$, умовимося писати $g_n \to g$, якщо

$$(g - g_n, g - g_n) \to 0. \tag{6}$$

Очевидно, що *квазізбіжність* послідовності $\{g_n\}$ $(\subset \mathfrak{L})$ до елемента $g \in \mathfrak{L}$, яка виражається (6), еквівалентна збіжності послідовності $\{\widehat{g}_n\}$ $(\subset \widehat{\mathfrak{L}})$ до елемента $\widehat{g} \in \widehat{\mathfrak{L}}$ в розумінні звичайної збіжності в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$.

Ясно також, що квазіскалярний добуток (g, f) неперервний відносно квазізбіжності, тобто якщо $g_n \to g$ та $f_n \to f$, то $(g_n, f_n) \to (g, f)$.

3. Означення 3. Лінійний оператор A, який діє в квазігільбертовому просторі $\mathfrak{L}$, будемо називати *ермітовим*, якщо

$$(Ag, f) = (g, Af) \qquad (g, f \in \mathfrak{D}(A)) \tag{7}$$

та коли $\mathfrak{D}(A)$ квазіщільне в $\mathfrak{L}$[†].

Ермітовий оператор має такі властивості: якщо $g_0 \in \mathfrak{D}(A)$ та $g_0 \in \widehat{0}$, то $Ag_0 \in \widehat{0}$.

Насправді, якщо $g_0 \in \widehat{0}$ та $g_0 \in \mathfrak{D}(A)$, то, згідно з (7): $(Ag_0, f) = 0$ $[f \in \mathfrak{D}(A)]$.

Через те, що $\mathfrak{D}(A)$ квазіщільне в $\mathfrak{L}$, то знайдеться послідовність $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$ така, що $f_n \to Ag$; підставляючи в (7) замість f елемент f_n та переходячи до границі при $n \to \infty$, ми знайдемо, що $(Ag, Ag) = 0$, тобто $Ag \in \widehat{0}$.

Доведене еквівалентне такому: якщо $h_k = Ag_k$ $(k = 1, 2)$ та $\widehat{g}_1 = \widehat{g}_2$, то $\widehat{h}_1 = \widehat{h}_2$.

Через це ермітовий оператор A в $\mathfrak{L}$ породжує завжди деякий ермітовий оператор (який ми будемо позначати через $\widehat{A}$) в $\widehat{\mathfrak{L}}$ (або $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$), який можна визначити так:

1) $\mathfrak{D}(\widehat{A}) = \widehat{\mathfrak{D}}(A)$, тобто $\mathfrak{D}(\widehat{A})$ складається з тих і тільки тих елементів $G \in \widehat{\mathfrak{L}}$, для яких знайдеться $g \in \mathfrak{D}(A)$ таке, що $G = \widehat{g}$ $(g \in G)$.

2) Якщо $g \in \mathfrak{D}(A)$ та $h = Ag$, то

$$\widehat{h} = \widehat{A}\widehat{g}.$$

[†]Тобто для любого $g \in \mathfrak{L}$ знайдеться послідовність $\{g_n\} \subset \mathfrak{D}(A)$ така, що $g_n \to g$.

Індексом дефекту ермітового оператора A, який діє в $\mathfrak{L}$, ми будемо називати індекс дефекту відповідного ермітового оператора $\widehat{A}$, розглядуваного в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$. Якщо (m_+, m_-) — індекс дефекту оператора A, то кардинальні числа $m_+ = m_+(A)$ і $m_- = m_-(A)$ ми будемо називати *дефектними числами* оператора A.

Ермітовий оператор A будемо називати *додатним*, коли

$$(Ag, g) \geq 0 \quad [g \in \mathfrak{D}(A)].$$

Очевидно, що коли оператор A додатний, то і оператор $\widehat{A}$ додатний, і навпаки.

§ 2. Основна теорема

Позначимо через V_p $(p = 1, 2, ...)$ клас всіх ермітових операторів матриць-функцій $\mathfrak{T}(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^p$, таких, що

1) для довільних комплексних $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p$ форма

$$\sum_{j,k=1}^{p} \tau_{jk}(\lambda)\xi_j\bar{\xi}_k$$

є неспадаюча функція від λ;

2) $\mathfrak{T}(0) = 0,\ \mathfrak{T}(\lambda - 0) = \mathfrak{T}(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty).$

Легко бачити, що з властивості 1) випливає обмеженість варіації кожної з функцій $\tau_{jk}(\lambda)$ $(j, k = 1, 2, ..., p)$ в довільному скінченному інтервалі.

Теорема 1. *Нехай $\mathfrak{L}$ — деякий гільбертовий простір та A — деякий ермітовий оператор в $\mathfrak{L}$, який має напрямну систему функціоналів $\Phi_j(f; \lambda)$ $(j = 1, 2, ..., p)$.*

Тоді знайдеться хоч одна матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$ така, що для довільних двох елементів $g, f \in \mathfrak{L}$

$$(g, f) = \sum_{j,k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(g; \lambda)\overline{\Phi_k(f; \lambda)}\, d\tau_{jk}(\lambda). \qquad (!)$$

Якщо, крім того, A додатний, то матриця $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$, яка дає представлення (!), може бути обрана так, щоб $\mathfrak{T}(\lambda) = 0$ при $\lambda \leq 0$[†].

Д о в е д е н н я . Уявимо спочатку, що множина $\widehat{0}$ складається тільки з нуля, тобто, що $(f, f) > 0$ для довільного $f \in \mathfrak{L}$, відмінного від нуля.

У цьому випадку можна вважати $\mathfrak{L} = \widehat{\mathfrak{L}}$, і $\mathfrak{L}$ буде деякою лінійною всюди щільною множиною гільбертового простору $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$, і A — ермітовим оператором в $\mathfrak{H}$.

Якщо вкласти простір $\mathfrak{H}$ в деякий інший гільбертовий простір $\widetilde{\mathfrak{H}}$ так, щоб число вимірів ортогонального доповнення $\widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$ було *достатньо великим*, то оператор A допускатиме в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ самоспряжені (гіпермаксимальні) розширення $\widetilde{A}$ (див. статтю [4] М.А. Наймарка, де докладно вивчені самоспряжені розширення ермітових операторів з в и х о д о м в ширший простір)[††].

Позначимо через $E(\lambda) = E(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ спектральну оператор-функцію якого-небудь такого самоспряженого розширення $\widetilde{A}$. Тоді для довільного $\chi \in \mathfrak{D}(A)$ і $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$A\chi - \lambda\chi = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \lambda) dE(t)\chi.$$

Введемо до розгляду оператор

$$\Delta_\lambda^h = E(\lambda + h) - E(\lambda) \quad (h \neq 0);$$

для нього матимемо

$$\Delta_\lambda^h(A\chi - \lambda\chi) = \int_{\lambda}^{\lambda+h} (t - \lambda) dE(t)\chi,$$

[†]Порівняй з теоремою 1 нотатки [2] М.С. Лівшица.

[††]Такого роду розширення $\tilde{A}$ можна одержати, наприклад, таким способом. Нехай (m, n) — індекс дефекту ермітового оператора A в $\mathfrak{H}$. Утворимо ще який-небудь гільбертовий простір $\mathfrak{H}_1$ і в ньому ермітів оператор R з індексом дефекту (n, m). Позначимо через $\tilde{\mathfrak{H}}$ пряму ортогональну суму просторів $\mathfrak{H}$ та $\mathfrak{H}_1$, а через C оператор, який представляє пряму суму операторів A та R. Через те, що індекс дефекту оператора C дорівнює $(m + n, m + n)$, то оператор C допускає деяке самоспряжене розширення $\tilde{C}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$, яке одночасно буде самоспряженим розширенням оператора A в $\tilde{\mathfrak{H}}$.

а значить,

$$\|\Delta_\lambda^h(A\chi - \lambda\chi)\|^2 = \left|\int\limits_{\lambda\pm0}^{\lambda+h} (t-\lambda)^2 d(E(t)\chi,\chi)\right| \le h^2 \left|\int\limits_{\lambda\pm0}^{\lambda+h} d(E(t)\chi,\chi)\right|.$$

Таким чином,

$$\|\Delta_\lambda^h(A\chi - \lambda\chi)\| = |h|\varepsilon(h;\chi,\lambda), \tag{8}$$

де при довільних фіксованих $\chi \in \mathfrak{D}(A)$ та $\lambda \in (-\infty,\infty)$

$$\varepsilon(h;\chi,\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Це попереднє зауваження ми незабаром використаємо.

Нехай тепер I — деякий відкритий інтервал дійсної осі, а елементи $u_k \in \mathfrak{L}$ $(k = 1,2,\dots,p)$ такі, що

$$\Delta(u_1,\dots,u_p;\lambda) = |\Phi_j(u_k;\lambda)|_1^p \ne 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in I. \tag{9}$$

Нехай матриця $\|\psi_{jk}^{(u)}(\lambda)\|_1^p$ є оберненою відносно матриці $\|\Phi_j(u_k;\lambda)\|$ в точках λ, де $\Delta \ne 0$, тобто

$$\sum_{\nu=1}^{p} \psi_{j\nu}^{(u)}(\lambda)\Phi_\nu(u_k;\lambda) = \delta_{jk} \quad (j,k = 1,2,\dots,p). \tag{10}$$

Елементу $f \in \mathfrak{L}$ віднесемо скалярні функції

$$F_\mu(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \psi_{\mu j}^{(u)}(\lambda)\Phi_j(f;\lambda) \quad (\mu = 1,\dots,p; \quad \lambda \in I)$$

і вектор-функцію

$$f_\lambda = f - \sum_{\mu=1}^{p} F_\mu(\lambda)u_\mu \quad (\lambda \in I).$$

На підставі (10)

$$\Phi_j(f_\lambda;\lambda) = 0 \quad (j = 1,2,\dots,p)$$

і, значить, знайдеться елемент $g_\lambda \in \mathfrak{D}(A)$ такий, що

$$f_\lambda = Ag_\lambda - \lambda g_\lambda, \tag{11}$$

звідки згідно з (8) для довільної точки $\lambda \in I$

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\Delta_\lambda^h f_\lambda}{h}\right\| = \lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\Big(\Delta_\lambda^h f - \sum_{\mu=1}^{p} F_\mu(\lambda)\Delta_\lambda^h u_\mu\Big)\right\| = 0. \tag{12}$$

З другого боку, маємо

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\Big(F_\mu(\lambda)\Delta_\lambda^h u_\mu - \int\limits_\lambda^{\lambda+h} F_\mu(t)dE(t)u_\mu\Big)\right\| = 0 \tag{13}$$

$$(\mu = 1, 2, ..., p).$$

Дійсно, вираз, який стоїть під знаком границі, збігається з виразом

$$\left\|\frac{1}{h}\int\limits_\lambda^{\lambda+h}[F_\mu(\lambda) - F_\mu(t)]dE(t)u_\mu\right\| =$$

$$= \frac{1}{|h|}\Big\{\int\limits_\lambda^{\lambda+h}|F_\mu(\lambda) - F_\mu(t)|^2 d[E(t)u_\mu, u_\mu]\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

квадрат якого, наприклад, при $h > 0$, не більше

$$M_\mu^2[(E(\lambda+h)u, u) - (E(\lambda+0)u, u)],$$

де M_μ — максимум модуля похідної $F_\mu(\lambda)$ на інтервалі I.

З (12) та (13) виводимо, що

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}\Big(\Delta_\lambda^h f - \sum_{\mu=1}^{n}\int\limits_\lambda^{\lambda+h} F_\mu(t)dE(t)u_\mu\Big)\right\| = 0. \tag{14}$$

Таким чином, якщо зафіксувати $a \in I$ і покласти

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_a^\lambda dE(t)f - \sum_{\mu=1}^{p}\int\limits_a^\lambda F_\mu(t)dE(t)u_\mu,$$

то (14) буде означати, що вектор-функція має спільну похідну по λ, рівну нулеві всюди в I. Беручи до уваги, що $\varphi(a) = 0$, виводимо, що $\varphi(\lambda) \equiv 0$ $(\lambda \in I)$.

Таким чином,

$$E(\lambda'')f - E(\lambda')f = \sum_{\mu=1}^{p} \int_{\lambda'}^{\lambda''} F_\mu(t) dE(t) u_\mu =$$

$$= \sum_{\mu,j=1}^{p} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \psi_{\mu j}^{(u)}(t) \Phi_j(f;t) dE(t) u_\mu \quad (f \in \mathfrak{L}; \quad \lambda', \lambda'' \in I). \tag{15}$$

Звідки

$$(E(\lambda'')g, f) - (E(\lambda')g, f) = (E(\lambda'')g - E(\lambda')g, E(\lambda'')f - E(\lambda')f) =$$

$$= \sum_{\mu,\nu,j,k=1}^{p} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \psi_{\mu j}^{(u)}(t) \Phi_j(g,t) \overline{\psi_{\nu k}^{(u)}(t) \Phi_k(f;t)} d(E(t) u_\mu, u_\nu) \tag{16}$$

$$(g, f \in \mathfrak{L}; \quad \lambda', \lambda'' \in I).$$

Тепер нехай λ_0 — довільне дійсне число.

Візьмемо за I довільний скінченний інтервал, який містить у собі точки 0 й λ_0, за u_k $(k = 1, \ldots, p)$ довільні елементи із $\mathfrak{L}$ при умові виконання (9), і покладемо

$$\tau_{jk}(\lambda_0) = \sum_{\mu,\nu=1}^{p} \int_{0}^{\lambda_0} \psi_{\mu j}^{(u)}(\lambda) \overline{\psi_{\nu k}^{(u)}(\lambda)} d(E(\lambda) u_\mu, u_\nu) \tag{17}$$

$$(j, k = 1, 2, \ldots, p).$$

Ми покажемо, що матриця $\mathfrak{T}(\lambda_0) = \|\tau_{jk}(\lambda_0)\|_1^p$ цілком визначається значенням λ_0 (отже, не залежить від вибору базиса u_1, $\ldots, u_p$) і що одержувана таким чином матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$ має властивість 1, яка вимагається теоремою.

Для цього введемо в розгляд яку-небудь іншу систему елементів $\nu_k \in \mathfrak{L}$ $(k = 1, 2 \ldots, p)$ таких, що $\Delta(v_1, \ldots, v_p; \lambda) \neq 0$ при довільному λ із замкненого інтервалу $(0, \lambda_0)$, та складемо для неї матрицю $\|\psi_{jk}^{(v)}(\lambda)\|_1^p$, обернену відносно матриці $\|\Phi_j(v_k; \lambda)\|_1^p$.

З допомогою (16) знаходимо, що

$$\sum_{\rho,v=1}^{p}\int_{0}^{\lambda_0}\psi_{\rho r}^{(v)}(\lambda)\overline{\psi_{vs}^{(v)}(\lambda)}d(E(\lambda)v_\rho,u_v)=$$

$$=\sum_{\mu,\nu,j,k,\rho,v=1}^{p}\int_{0}^{\lambda_0}\psi_{\rho r}^{(v)}(t)\psi_{vs}^{(v)}(t)\Phi_j(v_\rho,t)\times$$

$$\overline{\times\Phi_k(v_s,t)\psi_{\mu j}^{(u)}(t)\psi_{vk}^{(u)}(t)}d(E(t)u_\mu,u_\mu)=$$

$$=\sum_{r,s=1}^{p}\int_{0}^{\lambda_0}\psi_{\mu r}^{(u)}(t)\psi_{\nu s}^{(u)}(t)d(E(t)u_\mu,u_v)$$

$$(r,s=1,2,...,p),$$

що і доводить незалежність матриці $\mathfrak{T}(\lambda_0)$ від вибору базиса $\{u_k\}_1^p$.

На підставі означення (17) матриці $\mathfrak{T}(\lambda_0)$, з (16) випливає, що для довільних $g,f\in\mathfrak{L}$

$$(E(\lambda'')g,f)-(E(\lambda')g,f)=$$

$$=\sum_{j,k=1}^{n}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\Phi_j(g;\lambda)\overline{\Phi_k(f;\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda)\quad(\lambda',\lambda''\in I). \tag{18}$$

Через те, що згідно з c) при відповідному виборі базиса u_k ($k=$ $=1,2,...,n$) інтервал I може бути зроблений довільно широким, то тут можна спрямувати λ' до $-\infty$, а λ'' до $+\infty$, і ми одержимо представлення (!).

Покажемо, що $\mathfrak{T}(\lambda)\in V_p$. Через те, що згідно з побудовою $\mathfrak{T}(0)=0$, $\mathfrak{T}(\lambda-0)=\mathfrak{T}(\lambda)$, то залишається перевірити, що форма

$$\sum_{j,k=1}^{p}\tau_{jk}(\lambda)\xi_j\bar{\xi}_k=\sum_{\mu,v=1}^{p}\int_{0}^{\lambda}X_\mu(t)\overline{X_\nu(t)}d(E(t)u_\mu,u_\nu),$$

де

$$X_\mu(t) = \sum_{j=1}^{p} \psi_{\mu j}(t)\xi_j \quad (\mu = 1, 2, ..., p)$$

є неспадна функція від λ. А це випливає з того, що інтеграл

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{p} \int_{\lambda}^{\lambda+h} X_\mu(t) X_\nu(t) d(E(t)u_\mu, u_\nu) \quad (\lambda + h \in I)$$

є границя деякої послідовності сум вигляду

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \Delta_k E \Big(\sum_{\mu=1}^{p} X_\mu(t_k) u_\mu \Big) \right\|^2$$

$$(\Delta_k E = E(t_{k+1}) - E(t_k); \quad k = 1, 2, ..., N),$$

які містять тільки невід'ємні доданки.

Отже, перше твердження (в припущенні $\widehat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$) доведено.

Доведення другого твердження не становить ніяких труднощів.

Справді, коли оператор A додатний, то він, як відомо (див. [5]), допускає додатні самоспряжені розширення (навіть у тому гільбертовому просторі, в якому він діє, — в даному випадку $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$). Спектральна функція $E(\lambda)$ такого розширення має ту властивість, що $E(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$, і для відповідної до неї за формулою (10) матриці $\mathfrak{T}(\lambda)$ будемо мати: $\mathfrak{T}(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$.

Отже, в припущенні $\widehat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$ теорема доведена.

Щоб довести теореми при $\widehat{\mathfrak{L}} \neq \mathfrak{L}$, замінимо в наших міркуваннях оператор A на оператор $\widehat{A}$ і під $E(\lambda)$ будемо тепер розуміти спектральну оператор-функцію якого-небудь самоспряженого розширення $\widetilde{A}$ оператора $\widehat{A}$. Матрицю $\mathfrak{T}(\lambda)$ визначимо тепер за формулою (17), елементи якої u_μ $(\mu = 1, 2, ..., p)$ замінимо елементами $\widehat{u}_\mu$ $(\mu = 1, 2, ..., p)$.

Помічаючи далі, що з рівності (11) випливає рівність $\widehat{f}_\lambda = \widehat{A}\widehat{g}_\lambda - \lambda\widehat{g}_\lambda$ і що всі дальші рівності (12), (13), (14) зберігаються, якщо в них над кожним вектором із $\mathfrak{L}$ поставити значок $\widehat{\ }$, ми доведемо, що

$$E(\lambda'')\widehat{f} - E(\lambda')\widehat{f} = \sum_{\mu,j=1}^{p} \int_{\lambda'}^{\lambda''} \psi_{\mu_j}^{(u)}(t)\Phi_j(f;t)dE(t)\widehat{u}_\mu. \qquad (19)$$

Легко впевнитися, що і всякі дальші рівності зберігають силу, якщо в них у відповідних місцях (але не всюди)[†] над елементами із $\mathfrak{L}$ поставити значок $\widehat{\ }$.

Так продовжуючи, ми доведемо рівність (!), в якій, проте, замість (g,f), буде фігурувати $(\widehat{g},\widehat{f})$, а через те, що $(g,f) = (\widehat{g},\widehat{f})$, то теорема буде доведена.

§ 3. Критерій єдиності представлення (!)

1. Позначимо через $V_p(A)$ сукупність всіх матриць-функцій $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$, які дають представлення (!) добутку (g,f).

Покажемо, що довільна матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p(A)$ може бути одержана способом, показаним при доведенні теореми 1.

Нехай деяка матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^p$. Позначимо через $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$ лінійну сукупність вектор-функцій $\mathfrak{X}(\lambda) = (x_1(\lambda),\ldots$ $\ldots, x_p(\lambda))$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, які мають ту властивість, що кожна компонента $x_k(\lambda)$ є B-вимірна функція, така, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_k(\lambda)|^2 d\tau_{kk}(\lambda) < \infty \quad (k = 1,2,\ldots,p). \qquad (20)$$

Через те, що за означенням класу $V_p(A)$ при довільних $\lambda_1 < \lambda_2$

$$\sum_{j,k=1}^{n} [\sigma_{jk}(\lambda_2) - \sigma_{jk}(\lambda_1)]\xi_j\bar{\xi}_k = \sum_{j,k=1}^{n} \Delta\sigma_{jk}\xi_j\bar{\xi}_k \geq 0,$$

[†]Зауважимо, що оператор $\hat{A}$, взагалі кажучи, не матиме напрямної системи функціоналів. Справа в тому, що рівність $(f,f) = 0$ (тобто $f \in \hat{0}$) не обов'язково дає тотожності $\Phi_j(f;\lambda) = 0$ $(j = 1,2,\ldots,p)$, через що функціонали Φ_j, взагалі кажучи, не будуть породжувати однозначних функціоналів в $\hat{\mathfrak{L}}$. Через це справедливість теореми для випадку $\hat{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$ безпосередньо ще не призводить до справедливості її в загальному випадку.

то

$$|\Delta\sigma_{jk}|^2 \leq \Delta\sigma_{jj} \cdot \Delta\sigma_{kk} \qquad (j,k = 1,2,...,p)$$

і через це при виконанні (20)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_j(\lambda)||x_k(\lambda)||d\tau_{jk}(\lambda)| \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_j(\lambda)|^2 d\tau_{jj} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x_k(\lambda)|^2 d\tau_{kk} < \infty \qquad (j,k = 1,2,...,n).$$

Через це для довільних $\mathfrak{X} \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$ та $\mathfrak{Y}(\lambda) \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$ матиме зміст вираз

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \sum_{j,k=1}^{p} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_j(\lambda)\overline{y_k(\lambda)} d\tau_{jk}(\lambda),$$

який ми приймемо за квазіскалярний добуток елементів $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$.

Позначимо через B_0 оператор в $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$, який визначається двома умовами:

1) його область означення $\mathfrak{D}(B_0)$ складається з тих і тільки тих $\mathfrak{X} \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$, для яких

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |x_j(\lambda)|^2 d\tau_{jj}(\lambda) < \infty;$$

2) якщо

$$\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}(B_0), \;\; B_0\mathfrak{X} = \mathfrak{Y},$$

то

$$y_j(\lambda) = \lambda x_j(\lambda) \qquad (j = 1,2,...,p).$$

Легко бачити, що B_0 — деякий ермітів оператор в квазігільбертовому просторі $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$.

Визначимо для довільного дійсного t оператор $E_0(t)$, покладаючи для довільного $\mathfrak{X} = \{x_j(\lambda)\}_1^p \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$

$$E_0(t)\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{(t)} = \{x_j^{(t)}(\lambda)\}_1^p,$$

де

$$x_j^{(t)}(\lambda) = \begin{cases} x_j^{(\lambda)} & \text{при} \quad \lambda \le t, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > t. \end{cases}$$

Очевидно, що для довільного $\mathfrak{X} \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$:

$$0 \le (E_0(t)\mathfrak{X},\ E_0(t)\mathfrak{X}) = (E_0(t)\mathfrak{X},\ \mathfrak{E}) \le (\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Крім того, для довільних $t' < t''$

$$E_0(t')E_0(t'') = E_0(t'),$$

і якщо $t_n \to t - 0$ при $n \to \infty$, то при довільному $\mathfrak{X} \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$:

$$E_0(t_n)\mathfrak{X} \to E_0(t)\mathfrak{X}.$$

Легко також перевірити, що для довільних $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$

$$\begin{aligned} (B_0\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) &= \int_{-\infty}^{\infty} t\,d(E_0(t)\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \\ (B_0\mathfrak{X}, B_0\mathfrak{X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(E_0(t)\mathfrak{X}, \mathfrak{X}). \end{aligned} \tag{21}$$

Відправляючись від квазігільбертового простору $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$, утворимо простір $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$ відносно змісту операції, що позначається символом $\widehat{\ }$ (див. §1), а потім його замикання $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$ (до повного гільбертового простору); одночасно перейдемо від ермітових операторів B_0 та $E_0(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ до ермітових операторів $\widehat{B}_0$ та $\widehat{E}_0(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, а потім їх замиканням в $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$ — операторам B та $E(t)$.

На підставі перелічених властивостей $E_0(t)$ оператор-функція $E(t)$ буде деякою спектральною функцією в $\mathfrak{L}(\mathfrak{T})$, і через те, що рівність (21), очевидно, зберігається, якщо в ній замінити B_0 та $E_0(t)$ відповідно через $\widehat{B}_0$ та $\widehat{E}_0(t)$ або B та $E(t)$, а під час $\mathfrak{X}$ та $\mathfrak{Y}$ розуміти довільні елементи $\mathfrak{D}(\widehat{B}_0)$, то оператор B самоспряжений, а $E(t)$ — його спектральна функція.

Повертаючись тепер до простору $\mathfrak{L}$ та оператора A, про які йде мова в теоремі 1, розглянемо лінійне відображення $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$, яке одержується віднесенням всякому елементу $g \in \mathfrak{L}$ елемента $\mathfrak{X}(g) = \{\Phi_j(g;\lambda)\}_1^p$, при цьому приналежність елемента $\mathfrak{X}(g)$ до простору $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$, так само як і рівність

$$(g,f) = (\mathfrak{X}(g), \mathfrak{X}(f)) \quad (g,f \in \mathfrak{L}) \tag{22}$$

випливає з того, що матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$ дає представлення (!).

Завдяки "ізометричності" [тобто властивості (22)] відображення $g \to \mathfrak{X}(g)$ ми можемо ототожнити g та $\mathfrak{X}(g)$ і розглядати $\mathfrak{L}$ як частину $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{T})$, а тоді $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$ буде частиною $\mathfrak{L}^{(\mathfrak{T})}$. При цьому, на основі властивості а) (див. §1) функціоналів Φ_j $(j = 1,2,...,p)$ оператор B_0 буде являти собою деяке розширення оператора A, а оператор $\widehat{B}$ — деяке самоспряжене розширення оператора $\widehat{A}$ із $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$ в $\mathfrak{L}(\mathfrak{T}) \supset \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$.

Нехай тепер $\lambda_0(\neq 0)$ — деяке дійсне число, $u_j \in \mathfrak{L}$ $(j = 1, 2,...,p)$ такі, що

$$\Delta(u_1, u_2, ..., u_p; \lambda) = |\Phi_j(u_k;\lambda)|_1^p \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in (0, \lambda_0),$$

а $\|\Psi_{jk}(\lambda)\|_1^p$ — матриця, обернена відносно матриці $\|\Phi_j(u_k;\lambda)\|_1^p$. Тоді, маючи на увазі, що елементи u_μ ототожнені відповідно з вектор-функціями

$$\mathfrak{X}(u_\mu) = \{\Phi_j(u_\mu;\lambda)\}_{j=1}^p \qquad (\mu = 1,2,...,p),$$

ми знайдемо, що

$$\sum_{\mu,\nu=1}^p \int_0^{\lambda_0} \Psi_{\mu j}(t)\overline{\Psi_{\nu k}(t)} d(E_0(t)u_\mu, u_\nu) =$$
$$= \sum_{\mu,\nu=1}^p \int_0^{\lambda_0} \Psi_{\mu j}(t)\overline{\Psi_{\nu k}(t)} d\times$$
$$\times \left[\sum_{r,s=1}^p \int_{-\infty}^t \Phi_r(u_\mu;\lambda)\overline{\Phi_s(u_\nu;\lambda)} d\tau_{rs}(\lambda)\right] =$$
$$= \tau_{\mu\nu}(\lambda_0) \qquad (\mu,\nu = 1,2,...,p).$$

Таким чином, переходячи від $E_0(t)$ до $E(t)$ і від елементів $u \in \mathfrak{L}$ до елементів $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{L}} \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{T})$, ми можемо написати:

$$\tau_{\mu\nu}(\lambda_0) = \sum_{j,k=1}^{p} \int_0^{\lambda_0} \Psi_{\mu j}(\lambda)\overline{\Psi_{\nu k}(\lambda)}d(E(\lambda)\widehat{u_\mu}, \widehat{u_\nu}) \quad (\mu, \nu = 1, 2, ..., p), \tag{23}$$

що і доводить, що довільна матриця-функція може бути одержана способом, зазначеним при доведенні теореми 1.

2. Після цього вже легко довести таку теорему:

Теорема 2. *За умов теореми 1 матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda)$, яка дає представлення (!), визначається однозначно в тому і тільки в тому випадку, коли принаймні одне із дефектних чисел m_+ або m_- оператора дорівнює нулю.*

Доведення. Нехай $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — деякий гільбертовий простір, який містить $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$, а $\widetilde{A}$ — самоспряжене розширення оператора $\widehat{A}$ із $\mathfrak{H}$ в $\widetilde{\mathfrak{H}}$, $E(\lambda)$ — спектральна оператор-функція оператора $\widehat{A}$ і, нарешті, нехай $\mathfrak{T}(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^p \in V_p(A)$ — матриця-функція, яка одержується за відомим способом за формулою (17).

Позначимо через P оператор ортогонального проектування $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$ і покладемо для довільного $g \in \mathfrak{H}$

$$E_*(\lambda)g = PE(\lambda)g \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Оператор-функція $E_*(\lambda)$ є так звана *узагальнена* спектральна оператор-функція оператора A (див. [4]). Як показав М.А. Наймарк (див. [4], наслідки 6, 7), узагальнена спектральна оператор-функція ермітового оператора визначається однозначно в тому і тільки тому випадку, коли одно із дефектних чисел оператора дорівнює нулю.

З другого боку, через те, що для довільних $g, f \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$

$$(E(\lambda)g, f) = (E_*(\lambda)g, f) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

то (23) можна переписати ще так:

$$\tau_{\mu\nu}(\lambda_0) = \sum_{j,k=1}^{p} \int_0^{\lambda_0} \Psi_{\mu j}(\lambda)\overline{\Psi_{\nu k}(\lambda)}d(E_*(\lambda)\widehat{u}_\mu, \widehat{u}_\mu) \quad (\mu, \nu = 1, 2, ..., p),$$

і через це, коли оператор-функція $E_*(\lambda)$ визначається однозначно, то і матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p(A)$ визначається однозначно.

Таким чином, згідно з результатом М.А. Наймарка, теорема буде доведена, коли ми покажемо, що двом різним узагальненим спектральним оператор-функціям $E_*^{(j)}(\lambda)$ $(i = 1, 2)$ оператора $\widehat{A}$ завжди відповідають різні матриці-функції $\mathfrak{T}^{(i)}(\lambda)$ $(i = 1, 2)$.

Згідно з (16), для довільних $g, f \in \widehat{\mathfrak{L}}$ будемо мати

$$(E_*^{(i)}(\lambda)g, f) = \sum_{j,k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi_j(g,t)\overline{\Phi_k(f;t)}d\tau_{jk}^{(i)}(t)$$

$$(-\infty < \lambda < \infty; \quad i = 1, 2).$$

Через те, що $\widehat{\mathfrak{L}}$ щільне в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$ і оператор-функції, згідно з припущенням, різні, то знайдуться такі $g, f \in \widehat{\mathfrak{L}}$, що

$$(E_*^{(1)}g, f) \neq (E_*^{(2)}g, f),$$

а значить, знайдуться такі t, що $\mathfrak{T}^{(1)}(t) \neq \mathfrak{T}^{(2)}(t)$.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Якщо в $\mathfrak{L}$ існує система елементів v_j $(j = 1, 2, ..., p)$ така, що*

$$\Delta(v_1, ..., v_p; \lambda) = |\Phi_j(v_k; \lambda)|_1^p \not\equiv 0,$$

$$(v_1, v_1) = (v_2, v_2) = \cdots = (v_p, v_p) = 0, \tag{24}$$

то матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$, яка дає представлення (!), визначається однозначно: вона зберігає постійне значення на кожному інтервалі, що не містить нулів функції $\Delta(v_1, ..., v_p; \lambda)$.

В цьому випадку індекс-дефект оператора A є $(0,0)$ і спектр оператора A складається з тих нулів функції $\Delta(v_1, ..., v_p; \lambda)$, в яких матриця-функція має стрибок.

Д о в е д е н н я . Нехай $\widetilde{\mathfrak{H}}(\supset \mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}), \widetilde{A}, E(\lambda)$ означені так само, як і при доведенні попередньої теореми.

Нехай $I = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ — який-небудь інтервал, що не містить нулів функції $\Delta(v_1, ..., v_p; \lambda)$. Запишемо для цього інтервалу співвідношення (19). Через те, що (24) означає, що

$$\widehat{v}_1 = \widehat{v}_2 = \cdots = \widehat{v}_p = \widehat{0},$$

то з нього ми виводимо, що

$$E(\lambda')\widehat{f} = E(\lambda'')\widehat{f} \quad (f \in \mathfrak{L}; \lambda_0 - \delta < \lambda' < \lambda'' < \lambda_0 + \delta). \qquad (25)$$

Значить, для довільного $f \in \mathfrak{D}(A)$

$$\|\widehat{A}\widehat{f} - \lambda_0\widehat{f}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 d(E(\lambda)\widehat{f}, \widehat{f}) \geq \delta^2\|f\|^2.$$

Ми бачимо, що оператор $\widehat{A} - \lambda_0 I$, який діє в $\widehat{\mathfrak{L}}$, має там обмежений обернений оператор, а це можливо тільки тоді (див. I. Calkin [6] і М. Крейн [7]), коли дефектні числа оператора $\widehat{A}$ рівні між собою: $m_+(A) = m_-(A)$.

Якщо припустити, що вони відмінні від нуля, то в оператора A знайдеться в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$ розширення $\widetilde{A}$, яке має точку λ_0 в своєму спектрі (див. [8] або [7]), що буде суперечити (25).

Таким чином, $m_+(A) = m_-(A) = 0$, а значить, оператор $\widetilde{A}$, який є замиканням ермітового оператора A, є самоспряжений оператор.

Згідно з теоремою 2, єдиність матриці функції $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p(A)$ доведена.

Одночасно доведено, що спектр оператора A складається з нулів (не обов'язково всіх) функції $\Delta(v_1, ..., v_p; \lambda)$.

А звідси, на основі формул (17), матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda)$ зберігає стале значення на кожному інтервалі, вільному від точок спектра оператора A.

Залишається довести, що коли μ — деяка точка спектра оператора A, то

$$\mathfrak{T}(\mu + 0) - \mathfrak{T}(\mu) \neq 0.$$

Виберемо таке $\delta > 0$, щоб інтервал $(\mu - \delta, \mu + \delta)$ був вільний від точок спектра оператора A. Тоді всередині інтервалів $(\mu - \delta, \mu)$ і $(\mu, \mu + \delta)$ зберігає постійне значення, а значить, коли припустити, що $\mathfrak{T}(\mu + 0) = \mathfrak{T}(\mu)$, то для довільного $f \in \mathfrak{D}(A)$, на підставі (!) та а) §1, матимемо:

$$(Af - \mu f, Af - \mu f) = \sum_{j_k, k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)^2 \Phi_j(f; \lambda)\overline{\Phi_k(f; \lambda)} d\tau_{jk}(\lambda) \geq$$

$$\geq \delta^2 \sum_{j,k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(f;\lambda)\overline{\Phi_k(f;\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda) = \delta^2(f,f),$$

інакше кажучи, будемо мати: $\|\widehat{A}\widehat{f} - \mu\widehat{f}\| \geq \delta \parallel f \parallel$, що суперечить тому, щоб точка μ була точкою спектра оператора $\widehat{A}$.

Теорему доведено.

§ 4. Випадок $p = 1$; критерій повноти системи функцій $\Phi(f;\lambda)$ в $\mathfrak{L}_\tau$

В цьому параграфі ми розглядаємо випадок, коли $p = 1$, тобто ермітовий оператор A $(A\lambda \subset \mathfrak{L})$ має тільки один напрямний функціонал $\Phi(f;\lambda)$. В цьому випадку представлення (!) набирає вигляду

$$(g,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(g;\lambda)\overline{\Phi(f;\lambda)}f\tau(\lambda) \quad (g,f \in \mathfrak{L}), \tag{!!}$$

де $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(\tau(-\infty) = 0)$ — деяка неспадна функція.

Сукупність функцій $\tau(\lambda) \in V_1$, які дають представлення (!!), тепер позначатиметься через $V(A)$.

Якщо $\tau \in V_1$, то $\mathfrak{L}_\tau$ буде означати гільбертовий простір всіх τ-вимірних функцій $\varphi(\lambda)$, для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) < \infty$$

із звичайним скалярним добутком

$$(\varphi,\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}d\tau(\lambda) \quad (\varphi,\psi \in \mathfrak{L}_\tau).$$

Через $\mathfrak{L}_\lambda$ ми позначимо систему всіх аналітичних функцій $\Phi(f;\lambda)$ $(f \in \mathfrak{L})$.

Згідно з (!!), для довільного $\tau(\lambda) \in V(A)$ множину $\mathfrak{L}_\lambda$ можна розглядати як частину $\mathfrak{L}_\tau$. У вміщеній нижче теоремі 4 ми дамо відповідь на запитання, коли система $\mathfrak{L}_\lambda$ щільна в $\mathfrak{L}_\tau$.

Зауважимо, що, згідно з попереднім, множина $V(A)$ знаходиться в одно-однозначній відповідності $\tau(\lambda) \longleftrightarrow E_*(\lambda)$ з множиною всіх узагальнених спектральних функцій $E_*(\lambda)$ оператора $\widehat{A}$; при цьому, якщо $\tau(\lambda) \longleftrightarrow E_*(\lambda)$ [$\tau(\lambda)$ — породжується $E_*(\lambda)$], то

$$\int_0^\lambda d(E_*(\lambda)f, f) = \int_0^\lambda |\Phi(f;\lambda)|^2 d\tau(\lambda) \qquad (f \in \mathfrak{L}).$$

Теорема 4. *Для того, щоб система* $\mathfrak{L}_\lambda$ *всіх функцій* $\Phi(f;\lambda)$ *була щільною в* $\mathfrak{L}_\tau$*, де* $\tau(\lambda)$ *— деяка з функцій, яка дає представлення (!!), необхідно і достатньо, щоб оператор* A *допускав самоспряжені розширення в* $\mathfrak{H}_{\mathfrak{L}}$ *(тобто* $m_+(A) = m_-(A)$*) і щоб* $\tau(\lambda)$ *породжувалось спектральною функцією* $E(\lambda)$ *одного з цих розширень.*

Зокрема, якщо $m_+(A) = m_-(A) = 0$*, то функція* $\tau(\lambda)[\in V(A)]$ *визначається однозначно і, отже, задовольняє зазначеній умові.*

Доведення. Насправді, через те, що

$$\Phi(Af;\lambda) = \lambda\Phi(f;\lambda) \qquad [f \in \mathfrak{D}(A)],$$

то оператор A індуцирує в просторі $\mathfrak{L}_\lambda(\subset \mathfrak{L}_\tau)$, ізометричному $\widehat{\mathfrak{L}}$, деякий оператор A_λ множення на λ:

$$A_\lambda\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda) \quad [\varphi(\lambda) \in \mathfrak{D}(A_\lambda)],$$

при цьому $\mathfrak{D}(A_\lambda)$ представляє множину всіх функцій $g(\lambda)$ вигляду: $\varphi(\lambda) = \Phi(f;\lambda)$ $[f \in \mathfrak{D}(A)]$.

Через те, що $\mathfrak{D}(A)$ щільне (або квазіщільне) в $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{D}(A_\lambda)$ щільне в $\mathfrak{L}_\lambda$.

