М.Г. Крейн

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В трех книгах

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
(МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ)

Книга III

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТРУНЫ И ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ

КИЕВ — 1997

УДК 517

Избранные труды крупнейшего украинского математика XX века Марка Григорьевича Крейна содержат оригинальные исследования автора по комплексному анализу, экстраполяции, интерполяции, эрмитово-положительным функциям, банаховым пространствам, теории операторов; спектральной теории струны, задаче рассеяния и вопросам устойчивости. Представленные здесь работы оказали и продолжают оказывать исключительно плодотворное влияние на развитие современной математики. Содержание опубликованных работ во многом отражает фундаментальный вклад М.Г. Крейна в математические науки.

Для математиков, физиков.

Вибрані твори великого українського математика XX століття Марка Григоровича Крейна вміщують оригінальні дослідження автора з комплексного аналізу, екстраполяції, інтерполяції, ермітово-позитивних функцій, банахових просторів, теорії операторів; спектральній теорії струни, задачі розсіяння і питань стійкості. Представлені тут роботи здійснювали і продовжують здійснювати виключно плідний вплив на розвиток сучасної математики. Зміст опублікованих робіт багато в чому відображає фундаментальний внесок М.Г. Крейна в математичні науки.

Для математиків, фізиків.

Ответственный за выпуск *В.Д. Кошманенко*

Утверждено к печати ученым советом
Института математики НАН Украины

Без. объявл.

ISBN 966-02-0364-0

ОБ ОДНОМЕРНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В ИНТЕРВАЛЕ $(0,\infty)$

(Доклады АН СССР. — 1950. — Том XXIV, № 1)

В нашей недавней заметке [1], посвященной построению теории бесконечных J-матриц, мы указали, что эта теория представляет, в частности, интерес еще тем, что она может служить алгебраической моделью для соответствующих построений в теории краевых задач с одним сингулярным концом.

В настоящей заметке приводятся результаты этих построений, проведенных на основе наших общих исследований по спектральной теории операторов [2–4].

Формулируемые нами теоремы в полном их объеме, по-видимому, не были известны даже для сингулярных краевых задач второго порядка (см. [5–7]).

Наша задача получила более ясную перспективу благодаря интересным исследованиям И.М. Глазмана [8, 9].

1. Пусть $p_0(x),\ p_1(x),\dots,p_n(x)$ — определенные в интервале $0 \le x < \infty$ вещественные измеримые функции, удовлетворяющие при любом $x > 0$ условиям

$$\int_0^x |p_0(x)|^{-1}dx < \infty, \quad \int_0^x |p_k(x)|dx < \infty \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)\,.$$

Через Ω обозначим класс всех комплекснозначных функций $y(x) \in L_2(0,\infty)$, абсолютно непрерывных вместе со всеми своими производными до $(n-1)$-го порядка (включительно) и обладающих еще тем свойством, что для них абсолютно непрерывны последовательно составляемые функции:

$$D^{[n]}y = p_0\frac{d^n y}{dx^n}, \qquad D^{[n+k]}y = p_k\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}D^{[n+k-1]}y$$

$$(k = 1, 2, ..., n-1),$$

а функция

$$D^{[2n]}y = p_0 y - \frac{d}{dx}D^{[2n-1]}y =$$

$$= p_0 y - \frac{d}{dx}\left(p_1\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}\left(p_2\frac{d^2y}{dx^2} - \cdots - \frac{d}{dx}\left(p_n\frac{d^n y}{dx^n}\right)\cdots\right)\right)$$

принадлежит $L_2 = L_2(0,\infty)$.

Функции $y(x) \in \Omega$ отнесем два n-мерных вектор-функционала

$$\eta_0(y) = (y, y^1, ..., y^{(n-1)})_{x=0}, \qquad \eta_1(y) = (D^{[2n-1]}y, ..., D^{[n]}y)_{x=0}.$$

Пусть теперь $A = \|a_{ik}\|_1^n$ — произвольная эрмитова матрица. Обозначим через Ω_A^0 совокупность всех финитных (т.е. обращающихся в тождественный нуль при достаточно больших x) функций из Ω, удовлетворяющих граничным условиям:

$$\sin\, A\eta_0(x) + \cos\, A\eta_1(y) = 0. \tag{1}$$

Если рассматривать оператор $D^{[2n]}$ как оператор, действующий только на Ω_A^0 в L_2, то он окажется эрмитовым оператором. Замыкание этого эрмитова оператора обозначим через D_A, а его область определения — через Ω_A. Эрмитов оператор D_A имеет конечный индекс дефекта (m, m), не зависящий от выбора матрицы A.

Число m совпадает с числом линейно независимых решений из L_2 (точнее, из Ω) дифференциальной системы, состоящей из уравнения

$$D^{[2n]}\varphi - \lambda\varphi = 0 \tag{2}$$

(λ — любое невещественное число) и граничных условий (1).

Если $m = 0$, то Ω_A совпадает с множеством Ω_A^* всех функций $f \in \Omega$, удовлетворяющих (1); если же $m > 0$, то Ω_A составляет правильную часть Ω_A^*, которую также нетрудно охарактеризовать (см. [9]); при этом всегда $D_A f = D^{[2n]} f, \quad f \in \Omega_A$.

Вопреки ошибочным утверждениям В. Виндау [10] и Д. Шина [11], И.М. Глазман [8] показал, что дефект m при том или ином выборе функций $p_0, p_1, ..., p_n$ может принимать любое из значений $0, 1, 2, ..., m$.

Пусть $R_\lambda(\mathrm{Im}\ \lambda \neq 0)$ — одна из резольвент оператора D_A, т.е. резольвента одного из самосопряженных расширений D_A оператора D_A: $R_\lambda = (\widetilde{D}_A - \lambda I)^{-1}$.

Резольвенте R_λ отвечает непрерывное ядро $R(x, s; \lambda)$ $(0 \leq \leq x < \infty, 0 \leq S < \infty, \ \mathrm{Im}\ \lambda \neq 0)$ такое, что для любого $f \in L_2$ (см. [9]):

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty R(x, s; \lambda) f(s) ds.$$

Обозначим через $\varphi_j(x, \lambda)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ решения дифференциального уравнения (2), выделяемые начальными условиями:

$$\eta_0(\varphi_j) = \cos Ae_j, \quad \eta_1(\varphi_j) = -\sin Ae_j \quad (j = 1, 2, ..., n),$$

где $e_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$ — орты n-мерного пространства:

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), \ e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1).$$

Обозначим через $\Phi(x; \lambda)$ вектор $(\varphi_1(x; \lambda), ..., \varphi_n(x; \lambda))$, который мы будем мыслить как матрицу, состоящую из одной колонны. Через $\Phi^*(x; \lambda)$ обозначим матрицу, транспонированную и комплексно сопряженную с $\Phi(x; \lambda)$, т.е. матрицу, состоящую из одной строчки $(\overline{\varphi_1(x; \lambda)}, ..., \overline{\varphi_n(x; \lambda)})$.

Пусть, кроме того, V_n обозначает класс всех эрмитовых матриц функции $T(\lambda) = \|\tau_{jk}(\lambda)\|_1^n$ $(T(0) = 0, T(\lambda - 0) = T(\lambda); \ -\infty < < \lambda < \infty)$, которым отвечает неубывающая форма

$$\xi^* T(\lambda) \xi = \sum_{j,k=1}^n \tau_{jk}(\lambda) \xi_k \overline{\xi}_j .$$

Метод направляющих функционалов [2, 3] позволяет весьма просто доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Всякой резольвенте R_λ оператора D_A отвечает единственная матрица-функция $T(\lambda) \in V_n$ (спектральная матрица) такая, что при любых невещественных z, ζ*

$$R(x, s; z) - R(x, s; \zeta) = (z - \zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi^*(s; \lambda) dT(\lambda) \Phi(x; \lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - \zeta)}, \tag{3}$$

причем стоящий справа несобственный интеграл сходится абсолютно равномерно в каждом конечном квадрате $0 \le x, s \le L$ $(0 < L < \infty)$.

Если же при некотором a:

$$T(\lambda) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad \lambda \le a, \tag{4}$$

то имеет место также разложение

$$R(x, s; z) = \int_a^{\infty} \frac{\Phi^*(s; \lambda) dT(\lambda) \Phi(x; \lambda)}{\lambda - z}. \tag{5}$$

Каждое из разложений (3) и (5) сходится асбсолютно равномерно во всяком конечном квадрате $0 \le x, s \le L$ $(0 < L < \infty)$, и это свойство этих разложений сохраняется при почленном их дифференцировании k раз по x и ℓ раз по s $(0 \le k,\ \ell \le n - 1)$.

2. Для финитных функций $f(x)$ из L_2 имеет смысл преобразование:

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} f(s) \Phi^*(s; \lambda) ds, \qquad F^*(\lambda) = \int_0^{\infty} \overline{f(s)} \Phi(s; \lambda) ds.$$

Вводя в рассмотрение гильбертово пространство $L_T^{(2)}$, порождаемое матрицей $T(\lambda)$ (см. о нем в [4], § 3), можно утверждать следующее.

Теорема 2. *Для того чтобы некоторая матрица-функция $T(\lambda) \in V_n$ была спектральной матрицей оператора D_A, необходимо и достаточно, чтобы по отношению к ней преобразование*

$f(x) \to F(\lambda)$ (финитных функций $f(x)$ из L_2 в вектор-функции $F(\lambda)$) было изометрическим, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)dT(\lambda)F^*(\lambda) = \int_{0}^{\infty} |f(s)|^2 ds, \tag{6}$$

и чтобы замыкание этого отображения давало унитарное отображение $f \to Uf$ всего L_2 на все $L_T^{(2)}$.

Если $m = 0$, то оператору D_A отвечает единственная спектральная матрица $T(\lambda)$ и она вполне определяется одним свойством (6).

Метод получения теоремы 4, как и ряда других теорем типа Парсеваля–Планшереля, указан автором в [2, 3]. В случае $m > 0$ наши методы позволяют указать правило определения всех матриц $T(\lambda) \in V_n$, обладающих свойством (6).

3. Сочетание теорем 1 и 2 приводит к следующим результатам.

Теорема 3. *Если $f \in \Omega_A$, а $F(\lambda) = Uf$, то для $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$*

$$D^{[k]}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)dT(\lambda)D_x^{[k]}\Phi(x;\lambda), \tag{7}$$

причем все эти разложения сходятся абсолютно равномерно в каждом конечном интервале $0 \le x \le L$.

Если функции $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ непрерывны, а $p_0(x) \ge 0$, то утверждение сохраняет силу также и для $k = n, n+1, \ldots, 2n-1$.

Здесь $D^{[k]}$ при $k < n$ означает обычный оператор кратного дифференцирования d^k/dx^k.

Обозначим через (P_A) совокупность всех линейных граничных условий, вытекающих из условий (1) и связывающих только величины $y(0), y^1(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$.

Теорема 4. *При выполнении условия (4) абсолютно равномерно сходящиеся в каждом конечном интервале разложения (7) с $k = 0, 1, \ldots, n-1$ имеют место для всякой функции $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$, обладающей следующими свойствами:*

1) *функция* $f(x)$ *абсолютно непрерывна вместе со своими производными* $f^1(x), ..., f^{(n-1)}(x)$;

2) *функция* $f(x)$ *удовлетворяет всем условиям* (P_A);

3) $\int\limits_0^\infty |p_{n-k}(x)| \cdot |f^{(k)}(x)|^2 dx < \infty \qquad (k = 0, 1, ..., n-1)$.

Из-за недостатка места здесь опущены результаты, аналогичные тем, которые мы недавно получили для краевых задач второго порядка [12].

Теорема 1 и 4 суть обобщения соответствующих теорем, установленных нами для несингулярной краевой задачи [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1949. — Т.69, №2.

[2] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1946. — Т.53, №1.

[3] *Крейн М.Г.* // Збірн. праць Ін-ту математики АН УРСР. — 1948. — №10.

[4] *Крейн М.Г.* // Укр. мат. журн. — 1949. — №2.

[5] *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям, 1950.

[6] *Titchmarsh E.C.* Eigenfunction Expantions Associated with Second-order Differential Equations. — Oxford, 1946.

[7] *Kodaira K.* // Amer. Journ. — 1949. — V.71, N 4.

[8] *Глазман И.М.* // Докл. АН СССР. — 1949. — Т.64, №2.

[9] *Глазман И.М.* К теории сингулярных квази-дифференциальных операторов. — Дисс. — Харьков, 1949.

[10] *Windau W.* // Math. Ann. — 1921. — V.83.

[11] *Шин Д.* // Матем. сб. — 1940. — Т.7(49), №3.

[12] *Крейн М.* // Докл. АН СССР. — 1950. — Т.73, №6.

[13] *Крейн М.* // Матем. сб. — 1947. — Т.21(63), №3.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ В ИНТЕРВАЛЕ $(0,\infty)$ И ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Доклады АН СССР. — 1950. — Том LXXIII, №6)

Хорошо известно, что между теорией бесконечных якобиевых матриц (степенной проблемой моментов) и краевой задачей Штурма–Лиувилля в интервале $(0,\infty)$ имеется очень много аналогий. Эти аналогии, на наш взгляд, далеко не исчерпаны.

В этой заметке будет рассмотрено нагруженное интегральное уравнение, которое при одном выборе функции распределения $\sigma(x)$ $(0 \le x < \infty)$ может соответствовать краевой задаче, определяемой оператором Штурма–Лиувилля с индексом дефекта (1,1), а при другом (когда $\sigma(x)$ есть чистая функция скачков со скачками в целых точках 0,1,2,...) — "краевой" задаче, определяемой бесконечной якобиевой матрицей с индексом дефекта (1,1).

Мы покажем, что теоретико-функциональные методы [1], развитые нами при изучении абстрактных эрмитовых операторов [2], оказываются полезными при изучении одномерных краевых задач классического типа и связанных с ними интегральных уравнений.

1. Пусть $\sigma(x) = \sigma(x-0)$ $(0 \le x < \infty,\ \sigma(\infty) \le \infty)$ — некоторая неубывающая функция, а $L_\sigma^{(2)}$ — пространство всех σ-измеримых функций $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$, для которых интеграл от $|f(x)|^2 d\sigma(x)$ по всему интервалу $(0,\infty)$ имеет конечное значение.

Мы исследуем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\infty K(x,s)\varphi(s)d\sigma(s) \quad (0 \le x < \infty), \tag{1}$$

в котором ядро $K(x,s)$ имеет специальную структуру

$$K(x,s)=\begin{cases}\psi(x)\chi(s) & (x\leq s),\\ \psi(s)\chi(x) & (x\geq s),\end{cases} \tag{2}$$

где $\psi(x)$ и $\chi(x)$ — две какие-либо вещественные функции из $L_\sigma^{(2)}$.

Положим

$$V(x,s)=\psi(s)\chi(x)-\psi(x)\chi(s)\quad (0\leq x,\ s<\infty)$$

и введем в рассмотрение функции $\psi(x;\lambda)$ и $\chi(x;\lambda)$, определяемые из уравнений Вольтерра

$$\psi(x;\lambda)=\psi(x)+\lambda\int_0^x V(x,s)\psi(s;\lambda)d\sigma(s),$$

$$\chi(x;\lambda)=\chi(x)+\lambda\int_0^x V(x,s)\chi(s;\lambda)d\sigma(s).$$

Легко показать, что при любом комплексном λ функции $\psi(x;\lambda)$ и $\chi(x;\lambda)$ принадлежат $L_\sigma^{(2)}$.

С помощью этих функций образуем целые функции от λ:

$$D_0(\lambda)=1-\lambda\int_0^\infty \psi(s;\lambda)\chi(s)d\sigma(s),$$

$$D_1(\lambda)=-\lambda\int_0^\infty \psi(s;\lambda)\psi(s)d\sigma(s),$$

$$E_0(\lambda)=\lambda\int_0^\infty \chi(s;\lambda)\chi(s)d\sigma(s),$$

$$E_1(\lambda)=1+\lambda\int_0^\infty \chi(s;\lambda)\psi(s)d\sigma(s).$$

Легко показать (см. [3]), что функция $D_0(\lambda)$ является детерминантом Фредгольма уравнения (1).

Теорема 1. *При любом вещественном* α *функция*

$$F_\alpha(\lambda) = \frac{\cos\alpha E_0(\lambda) + \sin\alpha E_1(\lambda)}{\cos\alpha D_0(\lambda) + \sin\alpha D_1(\lambda)}$$

отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ *на свою часть.*

Кроме того, имеет место следующее тождество:

$$E_1(\lambda)D_0(\lambda) - E_0(\lambda)D_1(\lambda) \equiv 1. \tag{3}$$

В силу теоремы Н.Г. Чеботарева (см. [4], главы IV, V) о мероморфных функциях, отображающих верхнюю полуплоскость на свою часть, можно утверждать, что все нули числителя и знаменателя функции $F_\alpha(\lambda)$ вещественны, просты и перемежаются.

Кроме того, функция $F_\alpha(\lambda)$ допускает абсолютно сходящееся разложение†

$$F_\alpha(\lambda) = C_\alpha + m_\alpha\lambda + \sum_j\left(\frac{\rho_j}{\lambda_{j\alpha} - \lambda} - \frac{\rho_j}{\lambda_{j\alpha}}\right), \tag{4}$$

где $-\infty < C_\alpha < \infty,\ \ m_\alpha \geq 0,\ \ \rho_j > 0$.

2. Обозначим через (N) класс целых функций $f(z)$, удовлетворяющих двум условиям:

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\|f(\lambda)\|}{1+\lambda^2}d\lambda < \infty.$$

Теорема 2. *Каждая из функций* $D_0(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $E_0(\lambda)$, $E_1(\lambda)$ *принадлежит классу* (N).

Приведем доказательство этой теоремы.

---

†Если $\alpha \equiv \pi/2\,(\mathrm{mod}\pi)$, то одно из $\lambda_{j\alpha}$ равно нулю и тогда, разумеется, в сумме (4) следует опустить соответствующий член $\rho_j/\lambda_{j\alpha}$. При весьма общих предположениях относительно функций ψ и χ можно показать, что $m_\alpha = 0$. Это, например, всегда имеет место, если уравнение (1) соответствует некоторой краевой задаче Штурма–Лиувилля (см. п.4).

В разложении (4) положим $\alpha = \pi/2$, а затем $\alpha = 0$ и из полученного таким образом первого равенства вычтем второе.

Учитывая (3), найдем, что функция $D_0^{-1}(\lambda) D_1^{-1}(\lambda)$ разлагается в сумму элементарных дробей с поправочными членами по Коши. На основании теоремы автора (см. [1], теорему 4) можно будет утверждать, что целая функция $D_0(\lambda) D_1(\lambda)$ принадлежит классу (N) , а отсюда уже нетрудно получить, что и каждая из функций $D_0(\lambda), D_1(\lambda)$ в отдельности принадлежит классу (N). Рассмотрение функции $F_\alpha^{-1}(\lambda)$ приводит к тому же выводу и для функций $E_0(\lambda)$ и $E_1(\lambda)$.

3. Можно также показать, что имеет место сходящееся разложение

$$\frac{1}{D_0(\lambda)} = c_0 + c_1\lambda + \lambda^2 \sum \frac{\varkappa_j}{\lambda_j^2(\lambda_j - \lambda)}, \tag{5}$$

где $\lambda_j = \lambda_{j0}$ суть нули детерминанта Фредгольма.

Теорема 3. *Если для интегрального уравнения (1) выполняется условие*

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} < \infty, \tag{6}$$

то детерминант $D_0(\lambda^2)$ принадлежит классу (N) и, следовательно (см. [1]), существует конечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\lambda_n} = \ell.$$

Для получения этой теоремы следует на основании (5) разложить $D_0^{-1}(z^2)$ в сумму элементарных дробей и затем воспользоваться теоремой 5 нашей статьи [1]. Кстати, заметим, что приведенное в [1] доказательство теоремы 5 ошибочно, но основная идея доказательства правильна, и оно легко исправимо†.

†Воспользуемся также случаем и заметим, что для того, чтобы доказательство теоремы 2 в [1] сохранило правильность во всех частях, необходимо его вести не в отношении $f(z)$, о которой идет речь в теореме 1, а в отношении функции $f(i+z)$. Доказав теорему 1 для функции $f(i+z)$, мы тем самым докажем ее и для функции $f(z)$.

4. Рассмотрим уравнение

$$\varphi'' + q(x)\varphi + \lambda\rho(x)\varphi = 0, \tag{7}$$

где $\rho(x) \geq 0$ и $q(x)$ $(0 \leq x < \infty)$ — вещественные функции, измеримые и интегрируемые в каждом конечном интервале $(0, a)$.

Обозначим через $\sigma(x)$ первообразную функцию для $\rho(x)$ $(0 \leq \leq x < \infty)$.

Если при некотором невещественном λ уравнение имеет два линейно независимых решения из $L_\sigma^{(2)}$, то, по теореме Г. Вейля [5–7], это же будет иметь место для любого комплексного λ. Этот случай для уравнения (7) называется "случаем вырождения".

Чтобы получить самосопряженную краевую задачу для уравнения (7) в случае вырождения, необходимо задаться некоторым граничным условием в точке 0:

$$\cos\alpha\varphi(0) + \sin\alpha\varphi'(0) = 0 \tag{8}$$

и некоторым "граничным условием" в точке ∞, которое можно записать так:

$$\lim_{x\to\infty} [\chi(x)y'(x) - \chi'(x)y(x)] = 0; \tag{9}$$

здесь $\chi(x)$ — какое-либо решение уравнения (7) при $\lambda = 0$, не удовлетворяющее условию (8).

Получающаяся при этом краевая проблема оказывается эквивалентной интегральному уравнению (1), в котором $d\sigma = \rho dx$, а ядро $K(x, s)$ определяется по формуле (2), где функция $\chi(x)$ та же, что и в граничном условии (9), а $\psi(x)$ есть решение уравнения (7) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее условию (8) и нормированное так, что $\chi(x)\psi'(x) - \chi'(x)\psi(x) \equiv 1$ (см. [5–7]).

Теорема 4. *Если для уравнения (7) имеет место случай вырождения*

$$\int_0^\infty \rho(x)dx = \infty, \tag{10}$$

то всякая самосопряженная краевая задача, отвечающая уравнению (7), имеет бесконечное число отрицательных характеристических чисел $(0 >)\lambda_{-1} > \lambda_{-2} > \lambda_{-3}, \ldots$, *причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_{-n}|}} = \infty. \tag{11}$$

В самом деле, если бы вместо (11) имело место (6), то, по теореме 3, можно было бы утверждать, что $n^2/\lambda_n \to \ell < \infty$ при $n \to +\infty$, а это, как нетрудно показать, притиворечит (10).

Если при достаточно большом $C > 0$, начиная с некоторого места, $q(x) < C\rho(x)$, то всякая краевая задача, отвечающая уравнению (7), может иметь только конечное число отрицательных характеристических чисел. Поэтому в этом случае при выполнении условия (10) уравнение (7) не вырождается. Этот признак невырождаемости уравнения (7) (при более частных предположениях относительно функции $\rho(x)$), был установлен Г. Вейлем [5–7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1947. — Т.2. — 309.

[2] *Крейн М.Г.* // Укр. мат. журн. — 1949. — №2.

[3] *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* // Тр. Одес. ун-та. Матем. — 1935. — №39.

[4] *Чеботарев Н.Г., Нейман Н.Н.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1949. — Т.27, №1.

[5] *Weil H.* // Math. Ann. — 1910. — V.68, N 220.

[6] *Titchmarsh E.C.* Eigenfunction Expansions Associated with Second Order Differential Equations. — Oxford, 1946.

[7] *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям, 1950.

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

(Доклады АН СССР. — 1951. — Том LXXVI, № 1)

1. Пусть $q(x)$ $(0 \le x \le \ell,\ \ell < \infty)$ — некоторая вещественная функция, суммируемая в интервале определения $(0, \ell)$, а $L_q = -d^2/dx^2 + q(x)$ — соответствующий ей дифференциальный оператор.

Через $S_q(\alpha, \beta)$ $(-\infty < \alpha, \beta < \infty)$ мы будем обозначать спектр краевой задачи

$$L_q y = \lambda y\,,$$

$$\cos\,\alpha y(0) + \sin\,\alpha y'(0) = 0, \qquad \cos\beta y(\ell) + \sin\beta y'(\ell) = 0, \tag{1}$$

расположенный в виде возрастающей последовательности.

Как известно, число ℓ вполне определяется заданием какого-либо спектра $S_q(\alpha, \beta) = \{\lambda_n\}_1^\infty$, так как

$$\ell^2 = \pi^2 \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{\lambda_n}\,. \tag{2}$$

Г. Борг [1] доказал, что если для двух функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ и некоторых чисел α_1, α_2 и $\beta(\mathrm{tg}\alpha_1 \ne \mathrm{tg}\alpha_2)$ $S_{q_1}(\alpha_i, \beta) = S_{q_2}(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$, то почти всюду $q_1(x) = q_2(x)$ $(0 \le x \le \ell)^\dagger$.

Пользуясь иными методами, В.А. Марченко [3] получил недавно более полный результат, а именно, он показал, что функция $q(x)$, равно как и числа $\mathrm{tg}\alpha_1$, $\mathrm{tg}\alpha_2$ и $\mathrm{tg}\beta$ $(\mathrm{tg}\alpha_1 \ne \mathrm{tg}\alpha_2)$, однозначно определяются соответствующими им спектрами $S_q(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$. Кроме того, несколько изменив постановку вопроса,

---

†Борг предполагал, что одно из чисел α или α' равно нулю, но от этого ограничения легко избавиться [2].

В.А. Марченко обобщил эту теорему единственности на сингулярный случай, когда ℓ не обязательно конечно, а функция $q(x)$ $(0 \leq x < \ell)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости, возможно, только в подинтервалах $(0, a)$, где $a < \ell$, но не в полном интервале $(0, \ell)$.

Назовем ℓ-последовательностью всякую последовательность $\{\lambda_n\}$, для которой выполняется условие (2) с данным $\ell > 0$.

Как известно, числа двух различных спекторов $S_q(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$ строго перемежаются.

В упомянутых важных исследованиях Г. Борга и В.А. Марченко осталась нерешенной следующая основная задача.

Задача A. *Заданы две перемежающиеся ℓ-последовательности чисел $S = \{\lambda_n\}$ и $S' = \{\lambda'_n\}$:*

$$\lambda_1 < \lambda'_1 < \lambda_2 < \lambda'_2 < \cdots \tag{3}$$

Требуется узнать, существуют ли функция $q(x)$ $(0 \leq x \leq \ell)$ и числа α, α' и β такие, что $S_q(\alpha, \beta) = S$, $S_q(\alpha', \beta) = S'$, и если существуют, то найти их.

Ниже приводится цепь аналитических операций, дающих решение этой задачи.

В основе найденного решения лежит следующая идея.

1. *Подобно тому, как всякой якобиевой матрице J соответствует некоторая степенная проблема моментов, по любому решению которой (функции распределения масс) вполне определяется сама матрица J, дифференциальному оператору второго порядка L с граничным условием на одном конце соответствует некоторая "обобщенная" проблема моментов, по любой функции распределения которой вполне определяется, вместе с граничным условием, сам оператор (если его задавать в той или иной "канонической" форме). Для операторов "достаточно регулярного типа" этой обобщенной проблемой моментов является разработанная автором проблема продолжения эрмитово-положительных функций [4–7].*

Здесь эта идея иллюстрируется на решении задачи **A**.

Теорему единственности Борга–Марченко мы получим попутно.

2. Обозначим через P_a $(0 < a \leq \infty)$ совокупность непрерывных вещественных четных функций $F(t)$ $(|t| < a)$, которым соответствует положительно определенное ядро $F(s-t)$ $(0 \leq \leq s, t < a)$.

Центральной массой M функции $F(t) \in P_a$ назовем наибольшее из чисел ρ, для которых $F(t) - \rho \in P_a$. Существует много способов вычисления M. В наиболее трудном случае, когда $a < \infty$, M может быть, например, получено по формуле

$$M^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j \Big(\int_0^a \chi_j(s) ds \Big)^2,$$

где $\chi_j(s)$ $(j = 1, 2, ...)$ — полная ортонормированная система фундаментальных функций интегрального уравнения

$$\chi(s) = \mu \int_0^a F(s-t) \chi(t)\, dt\,,$$

а $\{\mu_j\}_1^\infty$ — соответствующая ей последовательность характеристических чисел [4].

Если $F(t) \in P_a$, то, рассматривая F в укороченном интервале $(-x, x)$, будем, очевидно, иметь $F(t) \in P_x$ $(0 < x \leq a)$. Функции F, как элементу P_x $(0 < x \leq a)$, будет соответствовать некоторая центральная масса $M(x)$ $(0 < x \leq a)$. Так, определенную функцию $M(x)$ $(0 < x \leq a)$ будем называть *центральной функцией* для $F(t) \in P_a$. Эта функция, оказывается, всегда полунепрерывна снизу и не возрастает с возрастанием x; кроме того, $M(x) \leq F(0)$ $(0 < x \leq a)$. Мы будем полагать $M(0)$ равным пределу $M(x)$ при $x \to +0$.

3. Очевидно, что при решении задачи **A** можно предполагать без ограничения общности все числа в (3) положительными.

Всяким двум бесконечно возрастающим перемежающимся последовательностям $S = \{\lambda_j\}_1^\infty$ и $S' = \{\lambda'_j\}_1^\infty$ $(0 < \lambda_1 < \lambda'_1)$ соответствует абсолютно сходящееся разложение:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda/\lambda'_j}{1 - \lambda/\lambda_j} = \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\lambda_j - \lambda}\,,$$

где $\gamma \geq 0$, а $m_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots)$.

Существование разложения (4) для стоящего слева произведения может быть доказано элементарными средствами, но оно также получается как непосредственное следствие общего предложения:

Для того, чтобы некоторая функция $\Phi(z)$, определенная для всех $z \notin (0, \infty)$, была регулярной аналитической функцией, принимающей только неотрицательные значения для отрицательных z и отображающей верхнюю полуплоскость в свою часть, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(z)$ допускала при любом $z \notin (0, \infty)$ представление:

$$\Phi(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \quad \left(\int_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{1 + \lambda} < \infty\right),$$

где $\gamma \geq 0$, а $\sigma(\lambda) \quad (0 \leq \lambda < \infty)$ — некоторая неубывающая функция.

По разложению (4) образуем функцию

$$F(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\lambda_j} \cos\sqrt{\lambda_j}\, t \qquad (-\infty < t < \infty),$$

принадлежащую, очевидно, классу P_∞. Ее центральную функцию обозначим через $M(x; S, S')$ $(0 \leq x < \infty)$.

Решение задачи **A** вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $S = S_q(\alpha, \beta) = \{\lambda_j\}_1^\infty$ и $S' = S_q(\alpha', \beta) = \{\lambda'_j\}_1^\infty \quad (0 < \lambda_1 < \lambda'_1 < \cdots)$ — два спектра некоторого оператора L_q, а $M(x) = M(x; S, S')$. Тогда*

$$M(2x) - M(2\ell) = \mathrm{const}\, \left(\frac{\psi(\ell)}{\varphi(\ell)} - \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right), \quad 0 \leq x \leq \ell\,, \qquad (5)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суть решения уравнения $L_q = 0$, выделяемые условиями:

$$\varphi(0) = \psi'(0) = \sin\alpha, \quad \varphi'(0) = -\psi(0) = -\cos\alpha.$$

Функция $M(x) \equiv M(2\ell)$ *при* $x \geq 2\ell$.

Так как из (5) вытекает, что

$$\varphi(x) = \text{const}\ \left(-\frac{dM(2x)}{dx}\right)^{-1/2} \quad (0 \leq x \leq \ell), \tag{6}$$

то мы приходим к следующему правилу восстановления оператора L_q по его двум спектрам S и S'.

Образуем функцию $M(x) = M(x; S, S')$ $(0 \leq x \leq \ell)$; по формуле (6) находим функцию $\varphi(x)$, а по ней $q(x) = \varphi''(x)/\varphi(x)$ $(0 \leq x \leq \ell)$.

Одновременно мы получили и правило определения граничных условий, соответствующих S и S'.

В самом деле, $\operatorname{tg}\alpha = -\varphi(0)/\varphi'(0)$. Составляя затем решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения $L_q y - \lambda y = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi(0,\lambda) = \sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda) = -\cos\alpha$, мы найдем

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{\varphi(\ell, \lambda_j)}{\varphi'(\ell, \lambda_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Образуя, далее, решение $\chi(x; \lambda)$, удовлетворяющее условиям $\chi(\ell; \lambda) = \sin\beta$, $\chi'(\ell, \lambda) = -\cos\beta$, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{\chi(0, \lambda'_j)}{\chi'(0, \lambda'_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Для разрешимости задачи **А**, таким образом, оказывается необходимым выполнение следующих условий:

1°. *Функция* $M(x) = M(x; S, S')$ $(0 \leq x \leq 2\ell)$ *абсолютно непрерывна вместе со своими двумя первыми производными.*

2°. *Производная* dM/dx $(0 \leq x \leq 2\ell)$ *отлична от нуля.*

При выполнении этих условий мы по формуле (6) можем построить функцию $\varphi(x)$, а по ней $q(x)$, но после этого может оказаться, что условия (7) несовместимы (совместимость условий (8) всегда является следствием совместимости условий (7)).

Пусть $\rho(x)$ $(0 \leq x \leq \ell)$ — некоторая неотрицательная суммируемая функция в интервале $(0, \ell)$.

Обозначим через $S^{(\rho)}(\alpha, \beta)$ спектр краевой задачи, получающейся из (1) путем замены уравнения $L_q y - \lambda y = 0$ уравнением $y'' + \lambda\rho(x)y = 0$. Развитие идеи I приводит к решению задачи об определении функции $\rho(x)$ по двум различным спектрам $S^{(\rho)}(\alpha_i, \beta)$ $(i = 1, 2)$ (т.е. задачи об определении плотности струны по двум ее спектрам частот).

Получающаяся здесь теорема единственности была доказана [1] только в предположении положительности функции $\rho(x)$ и ее абсолютной непрерывности, вместе с ее первой производной.

Кроме того, нам удалось обобщить эти результаты (соответствующим образом изменив постановку вопроса) на случай струны, длина и полная масса которой не обязательно конечны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Borg G.* // Acta Math. — 1946. — V.78, N1–2.

[2] *Чудов Л.А.* // Мат. сб. — 1949. — Т.25(67), №3.

[3] *Марченко В.А.* // Докл. АН СССР. — 1950. — Т.72, №3.

[4] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1940. — Т.26, №1.

[5] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1944. — Т.44, №5.

[6] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1944. — Т.45, №3.

[7] *Крейн М.Г.* // Укр. мат. журн. — 1949. — №2.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ

(Доклады АН СССР. — 1952. — Том LXXXII, №5)

В продолжение наших предыдущих исследований [1, 2] здесь будет проведен ряд новых (в некотором смысле окончательных) результатов по обратной задаче для струны.

1. Пусть S — струна, натянутая единичной силой вдоль оси X от $x = 0$ до $x = 1$, и пусть ее правый конец закреплен неподвижно. Что касается левого конца струны S, то мы будем рассматривать два случая:

1) конец $x = 0$ может свободно скользить вдоль оси Y;

2) конец $x = 0$ закреплен неподвижно.

В первом случае струну S мы будем обозначать через S_1, во втором случае — через S_2.

Обозначим через $\sigma(x)$ $(0 < x \leq 1;\ \sigma(0) = 0)$ массу открытого справа отрезка $(0, x]$ струны S. Таким образом, $\sigma(x) = \sigma(x - 0)$ $(0 < x \leq 1)$. Величина $M = \sigma(1) > 0$ будет, очевидно, массой всей струны S (мы предполагаем, что неподвижный конец не несет сосредоточенной массы).

Струна S_2 называется симметричной, если на ней массы расположены симметрично относительно ее середины, т.е.

$$\sigma(x) - \sigma(+0) = \sigma(1) - \sigma(1 - x) \quad (0 < x < 1).$$

Пусть $p_n = \sqrt{\lambda_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательные частоты свободных гармонических колебаний струны S_2.

Как уже отмечалось ([2], теорема 1),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\lambda_n}}=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1\sqrt{\sigma'(x)}\,dx.$$

Теорема 1. *Для того чтобы возрастающая последовательность положительных чисел $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$ была спектром частот некоторой струны S_2, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел отношения $n/\sqrt{\lambda_n}$ и чтобы*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2|D'(\lambda_n)|}<\infty.$$

При выполнении этих условий найдется единственная симметричная струна S_2 с данным спектром $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$.

Эта симметричная струна из всех струн S_2 с данным спектром $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$ имеет наименьшую массу.

Заметим, что из соотношений (1), (2) и (3), которые приводятся ниже, могут быть легко получены правила вычисления этой наименьшей массы через числа λ_n $(n=0,1,2,\ldots)$.

При доказательстве единственности симметричной струны с данным спектром нам пришлось воспользоваться сильными средствами, в частности, теорией [3] целых эрмитовых операторов с индексом дефекта (1.1).

2. Пусть $\sqrt{\mu_0}<\sqrt{\mu_1}<\sqrt{\mu_2}<\cdots$ — спектр частот некоторой струны S_1 с распределением масс $\sigma(x)$, а $\sqrt{\lambda_0}<\sqrt{\lambda_1}<\sqrt{\lambda_2}<$ $<\cdots$ — спектр частот струны S_2, получающейся из S_1 путем неподвижного закрепления ее левого конца. Тогда $\mu_0<\lambda_0<\mu_1<$ $<\lambda_1<\cdots$ и

$$D(\lambda)/D_1(\lambda)=\prod_0^\infty\Bigl(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\Bigr)\Big/\prod_0^\infty\Bigl(1-\frac{\lambda}{\mu_n}\Bigr)=\gamma+\sum\frac{\rho_n}{\mu_n-\lambda}. \tag{1}$$

Величина γ положительна в том и только в том случае, когда некоторая окрестность $(0,d]$ левого конца струны S_1 свободна от масс ($\sigma(x)=0$ при $0\le x\le d$), при этом γ есть максимальная длина такой окрестности: $\gamma=\max d$.

Величина

$$m = 1\Big/\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n \tag{2}$$

дает массу, сосредоточенную в точке $x = \gamma$ струны S_1, т.е. $m = \sigma(\gamma + 0) - \sigma(\gamma)$.

Заметим также, что полная масса M струны S_1 может быть вычислена по формуле†

$$M = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 D(\mu_n) D_1'(\mu_n)}. \tag{3}$$

Функция $R(\lambda) = D(\lambda)/D_1(\lambda)$ имеет простой механический смысл. Если к концу $x = 0$ струны S_1 приложить сосредоточенную пульсирующую силу $F = A \sin \sqrt{\lambda}\, t$, то вынужденные колебания конца $x = 0$ будут задаваться уравнением $y = R(\lambda) A \sin \sqrt{\lambda}\, t$. Поэтому функция $R(\lambda)$ называется коэффициентом динамической податливости [4].

Утверждение об единственности симметричной струны с данным спектром эквивалентно предложению:

Теорема 2. *Распределение масс на струне S_1 вполне определяется заданием ее коэффициента динамической податливости $R(\lambda)$.*

Теорема 3. *Для того чтобы возрастающая последовательность положительных чисел $\{\sqrt{\mu_n}\}_0^\infty$ была спектром частот некоторой струны S_1, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел*

$$T = \pi \lim_{n\to\infty} (n/\sqrt{\mu_n}) \tag{4}$$

и чтобы

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{3/2} |D_1'(\mu_n)|} < \infty \qquad \left(D_1(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right)\right).$$

†Формулу (3) мы получили еще в [2], однако при формулировке смысла M допустили неточность.

При выполнении этих условий среди струн S_1, имеющих данный спектр $\{\sqrt{\mu_n}\}_0^\infty$, найдется одна и только одна струна с наименьшей массой. Коэффициент динамической податливости $R(\lambda)$ струны минимальной массы имеет выражение:

$$R(\lambda) = h^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{1/2} |D_1'(\mu_n)| \, (\mu_n - \lambda)},$$

при этом сама минимальная масса равна h^2.

3. С коэффициентом динамической податливости $R(\lambda)$ струны S_1, имеющим разложение (1), тесно связана переходная функция

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{\mu_n} \left(1 - \cos\sqrt{\mu_n}\, t\right), \tag{5}$$

которая задает смещение левого конца струны S_1, вызванное действием за время t постоянной единичной силы, внезапно приложенной к левому концу первоначально покоившейся струны.

Условимся говорить, что струна S имеет тяжелый правый конец, если для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ в интервале $(1 - \varepsilon, 1)$ найдется множество положительной меры, на котором существует положительная производная $\sigma'(x)$.

Заметим, что величина T в (4) есть время прбега волны по струне S_1 от левого конца к правому.

Теорема 4. *Распределение масс на струне S_1 с тяжелым правым концом вполне определяется значениями ее переходной функции $\Phi(t)$ в интервале $(0, 2T)$, где T — время пробега волны по S_1.*

Заметим, что для любой струны S_1 с “легким” правым концом теорема не верна. Однако распределение масс на такой струне S_1 будет вполне определяться значениями функции $\Phi(t)$ в любом интервале $(0, a)$, где $a > 2T$.

Обозначим через P_a $(0 < a \le \infty)$ совокупность непрерывных четных функций $F(t)$ $(|t| < a)$, которым соответствует положительно определенное ядро $F(s - t)$ $(0 \le s,\ t < a)$. Через $\widetilde{P}_a$ $(0 < a < \infty)$ обозначим совокупность тех функций из P_a, которые неоднозначно продолжаются в функции из P_∞.

Теорема 5. *Пусть $\Phi(t)$ $(0 \le t \le 2T)$ — некоторая непрерывная функция. Для того чтобы она была переходной функцией некоторой струны S_1 с тяжелым правым концом и временем пробега T, необходимо и достаточно, чтобы при любом $C > 1$ функция $F(t) = C - \Phi(|t|)$ $(-2T < t < 2T)$ принадлежала классу $\widetilde{P}_{2T}$.*

Класс функций $\Phi(t)$, удовлетворяющих последнему условию, уже служил предметом наших исследований [5]. Этому классу функций, например, принадлежит всякая непрерывная неубывающая выпуклая кверху функция $\Phi(t)$ $(0 \le t \le 2T;$ $\Phi(0) = 0)$, значения которой < 1.

Теорема 6. *Если функция $\Phi(t)$ $(0 \le t \le 2T;$ $\Phi(0) = 0)$ обладает абсолютно непрерывной производной и $\Phi'(0) > 0$, то она будет переходной функцией некоторой струны S_1 в том и только том случае, когда:*

1) $1 - \Phi(t) \in P_{2T}$ *и*

2) интегральное уравнение

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^{2T} \{\Phi'(s)\Phi'(t) - \Phi''(|s-t|)\}\varphi(t)dt \tag{6}$$

при $\lambda = \frac{1}{2}\Phi'(0)$ либо вовсе не имеет нетривиальных решений, либо всякое его нетривиальное решение неортогонально к функции $\Phi'(t)$.

При выполнении указанных условий функция распределения масс $\sigma(x)$ струны S_1 с данной переходной функцией $\Phi(t)$ будет иметь абсолютно непрерывную производную, не равную тождественно нулю на каком-то подинтервале интервала $(0,1)$.

Заметим, что условие $1 - \Phi(t) \in P_{2T}$ эквивалентно тому, что положительные характеристические числа уравнения (5) все не меньше $\frac{1}{2}\Phi'(0)$.

Это условие заведомо будет выполнено, если функция $\Phi(t)$

$(0 \le t \le 2T)$ сразу будет задана в виде (5), где

$$\rho_n,\ \mu_n > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \sum_0^\infty (\rho_n/\mu_n) \le 1.$$

На важную роль переходной функции в обратных краевых задачах мы указали еще в [1, 2]. После этого ею весьма успешно воспользовались для изучения обратной краевой задачи И.М. Гельфанд и Б.М. Левитан [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.76, №1.

[2] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.76, №3.

[3] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1944. — Т.44, №5.

[4] *Дименберг Ф.М.* // Динамика и прочность коленчатых валов. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.

[5] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1944. — Т.45, №3-4.

[6] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — Т.15, №4.

О НЕОПРЕДЕЛЕННОМ СЛУЧАЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ИНТЕРВАЛЕ $(0,\infty)$

(Известия АН СССР. Сер. мат. — 1952. — Том 16)

В статье устанавливаются характеристики спектра краевой задачи Штурма–Лиувилля в интервале $(0,\infty)$ в неопределенном случае.

Введение

В этой статье будут изучаться спектры краевых задач, порождаемых уравнением

$$y'' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \qquad (0 \le x < \infty). \tag{!}$$

Относительно коэффициентов $q(x)$ и $\rho(x)$ $(0 \le x < \infty)$ уравнения (!) будет предполагаться следующее:

а) обе функции $q(x)$ и $\rho(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале;

б) при любых $(0 \le)\ a < b\ (< \infty)$[†]

$$\int\limits_a^b \rho(x)dx > 0\,.$$

[†]Вместо условия б) можно было бы потребовать только неотрицательность функции $\rho(x)$ $(0 \le x < \infty)$ и ее положительность на множестве положительной меры; при этом все доказываемые нами теоремы сохранят полную силу, но потребуются некоторые дополнительные замечания при их доказательстве.

Обозначим через $L_\rho^{(2)}$ гильбертово пространство всех измеримых функций $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$, имеющих интегрируемый квадрат по весу $\rho(x)$:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 \rho(x) dx < \infty.$$

Известно, что для уравнения (!) имеет место следующая альтернатива, обнаруженная Г. Вейлем (см. [1–3]):

Либо для каждого невещественного λ уравнение (!) имеет с точностью до скалярного множителя только одно решение, принадлежащее $L_\rho^{(2)}$, либо для всякого λ все решения уравнения (!) принадлежат $L_\rho^{(2)}$.

Во втором случае (называемом *неопределенным*) уравнению (!) соответствует двупараметрическое семейство краевых задач, получаемых следующим образом.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — два ненулевые (возможно, линейно зависимые) решения уравнения (!) при $\lambda = 0$.

Тогда в неопределенном случае имеет смысл краевая задача, задаваемая следующей системой†:

$$\begin{gathered} y'' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0\,, \\ W(y,\varphi)|_{x=0} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} W(y,\psi) = 0. \end{gathered} \tag{!!}$$

Спектр краевой задачи (!!) (т.е. совокупность значений λ, для которых система (!!) имеет нетривиальное решение в классе $L_\rho^{(2)}$) образует счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности, причем каждому числу λ спектра отвечает единственная с точностью до скалярного множителя фундаментальная функция (решение из $L_\rho^{(2)}$ системы (!!)). Эти фундаментальные функции дают полную ортогональную систему в $L_\rho^{(2)}$.

Еще из первой работы Г. Вейля [1] известно, что в неопределенном случае спектр $\{\lambda_j\}_1^\infty$ краевой задачи (!!) не может быть

†Через $W(y,z)$ обозначается вронскиан $yz' - zy'$.

сколь угодно густым, так как в этом случае всегда

$$\sum_{\lambda_j \neq 0} \frac{1}{\lambda_j^2} < \infty. \tag{0.1}$$

Это, между прочим, обнаруживается следующим образом.

Если решение ψ линейно независимо от φ, то его можно пронормировать так, чтобы

$$W(\varphi, \psi) = \varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = 1 \qquad (0 \leq x < \infty),$$

и тогда краевая задача (!!) эквивалентна нагруженному интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^\infty G(x, s) y(s) \rho(s) ds, \tag{0.2}$$

где

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(x)\psi(s) & (x \leq s), \\ \varphi(s)\psi(x) & (x \geq s). \end{cases} \tag{0.3}$$

Так как $\varphi, \psi \in L_\rho^{(2)}$, то легко видеть, что

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty G^2(x, s)\, \rho(x)\, \rho(s)\, dx\, ds < \infty,$$

откуда и вытекает (0.1).

При двух различных выборах функции ψ спектры получающихся различных краевых задач (!!) строго перемежаются, а поэтому условие (0.1) выполняется и тогда, когда $\psi = c\varphi$ (в этом случае $\lambda = 0$ есть характеристическое число системы (!!)).

В нашей заметке [4] мы получили значительно более точный результат, показав, что спектр $\{\lambda_j\}$ представляет собой множество нулей некоторой целой функции не выше экспоненциального типа, обладающей рядом специальных свойств.

Однако и этот результат может быть улучшен.

Здесь будет доказано следующее предложение.

Теорема I. *В неопределенном случае спектр* $\{\lambda_j\}$ *краевой задачи (!!) всегда совпадает с множеством всех нулей некоторой целой функции* $D(\lambda)$ $(D(0) = 1)^{\dagger}$, *обладающей свойствами:*

$$1)\ \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\log|D(\lambda)|}{|\lambda|} = 0, \tag{0.4}$$

$$2)\ \frac{1}{D(\lambda)} = 1 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j D'(\lambda_j)(\lambda - \lambda_j)} \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 |D'(\lambda_j)|} < \infty\right). \tag{0.5}$$

По теореме Линделёфа (см. [5], с.94–99) условие 1) означает следующее:

1а) *существует предел*

$$\gamma = \lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_j|<r} \frac{1}{\lambda_j};$$

1б) *количество* $n(r)$ $(0 < r < \infty)$ *чисел* λ_j, *заключенных в интервале* $(-r, r)$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{r} = 0$$

†Мы предполагаем, что $W(\varphi, \psi) \neq 0$ и, следовательно, нуль не входит в спектр $\{\lambda_j\}$. В случае $W(\varphi, \psi) = 0$ нормировку $D(0) = 1$ следует отбросить и вместо разложения (0.4) будет иметь место (при соответствующей нормировке $D(\lambda)$) разложение

$$\frac{1}{D(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j D'(\lambda_j)(\lambda - \lambda_j)}.$$

В заметке [4] был указан более слабый результат, чем (0.5), а именно, что имеет место абсолютно сходящееся разложение

$$\frac{1}{D(\lambda)} = 1 + c_1\lambda + \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2 D'(\lambda_j)} \, \frac{1}{\lambda - \lambda_j}.$$

и

1в) $D(\lambda) = \lim\limits_{r\to\infty} \prod\limits_{|\lambda_j|<r} \left(1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_j}\right).$

2. Интересно, что при определенных условиях относительно функции ρ спектр $\{\lambda_j\}$, независимо от выбора функции q (лишь бы имел место неопределенный случай), не может быть и очень *редким.*

Для формулировки относящихся сюда результатов обозначим через $n_+(r)$ $(0 < r < \infty)$ количество чисел λ_j, заключенных в интервале $(0, r)$. Имеет место следующее предложение:

Теорема II. *Если в неопределенном случае*

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} < \infty,$$

то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx < \infty. \tag{0.6}$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает первая часть теоремы III.

Теорема III[†]**.** *Если в неопределенном случае*

$$\int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx = \infty, \tag{0.7}$$

то

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} = \infty \tag{0.8}$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} = \infty. \tag{0.9}$$

[†]Теорема III указана в нашей заметке [4], однако там допущена досадная описка, а именно, в интеграле (0.7) опущен знак извлечения корня из ρ.

Вторая часть теоремы III, т.е. соотношение (0.9), непосредственно следует из (0.7), так как нетрудно обнаружить (см. §5), что всегда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx \le \lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}}.$$

3. Если в интегральном уравнении (0.2) произвести замену переменных

$$t = \frac{1}{I}\int_0^x \{\varphi^2(\xi) + \psi^2(\xi)\}\rho(\xi)d\xi,$$

где

$$I = \int_0^\infty \{\varphi^2(\xi) + \psi^2(\xi)\}\rho(\xi)d\xi,$$

и положить

$$\Psi(t) = \frac{\sqrt{I}\,\psi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}, \quad \Phi(t) = \frac{\sqrt{I}\,\varphi(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}},$$

$$Y(t) = \frac{y(x)}{\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}}$$

и, наконец,

$$K(s,t) = \begin{cases} \Phi(s)\Psi(t) & (0 \le s \le t \le 1), \\ \Phi(t)\Psi(s) & (0 \le t \le s \le 1), \end{cases} \tag{0.10}$$

то уравнение (0.2) перейдет в следующее:

$$Y(s) = \lambda\int_0^1 K(s,t)Y(t)dt. \tag{0.11}$$

Целая функция $D(\lambda)$ будет не чем иным, как детерминантом Фредгольма уравнения (0.10).

Интегральное уравнение (0.10) можно было бы рассматривать независимо от какой-либо краевой задачи Штурма–Лиувилля, определяя его ядро $K(s,t)$ по формуле (0.10), где $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ $(0 \le t \le 1)$ — какие-либо измеримые функции, удовлетворяющие условию

$$\Phi^2(s) + \Psi^2(s) = \text{const} \qquad (0 \le s \le 1). \tag{0.12}$$

Интегральное уравнение (0.11) представляет интерес тем, что для него также справедлива теорема I и, более того, она допускает полное обращение. Как мы покажем в другом месте, *для того чтобы целая функция $D(\lambda)$ $(D(0) = 1)$ была детерминантом Фредгольма некоторого интегрального уравнения (0.11) с ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условиям (0.10) и (0.12), необходимо и достаточно, чтобы эта целая функция удовлетворяла условиям 1) и 2) теоремы I.*

Уравнение (0.11) представляет интерес еще по другой причине.

Читатель, знакомый с классической степенной проблемой моментов, легко обнаружит, что наш вывод свойства 1) функции $D(\lambda)$ протекает (если не считать некоторых осложнений, связанных с континуальностью проблемы и потребовавших новых средств теории функций) аналогично доказательству М. Рисса (см. [6] и [7]) его теоремы о том, что в неопределенном случае проблемы моментов точки сосредоточения масс всякого канонического решения проблемы моментов суть нули целой функции, удовлетворяющей условию (0.4).

В заметке [4] мы указали путь, который позволяет с единой, более общей точки зрения трактовать как неопределенный случай уравнения (!), так и неопределенный случай проблемы моментов.

Вместо того чтобы отправляться от краевой задачи (!!), мы предложили исходить из нагруженного интегрального уравнения

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G(x,s) y(s) d\sigma(s), \tag{0.13}$$

где $\sigma(x)$ $(0 \le x \le \infty)$ — произвольная неубывающая функция, а $G(x,s)$ — ядро вида (0.3), причем теперь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные вещественные σ-измеримые функции такие, что

$$\int_0^\infty \varphi^2(x)d\sigma(x) < \infty, \quad \int_0^\infty \psi^2(x)d\sigma(x) < \infty.$$

Неопределенному случаю проблемы моментов, можно считать, будет соответствовать тот случай интегрального уравнения (0.13), когда $\sigma(x)$ — чистая функция скачков с точками скачков, имеющих единственную точку сгущения на бесконечности.

Но легко показать, что и самый общий случай уравнения (0.13) соответствующими подстановками приводится к уравнению (0.11) с ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условиям (0.10) и (0.12).

Таким образом, теория уравнений (0.11), по сути, содержит в себе теорию неопределенного случая проблемы моментов.

§ 1. Отправные соотношения

1. Нам придется напомнить ряд соотношений теории уравнения

$$y'' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0. \tag{!}$$

Пусть α — некоторое вещественное число, а $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(x;\lambda)$ — два линейно независимых решения уравнения (!), удовлетворяющих начальным условиям

$$\begin{aligned} &\varphi(0;\lambda) = \cos\alpha, && \varphi'(0;\lambda) = \sin\alpha, \\ &\psi(0;\lambda) = -\sin\alpha, && \psi'(0;\lambda) = \cos\alpha. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Как известно, имеет место тождество

$$\varphi(x;\lambda)\psi'(x;\lambda) - \varphi'(x;\lambda)\psi(x;\lambda) \equiv 1. \tag{1.2}$$

При помощи решений φ и ψ составим третье решение уравнения (!):

$$\chi(x;\lambda) = \psi(x;\lambda) - \omega_\beta(b;\lambda)\varphi(x;\lambda), \tag{1.3}$$

удовлетворяющее в произвольно выбранной точке $x = b$ (> 0) граничному условию

$$\sin\beta y(b) + \cos\beta y'(b) = 0, \tag{1.4}$$

где β — какое-либо вещественное число.

Очевидно,

$$\omega_\beta(b;\lambda) = \frac{\sin\beta\psi(b;\lambda) + \cos\beta\psi'(\beta;\lambda)}{\sin\beta\varphi(b;\lambda) + \cos\beta\varphi'(\alpha;\lambda)}. \qquad (1.5)$$

Для любых двух решений $y(x;\lambda)$ и $z(x;\lambda)$ уравнения (!) справедливо тождество†:

$$[y'\overline{z} - y\overline{z}']_0^b = \int\limits_0^b (y''\overline{z} - \overline{z}''y)dx = (\overline{\lambda} - \lambda)\int\limits_0^b y\overline{z}\rho\,dx. \qquad (1.6)$$

Из этого тождества легко получается для любого невещественного λ соотношение

$$\frac{\mathrm{Im}\ \omega_\beta(b;\lambda)}{\mathrm{Im}\ \lambda} = \int\limits_0^b |\psi(x;\lambda) - \omega_\beta(b;\lambda)\varphi(x;\lambda)|^2\rho dx. \qquad (1.7)$$

В самом деле, чтобы его получить, достаточно положить в (1.6) $y = z = \chi(x;\lambda)$ и учесть следующее: при $x = b$ функции χ и $\overline{\chi}$ удовлетворяют одному и тому же граничному условию (1.4), в силу чего выражение $\chi'\overline{\chi} - \chi\overline{\chi}'$ при $x = b$ обращается в нуль; при $x = 0$ это выражение, в силу (1.1) и (1.3), обращается в $\omega_\beta(b;\overline{\lambda}) - -\omega_\beta(b;\lambda)$.