Ермітовий оператор A_λ, який діє $\mathfrak{L}_\lambda \subset \mathfrak{L}_\tau$, має в $\mathfrak{L}_\tau$ самоспряжене розширення B (повний оператор множення на λ в $\mathfrak{L}_\tau$), для якого

$$B\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda) \quad [\varphi(\lambda) \in \mathfrak{D}(B)],$$

і $\mathfrak{D}(B)$ складається з тих і тільки тих $\varphi(\lambda) \in \mathfrak{L}_\tau$, для яких

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\varphi(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) < \infty.$$

Якщо $E(\lambda)$ — спектральна оператор-функція оператора B, то для всякої функції $\varphi \in \mathfrak{L}_\tau$

$$\int_0^\lambda |\varphi(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^\lambda d(E(\lambda)\varphi, \varphi) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Зокрема, для довільної функції $\varphi \in \mathfrak{L}_\lambda$:

$$\int_0^\lambda |\varphi(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = \int_0^\lambda d(E_*(\lambda)\varphi, \varphi), \tag{26}$$

де $E_*(\lambda)$ (узагальнена спектральна функція оператора A_λ) — оператор в $\overline{\mathfrak{L}_\lambda}$, визначуваний рівністю

$$E_*(\lambda)\varphi = PE(\lambda)\varphi \qquad (-\infty < \lambda < \infty; \quad \varphi \in \overline{\mathfrak{L}}_\lambda); \tag{27}$$

при цьому P означає оператор ортогонального проектування $\mathfrak{L}_\tau$ на $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda$ (замикання множини $\mathfrak{L}_\lambda$ в $\mathfrak{L}_\tau$).

Якщо тепер $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda = \mathfrak{L}_\tau$, то $P = I$ і $E_*(\lambda) = E(\lambda)$ являє собою звичайну спектральну оператор-функцію самоспряженого розширення B оператора A_λ в $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda$ (і, отже, $m_+(A_\lambda) = m_-(A_\lambda)$). Через те, що простір завжди можна розглядати, як деяку реалізацію гільбертового простору $\mathfrak{H}$, при якій $\widehat{\mathfrak{L}}$ реалізується у вигляді $\mathfrak{L}_\lambda$, а оператор A у вигляді оператора A_λ, то в одному напрямі основне твердження теореми доведено.

Для повного його доведення нам залишається показати, що коли оператор-функція $E_*(\lambda)$, яка одержується за формулою (27) [що еквівалентна (26)], є спектральна функція деякого самоспряженого розширення оператора A_λ в $\overline{\mathfrak{L}_\lambda}$, то $\overline{\mathfrak{L}_\lambda} = \mathfrak{L}_\tau$.

Нехай $R_z(\operatorname{Im} z \neq 0)$ — резольвента оператора $\widetilde{A}$ в $\overline{\mathfrak{L}_\lambda}$, тобто

$$R_z\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_*(\lambda)\varphi}{\lambda - z} \quad (\varphi \in \overline{\mathfrak{L}_\lambda}).$$

Зауважимо, що на підставі (26), для довільних $\varphi, \psi \in \mathfrak{L}_\lambda$

$$(R_z\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda)\varphi, \psi)}{\lambda - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}}{\lambda - z} d\tau(\lambda),$$

$$(R_z\varphi, R_z\varphi) = \frac{1}{z-\bar{z}}[(R_z\varphi,\varphi) - (R_z\varphi,\varphi)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(\lambda)|^2}{|\lambda - z|^2} d\tau(\lambda),$$

а через це

$$\|R_z\varphi - \psi\|^2 = (R_z\varphi - \psi, R_z\varphi - \psi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} - \psi(\lambda)\right|^2 d\tau(\lambda).$$

Через те, що $R_z\varphi \in \overline{\mathfrak{L}}_\lambda$, то для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться функція $\psi \in \mathfrak{L}_\lambda$ така, що $\|R_z\varphi - \psi\| < \varepsilon$, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - z} - \psi(\lambda)\right|^2 d\tau(\lambda) < \varepsilon^2.$$

Звідси, якщо $\varphi \in \mathfrak{L}_\lambda$, то при довільному недійсному z

$$(\lambda - z)^{-1}\varphi(\lambda) \in \overline{\mathfrak{L}}_\lambda.$$

Через це, коли деяка функція $h(\lambda) \in \mathfrak{L}_\tau$, ортогональна до $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda$, то для довільного $\varphi \in \mathfrak{L}_\lambda$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{h(\lambda)}\varphi(\lambda)}{\lambda - z} d\tau(\lambda) = 0 \qquad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Звідси за формулою обертання інтеграла Стільтьєса при довільних $\lambda' < \lambda''$:

$$\int\limits_{\lambda'}^{\lambda''} \varphi(\lambda)\overline{h(\lambda)} d\tau(\lambda) = 0$$

і, отже,

$$\int\limits_{\lambda'}^{\lambda''} |\varphi(\lambda)\overline{h(\lambda)}|^2 d\tau(\lambda) = 0.$$

Через те, що аналітична функція $\varphi(\lambda) = \Phi(f;\lambda) \in \mathfrak{L}_\lambda$ завжди може бути обрана (див. с), §1) так, щоб не обертатися в нуль ніде в наперед заданому скінченному інтервалі (a,b), то ми робимо висновок, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)|^2 d\tau(\lambda) = 0.$$

Звідси $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda = \mathfrak{L}_\tau$.

Основне (перше) твердження теореми доведене.

Для закінчення доведення теореми залишилося нагадати, що коли $m_+(A) = m_-(A) = 0$, то, за теоремою 2, функція $\tau(\lambda) \in V$, яка дає представлення (!!), визначається однозначно, і в співвідношенні (26) їй відповідає спектральна функція $E(\lambda)$ самоспряженого оператора $\overline{A}_\lambda$ (замикання A_λ в $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda$), яка є одночасно єдиною узагальненою спектральною функцією $E_*(\lambda)$ оператора A. Через це в цьому випадку $\overline{\mathfrak{L}}_\lambda = \mathfrak{L}_\tau$.

Теорему доведено.

Висновок. *Система функцій* $\Phi(f;\lambda)\,(f \in \mathfrak{L})$ *щільна в* $\mathfrak{L}_\tau\,[\tau \in V(A)]$, *коли в* $\mathfrak{L}$ *існує елемент* g *такий, що* $(g,g) = 0$, *а* $\Phi(g,\lambda) = 0$.

Справді, в цьому випадку, згідно з теоремою 3, функція $\tau(\lambda) \in \in V_1$, яка дає представлення (!!), визначається однозначно і $m_+(A) = m_-(A) = 0$.

§ 5. Два приклади на застосування теореми 1

Декілька прикладів на застосування теореми 1 було подано в нашій нотатці [1]. Цим прикладам та іншим ми сподіваємося присвятити окрему статтю. Тут же ми обмежимося такими двома ілюстраціями.

1. Нехай $\mathfrak{L}$ означає лінійну множину неперервних p-мірних вектор-функцій $g(t) = [g_1(t), ..., g_p(t)]$, визначених на деякому інтервалі $(0, a)$ і таких, що задовольняють граничну умову

$$g(0) = g(a).$$

Позначимо через $\mathfrak{D}(A)$ множину всіх неперервно-диференційовальних вектор-функцій $g \in \mathfrak{L}$ і покладемо $Ag = i\,\dfrac{dg}{dt}$.

Покладемо, з другого боку,

$$\Phi_j(g;\lambda) = \int_0^a e^{i\lambda t} g_j(t)dt \qquad (j = 1, 2, ..., p). \tag{28}$$

Легко бачити, що так означені функціонали будуть ***напрямними*** для оператора A.

Нехай тепер $F(t) = \|f_{jk}(t)\|_1^p$ $(-a \le t \le a)$ — деяка неперервна матриця-функція.

Покладемо для довільних $g, f \in \mathfrak{L}$

$$(g, f) = \int_0^a \int_0^a f^*(s)F(s-t)g(t)dtds. \tag{29}$$

При цьому запису ми вектор g мислимо, як прямокутну матрицю, яка складається з однієї вертикалі $g_1, ..., g_p$, а g^*, як матрицю, що складається з однієї горизонталі $\bar{g}_1, ..., \bar{g}_p$, при цьому матриці, які стоять під знаком інтеграла, перемножаються за правилом множення матриць.

Таким чином,

$$(g, f) = \int_0^a \int_0^a \sum_{j,k=1}^{p} f_{jk}(s-t)g_k(s)\overline{f_j(t)}dsdt.$$

Неважко показати, що так визначений функціонал (g, f) $(g, f \in \mathfrak{L})$ буде мати всі властивості квазіскалярного добутку тоді і тільки тоді, коли для довільних чисел $s_1, ..., s_n$ з інтервалу $(0, a)$ і довільних p-мірних векторів $x_1, ..., x_n$ $(n = 1, 2, ...)$ справедлива нерівність

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_j^* F(s_j - s_k)x_k \ge 0.$$

При виконанні цієї умови будемо говорити, що матриця-функція $F(s)$ $(-a \le s \le a)$ належить класу $\mathfrak{P}_a$. Легко бачити, що коли $F(s) \in \mathfrak{P}_a$, то $F(-s) = F^*(s)$, тобто $f_{jk}(-s) = \overline{f_{kj}(s)}$ $(j, k = 1, 2, ..., p;\ |s| \le a)$.

Пропонуємо читачеві перевірити, що коли квазіскалярний добуток (g, f), визначений за формулою (29) за допомогою деякої функції $F(s) \in \mathfrak{P}_a$, то наведений вище оператор диференціювання A буде ермітовим.

Через це, на підставі теореми 1, можна буде твердити про існування матриці $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$ такої, що

$$\int_0^a \int_0^a f^*(t)F(s-t)g(t)dtds = \sum_{j,k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(g;\lambda)\overline{\Phi_k(f;\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda).$$

А звідси вже, беручи до уваги вигляд (28) функціоналів $\Phi_j(f;\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., p)$, легко вивести, що

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} d\mathfrak{T}(\lambda) \quad (-a \le s \le a). \tag{30}$$

Через те, що, зокрема,

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathfrak{T}(\lambda),$$

то $\mathfrak{T}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — обмежена матриця-функція.

Ми довели найбільш складну частину такої теореми.

Теорема А. *Для того, щоб деяка матриця-функція* $F(s)$ $(-a \le s \le a)$ *допускала представлення (30), де* $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$, *необхідно і досить, щоб вона належала класу* $\mathfrak{P}_a$.

Друга частина теореми (необхідність умови) перевіряється безпосередньо.

У випадку $p = 1$ ця теорема була установлена раніше [9] і являє собою деякий розвиток відомої теореми Бохнера [10].

Теорема А, в свою чергу, допускає таке узагальнення (обгрунтування його буде дано в іншому місці).

Нехай $\mathfrak{H}$ — деякий гільбертовий простір, а $F(t)$ $(-a \le t \le a)$ — однопараметрична сім'я обмежених операторів в $\mathfrak{H}$, яка має такі властивості:

a) при довільних $x, y \in \mathfrak{H}$ вираз $(F(t)x, y)$ є неперервна функція від $t \in (-a, a)$;

b) для довільних чисел $s_1, s_2, ..., s_n$ з інтервалу $(-a, a)$ і довільних $x_1 \in \mathfrak{H}, ..., x_n \in \mathfrak{H}$ виконується нерівність

$$\sum_{j,k=1}^{n} (F(s_1 - s_n)x_k x_j) \geq 0.$$

За цих припущень оператор-функції $F(t)$ відповідає однопараметричний ансамбль обмежених самоспряжених операторів $\mathfrak{T}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ таких, що:

α) для довільного $x \in \mathfrak{H}$ вектор-функція $\mathfrak{T}(\lambda)x$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ неперервна зліва;

β) для довільного $x \in \mathfrak{H}$ вираз $(\mathfrak{T}(\lambda)x; x)$ є неспадна функція від $\lambda \in (-\infty, \infty)$, яка задовольняє нерівність

$$|(\mathfrak{T}(\lambda)x, x)| \leq \gamma(x, x) \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

де γ — константа, незалежна від $x \in \mathfrak{H}$. Для довільного $x \in \mathfrak{H}$ в розумінні сильної збіжності

$$F(t)x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\mathfrak{T}(\lambda)x \quad (-a \leq t \leq a). \tag{31}$$

Зауважимо, що β) дозволяє твердити існування двох обмежених самоспряжених операторів $\mathfrak{T}(-\infty)$ і $\mathfrak{T}(+\infty)$ таких, що для довільного $x \in \mathfrak{H}$ вектор-функція $\mathfrak{T}(\lambda)x$ прямує до $\mathfrak{T}(-\infty)x$ (відповідно до $\mathfrak{T}(\infty)x$) при $\lambda \to -\infty$ (відповідно $\lambda \to +\infty$). Через це функцію $\mathfrak{T}(\lambda)$ можна нормувати ще умовою $\mathfrak{T}(-\infty) = 0$.

Представлення (31) показує, що умови a) та b) призводять до сильної неперервності вектор-функції $F(t)x$ при довільному $x \in \mathfrak{H}$.

Сформульоване положення має також місце у випадку оператор-функцій $F(t)$, заданих в нескінченному (відкритому) інтервалі $(-\infty, \infty)$ і в цьому випадку воно було доведено М.А. Наймарком (див. [11], наслідок 3). Проте у цьому випадку воно не має інтересу, бо може бути безпосередньо одержано з теореми Бохнера і притому в більш сильному формулюванні†, а саме, замість β) досить вимагати, щоб при довільному $x \in \mathfrak{H}$ вираз $(F(t)x, x)$ був додатно означеною функцією від $t\,(-\infty < t < \infty)$, тобто, щоб для довільних додатних $s_1, ..., s_n$ $(n = 1, 2, ...)$ виконувалась нерівність

$$\sum_{j,k=1}^{n} (F(s_j - s_k)x, x) \geq 0.$$

2. Нехай тепер $\mathfrak{L}$ означає лінійну множину p-мірних неперервних вектор-функцій $g(t)\,(-\infty < t < \infty)$, які обертаються тотожно в нуль-вектор при достатньо великих значеннях $|t|$.

Визначимо в $\mathfrak{L}$ скалярний добуток (g, f), покладаючи для довільних $g, f \in \mathfrak{L}$

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{p} g_k(t)\overline{f_k(t)}dt. \tag{32}$$

Позначимо через $\mathfrak{D}(A)$ множину всіх неперервно диференціювальних вектор-функцій $g(t) \in \mathfrak{L}$ і покладемо для довільного $g \in \mathfrak{D}(A)$

$$Ag = i\frac{dg}{dt} + Qg,$$

де $Q(t) = \|q_{jk}(t)\|_1^p$ $(-\infty < t < \infty)$ — деяка довільна фіксована неперервна ермітова матриця-функція від t. Легко бачити, що A — ермітовий оператор відносно скалярного добутку (32).

Побудуємо неперервно диференціювальну за t матрицю-функцію $\psi(t, \lambda)$ $(-\infty < t < \infty;\ -\infty < \lambda < \infty)$, яка визначається таким рівнянням з початковою умовою:

$$\begin{cases} -i\dfrac{d\psi}{dt} + \psi Q - \lambda\psi = 0, \\ \psi(0) = I, \end{cases}$$

---

†Аналогічне зауваження може бути також зроблено відносно основної теореми статті [11] М.А. Наймарка. Разом з тим наведене там доведення теореми має інтерес, бо містить нову ідею, яка дозволяє установити важливе положення, позначене в статті, як висновок 1.

і віднесемо кожній вектор-функції $f \in \mathfrak{L}$ аналітичну вектор-функцію

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t;\lambda) f(t)dt \quad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{33}$$

Легко бачити, що при даному λ та $f \in \mathfrak{L}$ рівняння $Ag - -\lambda g = f$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $F(\lambda) = 0$. Через це координати $F_j(\lambda) = \Phi_j(f;\lambda)$ $(j = 1, ..., p)$ вектор-функції $F(\lambda)$ є напрямні функціонали для оператора A.

На підставі теореми 1 можна буде твердити існування матриці-функції $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$ такої, що для довільних $g, f \in \mathfrak{L}$ матиме місце рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)d\mathfrak{T}(\lambda)G(\lambda). \tag{34}$$

Таким чином, неповний гільбертовий простір ізоморфний простору $\mathfrak{L}_\lambda$ перетворених вектор-функцій $F(\lambda)$, коли в останньому визначити скалярний добуток за формулою

$$(G, F) = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)d\mathfrak{T}(\lambda)G(\lambda) \qquad (F, G \in \mathfrak{L}_\lambda). \tag{35}$$

Замкнувши $\mathfrak{L}$ до повного гільбертового простору, ми одержимо простір $\mathfrak{L}^{(2)}$, який складається з вектор-функцій $g(t) = = g_1(t), ..., g_p(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, координати яких є вимірні функції, такі, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{1}^{p} |g_k(t)|^2 dt < \infty,$$

при цьому скалярний добуток (g, f) для довільних $g, f \in \mathfrak{L}^{(2)}$ буде зображатися попередньою формулою (32).

Ізоморфізм між $\mathfrak{L}$ та $\mathfrak{L}_\lambda$ породжує ізоморфізм між $\mathfrak{L}^{(2)}$ та $\mathfrak{L}_\lambda^{(2)}$ (замикання $\mathfrak{L}_\lambda$ до повного гільбертового простору). Цікаво було б з'ясувати, у вигляді яких функцій від λ можна реалізувати елементи простору $\mathfrak{L}_\lambda^{(2)}$ з тим, щоб при відповідному узагальненні процесу інтегрування зберігалася б формула (35), а значить, і формула (34).

Це питання особливо цікаве для того випадку, коли матриця-функція $\mathfrak{T}(\lambda) \in V_p$ визначається однозначно рівністю (34) для $g, f \in \mathfrak{L}$.

Згідно з теоремою 2 цей випадок матиме місце тоді і тільки тоді, коли одне з дефектних чисел оператора A дорівнює нулю, тобто коли замикання $\overline{A}$ оператора A в $\mathfrak{L}^{(2)}$ є самоспряжений (гіпермаксимальний) або максимальний ермітовий оператор.

Цікаво було б також знайти формулу обертання для перетворення (33).

Для пояснення попереднього зауважимо, що при $p = 1$, $Q(t) \not\equiv 0$ перетворення (33) переходить в перетворення Фур'є

$$F(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(t) dt.$$

У цьому випадку $d\mathfrak{T}(\lambda) = (2\pi)^{-1} d\lambda$ і рівність (34) переходить у відому рівність Парсеваля–順Планшереля.

Зазначимо, нарешті, що попередні розгляди легко узагальнюються на випадок самоспряжених (за Лагранжем) диференціальних операторів вищого порядку. Наприклад, за оператор A можна було б обрати оператори вигляду

$$Ag = \frac{d}{dx}\Big(R\frac{dg}{dt} + Sg\Big) - S^*\frac{dg}{dt} + Qg,$$

де $R(t) = \|r_{jk}(t)\|_1^p$, $Q(t) = \|q_{jk}(t)\|_1^p$, $S(t) = \|s_{jk}(t)\|_1^p$ — деякі матриці-функції, при цьому перші дві ермітові, а $S^*(t)$ — матриця-функція ермітово спряжена з $S(t)$.

При цьому за інтервал зміни для t можна обрати, наприклад, і інтервал $(0, \infty)$, а при визначенні $\mathfrak{D}(A)$, крім ряду диференціальних властивостей, вимагати від $g \in \mathfrak{D}(A)$ задоволення деяким граничним умовам в точці 0.

На цьому шляху ми прийдемо до узагальнення результатів H. Weyl'я [12].

Список літератури

[1] *Крейн М.Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // ДАН СССР. — 1946. — **LIII**, № 1. — С.3–6.

[2] *Лившиц М.С.* Об одном применении теории эрмитовых операторов в обобщенной проблеме моментов // ДАН СССР. — 1944. — **XLIV**, № 1.

[3] *Schoenberg I.J.* Metric spaces and completely monotone functions // Ann. of Math. — 1938. — **39**, N 4. — P.811–841.

[4] *Наймарк М.А.* Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — Вып.4. — С.277–318.

[5] *Stone M.H.* Linear transformations in Hilbrert space. — New York, 1932.

[6] *Calkin J.W.* Symmetric transformation in Hilbrert space // Duke Math. J. — 1940. — **7**. — P.504–508.

[7] *Крейн М.Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат. сб. — 1947.

[8] *Hamburger H.L.* Contributions to the theory of closed Hermitian Transformations of deficiency index (m, m) // Ann. of Math. — 1944. — **45**, N 1. — P.59–99.

[9] *Крейн М.Г.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // ДАН СССР. — 1940. — **XXVI**, № 1.

[10] *Bochner S.* Fouriersche Integrale. — Leipzig, 1932.

[11] *Наймарк М.А.* Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1943. — **7**. — С.237–244.

[12] *Weyl H.* // Math. Annalen. — 1910. — **68**.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНДЕКСОМ ДЕФЕКТА (m,m)

(Украинский математический журнал АН УССР. — 1949. — №2)

При исследовании спектральных свойств самосопряженных расширений эрмитовых операторов можно всегда ограничиться тем случаем, когда оператор прост (см. §1, п.3).

В основе настоящего исследования лежит то обстоятельство, что всякий действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ простой эрмитов оператор A с индексом дефекта (m,m) (m — натуральное число) порождает некоторое линейное изоморфное отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$ пространства $\mathfrak{H}$ в линейное множество m-мерных вектор-функций $\mathfrak{f}(z) = (f_1(z), ..., f_m(z))$ невещественного аргумента z, мероморфных внутри верхней и нижней полуплоскостей, причем это отображение обладает тем свойством, что если элемент f принадлежит области определения A, а $g = Af$, то $\mathfrak{g}(z) = z\mathfrak{f}(z)$.

Это отображение не определяется однозначно оператором A, если только не заданы некоторые дополнительные нормирующие условия, которые дальше будут указаны. В частности, заметим, что отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$ можно всегда так реализовать, чтобы все вектор-функции $\mathfrak{f}(z)$ были голоморфными внутри верхней и нижней полуплоскостей.

Если, например, $\mathfrak{H}$ есть $\mathfrak{L}^{(2)}(a,b)$ $(-\infty \leq a, b \leq \infty)$, т.е. пространство комплексно-значных измеримых и интегрируемых вместе со своим квадратом функций $f(t)$ $(a \leq t \leq b)$ с естественным определением скалярного произведения, а A — некоторый эрмитов оператор с индексом дефекта (m, m), порожденный некоторым линейным дифференциальным выражением m-го порядка $L(f)^{\dagger}$, то требуемое отображение $f \to \mathfrak{f}(z) = (f^{(1)}(z), ..., f^{(m)}(z))$ можно осуществить, полагая

$$f^{(j)}(z) = \int_a^b f(t)\varphi(t, z)dt \qquad (j = 1, 2, ..., m),$$

где $\varphi_1(t, z), ..., \varphi_m(t, z)$ ($a < t < b$; z — комплексное число) — система линейно независимых решений уравнения

$$L(\varphi) - z\varphi = 0,$$

нормируемых в какой либо внутренней точке $t_0 \in (a, b)$ условиями

$$\frac{d^k\varphi_j(t, z)}{dt^k}|_{t=t_0} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, ..., m).$$

В этом случае все вектор-функции $\mathfrak{f}(z)$ оказываются целыми††.

Заметим, что обычное преобразование Фурье можно трактовать как отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$, соответствующее случаю $m = 1$ и $L(f) = i\dfrac{df}{dx}$.

При исследовании конкретных эрмитовых операторов отображение $f \to \mathfrak{f}(z)$ обычно подсказывается самой постановкой проблемы.

Но, по-видимому, здесь впервые развита общая теория таких отображений, названная нами теорией представления эрмитовых операторов.

Для ее построения нам пришлось мобилизовать методы (а иногда и новые средства) теории аналитических функций,

---

†"Порожденный" следует понимать в том смысле, что область определения A состоит из функций f, обращающихся в нуль в окрестности точек a, b, абсолютно непрерывных вместе со своими производными $f', f'', ..., f^{(m-1)}$ и таких, что $Lf \in \mathfrak{L}^{(2)}$; при этом $Af = L(f)$ (допускается, что концы интервала (a, b) могут быть сингулярными точками для $L(f)$).

††Согласно теореме (13), §9 в таком случае спектр любого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A дискретен.

которые доселе не применялись при исследовании спектральных свойств операторов.

Наиболее тонкие методы потребовались в §5, 6 для установления того факта, что тот или иной характер поведения вектор-функций $\mathfrak{f}(z)$ в окрестности данной вещественной точки определяет поведение спектра самосопряженных расширений оператора A в этой окрестности этой точки.

Исследование определенным образом нормированного отображения $f \to \mathfrak{f}(z)$ позволяет классифицировать эрмитовы операторы, исходя из принадлежности вектор-функций $\mathfrak{f}(z)$ к тому или иному классу функций. На этом пути обнаруживается замечательный класс целых операторов (§8, 10). Целые операторы бывают двух типов: минимального и нормального.

Простейший пример целого оператора нормального типа с индексом дефекта (1.1) можно получить, рассматривая эрмитовы операторы, порождаемые операцией $i\dfrac{d}{dx}$ в применении к функциям, для которых скалярное произведение определяется особым образом (§10, 11). Это впервые было обнаружено автором в связи с исследованием так называемой проблемы продолжения эрмитово-положительной функции [1а, б, к].

К целому оператору минимального типа приводит так называемый неопределенный случай классической степенной проблемы моментов.

С момента зарождения спектральной теории операторов ее идеи находились в непрерывном взаимодействии с идеями проблемы моментов.

Нам кажется, что в этом исследовании достигается единство идей одной и другой области в такой степени, в какой раньше оно не наблюдалось.

В общей теории целых операторов удается найти аналоги всем основным предложениям неопределенного случая классической проблемы моментов вплоть до знаменитых неравенств Чебышева (см. [1б]). С другой стороны, построение общей теории целых операторов позволяет просто решить различные задачи типа проблемы моментов, решение которых методами классического анализа представило бы большие трудности ввиду отсутствия каких-либо общих ориентирующих идей. В качестве двух таких примеров мы приводим матричную степенную проблему моментов (§10, 1) и проблему продолжения эрмитово-положительной матрицы-функции (§10, 11).

Из-за недостатка места мы не могли изложить результаты исследований об обобщенных резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m). В связи с этим опущен и вывод соотношений, из которых находится общий вид матриц распределения $T(\lambda) = \|(E_\lambda u_j, u_k)\|_1^m$, соответствующих данному эрмитову оператору A, о которых идет речь во многих параграфах.

По той же причине мы не излагаем здесь приложений развитой теории к различным интерполяционным задачам теории функций типа проблемы Неванлинна–Пика, к проблемам продолжения в гильбертовом пространстве винтовых дуг (см. [1г, д]) и многим другим вопросам.

Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (1.1) и ряд их приложений были сообщены нами без доказательства в журнале " Доклады Академии наук СССР" еще в 1943–1944 гг. Здесь можно найти доказательства большинства этих положений и притом для более общего случая.

Все связанное со специфическими особенностями случая $m = 1$ мы предполагаем изложить в отдельной статье.

Первыми интересами к различным проблемам продолжения и к проблеме моментов автор обязан своему незабвенному учителю Николаю Григорьевичу Чеботареву, светлой памяти которого посвящается эта статья.

§ 1. Основные понятия

1. В дальнейшем $\mathfrak{H}$ означает некоторое гильбертово пространство. Однопараметрическое семейство E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$ будем называть дистрибутивной оператор-функцией, если для любого $f \in \mathfrak{H}$:

1°. $(E_\lambda f, f)$ не убывает при возрастании λ.

2°. $E_\lambda f$ — непрерывная слева функция λ.

3°. $E_\lambda f \to 0$ при $\lambda \to -\infty$.

4°. $E_\lambda f \to f$ при $\lambda \to \infty$.

Дистрибутивная оператор-функция называется ортогональной, если

$$E_\lambda E_\mu = E_{\min(\lambda,\mu)} \qquad (-\infty < \lambda, \quad \mu < \infty).$$

Согласно классической лемме М.А. Наймарка [2а,б] всякой дистрибутивной оператор-функции E_λ можно сопоставить гильбертово пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$, содержащее в себе $\mathfrak{H}$, и ортогональную в нем дистрибутивную оператор-функцию $\widetilde{E}_\lambda$ так, что

$$E_\lambda = P\widetilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{1.1}$$

где P — оператор ортогонального проектирования в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Представление (1.1) можно всегда выбрать так, чтобы оно было неприводимым, т.е. чтобы в $\widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$ не существовало подпространства, инвариантного по отношению ко всем $\widetilde{E}_\lambda$. Оказывается, что неприводимое представление (1.1) определяется однозначно до унитарной эквивалентности. Это значит, что для всякого такого представления

$$E_\lambda = P'\widetilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где P' — оператор проектирования пространства $\widetilde{\mathfrak{H}}' \supset \mathfrak{H}$ (в котором действует неприводимая ортогональная оператор-функция $\widetilde{E}'_\lambda$) на пространство $\mathfrak{H}$, найдется унитарное отображение U пространства $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\widetilde{\mathfrak{H}}'$, оставляющее на месте $\mathfrak{H}$ и такое, что $\widetilde{E}_\lambda = U\widetilde{E}'_\lambda U^{-1}$.

Из представления (1.1) вытекает, что если для некоторого вектора $f \in \mathfrak{H}$:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) < \infty, \tag{1.2}$$

то будут сильно сходиться интегралы, фигурирующие в равенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\widetilde{E}_\lambda f = P \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\widetilde{E}_\lambda f, \tag{1.3}$$

ибо, согласно (1.1), также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(\widetilde{E}_\lambda f, f) = J < \infty,$$

а для ортогональной оператор-функции конечность этого интеграла влечет сильную сходимость интеграла, стоящего в (1.3) под знаком P.

Пусть теперь A — некоторый, действующий в $\mathfrak{H}$ замкнутый эрмитов оператор с областью определения $\mathfrak{D}_A$ $(\overline{\mathfrak{D}}_A = \mathfrak{H})$.

Дистрибутивную оператор-функцию E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ будем называть ***спектральной функцией оператора*** A: если для любого $f \in \mathfrak{D}_A$

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) \quad \text{и} \quad Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda f. \tag{1.4}$$

Воспользуемся представлением (1.1) для спектральной функции E_λ. Ортогональная оператор-функция $\widetilde{E}_\lambda$ определяет в $\widetilde{\mathfrak{H}}$ некоторый самосопряженный оператор $\widetilde{A}$ с областью определения $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$, состоящей из всех тех $f \in \widetilde{\mathfrak{H}}$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(\widetilde{E}_\lambda f, f) < \infty,$$

и при этом для любого такого f

$$\widetilde{A}f = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\widetilde{E}_\lambda f.$$

В частности, мы заключаем, что $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$.

Кроме того, в силу (1.4) для любого $f \in \mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$:

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(\widetilde{E}_\lambda f, f) = \|\widetilde{A}f\|^2$$

и

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda f = P \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\widetilde{E}_\lambda f = P\widetilde{A}f.$$

Из этих двух равенств вытекает $Af = \widetilde{A}f$ при $f \in \mathfrak{D}_A$, т.е. $\widetilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение оператора A с выходом из $\mathfrak{H}$ в некоторое $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$.

Совсем просто проверяется предложение, обратное доказанному, т.е. если $\widetilde{A}$ есть некоторое самосопряженное расширение оператора A с выходом из $\mathfrak{H}$ в некоторое $\widetilde{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}$, а $\widetilde{E}_\lambda$ — обычная спектральная функция оператора $\widetilde{A}$, то равенством

$$E_\lambda = P\widetilde{E}_\lambda \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

определяется некоторая спектральная функция E_λ оператора A.

Представление будет неприводимым в том и только в том случае, когда расширение $\widetilde{A}$ неприводимо, т.е. в $\widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{H}$ нет инвариантного для $\widetilde{A}$ подпространства, в котором оператор $\widetilde{A}$ был бы самосопряженным.

Мы описали способ получения всех спектральных функций эрмитова оператора, который был указан М.А. Наймарком [2а] при ином исходном определении спектральной функции эрмитова оператора, а именно определении, данном Карлеманом–Стоном; оно оказывается эквивалентным нашему и мы его приводить не будем.

Нетрудно видеть, что всякий эрмитов оператор A имеет самосопряженные расширения $\widetilde{A}$ с выходом (см. [2а]), а следовательно, у него всегда имеется по крайней мере одна спектральная функция.

Замкнутый эрмитов оператор имеет единственную спектральную функцию в том и только том случае, когда он максимален [2а].

2. Пусть $\widetilde{A}$ — некоторое самосопряженное расширение замкнутого эрмитова оператора A с выходом в $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ (в частном случае $\widetilde{\mathfrak{H}}$ может совпадать с $\mathfrak{H}$). Положим для любых невещественных z и ζ

$$\widetilde{R}_z = (\widetilde{A} - zI)^{-1}, \qquad \widetilde{U}_{\zeta z} = I + (z - \zeta)\widetilde{R}_z = (\widetilde{A} - \zeta I)(\widetilde{A} - zI)^{-1}.$$

Нетрудно видеть, что:

1°. $\widetilde{U}_{\zeta z} = \widetilde{U}_{\zeta z}^{-1}$.

2°. $\widetilde{U}_{\zeta z}^{*} = \widetilde{U}_{\bar{\zeta}\bar{z}}$.

3°. $\widetilde{U}_{\zeta z}\widetilde{U}_{z\xi} = \widetilde{U}_{\zeta\xi}$.

Для замкнутого эрмитова оператора A при любом невещественном z линейное множество

$$\mathfrak{M}_z = (A - zI)\mathfrak{D}_A$$

замкнуто.

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{\bar{z}} = \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{M}_{\bar{z}} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Покажем, что:

4°. Для любых невещественных ζ, z оператор $\widetilde{U}_{\zeta z}$ отображает одно-однозначно $\widetilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$ на $\widetilde{\mathfrak{N}}_{z}$.

В самом деле, если $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$, т.е. $\varphi \perp \mathfrak{M}_{\widetilde{\zeta}}$, то при любом $f \in \mathfrak{D}_A$:

$$(\widetilde{U}_{\zeta z}\varphi, (A - \bar{z}I)f) = (\varphi, \widetilde{U}_{\bar{\zeta},\bar{z}}(\widetilde{A} - \bar{z}I)f) = (\varphi, (\widetilde{A} - \bar{\zeta}I)f) = 0.$$

Таким образом, $\widetilde{U}_{\zeta z}\widetilde{\mathfrak{N}}_{\zeta} \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_{z}$. Аналогично $\widetilde{U}_{z\zeta}\widetilde{\mathfrak{N}}_{z} \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_{\zeta}$. Принимая во внимание свойство 1° оператора $U_{\zeta z}$, убеждаемся в 4°.

3. Покажем теперь, что пересечение $\mathfrak{H}_0$ всех подпространств $\mathfrak{M}_z$:

$$\mathfrak{H}_0 = \bigcap_{\operatorname{Im} z \neq 0} \mathfrak{M}_z$$

является максимальным инвариантным подпространством оператора A, в котором оператор самосопряжен.

В самом деле, если $\mathfrak{L}$ — некоторое инвариантное для A подпространство, т.е. $A\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{L}$, и в $\mathfrak{L}$ оператор A самосопряжен, то при любом невещественном z

$$\mathfrak{L} = (A - zI)\mathfrak{D}_1 \subset \mathfrak{M}_z,$$

т.е. $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{H}_0$.

С другой стороны, принадлежность f к $\mathfrak{H}_0$ означает ортогональность f ко всем $\mathfrak{N}_z$ ($\operatorname{Im} z \neq 0$). Но если $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{N}}_\zeta$, то согласно 4°

$$\psi = \varphi + (z - \zeta)\widetilde{R}_z\varphi \in \widetilde{\mathfrak{N}}_z$$

и, следовательно, из ортогональности f к $\widetilde{\mathfrak{N}}_\zeta$ и $\widetilde{\mathfrak{N}}_z$ вытекает ортогональность f к $\widetilde{R}_z\varphi$. Откуда $\widetilde{R}_{\bar{z}}f \perp \varphi$, т.е. $\widetilde{R}_{\bar{z}}f \perp \mathfrak{N}_\zeta$. В силу произвольности ζ и z ($\operatorname{Im} z, \operatorname{Im} \zeta \neq 0$), заключаем, что $\widetilde{R}_z f \in \mathfrak{H}_0$, т.е. $\widetilde{R}_z\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}_0$ при любом z ($\operatorname{Im} z \neq 0$).

Заметим теперь, что если $f \in \mathfrak{H}_0$, то $f \in \mathfrak{M}_z$ и, следовательно, найдется $g \in \mathfrak{D}_A$, такое, что $(A - zI)g = (\widetilde{A} - zI)g = f$. Откуда $\widetilde{R}_z f = g$, т.е. $\mathfrak{D}_1 = \widetilde{R}_z\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}_0$.

Пусть теперь g — произвольный элемент из пересечения $\mathfrak{D}_A \cap \cap \mathfrak{H}_0$ и, следовательно, $f = (A - zI)g$. Тогда $R_\zeta f = g + (\zeta - z)\widetilde{R}_\zeta g \in \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{H}_0$ и, следовательно, $f = (A - \zeta I)R_\zeta f \in \mathfrak{M}_\zeta$ ($\operatorname{Im} \zeta \neq 0$), т.е. $f \in \mathfrak{H}_0$. Таким образом, $\mathfrak{H}_0$ инвариантно по отношению к A, и так как $(A - zI)\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{H}_0$, то A в $\mathfrak{H}_0$ является самосопряженным оператором.

Утверждение доказано.

Его можно было бы доказать без привлечения факта существования у эрмитова оператора самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ (вообще говоря, с выходом) и использования свойств операторов $\widetilde{U}_{\zeta z}$, но так как последние нужны будут нам и в других целях, то мы выбрали этот путь доказательства.

В силу доказанного изучение интересующих нас свойств оператора A сводится к изучению соответствующих свойств оператора A_1 (с тем же индексом дефекта, что у A), индуцируемого оператором A в инвариантном подпространстве $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_0$ — ортогональном дополнении $\mathfrak{H}_0$.

Поэтому без ограничения общности мы будем рассматривать только простые эрмитовы операторы, для которых

$$\bigcap_{\operatorname{Im} z \neq 0} \mathfrak{M}_z = 0. \tag{1.5}$$

§ 2. Изображение простого эрмитова оператора с конечными равными дефектными числами

1. Всюду в дальнейшем предполагается, что A — простой замкнутый эрмитов оператор с индексом дефекта (m, m), где m — некоторое натуральное число.

Последнее условие означает, что при любом невещественном z ортогональное к $\mathfrak{M}_z$ дополнение, которое будет обозначаться через $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, имеет размерность, равную m.

Как известно, $\mathfrak{N}_z$ состоит из всех решений φ уравнения

$$A^*\varphi - z\varphi = 0,$$

где A^* — сопряженный с A оператор.

Пусть A^0 — некоторое самосопряженное расширение в $\mathfrak{H}$ оператора A, а $R_z = (A^0 - zI)^{-1}$ — соответствующая ему резольвента.

На операторы $U_{\zeta z} = I + (z - \zeta)R_z$ распространяются те свойства, которые мы установили для более общего класса операторов $\widetilde{U}_{\zeta z}$ (см. §1, п.2).

Используем эти операторы для построения аналитического базиса $\{\varphi_1(z), ..., \varphi_m(z)\}$ пространства $\mathfrak{N}_z$.

Для этого, отправляясь от кого-либо (не обязательно ортонормированного) базиса $\varphi_1^0, ..., \varphi_m^0$ подпространства $\mathfrak{N}_{z_0}$ (z_0 — произвольно выбранная невещественная точка), положим

$$\varphi_j(z) = \varphi_j^0 + (z - z_0)R_z\varphi_j^0 \qquad (j = 1, 2, ..., m).$$

В силу того, что оператор $U_{\zeta,z}$ одно-однозначно и линейно отображает $\mathfrak{N}_\zeta$ и $\mathfrak{N}_z$, векторы $\varphi_1(z), ..., \varphi_m(z)$ будут образовывать базис $\mathfrak{N}_z$ при любом невещественном z. Этот базис интересен тем, что его элементы суть голоморфные вектор-функции внутри верхней и нижней полуплоскостей и, вообще, в каждой области, состоящей из регулярных точек резольвенты R_z.

В силу соотношения $U_{z_0 z} = U_{\zeta z}U_{z_0 \zeta}$ можно утверждать, что для любых двух регулярных точек z, ζ резольвенты R_z

$$\varphi_j(z) = \varphi_j(\zeta) + (z - \zeta)R_z\varphi_j(\zeta) \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Покажем теперь, что простота оператора A влечет сепарабельность пространства $\mathfrak{H}$.