Дробно-линейная функция

$$w = \frac{\psi(b;\lambda) + t\psi'(b;\lambda)}{\varphi(b;\lambda) + t\varphi'(b;\lambda)} \qquad (1.8)$$

при фиксированных b $(0 < b < \infty)$ и λ отображает вещественную ось t в некоторую окружность $C(\lambda;b)$.

При $\mathrm{Im}\ \lambda \neq 0$ уравнение этой окружности, согласно (1.7), может быть записано в виде

$$\frac{w - \overline{w}}{\lambda - \overline{\lambda}} = \int\limits_0^b |\psi(x;\lambda) + w\varphi(x;\lambda)|^2\rho dx. \qquad (1.9)$$

†Черта обозначает переход к комплексно сопряженной величине.

Отсюда явствует, что окружность $C(\lambda; b)$ всегда лежит в той же плоскости (нижней или верхней), что и λ. С увеличением b окружность сжимается, т.е. при $b < b'$ окружность $C(b'; \lambda)$ лежит целиком внутри окружности $C(b; \lambda)$.

Исходя из параметрического уравнения (1.8) окружности $C(b; \lambda)$, нетрудно вычислить ее радиус $r(b; \lambda)$. Оказывается, что

$$r^{-1}(b; \lambda) = |\varphi(b; \lambda)\varphi'(b; \overline{\lambda}) - \varphi'(b; \lambda)\varphi(b; \overline{\lambda})| . \tag{1.10}$$

Подстановка в (1.6) $y = z = \varphi(x; \overline{\lambda})$ дает:

$$\varphi(b; \lambda)\varphi'(b; \overline{\lambda}) - \varphi'(b; \lambda)\varphi(b; \overline{\lambda}) = (\lambda - \overline{\lambda}) \int\limits_0^\infty |\varphi(x; \lambda)|^2 \rho \, dx , \tag{1.11}$$

а поэтому

$$r^{-1}(b; \lambda) = 2\, |\mathrm{Im}\ \lambda| \int\limits_0^b |\varphi(x; \lambda)|^2 \rho \, dx . \tag{1.12}$$

Обозначим для данного невещественного λ через $C(\lambda)$ границу множества $K(\lambda)$, являющегося пересечением всех кругов $K(b; \lambda)$, ограниченных окружностями $C(b; \lambda)$.

$C(\lambda)$, очевидно, будет окружностью, если

$$\int\limits_0^\infty |\varphi(x; \lambda)|^2 \rho \, dx < \infty , \tag{1.13}$$

и точкой — в противном случае.

Г. Вейль (см., например, [2, 3]) показал, что если условие (1.13) выполняется для одного какого-либо невещественного значения λ, то оно выполняется для всех значений λ.

Рассмотрение уравнения предельной окружности $C(\lambda)$:

$$\frac{w - \overline{w}}{\lambda - \overline{\lambda}} = \int\limits_0^\infty |\psi(x; \lambda) - w\varphi(x; \lambda)|^2 \rho \, dx$$

в случае (1.13) приводит к выводу, что в этом случае также

$$\int_0^\infty |\psi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx < \infty. \tag{1.14}$$

Это и есть так называемый н е о п р е д е л е н н ы й с л у ч а й, который мы только и будем рассматривать в дальнейшем.

2. Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} D_0(x;\lambda) &= -\lambda \int_0^x \varphi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho ds, \\ D_1(x;\lambda) &= 1 + \lambda \int_0^x \varphi(s;\lambda)\psi_0(s)\rho ds, \\ E_0(x;\lambda) &= 1 - \lambda \int_0^x \psi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho ds, \\ E_1(x;\lambda) &= \lambda \int_0^x \psi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho ds, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$\varphi_0(x) = \varphi(x;0), \qquad \psi_0(x) = \psi(x;0).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi(x;\lambda) &= \varphi_0(x)D_1(x;\lambda) + \psi_0(x)D_0(x;\lambda), \\ \psi(x;\lambda) &= \varphi_0(x)E_1(x;\lambda) + \psi_0(x)E_0(x;\lambda), \end{aligned} \tag{1.16}$$

которые путем простого дифференцирования дают еще два соотношения:

$$\begin{aligned} \varphi'(x;\lambda) &= \varphi_0'(x)\, D_1(x;\lambda) + \psi_0'(x)\, D_0(x;\lambda), \\ \psi'(x;\lambda) &= \varphi_0'(x)\, E_1(x;\lambda) + \psi_0'(x)\, E_0(x;\lambda). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Для их доказательства заметим, что функция

$$V(x,s) = \varphi_0(s)\psi_0(x) - \varphi_0(x)\,\psi_0(s) \tag{1.18}$$

является функцией Коши дифференциального оператора d^2/dx^2+ $+q$. Это означает, что для любой функции $f(x)$ $(0 \le x < \infty)$, измеримой и суммируемой в каждом конечном интервале, единственное решение системы

$$y'' + q(x)y = f(x),$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

может быть получено по формуле

$$y(x) = \int_0^x V(x;s)f(s)ds.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi(x;\lambda) &= \varphi_0(x) - \lambda \int_0^x V(x,s)\,\varphi(s;\lambda)\,\rho\,ds, \\ \psi(x;\lambda) &= \psi_0(x) - \lambda \int_0^x V(x,s)\,\psi(s;\lambda)\,\rho\,ds. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Внося сюда вместо $V(x,s)$ его выражение из (1.18), после простой перегруппировки членов получим (1.16).

Пользуясь (1.16) и (1.17), мы можем параметрическое уравнение (1.8) окружности $C(b;\lambda)$ преобразовать к виду

$$w = \frac{E_0(b;\lambda)\,\tau + E_1(b;\lambda)}{D_0(b;\lambda)\,\tau + D_1(b;\lambda)}, \tag{1.20}$$

где параметры t и τ связаны следующим соотношением:

$$\tau = [\psi_0'(b)\,t + \psi_0(b)]\,/\,[\varphi_0'(b)\,t + \varphi_0(b)]. \tag{1.21}$$

В силу определяющих уравнений (1.19), функции $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(x;\lambda)$ и их производные по x суть целые функции, равномерно ограниченные при изменении x в любом конечном интервале $(0,b)$, а λ — в любом ограниченном множестве комплексной плоскости.

3. Легко выясняется смысл уравнения:

$$D_1(b;\lambda) + \tau\, D_0(b;\lambda) = 0. \tag{1.22}$$

В силу (1.16) и (1.7),

$$D_1(b;\lambda) + \tau\, D_0(b;\lambda) = \varphi(b;\lambda)\theta_0'(b) - \varphi'(b;\lambda)\theta_0(b),$$

где

$$\theta_0(x) = \psi_0(x) - \tau\varphi_0(x).$$

Поэтому корни уравнения (1.22) являются характеристическими числами краевой задачи:

$$\begin{aligned} &y'' + q(x)y + \lambda\rho y = 0,\\ &W(y,\varphi_0)|_{x=0} = 0, \quad W(y,\theta)|_{x=b} = 0, \end{aligned} \tag{1.23}$$

где $W(y,z)$ обозначает вронскиан $yz' - y'z$.

Краевая задача (1.23), как известно, эквивалентна нагруженному интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int_0^b G_\tau(x,s)\, y(s)\, \rho(s)\, ds, \tag{1.24}$$

где

$$G_\tau(x,s) = \begin{cases} \varphi_0(x)\theta_0(s) & (x \le s),\\ \varphi_0(s)\theta_0(x) & (x \ge s). \end{cases}$$

Легко показывается (см. [8], с.265–269), что функция

$$D_1(b;\lambda) + \tau D_0(b;\lambda)$$

есть детерминант Фредгольма уравнения (1.24).

Так как система (1.23) и, следовательно, уравнение (1.24) имеют конечное число отрицательных характеристических чисел (см. [8], § 10, гл.IV], то

$$D_1(b;\lambda) + \tau D_0(b;\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty}\Bigl(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j(b;\tau)}\Bigr), \tag{1.25}$$

где

$$\lambda_1(b;\tau) < \lambda_2(b;\tau) < \lambda_3(b;\tau) < \cdots$$

— все характеристические числа системы (1.23).

В дальнейшем нам придется также пользоваться тем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{\lambda_n(b;\tau)}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^b \sqrt{\rho}\, dx. \tag{1.26}$$

Для случая положительной дважды непрерывно дифференцируемой функции ρ это соотношение хорошо известно (см., например, [2], гл.1, § 1 и § 4). Оно обобщается на случай любого суммируемого ρ†.

4. В силу (1.13) и (1.14), при любом λ имеют смысл пределы

$$\begin{aligned} D_j(\lambda) &= D_j(\infty;\lambda) = \lim_{b\to\infty} D_j(b;\lambda), \\ E_j(\lambda) &= E_j(\infty;\lambda) = \lim_{b\to\infty} E_j(b;\lambda) \end{aligned} \qquad (j=0,1), \tag{1.27}$$

а именно:

$$D_0(\lambda) = -\lambda\int\limits_0^\infty \varphi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho ds,$$

$$D_1(\lambda) = 1 + \lambda\int\limits_0^\infty \varphi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho ds,$$

$$E_0(\lambda) = 1 - \lambda\int\limits_0^\infty \psi(s;\lambda)\varphi_0(s)\rho ds,$$

$$E_1(\lambda) = \lambda\int\limits_0^\infty \psi(s;\lambda)\psi_0(s)\rho\, ds.$$

Отсюда

$$w = \frac{E_0(\lambda)\tau + E_1(\lambda)}{D_0(\lambda)\tau + D_1(\lambda)} \tag{1.28}$$

†Соотношение (1.26) является простым следствием общей теоремы 1 нашей заметки [9].

есть уравнение окружности $C(\lambda)$.

Так как определители дробно-линейных преобразований (1.8) и (1.21) равны единице, то и определитель преобразования (1.20) равен единице:

$$E_0(b;\lambda)D_1(b;\lambda) - E_1(b;\lambda)D_0(b;\lambda) = 1, \tag{1.29}$$

а следовательно, и

$$E_0(\lambda)D_1(\lambda) - E_1(\lambda)D_0(\lambda) = 1. \tag{1.30}$$

Корни уравнения

$$D_1(\lambda) + \tau D_0(\lambda) = 0$$

дают характеристические числа (числа спектра) краевой задачи

$$\begin{aligned} &y'' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \\ &W(y,\varphi_0)|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} W(y,\theta_0) = 0; \end{aligned} \tag{1.31}$$

при этом значение λ называется *характеристическим числом* системы (1.31), если для этого значения λ система (1.31) имеет решение в классе $L_\rho^{(2)}$.

Следует еще заметить, что корни уравнения

$$D_0(\lambda) = 0$$

суть характеристические числа краевой задачи (1.31) для случая, когда $\theta = \varphi$.

При $\theta \neq c\varphi$ $(\tau \neq \infty)$ система (1.31) эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G_\tau(x,s)\,y(s)\,\rho(s)\,ds.$$

§ 2. Вспомогательные предложения теории функций

1. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться следующим предложением Н.Г. Чеботарева (см. [5], с.197):

А. *Для того чтобы мероморфная функция* $\Phi(\lambda)$ *обладала свойством*

$$\operatorname{Im}\ \Phi(\lambda) / \operatorname{Im}\ \lambda > 0 \tag{2.1}$$

в любой невещественной регулярной точке λ, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала абсолютно сходящееся разложение:*

$$\Phi(\lambda) = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \lambda \sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j(\alpha_j - \lambda)}, \tag{2.2}$$

где c_0, α_j $(j = 1, 2, ...)$ — *вещественные числа;* $c_{-1} \leq 0$, $c_1 \geq 0$, $\varkappa_j > 0$ $(j = 1, 2, ...)$.

Таким образом, мероморфная функция $\Phi(\lambda)$ со свойством (2.1) всегда вещественна (т.е. вещественна при вещественных λ) и обладает только вещественными полюсами и нулями.

Так как

$$\Phi'(\lambda) = \frac{|c_{-1}|}{\lambda^2} + c_1 + \sum_j \frac{\varkappa_j}{(\alpha_j - \lambda)^2},$$

то нули и полюсы функции $\Phi(\lambda)$ строго перемежаются и всегда являются простыми.

Заметим также, что из (2.2) без труда получается следующая оценка:

$$|\operatorname{Im}\ \Phi(\lambda)| \leq \operatorname{Im}\ |\Phi(i)|\ \frac{1 + |\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\ \lambda|}, \tag{2.3}$$

которой мы воспользуемся в § 4.

По терминологии Н.Г. Чеботарева, две вещественные целые функции $f(\lambda), g(\lambda)$ образуют вещественную пару $\{f, g\}$, если они не имеют общих нулей и при любом вещественном γ нули функции

$$\cos\gamma f(\lambda) + \sin\gamma g(\lambda)$$

все вещественные. Н.Г. Чеботареву принадлежит также следующее предложение (см. [5], с.135):

B. *Для того чтобы две целые вещественные функции f и g, не имеющие общих нулей, давали вещественную пару, необходимо и достаточно, чтобы выражение*

$$\mathrm{Im}\ (g/f) : \mathrm{Im}\ \lambda \tag{2.4}$$

сохраняло при всех невещественных λ один и тот же знак.

Вещественную пару $\{f, g\}$ будем называть нормированной, если выражение (2.4) — величина положительная (для этого необходимо и достаточно, чтобы $g'(0)f(0) - -g(0)f'(0) > 0$).

Следовательно, если $\{f, g\}$ — нормированная пара, то имеет место абсолютно сходящееся разложение:

$$\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \lambda \sum_j \frac{g(\alpha_j)}{f'(\alpha_j)} \frac{1}{\alpha_j(\lambda - \alpha_j)}, \tag{2.5}$$

где α_j $(j = 1, 2, ...)$ — все отличные от нуля корни функции f и при этом:

$$c_{-1} \leq 0, \quad c_1 \geq 0, \quad f'(\alpha_j)g(\alpha_j) < 0 \quad (j = 1, 2, ...).$$

2. Нам понадобится также следующее предложение, установленное автором в [9]†:

C. *Если целая функция $f(\lambda)$ обладает тем свойством, что при некотором целом p имеет место абсолютно сходящееся разложение*

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{p-1}\lambda^{p-1} + \lambda^p \sum_j \frac{1}{f'(\alpha_j)} \frac{1}{\alpha_j^p(\lambda - \alpha_j)},$$

где

$$\sum_j \left| \mathrm{Im}\ \frac{1}{\alpha_j} \right| < \infty, \tag{2.6}$$

†Предложение C было строго доказано нами в [10] для вещественных α_j $(j = 1, 2, ...)$. При доказательстве его в общем случае была допущена ошибка, которая, однако, исправима.

то функция $f(\lambda)$ не выше экспоненциального типа, т.е.

$$1)\qquad \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\log|f(\lambda)|}{|\lambda|} < \infty$$

и

$$2)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|f(t)||}{1+t^2}\,dt < \infty.$$

Заметим, что условие (2.6) всегда выполняется, если нули α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ функции $f(\lambda)$ вещественны.

3. В дальнейшем через (N) мы обозначаем класс целых функций, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Если $f \in (N)$ и

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log|f(re^{t\varphi})|}{r} \qquad (-\pi \le \varphi \le \pi),$$

то (см. [10])

$$h(\varphi) = \begin{cases} h\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (0 \le \varphi \le \pi), \\ -h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\varphi & (-\pi \le \varphi \le 0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Отличные от нуля корни α_j $(j = 1, 2, \ldots)$ целой функции $f \in$ $\in (N)$ всегда удовлетворяют условию (2.6), в силу чего для таких функций абсолютно сходится произведение

$$\prod_j \frac{1 - \lambda/\alpha_j}{1 - \lambda/\overline{\alpha}_j}.$$

В верхней полуплоскости Π_+ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ для функции $f \in (N)$ справедлива обобщенная формула Пуассона:

$$\log|f(\lambda)| = \log\prod_j\left|\frac{\lambda-\alpha_j}{\lambda-\overline{\alpha}_j}\right| + h\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta + \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|f(t)|dt}{(t-\xi)^2+\eta^2}$$

$$(\lambda = \xi + i\eta, \quad \eta > 0). \tag{2.8}$$

Аналогичное равенство, конечно, можно написать и для нижней полуплоскости.

Между прочим, соотношения (2.7) следуют из этих двух равенств. Нетрудно видеть, что класс (N) есть линейное кольцо.

Легко показывается, что если $f(\lambda) \in (N)$, то при любом a также $f(\lambda + a) \in (N)$.

Отметим следующее предложение:

D. *Пусть* $f \in (N)$, $\beta_j \neq 0$ $(j = 1, 2, ...)$ — *некоторые из нулей функции* $f(\lambda)$, *а числа* r_j $(j = 1, 2, ...)$ *таковы, что*

$$\sum_j \left| \frac{r_j}{\beta_j} \right| < \infty.$$

Тогда функция

$$f_1(\lambda) = f(\lambda) \sum_j \frac{r_j}{\lambda - \beta_j}$$

также принадлежит классу (N).

В самом деле, как показано в [10], целая функция принадлежит классу (N) в том и только в том случае, когда функция $\overset{+}{\log} |f(\lambda)|$ имеет в верхней и нижней полуплоскостях Π_+ и Π_- гармоническую мажоранту. С другой стороны, по теореме В. И. Смирнова (см. [11], с.94), функция

$$\overset{+}{\log} |\varphi(\lambda)| = \overset{+}{\log} \left| \sum_j \frac{r_j}{\lambda - \beta_j} \right|$$

имеет в каждой полуплоскости Π_+ и Π_- гармоническую мажоранту. Следовательно, этим свойством обладает также функция

$$\overset{+}{\log} |f_1(\lambda)| \leq 2 + \overset{+}{\log} |f(\lambda)| + \overset{+}{\log} |\varphi(\lambda)|,$$

откуда следует, что $f_1 \in (N)$.

В § 5 мы воспользуемся также следующим предложением (см. [12], с.13).

E. *Если целая функция* $f \in (N)$, *то для числа* $n_1(r)$ *ее нулей в секторе*

$$0 < \lambda \leq r, \quad |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2},$$

и числа $n_2(r)$ ее нулей в секторе

$$0 \le \lambda \le r, \quad |\arg\lambda - \pi| \le \frac{\pi}{2},$$

справедливы соотношения:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_1(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_2(r)}{r} = \frac{1}{2\pi}\left[h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

§ 3. Специальная матрица

1. Матрицу-функцию второго порядка

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} P_0(\lambda) & P_1(\lambda) \\ Q_0(\lambda) & Q_1(\lambda) \end{pmatrix},$$

элементы которой $P_j(\lambda)$, $Q_j(\lambda)$ $(j = 0, 1)$ суть целые вещественные функции λ, не равные нулю тождественно, будем называть *специальной*, если для нее выполняются следующие два условия:

(I) $P_0(\lambda)Q_1(\lambda) - P_1(\lambda)Q_0(\lambda) = 1$

и

(II) при любом вещественном t $(-\infty < t \le \infty)$ функция

$$w(\lambda) = w_t(\lambda) = \frac{P_0(\lambda)t + P_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)t + Q_1(\lambda)}$$

удовлетворяет условию:

$$\operatorname{Im} w(\lambda) / \operatorname{Im} \lambda > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda \ne 0.$$

Элементы Q_0, Q_1 (соответственно P_0, P_1) будем называть *знаменателями* (соответственно *числителями*) специальной матрицы $\mathfrak{M}(\lambda)$.

Очевидно, что вместе с матрицей $\mathfrak{M}(\lambda)$ специальными будут и матрицы, получающиеся из нее перестановкой двух столбцов (или двух строчек) с изменением знака на противоположный у функций какого-либо столбца (какой-либо строчки); и, вообще, специальной будет матрица

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

при любых вещественных θ_1, θ_2.

Исследуем значения функции $w_t(\lambda)$, соответствующей специальной матрице $\mathfrak{M}(\lambda)$, при комплексных t.

При фиксированном λ из верхней полуплоскости Π_+ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ точка $w_t(\lambda)$ с изменением t от $-\infty$ до ∞ описывает некоторую окружность $C(\lambda)$, лежащую в той же верхней полуплоскости. Эта окружность описывается против часовой стрелки, так как при λ вещественном она вырождается в вещественную ось, причем при возрастающем t возрастает и $w_t(\lambda)$, как это следует из (I). Таким образом, при фиксированном λ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ дробно-линейная функция $w_t(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t \geq 0$ в круг, ограниченный $C(\lambda)$, лежащий внутри верхней полуплоскости.

Отсюда, между прочим, вытекает, что *произведение* $\mathfrak{M}_1(\lambda)\times\times\mathfrak{M}_2(\lambda)$ *двух специальных матриц* $\mathfrak{M}_1(\lambda)$ *и* $\mathfrak{M}_2(\lambda)$ *есть всегда специальная матрица.*

2. Нам понадобятся следующие элементарные леммы:

Лемма 1. *Для того чтобы функция*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{3.1}$$

отображала верхнюю полуплоскость $\Pi_+(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ *в некоторый круг* K, *лежащий целиком внутри* Π_+, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) $\operatorname{Im}(\delta\overline{\gamma}) > 0$

и

2) $\operatorname{Im}\alpha \cdot \operatorname{Im}\delta - \operatorname{Im}\beta \cdot \operatorname{Im}\gamma > 0$.

Доказательство. Докажем необходимость условий 1), 2).

Так как внутри верхней полуплоскости функция w конечна, то $\gamma \neq 0$ и нуль $a = -\delta/\gamma$ знаменателя в (3.1) принадлежит нижней полуплоскости, т.е.

$$\operatorname{Im}\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{|\gamma|^2}\operatorname{Im}(\delta\overline{\gamma}) > 0. \tag{3.2}$$

Пусть C — граница K, т.е. окружность, в которую переходит вещественная ось $z = t$ $(-\infty < t \leq \infty)$.

При возрастании t точка w будет обходить C против часовой стрелки. Поэтому в нижней точке w_m окружности C (в точке C с наименьшей ординатой), если эта точка достигается при конечном значении t,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{(\gamma t+\delta)^2} > 0.$$

Таким образом, в этой точке $\gamma t+\delta$ вещественно. При наличии (3.2) это возможно лишь в том случае, когда $\gamma \neq \overline{\gamma}$ и

$$t = -\frac{\delta-\overline{\delta}}{\gamma-\overline{\gamma}}.$$

Внося это значение $z = t$ в (3.1), найдем нижнюю точку w_m окружности C:

$$w_m = \frac{1+\beta\overline{\gamma}-\alpha\overline{\delta}}{\delta\overline{\gamma}-\gamma\overline{\delta}}.$$

С другой стороны, так как $\operatorname{Im} w_m > 0$, то отсюда получаем условие

$$\operatorname{Re}(\alpha\overline{\delta}-\beta\overline{\gamma})-1 > 0,$$

а так как $1 = \alpha\delta-\beta\gamma$, то легко видеть, что оно эквивалентно условию 2).

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma = \overline{\gamma}$. В этом случае точка w_m соответствует $t = \infty$ и, таким образом, $w_m = \alpha\,/\,\gamma$, откуда $\dfrac{1}{\gamma}\operatorname{Im}\alpha > 0$.

Условие (3.2) в случае $\gamma = \overline{\gamma}$ дает $\dfrac{1}{\gamma}\operatorname{Im}\delta > 0$. а следовательно, $\operatorname{Im}\delta\cdot\operatorname{Im}\alpha > 0$.

Так как теперь $\operatorname{Im}\gamma = 0$, то условие 2) снова выполняется.

Достаточность условий 1) и 2) также очевидна после приведенных рассуждений.

Лемма доказана. В качестве ее простого следствия получается

Лемма 2. *Если дробно-линейная функция*

$$w = \frac{\delta z+\beta}{\gamma z+\delta} \qquad (\Delta = \alpha\delta-\beta\gamma \neq 0)$$

отображает верхнюю полуплоскость Π_+ *в круг* K, *лежащий внутри* Π_+, *то этим же свойством будут обладать и функции, получающиеся транспозицией пары* α, δ *или пары* — β, γ:

$$w_1 = \frac{\delta z + \beta}{\gamma z + \alpha}, \qquad w_2 = \frac{\alpha z - \gamma}{-\beta z + \delta}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $\Delta = 1$. Тогда условие 2) леммы 1 для функций w_j ($j = 1, 2$) остается тем же, что и для функции w. Что касается условия 1), то для функций w_1 и w_2 оно принимает соответственно вид

$$\operatorname{Im}(\alpha\overline{\gamma}) > 0, \qquad \operatorname{Im}(-\delta\overline{\beta}) > 0, \tag{3.3}$$

а так как точки $w(\infty) = \alpha / \gamma$ и $w(0) = \beta / \delta$ лежат внутри Π_+, то условия (3.3) выполняются.

Между прочим, сопоставление лемм 1, 2 показывает, что лемма 1 сохранит силу, если в ней условие 1) заменить одним из условий (3.3).

Заметим, далее, что если определитель $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ ($\neq 0$) отличен от единицы, то, как нетрудно убедиться, лемма 1 сохранит силу, если в ней условие 2) заменить условием:

2′) $\operatorname{Im}\alpha \operatorname{Im}\delta - \operatorname{Im}\gamma \operatorname{Im}\beta + \frac{1}{2}\operatorname{Re}\Delta - \frac{1}{2}|\Delta| > 0.$

Отсюда получается

Лемма 3. *Для того чтобы функция*

$$w = A - \frac{B^2}{z + C}$$

отображала верхнюю полуплоскость Π_+ *в некоторый круг, лежащий целиком внутри* Π_+, *необходимо и достаточно, чтобы*

а) $\operatorname{Im} C > 0$,

б) $\operatorname{Im} A \operatorname{Im} C - (\operatorname{Im} B)^2 > 0$.

Доказательство. В самом деле, в данном случае

$$\alpha = A, \quad \beta = AC - B^2, \quad \gamma = 1, \quad \delta = C, \quad \Delta = B^2$$

и условие а) означает то же, что и условие 1) леммы 1, а условие б) — то же, что и условие 2′), так как в данном случае

$$\frac{1}{2}\operatorname{Re}\Delta - \frac{1}{2}|\Delta| = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(B^2) - \frac{1}{2}|B|^2 = -(\operatorname{Im} B)^2.$$

3. Из леммы 2 непосредственно вытекает, что *если матрица*

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ Q_0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

является специальной, то специальными будут и матрицы

$$\begin{pmatrix} Q_1 & P_1 \\ Q_0 & P_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} P_0 & -Q_0 \\ -P_1 & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Условие 1) леммы 1 для специальной матрицы означает, что

$$\operatorname{Im}\frac{Q_1}{Q_0} > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{3.4}$$

Так как в силу (I) функции Q_0 и Q_1 не имеют общих нулей, то они образуют вещественную пару и, следовательно, все их нули вещественны и перемежаются.

Пусть $\{\alpha_{j0}\}$ и $\{\alpha_{j1}\}$ — все не равные нулю корни целых функций Q_0 и Q_1.

По теореме Чеботарева (§ 2, предложение A) имеют место абсолютно сходящиеся разложения:

$$\frac{P_k(\lambda)}{Q_k(\lambda)} = \frac{c_{-1k}}{\lambda} + c_{0k} + c_{1k}\lambda + \lambda\sum_j \frac{P_k(\alpha_{jk})}{Q_k'(\alpha_{jk})\alpha_{jk}(\lambda-\alpha_{jk})} \quad (k=0,1),$$

причем

$$c_{-1k} \le 0, \quad c_{1k} \ge 0, \quad \frac{P_k(\alpha_{jk})}{Q_k'(\alpha_{jk})} < 0 \quad (j=1,2,...;\ \ k=0,1).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)Q_1(\lambda)} = \frac{P_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)} - \frac{P_1(\lambda)}{Q_1(\lambda)}.$$

Стало быть,

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)Q_1(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + c_1\lambda + \lambda\sum_j \frac{P_0(\alpha_{j0})}{Q_0'(\alpha_{j0})\alpha_{j0}(\lambda - \alpha_{j0})} -$$

$$-\sum_j \frac{P_1(\alpha_{j1})}{Q_1'(\alpha_{j1})\alpha_{j1}(\lambda - \alpha_{j1})}.$$

На основании предложения C предыдущего параграфа заключаем, что функция

$$Q_0 Q_1 \in (N). \tag{3.5}$$

Деля почленно полученное разложение для $Q_0^{-1}\,Q_1^{-1}$ на λ и устремляя затем λ по мнимой оси к ∞, мы найдем, что $c_1 = 0$.

Из (I) (а впрочем, и из самого разложения (3.4)) следует:

$$P_0\,(\alpha_{j0}) = Q_1^{-1}\,(\alpha_{j0}), \qquad P_1\,(\alpha_{j1}) = Q_1^{-1}\,(\alpha_{j1}).$$

Мы доказали “необходимую” часть следующего предложения:

Теорема 𝔄. *Для того чтобы две целые вещественные функции $Q_0(\lambda)$ и $Q_1(\lambda)$ могли служить соответственно первым и вторым знаменателем некоторой специальной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы они составляли нормированную вещественную пару и чтобы имело место абсолютно сходящееся разложение*

$$\frac{1}{Q_0\,(\lambda)\,Q_1\,(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + \lambda\sum_j \frac{1}{Q_0'\,(\alpha_{j0})\,Q_1\,(\alpha_{j0})\alpha_{j0}(\lambda - \alpha_{j0})} +$$

$$+\lambda\sum_j \frac{1}{Q_1'\,(\alpha_{j1})\,Q_0\,(\alpha_{j1})\alpha_{j1}(\lambda - \alpha_{j1})}, \tag{3.6}$$

где α_{j0} $(j = 1, 2, \ldots)$ и α_{j1} $(j = 1, 2, \ldots)$ — отличные от нуля корни целых функций Q_0 и Q_1.

Доказательство. Нам осталось доказать достаточность сформулированных условий.

Из условия (3.4) вытекает, что

$$\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = \frac{a_{-1}}{\lambda} + a_0 + a_1\lambda + \lambda \sum_j \frac{Q_1(\alpha_{j0})}{Q_0'(\alpha_{j0})} \frac{1}{\alpha_{j0}(\lambda - \alpha_{j0})}, \tag{3.7}$$

где $a_{-1} \le 0$, $a_1 \ge 0$ и

$$Q_1(\alpha_{j0})\, Q_0'(\alpha_{j0}) < 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Аналогично из рассмотрения функции $-Q_0 / Q_1$ получаем

$$Q_0(\alpha_{j1})\, Q_1'(\alpha_{j1}) > 0 \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Определим целую вещественную функцию $P_0(\lambda)$ равенством

$$\frac{P_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = \frac{c_{-10}}{\lambda} + c_{00} + c_{01}\lambda + \lambda \sum_j \frac{1}{Q_0(\alpha_{j0})Q_1(\alpha_{j0})} \frac{1}{\alpha_{j0}(\lambda - \alpha_{j0})}, \tag{3.8}$$

где c_{00} — произвольное вещественное число, c_{01} — произвольное неотрицательное число, а

$$c_{-10} = \begin{cases} c_{-1}, & \text{если} \quad c_{-1} < 0, \\ 0, & \text{если} \quad c_{-1} \ge 0\,. \end{cases}$$

Определим затем вещественную функцию $P_1(\lambda)$ равенством

$$P_0 Q_1 - P_1 Q_0 = 1. \tag{3.9}$$

Тогда, в силу (3.8) и (3.9),

$$\frac{P_1}{Q_1} = -\frac{1}{Q_1Q_0} + \frac{P_0}{Q_0} = \frac{c_{-11}}{\lambda} + c_{01} + c_{11}\lambda +$$

$$+\lambda \sum_j \frac{1}{Q_1'(\alpha_{j1})Q_1(\alpha_{j1})} \frac{1}{\alpha_{j1}(\lambda - \alpha_{j1})}, \tag{3.10}$$

где

$$c_{01} = c_{00} - c_0, \qquad c_{11} = c_{10} \ge 0$$

и

$$c_{-11} = \begin{cases} -c_{-1}, & \text{если} \quad c_{-1} > 0, \\ 0, & \text{если} \quad c_{-1} \le 0\,. \end{cases}$$

В силу (3.10), функция P_1 также является целой.

Для установления свойства (II) функции

$$w = \frac{P_0 t + P_1}{Q_0 t + Q_1} = \frac{P_0}{Q_0} - \frac{\dfrac{1}{Q_0^2}}{t + \dfrac{Q_1}{Q_0}} \tag{3.11}$$

достаточно показать, согласно лемме 3, что

$$\operatorname{Im} \frac{P_0}{Q_0} > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda > 0 \tag{3.12}$$

и

$$\operatorname{Im} \frac{P_0}{Q_0} \operatorname{Im} \frac{Q_1}{Q_0} - \left(\operatorname{Im} \frac{1}{Q_0} \right)^2 > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda > 0\,. \tag{3.13}$$

При этом мы можем предположить, что $Q_0(0) \neq 0$, ибо в противном случае мы вместо матрицы $\mathfrak{M}(\lambda)$ рассматривали бы матрицу

$$\begin{pmatrix} P_1 & -P_0 \\ Q_1 & -Q_0 \end{pmatrix},$$

в которой роль первого знаменателя играет уже функция Q_1, не имеющая общих нулей с Q_0 и для которой, следовательно, $Q_1(0) \neq$ $\neq 0$, если $Q_0(0) = 0$.

Если $Q_0(0) \neq 0$, то в (3.7) и (3.8) $a_{-1} = 0$, $c_{-10} = 0$. Условие (3.12), очевидно, выполняется в силу разложения (3.10), причем

$$\operatorname{Im} \frac{P_0}{Q_0} = c_{01}\eta + \eta \sum_j \frac{\varkappa_j}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2} \ge \eta \sum_j \frac{\varkappa_j}{|\lambda - \alpha_{j0}|^2}, \tag{3.14}$$

где

$$\eta = \operatorname{Im} \lambda > 0, \qquad \varkappa_j = -\frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\, Q_1(\alpha_{j0})} > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Из (3.7) имеем аналогично

$$\operatorname{Im}\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = a_1\eta + \eta\sum_j \frac{\varkappa_j'}{|\lambda-\alpha_{j0}|^2} \geq \eta\sum_j \frac{\varkappa_j'}{|\lambda-\alpha_{j0}|^2}, \tag{3.15}$$

где

$$\varkappa_j' = -\frac{Q_1(\alpha_{j0})}{Q_0'(\alpha_{j0})} > 0 \quad (j=1,2,\ldots).$$

Заметим, что так как

$$\varkappa_j\,\varkappa_j' = \frac{1}{[Q_0'(\alpha_{j0})]^2} \quad (j=1,2,\ldots), \tag{3.16}$$

а

$$\sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_{j0}^2} < \infty, \qquad \sum_j \frac{\varkappa_j'}{\alpha_{j0}^2} < \infty,$$

то, в силу неравенства Коши:

$$\Big(\sum_j a_j b_j\Big)^2 \leq \sum_j a_j^2 \sum_j b_j^2,$$

а также

$$\sum_j \frac{1}{\alpha_{j0}^2|Q_0'(\alpha_{j0})|} < \infty. \tag{3.17}$$

Естественно поэтому предположить, что

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)} = \frac{1}{Q_0(0)} + \lambda\sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\alpha_{j0}(\lambda-\alpha_{j0})}. \tag{3.18}$$

С установлением (3.17) теорема будет доказана, так как из (3.16) следует:

$$\Big(\operatorname{Im}\frac{1}{Q_0}\Big)^2 = \eta^2\Big(\sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})}\,\frac{1}{|\lambda-\alpha_{j0}|^2}\Big)^2 \leq$$

$$\leq \eta^2\left(\sum_j \frac{\sqrt{\varkappa_i\varkappa_j'}}{|\lambda-\alpha_{j0}|^2}\right)^2 \leq \eta^2\sum_j \frac{\varkappa_j}{|\lambda-\alpha_{j0}|^2}\sum_j \frac{\varkappa_j'}{|\lambda-\alpha_{j0}|^2},$$

а значит, в силу (3.14) и (3.15), условие (3.13) будет выполняться.

Докажем справедливость разложения (3.18). Покажем прежде всего, что $Q_0 \in (N)$.

Из (3.7) получаем

$$\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^2 \sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j^2(\lambda - \alpha_j)} \quad \left(a_2 = -\sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j^2}\right).$$

В силу (3.5) и предложения D предыдущего параграфа,

$$Q_0(\lambda)Q_1(\lambda) \sum_j \frac{\varkappa_j}{\alpha_j^2(\lambda - \alpha_j)} \in (N).$$

Так как, кроме того,

$$(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2)\, Q_0(\lambda)\, Q_1(\lambda) \in (N),$$

то

$$Q_0^2(\lambda) = Q_0(\lambda)\, Q_1(\lambda) \frac{Q_0(\lambda)}{Q_1(\lambda)} \in (N),$$

а тогда, очевидно, и $Q_0(\lambda) \in (N)$.

Аналогичным образом из рассмотрения дроби $-Q_1 / Q_0$ следует, что $Q_1 \in (N)$.

Рассмотрим целую функцию

$$g(\lambda) = \frac{1}{Q_0(\lambda)} - \frac{1}{Q_0(0)} - \lambda \sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\, \alpha_{j0}\, (\lambda - \alpha_{j0})} =$$

$$= \frac{1}{Q_0(\lambda)} - \frac{1}{Q_0(0)} - \lambda \sum_j \frac{1}{\alpha_{j0}^2\, Q_1'(\alpha_{j0})} - \lambda^2 \sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\alpha_{j0}^2(\lambda - \alpha_{j0})}. \tag{3.19}$$

В силу предложения D можно утверждать, что $Q_0(\lambda)\, g(\lambda) \in (N)$.

Отсюда следует, что $g(\lambda)$, а значит, и

$$g_1(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{\lambda} \qquad (g(0) = 0)$$

не выше экспоненциального типа.

Из (3.19) вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty} g_1(re^{i\varphi}) = 0 \quad \text{при} \quad \varphi \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ \pi). \tag{3.20}$$

Рассмотрим функцию $g_1(z)$ последовательно в углах

$$\frac{(2k-1)\pi}{4} \le \arg\lambda \le \frac{(2k+1)\pi}{4};$$

применяя к ней с учетом (3.20) принцип Фрагмена–Линделефа, мы найдем, что в каждом из этих углов она ограничена, а следовательно, она ограничена во всей комплексной плоскости.

Таким образом, $g_1(\lambda) \equiv C$ и, в силу (3.20), $C = 0$.

Разложение (3.18), а вместе с ним и теорема доказаны.

Заметим, что при доказательстве теоремы мы попутно получили полное описание всех специальных матриц, имеющих заданные знаменатели Q_0 и Q_1.

4. При установлении разложения (3.18) мы предполагали, что $Q_0(0) \neq 0$. Если бы $Q_1(0) = 0$, то вместо (3.18) мы имели бы разложение:

$$\frac{1}{Q_0(\lambda)} = \frac{1}{Q_0'(0)\lambda} + c + \lambda\sum_j \frac{1}{Q_0'(\alpha_{j0})\alpha_{j0}(\lambda-\alpha_{j0})}, \tag{3.21}$$

где c — некоторое вещественное число.

Коль скоро известно, что элемент $Q_0(\lambda)$ является первым знаменателем некоторой специальной матрицы, то это разложение может быть немедленно получено на основании следующего замечания.

В силу (3.11), для элементов специальной матрицы выполняется условие (3.13), а следовательно, каждая из мероморфных функций

$$\frac{P_0}{Q_0} + \frac{Q_1}{Q_0} \pm \frac{1}{Q_0}$$

удовлетворяет условиям предложения А Чеботарева и, следовательно, допускает определенное разложение. А так как $1\,/\,Q_0$ есть полуразность этих функций, то она допускает разложение вида (3.21).

Аналогичные разложения, очевидно, имеют место и для функций Q_1^{-1}, P_0^{-1}, P_1^{-1}. Оказывается, эти разложения характеристичны для элементов специальной матрицы.

Теорема 𝔅. *Для того чтобы целая вещественная функция $F(\lambda)$ могла служить элементом некоторой специальной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы функция $F^{-1}(\lambda)$ допускала абсолютно сходящееся разложение*

$$F^{-1}(\lambda) = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_j \frac{1}{F'(\alpha_j)\,\alpha_j\,(\lambda - \alpha_j)}, \tag{3.22}$$

где α_j $(j = 1, 2, \dots)$ — все не равные нулю вещественные корни функции $F(\lambda)$.

Доказательство. В силу предыдущего, нам осталось доказать достаточность указанных условий.

Положим $Q_0(\lambda) = F(\lambda)$ и определим функции P_0 и Q_1 равенствами:

$$\frac{Q_1(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = -\frac{m_0|c_{-1}|}{\lambda} + a_0 + a_1\lambda - \lambda \sum_j \frac{m_j}{|Q_0'(\alpha_j)|\alpha_j(\lambda - \alpha_j)}, \tag{3.23}$$

$$\frac{P_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)} = -\frac{m_0^{-1}|c_{-1}|}{\lambda} + c_{00} + c_{01}\lambda - \lambda \sum_j \frac{m_j^{-1}}{|Q_0'(\alpha_j)|\alpha_j(\lambda - \alpha_j)}, \tag{3.24}$$

где a_0, c_{00} — произвольные вещественные числа, $a_1 \geq 0$, $c_{01} \geq 0$ и $m_j > 0$ $(j = 1, 2, \dots)$, причем

$$\sum_j \frac{m_j}{|Q_0'(\alpha_j)| \cdot \alpha_j^2} < \infty, \quad \sum_j \frac{m_j^{-1}}{|Q_0'(\alpha_j)| \cdot \alpha_j^2} < \infty. \tag{3.25}$$

Выбор положительных m_j $(j = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющих последнему условию, всегда возможен, так как, например, можно положить $m_j = 1$ $(j = 1, 2, \dots)$. Определяя затем P_1 равенством (3.9) или, что то же, равенством

$$P_1 = P_0 \frac{Q_1}{Q_0} - \frac{1}{Q_1},$$

мы путем установления, на основании (3.23) и (3.24), равенства вычетов функций $P_0 Q_1/Q_0$ и $1/Q_0$ в точках $\lambda = 0,\ \alpha_j\ (j = 1, 2, ...)$ убедимся в том, что P_1 — целая функция.

В силу неравенства Коши, легко видеть, что условия (3.12) и (3.13) будут выполнены и, таким образом, матрица $\mathfrak{M}(\lambda)$, составленная из построенных функций P, Q_k $(k = 0, 1)$, будет специальной.

Теорема доказана.

5. Если сопоставить доказательство теорем $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, то легко убедиться, что при доказательстве теоремы $\mathfrak{B}$ мы одновременно дали описание всех специальных матриц, имеющих данный первый знаменатель $Q_0(\lambda)$. Это обстоятельство приводит к следующей теореме.

Теорема $\mathfrak{C}$. *Если вещественная целая функция $F(\lambda)$ удовлетворяет условию (3.22), то для того чтобы некоторая целая функция $G(\lambda)$ вместе с функцией $F(\lambda)$ могли служить соответственно вторым и первым знаменателем некоторой специальной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{G(\lambda)}{F(\lambda)} = -\frac{m_0\,|c_{-1}|}{\lambda} + a_0 + a_1\lambda - \lambda\sum_j \frac{m_j}{|F'(\alpha_j)|\,\alpha_j\,(\lambda-\alpha_j)}, \quad (3.26)$$

где a_0 — вещественное число, $a_1 \geq 0$, $m_j > 0$ $(j = 0, 1, ...)$, и

$$\sum_j \frac{m_j}{|F'(\alpha_j)\,\alpha_j^2|} < \infty, \quad \sum_j \frac{m_j^{-1}}{|F'(\alpha_j)|\,\alpha_j^2} < \infty. \quad (3.27)$$

Указанные в теореме условия эквивалентны следующим:

1) *функции $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ образуют нормированную вещественную пару;*

2) $$\sum_j \frac{1}{|G(\alpha_j)\,F'(\alpha_j)|\,\alpha_j^2} < \infty. \quad (3.28)$$

Поясним, что, в силу (3.26), $m_j = \pm G(\alpha_j)$, а поэтому условие (3.28) выражает то же, что второе условие в (3.27) (первое условие в (3.27) есть условие абсолютной сходимости разложения (3.26)).

Сопоставим теперь теорему $\mathfrak{C}$ с теоремой $\mathfrak{A}$, на основании которой вещественная нормированная пара G, F может служить парой знаменателей специальной матрицы в том и только в том случае, когда имеет место абсолютно сходящееся разложение:

$$\frac{1}{F(\lambda)G(\lambda)} = \frac{c_{-1}}{\lambda} + c_0 + \lambda \sum_j \frac{1}{F'(\alpha_j)\, G(\alpha_j)\, \alpha_j\, (\lambda - \alpha_j)} +$$

$$+\lambda \sum_j \frac{1}{F(\beta_j)\, G'(\beta_j)\, \beta_j\, (\lambda - \beta_j)}, \tag{3.29}$$

где $\beta_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$ — все не равные нулю корни целой функции $G(\lambda)$.

Это сопоставление приводит к выводу, что *для всякой вещественной пары $F(\lambda)$, $G(\lambda)$ условие (3.28) эквивалентно условию*

$$\sum_j \frac{1}{|F(\beta_j)\, G'(\beta_j)|\, \beta_j^2} < \infty \tag{3.30}$$

и, более того, эквивалентно существованию абсолютно сходящегося разложения (3.29) .

Одновременно, на основании теоремы $\mathfrak{B}$, мы заключаем, что *для вещественной пары F, G каждое из условий (3.28), (3.30) влечет для функций $F^{-1}(\lambda)$ и $G^{-1}(\lambda)$ существование абсолютно сходящихся разложений вида (3.22).*

§ 4. Доказательство теоремы I

Так как, по доказанному в § 1, матрица

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} E_0(\lambda) & E_1(\lambda) \\ D_0(\lambda) & D_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

является специальной, то к ней применима теорема $\mathfrak{B}$ предыдущего параграфа.

Учитывая, что $D_1(0) = 1$, мы, по этой теореме, получаем разложение

$$\frac{1}{D_1(\lambda)} = 1 + \lambda \sum_j \frac{1}{D_1'(\lambda_j)\lambda_j(\lambda - \lambda_j)},$$

что и требуется в условии 2) теоремы 1.

Для установления условия 1) теоремы 1 введем в рассмотрение функции:

$$\Delta(b;\lambda) = \frac{D_1(b;\lambda)\, D_0(b;\overline{\lambda}) - D_0(b;\lambda)\, D_1(b;\overline{\lambda})}{\lambda - \overline{\lambda}} \quad (0 < b < \infty) \tag{4.1}$$

и

$$\Delta(\lambda) = \lim_{b\to\infty} \Delta(b;\lambda) = \frac{D_1(\lambda)\, D_0(\overline{\lambda}) - D_1(\overline{\lambda}) D_0(\lambda)}{\lambda - \overline{\lambda}}. \tag{4.2}$$

В силу (1.16) и (1.17),

$$\Delta(b;\lambda) = \frac{\varphi(b;\lambda)\, \varphi'(b;\overline{\lambda}) - \varphi(b;\overline{\lambda})\, \varphi'(b;\lambda)}{\lambda - \overline{\lambda}},$$

а если учесть еще (1.11), то получим

$$\Delta(b;\lambda) = \int_0^b |\varphi(x;\lambda)|^2 \rho\, dx > 0 \quad (0 < b \leq \infty). \tag{4.3}$$

Это равенство показывает, что *при любом комплексном* λ *функция* $\Delta(b;\lambda)$ *возрастает вместе с возрастанием* b.

С другой стороны, функция

$$\varphi(x;\lambda) = \varphi_0(x)\, D_1(x;\lambda) + \psi_0(x)\, D_0(x;\lambda)$$

при любом фиксированном x $(0 < x < \infty)$ есть целая функция λ порядка роста $1/2$, допускающая, согласно (1.25), разложение в простое произведение линейных сомножителей с вещественными нулями. Отсюда нетрудно заключить, что $|\varphi(x;\xi + i\,\eta)|$ есть возрастающая функция от $|\eta|$.

Стало быть, и *функции* $\Delta(x;\xi+i\,\eta)$ $(0<x<\infty)$, $\Delta(\xi+i\,\eta)$ *возрастают с возрастанием* $|\eta|$.

Положим

$$F(b;\lambda)=D_0(b;\lambda)D_1(b;\lambda),\qquad F(\lambda)=D_0(\lambda)D_1(\lambda).$$

Из (4.1) непосредственно вытекает, что

$$\Delta(b;\lambda)\le|F(b;\lambda)|/|\mathrm{Im}\,\lambda|. \tag{4.4}$$

При помощи неравенства Буняковского из (1.15) получаем

$$|D_1(b;\lambda)|\le 1+|\lambda|\left\{\int\limits_0^b|\varphi(x;\lambda)|^2\rho dx\int\limits_0^b\psi_0^2(x)\rho\,dx\right\}^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&|D_1(b;\lambda)|\le 1+L|\lambda|\Delta^{1/2}(b;\lambda)<1+L|\lambda|\,\Delta^{1/2}(\lambda),\\&|D_1(\lambda)|\le 1+L|\lambda|\,\Delta^{1/2}(\lambda),\end{aligned}\tag{4.5}$$

где

$$L^2=\int\limits_0^\infty\psi_0^2(x)\,\rho\,dx.$$

Заметим, что функция $\Delta(b;\lambda)$ связана с радиусом $r(b;\lambda)$ окружности $C(b;\lambda)$, согласно (1.12), соотношением

$$\Delta(b;\lambda)=\frac{1}{2\,|\mathrm{Im}\,\lambda|\cdot r(b;\lambda)}. \tag{4.6}$$

Так как окружность $C(b;\lambda)$ при $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ лежит целиком внутри верхней полуплоскости, то

$$2r(b;\lambda)<\max_{-\infty<t\le\infty}\mathrm{Im}\,\frac{E_0(b;\lambda)t+E_1(b;\lambda)}{D_0(b;\lambda)t+D_1(b;\lambda)}\qquad(\mathrm{Im}\,\lambda>0).$$

Следовательно, согласно оценке (2.3):

$$r(1;\lambda) \leq \frac{1+|\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|} M\,, \tag{4.7}$$

где

$$M = \frac{1}{2} \max_{-\infty<t\leq\infty} \operatorname{Im} \frac{E_0(1;i)t + E_1(1;i)}{D_0(1;i)t + D_1(1;i)}. \tag{4.8}$$

Отсюда, в силу (4.6), при $b \geq 1$ получаем

$$\Delta(b;\lambda) \geq \frac{1}{2\,|\operatorname{Im}\lambda|\, r(1;\lambda)} > \frac{M}{2}\,\frac{1+|\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2} = p(\lambda),$$

а значит, и

$$\Delta(\lambda) \geq p(\lambda). \tag{4.9}$$

Так как при любом h

$$K(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\overline{\log}\, p(t+ih)|}{1+t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log p(t+ih)|}{1+t^2} dt < \infty,$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\log}\,\Delta(b;t+ih)}{1+t^2} dt \leq K(h) < \infty \qquad (0 < b \leq \infty). \tag{4.10}$$

Вспоминая, что $F(b;\lambda) = D_0(b;\lambda)\, D_1(b;\lambda) \in (N)$, мы при любом $h > 0$ (см. § 2, п.3) будем иметь

$$\log|F(b;\lambda)| = \frac{\eta - h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|\,F(b;t+ih)|}{|\lambda - t - ih|^2} dt$$

и, в частности,

$$\log|F(b;i+hi)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|F(b;t+ih)|}{1+t^2} dt.$$

В силу неравенства (4.4), отсюда получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\Delta(b;t+ih)}{1+t^2}\,dt \le \log\frac{1}{h}+\log|F(b;i+hi)|.$$

Учитывая (4.10), находим, далее, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}\Delta(b;t+ih)}{1+t^2}\,dt \le \log\frac{1}{h}+\log|F(b;i+hi)|+K(h).$$

Устремляя b к ∞, мы убеждаемся в конечности интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}\Delta(t+ih)}{1+t^2}\,dt,$$

а так как $\Delta(t)\le\Delta(t+ih)$, то также

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}\Delta(t)}{1+t^2}\,dt<\infty. \tag{4.11}$$

Так как $D_1(b;\lambda)\in(N)$, то мы можем теперь написать:

$$\log|D_1(b;\xi+i\eta)| = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log|D_1(b;t)|}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt \le \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\overset{+}{\log}|D_1(b;t)|}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

В силу $(4.5)^{\dagger}$,

$$\log|D_1(b;\xi+i\eta)| \le \frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2+\overset{+}{\log}L+\overset{+}{\log}|t|+\overset{+}{\log}\Delta(t)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

---

†Мы пользуемся тем, что

$$\overset{+}{\log}(a+b)\le\overset{+}{\log}a+\overset{+}{\log}b+2,$$

$$\overset{+}{\log}(ab)\le\overset{+}{\log}a+\overset{+}{\log}b.$$

Устремляя здесь b к ∞, мы получаем, что и $\log|D_1(\xi+i\eta)|$ не больше стоящего справа интеграла.

Но тогда, очевидно,

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\frac{\log|D_1(i\eta)|}{\eta}\leq 0$$

и, следовательно, согласно (2.7), вообще

$$\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\frac{\log|D_1(\lambda)|}{|\lambda|}=0. \tag{4.12}$$

Таким образом, теорема I (введения) доказана.

Замечание. Легко показать, что функция $\Delta(\lambda)$ есть субгармоническая функция. В самом деле, согласно предложению A Чеботарева (§ 2),

$$\frac{D_0(\lambda)}{D_1(\lambda)}=\lambda\sum_j\frac{m_j}{\lambda_j(\lambda-\lambda_j)},$$

где

$$m_j=\frac{D_0(\lambda_j)}{D_1'(\lambda_j)}>0 \qquad (j=1,2,....),$$

а следовательно,

$$\Delta(\lambda)=\sum_j m_j\left|\frac{D_1(\lambda)}{\lambda-\lambda_j}\right|^2,$$

что и доказывает наше утверждение.

В силу (4.9) и (4.11),

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log\Delta(t)|}{1+t^2}\,dt<\infty,$$

и, пользуясь (4.12), можно показать, что

$$\log\Delta(\xi+i\eta)\leq\frac{\eta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\Delta(t)}{(t-\xi)^2+\eta^2}\,dt.$$

§ 5. Доказательство теорем II, III

1. Пусть

$$\cdots \lambda_{-2}(b) < \lambda_{-1}(b)\ (< 0 <) < \lambda_0(b) < \lambda_1(b) < \cdots$$

— последовательные нули целой функции $D_1(b;\lambda)$. Среди них имеется только конечное число отрицательных.

Обозначим через $n_+(b;r)$ количество чисел $\lambda_j(b)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, заключенных в замкнутом интервале $(0, r)$. Согласно формуле (1.26),

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(b;r)}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\pi}\int_0^b \sqrt{\rho}\, dx. \tag{5.1}$$

Покажем, что всегда между $\lambda_j(b)$ и $\lambda_{j+1}(b)$ $(j = 0, 1, 2\ldots)$ заключен по крайней мере один корень $D_1(\lambda)$.

Для этого заметим, что $E_1(\lambda) / D_1(\lambda)$ при любом λ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ лежит на окружности $C(\lambda)$, которая заключена внутри окружности $C(b;\lambda)$, имеющей уравнение (1.20); так как при этом точкам w изнутри $C(b;\lambda)$, по формуле (1.20), соответствуют точки τ верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\tau > 0$, то из равенства

$$\frac{E_0(b;\lambda)\tau(\lambda) + E_1(b;\lambda)}{D_0(b;\lambda)\tau(\lambda) + D_1(b;\lambda)} = \frac{E_1(\lambda)}{D_1(\lambda)} \tag{5.2}$$

определяется мероморфная функция $\tau(\lambda)$, удовлетворяющая условию: $\operatorname{Im}\tau(\lambda)/\operatorname{Im}\lambda > 0$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$.

С другой стороны, так как $D_0(b;\lambda)$ и $D_1(b;\lambda)$ служат соответственно первым и вторым знаменателем некоторой специальной матрицы, то, по теореме $\mathfrak{A}$ § 3, $\operatorname{Im}\{D_1(b;\lambda) / D_0(b;\lambda)\}$: $\operatorname{Im}\lambda > 0$ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$.

Таким образом, мероморфная функция

$$\Phi(\lambda) = -\frac{D_1(b;\lambda)\,\tau(\lambda) + D_0(b;\lambda)}{D_1(b;\lambda)\,\tau(\lambda)} = -\frac{D_0(b;\lambda)}{D_1(b;\lambda)} - \frac{1}{\tau(\lambda)}$$

обладает свойством: $\operatorname{Im}\Phi(\lambda)/\operatorname{Im}\lambda > 0$.

У такой функции нули и полюсы перемежаются (см. § 2, п.1). С другой стороны, всякий нуль функции $D_1(b;\lambda)$ является полюсом функции $\Phi(\lambda)$, так как все вычеты у функций $D_1(b;\lambda)/ / D_0(b;\lambda)$ и $-1/\tau(\lambda)$ — одного знака (отрицательны). Следовательно, между каждыми двумя нулями функции $D_1(b;\lambda)$ лежит, по крайней мере, один нуль функции $\Phi(\lambda)$, т.е. нуль функции $D_1(b;\lambda) + \tau(\lambda) D_0(b;\lambda)$. Остается показать, что всякий нуль функции $D_1(b;\lambda) + \tau(\lambda) D_0(b;\lambda)$ является нулем функции $D_1(\lambda)$, а следовательно, полюсом функции (5.2). Если бы это было не так, то у функций

$$D_1(b;\lambda) + \tau(\lambda) D_0(b;\lambda) \quad \text{и} \quad E_1(b;\lambda) + \tau(\lambda) E_0(b;\lambda)$$

был бы, по крайней мере, один общий нуль; но это невозможно, так как, согласно (1.29),

$$[D_1(b;\lambda) + \tau(\lambda) D_0(b;\lambda)] E_0(b;\lambda) -$$

$$-[E_1(b;\lambda) + \tau(\lambda) E_0(b;\lambda)] D_0(b;\lambda) = 1.$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Обозначим через $n_+(r)$ число нулей $D_1(\lambda)$ в интервале $(0, r)$. Согласно доказанному,

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} \geq \varliminf_{r\to\infty} \frac{n_1(b;r)}{\sqrt{r}}.$$

Вспоминая (5.1) и то, что здесь b — произвольное положительное число, заключаем, что[†]

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} \geq \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx. \tag{5.3}$$

[†]Читатель, знакомый с теорией определенного случая для уравнения (!), обнаружит, что из наших рассуждений следует, что и для этого случая всякий раз, когда спектр краевой задачи, состоящий из уравнения $y'' + gy + \lambda\rho y = 0$ и граничного условия $W(y,\varphi)|_{x=0} = 0$, дискретен, соотношение (5.3) сохраняет силу.

2. Перенумеруем нули $D_1(\lambda)$ так, что

$$\cdots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1}(< 0 <) < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$$

Согласно теореме $\mathfrak{B}$ (§ 2),

$$\frac{1}{D_1(\lambda)} = 1 + \lambda \sum_j \frac{1}{D_1'(\lambda_j)\lambda_j(\lambda - \lambda_j)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{D_1(\lambda^2)} = 1 + \lambda \sum_j \frac{1}{2D_1'(\lambda_j)\lambda_j} \left\{ \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda_j}} + \frac{1}{\lambda + \sqrt{\lambda_j}} \right\}.$$

Поэтому, если

$$\sum_{\lambda_j<0} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} < \infty, \tag{5.4}$$

то к функции $D_1(\lambda^2)$ применимо предложение C (§ 2), в силу которого

$$D_1(\lambda^2) \in (N).$$

Величина $n_+(r)$ дает число нулей функции $D_1(\lambda^2)$ в секторе

$$0 \le |\lambda| \le \sqrt{r}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg\lambda < \frac{\pi}{2}$$

и поэтому, согласно предложению E (§ 2), в рассматриваемом случае существует конечный предел:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\pi} \overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}} \frac{\log|D_1(\lambda^2)|}{|\lambda|} = \frac{1}{\pi} \lim_{r\to\infty} \frac{\log|D_1(-r)|}{\sqrt{r}}. \tag{5.5}$$

Таким образом, (5.4) влечет соотношение:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{\rho}\, dx \le \lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{\sqrt{r}} < \infty. \tag{5.6}$$

Для доказательства того, что здесь имеет место знак равенства, придется воспользоваться рассуждениями того же типа, что и в § 4, причем здесь они несколько усложнятся из-за того, что функции $D_k(b;\lambda^2)$ $(k=0,1)$ имеют, кроме вещественных нулей, также мнимые нули, число которых может неограниченно возрастать с возрастанием b.

3. Очевидно,

$$\lim_{b\to\infty}\lambda_j(b)=\lambda_j \quad (j=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Так как, по доказанному, между всякими двумя нулями функции $D_1(b;\lambda)$ лежит по крайней мере один нуль функции $D_1(\lambda)$, то

$$\lim_{b\to\infty}\sum_{\lambda_j(b)<0}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_j(b)|}}=\sum_{\lambda_j<0}\frac{1}{\sqrt{|\lambda_j|}} \quad (<\infty).$$

Отсюда уже нетрудно заключить, что при любом λ

$$\lim_{b\to\infty}\prod_{\lambda_j(b)<0}\frac{i\sqrt{|\lambda_j(b)|}-\lambda}{i\sqrt{|\lambda_j(b)|}+\lambda}=\prod_{\lambda_j<0}\frac{i\sqrt{|\lambda_j|}-\lambda}{i\sqrt{|\lambda_j|}+\lambda}.$$

Аналогичное можно утверждать относительно нулей $D_0(b;\lambda)$ и $D_0(\lambda)$, если учитывать, что нули $D_0(\lambda)$ перемежаются с нулями $D_1(\lambda)$ и, следовательно, для них также справедливо (5.4).

Поэтому, если

$$\cdots<\gamma_{-2}(b)<\gamma_{-1}(b)<\gamma_0(b)=0<\gamma_1(b)<\gamma_2(b)<\cdots$$

— последовательные нули функции $F(b;\lambda)=D_0(b;\lambda)D_1(b;\lambda)$, а

$$\cdots<\gamma_{-2}<\gamma_{-1}<\gamma_0=0<\gamma_1<\gamma_2<\cdots$$

— последовательные нули функции $F(\lambda)=D_0(\lambda)D_1(\lambda)$, то

$$\lim_{b\to\infty}\prod_{\gamma_j(b)<0}\frac{i\sqrt{|\gamma_j(b)|}-\lambda}{i\sqrt{|\gamma_j(b)|}+\lambda}=\prod_{\gamma_j<0}\frac{i\sqrt{|\gamma_j|}-\lambda}{i\sqrt{|\gamma_j|}+\lambda}. \tag{5.7}$$

Так как

$$\lim_{b\to\infty}\gamma_j(b)=\gamma_j \quad (j=0,\pm1,\pm2,\ldots),$$

то, очевидно, равенство (5.7) не нарушится, если в произведениях, стоящих в (5.7), будут перемножаться только дроби, для которых $\gamma_j(b) < -1$.

Замечая, что, в силу (5.7), величина

$$b = \int_0^b \sqrt{\rho}\, dx$$

есть тип целых функций $D_0(b;\lambda^2)$ и $D_1(b;\lambda^2)$, которые, на основании предложения С (§ 2) принадлежат классу (N), можно будет написать для функции $f(b;\lambda^2)$ следующее равенство (см. § 2, п.3):

$$\log|F(b;\lambda^2)| = \log \prod_{\gamma_j(b)<-1} \left| \frac{\sqrt{|\gamma_j(b)|}i - \lambda}{\sqrt{|\gamma_j(b)|}i + \lambda} \right| + 2h_b(\eta - 1) +$$

$$+\frac{\eta - 1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log|F(b;(t+i)^2)|}{|\lambda - t - i|^2} dt \qquad (\eta = \operatorname{Im}\lambda > 1). \tag{5.8}$$

А так как, в силу (4.4),

$$\Delta(b;(t+i)^2) \le \frac{1}{2|t|}|F(b;(t+i)^2)|,$$

то из (5.8) можно получить, что

$$\frac{\eta - 1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\Delta(b;(t+i)^2)}{|\lambda - t - i|^2} dt < M(b;\lambda) \qquad (\eta = \operatorname{Im}\lambda > 1), \tag{5.9}$$

где $M(b;\lambda)$ — некоторая величина, стремящаяся к конечному пределу при $b \to \infty$.

С другой стороны, в силу (4.9),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\log}\,\Delta(b;(t+i)^2)}{|\lambda - t - i|^2} dt < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\log}\, p((t+i)^2)}{|\lambda - t - i|^2} dt < \infty\,.$$

Отсюда и из (5.9) легко заключим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\ \Delta((t+i)^2)}{|\lambda - t - i|^2}\, dt < \infty.$$

Так как для $D_1\,(b;\lambda^2)$ можно написать равенство, аналогичное (5.8), то

$$\log|D_1\,(b;\lambda^2)| \le \frac{\eta-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\ |D_1(b;(t+i)^2)|}{|\lambda - t - i|^2} dt + h_b(\eta-1)$$

$$(\eta = \operatorname{Im}\lambda > 1).$$

В силу (4.5), будем, далее, иметь

$$\log|D_1\,(b;\lambda^2)| \le$$

$$\le \frac{\eta-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\overset{+}{\log}\ L + \log(1+t^2) + \overset{+}{\log}\ \Delta((t+i)^2)}{|\lambda - t - i|^2} dt + h_b(\eta-1).$$

Переходя к пределу при $b \to \infty$, найдем, наконец, что

$$\log|D_1(\lambda^2)| \le (\eta-1)\int_0^{\infty} \sqrt{\rho}\ dx +$$

$$+\frac{\eta-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+\overset{+}{\log}\ L + \log(1+t^2) + \overset{+}{\log}\ \Delta((t+i)^2)}{|\lambda - t - i|^2} dt$$

$$(\lambda = \xi + i\eta, \quad \eta > 1).$$

Отсюда

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log|D_1(-r)|}{\sqrt{r}} \le \int_0^{\infty} \sqrt{\rho}\ dt\,.$$

Сопоставляя это неравенство с (5.5) и (5.6), заключаем, что в (5.6) имеет место знак равенства.

Теорема II доказана.

Как отмечалось во введении, теорема III есть непосредственное следствие теоремы II и соотношения (5.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Weyl H.* Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. — 1910. — V.68. — P.220–269.

[2] *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям. — М.–Л.: ГТТИ, 1950.

[3] *Titchmarsch E.C.* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations. — Oxford, 1946.

[4] *Крейн М.Г.* О краевой задаче Штурма–Лиувилля в интервале и об одном классе интегральных уравнений // Докл. АН СССР. — 1950. — Т.LXXIII, №6. — С.1125–1128.

[5] *Чеботарев Н.Г., Мейман Н.Н.* Проблема Русса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1949. — Т.XXVI.

[6] *Riesz M.* Sur le probléme des moments // Arkiv för mat., astr. och fys. — 1923. — V.17, N 16. — S.1–52.

[7] *Schohat J.A., Tamarkin J.D.* The problem of moments. — New York, 1943.

[8] *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.–Л.: ГТТИ, 1950.

[9] *Крейн М.Г.* Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.LXXVI, №3. — С.345–348.

[10] *Крейн М.Г.* К теории целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1947. — Т.11. — С.309–326.

[11] *Привалов И.И.* Граничные свойства аналитических функций. — М.–Л.: ГТТИ, 1950.

[12] *Levinson N.* Gap and density Theorems. — New York, 1940.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИССЛЕДОВАНИЙ СТИЛТЬЕСА

(Доклады АН СССР. — 1952. — Том LXXXVII, №6)

Как уже отмечалось (см. [1], с.345–349, и [2]), исследования Стилтьеса [3] о непрерывных дробях можно истолковать как исследование колебаний натянутой нити, нагруженной бесконечным числом бусинок. Такое толкование позволяет рассматривать эти исследования как составную часть общей теории колебаний струны (длины $\ell \leq \infty$), произвольным образом нагруженной массами (с общей массой $M \leq \infty$). Здесь излагаются основные положения этой общей теории в их чисто аналитическом аспекте; механическая интерпретация этих положений из-за недостатка места опускается. Часть полученных результатов следует рассматривать так же как дальнейшее обобщение и развитие вейлевской теории [4] сингулярной задачи Штурма–Лиувилля с полуограниченным спектром. Существенно новыми являются наши результаты по обратным задачам (теорема 3, 4), потребовавшие наиболее тонких средств.

1. Пусть

$$\sigma(x) = \sigma(x-0) \qquad (0 \leq x < \ell; \quad 0 < \ell \leq \infty; \quad \sigma(0) = 0)$$

— некоторая неубывающая функция. Такой функции можно сопоставить две непрерывные функции $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(x;\lambda)$ $(0 \leq x < \ell)$, определяемые при любом комплексном значении параметра λ соотношениями:

$$\varphi(x;\lambda) = 1 - \lambda \int_0^x (x-s)\,\varphi(s;\lambda)\,d\sigma(s),$$

$$\psi(x;\lambda) = x - \lambda \int\limits_0^x (x-s)\,\psi(s;\lambda)\,d\sigma(s)\,.$$

В любой точке x $(0 \le x < \ell)$ эти функции будут иметь правые производные $\varphi'_+(x;\lambda)$, $\psi'_+(x;\lambda)$, а также левые $\varphi'_-(x;\lambda)$, $\psi'_-(x;\lambda)$ (если $x > 0$), причем в точках непрерывности функции $\sigma(x)$ обе производные каждой из функций φ, ψ будут совпадать. Понимая под $\varphi'(x;\lambda)$ любое число, лежащее между $\varphi'_-(x;\lambda)$ и $\varphi'_+(x;\lambda)$, будем иметь

$$\varphi'_\pm(x;\lambda) = \lim_{s\to x\pm 0} \varphi'(s;\lambda)$$

и аналогичное для функции $\psi(x;\lambda)$.

Обозначим через L_σ гильбертово пространство всех σ-измеримых функций $f(x)$ $(0 \le x < \ell)$ с σ-интегрируемым квадратом. Функцию $f \in L_\sigma$ будем называть обрывающейся, если она тождественно равна нулю в некоторой левой окрестности конца $x = \ell$. Множество всех обрывающихся функций $f \in L_\sigma$ обозначим через L^0_σ.

Неубывающую функцию $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ назовем спектральной функцией распределения масс σ, если отображение $U_\tau : f \to F$, где $f \in L^0_\sigma$, и

$$F(\lambda) = \int\limits_0^\ell f(x)\varphi(x;\lambda)d\sigma(x) \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

есть изометрическое отображение L^0_σ в гильбертово пространство L_τ всех τ-измеримых с τ-интегрируемым квадратом функций $F(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$. Так как L^0_σ плотно в L_σ, то это отображение может быть всегда расширено до изометрического отображения всего L_σ в L_τ.

Спектральная функция τ называется ортогональной, если U_τ отображает все L_σ на все L_τ.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1)

$$\sigma(\ell) = \lim_{x\to\ell-0}\sigma(x) < \infty, \qquad \int_0^\ell x^2 d\sigma(x) < \infty. \tag{1}$$

2) По крайней мере для одного невещественного λ

$$\int_0^\ell |\varphi(x;\lambda)|^2 d\sigma(x) < \infty.$$

3) Для любого λ *(по крайней мере для одного* λ*)*

$$\int_0^\ell |\varphi(x;\lambda)|^2 d\sigma(x) < \infty, \quad \int_0^\ell |\psi(x;\lambda)|^2 d\sigma(x) < \infty.$$

4) При $x \to \ell$ $(x < \ell)$ *функции параметра* λ $\varphi'(x;\lambda)$, $\psi'(x;\lambda)$:

$$\varphi(x;\lambda) - x\varphi'(x;\lambda), \qquad \psi(x;\lambda) - x\psi'(x;\lambda)$$

стремятся равномерно в каждом круге $|\lambda| \le R$ *к некоторым целым функциям* $\Phi_1(\lambda)$, $\Psi_1(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$, $\Psi(\lambda)$, *удовлетворяющим соотношению* $\Phi(\lambda)\Psi_1(\lambda) - \Phi_1(\lambda)\Psi(\lambda) \equiv 1$. *Порядок роста этих предельных функций* $\le 1/2$, *нули их неотрицательны и, если обозначить число нулей любой предельной функции в интервале* $(0, r)$ *через* $n(r)$, *то*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\ell \sqrt{\frac{d\sigma}{dx}}\, dx\,.$$

5) Функции σ *отвечают по крайней мере две различные спектральные функции* τ.

2. В случае (1) легко также получить правило построения всех спектральных функций τ, отвечающих данному распределению σ. Однако нас в дальнейшем будут интересовать лишь положительные спектральные функции τ (т.е. такие спектральные функции

τ, для которых $\tau(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$), и мы приведем правило получения всех этих функций.

Множество всех положительных спектральных функций данного распределения σ будем обозначать через S_σ. Обозначим, кроме того, через E_σ множество точек роста функции σ. Для упрощения дальнейших формулировок всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 \in E_\sigma$ и $\ell \in \overline{E}_\sigma$ ($\overline{E}_\sigma$ — замыкание E_σ).

Теорема 2. *Распределению σ всегда отвечают положительные спектральные функции τ_0 и τ_∞, такие, что при любом $\lambda \overline{\in} (0, \infty)$:*

$$\int_0^\infty \frac{d\tau_0(t)}{t-\lambda} = \lim_{x\to\ell} \frac{\psi(x;\lambda)}{\varphi(x;\lambda)}; \quad \int_0^\infty \frac{d\tau_\infty(t)}{t-\lambda} = \lim_{x\to\ell} \frac{\psi'(x;\lambda)}{\varphi'(x;\lambda)}.$$

Если $\tau_0 \neq \tau_1$ и $\tau \in S_\sigma$ отлично от τ_0, τ_1, то при любом $\lambda < 0$

$$\int_0^\infty \frac{d\tau_0(t)}{t-\lambda} < \int_0^\infty \frac{d\tau(t)}{t-\lambda} < \int_0^\infty \frac{d\tau_\infty(t)}{t-\lambda}.$$

Совпадение τ_0 и τ_1 (следовательно, единственность положительной спектральной функции τ) имеет место в том и только в том случае, когда по крайней мере одна из величин ℓ и $\sigma(\ell)$ равна ∞.

Если $\ell < \infty$ и $\sigma(\ell) < \infty$, то совокупность S_σ исчерпывается совокупностью функций τ, определяемых из равенства:

$$\frac{\psi(\ell;\lambda) + \Omega(\lambda)\psi'(\ell;\lambda)}{\varphi(\ell;\lambda) + \Omega(\lambda)\varphi'(\ell;\lambda)} = \int_0^\infty \frac{d\tau(t)}{t-\lambda} \quad (\lambda \overline{\in} (0,\infty)), \tag{2}$$

где $\Omega(\lambda)$ — какая-либо функция вида

$$\Omega(\lambda) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\omega(t)}{t-\lambda} \qquad (\lambda \overline{\in} (0,\infty)), \tag{3}$$

причем $0 \le \gamma \le \infty$, *а* $\omega(t)$ $(0 \le t < \infty)$ — *неубывающая функция, удовлетворяющая условию сходимости интеграла в правой части (3).*

Функция $\tau \in S_\sigma$ будет ортогональной в том и только в том случае, когда ей соответствующая функция $\Omega(\lambda)$ вырождается в константу γ $(0 \le \gamma \le \infty)$.

Если $\tau \in S_\sigma$, то через $R_\tau(\lambda)$ обозначим интеграл, стоящий в правой части (2).

Нами доказано, что для любых x, $s \in E_\sigma$, $x < S$:

$$\varphi(x;\lambda)\left[\psi(s;\lambda) - R_\tau(\lambda)\varphi(s;\lambda)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\varphi(x;\mu)\varphi(s;\mu)}{\mu-\lambda} d\tau(\mu) \qquad (\lambda \overline{\in} (0,\infty)).$$

В частности, при $x = 0$, $s \in E_\sigma$ получаем

$$\psi(s;\lambda) = \int_0^\infty \frac{\varphi(s;\lambda)\varphi(s;\mu)}{\lambda-\mu} d\tau(\mu) \qquad (\lambda \overline{\in} (0,\infty), \quad s \in E_\sigma).$$

3. *Случай Стилтьеса.* Этот случай характеризуется тем, что точки роста функции σ образуют последовательность: $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots$, имеющую пределом точку ℓ. Функции σ можно теперь сопоставить бесконечную непрерывную дробь:

$$\frac{1\ \ |}{|-m_1\lambda} + \frac{1\ \ |}{|\ \ d_1} + \frac{1\ \ |}{|-m_2\lambda} + \frac{1\ \ |}{|\ \ d_2} + \cdots, \tag{4}$$

где

$$m_j = \sigma(x_{j-1}+0) - \sigma(x_{j-1}), \quad d_j = \ell_j - \ell_{j-1} \quad (j = 1,2,\ldots).$$

Если $P_j(\lambda), Q_j(\lambda)$ $(j = 1,2,\ldots)$ суть числители и знаменатели последовательных подходящих дробей непрерывной дроби (4), то при $j = 1,2,\ldots$

$$\varphi(x_j;\lambda) = P_{2j}(\lambda), \quad \varphi'(x_j - 0) = P_{2j-1}(\lambda),$$

$$\psi(x_j;\lambda) = Q_{2j}(\lambda), \qquad \psi'(x_j - 0;\lambda) = Q_{2j-1}(\lambda).$$

В каждом интервале (x_j, x_{j+1}) $(j = 0,1,2,...)$ функции φ, ψ линейны. Теоремы 1, 2 немедленно доставляют для случая Стилтьеса основные положения его теории, а также ряд результатов, оставшихся ему неизвестными.

4. Как вытекает из исследований Стилтьеса [3], неубывающая функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(0 \le \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ будет спектральной функцией некоторого распределения масс σ, о котором шла речь в п.3, в том и только том случае, когда она обладает конечными степенными моментами всех порядков. В общем же случае имеет место:

Теорема 3. *Для того, чтобы неубывающая функция* $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(0 \le \lambda < \infty,\ \ \tau(0) = 0)$ *была положительной спектральной функцией некоторого распределения* σ, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda} < \infty. \tag{5}$$

При выполнении этого условия существует одно и только одно распределение $\sigma_M(x)$ $(0 \le x < \ell_M)$, *для которого* $\tau(\lambda)$ *является положительной ортогональной спектральной функцией.*

Всякое иное распределение $\sigma(x)$ $(0 \le x < \ell)$, *для которого* $\tau \in S_\sigma$, *имеет своим продолжением* σ_M, *т.е.* $\ell_M > \ell$, $\sigma(x) = \sigma_M(x)$ $(0 \le x < \ell)$.

5. Совокупность всех неубывающих функций $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(0 \le \lambda < \infty,\ \ \tau(0) = 0)$, удовлетворяющих условию (5), обозначим через $\mathfrak{T}$. Каждой функции $\tau \in \mathfrak{T}$ отнесем функцию

$$\Phi_\tau(t) = \int\limits_0^\infty \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\, d\tau(\lambda) \qquad (0 \le t < \infty).$$

Теорема 4. *Пусть* $0 < T \le \infty$. *Для того, чтобы функция* $\tau_0 \in \mathfrak{T}$ *была положительной спектральной функцией некоторого* *распределения* $\sigma(x)$ $(0 \le x < \ell)$, *удовлетворяющего условию:*

$$\int_0^\ell \sqrt{\sigma'(x)}\, dx = T,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого T_1 $(0 < T_1 < T)$ *существовала функция* $\tau_1 \in \mathfrak{T}$, *отличная от* τ_0 *и такая, что*

$$\Phi_{\tau_1}(t) = \Phi_{\tau_0}(t) \quad (0 \le t \le 2T_1)\,.$$

При выполнении этого условия найдется одно и только одно распределение $\sigma_0(x)$ $(0 \le x < \ell)$, *для которого* $\tau_0 \in S_{\sigma_0}$ *и производная которого* $\sigma_0'(x)$ *не равна почти всюду нулю ни в каком интервале* $(\ell - \varepsilon, \ell]$ $(\varepsilon > 0)$. *Всякая иная функция* $\tau \in \mathfrak{T}$ *будет принадлежать* S_{σ_0} *в том и только том случае, если* $T < \infty$ *и* $\Phi_\tau(t) = \Phi_{\tau_0}(t)$ *при* $0 \le t < 2T$.

Для лучшего уяснения смысла теоремы 4 ее следует сопоставить с теоремами 4, 5, 6 из [5].

На основании теоремы 4 можно, например, утверждать, что если функция $\Phi_\tau(t)$ $(0 \le t < \infty)$ является неубывающей выпуклой кверху функцией или если эта функция имеет всюду абсолютно непрерывную производную и $\Phi_\tau'(0) > 0$, то ей отвечает распределение σ $(\tau \in S_\sigma)$ с $T = \infty$, причем во втором случае можно утверждать, что это распределение имеет абсолютно непрерывную плотность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Гантмахер Ф.Г., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 1950.

[2] *Крейн М.Г.* // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т.16, №5.

[3] *Стилтьес Т.* Исследование о непрерывных дробях, 1936.

[4] *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям, 1950.

[5] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.82, №5.

О ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Доклады АН СССР. — 1953. — Том LXXXVIII, № 3)

В качестве одного из приложений метода направляющих функционалов [1, 2] нами было получено в 1945 г. следующее предложение:

Для того чтобы непрерывная функция $\Phi(t)$ $(0 \leq t < 2\ell)$ *допускала представление*

$$\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}\, t}{\lambda}\, d\tau(\lambda), \tag{1}$$

где $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \ \tau(0) = 0)$ — *некоторая неубывающая функция, необходимо и достаточно, чтобы ядро* $\Phi(t+s) - \Phi(|t-s|)$ $(0 \leq s,\ \ t < \ell)$ *было положительно определенным.*

Оказывается, теория представления функций в виде (1) дает ключи к решению основных вопросов так называемой обратной краевой задачи (для одномерных уравнений второго порядка).

1. Пусть $0 < \ell \leq \infty$, а $q(x)$ и $\rho(x)$ $(0 \leq x < \ell)$ — функции, измеримые и суммируемые в каждом интервале $(0, a)$, где $a < \ell$; пусть, кроме того, функция $\rho(x) \geq 0$ $(0 \leq x < \ell)$ и ни на каком подинтервале интервала $(0, \ell)$ не обращается в нуль почти всюду.

Выбрав какое-либо вещественное h, рассмотрим дифференциальную систему:

$$\begin{gathered} y'' - q(x)y + \lambda\rho(x) = 0, \\ y'(0) - hy(0) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где λ — комплексный параметр. Пусть $\varphi(x;\lambda)$ $(0 \le x < \ell)$ — решение этой системы, нормированное условиями:

$$\varphi(0;\lambda) = 1, \quad \varphi'(0;\lambda) = h. \tag{3}$$

Обозначим через $\sigma(x)$ $(0 \le x < \ell)$ интеграл от $\rho(x)$ в пределах от 0 до x, а через L_σ — гильбертово пространство всех σ-измеримых функций $f(x)$ $(0 \le x < \ell)$, имеющих σ-интегрируемый квадрат:

$$\int_0^\ell |f(x)|^2 d\sigma(x) < \infty.$$

Через L_σ^0 обозначим совокупность обрывающихся функций $f \in L_\sigma$ (функция $f \in L_\sigma$ называется обрывающейся, если она в некоторой левой окрестности конца $x = \ell$ обращается тождественно в нуль.)

Как известно, функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;\ \tau(0) = 0)$ называется спектральной функцией системы (2); если отображение $U_\tau : f \in F$, где $f \in L_\sigma^0$, а

$$F(\lambda) = \int_0^\ell f(x)\varphi(x;\lambda)d\sigma(x) \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

есть изометрическое отображение L_σ^0 в гильбертово пространство L_τ функций τ-измеримых и имеющих τ-интегрируемый квадрат.

Обозначим через S_h совокупность всех спектральных функций τ системы (2).

Изометрическое отображение U_τ однозначно расширяется до изометрического отображения $\widetilde{U}_\tau$ всего L_σ в L_τ.

Спектральная функция τ называется ортогональной, если $\widetilde{U}_\tau$ отображает все L_σ на все L_τ.

Теорема 1. *Для любого $\tau \in S_h$:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \cos\sqrt{\lambda}\, t)\varphi^2(x;\lambda)}{\lambda}\, d\tau(\lambda) < \infty \tag{4}$$

при

$$0 \le x < \ell, \quad 0 \le t < 2\int\limits_x^\ell \sqrt{\rho(\xi)}\,d\xi. \tag{5}$$

Более того, интеграл (4) сходится равномерно в каждой замкнутой части области (5).

Теорема 1 была подсказана некоторыми соображениями механического характера.

Представим себе, что между точками 0 и ℓ единичной силой натянута струна, элемент dx которой имеет массу $d\sigma = \rho dx$ и подпирается упругим основанием с силой $q(x)\,y(x)\,dx$ $(y(x)$ — поперечный прогиб струны). Пусть при этом левый конец струны может свободно скользить по дуге, кривизна которой равна h. Тогда интеграл (4) будет давать перемещение точки x за время t под действием единичной силы, приложенной в этой точке к первоначально покоившейся струне.

Второе условие в (5) становится понятным, если учесть, что интеграл от $\sqrt{\rho(\xi)}$ в пределах от x до ℓ есть время пробега от x до ℓ волны, вызванной силой, приложенной в точке x.

Заметим, что все предыдущие определения сохраняют смысл, если граничное условие в (2) заменить условием $y(0) = 0$ и, соответственно, функцию φ нормировать условиями $\varphi(0;\lambda) = 0$, $\varphi'(0;\lambda) = 1$. Для этого случая теорема 1 также справедлива.

2. Если в (4) положить $x = 0$, то мы убедимся в сходимости интеграла, фигурирующего в следующем предложении:

Теорема 2. *Значения функции*

$$\Phi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\,d\tau(\lambda) \tag{6}$$

при

$$0 \le t < 2T \quad \left(T = \int\limits_0^\ell \sqrt{\rho(x)}\,dx\right)$$

не зависят от выбора функции $\tau \in S_h$.

Функцию $\Phi(t)$ $(0 \le t < 2T)$ будем называть переходной функцией системы (2).

Теорема 3. *Функциями $\tau \in S_h$ исчерпываются все неубывающие функции $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;$ $\tau(0) = 0)$, дающие представление функции $\Phi(t)$ $(0 \le t < 2T)$ в виде (6).*

Используя один недавний результат Б.М. Левитана и Н.Н. Меймана [3], можно, на основании теоремы 3, утверждать, что если для некоторой спектральной функции τ системы (2) с $T = \infty$ выполняется условие

$$\log\left(\int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left(\sqrt{|\lambda|}\,t\right) d\tau(\lambda)\right) = 0(t^2) \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{7}$$

то она является единственной (а следовательно, и ортогональной) спектральной функцией системы (2).

Для случая $\ell = \infty$, $\rho(x) \equiv 1$ $(0 \le x < \infty)$ условие (7) указано в заметке [3], но только как признак ортогональности (а не единственности) спектральной функции τ.

Общая теорема 4 из [2] дает немедленно следующий результат (ср. с [4], с.344–347).

Теорема 4. *Для того чтобы $\tau \in S_h$ была ортогональной спектральной функцией, необходимо и достаточно, чтобы линейная оболочка функций*

$$f_t(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}} \qquad (0 < t < T)$$

была плотной в L_τ.

3. Заметим, что для случая дифференциальной системы

$$\begin{aligned} &y'' - q(x)\,y + \lambda\,y = 0; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0 \le x < \ell) \\ &y'(0) - hy(0) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

сходимость интеграла (6) при $0 \le t < 2\ell$ в пределах от $-\infty$ до 0 была установлена В.А. Марченко [5], а в пределах от 0 до ∞ — еще раньше Б.М. Левитаном [6].

В случае (8) можно дать правило непосредственного построения функции $\Phi(t)$ при помощи некоторого решения соответствующего уравнения в частных производных. Приведем это правило для случая $h = 0$, когда оно становится особенно простым. Пусть $u(\xi, \eta)$ $(0 \leq \xi, \quad \eta < \ell)$ есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + q(|\xi - \eta|)\, u = 0 \qquad (0 \leq \xi, \quad \eta < \ell),$$

удовлетворяющее условиям:

$$u(0, \eta) = u(\xi, 0) = 1 \quad (0 \leq \xi, \quad \eta < \ell).$$

Тогда

$$\Phi(t) = \int_0^t u\left(\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) d\tau.$$

Аналогичное правило с некоторым усложнением получается для $h \neq 0$. Отсюда:

Теорема 5. *Переходная функция $\Phi(t)$ системы (8) имеет вторую абсолютную непрерывную производную, при этом*

$$\Phi'(0) = 1, \qquad \Phi''(0) = -h\,.$$

Если $\Phi(t)$ $\quad(0 \leq t < 2\ell)$ имеет непрерывную или абсолютно непрерывную производную $\Phi^{(n+3)}(t)$ $(n \geq 0)$, то в этом и только этом случае функция $q(x)$ $(0 \leq x < 2\ell)$ имеет непрерывную или, соответственно, абсолютно непрерывную производную $q^{(n)}(x)$.

Менее законченный результат такого рода получен И.М. Гельфандом и Б.М. Левитаном в их важной работе [6]. Точно так же методы этих авторов позволили им приблизиться, но не позволили окончательно установить следующую теорему:

Теорема 6. *Для того, чтобы данная неубывающая функция $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(-\infty < \lambda < \infty;$ $\tau(0) = 0)$ была спектральной функцией некоторой системы (8), необходимо и достаточно, чтобы ей соответствовала по формуле (6) функция $\Phi(t)$ $(0 \leq t < 2\ell)$, имеющая две абсолютно непрерывные производные, причем $\Phi'(0) = 1$.*

Заметим, что единственность определения константы h и функции $q(x)$ $(0 \leq x < \ell)$ по спектральной функции τ системы (8) доказана В.А. Марченко [5]. Он, правда, рассматривал только ортогональные спектральные функции τ, но от этого ограничения можно избавиться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1946. — Т.53, № 1.

[2] *Крейн М.Г.* // Зб. праць Інституту математики АН УРСР. — 1948. — № 10.

[3] *Левитан Б.М., Мейман Н.Н.* // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.81, № 5.

[4] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — Т.15 (309).

[5] *Марченко В.А.* // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1952. — № 1.

[6] *Левитан Б.М.* // Докл. АН СССР. — 1950. — Т.71, № 4.

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ЭФФЕКТИВНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ ПО ЕЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

(Доклады АН СССР. — 1953. — Том XCIII, №4)

Хотя в изучении проблемы восстановления одномерной краевой задачи второго порядка по ее спектральной функции в самое последнее время достигнуты значительные успехи [1–6], тем не менее до сих пор отсутствуют приемы эффективного решения этой проблемы для спектральных функций какого-либо пусть и специального, но достаточно широкого класса.

Настоящая заметка имеет целью в какой-то мере восполнить этот пробел (для случая краевых задач с положительным спектром).

1. Пусть S — некоторая струна, натянутая единичной силой между концами $x = 0$ и $x = L$ ($\leq \infty$). Обозначим через $M(x)$ массу открытого справа отрезка $[0, x)$ $(0 < x < L)$ струны S и положим $M(0) = 0$. Допуская существование у функции $M(x)$ интервалов постоянства, мы вместе с тем предположим, что $M\,(x) > 0$ при $x > 0$. Кроме того, предположим, что струна S не несет на своем правом конце сосредоточенной массы, а следовательно, ее полная масса $M(L)$ ($\leq \infty$) является пределом $M(x)$ при $x \to L$.

Если струна совершает поперечные свободные гармонические колебания по закону $Y\,(x,t) = y\,(x) \sin \sqrt{\lambda}\, t$, то амплитудная функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$y(x) = y(0) + y'(-0)x - \lambda \int\limits_0^x (x-s)y(s)dM(s) \quad (0 \leq x < L), \quad (1)$$

где $y'(-0)$ — некоторая константа. Эта константа будет совпадать с $y'(0) = y'(+0)$ в том и только в том случае, когда $M(+0) = 0$.

Обозначим через $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(s;\lambda)$ решения уравнения (1), соответственно, при $y(0) = 1$, $y'(-0) = 0$ и $y(0) = 0$, $y'(-0) = 1$. Тогда (см. [4])

$$\Gamma(\lambda) = \lim_{x \to L} \frac{\psi(x;\lambda)}{\varphi(x;\lambda)} = \int\limits_0^\infty \frac{d\tau(t)}{t-\lambda} \qquad (\lambda \overline{\in} (0,\infty)),$$

где $\tau(t) = \tau(t-0)$ $(0 \leq t < \infty,\ \ \tau(0) = 0)$ — некоторая неубывающая функция, которая в дальнейшем будет именоваться главной спектральной функцией струны S.

Если представить себе, что правый конец струны S неподвижно закреплен, а левый может свободно скользить по направлению, перпендикулярному к оси X, то $\Gamma(\lambda)$ будет коэффициентом диаметрической податливости (сокращенно: к.д.п.) струны S (см. [6]). Если струна S конечна $(L < \infty)$ и ее масса конечна $(M(L) < \infty)$, причем $0 < M(x) < M(L)$ при $0 < x < L$, то любая ее ортогональная спектральная функция с положительным спектром является одновременно главной спектральной функцией некоторой струны S^*, получающейся удлинением S на некоторый отрезок без массы.

Теорема 1. *Для того чтобы неубывающая функция $\tau(\lambda)$ $(0 \leq \lambda < \infty;\ \ \tau(0) = 0)$ была главной спектральной функцией некоторой струны S, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{1+\lambda} < \infty .$$

При выполнении этого условия струна S (т.е. ее функция $M(x)$) однозначно определяется функцией $\tau(\lambda)$.

Эта теорема входит составной частью в теорему 5 (из [4]), которая, однако, сформулирована неточно (она сформулирована для ортогональных спектральных функций вместо главных).

Отметим следующие соотношения:

$$L = \int_0^\infty \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda}, \qquad \tau(\infty) = \frac{1}{M(+0)},$$

а если $LM(L) = \infty$, то также $M(L) = \dfrac{1}{\tau(+0)}$.

2. Пусть S и S^* — две различные структуры, соответственно, длин L и L^* с функциями распределения масс $M(x)$ и $M^*(x)$ и главными спектральными функциями $\tau(\lambda)$ и $\tau^*(\lambda)$.

Теорема 2. *Имеют место следующие правила сравнения:*

1°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \tau(k\lambda)$ $(k > 0)$, *то*

$$L = kL^*, \quad M^*(x) = M(k^{-1}x).$$

2°. *Если* $\tau^*(\lambda) = k\tau(\lambda)$ $(k > 0)$, *то*

$$L^* = kL, \quad M^*(x) = k^{-1}M(k^{-1}x).$$

3°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \tau(\lambda) + \delta$ $(0 < \lambda < \infty;\ \delta \geq -\tau(+0))$, *то*

$$M^*(x) = \frac{M(\xi)}{1 - \delta M(\xi)} \qquad x = \int_0^\xi [1 - \delta M(s)]^2\, ds \quad (0 \leq \xi < L). \tag{2}$$

4°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \tau(\lambda - a)$ *при* $a \leq \lambda < \infty$ $(a > 0)$, *то*

$$M^*(x) = \int_0^\xi \varphi^2(s; -a)dM(s), \qquad x = \frac{\psi(\xi; -a)}{\varphi(\xi; -a)} \quad (0 \leq \xi < L). \tag{3}$$

5°. *Если* $\tau^*(\lambda) = \int_0^\lambda (\mu + a)d\tau(\mu)$ $(0 \leq \lambda < \infty)$, *где* $a \geq 0$, *то*

$$\begin{gathered} M^*(x) = \frac{1}{a^2}\int_0^\xi \frac{\varphi'^2(s; -a)}{\varphi^2(s; -a)}\, ds, \\ x = a^2 \int_0^\xi \frac{\varphi^2(x; -a)dM(x)}{\varphi'(x - 0; a)\varphi'(x + 0; a)}\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Смысл последних равенств при $a = 0$ выясняется путем раскрытия неопределенности, что дает

$$M^*(x) = \int_0^\xi M^2(s)\,ds, \qquad x = \frac{1}{M(+0)} - \frac{1}{M(\xi)}. \tag{5}$$

Заметим, что, если правило 5° выведено для частного случая $a = 0$, то для общего случая оно уже легко получится на основании правила 4°, которое, кстати, сохраняет смысл также и для $a < 0$, если $\tau(-a) = 0$.

Соотношения (2), (3), (4) и (5) имеют вид

$$M^*(x) = f(\xi), \qquad x = g(\xi) \quad (0 \le \xi < L),$$

где f, g — некоторые неубывающие непрерывные слева функции, причем, по крайней мере, одна из них непрерывна и слева. Поясним, что, если ξ_0 является точкой скачка функции g, то это следует понимать как то, что интервал $g(\xi_0 - 0) < x \le g(\xi_0 + 0)$ является интервалом постоянства функции $M^*(x)$; если же некоторый интервал $[\xi_1, \xi_2]$ является интервалом постоянства функции g $(g(\xi) < g(\xi_1) = g(\xi_2) < g(\eta)$ при $\xi < \xi_1 < \xi_2 < \eta)$, то это означает, что в точке $x_1 = g(\xi_1)$ у струны S имеется сосредоточенная масса: $M(x_1 + 0) - M(x_1 - 0) = f(\xi_2) - f(\xi_1)$.

Заметим, что правила 1°–5° являются обобщением некоторых результатов, найденных еще Стилтьесом (см. [7], гл.X). Получаются эти правила путем построения явного выражения функций φ, ψ струны S^* через функции φ, ψ струны S по заданной зависимости между τ и τ^*.

3. Пусть $\Gamma_\xi(\lambda)$ $(0 < \xi < L)$ означает к.д.п. части $[\xi, L)$ струны S. Тогда оказывается:

$$\Gamma(\lambda) = \frac{\psi'(\xi \pm 0; \lambda)\Gamma_{\xi\pm 0}(\lambda) + \psi(\xi; \lambda)}{\psi'(\xi \pm 0; \lambda)\Gamma_{\xi\pm 0}(\lambda) + \varphi(\xi; \lambda)}. \tag{6}$$

Пользуясь этим, найдем струну S со спектральной плотностью

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}\,Q(\lambda)} \quad (0 \le \lambda < \infty), \tag{7}$$

где $Q(\lambda)$ — многочлен, положительный при $\lambda \geq 0$ и $Q(0) = 1$.

В силу одного результата А.А. Маркова ([8], с.258–273) по многочлену $Q(\lambda)$ однозначно определяются многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ с неотрицательными простыми и перемежающимися нулями такие, что $\lambda Q(\lambda) = A^2(\lambda) + \lambda B^2(\lambda)$. Для B/A будем иметь разложение в непрерывную стилтьесовскую дробь:

$$\frac{B(-\lambda)}{A(-\lambda)} = \ell_p + \frac{1\ |}{|m_p\lambda} + \frac{1\ |}{|\ell_{p-1}} + \frac{1\ |}{|m_{p-1}\lambda} + \cdots + \frac{1\,|}{|\ell_1} + \frac{1\ |}{|m_1\lambda},$$

где p — степень $A(\lambda)$, $\ell_p \geq 0$, а все прочие ℓ_k и m_j $(k = 1, 2, ..., p-$ $-1;\ \ j = 1, 2, ..., p)$ положительны.

Рассмотрим струну S_Q, отрезок $[0, \ell]$ $(\ell = \ell_1 + \cdots + \ell_p)$ которой представляет собой нить, несущую массы $m_1, m_2, ..., m_p$, сосредоточенные, соответственно, в точках $x_1 = 0$, $x_2 = \ell_1$, $x_3 = \ell_1 + \ell_2, ..., x_p = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{p-1}$, а отрезок (ℓ, ∞) есть однородная струна единичной плотности.

Так как $\varphi\psi' - \psi\varphi' \equiv 1$ и для этой струны

$$\varphi'(\ell + 0; \lambda) = A(\lambda), \quad \varphi(\ell; \lambda) = B(\lambda), \quad \text{а} \quad \Gamma_\ell(\lambda) = i/\sqrt{\lambda},$$

то по формуле обращения Стилтьеса легко находим из (6), что у струны S_Q спектральная функция $\tau(\lambda)$ определяется формулой (7).

Применяя далее правило 5°, можно построить струну со спектральной плотностью:

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{P(\lambda)}{\pi\sqrt{\lambda}\, Q(\lambda)} \quad (0 \leq \lambda < \infty), \tag{8}$$

где $Q(\lambda)$ — многочлен, положительный при $\lambda \geq 0$, а $P(\lambda)$ — многочлен с вещественными неотрицательными нулями степени не высшей чем Q. Если степени P и Q равны, то соответствующая функция $M(x)$ будет аналитической; в противном случае она будет иметь конечное число точек скачков и будет аналитической на интервалах между этими точками.

Так, например, если

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(1 + h\lambda)}; \quad \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\pi(a\lambda^2 + b\lambda + 1)} \quad (0 \leq \lambda < \infty),$$

то, соответственно, находим:

$$L = 1/h;\ 1/m^2\ell$$

и

$$\frac{dM}{dx} = \left(\frac{h}{1-hx}\right)^4;\left(\frac{m^2\ell}{1-m^2\ell x}\right)^4 \frac{1}{(m+s)^2(m+\ell+s)^2},$$

где

$$m = \sqrt{2\sqrt{a}+b}, \quad \ell = \sqrt{a}/m,$$

$$s = \sqrt[3]{(m+\ell)^3 + \frac{3m^4\ell^2 x}{1-m^4\ell^2 x}} - m - \ell.$$

Следующий интересный пример получается, если выбрать в качестве P/Q дробно-линейную функцию. Пусть, например:

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\lambda+1}{1+m^2\lambda}\,\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (0 \le \lambda < \infty; \quad m > 0)\,. \tag{9}$$

Вычислив соответствующую функцию $M(x)$ и затем преобразовав известным способом уравнение струны

$$y'' + \lambda\rho y = 0 \qquad \left(\rho = \frac{dM}{dx}\right)$$

к виду

$$y'' + qy + \lambda y = 0,$$

мы найдем, что равенством (9) определяется спектральная функция дифференциальной системы

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2(1-m^2)}{(\operatorname{ch} x + m \operatorname{sh} x)^2}\, y + \lambda\, y = 0,$$

$$my'(0) + (m^2-1)\, y(0) = 0.$$

Это утверждение справедливо также при $m = 0$. Впрочем, написанное дифференциальное уравнение имеет линейно-независимые решения:

$$y = e^{\pm i\sqrt{\lambda}\,x}\left(\frac{\operatorname{sh} x + m \operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x - m \operatorname{sh} x} \pm i\sqrt{\lambda}\,\right),$$

и поэтому без труда может быть вычислена его спектральная функция, отвечающая любому граничному условию.

За недостатком места мы опускаем ряд интересных примеров на комбинированное применение правил $3^\circ, 4^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Марченко В.В.* // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1952. — №1.

[2] *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — Т.15 (309).

[3] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.82, №5.

[4] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.87, №6.

[5] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.88, №3.

[6] *Крейн М.Г.* // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т.16, №5.

[7] *Стилтьес Т.* Исследование о непрерывных дробях, 1936.

[8] *Марков А.А.* Избранные труды, 1948.

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ФИЛЬТРОВ И λ-ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ

(Доклады АН СССР. — 1953. — Том XCIII, № 5)

1. Пусть S — бесконечная струна, простирающаяся от $x = -\infty$ до $x = \infty$, и пусть неубывающая функция $M(x) = M(x-0)$ $(-\infty < x < \infty;\ M(-\infty) = 0)$ задает распределение масс на этой струне так, что масса любого открытого справа отрезка $[\alpha, \beta)$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ струны равна $M(\beta) - M(\alpha)$. Если струна S совершает свободные гармонические колебания: $Y = y(x) \sin \sqrt{\lambda}\, t$, то при единичном натяжении струны амплитудная функция $y(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$y(x) = y(0) + y'(-0)\, x - \lambda \int_0^x (x-s)\, y(s)\, dM(s) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (1)$$

Если функция $M(x)$ абсолютно непрерывна, то это уравнение эквивалентно следующему:

$$y'' + \lambda\rho(x) y = 0 \qquad (-\infty < x < \infty;\ \ \rho = dM/dx). \qquad (2)$$

Обозначим через $\varphi(x;\lambda)$ и $\psi(x;\lambda)$ решения этого уравнения, соответствующие начальным условиям:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad \text{и} \quad y(0) = 0, \quad y'(-0) = 1.$$

Нас будет интересовать случай периодической струны, т.е. струны с распределением масс, имеющим некоторый период

$$M(x+T) = M(x) + M(T) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Струну S будем называть с и м м е т р и ч н о й, если $M(x) = -M(-x+0)$.

Теорема 1. *Периодическая струна S симметрична в том и только том случае, когда*

$$\varphi(T;\lambda) = \psi'(T \pm 0;\lambda).$$

Необходимость условия устанавливается тривиально; достаточность следует из наших предыдущих результатов [1, 2].

Функцию комплексного аргумента

$$A(\lambda) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(T;\lambda) + \psi'(T-0;\lambda)\Big)$$

будем называть Л-функцией периодической струны S.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс целых функций $A(\lambda)$, обладающих следующими двумя свойствами:

1) $A(\lambda)$ *разлагается в конечное или бесконечное произведение:*

$$A(\lambda) = \Pi\,(1-\lambda/a_j) \quad \Big(0 < a_1 < a_2 < \cdots;\ \sum \frac{1}{a_j} < \infty\Big); \tag{3}$$

2) *все корни уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$ неотрицательны.*

Из (3) вытекает, что $A(-\lambda)$ в интервале $(0,\infty)$ монотонно растет от 1 до ∞. Из 1), 2) легко вытекает еще такое свойство $A(\lambda)$:

a) *Если в какой-либо точке λ^* на положительной оси функция $A(\lambda)$ достигает максимума или минимума, то, соответственно, $A(\lambda^*) \geq 1$ или $A(\lambda^*) \leq -1$.*

Из 1), 2) вытекает также, что:

$$A^2(\lambda) - 1 = -h\,\lambda\,\Pi\,(1-\lambda/\lambda_j),$$

где $h > 0$ и

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \cdots;$$

$$A(\lambda_{2j-1}) = A(\lambda_{2j}) = (-1)^j \qquad (j = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Теорема 2. *Для того чтобы целая функция $A(\lambda)$ была Л-функцией некоторой периодической струны, необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала классу $\mathfrak{A}$.*

Для Л-функции $A(\lambda)$ уравнения (2) еще А.М. Ляпунов установил оценку:

$$|A(\lambda)| \le C \, \exp \sqrt{2M(T)|\lambda|}$$

(λ — любое комплексное число), справедливую и для общего уравнения (1), и которая вместе с равенством $A(0) = 1$ даст свойство 1). Им же [5] были установлены свойство 2) Л-функции $A(\lambda)$ и свойство (4) корней уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$.

Теорема 3. *Если $A(\lambda)$ является Л-функцией некоторой периодической струны, то всегда найдутся симметрические периодические струны, имеющие $A(\lambda)$ своей Л-функцией. Таких струн будет континуум, если $A(\lambda)$ — трансцендентная функция; если же $A(\lambda)$ — многочлен, то их будет*† *ровно 2^{k-1}, где $2k$ — число простых корней уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$.*

2. Конечную или бесконечную последовательность положительных чисел $\{\gamma_j\}$ будем называть о п р е д е л я ю щ е й для Л-функции $A(\lambda)$, если $\gamma_j = \lambda_{2j-1}$ или λ_{2j} $(j = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, определяющая последовательность $\{\gamma_j\}$ будет конечной или бесконечной в зависимости от того, будет ли $A(\lambda)$ трансцендентной функцией или многочленом. В случае, когда $A(\lambda)$ — многочлен N-степени, определяющая последовательность будет состоять из N чисел $(\gamma_N = \lambda_{2N})$ и различных таких последовательностей для данного $A(\lambda)$ будет равно 2^{k-1} (см. теорему 3).

Положим $\Psi(\lambda) = \Pi(1 - \lambda/\gamma_j)$. Тогда, если $\{\gamma_j\}$ является определяющей последовательностью для некоторой Л-функции $A(\lambda)$, то последняя найдется из равенства

$$\frac{A(\lambda)}{\Psi(\lambda)} = 1 + \lambda \sum \frac{1}{\gamma_j |\Psi'(\gamma_j)| (\lambda - \gamma_j)}. \tag{5}$$

†Это утверждение верно при некоторых дополнительных предположениях. (*Прим. ред.*)

Теорема 4. *Для того, чтобы последовательность* $\{\gamma_j\}$ *была определяющей для некоторой Л-функции, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum \gamma_j^{-2} |\Psi'(\gamma_j)|^{-1} < \infty.$$

Как мы знаем [1, 2], при выполнении этого условия (и только в этом случае) найдется (и притом единственная) симметричеcкая струна $S_{\gamma,T}$ наперед данной длины T, имеющая при единичном натяжении и неподвижных концах $x = \pm T/2$ спектр частот $\{\sqrt{\gamma_j}\}$. Продолжая ее периодически в обе стороны до бесконечности, мы получим периодическую струну, имеющую Л-функцию $A(\lambda)$, получающуюся по формуле (5) .

Если последовательность $\{\gamma_j\}$ конечна и состоит всего из N членов, то струна $S_{\gamma,T}$ вырождается в нить с бусинками, причем массы m_j $(j = 1, 2, ..., N)$ последовательных бусинок и длины $\ell_0, \ell_1, ..., \ell_N$ последовательных отрезков, на которые они подразделяют нить, найдутся из стилтьесовского разложения:

$$\frac{1}{T}\,\frac{A(-\lambda)}{\Psi(-\lambda)} = \ell_0 + \frac{1|}{|m_1\lambda} + \frac{1|}{|\ell_1} + \cdots + \frac{1|}{|m_N\lambda} + \frac{1|}{|\ell_N}.$$

Это разложение будет обладать тем свойством, что

$$m_j = m_{N-j+1} \quad (j = 1, 2, ..., N); \quad \ell_j = \ell_{N-j} \quad (j = 0, 1, ..., N). \quad (6)$$

3. Пусть $\rho(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ — корень уравнения $\rho^2 - 2A(\lambda)\rho + 1 = 0$, характеризуемый при $A^2(\lambda) > 1$ условием $-1 < \rho(\lambda) < 1$, а при $A^2(\lambda) < 1$ тем, что с непрерывным возрастанием λ он непрерывно вращается по единичной окружности против часовой стрелки. Пусть

$$\chi(x;\lambda) = \omega(\lambda)\varphi(x;\lambda) - \psi(x;\lambda)$$

— решение уравнения (1), обладающее свойством:

$$\chi(x+T;\lambda) = \rho(\lambda)\chi(x;\lambda) \qquad (-\infty < x < \infty, \quad \lambda > 0).$$

Разрежем периодическую струну S в точке $x = -0$ и обозначим ее правую половину через S^+. Представляя себе, что левый конец струны S^+ является колечком "нулевого" радиуса массы $M(+0)$, могущим свободно скользить по "идеально гладкой" оси Y, приложим к нему сосредоточенную пульсирующую силу $F = \cos\sqrt{\lambda}\,t$. Возникающее тогда вынужденное колебание струны S^+ будет совершаться по закону:

$$y = \operatorname{Re}\left\{\chi(x;\lambda)\exp(i\sqrt{\lambda}\,t)\right\}.$$

Если $A^2(\lambda) \le 1$, то амплитуда этого вынужденного колебания будет осциллирующей незатухающей функцией при $x \to \infty$ и, наоборот, она будет стремиться к нулю при $x \to \infty$, если $A^2(\lambda) > 1$.

Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots$ — все простые корни уравнения $A^2(\lambda) - 1 = 0$. Тогда можно будет сказать, что гармоническое возбуждение частоты $\sqrt{\lambda}$ левого конца струны S^+ будет передаваться на ее правый конец $x = \infty$ в том и только в том случае, когда λ принадлежит одному из замкнутых интервалов $[\mu_{2j}, \mu_{2j+1}]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots;\ \mu_0 = 0)$. Целую функцию

$$R(\lambda) = \lambda \Pi\left(\frac{1-\lambda}{\mu_j}\right) \qquad \left(0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots;\ \sum \frac{1}{\mu_j} < \infty\right) \quad (7)$$

будем называть фильтрующей функцией периодической струны S (или S^+).

Теорема 5. *Для того чтобы целая функция $R(\lambda)$ вида (7) была фильтрующей функцией некоторой периодической струны, необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$A^2(\lambda) + R(\lambda)B^2(\lambda) = 1 \quad (8)$$

допускало решение (A, B), состоящее из многочленов или целых функций нулевого рода с положительными корнями.

Если уравнение (8) имеет решения (A, B) указанного типа, то при их нормировке $A(0) = 1$, $B(0) > 0$ они располагаются в последовательность (A_n, B_n) такую, что:

$$A_n(\lambda) + B_n(\lambda)\sqrt{-R(\lambda)} =$$

$$= \left(A_1(\lambda) + B_1(\lambda)\sqrt{-R(\lambda)}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

при этом $A_1(\lambda)$ будет Л-функцией всякой периодической струны S, фильтрующая функция которой есть $R(\lambda)$.

Если $R(\lambda)$ — функция вида (7), а

$$Q(\lambda) = \Pi(1-\lambda/\nu_j), \quad \text{где} \quad \nu_j = \mu_{2j-1} \quad \text{или} \quad \mu_{2j} \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

то всегда [3] найдется одна и только одна струна S_Q, для которой

$$\frac{\sqrt{R(-\lambda)}}{\lambda Q(-\lambda)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x; -\lambda)}{\varphi(x; -\lambda)} \qquad (0 < \lambda < \infty).$$

Теорема 6. *Пусть $R(\lambda)$ — функция вида (7), а $Q(\lambda)$ — одна из функций, ассоциируемых с $R(\lambda)$ по правилу (9). Для того чтобы $R(\lambda)$ была фильтрующей функцией некоторой струны S^+, необходимо и достаточно, чтобы струна S_Q^+ была периодической. При выполнении этого условия струна S_Q^+ будет симметричной и струнами S_Q^+, отвечающими всевозможным функциям Q, будут исчерпываться все симметрические периодические струны S^+, имеющие данную фильтрующую функцию $R(\lambda)$.*

Если $R(\lambda)$ — многочлен четной степени, то струна S_Q^+ вырождается в полубесконечную нить с бесконечным числом бусинок, массы и расположение которых будут определяться из стилтьесовского разложения:

$$\frac{\sqrt{R(-\lambda)}}{\lambda Q(\lambda)} = \ell_0 + \frac{1 |}{| m_1 \lambda} + \frac{1 |}{| \ell_1} + \frac{1 |}{| m_2 \lambda} + \cdots$$

Периодичность "струны" S_Q^+ будет теперь означать существование целого N такого, что

$$m_{j+N} = m_j, \quad \ell_{j+N} = \ell_j \qquad (j = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad \ell_N = 2\ell_0,$$

при этом будут выполняться также и условия (6), за исключением одного из них ($\ell_N = \ell_0$).