В самом деле, пусть $\{z_j\}_1^\infty$ — последовательность невещественных точек, имеющих одну точку сгущения внутри верхней полуплоскости и одну точку внутри нижней полуплоскости.

В этом случае в силу аналитичности вектор-функций $\varphi_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ для любого $f \in \mathfrak{H}$ равенства

$$(f, \varphi_1(z_k)) = (f, \varphi_2(z_k)) = \cdots = (f, \varphi_m(z_k)) = 0 \qquad (k = 1, 2, ...)$$

влекут за собой тождества

$$(f, \varphi_1(z)) = (f, \varphi_2(z)) = \cdots = (f, \varphi_m(z)) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

т.е. принадлежность f ко всем $\mathfrak{M}_z$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, а значит, равенство $f = 0$.

Таким образом, $\mathfrak{H}$ есть линейная замкнутая оболочка системы векторов $\varphi_j(z_k)$ $(j = 1, 2, ..., m;\ \ k = 1, 2, ...)$.

Между прочим, доказанное утверждение легко может быть обобщено и на случай операторов с любым индексом дефекта (m, m), где кардинальные числа $m, n \leq$ мощности счетного множества.

2. Покажем, что всякий простой эрмитов оператор A с индексом дефекта (m, m) $(m < \infty)$ порождает некоторое представление пространства $\mathfrak{H}$, в котором каждый вектор $f \in \mathfrak{H}$ изображается некоторой аналитической вектор-функцией в m-мерном пространстве.

С этой целью выберем в $\mathfrak{H}$ какое-либо m-мерное пространство $M \subset \mathfrak{H}$ (называемое в дальнейшем ***модулем представления***), которое хотя бы при одном $z = z_+$ из верхней полуплоскости и одном $z = z_-$ нижней полуплоскости в пересечении с $\mathfrak{M}_z$ дает вектор 0.

Условие

$$M \cap \mathfrak{M}_z = (0) \tag{2.1}$$

означает, что в M нет вектора $(\neq 0)$, ортогонального к $\mathfrak{N}_{\bar z}$. Если $u_1, u_2, ..., u_m$ — некоторый базис M, то это условие будет выполнено, если детерминант $\Delta_u(z) = |(u_j, \varphi_k(\bar z))|_1^m$ отличен от нуля.

Легко видеть, что модуль M, удовлетворяющий условию (2.1) при $z = z_+$ ($\mathrm{Im}\ z_+ > 0$) и $z = z_-$ ($\mathrm{Im}\ z_- < 0$), может быть всегда выбран хотя бы в линейной оболочке векторов $\varphi_1(\bar{z}_+), ..., \varphi_m(\bar{z}_+)$; $\varphi_1(\bar{z}_-), ..., \varphi_m(\bar{z}_-)$.

Обозначим через S_M счетную совокупность всех невещественных нулей детерминанта $\Delta_u(z)$.

Таким образом, для невещественного z условие (2.1) выполняется в том и только в том случае, если $z \overline{\in} S_M$.

В дальнейшем (см. §5) будет показано, что детерминант $\Delta_u(z)$ в каждой из двух полуплоскостей $\mathrm{Im}\ z > 0$ и $\mathrm{Im}\ z < 0$ есть функция класса (N) (определение этого класса см. в §4).

Отсюда будет вытекать, что если каждую точку $\alpha \in S_M$ считать столько раз, какова ее кратность, как нуля $\Delta_u(z)$, то

$$\sum_{\alpha \in S_M} \frac{|\mathrm{Im}\ \alpha|}{1 + |\alpha|^2} < \infty.$$

Если невещественное $z \overline{\in} S_M$, т.е. выполняется условие (2.1), то $\mathfrak{H}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{M}_z$ и M:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_z + M,$$

и каждому $f \in \mathfrak{H}$ будет однозначно отвечать его компонента в M. Эту компоненту мы будем обозначать через $\mathfrak{f}_M(z)$; она, таким образом, определяется двумя условиями:

1°. $\mathfrak{f}_M(z) \in M$.

2°. $f - \mathfrak{f}_M(z) \in \mathfrak{M}_z$.

Если $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ — некоторый базис M, то $\mathfrak{f}_M(z)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z) u_j. \tag{2.2}$$

Условие 2° эквивалентно тому, что

$$(f - \mathfrak{f}_M(z), \varphi_k(\bar{z})) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., m).$$

Таким образом, скалярные функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z)(u_j, \varphi_k(\bar{z})) = (f, \varphi_k(\bar{z})) \quad (k = 1, 2, ..., m). \tag{2.3}$$

Из этих уравнений явствует, что для всякого $f \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ есть мероморфная функция внутри каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ с полюсами, лежащими в S_M.

Обозначим через $\mathfrak{H}_M$ линейное множество всех вектор-функций $\mathfrak{f}_M(z)$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, отвечающих всевозможным $f \in \mathfrak{H}$.

Очевидно, что отображение $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_M$ линейно, кроме того, оно одно-однозначно.

В самом деле, если $\mathfrak{f}_M(z) \equiv 0$ тождественно, то f входит в пересечение всех $\mathfrak{M}_z$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, т.е. $f = 0$.

Нам осталось немного добавить, чтобы установить следующее предложение.

Теорема 1. *Отображение $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ является линейным изоморфизмом между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_M$. При этом изоморфизме исходный оператор A переходит в оператор умножения на z. Отображение $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ оставляет M неподвижным, т.е. если $f \in M$, то $\mathfrak{f}_M(z) \equiv f$.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы очевидно, и поэтому остается доказать, что если $f \in \mathfrak{D}_A$ и $g = Af$, то

$$\mathfrak{G}_M(z) = z\mathfrak{f}_M(z).$$

Но если $g = Af$, то $h = g - zf = (A - zI)f \in \mathfrak{M}_z$ и, следовательно, $\mathfrak{h}(z) = \mathfrak{G}_M(z) - z\mathfrak{f}_M(z) = 0$, что и требовалось доказать.

Отметим еще следующее свойство множества вектор-функций $\mathfrak{H}_M$.

Теорема 2. *Вместе с каждой вектор-функцией $\mathfrak{f}_M(z)$ в $\mathfrak{H}_M$ содержится и вектор-функция*

$$\frac{\mathfrak{f}(z) - \mathfrak{f}(a)}{z - a}, \tag{2.4}$$

где a — произвольное невещественное число, не являющееся полюсом $\mathfrak{f}(z)$.

Доказательство. Пусть f — элемент из $\mathfrak{H}$, соответствующий $\mathfrak{f}(z)$, т.е. $\mathfrak{f}_M(z) = \mathfrak{f}(z)$. Положим $h = f - \mathfrak{f}_M(a)$. Так как отображение $g \to \mathfrak{G}_M(z)$ пространства $\mathfrak{H}$ на M оставляет элементы M неподвижными, то $\mathfrak{h}_M(z) = \mathfrak{f}(z) - \mathfrak{f}_M(a)$. В частности, $\mathfrak{h}_M(a) = 0$. Следовательно, $h \in \mathfrak{M}_a$. Обозначим через g элемент из $\mathfrak{D}_A$ такой, что $(A - aI)g = h$. Тогда $(z-a)\mathfrak{G}_M(z) = \mathfrak{h}_M(z)$ и мы убеждаемся, что функция (2.4) совпадает с функцией $\mathfrak{G}_M(z)$.

Нам понадобится следующая лемма, позаимствованная из кандидатской диссертации М.С. Лившица [3б].

Лемма 2.1. *Пусть* $\tau(\lambda) = \frac{1}{2}(\tau(\lambda+0)+\tau(\lambda-0))$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ *— некоторая функция ограниченной вариации на каждом конечном интервале, такая, что интеграл*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z} \qquad (\mathrm{Im}\, z \neq 0) \tag{2.5}$$

абсолютно сходится†.

Пусть, далее, $\varphi(\lambda)$ *— некоторая аналитическая функция в замкнутом интервале* $\Delta = (a, b)$.

Обозначим через Δ_ε $(\varepsilon > 0)$ *разорванный путь интегрирования, состоящий из направленного отрезка* $(a - i\varepsilon, b - i\varepsilon)$ *и антипараллельного отрезка* $(b + i\varepsilon, a - i\varepsilon)$.

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} \varphi(z) F(z) dz = -\int_a^b \varphi(\lambda) d\tau(\lambda). \tag{2.6}$$

---

†Условие абсолютной сходимости эквивалентно тому, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|d\tau(\lambda)|}{1 + |\lambda|} < \infty.$$

Эта лемма есть непосредственное обобщение известного правила Стильтьеса обращения интеграла (2.5).

Приведем доказательство этой леммы для случая, когда a и b суть точки непрерывности функции $\tau(\lambda)$ (только этот случай нам и понадобится).

Доказательство. Положим

$$F_1(z) = \int_a^b \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}, \quad F_2(z) = \left(\int_{-\infty}^a + \int_b^\infty\right) \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Лемма будет доказана, если мы докажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} \varphi(z) F_1(z) dz = -\int_a^b \varphi(\lambda) d\tau(\lambda), \tag{I}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_\varepsilon} \varphi(z) F_2(z) dz = 0. \tag{II}$$

Обозначим через Γ_ε контур, составленный из отрезков $(a - -i\varepsilon, b - i\varepsilon), (b + i\varepsilon, a + i\varepsilon)$ и двух полуокружностей $K_{1\varepsilon}$ и $K_{2\varepsilon}$, имеющих соответственно уравнения:

$$z - a = \varepsilon e^{i\varphi} \quad \left(\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}\right)$$

и

$$z - b = \varepsilon e^{i\varphi} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Так как контур Γ_ε охватывает отрезок $\Delta = (a, b)$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z) F_1(z) dz = \int_a^b \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(z)}{\lambda - z} dz \right\} d\tau(\lambda) =$$

$$= -\int_a^b \varphi(\lambda) d\tau(\lambda).$$

С другой стороны, имеем

$$\oint_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z)F_1(z)dz = \oint_{\Delta_\varepsilon} \varphi(z)F_1(z)dz +$$

$$+ \oint_{K_{1\varepsilon}} \varphi(z)F_1(z)dz + \oint_{K_{2\varepsilon}} \varphi(z)F_1(z)dz.$$

Поэтому для доказательства (I) остается показать, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{K_{1\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{K_{2\varepsilon}} = 0.$$

А так как длина каждой полуокружности K_ε равна $\pi\varepsilon$, то для этого достаточно показать, что

$$|F_1(z)| = \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad z \in K_\varepsilon. \tag{2.7}$$

Покажем это, например, для $z \in K_{1\varepsilon}$. Для $z = a + \varepsilon e^{i\varphi}$ $(\pi/2 \leq \varphi \leq 3\pi/2)$ будем иметь

$$|F_1(a+\varepsilon e^{i\varphi})| \leq \int_a^b \frac{|d\tau(\lambda)|}{\sqrt{\varepsilon^2+\lambda^2}} = \int_a^{(n-1)\varepsilon} + \int_{(n-1)\varepsilon}^b \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_a^{(n-1)\varepsilon} |d\tau(\lambda)| + \frac{1}{n\varepsilon} \int_{(n-1)\varepsilon}^b |d\tau(\lambda)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big[\int_a^{(n-1)\varepsilon} |d\tau(\lambda)| + \frac{1}{n} \int_a^b |d\tau(\lambda)|\Big].$$

Так как выражение, стоящее в квадратных скобках, при выборе достаточно большого n и любого положительного $\varepsilon < \dfrac{2}{n^2}$ становится сколь угодно малым, то (2.7) доказано.

Таким образом, соотношение (I) доказано.

Аналогично доказывается соотношение (II), для чего уже следует: вместо контура Γ_ε использовать контур Γ'_ε, получающийся из Γ_ε заменой полуокружностей $K_{1\varepsilon}$ и $K_{2\varepsilon}$ их дополнениями $K'_{1\varepsilon}$ и $K'_{2\varepsilon}$ до полных окружностей.

Лемма доказана.

3. Рассматривая $\mathfrak{f}_M(z)$ отдельно в верхней и нижней полуплоскости, мы получаем, вообще говоря, две различные аналитические вектор-функции (верхнюю и нижнюю), которые могут и не быть одна аналитическим продолжением другой.

Точку a вещественной оси мы будем называть регулярной точкой функции $\mathfrak{f}_M(z)$, если обе соответствующие ей функции (верхняя и нижняя) продолжаемы через некоторый интервал $(a-\delta, a+\delta)$ и при этом переходят одна в другую.

Будем говорить, что вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна на некотором множестве, если каждая точка последнего является регулярной точкой функции $\mathfrak{f}_M(z)$.

Теорема 3. *Если для некоторого $\mathfrak{f} \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна на замкнутом интервале $\Delta = (a, b)$, то для любой спектральной функции E_λ оператора A справедливо равенство*

$$E_\Delta f = \sum_{k=1}^{m} \int_a^b f_u^{(k)}(\lambda) dE_\lambda u_k. \tag{2.8}$$

Доказательство. Как мы уже знаем, спектральную функцию E_λ можно представить в виде

$$E_\lambda = P\widetilde{E}_\lambda \quad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{2.9}$$

где $\widetilde{E}_\lambda$ — спектральная функция некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A с выходом в $\widetilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$, а P — оператор проектирования $\widetilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Положим

$$\widetilde{R}_z = (\widetilde{A} - zI)^{-1}, \quad \widetilde{\mathfrak{N}}_z = \widetilde{\mathfrak{H}} \ominus \mathfrak{M}_{\bar z} \quad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Произвольно зафиксировав невещественное ζ и выбрав произвольный вектор $\psi_0 \in \mathfrak{N}_\zeta \subset \widetilde{\mathfrak{N}}_\zeta$, образуем вектор

$$\psi(z) = \psi_0 + (z-\zeta)\widetilde{R}_z\psi_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-z} d\widetilde{E}_\lambda \psi_0 \qquad (\mathrm{Im}\ z \neq 0). \quad (2.10)$$

Так как оператор $\widetilde{U}_{\zeta z} = I + (z-\zeta)\widetilde{R}_z$ отображает $\widetilde{\mathfrak{N}}_\zeta$ на $\mathfrak{N}_z$, и, следовательно, $\mathfrak{N}_\zeta$ в $\widetilde{\mathfrak{N}}_z$, то $\psi(\bar{z}) \perp \mathfrak{M}_z$ при любом z $(\mathrm{Im}\ z \neq 0)$. Откуда для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(f - \mathfrak{f}_M(z),\ \psi(\bar{z})) = 0 \qquad (\mathrm{Im}\ z \neq 0).$$

Таким образом, для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(f, \psi(\bar{z})) = \sum_{k=1}^{m} f_u^{(k)}(z)(u_k, \psi(\bar{z})) \qquad (\mathrm{Im}\ z \neq 0). \qquad (2.11)$$

В силу (2.9) и (2.10),

$$(f, \psi(\bar{z})) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-z} d(\widetilde{E}_\lambda f, \psi_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-\zeta}{\lambda-z} d(E_\lambda f, \psi_0).$$

Аналогичным образом выражаются и скалярные произведения $(u_k, \psi(\bar{z}))$ $(k = 1, 2, ..., m)$.

Предположим сперва, что точки a и b — точки "непрерывности" спектральной функции E_λ. Применяя тогда лемму М.С. Лившица к случаям, когда

$$d\tau(\lambda) = (\lambda-\zeta)d(E_\lambda f, \psi_0), \quad \varphi(\lambda) = (\lambda-\zeta)^{-1}$$

и

$$d\tau(\lambda) = (\lambda-\zeta)d(E_\lambda u_k, \psi_0),$$
$$\varphi(\lambda) = f_u^{(k)}(\lambda)(\lambda-\zeta)^{-1} \quad (k = 1, 2, ..., m),$$

находим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{(f, \psi(\bar{z}))}{z-\zeta} dz = \int\limits_a^b d(E_\lambda f, \psi_0) = (E_\Delta f, \psi_0)$$

и соответственно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\frac{f_u^{(k)}(z)}{z-\zeta}(u_k,\psi(\bar z))dz =$$

$$=\int\limits_a^b f_u^{(k)}(\lambda)d(E_\lambda u_k,\psi_0) \quad (k=1,2,\dots,m).$$

Таким образом, согласно (2.11),

$$(E_\Delta f,\psi_0)=\sum_{k=1}^m\int\limits_a^b f_u^{(k)}(z)d(E_\lambda u,\psi_0). \tag{2.12}$$

Здесь ψ_0 — произвольный вектор из $\mathfrak{N}_\zeta$, а ζ — произвольное невещественное число. Так как линейная замкнутая оболочка всех $\mathfrak{N}_\zeta$ ($\operatorname{Im}\zeta\neq 0$) совпадает с $\mathfrak{H}$ (A — простой оператор), то (2.12) влечет (2.8).

Таким образом, равенство (2.8) доказано для случая, когда a и b суть точки непрерывности спектральной функции E_λ. В общем случае всегда найдется сколь угодно малое $\varepsilon>0$ такое, что $a+\varepsilon$ и $b+\varepsilon$ будут точками непрерывности функции E_λ и, следовательно, (2.8) будет иметь место с заменой a и b соответственно на $a+\varepsilon$ и $b+\varepsilon$.

Переходя к пределу по подходяще выбранным $\varepsilon_n\to 0$, получим (2.8) и для общего случая.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть E_λ — некоторая спектральная функция оператора A, а*

$$\tau_{jk}(\lambda)=(E_\lambda u_j,u_k) \quad (j,k=1,2,\dots,m).$$

Если для некоторых $g,f\in\mathfrak{H}$ вектор-функции $\mathfrak{G}_M(z)$ и $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярны на замкнутом интервале $\Delta=(a,b)$, то

$$(E_\Delta f,g)=\sum_{j,k=1}^m\int\limits_a^b f^{(j)}(\lambda)\overline{g^{(k)}(\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda). \tag{2.13}$$

В самом деле, согласно (2.8),

$$(E_\Delta f, g) = \sum_{=1}^{m} \int_a^b f^{(j)}(\lambda) d(E_\lambda, u_j, g) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_a f^{(j)}(\lambda)\, d\,(u_j, E_\lambda\, g). \tag{2.14}$$

С другой стороны, записывая (2.8) применительно к интервалу $\Delta_\lambda = (a, \lambda)$ и $f = g$, находим

$$(u_j, E_\lambda g) - (u_j, E_a g) = \sum_{k=1}^{m} \int_a^\lambda \overline{g^{(k)}(\lambda)} d(u_j, E_\lambda u_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_a^\lambda \overline{g^{(k)}(\lambda)} d\tau_{jk}(\lambda). \tag{2.15}$$

Сопоставление (2.14) и (2.15) дает (2.13).

§ 3. Квазирегулярный базис

1. Ограниченную эрмитову матрицу-функцию $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$ будем называть ***матрицей распределения***, если

1) для любых комплексных $\xi_1, ..., \xi_m$ форма

$$\sum_{j,k=1}^{m} \tau_{jk}(\lambda)\xi_j\bar{\xi}_k$$

есть неубывающая функция λ,

2) $T(\lambda - 0) = T(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$,

3) $T(-\infty) = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} T(\lambda) = 0.$

Заметим, что из свойства 1) вытекает, что каждая из функций $\tau_{jk}(\lambda)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ имеет ограниченную вариацию и, следовательно, пределы $\tau_{jk}(\lambda - 0)$ и $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \tau_{jk}(\lambda)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ всегда существуют.

Мы используем результаты И. Каца[†] для построения гильбертова пространства, определяемого матрицей распределения $T(\lambda)$.

Положим

$$\sigma(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \tau_{jj}(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Из 1) вытекает, что для приращений $\Delta\tau_{jk}$ на любом интервале $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ выполняется неравенство

$$|\Delta\tau_{jk}|^2 \leq \Delta\sigma \qquad (j, k = 1, 2, ..., m).$$

Поэтому найдутся σ-измеримые и σ-интегрируемые (суммируемые) функции $\rho_{jk}(\lambda)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ такие, что

$$\tau_{jk}(\lambda) - \tau_{jk}(0) = \int_0^\lambda \rho_{jk}(\mu) d\sigma(\mu)$$

$$(-\infty < \lambda < \infty; \quad j, k = 1, 2, ..., m),$$

при этом без ограничения общности можно предполагать, что все $\rho_{jk}(\lambda) = 0$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ в каждой точке λ, в которой хотя бы одна из производных $d\sigma_{jk}/d\sigma$ не существует. Тогда в силу 1) для любых комплексных

$$\sum_{j,k=1}^{m} \rho_{jk}(\lambda)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{3.1}$$

Для любых двух вектор-функций $\mathfrak{g}(\lambda) = (g_1(\lambda), ..., g_m(\lambda))$ и $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), ..., f_m(\lambda))$ аргумента λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ положим

$$\rho(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}; \lambda) = \sum \rho_{jk}(\lambda) f_j(\lambda)\overline{g_k(\lambda)}.$$

[†] *Кац И.* О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами-функциями (1949) (статья передана в печать).

В силу (3.1),

$$\rho(\mathfrak{f},\mathfrak{f};\lambda) \geq 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{3.2}$$

и, следовательно,

$$|\rho(\mathfrak{f},\mathfrak{g};\lambda)| \leq \rho^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{f},\mathfrak{f};\lambda)\rho^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{g},\mathfrak{g};\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty). \tag{3.3}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_T$ совокупность всех σ-измеримых вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), ..., f_m(\lambda))^\dagger$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathfrak{f},\mathfrak{f};\lambda)d\sigma(\lambda) < \infty.$$

В силу неравенства (3.3) для всяких двух вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda)$ и $\mathfrak{g}(\lambda)$ из $\mathfrak{L}_T$ будет иметь смысл выражение

$$(\mathfrak{f},\mathfrak{g})_T = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathfrak{f},\mathfrak{g};\lambda)d\sigma(\lambda),$$

которое мы и назовем *скалярным произведением элементов* $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$.

Это название оправдывается тем, что, как легко показывается, $\mathfrak{L}_T$ есть линейное множество вектор-функций и выражение $(\mathfrak{f},\mathfrak{g})_T$ в нем обладает всеми свойствами обычного скалярного произведения, за исключением, может быть, того, что в неравенстве $(\mathfrak{f},\mathfrak{f})_T \geq 0$ знак $=$ возможен и при $\mathfrak{f} \not\equiv 0$.

Основной результат И. Каца гласит, что отождествление в $\mathfrak{L}_T$ всяких двух элементов $\mathfrak{f}_1$ и $\mathfrak{f}_2$ таких, что $(\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2)_T = 0$ обращает $\mathfrak{L}_T$ в полное гильбертово пространство.

Для всяких двух элементов $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$ из $\mathfrak{L}_T$ условимся чисто символически писать

$$(\mathfrak{f},\mathfrak{g})_T = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{m} f_j(\lambda)\overline{g_k(\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda).$$

† Вектор-функция $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), ..., f_m(\lambda))$ называется σ-измеримой, если все ее координаты $f_k(\lambda)$ $(k = 0, 1, ..., m)$ суть σ-измеримые функции.

В оправдание этой символической записи заметим, что не для всякой пары $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{L}_T$ будут существовать интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\overline{g_k(\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda) \qquad (j, k = 1, 2, ..., m). \tag{3.4}$$

Однако, если для некоторых σ-измеримых вектор-функций существуют и абсолютно сходятся несобственные интегралы (3.4), то $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{L}_T$ и сумма этих интегралов дает $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T$.

Это утверждение вытекает еще из такой характеристики пространства $\mathfrak{L}_T$, доказанной И. Кацом.

Если $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_1(\lambda), ..., f_m(\lambda))$ — некоторая вектор-функция, а $N > 0$, то через $\mathfrak{f}_N(\lambda) = (f_{N_1}(\lambda), ..., f_{N_m}(\lambda))$ обозначим вектор-функцию, определяемую условиями: $\mathfrak{f}_N(\lambda) = \mathfrak{f}(\lambda)$ в каждой точке λ, где все $|\mathfrak{f}_j(\lambda)| \leq N \quad (j = 1, 2, ..., m)$ и $\mathfrak{f}_N(\lambda) = (0, 0, ..., 0)$ в каждой точке λ, где хотя бы одна из функций $\mathfrak{f}_j(\lambda)$ имеет модуль $> N$.

Пусть теперь $\mathfrak{f}(\lambda)$ и $\mathfrak{g}(\lambda)$ — две измеримые вектор-функции λ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Положим

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{T;N} = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_{N_j}(\lambda)\overline{g_{N_k}(\lambda)}d\tau_{jk}.$$

Оказывается, для любой σ-измеримой вектор-функции $\mathfrak{f}(\lambda)$ существует конечный или бесконечный неотрицательный предел

$$\lim_{N\to\infty} (\mathfrak{f}, \mathfrak{f})_{T;N}.$$

Если этот предел конечен, то в этом и только в этом случае $\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$.

Кроме того, *для любых* $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathfrak{L}_T$

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_T = \lim_{N\to\infty} (\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{T;N}. \tag{3.5}$$

Сделаем еще такое замечание, которое нам в дальнейшем понадобится. Если каждая координата $f_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ вектор-функции $\mathfrak{f}(\lambda) \in \mathfrak{L}_T$ почти всюду (в смысле соответствующей ей τ_{jj}-меры) равна нулю, то $\mathfrak{f}(\lambda)$, как элемент $\mathfrak{L}_T$, эквивалентен нулю.

В самом деле, если $f_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ почти всюду в смысле соответствующей τ_{jj}-меры $(j = 1, 2, ..., m)$ равно нулю, то это же подавно имеет место и для $f_{N_j}(\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$. Поэтому вектор-функции $(f_{N_1}, 0, 0, ..., 0), (0, f_{N_2}, 0, ..., 0)$и т.д. $(0, 0, ..., f_{N_m})$ эквивалентны нулю в $\mathfrak{L}_T$, ибо квадрат нормы j-й из этих вектор-функций равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_{N_j}(\lambda)|^2 d\tau_{jj}(\lambda) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Следовательно, и вектор-функция $\mathfrak{f}_N(\lambda)$, равная сумме этих вектор-функций, равна нулю. Но тогда и $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}) = \lim_{N\to\infty} (\mathfrak{f}_N, \mathfrak{f}_N) = 0$, что и требовалось доказать.

С пространством $\mathfrak{L}_T$ мы будем ассоциировать действующий в нем самосопряженный оператор $\Lambda = \Lambda_T$ (оператор умножения на аргумент). Его областью определения будет множество $\mathfrak{D}_T$ всех $\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$, для которых также $\lambda\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$ и $\Lambda\mathfrak{f} = \lambda\mathfrak{f}$. Легко видеть, что оператор Λ самосопряжен, нетрудно также показать, что его спектр имеет кратность $\leq m$.

Обозначим через E_μ $(-\infty < \mu < \infty)$ спектральную функцию оператора Λ. Ее действие на элементы $\mathfrak{f} \in \mathfrak{L}_T$ заключается в следующем: если $\mathfrak{g} = E_\mu \mathfrak{f}$, то $\mathfrak{g}(\lambda) = \mathfrak{f}(\lambda)$ при $\lambda \leq \mu$ и $\mathfrak{g}(\lambda) = 0$ при $\lambda \geq \mu$.

2. Возвращаясь к изучению отображения $f \to \mathfrak{f}_M(z)$, порождаемого эрмитовым оператором A, обозначим через $\mathfrak{N}$ множество тех $f \in \mathfrak{H}$, которым отвечают вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$, регулярные на всей вещественной оси.

Согласно следствию теоремы 4, для любых $f, g \in \mathfrak{N}$

$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_u^{(j)}(\lambda) g_u^{(k)}(\lambda) d\tau_{jk}(\lambda),$$

где

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \quad (-\infty < \lambda < \infty; \quad j, k = 1, 2, ..., m), \qquad (3.4')$$

а E_λ — какая-либо спектральная функция оператора A.

Обозначим через V_u множество всех матриц-функций $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$ с элементами, получаемыми по формулам (3.4′). Очевидно, каждая матрица $T(\lambda) \in V_u$ удовлетворяет условиям 1), 2), 3), указанным в предыдущей рубрике.

Мы будем говорить, что базис $\{u_1, ..., u_m\}$ *квазирегулярен*, если множество $\mathfrak{R}$ плотно в $\mathfrak{H}$.

Для квазирегулярного базиса $\{u_1, ..., u_m\}$ имеет место

Теорема 4. *Множество V_u состоит из тех и только тех ограниченных матриц-функций $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$, для которых*

$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f_u^{(j)}(\lambda)\overline{g_u^{(k)}(\lambda)}d\tau_{jk}(\lambda) \qquad (3.5')$$

при любых $f, g \in \mathfrak{R}$.

Доказательство. Необходимость условия была пояснена выше. Докажем его достаточность.

Итак, пусть $T(\lambda)$ — некоторая ограниченная неубывающая матрица-функция, для которой имеет место (3.5′) при любых $f, g \in \mathfrak{R}$.

Образуем пространство $\mathfrak{L}_T$.

Пусть z_0 — какая-либо невещественная u-регулярная точка. Элемент $f \in \mathfrak{H}$ принадлежит $\mathfrak{M}_{z_0}$ в том и только том случае, если $\mathfrak{f}_M(z_0) = 0$. Всякому элементу $f \in \mathfrak{M}_{z_0}$ отвечает элемент $g \in \mathfrak{D}_A$ такой, что $(A - z_0 I)g = f$ и, следовательно,

$$\mathfrak{g}_M(z) = \frac{\mathfrak{f}_M(z)}{z - z_0}.$$

Последнее соотношение показывает, что если $f \in \mathfrak{R}$, то также $g \in \mathfrak{R}$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ пересечение $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{R}$, а через A_0 оператор, имеющий $\mathfrak{D}_0$ своей областью определения и совпадающий на $\mathfrak{D}_0$ с A. Покажем, что замыкание $\overline{A}_0$ оператора A_0 дает A. При замыкании оператора A_0 замыкается и множество $\mathfrak{R}_0 = (A_0 - z_0 I)\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{M}_{z_0}$. Поэтому равенство $\overline{A}_0 = A$ будет доказано, если мы докажем, что замыкание множества $\mathfrak{R}_0$ совпадает с $\mathfrak{M}_{z_0}$, а это эквивалентно тому, что ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}_0$ имеет m

измерений. Допустим, что последнее не выполняется. Тогда найдется ортонормированная система векторов $f_1, ..., f_{m+1}$, ортогональных к $\mathfrak{R}_0$, и любой вектор f вида

$$f = \sum_1^{m+1} c_j f_j \qquad \left(\sum_1^{m+1} |c_j|^2 = 1 \right)$$

будет удален от $\mathfrak{R}_{z_0}$ на расстояние, равное 1. Так как $\mathfrak{R}$ по условию плотно в $\mathfrak{H}$, то можно будет выбрать в $\mathfrak{R}$ векторы f'_j $(j = 1, 2, ..., m)$ так, чтобы $|f_j - f'_j| < 1/\sqrt{(2m+1)}$, и тогда любой вектор

$$f' = \sum_1^{m+1} c_j f'_j \qquad \left(\sum_1^{m+1} |c_j|^2 = 1 \right)$$

будет удален от $\mathfrak{R}_0$ на расстояние $> 1/2$.

С другой стороны, константы c_j $(j = 1, 2, ..., m+1)$ могут быть всегда выбраны так, что

$$\mathfrak{f}_M(z_0) = \sum_1^{m+1} c_j \mathfrak{f}'_{jM}(z_0) = 0$$

и, следовательно, $f' \in \mathfrak{R}_0$. Мы пришли к противоречию. Итак, $\overline{A}_0 = A$.

Пусть теперь $T(\lambda)$ — какая-либо ограниченная неубывающая матрица-функция, для которой имеет место $(3.5')$ при любых $f, g \in \mathfrak{R}$.

Для доказательства того, что $T(\lambda) \in V_u$ образуем $\mathfrak{L}_T$. В силу $(3.5')$ отображение Φ: $f \to (f_u^{(1)}(\lambda), ..., f_u^{(n)}(\lambda))$, определенное на всех элементах $f \in \mathfrak{R}$, отображает унитарно† $\mathfrak{R}$ в некоторую часть $\mathfrak{L}_T$, и так как $\overline{\mathfrak{R}} = \mathfrak{H}$, то его можно расширить с сохранением унитарности на все $\mathfrak{H}$. При отображении Φ оператор A_0 переходит в суженный оператор умножения на λ, определенный на $\Phi\mathfrak{D}_0$. Отождествляя $f \subset \Phi f$ и, следовательно, рассматривая $\mathfrak{H}$ как часть $\mathfrak{L}_T$, мы сможем утверждать, что самосопряженный оператор Λ (оператор умножения на аргумент) есть расширение оператора A_0 и, следовательно, оператора $A = \overline{A}_0$.

† То есть с сохранением скалярного произведения.

Используем теперь спектральную функцию E_λ оператора Λ; если P — оператор проектирования $\mathfrak{L}_T$ на $\mathfrak{H}$, то $E_\lambda = PE_\lambda$ будет обобщенной спектральной функцией оператора A и для нее (см. п.1)

$$(E_\lambda u_j, u_k) = (PE_\lambda u_j, u_k) = (E_\lambda u_j, u_k) = \int_{-\infty}^{\lambda} d\tau_{jk}(\mu) = \tau_{jk}(\lambda)$$

$$(j, k = 1, 2, ..., m; \quad -\infty < \lambda < \infty),$$

т.е. матрица-функция $T(\lambda)$ порождается спектральной функцией E_λ оператора A.

Теорема доказана.

Матрицу распределения $T(\lambda) \in V_u$ условимся называть *канонической*, если она порождается по формуле (3.4′) некоторой *ортогональной* спектральной функцией E_λ оператора A.

Имеет место

Теорема 5. *Пусть $T(\lambda)$ — некоторая матрица-функция из V_u. Отображение $f \to (f^{(1)}(\lambda), ..., f^{(m)}(\lambda))$ множества $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{L}_T$ порождает унитарное отображение Φ всего $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{L}_T$. Это отображение будет изоморфизмом между $\mathfrak{H}$ и всем $\mathfrak{L}_T$ в том и только в том случае, когда $T(\lambda)$ — каноническая матрица распределения.*

Доказательство. Условие необходимо. В самом деле, если $\Phi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_T$, то, отождествляя f и Φf, мы сможем рассматривать оператор Λ как самосопряженное расширение оператора A в $\mathfrak{H}$, а $E_\lambda = E_\lambda$ как ортогональную спектральную функцию оператора A (в данном случае $P = I$), и, следовательно, матрица распределения $T(\lambda)$ будет канонической.

Сложней доказывается достаточность условия.

Итак, пусть элементы $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|$ образованы по формулам

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \qquad (j, k = 1, 2, ..., m),$$

где E_λ — спектральная функция некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A в $\mathfrak{H}$.

Нам надлежит показать, что множество $\Phi\mathfrak{R}$ плотно в $\mathfrak{H}_T$, ибо в этом и только в этом случае $\Phi\mathfrak{H} = \mathfrak{L}_T$. Если $f \in \mathfrak{H}$, то через $\mathfrak{f}(\lambda)$ (без индекса M) будем обозначать вектор-функцию Φf.

Введем в рассмотрение резольвенту R_z $(\operatorname{Im} z \neq 0)$ оператора $\widetilde{A}$: $R_z = (\widetilde{A} - zI)^{-1}$.

На основании (2.8) для любых $f, g \in \mathfrak{R}$

$$(R_z f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_\lambda f, g)}{\lambda - z} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_u^{(j)}(\lambda)\overline{g_u^{(k)}(\lambda)}}{\lambda - z}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{3.6}$$

А так как при невещественных z и ζ

$$R_z = R_\zeta + (z - \zeta) R_\zeta R_z,$$

то из (3.6) вытекает, что

$$(R_z f, R_z f) = (R_{\bar z} R_z f, f) =$$

$$= \frac{1}{z - \bar z}\left[(R_z f, f) - (R_{\bar z} f, f)\right] =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{(j)}(\lambda)\overline{g^{(k)}(\lambda)}}{|\lambda - z|^2}\, d\tau_{jk}(\lambda). \tag{3.7}$$

Соотношения (3.6) и (3.7) сокращенно можно записать в виде

$$(R_z f, g) = \left(\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}, \mathfrak{g}(\lambda)\right)_T,$$

$$(R_z f, R_z f) = \left(\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}, \frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}\right)_T \qquad (f, g) \in \mathfrak{R}.$$

Из них вытекает, что†

$$\|R_z f - g\|^2 = \left\|\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z} - \mathfrak{g}(\lambda)\right\|_T^2 \qquad (f, g \in \mathfrak{R}). \tag{3.8}$$

†Через $\|\mathfrak{f}\|_T$ мы обозначаем $\sqrt{(\mathfrak{f}, \mathfrak{f})_T}$.

Так как $\mathfrak{N}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то для любого $f \in \mathfrak{N}$, невещественного z и $\varepsilon > 0$ найдется такое $g \in \mathfrak{N}$, что $\|R_z f - g\| < \varepsilon$. В силу (3.8) это означает, что замыкание множества $\Phi\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{L}_T$ содержит все вектор-функции вида $\dfrac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}$, где $\mathfrak{f}(\lambda) = \Phi f \quad (f \in \mathfrak{H})$.

Пусть теперь $\mathfrak{h}(\lambda) = (h_1(\lambda), ..., h_m(\lambda))$ вектор-функция из $\mathfrak{L}_T$, ортогональная к $\Phi\mathfrak{N}$. Наша теорема будет доказана, если мы докажем, что $\mathfrak{h}(\lambda)$ эквивалентно нулю. Из ортогональности $\mathfrak{h}(\lambda)$ к $\Phi\mathfrak{N}$ вытекает ортогональность $\mathfrak{h}(\lambda)$ и любой вектор-функции $\dfrac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}$, где $\mathfrak{f}(\lambda) = \Phi f \quad (f \in \mathfrak{N})$. Таким образом,

$$\left(\frac{\mathfrak{f}(\lambda)}{\lambda - z}, \mathfrak{h}(\lambda)\right)_T = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathfrak{f}, \mathfrak{h})}{\lambda - z}\, d\sigma(\lambda) = 0 \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0).$$

Отсюда с помощью известной формулы обращения Стильтьеса находим, что при любых $\lambda' < \lambda''$

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \rho(\mathfrak{f}, \mathfrak{h}) d\sigma(\lambda) = 0.$$

Полагая здесь $\mathfrak{f} = u_j \quad (j = 1, 2, ..., m)$, находим, что

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \overline{h_j(\lambda)} d\tau_{jj}(\lambda) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m).$$

Отсюда $h_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, ..., m)$ почти всюду (в смысле τ_{jj}-меры) равно нулю. А это, как было показано в п.1, влечет эквивалентность $\mathfrak{h}(\lambda)$ нулю в $\mathfrak{L}_T$.

Теорема доказана.

§ 4. Вспомогательные предложения теории функций

1. Пусть G — некоторая односвязная область комплексной плоскости. Условимся говорить что функция $f(z) \quad (z \in G)$

есть функция класса (N) в G, если она голоморфна внутри G и $\overset{+}{\log}|f(z)|$ имеет в G гармоническую мажоранту. Последнее условие означает, что найдется, по крайней мере, одна гармоническая в G функция $u(z)$, для которой

$$\overset{+}{\log}|f(z)| \leq u(z) \qquad (z \in G).$$

Очевидно, что при конформном отображении области G на некоторую область G_1 всякая функция класса (N) в G перейдет в некоторую функцию класса (N) в G.

Как показал Р. Неванлинна [5] (см. также [6а, б]), для того чтобы некоторая функция $F(z)$ $(|z| < 1)$ была класса (N) в единичном круге, необходимо и достаточно, чтобы она допускала следующее представление:

$$F(z) = \varepsilon B(z) \exp\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\omega(t)\Big) \qquad (|z| < 1),$$

где $|\varepsilon| = 1, \omega(t)$ $(-\pi \leq t \leq \pi)$ — некоторая вещественная функция ограниченной вариации, а $B(z)$ — функция Бляшке, т.е. конечное или бесконечное сходящееся произведение вида

$$B(z) = z^{\nu} \Pi \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \qquad (|z| < 1), \tag{4.1}$$

где ν — целое число ≥ 0, а $|\alpha| < 1$ $(k = 1, 2, ...)$.

Как известно, условием сходимости бесконечного произведения (4.1) является неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < \infty. \tag{4.2}$$

Другим условием того, чтобы голоморфная функция $F(z)$ $(|z| < 1)$ была класса (N) в единичном круге, является неравенство

$$\sup_{0 \leq r < 1} \int\limits_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})| d\varphi < \infty. \tag{4.3}$$

Из приведенных характеристических свойств функций класса (N) в единичном круге следует, что они образуют линейное кольцо; при этом, если две функции входят в это кольцо и их частное голоморфно в G, то и это частное входит в кольцо.