Заметим, что уравнение (8) всегда имеет целое решение

$$A(\lambda) = \cos\sqrt{R(\lambda)}, \qquad B(\lambda) = \left(\sin\sqrt{R(\lambda)}\right) / \sqrt{R(\lambda)},$$

но функции этого решения не нулевого рода.

Еще Абель в знаменитом мемуаре [6,7] доказал, что если $R(\lambda)$ — какой-либо многочлен четной степени без кратных корней, то для существования решения (A, B) из многочленов уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы $\sqrt{R(\lambda)}$ разлагался в некоторую бесконечную непрерывную периодическую дробь. Для случая многочлена $R(\lambda)$ $(R(0) = 0)$ с неотрицательными нулями критерий Абеля эквивалентен нашему варианту, оперирующему с дробями более определенной и простой структуры (стилтьесовскими).

Теоремы 5, 6 следует рассматривать как некоторое обобщение классического результата Абеля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.76, №3; 1952. — Т.82, №5.

[2] *Крейн М.Г.* // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т.16, №5.

[3] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.87, №6.

[4] *Ляпунов А.М.* // Зап. Акад. наук. Физ.-мат. отд. Сер. 8. — 1902. — Т.XIII, №2.

[5] *Ляпунов А.М.* // C.R. — 1899. — 128, 910.

[6] *Abel N.H.* // Oeuvres complétes. — 1839. — 1.

[7] *Чеботарев Н.Г.* Теория алгебраических функций, 1948.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

(Доклады АН СССР. — 1954. — Том XCIV, № 6)

В одном из предыдущих сообщений [1] мы указали ряд случаев, когда обратная краевая задача допускает эффективное решение. Множество этих случаев значительно расширится, если воспользоваться приводимым ниже методом, и в особенности, если его сочетать с приемами, указанными в [1]. По своей основной идее этот метод непосредственно примыкает к методу, указанному еще в нашем первом сообщении [2] по этим вопросам (методу центральной массы).

1. Пусть S — некоторая струна, натянутая единичной силой между концами $x = 0$ и $x = L$ $(\leq \infty)$; $M(x)$ при $0 < x < L$ — масса открытого справа отрезка $[0, x)$ струны S, а $M(0) = 0$ (см. [1, 3]). Предполагая, что левый конец струны может свободно скользить по направлению, перпендикулярному к оси X, приложим в момент $t = 0$ к этому концу единичную силу F. Она вызывает движение этого конца $y = \Phi(t)$, которое будет вполне определенным (независимо от условий закрепления правого конца струны $x = L$), по крайней мере в интервале $0 \leq t < 2T$, где $T = t(L)$ $(\leq \infty)$, а

$$t(x) = \int\limits_0^x \sqrt{M'(\xi)}\, d\xi \qquad (0 \leq x \leq L), \tag{1}$$

если время пробега возникшей прямой волны от начала $x = 0$ до точки x. В случае, когда время (полного) пробега T конечно, указанное движение будет вполне определенным и при $t \geq 2T$, если момент инерции распределения масс на струне относительно начала будет бесконечным (см. [3]). Более того, если считать возможным только такое движение, при котором $\Phi(t) = O(t^2)$ при $t \to \infty$, то это движение будет вполне определенным тогда и только тогда, когда $LM(L) = \infty$ ($M(L) = \lim M(x)$ при $x \to L$).

Если же $LM(L) < \infty$, то движение будет определенным лишь при задании условия закрепления струны S на ее правом конце. Функцию $\Phi(t)$ $(0 \le t < \infty)$, задающую движение начала струны во всем промежутке времени $[0, \infty)$ при дополнительном условии (в случае $LM(L) < \infty$) неподвижного закрепления правого конца, назовем главной переходной функцией струны S.

Длина L и функция $M(x)$ $(0 \le x < L)$ вполне определяются заданием главной переходной функции $\Phi(t)$ $(0 \le t < \infty)$, более того, в случае $T < \infty$ они определяются заданием $\Phi(t)$ в каком-либо интервале $[0, 2A)$, где $A > T$. Если же переходная функция $\Phi(t)$ задана в интервале $[0, 2A)$, где $A \le T$, то функция $M(x)$ будет этим определяться на интервале $[0, x_A)$, где x_A обозначает ближайшую точку x, которую достигает за время A прямая волна, побежавшая от точки $x = 0$ (таким образом, x_A — наименьший корень уравнения $t(x) = A$).

Главная переходная функция $\Phi(t)$ допускает в интервале $[0, \infty)$ представление

$$\Phi(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos\sqrt{\lambda}\,t}{\lambda}\, d\tau(\lambda), \tag{2}$$

где $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(0 \le \lambda < \infty;\ \ \tau(0) = 0)$ — неубывающая функция, являющаяся главной спектральной функцией струны S (см. [1]). Она является единственной непрерывной слева неубывающей функцией, аннулирующейся при $\lambda = 0$, дающей представление (2) функции $\Phi(t)$ в интервале $[0, 2A)$, где $A = \infty$, если $T = \infty$, и A — какое-либо число, большее T, если $T < \infty$.

Если же $A < T$ или $A = T$ при $T < \infty$, то совокупность всех неубывающих функций $\tau(\lambda) = \tau(\lambda - 0)$ $(0 \le \lambda < \infty;\ \ \tau(0) = 0)$, дающих представление (2) функции $\Phi(t)$ в интервале $[0, 2A)$, будет совпадать с совокупностью всех спектральных функций с неотрицательным спектром отрезка $[0, x_A)$ струны S.

Простое сочетание результатов наших предыдущих сообщений [3, 4] приводит к следующему предложению.

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная функция* $\Phi(t)$ $(0 \le t < 2A;\ \ A \le \infty)$ *совпадала на интервале* $[0, 2A)$ *с главной переходной функцией некоторой струны* S, *необходимо и достаточно, чтобы на этом интервале она допускала представление (2) с некоторой неубывающей функцией* $\tau(\lambda)$. *Последнее условие эквивалентно двум требованиям:*

1) $\Phi(0) = 0$
и
2) ядро $L(s,t) = \Phi(s) + \Phi(t) - \Phi(|s-t|)$ $(0 \le s,\ t < 2A)$ *является положительно определенным в квадрате* $(0 \le s,\ t < 2A)$.

Из теоремы 1 без труда получается:

Теорема 2. *Пусть задана функция* $\Phi(t)$ $(0 \le t < 2A)$, *имеющая абсолютно непрерывную производную в каждом интервале* $[0, 2a)$, *где* $a < A$. *Для того чтобы она совпадала на интервале* $[0, 2A)$ *с главной переходной функцией некоторой струны* S, *необходимо и достаточно, чтобы при любом* $a < A$ $(a > 0)$ *и любой непрерывной функции* $q(s)$ $(-a \le s \le a)$ *выполнялось неравенство:*

$$2\Phi'(0)\int\limits_{-a}^{a} q^2(s)\,ds + \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} \Phi''(|s-t|)\,q(s)\,q(t)\,ds\,dt \ge 0\,. \qquad (3)$$

Заметим, что условие (3) влечет неравенство $\Phi'(0) \ge 0$. Теорема 2 является шагом вперед в сравнении с теоремой 6 из [5], в которой рассматривается лишь случай $\Phi'(0) > 0$ и вместо условия (3) указано более сложное.

2. Как и в [1, 3], обозначим через $\varphi(x;\lambda)$ решение уравнения $dy' + \lambda y dM = 0$, удовлетворяющее условиям $\varphi(0;\lambda) = 1$, $\varphi'(+0;\lambda) = -M(+0)\,\lambda$.

Для случая, когда переходная функция $\Phi(t)$ струны S имеет в интервале $[0, 2T)$ производную $\Phi'(t)$, абсолютно непрерывную в каждом интервале $[0, 2a]$ $(a < T)$, имеет место:

Теорема 3. *Если при некотором $a < T$ $(a > 0)$ интегральное уравнение*

$$2\Phi'(0)\,q(t) + \int_{-a}^{a} \Phi''(|t-s|)\,q(s)\,ds = 1 \qquad (4)$$

имеет интегрируемое решение $q = q(t; a)$, то оно единственно и при любом комплексном λ

$$\int_{-a}^{a} q(t;a)\cos\lambda t\,dt = \int_{0}^{x_a} \varphi(x;\lambda^2)\,dM(x) = -\frac{1}{\lambda^2}\varphi'(x_a - 0;\lambda^2) \quad (5)$$

и, в частности:

$$\int_{-a}^{a} q(t;a)\,dt = M(x_a)\,. \qquad (6)$$

Если $\Phi'(0) > 0$, то уравнение (4) при любом $a < T$ $(a > 0)$ будет иметь абсолютно непрерывное решение $q(t; a)$.

Более того, если $\Phi'(0) > 0$, то $M[t] = M(x_t)$ и $\varphi'(x_t; \lambda)$ будут иметь в каждом интервале $[0, a]$ абсолютно непрерывные производные по аргументу t, причем $M'[t] > 0$ $(0 \leq t < T)$. Если допускать равенство $M'[0] = 0$, то указанными свойствами функции $M[t]$ и $\varphi'(x_t; \lambda)$ могут часто обладать и в случае, когда $\Phi'(0) = 0$. С другой стороны, если они обладают этими свойствами, то в уравнении $dy' + \lambda y dM = 0$ можно будет перейти от переменной x к переменной t, пользуясь тем, что $x_t = x(t)$. Это позволит утверждать, что дифференциальная система

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{dy}{dt}\right) + \lambda^2 p y = 0; \qquad y(0;\lambda) = 1; \qquad \lim_{t\downarrow 0}\left(p\frac{dy}{dt}\right) = 0\,, \quad (7)$$

где $p(t) = dM[t]/dt$, имеет при любом комплексном λ решение

$$\varphi[t;\lambda^2] = \varphi(x_t;\lambda^2) = \frac{1}{p(t)}\,\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} q(s;t)\cos\lambda s\,ds\,. \qquad (8)$$

3. **П р и м е р ы.** а) Пусть $K(t)$ обозначает одну из следующих шести функций:

1) $\ln(A/2t) \qquad (0 < t < 2A);$

2) $t^{-h} \quad (0 < t < \infty; \quad 0 < h < 1);$

3) $\ln\left(\sin\dfrac{A}{2}\Big/2\sin\dfrac{t}{2}\right) \quad (0 < t < 2A); \quad 0 < A \le \pi);$

4) $\ln\left(\operatorname{sh}\dfrac{A}{2}\Big/2\operatorname{sh}\dfrac{t}{2}\right) \quad (0 < t < 2A);$

5) $\ln\operatorname{cth}(t/4) \quad (0 < t < \infty);$

6) $1 - t \qquad (0 < t < 2A).$

Можно показать, что в случаях 1)–5) соответствующее ядро $K(|s-t|)$ в соответствующем интервале является положительно-определенным. Следовательно, при любом $v \ge 0$ функция $\Phi(t)$, определяемая равенствами

$$\Phi''(t) = K(t), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = v,$$

будет переходной функцией некоторой струны. В случае 6) теорема 2 позволяет утверждать, что последнее будет иметь место, если $v \ge 0$ и $(A-1)\operatorname{th}(A/\sqrt{v}) \le \sqrt{v}$. Положим $v = 0$ для случаев 1)–5), а для случая 6) пусть $(A-1)\operatorname{th}(A/\sqrt{v}) = \sqrt{v}$.

Решениями $q(t;a)$ $(-a \le t \le a)$ соответствующих интегральных уравнений (4) (первого рода для случаев 1)–5)) будут:

1) $\pi^{-1}M[a](a^2 - t^2)^{-1/2};$

2) $\pi^{-1}\cos(\pi h/2)(a^2 - t^2)^{\frac{h-1}{2}};$

3) $\pi^{-1}M[a](2\cos t - 2\cos a)^{-1/2}\cos(t/2);$

4) $\pi^{-1}M[a](2\operatorname{ch} a - 2\operatorname{ch} t)^{-1/2}\operatorname{ch}(t/2);$

5) $\pi^{-1}Q^{-1}_{-1/2}(a)(2\operatorname{ch} a - 2\operatorname{ch} t)^{-1/2};$

6) $M[a]\operatorname{ch}(t/\sqrt{v})/2\sqrt{v}\operatorname{sh}(a/\sqrt{v}).$

Здесь $M\,[a]$ обозначает $M\,(x_a)$. Для $M\,[t] = M\,(x_t)$ соответственно будем иметь следующие выражения:

1) $1/\ln\,(A/t)$;

2) $\pi^{-1/2}\left[\Gamma\left(\dfrac{1+h}{2}\right)\Big/\,\Gamma\left(1+\dfrac{h}{2}\right)\right]\cos\,(\pi h/2)\,t^h$;

3) $1/\ln\left(\sin\dfrac{A}{2}\Big/\sin\dfrac{t}{2}\right)$;

4) $1/\ln\left(\operatorname{sh}\dfrac{A}{2}\Big/\operatorname{sh}\dfrac{t}{2}\right)$;

5) $P_{-1/2}(t)/Q_{-1/2}(t)$;

6) $1/[1-a+\sqrt{v}\,\operatorname{ct}h\,(a/\sqrt{v}\,)]$.

Если для каждого из случаев выписать соответствующую дифференциальную систему (7), то ее решение найдется по формуле (8). Приведем это решение для случаев 1)–5):

1) $t\ln^2\dfrac{A}{t}\,\dfrac{d}{dt}\left[J_0\,(\lambda t)/\ln\dfrac{A}{t}\right]$;

2) $2^{h/2}\Gamma\,(1+h/2)\,\dfrac{d}{dt}\,\left[t^{h/2}J_{h/2}\,(\lambda t)\right]/ht^{h-1}$;

3) $\dfrac{d}{2dt}\,\{M\,\left[P_\lambda(\cos\,t)+P_{\lambda-1}(\cos\,t)\right]\}\Big/\dfrac{dM}{dt}$;

4) $\dfrac{d}{2dt}\,\{M\,\left[P_{i\lambda}(\operatorname{ch}t)+P_{i\lambda-1}(\operatorname{ch}t)\right]\}\Big/\dfrac{dM}{dt}$;

5) $\dfrac{d}{dt}\,\left[P_{-1/2+i\lambda}(\operatorname{ch}t)/Q_{-1/2}(\operatorname{ch}t)\right]/Q^2_{-1/2}\,(\operatorname{ch}t)\operatorname{sh}t$.

Здесь $J_\nu(t)$ — цилиндрическая функция; $P_\nu(t)$, $Q_\nu(t)$ — функции Лежандра первого и второго рода индекса ν.

Так как $M\,[t]\to\infty$ при $t\to\infty$ в случаях 2), 5) и при $t\to A$ в случаях 1), 3), 4), 6), то $T=\infty$ в случаях 2), 5) и $T=A$ в случаях 1), 3), 4), 6). В четырех последних случаях функция $K\,(t)=\Phi''(t)$

однозначно продолжается (доопределяется) для $t > A$ при условии положительной определенности продолженного ядра $K(|s-t|)$ $(-\infty < t,\ \ s < \infty)$. При этом продолжении функция $K(|t|)$ оказывается степановской почти-периодической функцией, спектр которой совпадает с множеством полюсов легко вычисляемого коэффициента динамической податливости соответствующей струны.

Если в случае 6) положить $v = 0$, то соответствующее уравнение (4) первого рода будет иметь решение:

$$q(s;a) = [\delta(t-a) + \delta(t+a)]/2(1-a)$$

($\delta(t)$ — функция Дирака),

$$M[t] = 1/(1-t); \qquad M(x) = (1-3x)^{-1/3}$$

и максимальное значение A, при котором ядро

$$K(|s-t|) = 1 - |s-t| \qquad (-A < s,\ \ t < A)$$

будет положительно-определенным, равно 1. В этом случае $M(+0) = 1$, так что струна S будет нести на левом конце сосредоточенную массу $m = 1$.

б) Пусть

$$R(\lambda) = \frac{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n}{\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)},$$

причем $R(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq 0$. Определим спектральную функцию $t(\lambda)$ равенством

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \frac{R(\lambda)}{\pi\sqrt{\lambda}} \qquad (0 \leq \lambda < \infty).$$

Построив затем по формуле (2) функцию $\Phi(t)$, мы получим решение уравнения (4) по формуле

$$q(t;a) = Q(-D^2)\,\chi(t;a) \quad (D = d/dt),$$

где χ — четное решение уравнения $P(-D^2)\,\chi = 1/2$, удовлетворяющее в точках $t = \pm a$ граничным условиям, определяемым многочленом $Q(\lambda)$ [6, 7].

Учитывая соотношение (8), мы приходим к выводу, что дифференциальная система (7), имеющая спектральную функцию указанного выше типа, может быть эффективно построена и (что самое замечательное!) решение этой системы при любом λ найдется в виде рациональных функций от показательных функций от t (см. пример в [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1953. — Т.93, №4.

[2] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.76, №1.

[3] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.87, №6.

[4] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1944. — Т.45, №3, 4.

[5] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.82, №5.

[6] *Zadeh L.A., Ragazzini G.R.* // J. Appl. Phys. — 1950. — V.21, N 7.

[7] *Солодовников В.В.* Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, 1952.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА ЧАСТИЦЫ ПО ЕЕ S-ФУНКЦИИ

(Доклады АН СССР. — 1955. — Том 105, № 3)

Результаты статьи [1] позволяют указать простой признак того, чтобы наперед заданная функция $S(k)$ $(-\infty < k < \infty)$ была S-функцией (S-матрицей) s-состояния частицы в центрально-симметрическом поле с некоторым потенциалом $V(r)$, а также получить простое правило восстановления этого потенциала по функции $S(k)$.

1. Пусть $H(t)$ $(0 \le t < 2T)$ — вещественная измеримая локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условию:

(V) При любом r $(0 \le r < T)$ уравнение

$$q(t;r) + \int_{-r}^{r} H(|t-s|)\, q(s;r)\, ds = 1 \quad (-r \le t \le r) \tag{1}$$

имеет единственное ограниченное (а значит, и непрерывное) решение $q(t;r)$.

Положим для любого комплексного k

$$\chi(r;k) = k \int_{0}^{r} q(s;r) \cos ks\, ds \qquad (0 \le r < T). \tag{2}$$

Из результатов статьи [1] непосредственно следует

Теорема 1. *Функция $\chi(r;k)$ $(0 \le r < T)$ является решением дифференциальной системы*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dr}\left(g^{-2}(r)\frac{d\chi}{dr}\right) + k^2 g^{-2}(r)\chi = 0; \\ \chi(0;k) = 0, \qquad \chi'(0;k) = k, \end{gathered} \tag{3}$$

где $g(r) = q(r;r)$ $(0 \le r < T)$.

Положим $\psi(r;k) = \chi(r;k)/g(r)$ $(0 \le r < T)$; тогда ψ будет решением системы

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{g'}{g}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{g'}{g}\right)\psi + k^2\psi = 0; \qquad \psi(0;k) = 0, \quad \psi'(0;k) = k. \tag{4}$$

Функция $g(r)$ $(0 \le r < T)$ всегда абсолютно непрерывна и положительна. Если же $H(t)$ $(0 \le t < 2T)$ — абсолютно непрерывная функция, то первая производная $g'(r)$ также абсолютно непрерывная, и в этом случае систему (4) можно переписать в виде

$$\psi'' - V(r)\psi + k^2\psi = 0, \qquad \psi(0;k) = 0, \qquad \psi'(0;k) = k, \tag{5}$$

где

$$V(r) = g(r)\frac{d^2}{dr^2}\frac{1}{g(r)} \qquad (0 < r < T). \tag{6}$$

Мы будем сопоставлять систему (5) функции $H(t)$ $(0 \le t < 2T)$ во всех случаях, допуская таким образом в качестве $V(r)$ $(0 \le r < T)$ также обобщенные функции типа D_1 — “производной от локально интегрируемой”.

2. В дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда $T = \infty$. В этом случае система (5) будет иметь вполне определенный спектр, притом неотрицательный.

Путем интегрирования выражения (3) по частям можно получить для ψ еще следующее выражение:

$$\psi(r;k) = \operatorname{Im}\left\{e^{ikr}\left(1 - \int_0^{2r}\Gamma_{2r}(s)\,e^{-iks}ds\right)\right\}, \tag{7}$$

где через $\Gamma_{2r}(s)$ обозначено решение интегрального уравнения

$$\Gamma_{2r}(t) + \int_0^{2r} H(|t-s|)\,\Gamma_{2r}(s)\,ds = H(t) \quad (0 \le t < 2r). \tag{8}$$

Естественно предположить, что при известных условиях в асимптотическом выражении $\psi(r;k)$ при $r \to \infty$ будет фигурировать функция $\Gamma(t)$ $(0 \le t < \infty)$, являющаяся решением интегрального уравнения

$$\Gamma(t) + \int_0^\infty H(|t-s|)\,\Gamma(s)\,ds = H(t) \quad (0 \le t < \infty). \tag{9}$$

Рассмотрим тот случай, когда $H(t) \in L_1(0,\infty)$. В этом случае, как легко видеть, условие (V) эквивалентно условию неотрицательности функции

$$\rho(k) = 1 + 2\int_0^\infty H(t)\cos kt\,dt \qquad (-\infty < k < \infty). \tag{10}$$

Оказывается, что если $\rho(k) > 0$ $(0 \le k < \infty)$, то уравнение (9) имеет одно и только одно решение (вещественное) $\Gamma \in$ $\in L_1(0,\infty)$ и оно может быть получено следующим образом.

По общей теореме Винера–Леви (см. [2], гл.VI, п.101) найдется вещественная функция $\gamma \in L_1(0,\infty)$ такая, что

$$\ln\rho(k) = 2\int_0^\infty \gamma(t)\cos kt\,dt \quad (-\infty < k < \infty). \tag{11}$$

Тогда функция $\Gamma(t)$ найдется из соотношения

$$1 - \int_0^\infty \Gamma(t)\,e^{-ikt}dt = \exp\left(-\int_0^\infty e^{-ikt}\gamma(t)\,dt\right) \quad (\operatorname{Im} k \le 0). \tag{12}$$

Из (11) и (12) следует:

$$\rho(k) = \left|1 - \int_0^\infty \Gamma(t)\,e^{-ikt}dt\right|^{-2} \qquad (-\infty < k < \infty), \tag{13}$$

так что можно положить

$$1-\int_0^\infty \Gamma(t)\,e^{-ikt}dt=\rho^{-\frac{1}{2}}e^{i\delta(k)} \qquad (-\infty<k<\infty). \tag{14}$$

Если же при этом непрерывную функцию $\delta(k)$ нормировать условием $\delta(0)=0$, то будем иметь

$$\begin{gathered}\delta(-k)=-\delta(k),\\ \delta(\pm\infty)=\lim_{k\to\pm\infty}\delta(k)=0.\end{gathered} \tag{15}$$

Второе соотношение следует из того, что $\delta(-\infty)-\delta(+\infty)= = 2\delta(-\infty)$ есть число нулей функции (14) внутри нижней полуплоскости $\operatorname{Im}k\le 0$, а последнее, очевидно, равно нулю.

Теорема 2. *При выполнении условий*

$$H(t)\in L_1(0,\infty),\qquad \rho(k)>0 \qquad (0\le k<\infty) \tag{16}$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\psi(r;k)-\rho^{-\frac{1}{2}}(k)\,\sin\left(kr+\delta(k)\right)\right\}=0 \qquad (-\infty<k<\infty). \tag{17}$$

3. Рассмотрим теперь S-функцию $S(k)=\exp(2i\delta(k))$. Очевидно:

1) $|S(k)|=S(0)=1$;

2) $S(-k)=\overline{S(k)}\quad(-\infty<k<\infty)$,

и в силу (12) и (14):

3) $\arg S(k)\to\arg S(0)$ при $k\to\infty$.

Так как согласно (12) и (14)

$$S(k) = \exp\left(2i\int_0^\infty \sin\, kt\,\gamma(t)\,dt\right) \qquad (-\infty < k < \infty), \tag{18}$$

то $S(k)$ допускает также представление

4) $S(k) = 1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}\, s(t)\,dt$, где $s(t) \in L_1(0,\infty)$.

Теорема 3. *Если $S(k)$ $(-\infty < k < \infty)$ — некоторая функция, обладающая свойствами 1)–4), то всегда найдется обыкновенная или обобщенная функция $V(r)$ (типа D_1) такая, что спектр системы (5) будет неотрицателен и при $\delta(k) = \arg S(k)$ и соответствующем определении $\rho(k) = \rho(-k)$ (> 0) решение ψ системы (5) будет удовлетворять асимптотическому соотношению (17).*

В самом деле, как легко видеть, свойства 1)–4) обеспечивают существование вещественной функции $\gamma \in L_1(0,\infty)$ такой, что имеет место (18), а тогда из соотношений (10) и (11) найдется функция $H(t) \in L_1(0,\infty)$, при помощи которой по формуле (6) получится требуемый потенциал $V(r)$.

Легко видеть, что рациональная функция $S(k)$ $(S(0) = 1)$ будет удовлетворять условиям 1)–4) в том и только в том случае, если: а) все нули и полюсы функции $S(k)$ невещественны, б) всякому нулю функции $S(k)$ некоторой кратности отвечает зеркально расположенный относительно вещественной оси полюс той же кратности, в) нулю (полюсу) функции, не расположенному на мнимой оси, отвечает зеркально расположенный относительно мнимой оси нуль (полюс) той же кратности и г) функция имеет одинаковое число нулей и полюсов, считая с их кратностями, внутри верхней части (а значит, и нижней) полуплоскости. Заметим, что для рациональной функции $S(k)$ с заданными нулями и полюсами функция $\rho(k)$ также будет рациональной и найдется непосредственно. После этого $H(t)$ $(0 \le t < \infty)$ получится как сумма произведения показательных функций на многочлены, и решение уравнения (1), а с ним и функция $V(r)$ выразятся в явном виде [3, 4].

4. Пусть теперь $S_1(k)$ $(-\infty < k < \infty)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условиям 1), 2) и 4), но не условию 3). Тогда найдется целое m (> 0 или < 0) такое, что:

3′) $\arg S(k) \to \arg S(0) - 2m\pi$ при $k \to \infty$.

Пусть $m > 0$. Выберем произвольные положительные числа $\varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_m$ и образуем функцию:

$$S(k) = S_1(k) \prod_{j=1}^{m} \Big(\frac{k - i\varkappa_j}{k + i\varkappa_j}\Big)^2 \qquad (-\infty < k < \infty).$$

Легко видеть, что функция $S(k)$ будет удовлетворять всем условиям 1)–4) и, следовательно, ей будет соответствовать некоторая система (5). По формуле из [5] можно будет далее переделать $V(r)$ на некоторый новый потенциал $V_1(r)$, для которого система (5) будет иметь точно m отрицательных собственных чисел $E_j = -\varkappa_j^2$ $(j = 1, 2, \dots, m)$, причем соответствующие собственные функции $\psi_1(r; i\varkappa_j)$ $(j = 1, \dots, m)$ будут удовлетворять соотношениям

$$\int_0^\infty \psi_1^2(r; i\varkappa_j)\, dr = \rho_j^{-1} \qquad (j = 1, \dots, m),$$

где ρ_j $(j = 1, 2, \dots, m)$ — наперед заданные положительные числа.

Оказывается, что при замене $V(r)$ на $V_1(r)$ системе (5) будет уже отвечать ранее заданная функция $S_1(k)$.

Если, например, $m = 1$ $(\varkappa_1 = \varkappa,\ \rho_1 = \rho)$, то формула перехода от $V(r)$ к $V_1(r)$ будет иметь вид

$$V_1(r) = V(r) - 2\frac{dP}{dr},$$

где

$$P(r) = \rho\psi^2(r, i\varkappa) \Big/ \Big(1 + \rho \int_0^r \psi^2(s, i\varkappa)\, ds\Big).$$

Укажем еще на то, что при этом преобразовании потенциала $V(r)$ функция ψ преобразуется по формуле

$$\psi_1(r;k) = \psi(r;k) + (k^2+\varkappa^2)^{-1}P(r)\psi(r;i\varkappa)\times$$
$$\times\frac{d}{dr}\left[\frac{\psi(r;k)}{\psi(r;i\varkappa)}\right].$$

Этот результат, по-видимому, не был замечен авторами. Между прочим, он остается в силе и для комплексных $\varkappa$, а также при замене в (5) специальных начальных условий общими:

$$\psi(0;k) = c_0,$$
$$\psi'(0;k) = c_1.$$

5. Остается еще указать, насколько общим является класс потенциалов $V(r)$, получаемых описанными выше процедурами.

Один из результатов статьи [6] позволяет утверждать, что этот класс содержит всякую функцию, удовлетворяющую двум условиям:

I. $rV(r) \in L_1(0,\infty)$.

II. Решение φ системы

$$\varphi'' - V(r)\varphi = 0,$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\varphi'(0) = 1$$

является неограниченным.

Заметим, что при выполнении условия I у уравнения

$$\varphi'' - V(r)\varphi = 0,$$

как известно, будут существовать решения $\varphi_{1,2}(r)$ с поведением:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(r) &= 1 + o(r),\\ \varphi_2(r) &= r + o(r)\end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad r\to\infty.$$

Таким образом, при выполнении условия I условие II означает иначе, что $\varphi_1(0) \neq 0$, что только в исключительных случаях может не выполняться.

При выполнении же условий I и II системе (5) будет отвечать функция $S(k)$, удовлетворяющая условиям 1), 2), 4) и условию 3′), где m (≥ 0) — число отрицательных собственных чисел системы (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1954. — Т.97, №1.

[2] *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: ГИТТЛ, 1947.

[3] *Zadeh L.A., Ragazzini J.R.* // J. Appl. Phys. — 1950. — V.21, N 7.

[4] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1954. — Т.94, №1.

[5] *Jost R., Kohn W.* // Kgl. Danske Videnskab. Selsab. Mat.-fys. Medd. — 1953. — V.27, N 9.

[6] *Jost R., Kohn W.* // Phys. Rev. — 1952. — V.87, N 6.

К ТЕОРИИ АКСЕЛЕРАНТ И S-МАТРИЦ КАНОНИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Доклады АН СССР. — 1956. — Том 111, № 6)

В нашем сообщении [1] было указано, что проведенное там исследование допускает непосредственное обобщение на случай систем интегральных и дифференциальных уравнений. Это же в известной мере относится и к нашим последующим исследованиям [2,3] по обратным задачам для дифференциальных операторов. Здесь будут приведены некоторые детали этих обобщений и одновременно — некоторые положения, являющиеся новыми даже в скалярном случае.

1. В дальнейшем прописными буквами $A, D, \mathcal{E}, F, \ldots$ будут обозначаться квадратные комплексные матрицы одного и того же порядка n (произвольно фиксированного), через $A^\tau, D^\tau, \mathcal{E}^\tau, F^\tau, \ldots$ — соответствующие транспонированные матрицы.

Пусть $H(t)$ $(-2T < t < 2T;\ T \leq \infty)$ — некоторая локально интегрируемая матрица-функция. Условимся ее называть симметричной акселерантой, если $H(t) = H^\tau(t) = H(-t)$ $(|t| < 2T)$ и для любого a $(0 < a < 2T)$ интегральное уравнение

$$X(t) + \int_0^a H(t-u)X(u)du = Y(t) \quad (0 \leq t \leq a) \tag{1}$$

имеет при $Y \equiv 0$ единственное непрерывное решение $X(t) \equiv 0$.

Рассматривая простоты ради случай непрерывной симметричной акселеранты H, обозначим через $\Gamma_a(t,s)$ $(0 \leq s,t \leq a)$ непрерывное решение уравнения (1) при $Y(t) = H(t-s)$.

Как и в скалярном случае [1–3], резольвента $\Gamma_a(t,s)$ будет обладать свойствами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_a(t,s)}{\partial a} &= -\Gamma_a(t,a)\Gamma_a(a,s), \\ \Gamma_a(t,s) &= \Gamma_a^\tau(s,t) = \Gamma_a(a-t,a-s). \end{aligned} \tag{2}$$

Положим для любого комплексного k:

$$\mathcal{E}(r;k) = e^{ikr}\left(I_n - \int_0^{2r} \Gamma_{2r}(0,s)e^{-iks}ds\right) \tag{3}$$
$$(0 \le r < T; \quad \mathcal{E}(0,k) = I_n).$$

С помощью (2) без труда находим

$$d\mathcal{E}(r;k)/dr = ik\mathcal{E}(r;k) - A(r)\mathcal{E}(r;-k), \tag{4}$$

где $A(r) = 2\Gamma_{2r}(0,2r)$ — симметрическая матрица-функция.

Если положить

$$\begin{aligned} 2\Phi_0(r;k) &= \mathcal{E}(r;k) + \mathcal{E}(r;-k); \\ 2i\Psi_0(r;k) &= \mathcal{E}(r;k) - \mathcal{E}(r;-k), \end{aligned} \tag{5}$$

то функции Φ_0, Ψ_0 составят решение дифференциальной системы

$$d\Phi/dr = -k\Psi - A(r)\Phi, \quad d\Psi/dr = k\Phi + A(r)\Psi, \tag{6}$$

причем $\Phi_0(0;k) = I_n$, $\Psi_0(0;k) = 0$.

Исключая в уравнениях (6) функцию Φ, найдем, что Ψ_0 является также решением системы

$$d^2\Psi/dr^2 - V(r)\Psi + k^2\Psi = 0; \quad \Psi(0;k) = I_n, \quad \Psi'(0,k) = kI_n, \tag{7}$$

где $V(r) = A^2(r) - dA(r)/dr$ $(0 \le r < T)$ — некоторая симметрическая матрица-функция, элементы которой в общем случае суть обобщенные функции (класса первых производных от непрерывных функций).

Заметим, что если наперед задана функция $V(r)$ $(0 \le r < T)$ указанного класса и уравнение $\theta'' - V(r)\theta = 0$ имеет некоторое решение θ, для которого $\det\theta \ne 0$ $(0 \le r < T)$, то, полагая $A(r) = \theta'(r)\theta^{-1}(r)$ $(0 \le r < T)$, мы получим систему (6), порождающую систему (7).

Теорема 1. *Всякой непрерывной симметрической матрице-функции $A(r)$ $(0 \le r < T)$ отвечает всегда одна и только одна непрерывная симметрическая акселеранта $H(t)$ $(-2T < t < 2T)$, ее порождающая указанным выше способом.*

При этом, если функция $A(r)$ $(0 \le r < T)$ имеет $k(\ge 0)$ непрерывных (абсолютно непрерывных) производных, то в этом и только этом случае функция $V(r)$ $(0 \le r < 2T)$ будет иметь k непрерывных (абсолютно непрерывных) производных.

2. Если в уравнении (4) заменить $A(r)$ на $-A(r)$, то его решением будет функция

$$\begin{aligned} D(r;k) &= e^{ikr}\left(I_n + \int_0^{2r} L(2r,s)e^{-iks}ds\right), \\ L(r;s) &= \Gamma_r(0,s) + 2\int_s^r \Gamma_r(0,u)H(u-s)ds. \end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому функции

$$\begin{aligned} \Phi_1(r;k) &= -\frac{1}{2i}\Big(D(r;k) - D(r;-k)\Big), \\ \Psi_1(r;k) &= \frac{1}{2i}\Big(D(r;k) + D(r;-k)\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

составят второе решение системы (6), для которого уже

$$\Phi_1(0;k) = 0, \quad \Psi_1(0;k) = I_n\,.$$

Стало быть, $\Psi_1(r;k)$ будет вторым решением дифференциального уравнения (7), причем

$$\Psi_1(0;k) = I_n, \quad \Psi_1''(0;k) = 0\,.$$

Из (3) и (8) непосредственно следует, что в любой точке r $(0 < r < T)$ при $\operatorname{Im} k$, меньшем некоторой постоянной:

$$\mathcal{E}^{-1}(r;k)D(r;k) = 1 + 2\int_0^\infty e^{-ikt}H_r(t)dt, \tag{10}$$

где $H_r(t) = H(t)$ $(0 \le t \le 2r)$. При $H(t)$ вещественном будем иметь $H_r(t) \in \Omega_+^{(n)}$ и равенство (10) будет иметь место во всей полуплоскости $\operatorname{Im} k \le 0$.

Поясним, что через $\Omega_+^{(n)}$ (соответственно $\Omega^{(n)}$) обозначается класс всех матриц-функций n-го порядка, элементы которых принадлежат $L_1(0,\infty)$ (соответственно $L_1(-\infty,\infty)$).

3. В дальнейшем рассматриваются акселеранты H, определенные на всей оси $(T = \infty)$. Условимся доопределять функцию $\Gamma_r(0,t)$ при $t > r$ как равную нулю.

Теорема 2. *Если $A(r) \in \Omega_+^{(n)}$, то почти для всех $t \in (0,\infty)$ будет иметь смысл матрица-функция*

$$\Gamma(t) = \Gamma_t(0,t) - \int_t^\infty \Gamma_\rho(0,\rho)\Gamma_\rho(0,\rho-t)d\rho,$$

при этом любой ее элемент будет пределом в метрике $L_1(0,\infty)$ соответствующего элемента матрицы-функции $\Gamma_r(0,t)$ при $r \to \to \infty$, так что $\Gamma(t) \in \Omega_+^{(n)}$. Поэтому в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} k \le 0$ будет равномерно выполняться предельное соотношение:

$$\lim_{r\to\infty} e^{-ikr}\mathcal{E}(r;k) = G(k) \qquad (\operatorname{Im} k \le 0), \tag{11}$$

где

$$G(k) = 1 - \int_0^\infty e^{-ikt}\Gamma(t)\,dt \qquad (\operatorname{Im} k \le 0). \tag{12}$$

Если, кроме того, $H(t) \in \Omega^{(n)}$, то в этом (и только этом) случае будет выполняться условие $\det G(k) \neq 0$ $(\operatorname{Im} k \le 0)$, *а* *вместе с ним и соотношения*

$$I_n + 2\int_0^\infty H(t)\cos kt dt = \left[G^\tau(-k)G(k)\right]^{-1} \quad (-\infty < k < \infty); \tag{13}$$

$$G^{-1}(k) = I_n + \int_0^\infty K(t)e^{-ikt}dt, \quad K(t) = H(t) - \int_0^\infty \Gamma(s)H(t+s)ds\,. \tag{14}$$

Если матрица-функция $A(r) \in \Omega_+^{(n)}$ вещественна, то всегда $H(t) \in \in \Omega^{(n)}$. Заметим, что из (13) следует

$$\det\left(I_n + 2\int_0^\infty \cos kt H(t)\,dt\right) \neq 0 \quad (-\infty < k < \infty). \tag{15}$$

4. В силу (5) и (11):

$$\Psi_0(r;k) = \frac{1}{2i}\,[S(k)e^{ikr} - e^{-ikr}]\,G(-k) + o(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{16}$$

где $S(k) = G(k)G^{-1}(-k)$. Учитывая, что, согласно (13), $G^\tau(-k)\times \times G(k) = G^\tau(k)G(-k)$, а также, что $\det G(-k) \neq 0$ при $\operatorname{Im} k \leq 0$, находим

$$S(-k) = S^{-1}(k), \qquad S(k) = S^\tau(k); \tag{17}$$

$$\arg\det S(+\infty) = \arg\det S(-\infty). \tag{18}$$

На основании известной теоремы Винера об абсолютно сходящихся интегралах Фурье можно утверждать о существовании матрицы-функции $F(t) \in \Omega^{(n)}$ такой, что

$$S(k) = I_n + \int_{-\infty}^\infty e^{ikt}F(t)\,dt. \tag{19}$$

Из соотношения $G^{-1}(k)S(k) = G^{-1}(-k)$ согласно (14) и (19) следует

$$K(t) - \int_0^\infty K(s)F(s+t)ds = F(t) \quad (0 \leq t < \infty); \tag{20}$$

$$K(t)+\int_0^\infty K(s)F(s-t)ds=-F(-t)\quad (0\le t<\infty). \tag{21}$$

5. Пусть теперь $H(t)=H^{\tau}(t)=H(-t)$ — произвольная симметрическая четная вещественная матрица-функция с элементами из $L_1(-\infty,\infty)$. Нетрудно показать, что при выполнении условия (15) функция $H(t)$ будет акселерантой. Более того, в совместной работе И.Ц. Гохберга и автора (ее основные результаты изложены в [4]) показано, что в этом случае интегральное уравнение

$$\Gamma(t)+\int_0^\infty \Gamma(s)H(s-t)ds=H(t)\quad (0\le t<\infty) \tag{22}$$

имеет в классе $\Omega_+^{(n)}$ единственное решение $\Gamma(t)$ и, если $G(k)$ определить равенством (12), то будут иметь место соотношения (13) и (14). Так как при этом в силу вещественности $H(t)$ будет вещественным и $\Gamma(t)$, то для $S(k)=G(k)G^{-1}(k)$ будем иметь:

$$S(-k)=\overline{S(k)}\quad (-\infty<k<\infty),$$

что вместе с (17) будет давать унитарность матрицы $S(k)$.

6. Пусть теперь $S(k)=S^{-1}(k)$ $(-\infty<k<\infty)$ — произвольная симметрическая унитарная матрица-функция, допускающая представление (19) с некоторой функцией $F(t)\in\Omega^{(n)}$. Оказывается, матрица-функция $S(k)$ будет порождаться в указанном выше смысле некоторой акселерантой $H(t)\in\Omega^{(n)}$ в том и только том случае, когда: 1) выполняется условие (18) и (2) однородное уравнение, соответствующее уравнению (20), не имеет нетривиальных решений в классе $\Omega_+^{(n)}$ (в скалярном случае $n=1$ второе условие можно отбросить, так как оно является следствием первого условия (18)). При выполнении указанных условий уравнение (20) будет иметь единственное решение $K(t)$ в классе $\Omega_+^{(n)}$, которое одновременно в том же классе будет единственным решением уравнения (21), и по $K(t)$ акселеранта $H(t)$ найдется по

формуле

$$H(-t) = H(t) = \int\limits_{0}^{\infty} K(t+s)K(s)ds \quad (0 \leq t < \infty). \qquad (23)$$

Недавно В.А. Марченко [5] предложил новый важный метод восстановления скалярного[†] потенциала $V(r)$ по его S-функции. Этот метод требует решения интегрального уравнения (с параметром x $(0 \leq x < \infty)$), получающегося из уравнения (20) заменой нижнего предела в интеграле параметром x, а ядра $F(t+s)$ и правой части $F(t)$, соответственно, на $-F(-t-s)$ и $-F(-t)$.

В нашем методе необходимо решить только одно уравнение (при $x = 0$) того же типа, что и у В.А. Марченко, и затем уравнение (1) с конечными переменными пределами при $Y(t) = H(t)$, из которых верхний является параметром.

За недостатком места здесь опускается сравнение полученного результата с интересным исследованием [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1954. — Т.97, №1.

[2] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1955. — Т.105, №3.

[3] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1955. — Т.105, №4.

[4] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* // Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, 2, 1956.

[5] *Марченко В.А.* // Докл. АН СССР. — 1955. — Т.104, №5.

[6] *Newton R.G., Jost R.* // Nuovo Cimento. — 1955. — V.1, N 4.

[†] На Всесоюзном совещании по функциональному анализу в Москве в январе 1956 г. З.С. Агранович и В.А. Марченко сделали сообщение, в котором часть результатов из [5] была обобщена на матричный случай.

К ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПЕРАТОРОВ РАССЕЯНИЯ

(совместно с М.Ш. Бирманом)

(Доклады АН СССР. 1962. — Том 144, № 3)

В настоящем сообщении понятие волновых операторов переносится на случай пары унитарных операторов. Существование этих волновых операторов устанавливается для унитарных операторов, отличающихся на ядерный. Использование преобразования Кэли позволяет отсюда получить существование волновых операторов для пары самосопряженных операторов при единственном условии ядерности разности резольвент[†].

С помощью волновых операторов известным образом конструируется оператор рассеяния, который в свою очередь порождает S-матрицу (матрицу рассеяния). Во второй части сообщения устанавливаются некоторые спектральные характеристики матрицы рассеяния.

1. Пусть U_1, U_2 — унитарные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и P_k $(k = 1,2)$ — проектор на абсолютно непрерывное подпространство $\mathfrak{H}$ $(\mathfrak{H})$ оператора U_k.

Теорема 1. *Если оператор* $V = U_2 - U_1$ *ядерный, то:*

[†]Волновые операторы для абстрактных самосопряженных операторов изучались в работах [1–6]. Краткое сопоставление результатов приведено в заметке [6]; там же см. определение волнового оператора, абсолютно непрерывной части оператора и т.п. В отличие от заметки [6] мы обозначаем волновые операторы через $W_\pm$, а не $U_\pm$. По поводу определения класса ядерных операторов см., например, [7]. В заметке [8] одного из авторов этот класс обозначался через $\mathfrak{S}$. Условие ядерности разности резольвент $R_z(H_2)$, $R_z(H_1)$ обозначает, что для какой-либо общей регулярной точки z (а тогда и для любой такой точки) $R_z(H_2) - R_z(H_1) \in \mathfrak{S}$.

1) существуют сильные пределы (волновые операторы)

$$W_{\pm}(U_2, U_1) = \lim_{n\to\pm\infty} U_2^n U_1^{-n} P_1; \qquad (1)$$

$$W_{\pm}(U_1, U_2) = \lim_{n\to\pm\infty} U_1^n U_2^{-n} P_2\,; \qquad (2)$$

2) операторы $W_{\pm}(U_2, U_1)$ изометрически отображают $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$; операторы $W_{\pm}(U_1, U_2) = W_{\pm}^*(U_2, U_1)$ изометрически отображают $\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1$;

3) абсолютно непрерывные части операторов U_1 и U_2 унитарно эквивалентны, причем для любого $f \in \mathfrak{H}_1$

$$W_{\pm}(U_2, U_1)U_1 f = U_2 W_{\pm}(U_2, U_1) f.$$

Доказательство этой теоремы проводится в основном методом Т. Като [2,3]. Именно, в случае одномерного возмущения доказательство основано на изучении резольвент операторов U_1, U_2. Переход к случаю конечномерного V производится на основании "теоремы умножения" волновых операторов [2, 5]. Наконец, в общем случае используется предельный переход от конечномерных возмущений. Заметим в связи с этим, что аппроксимацию возмущения более простыми операторами V_n необходимо проводить без нарушения унитарности оператора $U_1 + V_n$. Возможность такой аппроксимации была раньше указана одним из авторов [8] при распространении на унитарные операторы "формулы следов".

2. Пусть теперь H_1, H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$. Будем говорить, что операторы H_1, H_2 удовлетворяют условию (A), если разность их резольвент ядерна. Пусть $n(> 1)$ — целое число; будем говорить, что операторы H_1, H_2 удовлетворяют условию (B_n), если они положительно определенные, оператор $H_2^{-1} - H_1^{-1}$ вполне непрерывен и оператор $H_2^{-n} - H_1^{-n}$ — ядерный. Для проектора на абсолютно непрерывное подпространство $\mathfrak{H}_k$ оператора H_k сохраним обозначение P_k $(k = 1, 2)$.

Теорема 2. *Пусть H_1, H_2 — самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющие условию (A). Тогда существуют сильные* *пределы*

$$W_\pm(H_2, H_1) = \lim_{t\to\pm\infty} e^{iH_2t}e^{-iH_1t}P_1\,. \tag{3}$$

Если $U_k = (H_k - iI)(H_k + iI)^{-1}$ $(k = 1, 2)$ — *преобразования Кэли операторов* H_k, *то разность* $U_2 - U_1$ *ядерна и*

$$W_\pm(H_2, H_1) = W_\pm(U_1, U_2). \tag{4}$$

Очевидно, справедливы также утверждения, аналогичные утверждениям 2) и 3) теоремы 1. Заметим, что теорема Като [3] о возмущении самосопряженного оператора ядерным следует уже из теоремы 1 (достаточно применить теорему 1 к операторам $\exp(iH_k)$). Оба признака Курода [4] существования волновых операторов содержатся в теореме 2. При доказательстве теоремы 2 достаточно установить существование слабых пределов (3), а также соотношение (4). Тогда, в силу теоремы 1, операторы $W_\pm(H_2, H_1)$ изометричны и пределы (3) — сильные. Этим методом существование сильных пределов (3) было ранее доказано одним из авторов [6] при дополнительном условии ограниченной обратимости операторов H_1, H_2. Вместо формулы (4) в этом случае устанавливалось соотношение

$$W_\pm(H_2, H_1) = W_\mp(H_2^{-1}, H_1^{-1})\,.$$

В той же работе доказано существование сильных пределов вида (3) для операторов H_1, H_2 и операторов H_1^{-1}, H_2^{-1} при условии (B_n). При этом показано, что

$$W_\pm(H_2, H_1) = W_\mp(H_2^{-1}, H_1^{-1}) = W_\mp(H_2^{-n}, H_1^{-n})\,. \tag{5}$$

3. С помощью волновых операторов строится оператор рассеяния

$$S \equiv S_{21} \equiv S(H_2, H_1) = W_+^*(H_2, H_1)W_-(H_2, H_1)\,,$$

широко используемый в физике. Оператор S унитарен в пространстве† $\mathfrak{H}_1$ и перестановочен там с H_1. Из теоремы умножения

†Не ограничивая общности, будем считать $\mathfrak{H}_1$ сепарабельным, так как при возмущениях рассматриваемых нами типов ортогональное дополнение к множеству неподвижных элементов оператора S сепарабельно.

волновых операторов легко следует правило умножения операторов рассеяния, которое мы приведем для случая трех сомножителей:

$$S(H_4, H_1) \equiv S_{41} = S'_{43} S'_{32} S_{21}, \tag{6}$$

где

$$S'_{k+1,k} = W_+^*(H_k, H_1) S(H_{k+1}, H_k) W_+(H_k, H_1) \quad (k = 2, 3)$$

— унитарные в $\mathfrak{H}_1$ операторы, перестановочные с H_1. Пусть $\mathfrak{H}_1$ разложено [9] в непрерывную прямую сумму гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_\lambda$ по кольцу ограниченных функций абсолютно непрерывной части оператора H_1. Поскольку все спектральные меры оператора H_1 в $\mathfrak{H}$ абсолютно непрерывны, мы можем считать, что связанная с разложением $\mathfrak{H}_1$ в сумму пространств $\mathfrak{H}$ мера есть мера Лебега на спектре Λ оператора H_1 в $\mathfrak{H}$. Так как оператор S перестановочен с H_1, то он порождает в семействе $\mathfrak{H}_\lambda$ измеримое семейство унитарных операторов $S(\lambda)$, определенных для почти всех $\lambda \in \Lambda$. Мы будем называть семейство $S(\lambda)$ матрицей рассеяния, отвечающей оператору S. Если кратность спектра H_1 в $\mathfrak{H}_1$ конечна, то все $\mathfrak{H}_\lambda$ конечномерны, и $S(\lambda)$ можно реализовать в виде конечной унитарной матрицы-функции. В противном случае $S(\lambda)$ можно реализовать (в зависимости от выбора реализации пространств $\mathfrak{H}$) в виде бесконечных матриц-функций или ядер. Правило умножения (6), очевидно, переносится и на матрицы рассеяния:

$$S_{41}(\lambda) = S'_{43}(\lambda) S'_{32}(\lambda) S_{21}(\lambda). \tag{7}$$

4. При доказательстве приводимых ниже результатов существенную роль играет аппарат, введенный для обоснования формулы следов [10, 8]. Приведем необходимые для дальнейшего сведения. Если выполнено условие (A), то для следа разности резольвент операторов H_1, H_2 при любых невещественных z справедливо представление

$$\mathrm{Sp}\Big[R_z(H_2) - R_z(H_1)\Big] = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)d\lambda}{(\lambda - z)^2}, \tag{8}$$

где $(\lambda^2+1)^{-1}\xi(\lambda) \in L_1(-\infty,\infty)$. Функция спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ определяется соотношением (8) с точностью до постоянного слагаемого. В дальнейшем нам достаточно определить $\xi(\lambda)$ с точностью до целочисленного слагаемого с помощью соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\lambda)d\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Sp}\ln(U_1^{-1}U_2), \tag{9}$$

где U_k $(k=1,2)$ — преобразования Кэли оператора H_k.

Если

$$H_2 = H_1 + V,$$

где V — ядерный оператор, то $\xi(\lambda) \in L_1(-\infty,\infty)$, а условие (9) можно заменить условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)\,d\lambda = \mathrm{Sp}\,V.$$

Если V — одномерный, то знаки $\xi(\lambda)$ и V одинаковы и $|\xi(\lambda)| \leq$ ≤ 1. Функцию спектрального сдвига $\xi(\lambda)$ можно ввести и при условии (B_n) (см. [8]) путем преобразования независимой переменной в функции спектрального сдвига для операторов H_1^{-n}, H_2^{-n}. При этом $\xi(\lambda)=0$ левее спектров H_1 и H_2 и $\lambda^{-(n+1)}\xi(\lambda) \in$ $\in L_1(0,\infty)$.

5. **Теорема 3.** *Если для самосопряженных операторов H_1, H_2 выполнено условие (A) или какое-либо условие (B_n) $(n=$ $=2,3,\ldots)$, то матрица рассеяния при почти всех $\lambda \in \Lambda$ имеет вид*

$$S(\lambda) = I_\lambda + T(\lambda), \tag{10}$$

где I_λ — единичный, а $T(\lambda)$ — ядерный оператор в $\mathfrak{H}_\lambda$. Кроме того, для почти всех $\lambda \in \Lambda$

$$\det S(\lambda) = e^{-2\pi i\xi(\lambda)}, \tag{11}$$

где $\xi(\lambda)$ — функция спектрального сдвига для H_1 и H_2.

Сделаем некоторые пояснения. Если $H_2 = H_1 + V$ и V — ядерный, то переход от H_1 к H_2 можно осуществлять шагами, вводя на каждом шаге одномерное возмущение. Такому возмущению отвечает матрица рассеяния, спектр которой состоит из единицы и простого собственного числа $\exp[-2\pi i \xi_k(\lambda)]$, если последнее отлично от единицы. Здесь $\xi_k(\lambda)$ — функция спектрального сдвига, соответствующая введению одномерного возмущения на k-м шаге. Отметим, что (см. [10])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_k(\lambda)|\, d\lambda \leq \mathrm{Sp}|V|. \tag{12}$$

Используя оценку (12), можно доказать, что соответствующее описанному процессу бесконечное произведение матриц рассеяния, построенное по правилу (7), сходится после вычитания из него I_λ в ядерной норме при почти всех $\lambda \in \Lambda$ к некоторому оператору $T(\lambda)$. Легко проверяется также, что $I_\lambda + T(\lambda)$ есть матрица рассеяния, отвечающая оператору $S(H_2, H_1)$. В случае условия (A) (условия (B_n)) формула (4) (соответственно формула (5)) позволяет свести нашу задачу к аналогичной задаче для преобразований Кэли U_1, U_2 (соответственно для операторов H_1^{-n}, H_2^{-n}), после чего можно провести рассуждение, подобное изложенному.

Из (10) следует возможность представления $S(\lambda)$ в виде

$$S(\lambda) = e^{-2\pi i K(\lambda)} \quad (\text{почти для всех} \quad \lambda \in \Lambda), \tag{13}$$

где $K(\lambda)$ — ядерный оператор в $\mathfrak{H}_\lambda$; $K(\lambda)$ может быть выбран так, что

$$\int_{\Lambda} \mathrm{Sp}\, |K(\lambda)| p(\lambda) d\lambda \leq C \quad (< +\infty).$$

Здесь:

1) $p(\lambda) = 1, \quad C = \mathrm{Sp}|V|$, если $H_2 = H_1 + V$ и V — ядерный оператор;

2) $p(\lambda) = (1 + \lambda^2)^{-1}, \quad C = \mathrm{Sp}|U_2 - U_1|$, если выполнено условие (A);

3) $p(\lambda) = n\lambda^{-(n+1)}$, $C = \mathrm{Sp}|H_2^{-n} - H_1^{-1}|$, если выполнено условие (B_n).

Удается показать, что ядерный оператор $K(\lambda)$ в представлении (13) можно выбрать неотрицательным, в общем, в тех же условиях, при которых удалось [10] установить полуограниченность снизу функции $\xi(\lambda)$. А именно, справедлива:

Теорема 4. *Ядерный оператор $K(\lambda)$ в представлении (13) может быть выбран неотрицательным, если выполнено условие (A), а также следующие условия:*

1) $D(H_1) = D(H_2)$;

2) форма $((H_2 - H_1)f, f)$ $(f \in D(H_1))$ *имеет конечное число отрицательных квадратов;*

существуют постоянные α, β $(0 \leq \alpha < 1)$ *такие, что*

$$\| (H_2 - H_1)f \| \leq \| H_1 f \| + \beta \| f \|$$

для всех $f \in D(H_1)$†.

Легко также видеть, что в представлении (13) ядерный оператор $K(\lambda)$ может быть выбран неотрицательным, если при некотором $n (\geq 1)$ выполняется условие (B_n) и форма $((H_1^{-n} - H_2^{-n})f, f)$ имеет конечное число отрицательных квадратов.

6. Отметим в заключение, что для радиального уравнения Шредингера строгое доказательство совпадения функции $-\pi\xi(\lambda)$ с предельной фазой содержится в работе [12]. В трехмерной задаче квантового рассеяния выражение $\xi(\lambda)$ через амплитуду рассеяния было недавно получено В.С. Буслаевым [13]. Формула В.С. Буслаева интересна тем, что она значительно проще выражения, получаемого по общей формуле (11).

---

†Последнее условие по другим поводам возникало в работах [11, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Rozenblum M.* // Pasif. Journ. Math. — 1957. — V.7, N 1.

[2] *Kato T.* // Journ. Math. Soc. Japan. — 1957. — V.9, N 2.

[3] *Kato T.* // Proc. Japan Acad. — 1957. — V.33, N 5.

[4] *Kuroda S.T.* // Journ. Math. Soc. Japan. — 1959. — V.11, N 3; 1960. — V.12, N 3.

[5] *Kuroda S.T.* // Nuovo Cimento. — 1959. — V.12, N 5.

[6] *Бирман М.Ш.* // Докл. АН СССР. — 1962. — Т.143, № 3.

[7] *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* // Обобщенные функции, вып.4. — М., 1961.

[8] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1962. — Т.144, № 2.

[9] *Наймарк М.А., Фомин С.Н.* // Успехи мат. наук. — 1955. — Т.10, вып.2.

[10] *Крейн М.Г.* // Мат. сб. — 1953. — Т.33, № 3.

[11] *Kato T.* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — V.70, N 2.

[12] *Буслаев В.С., Фаддеев Л.Д.* // Докл. АН СССР. — 1960. — Т.132, № 1.

[13] *Буслаев В.С.* // Докл. АН СССР. — 1962. — Т.143, № 5.

О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЧАСТОТ ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИИ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ

(совместно с А.А. Нудельманом)

(Доклады АН СССР. — 1979. — Том 247, №5)

1. Рассматривается струна S_a, натянутая единичной силой между точками $x = 0$ и $x = \mathcal{L}$ ($\le \infty$) с распределением масс $M(x)$, $M(0) = 0$, у которой оба конца прикреплены к безмассовым колечкам, скользящим по вертикальным проволокам, причем правый конец скользит без трения, а левый — при наличии вязкого трения (т.е. трения, пропорционального скорости, a — коэффициент пропорциональности). Предполагается, что S_a принадлежит классу $\mathfrak{S}$ струн, имеющих конечный статистический момент относительно точки $x = 0$.

Амплитудные функции свободных колебаний струны $S_a \in \mathfrak{S}$ являются собственными функциями граничной задачи[†]:

$$dy' + k^2 y dM(x) = 0\,, \tag{1}$$

$$ay(0) + iy'(0)/k = 0, \qquad y'(\mathcal{L}) = 0\,. \tag{2}$$

Соответствующие собственные числа задачи (1), (2) назовем частотами граничной диссипации (в дальнейшем определение "граничной" опускается).

Из того, что $S_a \in \mathfrak{S}$, вытекает, что $M(\mathcal{L}) < \infty$ даже при

[†]Смысл уравнения (1), равно как и дифференциальной операции $dy'/$ $/dM(x)$, подробно разъяснен в [1]. Если $\mathcal{L}$, то второе граничное условие понимается в том смысле, что $\lim\limits_{x \uparrow \mathcal{L}} y'(x) = 0$.

$\mathcal{L} = \infty$ и что интегральное уравнение

$$\varphi(x;\lambda) = 1 + \lambda \int\limits_x^{\mathcal{L}} (x - s)\varphi(s;\lambda)dM(s)$$

при любом λ имеет решение $\varphi(x;\lambda)$; эта функция удовлетворяет уравнению (1) ($\lambda = k^2$) и условиям $y(\mathcal{L}) = 1$, $y'(\mathcal{L}) = 0$. При каждом фиксированном $x \in [0, \mathcal{L}]$ функции $\varphi(x, \lambda)$ и $\varphi'(x, \lambda)$ являются вещественными целыми относительно λ функциями нулевого рода [2]; более того, при $\mathcal{L} < \infty$ они имеют порядок не больше $1/2$ (см., например, [1]). Очевидно, что частоты диссипации служат корнями уравнения

$$a\varphi(0;\zeta^2) + i\varphi'(0;\zeta)/\zeta = 0.$$

Струну $S_a \in \mathfrak{S}$ назовем приведенной, если к ее левому концу $x = 0$ не примыкает интервал $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, на котором плотность струны постоянна и равна a^2.

Основным результатом настоящей статьи является

Теорема 1. *Пусть заданы последовательность комплексных чисел $\{k_j\}$ (среди которых могут быть и совпадающие) и положительное число a. Для того чтобы эта последовательность была последовательностью всех частот диссипации некоторой струны $S_a \in \mathfrak{S}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\operatorname{Im} k_j > 0$;

2) множество $\{k_j\}$ симметрично относительно мнимой оси, причем кратности симметричных точек совпадают;

3) $\sum\limits_j \operatorname{Im}(-1/k_j) < \infty$;

4) $\sum\limits_j |k_j|^{-2} < \infty$.

При выполнении этих условий существует единственная приведенная струна $S_a^0 \in \mathfrak{S}$, имеющая заданный спектр частот диссипации; все остальные струны с тем же спектром получаются из S_a^0 продлением ее влево однородным куском плотности a^2[†].

Если положить

$$Q(\zeta) = \prod_{\operatorname{Re} k_j > 0} [(1 - \zeta/k_j)(1 + \zeta/\bar{k}_j)] \prod_{\operatorname{Re} k_j = 0} (1 - \zeta/k_j) \qquad (3)$$

и обозначить через ℓ максимальную длину интервалов $[0, \varepsilon]$, на которых струна однородна и имеет плотность, равную a^2, то имеет место соотношение

$$a\varphi(0, \zeta^2) + i\varphi'(0, \zeta^2)/\zeta = ae^{i\ell a\zeta} Q(\zeta). \qquad (4)$$

Из теоремы 1, в частности, следует, что длины цепочек из собственных и присоединенных функций задачи (1), (2) могут составлять любую совокупность натуральных чисел.

2. Необходимость условий 1), 2) и 3) теоремы 1 вытекает из того легко проверяемого факта (см. [1]), что функция $-\varphi(0, z)/ /\varphi'(0, z)$ принадлежит классу S функций, голоморфных при $z \notin [0, \infty)$, неотрицательных на отрицательной вещественной полуоси и имеющих неотрицательную мнимую часть при $\operatorname{Im} z > 0$. Для доказательства необходимости условия 4) и для освещения других вопросов, связанных со струной $S_a \in \mathfrak{S}$, будет ассоциировать с S_a гильбертово пространство $\mathfrak{H}_S$ вектор-функций, в котором скалярное произведение элементов $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ и $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ определяется формулой

$$(f, g)_S = \int_0^{\mathcal{L}} f_1(x)\, \overline{g_1(x)}\, dM(x) + \int_0^{\mathcal{L}} f_2(x)\, \overline{g_2(x)}\, d(x).$$

Определим оператор D:

$$D(f_1, f_2) = (-df_2/dM(x), df/dx),$$

[†]С последующим сдвигом, в результате которого левый конец струны снова оказывается в точке $x = 0$.

считая его областью определения множество тех элементов из $\mathfrak{H}_S$, на которых он имеет смысл и не выводит их из $\mathfrak{H}$ и для которых

$$af_1(0) + if_2(0) = 0, \qquad f_2(\mathcal{L}) = 0.$$

Частоты диссипации k_j и только они являются собственными числами D; им отвечают собственные вектор-функции

$$\Phi_j(x) = \left(\varphi(x, k_j^2), \varphi'(x, k_j^2)/k_j\right).$$

Оказывается, что для $S_a \in \mathfrak{S}$ оператор D является оператором Гильберта–Шмидта, откуда и следует необходимость условия 4) теоремы 1.

3. При выполнении условий 1)–4), отправляясь от функции (3), строим функции

$$\begin{aligned} A_0(z) &= \frac{1}{2}\left(Q(\sqrt{z}) + Q(-\sqrt{z})\right), \\ B_0(z) &= \frac{1}{2i\sqrt{z}}\left(Q(\sqrt{z}) - Q(-\sqrt{z})\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Это целые вещественные функции нулевого рода, $A_0(0) = 1$, $B_0/A_0 \in S$. Поэтому, пользуясь известными результатами по обратной задаче для струны [3–5], можно построить и притом единственную струну $S_a^0 \in \mathfrak{S}$, для которой $\varphi(0; z) = A_0(z)$, $\varphi'(0; z) = azB_0(z)$. Полученная струна, как это следует из (4), приведенная. Формула (4) и описание всех струн $S_a \in \mathfrak{S}$ с заданным спектром частот диссипации выводятся из полученных авторами некоторых простых предложений теории функций, касающихся описания всех пар вещественных целых функций $A(z)$, $B(z)$ $(A(0) = 1$, $B/A \in S)$, осуществляющих представление

$$P(z) = A^2(z) + zB^2(z)$$

целой функции $P(z)$, положительной на положительной полуоси и у которой $P(0) = 1$.

4. Оператор $-D^{-1}$ диссипативен, $\{-1/k_j\}$ — множество его собственных чисел, мнимая компонента этого оператора двумерна и ее след равен $M(\mathcal{L})/a$. С другой стороны, сравнение коэффициентов при первой степени ζ в (4) приводит к формуле

$$M(\mathcal{L})/a = \sum_j \operatorname{Im}(-1/k_j) + a\ell,$$

из которой, пользуясь известным критерием М.С. Лившица (см., например, [6]), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы система корневых элементов оператора D была плотна в пространстве $\mathfrak{H}_S$, необходимо и достаточно, чтобы струна S_a была приведенной. При выполнении этого условия указанная система минимальна.*

В частности, отсюда следует, что для приведенной струны система собственных и присоединенных функций граничной задачи (1), (2) плотна в $L^2(0, \mathcal{L}; dM)$. По-видимому, они образуют бесконечно переполненную систему. Во всяком случае, для слабо демпфированной струны $S_a \in \mathfrak{S}$, т.е. такой, которая не имеет чисто мнимых частот диссипации, используя результаты из [7], можно установить следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть множество $K = \{k_j\}$ частот диссипации слабо демпфированной струны $S_a \in \mathfrak{S}$ разбито на две непересекающиеся части K_1 и K_2, симметрично расположенные относительно мнимой оси:*

$$K = K_1 \cup K_2, \quad K_1 \cap K_2 = \varnothing, \quad \overline{K_1} = -K_2.$$

Тогда система собственных и присоединенных функций задачи (1), (2), отвечающих частотам диссипации, входящим в K_1, является полной и притом минимальной системой в $L^2(0, \mathcal{L}; dM)$.

Добавим еще следующее предложение, непосредственно вытекающее из [8] и относящееся к случаю прямо противоположного характера.

Теорема 4. *Пусть задана последовательность чисто мнимых чисел $K = \{k_j\}$, $k_j = i\sqrt{\mu_j}$, $\mu_j > 0$, для которой сходится ряд $\sum \mu_j^{-1/2}$.*

Тогда струна S_a^0 ($\in \mathfrak{S}$), имеющая K своим спектром частот диссипации, является стильтьесовской, т.е. распределение масс состоит только из последовательности сосредоточенных масс, сгущающихся к ее левому концу.

В этом случае любое элементарное свободное "колебание" будет иметь вид $Y = \text{const}\ e^{-\mu_j t}\varphi(x; -\mu_j)$ и, следовательно, будет чисто затухающим.

Мы опускаем здесь вопросы, связанные с обобщенным преобразованием Фурье–升Планшереля, порожденного спектральной функцией струны S, которая получается из струны S_a присоединением к ее левому концу полубесконечной однородной струны плотности a^2 (это присоединение в определенном смысле заменяет диссипативное граничное условие).

Приведем еще следующий результат, касающийся асимптотического поведения функции $n(r; S_a)$, дающей число диссипации регулярной ($\mathcal{L} < \infty$) струны S_a, не превосходящих по модулю r. Методы теории диссипативных вполне непрерывных операторов позволяют установить при $\mathcal{L} < \infty$ формулу

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r; S_a)}{r} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\mathcal{L}} \sqrt{\frac{dM}{dx}}\,dx\,,$$

полученную ранее для случаев $a = 0$, $a = \infty$ [9].

Отметим также, что для регулярной струны S_a важный критерий разрешимости обратной задачи для спектра диссипации установил Д.З. Аров [10].

Настоящая статья имеет прямое отношение к теории резонансных состояний и резонансных частот радиального уравнения Шредингера с короткодействующим потенциалом и приводит к некоторым новым результатам в этой теории. При отсутствии связанных состояний соответствующая граничная задача легко преобразуется в задачу (1), (2) с гладким распределением масс. Мы надеемся в дальнейшем подробнее остановиться на этой связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Кац И.С., Крейн М.Г.* Доп. II к кн.: *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.

[2] *Кац И.С., Крейн М.Г.* // Изв. высш. учебн. зав. Сер. мат. — 1958. — №2, 136.

[3] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.87, №6.

[4] *Кац И.С.* // Докл. АН СССР. — 1964. — Т.151, №1.

[5] *Dym H., McKean H.P.* Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem, 1976.

[6] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.

[7] *Крейн М.Г., Лангер Г.К.* // Приложения теории функций в механике сплошной среды. Тр. Междунар. симп. — М.: Наука, 1965. — С.283.

[8] *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* // Докл. АН УССР. Сер.А. — 1977. — №12.

[9] *Крейн М.Г.* // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.76, №3.

[10] *Аров Д.З.* // Сиб. мат. журн. — 1975. — Т.16, №3.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ λ-ЗОН УСТОЙЧИВОСТИ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Сборник памяти А.А. Андронова. М.: АН СССР, 1955)

Пусть S — некоторая механическая система с m степенями свободы, гамильтониан $\mathcal{H}$ которой имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2m} h_{jk}(\omega t) x_j x_k + f(t),$$

где $x_1, ..., x_m$ — обобщенные координаты, $x_{m+1}, ..., x_{2m}$ — соответствующие обобщенные импульсы S, $h_{jk}(t) = h_{kj}(t)$ $(j, k = 1, ..., m)$ — периодические функции времени t периода T, а $\omega > 0$ — некоторый параметр.

Как известно, дифференциальные уравнения движения системы S запишутся следующим образом:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_{j+m}}, \qquad \frac{dx_{j+m}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \quad (j = 1, ..., m).$$

Пользуясь сокращенными обозначениями линейной алгебры, эту систему уравнений можно записать в виде одного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = JH(\omega t)x.$$

Здесь $x = (x_1, ..., x_{2m})$ есть $2m$-мерная вектор-функция, $H(t) = \| h_{jk}(t) \|_1^{2m}$ — симметрическая матрица-функция,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

где I_m обозначает единичную матрицу m-го порядка.

Если в последнем уравнении произвести замену независимой переменной, положив $\tau = \omega t$, а затем букву τ заменить на t, то мы придем к векторному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t) x \qquad \left(\lambda = \frac{1}{\omega}\right). \tag{0.1}$$

Заметим, что к этому уравнению приводится и всякое векторное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu P(t) y = 0\,, \tag{0.2}$$

где $y = (y_1, ..., y_m)$ — m-мерная вектор-функция, а

$$P(t) = P(t+T)$$

— симметрическая матрица-функция m-го порядка:

$$P(t) = \| P_{jk}(t) \|_1^m \ .$$

В самом деле, если, предполагая $\mu \neq 0$ $(-\infty < \mu < \infty)$, положить

$$\lambda = \sqrt{|\mu|} > 0, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda z\,,$$

а вектор $x = (x_1, ..., x_{2m})$ — равным прямой сумме векторов y и z, т.е.

$$x_j = y_j, \qquad x_{j+m} = z_j = \frac{1}{\lambda}\,\frac{dy_j}{dt} \qquad (j = 1, 2, ..., m)\,,$$

то уравнение (0.2) (в определенном смысле) будет эквивалентно уравнению (0.1), в котором

$$H(t) = \begin{pmatrix} \pm P(t) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Точка $\lambda = \lambda_0$ $(-\infty < \lambda_0 < \infty)$ называется λ-точкой устойчивости уравнения (0.1), если при $\lambda = \lambda_0$ все решения уравнения (0.1) ограничены (на всей оси t).

Если же, кроме того, при $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ ограничены все решения всякого уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H_1(t) x$$

с периодической симметрической матрицей-функцией

$$H_1(t) = H_1(t+T),$$

достаточно близкой к матрице-функции $H(t)$, то $\lambda = \lambda_0$ будем называть λ-точкой сильной устойчивости уравнения (0.1).

При этом, разумеется, понятие близости двух периодических матриц-функций $H(t)$ и $H_1(t)$ подлежит точному определению. Такое определение для случая, когда от элементов этих матриц требуется только суммируемость в интервале $(0,T)$, приводится в § 5 настоящей статьи†. Однако, если ограничиться рассмотрением только непрерывных периодических матриц-функций $H(t)$, то, как оказывается, определение λ-точки сильной устойчивости, равносильное общему, получится, если под достаточно близкими матрицами-функциями $H(t)$ и $H_1(t)$ понимать матрицы-функции, соответствующие элементы которых отличаются друг от друга на всей оси меньше, чем на ε, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Заметим еще, что точку устойчивости $\lambda = 0$ причисляем к λ-точкам сильной устойчивости уравнения (0.1) в том и только том случае, если некоторая ее окрестность состоит из таких точек.

Множество λ-точек сильной устойчивости уравнения (0.1) есть открытое множество и, таким образом, если оно не пусто, то распадается в конечную или бесконечную систему непересекающихся открытых интервалов.

Последние называются λ-зонами устойчивости уравнения (0.1).

---

†Заметим, что в § 5 дается другое определение λ-точки сильной устойчивости уравнения (0.1). В силу теоремы 5.1 оно, по крайней мере, не расширяет множества λ-точек сильной устойчивости в смысле приведенного выше определения. Более детальное рассмотрение этих двух определений обнаруживает их равносильность.

Аналогичным образом определяются λ-точки сильной устойчивости и λ-зоны устойчивости уравнения (0.2) с тем единственным отличием, что точка $\mu = 0$ теперь никогда не может быть причислена не только к μ-точкам сильной устойчивости, но и к обыкновенным точкам устойчивости уравнения (0.2), так как при $\mu = 0$ уравнение (0.2) имеет неограниченные решения в виде вектор-функций, линейно зависящих от t.

Эквивалентное определение μ-точки сильной устойчивости получим, если такой точкой назовем всякое $\mu_0 \neq 0$ $(-\infty < \mu_0 < \infty)$, которому отвечает $\lambda_0 = \sqrt{|\mu_0|}$, являющееся λ-точкой сильной устойчивости уравнения (0.1), получающегося из уравнения (0.2) путем вышеуказанных преобразований. Именно из этого определения мы и исходим в § 9.

Задача об определении зон устойчивости уравнения (0.1) или более специального уравнения (0.2) играет важную роль в различных вопросах механики и, вообще, физики (в вопросах параметрического резонанса, в квантово-механической трактовке вопроса о движении электрона в периодическом поле и др.). В настоящее время с этой задачей приходится иметь дело и во многих технических вопросах — при определении динамической устойчивости конструкций.

Для случая скалярного уравнения (0.2) основные результаты о существовании μ-зон устойчивости и их расположения, определение концов последовательных μ-зон устойчивости, как чередующихся по определенному закону характеристических чисел "периодической" и "косопериодической" краевой задачи, различные оценки для первой μ-зоны устойчивости, — все это было получено Ляпуновым [1а–1д].

Однако, несмотря на важность задачи обобщения всех этих замечательных исследований Ляпунова на случай векторных дифференциальных уравнений, до недавнего времени ничего существенного в этом направлении (кроме того, что было указано Ляпуновым) не было сделано.

Дальнейший прогресс в теории уравнений (0.1) удалось осуществить после того, как из этого класса уравнений был выделен класс уравнений положительного типа, характеризующихся тем, что их матрицам-функциям $H(t)$ отвечает неотрицательная форма $(H(t)\xi, \xi)$:

$$\sum_{j,k=1}^{2m} h_{jk}(t)\xi_j\xi_k \geq 0 \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{0.3}$$

положительная в среднем

$$\sum_{j,k=1}^{2m} \Bigl(\int_0^T h_{jk}(t)dt\Bigr)\xi_j\xi_k > 0 \qquad \Bigl(\sum_{j=1}^{2m} \xi_j^2 > 0\Bigr). \tag{0.4}$$

Выделение этого класса было подсказано некоторыми физическими соображениями.

Если какую-либо консервативную систему S с m степенями свободы, совершающую малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия, в котором ее потенциальная энергия достигает строгого минимума[†], подвергнуть малому параметрическому периодическому возбуждению частоты ω, то в линеаризованной постановке задачи движение системы S будет описываться уравнением (0.1) (с $T = 2\pi$) положительного типа[††].

В начале 1950 г. автор обнаружил, что так называемые мультипликаторы уравнения (0.1) положительного типа допускают особую классификацию на мультипликаторы первого и второго рода; после чего, используя новые средства, удалось установить ряд закономерностей в движении этих мультипликаторов при непрерывном возрастании параметра λ. Это позволило [3a] доказать существование центральной (т.е. содержащей точку $\lambda = 0$) λ-зоны устойчивости уравнения (0.1) положительного типа, дать правило определения ее границ, получить достаточный признак принадлежности данного λ этой зоне, а также доказать существование бесконечного числа λ-зон устойчивости, уходящих в обе

[†]Обнаруживаемого при помощи членов второго порядка в разложении потенциальной энергии в ряд по степеням обобщенных координат.

[††]Более того, в этом случае уже в (0.3) будет исключаться знак $=$, если не все $\xi_j = 0$, и, стало быть, (0.4) будет следствием (0.3).

стороны λ-оси на бесконечность, при некоторых дополнительных ограничениях относительно матрицы-функции $H(t)$.

Тем самым удалось продвинуть дальше и теорию уравнений (0.2) положительного типа[†]. В частности, удалось получить первое обобщение на общий случай векторного уравнения (0.2) классического признака А.М. Ляпунова принадлежности μ к первой зоне устойчивости скалярного уравнения (0.2). Кстати, заметим, что этот результат сообщения [3а] так же, как и соответствующий результат относительно центральной зоны уравнения (0.1), в настоящей статье значительно усовершенствован (см. § 7 и 9).

Отметим, между прочим, что существование центральной зоны устойчивости у уравнения (0.1) положительного типа имеет тот физический смысл, что при малом параметрическом возбуждении консервативной системы того типа, о котором уже выше говорилось, устойчивость системы сохраняется, если частота ω возбуждения достаточно велика.

Вскоре после сообщения автора [3а] М.Г. Нейгауз и В.Б. Лидский [4] указали на ряд других важных следствий теории мультипликаторов первого и второго рода. В частности, они показали, что на векторные уравнения (0.2) может быть перенесен достаточный признак Н.Е. Жуковского [2] принадлежности данного μ к некоторой зоне устойчивости, а также ряд других усиленных признаков, полученных в самое недавнее время советскими авторами [3д, 5а,б] для скалярного уравнения (0.2) в развитие результатов А.М. Ляпунова и Н.Е. Жуковского.

В настоящей статье дается первое полное изложение теории мультипликаторов первого и второго рода вместе с ее важнейшими выводами для теории зон устойчивости уравнений (0.1) и (0.2).

Как читатель обнаружит, построение этой теории потребовало привлечения новых средств современной теории матриц, теории аналитических функций и, частично, спектральной теории

[†]Т.е. уравнений (0.2), у которых матрице-функции $P(t)$ соответствует неотрицательная форма $(P(t)\xi,\xi)$, положительная в среднем. Очевидно, что при выполнении этого условия и только в этом случае уравнение (0.2) сводится при $\mu > 0$ к уравнению (0.1) положительного типа.

операторов. Она выглядела бы еще полней, если бы мы, кроме того, привлекли асимптотические методы, позволяющие, в сочетании с теорией мультипликаторов первого и второго рода, доказать для широкого класса уравнений (0.1) и (0.2) существование бесконечного числа зон устойчивости и получить для них асимптотические оценки.

Из-за недостатка места применение асимптотических методов иллюстрируется лишь на примере уравнения (0.1) в двумерном пространстве, когда они допускают некоторую детализацию.

По этой же причине нам пришлось ограничиться лишь беглыми указаниями (§ 9, п.5) в отношении теории мультипликаторов первого и второго рода уравнения (0.2), могущей быть построенной без предположения неотрицательности формы $(P(t)\xi, \xi)$.

Вместе с тем мы разрешили себе изложить теорию уравнений (0.1) и (0.2) в предположении, что $H(t)$ и $P(t)$ — некоторые периодические эрмитовы матрицы-функции (а не обязательно вещественные симметрические матрицы-функции), ввиду того, что это более общее предположение, не вызвав никаких существенных осложнений, позволило полнее раскрыть математические идеи теории.

Если бы мы захотели пойти на некоторые усложнения в формулировках ряда положений теории, то без особого труда могли бы ее обобщить также на тот случай, когда матрица J в уравнении (0.1) не имеет указанного специального вида, а является любой постоянной неособенной эрмитовой матрицей с неопределенной формой $(J\xi, \xi)$.

Для лиц, интересующихся специально теорией ε-параметрического резонанса, заметим, что для понимания §10, посвященного этому явлению, достаточно ознакомиться предварительно лишь с содержанием §1 и 2.

§ 1. Вспомогательные положения теории матриц

В этом параграфе будет приведен ряд известных, а также и новых положений теории матриц; попутно будет введена принятая нами терминология и символика. В отношении известных положений теории матриц, которые будут ниже формулированы без доказательств, мы заранее отсылаем читателя к курсу А.И. Мальцева [16].

1. Через E_n будем обозначать n-мерное пространство комплексных векторов $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ с обычным определением скалярного произведения

$$(\xi, \eta) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \cdots + \xi_n \bar{\eta}_n ,$$

где $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n)$, а черта означает переход к комплексно-сопряженной величине.

Длину (норму) вектора $\xi \in E_n$ будем обозначать через $|\xi|$, так что $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$.

Если $A = \| a_{jk} \|_1^n$ — квадратная матрица порядка n, а $\xi, \eta \in E_n$, то равенством $\eta = A\xi$ будем выражать линейное преобразование:

$$\eta_j = a_{j1}\xi_1 + \cdots + a_{jn}\xi_n \qquad (j = 1, ..., n) .$$

Через A^τ будем обозначать матрицу, транспонированную к матрице A, через A^* — матрицу, транспонированную к комплексно-сопряженной матрице $\overline{A} = \| \bar{a}_{jk} \|_1^n$. Таким образом, для любых $\xi, \eta \in E_n$:

$$(A\xi, \eta) = (\xi, A^*\eta) .$$

Норму матрицы A (обозначаемую через $|A|$) определим равенством

$$|A| = \max_{\zeta \in E_n} \frac{|A\xi|}{|\xi|} .$$

Если A — эрмитова матрица ($A = A^*$), то $|A|$ будет совпадать с наибольшим из абсолютных значений собственных чисел матрицы A. В общем случае $|A|$ совпадает с квадратным корнем из наибольшего собственного числа матрицы A^*A.

Выделенная норма, кроме обычных трех свойств нормы:

1) $|A| > 0$, если $A \neq 0$,

2) $|A + B| \leq |A| + |B|$,

3) $|\lambda A| = |\lambda||A|$ (λ — скаляр),

обладает еще следующими: $|A^*| = |A|$, $|AB| \leq |A||B|$. Очевидно также, что

$$|a_{jk}| \leq |A| \qquad (j, k = 1, ..., n).$$

Коль скоро определено понятие нормы в пространстве матриц n-го порядка, то определено и понятие сходимости последовательности матриц A_ν $(\nu = 1, 2, ...)$ к некоторой матрице A, означающее, впрочем, не что иное как сходимость по элементам.

Если $A(t) = \| a_{jk}(t) \|_1^n$ — некоторая матрица-функция, определяемая в интервале (α, β) и ее элементы a_{jk} $(j, k = 1, ..., n)$ суммируемы в этом интервале, то равенство

$$C = \int_\alpha^\beta A(t)\, dt$$

будет означать, что $C = \| c_{jk} \|_1^n$, где

$$c_{jk} = \int_\alpha^\beta a_{jk}(t) dt \qquad (j, k = 1, ..., n).$$

2. Пусть ρ — собственное число некоторой матрицы A, т.е.

$$\det(A - \rho I_n) = 0.$$

Совокупность L_ρ всех векторов $\xi \in E_n$ таких, что

$$(A - \rho I_n)^n \xi = 0,$$

называется корневым пространством матрицы A, соответствующим числу ρ.

Если L_ρ состоит исключительно из собственных векторов матрицы A, то ρ называется собственным числом простого типа.

В этом случае $\xi \in L_\rho$ тогда и только тогда, когда $A\xi = \rho\xi$.

Для того чтобы ρ было собственным числом простого типа, необходимо и достаточно, чтобы кратность ρ (т.е. его кратность K_ρ, как корня уравнения $\det(A - \rho I_n) = 0$) совпадала с дефектом

d_ρ (разностью порядка и ранга) матрицы $A - \rho I_n$. Если ρ непростого типа, то $d_\rho < k_\rho$. Если ρ — простое собственное число $k_\rho = 1$, то оно простого типа $k_\rho = d_\rho = 1$.

Пусть $\rho_1, ..., \rho_s$ — все различные собственные числа матрицы A, а $L_{\rho_1}, ..., L_{\rho_s}$ — соответствующие корневые пространства. Тогда E_n распадается в прямую сумму

$$E_n = L_{\rho_1} + \cdots + L_{\rho_s}.$$

Таким образом, любой вектор $\xi \in E_n$ единственным образом представляется в виде

$$\xi = \xi^{(1)} + \cdots + \xi^{(s)} \qquad \left(\xi^{(k)} \in L_{\rho_k}; \quad k = 1, ..., s\right).$$

Этому разложению соответствует разложение единичной матрицы в сумму проекционных:

$$I_n = P_1 + \cdots + P_s,$$

так что

$$P_k \xi = \xi^{(k)} \qquad (\xi \in E_n; \quad k = 1, 2, ..., s).$$

Если Γ — гладкий жорданов контур, ограничивающий некоторую область G комплексной плоскости, то

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (A - \lambda I_n)^{-1} d\lambda = \sum_{\rho_j \in G} P_j.$$

3. Если H_1 и H_2 — две эрмитовы матрицы порядка n, то мы будем писать $H_1 \leq H_2$ $(H_2 \geq H_1)$, если для любого $\xi \in E_n$ $(\xi \neq 0)$ $(H_1 \xi, \xi) \leq (H_2 \xi, \xi)$.

Если же в этом соотношении знак равенства исключается, то мы будем писать: $H_1 < H_2$ $(H_2 > H_1)$.

В дальнейшем нас будет интересовать тот случай, когда $n = 2m$. В этом случае полагаем

$$J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

где I_m — единичная матрица m-го порядка.

Заметим, что $J^\tau = J^* = -J, \quad J^2 = -I_n$.

Вектор $\xi \in E_n$ условимся называть плюс-вектором, минус-вектором или нуль-вектором в зависимости от того, будет ли величина $i(J\xi, \xi)$ положительной, отрицательной или равной нулю.

Матрицу U порядка $n = 2m$ будем называть J-увеличивающей, если $iU^*JU > iJ$, т. е. для любого $\xi \in E_n, \ \ \xi \neq 0$

$$i(JU\xi, U\xi) > i(J\xi, \xi)\,. \tag{1.1}$$

Наоборот, матрицу U будем называть J-уменьшающей, если $iU^*JU < iJ$.

Если e — собственный вектор J-увеличивающей матрицы U, т.е. $Ue = \rho e \ \ (e \neq 0)$, то, полагая в (1.1) $\xi = e$, получаем

$$i\left(|\rho|^2 - 1\right)(Je, e) > 0.$$

Таким образом, либо $|\rho| > 1$ и e — плюс-вектор, либо $|\rho| < 1$ и e — минус-вектор.

Нас будет интересовать случай, когда U — неособенная матрица ($\det U \neq 0$).

Теорема 1.1. *Если U — неособенная J-увеличивающая матрица, то E распадается в прямую сумму двух инвариантных по отношению к U m-мерных подпространств:*

$$E_{2m} = E_+ + E_-\,,$$

состоящих соответственно из плюс- и минус-векторов (если не считать нуля), причем в первом и них все собственные числа по модулю больше единицы, а во втором, наоборот, меньше единицы.

Эта теорема является частным случаем более общей теоремы, доказанной нами в [3б][†] (см. также [3г]) при помощи принципа неподвижной точки Броуэра. Впрочем, теорема 1.1 может быть без труда доказана чисто алгебраически.

[†] В статье [3б] матрица U называется iJ-увеличивающей, если выполняется ослабленное условие (1.1), получающееся заменой знака $>$ на знак $\geq$.

4. Матрица $U = \|u_{jk}\|_1^n$ называется J-ортогональной (или симплектической), если

$$U^\tau JU = J\,, \tag{1.2}$$

и J-унитарной, если

$$U^* JU = J. \tag{1.3}$$

Очевидно, что для вещественной матрицы эти два понятия совпадают.

Из (1.2), равно как из (1.3), вытекает, что $\det U \neq 0$ и поэтому первое из этих соотношений можно переписать в виде

$$U^\tau = JU^{-1}J^{-1},$$

а второе в виде

$$U^* = JU^{-1}J^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что элементарные делители J-ортогональной (J-унитарной) матрицы, относящиеся к собственным числам $\rho \neq \pm 1$ (соответственно $|\rho| \neq 1$), входят парами $(\lambda - \rho)^k$, $(\lambda - \rho^{-1})^k$ (соответственно $(\lambda - \rho)^k$, $(\lambda - \overline{\rho}^{-1})^k$).

Этот факт, допускающий, между прочим, дальнейшие уточнения ([16], гл.X), будем выражать следующими словами:

1°. Спектр J-ортогональной матрицы расположен кососимметрично, а спектр J-унитарной матрицы — симметрично относительно единичной окружности.

2°. Спектр вещественной J-ортогональной матрицы расположен симметрично как относительно единичной окружности, так и относительно вещественной оси.

Условие J-унитарности (1.3) иначе можно записать так:

$$(JU\xi, U\eta) = (J\xi, \eta). \tag{1.4}$$

Если

$$U\xi^{(1)} = \rho_1 \xi^{(1)}, \qquad U\xi^{(2)} = \rho_2 \xi^{(2)}$$

и $\rho_1 \overline{\rho}_2 \neq 1$, то, полагая в (1.4) $\xi = \xi^{(1)}$, $\eta = \xi^{(2)}$, найдем, что

$$(J\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = 0.$$

Несложно также доказывается следующий более общий факт.

3°. Пусть L_{ρ_1} и L_{ρ_2} — два корневых пространства J-унитарной матрицы U. Если $\rho_1\overline{\rho}_2 \neq 1$, то L_{ρ_1} и L_{ρ_2} J-ортогональны, т.е. $(J\xi, \eta) = 0 \ \ (\xi \in L_{\rho_1}, \ \ \eta \in L_{\rho_2})$.

Подпространство L называется дефинитным, если форма $(J\xi, \xi)$ сохраняет на нем определенный знак, обращаясь в нуль только при $\xi = 0$.

Подпространство L называется невырожденным, если форма $(J\xi, \xi)$ на нем не вырождается, т.е. если оно не содержит неравного нулю вектора, J-ортогонального к нему самому.

Если L невырождено (в частности, дефинитно), то E_{2m} распадается в прямую сумму

$$E_{2m} = L + M, \tag{1.5}$$

где дополнительное подпространство M J-ортогонально к M.

4°. Если собственному числу ρ J-унитарной матрицы отвечает невырожденное собственное подпространство L, то $|\rho| = 1$ и ρ — собственное число простого типа, т. е. $L = L_\rho$.

Действительно, если бы $\rho\overline{\rho} \neq 1$, то согласно 3° подпространство L было бы J-ортогонально к самому себе, что невозможно.

Поясним кратко также второе утверждение из 4°. Для этого воспользуемся разложением (1.5). Так как L инвариантно по отношению к U, то в силу (1.4) и M инвариантно по отношению к U. Пусть $\rho_2, \rho_3, ..., \rho_s$ — все различные собственные числа матрицы U в M. Тогда $M = L_{\rho_2} + L_{\rho_3} + \cdots + L_{\rho_s}$.

Так как все ρ_j $(j = 2, 3, ..., s)$ отличны от $\rho_1 = \rho$, то из (1.5) вытекает, что $L = L_{\rho_1}$, что и требовалось доказать.

5°. Если собственному числу ρ ($|\rho| = 1$) J-унитарной матрицы U отвечает корневое подпространство L_ρ, на котором форма $i(J\xi, \xi)$ сохраняет знак, то L_ρ — дефинитное подпространство и, следовательно, ρ — собственное число простого типа.

В самом деле, пусть, например,

$$i(J\xi, \xi) \geq 0 \quad \text{при} \quad \xi \in L_\rho. \tag{1.6}$$

Нам нужно доказать, что знак равенства исключается, если $\xi \neq 0$.

Пусть для некоторого $\xi^{(0)} \in L_\rho$:

$$(J\xi^{(0)}, \xi^{(0)}) = 0.$$

Рассматривая неравенство (1.6) при $\xi = \xi^{(0)} + \alpha\eta$, где $\eta \in L_\rho$, а α — скаляр, легко найдем, что $(J\xi, \eta) = 0$ при $\eta \in L_\rho$.

Таким образом, вектор $\xi^{(0)}$ J-ортогонален к L_ρ. Так как $|\rho| = 1$, то согласно предложению 3° вектор ξ, кроме того, J-ортогонален к любому иному корневому подпространству L_{ρ_j} $(\rho_j \neq \rho)$ матрицы U. Стало быть, вектор $\xi^{(0)}$ J-ортогонален, а значит, вектор $J\xi^{(0)}$ просто ортогонален к любому вектору из E_n. Отсюда $J\xi^{(0)} = 0$, $\xi^{(0)} = 0$.

Предложение 5° доказано.

5. J-унитарную матрицу U будем называть матрицей устойчивого типа†, если все ее собственные подпространства дефинитного типа.

Таким образом, согласно 4° у матриц U устойчивого типа все собственные числа по модулю равны единице и суть простого типа.

Теорема 1.2. *Если J-унитарная матрица U устойчивого типа, то и все J-унитарные матрицы V из некоторой ее δ-окрестности $|U - V| < \delta$ будут также устойчивого типа.*

Доказательство. Пусть $\rho_1, ..., \rho_s$ — все различные собственные числа матрицы U, кратностей $k_1, ..., k_s$ соответственно, а $L_1, ..., L_s$ — соответствующие им собственные подпространства. Пусть $\gamma_1, ..., \gamma_s$ — непересекающиеся окружности с центрами в точках $\rho_1, ..., \rho_s$.

Так как в данном случае $L_j = L_{\rho_j}$ $(j = 1, ..., s)$, то проекционные матрицы:

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_j} (\rho I_n - U)^{-1} d\rho \qquad (j = 1, ..., s)$$

будут проектировать E_n в L_j $(j = 1, ..., s)$ соответственно.

---

†Аналогичная терминология для вещественных симплектических матриц была предложена И.М. Гельфандом и В.Б. Лидским.

По условию теоремы каждому L_j отвечает $l_j > 0$ такое, что

$$|(J\xi,\xi)| > l_j(\xi,\xi) \quad \text{при} \quad \xi \in L_j \quad (j = 1, ..., s). \tag{1.7}$$

Выберем какое-либо положительное $h_j < 1$ так, чтобы

$$2|P_j|h_j + h_j^2 < \frac{1}{2}l_j \qquad (j = 1, ..., s). \tag{1.8}$$

Очевидно, всегда возможно выбрать столь малое $\delta > 0$, чтобы все собственные числа любой матрицы V из δ-окрестности матрицы U заключались внутри окружностей γ_j $(j = 1, ..., s)$ и чтобы, кроме того, выполнялись соотношения:

$$|P_j - Q_j| < h_j \qquad (j = 1, ..., s), \tag{1.9}$$

где

$$Q_j = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_j}(\rho I_n - V)^{-1}d\rho \qquad (j = 1, ..., s).$$

Покажем, что так выбранное $\delta > 0$ будет удовлетворять требованию теоремы.

Так как $h_j < 1$, то неравенства (1.9) влекут существование обратных матриц:

$$(I_n - P_j + Q_j)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(P_j - Q_j)^n \qquad (j = 1, ..., s).$$

Когда $\xi \in L_j$, то $\xi = P_j\xi$ и, следовательно,

$$Q_j\xi = (I_n - P_j + Q_j)\xi \qquad (\xi \in L_j).$$

Отсюда, если ξ пробегает L_j, то $Q_j\xi$ пробегает подпространство $L'_j = Q_jL_j$ той же размерности k_j, что и L_j $(j = 1, ..., s)$.

Так как проекционные матрицы Q_j $(j = 1, ..., s)$ между собой J-ортогональны и в сумме дают единичную матрицу, то

$$E_n = Q_1E_n + \cdots + Q_sE_n.$$

Из соотношений

$$k_1 + \cdots + k_s = n, \qquad L'_j \in Q_j E_n \qquad (j = 1, ..., s)$$

заключаем, что $L'_j = Q_j L_j = Q_j E_n$ и, стало быть, L'_j есть прямая сумма корневых подпространств матрицы V, соответствующих собственным числам, попавшим внутрь γ_j $(j = 1, ..., s)$.

Покажем, что подпространства L'_j $(j = 1, ..., s)$ являются дефинитными.

Для этого заметим, что

$$(JP_j\xi, P_j\xi) - (JQ_j\xi, Q_j\xi) =$$

$$= 2\,\mathrm{Im}\,(JP_j\xi,\ (P_j - Q_j)\xi) - (J(P_j - Q_j)\xi,\ (P_j - Q_j)\xi),$$

а следовательно, в силу (1.9)

$$|(JP_j\xi, P_j\xi) - (JQ_j\xi, Q_j\xi)| \le 2h_j|P_j||\xi|^2 + h_j^2|\xi|^2 \le \frac{1}{2}l_j(\xi, \xi).$$

Принимая во внимание (1.7), находим, что

$$|(JQ_j\xi, Q_j\xi)| > \frac{1}{2}l_j(\xi, \xi) \quad \text{при} \quad \xi \in L_j,$$

что означает дефинитность подпространства L'_j $(j = 1, ..., s)$.

Если теперь матрица V из рассматриваемой δ-окрестности J-унитарна, то она будет устойчивого типа, так как все ее корневые, а значит, и собственные подпространства дефинитны.

Теорема доказана.

6. Собственное число ρ J-унитарной матрицы устойчивого типа будем называть собственным числом первого рода или второго рода, соответственно тому, будет ли форма $i(J\xi, \xi)$ положительной или отрицательной на собственном подпространстве L_ρ.

В силу J-ортогональности между собой различных собственных подпространств L_ρ J-унитарной матрицы U и их дефинитности, на основании закона инерции для пространств с индефинитной метрикой (см. [16], § 103) можно утверждать, что сумма кратностей всех собственных чисел одного и того же рода J-унитарной матрицы устойчивого типа в точности равна m.

Теорема 1.3. *Пусть $\{U_\nu\}$ — последовательность J-унитарных матриц устойчивого типа, имеющая своим пределом матрицу U:*

$$U = \lim_{\nu\to\infty} U_\nu.$$

Для того чтобы матрица U была устойчивого типа, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$ выполнялось условие:

> *В ε-окрестности любого собственного числа ρ матрицы U находятся только мультипликаторы одного рода любой из матриц U_ν с достаточно большим индексом ν.*

Доказательство. Так как все матрицы U_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) J-унитарны и их спектр лежит на единичной окружности, то этими свойствами обладает и предельная матрица U. Пусть ρ_0 — некоторое собственное число матрицы U, а γ_ε — окружность с центром в точке ρ_0 радиуса $\varepsilon > 0$. Если ε настолько мало, что внутри γ_ε отсутствуют другие собственные числа матрицы U, то проекционная матрица

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\varepsilon}(\lambda I_n - U)^{-1} d\lambda$$

будет проектировать E_n на корневое подпространство L_{ρ_0} матрицы U.

Положим

$$P_\nu = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_\varepsilon}(\lambda I_n - U_\nu)^{-1} d\lambda. \tag{1.10}$$

Очевидно,

$$P_0 = \lim_{\nu\to\infty} P_\nu.$$

Матрица P_ν проектирует E_n в прямую сумму J-ортогональных собственных подпространств матрицы U_ν, отвечающих собственным числам, лежащим внутри γ_ε. Эти числа стремятся к

ρ_0 при $\nu \to \infty$. Поэтому, если условие, указанное в теореме, выполняется, то для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется такое N_ε, что при $\nu > N_\varepsilon$ подпространство $P_\nu E_n$ будет дефинитным. Тогда на L_{ρ_0} форма

$$i(J\xi,\xi) = i(JP_0\xi, P_0\xi) = \lim_{\nu\to\infty} i(JP_\nu\xi, P_\nu\xi) \qquad (\xi \in L_{\rho_0})$$

будет сохранять знак.

Так как $|\rho_0| = 1$, то отсюда согласно 5° будет следовать дефинитность L_{ρ_0}.

Таким образом, достаточность условия теоремы доказана. Докажем его необходимость.

Если условие не выполняется, то у матрицы U найдется собственное число ρ_0, в любой ε-окрестности которого бесконечное число матриц U_ν ($\nu = 1,2,...$) будет иметь по крайней мере два различных собственных числа ρ'_ν и ρ''_ν разных родов. Выберем снова ε так, как было указано ранее, и рассмотрим матрицы P_ν ($\nu = 1,2,...$), полученные по формуле (1.10).

Согласно только что сказанному, найдется бесчисленное множество значений ν ($\nu = \nu_1, \nu_2, ...$), которым будут соответствовать пары векторов единичной длины $\xi^{(\nu)}_{(1)}, \xi^{(\nu)}_{(2)}$ таких, что

$$\xi^{(\nu)}_{(j)} = P_\nu \xi^{(\nu)}_{(j)} \quad (j = 1,2), \quad i(J\xi^{(\nu)}_{(1)}, \xi^{(\nu)}_{(1)}) > 0, \quad i(J\xi^{(\nu)}_{(2)}, \xi^{(\nu)}_{(2)}) < 0. \tag{1.11}$$

Так как единичная сфера $(\xi,\xi) = 1$ компактна, то без ограничения общности можно считать, что существуют пределы

$$\xi_{(j)} = \lim_{k\to\infty} \xi^{(\nu_k)}_{(j)} \qquad (j = 1,2).$$

Переходя тогда во всех соотношениях (1.11) к пределу по последовательности $\{\nu_k\}$ значений ν, мы получим, что

$$(\xi_{(j)}, \xi_{(j)}) = 1, \quad \xi_{(j)} = P_0\xi_{(j)} \in L_{\rho_0} \quad (j = 1,2),$$

$$i(J\xi_{(1)}, \xi_{(1)}) \geq 0, \qquad i(J\xi_{(2)}, \xi_{(2)}) \leq 0\,,$$

в силу чего L_{ρ_0} не может быть дефинитным подпространством.

Теорема доказана.

§ 2. Каноническая система дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

В этом параграфе приводятся, если не считать небольших дополнений, известные положения о системах линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

1. Пусть

$$A(t) = \|a_{jk}(t)\|_1^n \qquad (0 \le t < \infty)$$

— некоторая квадратная матрица-функция порядка n аргумента t, элементы которой суть комплекснозначные суммируемые функции в любом конечном интервале $(0, l)$.

Рассмотрим дифференциальную систему:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \qquad (j = 1, ..., n),$$

которую иначе будем записывать в виде одного векторного дифференциального уравнения[†]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x. \tag{2.1}$$

Под решением этого уравнения будем понимать всякую абсолютно непрерывную (т. е. с абсолютно непрерывными координатами) вектор-функцию $x = x(t)$, удовлетворяющую интегральному уравнению

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds \qquad (0 \le t < \infty), \tag{2.2}$$

где t_0 — любое число интервала $(0, \infty)$. Очевидно, что если $x(t)$ удовлетворяет (2.2) при каком-либо $t_0 \in (0, \infty)$, то оно будет удовлетворять (2.2) при любом $t_0 \in (0, \infty)$. Каждому $\xi \in E_n$ отвечает одно и только одно решение уравнения (2.2), а значит, и уравнения (2.1) с $x(t_0) = \xi$.

[†]Вектор с постоянными координатами ξ_j $(j = 1, ..., n)$ обозначаем через ξ, а с переменными x_j $(j = 1, ..., n)$ — через x.

Матрицантом уравнения (2.1) называется матрица-функция

$$U(t) = \|u_{jk}(t)\|_1^n \qquad (0 \leq t < \infty)\,,$$

определяемая как решение дифференциальной системы:

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U, \qquad U(0) = I_n,$$

где I_n — единичная матрица n-го порядка.

Иначе $U(t)$ можно определить как абсолютно непрерывное решение интегрального уравнения

$$U(t) = I_n + \int_0^t A(s)U(s)ds \qquad (0 \leq t < \infty).$$

Это решение может быть получено в виде ряда

$$U(t) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} U_k(t), \tag{2.3}$$

где

$$U_k(t) = \int_0^t A(s)U_{k-1}(s)ds \quad (k = 1, 2, ...;\ U_0 = I_n).$$

Если положить

$$a(t) = \int_0^t |A(s)|\, ds \qquad (0 \leq t < \infty), \tag{2.4}$$

то будем иметь

$$|U_k(t)| \leq \int_0^t |U_{k-1}(s)|\, da(s) \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Отсюда по индукции находим

$$|U_k(t)| \leq \frac{a^k(t)}{k!} \qquad (k = 1, 2, ...). \tag{2.5}$$

В силу этого ряд (2.3) будет сходиться равномерно† в каждом конечном интервале $(0, l)$.

При помощи матриканта любое решение $x = x(t)$ уравнения (2.1) выражается через свое начальное значение $x_0 = x(0)$ по формуле

$$x(t) = U(t)x_0. \qquad (2.6)$$

Как известно (формула Остроградского–Лиувилля):

$$\det U(t) = \exp\Big(\int_0^t \sum_{j=1}^n a_{jj}(s)\,ds\Big) > 0 \qquad (0 \le t < \infty).$$

2. В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $A(t)$ — периодическая матрица-функция периода T:

$$A(t+T) = A(t) \qquad (0 \le t < \infty).$$

В этом случае уравнение (2.1) вместе со всяким решением $x = x(t)$ будет иметь решение $x_1 = x(t+T)$.

Комплексное число ρ называется мультипликатором уравнения (2.1), если ему отвечает решение $x(t)/ \not\equiv 0$ этого уравнения, обладающее свойством

$$x(t+T) = \rho x(t) \qquad (0 \le t < \infty). \qquad (2.7)$$

В силу единственности определения $x(t)$ своим значением в любой точке условие (2.7) будет выполнено для всех $t \in (0, \infty)$, если оно выполнено в какой-либо одной точке, например, $t = 0$, т.е.

$$x(T) = \rho x(0).$$

Согласно (2.6) это равенство означает, что

$$(U(T) - \rho I_n)x_0 = 0. \qquad (2.8)$$

---

†Т. е. равномерно сходятся все n^2 рядов, составленные из соответствующих элементов матриц $U_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Матрица $U(t)$ называется матрицей монодромии уравнения (2.1).

Таким образом, мультипликатор уравнения (2.1) есть не что иное, как собственное число матрицы монодромии, т.е. корень алгебраического уравнения

$$\Delta(\rho) = \det(U(T) - \rho I_n) = 0. \tag{2.9}$$

В дальнейшем под кратностью k_ρ мультипликатора ρ будем понимать его кратность, как корня уравнения (2.9).

Решение $x = x(t)$, обладающее свойством (2.7) с данным ρ, будем называть решением, принадлежащим данному мультипликатору ρ.

Очевидно, максимальное число линейно-независимых решений уравнения (2.1), принадлежащих данному мультипликатору, совпадает с размерностью линейного множества всех векторов $x_0 \in E_n$, удовлетворяющих уравнению (2.8), т. е. совпадает с дефектом d_ρ (разностью порядка и ранга) матрицы $U(T) - \rho I_n$.

Вообще говоря, $d_\rho \leq k_\rho$. Если $d_\rho = k_\rho$, то в соответствии с терминологией п. 2, § 1, мультипликатор ρ будет называться мультипликатором простого типа.

3. Нас будет интересовать случай канонического уравнения (2.1). В этом случае $n = 2m$ и уравнение (2.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)x, \tag{2.10}$$

где

$$J = J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(t) = \|h_{jk}(t)\|_1^n \tag{2.11}$$

— вещественная симметрическая матрица-функция периода T.

В порядке обобщения рассмотрим также случай, когда $H(t)$ — эрмитова или комплексная симметрическая матрица-функция.

Матрицант $U(t)$ уравнения (2.10) будет определяться из системы

$$\frac{dU(t)}{dt} = JH(t)U, \qquad U(0) = I_n. \tag{2.12}$$

Следовательно, для любых векторов $\xi, \eta \in E_n$ в случае эрмитовой $H(t)$ будем иметь

$$\frac{d}{dt}(JU\xi, U\eta) = -(HU\xi, U\eta) + (JU\xi, JHU\eta) = 0$$

и, стало быть,

$$(JU\xi, U\eta)_{t=T} = (JU\xi, U\eta)_{t=0} = (J\xi, \eta),$$

т.е.

$$U^*(T)JU(T) = J.$$

Если же H — комплексная симметрическая матрица, то, переходя в (2.12) к комплексно сопряженным величинам, получаем

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = J\overline{H}(t)\overline{U}, \qquad \overline{U}(0) = I_n\,,$$

$$\frac{d\overline{U}}{dt} = J\overline{H}(t)\overline{U}, \qquad \overline{U}(0) = I_n$$

и, следовательно, для любых векторов $\xi, \eta \in E_n$ будем иметь

$$\frac{d}{dt}(JU\xi, \overline{U}\eta) = -(HU\xi, \overline{U}\eta) + (JU\xi, j\overline{H}\,\overline{U}\eta) =$$

$$= -(HU\xi, \overline{U}\eta) + (U\xi, \overline{H}\,\overline{U}\eta) = 0\,,$$

ибо $\overline{H} = H^*$.

Таким образом, в этом случае

$$(JU\xi, \overline{U}\eta)_{t=T} = (JU\xi, \overline{U}\eta)_{t=0} = (J\xi, \eta)$$

и так как $(\overline{U})^* = U^\tau$, то

$$U^\tau(T)JU(T) = J.$$

1°. Матрица монодромии $U(T)$ уравнения (2.10) будет J-унитарной или J-ортогональной в соответствии с тем, является ли $H(t)$ эрмитовой или симметрической матрицей.

Отсюда (см. предложения $1°, 2°$ § 1):

Теорема 2.1. *Если $H(t)$ — эрмитова (симметричная) матрица-функция, то спектр матрицы монодромии $U(T)$ уравнения (2.10) расположен симметрично (кососимметрично) относительно единичной окружности. Если же $H(T)$ — вещественная симметричная матрица-функция, то этот спектр расположен симметрично как относительно единичной окружности, так и относительно вещественной оси.*

Эта теорема (для случая симметрической $H(t)$) была независимо доказана Ляпуновым (см. [1а, с.226]) и А. Пуанкаре.

Если некоторый мультипликатор ρ уравнения (2.1) непростого типа, то всегда (см. [1а] или [17]) ему отвечают два линейно независимых решения $x^{(0)}(t)$ и $x^{(1)}(t)$ такие, что

$$x^{(0)}(t+T) = \rho x^{(0)}(t), \quad x^{(1)}(t+T) = \rho x^{(1)}(t)+x^{(0)}(t) \quad (0 \leq t < \infty).$$

Сочетание этого факта с теоремой 2.1 для канонической системы (2.10) приводит к следующему выводу:

2°. Все решения уравнения (2.10) будут ограничены на всем интервале $(0, \infty)$ в том и только в том случае, когда все мультипликаторы этого уравнения по модулю равны единице и суть простого типа.

4. Задачи механики (см. Введение) обычно приводят к уравнению (2.10), содержащему в правой части в виде множителя некоторый параметр. Это обстоятельство, а также некоторые соображения чисто математического характера дают повод рассматривать, вместо уравнения (2.10), уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t) x \tag{0.1}$$

с вещественной симметрической матрицей-функцией $H(t)$.

Обобщая постановку задачи, всюду в дальнейшем предполагаем, что $H(t)$ есть эрмитова матрица-функция периода T.

Матрицант уравнения (0.1) может быть получен в виде следующего ряда:

$$U(t;\lambda) = I_n + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k U_k(t), \tag{2.13}$$

где $U_k(t)$ $(k = 1, 2, ...)$ вычисляются рекуррентно:

$$U_k(t) = J \int_0^t H(s) U_{k-1}(s)\, ds \qquad (k = 1, 2, ...;\ U_0 = I_n).$$

Так как $(JH)^* JH = H^2$, то

$$|JH(t)| = |H(t)| = h_M(t) \qquad (0 \le t < \infty),$$

где $h_M(t)$ — максимальное из абсолютных значений собственных чисел $H(t)$ $(0 \le t < \infty)$. В согласии с (2.4) и (2.5) норма любого члена ряда (2.13) будет не больше соответствующего члена ряда

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^k}{k!} \Big(\int_0^t h_M(s) ds \Big)^k.$$

Таким образом, ряд (2.13) равномерно сходится в каждом цилиндре $0 \le t \le L$, $|\lambda| \le R$, где L, R — любые положительные числа.