В силу известной формулы Иенсена (4.3) влечет неравенство

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} \left|\log |F(re^{i\varphi})|\right| d\varphi < \infty,$$

а следовательно, и неравенство

$$\mathfrak{I}(F) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left|\log |F(re^{i\varphi})|\right| r dr d\varphi < \infty. \tag{4.4}$$

Стоящий слева интеграл представляет собой интеграл от $\left|\log |F(z)|\right|$, распространенный по площади единичного круга.

2. Сформулируем в качестве лемм некоторые простые следствия изложенных фактов.

Лемма 4.1. *Если функция $f(z)$ принадлежит классу (N) в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *то*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\log |f(z)||}{(1+|z|)^4} dx dy < \infty. \tag{4.5}$$

Доказательство. Функции $f(z)$ отвечает функция $F(\zeta)$ ($|\zeta| < 1$) класса (N) в единичном круге, получающаяся при помощи преобразования

$$f(z) = F(\zeta), \quad \text{где} \quad \zeta = \frac{z - i}{z + i}. \tag{4.6}$$

Записав для функции $F(\zeta)$ неравенство (4.4) и проделав в нем преобразование (4.6), найдем, что

$$\mathfrak{I}(F) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{|\log |f(z)||}{|z+i|^4} dx dy < \infty.$$

Так как $|z+i| \leq 1+|z|$, то отсюда заключаем (4.5).

3. В дальнейшем нам часто придется пользоваться тем фактом (см. [4, 6б]), что всякий интеграл $J(z)$ вида

$$J(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0),$$

а значит, и интеграл

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} d\sigma(\lambda) \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{4.7}$$

где $\sigma(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — функция ограниченной вариации на всей оси, есть функция класса (N) в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$.

Нам понадобится также

Лемма 4.2. *Если функция $f(z)$ допускает представление (4.7), то*

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(z)|}{(1+|z|)^4} dx dy \leq \overset{+}{\log} \operatorname{var} \sigma + 2. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в интеграле (4.7) перейти к новым переменным

$$\zeta = \frac{z-i}{z+i}, \quad e^{it} = \frac{\lambda - i}{\lambda + i},$$

то мы найдем, что

$$f(z) = F(\zeta) = \zeta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{it}}{e^{it} - \zeta} d\omega(t),$$

где $\omega(t) = \sigma(\lambda)$.

Таким образом,

$$|F(\zeta)| \leq \frac{2|\zeta|}{1 - |\zeta|} \operatorname{var} \omega < \frac{2 \operatorname{var} \sigma}{1 - |\zeta|} \qquad (|\zeta| < 1)$$

и, следовательно,

$$\overset{+}{\log}|F(z)| < \overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + \log 2 + \log(1 - |\zeta|).$$

Отсюда после простых вычислений получаем

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F(re^{i\varphi})| r dr d\varphi \leq$$

$$\leq \pi \overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + \pi\left(\log 2 + \frac{3}{4}\right) \leq \pi \overset{+}{\log}\operatorname{var}\sigma + 2\pi.$$

Переходя в двойном интеграле от переменной $\zeta = re^{i\varphi}$ к переменной z, придем к неравенству (4.8), в котором вместо $(1+|z|)^4$ будет стоять $|z+i|^4 \leq (1+|z|)^4$.

4. Важную роль в дальнейшем будет играть следующая теорема, доказанная автором в другом месте [1и].

Теорема 6. *Для того чтобы целая функция $f(z)$ была класса (N) в каждой из полуплоскостей* $\operatorname{Im} z > 0$ *и* $\operatorname{Im} z < 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1°. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}|f(x)|}{1+|x|^2} dx < \infty.$$

2°. *Функция $f(z)$ — типа не выше экспоненциального, т.е.*

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty. \tag{4.9}$$

Условия 1°, 2° для целой функции имеют следствием ряд интересных свойств.

В частности, напомним, что если для целой функции $f(z)$ выполняется условие (4.9), то, как показал Г. Полиа (см. [7, 10]), индикатрисса роста f

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \tag{4.10}$$

является опорной функцией к некоторому ограниченному выпуклому замкнутому множеству K, граница которого называется *индикаторной диаграммой* функции $f(z)$

$$h(\varphi) = \max_{x+iy\in K}(x\cos\varphi + y\sin\varphi) \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi).$$

Кроме того, верхний предел в (4.10) достигается равномерно, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется R_ε такое, что при всех φ

$$\log|f(re^{i\varphi})| \le (h(\varphi) + \varepsilon)r \quad \text{при} \quad r > R_\varepsilon.$$

Если же для функции $f(z)$ выполняется еще условие 1°, то легко показывается, что K вырождается в отрезок мнимой оси и, следовательно,

$$h(\varphi) = \begin{cases} h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0 \le \varphi < \pi), \\ -h\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi \le \varphi \le 0). \end{cases}$$

Для таких функций можно утверждать существование и равенство пределов (см. [11]):

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_1(r)}{r} = \lim_{r\to\infty}\frac{n_2(r)}{r} = \frac{\ell}{2\pi},$$

где $n_1(r)$ и $n_2(r)$ — числа нулей функции $f(z)$, не превосходящих по модулю r и лежащих, соответственно, в правой и левой полуплоскостях, а ℓ — длина отрезка K, т.е.

$$\ell = h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

В дальнейшем будет играть важную роль то обстоятельство, что для целых функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям 1°, 2°,

$$h\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{r\to\infty}\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \log|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi d\varphi. \tag{4.11}$$

5. Если $f(z)$ — целая функция, то функция $u(z) = \log|f(z)|$ субгармонична во всей плоскости.

Теорема Полиа легко обобщается на любые логарифмически субгармоничные функции $u(z)$, для которых

$$H = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log u(z)}{|z|} < \infty,$$

именно для них также справедливо утверждение, что

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log u(re^{i\varphi})}{r} \qquad (0 \leq \varphi \leq 2\pi) \tag{4.12}$$

есть опорная функция некоторого ограниченного выпуклого замкнутого множества; при этом верхний предел в (4.12) достигается равномерно относительно φ. В частности,

$$H = \max_{0\leq\varphi\leq 2\pi} h(\varphi).$$

§ 5. Основная теорема о регулярных точках вектор-функции

1. Если решить систему уравнений (2.3) относительно функции $f_u^{(k)}(z)$ и внести их выражения в (2.1), то мы найдем, что

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\Delta_{jk}(z)}{\Delta(z)} (f, \varphi_j(\bar{z}))\, u_k, \tag{5.1}$$

где $\Delta_{jk}(z)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ суть алгебраические дополнения элемента $(u_k, \varphi_j(\bar{z}))$ в детерминанте

$$\Delta(z) = |(u_k, \varphi_j(\bar{z}))|_{j,k=1}^m.$$

Если в некоторой точке a $(\operatorname{Im} a \neq 0)$ детерминант $\Delta(z)$ отличен от нуля, то найдется некоторый круг $K(a, r)$ $(|z - a| \leq r)$, в котором $|\Delta(z)|$ будет отлично от нуля и, следовательно, ограничено снизу положительным числом. В силу голоморфности функций $(f, \varphi(\bar{z}))$, $\Delta(z)$ и $\Delta_{jk}(z)$ внутри каждой из двух полуплоскостей найдется константа $C = C(a, r)$, зависящая только от a и r, но не от f, такая, что при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\| \leq C(a, r)\|f\| \quad \text{при} \quad z \in K(a, r). \tag{5.2}$$

Ниже мы покажем, что для любого a (вещественного или невещественного) и любого $r > 0$ найдется константа $C = C(a, r)$ такая, что неравенство (5.2) будет выполняться всякий раз, когда функция $\mathfrak{f}_M(z)$ регулярна в круге $K(a, 2r)$.

При построении системы вектор-функций $\varphi_j(z)$ мы могли за "начальное" значение z_0 (см. §2, п.1) выбрать $z_0 = i$ и за "начальную" систему φ_j^0 $(j = 1, 2, ..., m)$ выбрать некоторую ортонормированную систему, так что

$$(\varphi_j(i), \varphi_k(i)) = \delta_j k \qquad (j, k = 1, 2, ..., m). \tag{5.3}$$

Так как оператор $U_{i,-i} = (A^0 - iI)(A^0 + iI)$ унитарен, то также

$$(\varphi_j(-i), \varphi_k(-i)) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, ..., m).$$

Из соотношения

$$\varphi_j(z) = \varphi_j(i) + (z - i)R_z\varphi_j(i) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda + i} dE_\lambda \varphi_j(i) \qquad (j = 1, 2, ..., m),$$

где E_λ — спектральная функция оператора A^0, находим, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(f, \varphi_j(\bar{z})) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} d(E_\lambda f, \varphi_j(i)) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} d\sigma_j(\lambda; f) \qquad (j = 1, 2, ..., m).$$

Для любого интервала $\Delta = (a, b)$ имеем

$$|\sigma_j(b; f) - \sigma_j(a; f)| = |(E_\Delta f, \varphi_j(i))| =$$

$$= |(E_\Delta f, E_\Delta \varphi_j(i))| \leq \|E_\Delta f\| \; \|E_\Delta \varphi_j(i)\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|E_\Delta f\|^2 + \|E_\Delta \varphi_j(i)\|^2) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}[(E_\Delta f; f) + (E_\Delta \varphi_j(i), \varphi_j(i))],$$

а поэтому, принимая во внимание (5.3), находим

$$\operatorname{var} \sigma_j(\lambda; f) = \int_{-\infty}^{\infty} |d\sigma_j(\lambda; f)| \leq \frac{1}{2}(\|f\|^2 + 1). \tag{5.4}$$

Таким образом, согласно изложенному в §4 при любом $f \in \mathfrak{H}$ функция $(f, \varphi_j(\bar{z}))$ принадлежит классу (N) в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$†. А так как эти классы суть кольца, то к ним принадлежат и функции $\Delta(z), \Delta_{jk}(z)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$, выражающиеся в виде многочленов через функции $(u_k, \varphi_j(\bar{z}))$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$.

При $\|f\| = 1$, согласно (5.4): $\operatorname{var} \sigma_j(\lambda; f) \leq 1$, а поэтому по лемме 4.2

$$\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |(f, \varphi_j(\bar{z}))|}{(1 + |z|)^4} dx dy \leq 8\pi.$$

Так как такое же неравенство можно будет написать и для интеграла по нижней полуплоскости, то заключаем, что для любого $f \in \mathfrak{H}$ с $\| f \| = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |(f, \varphi_j(\bar{z}))|}{(1 + |z|)^4} dx dy \leq 16\pi. \tag{5.5}$$

Положим

$$\gamma = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{-}{\log} |\Delta(z)|}{(1 + |z|)^4} dx dy$$

и

$$\gamma_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |\Delta_{jk}(z)|}{(1 + |z|)^4} dx dy \qquad (j, k = 1, 2, ..., m).$$

† Для полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$ можно повторить все предыдущие рассуждения, отправляясь уже от системы $\varphi_j(-i)$ $(j = 1, 2, ..., m)$.

Согласно лемме, все величины γ, γ_{jk} $(j, k = 1, 2, ..., m)$ конечны.

Воспользовавшись известным неравенством

$$\overset{+}{\log} \sum_1^m \alpha_\nu \le \sum_1^m \overset{+}{\log} \alpha_\nu + \log m,$$

мы из (5.1) находим, что

$$\overset{+}{\log} \|\mathfrak{f}_M(z)\| \le \overset{+}{\log} \left| \sum_{j,k=1}^m \Delta_{jk}(z)(f, \varphi_j(\bar z)) u_k \right| + \overset{-}{\log} |\Delta(z)| \le$$

$$\le \sum_{j,k=1}^m \overset{+}{\log} |\Delta_{jk}(z)| + \sum_{j,k=1}^m \overset{+}{\log} |u_k| + \tag{5.6}$$

$$+ \sum_{j=1}^m \overset{+}{\log} |(f, \varphi_j(\bar z))| + \overset{-}{\log} |\Delta(z)| + \log m.$$

Лемма 5.1. *Оператору A и модулю M можно сопоставить константу* Γ, *так что для любого* $f \in \mathfrak{H}$, *для которого* $\| f \| = 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} \|\mathfrak{f}_M(z)\|}{(1 + |z|)^4} dx dy \le \Gamma. \tag{5.7}$$

В самом деле, согласно (5.7) и (5.6), написанное неравенство будет выполняться при

$$\Gamma = 16 m \pi + \gamma + \sum_{j,k=1}^m \gamma_{jk} + \frac{\pi}{3} \sum_{k=1}^m \overset{+}{\log} |u_k| + \frac{\pi}{3} \log m.$$

2. Нам понадобится частный случай следующей общей леммы.

Лемма 5.2. *Пусть* $\mathfrak{L}$ — *некоторое банахово пространство, а* $\mathfrak{f}(z)$ — *некоторая голоморфная в области* G *комплексной плоскости вектор-функция со значениями из* $\mathfrak{L}$. *Тогда функция* $\overset{+}{\log} \|\mathfrak{f}(z)\|$ *субгармонична в* G.

Доказательство. Для любого $\mathfrak{g} \in \mathfrak{L}$ имеем

$$\|\mathfrak{g}\| = \sup_{\|\Phi\|=1} |\Phi(\mathfrak{g})|,$$

где через Φ обозначен линейный непрерывный функционал на $\mathfrak{L}$.

Отсюда

$$\overset{+}{\log}\|\mathfrak{f}(z)\| = \sup_{\|\Phi\|=1} \overset{+}{\log}|\Phi(\mathfrak{f}(z))| \qquad (z \in G).$$

Так как функция $\Phi(\mathfrak{f}(z))$ является скалярной, голоморфной в G функцией, то по известной теореме ее $\overset{+}{\log}|\Phi(\mathfrak{f}(z))|$ будет субгармоничной в G функцией.

С другой стороны, как известно, верхняя огибающая любого множества субгармоничных функций есть снова субгармоничная функция.

Лемма доказана.

Теперь уже не представляет труда доказательство основной теоремы этого параграфа.

Теорема 7. *Каждой точке a комплексной плоскости и положительному $r > 0$ отвечает константа $C = C(a, r)$ такая, что коль скоро для некоторого $f \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ голоморфна в круге $|z - a| \leq 2r$*[†]*, то*

$$\| \mathfrak{f}_M(z) \| \leq C(a, r) \| f \| \quad \text{при} \quad |z - a| < r. \tag{5.8}$$

Доказательство. Так как оператор, относящий к f вектор-функцию $\mathfrak{f}_M(z)$, однороден, то достаточно доказать неравенство (5.8) для $f \in \mathfrak{H}$ с $\| f \| = 1$.

Если некоторому f ($\| f \| = 1$) отвечает вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$, голоморфная, в круге $K(a; 2r)$ ($|z - a| \leq 2r$), то в этом круге функция $\overset{+}{\log} \| \mathfrak{f}_M(z) \|$ будет субгармоничной и, следовательно, для любого $\zeta \in K(a; r)$

$$\overset{+}{\log} \| \mathfrak{f}_M(\zeta) \| \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{K(\zeta; r)} \overset{+}{\log} \| \mathfrak{f}_M(z) \| \, dx dy$$

(круг $K(\zeta; r)$ целиком входит в круг $K(a; 2r)$).

[†] Коэффициент 2 можно заменить на любой другой $q > 1$ и тогда, конечно, C будет зависеть не только от a и r, но и от q: $C = C(a, r; q)$.

С другой стороны, очевидно, что

$$\iint\limits_{K(\zeta;r)} \overset{+}{\log} \| \mathfrak{f}_M(z) \| \, dxdy \le$$

$$\le (1 + a + 2r)^4 \iint\limits_{K(\zeta;r)} \frac{\overset{+}{\log} \| \mathfrak{f}_M(z) \| \, dxdy}{(1 + |z|)^4} \le \Gamma(1 + a + 2r)^4.$$

Таким образом,

$$\| \mathfrak{f}_M(z) \| \le \exp \frac{\Gamma(1 + a + 2r)^4}{\pi r^2} \quad (|\zeta - a| < r).$$

Теорема доказана.

§ 6. M-регулярные точки оператора A

1. Точка a комплексной плоскости называется *точкой регулярного типа линейного оператора* A[†], если ей отвечает число $\varkappa_a > 0$ такое, что

$$\| Af - af \| \ge \varkappa_a \| f \| \quad \text{при} \quad f \in \mathfrak{D}_A. \tag{6.1}$$

Легко видеть, что если оператор A замкнут, то из условия (6.1) вытекает замкнутость множества

$$\mathfrak{M}_a = (A - aI)\mathfrak{D}_A.$$

Покажем, что для замкнутого оператора A, не имеющего точку a собственным числом, *замкнутость* $\mathfrak{M}_a$ *является не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы точка* a *была регулярного типа.*

В самом деле, если линейный оператор A замкнут, то $\mathfrak{D}_A$ является полным нормированным пространством по норме $\| f \|_A$, где

$$\| f \|_A = \| f \| + \| (A - aI)f \| .$$

[†]В п.1 этого параграфа мы рассматриваем произвольный линейный оператор A с любой областью определения.

Линейный оператор $A - aI$ отображает одно-однозначно и непрерывно банахово пространство $\mathfrak{D}_A$ на полное гильбертово пространство $\mathfrak{M}_a$. Но тогда по известной теореме Банаха это отображение взаимно непрерывно, и, следовательно, найдется такое $\varkappa > 0$, что

$$\| (A - aI)f \| \geq \varkappa \| f \|_A \quad (f \in \mathfrak{D}_A).$$

Так как $\|f\|_A \geq \| f \|$, то предложение доказано.

Как известно, для эрмитова оператора A всегда

$$\| (A - aI)f \| \geq |\mathrm{Im}\, a| \, \| f \| \quad (f \in \mathfrak{D}_A);$$

поэтому всякое невещественное a будет точкой регулярного типа эрмитова оператора.

Если a — точка вещественной оси, то неравенство (6.1) для эрмитова оператора A будет означать, что интервал $I_a = (a - \varkappa_a, a + \varkappa_a)$ является спектральным люком оператора A, и в этом случае у оператора A существует по крайней мере одно самосопряженное расширение $\widetilde{A}$, не содержащее точек спектра в интервале I_a (см. [1ж]).

В этом утверждении ничего не предполагается относительно индекса дефекта оператора A. Если же этот индекс имеет вид (m, m), где m — целое число, то *всякое* самосопряженное расширение оператора не будет иметь внутри интервала I_a иных точек спектра, кроме собственных чисел, сумма кратностей которых не превосходит m. Можно также показать (см. [1ж] и [12]), что в этом случае, каковы бы ни были числа λ_j $(j = 1, 2, ..., p;\ p \leq m)$, взятые внутри I_a, и натуральные числа k_j $(j = 1, 2, ..., p)$, где $k_1 + k_2 + \cdots + k_p \leq m$, всегда найдется одно и только одно самосопряженное расширение $\widetilde{A}$, для которого λ_j $(j = 1, 2, ..., p)$ будут собственными числами соответственно кратностей k_j $(j = 1, 2, ..., p)$ и у которого не будет никаких других точек спектра внутри I_a.

2. Возвращаясь к изучению простого замкнутого эрмитова оператора A с индексом дефекта (m, m), где $m < \infty$, можно высказать также следующее предложение (см. [1ж]).

1°. *Для того чтобы точка a была точкой регулярного типа для A, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно само-*

сопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A в некоторой окрестности точки a не имело иных точек спектра, кроме конечного числа собственных чисел конечной кратности.

Если B — некоторый самосопряженный оператор, то его спектр называется *дискретным*, если в каждом конечном интервале он состоит из конечного числа собственных чисел конечной кратности.

Сопоставляя 1° со сказанным в п.1, мы убеждаемся в следующем:

2°. *Если хотя бы одно самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A имеет дискретный спектр, то и любое его другое самосопряженное расширение будет обладать этим свойством. Для того, чтобы этот случай имел место, необходимо и достаточно, чтобы все точки вещественной оси были регулярного типа для оператора A.*

Оператор A, удовлетворяющий условиям предложения 2°, назовем *регулярным.*

3°. *Точку a условимся называть M-регулярной, если при некотором $\rho > 0$ всякая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ $(f \in \mathfrak{H})$ регулярна в круге $K(a, \rho)$.*

Теорема 8. *Для того, чтобы некоторая точка a была M-регулярной, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярного типа и чтобы*

$$\mathfrak{M}_a \cap M = (0). \tag{6.2}$$

Доказательство. Если $\operatorname{Im} a \neq 0$, то первое условие всегда выполнено. Второе же условие в этом случае означает, что

$$\Delta(a) = |(u_k, \varphi_j(\bar{a}))|_1^n \neq 0. \tag{6.3}$$

При его выполнении согласно формуле

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\Delta_{jk}(z)}{\Delta(z)} (f, \varphi_j(\bar{z})) u_k = \sum_{k=1}^{m} f_u^{(k)}(z) u_k \tag{6.4}$$

вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ будет голоморфной в каждом круге $K(a, \rho)$, в котором $\Delta(z) \neq 0$.

Если же $\Delta(a) = 0$, то, по крайней мере, одна из функций $\dfrac{\Delta_{jk}(z)}{\Delta(z)}$ имеет полюс в точке a. Пусть $\dfrac{\Delta_{pq}(z)}{\Delta(z)}$ та из них, которая имеет в точке a полюс максимального порядка. Выберем затем $f \in \mathfrak{H}$ так, чтобы

$$(f, \varphi_j(\bar{a})) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq p, \\ 1 & \text{при} \quad j = p. \end{cases}$$

Тогда, легко видеть, функция

$$f_u^{(q)}(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Delta_{jq}(z)}{\Delta(z)} (f, \varphi_j(\bar{z})),$$

а следовательно, и вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ будет иметь полюс в точке a.

Таким образом, для случая невещественного a теорема доказывается очень просто.

Пусть теперь a вещественно. Достаточность условий и в этом случае доказывается просто.

В самом деле, если точка a регулярного типа, то всегда найдется самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A, которое в некотором круге $K(a, \rho)$ не будет иметь точек спектра. Выберем в качестве A^0 именно это расширение и с помощью его резольвенты построим вектор функции $\varphi_j(z; \lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$. Тогда эти вектор-функции, а с ними и функции $\Delta(z), \Delta_{jk}(z)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ будут голоморфны в круге $K(a, \rho)$ и, следовательно, формула (5.1) будет иметь место в некоторой окрестности точки a. По-прежнему условия (6.2) и (6.3) будут эквивалентны и всякая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ будет голоморфна в круге $K(a, \rho)$, в котором $\Delta(z) \neq 0$.

Перейдем к доказательству необходимости условий для случая вещественного a. Эта часть доказательства теоремы является наиболее тонкой.

Прежде всего напомним, что, согласно теореме 7, существует константа $C = C(a, r)$ $(r = \rho/2)$, такая, что каждая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$, регулярная в $K(a; \rho)$, удовлетворяет неравенству

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\| \leq C\|f\|. \tag{6.5}$$

Поэтому, если вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ $(f \in \mathfrak{H})$ регулярны в $K(a;\rho)$, то вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$, отвечающие всевозможным элементам f единичного гипершара S $(\|f\| \leq 1)$ в $\mathfrak{H}$, равномерно ограничены в круге $K(a;r)$ и, следовательно, по теореме Стильтьеса образуют компактное семейство S_M в смысле равномерной сходимости в каждом внутреннем круге.

С другой стороны, фиксируя какой-либо интервал $\Delta = (a - -r_1, a + r_1)$, где $0 < r_1 < r$, для любой спектральной функции E_λ оператора A будем иметь

$$(E_\Delta f, g) = \int\limits_\Delta \sum_{j,k=1}^{m} f^{(j)}(\lambda)\overline{g^{(k)}(\lambda)}d\tau_{jk}\lambda, \tag{6.6}$$

где

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \qquad (j,k = 1,2,...,m). \tag{6.7}$$

Пусть E_λ — некоторая ортогональная спектральная функция оператора (т.е. спектральная функция некоторого самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A в $\mathfrak{H}$).

Как мы знаем, для доказательства регулярности точки a достаточно показать, что, кроме конечного числа собственных чисел конечной кратности, оператор $\widetilde{A}$ иных точек спектра на интервале Δ не имеет или, что то же, что $E_\Delta\mathfrak{H}$ есть конечномерное пространство.

Последнее же обнаруживается из того, что единичный гипершар S_Δ подпространства $E_\Delta\mathfrak{H}$ компактен. В самом деле, если $f, g \in S_\Delta$, то для $(f,g) = (E_\Delta f, g)$ имеет место равенство (6.6), и компактность S_Δ следует из компактности на Δ в смысле равномерной сходимости множества функций $\mathfrak{f}_M(z)$, соответствующих $f \in S_\Delta \subset S$.

Коль скоро доказано, что точка a регулярного типа, то доказательство необходимости второго условия (6.2) можно вести так же, как и для случая невещественного a, если предварительно построить систему вектор-функции $\varphi_j(z)$ $(j = 1,2,...,m)$ с помощью резольвенты R_z самосопряженного расширения A^0 оператора A, не имеющего точек спектра в некоторой окрестности точки a.

Теорема доказана.

Отметим следующее ее непосредственное

С л е д с т в и е. *Если все точки вещественной оси M-регулярны, то любое самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ оператора A имеет дискретный спектр.*

Если дефектное число $m = 1$, то, как нам удалось показать, предложение допускает обращение, т.е. можно утверждать, что *если хотя бы одно (а значит и любое) самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ оператора A имеет дискретный спектр, то при соответствующем выборе масштабного вектора все точки вещественной оси будут M-регулярны.*

Так как доказательство этого предложения требует специальных рассмотрений из теории целых функций, то его доказательство мы опускаем.

3. При определении, является ли данная точка M-регулярной, удобно пользоваться следующим предложением.

Теорема 9. *Если точке a можно сопоставить круг $K(a;\rho)$ и плотное в $\mathfrak{H}$ линейное множество $\mathfrak{D}$ так, что каждому $f \in \mathfrak{D}$ отвечает регулярная в $K(a;\rho)$ функция $\mathfrak{f}_M$, то точка a M-регулярна, а следовательно, есть точка регулярного типа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $r = \rho/2$ для каждого $f \in \mathfrak{D}$ выполняется неравенство (5.5).

С другой стороны, каждому $g \in \mathfrak{H}$ отвечает сходящаяся к нему последовательность $\{f^{(n)}\} \subset \mathfrak{D}$. Так как для нее

$$\|\mathfrak{f}_M^{(n)}(z) - \mathfrak{f}_M^{(m)}(z)\| \le C\|f^{(n)} - f^{(m)}\| \quad \text{при} \quad z \in K(a;r),$$

то внутри круга $K(a;r)$ вектор-функции $\mathfrak{f}_M^{(n)}(z)$ сходятся к некоторой голоморфной внутри того же круга вектор-функции $\mathfrak{h}(z)$. С другой стороны, в каждой невещественной точке $z \in K(a;r)$, в которой $\Delta(z) \neq 0$, вектор-функции $\mathfrak{f}_M^{(n)}(z)$ согласно формуле (5.4) будут сходиться к $\mathfrak{g}_M(z)$. Откуда $\mathfrak{g}_M(z) = \mathfrak{h}(z)$.

Таким образом, для каждго $g \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{g}_M(z)$ регулярна внутри круга $K(a;r)$.

Теорема доказана.

Теорема 9′. *Для того чтобы некоторая точка a была точкой регулярного типа для оператора A, необходимо и достаточно, чтобы ей отвечала некоторая окрестность K и целое* *число $p \geq 0$ такое, что для любого $f \in \mathfrak{H}$ функция $(z-a)^p \mathfrak{f}_M(z)$ регулярна в окрестности K. Для того чтобы окрестность K точки a и целое $p \geq 0$ обладали указанным свойством, достаточно, чтобы они обладали этим свойством по отношению к элементам f некоторого линейного множества $\mathfrak{L}$, плотного в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. В самом деле, если точка a регулярного типа для A, то, как неоднократно отмечалось, можно построить базис $\{\varphi_1(z), \ldots, \varphi_m(z)\}$, голоморфный в некоторой окрестности K точки a, и тогда в силу формулы (6.4) эта окрестность K и число p, равное порядка $\Delta(z)$, в точке a будут удовлетворять указанным в теореме требованиям.

Пусть теперь, обратно, известно, что точке a соответствует некоторая окрестность K и целое $p \geq 0$ такие, что для элементов f некоторого линейного множества $\mathfrak{L}$, плотного в $\mathfrak{H}$, функция $(z-$ $-a)^p \mathfrak{f}_M(z)$ регулярна в окрестности K. Докажем, что a есть точка регулярного типа для оператора A.

Для $f \in \mathfrak{L}$ в окрестности K имеет место разложение

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{k=-p}^{\infty} C_k(f)(z-a)^k,$$

где $C_k(f)$ $(k = -p, -p+1, \ldots)$ — некоторые линейные функционалы, определенные на $\mathfrak{L}$.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество тех $f \in \mathfrak{L}$, для которых

$$C_{-1}(f) = C_{-2}(f) = \cdots = C_{-p}(f) = 0. \tag{6.8}$$

Элементам $f \in \mathfrak{T}$ отвечают вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$, регулярные в K. В силу рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 9, найдется окрестность $K_1 \subset K$ точки a, в которой будут регулярны также все функции $\mathfrak{f}_M(z)$ для $f \in \overline{\mathfrak{T}}$ (замыкания $\mathfrak{T}$). Обозначим через P оператор ортогонального проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{T}}$.

Линейное множество $P\mathfrak{L}$ имеет не более чем p измерений. В самом деле, если $g_i = Pf_i$, где $f_i \in \mathfrak{L}$ $(i = 1, 2, \ldots, p+1)$, то найдутся ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, p+1,\ \sum |\xi_i|^2 > 0)$ такие, что $f = \sum \xi_i f_i$ будет удовлетворять уравнениям (6.8) и, следовательно, будет принадлежать $\mathfrak{T}$. Но тогда $Pf = \sum \xi_i g_i = 0$.

Из того, что $P\mathfrak{L}$ не более чем p-мерно, вытекает, что $P\overline{\mathfrak{L}} = P\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ не более чем p-мерно.

Пусть теперь $\Delta = (a-h, a+h)$ — некоторый интервал, лежащий внутри K_1, а E_λ — некоторая ортогональная спектральная функция оператора A. Наша теорема будет доказана, если мы докажем, что подпространство $E_\Delta\mathfrak{H} = E_\Delta\overline{\mathfrak{T}} \oplus E_\Delta\mathfrak{N}$ конечномерно, что эквивалентно тому, что $E_\Delta\overline{\mathfrak{T}}$ конечномерно. А так как для всякой пары элементов $f, g \in \overline{\mathfrak{T}}$ функции $\mathfrak{f}_M(z), \mathfrak{g}_M(z)$ регулярны на Δ и, следовательно, имеет место (5.6), то конечномерность $E_\Delta\overline{\mathfrak{T}}$ вытекает из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 8.

Теорема доказана.

§ 7. Базис $\{e_1(z), ..., e_m(z)\}$ и функция $\nabla_M(z)$

1. В каждой M-регулярной точке z линейный оператор, относящийся к $f \in \mathfrak{H}$ как вектор

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_u^{(j)}(z) u_j,$$

непрерывен и, следовательно, $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ суть непрерывные линейные функционалы от $f \in \mathfrak{H}$.

По теореме Рисса будем иметь

$$f_u^{(j)}(z) = (f, e_j(\bar{z})) \quad (f \in \mathfrak{H};\ j = 1, 2, ..., m).$$

Пусть G — некоторая область M-регулярных точек. По определению, в этой области для любого $f \in \mathfrak{H}$ функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ голоморфны и, следовательно, вектор-функции $e_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ голоморфны в области $\overline{G}$ (зеркальном отражении G относительно вещественной оси).

В этом можно и непосредственно убедиться, выписав для $e_j(\bar{z})$ $(j = 1, 2, ..., m)$ их выражение, получающееся из формулы (6.4), которая имеет место в достаточно малой окрестности любой

M-регулярной точки z при надлежащем выборе базиса $\varphi_1(\bar{z}),\ldots$ $\ldots,\varphi_m(\bar{z})$.

Векторы $e_j(\bar{z})$ $(j=1,2,\ldots,m)$, будучи линейными комбинациями векторов $\varphi_j(\bar{z})$ $(j=1,2,\ldots,m)$, принадлежат $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$. А так как $f-\mathfrak{f}_M(z)\in\mathfrak{M}_z$, то $f-\mathfrak{f}_M(z)\perp e_j(\bar{z})$ $(j=1,2,\ldots,m)$, т.е.

$$\left(f-\sum_{k=1}^{m}(f,e_k(\bar{z}))u_k,\ e_j(\bar{z})\right)=0 \quad (j=1,2,\ldots,m).$$

Ввиду произвольности $f\in\mathfrak{H}$ заключаем отсюда, что

$$(u_k,e_j(\bar{z}))=\delta_{jk} \quad (j,k=1,2,\ldots,m).$$

Эти условия биортогональности, вместе с условиями

$$e_j(\bar{z})\in\mathfrak{N}_{\bar{z}} \quad (j=1,2,\ldots,m),$$

вполне определяют систему $(e_1(\bar{z}),\ldots,e_m(\bar{z}))$, соответствующую M-регулярной точке z.

2. Положим в M-регулярной точке z

$$\nabla_M(z)=\sup_{f\in\mathfrak{H}}\frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\|f\|}. \tag{7.1}$$

Величина[†]

$$\nabla_M^{-1}(z)=\min_{f\in\mathfrak{H}}\frac{\|f\|}{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}$$

имеет простой геометрический смысл.

В самом деле, когда f пробегает $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{f}_M(z)$ пробегает все M; с другой стороны, если $g\in M$, то $g=\mathfrak{f}_M(z)$ для тех и только тех f, которые представимы в виде: $f=g+h$, где $h\in\mathfrak{M}_z$. Таким образом,

$$\nabla_M^{-1}(z)=\min_{g\in M,h\in\mathfrak{M}_z}\frac{\|g-h\|^2}{\|g\|^2}.$$

[†]Мы позволяем себе писать min вместо inf ввиду того, как выяснится несколько дальше, что верхняя грань в (7.1) всегда достигается.

Но если $g \in M$ и $\| g \| = 1$, то

$$\min_{h \in \mathfrak{M}_z} \| g - h \|$$

есть синус угла наклона прямой λg к $\mathfrak{M}_z$. Отсюда $\nabla_M^{-1}(z)$ есть синус наименьшего угла наклона M к $\mathfrak{M}_z$.

Отметим теперь следующее свойство $\nabla_M(z)$.

Функция $\nabla_M(z)$ логарифмически-субгармонична в каждой области G, состоящей из M-регулярных точек.

В самом деле, $\log \nabla_M(z)$ в G есть верхняя огибающая субгармонических функций $\log \| \mathfrak{f}_M(z) \|$ $(\| f \| = 1)$.

3. Покажем, как выражается и оценивается через вектор-функции $e_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ функция $\nabla_M(z)$, при этом, простоты ради, предположим, что базис $(u_1, ..., u_m)$ выбран ортонормированным:

$$(u_j, u_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, ..., m).$$

Тогда

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\|^2 = \sum_{j=1}^{m} |(f, e_j(\bar{z})|^2.$$

С другой стороны, каждый вектор $f \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде ортогональной суммы $f = g + h$, где $g \in \mathfrak{M}_z$, а $h \in \mathfrak{N}_{\bar{z}}$. Так как при этом $|\mathfrak{f}_M(z)| = |\mathfrak{h}_M(z)|$, а $\| h \| < \| f \|$, если $g \neq 0$, то верхняя грань в (7.1) будет достигаться для векторов f из $\mathfrak{N}_{\bar{z}}$, т.е. на векторах f вида

$$f = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j(\bar{z}).$$

Положим

$$\gamma_{jk}(z) = (e_k(\bar{z}), e_j(\bar{z})) \quad (j, k = 1, 2, ..., m)$$

и рассмотрим матрицы

$$\Gamma(z) = \|\gamma_{jk}(z)\|_1^m, \quad \Gamma^2(z) = \|\gamma_{jk}^{(2)}(z)\|_1^m.$$

Легко видеть, что

$$\nabla_M^2(z) = \max_{\xi} \frac{\sum\limits_1^m \gamma_{jk}^2(z)\xi_j\bar{\xi}_k}{\sum\limits_1^m \gamma_{jk}(z)\xi_j\bar{\xi}_k}$$

есть наибольшее характеристическое число матрицы Г. Так как все характеристические числа матрицы Грамма Г положительны, а ее след

$$\sum_1^m \gamma_{jj} = \sum_1^m \|e_j(\bar{z})\|^2,$$

то мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{m}\sum_1^m \|e_j(\bar{z})\|^2 \leq \nabla_M^2(z) \leq \sum_1^m \|e_j(\bar{z})\|^2. \tag{7.2}$$

4. Пусть $\{d_k\}_1^\infty$ — некоторая полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}$. Через $\mathfrak{d}_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ обозначим вектор-функции, в которые переходят элементы d_k $(k = 1, 2, \ldots)$ при изоморфизме $f \to \mathfrak{f}_M(z)$. Таким образом,

$$\mathfrak{d}_k(z) = \sum_{j=1}^m (d_k, e_j(\bar{z}))u_j \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Имеем

$$\|\mathfrak{d}_k(z)\|^2 = \sum_{j=1}^m |(d_k, e_j(\bar{z}))|^2.$$

С другой стороны, в силу равенства Парсеваля

$$\|e_j(\bar{z})\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |(e_j(\bar{z}), d_k)|^2 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Таким образом,

$$\sum_1^\infty \|\mathfrak{d}_k(z)\|^2 = \sum_{j=1}^m \|(e_j(\bar{z}))\|^2.$$

Так как слагаемые, фигурирующие в этом равенстве, непрерывны, то, вспоминая известную теорему Дини, а также неравенство (7.2), мы приходим к предложению

Теорема 10. *Ряд*

$$\sum_1^\infty \|\mathfrak{d}_k(z)\|^2$$

равномерно сходится на каждом ограниченном замкнутом множестве M-регулярных точек; его сумма не зависит от выбора полной ортонормированной системы $\{d_k\}_1^\infty$ и заключена между $\nabla_M^2(z)$ и $m\nabla_M^2(z)$.

Заметим, что на основании теоремы можно утверждать, что некоторая точка a является M-регулярной, если можно указать такую ее окрестность, в которой голоморфны все вектор-функции $\mathfrak{d}_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Заметим еще, что для $m = 1$ во всякой M-регулярной точке

$$\nabla_M^2(z) = \sum_1^\infty \|\mathfrak{d}_k(z)\|^2.$$

§ 8. Целые операторы

1. Простой замкнутый эрмитов оператор с индексом дефекта (m, m) будем называть *целым*, если можно выбрать модуль M (называемый целым) так, чтобы каждому $f \in \mathfrak{H}$ отвечала целая вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$.

Для целого оператора A и целого модуля M все точки комплексной плоскости будут M-регулярными и, следовательно, регулярного типа.

Таким образом, целый оператор регулярен. Принимая во внимание теорему 8, можно, следовательно, определить целый оператор как регулярный оператор, для которого существует модуль M такой, что при всех комплексных z

$$\mathfrak{M}_z \cap M = (0).$$

Если M — целый модуль, то в выражении

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^m f_u^{(j)}(z) u_j \qquad (f \in \mathfrak{H})$$

все функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ являются целыми и допускают представление (см. §6, п.5):

$$f_u^{(j)}(z) = (f, e_j(\bar{z})) \quad (j = 1, 2, ..., m; \ f \in \mathfrak{H}),$$

где $e_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ — некоторые целые вектор-функции со значениями из $\mathfrak{H}$.

Как было выяснено в п.2 §4, в каждой из двух полуплоскостей $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$ функции $f_u^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., m)$ представимы в виде частного двух функций класса (N). В рассматриваемом случае они, будучи целыми, сами суть класса (N) в каждой из этих двух плоскостей, а поэтому к ним применимы теорема 5 и следствия из нее.