В частности, матрица монодромии $U(T; \lambda)$ уравнения (0.1) будет целой функцией:

$$U(T; \lambda) = I_n + S_1 \lambda + S_2 \lambda^2 + \cdots . \tag{2.14}$$

Заметим, что

$$S_1 = J \int_0^T H(t) dt.$$

В достаточно малой окружности точки $\lambda = 0$ будет иметь смысл голоморфная матрица-функция

$$\Gamma(\lambda) = \ln U(T; \lambda) = \Gamma_1 \lambda + \Gamma_2 \lambda^2 + \cdots \qquad (\Gamma_1 = S_1) \tag{2.15}$$

и если $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., n)$ — собственные числа матрицы $U(T; \lambda)$, а $\gamma_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., n)$ — собственные числа матрицы $\Gamma(\lambda)$, то при соответствующей их нумерации будем иметь

$$\rho_j(\lambda) = e^{\gamma_j(\lambda)} \qquad (j = 1, ..., n). \tag{2.16}$$

Так как

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Gamma(\lambda)}{\lambda}=S_1,$$

то всегда найдется вещественная последовательность значений λ_ν ($\nu=1,2,\ldots$), стремящаяся к нулю, и такая, что

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\gamma_j(\lambda_\nu)}{\lambda_\nu}=s_j \qquad (j=1,\ldots,n), \tag{2.17}$$

где s_j ($j=1,\ldots,n$) — собственные числа матрицы S_1.

При вещественном λ согласно 1° все собственные числа матрицы $U(T;\lambda)$ будут располагаться симметрично относительно единичной окружности, а следовательно, все собственные числа матрицы $\Gamma(\lambda)$ будут располагаться симметрично относительно мнимой оси. Из (2.16) заключаем:

3°. Собственные числа матрицы S_1 расположены симметрично относительно мнимой оси†.

Впрочем, в 3° формулируется известное свойство всякого произведения неособенной вещественной кососимметричной матрицы на эрмитову матрицу, каковым, в частности, является матрица S_1.

Нам осталось немного добавить, чтобы получить следующее предложение.

Теорема 2.2. *Если собственные числа s_j ($j=1,\ldots,n$) матрицы S_1 все лежат на мнимой оси и различны между собой, то найдется такое $l>0$, что при $-l<\lambda<l$ все решения уравнения (0.1) будут ограничены.*

Доказательство. Так как из любой последовательности вещественных чисел λ можно выделить подпоследовательность $\{\lambda_\nu\}$ так, чтобы имело место (2.16), то если все

$$s_j=\pm|s_j|i \qquad (j=1,\ldots,n)$$

†Это предложение, конечно, можно пополнить соответствующим утверждением и относительно элементарных делителей, отвечающим симметрично расположенным собственным числам.

и между собой различны, то найдется $l > 0$ такое, что при $-l < < \lambda < l$ все $\gamma_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., n)$ будут иметь различные мнимые части.

Так как, с другой стороны, все точки $\gamma_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., n)$ должны быть расположены симметрично относительно мнимой оси, то отсюда следует, что в рассматриваемом случае они все расположены на самой оси.

В силу (2.16) последнее означает, что все мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., n)$ лежат на единичной окружности. При достаточно малом l они, кроме того, будут различны между собой.

Теорема доказана.

Заметим, что первое условие (мнимость собственных чисел s_j, $j = 1, ..., n$) выполняется всякий раз, когда эрмитова матрица

$$H_I = \int_0^T H(t)\, dt$$

является положительно определенной, т.е. $H_I > 0$.

В самом деле, имеем

$$\det(S_1 - i\sigma I_n) = \det(J(H_I + i\sigma J)) = (-1)^m \det(H_I + i\sigma J).$$

С другой стороны, так как iJ — эрмитова матрица, то при $H_I > 0$ все корни уравнения $\det(H_I + i\sigma J)$ по известной теореме теории матриц ([17], гл. 10]) будут вещественны.

Как покажем в § 6 (теорема 6.4), если $H_I > 0$, то утверждение теоремы 2.2 сохраняет силу и при наличии кратных собственных чисел у матрицы S_1.

§ 3. Самосопряженные краевые задачи для канонического уравнения

1. Пусть

$$H(t) = \|h_{jk}(t)\|_1^n$$

— некоторая эрмитова матрица-функция, элементы которой измеримы и суммируемы в интервале $(0, T)$.

Условимся говорить, что такая матрица-функция принадлежит классу $\mathcal{P}_n(T)$ и писать $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$, если

$$1)\ H(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \qquad 2) \int_0^T H(t)dt > 0.$$

Условия 1), 2) иначе означают, что для любого $\xi \in E_n$, $\xi \neq 0$

$$(H(t)\xi, \xi) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \qquad \int_0^T (H(t)\xi, \xi)dt > 0. \tag{3.1}$$

Пусть теперь $n = 2m, J = J_n$.

Лемма 2.1. *Если $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$, то для любого решения*

$$x = x(t; \lambda) \neq 0$$

уравнения (0.1)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t) x$$

имеет место равенство

$$(Jx, x)_{t=T} - (Jx, x)_{t=0} = (\overline{\lambda} - \lambda) \int_0^T (H(t)x, x)\, dt\,, \tag{3.2}$$

причем

$$\int_0^T (H(t)x, x)dt > 0. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, уравнение (0.1) эквивалентно следующему:

$$J\frac{dx}{dt} = -\lambda H(t)x. \tag{3.4}$$

С другой стороны, для любых двух абсолютно непрерывных вектор-функций

$$x = x(t),\ y = y(t) \ \ (0 \leq t \leq T)$$

интегрирование по частям дает

$$\int_0^t \left(J\frac{dx}{dt}, y\right)dt - \int_0^t \left(x, J\frac{dy}{dt}\right)dt = (Jx, y)_{t=T} - (Jx, y)_{t=0}.$$

Если

$$y = x = x(t; \lambda)$$

есть решение уравнения (3.4), то это равенство немедленно дает (3.2).

Так как в силу (3.1)

$$(H(t)x, x) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \tag{3.5}$$

то

$$\int_0^T (H(t)x, x)dt \geq 0\,. \tag{3.6}$$

Если бы в (3.6) имел место знак равенства, то в (3.5) почти всюду имел бы место знак равенства. Но тогда[†] почти всюду $H(t)x = 0$ и, следовательно,

$$dx/dy = 0, \quad \text{т.е.} \quad x(t) = \xi = \text{const} \neq 0.$$

С другой стороны, если $x(t) \equiv \xi \neq 0$, то в силу (3.1) в (3.6) знак равенства невозможен.

Лемма доказана.

Простым следствием леммы является:

Теорема 3.1. *Если $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$, то в зависимости от того, будет ли* $\operatorname{Im}\lambda = 0$, > 0 *или* < 0, *матрица монодромии* $U(T;\lambda)$[††] *будет j-унитарной, j-увеличивающей, или j-уменьшающей.*

[†]Так как, если $A \geq 0$ и для некоторого ξ имеем $(A\xi, \xi) = 0$, то $A\xi = 0$.

[††]Сохраняем за $U(T;\lambda)$ название матрицы монодромии, представляя себе, что матрица-функция $H(t)$ периодически продолжена: $H(t+T) = H(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\xi \in E_n$, $\xi \neq 0$ вектор-функция

$$x(t;\lambda) = U(t;\lambda)\xi$$

является решением уравнения (0.1).

Если записать для этого решения тождество (3.2), затем почленно помножить на i, то получим

$$i(JU(T;\lambda)\xi, U(T;\lambda)\xi) - i(J\xi,\xi) = 2\,\mathrm{Im}\,\lambda \int\limits_0^T (H(t)x,x)\,dt.$$

Так как левая часть этого равенства $0, > 0$ или < 0 в зависимости от того, будет ли $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$, > 0 или < 0, то теорема доказана.

2. Всюду в этом параграфе $\mathcal{E}$ будет обозначать произвольно выбранную J-унитарную матрицу, так что

$$(J\mathcal{E}\xi, \mathcal{E}\xi) = (J\xi,\xi) \quad (\xi \in E_n).$$

Теорема 3.2. *Если $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$, то все характеристические числа краевой задачи*

$$\frac{dx}{dt} = \lambda JH(t)x, \quad x(T) = \mathcal{E}x(0) \tag{3.7}$$

вещественны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если $x = x(t;\lambda)$ есть некоторое фундаментальное решение задачи (3.7) (т.е. нетривиальное решение системы (3.7) при некотором значении λ), то

$$(Jx,x)_{t=T} - (Jx,x)_{t=0} =$$

$$= (J\mathcal{E}x(0), \mathcal{E}x(0)) - (Jx(0),x(0)) = 0.$$

С другой стороны, в силу (3.2) и (3.3) это возможно лишь при условии $\lambda = \overline{\lambda}$.

Теорема доказана[†].

3. Если $U(t;\lambda)$ — матрицант уравнения (0.1), то, очевидно, характеристические числа краевой задачи (3.7) будут ни чем иным, как корнями уравнения

$$\det(U(T;\lambda) - \mathcal{E}) = 0. \tag{3.8}$$

Пусть

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \tag{3.9}$$

— все положительные характеристические числа краевой задачи (3.7), а

$$\lambda_{-1} \ge \lambda_{-2} \ge \cdots \tag{3.10}$$

— все ее отрицательные характеристические числа, при этом предполагается, что каждое число λ_j фигурирует в ряде (3.9) или (3.10) столько раз, какова его кратность как корня уравнения (3.8).

Заметим, что в том случае, когда $\det(\mathcal{E} - I_n) = 0$ (и только в этом случае), задача (3.7) имеет еще характеристическое число $\lambda_0 = 0$.

В дальнейшем будет показано (см. п.3), что кратность любого характеристического числа λ_j $(j = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, как корня уравнения (3.8), всегда совпадает с числом линейных независимых решений системы (3.7) при $\lambda = \lambda_j$.

[†]Теорема 2.2, очевидно, сохранит силу, если граничное условие $x(T) = \mathcal{E}x(0)$ заменить каким-либо другим самосопряженным граничным условием вида

$$Ax(0) + Bx(T) = 0, \tag{$*$}$$

где (A, B) — неособенная прямоугольная матрица порядка $n \times 2n$. Поясним, что условие $(*)$ называется *самосопряженным*, если для всякой абсолютно непрерывной вектор-функции $x(t)$, ему удовлетворяющей, справедливо равенство

$$(Jx, x)_{t=T} - (Jx, x)_{t=0} = 0.$$

С.А. Орлов обратил внимание автора на то, что необходимым и достаточным условием самосопряженности общего граничного условия $(*)$ является равенство

$$AJ^*A = B^*JB.$$

Предыдущие теоремы 3.3 и 3.4 также сохранят силу, если в них заменить граничное условие $x(t) = \mathcal{E}x(0)$ общим самосопряженным условием $(*)$.

Для того чтобы подчеркнуть зависимость λ_j от $H(t)$ $(0 \le t \le \le T)$, мы будем писать: $\lambda_j(H)$.

Теорема 3.3. *Пусть $H_1(t)$ и $H_2(t)$ $(0 \le t \le T)$ — две эрмитовы матрицы-функции класса $\mathcal{P}_n(T)$, причем*

$$H_1(t) \le H_2(t) \quad (0 \le t \le T).$$

Тогда

$$\lambda_j(H_1) \ge \lambda_j(H_2), \ \lambda_{-j}(H_1) \le \lambda_{-j}(H_2) \quad (j = 1, 2, ...). \tag{3.11}$$

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H_\varepsilon(t), \qquad x(T) = \mathcal{E} x(0), \tag{3.12}$$

где

$$H_\varepsilon(t) = H_1(t) + \varepsilon(H_2(t) - H_1(t)) \quad (0 \le \varepsilon \le 1).$$

Матрица монодромии $U_\varepsilon(T, \lambda)$ уравнения (3.12) будет, очевидно, аналитической функцией параметра ε. Следовательно, кусочно-аналитической функцией ε будет и любое, фиксированное по номеру положительное характеристическое число $\lambda_\varepsilon = \lambda_j(H_\varepsilon)$ задачи (3.12).

Точно так же можно утверждать возможность построения кусочно-аналитического решения ξ_ε уравнения

$$(U_\varepsilon(T; \lambda_\varepsilon) - \mathcal{E})\xi_\varepsilon = 0.$$

А тогда кусочно-аналитической функцией ε будет и вектор-функция

$$x_\varepsilon(t) = U_\varepsilon(T; \lambda_\varepsilon)\xi_\varepsilon \quad (0 \le t \le T),$$

являющаяся собственной вектор-функцией задачи (3.12):

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \lambda_\varepsilon J H_\varepsilon x_\varepsilon, \quad x_\varepsilon(T) = \mathcal{E} x(0). \tag{3.13}$$

Далее, мы не нарушим кусочной аналитичности вектор-функции x_ε, если подвергнем ее нормировке:

$$-\int_0^T \Big(J\,\frac{dx_\varepsilon}{dt}, x_\varepsilon\Big)dt = \lambda_\varepsilon \int_0^T (H_\varepsilon x_\varepsilon, x_\varepsilon)dt = 1.$$

Продифференцируем члены этого равенства по ε. Дифференцирование по ε левого интеграла (в точках, где существуют производные по ε от λ_ε и $x_\varepsilon(t)$) дает соотношение

$$\int_0^T \left(J\frac{d}{dt}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, x_\varepsilon\right)dt + \int_0^T \left(J\frac{dx_\varepsilon}{dt}, \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)dt = 0. \tag{3.14}$$

Дифференцирование же второго интеграла по ε даст:

$$\frac{d\lambda_\varepsilon}{d\varepsilon}\int_0^T (H_\varepsilon x_\varepsilon, x_\varepsilon)\,dt + \lambda_\varepsilon\int_0^T ((H_2 - H_1)x_\varepsilon, x_\varepsilon)\,dt +$$

$$+\lambda_\varepsilon\int_0^T \left(H_\varepsilon\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, x_\varepsilon\right)dt + \lambda_\varepsilon\int_0^T \left(H_\varepsilon x_\varepsilon, \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)dt = 0. \tag{3.15}$$

С другой стороны, согласно (3.13)

$$\lambda_\varepsilon\int_0^T \left(H_\varepsilon x_\varepsilon, \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)dt = \int_0^T \left(J\frac{dx_\varepsilon}{dt}, \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)dt,$$

$$\lambda_\varepsilon\int_0^T \left(H_\varepsilon\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, x_\varepsilon\right)dt = \lambda_\varepsilon\int_0^T \left(\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, H_\varepsilon x_\varepsilon\right)dt = \int_0^T \left(\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, J\frac{dx_\varepsilon}{dt}\right)dt =$$

$$= -\int_0^T \left(J\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, \frac{dx_\varepsilon}{dt}\right)dt = \int_0^T \left(J\frac{d}{dt}\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial\varepsilon}, x_\varepsilon\right)dt.$$

Поясним, что при переходе к последнему интегралу предыдущий интеграл берем по частям и пользуемся тем, что не только x_ε, но и $\partial x_\varepsilon/\partial\varepsilon$ удовлетворяет заданному граничному условию $x(T) = \mathcal{E}x(0)$.

Таким образом, в силу (3.14) сумма двух последних интегралов в (3.15) равна нулю. Отсюда

$$\frac{d\ln\lambda_\varepsilon}{d\varepsilon} = -\int_0^T ((H_2 - H_1)x_\varepsilon, x_\varepsilon)dt \le 0,$$

т.е. $\lambda_\varepsilon = \lambda(\varepsilon)$ есть не возрастающая функция ε. Так как $\lambda(0) = \lambda_j(H_1)$ и $\lambda(1) = \lambda_j(H_2)$, то тем самым первая группа неравенств (3.11) доказана. Аналогично доказывается вторая группа.

4. В статье [3в] мы доказали теорему 3.2, пользуясь другими соображениями, более сложными, но одновременно и более глубокими. В частности, эти соображения позволяют доказать также следующее предложение.

Теорема 3.4. *Кратность $\varkappa_j$ любого характеристического числа λ_j краевой задачи (3.7), как корня уравнения (3.8), совпадает с числом d_j линейно независимых фундаментальных вектор-функций, ему отвечающих.*

Доказательство. Число d_j, очевидно, равно дефекту матрицы

$$U(T;\lambda_j) - \mathcal{E}.$$

Положим

$$V(\lambda) = U(T,\lambda) - \mathcal{E}$$

и обозначим через $D(\lambda)$ определитель $V(\lambda)$. Введем в рассмотрение кольцо $\mathfrak{R}_j$ всех степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda - \lambda_j)^k$$

с отличным от нуля радиусом сходимости.

Ранг r_j и, следовательно, дефект $d_j = n - r_j$ матрицы $V(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_j$ не изменяется, если будем над ней проделывать следующие элементарные операции:

а) перестановку двух строк или двух столбцов,

б) сложение элементов некоторой строки (столбца), умноженных на одну и ту же функцию $f(\lambda) \in \mathfrak{R}_j$, с соответствующими элементами другой строки (столбца).

Кольцо $\mathfrak{R}_j$, очевидно, обладает тем свойством, что если $f \in \mathfrak{R}_j$ и $f(\lambda_j) \neq 0$, то также $f^{-1} \in \mathfrak{R}_j$.

Так как, кроме того, $D(\lambda) \not\equiv 0$, то при помощи элементарных операций известным образом (см. [17, гл. XII]) можно привести матрицу $V(\lambda)$ к диагональной матрице

$$W(\lambda) = \|w_i(\lambda)\Delta_{ik}\|_1^n, \tag{3.16}$$

где

$$w_i(\lambda) \in \mathfrak{R}_j,\ w_i(\lambda_j) = 0 \quad (i = 1, ..., d_j),$$
$$w_{d_j+p}(\lambda) \equiv 1 \quad (p = 1, ..., r_j).$$

При этом будем иметь

$$W(\lambda) = A(\lambda)V(\lambda)B(\lambda), \tag{3.17}$$

где $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — некоторые матрицы с элементами из $\mathfrak{R}_j$ и единичным определителем

$$\det A(\lambda) \equiv \det B(\lambda) \equiv 1\,. \tag{3.18}$$

Из (3.16), (3.17) и (3.18) заключаем, что

$$D(\lambda) = w_1(\lambda) \cdot \ldots \cdot w_{d_j}(\lambda).$$

Таким образом, наше утверждение будет доказано, если докажем, что точка λ_j для каждой из функций $w(\lambda)$ является нулем первого порядка. Последнее эквивалентно тому, что матрица-функция

$$W^{-1}(\lambda) = \|w_i^{-1}(\lambda)\delta_{ik}\|_1^n = B^{-1}(\lambda)V^{-1}(\lambda)A^{-1}(\lambda)$$

имеет в точке $\lambda = \lambda_j$ плюс не выше первого порядка. А это будет иметь место, если будет показано, что матрица $V^{-1}(\lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_j$ имеет полюс первого порядка, ибо в силу (3.18) элементами матриц $A^{-1}(\lambda)$ и $B^{-1}(\lambda)$ служат функции, принадлежащие $\mathfrak{R}_j$, а значит, голоморфные в окрестности точки $\lambda = \lambda_j$.

Таким образом, доказательство теоремы будет закончено, если установим следующее предложение, которое может быть использовано во многих целях (см. §6 и статью [3в]).

Теорема 3.5. *Матрица-функция* $((U(T;\lambda) - \mathcal{E})^{-1}$ *переменной* λ *допускает абсолютно сходящееся*† *разложение*

$$((U(T;\lambda) - \mathcal{E})^{-1} = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{-1} - \frac{1}{2}\mathcal{E}^{-1}J\left\{A_0 - A_1\lambda + \frac{B_0}{\lambda} + \right.$$

†В том смысле, что абсолютно сходятся ряды, составленные из соответствующих слагаемых ряда (3.19).

$$+\lambda \sum_{j\neq 0} \frac{B_j}{\lambda_j(\lambda_j-\lambda)} \Bigg\}, \tag{3.19}$$

где A_0, A_1, B_j $(j=0,\pm1,\pm2,...)$ — *эрмитовы матрицы, причем*

$$A_1 \geq 0, \quad B_j \geq 0 \quad (j=0,\pm1,\pm2,...).$$

Доказательство. В силу теоремы 3.1 для любого $\xi \in E_n$

$$i(JU_\lambda\xi, U_\lambda\xi) > i(J\xi,\xi) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0 \quad (U_\lambda = U(T;\lambda)). \tag{3.20}$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$Z_\lambda = i(U_\lambda + \mathcal{E})(U_\lambda - \mathcal{E})^{-1}.$$

Если

$$\eta = i(U_\lambda - \mathcal{E})\xi,$$

то

$$Z_\lambda\eta = (U_\lambda + \mathcal{E})\xi$$

и, стало быть,

$$\xi = \frac{1}{2}\mathcal{E}^{-1}(z_\lambda\eta + i\eta), \quad U_\lambda\xi = \frac{1}{2}(Z_\lambda\eta - i\eta).$$

Внося полученные выражения для ξ и $U_\lambda\xi$ в (3.20), получим

$$-(JZ_\lambda\eta,\eta) + (J\eta, Z_\lambda\eta) > 0 \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0). \tag{3.21}$$

При $\operatorname{Im}\lambda > 0$ определитель $\det(U_\lambda - \mathcal{E}) \neq 0$ и, стало быть, если вектор ξ пробегает все E_n, то и вектор η также пробегает все E_n. Таким образом, (3.2) справедливо для любого вектора $\eta \in E_n$.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$F_\eta(\lambda) = i(JZ_\lambda\eta,\eta).$$

Так как

$$(J\eta, Z_\lambda\eta) = -(\eta, JZ_\lambda\eta) = -\overline{(JZ_\lambda\eta,\eta)},$$

то неравенство (3.21) означает, что

$$\operatorname{Im} F_\eta(\lambda) < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Аналогичным образом мы могли бы доказать, что

$$\operatorname{Im} F_\eta(\lambda) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda < 0.$$

В силу известной теоремы Н.Г. Чеботарева (см. [7], с.197) такая функция всегда допускает абсолютно сходящееся разложение

$$F_\eta(\lambda) = \lambda_0 - \lambda_1\lambda + \frac{\beta_0}{\lambda} + \lambda\sum_{j\neq 0}\frac{\beta_j}{\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}, \tag{3.22}$$

где λ_0 — вещественно,

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \beta_j \geq 0 \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{3.23}$$

и полюсы $\lambda_j \ (j = \pm 1, \pm 2, ...)$ также вещественны.

В данном случае полюсы λ_j могут быть лишь корнями уравнения (3.8). Допуская для β_j значения, равные нулю, будем считать, что стоящая в (3.22) сумма распространяется на все различные корни уравнения (3.8).

Так как $F_\eta(\lambda)$ есть билинейная форма от координат $\eta_1, ..., \eta_n$ вектора η и сопряженных величин $\bar\eta_1, ..., \bar\eta_n$, то легко видеть, что таковыми будут и величины λ_0, λ_1 и $\beta_j \ (j = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Следовательно, найдутся такие матрицы A_0, A_1 и $B_j \ (j = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ порядка n, что

$$\lambda_0 = (A_0\eta, \eta), \quad \lambda_1 = (A_1\eta, \eta), \quad \beta_j = (B_j\eta, \eta) \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Таким образом, разложение (3.22) приводит к следующему разложению для iJZ_λ:

$$iJZ_\lambda = A_0 - A_1\lambda + \frac{B_0}{\lambda} + \lambda\sum_{j\neq 0}\frac{B_j}{\lambda_j(\lambda-\lambda_j)}.$$

Так как числа λ_0, λ_1 и β_j — вещественны, то матрицы эрмитовы и, более того, в силу (3.23)

$$A_0 \geq 0, \quad A_1 \geq 0, \quad B_j \geq 0 \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Чтобы получить (3.19), остается еще заметить, что

$$iJZ_\lambda = -J(U_\lambda + \mathcal{E})(U_\lambda - \mathcal{E})^{-1} = -J + 2J\mathcal{E}(U_\lambda - \mathcal{E})^{-1}.$$

Теорема доказана.

В последующем теоремы этого параграфа будут применяться лишь для случая, когда $\mathcal{E} = \rho I_n$, где $|\rho| = 1$.

Проведенное исследование краевой задачи (3.7) можно пополнить во многих отношениях, если привлечь методы теории интегральных уравнений и общей теории вполне непрерывных эрмитовых операторов. Понятие об этих методах мы даем в § 6 п.3 на важном примере $\mathcal{E} = -I_n$.

§ 4. Мультипликаторы первого и второго рода канонической системы положительного типа

1. Возвращаясь к исследованию решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H\,(t)\, x \tag{0.1}$$

с периодической эрмитовой матрицей-функцией $H(t) = H(t+T)$, будем, если не будет оговорено противное, всюду предполагать, что уравнение (0.1) *положительного типа*, т.е. что в интервале $(0, T)$ матрица-функция $H(t)$ класса $\mathcal{P}_n(T)$ (см. § 3, п.1).

Фундаментальную роль в дальнейшем будет играть следующее предложение:

Теорема 4.1. *При любом невещественном λ среди мультипликаторов уравнения (0.1) точно m имеют модуль, больший единицы, и точно m — модуль, меньший единицы.*

Доказательство. Если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то матрица монодромии $U(T;\lambda)$ по теореме 3.1 будет J-увеличивающей или J-уменьшающей в зависимости от того, будет ли $\operatorname{Im}\lambda > 0$ или < 0. Применение к ней теоремы 1.1 немедленно дает теорему 4.1.

Заметим, что для случая, когда $H(t)$ — вещественная симметрическая матрица, теорема может быть доказана без помощи специальной алгебраической теоремы 1.2 на основании теоремы 2.1 (Ляпунова–Пуанкаре). В самом деле, в силу последней теоремы для любого λ мультипликаторы уравнения (0.1) будут располагаться кососимметрично относительно единичной окружности. Следовательно, теорема 4.1 будет доказана, если будет показано, что при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ни один мультипликатор не лежит на единичной окружности.

Допуская противное, что при некотором λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) один из мультипликаторов $\rho_0(\lambda)$ попадает на единичную окружность, мы имели бы, что λ есть характеристическое число краевой задачи (3.7) при $\mathcal{E} = \rho_0(\lambda)$, а это противоречило бы теореме 3.2.

2. Как мы знаем (§ 2, п.3), мультипликаторы уравнения (0.1) суть корни алгебраического уравнения

$$\Delta(\rho;\lambda) = \det(U(T;\lambda) - \rho I_n) = 0.$$

В развернутом виде это уравнение имеет вид

$$\rho^{2m} + A_1(\lambda)\rho^{2m-1} + \cdots + A_{2m-1}(\lambda)\rho + 1 = 0, \tag{4.1}$$

где $A_k(\lambda)$ ($k = 1, ..., 2m-1$) суть целые функции λ, причем (в силу теоремы 2.1)

$$A_k(\lambda) = \overline{A}_{2m-k}(\lambda) \quad (k = 1, ..., 2m-1).$$

Если уравнение 4.1 неприводимо (т.е. его левая часть не представляется в виде произведения двух многочленов от ρ с целыми коэффициентами от λ, то это уравнение будет определять одну многозначную аналитическую функцию с $2m$-листной римановой поверхностью R. В противном случае уравнение определяет конечное число ($< 2m$) многозначных аналитических функций с конечнолистными римановыми поверхностями с общим числом листов, равным $2m$. В этом случае R будет обозначать несвязную совокупность всех этих отдельных римановых поверхностей, лежащих над комплексной плоскостью переменной λ.

Таким образом, уравнением (4.1) будет определяться некоторая однозначная функция $\rho(\lambda)$ на R.

Заметим, что если a — какая-либо точка римановой поверхности R, лежащая над точкой λ_0, то в любой δ-окрестности точки a (не содержащей точек ветвления $\neq a$) функция $\rho(\lambda)$ будет допускать разложение

$$\rho(\lambda) = \rho(a) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k,$$

где

$$\zeta = (\lambda - \lambda_0)^{1/\nu},$$

а $\nu \geq 1$ — порядок ветвления R в точке a (число листов δ-окрестности точки a).

3. Рассматривая значения λ только из верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, введем следующие понятия.

Мультипликатор $\rho_j(\lambda)$ ($\operatorname{Im}\lambda > 0$) будет называть мультипликатором *первого* или *второго* рода в зависимости от того, лежит ли он внутри единичного круга или вне его.

Пусть для некоторого вещественного $\lambda = \lambda_0$ точка ρ_0 ($|\rho_0| = 1$) является p-кратным мультипликатором (т.е., напоминаем, p-кратным корнем уравнения (4.1) при $\lambda = \lambda_0$). Окружим точку ρ_0 окружностью γ

$$|\rho - \rho_0| = r$$

столь малого радиуса r, чтобы в нее не попадали другие мультипликаторы уравнения (0.1) при $\lambda = \lambda_0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ внутри γ будет находиться точно p мультипликаторов, если каждый считать столько раз, какова его кратность.

Рассмотрим открытую полуокрестность точки λ_0:

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad \operatorname{Im}\lambda > 0.$$

Если для какой-либо точки λ из этой полуокрестности среди мультипликаторов, попавших внутрь γ, точно p_1 мультипликаторов оказывается лежащими вне единичной окружности, а $p_2 = p - p_1$ — внутри ее, то это же будет иметь место для любой точки λ из этой полуокрестности, так как, пока λ не пересекает вещественной оси, ни один из мультипликаторов по теореме 4.1 не пересечет единичной окружности.

Соответственно этому будем говорить, что при $\lambda = \lambda_0$ в точке ρ_0 находится p_1 мультипликаторов первого рода и p_2 мультипликаторов второго рода.

Лемма 4.1. *Пусть в некоторой окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ вещественной точки λ_0 существует однозначная регулярная ветвь $\rho_0(\lambda)$ функции $\rho = \rho(\lambda)$, дающая при любом λ из верхней полуокрестности точки λ_0:*

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad \operatorname{Im} \lambda > 0 \tag{4.2}$$

мультипликатор первого рода уравнения (0.1). Если, кроме того, $|\rho_0(\lambda_0)| = 1$, то

$$|\rho_0(\lambda_0)| = 1, \quad i\rho_0^{-1}\rho_0'(\lambda) > 0 \text{ при } \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$$

и, следовательно, при возрастании λ в пределах от $\lambda_0 - \delta$ до $\lambda_0 + \delta$ мультипликатор $\rho_0(\lambda)$ движется по единичной окружности по часовой стрелке.

Доказательство. В самом деле, по условию имеет место разложение

$$\rho_0(\lambda_0) = \rho_0(\lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda - \lambda_0)^k \quad (|\lambda - \lambda_0| < \delta).$$

Коэффициент $c_1 = \rho'(\lambda_0) \neq 0$, ибо в противном случае отображение $\lambda \to \rho(\lambda)$ в точке λ_0 было бы квазиконформным (угол между линиями, выходящими из точки λ_0, при отображении $\lambda \to \rho(\lambda)$ увеличивался бы в целое число раз > 1 и полуокрестность (4.2) не могла бы отображаться в область, лежащую целиком вне единичного круга).

С другой стороны, если $\rho'(\lambda_0) \neq 0$ и, следовательно, отображение $\lambda \to \rho(\lambda)$ конформно в точке λ_0, то найдутся точки в нижней полуокрестности

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \quad \operatorname{Im} \lambda < 0, \tag{4.3}$$

которые при этом отображении перейдут в точки внутри единичной окружности. Но тогда по теореме 3.1 для всех точек λ

из этой полуокрестности $\rho(\lambda)$ будет лежать внутри единичной окружности. Таким образом, на общей границе двух полуокрестностей (4.2) и (4.3): $|\rho(\lambda)| = 1$, т.е.

$$|\rho(\lambda)| = 1 \quad \text{при} \quad \lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta.$$

В силу тех же соображений, что $\rho'(\lambda_0) \neq 0$, будем иметь $\rho'(\lambda) \neq 0$ при $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$. Из конформности отображения $\lambda \to \rho(\lambda)$ и из того, что $|\rho(\lambda)| > 1$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, вытекает, что $\rho(\lambda)$ с возрастанием λ движется по часовой стрелке по единичной окружности. Таким образом, направление вектора $\rho'(\lambda)$ получается из направления вектора $\rho(\lambda)$ путем поворота последнего на угол $\frac{1}{2}\pi$ по часовой стрелке, а следовательно, $i\rho^{-1}(\lambda)\rho'(\lambda) > 0$ при $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$.

Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Если в точке ρ_0 единичной окружности при вещественном $\lambda = \lambda_0$ находятся только мультипликаторы первого рода уравнения (0.1) и число этих мультипликаторов равно p, то в некоторой полуокрестности точки λ_0*

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \qquad \operatorname{Im}\lambda \geq 0 \tag{4.4}$$

можно выделить† *p однозначных аналитических ветвей $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., p)$ функции $\rho(\lambda)$, дающих при любом λ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ из этой полуокрестности мультипликатор первого рода, причем*

$$|\rho_j(\lambda)| = 1, \qquad 0 < i\,\frac{\rho_j'(\lambda)}{\rho_j(\lambda)} < \infty$$

$$(\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta, \quad j = 1, ..., p). \tag{4.5}$$

Доказательство. Обозначим через $a_1, ..., a_q$ различные точки "римановой" поверхности R, лежащие над λ_0, в которых

†Если уравнение (4.1) приводимо, то может случиться, что некоторые из этих ветвей будут тождественно равны. Однако при любом λ из полуокрестности (4.4) многочлен $\Delta(\rho; \lambda)$ от ρ будет делиться на многочлен $(\rho - \rho_1(\lambda)...(\rho - \rho_p(\lambda))$. В этом смысле и употребляется слово "выделить".

$\rho(\lambda)$ принимает значение ρ_0. Пусть $\nu_1, ..., \nu_q$ — порядки ветвления поверхности R в точках $a_1, ..., a_q$, причем

$$\nu_1 + \cdots + \nu_q = p. \tag{4.6}$$

Пусть a — какая-либо из точек a_j $(j = 1, ..., q)$, а ν — порядок ветвления R в a. Тогда в некоторой ν-листной δ-окрестности точки a будет иметь место разложение

$$\rho(\lambda) - \rho_0 = \sum_{k=l}^{\infty} c_k(\lambda - \lambda_0)^{k/\nu} \quad (c_l \neq 0), \tag{4.7}$$

где ряд в правой части выписан, начиная с первой степени $(\lambda - -\lambda_0)^{l/\nu}$, коэффициент которой c_l отличен от нуля.

При помощи ряда (4.7) можно определить в полуокрестности (4.4) точно ν различных однозначных аналитических ветвей $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., \nu)$ функции $\rho(\lambda)$ соответственно ν различным значениям $\zeta = (\lambda - \lambda_0)^{1/\nu}$. В любой точке $\lambda \neq \lambda_0$ из интервала $(\lambda_0 - \delta,\ \lambda_0 + \delta)$ каждая из функций $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., \nu)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2 и, следовательно, для каждой из этих функций при $\lambda \neq \lambda_0$ из указанного интервала выполняется условие (4.5). Это условие будет выполняться и в точке $\lambda = \lambda_0$, если только $l = \nu$ в разложении (4.7).

Покажем, что действительно $l = \nu$. В самом деле, если бы $l > \nu$, то тогда при отображении $\lambda \to \rho(\lambda)$ угол между линиями, выходящими из точки λ_0, увеличивался бы в $l/\nu > 1$ раз.

Поэтому при любом $\delta > 0$ каждая из функций $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., \nu)$ принимала бы в точках λ $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ полуокрестности (4.4) значения, лежащие внутри единичного круга.

Последнее же невозможно ввиду того, что в точке ρ_0 при $\lambda = = \lambda_0$ по условию находятся только мультипликаторы первого рода.

Итак, $l \leq \nu$. Если бы $l < \nu$, то любая функция $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., \nu)$ отображала бы отрезок $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$ в дугу, имеющую в точке ρ_0 угловую точку с внутренним углом раствора $l\pi/\nu < \pi$, и поэтому, как бы мало ни было δ, на отрезке $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta$ нашлись бы точки λ^*, для которых $|\rho_j(\lambda^*)| \neq 1$.

По теореме 2.1 при $\lambda = \lambda^*$ найдутся мультипликаторы $\rho_j^*(\lambda_j^*)$, расположенные с $\rho_j(\lambda^*)$ симметрично относительно единичной окружности.

Но тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ при $\lambda = \lambda^* + i\varepsilon$ будут существовать в окрестности точки ρ_0 мультипликаторы первого и второго рода. Так как λ^* может быть выбрано сколь угодно близким к λ_0, то снова приходим к противоречию с условием теоремы.

Таким образом, каждой точке a_j $(j = 1, ..., q)$ соответствует ν_j $(j = 1, ..., q)$ однозначных аналитических ветвей функции $\rho(\lambda)$ в полуокрестности (4.4), удовлетворяющих всем требованиям теоремы.

Теорема доказана.

В иных менее точных, но более образных терминах доказанную теорему можно сформулировать следующим образом.

Если при некотором вещественном λ_0 в точке ρ_0 единичной окружности встречаются только мультипликаторы первого рода общим числом $p \geq 1$, то всегда найдется такое $\delta > 0$, что при непрерывном изменении λ, начиная со значения λ_0, в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ из точки ρ_0 выйдет точно p мультипликаторов, причем все они будут двигаться по единичной окружности по или против часовой стрелки в зависимости от того, будет ли λ возрастать или убывать.

Аналогичное предложение можно сформулировать для того случая, когда при вещественном λ_0 в точке ρ_0 $(|\rho_0| = 1)$ находятся только мультипликаторы второго рода. Отличие будет состоять лишь в том, что при возрастании (убывании) вещественного λ мультипликаторы второго вода будут вращаться против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Одновременно приходим к выводу:

> если при некотором вещественном λ_0 в точке ρ_0 $(|\rho_0| = 1)$ встретилось несколько мультипликаторов и при непрерывном изменении λ, начиная со значения λ_0, в одном из интервалов $(\lambda_0, \lambda_0 + \delta)$ или $(\lambda_0\delta, \lambda_0)$ часть выходящих из точки ρ_0 мультипликаторов соскакивает с

единичной окружности, то среди мультипликаторов, встретившихся в точке ρ_0, имеются мультипликаторы разных родов.

4. Покажем теперь, что если в точке ρ_0 ($|\rho_0| = 1$) встречаются только мультипликаторы одного рода, то ρ_0 — мультипликатор простого типа, т.е. ρ_0 — собственное число простого типа матрицы $U(T, \lambda)$.

Предположим для определенности, что в ρ_0 при $\lambda = \lambda_0$ находится p мультипликаторов именно первого рода (p кратность ρ_0). Рассмотрим полуокрестность (4.4) и в ней функции $\rho_j(\lambda)$ ($j = 1, ..., p$), существование которых утверждается в теореме 4.2. Образуем полином от ρ:

$$P(\rho; \lambda) = (\rho - \rho_1(\lambda))...(\rho - \rho_p(\lambda)) = \rho^p + B_1(\lambda)\rho^{p-1} + \dots + B_p(\lambda).$$

Так как при аналитическом продолжении функций $\rho_j(\lambda)$ ($j = 1, ..., p$) из верхней половины окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ в ее нижнюю половину функции $\rho_j(\lambda)$ ($j = 1, ..., p$) переходят друг в друга, то $B_j(\lambda)$ ($j = 1, ..., p$) суть голоморфные функции в окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$. При любом λ из этой окрестности полином $\Delta(\rho; \lambda)$ от ρ делится на полином $P(\rho; \lambda)$, так что

$$\Delta(\rho; \lambda) = P(\rho; \lambda)Q(\rho; \lambda),$$

где

$$Q(\rho; \lambda) = \rho^{n-p} + C_1(\lambda)_1^{n-p-1} + \dots + C_{n-p}(\lambda),$$

причем $C_k(\lambda)$ ($k = 1, ..., n - p$) суть некоторые функции, голоморфные в той же окрестности $|\lambda - \lambda_0| < \delta$.

Так как $P(\rho; \lambda_0) = (\rho - \rho_0)^p$, то $Q(\rho; \lambda_0)$ не обращается в нуль при $\rho = \rho_0$, т.е.

$$Q(\rho_0; \lambda_0) \neq 0. \tag{4.8}$$

Рассмотрим голоморфную при $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ функцию λ:

$$\Delta(\rho_0; \lambda) = P(\rho_0; \lambda)Q(\rho_0; \lambda).$$

Число λ_0 является ее нулем. В силу (4.8) его кратность совпадает с его кратностью как нуля функции

$$P(\rho_0; \lambda) = \prod_{j=1}^{p} (\rho_0 - \rho_j(\lambda)).$$

С другой стороны, в силу теоремы 4.2

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\rho_j(\lambda) - \rho_0}{\lambda - \lambda_0} = \rho_j'(\lambda_0) \neq 0 \quad (j = 1, ..., p).$$

Таким образом, λ_0 является p-кратным корнем целой функции $\Delta(\rho_0; \lambda)$.

Уравнение

$$\Delta(\rho_0; \lambda) = \det (U(T; \lambda_0) - \rho_0 I_n) = 0$$

является характеристическим уравнением для краевой задачи:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t) x, \quad x(T) = \rho_0 x(0) \tag{4.9}$$

и по теореме 3.4 кратность его корня λ_0 как характеристического числа задачи (4.9) в точности равна дефекту матрицы $U(T; \lambda_0) - \rho_0 I_n$.

Наше утверждение доказано. Оно составляет только некоторую часть следующего важного предложения.

Теорема 4.3. *Для того чтобы в точке ρ_0 ($|\rho_0| = 1$) при $\lambda = \lambda_0$ находились мультипликаторы только первого (только второго) рода, необходимо и достаточно, чтобы ρ_0 было собственным числом матрицы монодромии $U(T; \lambda_0)$ первого (второго) рода, т.е. чтобы все отвечающие ему собственные векторы матрицы $U(T; \lambda_0)$ были плюс-векторами (минус-векторами)*†.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$E_n = L_{\rho^{(1)}} + \cdots + L_{\rho^{(k)}}$$

†В силу чего ρ_0 будет собственным числом простого типа матрицы $U(T; \lambda)$ (согласно предложения 4°, §1).

есть разложение E_n в прямую сумму всех корневых пространств матрицы $U(T;\lambda_0)$, а

$$I_n = P_1 + \cdots + P_k$$

есть соответствующее разложение единичной матрицы в прямую сумму проекционных (см. § 1, п.2), причем $\rho^{(1)} = \rho_0$.

Из точки ρ_0, как из центра, опишем окружность γ столь малого радиуса r, что в нее не попали мультипликаторы $\rho^{(j)}$ $(j = 2, 3, ..., k)$.

Тогда

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma (\rho I_n - U(T;\lambda))^{-1} d\rho.$$

Если p — кратность мультипликатора ρ_0, то при достаточно малом $h > 0$ внутри γ будет находиться точно p собственных чисел (считая с их кратностями) j-увеличивающей матрицы $U(T;\lambda_0 + ih)$. Обозначим через P_h сумму проекционных операторов, соответствующих корневым пространствам матрицы $U(T;\lambda_0 + ih)$ с собственными числами, лежащими внутри γ. Тогда

$$P_h = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma (\rho I_n - U(T;\lambda + ih))^{-1} d\rho.$$

Очевидно,

$$P_1 = \lim_{h\to 0} P_h. \tag{4.10}$$

Пусть теперь $\xi \neq 0$ — какой-либо собственный вектор матрицы $U(T;\lambda_0)$, соответствующий числу ρ_0:

$$U(T;\lambda_0)\,\xi = \rho_0\xi.$$

Тогда $P_1\xi = \xi$ и, следовательно,

$$\xi = \lim_{h\to 0} P_h\xi. \tag{4.11}$$

Пусть теперь в ρ_0 находятся, например, исключительно мультипликаторы первого рода. Тогда, по доказанному выше, L_{ρ_0} будет совпадать с собственным подпространством матрицы $U(T;\lambda_0)$, отвечающим числу ρ_0. Кроме того, по определению мультипликаторов первого рода, можно будет утверждать, что все собственные числа матрицы $U(T; \lambda_0+ih)$, находящиеся внутри γ, при достаточно малом h (когда их будет точно p) по модулю больше единицы.

По теореме 1.1 прямая сумма L_h соответствующих им корневых подпространств матрицы $U(T; \lambda_0 + ih)$ будет состоять исключительно из плюс-векторов.

Следовательно, если $\eta_h = P_h\xi \neq 0$, то

$$i(J\eta_h, \eta_h) > 0.$$

Совершая предельный переход при $h \to 0$, получаем

$$(J\xi, \xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi \in L_{\rho_0}. \tag{4.12}$$

Покажем, что знак равенства здесь исключается при $\xi \neq 0$. Для этого замечаем, что если для некоторого $\xi^{(0)} \in L_{\rho_0}$ имеем $(J\xi^{(0)}, \xi^{(0)}) = 0$, то в силу (4.12)[†]

$$(J\xi^{(0)}, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta \in L_{\rho_0}. \tag{4.13}$$

С другой стороны, согласно предложению 3° § 1 вектор $\xi^{(0)}$ J-ортогонален к любому из подпространств $L_{\rho^{(k)}}$ $(k = 2, 3, ..., p)$, т.е.

$$(J\xi^{(0)}, \eta) = 0 \quad \text{при} \quad \eta \in L_{\rho^{(k)}} \quad (k = 2, 3, ..., p).$$

В сочетании с (4.13) это показывает, что вектор $\xi^{(0)}$ J-ортогонален, а значит, вектор $J\xi$ просто ортогонален к любому вектору из E_n. Откуда $J\xi^{(0)} = 0$, $\xi^{(0)} = 0$.

Прямая часть теоремы доказана. Докажем обратную часть теоремы.

Пусть ρ_0 — мультипликатор простого типа матрицы $U(T; \lambda_0)$ и все соответствующие ему собственные векторы суть, например, плюс-векторы. Тогда найдется такое $h > 0$, что

$$i(J\xi, \xi) \geq h \quad \text{при} \quad \xi \in L_{\rho_0}, \quad (\xi, \xi) = 1.$$

[†]Чтобы получить (4.13), достаточно рассмотреть (4.12) при $\xi = \xi^{(0)} + \alpha\eta$, где $\eta \in L_{\rho_0}$, а α — скаляр.

В силу (4.10) найдется такое $h_0 > 0$, что

$$i(JP_h\xi, P_h\xi) > h \quad \text{при} \quad \xi \in L_{\rho_0}, \quad (\xi, \xi) = 1, \quad 0 < h < h_0. \tag{4.14}$$

Когда ξ пробегает E_n, то $P_h\xi$ пробегает подпространство $L_h = P_hE_n$, являющееся прямой суммой корневых пространств матрицы $U(T; \lambda_0 + ih)$, соответствующих ее собственным числам, лежащим внутри γ. Если h достаточно мало, то размерность L_h будет равна p-размерности L_{ρ_0}.

С другой стороны, если $h > 0$ достаточно мало, то $\det(I_n - P_1 + P_h)$ будет сколь угодно близок к единице и, следовательно, матрица $C_h = I_n - P_1 + P_h$ будет неособенной. Отсюда, если ξ будет пробегать L_{ρ_0}, то

$$C_h\xi = \xi - P_1\xi + P_h\xi = P_h\xi \in L_h$$

пробежит некоторое p-мерное подпространство, которое, таким образом, совпадает с L_h. В силу (4.14) при достаточно малом $h > 0$ подпространство L_h будет состоять только из плюс-векторов и нуля, а следовательно, таковыми же будут корневые пространства матрицы $U(T; \lambda_0 + ih)$, в нем содержащиеся. Так как матрица $U(T; \lambda_0 + ih)$ является J-увеличивающей, то по теореме 1.1 эти корневые пространства соответствуют собственным числам, по модулю большим единицы.

Таким образом, доказано, что при $h > 0$, достаточно малом, все собственные числа матрицы $U(T; \lambda_0 + ih)$, лежащие внутри γ, по модулю больше единицы. А это и означает, что в точке ρ_0 при $\lambda = \lambda_0$ находятся только мультипликаторы первого рода.

Теорема доказана.

§ 5. Зоны устойчивости канонической системы с параметром

1. Рассматривая каноническое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)x \tag{5.1}$$

с суммируемой эрмитовой матрицей-функцией

$$H(t) = H(t+T),$$

условимся говорить, что оно устойчивого типа, если его матрица монодромии устойчивого типа (определение этого подкласса класса J-унитарных матриц см. в § 1, п.6).

Так как у J-унитарной матрицы устойчивого типа все собственные числа простого типа и по модулю равны единице, то все решения дифференциального уравнения (5.1) устойчивого типа ограничены на всей оси.

Теорема 5.1. *Если уравнение (5.1) устойчивого типа, то ему отвечает такое $\delta > 0$, что всякое иное дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = JH_1(t)x \tag{5.2}$$

с суммируемой эрмитовой матрицей-функцией $H_1(t) = H_1(t+T)$ будет устойчивого типа, коль скоро

$$\int_0^T |H(t) - H_1(t)|dt < \delta.$$

Доказательство. В силу теоремы 1.2 для доказательства теоремы 5.1 достаточно установить следующую лемму.

Лемма 5.1. *Пусть U_0 — матрица монодромии дифференциального уравнения в E_n:*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

с суммируемой периодической матрицей-функцией $A(t) = A(t+T)$ порядка n.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что какова бы ни была суммируемая периодическая матрица-функция $B(t) = B(t+T)$, удовлетворяющая условию:

$$\int_0^T |A(t) - B(t)|dt < \delta, \tag{5.3}$$

матрица монодромии V_0 уравнения

$$\frac{dx}{dt} = B(t)\,x$$

будет принадлежать ε-окрестности матрицы U_0:

$$|U_0 - V_0| < \varepsilon.$$

Для доказательства леммы обозначим через $U(t)$ и $V(t)$ матрицанты соответственно уравнений (5.1) и (5.2), так что

$$U_0 = U(T), \qquad V_0 = V(T).$$

Воспользуемся тем, что решение системы

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + F(t), \qquad X(0) = I_n, \tag{5.4}$$

где $F(t)$ $(0 \le t < \infty)$ — суммируемая в каждом конечном интервале $(0, l)$ матрица-функция порядка n, а $X(t)$ — искомая матрица-функция порядка n получается по следующей формуле[†]:

$$X(t) = U(t)\left[I_n + \int\limits_0^t U^{-1}(s)F(s)ds\right].$$

Так как $V(t)$ удовлетворяет системе (5.4) при

$$F(t) = (B(t) - A(t))\,V(t),$$

то

$$V(t) = U(t) + U(t)\int\limits_0^t U^{-1}(s)\,(B(s) - A(s))\,V(s)ds.$$

Следовательно,

$$|V(T) - U(T)| \le |U(T)|\int\limits_0^T \left|U^{-1}(s)\right|\,|B(s) - A(s)||V(s)|ds. \tag{5.5}$$

[†]Легко получаемой путем подстановки в (5.4) $X(t) = U(t)Y(t)$.

Согласно оценке (2.5)

$$|U(t)| \leq e^{a(t)}, \qquad a(t) = \int_0^t |A(s)| ds$$

и, следовательно, в силу той же оценки (2.5) и (5.3) вытекает

$$|V(t)| \leq e^{a(t)+\delta t} \leq e^{a(T)+\delta T} \quad (0 \leq t \leq T).$$

Так как, кроме того, матрица-функция $U_1(t)$, транспонированная с матрицей-функцией $U^{-1}(t)$, удовлетворяет системе

$$\frac{dU_1}{dt} = -A(t)U_1, \qquad U_1(0) = I_n,$$

то также

$$|U^{-1}(t)| = |U_1(t)| \leq e^{a(t)} \leq e^{a(T)} \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Таким образом, из (5.5) при выполнении (5.3) вытекает:

$$|V(T) - U(T)| \leq e^{3a(T)+\delta T} \int_0^T |B(t) - A(t)| dt \leq \delta e^{3a(T)+\delta T}.$$

Тем самым лемма 5.1, а значит, и теорема 5.1 доказаны.

2. Вещественное $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ будем называть точкой *сильной устойчивости* уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t)\, x \tag{0.1}$$

с суммируемой эрмитовой матрицей-функцией $H(t) = H(t+T)$, если при $\lambda = \lambda_0$ это уравнение устойчивого типа, иными словами, при $\lambda = \lambda_0$ матрица монодромии $U(T;\lambda)$ устойчивого типа.

Точку $\lambda = 0$ будем называть точкой сильной устойчивости уравнения (0.1), если все точки $\lambda \neq 0$ некоторой ее окрестности суть точки сильной устойчивости.

Из теоремы 5.1 вытекает первая часть следующей теоремы.

Теорема 5.2. *Точки λ сильной устойчивости уравнения (0.1) образуют открытое множество. Это множество не пусто всякий раз, когда уравнение (0.1) положительного типа.*

Формулируя второе утверждение теоремы, мы забегаем вперед: оно является непосредственным следствием теоремы 6.1, согласно которой для уравнения (0.1) положительного типа $\lambda = 0$ является точкой сильной устойчивости.

В силу теоремы 5.1 множество точек сильной устойчивости уравнения (0.1), если оно только не пусто, состоит из конечного (бесконечного) числа открытых интервалов. Эти интервалы будут называться *зонами устойчивости* уравнения (0.1).

В случае уравнения (0.1) положительного типа среди этих зон будет существовать зона, содержащая точку $\lambda = 0$. Эту зону мы будем называть *центральной зоной устойчивости.*

Заметим, что в силу уравнения (0.1) положительного типа точка $\lambda = \lambda_0 \neq 0$ будет, согласно теореме 4.3, точкой сильной устойчивости, если при $\lambda = \lambda_0$ у уравнения (0.1) все мультипликаторы по модулю равны единице и среди них отсутствуют равные мультипликаторы разных родов.

3. Ниже будет указан довольно общий случай уравнения (0.1) положительного типа, когда для длины зоны устойчивости можно дать оценку сверху, не зависящую от номера ее места, или влево от центральной зоны.

Для этого нам понадобится

Лемма 5.2. *Пусть в точке ρ_0 $(|\rho_0| = 1)$ при вещественном $\lambda = \lambda_0$ находятся только мультипликторы первого рода уравнения (0.1) числом p и пусть в некоторой полуокрестности точки*

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta, \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0 \tag{5.6}$$

выделено p однозначных аналитических ветвей $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, \ldots$ $\ldots, p)$, о которых идет речь в теореме 4.2.

Тогда каждой ветви $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, \ldots, p)$ можно сопоставить *такой плюс-вектор* $x_0^{(j)}$ $(j = 1, ..., p)$, *что*

$$-\rho_j^{-1}(\lambda_0)\rho_j'(\lambda_0)\left(Jx_0^{(j)}, x_0^{(j)}\right) = \int_0^T \left(H(t)x^{(j)}, x^{(j)}\right) dt, \tag{5.7}$$

где

$$x^{(j)}(t) = U(t; \lambda_0)x_0^{(j)} \qquad (j = 1, ..., p).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $0 < h < \delta$, то точке

$$\lambda = \lambda_0 + ih$$

из полуокрестности (5.6) можно будет сопоставить вектор $x^{(j)}(\lambda)$ $(j = 1, ..., p)$, такой, что

$$U(T; \lambda)x^{(j)}(\lambda) = \rho_j(\lambda)x^{(j)}(\lambda), \quad \left(x^{(j)}(\lambda), x^{(j)}(\lambda)\right) = 1. \tag{5.8}$$

Тогда решение

$$x^{(j)}(t; \lambda) = U(t; \lambda)x^{(j)}(\lambda)$$

уравнения (0.1) будет обладать тем свойством, что

$$x^{(j)}(T; \lambda) = \rho_j(\lambda)x^{(j)}(\lambda).$$

Соотношение (3.2) в применении к этому решению дает

$$\left(1 - |\rho_j(\lambda)|^2\right)\left(Jx^{(j)}(\lambda), x^{(j)}(\lambda)\right) =$$

$$= 2ih\int_0^T \left(H(t)x^{(j)}(t; \lambda), x^{(j)}(t; \lambda)\right) dt \qquad (\lambda = \lambda_0 + ih). \tag{5.9}$$

Пользуясь компактностью единичной сферы $(\xi, \xi) = 1$, выделим последовательность

$$\lambda_k = \lambda_0 + ih_k, \quad h_k \to 0, \quad h_k > 0 \qquad (k = 1, 2, ...),$$

для которой существует предел

$$\lim_{k\to\infty} x^{(j)}(\lambda_k) = x_0^{(j)}.$$

Тогда, в силу (5.8),

$$U(T;\lambda_0)x_0^{(j)} = \rho_0 x_0^{(j)}, \qquad \left(x_0^{(j)}, x_0^{(j)}\right) = 1.$$

Заметим теперь, что

$$1 - |\rho_j(\lambda_0 + ih)|^2 = 1 - \frac{\rho_j(\lambda_0 + ih)}{\rho_j(\lambda_0 - ih)}$$

и, следовательно,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1 - |\rho_j(\lambda_0 + ih)|^2}{2ih} = -\rho^{-1}(\lambda_0)\rho_j'(\lambda_0).$$

Поэтому, если равенство (5.9) почленно поделить на $2ih$ и затем перейти в обеих частях этого равенства к пределу по последовательности h_k $(k = 1, 2, \ldots)$, то мы получим требуемое равенство (5.7).

То, что $x_0^{(j)}(j = 1, \ldots, p)$ суть плюс-векторы, следует из теоремы 4.3, также из самого соотношения (5.7), если учесть, что в силу теоремы 4.2

$$-i\rho_j^{-1}(\lambda_0)\rho_j'(\lambda_0) < 0.$$

4. Заметим, что при дифференцировании по вещественной оси

$$-i\rho_j^{-1}(\lambda)\rho_j'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\arg\rho_j(\lambda) \qquad (\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0 + \delta).$$

Так как для любого решения $x = x(t;\lambda)$ уравнения (0.1)

$$\frac{d}{dt}(Jx, x) = (\overline{\lambda} - \lambda)\,(H(t)x, x),$$

то при вещественном $\lambda = \lambda_0$

$$(Jx, x) = \text{const}.$$

Следовательно,

$$(|Jx_0, x_0)| = |(Jx_\mu, x_\mu)| \le (x_\mu, x_\mu) \qquad (x_0 = x(0;\lambda_0)), \qquad (5.10)$$

где x_μ есть значение вектор-функции $x(t) = x(t, \lambda_0)$, имеющее наименьшую норму:

$$(x_\mu, x_\mu) = \min_{0 \le t \le T} (x(t), x(t)).$$

С другой стороны,

$$(H(t)x, x) \ge h_\mu(t)(x, x) \ge h_\mu(t)(x_\mu, x_\mu), \tag{5.11}$$

где $h_\mu(t)$ — наименьшее собственное число матрицы.

Пользуясь оценками (5.10) и (5.11) в применении к $x = x^{(j)}(t; \lambda)$, из (5.7) получим

$$-\frac{d}{d\lambda} \arg \rho_j(\lambda_0) \ge \int_0^T h_\mu(t) dt. \tag{5.12}$$

Это неравенство позволяет доказать следующее предложение.

Теорема 5.3. *Если множество точек t, для которых матрица-функция $H(t)$ не вырождается, имеет положительную меру, то длина любой нецентральной зоны устойчивости уравнения (0.1) не превосходит величины*

$$\pi \left(\int_0^T h_\mu(t) dt \right)^{-1}, \tag{5.13}$$

где $h_\mu(t)$ — наименьшее собственное число матрицы $H(t)$.

Этой же величины не превосходит и длина каждой из двух частей центральной зоны устойчивости, на которые она делится точкой $\lambda = 0$.

Доказательство. Если (α, β) — некоторая нецентральная зона устойчивости или одна из частей центральной зоны, на которые она подразделяется точкой $\lambda = 0$, то для любого λ изнутри (α, β) все мультипликаторы уравнения (0.1) лежат на единичной окружности, причем среди них будет точно m мультипликаторов первого и точно m второго рода†, причем мультипликаторы разного рода не будут совпадать. Занумеруем для любого

†См. § 1, п.6, с.423.

$\lambda \in (\alpha, \beta)$ мультипликаторы первого рода в порядке их следования по окружности по часовой стрелке, так чтобы сохранилась их непрерывная зависимость от λ. Таким образом, получим m мультипликаторных функций $\rho_1(\lambda), ..., \rho_m(\lambda)$. Для каждой из них в любой внутренней точке $\lambda_0 \in (\alpha, \beta)$ будет верно (5.12).

Поэтому, когда λ пробежит интервал (α, β), каждый из мультипликаторов опишет по часовой стрелке дугу, не меньшую $\varkappa(\beta - \alpha)$, где $\varkappa$ означает интервал, стоящий в правой части (5.12).

Аналогичное можно утверждать относительно и мультипликаторов второго рода с той лишь разницей, что их движение будет происходить в обратном направлении. Так как при этом встреча мультипликаторов разных родов может произойти лишь при $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$, то мы заключаем, что $2\varkappa(\beta - \alpha) \leq 2\pi$, т.е. $\beta - \alpha \leq \pi/\varkappa$, что и утверждается теоремой.

5. Ряд предыдущих результатов допускает обобщение на случай дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = JH(t;\mu)x, \tag{5.14}$$

в котором $H(t;\mu) = H(t+T;\mu)$ $(0 \leq t < \infty,\ \alpha < \mu < \beta)$ — некоторая суммируемая по t в интервале $(0, T)$ матрица-функция, зависящая от параметра μ непрерывно в среднем, т.е.

$$\lim_{\mu' \to \mu} \int_0^T \left| H(t;\mu') - H(t;\mu) \right| dt = 0 \qquad (\alpha < \mu < \beta).$$

Последнее условие, согласно лемме 5.1, обеспечивает непрерывную зависимость матрицы монодромии $U(T;\mu)$ уравнения (5.14) от параметра μ.

Обобщая определения п.2 для уравнения (0.1), точку $\mu = \mu_0 \in (\alpha, \beta)$ будем называть ***точкой сильной устойчивости*** уравнения (5.14), если матрица монодромии $U(T;\mu)$ уравнения (5.14) при $\mu = \mu_0$ устойчивого типа.

В силу теоремы 1.2 по-прежнему можно будет утверждать, что *точки μ сильной устойчивости уравнения (5.14) образуют открытое множество.*

Открытые интервалы, на которые распадается это множество (если оно не пусто), будем называть *зонами устойчивости* уравнения (5.14).

Мультипликатор $\rho(\mu)$ уравнения (5.14) будем называть мультипликатором *первого* (соответственно *второго*) рода, если он будет собственным числом первого (соответственно второго) рода J-унитарной матрицы $U(T;\mu)$ (см. § 1, п.6).

Нас будет интересовать тот случай, когда $H(t;\mu)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $H(t;\mu) \in \mathcal{P}_n(T)$,

2) $H(t;\mu') \leq H(t,\mu'')$ при $\mu' \leq \mu''$.

В этом случае мы будем говорить, что уравнение (5.14) — *положительного типа.*

Очевидно, что уравнение (0.1) положительного типа — частный случай уравнения (5.14) такого типа.

Теорема 5.4. *Пусть* (μ_1, μ_2) — *некоторая зона устойчивости уравнения (5.14) положительного типа. Пронумеруем мультипликаторы первого рода* $\rho_1(\mu), ..., \rho_m(\mu)$ $(\mu_1 < \mu < \mu_2)$ *уравнения (5.14) так, чтобы при соответствующем определении их аргументов последние непрерывно зависели от* μ *и чтобы*

$$\arg \rho_1(\mu) \geq \cdots \geq \arg \rho_m(\mu) \qquad (\mu_1 < \mu < \mu_2).$$

Тогда $\arg \rho_j(\mu)(j = 1, ..., m)$ *будет невозрастающей функцией* μ *в интервале* (μ_1, μ_2).

Аналогичное утверждение[†] можно сделать в отношении мультипликаторов второго рода уравнения (5.14).

Доказательство. Пусть μ_0 — произвольное число из зоны устойчивости (μ_1, μ_2). Рассмотрим какое-либо $\rho_j(\mu)$. Положим $\rho_j(\mu_0) = \rho_0$ и для лучшего выяснения основной идеи доказательства предположим сперва, что ρ_0 — простой мультипликатор, т.е. простое собственное число матрицы $U(T;\mu_0)$.

Рассмотрим при фиксированном μ краевую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t;\mu)x, \qquad x(T) = \rho_0 x(0). \tag{5.15}$$

[†]С заменой слова "невозрастающей" словом "неубывающей".

Пусть

$$\lambda_1(\mu) \le \lambda_2(\mu) \le \cdots$$

— последовательные положительные характеристические числа этой задачи.

По теореме 3.3

$$\lambda_k(\mu') \ge \lambda_k(\mu'') \quad \text{при} \quad \mu' \le \mu'' \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.16}$$

При $\mu = \mu_0$ краевая задача (5.15) будет иметь простое характеристическое число, равное 1. Пусть

$$\lambda_{q-1}(\mu_0) < \lambda_q(\mu_0) = 1 < \lambda_{q+1}(\mu_0).$$

Пусть теперь $\mu_1 > \mu_0$ и достаточно близко к μ_0. Покажем, что тогда

$$\arg \rho_j(\mu_1) \le \arg \rho_j(\mu_0) = \arg \rho_0. \tag{5.17}$$

В силу (5.16) $\lambda_q(\mu_1) \le \lambda_q(\mu_0) = 1$. Если $\lambda_q(\mu_1) = 1$, то тогда вообще

$$\lambda_q(\mu) = 1 \quad \text{при} \quad \mu_0 \le \mu \le \mu_1$$

и, следовательно,

$$\rho_j(\mu) = \rho_0 \quad \text{при} \quad \mu_0 \le \mu \le \mu_1.$$

Если же $\lambda_q(\mu_1) < 1$, то рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t; \mu_1) x. \tag{5.18}$$

При $\lambda = \lambda_q(\mu_1)$ оно имеет мультипликатор первого рода, равный ρ_0. При непрерывном изменении λ от $\lambda_q(\mu_1)$ до 1 этот мультипликатор по теореме 4.2 будет двигаться по часовой стрелке по единичной окружности и из точки ρ_0 придет в точку $\rho_j(\mu_1)$. Таким образом, в этом случае (5.17) будет справедливо со знаком $<$.

Пусть теперь ρ — мультипликатор $\varkappa$-й кратности. Так как мультипликатор ρ_0, будучи первого рода, во всяком случае простого типа, то при $\mu = \mu_0$ краевая задача (5.15) будет теперь иметь $\lambda = 1$ характеристическим числом точно кратности $\varkappa$.

Пусть

$$\lambda_{q-1}(\mu_0) < \lambda_q(\mu_0) = \lambda_{q+1}(\mu_0) = \cdots = \lambda_{q+\varkappa-1}(\mu_0) = 1 < \lambda_{q+\varkappa}(\mu_0)$$

и, следовательно, при $\mu_1 > \mu$ и достаточно близком к μ

$$\lambda_{q-1}(\mu_0) < \lambda_q(\mu_1) \leq \lambda_{q+1}(\mu_1) \leq \cdots \leq \lambda_{q+\varkappa-1}(\mu_1) \leq 1 < \lambda_{q+\varkappa}(\mu_0).$$

Рассматривая снова уравнение (5.18), обнаружим теперь, опираясь на теорему 4.3, что при непрерывном изменении λ от $\lambda_q(\mu_1)-\varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ достаточно мало) до 1 через точку ρ_0 пройдет (если $\lambda_q(\mu_1) < 1$), двигаясь по часовой стрелке, точно $\varkappa$ мультипликаторов.

Отсюда снова будет вытекать (5.17) для тех j, для которых $\rho_j(\mu_0) = \rho_0$.

Тем самым, ввиду произвольности выбора числа $\mu_0 \in (\mu_1, \mu_2)$, теорема доказана.

Замечание. Если какой-либо из концов μ_1 и μ_2 зоны устойчивости лежит внутри интервала (α, β), то при стремлении μ к этому концу изнутри зоны устойчивости будет обязательно стремиться к совпадению по крайней мере одна пара мультипликаторов разного рода.

В самом деле, если бы этого не было, то по теореме 1.3 для этого конца матрица монодромии была бы устойчивого типа, т.е. этот конец был бы точкой сильной устойчивости, что невозможно.

§ 6. Центральная зона устойчивости канонического уравнения (0.1) положительного типа

1. Предполагая по-прежнему, что матрица $H(t)$ класса $\mathcal{P}_n(T)$, рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda J H(t)x, \qquad x(0) + x(T) = 0. \tag{6.1}$$

Согласно теореме 3.2 все характеристические числа этой задачи вещественны.

Обозначим через Λ_+ и Λ_- соответственно наименьшее положительное и наибольшее отрицательное характеристические числа этой задачи.

Имеет место:

Теорема 6.1. *Открытый интервал (Λ_-, Λ_+) принадлежит центральной зоне устойчивости уравнения (0.1).*

Если матрица-функция $H(t)$ — вещественна, то этот интервал в точности совпадает с центральной зоной устойчивости уравнения (0.1).

Доказательство. Если в уравнении (6.1) сделать замену $t = -\tau$ и $\lambda = -\mu$, то уравнение сохранит свой тип. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением лишь неотрицательных λ.

Предположим сперва, что у матрицы

$$S_1 = J \int_0^T H(t)dt = JH_1$$

все собственные числа различны. Их можно записать в виде

$$i\sigma_{\pm j} \qquad (j = 1, ..., m),$$

где

$$\sigma_{-m} < \cdots < \sigma_{-1} < 0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m\,,$$

причем в случае вещественной матрицы-функции $H(t)$ будем иметь

$$\sigma_{-j} = -\sigma_j \qquad (j = 1, 2, ..., m).$$

Согласно рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 2.1, в этом случае при достаточно малом $\lambda > 0$ все мультипликаторы лежат на единичной окружности и при достаточно малом по модулю комплексном λ эти мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$, будучи соответствующим образом перенумерованы при помощи чисел $j = \pm 1, \ldots, \pm m$, будут допускать представление:

$$\rho_j(\lambda) = e^{i\sigma_j \lambda + o(\lambda)}.$$

Если здесь положить $\lambda = \delta e^{i\varphi}$, где $\delta > 0$ достаточно мало, и непрерывно менять φ от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, то убедимся, что при достаточно малом $\lambda > 0$ мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., m)$ суть мультипликаторы второго рода и лежат на открытой верхней полуокружности, а мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ $(j = -1, ..., -m)$ суть мультипликаторы первого рода и лежат на открытой нижней полуокружности. При этом в случае вещественности $H(t)$ будем иметь:

$$\rho_{-j}(\lambda) = \overline{\rho}_j(\lambda) \qquad (j = 1, ..., m).$$

Заставим теперь λ непрерывно возрастать, начиная с достаточно малого положительного значения. Тогда по теореме 4.2 мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ $(j = 1, ..., m)$ будут двигаться против часовой стрелки, а мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ $(j = -1, ..., -m)$ — по часовой стрелке. При этом одни мультипликаторы могут нагонять другие, но они не будут соскакивать с единичной окружности, пока не произойдет встреча двух мультипликаторов различных родов. Такая встреча в первый раз может произойти лишь тогда, когда либо оба мультипликатора $\rho_m(\lambda)$ и $\rho_{-m}(\lambda)$ одновременно придут в точку -1, либо после того, когда один из этих мультипликаторов пройдет через точку -1. Так как значение λ, при котором один из мультипликаторов становится равным -1, есть характеристическое число краевой задачи (6.1), то при $0 < \lambda < \Lambda_+$ встреча мультипликаторов разных родов не может произойти. К этому можно добавить, что если $H(t)$ — вещественная матрица-функция, то при $\lambda = \Lambda_+$ в точке -1 обязательно произойдет встреча двух мультипликаторов разных родов, а именно, мультипликаторов $\rho_m(\lambda)$ и $\rho_{-m}(\lambda) = \overline{\rho}_m(\lambda)$. Тем самым теорема полностью доказана для рассматриваемого случая, когда все собственные числа матрицы S_1 различны.

Подчеркнем, что одновременно для этого случая нами доказано, что при $0 < \lambda < \Lambda_+$ точно m мультипликаторов второго рода уравнения (0.1) лежит на открытой верхней полуокружности $\rho = e^{i\varphi}$ $(0 < \varphi < \pi)$ и точно m мультипликаторов первого рода на открытой нижней полуокружности $\rho = e^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi < 0)$. А отсюда явствует, что первое характеристическое число краевой задачи

$$\frac{dx}{dt} = \lambda JH(t)x, \qquad x(0) - x(T) = 0 \tag{6.2}$$

больше первого положительного характеристического числа краевой задачи (6.1).

Рассмотрим теперь тот случай, когда у матрицы S_1 есть кратные собственные числа. В этом случае подберем сперва эрмитову матрицу $D > 0$ так, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ собственные числа матрицы

$$S_1(\varepsilon) = J(H_I + \varepsilon D)$$

или, что одно и то же, корни σ уравнения

$$\det(H_I + \varepsilon D + i\sigma J) = 0$$

были различны между собой†. Затем образуем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda JH_\varepsilon(t)x \qquad \Big(H_\varepsilon(t) = H(t) + \frac{\varepsilon}{T}D\Big). \tag{6.3}$$

---

†Это можно проделать следующим образом. Так как $H_I > 0$, а J — кососимметрическая матрица, то найдется система векторов $v_k \in E_{2m}$ ($k = \pm1, ..., \pm m$) таких, что [16] $H_I v_k = -i\sigma_k J v_k$ ($k = \pm1, ..., \pm m$), причем $\sigma_{-m} \le \dots \le \sigma_{-1} < 0 < \sigma_1 \le \dots \le \sigma_m$ и $(H_I v_j, v_k) = \delta_{jk}$ ($j, k = \pm1, ..., \pm m$).

Пусть d_k ($k = \pm1, ..., \pm m$) — произвольные числа, удовлетворяющие единственному условию $d_{-m} < \dots < d_{-1} < 0 < d_1 < \dots < d_m$. Тогда требуемую матрицу D можно определить следующими равенствами:

$$Dv_k = -id_k Jv_k = \frac{d_k}{\sigma_k} H_J v_k \qquad (k = \pm1, ..., \pm m).$$

В самом деле, для любого вектора $\xi = \sum c_k v_k$. При таком определении D будем иметь:

$$D(\xi, \xi) = \sum |c_k|^2 \frac{d_k}{\sigma_k}.$$

Откуда $D > 0$. А так как $(H_I + \varepsilon D)v_k = -i(\sigma_k + \varepsilon d_k)Jv_k$ ($k = \pm1, ..., \pm m$), то собственными числами матрицы $J(H_I + \varepsilon D)$ будут различные между собой числа $i(\sigma_k + \varepsilon d_k)$ ($k = \pm1, ..., \pm m$).

Так как

$$J\int_0^T H_\varepsilon(t)dt = J(H_I + \varepsilon D),$$

то к системе (6.3) применимы выводы, полученные ранее.

Таким образом, если $\Lambda_+(\varepsilon)$ — первое положительное значение, для которого уравнение (6.3) имеет нетривиальное кососопериодическое решение $x_c(t)$ $(x_c(T) = -x_c(0))$, то при

$$0 < \lambda < \Lambda_+(\varepsilon) \tag{6.4}$$

матрица монодромии $U_\varepsilon(T;\lambda)$ уравнения (6.3) будет устойчивого типа, причем m ее мультипликаторов (собственных чисел) второго рода будет лежать на открытой верхней полуокружности, а m мультипликаторов первого рода на открытой нижней полуокружности. Так как

$$\Lambda_+ = \lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda_+(\varepsilon),$$

то при выполнении неравенства $0 < \lambda < \Lambda_+$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет выполняться и неравенство (6.4), а следовательно, матрица $U_\varepsilon(T;\lambda)$ будет устойчивого типа. Тогда по теореме 2.3 матрица

$$U(T;\lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon(T;\lambda)$$

также будет устойчивого типа и m ее мультипликаторов второго рода будет лежать на открытой верхней полуокружности, а первого рода — на открытой нижней. Заметим, что применение теоремы 1.3 возможно, если все мультипликаторы $U(T;\lambda)$ отличны от -1 и 1. Отличие их от -1 при $0 < \lambda < \Lambda_+$ очевидно. Допущение же, что один из этих мультипликаторов при некотором $\lambda = \mu_0$ $(0 < \mu_0 < \Lambda_+)$ равен единице, будет означать, что μ_0 есть характеристическое число системы краевой задачи (6.2). Но тогда, заменяя в (6.2) матрицу-функцию $H(t)$ на $H_\varepsilon(t)$, мы получили бы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ первое положительное характеристическое число системы

$$\frac{dx}{dt} = \lambda H_\varepsilon(t)x, \qquad x(0) - x(T) = 0$$

меньше $\Lambda_+(\varepsilon)$, а это невозможно.

Для окончания доказательства теоремы остается снова повторить, что в случае вещественной матрицы-функции $H(t)$ мультипликаторы первого и второго рода зеркально расположены относительно вещественной оси, и когда λ, возрастая, становится равным Λ_+, два сопряженных и, следовательно, разных родов мультипликатора встречаются в точке -1.

Одновременно убеждаемся в том, что утверждение относительно первых положительных характеристических чисел краевых задач (6.1) и (6.2) справедливо в самом общем случае.

2. В теореме 6.1 молчаливо предполагалось существование чисел Λ_+ и Λ_-. Оказывается, при выполнении условия $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$ это всегда имеет место.

Теорема 6.2. *Краевая задача (6.1) имеет по крайней мере одно положительное и одно отрицательное характеристическое число.*

Доказательство этой теоремы потребует применения тонких средств теории целых функций.

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что уравнение

$$\det\left(U(T;\lambda) + I_n\right) = 0 \qquad (n = 2m) \tag{6.5}$$

имеет по крайней мере один положительный и один отрицательный корень.

На основании теоремы 3.2 можно утверждать, что все корни λ_j уравнения (6.5), сколько бы их не было, вещественны. Более того, в силу теоремы 3.5, имеет место разложение:

$$2\left(U(T;\lambda) + I_n\right)^{-1} = I_n + J\Big\{-A_1\lambda + \lambda\sum_j \frac{B_j}{\lambda_j(\lambda - \lambda_j)}\Big\}, \tag{6.6}$$

где

$$A_1 \geq 0, \quad B_j \geq 0 \qquad (j = \pm1, \pm2, \ldots).$$

Если допустить, что уравнение (6.5) вовсе не имеет корней, то из (6.6) получим

$$\left(U(T;\lambda) + I_n\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(I_n - JA_1\lambda\right),$$

откуда

$$U(T;\lambda) = -I_n + 2(I_n - JA_1\lambda)^{-1}$$

и, следовательно, при достаточно малом λ

$$U(T;\lambda) = I_n + 2JA_1\lambda + 2(JA_1)^2\lambda^2 + \cdots .$$

С другой стороны, согласно разложению (2.14):

$$U(T;\lambda) = I_n + \lambda JH_1 + \cdots ,$$

так что

$$A_1 = \frac{1}{2}H_I, \qquad JA_1 = \frac{1}{2}S_1.$$

Пусть теперь $v \neq 0$ — какой-либо собственный вектор матрицы S_1; тогда

$$S_1 v = i\sigma v \qquad (\sigma \neq 0)$$

и, следовательно,

$$(U(T;\lambda) + I_n)\, v = \frac{4v}{2 - i\sigma\lambda},$$

что находится в противоречии с тем, что $U(T;\lambda)$ — целая матрица-функция.

Итак, существование у краевой задачи (6.1) по крайней мере одного характеристического числа доказано.

Покажем, что у краевой задачи (6.1) имеются характеристические числа обоих знаков.

Допустим противное. Пусть, например, у задачи 6.1 отсутствуют положительные характеристические числа. В этом случае из соображений, приведенных при доказательстве теоремы 6.1 будет следовать, что при любом $\lambda > 0$ все мультипликаторы $\rho_j(\lambda)$ уравнения (0.1) лежат на единичной окружности. Так как

$$\Delta(\rho;\lambda) = \prod_j (\rho - \rho_j(\lambda)) = \det\{U(T;\lambda) - \rho I_n\},$$

то будем иметь

$$|\Delta(-1,\lambda)| \leq 2^{2m} \qquad \text{при} \quad 0 < \lambda < \infty. \tag{6.7}$$

С другой стороны, согласно (6.6),

$$2(U(T;-\lambda^2)+I_n)^{-1} = I_n + JA_1\lambda^2 +$$
$$+\frac{\lambda^2}{2}\sum_{k\in K}\frac{1}{\lambda_k}\Big(\frac{1}{\lambda-\zeta_k}-\frac{1}{\lambda+\zeta_k}\Big)JB_k,$$

где†

$$\zeta_k = \sqrt{-\lambda_k} \quad (k\in K).$$

В статье [3в] мы исследовали целые матрицы-функции $W(\lambda) = \|w_{jk}(\lambda)\|_1^n$, удовлетворяющие условию:

$$W^{-1}(\lambda) = A_0 + A_1\lambda + \cdots + A_p\lambda^p + \lambda^p\sum_{k\in K}\frac{C_k}{\lambda-\zeta_k},$$

где все числа ζ_k вещественны, а $A_0, A_1, ..., A_p, C_k$ $(k \in K)$ суть матрицы порядка n, причем

$$\sum_{k\in K}\frac{|C_k|}{|\zeta_k|} < \infty.$$

В частности, мы показали, что определитель таких целых матриц-функций не выше экспоненциального типа, т.е.

$$|\det W(\lambda)| \le \alpha e^{\beta|\lambda|},$$

где α, β — некоторые положительные константы.

Применяя это предложение к матрице-функции

$$W(\lambda) = U(T;-\lambda^2) + I_n\,,$$

найдем, что

$$|\Delta(-1;\lambda)| = |\det(U(t;\lambda)+I_n)| \le \alpha e^{\beta\sqrt{|\lambda|}}.$$

Но тогда, в силу известных предложений о целых функциях порядка роста, меньшего единицы, можно будет утверждать, что

†Здесь K — конечный или бесконечный набор индексов.

$$\Delta(-1;\lambda) = 2^{2m} \prod_{k\in K} \Big(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\Big).$$

Все числа $\lambda_k > 0$ ($k \in K$) и поэтому правая часть при $\lambda \to -\infty$ стремится к $+\infty$, что находится в противоречии с (6.7).

Теорема доказана.

3. Представляется весьма удивительным, что для доказательства теоремы пришлось использовать столь сильные средства теории функций. Возможно, что теорему можно доказать проще методами теории интегральных уравнений и вообще теории операторов.

При некоторых частных предположениях относительно эрмитовой матрицы-функции $H(t)$ эти методы очень быстро приводят к цели. Поясним вкратце, что мы имеем в виду, тем более, что это позволит нам дополнить в одном отношении теорему 6.1.

Положим

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 \le t \le T, \\ -\dfrac{1}{2}, & -T \le t < 0. \end{cases}$$

Эта функция обладает тем свойством, что если

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \qquad \varphi(0) + \varphi(T) = 0 \qquad (0 \le t \le T),$$

то

$$\varphi(t) = \int_0^T g(t-s)\psi(s)ds \qquad (0 \le t \le T)$$

и, наоборот, последнее соотношение влечет два предыдущих.

Поэтому система (6.1) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$x(t) = \lambda \int_0^T g(t-s) J H(s)\, x(s)\, ds,$$

которое запишем еще так:

$$x(t) = \lambda \int_0^T G(t-s)H(s)\,x\,(s)\,ds\,, \tag{6.8}$$

полагая

$$G(t) = g(t)\,J.$$

Так как $G(-t) = G^*(t)$, то $G(t-s)$ является эрмитовым (симметрическим) матричным ядром, и уравнение (6.8) можно рассматривать как нагруженное интегральное уравнение, на которое распространяются обычные положения теории положительно нагруженных скалярных интегральных уравнений с эрмитовым ядром (см. [3е] и [8]). Однако все станет значительно прозрачней, если воспользоваться общей теорией вполне непрерывных операторов.

Обозначим через L множество всех непрерывных вектор-функций $x(t)$ $(0 \le t \le T)$ со значениями из E_{2m}. Положим для $x, y \in L$

$$\{x, y\} = \int_0^t (H(t)x, y)dt.$$

Функцию $x \in L$ будем называть *вырожденной*, если $\{x, x\} = 0$ или, что одно и то же, $H(t)\,x\,(t) = 0$ (почти всюду).

Отождествляя всякие две функции $x_1, x_2 \in L$, для которых разность $x_1 - x_2$ есть вырожденная функция, обратим L в некоторое неполное гильбертово пространство $\hat{L}$ со скалярным произведением $\{x, y\}$.

Каждому $x \in L$ можем отнести новую функцию

$$y(t) = Ax(t) = \int_0^T G(t-s)H(s)x(s)\,ds\,. \tag{6.9}$$

Так как на вырождающихся функциях интеграл (6.9) обращается в нуль, то Ax можно рассматривать как оператор на $\widehat{L}$, притом эрмитов и вполне непрерывный.

Более того, оператор A будет вполне непрерывным и по равномерной норме

$$\|x(t)\| = \max_{0\le t\le T} \sqrt{(x(t), x(t))},$$

по которой L полно.

Так как, кроме того,

$$\{x, x\} \le \int_0^T h_M(t)(x(t), x(t))dt \le \|x(t)\|^2 \int_0^T Sp(t)\,dt,$$

где $h_M(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $H(t)$, то здесь применима теория вполне непрерывных операторов в пространстве с двумя нормами (см. [3з]), позволяющая, между прочим, избежать пополнения $\widehat{L}$ до полного гильбертова пространства.

Согласно этой теории, интегральное уравнение (6.8) будет иметь столько характеристических чисел, какова размерность $A\widehat{L}$, при этом каждое характеристическое число λ следует считать столько раз, какова размерность в $\widehat{L}$ множества собственных векторов (решений $x(t)$ уравнения (6.8)), отвечающих этому числу λ. Все упрощается, если отсутствуют интервалы (a, b), на которых почти всюду матрица $H(t)$ вырождается. В этом случае для любого $x(t) \not\equiv 0$

$$\{x, x\} = \int_0^T (H(t)x(t), x(t))dt > 0$$

и $\widehat{L} = L$. Оператор A тогда не вырождается, т.е. из $\{x, x\} > 0$ следует $\{Ax, Ax\} > 0$. В самом деле, если $x(t) \not\equiv 0$, то и $y = Ax \not\equiv$ $\not\equiv 0$, ибо

$$\frac{dy}{dt} = JH(t)\,x, \qquad -\int_0^T \left(J\frac{dy}{dt}, x\right)dt = \{x, x\} > 0.$$

Поэтому у уравнения (6.8), а следовательно, и у системы (6.1) будет существовать полная ортонормированная система собственных вектор-функций $x^{(k)}(t)$ $(k \in K)$

$$\frac{dx^{(k)}}{dt} = \lambda_k JH(t)x^{(k)}, \quad \{x^{(k)}, x^{(k)}\} = \delta_{kl} \qquad (kl \in K)$$

и, значит, будет существовать бесконечное число различных характеристических чисел. На основании некоторых общих соображений можно также убедиться в том, что среди этих чисел будет бесконечно много как положительных, так и отрицательных.

Существование бесконечного числа характеристических чисел обоих знаков можно доказать и при значительно меньших требованиях относительно $H(t)$, если привлечь более тонкие аналитические средства.

Пусть $i\sigma_j(t)$ $(j = \pm 1, ..., \pm m)$ — все собственные числа матрицы $JH(t)$, считая с их кратностями:

$$\sigma_{-m}(t) \le \cdots \le \sigma_{-1}(t) \le 0 \le \sigma_1(t) \le \cdots \le \sigma_m(t).$$

Обозначим через $n_+(r)$ и $n_-(r)$ $(r > 0)$ — число характеристических чисел краевой задачи (6.1) соответственно внутри интервалов $(0, r)$ и $(-r, 0)$. Тогда, оказывается, имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n_+(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{n_-(r)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^T \sum_{j=-m}^{m} |\sigma_j(t)| dt.$$

Однако даже этот результат, установление которого в общем случае требует весьма сложных средств, не дает возможности получить теорему 6.1 в случае любой матрицы-функции $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$. Вместе с тем из него можно извлечь ряд полезных следствий. В частности, он показывает, что если у краевой задачи (6.1) имеется конечное число характеристических чисел определенного знака или последние существуют в бесконечном числе, но составляют достаточно редкую последовательность, то почти всюду все $\sigma_j(t) \equiv 0$, и, следовательно, матрица $JH(t)$ является почти всюду нильпотентной (т.е. ее n-я степень равна нулю). В этом случае, как можно показать, ранг матрицы $H(t)$ не выше m $(n = 2m)$.

4. Чтобы указать зависимость чисел $\Lambda_\pm$ от $H(t)$, будем писать:

$$\Lambda_\pm = \Lambda_\pm(H).$$

Пусть теперь $H_1(t) = H_1(t+T)$ и $H_2(t) = H_2(t+T)$ $(0 \le t < \infty)$ — две эрмитовы матрицы-функции класса $\mathcal{P}_n(T)$.

В силу теоремы 3.3

$$\Lambda_+(H_1) \ge \Lambda_+(H_2), \quad \Lambda_-(H_1) \le \Lambda_-(H_2), \tag{6.10}$$

если $H_1(t) \le H_2(t)$ $(0 \le t \le T)$.

Отсюда весьма просто получается следующее предложение.

Теорема 6.3. *Для чисел $\Lambda_\pm$ справедливы оценки*

$$\pi\Big(\int_0^T h_M(t)dt\Big)^{-1} \le |\Lambda_\pm| \le \pi\Big(\int_0^T h_\mu(t)dt\Big)^{-1}, \tag{6.11}$$

где $h_\mu(t)$ и $h_M(t)$ суть соответственно наименьшее и наибольшее собственное число матрицы $H(t)$.

Доказательство. В самом деле, если $H_0(t)$ имеет вид

$$H_0(t) = h(t)I_n,$$

то легко видеть, что

$$\Lambda_+(H_0) = -\Lambda_-(H_0) = \pi\Big(\int_0^T h(t)\,dt\Big)^{-1}.$$

С другой стороны,

$$h_\mu(t)I_n \le H(t) \le h_M(t)I_n\,,$$

поэтому оценки (6.11) суть следствия общего правила (6.10).

Заметим, что верхняя оценка (6.11) является также простым следствием формулы (5.12).

Что же касается нижнего предела для $|\Lambda_{\pm}|$, даваемого (6.11), то, как будет показано в следующем параграфе, его можно заменить другим, более просто вычисляемым и притом во многих важных случаях более точным.

5. Заключим этот параграф теоремой, в которой первое условие принадлежности $H(t)$ классу $\mathcal{P}_n(T)$ (см. § 3, п.1) отбрасывается (т.е. допускается, что форма $(H(t)\xi, \xi)$ на множестве значений t положительной меры является неположительной или неопределенной), но сохраняется *условие положительности в среднем*, т.е.

$$\int_0^T H(t)\,dt > 0\,. \tag{6.12}$$

Эта теорема дополняет в некоторых отношениях как теорему 2.3, так и теорему 6.1.

Теорема 6.4. *Если матрица-функция*

$$H(t) = H\,(t+T)$$

уравнения (0.1) удовлетворяет условию (6.12), то это уравнение имеет зону устойчивости, содержащую точку $\lambda = 0$[†].

Доказательство. В силу условия (6.12) найдется такое положительное L, что

$$\int_0^T (H(t)\xi, \xi)dt \geq (\xi, \xi)L \quad (\xi \in E_n).$$

Очевидно, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякой непрерывной вектор-функции $x = x(t)$ $(0 \leq t \leq T)$, удовлетворяющей условиям

$$|x(0)| = 1, \quad |x(0) - x(t)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq T)\,,$$

[†] Т.е. все точки λ некоторой окрестности $(-l, l)$ точки $\lambda = 0$ суть точки сильной устойчивости уравнения (0.1) (см. § 5, п.1).

будет выполняться неравенство

$$\int_0^T (H(t)x,x)dt > 0. \tag{6.13}$$

С другой стороны, для такого $\varepsilon > 0$ всегда можно найти $\delta_\varepsilon > 0$, так что при $|\lambda| < \delta_\varepsilon$ любое решение $x = x(t;\lambda)$ уравнения (0.1) с начальным значением $x_0 = x(0;\lambda)$, удовлетворяющим условию $(x_0, x_0) = 1$, будет удовлетворять неравенству

$$|x_0 - x(t;\lambda)| < \varepsilon \quad (0 \le t \le T).$$

Для этого δ_ε при $|\lambda| < \delta_\varepsilon$ для любого решения $x = x(t)$ уравнения (0.1) будет выполняться условие (6.13). Легко проследить, что в основе всех исследований §3 и 4 лежало именно это условие. Таким образом, все основные результаты этих параграфов сохраняют силу и в рассматриваемом случае с тем ограничением, что λ можно теперь придавать значения только из круга $|\lambda| < \delta_\varepsilon$.

Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 6.1, докажем существование требуемого теоремой 6.4 интервала $(-l, l)$, все точки которого суть точки сильной устойчивости уравнения (0.1).

§ 7. Достаточные признаки принадлежности центральной зоне устойчивости

1. Для формулировки этих признаков введем некоторые обозначения.

Пусть $A = \|a_{ik}\|_1^n$ — некоторая не равная нулю квадратная матрица с неотрицательными элементами. По теореме Перрона [9] среди ее наибольших по модулю собственных чисел будет существовать по крайней мере одно положительное. Его мы будем обозначать через $M(A)$. Нам понадобится следующая лемма:

Лемма 7.1. *Если для матрицы $A = \|a_{ik}\|_1^n \neq 0$ с неотрицательными элементами существует вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \neq 0$ с* *неотрицательными координатами такой, что*

$$\xi \le A\xi, \tag{7.1}$$

то $M(A) \ge 1$.

Поясним, что неравенством (7.1) мы выражаем то, что каждая координата вектора ξ не больше соответствующей координаты вектора $\eta = A\xi$.

Доказательство. Неравенство (7.1), очевидно, не нарушается, если к его левой и правой части применить любую степень A^p $(p = 1, 2, ...)$ матрицы A. Применяя последовательно к обеим частям неравенства (7.1) последовательные степени $A, A^2, ...$ и т.д., найдем, что

$$\xi \le A^p\xi \quad (p = 1, 2, ...).$$

Если бы $M(A) < 1$, то все собственные числа матрицы A были бы по модулю меньше единицы и тогда $A^p \to 0$ при $p \to \infty$. Так как по условию $\xi \ne 0$, то это невозможно.

Лемма доказана.

2. Если $B = \|b_{ik}\|_1^n$ — некоторая матрица, то через B_a будем обозначать матрицу, получающуюся из B путем всех ее элементов их модулями. Таким образом, если $A = B_a$, то

$$a_{jk} = |b_{jk}| \quad (j, k = 1, ..., n).$$

В частности,

$$J_a = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Признак I_n. Вещественное λ принадлежит центральной зоне устойчивости уравнения (0.1) положительного типа, если

$$|\lambda| < 2M^{-1}(C), \tag{7.2}$$

где

$$C = J_a \int_0^T H_a(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $x^+(t) \not\equiv 0$ — решение уравнения (0.1) при $\lambda = \Lambda_+$, обладающее свойством (см. §6, п.1):

$$x^+(t+T) = -x^+(t). \tag{7.3}$$

Обозначим через $x_j^+(t)$ $(j = 1, ..., n)$ координаты вектор-функций $x^+(t)$ и положим

$$\xi_j = \max_{0 \le t \le T} |x_j^+(t)| = |x_j^+(\tau_j)| \quad (j = 1, 2, ..., n). \tag{7.4}$$

Если положить

$$JH(t) = \|a_{jk}(t)\|_1^n,$$

то будем иметь

$$\frac{dx_j^+}{dt} = \Lambda_+ \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(t) x_k^+ \quad (j = 1, ..., n).$$

Интегрируя j-е из этих равенств в пределах от τ_j до $\tau_j + T$ $(j = 1, ..., n)$, получаем

$$-2x_i^+(\tau_j) = \Lambda_+ \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_j}^{\tau_j+T} a_{jk}(t) x_k^+(t) dt \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Беря модуль от левой и правой части и пользуясь (7.4), получим

$$2\xi_j \le \Lambda_+ \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_j}^{\tau_j+T} |a_{jk}(t)| dt = \Lambda_+ \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \xi_k \quad (j = 1, ..., n),$$

где матрица

$$C = \|c_{jk}\|_1^n = \left\| \int_0^T |a_{jk}(t)| dt \right\|_1^n = J_a \int_0^T H_a(t) dt.$$

Итак, для вектора $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ имеем

$$\xi \le \frac{1}{2}\Lambda_+ C\xi.$$

Таким образом, к матрице $A = \frac{1}{2}\Lambda_+ C$ применима лемма 7.1, откуда

$$\frac{1}{2}\Lambda_+ M(C) \ge 1, \quad \Lambda_+ \ge \frac{2}{M(C)}.$$

Аналогично устанавливается неравенство

$$-\Lambda_- \ge \frac{2}{M(C)}.$$

Итак, если вещественное λ удовлетворяет неравенству (7.2), то

$$\Lambda_- < \lambda < \Lambda_+$$

и, следовательно, λ принадлежит центральной зоне устойчивости.

3. Рассмотрим частный случай, когда $n = 2$ $(m = 1)$ и $H(t) \in \mathcal{P}_n(T)$ — вещественная матрица-функция.

Если положить

$$H(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix},$$

то система (0.1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \lambda(b(t)x_1 + c(t)x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\lambda(a(t)x_1 + b(t)x_2). \end{aligned} \tag{7.5}$$

Введем обозначения:

$$I_a = \int_0^T a(t)dt, \quad I_b = \int_0^T |b(t)|dt, \quad I_c = \int_0^T c(t)dt.$$

Величина $M(C)$ в данном случае будет наибольшим корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} I_b - \mu & I_c \\ I_a & I_b - \mu. \end{vmatrix} = 0\,.$$

Таким образом, признак I_n в рассматриваемом случае $n = 2$ сводится к следующему утверждению:

Признак I_2. Все решения системы (7.5) ограничены, если вещественное λ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda| < 2(I_b + \sqrt{I_a I_c})^{-1}. \tag{7.6}$$

При этом, конечно, предполагается, что периодическая матрица-функция второго порядка $H(t)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_2(T)$ (это условие подробно выписано в начале § 8).

Сформулированный признак ограниченности решений системы (7.5) содержит в себе, как частный случай, известный признак А.М. Ляпунова ограниченности решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda^2 p(t)y = 0 \qquad \left(p(t) = p(t+T) \geq 0, \quad \int\limits_0^T p(t)dt \geq 0\right).$$

В самом деле, это дифференциальное уравнение при $\lambda \neq 0$ эквивалентно следующей дифференциальной системе:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda p x_1,$$

являющейся частным случаем системы (7.5), а именно: $a(t) \equiv 1$, $b(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv p(t)$. Для этого случая неравенство (7.6) при $\lambda \neq 0$ переходит в неравенство Ляпунова:

$$\lambda^2 < \frac{4}{T}\Big(\int\limits_0^T p(t)dt\Big)^{-1}. \tag{7.7}$$

Заметим, что для случая $b(t) \equiv 0$ признак I_2 был известен (см., например, [10]). Следует, однако, заметить, что для этого частного случая признак I_2 не является существенно новым в сравнении с признаком Ляпунова.

В самом деле, если $b \equiv 0$, а $c^{-1}(t)$ интегрируемо, то, полагая

$$\tau = \int_0^t c(s)^{-1} ds\,,$$

легко получить, что система (7.5) эквивалентна одному уравнению

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \lambda^2 p(\tau) x_1 = 0, \tag{7.8}$$

где

$$p(\tau) = \left[\frac{a(t)}{c(t)}\right]_{t=t(\tau)}, \quad p(\tau) = p(\tau + \Omega), \quad \Omega = \int_0^T c(t)dt.$$

Для уравнения (7.8) неравенство Ляпунова (7.7) и будет означать, что

$$\lambda^2 < 4 I_a^{-1} I_c^{-1}.$$

Если $c^{-1}(t)$ неинтегрируемо, то, заменяя $c(t)$ на $c(t) + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, и пользуясь соображениями непрерывности, снова получим требуемый результат.

4. Возвращаясь к общему случаю уравнения (0.1), заметим, что метод, которым мы воспользовались для вывода признака, позволяет установить ряд других достаточных признаков принадлежности λ центральной зоне устойчивости.

Таких признаков этим методом можно получить ровно столько, сколько есть целых делителей q у числа $n = 2m$.

Поясним это на примере $q = 2$.

Запишем матрицу $H(t)$ в виде

$$H(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ B(t) & C(t) \end{pmatrix},$$

где $A(t), B(t)$ и $C(t)$ — квадратные матрицы m-го порядка, причем $A(t)$ и $C(t)$ — эрмитовы матрицы, которым отвечают неотрицательные эрмитовы формы, т.е. $A(t) \geq 0$, $C(t) \geq 0$, а $B^*(t)$ — матрица, сопряженная с матрицей $B(t)$.

Разбивая n-мерный вектор x в прямую сумму двух m-мерных векторов y и z:

$$x = y \dot{+} z\,,$$

сможем записать дифференциальное уравнение (0.1) в виде системы:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(B^*y + Cz), \qquad \frac{dz}{dt} = -\lambda(Ay + Bz).$$

Пусть по-прежнему $x^+(t) = y^+(t)\dot{+}z^+(t)$ — решение уравнения (0.1) при $\lambda = \Lambda_+$, обладающее свойством (7.3).

Положим

$$\eta = \max_{0 \leq t \leq T} |y^+(t)| = |y^+(\tau)|, \quad \zeta = \max_{0 \leq t \leq T} |z^+(t)| = |z^+(\sigma)|.$$

Обозначим через $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ нормы (см. § 1, п.1) матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$, так что

$$\alpha(t) = |A(t)| = \max_{u \in E_m} \frac{|A(t)u|}{|u|},$$

$$\beta(t) = |B(t)| = |B^*(t)|, \qquad \gamma(t) = |C(t)|.$$

Интегрируя почленно уравнение

$$\frac{dy^+}{dt} = \Lambda_+(B^*y^+ + Cz^+)$$

в пределах от τ до $\tau + T$ и беря затем нормы от обеих частей равенства, получим

$$2\eta = \Lambda_+ \left| \int_\tau^{\tau+T} B^*(t)y(t)dt + \int_\tau^{\tau+T} C(t)z^+(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \Lambda_+ \left(\int_\tau^{\tau+T} |B^*(t)y^+(t)|dt + \int_\tau^{\tau+T} |C(t)z^+(t)|dt \right). \qquad (7.9)$$

Так как

$$|B^*(t)y^+(t)| \le \beta(t)|y^+(t)| \le \beta(t)\eta,$$
$$|C(t)z^+(t)| \le \gamma(t)|z^+(t)| \le \gamma(t)\zeta,$$

то из (7.9) заключаем, что

$$2\eta \le \Lambda_+\left(\eta\int_0^T \beta(t)dt + \zeta\int_0^T \gamma(t)dt\right). \tag{7.10}$$

Аналогично из уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -\Lambda_+(Ay^+ + Bz^+)$$

найдем, что

$$2\zeta \le \Lambda_+\left(\eta\int_0^T \alpha(t)dt + \zeta\int_0^T \beta(t)dt\right). \tag{7.11}$$

Из (7.10) и (7.11), пользуясь леммой, получаем

$$2 \le \Lambda_+\left(\int_0^T \beta(t)dt + \left[\int_0^T \alpha(t)dt\int_0^T \gamma(t)dt\right]^{1/2}\right).$$

Полученная оценка для Λ_+ позволяет сформулировать следующее утверждение.

Признак II. Вещественное λ принадлежит центральной зоне устойчивости уравнения (0.1), если

$$|\lambda| < 2\left\{\int_0^T \beta(t)dt + \left(\int_0^T \alpha(t)dt\int_0^T \gamma(t)dt\right)^{1/2}\right\}^{-1},$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ суть нормы соответственно матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ из представления

$$H(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t) \\ B^*(t) & C(t) \end{pmatrix}.$$

Как и признак I_n, признак II содержит в качестве частного следствия признак I_2.

§ 8. Случай канонической системы второго порядка

1. Как уже отмечалось в § 7, для случая $n = 2$ вещественная каноническая система (0.1) принимает вид

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda(bx_1 + cx_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -\lambda(ax_1 + bx_2). \tag{8.1}$$

Условие $H(t) \in \mathcal{P}_2(T)$ для вещественной периодической матрицы-функции

$$H(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}, \quad H(t+T) = H(t)$$

эквивалентно, как легко видеть, совокупности следующих условий:

$$a(t) \geq 0, \quad c(t) \geq 0, \quad a(t)c(t) - b^2(t) \geq 0$$

и

$$\int\limits_0^T a(t)dt \int\limits_0^T c(t)dt - \Big(\int\limits_0^T b(t)dt\Big)^2 > 0.$$

Пусть

$$U(t;\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11}(t;\lambda) & u_{12}(t;\lambda) \\ u_{21}(t;\lambda) & u_{22}(t;\lambda) \end{pmatrix}$$

есть матрицант системы (8.1). Так как $\det U(t;\lambda) \equiv 1$, то мультипликаторы ρ_1, ρ_2 системы (8.1) будут корнями квадратного уравнения:

$$\rho^2 - 2A(\lambda)\rho + 1 = 0,$$

где

$$2A(\lambda) = u_{11}(T;\lambda) + u_{22}(T;\lambda).$$

Так что $\rho_1(\lambda)\rho_2(\lambda) \equiv 1$ и

$$\rho_{1,2}(\lambda) = A(\lambda) \pm \sqrt{A^2(\lambda) - 1}\,. \tag{8.2}$$

Предполагая $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, обозначим через $\rho_2(\lambda)$ мультипликатор первого рода, а через $\rho_1(\lambda)$ — мультипликатор второго рода системы (8.1).

Таким образом,

$$|\rho_1(\lambda)| < 1, \quad |\rho_2(\lambda)| > 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{8.3}$$

Так как

$$U(t;\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \int\limits_0^t \begin{pmatrix} b & c \\ -a & -b \end{pmatrix} dt + \lambda^2 C_2 + \lambda^3 C_3 + \cdots,$$

где $C_k \ \ (k = 2, 3, \ldots)$ — некоторые матрицы второго порядка, то

$$A(\lambda) = 1 + \frac{1}{2} a_2 \lambda^2 + \cdots$$

$$(a_2 = \operatorname{Sp} C_2).$$

Непосредственным вычислением матрицы C_2 можно убедиться в том, что

$$a_2 < 0. \tag{8.4}$$

Однако это вытекает и из следующих общих соображений. Если бы $a_2 = 0$, то функция $\rho(\lambda)$ имела бы в окрестности точки $\lambda = 0$ следующее разложение:

$$\rho(\lambda) = 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \gamma_k \lambda^{\frac{k}{2}},$$

в силу которого в любой полуокрестности $|\lambda| < r$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ каждая ветвь $\rho(\lambda)$ принимала бы значение как внутри, так и вне единичного круга.

Таким образом, $a_2 \neq 0$. С другой стороны, по теореме 6.1 при вещественных λ, достаточно малых по абсолютной величине, мультипликаторы $\rho_{1,2}(\lambda)$ должны лежать на единичной окружности, т.е. $|A(\lambda)| < 1$, откуда следует (8.4).

В нулях целой вещественной функции

$$F(\lambda) = A^2(\lambda) - 1$$

мультипликаторы $\rho_{1,2}(\lambda) = \pm 1$, а поэтому в силу (8.3) нули $F(\lambda)$ все вещественны.

Рассуждая аналогично тому, как это было проделано выше для случая $\lambda_0 = 0$, нетрудно показать, что кратность любого нуля λ_0 функции $F(\lambda)$ не выше двух.

Если λ_0 — простой нуль $F(\lambda)$, то λ_0 будет точкой ветвления второго порядка для $\rho(\lambda)$ и $\rho(\lambda)$ в окрестности этой точки будет иметь разложение

$$\rho(\lambda) = \rho(\lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\lambda - \lambda_0)^k$$

$$(\rho(\lambda_0) = \pm 1, \quad c_1 \neq 0).$$

Если же λ_0 — нуль второй кратности $F(\lambda)$, то в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ можно будет выделить две голоморфные ветви функции $\rho(\lambda)$:

$$\rho_j(\lambda) = \rho(\lambda_0) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)}(\lambda - \lambda_0)^k$$

$$(\rho(\lambda_0) = \pm 1, \quad c_1^{(j)} \neq 0, \quad j = 1, 2).$$

2. В нашей статье [3в] было доказано, что каждая из целых функций $u_{jk}(T;\lambda)$ $(j, k = 1, 2)$ принадлежит к классу (N) целых функций $f(\lambda)$, характеризуемых следующими двумя свойствами:

1) $$\overline{\lim_{|\zeta|\to\infty}} \frac{\ln|f(\zeta)|}{|\zeta|} < \infty \quad (\zeta \text{ — любое комплексное число}),$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\, d\lambda < \infty.$$

С другой стороны, Б.Я. Левиным [11] установлено общее предложение, согласно которому любая функция $f(\lambda)$ класса (N) допускает всегда равномерно сходящееся в любой конечной части плоскости разложение в произведение

$$f(\lambda) = c\lambda^p \lim_{R\to\infty} \prod_{|\alpha_j|<R} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha_j}\right) \quad (p > 0),$$

где $\{\alpha_j\}$ — множество всех нулей целой функции $f(\lambda)$.

Очевидно, что если $u_{jk}(\lambda)$ $(j, k = 1, 2)$ суть функции класса (N), то $A(\lambda)$ и $F(\lambda)$ будут также класса (N).

Теорема 8.1. *Все корни целой функции $F(\lambda) = A^2(\lambda) - 1$ вещественны и среди них имеется по крайней мере один положительный и один отрицательный корень. Отличные от нуля корни целой функции $F(\lambda)$ допускают нумерацию с учетом их кратности такую, что*

$$\cdots < \lambda_{-4} \le \lambda_{-3} < \lambda_{-2} \le \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3 \le \lambda_4 < \cdots \tag{8.5}$$

Имеет место равномерно расходящееся в каждой конечной части комплексной плоскости разложение:

$$A^2(\lambda) - 1 = a_2\lambda^2 \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_j|<R} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \quad (a_2 < 0). \tag{8.6}$$

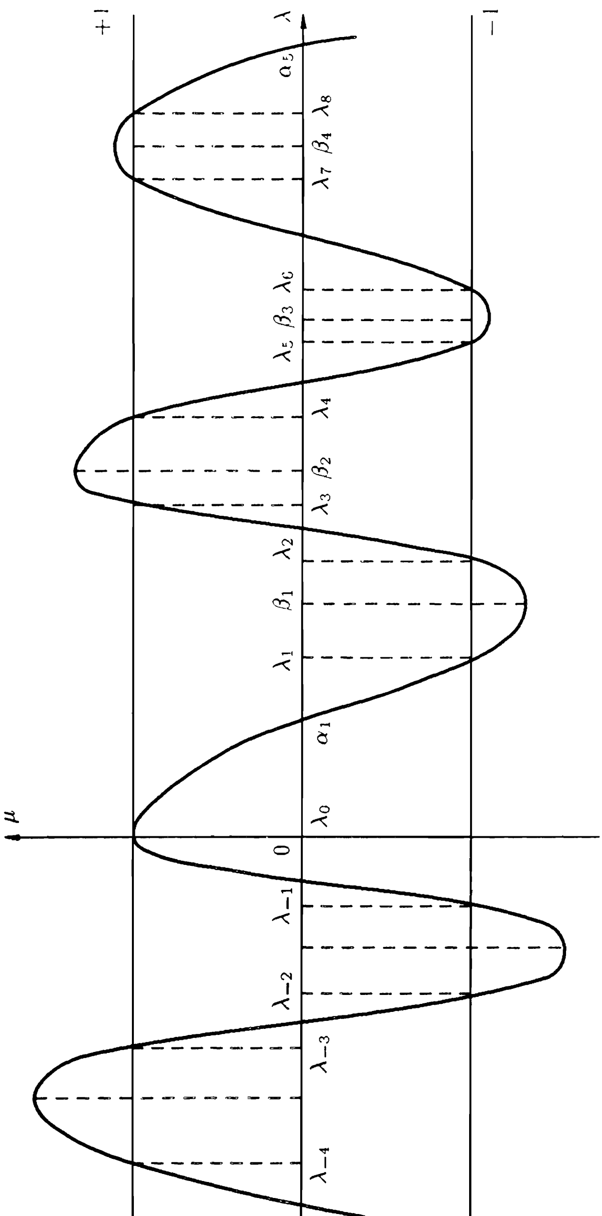
В любом интервале $(\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1})$ $(k = 0, 1, 2, ...; \lambda_0 = 0)$ функция $(-1)^{k-1}A(\lambda)$ является возрастающей, причем

$$-1 < A(\lambda) < 1 \text{ при } \lambda_{2k} < \lambda < \lambda_{2k+1}\,. \tag{8.7}$$

Если для некоторого $k = 1, 2, ...$ имеем $\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k}$, то

$$(-1)^k A(\lambda) > 1 \text{ при } \lambda_{2k-1} < \lambda < \lambda_{2k}\,, \tag{8.8}$$

причем внутри интервала $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ находится одна и только одна точка максимума функции $(-1)^k A(\lambda)$. Если же $\lambda_{2k-1} = \lambda_{2k}$, то в точке λ_{2k-1} функция $(-1)^k A(\lambda)$ имеет максимум, равный единице.



$+1$
λ
-1
α_5
λ_8
β_4
λ_7
λ_6
β_3
λ_5
λ_4
β_2
λ_3
λ_2
β_1
λ_1
α_1
λ_0
μ
0
λ_{-1}
λ_{-2}
λ_{-3}
λ_{-4}

Рис. 1

Аналогичное поведение имеет функция $A(\lambda)$ на отрицательных интервалах $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ и $(\lambda_{2k-2}, \lambda_{2k-1})$ $(k = 0, -1, -2, \ldots)$.

Если на вещественной плоскости (λ, μ) построить график функции $\mu = A(\lambda)$, то утверждения теоремы относительно поведения $A(\lambda)$ означают, что этот график будет иметь вид, указанный на рис.1 (на чертеже случай $\lambda_{2r-1} = \lambda_{2k}$ не показан).

Доказательство. Вещественность нулей функции $F(\lambda)$ и возможность ее представления в виде (8.6) были доказаны предшествующими теореме рассуждениями.

Существование нулей $\lambda_{\pm 1}$ следует из общей теоремы (6.2). Рассмотрим полином

$$P_R(\lambda) = a_2 \lambda^2 \prod_{|\lambda_j|<R} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \qquad (0 < R < \infty).$$

Так как все его нули λ_j — вещественны, то и все нули производной $P'_R(\lambda)$ — вещественны. Из равномерного стремления $P'_R(\lambda)$ к $F'(\lambda) = 2A(\lambda)A'(\lambda)$ заключаем, что все нули функции $F'(\lambda)$ вещественны.

Так как для вещественного λ

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{F'(\lambda)}{F(\lambda)} = -\frac{2}{\lambda^2} - \sum_j \frac{1}{(\lambda - \lambda_j)^2}, \tag{8.9}$$

то каждый нуль μ_0 функции $F'(\lambda)$, не являющийся нулем функции $F(\lambda)$, будет простым нулем $(F''(\mu_0)/F(\mu_0) < 0)$. Если же $F'(\mu_0) = F(\mu_0) = 0$, то μ_0, будучи нулем второй кратности для $F(\lambda)$, будет для $F'(\lambda)$ нулем первой кратности. Таким образом, $F'(\lambda)$ имеет только простые нули.