Таким образом, если $e(z)$ обозначает какую-либо из вектор-функций $e_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$, то

1°. $$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log |(f, e(\bar{z}))|}{|z|} < \infty.$$

2°. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log^+ |(f, e(x))|}{1 + x^2} dx < \infty.$$

В связи с этим понадобится следующая важная

Лемма 8.1[†]. *Пусть $e(z)$ $(\not\equiv 0)$ — некоторая целая вектор-функция комплексного аргумента z со значениями из $\mathfrak{H}$ и пусть для любого $f \in \mathfrak{H}$ выполняются условия* 1°, 2°.

Тогда

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log \|e(z)\|}{|z|} < \infty \tag{8.1}$$

и если положить

$$h_e(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \|e(re^{i\varphi})\|}{r} \qquad (-\pi \le \varphi \le \pi),$$

то

$$h_e(\varphi) = \begin{cases} h_e\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi & (0 \le \varphi \le \pi), \\ -h_e\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\varphi & (-\pi \le \varphi \le 0). \end{cases} \tag{8.2}$$

[†]Лемма непосредственно переносится на целые вектор-функции со значениями из любого банахова пространства.

Доказательство. В силу 1° для любого $f \in \mathfrak{H}$ ($f \neq 0$) равномерно относительно $\varphi \in (-\pi, \pi)$ достигается верхний предел

$$h(f,\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|(f, e(re^{-i\varphi}))|}{r} \qquad (-\pi \leq \varphi \leq \pi),$$

при этом в силу 2° (см. §4, п.3)

$$h(f,\varphi) = \begin{cases} h\Big(f; \dfrac{\pi}{2}\Big)\sin\varphi & (0 \leq \varphi \leq \pi), \\ -h\Big(f; -\dfrac{\pi}{2}\Big)\sin\varphi & (-\pi \leq \varphi \leq 0). \end{cases}$$

Кроме того, если положить (см. (4.11))

$$J_n^{\pm}(f) = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \log|(f, e(ne^{\mp i\varphi}))|d\varphi \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$h^{\pm}(f) = h\Big(f; \pm\frac{\pi}{2}\Big) = \lim_{n\to\infty} J_n^{\pm}(f) \qquad (f \in \mathfrak{H}, \quad f \neq 0).$$

Дальнейшие рассуждения будем вести для функционала $h^+(f)$. Для функционала $h^-(f)$ рассуждения совершенно аналогичны.

Отметим следующие свойства функционала $h^+(f)$:

1) $h^+(\lambda f) = h^+(f)$ $\quad (f \in \mathfrak{H},\ \lambda$ — скаляр);

2) $h^+(f_1 + f_2) \leq \max(h^+(f_1), h^+(f_2))$ $\quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{H})$.

Обозначим через $\mathfrak{K}$ множество всех $f \in \mathfrak{H}$ с $\|f\| \geq 1$. Легко видеть, что функционалы $J_n^+(f)$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$ непрерывны на $\mathfrak{K}$. А так как $\mathfrak{K}$ — полное метрическое пространство, то множество точек непрерывности функционала $h^+(f)$ плотно на $\mathfrak{K}$. Пусть f_0 ($\|f_0\| > 1$) одна из них. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$h^+(f_0 + g) \leq h^+(f_0) + \varepsilon \quad \text{при} \quad \| g \| < \delta.$$

Поэтому для любого $g \in \mathfrak{H}$ с $\| g \| < \delta$ и $\varepsilon > 0$

$$h^+(g) = h^+((f_0 + g) + (g - f_0)) \leq$$

$$\leq \max(h^+(f_0+g), h^+(f_0-g)) \leq h^+(f_0)+\varepsilon.$$

В силу 1) в неравенстве $h^+(g) \leq h^+(f_0)+\varepsilon$ условие $\|g\| < \delta$ можно отбросить. Так как, кроме того, $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то мы заключаем, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$h^+(f) \leq h^+(f_0).$$

Таким образом, можно утверждать существование конечных максимумов:

$$H^+ = \max_{f\in\mathfrak{H}} h^+(f) \quad \text{и} \quad H^- = \max_{f\in\mathfrak{H}} h^-(f). \tag{8.3}$$

Положим

$$H(\varphi) = \begin{cases} H^+ \sin\varphi & (0 \leq \varphi \leq \pi), \\ H^- \sin\varphi & (-\pi \leq \varphi \leq 0). \end{cases}$$

Согласно (8.3), для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$h(f;\varphi) \leq H(\varphi) \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi).$$

Положим для произвольных $\varepsilon > 0, r > 0$ и $\varphi \in (-\pi, \pi)$

$$\Phi_{r,\varphi}(f) = (f, e(re^{-i\varphi}))e^{-(H(\varphi)+\varepsilon)r} \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

При любых фиксированных φ, r функционал $\Phi_{r,\varphi}$ линеен и непрерывен. С другой стороны, значения всех функционалов $\Phi_{r,\varphi}(f)$ $(r > 0,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi)$ на любом фиксированном $f \in \mathfrak{H}$ ограничены. Следовательно, по известной теореме Банаха нормы всех функционалов $\Phi_{r,\varphi}$ в их совокупности ограничены, т.е. существует такое $N_\varepsilon > 0$, что

$$\|\Phi_{r,\varphi}\| = \|e(re^{i\varphi})\|e^{-(H(\varphi)+\varepsilon)r} \leq N_\varepsilon,$$

т.е.

$$\|e(re^{i\varphi})\| \leq N_\varepsilon e^{-(H(\varphi)+\varepsilon)r} \qquad (r > 0, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi).$$

Таким образом, (8.1) доказано, а также и то, что

$$h_e(\varphi) \leq H(\varphi) \quad (-\pi \leq \varphi \leq \pi).$$

Стало быть, индикаторная диаграмма логарифмически субгармонической функции $\| e(\bar{z}) \|$ содержится в отрезке $(-H^- i, H^+ i)$, а следовательно, сама есть отрезок мнимой оси. Откуда вытекает (8.2).

Лемма доказана.

Замечание 8.1. Нетрудно видеть, что

$$h_e(\varphi) \equiv H(\varphi) \quad (-\pi \le \varphi \le \pi). \tag{8.4}$$

В самом деле, для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$h(f;\varphi) \le h_e(\varphi) \le H(\varphi) \quad (-\pi \le \varphi \le \pi).$$

С другой стороны, согласно (8.3), найдутся элементы f^+ и f^- такие, что

$$h\left(f^+, \frac{\pi}{2}\right) = H\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad h\left(f^-, \frac{\pi}{2}\right) = H\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда $h_e\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = H\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$, что влечет (8.4).

Нетрудно также сообразить, что, по крайней мере, для одного из векторов $f = f^+, f^-, f^+ + f^-$

$$h(f;\varphi) \equiv h_e(f;\varphi) \quad (-\pi \le \varphi \le \pi).$$

Замечание 8.2. Наш метод позволяет также доказать, что при условиях леммы 8.1 существует константа γ, такая, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |(f, e(x))|}{1+x^2} dx \le \gamma + \log \| f \| \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

2. Центральным предложением этого параграфа является

Теорема 11. *Логарифмически субгармоническая функция $\nabla_M(z)$, отвечающая целому модулю M, всегда не выше экспоненциального типа, т.е.*

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log \nabla_M(z)}{|z|} < \infty,$$

причем ее индикаторная диаграмма есть отрезок мнимой оси, так что

$$h_M(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \nabla_M(re^{i\varphi})}{r} = \begin{cases} h_M\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0 \le \varphi \le \pi), \\ -h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi \le \varphi \le 0). \end{cases}$$

Доказательство. Выбрав для простоты базис $\{u_1, ..., u_m\}$ модуля M ортонормированным, будем иметь

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\|^2 = \left\|\sum_{j=1}^{m}(f, e_j(\bar z))u_j\right\|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} |(f, e_j(\bar z))|^2 \le \| f \|^2 \sum_{j=1}^{m} \|(e_j(\bar z))\|^2.$$

Таким образом,

$$\nabla_M(z) = \max_{f\in\mathfrak{H}} \frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\| f \|} \le \left(\sum_{j=1}^{m} \|e_j(\bar z)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{8.5}$$

Так как каждое $e_j(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ удовлетворяет условиям леммы 8.1, то теорема 11 есть следствие этого неравенства.

3. При исследовании конкретных целых операторов играет роль следующая

Теорема 12. *Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое плотное в $\mathfrak{H}$ множество. Тогда индикаторная диаграмма функции $\nabla_M(z)$ есть наименьший отрезок мнимой оси, содержащий все индикаторные диаграммы вектор-функций $\mathfrak{f}_M(z)$ для $f \in \mathfrak{L}$.*

Доказательство. В силу очевидного неравенства

$$H(f;\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log \|\mathfrak{f}_M(re^{i\varphi})\|}{r} \le h_M(\varphi) \qquad (-\pi \le \varphi \le \pi)$$

индикаторная диаграмма вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ всегда содержится в отрезке $S = \left(-h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)i, h_M\left(\frac{\pi}{2}\right)i\right)$ — индикаторной диаграмме функции $\nabla_M(z)$.

Теорема будет доказана, если мы докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементы $f^+, f^- \in \mathfrak{L}$ такие, что

$$H\left(f^\pm; \frac{\pi}{2}\right) \geq h_M\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon.$$

Покажем, как, например, доказывается существование элемента f^+.

Согласно (8.5),

$$h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq \max\left(h_{e_1}\left(\frac{\pi}{2}\right), \ldots, h_{e_m}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = h_{e_\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Введем в рассмотрение функционал

$$h_\nu^+(f) = \lim_{y\to\infty} \frac{\log|(f, e_\nu(-iy))|}{y},$$

который мы уже рассматривали при доказательстве леммы 8.1. Как мы знаем (см. доказательство леммы 8.1 и замечание 8.1), этот функционал имеет точки непрерывности, в которых достигает своего максимума, равного $h_{e_\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть f_0 — одна из них. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $f^+ \in \mathfrak{L}$, достаточно близкий к f_0, такой, что

$$h_\nu^+(f^+) \geq h_\nu^+(f_0) - \varepsilon = h_{e_\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon \geq h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon.$$

А так как

$$\|\mathfrak{f}_M(z)\| \geq |(f, e_\nu(\bar{z}))|,$$

то и

$$H\left(f^+; \frac{\pi}{2}\right) \geq h_\nu^+(f^+) \geq h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) - \varepsilon.$$

Теорема доказана.

4. Можно показать, что при $m = 1$ длина индикаторной диаграммы не зависит от выбора модуля M. При $m > 1$ этого уже утверждать нельзя (см. §10, замечание 10.1).

Однако и при $m > 1$ есть случай, когда индикаторная диаграмма, вырождаясь в точку 0, не зависит от выбора целого модуля. Это случай целого оператора минимального типа, характеризующегося тем, что при некотором выборе целого модуля M

$$\overline{\lim_{|z|\to 0}} \frac{\log \nabla_M(z)}{|z|} = 0. \tag{8.6}$$

Условие (8.6) эквивалентно тому, что для всякого $f \in \mathfrak{H}$

$$\overline{\lim_{|z|\to 0}} \frac{\log \|\mathfrak{f}_M(z)\|}{|z|} = 0. \tag{8.7}$$

Покажем, что это условие, будучи выполненным для одного целого модуля M, будет выполнено и для всякого другого целого модуля M.

Пусть $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ — некоторый базис $\widetilde{M}$. При изоморфизме $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ векторы v_j $(j = 1, 2, ..., m)$ перейдут в вектор-функции

$$\mathfrak{v}_j(z) = \sum_{k=1}^{m} v_{ju}^{(k)}(z) u_k \quad (j = 1, 2, ..., m)$$

минимального типа, т.е. удовлетворяющие условию (8.7).

Рассмотрим изоморфизм

$$f \to \mathfrak{f}_{\widetilde{M}}(z) = \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z) v_j \qquad (f \in \mathfrak{H}).$$

Из

$$f - \mathfrak{f}_{\widetilde{M}}(z) \in \mathfrak{M}_z, \; v_j - \mathfrak{v}_j(z) \in \mathfrak{M}_z \qquad (j = 1, 2, ..., m)$$

легко заключить, что

$$f - \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z) \mathfrak{v}_j(z) \in \mathfrak{M}_z.$$

Таким образом,

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z) \mathfrak{v}_j(z) = \sum_{j,k=1}^{m} f_v^{(j)}(z) v_j^{(k)}(z) u_k,$$

т.е.

$$f_u^{(k)}(z) = \sum_{j=1}^{m} f_v^{(j)}(z) v_{ju}^{(k)}(z) \qquad (k = 1, 2, ..., m) \tag{8.8}$$

Из этих равенств находятся выражения целых функций $f_v^{(j)}(z)$ через целые функции $f_u^{(k)}(z)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$. А так как по условию для любого $f \in \mathfrak{H}$ целые функции $f_u^{(k)}(z), v_j^{(k)}(z)$ $(j, k = 1, 2, ..., m)$ все минимального типа, то и функции $f_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ суть целые функции минимального типа. Это утверждение приобретает еще большую очевидность, если заметить следующее.

Полагая в (8.8) $f = u_\ell$ $(\ell = 1, 2, ..., m)$, получаем

$$\sum_{j=1}^{m} u_{\ell v}^{(j)}(z) v_{ju}^{(k)}(z) = \delta_{k\ell} \qquad (k, \ell = 1, 2, ..., m).$$

Таким образом, матрица целых функций $\|v_{ju}^{(k)}(z)\|_1^m$ имеет своей обратной матрицу $\|u_{\ell v}^{(j)}(z)\|_1^m$, также состоящую из целых функций.

Отсюда детерминант $|v_{ju}^{(k)}(z)|_1^m$ не имеет нулей, а так как он есть целая функция минимального типа, то мы заключаем, что

$$|v_{ju}^{(k)}(z)|_1^m \equiv \text{const} \ (\neq 0). \tag{8.9}$$

Это тождество является, очевидно, не только необходимым, но и достаточным условием того, чтобы система векторов $v_1, v_2, ..., v_m$ служила базисом некоторого целого модуля.

В случае целого оператора нормального (т.е. неминимального) типа условие (8.9), нетрудно видеть, перейдет в условие

$$|v_{ju}^{(k)}(z)|_1^m \equiv \text{const}\, e^{i\alpha z}, \tag{8.10}$$

где α — некоторая вещественная константа.

Отсюда нетрудно убедиться в справедливости замечания, с которого мы начали этот пункт параграфа.

5. Так как целый оператор A регулярен, то любое его самосопряженное расширение $\widetilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ имеет дискретный спектр.

Предыдущие результаты позволяют установить ряд важных характеристик этого спектра.

Пусть $\{\varphi_\nu\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}\varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu, \quad (\varphi_\nu, \varphi_\mu) = \delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots).$$

Заметим теперь, что если $\widetilde{A}\varphi = \lambda_0\varphi$ $(\varphi \neq 0)$, то также $A^*\varphi = \lambda_0\varphi$, т.е. $\varphi \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$ и, значит, φ есть линейная комбинация векторов $e_1(\lambda_0), \ldots, e_m(\lambda_0)$, составляющих базис $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$:

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} c_j e_j(\lambda_0) \quad \Bigl(\sum_1^m |c_j|^2 > 0\Bigr). \tag{8.11}$$

Пусть теперь $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ — какая-либо система линейно независимых собственных векторов оператора $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}\psi_k = \lambda^{(k)}\psi_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Если теперь $\widetilde{A}\varphi = \lambda_0\varphi$ и λ_0 отлично от каждого из чисел $\lambda^{(1)}, \ldots$ $\ldots, \lambda^{(m)}$, то

$$(\varphi, \psi_1) = (\varphi, \psi_2) = \ldots = (\varphi, \psi_m) = 0. \tag{8.12}$$

Внося сюда выражение для φ из (8.11), получим систему равенств

$$\sum_{j=1}^{m} c_j (e_j(\lambda_0), \psi_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m). \tag{8.13}$$

Отсюда λ_0 есть нуль детерминанта

$$D(\lambda) = |(e_j(\lambda), \psi_k)|_1^m.$$

Если собственному числу λ_0 отвечает p линейно независимых собственных векторов, то им будет соответствовать p линейно независимых решений $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ системы (8.13), а следовательно, ряд детерминанта $|(e_j(\lambda_0), \psi_k|_1^m$ будет не меньше $m - p$; откуда λ_0 будет нулем $D(\lambda)$ кратности не меньше p.

Сами числа $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(m)}$ также могут быть нулями детерминанта $D(\lambda)$; именно, $\lambda^{(j)}$ будет нулем $D(\lambda)$ кратности $\geq p_j$, если среди собственных векторов, принадлежащих $\lambda^{(1)}$, найдется p_j векторов, линейно независимых от $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$ (ибо тогда найдется и p_j ортогональных к $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m$).

Таким образом, все собственные числа оператора $\widetilde{A}$ (каждое считая столько раз, какова его кратность) находятся среди нулей целой функции

$$(\lambda - \lambda^{(1)})(\lambda - \lambda^{(2)})...(\lambda - \lambda^{(m)})D(\lambda). \tag{8.14}$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 6, ибо является полиномом степени m от функций, удовлетворяющих этим условиям.

Принимая во внимание теорему 11, заключаем, что индикаторная диаграмма функции (8.14) есть отрезок мнимой оси длиной $\leq m\left(h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Таким образом, если $N(r)$ — число собственных чисел оператора $\widetilde{A}$ в интервале $(-r, r)$, то

$$\overline{\lim}\frac{N(r)}{r} \leq m\left(h_M\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_M\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

6. Среди самосопряженных расширений $\widetilde{A}$ в $\mathfrak{H}$ оператора A выделяется замечательное однопараметрическое семейство расширений $\widetilde{A}_\xi$ $(-\infty < \xi < \infty)$. Самосопряженное расширение $\widetilde{A}_\xi$ характеризуется тем, что ξ является для него собственным числом точно кратности m. Таким образом,

$$\widetilde{A}_\xi e_j(\xi) = \xi e_j(\xi) \qquad (j = 1, 2, ..., m)$$

и, следовательно, в качестве векторов ψ_j $(j = 1, 2, ..., m)$, о которых шла речь в предыдущем пункте, можно выбрать векторы $e_j(\xi)$ $(j = 1, 2, ..., m)$.

Стало быть, весь спектр оператора $\widetilde{A}_\xi$ содержится среди множества нулей целой функции экспоненциального типа

$$(\lambda - \xi)^m |(e_j(\lambda), e_k(\xi))|_1^m. \tag{8.15}$$

Вероятно, можно доказать, что спектр совпадает с множеством нулей этой функции (при этом каждый нуль и каждая точка спектра считаются столько раз, какова их кратность).

Для $m = 1$ это предложение доказано и было нами сообщено ранее [16].

Заметим, что в этом случае расширениями $\widetilde{A}_\xi$ исчерпываются все самосопряженные расширения в $\mathfrak{H}$ оператора A.

При изучении конкретных целых операторов часто удается сравнительно просто построить полную в $\mathfrak{H}$ ортонормированную последовательность $\{d_\nu\}$, для которой легко находится соответствующая система вектор-функций $\{\mathfrak{d}_\nu(z)\}_1^\infty$:

$$\mathfrak{d}_\nu(z) = \sum_{j=1}^{m} d_\nu^{(j)}(z)u_j = \sum_{j=1}^{m}(d_\nu, e_j(\bar{z}))u_j \qquad (\nu = 1, 2, ...). \tag{8.16}$$

В силу равенства Парсеваля произведения $(e_j(\lambda), e_k(\xi))$ найдутся по формулам

$$(e_j(\lambda), e_k(\xi)) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(j)}(\lambda)d_\nu^{(k)}(\xi) \qquad (j, k = 1, 2, .., m). \tag{8.17}$$

В частности, при $m = 1$ спектр $\overline{A}_\xi$ будет совпадать с последовательностью корней уравнения

$$(\lambda - \xi)\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu(\lambda)d_\nu(\xi) = 0.$$

§ 9. Теорема об эрмитовых операторах с направляющими функционалами

Результаты предыдущих параграфов позволяют сделать одно существенное дополнение к развитой нами теории эрмитовых операторов с направляющими функционалами [13].

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторое линейное множество, в котором определен функционал (f, g) $(f, g \in \mathfrak{L})$, обладающий всеми свойствами обычного скалярного произведения, за исключением, может быть, того, что в неравенстве

$$(f, f) \geq 0 \qquad (f \in \mathfrak{L})$$

знак = может иметь место также и для некоторых $f \neq 0$.

Положим

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} \qquad (f \in \mathfrak{L}).$$

Обобщая обычное определение эрмитова оператора, будем говорить, что линейный оператор A_0, действующий в $\mathfrak{L}$ с некоторой области определения $\mathfrak{D}_{A_0} \subset \mathfrak{L}$, эрмитов, если

$$(A_0 g, f) = (g, A_0 f) \;\text{ для любых }\; g, f \in \mathfrak{D}_{A_0},$$

и множество $\mathfrak{D}_{A_0}$ "плотно" в $\mathfrak{L}$, т.е. для любого $f \in \mathfrak{L}$ найдется последовательность $\{g_n\} \in \mathfrak{D}_{A_0}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \|f - g_n\| = 0.$$

Легко видеть (см. [1з]), что так определенный эрмитов оператор будет обладать свойством, что

$$\| Ag \| = 0, \quad \text{если} \quad \| g \| = 0.$$

Поэтому, если отождествить в $\mathfrak{L}$ всякую пару элементов g_1, g_2, для которых $\| g_1 - g_2 \| = 0$, то $\mathfrak{L}$ обратится в некоторое линейное множество $\widehat{\mathfrak{L}}$, которое можно будет рассматривать, как плотную часть некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$; при этом A_0 породит в $\widehat{\mathfrak{L}}$, а следовательно, и в $\mathfrak{H}$ некоторый обычный эрмитов оператор $\widehat{A}_0$, замыкание которого обозначим через A.

Пусть теперь для A_0 существует направляющая система функционалов $\Phi_j(f, \lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$, обладающая следующими свойствами[†]:

1) При любом фиксированном $f \in \mathfrak{L}$ функции $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ суть целые функции z.

2) Хотя бы при одном значении z функционалы $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ линейно независимы.

[†]Требование 1) с сохранением всех последующих выводов можно заменить более слабым, а именно: существует область G, содержащая вещественную ось, в которой все функции $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, ..., m; f \in \mathfrak{H})$ аргумента z голоморфны. При таком ослаблении условия 1) в условиях 2) и 3) скаляр z следует считать принадлежащим G.

3) Какие бы ни были элементы $f_0 \in \mathfrak{L}$ и скаляр z_0, уравнение $A_0 g - \lambda_0 g = f_0$ имеет решение $g \in \mathfrak{D}_{A_0}$ тогда и только тогда, если $\Phi_j(f_0; z_0) = 0$ $(j = 1, 2, ..., m)$.

При этих предположениях, как показано в [1з], существует эрмитова матрица-функция $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$ с неубывающей формой

$$\sum_{j,k=1}^{m} \tau_{jk}(\lambda)\xi_j\bar{\xi}_k$$

такая, что для любых g, f:

$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(f; \lambda)\Phi_k(f; \lambda) d\tau_{jk}(\lambda). \tag{9.1}$$

Из (9.1) вытекает, что если для некоторого $f \in \mathfrak{L}$ тождественно относительно z:

$$\Phi_j(f; z) \equiv 0 \quad (j = 1, 2, ..., m), \tag{9.2}$$

то $\| f \| = 0$.

Поэтому без ограничения общности мы можем предположить, что выполняется условие

4) Множество $\mathfrak{L}_0$ всех $f \in \mathfrak{L}$, для которых выполняется (9.2), состоит из одного ноль-вектора.

В самом деле, в противном случае мы перешли бы от рассмотрения $\mathfrak{L}$ и A_0 к рассмотрению фактор-пространства $\mathfrak{L}/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{L}'$ и оператора A_0', порождаемого в $\mathfrak{L}'$ оператором A_0, который уже будет иметь направляющую систему функционалов, обладающую всеми свойствами 1)–4).

Если условиться нормировать матрицу-функцию $T(\lambda)$ так, чтобы, например[†]:

1°. $T(\lambda - 0) = T(\lambda)$;

[†]Нормировка $T(-\infty) = 0$ теперь не всегда возможна, так как матрица $T(\lambda)$ может быть неограниченной и предел $T(-\infty) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} T(\lambda)$ может не существовать.

2°. $T(0) = 0$,

то она будет однозначно определяться соотношениями (9.1) в том и только в том случае, если хотя бы одно из дефектных чисел оператора A равно нулю.

Согласно свойству 3) направляющей системы, при любом z фактор-пространство $\mathfrak{L}/(A_0 - zI)\mathfrak{D}_{A_0}$ максимум m-мерно. Отсюда, после простых рассуждений, заключаем, что дефектные числа m_+ и m_- оператора A (т.е. размерности пространств $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{H} \ominus (A_0 - zI)\mathfrak{D}_A$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$), не превосходят m.

Индекс дефекта (m_+, m_-) оператора A будем называть также *индексом дефекта оператора* A_0.

Нас будет интересовать тот случай, когда $m_+ = m_- = m$.

Теорема 13. *Если эрмитов оператор A_0 имеет направляющую систему функционалов $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$, обладающую свойствами 1)–4), а его индекс-дефект есть (m, m), то произведение (f, g) не сингулярно, т.е.*

$$(f, f) > 0 \quad \textit{при} \quad f \neq 0, \tag{9.3}$$

а оператор A_0 регулярен.

Доказательство. Из свойств 1)–3) легко вытекает (см. [1з]) существование такой системы векторов $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$, что

$$\Delta(z) = |\Phi_j(u_k; z)|_1^m \neq 0.$$

Для каждой точки z, в которой $\Delta(z) \neq 0$, любому $f \in \mathfrak{L}$ однозначно отвечает вектор функции

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{k=1}^{m} f_u^{(k)}(z) u_k \tag{9.4}$$

со значениями из линейной оболочки M векторов $u_1, ..., u_m$ такая, что уравнение

$$A_0 g - zg = f - \mathfrak{f}_M(z) \tag{9.5}$$

будет иметь решение $g \in \mathfrak{D}_{A_0}$.

Действительно, согласно 3), уравнение (9.5) будет иметь решение в том и только в том случае, если

$$\Phi_k(f - \mathfrak{f}_M(z), z) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

т.е. если

$$\sum_k f_u^{(k)}(z)\Phi(u_k; z) = \Phi(f; z) \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{9.6}$$

Отсюда $f_u^{(k)}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ определяются однозначно и притом как мероморфные функции z.

При естественном гомоморфизме $\mathfrak{L}$ на $\widehat{\mathfrak{L}}$, при котором $f \in \mathfrak{L}$ переходит в $\widehat{f} \in \widehat{\mathfrak{L}}$, равенство (9.5) перейдет в следующее:

$$A\widehat{g} - z\widehat{g} = \widehat{f} - \mathfrak{f}_M(z),$$

где

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum f_u^{(k)}(z)\widehat{u}_k.$$

Таким образом, для любого $\widehat{f} \in \widehat{\mathfrak{L}}$ имеется мероморфная вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ со значениями из $\widehat{M}$ (линейной оболочки $u_1, u_2, \ldots, u_m$) и с полюсами, расположенными в нулях $\Delta(z)$, такая, что

$$\widehat{f} - \mathfrak{f}_M(z) \in \mathfrak{M}_z = (A - zI)\mathfrak{D}_A. \tag{9.7}$$

На основании теоремы 9 заключаем, что оператор регулярен.

Нам остается доказать (9.3), т.е. что если для некоторого $g \in \mathfrak{L}$ вектор $\widehat{g} = 0$, то $g = 0$. Но если $\widehat{f}_0 = 0$, то, согласно (9.7),

$$\mathfrak{f}_M(z) \in \mathfrak{M}_z, \quad \text{если} \quad \Delta(z) \neq 0.$$

Если допустить теперь, что $g \neq 0$, то, согласно условию 4) и (9.6), можно будет утверждать, что не все $g_u^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m)$ тождественно равны нулю.

Таким образом, векторы $\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \ldots, \widehat{u}_m$ линейно зависимы по модулю $\mathfrak{M}_z$ для всех z, за исключением, может быть, тех, в которых $\Delta(z) = 0$ или $g_u^{(1)}(z) = \cdots = g_u^{(m)}(z) = 0$.

Возьмем произвольное невещественное z, не принадлежащее к указанному исключительному множеству. В силу (9.7),

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_z + \widehat{M}$$

и, следовательно, $\widehat{M}$ по модулю $\mathfrak{M}_z$ m-мерно (иначе $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_z$ имело число измерений $< m$).

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

2. При доказательстве (9.3), как легко видеть, мы использовали лишь тот факт, что одно из чисел m_+, m_- равно нулю.

Предоставляем читателю доказать с помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, следующее предложение.

Теорема 14. *Если в $\mathfrak{L}$ существует k линейно независимых векторов $g_1, ..., g_k$ таких, что*

$$(g_1, g_2) = \cdots = (g_k, g_k) = 0,$$

то дефектные числа m_+ и m_- оператора A удовлетворяют неравенствам

$$m_+ \leq m - k, \quad m_- \leq m - k.$$

Для случая $k = m$, но при более общих предположениях относительно направляющей системы функционалов теорема 14 была доказана ранее (см. [1з], теорему 3).

3. В той же статье [1з] мы описали, как получить все матрицы $T(\lambda)$, дающие представление (9.1).

Имея в виду примеры, разбираемые в следующем параграфе, мы ограничимся здесь случаем, когда существует базис $u_1, ...$ $..., u_m$, биортогональный с функционалами Φ $(j = 1, 2, ..., m)$, т.е. при любом z

$$\Phi_j(u_k; z) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, ..., m). \tag{9.8}$$

В этом случае координаты $f_u^{(j)}(z) = 0$ $(j = 1, 2, ..., m)$ вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ будут, согласно (9.6), совпадать с соответствующими $\Phi_j(f; z)$ $(j = 1, 2, ..., m)$, т.е. при любом z

$$\Phi(f; z) = f_u^{(j)}(z) \qquad (j = 1, 2, ..., m; \quad f \in \mathfrak{H}).$$

Матрица $T(\lambda)$, дающая представление (9.1) скалярного произведения (g, f), будет ограниченной и ее общий вид при нормировке

$$T(\lambda - 0) = T(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad T(-\infty) = 0$$

будет даваться формулами

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda \widehat{u}_j, \widehat{u}_k) \quad (j = 1, 2, ..., m), \tag{9.9}$$

$$(T(\lambda) = \|\tau_{jk}\|_1^m),$$

где E_λ — какая-либо спектральная функция оператора A.

Если скалярное произведение не сингулярно, то $f = \widehat{f}$, и колпачки над u_j $(j = 1, 2, ..., m)$ можно будет отбросить. Формулы (9.9) совпадают с формулами $T(\lambda)$ для $T(\lambda)$, данными в §3, но они теперь установлены при других предположениях относительно оператора A, в частности, его дефектные числа m_+ и m_- теперь не обязательно равны m, они $\leq m$.

§ 10. Два примера целых операторов

Простейший пример целого оператора с индексом дефекта (1.1) впервые встретился при изучении так называемого неопределенного случая классической степенной проблемы моментов; целый оператор, отвечающий этому случаю проблемы моментов, всегда минимального типа, т.е. для него $h_M(\varphi) \equiv 0$ (см. §8).

Существование целых операторов нормального (неминимального) типа с индексом дефекта (1.1) было обнаружено нами в связи с проблемой продолжения эрмитово-положительных функций [1б, к].

Для того чтобы построить нетривиальные примеры целых операторов† минимального и неминимального типа с любым индексом дефекта (m, m), необходимо соответствующим образом обобщить классическую проблему моментов и проблему продолжения эрмитово-положительных функций.

† Не распадающихся в прямую сумму целых операторов с индексом дефекта (1.1).

I. Матричная проблема моментов в интервале $(-\infty, \infty)$. **1.** Обозначим через M m-мерное пространство векторов $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ с комплексными координатами.

Если $H = \|h_{jk}\|_1^m$ — матрица m-го порядка, а $x = (\zeta_1, ..., \zeta_m)$, $y = (\eta_1, ..., \eta_m)$, то под y^*Hx мы будем понимать выражение, определяемое равенством

$$y^*Hx = \sum_{j,k=1}^{m} h_{jk}\xi_k\bar{\eta}_j.$$

Пусть дана некоторая последовательность $\{S_k\}_0^\infty$ эрмитовых матриц m-го порядка. Нас будет интересовать вопрос, когда эта последовательность является последовательностью степенных моментов некоторой матрицы распределения, т.е. когда последовательность $\{S_k\}_0^\infty$ допускает представление

$$S_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k dT(\lambda), \tag{10.1}$$

где $T(\lambda) = \|\tau_{jk}\|$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — ограниченная матрица, обладающая тем свойством, что при любом $x \in M$

$$x^*T(\lambda)x \geq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

и нормированная так, что

$$T(\lambda - 0) = T(\lambda) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \quad T(-\infty) = 0.$$

Для последовательности $\{S_k\}_0^\infty$, допускающей представление (10.1), возникают дальнейшие вопросы, в частности вопрос единственности представления (10.1) и вопрос описания всех представлений в случае неединственности.

Критерий существования представления (10.1) устанавливается очень просто.

А) *Для того чтобы последовательность эрмитовых матриц $\{S_k\}_0^\infty$ допускала представление (10.1), необходимо и достаточно, чтобы для любых $x_j \in M$ $(j = 0, 1, 2, ...)$ выполнялись условия*

$$\sum_{j,k=0}^{n} x_k^* S_{j+k} x_j \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, ...). \tag{10.2}$$

Доказательство. Необходимость условий (10.2) получается из представления (10.1) тривиальным образом.

Докажем достаточность этих условий.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ линейное множество всех "полиномов" $f(\lambda)$ от символа λ:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k x_k \quad (x_k \in M; \quad n = 0, 1, ...). \tag{10.3}$$

Зададим в $\mathfrak{L}$ билинейный функционал (f, g), полагая

$$(f, g) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{n} y^* S_{j+k} x_k \tag{10.4}$$

для f вида (10.3) и

$$g(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k y_k \quad (y_k \in M; \quad k = 0, 1, ..., p).$$

В силу условий (10.2) для любого $f \in \mathfrak{L}$

$$(f, f) \geq 0.$$

Таким образом, (f, g) — некоторое скалярное (возможно, сингулярное) произведение в $\mathfrak{L}$.

Определим в $\mathfrak{L}$ оператор A_0, полагая для любого $f \in \mathfrak{L}$ вида (10.3)

$$A_0 f(\lambda) = \lambda f(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \lambda^{j+1} x_j.$$

Легко видеть, что A_0 — эрмитов оператор.

Мы покажем, что для A_0 и $\mathfrak{L}$ выполняются все условия п.3, §9.

Пространство M можно рассматривать как подпространство $\mathfrak{L}$ (оно есть множество всех полиномов $f \in \mathfrak{L}$ нулевой степени).

Если в выражении $f(\lambda)$ вместо символа λ вставить число z, то мы получим вектор $f(z) \in M$, при этом

$$f(\lambda) - f(z) = (\lambda - z) g_z(\lambda),$$

где
$$g_z(\lambda) = \sum_{j+k<n} \lambda^j z^k x_{j+k}.$$

Таким образом,
$$f - f(z) = (A_0 - zI) g_z.$$

В согласии с обозначениями §9
$$f(z) = \mathfrak{f}_M(z).$$

При этом, если положить
$$u_1 = (1, 0, ..., 0),\ u_2 = (0, 1, ..., 0), ..., u_m = (0, 0, ..., 1),$$

то $f(z)$ представится в виде
$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f_u^{(j)}(z) u_j,$$

где функционалы
$$f_u^{(j)}(z) = \Phi(f; z)$$

будут удовлетворять всем условиям 1)–4) направляющей системы, указанным в §9, а также соотношениями (9.8).

Таким образом, если положить
$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \quad (j = 1, 2, ..., m), \tag{10.5}$$

где E_λ — какая-либо спектральная функция оператора A, получаемого известным образом из оператора A_0 (см. §9), то будем иметь
$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(j)}(\lambda) \overline{f^{(k)}(\lambda)} d\tau_{jk}(\lambda). \tag{10.6}$$

Сопоставление (10.4) и (10.6) для $f = t^n u_j$; $g = u_k$ дает
$$u_k^* S_n u_j = \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\tau_{jk}(\lambda) \quad (j, k = 1, 2, ..., m; \quad n = 0, 1, 2, ...), \tag{10.7}$$

что равносильно (10.1) при $T(\lambda) = \|\tau_{jk}\|_1^m$.

Предложение А) доказано.

Так как из (10.1) вытекает (10.7), а следовательно, (10.6), то формулами (10.5) задается общее решение проблемы моментов (10.1).

2. Проблему моментов (10.1) будем называть *вполне неопределенной*, если замкнутый эрмитов оператор A, порождаемый оператором A_0, имеет индекс (m, m). В общем случае индекс дефекта оператора A есть (m_+, m_-), где $0 \le m_+,\ m_- \le m$.

В силу теоремы 13 можно утверждать:

В) *Для того чтобы проблема моментов была вполне неопределенной, необходимо, чтобы формы (10.2) были строго положительны.*

Строгая положительность форм (10.2) означает, что знак = в (10.2) возможен лишь при $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0$ или, что то же,

$$(f, f) > 0 \quad \text{при} \quad f \neq 0. \tag{10.8}$$

В дальнейшем предполагаем, что это условие выполняется.

Тогда оператор A есть не что иное, как замыкание $\overline{A}_0$ оператора A_0 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, являющемся замыканием пространства $\mathfrak{L}$.

Пусть теперь индекс-дефект оператора A равен (m, m). Так как для любого $f \in \mathfrak{L}$ соответствующее $\mathfrak{f}_M(z) = f(z)$ есть "полином" и $\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{H}$, то по теореме 9 оператор A регулярен. Более того, на основании теоремы 7 §5 можно будет утверждать, что и для любого $f \in \mathfrak{H}$ вектор-функция $\mathfrak{f}_M(z)$ — целая функция. Таким образом, A — целый оператор.

Кроме того, для любого $f \in \mathfrak{L}$, очевидно,

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\log\|f(z)\|}{|z|} = 0,$$

а следовательно, по теореме 12 оператор A минимального типа, т.е.

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\log\|\nabla(z)\|}{|z|} = 0,$$

где

$$\nabla(z) = \max_{f \in \mathfrak{H}} \frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\| f \|}.$$

Итак, нами доказано:

С) *Оператор A, отвечающий вполне неопределенной проблеме моментов (10.1), есть целый оператор минимального типа.*

3. Так как для целого оператора A отображение $f \to f(z) = \mathfrak{f}_M(z)$ линейно и непрерывно ($\nabla(z) < \infty$), то $\nabla(z)$ можно еще так определить:

$$\nabla(z) = \sup_{f \in \mathfrak{L}} \frac{\|f_z\|}{\| f \|}. \tag{10.9}$$

Это определение функции $\nabla(z)$ имеет смысл во всех случаях, независимо от того, какой индекс дефекта оператора A, если только допускать для $\nabla(z)$ значения, равные ∞.

D) *Пусть z_0 — произвольно выбранная точка верхней (нижней) полуплоскости.*

Конечность $\nabla(z_0)$ есть необходимое и достаточное условие того, чтобы дефектное число m_+ (соответственно m_-) оператора A равнялось m.

Доказательство. Положим $\mathfrak{M}_z = (A - zI)\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{M}_z^0 = (A_0 - zI)\mathfrak{L} = (A - zI)\mathfrak{L}$.

Так как $A = \overline{A}_0$, то при $\operatorname{Im} z \neq 0$ $\mathfrak{M}_z = \overline{\mathfrak{M}}_z^0$.

С другой стороны, так как для любого $f \in \mathfrak{L}$ и $h \in M$ условие $g = f - h \in \mathfrak{M}_z^0$ эквивалентно $h = f(z)$, то определение (10.9) функции $\nabla(z)$ эквивалентно следующему:

$$\nabla(z) = \sup_{h \in \mathfrak{M}, g \in \mathfrak{M}_z^0} \frac{\| h \|}{\|g - h\|} = \sup_{h \in \mathfrak{M}, g \in \mathfrak{M}_z^0} \frac{\| h \|}{\|h - g\|}.$$

Таким образом (см. §7, п.2) *функция $\nabla^{-1}(z)$ есть синус наименьшего угла наклона M к $\mathfrak{M}_z$.*

Поэтому, если при некотором $z_0(\operatorname{Im} z_0 \neq 0)$ $\nabla(z_0) < \infty$, то M не пересекается с $\mathfrak{M}_{z_0}$; следовательно, $\mathfrak{H}$ по модулю $\mathfrak{M}_{z_0}$ m-мерно, т.е. $\mathfrak{N}_{z_0}$ m-мерно.

Предложение доказано.

4. Обозначим через $\{d_k\}_1^\infty$ полную ортонормированную систему в $\mathfrak{H}$, получающуюся путем последовательной ортогонализации и нормирования последовательности:

$$u_1, u_2, ..., u_m, \lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_m, \lambda^2 u_1, \lambda^2 u_2, ..., \lambda^2 u_m, ... \qquad (10.10)$$

Для случая вполне неопределенной проблемы моментов, согласно результатам §7, можно утверждать, что

$$\sum_1^\infty \|d_k(z)\|^2 \leq \nabla^2(z) \leq m \sum_1^\infty \|d_k(z)\|^2. \qquad (10.11)$$

Нетрудно показать, что это неравенство сохраняется и в самом общем случае. Чтобы в этом убедиться, обозначая через $\mathfrak{L}_{nm}$ линейкую оболочку первых nm элементов из (10.10), т.е. множество всех "полиномов" $f \in \mathfrak{L}$ степени $\leq n-1$, положим

$$\nabla_n(z) = \max_{f \in \mathfrak{L}_n} \frac{\|f(z)\|^2}{\| f \|}.$$

Обозначим через A_m оператор умножения на λ, действующий из $\mathfrak{L}_n$ в $\mathfrak{L}_{n-1}$.

Легко видеть, что хотя A_m имеет в $\mathfrak{L}_n$ неплотную область определения, в известном смысле его индекс дефекта есть (m, m), и для него в существенном можно повторить рассуждения §7, на основе которых было выведено соотношение (10.11), и, таким образом, найдем

$$\sum_1^{mn} \|d_k(z)\|^2 \leq \nabla_n^2(z) \leq m \sum_1^{mn} \|d_k(z)\|^2.$$

Устремляя затем n к бесконечности, получаем (10.11).

Отсюда из предложения D) вытекает следующий критерий:

E) *Пусть z_0 — произвольно выбранное невещественное число. Для того, чтобы проблема моментов (10.1) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_1^\infty \|d_k(z_0)\|^2 < \infty, \quad \sum_1^\infty \|d_k(\bar{z}_0)\|^2 < \infty. \qquad (10.12)$$

Это предложение является непосредственным обобщением критерия Гамбургера [8, 9] неопределенности классической проблемы моментов (случай $m = 1$).

Заметим, что если матрицы S_k $(k = 0, 1, ...)$ суть вещественные симметрические матрицы, то оператор A — вещественный при естественном определении в $\mathfrak{L}$ операции комплексного сопряжения, и поэтому $m_+ = m_-$.

Таким образом, в этом случае второе из условий (10.12) есть следствие первого.

5. Наши исследования [1л] об обобщенных резольвентах эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) дают возможность построить конструктивные формулы для общего решения $T(\lambda)$ рассматриваемой проблемы моментов.

Однако эти результаты мы вынуждены опустить, поскольку здесь не изложены исследования о резольвентах.

Заметим только, что на основании теоремы 5 для случая вполне неопределенной проблемы моментов множество всех полиномиальных вектор-функций $\mathfrak{f}(\lambda) = (f_u^{(1)}(\lambda), ..., f_u^{(m)}(\lambda))$, $f \in \mathfrak{L}$ будет плотно в $\mathfrak{L}_T$ в том и только в том случае, если $T(\lambda)$ порождено ортогональной спектральной функцией E_λ оператора A ($T(\lambda)$ — каноническое решение проблемы). Каноническое решение $T(\lambda)$ будет матрицей-функцией чистых скачков и все ее скачки будут расположены в нулях некоторой целой функции минимального типа.

Из этих канонических $T(\lambda)$ выделяются те $T_\xi(\lambda)$, которые порождаются самосопряженными расширениями A_ξ в $\mathfrak{H}$ оператора A, имеющими в точке ξ $(-\infty < \xi < \infty)$ собственное число кратности m.

Спектр оператора A_ξ, как было показано в §8 (см. (8.15) и (8.17)), содержится в множестве нулей целой функции минимального типа

$$(\lambda - \xi)^m \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(j)}(\xi) d_\nu^{(k)}(\lambda) \right\|_{j,k=1}^{m}, \tag{10.13}$$

где $d_\nu^{(j)}(\lambda)$ $(j = 1, 2, ..., m)$ — координаты вектора d_ν $(\nu = 1, 2, ...)$, т.е.

$$d_\nu = \sum_{j=1}^{m} d_\nu^{(j)}(\lambda)u \quad (\nu = 1, 2, ...).$$

Легко показать, что из всех решений $T(\lambda)$ проблемы моментов (10.1) решение $T_\xi(\lambda)$ отличается тем, что имеет "максимальный" скачок в точке ξ, т.е.

$$T(\xi+0) - T(\xi-0) \leq T_\xi(\xi+0) - T_\xi(\xi-0), \tag{10.14}$$

причем знак $=$ возможен лишь в случае, когда[†]

$$T(\lambda) \equiv T_\xi(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Положим для любого z

$$\Gamma(z) = \|\gamma_{jk}(z)\|_1^m,$$

где

$$\gamma_{jk}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^{(j)}(z)\overline{d_\nu^{(k)}(z)} \quad (j, k = 1, ..., m).$$

Нетрудно показать, что

$$T_\xi(\xi+0) - T_\xi(\xi-0) = \Gamma^{-1}(\xi) \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{10.15}$$

6. Приведем еще без доказательства следующее правило вычисления дефектных чисел m_+ и m_- оператора A в общем случае.

Положим, что для любого z:

$$\Gamma_n(z) = \|\gamma_{jk}^{(n)}(z)\|_{j,k=1}^m \quad (n = 1, 2, ...), \tag{10.16$'$}$$

где

$$\gamma_{jk}^{(n)}(z) = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu^{(j)}(z)\overline{d_\nu^{(k)}(z)} \quad (j, k = 1, ..., m). \tag{10.16$''$}$$

[†]Собственно, это замечание и нижеследующая формула (10.15) могут быть сделаны в отношении матриц-функций $T(\lambda)$, соответствующих любому целому оператору. Во избежание недоразумений в толковании знака $<$ в (10.14), поясним, что для двух различных эрмитовых матриц H_1 и H_2 m-го порядка мы пишем $H_1 < H_2$, если при любом $x \in M$ $x^*H_1x \leq x^*H_2x$.

Нетрудно показать, что для любого z существует предельная эрмитова матрица

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma_n^{-1}(z) = \Gamma^{(-1)}(z). \tag{10.17}$$

Ее ранг обозначим через $r(z)$. Оказывается, что

$$r(z) = \begin{cases} m_+ & \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0, \\ m_- & \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0. \end{cases} \tag{10.18}$$

В частности, оператор A будет самосопряжен, если для произвольно выбранного невещественного z

$$\Gamma^{(-1)}(z) = \Gamma^{(-1)}(\bar{z}) = 0. \tag{10.19}$$

Оператор A будет минимален, если хотя бы одно из равенств

$$\Gamma^{(-1)}(z) = 0, \quad \Gamma^{(-1)}(\bar{z}) = 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0) \tag{10.20}$$

имеет место.

Согласно теореме 2 нашей статьи [1з], единственность представления (10.1) будет иметь место, если оператор A максимален, т.е. если хотя бы одно из равенств (10.20) имеет место.

7. Остановимся еще на одном способе образования последовательностей $\{S_k\}_0^\infty$, которым соответствует вполне определенный случай проблемы моментов.

Если $\{S_k^0\}_0^\infty$ и $\{S_k'\}_1^\infty$ — две последовательности "моментов" (т.е. последовательности, допускающие представления типа (10.1), то, очевидно, и $\{S_k\}_0^\infty$ $(S_k = S_k^0 + S_k', \quad k = 1,2,)$ будет последовательностью моментов.

Каждой из этих последовательностей отвечает свое скалярное произведение в $\mathfrak{L}$, обозначим эти произведения соответственно через $(g,f)^0$, $(g,f)'$ и (g,f). Очевидно,

$$(g,f) = (g,f)^0 + (g,f)' \quad (g,f \in \mathfrak{L}).$$

Скалярным произведениям (g,f) и $(g,f)^0$ отвечают нормы $\| f \|$ и $\|f\|^0$ и функции $\nabla(z)$, $\nabla^0(z)$. Очевидно,

$$\|f\|^0 \leq \| f \| \quad (f \in \mathfrak{L}).$$

Так как в конечномерном пространстве M все нормы топологически эквивалентны, то в предположении несингулярности произведения $(f, g)^0$ найдется константа $q \geq 1$ такая, что

$$\| f \| \leq q \|f\|^0 \quad \text{при} \quad f \in M.$$

Отсюда, согласно (10.9),

$$\nabla(z) \leq q\nabla^0(z).$$

Следовательно, если *проблема моментов для последовательности* $\{S_k^0\}$ *вполне неопределенная, то таковой она будет и для последовательности* $\{S_k\}$.

Пусть теперь последовательностям числовых моментов $\{S_k^{(j)}\}_0^\infty$ $(j = 1, 2, ..., m)$ отвечает неопределенный случай классической проблемы моментов.

Тогда, очевидно, и последовательности $\{S_k^0\}_0^\infty$, где

$$S_k^0 = \begin{Vmatrix} S_k^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_k^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & S_k^{(m)} \end{Vmatrix} \qquad (k = 1, 2, ...)$$

будет отвечать вполне неопределенный случай проблемы моментов.

Отправляясь от последовательности $\{S_k^0\}$, можно образовывать уже более сложные последовательности вида $\{S_k^0 + S_k^1\}$, которым будет отвечать вполне неопределенный случай проблемы моментов.

II. Проблема представления непрерывной эрмитово-положительной матрицы-функции. **1′.** Пусть a — некоторое число > 0. Обозначим через $\mathfrak{P}_a$ совокупность непрерывных матриц-функций $F(t) = \|F_{jk}(t)\|_1^m$ $(-a \leq t \leq a)$, обладающих свойством, что для любых $x_1 \in M, ..., x_n \in M$[†] и

$$t_1 \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), ..., t_n \in \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad (n = 1, 2, ...)$$

[†] M означает то же, что и в разделе I этого параграфа.

имеем

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_k^* F(t_j - t_k) x_j \geq 0. \tag{10.21}$$

Нетрудно видеть, что свойство (10.21) влечет равенство

$$F(-t) = F^*(t) \quad (-a \leq t \leq a),$$

т.е.

$$F_{jk}(-t) = F_{kj}(t) \quad (-a \leq t \leq a; \quad j,k = 1,2,...,n).$$

Имеет место предложение:

A$'$). *Для того, чтобы матрица-функция* $F(t) = \|F_{jk}(t)\|_1^m$ $(-a \leq t \leq a)$ *допускала представление*

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dT(\lambda) \quad (-a \leq t \leq a), \tag{10.22}$$

где $T(\lambda)$ *— некоторая матрица распределения, необходимо и достаточно, чтобы* $F(t) \in \mathfrak{P}_a$.

Это предложение было уже установлено ранее [1з]. Для лучшего уяснения идей мы снова приведем доказательство в проварированном виде†.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность матрицы-функции, допускающей представление (10.22), а также выполнение для нее неравенств (10.21), проверяется непосредственно.

Докажем обратную часть теоремы, т.е. для $F(t) \in \mathfrak{P}_a$ существует представление (10.22).

Обозначим через $\mathfrak{L}$ совокупность всех вектор-функций $f(t) = (f_1(t), ..., f_m(t))$ $(0 \leq t \leq a)$, координаты которых суть функции ограниченной вариации в интервале $(0, a)$, обращающиеся в его концах в 0, так что

$$f(0) = f(a) = 0. \tag{10.23}$$

†Тем более, что доказательство, данное в [1з], изложено очень кратко, и в одном месте имеется досадная опечатка: вместо двух условий (10.23) указано одно условие $f(0) = f(a)$.

Для всяких двух элементов $g, f \in \mathfrak{L}$ положим

$$(g, f) = \int\limits_0^a \int\limits_0^a dg^*(t) F(s-t) df(s) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{m} \int\limits_0^a \int\limits_0^a F_{jk}(s-t) df_j(s) \overline{dg_k(t)}. \qquad (10.23')$$

Принимая во внимание (10.21), легко убедиться, что (g, f) будет некоторым скалярным (возможно, сингулярным) произведением в $\mathfrak{L}$.

Обозначим через D_0 множество всех $f \in \mathfrak{L}$, для которых существует в каждой точке $t \in (0, a)$ производная $f'(t)$, которая притом также принадлежит $\mathfrak{L}$.

Определим на D_0 оператор A_0, полагая

$$A_0 f = \frac{1}{i} f' \quad (f \in D_0).$$

Покажем, что оператор A_0 эрмитов. Для этого предположим сперва, что $F(t)$ имеет непрерывную производную. Тогда для любых $g, f \in D_0$, принимая во внимание условия

$$g(0) = g(a) = f(0) = f(a) = 0,$$

найдем путем интегрирования по частям:

$$(Af, g) = \frac{1}{i} \int\limits_0^a \int\limits_0^a dg^*(t) F(s-t) df'(s) =$$

$$= \frac{1}{i} \int\limits_0^a \int\limits_0^a g'^*(t) F(s-t) df'(s) dt =$$

$$= -\frac{1}{i} \int\limits_0^a \int\limits_0^a g'^*(t) \frac{\partial F(s-t)}{\partial s} f'(s) ds dt =$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^a\int_0^a g'^*(t)\frac{\partial F(s-t)}{\partial t}df(s)dt =$$

$$= -\frac{1}{i}\int_0^a\int_0^a dg'^*(t)F(s-t)df(s) = (f, Ag).$$

Рассмотрим теперь общий случай матрицы-функции $F(t)$.

Пусть $h > 0$, а $q = a/(a+h)$. Очевидно, что матрица-функция $F(qt)$ определена при $|t| \le a+h$ и принадлежит $\mathfrak{P}_{a+h}$.

Легко далее видеть, что усредненная матрица-функция

$$F_h(t) = \frac{1}{h^2}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F(q(t+\xi-\eta))d\xi d\eta =$$

$$= \frac{2}{h^2}\int_0^h (h-r)F(q(t+r))dr$$

также принадлежит $\mathfrak{P}_a$. Но матрица-функция $F_h(t)$ уже дифференцируема. Обозначая соответствующее ей в $\mathfrak{L}$ скалярное произведение через $(g, f)_h$, будем, по доказанному, иметь

$$(A_0 g, f)_h = (g, A_0 f)_h \quad (g, f \in \mathfrak{L}).$$

Переходя затем к пределу при $h \to 0$, найдем, что

$$(A_0 g, f) = (g, A_0 f) \quad (g, f \in \mathfrak{L}).$$

Если для некоторого $f \in \mathfrak{L}$ уравнение

$$A_0 g - zg = f \tag{10.24}$$

имеет решение, то оно единственно и

$$g(t) = \int_0^t e^{izs} f(s)ds \quad (0 \le t \le a).$$

Для того чтобы g, определяемое этим равенством, принадлежало $D_0 \subset \mathfrak{L}$, необходимо и достаточно, чтобы $g'(a) = 0$. Таким образом, при данном $f \in \mathfrak{L}$ уравнение (10.24) будет разрешимо в том и только том случае, если

$$i\lambda \int_0^a e^{izs} f(s)ds = -\int_0^a e^{izs} df(s) = 0.$$

Отсюда мы заключаем, что система функционалов

$$\Phi_j(f; z) = \int_0^a e^{izs} df_j(s) \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{10.25}$$

является направляющей для A_0.

Положим

$$u_1 = (\delta_0(t), 0, ..., 0), ..., u_m = (0, 0, ..., \delta_0(t)),$$

где $\delta_s(t)$ $(0 \le s, t \le a)$ мы обозначаем функцию

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le s, \\ 1 & \text{при} \quad t > s. \end{cases}$$

Тогда, согласно (10.25),

$$\Phi_j(u_k, z) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, ..., m). \tag{10.26}$$

Таким образом, система направляющих функционалов Φ_j $(j = = 1, 2, ..., m)$ обладает всеми свойствами 1)–4), указанными в §9, и на основании (10.26), согласно п.3 §9, скалярное произведение (g, f) допускает представление

$$(f, g) = \sum_{j,k=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(f; \lambda)\overline{\Phi_k(g; \lambda)} d\tau_{jk}(\lambda), \qquad (g, f) \in \mathfrak{L}, \tag{10.27}$$

причем общий вид матрицы распределения $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^m$, дающей это представление, получается по формуле

$$\tau_{jk}(\lambda) = (E_\lambda u_j, u_k) \quad (j, k = 1, ..., m), \tag{10.28}$$

где E_λ — какая-либо спектральная функция замкнутого эрмитова оператора A, порождаемого известным образом оператором A_0.

Полагая в (10.27)

$$f = u_j^{(s)}, \quad g = u_k^{(t)} \quad (j,k = 1,2,...,m; \quad 0 \le s,t \le a),$$

где

$$u_1^{(s)} = (\delta_s(t), 0, ..., 0), ..., u_m^{(s)} = (0, 0, ..., \delta_s(t)), \tag{10.29}$$

мы получаем, согласно (10.25),

$$F_{jk}(s-t) = (u_j^{(s)}, u_k^{(t)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(s-t)\lambda} d\tau_{jk}(\lambda)$$

$$(j,k = 1,2,...,m; \quad 0 \le s,t \le a).$$

Эти равенства эквивалентны (10.22).

Теорема доказана.

Одновременно мы получили правило построения всех $T(\lambda)$, дающих представление (10.22).

2′. Аналогично соответствующему определению в степенной проблеме моментов будем называть проблему представления матрицы-функции $F(t) \in \mathfrak{P}_a$ *вполне неопределенной*, если оператор A, порождаемый оператором A_0, имеет индекс дефекта (m,m).

Аналогом предложения B) будет предложение

B′) *Для того, чтобы проблема представления $F(t) \in \mathfrak{P}_a$ была вполне неопределенной, необходимо, чтобы форма*

$$\int_0^a dg^*(t)F(s-t)df(t) \tag{10.30}$$

была положительной при $f \neq 0$.

Предложение непосредственно следует из теоремы 13.

Аналогом C) будет предложение

C′). *Оператор A, отвечающий вполне неопределенной проблеме представления $F(t) \in \mathfrak{P}_a$, есть целый оператор нормального типа с*

$$h_M(\varphi) = \frac{a}{2}(|\sin\varphi| - \sin\varphi) \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi), \tag{10.31}$$

если в качестве целого модуля M выбрана линейная оболочка векторов $u_1, u_2, ..., u_m$, определенных в (10.26).

Доказательство. В силу (10.25) при указанном выборе M для любого $f \in \mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{f}_M(z) = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j(f; z) u_j = \sum_{j=1}^{m} \Big(\int_0^a e^{izt} df_j(t) \Big) u. \tag{10.32}$$

Таким образом, все вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ суть целые функции, а следовательно, и оператор A (замыкание A_0 в $\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{L}}$) цел.

Равенство (10.31) для индикатрисы $\mathfrak{h}_M \varphi$ функции

$$\nabla_M(z) = \sup_{f \in \mathfrak{L}} \frac{\|\mathfrak{f}_M(z)\|}{\| f \|} \tag{10.33}$$

означает, что индикаторная диаграмма функции $\nabla_M(z)$ есть отрезок мнимой оси $(0, -ai)$.

Из (10.32) нетрудно усмотреть, что

$$h(f; \varphi) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log \|\mathfrak{f}_M(re^{i\varphi})\|}{\| f \|} \le$$

$$\le \frac{a}{2}(|\sin \varphi| - \sin \varphi) \qquad (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

что показывает, что индикаторная диаграмма каждой вектор-функции $\mathfrak{f}_M(z)$ $(f \in \mathfrak{L})$ содержится в отрезке $S = (0, ai)$.

С другой стороны, всякая точка $-is$ $(0 \le s \le a)$ отрезка S является индикаторной диаграммой вектор-функции

$$u_1^{(s)}(z) = e^{isz} u_1,$$

в которую при отображении $f \to \mathfrak{f}_M(z)$ переходит элемент $u_1^{(s)}$ $(0 \le s \le a)$, определенный в (10.29).

Следовательно, по теореме 12, S есть индикаторная диаграмма функции $\nabla_M(z)$.

Предложение C$'$) доказано.

Замечание 10.1. Целый модуль M целого оператора, вообще говоря, не определяется оператором однозначно.

Например, для рассматриваемого оператора A целым модулем будет также линейная оболочка всякой системы векторов $u_1^{(s_1)}, u_2^{(s_2)}, ..., u_m^{(s_m)}$ $(0 \le s_1, ..., s_m \le a)$.

Если, в частности, M заменить модулем $\widetilde{M}$ с базисом

$$\widetilde{u}_1 = u_1^{(\frac{a}{2})},\ \widetilde{u}_2 = u_2^{(\frac{a}{2})}, ..., \widetilde{u}_m = u_m^{(\frac{a}{2})},$$

то

$$\mathfrak{f}_M(z) = e^{-\frac{iaz}{2}} \sum_{j=1}^{m} \Big(\int_0^a e^{izt} df_j(t) \Big) \widetilde{u}_j.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что указанное выражение для $\mathfrak{f}_M(z)$ удовлетворяет условиям

$$\Phi_j(f - \mathfrak{f}_{\widetilde{M}}(z), z) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Легко видеть, что $\widetilde{M}$ соответствует

$$h_{\widetilde{M}}(\varphi) = \frac{a}{2} |\sin\varphi| \quad (0 \le \varphi \le 2\pi),$$

т.е. индикаторная диаграмма функции $\nabla_{\widetilde{M}}(z)$ есть отрезок мнимой оси $\left(-i\,\frac{a}{2},\ i\,\frac{a}{2}\right)$.

Можно показать, что при всяком выборе целого модуля M индикаторная диаграмма функции $\nabla_M(z)$ будет отрезком мнимой оси длины, не меньшей a.

3′. Равенством (10.33) можно определить функцию $\nabla_M(z)$ (допуская для нее и бесконечные значения) в любой точке z, независимо от того, каков индекс-дефект оператора A. Легко видеть, что при этом предложение D), установленное для степенной проблемы моментов, сохраняет полную силу и для рассматриваемого случая.

Расположим в последовательность все векторы $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, ...$ с рациональными $s \in (0, a)$ и проортонормируем эту последовательность в некоторую последовательность $\{d_\nu\}_1^\infty$. Обозначим далее через

$$\Theta_\nu(z) = \sum_{j=1}^{m} d_\nu^{(j)}(z) u \quad (\nu = 1, 2, ...)$$

вектор-функции, в которые переходят соответственно векторы d_ν $(\nu = 1, 2, ...)$ при изоморфизме $f \to \mathfrak{f}_M(z)$.

Тогда можно будет и в рассматриваемом случае сформулировать предположение Е) с заменой $d_\nu(z)$ на $\Theta_\nu(z)$ $(\nu = 1, 2, ...)$.

Точно так же все дальнейшие замечания, сделанные в п.4, 5, можно перенести и на рассматриваемую теперь проблему представления.

4′. Руководствуясь той же идеей, что и в п.6, можно строить различные примеры матриц-функций $F(t) \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$, для которых проблема представления является вполне неопределенной.

Без доказательства мы приведем еще следующий способ построения таких примеров.

Пусть $F(t) = \|F_{jk}(t)\|_1^m$ — матрица-функция, определенная и дважды дифференцируемая в интервале $(0, \alpha)$. Пусть, кроме того, матрица $H = F'(0)$ обладает тем свойством, что эрмитова форма, соответствующая ее "вещественной" части $\mathrm{Re}\, H$ $(2\mathrm{Re}\, H = H + H^*)$, положительна.

Определим $F(t)$ для $t \in (-\alpha, 0)$, полагая $F(-t) = F^*(t)$ $(0 \leq \leq t \leq \alpha)$.

Тогда, рассматривая $F(t)$ в достаточно "сжатом" интервале $(-a, 0)$ $(0 < a < \alpha)$, можно будет утверждать, что $F \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$ и, более того, что проблема представления усеченной $F(t)$ $(-a \leq \leq t \leq a)$ является вполне неопределенной.

5′. Для случая $m = 1$ предложение A') представляет собой непосредственное обобщение известной теоремы Бохнера [14], согласно которой скалярная функция $\varphi(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ допускает представление

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\tau(\lambda) \quad (-\infty < t < \infty) \tag{10.34}$$

с неубывающей функцией $\tau(\lambda)$ в том и только том случае, если она принадлежит классу $\mathfrak{P}_\infty^{(1)}$, т.е. она непрерывна и при любых неотрицательных $t_1, ..., t_n$ и комплексных $\xi_1, ..., \xi_n$ $(n = 1, 2, ...)$:

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(t_j - t_k)\xi_j\bar{\xi}_k \geq 0;$$

при выполнении указанного условия функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(\tau(-\infty) = 0)$, дающая представление (10.34), определяется однозначно.

Из теоремы Бохнера непосредственно следует, что для того чтобы матрица-функция $F(t) = \|F_{jk}(t)\|_1^m$ допускала представление

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dT(\lambda), \tag{10.35}$$

где $T(\lambda)$ — некоторая матрица распределения, необходимо и достаточно, чтобы при любом $x \in M$ функция $\varphi_x(t) = x^* F(t) x \in \in \mathfrak{P}_\infty^{(1)}$; при выполнении этого условия матрица распределения $T(\lambda)$ определяется из (10.35) однозначно.

Класс матриц-функций $F(t) = \|F_{jk}(t)\|_1^m$, удовлетворяющих условию $x^* F(t) x \in \mathfrak{P}_\infty^{(1)}$ при любом $x \in M$, обозначим через $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$.

Наше предложение A') можно еще так сформулировать: *каждая матрица-функция $F(t)$ класса $\mathfrak{P}_a^{(m)}$ $(a < \infty)$ может быть продолжена в некоторую матрицу-функцию класса $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$.*

И, очевидно, проблема исследования всех представлений (10.22) данной матрицы-функции $F(t) \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$ эквивалентна проблеме исследования всех ее продолжений в классе $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$.

Для случая $m = 1$ проблема представления (продолжения) функций $F(t) \in \mathfrak{P}_a^{(m)}$ была исследована нами ранее [1к].

В настоящей статье мы обобщили значительную часть основных результатов для случая $m = 1$ на общий случай любого натурального m.

Заканчивая, отметим, что для случая $m > 1$ нами допущено некоторое отличие при определении классов $\mathfrak{P}_a^{(m)}$ и $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$. Определение класса $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$ было бы вполне аналогичным определению класса $\mathfrak{P}_a^{(m)}$ $(0 < a < \infty)$, если бы мы класс $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$ охарактеризовали условием:
непрерывная матрица-функция $F(t) = \|F_{jk}(t)\|_1^m$ принадлежит классу $\mathfrak{P}_\infty^{(m)}$ в том и только том случае, если для любых $x_1 \in$

$\in M, ..., x_n \in M$ *и неотрицательных* $t_1, t_2, ..., t_n$ $(n = 1, 2, ...)$:

$$\sum_{j,k=1}^{n} x_k^* F(t_j - t_k)\, x_j \geq 0. \tag{10.36}$$

Мы же это условие внешне ослабили, требуя, чтобы все векторы $x_1, ..., x_n$ были коллинеарны: $x_j = \xi_j x$ $(j = 1, 2, ..., n)$.

Однако для случая класса $\mathfrak{P}_a^{(m)}$ $(m > 1)$ указанное ослабление условий (10.36) приводит, по-видимому, к другому классу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1а. *Крейн М.Г.* Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице // ДАН СССР. — 1944. — **43**, №4. — Ч.I; **44**, №4. — Ч.III.

1б. *Крейн М.Г.* Об одном замечательном классе эрмитовых операторов // ДАН СССР. — 1944. — **44**, №5.

1в. *Крейн М.Г.* Об обобщенной проблеме моментов // ДАН СССР. — 1944. — **44**, №6.

1г. *Крейн М.Г.* О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции // ДАН СССР. — 1944. — **44**, №5.

1д. *Крейн М.Г.* О проблеме продолжения винтовых линий в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. — 1944. — **XV**, №4.

1е. *Крейн М.Г.* Об одном общем методе разложения эрмитово-положительных ядер на элементарные произведения // ДАН СССР. — 1946. — **XXIII**, №1.

1ж. *Крейн М.Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Матем. сб. — 1947. — **20**, №3.

1з. *Крейн М.Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Збірник праць Інституту математики АН УРСР. — 1948. — №10.

1и. *Крейн М.Г.* К теории целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1947. — **II**.

1к. *Крейн М.Г.* О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций // ДАН СССР. — 1940. — **XXVI**, №1.

1л. *Крейн М.Г.* О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) // ДАН СССР. — 1946. — **II**, №8.

2а. *Наймарк М.А.* Спектральные функции симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1940. — **IV**, №3.

2б. *Наймарк М.А.* О представлении аддитивных операторных функций множеств // ДАН СССР. — 1943. — **XI**.

3а. *Лившиц М.С.* Об одном применении теории эрмитовых операторов в обобщенной проблеме моментов // ДАН СССР. — 1944. — **XIV**, №1.

3б. *Лившиц М.С.* О некоторых новых приложениях теории эрмитовых операторов: Диссертация. — Майкоп, 1942.

4. *Смирнов В.И.* Sur les voleurs limites des fonetions réguliéres à l'intérieur d'un circle // Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва. — 1929. — **II**.

5. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. — Огиз, 1941.

6а. *Привалов И.И.* Субгармонические функции. — ГТТИ, 1937.

6б. *Привалов И.И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. — МГУ, 1941.

7. *Гельфонд А.О.* Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка // Успехи мат. наук. — 1947. — Вып.3. — С.144–174.

8. *Крейн М.Г., Красносельский М.А.* Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // Успехи мат. наук. — 1947. — **II**, вып.3.

9. *Ахиезер Н.И.* Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи мат. наук. — 1945. — Вып.9.

10. *Polya G.* Über die Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Ztschr. — 1929. — Bd.29.

11. *Levinson N.* Gop and density Theorems // Amer. Math. Soc. Colloquium Public. — 1940. — **XXVI**, N 13.

12. *Hamburger H.* Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m) // Ann. of Math. — 1944. — **45**, N 1.

13. *Shohat J.A. and Tamarkin J.D.* The problem of moments. — New York, 1943.

14. *Bochner S.* Fouriersche Integrale. — Leipzig, 1932.

О ФОРМУЛЕ СЛЕДОВ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

(Математический сборник. — 1953. — Том 33 (75), № 3)

В связи с некоторыми вопросами квантовой статистики и теории кристаллов И.М. Лифшиц [1] недавно рассмотрел следующую задачу.

Дан некоторый самосопряженный (гипермаксимальный) оператор H (для которого, вообще говоря, след не существует) и некоторый самосопряженный конечномерный оператор T. Требуется для вещественной функции $\Phi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ "достаточно общего вида" дать правило вычисления следа разности операторов $\Phi(H+T) - \Phi(H)$.

При этом подразумевалось, что понятие следа в применении к самосопряженному оператору A имеет смысл в том лишь случае, когда оператор вполне непрерывен и ряд, составленный из его собственных чисел, каждое из которых считается столько раз, какова его кратность, абсолютно сходится; сумма этого ряда (в дальнейшем обозначаемая через $S\{A\}$) и будет *следом* оператора A.

В результате своего исследования И.М. Лифшиц пришел к весьма интересной формуле†:

$$S\{\Phi(H+T)_{-\Phi}(H)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\,d\Phi(\lambda), \tag{!}$$

†И.М. Лифшиц [1] при выводе формулы (!) предполагал, что спектр оператора H непрерывен и, в случае появления у возмущенного оператора $\tilde{H} = H + T$ дискретного спектра, вводил в правую часть (!) ряд дополнительных членов, в чем при нашем определении функции $\xi(\lambda)$ не будет никакой надобности.

где $\xi(\lambda)$ — некоторая функция, вычисляемая по определенным правилам по данным операторам H и T.

Подставив формально в формулу следов (!) вместо $\Phi(\lambda)$ функцию

$$\eta_\mu(\lambda) = \begin{cases} 1 & (\lambda \le \mu), \\ 0 & (\lambda > \mu), \end{cases}$$

И.М. Лифшиц нашел, что

$$\xi(\mu) = S\{E_\mu - \widetilde{E}_\mu\} \qquad (-\infty < \mu < \infty), \tag{!!}$$

где E_μ и $\widetilde{E}_\mu$ — спектральные функции соответственно операторов H и $\widetilde{H} = H + T$.

И.М. Лифшиц отметил, что главной целью его работы является построение *формализма* теории и получение *эффективных* формул; строгое же исследование границ применимости его формул должно служить предметом отдельного исследования.

Здесь предлагается (§3) другой (более простой и, вместе с тем, более строгий) вывод тех же формул, построенный на принципах, позволяющих выяснить математическое содержание этих формул, которое оказывается далеко не простым.

В §6 мы приводим пример ограниченного оператора $H = H^*$ и одномерного оператора T, для которых формула (!!) *не имеет непосредственного смысла*, так как разность $E_\mu - \widetilde{E}_\mu$ в этом примере *не имеет следа* в том смысле, как это было указано выше.

Естественно после этого, что справедливость общей формулы следов (!) удается установить, лишь сузив достаточно класс допускаемых функций $\Phi(\lambda)$. Однако мы показываем (§5), что этот класс функций $\Phi(\lambda)$ можно значительно расширить, если формулу (!) понимать в некотором *условном* смысле (допускающем точное определение).

Как нам кажется, выяснение этого *условного* смысла формулы следов (!) объясняет *реальный* смысл этой формулы в ее приложениях в вопросах физики (в частности, в задаче вычисления свободной энергии твердого раствора, рассмотренной И.М. Лифшицем в статье [1]).

Заметим еще, что наш вывод формулы следов приводит к "точным" характеристикам функции $\xi(\lambda)$ (см. теорему 3, §3) — "точным" в том смысле, что коль скоро некоторая функция $\xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ им удовлетворяет, то она порождается некоторым самосопряженным оператором H и конечномерным оператором возмущения T.

Одновременно мы обобщаем формулу следов (!) на случай любого бесконечномерного оператора возмущения T, имеющего конечный след (§2, 4).

§ 1. Класс $\mathfrak{L}$ операторов, имеющих след

В дальнейшем $\mathfrak{H}$ означает сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{R}$ — нормированное кольцо всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}$ с обычным определением нормы:

$$|A|_h = \sup_{f \in \mathfrak{H}} \frac{|Af|}{|f|}$$

$$\left(|f| = \sqrt{(f,f)}\right).$$

Букву h внизу мы ставим для отличия этой нормы от нормы $|A|_\ell$, которую мы ниже введем для одного специального класса операторов.

Обозначим через $\mathfrak{P}$ конус всех неотрицательных операторов $A \in \mathfrak{R}$, т.е. операторов, характеризующихся условием:

$$(Af,f) \geq 0 \quad \text{при любом} \quad f \in \mathfrak{H}.$$

В этом параграфе будут сформулированы некоторые простые предложения, по-видимому, впервые опубликованные в [2] и [3] (см. их изложение в [4])†.

1°. *Пусть $A \in \mathfrak{P}$. Если для какой-либо полной ортонормальной*

†Независимо они были получены автором и докладывались в 1946 г. на семинаре при кафедрах математики и теоретической механики Одесского института инженеров морского флота.

системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$ *величина*

$$S\{A\} = \sum_{k=1}^{\infty}(A\varphi_k, \varphi_k) \tag{1.1}$$

конечна, то оператор A *вполне непрерывен и* $S\{A\}$ *совпадает с суммой его собственных чисел.*

Таким образом, если для $A \in \mathfrak{P}$ величина $S\{A\}$ конечна, то она не зависит от выбора ортонормального базиса $\{\varphi_k\}_1^\infty$ в $\mathfrak{H}$.

Обозначим через $\mathfrak{L}$ линейную оболочку элементов $A \in \mathfrak{P}$, для которых $S\{A\} < \infty$. Очевидно, оператор $A \quad (\in \mathfrak{R})$ будет принадлежать $\mathfrak{L}$ в том и только в том случае, когда он допускает представление

$$A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4,$$

где

$$A_j \in \mathfrak{P}, \qquad S\{A_j\} < \infty \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Для любого $A \in \mathfrak{L}$ имеет смысл величина $S\{A\}$, определяемая равенством (1.1); она называется *следом* оператора A.

2°. *Для того чтобы самосопряженный оператор* $A \quad (A = A^*)$ *принадлежал* $\mathfrak{L}$, *необходимо и достаточно, чтобы он был вполне непрерывен и чтобы ряд, составленный из его собственных чисел, абсолютно сходился. След* $S\{A\}$ *равен сумме этого ряда.*

Таким образом, $A = A^* \in \mathfrak{L}$ в том и только в том случае, когда A допускает представление[†]

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\,\cdot\,, \varphi_j)\varphi_j, \tag{1.2}$$

[†]Равенство (1.2) мы понимаем в том смысле, что для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$Af = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(f, \varphi_j)\varphi_j.$$

где

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty,$$

и в этом случае

$$S\{A\} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j.$$

Имеет место следующее важное предложение:

3°. *Если $A \in \mathfrak{L}$, то при любом $X \in \mathfrak{R}$:*

$$AX \in \mathfrak{L}, \qquad XA \in \mathfrak{L},$$

$$S\{AX\} = S\{XA\}$$

и, более того,

$$|A|_\ell = \sup_{X \in \mathfrak{R}} \frac{|S\{AX\}|}{|X|_h}. \tag{1.3}$$

Это предложение означает, что всякий оператор $A \in \mathfrak{L}$ порождает в $\mathfrak{R}$ линейный непрерывный функционал F_A по формуле

$$F_A(X) = S\{AX\}$$

$$(X \in \mathfrak{R}),$$

причем его норма и есть величина $|A|_\ell$.

4°. *Если $A \in \mathfrak{L}$, то и $A^* \in \mathfrak{L}$, причем*

$$|A|_\ell = |A^*|_\ell \geq |A|_h.$$

Введем теперь в рассмотрение множество $\mathfrak{T}$ всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}$, являющееся, как известно, двусторонним идеалом в $\mathfrak{R}$.

5°. *Линейное пространство $\mathfrak{L}$ с нормой $|A|_\ell$ является сопряженным пространством к $\mathfrak{T}$ и, следовательно, полно по норме $|A|_\ell$.*

Это утверждение означает, что функционалами $F_A(X)$ исчерпываются все линейные непрерывные функционалы в $\mathfrak{T}$ и что равенство (1.3) не нарушится при замене $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{T}$, т.е.

$$|A|_\ell = \sup_{X\in\mathfrak{T}} \frac{|S\{AX\}|}{|X|_h}.$$

В силу (1.3),

$$|S\{AX\}| \le |A|_\ell |X|_h$$

$$(A \in \mathfrak{L}, \quad X \in \mathfrak{R}).$$

В частности, при X, равном тождественному оператору I, получаем

$$|S\{A\}| \le |A|_\ell \qquad (A \in \mathfrak{L}).$$

Это неравенство показывает, что

6°. *След $S\{A\}$ является линейным непрерывным функционалом на $\mathfrak{L}$.*

Для полноты приведем еще следующее предложение, впрочем, нигде дальше не используемое.

7°. *Кольцо $\mathfrak{R}$ является сопряженным пространством к пространству $\mathfrak{L}$.*

Это означает, что функционалами на $\mathfrak{L}$: $\Phi_A(X) = S\{AX\}$, где A — какой-либо элемент из $\mathfrak{R}$, исчерпываются все линейные непрерывные функционалы и

$$|A|_h = \sup_{X\in\mathfrak{L}} \frac{|S\{AX\}|}{|X|_\ell}.$$

Нам придется пользоваться следующим простым предложением:

8°. *Если $A \in \mathfrak{L}$ и существует обратный оператор $(I + A)^{-1}$ $(\in \mathfrak{R})$, то*

$$(I + A)^{-1} = I + B,$$

где $B \in \mathfrak{L}$.

В самом деле, из $(I + A)(I + B) = I$ находим

$$B = -A - AB,$$

а, в силу предложения 3°, $AB \in \mathfrak{L}$.

§ 2. Резольвента $\widetilde{R}_z$ возмущенного оператора $\widetilde{H} = H + T$

1. В дальнейшем H обозначает некоторый самосопряженный (гипермаксимальный), вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$ с некоторого линейного плотного в $\mathfrak{H}$ множества $\mathfrak{D}$.

Как известно [5, 7], для любого невещественного z оператор $H - zI$ (I — тождественный оператор) отображает взаимно однозначно $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{H}$. Обратный оператор $R_z = (H - zI)^{-1}$ отображает $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{D}$ и является ограниченным оператором:

$$|R_z g| \le \frac{1}{|\Im z|}|g| \qquad (g \in \mathfrak{H}). \tag{2.1}$$

Пусть $T = T^* \in \mathfrak{L}$ и $\widetilde{H} = H + T$, т.е. $\widetilde{H}$ — оператор с той же областью определения $\mathfrak{D}$, что и H, и для любого $f \in \mathfrak{D}$

$$\widetilde{H} f = Hf + Tf.$$

Найдем резольвенту $\widetilde{R}_z$ $(\Im z \neq 0)$ оператора $\widetilde{H}$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\widetilde{H} f - zf = g \tag{2.2}$$

при любом $g \in \mathfrak{H}$. Иначе его можно записать в виде

$$(H - zI)f + Tf = g.$$

Применяя к обеим частям этого равенства резольвенту R_z, получаем, что оно эквивалентно следующему:

$$(I + R_z T) f = R_z g. \tag{2.3}$$

Оператор R_zT ограничен и, более того, согласно (2.1),

$$|R_zT|_h \leq \frac{1}{|\Im z|}|T_h|.$$

Следовательно, если $|\Im z| > |T|_h$, то существует ограниченный обратный оператор $(I + R_zT)^{-1}$ и, более того,

$$(I + R_zT)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(R_zT)^k.$$

Таким образом, уравнение (2.3) имеет при $|\Im z| > |T|_h$ одно и только одно решение

$$f = (I + R_zT)^{-1}R_zg = R_z \left(I + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(TR_z)^k\right) g,$$

которое одновременно является решением и уравнения (2.2). Отсюда, в частности, заключаем, что эрмитов оператор $\widetilde{H}$:

$$(\widetilde{H}f, g) = (f, \widetilde{H}g) \qquad (f, g \in \mathfrak{D})$$

самосопряжен.

Но тогда уравнение (2.2), а следовательно, и (2.3), для всякого $g \in \mathfrak{H}$ будет иметь одно и только одно решение при любом невещественном z. Когда g пробегает все $\mathfrak{H}$, вектор R_zg пробегает множество $\mathfrak{D}$, плотное в $\mathfrak{H}$. Учитывая также, что оператор R_zT вполне непрерывен, заключаем, что при любом невещественном z существует обратный оператор $(I + R_zT)^{-1}$. Его всегда можно представить в виде $(I + R_zT)^{-1} = I + \Gamma_z$.

Обозначим через $\widetilde{R}_z$ резольвенту оператора $\widetilde{H}$.

Сравнивая решение $f = R_zg$ уравнения (2.2) с решением

$$f = (I + R_zT)^{-1}R_zg = R_zg + \Gamma_zR_zg,$$

находим

$$\widetilde{R}_z = R_z + \Gamma_zR_z.$$

Нас будет интересовать тот случай, когда T *имеет след* , т.е.

$$T \in \mathfrak{L}.$$

В этом случае также (см. предложения 3° и 8° §1)

$$R_z T \in \mathfrak{L}, \quad \Gamma_z \in \mathfrak{L}, \quad \Gamma_z R_z \in \mathfrak{L}.$$

Следовательно, $\widetilde{R}_z - R_z \in \mathfrak{L}$ и имеет смысл

$$S\{\widetilde{R}_z - R_z\} = S\{\Gamma_z R_z\}.$$

При $|\Im z| > |T|_h$ имеет место разложение

$$\Gamma_z = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k (R_z T)^k,$$

которое сходится по норме кольца $\mathfrak{R}$. Предполагая $|\Im z| > |T|_\ell$, мы можем утверждать, что правая часть сходится и по ℓ-норме, и так как

$$|A|_h \leq |A|_\ell \qquad (A \in \mathfrak{L}),$$

то она будет сходиться к тому же оператору Γ_z.

Одновременно получаем оценки:

$$|\Gamma_z|_\ell \leq \sum_{k=1}^{\infty} |R_z T|_\ell^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|T|_\ell^k}{|\Im z|^k} = \frac{|T|_\ell}{|\Im z| - |T|_\ell}, \tag{2.4}$$

$$|\widetilde{R}_z - R_z|_\ell = |\Gamma_z R_z|_\ell \leq |\Gamma_z|_\ell |R_z|_h \leq \frac{|T|_\ell}{|\Im z|(|\Im z| - |T|_\ell)}.$$

Из них получается следующая

Теорема 1. *Для любого* $z \quad (\Im z \neq 0)$

$$|\widetilde{R}_z - R_z|_\ell \leq \frac{|T|_\ell}{|\Im z|^2}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $z \quad (\Im z \neq 0)$ найдется такое натуральное n, что

$$\frac{1}{n}|T|_\ell < |\Im z| = |y|$$

$$(z = x + iy).$$

Положим

$$H_k = H + \frac{k}{n}T,$$

$$R_z^{(k)} = (H_k - zI)^{-1}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, согласно (2.5),

$$|R_z^{(k+1)} - R_z^{(k)}|_\ell \leq \frac{|T|_\ell}{n|y|\left(|y| - \frac{|T|_\ell}{n}\right)}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

А так как $R_z^{(0)} = R_z$, $R_z^{(n)} = \widetilde{R}_z$ и

$$|\widetilde{R}_z - R_z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |R_z^{(k+1)} - R_z^{(k)}|,$$

то

$$|\widetilde{R}_z - R_z|_\ell \leq \frac{|T_\ell|}{|y|\left(|y| - \frac{1}{n}|T_\ell|\right)}.$$

Так как n можно неограниченно увеличивать, то убеждаемся в справедливости неравенства (2.5).

Следствие. *Пусть* $T_1 = T_1^*$ *и* $T_2 = T_2^*$ *— два оператора из* $\mathfrak{L}$ *и*

$$H_k = H + T_k, \; R_z^{(k)} = (H_k - zI)^{-1}$$

$$(k = 1, 2).$$

Тогда

$$|R_z^{(2)} - R_z^{(1)}|_\ell \leq \frac{1}{|\Im z|^2}|T_2 - T_1|_\ell. \tag{2.6}$$

В самом деле,

$$H_2 = H_1 + T,$$

где $T = T_2 - T_1$, и, следовательно, (2.6) имеет место, в силу доказанной теоремы.

Замечание. Если H — ограниченный оператор, то оценка (2.5) может быть улучшена, а именно:

$$|\widetilde{R}_z - R_z|_\ell \leq \frac{|T|_\ell}{d^2(z)}, \tag{2.7}$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до интервала $(-|H|_h - |T|_h, |H|_h + +|T|_h)$.

2. Положим

$$S(z) = S\{\widetilde{R}_z - R_z\}. \tag{2.8}$$

Согласно (2.5),

$$|S_z| \leq \frac{1}{|\Im z|^2}|T|_\ell. \tag{2.9}$$

В §4 мы установим следующую теорему:

Теорема 2. *Каков бы ни был оператор $T = T^* \in \mathfrak{L}$, функция $S(z)$ допускает представление:*

$$S(z) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)d\lambda}{(z-\lambda)^2}, \tag{2.10}$$

где $\xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — некоторая вещественная функция, такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|d\lambda \leq |T|_\ell.$$

Функция $\xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, с точностью до ее значений на множестве меры нуль, будет единственным образом определяться из представления (2.10) (см. §4).

Равенство (2.10) мы запишем сейчас в несколько ином виде, который непосредственно приведет нас к основной проблеме, возникшей в связи с исследованием И.М. Лифшица [1].

Положим для любого z $(\Im z \neq 0)$

$$\Phi_z(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}.$$

Тогда, на основании определения (2.8) функции $S(z)$ и представления (2.10), можно написать:

$$S\{\Phi_z(\widetilde{H}) - \Phi_z(H)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Phi_z}{d\lambda}\, \xi(\lambda)\, d\lambda.$$

Полагая здесь $z = z_j$ $(\Im z \neq 0, j = 1, 2, ..., m)$ и умножая каждое j-е из получающихся так равенств на произвольную постоянную c_j $(j = 1, 2, ..., m)$, мы, после почленного суммирования этих равенств, получаем

$$S\{\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Phi}{d\lambda} \xi(\lambda) d\lambda, \tag{2.11}$$

где $\Phi(\lambda)$ — функция вида

$$\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{\lambda - z_j}. \tag{2.12}$$

Как будет показано в §4, формула следов (2.11) справедлива для значительно более широкого класса функций $\Phi(\lambda)$. Однако нам не удалось найти характеристики класса всех тех функций $\Phi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, для которых справедлива формула следов при любом выборе самосопряженного оператора H и оператора $T = T^* \in \mathfrak{L}$.

В §3 мы дадим эффективные формулы для определения функции $\xi(\lambda)$ и исследуем ее структуру для случая конечномерного оператора T.

§ 3. Случай конечномерного оператора возмущения

Оператор T называется *конечномерным*, если его областью изменения $T\mathfrak{H}$ является конечномерное пространство. Число измерений r области изменения называется *размерностью оператора*. Если $\{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ — некоторый базис в $T\mathfrak{H}$, то ему всегда отвечает такой базис $\{\psi_1, ..., \psi_r\}$ в $T^*\mathfrak{H}$, что

$$T = \sum_{j=1}^{r} (\cdot, \varphi_j)\, \psi_j. \tag{3.1}$$

Всякий конечномерный оператор T принадлежит $\mathfrak{L}$ и легко видеть, что

$$S\{T\} = \sum_{j=1}^{r} (\psi_j, \varphi_j). \tag{3.2}$$

Для случая конечномерного оператора T вида (3.1) уравнение

$$\widetilde{H} f - zf = g \qquad (\widetilde{H} = H + T)$$

эквивалентно системе уравнений

$$hf + \sum_{k=1}^{r} \xi_k \psi_k - zf = g, \tag{3.3}$$

$$\xi_j = (f, \varphi_j) \qquad (j = 1, 2, ..., r). \tag{3.4}$$

Применяя к обеим частям равенства (3.3) резольвенту $R_z = (H - -zI)^{-1}$, будем иметь

$$f + \sum_{k=1}^{r} \xi_k R_z \psi_k = R_z g.$$

Получающееся отсюда значение для f внесем в (3.4); тогда найдем

$$\xi_j + \sum_{k=1}^{r} (R_z \psi_k, \varphi_j) \xi_k = (R_z g, \varphi_j) = (g, R_z^* \varphi_j) \qquad (j = 1, 2, ..., r). \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение определитель

$$\Delta(z) = |\delta_{jk} + (R_z \psi_k, \varphi_j)|_1^r.$$

Обозначим через $\Delta_{jk}(z)$ алгебраическое дополнение его элемента

$$\delta_{jk} + (R_z \psi_k, \varphi_j) \qquad (j, k = 1, 2, ..., r).$$

Тогда из (3.5) находим

$$\xi_j = \frac{1}{\Delta(z)} \sum_{k=1}^{r} \Delta_{kj}(z)(g, R_z^* \varphi_j)$$

$$(j = 1, 2, ..., r).$$

Внося найденные значения для ξ_j в (3.4), получим окончательное выражение для $f = \widetilde{R}_z g$:

$$\widetilde{R}_z g = R_z g - \frac{1}{\Delta(z)} \sum_{k,j=1}^{r} \Delta_{kj}(z)(g, R_z^* \varphi_j) R_z \psi_k. \tag{3.6}$$

Таким образом, $\widetilde{R}_z - R_z$ — конечномерный оператор.

Вычисляя по формуле (3.2) след

$$S(z) = S(\widetilde{R}_z - R_z),$$

получаем

$$S(z) = -\frac{1}{\Delta(z)} \sum_{j,k=1}^{r} \Delta_{kj}(z)(R_z \psi_k, R_z^* \varphi_j). \tag{3.7}$$

А так как

$$(R_z \psi_k, R_z^* \varphi_j) = (R_z^2 \psi_k, \varphi_j) = \frac{d}{dz} \left[\delta_{jk} + (R_z \psi_k, \varphi_j)\right]$$

$$(j, k = 1, 2, ..., r),$$

то (3.7) дает

$$S(z) = -\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}. \tag{3.8}$$

Формулы (3.6) и (3.8) являются непосредственным обобщением известных формул Бэтмана (см. [8], с.170) в теории интегральных уравнений. Формулой (3.6) мы неоднократно пользовались в наших исследованиях резольвенты эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) (см., например, [9, 10]).

3. До сих пор мы нигде не пользовались тем, что $T = T^*$, а также тем, что $H = H^*$. Было использовано лишь то, что для рассматриваемого z существует непрерывная резольвента R_z и $\Delta(z) \neq 0$.

Если $T = T^*$, то, выбирая в качестве $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_r\}$ ортонормальную систему собственных векторов оператора T с ненулевыми собственными числами:

$$T\varphi_j = \tau_j \varphi_j \qquad (j = 1, 2, ..., r), \tag{3.9}$$

будем иметь

$$\begin{aligned} Tf &= \sum_{j=1}^{r} \tau_j (f, \varphi_j) \varphi_j, \\ |T|_\ell &= \sum_{j=1}^{r} |\tau_j|. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Пусть

$$\begin{gathered} \tau_1 \geq \tau_2 \geq \cdots \geq \tau_p > 0 > \tau_{p+1} \geq \cdots \geq \tau_{p+q} \\ (p + q = r). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Предполагая всюду, как прежде, что H — самосопряженный оператор, докажем следующее предложение:

Теорема 3. *Если $T(= T^*)$ — конечномерный оператор с p положительными и q отрицательными собственными числами, то*

$$S(z) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda \qquad (\Im z \neq 0), \tag{3.12}$$

где почти для всех λ $(-\infty < \lambda < \infty)$

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \downarrow 0} \arg \Delta(\lambda + i\eta); \tag{3.13}$$

при этом

$$-q \leq \xi(\lambda) \leq p \tag{3.14}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq |T|_\ell. \tag{3.15}$$

Доказательство. Так как $S(\bar{z}) = \overline{S(z)}$, то мы можем ограничиться рассмотрением $S(z)$ только в верхней полуплоскости. Поскольку $S(z)$ имеет смысл в любой невещественной точке, то $\Delta(z) \neq 0$ при $\Im z > 0$. Легко видеть, что

$$\Delta(z) = 1 + O\left(\frac{1}{\Im z}\right) \quad \text{при} \quad \Im z \to \infty.$$

Мы можем поэтому определить $\ln \Delta(z)$ в верхней полуплоскости так, чтобы он давал голоморфную функцию в этой полуплоскости и

$$\ln \Delta(z) = O\left(\frac{1}{\Im z}\right) \quad \text{при} \quad \Im z \to \infty. \tag{3.16}$$

Представление (3.12) будет получено, если мы докажем, что $\ln \Delta(z)$ допускает представление:

$$\ln \Delta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda, \tag{3.17}$$

где $\xi(\lambda)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям (3.14) и (3.15).

Как известно (см. [11], гл.1), для интеграла вида (3.17) почти всюду на вещественной оси выполняется соотношение

$$\xi(\lambda) = \lim_{\eta \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \Im \ln \Delta(\lambda + i\eta).$$

Это равенство означает то же, что и равенство (3.13).

Для вывода представления (3.17) рассмотрим сначала случай одномерного оператора T:

$$T = \tau(\,\cdot, \varphi)\varphi,$$

где

$$\tau \gtrless 0, \qquad (\varphi, \varphi) = 1.$$

В этом случае

$$\Delta(z) = 1 + \tau(R_z\varphi, \varphi) \qquad (\Im z \neq 0).$$

Пусть E_λ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — спектральная функция оператора H. Тогда

$$(R_z\varphi, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|E_\lambda\varphi|^2}{\lambda - z}$$

и

$$\tau^{-1}\Im\Delta(z) = \Im z \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|E_\lambda\varphi|^2}{|\lambda - z|^2} > 0 \quad \text{при} \quad \Im z > 0.$$

Следовательно,

$$0 \le \varepsilon\Im \ln \Delta(z) \le \pi \quad \text{при} \quad \Im z > 0,$$

где $\varepsilon = \operatorname{sign} \tau$.

С другой стороны, как известно (см. [12], гл. II, §2), если некоторая функция $F(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости $\Im z > 0$ и удовлетворяет там условиям:

$$\begin{aligned} &0 \le \Im F(z) \le \pi \quad (\Im z > 0), \\ &\ln F(z) = O\Big(\frac{1}{\Im z}\Big) \end{aligned} \qquad \text{при} \quad \Im z \to \infty,$$

то она допускает представление

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda,$$

где

$$0 \le h(\lambda) \le 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Применяя это предложение к функции $\ln \Delta(z)$, приходим к выводу, что в рассматриваемом случае $\ln \Delta(z)$ допускает представление (3.17), где

$$0 \le \operatorname{sign} \tau \cdot \xi(\lambda) \le 1. \tag{3.18}$$

Воспользуемся теперь доказанным в §2 неравенством (2.9):

$$|S(z)| \le \frac{1}{|\Im z|^2}|T|_\ell.$$

Сопоставляя его с равенством

$$\lim_{y\to\infty} y^2 S(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)d\lambda,$$

очевидным образом вытекающим из (3.12), заключаем, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)d\lambda\right| = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|d\lambda \le |T|_\ell = |\tau|.$$

Таким образом, для одномерного T теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь общий случай оператора T вида (3.9). Положим $H_0 = H$,

$$H_k = H + \sum_{j=1}^{k} \tau_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j \qquad (k = 1, 2, \dots, r)$$

и

$$R_z^{(k)} = (H_k - zI)^{-1} \qquad (\Im z > 0).$$

Тогда

$$H_k = H_{k-1} + \tau_k(\cdot, \varphi_k)\varphi_k$$

$$(k = 1, 2, \dots, r),$$

и применение теоремы для доказанного случая ($r = 1$) дает

$$S_k(z) = S\{R_z^{(k)} - R_z^{(k-1)}\} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k(\lambda)}{(\lambda - z)^2}d\lambda$$

$$(k = 1, 2, \dots, r),$$

где

$$0 \le \operatorname{sign} \tau_k \xi_k(\lambda) \le \pi \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{3.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_k(\lambda)| d\lambda \leq |\tau_k| \quad (k = 1, 2, ..., r).$$

С другой стороны, очевидно,

$$S(z) = \sum_{k=1}^{r} S_k(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda,$$

где

$$\xi(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} \xi_k(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Так как условия (3.14), (3.15) являются следствиями условий (3.19), то теорема полностью доказана.

Замечание. Можно доказать, что теорема не может быть усилена. Это следует понимать так: если некоторая функция $\xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ удовлетворяет условиям (3.14) и (3.15), то найдется самосопряженный оператор H и оператор $T = T^*$ ранга r и сигнатуры $p - q$, которым будет отвечать данная функция $\xi(\lambda)$.

4. На основании соотношения (3.16) и известных предложений теории функций, представление (3.17) можно сразу написать, коль скоро известно, что

$$-q \leq \arg \Delta(z) \leq p \quad \text{при} \quad \Im z > 0. \tag{3.20}$$

Укажем вкратце, как непосредственно может быть установлено соотношение (3.20).

Обозначим через $\zeta_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, ..., r)$ собственные числа матрицы

$$\Gamma(z) = \|\delta_{jk} + \tau_k(R_z\varphi_k, \varphi_j)\|_1^r,$$

т.е. корни уравнения

$$|(1 - \zeta)\delta_{jk} + \tau_k(R_z\varphi_k, \varphi_j)|_1^r = 0.$$

Тогда

$$\Delta(\lambda) = \zeta_1(\lambda)\zeta_2(\lambda)...\zeta_r(\lambda)$$

и неравенство (3.14) будет установлено, если будет доказано следующее предложение:

α) *Среди чисел $\zeta_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, ..., r)$ всегда ровно p находится внутри верхней полуплоскости $\mathfrak{I}z > 0$ и ровно q — внутри нижней $\mathfrak{I}z < 0$.*

Если положить

$$\mathfrak{C} = \|\tau_k \delta_{jk}\|_1^r,$$

то эрмитовой матрице

$$\frac{\mathfrak{C}\Gamma - \Gamma^*\mathfrak{C}}{\mathfrak{I}z} = \|(R_z\varphi_k, R_z\varphi_j)\tau_k\tau_j\|_1^r$$

будет отвечать положительная форма

$$\sum_{j,k=1}^{r} (R_z\varphi_k, R_z\varphi_j)\tau_k\tau_j x_k \bar{x}_j = |R_z\varphi|^2,$$

где

$$\varphi = \sum_{k=1}^{r} \tau_k x_k \varphi_k.$$

Предложение α) является поэтому следствием следующего общего алгебраического предложения:

β) *Пусть $\mathfrak{C} = \|\tau_{jk}\|_1^r$ — некоторая эрмитова матрица, имеющая p положительных и q отрицательных собственных чисел $(p + q = r)$, а $\Gamma = \|\gamma_{jk}\|_1^r$ — некоторая матрица, такая, что эрмитовой матрице*

$$\frac{1}{i}\,(\mathfrak{C}\Gamma - \Gamma^*\mathfrak{C})$$

отвечает положительно определенная форма

$$\frac{1}{i}((\mathfrak{C}\Gamma - \Gamma^*\mathfrak{C})x, x). \tag{3.21}$$

Тогда p собственных чисел матрицы Γ лежат внутри верхней полуплоскости $\mathfrak{I}z > 0$ и q — внутри нижней $\mathfrak{I}z < 0$.

Это предложение, в свою очередь, является простым следствием алгебраического предложения, приведенного в начале нашей статьи [13].

Если выбрать какое-либо число $\varkappa > 0$ так, чтобы

$$\det(\Gamma + \varkappa iI) \neq 0$$

и положить

$$U = (\Gamma - \varkappa iI)(\Gamma + \varkappa iI)^{-1},$$

то легко найдем, что

$$(\Gamma + \varkappa iI)^*(\mathfrak{C} - U^*\mathfrak{C}U)(\Gamma + \varkappa iI) = \frac{\varkappa}{i}(\mathfrak{C}\Gamma - \Gamma^*\mathfrak{C}).$$

Таким образом, если форма (3.21) положительна, то положительна и разность форм

$$(\mathfrak{C}x, x) - (\mathfrak{C}Ux, Ux) \qquad (x \neq 0),$$

т.е. U является $\mathfrak{C}$-сжимающей матрицей. Но тогда, в силу упомянутого предложения из [13], ровно p собственных чисел матрицы U по модулю меньше единицы и ровно q — больше единицы. А так как собственные числа ρ_j $(j = 1, 2, ..., r)$ матрицы U связаны с собственными числами ζ_j $(j = 1, 2, ..., r)$ матрицы Γ соотношениями

$$\rho_j = \frac{\zeta_j - \varkappa i}{\zeta_j + \varkappa i} \qquad (j = 1, 2, ..., r),$$

то отсюда уже следует утверждение β) для матрицы Γ.

Впрочем, утверждение β) непосредственно следует также из предложения 4° нашей статьи [13].

Как уже отмечалось, из предложения α) легко получается неравенство (3.20), а из него и из (3.16) — представление (3.12), причем, на основании неравенства (3.20), можно будет утверждать, что выполняется первое из условий (3.14). Для установления второго из них, по-видимому, все равно пришлось бы повторить рассуждения из приведенного выше доказательства теоремы 3.

Функции $\zeta_k(\lambda)$ $(k = 1, 2, ..., r)$ рассматривал также И.М. Лифшиц, и они фигурируют в его формуле для $\xi(\lambda)$, но, по-видимому, свойство α) этих функций этому автору не было известно.

5. Из представления (3.12) вытекает:

$$S\{T\} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda. \tag{3.22}$$

В самом деле, в силу (3.17),

$$-\lim_{y\to\infty} iy \ln \Delta(iy) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda.$$

С другой стороны, из (3.10) без труда находим

$$\Delta(z) = 1 + \sum_{j=1}^{r} \tau_j (R_z\varphi_j, \varphi_j) + O\Big(\frac{1}{(\Im z)^2}\Big) \quad \text{при} \quad \Im z \to \infty,$$

а следовательно,

$$\ln \Delta(z) = \sum_{j=1}^{r} \tau_j (R_z\varphi_j, \varphi_j) + O\Big(\frac{1}{(\Im z)^2}\Big) \quad \text{при} \quad \Im z \to \infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} -\lim_{y\to\infty} iy \ln \Delta(iy) \quad &= \quad -\sum_{j=1}^{r} \tau_j \lim_{y\to\infty} iy(R_{iy}\varphi_j, \varphi_j) = \\ &= \quad \sum_{j=1}^{r} \tau_j (\varphi_j, \varphi_j) = S\{T\}. \end{aligned}$$

Равенство (3.22) выражает тот факт, что формула следов (2.11) справедлива для $\Phi(\lambda) = \lambda$.

6. Если $r = 1$ и, следовательно, $T = \tau(\,\cdot\,, \varphi)\varphi$, то

$$\Delta(z) = 1 + \tau(R_z\varphi, \varphi) = 1 + \tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_\lambda\varphi, \varphi)}{\lambda - z}.$$

Предположим, что в некотором интервале $a < \lambda < b$ существует непрерывная производная

$$c(\lambda) = \frac{d(E_\lambda\varphi, \varphi)}{d\lambda},$$

которая, кроме того, удовлетворяет условию $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, т.е.

$$|c(\lambda'') - c(\lambda')| \le H|\lambda'' - \lambda'|^\alpha \qquad (a < \lambda', \lambda'' < b).$$

Тогда (см. [11]) функция $\Delta(z)$ имеет предельное значение $\Delta(\mu)$ при стремлении z по любому некасательному пути к любой точке μ $(a < \mu < b)$, и именно:

$$\Delta(\mu) = 1 + \tau\left[\pi i c(\mu) + \int_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{c(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda\right],$$

где штрих означает, что интеграл берется в смысле главного значения Коши.

Припоминая соотношение (3.13), мы приходим, таким образом, к формуле И.М. Лифшица [1]:

$$\xi(\mu) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi\tau c(\mu)}{1 + \tau \int\limits_{-\infty}^{\infty}{}' \frac{c(\lambda)}{\lambda - \mu}\, d\lambda}, \tag{3.23}$$

причем значение артангенса следует выбирать так, чтобы выполнялось условие (3.18).

Эта формула применима только при частных предположениях относительно функции $(E_\lambda\varphi, \varphi)$, но и при этих частных предположениях, если функция $\xi(\lambda)$ может быть до конца вычислена, то, по-видимому, проще всего она будет вычисляться по общей формуле (3.13).

7. Покажем, как вычисляется функция $\xi(\lambda)$ в одном простом случае, когда формула (3.23) неприменима.

Предположим, что внутри некоторого интервала (a, b) (который в частном случае может совпасть со всей вещественной осью) оператор H имеет конечное число точек спектра

$$(a <)\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m (< b)$$

любой кратности (даже бесконечной). Тогда

$$\Delta(z) = 1 + \tau\left\{\left(\int_{-\infty}^{a+0} + \int_{b-0}^{\infty}\right)\frac{d(E_\lambda\varphi, \varphi)}{\lambda - z} + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j^2}{\lambda_j - z}\right\}, \tag{3.24}$$

где

$$c_j^2 = |(E_{\lambda_j+0} - E_{\lambda_j-0})\varphi|^2 \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Мы можем предположить, что все $c_j \neq 0$ $(j = 1, 2, ..., m)$†; в противном случае, мы бы выкинули те λ_j, которым отвечают $c_j = 0$, а оставшиеся λ_j заново перенумеровали. Из равенства

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\Delta}{d\mu} = \left(\int\limits_{-\infty}^{a+0} + \int\limits_{b-0}^{\infty}\right)\frac{d|E_\lambda\varphi|^2}{(\lambda-\mu)^2} + \sum_{j=1}^{m}\frac{c_j^2}{(\lambda_j-\mu)^2} > 0$$

явствует, что:

1) все нули функции $\Delta(\mu)$ внутри (a, b) — простые,

2) между λ_j и λ_{j+1} $(j = 1, 2, ..., m-1)$ лежит точно один нуль μ_j $(j = 1, 2, ..., m-1)$,

3) внутри каждого из интервалов (a, λ_1) и (λ_m, b) лежит не более одного нуля $\Delta(\mu)$.

Таким образом, $\Delta(\mu)$ имеет внутри (a, b) либо m, либо $m \pm 1$ нулей.

Предположим для конкретности, что $\Delta(\mu)$ имеет m нулей μ_j и

$$(a <)\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ... < \lambda_m < \mu_m \ (< b).$$

Из рассмотрения выражения (3.24) в интервале $a < z < \lambda_1$ нетрудно убедиться, что в этом случае (при $\tau > 0$)

$$\xi(\mu) = \frac{1}{\pi}\arg\Delta(\mu) = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sign}\prod_{j=1}^{n}\frac{\mu_j-\mu}{\lambda_j-\mu}\right) \quad (a < \mu < b).$$

---

†Легко видеть, что, если какое-либо $c_j = 0$, то собственное подпространство P_j оператора H, соответствующее собственному числу λ_j, либо будет совпадать с собственным подпространством $\tilde{P}_j$ оператора $\tilde{H}$, соответствующим тому же числу λ_j, либо будет на одно измерение меньше, в зависимости от того, будет ли $\Delta(\lambda_j) \neq 0$ или $\Delta(\lambda_j) = 0$.

Наоборот, если $c_j \neq 0$, то подпространство P_j на одно измерение больше собственного подпространства $\tilde{P}_j$ (и, следовательно, если P_j одномерно, то $\tilde{P}_j$ состоит из нуля).

Поэтому в формуле следов (!)

$$\int_a^b \Phi'(\mu)\xi(\mu)d\mu = \sum_{j=1}^m \{\Phi(\mu_j) - \Phi(\lambda_j)\},$$

что и следовало ожидать.

§ 4. Функция $S(z)$ и формула следов в общем случае

1. Пусть

$$\widetilde{H} = H + T,$$

где $T = T^* \in \mathfrak{L}$ — бесконечномерный оператор.

Докажем для этого общего случая теорему 2, сформулированную в §2.

В силу условия $T = T^* \in \mathfrak{L}$ (см. п.2 §1), оператор T допускает представление

$$T = \sum_{j=1}^\infty \tau_j(\circ, \varphi_j)\varphi_j,$$

где

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, ...),$$

$\tau_j \ \ (j = 1, 2, ...)$ все вещественны и

$$\sum_{j=1}^\infty |\tau_j| = |T|_\ell < \infty.$$

Положим

$$T_n = \sum_{j=1}^n \tau_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j, \quad H_n = H + T_n \quad (n = 1, 2, ...),$$

$$R_z^{(n)} = (H_n - zI)^{-1} \quad (n = 1, 2, ...), \qquad \widetilde{R}_z = (\widetilde{H} - zI)^{-1}$$

и, далее,

$$S(z) = S\{\widetilde{R}_z - R_z\},\ S_n(z) = S\{R_z^{(n)} - R_z\} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Согласно следствию теоремы 1 (§2),

$$|\widetilde{R}_z - R_z^{(n)}|_\ell \le \frac{|T - T_n|_\ell}{|\Im z|^2}$$

$$(n = 1, 2, ...; \quad \Im z > 0)$$

и, следовательно,

$$|S(z) - S_n(z)| = |S\{\widetilde{R}_z - R_z^{(n)}\}| \le$$

$$\le \frac{|T - T_n|_\ell}{|\Im z|^2} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Так как

$$|T - T_n|_\ell = \sum_{j=n+1}^{\infty} |\tau_j| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S^{(n)}(z) \qquad (\Im z \ne 0). \tag{4.1}$$

С другой стороны, согласно теореме 3, для любого $n = 1, 2, ...$

$$S^{(n)}(z) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n(\lambda)| d\lambda < \infty.$$

Кроме того, так как

$$H_n = H_{n-1} + \tau_n(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$$

$$(n = 1, 2, ...; \quad H_0 = H)$$

и

$$S\{R_z^{(n)} - R_z^{(n-1)}\} = S_n(z) - S_{n-1}(z) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\lambda) - \xi_{n-1}(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda$$

$$(n = 1, 2, ...; \quad \xi_0 = 0, \quad R_z^{(0)} = R_z),$$

то, согласно той же теореме 3,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n(\lambda) - \xi_{n-1}(\lambda)| d\lambda \le |\tau_n| \qquad (n = 1, 2, ...).$$

Следовательно, в смысле сходимости в $L_1(-\infty, \infty)$ (пространство всех измеримых суммируемых функций $f(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$) существует в $L_1(-\infty, \infty)$ предел

$$\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(\xi_{n+1} - \xi_n),$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)|d\lambda \le \sum_{n=1}^{\infty} |\tau_n| = |T|_{\ell}.$$

Припоминая соотношение (4.1), находим

$$-S(z) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda \qquad (\Im z \neq 0).$$

Теорема 2 доказана.

2. Согласно формуле (3.8),

$$S_n(z) = -\frac{\Delta_n'(z)}{\Delta_n(z)} \qquad (n = 1, 2, ...),$$

где $\Delta_n(z)$ $(n = 1, 2, ...)$ — определитель, соответствующий H_n. Из равномерной сходимости $S_n(z)$ на всяком множестве $\mathcal{E}$, находящемся на положительном расстоянии от вещественной оси, вытекает равномерная сходимость $\Delta_n(z)$ на $\mathcal{E}$ к некоторой функции $\Delta(z)$.

Очевидно,

$$S(z) = -\frac{\Delta'(z)}{\Delta(z)}$$

и

$$\ln \Delta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

Функция $\xi(\lambda)$ определяется через функцию

$$\Delta(z) = \lim_{n\to\infty} \Delta_n(z) \qquad (\Im z \neq 0)$$

по формуле (3.13).

3. Оператор

$$A_z = \widetilde{R}_z - R_z$$

является голоморфной вектор-функцией внутри каждой из двух полуплоскостей $\mathfrak{J}z \neq 0$ по h-норме кольца $\mathfrak{R}$. Покажем, что это же имеет место и по ℓ-норме. Так как для любых невещественных ζ, z

$$R_\zeta = R_z + (\zeta - z)R_\zeta R_z, \qquad \widetilde{R}_\zeta = \widetilde{R}_z + (\zeta - z)\widetilde{R}_\zeta \widetilde{R}_z,$$

то

$$\frac{A_\zeta - A_z}{\zeta - z} = \widetilde{R}_\zeta \widetilde{R}_z - R_\zeta R_z =$$

$$= \widetilde{R}_z^2 - R_z^2 + (\widetilde{R}_\zeta - \widetilde{R}_z)(\widetilde{R}_z - R_z) + (A_\zeta - A_z)R_z.$$

Стало быть,

$$\left|\frac{A_\zeta - A_z}{\zeta - z} - \widetilde{R}_z^2 + R_z^2\right|_\ell \leq |\widetilde{R}_z - \widetilde{R}_\zeta|_h |\widetilde{R}_z - R_z|_\ell + \tag{4.2}$$

$$+ |A_\zeta - A_z|_\ell |R_z|_h.$$

Так как здесь справа стоит величина, ограниченная по ℓ-норме при $z \to \zeta$, то $|A_\zeta - A_z|_\ell |\zeta - z|^{-1}$ — также ограниченная величина и, следовательно, $|A_\zeta - A_z|_\ell \to 0$ при $\zeta \to z$. Но тогда из (4.2) находим

$$\lim_{\zeta \to z} \left|\frac{A_\zeta - A_z}{\zeta - z} - \widetilde{R}_z^2 + R_z^2\right|_\ell = 0$$

и, таким образом, в смысле ℓ-нормы

$$\lim_{\zeta \to z} \frac{A_\zeta - A_z}{\zeta - z} = \widetilde{R}_z^2 - R_z^2.$$

Попутно нами доказано, что $\widetilde{R}_z^2 - R_z^2 \in \mathfrak{L}$ и

$$S\{\widetilde{R}_z^2 - R_z^2\} = \frac{dS(z)}{dz} = -2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^3} d\lambda.$$

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что вообще $\widetilde{R}_z^n - R_z^n \in \mathfrak{L}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$S\{\widetilde{R}_z^{(n)} - R_z^{(n)}\} = -n! \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)d\lambda}{(\lambda - z)^n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Эти соотношения являются частным случаем формулы следов

$$S\{\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda,$$

справедливой для широкого класса функций $\Phi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Справедливость ее для класса функций $\Phi(\lambda)$ вида (2.12) мы уже отмечали.

Непосредственным обобщением класса функций $\Phi(\lambda)$ вида (2.12) является класс $\left(\sum\right)$ функций $\Phi(\lambda)$ вида

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_{\Pi} \frac{1}{\lambda - z} d\mu(z) \quad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{4.3}$$

где Π — множество всех невещественных точек, а $\mu(\mathcal{E})$ — вполне аддитивная комплекснозначная функция на теле ограниченных борелевских множеств из Π, такая, что

$$\int\limits_{\Pi} \frac{1}{|\Im z|^k} |d\mu(z)| < \infty \quad (k = 1, 2). \tag{4.4}$$

В силу этого условия, функция $\Phi(\lambda) \in \left(\sum\right)$ абсолютно непрерывна и имеет почти всюду ограниченную производную

$$\Phi'(\lambda) = -\int\limits_{\Pi} \frac{1}{(\lambda - z)^2} d\mu(z) \quad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Если под $\Phi'(\lambda)$ понимать стоящий здесь справа абсолютно сходящийся интеграл, то будет иметь смысл интеграл Лебега

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda,$$

ибо, по теореме Фубини, в силу (4.4) при $k = 2$, будут абсолютно сходиться интегралы, фигурирующие в равенстве

$$\int\limits_{\Pi}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(\lambda)d\lambda}{(\lambda - z)^2}\Big)d\mu(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{\Pi}\frac{d\mu(z)}{(\lambda - z)^2}\Big)\xi(\lambda)d\lambda =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda \qquad (\Im z \neq 0).$$

Кроме того, ввиду ограниченности и непрерывности функции $\Phi(\lambda)$ будут иметь смысл операторы

$$\Phi(H) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)dE_\lambda \quad \text{и} \quad \Phi(\widetilde{H}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)d\widetilde{E}_\lambda$$

и, более того, будем иметь

$$\Phi(H) = \int\limits_{\Pi}R_z d\mu(z), \qquad \Phi(\widetilde{H}) = \int\limits_{\Pi}\widetilde{R}_z d\mu(z),$$

где интегралы понимаются в смысле интеграла от абстрактной вектор-функции со значениями из нормированного кольца $\mathfrak{R}$.

4. Имеет место

Теорема 4. *Для любой функции $\Phi \in (\Sigma)$ оператор $\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)$ принадлежит классу $\mathfrak{L}$ и имеет место формула следов:*

$$S\{\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda. \tag{4.5}$$

Доказательство. Положим, как в п.3,

$$A_z = \widetilde{R}_z - R_z \qquad (\Im z \neq 0).$$

Согласно (2.5),

$$|A_z|_\ell \leq \frac{|T|_\ell}{|\Im z|^2} \qquad (\Im z \neq 0) \tag{4.6}$$

и, стало быть, в $\mathfrak{L}$ имеет смысл абстрактный интеграл

$$A = \int\limits_{\Pi} A_z d\mu(z) \in \mathfrak{L}, \tag{4.7}$$

причем

$$|A|_\ell \leq \int\limits_{\Pi} |A_z|_\ell |d\mu(z)| \leq |T|_\ell \int\limits_{\Pi} \frac{|d\mu(z)|}{|\mathfrak{J}z|^2}.$$

Так как $S\{A\}$ — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{L}$, то

$$S\{A\} = \int\limits_{\Pi} S\{A_z\} d\mu(z) = \int\limits_{\Pi} S(z) d\mu(z) =$$

$$= \int\limits_{\Pi} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2}\, d\lambda \right) d\mu(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda.$$

С другой стороны, если интеграл (4.7) сходится в $\mathfrak{L}$, то он будет сходиться к тому же оператору и в кольце $\mathfrak{R}$ ограниченных операторов (ибо h-норма $\leq$ ℓ-нормы). Имея в виду сходимость в $\mathfrak{R}$, можно написать:

$$A = \int\limits_{\Pi} (\widetilde{R}_z - R_z) d\mu(z) =$$

$$= \int\limits_{\Pi} \widetilde{R}_z d\mu(z) - \int\limits_{\Pi} R_z d\mu(z) = \Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H) \tag{4.8}$$

и, следовательно,

$$S\{A\} = S\{\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)\}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что, в силу (4.6), (4.7) и (4.8),

$$|\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)|_\ell \leq \int\limits_{\Pi} \frac{|d\mu(z)|}{|\mathfrak{J}z|^2} |T|_\ell. \tag{4.9}$$

5. В качестве примера укажем, что классу $\left(\sum\right)$ принадлежит при любом вещественном t функция

$$\frac{e^{it\lambda}-it\lambda-1}{\lambda^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{e^{itz}-1}{z^2(z-\lambda)}dz,$$

где D — какая-либо прямая $\Im z = h$, параллельная оси x и лежащая в той же полуплоскости $\Im z > 0$ или $\Im z < 0$, что и $-it$.

Заменяя один раз t на $2t$, другой раз на $-2t$ и беря затем полусумму полученных функций, найдем, что функция

$$\psi_t(\lambda)=\frac{\sin^2 t\lambda}{\lambda^2}\in\left(\sum\right).$$

Таким образом, всегда

$$[\psi_t(\widetilde{H})-\psi_t(H)]\in\mathfrak{L}\qquad(0\le t<\infty).$$

Применение оценки (4.9) обнаруживает, что

$$|\psi_t(\widetilde{H})-\psi_t(H)|_\ell\le C_h e^{ht}\qquad(0\le t<\infty;\quad h>0),$$

где C_h не зависит от t, а только от h.

Отсюда, между прочим, можно заключить, что формула следов будет справедлива и для функции $\Phi(\lambda)$ вида

$$\Phi(\lambda)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2\lambda t}{\lambda^2}\,d\tau(t),$$

если для достаточно малых положительных h

$$\int\limits_0^\infty e^{ht}|d\tau(t)|<\infty.$$

6. Возможно, что при любом вещественном t

$$[\exp(it\widetilde{H})-\exp(itH)]\in\mathfrak{L}$$

и для $\Phi(\lambda)=\exp(it\lambda)$ формула следов (4.5) справедлива.

Для случая ограниченного оператора H справедливость этого предположения устанавливается сравнительно просто.

Заметим, что, вообще, на основании оценки (2.7) сама теорема 4 для случая ограниченного оператора H может быть усилена (в смысле расширения класса (Σ)).

§ 5. Расширенное толкование формулы следов

1. В этом параграфе мы будем предполагать, что T — конечномерный оператор размерности r:

$$T = \sum_{j=1}^{r} \tau_j(\cdot, \varphi_j)\varphi_j \qquad (-\infty < \tau_j < \infty; \quad j = 1, 2, ..., r).$$

Условимся говорить, что последовательность самосопряженных операторов

$$H^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda^{(n)} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

спектрально сходится к самосопряженному оператору H

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda,$$

если для любых $f, g \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{n\to\infty} (E_\lambda^{(n)} f, g) = (E_\lambda f, g)$$

в любой точке λ непрерывности спектральной функции E_λ.

Последовательность $H^{(n)}$ $(n = 1, 2, ...)$, как известно, будет спектрально сходиться к H в том и только в том случае, когда для любого невещественного z и $f, g \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{n\to\infty} (R_z^{(n)} f, g) = (R_z f, g), \tag{5.1}$$

где

$$R_z^{(n)} = (H^{(n)} - zI)^{-1} \quad (n = 1, 2, ...), \qquad R_z = (H - zI)^{-1}.$$

Рассматривая возмущения операторов $H, H^{(n)}$ при помощи данного конечномерного оператора T:

$$\widetilde{H} = H + T, \qquad \widetilde{H}^{(n)} = H^{(n)} + T,$$

мы приходим к следующему предложению:

Теорема 5. *Если последовательность самосопряженных операторов* $H^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *спектрально сходится к оператору* H, *то последовательность*

$$S_n(z) = S\{R_z^{(n)} - R_z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda$$

сходится в любой невещественной точке z *к функции*

$$S(z) = S\{\widetilde{R}_z - R_z\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda.$$

Более того, равномерно на всей оси $-\infty < \lambda < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_n(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(\mu) d\mu. \tag{5.2}$$

Доказательство. В самом деле, согласно (3.8) и (3.10),

$$S_n(z) = \frac{d \ln \Delta_n(z)}{dz} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\Delta_n(z) = |\delta_{jk} + (R_z^{(n)} \varphi_k, \varphi_j)|_1^r \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Стало быть, в силу (5.1),

$$\Delta_n(z) \to \Delta(z) \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{5.3}$$

равномерно на любом множестве $\mathcal{E}$, находящемся на положительном расстоянии от вещественной оси.

Так как, кроме того,

$$\ln \Delta_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \qquad (n = 0, 1, 2, ...; \quad \Delta_0(\lambda) = \Delta(\lambda))$$

и, согласно теореме 3,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n(\lambda)| d\lambda \leq |T|_\ell \qquad (n = 0, 1, 2, ...; \quad \xi_0(\lambda) = \xi(\lambda)),$$

то, на основании теорем Хелли, из (5.3) легко заключаем, что имеет место соотношение (5.2) в любой точке $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Ввиду того что, согласно той же теореме 3, все функции $\xi_n(\lambda)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ равномерно ограничены:

$$|\xi_n(\lambda)| \leq r \qquad (n = 0, 1, 2, ...; \ -\infty < \lambda < \infty), \tag{5.4}$$

интегралы, стоящие в (5.2), равностепенно непрерывны, а поэтому сходимость в (5.2) имеет место равномерно в каждом конечном интервале.

Учитывая далее, что, согласно (3.22),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_n(\lambda) d\lambda = S\{T\} \qquad (n = 1, 2, ...), \tag{5.5}$$

легко убедиться в равномерной сходимости интегралов (5.2) на всей оси $(-\infty, \infty)$.

2. Доказанная теорема позволяет дать расширенное толкование формулы следов:

$$S\{\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda, \tag{5.6}$$

при котором она получает смысл для класса функций $\Phi(\lambda)$, значительно более широкого, нежели класс (Σ), о котором шла речь в предыдущем параграфе.

Обозначим через V_a совокупность всех функций $\Phi(\lambda)$ $(-\infty < < \lambda < \infty)$, абсолютно непрерывных и ограниченной вариации:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(\lambda)| d\lambda < \infty.$$

Если $\Phi \in V_a$, то интеграл, стоящий справа в (5.6), будет иметь смысл. Будут иметь смысл и операторы $\Phi(\widetilde{H})$ и $\Phi(H)$. Но нам не известно, будет ли выполняться условие

$$[\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)] \in \mathfrak{L} \tag{5.7}$$

и, кроме того, будет ли выполняться формула следов (5.6), если выполняется (5.7).

Однако имеет место следующее предложение, которое, по-видимому, является вполне достаточным обоснованием применимости формулы следов (5.6) к тем задачам статистической физики, которые имел в виду И.М. Лифшиц, устанавливая эту формулу.

Теорема 6. *Пусть* $H^{(n)}$ $(n = 1, 2, ...)$ — *последовательность самосопряженных операторов, спектрально сходящихся к* H, *для которых справедлива при данном конечномерном* $T = T^*$ *и* $\Phi \in V_a$ *формула следов:*

$$S\{\Phi(H^{(n)} + T) - \Phi(H^{(n)})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi_n(\lambda) d\lambda \quad (n = 1, 2, ...). \tag{5.8}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} S\{\Phi(H^{(n)} + T) - \Phi(H^{(n)})\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda) d\lambda. \tag{5.9}$$

Доказательство. В самом деле, функции $\xi_n(\lambda)$ $(n = = 1, 2, ...)$ отвечает в пространстве $L_1(-\infty, \infty)$ всех функций $f(\lambda)$, суммируемых на всей оси, функционал

$$\mathfrak{F}_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_n(\lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

Нормы этих функционалов равномерно ограничены, ибо, в силу (5.4),

$$|\mathfrak{F}_n(f)| \leq r \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda.$$

С другой стороны, согласно (5.2), эти функционалы сходятся на характеристической функции любого интервала, и так как линейная оболочка таких характеристических функций плотна в $L_1(-\infty, \infty)$, то они вообще слабо сходятся на $L_1(-\infty, \infty)$. Последнее означает, что для любой функции $f \in L_1(-\infty, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_n(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) f(\lambda) d\lambda.$$

Полагая здесь $f(\lambda) = \Phi'(\lambda)$, мы придем к соотношению (5.9).

Замечание. Согласно (5.5), в теореме 6 можно было бы ослабить требование $\Phi \in V_a$, заменив его требованием

$$\Phi(\lambda) = c\lambda + \Phi_0(\lambda), \tag{5.10}$$

где c — постоянная, а $\Phi_0 \in V_a$.

Таким образом, для функции Φ вида (5.10) предел

$$\lim_{n\to\infty} S\{\Phi(H^{(n)} + T) - \Phi(H^{(n)})\}$$

не зависит от выбора последовательности $\{H^{(n)}\}$, спектрально сходящейся к H.

Если условиться под

$$S\{\Phi(H + T) - \Phi(H)\}$$

понимать этот предел, то при таком расширенном толковании этого выражения формула следов будет верна для любой функции Φ вида (5.10).

Следует еще заметить, что спектрально сходящаяся к H последовательность $\{H^{(n)}\}$, удовлетворяющая условиям

$$[\Phi(H^{(n)} + T) - \Phi(H^{(n)})] \in \mathfrak{L} \quad (n = 1, 2, ...)$$

и условиям (5.8), всегда может быть построена.

В самом деле, можно, например, положить

$$H^{(n)} = \int_{-n}^{n} \frac{1}{n}[n\lambda]dE_\lambda \qquad (n = 1, 2, ...),$$

где E_λ — спектральная функция оператора H ($[\mu]$ обозначает целую часть вещественного числа μ).

Спектр так определенного оператора $H^{(n)}$ будет состоять из конечного числа точек, а если спектр некоторого самосопряженного оператора H_0 состоит из конечного числа точек, то легко видеть, что при любой функции Φ оператор $\Phi(H_0 + T) - \Phi(H_0)$ будет конечномерным, и для абсолютно непрерывной функции $\Phi(\lambda)$ будет справедлива формула следов (см. п.6 §3).

При применении теоремы 6 следует также иметь в виду, что операторы $\Phi(H)$ и $\Phi(H + T)$ вполне определяются значениями функции Φ на замкнутом множестве точек спектра операторов H и $H + T$ (см. [6]). Поэтому в интервалах, смежных с этим множеством, функцию Φ можно всегда считать линейной, а если среди этих интервалов есть бесконечные (их может быть не более двух), то в таком интервале функцию Φ удобно считать постоянной.

§ 6. Разность спектральных функций данного и возмущенного оператора

Как уже отмечалось во введении, подставив формально в формулу следов (!) вместо $\Phi(\lambda)$ функцию

$$\eta_\mu(\lambda) = \begin{cases} 0 & (\lambda > \mu), \\ 1 & (\lambda \le \mu), \end{cases}$$

где μ — произвольно выбранное вещественное число, И.М. Лифшиц [1] получил равенство

$$S\{\widetilde{E}_\mu - E_\mu\} = -\xi(\mu) \qquad (-\infty < \mu < \infty),$$

где E_μ и $\widetilde{E}_\mu$ — соответственно спектральные функции операторов H и $\widetilde{H} = H + T$.

Ниже мы приведем пример ограниченного оператора H и одномерного оператора T, для которых $\widetilde{E}_\mu - E_\mu$ не принадлежит $\mathfrak{L}$ и, следовательно, след $S\{\widetilde{E}_\mu - E_\mu\}$ в абсолютном смысле этого слова не существует.

1. Пусть $\mathfrak{H}$ реализовано в виде пространства $L_2(0,\infty)$ измеримых функций $f(x)$ $(0 \le x \le \infty)$, имеющих суммируемый квадрат. Таким образом, если $f, g \in L_2(0,\infty)$, то

$$(f,g) = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Введем в рассмотрение ядра

$$H(x,s) = \begin{cases} \operatorname{sh} xe^{-s} & (x \le s), \\ \operatorname{sh} se^{-x} & (x \ge s), \end{cases} \qquad (0 \le x, s \le \infty)$$

и

$$\widetilde{H}(x,s) = \begin{cases} \operatorname{ch} xe^{-s} & (x \le s), \\ \operatorname{ch} se^{-x} & (x \ge s). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\widetilde{H}(x,s) = H(x,s) + \varphi(x)\varphi(s), \tag{6.1}$$

где $\varphi(x) = e^{-x}$.

Ядрам $H(x,s)$ и $\widetilde{H}(x,s)$ отвечают ограниченные в $L_2(0,\infty)$ операторы

$$Hf(x) = \int\limits_0^\infty H(x,s)f(s)ds,$$

$$\widetilde{H}f(x) = \int\limits_0^\infty \widetilde{H}(x,s)f(s)ds,$$

причем, в силу (6.1),

$$\widetilde{H} = H + (\,\cdot\,,\varphi)\varphi.$$

Ограниченность операторов вытекает из того, что Hf и $\widetilde{H}f$ при любом $f \in L_2(0,\infty)$ являются решениями из $L_2(0,\infty)$ соответственно краевых задач:

$$-y'' + y = f, \qquad y(0) = 0$$

и

$$-y'' + y = f, \qquad y'(0) = 0.$$

Таким образом, если обозначить через A самосопряженный оператор, порождаемый операцией $-d^2/dx^2$ и граничным условием $y(0) = 0$, а через $\widetilde{A}$ — самосопряженный оператор, порождаемый той же операцией и граничным условием $y'(0) = 0$ (см.[5]), то можно утверждать, что

$$H = (I + A)^{-1} \quad \text{и} \quad \widetilde{H} = (I + \widetilde{A})^{-1}.$$

Так как спектр оператора A, равно как и $\widetilde{A}$, составляет полуось $(0, \infty)$, то спектр каждого из операторов H и $\widetilde{H}$ составляет интервал $(0,1)$ и операторы H и $\widetilde{H}$ ограничены.

Пусть F_λ и $\widetilde{F}_\lambda$ $(0 \leq \lambda \leq \infty)$ — спектральные функции операторов A и $\widetilde{A}$. Тогда спектральными функциями E_μ и $\widetilde{E}_\mu$ операторов H и $\widetilde{H}$ будут

$$E_\mu = I - F_\lambda, \ \widetilde{E}_\mu = I - \widetilde{F}_\lambda \qquad \left(0 \leq \mu \leq 1; \quad \lambda = \frac{1}{\mu} - 1\right)$$

и, следовательно,

$$\widetilde{E}_\mu - E_\mu = F_\lambda - \widetilde{F}_\lambda \qquad \left(0 \leq \mu \leq 1; \quad \lambda = \frac{1}{\mu} - 1\right).$$

С другой стороны, как известно (см. [14, 15]), оператор F_λ задается ядром

$$F_\lambda(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \sin tx \sin ts dt,$$

а $\widetilde{F}_\lambda$ — ядром

$$\widetilde{F}_\lambda(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \cos tx \cos ts dt,$$

и поэтому

$$(E_\mu - \widetilde{E}_\mu) f(x) = \int_0^\infty K_\mu(x, s) f(s) ds \qquad (0 < x < \infty),$$

где

$$K_\mu(x,s) = \widetilde{F}_\lambda(x,s) - F_\lambda(x,s) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda}} \cos t(x+s)dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x+s)}{x+s} \qquad (0 \le x, \quad s < \infty).$$

Если бы разность $E_\mu - \widetilde{E}_\mu$ принадлежала $\mathfrak{L}$, т.е. $E_\mu - \widetilde{E}_\mu$ был вполне непрерывным оператором с абсолютно сходящейся суммой собственных чисел, то сумма квадратов собственных чисел этого оператора также сходилась бы, а тогда, как известно, сходился бы и интеграл

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |K_\mu(x,s)|^2 dxds.$$

Но этот двойной интеграл с точностью до множителя $\dfrac{4}{\pi^2}$ равен

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2\sqrt{\lambda}(x+s)}{(x+s)^2}dxds = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u}du = \infty.$$

Таким образом, $E_\mu - \widetilde{E}_\mu \overline{\in} \mathfrak{L}$ и, если можно говорить о следе оператора $E_\mu - \widetilde{E}_\mu$, то только в некотором условном смысле.

Весьма интересно, что в обычном смысле теории интегральных уравнений ядро $K_\mu(x,s)$ имеет след, а именно:

$$\int\limits_0^\infty K_\mu(s,s)ds = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}s}{s}ds = \frac{1}{2} \quad (0 < \mu < 1). \tag{6.2}$$

Вычисление функции $\xi(\mu)$ для данного случая дает

$$\xi(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 < \mu < 1), \\ 0 & (\mu \overline{\in} (0,1)). \end{cases} \tag{6.3}$$

Таким образом, между (6.2) и (6.3) имеется полное согласие.

Формула следов для рассматриваемых операторов H и $\widetilde{H}$ принимает очень простой вид:

$$2S\{\Phi(\widetilde{H}) - \Phi(H)\} = \Phi(1) - \Phi(0).$$

2. Пусть $\Delta = (a, b)$ — некоторый конечный замкнутый интервал вещественной оси. Придерживаясь обычных обозначений, положим

$$E_\Delta = E_{b+0} - E_{a-0}, \qquad \widetilde{E}_\Delta = \widetilde{E}_{b+0} - \widetilde{E}_{a-0}.$$

Согласно только что показанному в п.1, может случиться, что

$$(\widetilde{E}_\Delta - E_\Delta)\overline{\in}\mathfrak{L}.$$

Ввиду этого представляет интерес

Теорема 7. *Если точки a, b являются соответственно правым и левым концом спектральных люков оператора H, то $(\widetilde{E}_\Delta - -E_\Delta) \in \mathfrak{L}$ и*

$$S\{E_\Delta - \widetilde{E}_\Delta\} = \xi(b + 0) - \xi(a - 0). \tag{6.4}$$

Доказательство. Так как в теореме предполагается, что T — конечномерный оператор, то достаточно рассмотреть случай, когда T — одномерный оператор: $T = \tau(\,\cdot\,, \varphi)\varphi$, и, следовательно (см. (3.10), (3.11)):

$$A_z = \widetilde{R}_z - R_z = \tau\frac{(\,\cdot\,, R_z^*\varphi)R_z\varphi}{1 + \tau(R_z\varphi, \varphi)}.$$

Условие теоремы означает, что при некотором $\varepsilon > 0$ внутри интервалов $(a-\varepsilon, a)$ и $(b, b+\varepsilon)$ отсутствуют точки спектра оператора H. Тогда (см. п.7 §3) при достаточном малом $\varepsilon > 0$ внутри интервалов $(a-\varepsilon, a)$ и $(b, b+\varepsilon)$ будут отсутствовать и точки спектра оператора $\widetilde{H}$. Выбрав такое $\varepsilon > 0$, окружим интервал (a, b) простым контуром C, направленным против часовой стрелки и пересекающим вещественную ось между $a-\varepsilon$ и a и между b и $b+\varepsilon$. Легко видеть, что на контуре C оператор A_z будет непрерывной вектор-функцией со значениями из $\mathfrak{L}$, а следовательно,

$$J = \frac{1}{2\pi i}\oint_C A_z dz \in \mathfrak{L}.$$

С другой стороны, из формулы

$$\widetilde{R}_z - R_z = \Big(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \int\limits_{a-0}^{b+0} + \int\limits_{b+\varepsilon}^{\infty}\Big)\frac{d(\widetilde{E}_\lambda - E_\lambda)}{\lambda - z} =$$

$$= \int\limits_{a-0}^{b+0} \frac{d(\widetilde{E}_\lambda - E_\lambda)}{\lambda - z} + \Gamma_z,$$

где Γ_z — голоморфная вектор-функция со значениями из $\mathfrak{R}$ в комплексной плоскости с разрезом вдоль $(-\infty, a-\varepsilon)$ и $(b+\varepsilon, \infty)$, без труда найдем, что в смысле сходимости в $\mathfrak{R}$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C (\widetilde{R}_z - R_z)\, gz = E_\Delta - \widetilde{E}_\Delta.$$

Так как сходимость в $\mathfrak{L}$ влечет сходимость в $\mathfrak{R}$, то $J = E_\Delta - -\widetilde{E}_\Delta$. Тогда

$$S\{E_\Delta - \widetilde{E}_\Delta\} = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C S\{A_z\}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C S(z)dz. \tag{6.5}$$

С другой стороны, воспользовавшись тем, что внутри интервалов $(a-\varepsilon, a)$ и $(b, b+\varepsilon)$ функция $\xi(\lambda)$ сохраняет постоянное значение (см. п.7 §3), мы можем представить $S(z)$ в следующем виде:

$$-S(z) = \Big(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \int\limits_{a-\varepsilon}^{a} + \int\limits_{a}^{b} + \int\limits_{b}^{b+\varepsilon} + \int\limits_{b+\varepsilon}^{\infty}\Big)\frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2}d\lambda =$$

$$= \Big(\int\limits_{-\infty}^{a-\varepsilon} + \int\limits_{a}^{b} + \int\limits_{b+\varepsilon}^{\infty}\Big)\frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} +$$

$$+\xi(a-0)\Big\{\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a+\varepsilon}\Big\} + \xi(b+0)\Big\{\frac{1}{z-b-\varepsilon} - \frac{1}{z-b}\Big\}.$$

Вносся полученное выражение для $S(z)$ в (6.5), мы получим (6.4).

Заканчивая, заметим, что развитые здесь методы позволяют изучить также следующий вопрос.

Пусть A — некоторый эрмитов оператор с индексом дефекта (r, r) $(r < \infty)$, а A_1 и A_2 — два различных самосопряженных расширения оператора A. Можно поставить вопрос об определении

$$S\{\Phi(A_2) - \Phi(A_1)\} \tag{6.6}$$

для достаточно общего класса функций Φ.

Этот вопрос очень близок к тому, который разбирался выше. В самом деле, для любого z $(\Im z \neq 0)$ резольвенты $(A_1 - zI)^{-1}$ и $(A_2 - zI)^{-1}$ будут отличаться друг от друга на оператор размерности не выше r. Для этого оператора (см. [9] и [7]) можно получить простую формулу, а отсюда уже можно получить и формулу для вычисления (6.6).

Именно эти соображения навели нас на рассмотрение примера, разобранного в п.1 §6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Лифшиц И.М.* Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой // Успехи мат. наук. — 1952. — VII, вып.1. — С.171–180.

[2] *Schatten R.* The cross-space of linear transformations // Ann. of Math. — 1946. — 47. — P.73–84.

[3] *Schatten R., von Neumann J.* The cross-space of linear transformations. II // Ann. of Math. — 1946. — 47. — P.608–630.

[4] *Наймарк М.А.* Кольца операторов в гильбертовом пространстве // Успехи мат. наук. — 1949. — IV, вып.4. — С.83–147.

[5] *Плеснер А.И.* Спектральная теория линейных операторов. I // Успехи мат. наук. — 1941. — IX. — С.3–125.

[6] *Плеснер А.И., Рохлин В.А.* Спектральная теория линейных операторов. II // Успехи мат. наук. — 1946. — I, вып.1. — С.71–191.

[7] *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.-Л., 1950.

[8] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л., 1949.

[9] *Крейн М.Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Матем. сб. — 1946. — **20** (**62**). — С.431–495.

[10] *Крейн М.Г.* О резольвентах эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) // ДАН СССР. — 1946. — **II**, № 8. — С.657–660.

[11] *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.-Л., 1950.

[12] *Ахиезер Н.И., Крейн М.Г.* О некоторых вопросах теории моментов. — М.-Л., 1938.

[13] *Крейн М.Г.* О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии // Успехи мат. наук. — 1951. — **VI**, вып.1. — С.171–177.

[14] *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям. — М.-Л., 1950.

[15] *Titchmarsh E.C.* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. — Oxford, 1930.

ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ ВОЗМУЩЕНИЯ И ФОРМУЛЕ СЛЕДОВ ДЛЯ УНИТАРНЫХ И САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Доклады АН СССР. — 1962. — Том 144, № 2)

1. В дальнейшем $\mathfrak{H}$ обозначает сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{R}$ — линейное кольцо всех ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{S}$ — двусторонний идеал в $\mathfrak{R}$, состоящий из всех ядерных операторов, т.е. из всех вполне непрерывных операторов A таких, что

$$\mathrm{Sp}\, |A| = \mathrm{Sp}\, (A^*A)^{1/2} < \infty.$$

Для $A = \mathfrak{S}$ имеют смысл два функционала $\mathrm{Sp}\, A$ и $\det(I + A)$.

Если G — некоторая область комплексной плоскости, A_z $(z \in G)$ — голоморфная оператор-функция со значениями из $\mathfrak{S}$, а $\Delta(z) = \det(I + A_z)$, то в любой точке $z \in G$, для которой $\Delta(z) \neq 0$, имеет место формула

$$\Delta'(z)/\Delta(z) = \mathrm{Sp}\, [(I + A_z)^{-1}(dA_z/dz)].$$

Пусть A — некоторый линейный оператор с областью определения $\mathfrak{D}(A)(\subset \mathfrak{H})$ и непустым множеством $\rho(A)$ всех регулярных точек, т.е. всех комплексных точек z, для которых существует резольвента

$$R_z(A) = (A - zI)^{-1} \in \mathfrak{R}.$$

Если B — некоторый другой линейный оператор с $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(A)$ и хотя бы в одной точке $z \in \rho(A)$ выполняется условие

$$(B - A)R_z(A) \in \mathfrak{S},$$

то это условие будет выполняться для всех $z \in \rho(A)$ и для этих z будет иметь смысл определитель возмущения:

$$\begin{aligned}\Delta_{B/A}(z) &= \det\,[(B-zI)(A-zI)^{-1}] = \\ &= \det\,[I+(B-A)R_z(A)],\end{aligned} \tag{1}$$

представляющий собой голоморфную функцию на каждой связной компоненте $\rho(A)$. Из формулы (1) следует, что в точках $z \in \rho(A)$, для которых $\Delta_{B/A}(z) \neq 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dz}\Delta_{B/A}(z)/\Delta_{B/A}(z) = \\ &= \mathrm{Sp}\,[R_z(A)-R_z(B)], \\ &z \in \rho(A)\cap\rho(B).\end{aligned} \tag{2}$$

Определители возмущения для тех или иных пар операторов A, B использовались в различных работах автора [1, 2]. По-видимому, не зная об этих работах, к рассмотрению определителей возмущения пришел и Ш.Т. Курода [3]. Он рассмотрел свойства $\Delta_{B/A}(z)$ для случая двух замкнутых линейных операторов A, B, для которых $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(B)$ плотно в $\mathfrak{H}$. В этом случае можно утверждать [4], что если некоторые связные компоненты

$$G(A) \subset \widetilde{\rho}(A) \quad \text{и} \quad G(B) \subset \widetilde{\rho}(B)$$

имеют общую точку, то $G(A) = G(B)$ и на $G(A)$ функция $\Delta_{B/A}(z)$ является мероморфной функцией, причем порядок $\Delta_{B/A}(z)$ в любой точке $z \in G(A)$ вычисляется естественным образом [1, 3]. Через $\widetilde{\rho}(A)$ $(\widetilde{\rho}(B))$ здесь обозначается множество комплексных точек, состоящее из $\rho(A)$ $(\rho(B))$ и всех изолированных точек спектра оператора $A(B)$, являющихся собственными числами $A(B)$ конечной алгебраической кратности.

В пленарном докладе на IV Всесоюзном математическом съезде (6.VII. 1961) автор указал, что в известных случаях может быть введено понятие *обобщенного определителя возмущения* $\widetilde{\Delta}_{B/A}(z)$. Например, это возможно, когда операторы A и B резольвентно сравнимы, т.е. когда множество $\rho = \rho(A)\cap\rho(B)$ не пусто и хотя бы для одной точки $z \in \rho$ (а тогда и для всех $z \in \rho$) $R_z(B) - R_z(A) \in \mathfrak{S}$. В этом случае, выбрав произвольно $z_0 \in \rho$, можно положить

$$\widetilde{\Delta}_{B/A}(z) = \Delta_{B_0/A_0}(z),$$

где

$$A_0 = R_{z_0}(A), \qquad B_0 = R_{z_0}(B).$$

Нетрудно показать, что с точностью до мультипликативной постоянной определитель $\Delta_{B/A}(z)$ не зависит от выбора точки $z_0 \in \rho$; для $z \in \rho$ снова будет выполняться (2) с заменой Δ на $\widetilde{\Delta}$.

2. Все утверждения теоремы 1 были установлены еще в [2], кроме последнего из них, которое содержит положительный ответ на вопрос, поставленный в [2, с.618].

Теорема 1. *Пусть H_1 — самосопряженный оператор, $V \in \mathfrak{S}$, $H_2 = H_1 + V$ и $\Delta(z) = \Delta_{H_2/H_1}(z)$. Тогда при соответствующем определении* $\ln \Delta(z)$

$$\ln \Delta(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda \qquad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{3}$$

где $\xi(\lambda)$ — вещественная измеримая функция, причем

$$\begin{aligned} &1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \operatorname{Sp} |V|; \\ &2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \operatorname{Sp} V. \end{aligned} \tag{4}$$

Если оператор V имеет всего p положительных (всего q отрицательных) собственных чисел, то почти всюду $\xi(\lambda) \leq p$ ($\xi(\lambda) \geq -q$). В частности, если оператор V неотрицателен, то почти всюду $\xi(\lambda) \geq 0$. Для любой комплекснозначной непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) та-

кой, что

$$\Phi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\omega(t), \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} |t||d\omega(t)| < \infty, \tag{5}$$

всегда $\Phi(H_2) - \Phi(H_1) \in \mathfrak{S}$ *справедлива формула следов*

$$\mathrm{Sp}\,[\Phi(H_2) - \Phi(H_1)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\Phi'(\lambda)d\lambda. \tag{6}$$

Формула (6) впервые была обнаружена И.М. Лифшицем [5] в связи с некоторыми вопросами квантовой теории кристаллов (см. также его обзор [6]). При выводе этой формулы упомянутый автор предполагал, что V — конечномерный оператор, и налагал на спектральную функцию $E(\lambda)$ оператора H_1 ряд требований гладкости (кроме того, при появлении у H_2 дискретного спектра И.М. Лифшиц записывал формулу (6) в другом виде).

3. Все утверждения теоремы 1 имеют свои аналоги в теории унитарных операторов. В частности, имеет место:

Теорема 2. *Пусть* U_1 *и* U_2 *— два унитарных оператора, причем* $U_2 - U_1 \in \mathfrak{S}$*. Тогда с точностью до постоянного слагаемого существует единственная вещественная функция* $\eta(t) \in L_1(-\pi, \pi)$ *такая, что*

$$\mathrm{Sp}\,[\Psi(U_2) - \Psi(U_1)] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \eta(t)d\Psi(e^{it}), \tag{7}$$

где $\Psi(\zeta)(|\zeta| = 1)$ *— любая функция, допускающая разложение*

$$\Psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\zeta^n, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n| < \infty. \tag{8}$$

Функция $\eta(t)$ может быть получена по формуле

$$\eta(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\rho\uparrow 1}\arg\Delta_{U_2/U_1}(\rho e^{it}) + \text{const}. \tag{9}$$

Сделаем некоторые пояснения к доказательству теоремы. Если $U_2 - U_1 \in \mathfrak{S}$, $U_2 = U_1(I+T)$, где $T \in \mathfrak{S}$. Так как $I + T$ — унитарный оператор, то $T = \sum \tau_j P_j$, где $P_j = (\cdot, \varphi_j)\varphi_j$ $(j \in J)$ — некоторая конечная или бесконечная последовательность попарно ортогональных проекторов, а $1 + \tau_j = \exp(i\theta_j)$ $(-\pi < \theta_j \le \pi)$ — точки единичной окружности, причем $\operatorname{Sp}|T| = \sum|\tau_j| < \infty$. Таким образом,

$$U_2 = U_1\Big(I + \sum_{j\in J}\tau_j P_j\Big) = U_1\prod_{j\in J}\Big(I + \tau_j P_j\Big),$$

$$\operatorname{Sp}|\ln_0(U_1^{-1}U_2)| = \sum_{j\in J}|\theta_j| < \infty,$$

где через $\ln_0(U_1^{-1}U_2)$ обозначено то операторное значение $\ln(U_1^{-1}U_2)$, спектр которого лежит на открытом слева интервале $(-\pi i, \pi i]$.

Рассмотрим сперва случай одномерного возмущения, т.е. когда

$$U_2 = U_1(I + \tau(\cdot,\varphi)\varphi),$$

где

$$\|\varphi\| = 1, \quad 1 + \tau = \exp(i\theta) \quad (-\pi < \theta < \pi).$$

В этом случае легко показывается, что

$$\Delta_{U_2/U_1}(z) = e^{i\frac{\theta}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}d(E(t)\varphi,\varphi)\right] \ (|z| \ne 1),$$

где $E(t)$ — спектральная функция оператора U_1. А отсюда уже нетрудно заключить, что

$$\ln\Delta_{U_2/U_1}(z) = i\frac{\theta}{2} + i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\eta_1(t)dt,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \eta_1(t)dt = \frac{\theta}{2},$$

где $|\eta_1(t)| \leq 1$ и $\operatorname{sign}\theta \cdot \eta_1(t) \geq 0 \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$. Вспоминая соотношение (2), убеждаемся для рассматриваемого случая в справедливости (7) при

$$\eta(t) = \eta_1(t) \quad \text{и} \quad \Psi(\zeta) = \Psi_z(\zeta) = (\zeta - z)^{-1} \quad (|z| \neq 1).$$

Коль скоро формула следов получена для семейства функций $\Psi_z(\zeta)$ ($|z| \neq 1$), то распространение ее на весь класс функций $\Psi(\zeta)$, указанный в теореме 2, не составляет особого труда.

В случае общего соотношения (9) функция $\eta(t)$ в (7) может быть получена (см. [2, §4]) в виде сходящейся в метрике $L_1(-\pi, \pi)$ суммы $\sum \eta_j(t)$, где $\eta_j(t) \quad (j = 1, 2, ...)$, получающаяся указанным выше способом, — функция из формулы следов для унитарных операторов $U^{(j)}$ и $U^{(j+1)}$, причем

$$U^{(j+1)} = U^{(j)}(I + \tau_j P_j) \quad (j = 1, 2, ...; \quad U^{(1)} = U_1).$$

Этот путь установления формулы следов (7) интересен еще тем, что он доставляет функцию $\eta(t)$, обладающую следующими двумя свойствами:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\eta(t)|dt \leq \mathrm{Sp}\ |\ln_0(U_1^{-1}U_2)|,$$

$$i\int_{-\pi}^{\pi} \eta(t)dt = \mathrm{Sp}\ \ln_0(U_1^{-1}U_2). \tag{10}$$

Последним равенством однозначно определяется функция $\eta(t)$ в формуле следов (7). Это равенство можно рассматривать как требование справедливости формулы (7) для функции $\Psi(\zeta) = \ln_0\zeta$, если при этом выражение $\mathrm{Sp}\ [\ln_0 U_2 - \ln_0 U_1]$ понимать как $\mathrm{Sp}\ [\ln_0(U_1^{-1}U_2)]$. Нормированную равенством (10) функцию $\eta(t)$ будем называть ***функцией спектрального сдвига упорядоченной пары унитарных операторов*** U_1, U_2. Из ее построения вытекает также, что коль скоро оператор $U_1^{-1}U_2$ имеет всего p собственных чисел в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$ (всего q собственных чисел в открытой полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$), то почти всюду $\eta(t) \leq p \quad (\eta(t) \geq -q)$.

4. Легко видеть, что два самосопряженных оператора H_1 и H_2 резольвентно сравнимы в том и только в том случае, когда разность из преобразований Кэли

$$U_k = (iI - H_k)(iI + H_k)^{-1} \quad (k = 1, 2)$$

ядерна: $U_2 - U_1 \in \mathfrak{S}$.

Из теоремы 2 и других утверждений относительно функции $\eta(t)$ выводится

Теорема 3. *Всякой упорядоченной паре резольвентно сравнимых самосопряженных операторов H_1, H_2 отвечает с точностью до постоянного слагаемого единственная вещественная измеримая функция $\xi(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ такая, что $(1 + \lambda^2)^{-1}\xi(\lambda) \in L_1(-\infty, \infty)$ и*

$$\operatorname{Sp}\,[(H_1 - zI)^{-1} - (H_2 - zI)^{-1}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)}{(\lambda - z)^2} d\lambda \quad (z \in \rho(H_1) \cap \rho(H_2)). \tag{11}$$

Если положить $\Delta(z) = \widetilde{\Delta}_{H_2/H_1}(z)$ и выбрать однозначную гармоническую ветвь $\arg \Delta(z)$ $(\operatorname{Im} z > 0)$, то требуемая функция $\xi(\lambda)$ может быть получена по формуле

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \arg \Delta(\lambda + i\varepsilon) + \text{const} \quad (\text{почти всюду}).$$

Функция $\xi(\lambda)$ будет полуограниченной снизу, коль скоро выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{D}(H_1) = \mathfrak{D}(H_2)$;

2) форма $((H_2 - H_1)f, f)$ $(f \in \mathfrak{D}(H_1))$ *имеет конечное число отрицательных квадратов;*

3) существуют константы α, β $(0 \le \alpha < 1, \quad \beta \ge 0)$ *такие, что*

$$\|(H_2 - H_1)f\| \le \alpha\|H_1 f\| + \beta\|f\|, \quad f \in \mathfrak{D}(H_1).$$

При доказательстве последнего утверждения приходится привлекать лемму, которая, как обнаружил автор, полезна в различных вопросах теории возмущений.

Если спектры унитарных операторов U_k $(k = 1, 2)$ лежат соответственно на дугах

$$\zeta = \exp(i\theta) \quad (\alpha_k \le \theta \le \beta_k; \quad k = 1, 2),$$

то спектр их произведения $U_1 U_2$ лежит на дуге

$$\zeta = \exp(i\theta) \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \le \theta \le \beta_1 + \beta_2).$$

Отметим, что совокупность условий 1) и 3) по другому поводу использовалась в работе [7].

Разумеется, функция $\xi(\lambda)$, определяемая из (11), позволяет написать формулу следов (6), которая будет справедлива для соответствующего класса функций $\Phi(\lambda)$.

5. Если H_1 — полуограниченный оператор (или, в более общем виде, — оператор, имеющий некоторый спектральный люк), то таковым будет и всякий самосопряженный оператор H_2, резольвентно сравнимый с H_1. В этих случаях первые два утверждения теоремы 3 могут быть легко получены из теоремы 1 путем перехода от операторов H_1 и H_2 к их резольвентам $R_a(H_1)$ и $R_a(H_2)$, где a — какая-либо вещественная точка, регулярная для H_1 и H_2. Более того, для случая, когда, например, оба оператора H_1 и H_2 полуограничены снизу, формула следов для них может быть получена (на основании теоремы 3) при выполнении условия $R_a^\nu(H_2) - R_a^\nu(H_1) \in \mathfrak{S}$, где $\nu > 0$ и a — какая-либо[†] вещественная точка, лежащая левее спектров H_1 и H_2 (по поводу этого условия см. [8, 9]).

[†]Выполнимость условия не зависит от выбора точки a и его жесткость падает с увеличением ν.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Успехи мат. наук. — 1959. — **14**, вып.3;
// ДАН СССР. — 1960. — **130**, № 2.

[2] *Крейн М.Г.* // Мат. сб. — 1953. — **33 (75)**, № 3.

[3] *Kuroda S.T.* // Sci. Papers, Coll. Gen. Educ. — 1961. — **11**, N 1.

[4] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, № 2 (74).

[5] *Лифшиц И.М.* // Успехи мат. наук. — 1952. — **7**, № 1.

[6] *Lifšic M.* // Nuovo Cimento. Ser. X. — 1956. — **3**, N 4 del Suppl.

[7] *Kuroda S.T.* // J. Math. Soc. Japan. — 1959. — **I, II**, N 3.

[8] *Бирман М.Ш.* // ДАН СССР. — 1961. — **137**, № 4.

[9] *Бирман М.Ш.* // ДАН СССР. — 1962. — **143**, № 3.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

М.Г.Крейн

Избранные труды: В 3 кн.

Книга II

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Компьютерный набор *В.В. Башинская, И.Г. Васинюк А.Г. Городничева,*

Компьютерная верстка *В.М. Чирков*

Подп. в печ. 21.11.96. Формат 60 × 90/16. Бум. офс. № 1.
Гарн. новая, газетная. Офс. печ. Физ. печ. л. 21,75. Усл. печ. л. 21,75.
Зак. № 228.

Оригинал-макет подготовлен на персональных компьютерах
и отпечатан в Институте математики НАН Украины.
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.