Из (8.9) также следует, что, если отбросить у $F(\lambda)$ и $F'(\lambda)$ их общие нули, то оставшиеся нули этих функций будут перемежаться.

В самом деле, в силу (8.9) для любой пары $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ можно утверждать, что при монотонном изменении λ от λ_k до λ_{k+1} функция $F'(\lambda)/F(\lambda)$ убывает от $-\infty$ до ∞, и, значит, $F'(\lambda)$ проходит один и только один раз через нуль.

Одновременно мы доказали вещественность и простоту нулей функций $A(\lambda)$ и $A'(\lambda)$. Перемежаемость этих нулей следует из соотношения:

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{A'(\lambda)}{A(\lambda)} < 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

устанавливаемого для $A(\lambda) \in (N)$ аналогично тому, как это было сделано для $E(\lambda)$.

Легко видеть, что все прочие утверждения теоремы вытекают из свойств вещественности, простоты и перемежаемости нулей функций $A(\lambda), A'(\lambda)$, а также нулей $F(\lambda)$ и $A(\lambda)A'(\lambda)$.

Теорема доказана.

Обозначим через

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots, \quad \beta_1 < \beta_2 < \cdots$$

последовательные положительные нули соответственно функций $A(\lambda)$ и $A'(\lambda)$.

Утверждения теоремы означают, что

$$\lambda_{2k-2} < \alpha_k < \lambda_{2k-1}, \qquad \lambda_{2k-1} \le \beta_k \le \lambda_{2k} \quad (k = 1, 2, ...),$$

причем знак равенства исключается, если $\lambda_{2k-1} < \lambda_{2k}$.

3. Теорема позволяет составить картину движения мультипликаторов при непрерывном возрастании λ от $-\infty$ до ∞.

Мы ограничимся описанием этой картины для случая изменения λ от 0 до ∞, так как для случая изменения λ от 0 до $-\infty$ картина будет совершенно аналогичной.

Теорема 8.2. *При непрерывном возрастании λ от λ_{2k} до λ_{2k+1} ($k = 0, 1, 2, ...; \lambda_0 = 0$) мультипликаторы первого и второго рода $\rho_1(\lambda)$ и $\rho_2(\lambda)$ движутся соответственно по и против часовой стрелки по полуокружностям единичной окружности от точки $(-1)^k$ до точки $(-1)^{k+1}$.*

Если $\lambda_{2k+1} < \lambda_{2k+2}$, то мультипликаторы $\rho_1(\lambda)$, $\rho_2(\lambda)$, встретившись при $\lambda = \lambda_{2k+1}$ в точке $(-1)^{k+1}$, при дальнейшем возрастании λ вплоть до некоторого значения β_{k+1} ($\lambda_{2k+1} < \beta_{k+1} < \lambda_{2k+2}$) движутся по вещественной оси, уда-

ляясь в противоположные стороны от точки $(-1)^{k+1}$*, а при возрастании* λ *от* β_{k+1} *до* λ_{2k+2} *движутся в обратном направлении и возвращаются к точке* $(-1)^{k+1}$.

Если же $\lambda_{2k+1} = \lambda_{2k+2}$*, то при прохождении* λ *через* λ_{2k+1} *мультипликаторы* $\rho_1(\lambda), \rho_2(\lambda)$*, встретившись в точке* $(-1)^{k+1}$*, продолжают свое движение по единичной окружности — каждый в своем направлении.*

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 8.1 и формулы (8.2).

Заметим, что первое утверждение теоремы также непосредственно вытекает из того, что $|\rho_1(\lambda)| < 1$ при $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, и его обобщением является теорема 4.2.

Эта часть теоремы была указана нами еще в нашей заметке [3а].

Третье утверждение теоремы приводится для полноты картины; оно не содержит чего-либо нового в сравнении с первым утверждением.

Если для некоторого значения $\lambda = \lambda'$ мультипликатор

$$\rho(\lambda') = 1 \qquad (\rho(\lambda') = -1),$$

то в этом и только этом случае система (8.1) имеет нетривиальное решение $x = (x_1, x_2) \neq 0$, удовлетворяющее условию

$$x(T) = x(0), \qquad (x(T) = -x(0)).$$

Отсюда мы заключаем, что совокупность чисел

$$\lambda_{\pm(4k+1)}, \lambda_{\pm(4k+2)} \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{8.10}$$

является спектром (множеством всех характеристических чисел) краевой задачи:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda(bx_1 + cx_2), \qquad x_1(0) + x_1(T) = 0\,,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda(ax_1 + bx_2), \qquad x_2(0) + x_2(T) = 0, \tag{8.11}$$

а совокупность чисел

$$0, 0, \lambda_{\pm(4k+3)}, \lambda_{\pm(4k+4)} \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{8.12}$$

спектром краевой задачи:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda(bx_1 + cx_2) \qquad x_1(0) - x_1(T) = 0\,,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\lambda(ax_1 + cx_2)\,, \qquad x_2(0) - x_2(T) = 0. \tag{8.13}$$

При этом каждое характеристическое число фигурирует в спектре (8.10) или (8.12) столько раз, сколько ему отвечает линейно независимых решений в соответствующей задаче (8.11) или (8.13).

Последнее утверждение вытекает из общей теоремы 3.4, ввиду того, что совокупности чисел (8.10) и (8.12) суть соответственно совокупности всех корней уравнений

$$a(\lambda) + 1 = 0, \qquad A(\lambda) - 1 = 0\,,$$

причем каждый корень входит в совокупность столько раз, какова его кратность как корня соответствующего уравнения.

Легко видеть, что если некоторое число λ' является простым характеристическим числом задачи (8.11) или (8.13), то система (8.1) при $\lambda = \lambda'$ имеет два линейно независимых решения $x^{(0)}(t)$ и $x^{(1)}(t)$ таких, что:

$$x^{(0)}(t+T) \equiv \pm x^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t+T) \equiv \pm x^{(1)}(t) + x^{(0)}(t).$$

Если же λ' — второй кратности, то, очевидно, каждое решение $x(t)$ системы (8.1) будет обладать свойством $x(t+T) \equiv \pm x(t)$ (и, следовательно, будет ограничено).

Согласно общему определению (см. § 5), зонами устойчивости для системы (8.1) будут открытые интервалы на полуоси $\lambda > 0$

$$(\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1}) \qquad (k = 0, 1, 2, ...)$$

и соответствующие открытые интервалы на полуоси $\lambda < 0$

$$(\lambda_{-2k-1}, \lambda_{-2k}) \qquad (k = 0, 1, ...),$$

а также открытый интервал $(-\lambda_1, \lambda_1)$.

Таким образом, характеристические числа краевых задач (8.11) и (8.13) *перемежаются парами.*

Открытый интервал $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ будет зоной устойчивости для системы (8.1) в том и только том случае, если его концы суть характеристические числа различных родов (различных краевых задач).

Как мы знаем (см. § 7, п.3), дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda^2 p(t) y = 0, \tag{8.14}$$

где $p(t) = p(t+T) \geq 0$ и $p(t) \not\equiv 0$, в определенном смысле эквивалентно некоторой дифференциальной системе вида (8.1).

Если переформулировать сделанные утверждения относительно краевых задач (8.11) и (8.13) для соответствующих краевых задач с уравнением (8.14), то получим утверждения, впервые доказанные А.М. Ляпуновым [1в].

Впоследствии Ляпунов [1г] обощил эти результаты на случай функции $p(t)$, принимающей значение обоих знаков.

Метод, опирающийся на исследовании поведения мультипликаторов уравнения (8.14) в верхней полуплоскости, позволяет и в этом более общем случае получить достаточно просто теоремы Ляпунова, сообщенные им в заметке [1г] без доказательства (см. § 9, а также [12]).

4. Ниже мы установим асимптотические свойства чисел λ_k $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$. Для этого нам в дальнейшем понадобятся некоторые предложения В.А. Якубовича [5а,б], касающиеся геометрического характера поведения решений системы (8.1).

1°. Рассматривая вещественное λ и вещественные x_1, x_2 $(x_1^2 + x_2^2 > 0)$, положим

$$x_1 = r \cos \theta, \qquad x_2 = r \sin \theta.$$

Таким образом, r и θ будут полярными координатами точки $x = (x_1, x_2)$ фазовой плоскости.

Из (8.1) следует, что

$$x_1 \frac{dx_2}{dt} - x_2 \frac{dx_1}{dt} = -\lambda \left[a(t) x_1^2 + 2b(t) x_1 x_2 + c(t) x_2^2 \right].$$

Внося сюда выражения для x_1 и x_2 через r и θ, получаем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\lambda \left[a(t) \cos^2 \theta + 2b(t) \sin \theta \cos \theta + c(t) \sin^2 \theta \right]. \tag{8.15}$$

При $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$ будем иметь соответственно $d\theta/dt \leq 0$ или $d\theta/dt \geq 0$, т.е. имеет место следующее.

2°. С возрастанием t радиус-вектор $x = (x_1, x_2)$ любой интегральной кривой

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t)$$

системы уравнений (8.1) поворачивается[†] при $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) по (против) часовой стрелке.

Разность

$$\Theta = \theta(0) - \theta(T)$$

будем называть *углом поворота* решения $x = (x_1, x_2)$ системы (8.1).

Угол θ этого решения для любого t будет определяться своим начальным значением $\theta_0 = \theta(0)$, так что

$$\theta = \theta(t, \theta_0; \lambda).$$

Следовательно,

$$\Theta = \Theta(\theta_0; \lambda).$$

Легко видеть, что Θ будет непрерывной функцией θ_0 и λ, причем

$$\Theta(\theta_0 + 2\pi; \lambda) = \Theta(\theta_0; \lambda).$$

[†] Точнее, либо не меняет своего направления, либо поворачивается.

Следовательно, будут существовать и будут непрерывны по λ функции:

$$\Theta_M(\lambda) = \max \Theta(\theta_0; \lambda), \quad \Theta_\mu(\lambda) = \min \Theta(\theta_0; \lambda) \quad (0 \le \theta_0 \le 2\pi).$$

В дальнейшем будем рассматривать все на полуоси $\lambda > 0$, так как для полуоси $\lambda < 0$ положение будет аналогичным.

В силу известной общей леммы С.А. Чаплыгина [13] можно утверждать, что при $\lambda > 0$ решение $\theta(t; \theta_0, \lambda)$ уравнения (8.15) будет неубывающей функцией не только аргумента t, но и аргумента λ. Следовательно, и угол поворота $\Theta(\theta_0; \lambda)$, а с ними функции $\Theta_\mu(\lambda)$ и $\Theta_M(\lambda)$ будут не убывающими непрерывными функциями.

Теперь можем сформулировать следующее важное предложение В.А. Якубовича [5а, б].

Теорема 8.3. *Для того чтобы $\lambda > 0$ принадлежало k-й зоне устойчивости системы (8.1) ($k = 1, 2, ...$), необходимо и достаточно, чтобы*

$$(k-1)\pi \le \Theta_\mu(\lambda) \le \Theta_M(\lambda) < k\pi. \tag{8.16}$$

Поясним, что в этой формулировке теоремы подразумевается, что центральной зоне $(\lambda_{-1}, \lambda_1)$ приписан первый номер, а следующим от нее вправо зонам — последующие номера, так что k-й зоной устойчивости ($k \ge 1$) при такой нумерации будет зона $(\lambda_{2k-2}, \lambda_{2k-1})$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что из результатов предыдущих пунктов этого параграфа почти непосредственно вытекает, что $\lambda > 0$ принадлежит некоторой зоне устойчивости в том и только том случае, если при некотором целом k выполняется (8.16).

В самом деле, если бы при некотором целом $k \ge 0$ имело место

$$\Theta_\mu(\lambda) \le k\pi \le \Theta_M(\lambda), \tag{8.17}$$

то нашлось бы такое θ_0, что $\Theta(\theta_0; \lambda) = k\pi$.

Решение $x = (x_1, x_2)$ с начальными данными $x_{10} = \cos\theta_0$, $x_{20} = \sin\theta_0$ будет, очевидно, обладать тем свойством, что $x(T) = \rho x(0)$, т.е.

$$x_1(T) = \rho x_1(0), \qquad x_2(T) = \rho x_2(0), \tag{8.18}$$

где $\rho > 0$ или $\rho < 0$ в зависимости от того, четно или нечетно k.

Таким образом, в случае (8.17) $\lambda > 0$ не будет принадлежать ни одной зоне устойчивости.

Обратно, если $\lambda > 0$ не принадлежит ни одной зоне устойчивости, то найдется решение $x = (x_1, x_2)$, обладающее свойством (8.18) при некотором вещественном ρ. Для этого решения угол поворота Θ будет равен целой кратности π, а следовательно, при некотором целом $k > 0$ будет иметь место соотношение (8.17).

Итак, если $\lambda > 0$ принадлежит некоторой зоне устойчивости, при некотором целом $k \geq 0$ выполняется (8.16). Непрерывно изменяя λ внутри зоны, убедимся в том, что всем λ из одной и той же зоны устойчивости отвечает неравенство (8.16) с одним и тем же k.

Если $\lambda > 0$ достаточно мало, то и $\Theta_M(\lambda)$ будет достаточно мало. Отсюда значениям $\lambda > 0$ из первой зоны устойчивости будет отвечать неравенство (8.16) с $k = 1$, т.е. будем иметь

$$0 < \Theta_\mu(\lambda) < \Theta_M(\lambda) < \pi \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < \lambda_1. \tag{8.19}$$

Воспользуемся теперь тем, что $\Theta_\mu(\lambda)$ и $\Theta_M(\lambda)$ суть непрерывные неубывающие функции λ при $\lambda > 0$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то, как мы знаем, при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ все решения $x = x(t)$ системы (8.1) будут копериодическими: $x(t + T) = -x(t)$.

Учитывая (8.19), заключаем, что

$$\Theta_\mu(\lambda) = \Theta_M(\lambda) = \pi \quad \text{при} \quad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2.$$

Отсюда, далее, будет следовать, что

$$\pi < \Theta_\mu(\lambda) < \Theta_M(\lambda) < 2\pi \quad \text{при} \quad \lambda_2 < \lambda < \lambda_3.$$

Если же $\lambda_1 < \lambda_2$, то при $\lambda = \lambda_1$ система (8.1) будет иметь с точностью до постоянного множителя единственное косопериодическое решение.

Более того, ввиду того, что

$$\rho_1(\lambda_1) = \rho_2(\lambda_1) = 1\,,$$

это решение будет единственным решением системы (8.1), имеющим угол поворота, равный π. Таким образом, в этом случае в силу (8.19) будем иметь

$$\Theta_\mu(\lambda_1) < \Theta_M(\lambda_1) = \pi.$$

Следовательно, при λ, больших λ_1 и достаточно близких к λ_1, будем иметь

$$\Theta_\mu(\lambda) < \pi < \Theta_M(\lambda) < 2\pi.$$

При любом λ изнутри интервала (λ_1, λ_2) система (8.1) будет иметь два линейно независимых решения $x^{(1)}(t;\lambda)$ и $x^{(2)}(t;\lambda)$ таких, что

$$x^{(j)}(T;\lambda) = \rho_j(\lambda)x^{(j)}(0;\lambda) \qquad (j = 1,2;\ \rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)^{-1} < 1).$$

При соответствующей нормировке этих решений можно добиться того, чтобы они непрерывно зависели от λ.

Так как при $\lambda > \lambda_1$, близких к λ_1, угол поворота этих решений равен π, то при всех λ $(\lambda_1 < \lambda < \lambda_2)$ их угол поворота, будучи равен кратности π, будет в точности равен π.

С другой стороны, всякое решение системы (8.1) при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, имеющее угол поворота, кратный π, будет отличаться только постоянным множителем от одного из решений $x^{(j)}(t;\lambda)$ $(j = 1,2)$.

Таким образом,

$$\pi < \Theta_M(\lambda) < 2\pi \qquad \text{при} \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$$

и, следовательно,

$$0 < \Theta_\mu(\lambda) \le \pi \quad \text{при} \quad \lambda_1 < \lambda < \lambda_2.$$

Так как с возрастанием λ угол $\Theta_M(\lambda)$ не убывает, то мы убеждаемся, что для λ из второй зоны устойчивости неравенство (8.16) возможно только при $k = 2$, т.е.

$$\pi \leq \Theta_\mu(\lambda) < \Theta_M(\lambda) < 2\pi \quad \text{при} \quad \lambda_2 < \lambda < \lambda_3.$$

Аналогичным образом исследуется поведение функций $\Theta_\mu(\lambda)$ и $\Theta_M(\lambda)$ в интервалах $(\lambda_3, \lambda_4), (\lambda_4, \lambda_5)$ и т. д.

Теорема доказана.

Из теоремы 8.3 немедленно получается следующий признак В.А. Якубовича.

3°. Пусть $h_M(t)$ и $h_\mu(t)$ — соответственно наибольшее и наименьшее собственные числа матрицы†

$$H(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & c(t) \end{pmatrix}.$$

Если для некоторого целого $k \geq 0$ существуют $\lambda (> 0)$ такие, что

$$(k-1)\pi < \lambda \int_0^T h_\mu(t)\,dt, \qquad \lambda \int_0^T h_M(t)\,dt < k\pi, \tag{8.20}$$

то они образуют некоторый подинтервал k-й зоны устойчивости системы (8.1).

В самом деле, согласно (8.15) при $\lambda > 0$ и, следовательно, для угла поворота $\Theta(\lambda)$ любого решения $x = x(t)$ системы (8.1)

$$\lambda \int_0^T h_\mu(t)dt \leq \Theta \leq \lambda \int_0^T h_M(t)\,dt.$$

†Т.е.

$$h_M(t) = \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}, \quad h_\mu(t) = \frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + b^2}.$$

Таким образом, при выполнении (8.20) будет выполняться условие (8.16).

Заметим, что основные положения § 4 позволили М.Г. Нейгауз и В.Б. Лидскому [4] показать, что в общем случае ($n = 2m \geq \geq 2$) уравнения (0.1) положительного типа выполнение неравенств (8.20) для некоторого значения λ является достаточным условием того, чтобы это значение принадлежало некоторой зоне устойчивости уравнения (0.1).

Этот вывод может быть получен совсем просто, если воспользоваться теоремой 5.3.

5. Обозначим через $x^{(k)}(t)$ какое-либо нетривиальное решение системы (8.1) при $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \ldots$), удовлетворяющее условию

$$x^{(k)}(T) = \pm x^{(k)}(0) \qquad k = 1, 2, \ldots).$$

Из теоремы 8.3 нетрудно заключить, что угол поворота Θ_k решения $x^{(k)}(t)$ имеет следующее значение:

$$\Theta_k = \left[\frac{1+k}{2}\right]\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{8.21}$$

где символ $[a]$ означает целую часть числа a.

Это обстоятельство позволит нам упростить рассуждения, при помощи которых получаются асимптотические формулы для λ_k при $k \to \infty$. Идею использования значений углов поворота фундаментальных решений краевой задачи при выводе асимптотических формул для характеристических чисел из статьи П.Д. Калафати [14]. В этой статье указанная идея применялась к задаче Штурма–Лиувилля, дифференциальное уравнение которой приводилось к виду (8.1) с $b \equiv 0$.

Теорема 8.4. *Если периодические функции $a(t), b(t), c(t)$ абсолютно непрерывны и выполняются условия*

$$a(t) > 0, \quad \Delta(t) = a(t)c(t) - b^2(t) > 0, \tag{8.22}$$

то при $k \to \infty$:

$$\lambda_k = \left[\frac{k+1}{2}\right]\pi\Big(\int\limits_0^T \sqrt{\Delta(t)}\,dt\Big)^{-1} + \frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{b(t)}{a(t)}\,d\frac{a(t)}{\sqrt{\Delta(t)}} + o(1). \tag{8.23}$$

Если же, кроме того, и производные функций $a(t), b(t), c(t)$ абсолютно непрерывны, то в этой асимптотической формуле символ $o(1)$ может быть заменен символом $O(1/k)$.

Доказательство. Перейдем в системе (8.1) к новой переменной

$$\tau = \int_0^t \sqrt{\Delta(t)}\, dt.$$

Тогда эта система примет следующий вид:

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \lambda(\beta x_1 + \gamma x_2), \qquad \frac{dx_2}{d\tau} = -\lambda(\alpha x_1 + \beta x_2), \tag{8.24}$$

где

$$\alpha(\tau) = \frac{a(t)}{\sqrt{\Delta(t)}}, \quad \beta(\tau) = \frac{b(t)}{\sqrt{\Delta(t)}}, \quad \gamma(\tau) = \frac{c(t)}{\sqrt{\Delta(t)}} \quad \text{при} \quad t = t(\tau).$$

Периодом функций α, β, γ будет величина

$$\Omega = \int_0^T \sqrt{\Delta(t)}\, dt. \tag{8.26}$$

Заметим, что

$$\alpha(\tau)\gamma(\tau) - \beta^2(\tau) \equiv 1. \tag{8.27}$$

Положим далее

$$u = \alpha x_1 + \beta x_2, \qquad v = x_2. \tag{8.28}$$

Легко найдем, используя (8.25) и (8.27), что

$$\frac{du}{d\tau} = \lambda v + \frac{d\alpha}{d\tau} x_1 + \frac{d\beta}{d\tau} x_2, \quad \frac{dv}{d\tau} = -\lambda u.$$

Исключая отсюда при помощи (8.28) величины x_1 и x_2, получаем

$$\frac{du}{d\tau} = \lambda v + \frac{1}{\alpha}\, \frac{d\alpha}{d\tau} u + \left(\frac{d\beta}{d\tau} - \frac{\beta}{\alpha}\, \frac{d\alpha}{d\tau}\right) v\, \frac{dv}{d\tau} = -\lambda u. \tag{8.29}$$

Если теперь положить $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, то из (8.29) легко найдем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = -\lambda - \frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau}\sin\varphi\cos\varphi + \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau} - \frac{d\beta}{d\tau}\right)\sin^2\varphi =$$

$$= -\lambda - B(\tau) - A(\tau)\sin 2\varphi + B(\tau)\cos 2\varphi,$$

где

$$A(\tau) = \frac{1}{2\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau}, \qquad B(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{d\tau} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau}\right). \tag{8.30}$$

Представляя φ в виде

$$\varphi = -\lambda\tau + \chi(\tau), \tag{8.31}$$

получаем

$$\frac{d\chi}{d\tau}B(\tau) - A(\tau)\sin 2\varphi + B(\tau)\cos 2\varphi. \tag{8.32}$$

Следовательно, для $d\chi/d\tau$ имеет место оценка, не зависящая от λ и начального значения $\varphi_0 = \varphi(0) = \chi(0)$, а именно

$$\left|\frac{d\chi}{d\tau}\right| \le \sqrt{A^2(\tau) + B^2(\tau)} + |B(\tau)|,$$

где правая часть есть некоторая суммируемая в интервале $(0, \Omega)$ функция.

Заметим, что

$$\varkappa = \int\limits_0^\Omega B(\tau)d\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\Omega \frac{\beta}{\alpha}\frac{d\alpha}{d\tau}\,d\tau = -\frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{b(t)}{a(t)}\,d\frac{a(t)}{\sqrt{\Delta(t)}}.$$

На основании (8.31) и (8.32) получаем

$$\chi(\Omega) - \chi(0) - \varkappa = -\int\limits_0^\Omega [A(\tau)\cos 2\chi(\tau) + B(\tau)\sin 2\chi(\tau)]\sin 2\lambda\tau d\tau +$$

$$+\int\limits_0^\Omega [-A(\tau)\sin 2\chi(\tau) + B(\tau)\cos 2\chi(\tau)]\cos 2\lambda\tau\,d\tau. \tag{8.33}$$

Если $A(\tau)$ и $B(\tau)$ — абсолютно непрерывные функции, то, беря по частям оба интеграла правой части, убедимся в том, что она имеет порядок $O(\lambda^{-1})$.

Если же это условие не выполняется, то, приближая функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ в метрике класса $L_1(0,T)$ суммируемых функций абсолютно непрерывными функциями, покажем, что во всяком случае первая часть в (8.32) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$.

Пусть теперь $\lambda = \lambda_k$ и $x^{(k)} = (x_1, x_2)$ по-прежнему есть решение системы (8.1), удовлетворяющее условию

$$x^{(k)}(T) = \pm x^{(k)}(0)\,,$$

так что согласно сказанному выше

$$-\int_0^\Omega \frac{d}{d\tau}\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\,d\tau = \left[\frac{k+1}{2}\right]\pi\,.$$

Так как Ω является периодом функций $\alpha(\tau), \beta(\tau)$, то нетрудно убедиться в том, что угол поворота вектора $w = (u,v)$ при изменении τ от 0 до Ω будет тот же, что и у вектора $x^{(k)}$, т.е.

$$\varphi(0) - \varphi(\Omega) = \lambda_k\Omega + \chi(0) - \chi(\Omega) = \left[\frac{k+1}{2}\right]\pi. \tag{8.34}$$

По доказанному выше

$$\chi(\Omega) - \chi(0) = \varkappa + o(1) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,$$

а если у функций a, b, c существуют абсолютно непрерывные производные, то, более того,

$$\chi(\Omega) - \chi(0) = \varkappa + O(\lambda_k^{-1}) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, из (8.34) и сказанного вытекают все утверждения теоремы.

Из теоремы 8.4 следует, что при указанных условиях относительно a, b, c длины зон неустойчивости $[\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k}]$ $(k =$

$= 1, 2, \ldots$) стремятся к нулю при $k \to \infty$, а длины зон устойчивости $(\lambda_{2k}, \lambda_{2k+1})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ при $k \to \infty$ стремятся к

$$\pi\Big(\int_0^T \sqrt{\Delta(t)}\,dt\Big)^{-1}.$$

Заметим, что П.Д. Калафати [14], рассматривая случай $b \equiv 0$ и другие граничные условия, получил формулу типа (8.23), где вместо $o(1)$ у него стояло $O(1)$. Такого рода формулу в нашем случае можно получить, не требуя от коэффициентов a, b, c абсолютной непрерывности.

Действительно, из (8.30) и (8.32) вытекает:

$$|\chi(\Omega) - \chi(0) - \varkappa| \le \frac{1}{2}\int_0^\Omega \frac{1}{\alpha}\left|\frac{d\alpha}{d\tau}\right| d\tau + \frac{1}{2}\int_0^\Omega \alpha\left|\frac{d}{d\tau}\,\frac{\beta}{\alpha}\right| d\tau.$$

Вспоминая (8.25) и (8.26) и пользуясь снова (8.34), находим, что для любого $k = 1, 2, \ldots$

$$\left|\lambda_k - \varkappa - \left[\frac{k+1}{2}\right]\pi\Big(\int_0^T \sqrt{\Delta(t)}\;dt\Big)^{-1}\right| \le \frac{1}{2}\int_0^T \left|d\ln\,\frac{a(t)}{\sqrt{\Delta(t)}}\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T \frac{a(t)}{\sqrt{\Delta(t)}}\left|d\,\frac{b(t)}{a(t)}\right|. \tag{8.35}$$

Первый интеграл в правой части (8.35) имеет смысл, если:

1) функция

$$\frac{a(t)}{\sqrt{\Delta(t)}} \tag{8.36}$$

имеет ограниченную вариацию в интервале $(0, T)$ и ограничена снизу положительным числом.

Второй интеграл в правой части (8.35) и величина $\varkappa$ имеют смысл, если:

2) функция (8.36) непрерывна, а функция $b(t)/a(t)$ имеет ограниченную вариацию в интервале $(0, T)$.

Если функции a, b, c удовлетворяют условиям 1) и 2), то, аппроксимируя их соответствующим образом абсолютно непрерывными функциями $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, из справедливости оценки (8.35) для системы типа (8.1) с коэффициентами $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ заключим о справедливости той же оценки (8.35) при выполнении условий 1), 2).

Неравенство (8.35) приобретает особенно простой вид в применении к уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda^2 p(t) y = 0 \quad \Big(p(t) = p(t+T) \geq 0, \quad \int_0^T p(t)dt > 0 \Big).$$

В этом случае

$$a(t) = p(t), \quad b(t) \equiv 0, \quad c(t) \equiv 1, \quad \varkappa = 0$$

и неравенство (8.35) дает

$$\left| \lambda_k - \left[\frac{k+1}{2} \right] \pi \left(\int_0^T \sqrt{p(t)}\, dt \right)^{-1} \right| <$$

$$< \frac{1}{2} \left(\int_0^T \sqrt{p(t)}\, dt \right)^{-1} \int_0^T |d \ln p(t)| \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Неравенство применимо всякий раз, когда $p(t)$ — функция ограниченной вариации в $(0, T)$ и ограничена снизу положительным числом.

Заканчивая этот параграф, отметим, что в самом общем случае системы (8.1) с суммируемыми коэффициентами, удовлетворяющими условиям (0.3), (0.4), можно доказать, что если существуют λ_k для всех $k = 1, 2, \ldots$, то

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{\lambda_k} = \frac{2}{\pi} \int_0^T \sqrt{\Delta(t)}\, dt.$$

Если интеграл, стоящий справа, положителен, то λ_k для всех $k = 1, 2, \ldots$ существуют.

В другом месте мы укажем необходимый и достаточный критерий того, чтобы у системы (8.1) было конечное число зон устойчивости или чтобы они уходили на бесконечность только в одну сторону. В том и другом случае почти всюду $\Delta(t) = 0$.

§ 9. Зоны устойчивости системы дифференциальных уравнений второго порядка

1. Результаты предыдущих параграфов позволяют сделать ряд заключений относительно первой зоны устойчивости дифференциального уравнения (0.2)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu P(t)y = 0\,,$$

в котором $y = (y_1, \ldots, y_m)$ есть m-мерная вектор-функция, а

$$P(t) = \|p_{jk}(t)\|_1^m$$

— эрмитова периодическая матрица-функция $P(t+T) = P(t)$, суммируемая в интервале $(0, T)$.

Полагая $\lambda = \sqrt{\mu}$, $dy/dt = -\lambda z$, приведем уравнение (0.2) к системе

$$\frac{dy}{dt} = \lambda z, \qquad \frac{dz}{dt} = -\lambda P(t)y. \tag{9.1}$$

Эту систему можно рассматривать как частный случай системы (0.1), в которой x есть прямая сумма векторов y и z:

$$x = y+z, \qquad H(t) = \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Очевидно, что для того чтобы матрица $H(t)$ принадлежала классу $\mathcal{P}_n(T)$, необходимо и достаточно, чтобы $P(t)$ принадлежало классу $\mathcal{P}_m(T)$. Предполагая сперва выполненным условие

$$P(t) \in \mathcal{P}_m(T)\,, \tag{9.3}$$

выясним, какие выводы можно сделать в отношении уравнения (0.2) на основании результатов, полученных в предыдущих параграфах для уравнения (0.1).

Прежде всего замечаем, что если $\mu < 0$, то в системе (9.1) параметр λ имеет часто мнимое значение и поэтому по теореме 4.1 все мультипликаторы системы будут по модулю отличны от единицы.

Таким образом, при $\mu < 0$ всякое решение ($\not\equiv 0$) уравнения (0.2) становится неограниченным при стремлении t на бесконечность хотя бы в одну сторону.

Это предложение необходимо считать установленным еще А.М. Ляпуновым (см. [1а], гл. III, § 52, а также [3г]), который рассматривал уравнение (0.2) в предположении вещественности и непрерывности матрицы-функции $P(t)$.

Заметим, что сведение уравнения (0.2) к системе (9.1) возможно всегда, за исключением случая $\mu = 0$. При $\mu = 0$ уравнение (0.2) имеет неограниченные решения, изменяющиеся по линейному закону $y = \eta_0 + \eta_1 t$ ($\eta_0, \eta_1 \in E_m$), а система (9.1) при $\lambda = 0$ имеет только ограниченные решения, вырождающиеся в постоянные векторы.

Таким образом, ограниченность всех решений уравнения (0.2), если $P(t) \in \mathcal{P}_m(T)$, возможна лишь при $\mu > 0$.

Точку $\mu > 0$ будем называть *точкой сильной устойчивости уравнения* (0.2), если соответствующая точка $\lambda = \sqrt{\mu} > 0$ является точкой сильной устойчивости системы (9.1).

Множество всех точек сильной устойчивости уравнения (0.2) будет распадаться на открытые интервалы, расположенные на полуоси $\mu > 0$. Эти интервалы называются *зонами устойчивости уравнения* (0.2). Соответственно их порядку следования по полуоси $\mu > 0$ эти зоны называются *первой, второй* и т. д.[†]

Как непосредственное следствие теоремы 6.1 получается следующая теорема.

Теорема 9.1. *Пусть μ_1 — первое характеристическое чис-*

[†]Заметим, что в этих определениях мы не предполагаем выполнение условия (9.3).

ло краевой задачи:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu P(t)y = 0, \quad y(0) = -y(T), \quad y'(0) = -y'(T). \tag{9.4}$$

Тогда открытый интервал $(0, \mu_1)$ *принадлежит первой зоне устойчивости уравнения (0.2). Более того, он совпадает с первой зоной устойчивости уравнения (0.2), если матрица-функция* $P(t)$ *вещественна.*

Обозначим через $p_M(t)$ и $p_\mu(t)$ соответственно наибольшее и наименьшее собственное число матрицы $P(t)$. Тогда

$$p_\mu(t)I_m \le P(t) \le p_M(t)I_m\,.$$

В силу теоремы 3.3 замена в (9.4) матрицы $P(t)$ на матрицу $p_M(t)I_m$ или $p_\mu(t)I_m$ может привести лишь к уменьшению или соответственно к увеличению μ_1. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 9.2. *Первая зона устойчивости уравнения (0.2) не меньше первой зоны устойчивости скалярного уравнения*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu p_M(t)y = 0 \tag{9.5}$$

и в случае вещественного $P(t)$ *не больше первой зоны устойчивости скалярного уравнения*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu p_\mu(t)y = 0. \tag{9.6}$$

2. Сочетая теорему 9.2 с признаком Ляпунова принадлежности μ первой зоне устойчивости, получаем следующее его обобщение:

Признак А. Число μ принадлежит первой зоне устойчивости уравнения (0.2), если

$$0 < \mu < \frac{4}{T}\Big(\int\limits_0^T p_M(t)dt\Big)^{-1}.$$

Этот признак был указан нами еще в заметке [3а].

В качестве простого следствия признака I_n (§ 7) получается более простой в вычислительном отношении и во многих случаях более сильный признак.

Признак Б. Число μ принадлежит первой зоне устойчивости уравнения (0.2), если

$$0 < \mu < \frac{4}{T} M^{-1}(Q), \tag{9.7}$$

где $M(Q)$ — наибольшее собственное число матрицы

$$Q = \left\| \int_0^T |p_{jk}(t)|\, dt \right\|_1^m .$$

В самом деле, согласно обозначениям §7, п.2

$$Q = \int_0^T P_a(t)\, dt.$$

Таким образом, если матрица $H(t)$ определена равенством (9.2), то

$$C = J_a \int_0^T H_a(t) dt = \begin{pmatrix} 0 & TI_m \\ Q & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\det(C - \lambda I_n) = \det(\lambda^2 I_m - TQ).$$

Таким образом, для наибольшего собственного числа $M(C)$ матрицы C имеем

$$M^2(C) = TM(Q). \tag{9.8}$$

Число $\mu > 0$ будет принадлежать первой зоне устойчивости уравнения (0.2) в том и только том случае, если $\lambda = \sqrt{\mu}$ будет принадлежать центральной зоне устойчивости системы (9.1). Последнее же согласно признаку I_n (§7) будет во всяком случае иметь место, если

$$(0 <)\lambda^2 < 4M^{-2}(C).$$

Согласно (9.8) это неравенство для $\mu = \lambda^2$ эквивалентно неравенству (9.7).

3. Сравним признаки А и Б. Для этого заметим, что для эрмитовой матрицы A величина $M(A)$ совпадает с нормой матрицы $|A|$. А так как для всяких двух матриц A и B одного и того же порядка $|A+B| \leq |A| + |B|$, то

$$M(A+B) \leq M(A) + M(B).$$

Следовательно, если все элементы матрицы $P(t)$ не отрицательны:

$$p_{jk}(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T; \;\; j,k = 1,\ldots,m),$$

то

$$M(Q) = M\left(\int_0^T P(t)dt\right) \leq \int_0^T M\big(P(t)\big)dt = \int_0^T p_M(t)dt. \qquad (9.9)$$

Мы пришли, таким образом, к одному из утверждений, содержащихся в следующем предложении:

Признак Б сильней признака А всякий раз, когда выполнено одно из следующих условий:

1) *все элементы матрицы $P(t)$ суть неотрицательные функции;*

2) *матрица $P(t)$ является якобиевой, т.е.*

$$p_{jk}(t) \equiv 0 \quad \textit{при} \quad |j-k| > 1;$$

3) *число $m = 2$.*

Для случая, когда выполнено условие 1), предложение вытекает из неравенства (9.9).

Условие 3) можно рассматривать как частный случай условия 2).

Рассмотрим, таким образом, случай якобиевой матрицы $P(t)$.

Заметим, что в самом общем случае, взамен (9.9), можно всегда утверждать, что

$$M(Q) = M\left(\int_0^T P_a(t)dt\right) \le \int_0^T M\big(P_a(t)\big)dt = \int_0^T p_a(t)dt,$$

где $p_a(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $P(t)$.

Если матрица $P(t)$ удовлетворяет условию (9.3), как это до сих пор предполагалось, то все ее диагональные элементы суть неотрицательные функции. Следовательно, если матрица $P(t)$, кроме того, является якобиевой, то матрица $P_a(t)$ может отличаться от матрицы $P(t)$ только аргументами (в случае вещественной матрицы — только знаками) элементов, стоящих на двух диагоналях, смежных с главной. Но легко видеть, что изменение аргументов этих элементов в якобиевой матрице никак не отражается на ее собственных числах.

Таким образом, $p_a(t) \equiv p_M(t)$ и снова

$$M(Q) \le \int_0^T p_M(t)dt.$$

Предложение доказано.

Заметим, что в теории крутильных колебаний коленчатых валов приходится иметь дело именно с тем случаем, когда выполняется условие 2) (см. работу Н.Е. Кочина [15]).

4. Не приводя за недостатком места полных доказательств, укажем на некоторые возможные обобщения и развитие предыдущих результатов.

Прежде всего заметим, что теорема 5.3 позволяет установить ряд признаков принадлежности μ зонам устойчивости уравнения (0.2), следующим за первой. Так, например, на основании этой теоремы (и теоремы 4.2) можно утверждать, что если какие-либо зоны устойчивости уравнений (9.5) и (9.6), имеющие один и тот же номер $k > 1$, пересекаются, то их пересечение входит в некоторую зону устойчивости уравнения (0.2).

Отсюда уже очевидным образом могут быть получены различные аналитические признаки того, чтобы данное μ было точкой сильной устойчивости уравнения (0.2), — признаки, основанные на специальных признаках [5а, 3д] принадлежности μ зоне устойчивости с определенным номером скалярного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu p(t)y = 0.$$

Именно так могут быть получены указанные в заметке М.Г. Нейгауз и В.Б. Лидского [4] признаки принадлежности точки $\mu = 1$ к некоторой зоне устойчивости уравнения (0.2), — признаки, не использующие никаких других данных относительно матрицы-функции $P(t)$, кроме функций $p_\mu(t)$ и $p_M(t)$. Впрочем, и другие результаты этой статьи могут быть выведены из теоремы 5.3.

5. Существенным для приложений является то обстоятельство, что ряд основных положений теории зон устойчивости уравнения (0.2) сохраняет силу, если отбросить условие (9.3).

Чтобы не усложнять формулировок получающихся здесь результатов, мы, отбрасывая условие (9.3), предположим, что отсутствует постоянный вектор $\eta \neq 0$ ($\eta \in E_m$) такой, что

$$P(t)\eta \equiv 0 \qquad \text{(почти всюду).} \tag{9.10}$$

Этим предположением мы не исключаем из нашего поля зрения ничего существенного.

В самом деле, если линейное множество L векторов $\eta \in E_m$, удовлетворяющих условию (9.10), состоит не только из нуля, то всякий вектор $\eta \neq 0$ этого множества будет давать некоторое ненулевое решение $y = \eta$ уравнения (0.2).

Тогда всякое иное решение $y = y(t)$ системы (0.2) будет допускать разложение $y = \eta + y_1$, где $\eta \in L$, а $y_1 = y_1(t)$ — некоторое решение системы (0.2), ортогональное к η, при любом t, т.е. $(y_1, \eta) = 0$. Легко видеть, что задача отыскания общего решения y_1 системы (0.2), ортогонального к η, сводится к решению дифференциальной системы того же типа, что и (0.2), только уже из $m - d$ уравнений, где d — размерность L.

Заметим, что предположение

$$P(t)\eta \not\equiv 0 \qquad \text{при} \quad \eta \neq 0 \tag{9.11}$$

вовсе не исключает того, чтобы при любом t матрица $P(t)$ была вырожденной.

Оказывается, при выполнении условия (9.11) можно утверждать, что при любом вещественном μ точно m мультипликаторов системы (0.2)† лежит внутри единичной окружности и точно m — вне ее.

Рассматривая мультипликаторы системы (0.2) как функции параметра μ из верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\mu > 0$, мы сможем их подразделить†† на мультипликаторы первого и второго рода соответственно тому, находится ли мультипликатор внутри или вне единичной окружности. После этого теряющие в нашем случае смысл теоремы § 4 о поведении мультипликаторов того или иного рода, как функций параметра λ ($\operatorname{Im}\lambda \geq 0$), можно будет восстановить, рассматривая уже мультипликаторы как функции параметра μ ($\operatorname{Im}\mu \geq 0$).

Рассматривая затем зоны устойчивости уравнения (0.2) на полуоси $\mu > 0$, можно без труда доказать следующее утверждение:

Теорема 9.1 сохраняет силу и в том случае, когда условие $P(t) \in \mathcal{P}_n(T)$ не выполняется, но выполняется условие положительности в среднем:

$$\int\limits_0^T P(t)dt > 0. \tag{9.12}$$

К этому нужно добавить, что, какова бы ни была суммируемая эрмитова матрица-функция $P(t)$ ($0 \leq t \leq T$), все характеристические числа краевой задачи (9.4) вещественны, а если

---

†Т.е. соответствующей системы (9.1).

††Это подразделение теперь, когда $P(t) \in \mathcal{P}_n(T)$ может стать невозможным, если рассматривать мультипликаторы, отправляясь от системы (9.1), как функции параметра λ.

выполняется условие (9.12), то среди них будет бесконечно много положительных.

Заметим, что существование зоны устойчивости уравнения (0.2) с левым концом в точке $\mu = 0$ при выполнении условия (9.12) следует непосредственно из теоремы 6.4.

Коль скоро теорема 9.1 установлена в общем предположении (9.12), нетрудно методом § 7 доказать, что в этом предположении справедлив и признак Б.

Следует, однако, заметить, что результат, даваемый этим признаком, может быть во многих случаях усилен, если признак применять не непосредственно к уравнению (0.2), а к уравнению, получаемому из него по способу, указанному ниже.

Эрмитову матрицу-функцию $P(t)$ можно бесконечным числом способов представить в виде

$$P(t) = P^{+}(t) - P^{-}(t) \qquad (0 \le t < \infty), \tag{9.13}$$

где

$$P^{+}(t) \ge 0, \qquad P^{-}(t) \ge 0 \quad (0 \le t < \infty).$$

При этом, если $P(t)$ — суммируемая матрица-функция, то можно добиться того, чтобы $P^{\pm}(t)$ были таковыми. Например, это будет всегда иметь место для так называемого *ортогонального* разложения (9.13), характеризуемого условием

$$P^{+}(t)P^{-}(t) \equiv P^{-}(t)P^{+}(t) \equiv 0.$$

При замене эрмитовой матрицы-функции $P(t)$ какой-либо эрмитовой матрицей-функцией $P_1(t) \ge P(t)$ $(0 \le t \le T)$ положительные характеристические числа краевой задачи (9.4) могут только уменьшиться.

Поэтому[†], если выполнено условие (9.12), то первая зона устойчивости уравнения (0.2) не меньше первой зоны устойчивости

[†]Формулируемое предложение вытекает из соображений, приведенных выше, строго говоря, лишь для случая вещественной симметрической матрицы-функции $P(t)$. Для общего случая эрмитовой матрицы-функции $P(t)$ это предложение получается путем использования теоремы типа 5.3.

уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu P^+(t)y = 0. \tag{9.14}$$

Для случая скалярного уравнения (0.2), т.е. для случая $m = 1$, это предложение было указано нами в статье [3д].

Сочетание этого предложения (при выборе ортогонального разложения (9.13)) с теоремой 9.2 позволяет утверждать, что первая зона устойчивости уравнения (0.2) не меньше первой зоны устойчивости скалярного уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu p_M^+(t)y = 0.$$

Здесь

$$p_M^+(t) = \frac{1}{2}\big(p_M(t) + |p_M(t)|\big) \quad (0 \le t < \infty).$$

Возвращаясь к признаку Б, укажем на то, что при пользовании этим признаком следует иметь в виду такую возможность: даваемый этим признаком интервал значений μ, принадлежащих первой зоне устойчивости уравнения (9.14), может оказаться шире соответствующего интервала, даваемого этим признаком для уравнения (0.2), хотя между первыми зонами устойчивости этих уравнений имеет место всегда соотношение противоположного характера.

Так, например, указанное обстоятельство будет иметь всегда место в скалярном случае $m = 1$.

§ 10. Критические частоты системы при ее параметрическом возбуждении

1. Предположим, что движение некоторой колеблющейся системы S с m степенями свободы описывается уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P_0 y = 0, \tag{10.1}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — вектор, образованный обобщенными координатами y_j $(j = 1, \ldots, m)$ системы S, а P_0 — некоторая постоянная вещественная симметрическая матрица порядка m, которой отвечает положительная квадратная форма $(P_0 > 0)$.

Пусть $\eta^{(j)}$ $(j = 1, ..., m)$ — полная ортогональная система вещественных собственных векторов матрицы P_0, так что

$$P_0\eta^{(j)} = \omega_j^2\eta^{(j)} \qquad (j = 1, 2, ..., m),$$

где

$$\left(\eta^{(j)}, \eta^{(k)}\right) = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, ..., m) \tag{10.2}$$

и

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_n.$$

Функции

$$y_{\pm j} = e^{\pm i\omega_j t}\eta_j \qquad (j = 1, ..., m)$$

составляют полную систему $2m$ линейно независимых решений уравнения (10.1).

Введем в рассмотрение вещественную симметрическую матрицу $P_0^{1/2} > 0$, квадрат которой равен P_0. Она определяется равенством

$$P_0^{1/2}\eta^{(j)} = \omega_j\eta^{(j)} \qquad (j = 1, ..., m).$$

Тогда общее решение $y(t)$ системы (10.1) можно будет представить в следующем виде:

$$y(t) = \cos\left(tP_0^{1/2}\right)y(0) + P_0^{-1/2}\sin\left(tP_0^{1/2}\right)\dot{y}(0), \tag{10.3}$$

где

$$\cos\left(tP_0^{1/2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}P_0^n}{(2n)!},$$

$$P_0^{-1/2}\sin\left(tP_0^{1/2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}P_0^n}{(2n+1)!}.$$

Уравнение (10.1) эквивалентно системе

$$\frac{dy}{dt} = z, \qquad \frac{dz}{dt} = -P_0 y \tag{10.4}$$

и из (10.3) нетрудно заключить, что матрицантом последней будет J-ортогональная матрица-функция:

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(tP_0^{1/2}\right) & P_0^{-1/2}\sin\left(tP_0^{1/2}\right) \\ P_0^{1/2}\sin\left(tP_0^{1/2}\right) & \cos\left(tP_0^{1/2}\right) \end{pmatrix}.$$

Собственными числами матрицы $U_0(t)$ будут числа:

$$\rho_j(t) = e^{i\omega_j t} \qquad (j = 1, ..., m), \tag{10.5}$$

а также числа

$$\rho_{-j}(t) = e^{-i\omega_j t} \qquad (j = 1, ..., m). \tag{10.6}$$

Если обозначить через $\xi^{(j)}$ прямую сумму векторов $\eta^{(j)}$ с вектором $i\omega_j\eta^{(j)}$:

$$\xi^{(j)} = \eta^{(j)} + i\omega_j\eta^{(j)} \qquad (j = \pm 1, ..., \pm m;\ \ \omega_{-j} = -\omega_j),$$

то легко видеть, что

$$U_0(t)\xi^{(j)} = \rho_j(t)\xi^{(j)} \qquad (j = \pm 1, ..., \pm m).$$

В силу (10.2), кроме того, будем иметь

$$\left(J\xi^{(j)}, \xi^{(k)}\right) = 0 \quad \text{при } j \neq k \quad (j, k = \pm 1, ..., \pm m;\ J = J_{2m})$$

и

$$i\left(J\xi^{(j)}, \xi^{(j)}\right) = 2\omega_j \qquad (j = \pm 1, ..., \pm m).$$

Отсюда вытекает, что собственное число группы (10.6) (группы (10.5)) будет собственным числом первого рода (второго рода) в том и только том случае, если оно не совпадает ни с одним из чисел другой группы.

Следовательно, J-ортогональная матрица $U_0(t)$ будет устойчивого типа при тех и только тех значениях t, для которых ни одно из чисел группы (10.5) не совпадает ни с одним из чисел группы (10.6), т.е.

$$t(\omega_j + \omega_k) \not\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2\pi) \qquad (j, k = 1, ..., m). \tag{10.7}$$

2. Представим себе теперь, что система S параметрически возбуждается, точнее, что мы заставляем изменяться по какому-либо периодическому закону с периодом $T = 2\pi/\omega$ некоторые ее параметры (размеры, массы, моменты инерции вращающихся частей, емкости конденсаторов, самоиндукции контуров и т.д.). Предположим, кроме того, что сам характер возбуждения непрерывно зависит от некоторого малого скаляра $\varepsilon > 0$ так, что при $\varepsilon \to 0$ амплитуды изменения параметров системы стремятся к нулю (но период T не зависит от ε).

В этом случае будем говорить, что имеет место *ε-параметрическое возбуждение* системы S.

Движение системы S при ее ε-параметрическом возбуждении (в линеаризованной постановке) описывается обычно дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(\omega t; \varepsilon)y = 0, \tag{10.8}$$

где $P(t;\varepsilon)$ — непрерывная симметрическая матрица-функция аргументов t, ε $(-\infty < t < \infty,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0)$, причем

$$P(t + 2\pi; \varepsilon) = P(t; \varepsilon) \quad (-\infty < t < \infty,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0) \tag{10.9}$$

и

$$P(t; 0) = P_0. \tag{10.10}$$

Для дальнейшего нам достаточно предположить, что $P(t;\varepsilon)$ по t — суммируемая матрица-функция в интервале $(0, 2\pi)$ при любом ε $(0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0)$, а по ε она непрерывна в среднем в точке $\varepsilon = 0$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} |P_0 - P(t,\varepsilon)|\, dt = 0. \tag{10.11}$$

Введем следующее определение.

Частоту ω будем называть ***критической*** для данного ε-параметрического возбуждения системы[†] S, если нельзя указать

[†] Т.е. данной функции $P(t;\varepsilon)$.

такое $\varepsilon_\omega > 0$, что движение системы S будет устойчивым при $0 < \varepsilon < \varepsilon_\omega$, т.е. что все решения уравнения (10.8) будут ограниченными при $0 < \varepsilon < \varepsilon_\omega$.

Теорема 10.1. *Независимо от характера ε-параметрического возбуждения системы*[†] *S с собственными частотами ω_j ($t = 1,...,m$) ее критическими частотами могут быть лишь числа*

$$\omega_{j,k,N} = \frac{\omega_j + \omega_k}{N} \qquad (1 \le j \le k \le m, \quad N = 1, 2, ...).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $U_{\omega,\varepsilon}$ матрицу монодромии системы

$$\frac{dy}{dt} = z, \qquad \frac{dz}{dt} = -P(\omega t;\varepsilon)y\,,$$

эквивалентной уравнению (10.8). В силу (10.11)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T |P_0 - P(\omega t;\varepsilon)|\,dt = 0 \quad \left(T = \frac{2\pi}{\omega}\right),$$

а поэтому по лемме 5.1 при $\varepsilon \to 0$ матрица $U_{\omega,\varepsilon}$ стремится к матрице монодромии системы (10.4), если последнюю рассматривать как периодическую с периодом T. Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} U_{\omega,\varepsilon} = U_0\left(\frac{2\pi}{\omega}\right).$$

Если $\omega > 0$ не совпадает ни с одним из чисел $\omega_{j,k,N}$, то значение $t = T$ удовлетворяет условию (10.7), т.е.

$$\frac{2\pi}{\omega}(\omega_j + \omega_k) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\,,$$

и по доказанному выше J-ортогональная матрица $U_0(2\pi/\omega)$ будет устойчивого типа. По теореме 1.2 тогда найдется такое $\varepsilon_\omega > 0$,

[†] Т.е. независимо от выбора матрицы-функции $P(t;\varepsilon)$, удовлетворяющей условиям (10.9), (10.10) и (10.11).

что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_\omega$ матрица $U_{\omega,\varepsilon}$ также будет устойчивого типа, а следовательно, все решения уравнения (10.8) будут ограничены.

Теорема доказана.

Заметим еще, что теорему 10.1 можно дополнить утверждением, что каждое из чисел $\omega_{j,k,N}$ действительно становится критической частотой ω системы при соответствующем ε-параметрическом возбуждении системы S, т.е. при соответствующем выборе матрицы-функции $P(t;\varepsilon)$.

Уравнение движения механической системы S с m степенями свободы будет иметь вид (10.1), если в обобщенных координатах y_j $(j = 1, 2, ..., m)$ ее кинетическая энергия T и потенциальная Π имеют соответственно вид:

$$T = \frac{1}{2}\sum_j \left(\frac{dy_j}{dt}\right)^2, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} p_{jk}y_jy_k \quad \left(P_0 = \|p_{jk}\|_1^m\right).$$

К такому виду всегда можно привести T и Π за счет обобщенных координат y_j $(j = 1, ..., m)$ в виде соответствующих линейных функций первоначальных координат q_j $(j = 1, ..., m)$, если в последних координатах T и Π выражаются в виде положительных квадратичных форм:

$$T = \frac{1}{2}\sum a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2}\sum c_{jk}q_jq_k \quad \left(\dot{q} = \frac{dq_j}{dt}\right).$$

Таким образом, теорема 10.1 применима к любой механической системе с такого рода кинетической и потенциальной энергиями, т.е. практически к случаю ε-параметрического возбуждения любой механической системы с конечным числом степеней свободы, совершающей малые колебания вокруг положения устойчивого равновесия.

Для систем S с одной степенью свободы и, следовательно, с одной собственной частотой ω_1 эта теорема была известна, хотя, может быть, так точно нигде не формулировалась. В этом частном случае возможные значения критических частот образуют простую последовательность

$$\omega_N = \frac{2\omega_1}{N} \qquad (N = 1, 2, ...),$$

начинающуюся с удвоенной частоты невозбужденной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А.М.*

   а) Общая задача об устойчивости движения: 2-е изд. — М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1935.

   б) Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Сообщ. Харьк. мат. об-ва. Сер.2. — 1896. — T.V, №3. — С.190–254.

   в) Sur une èquation diférentielle lineaire du second ordre // C.R. — 1899. — V.CXXVIII, N 15. — P.910–913.

   г) Sur une èquation transcendante et les equations differentielles lineaires du second ordre á coefficients periodiques // Ibid. — N 18. — P.1085–1088.

   д) Sur une serie dans la theorie des èquations differentielles lineaires du second ordre á coefficients periodiques // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд. Сер.8. — 1902. — T.XIII, №2. — С.1–70.

2. *Жуковский Н.Е.* Условие конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$ // Собр. соч. — 1948. — T.1. — С.246–253.

3. *Крейн М.Г.*

   а) Обобщение некоторых исследований А.М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1950. — T.XXIII, №3. — С.445–448.

   б) Об одном применении теоремы о неподвижной точке в теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Успехи мат. наук. — 1950. — Т.5, №2. — С.180–199.

   в) К теории целых матриц-функций экспоненциального типа // Укр. мат. журн. — 1951. — Т.3, №2. — С.163–173.

   г) О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии // Успехи мат. наук. — 1951. — Т.6, №1. — С.171–177.

   д) О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // Прикл. мат. и мех. — 1951. — Т.15, вып. 3. — С.323–348.

   е) О нагруженных интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны // Сб. памяти акад. Д.А. Граве. — М.: ГТТИ, 1940. — С.88–103.

   ж) Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами // Сб. трудов Ин-та математики АН УССР. — 1947. — Вып.9. — С.104–129.

4. *Нейгауз М.Г., Лидский В.Б.* Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1951. — Т.XXVI, №2. — С.189–192.
5. *Якубович В.А.*
   а) Об ограниченности решений уравнения $y'' + p(t)y = 0$, $p(t+\omega) = p(t)$ // ДАН СССР. — 1950. — Т.XXIV, №5. — С.901–903.
   б) Критерии устойчивости для системы двух уравнений канонического вида с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1951. — Т.XXVIII, №2. — С.221–224.
   в) Вопросы устойчивости системы двух линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. — Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — Ленингр. ун-т, 1953.
6. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений: 2-е изд. — М.: Гостехиздат, 1949.
7. *Чеботарев Н.Г., Мейман И.Н.* Проблема Рауса–Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1949. — Т.XXVI. — С.1–331.
8. *Карасева Т.М.* О разложениях произвольных функций в ряды по собственным функциям краевой задачи // Зап. Харьк. мат. об-ва. — 1949. — Т.XXI. — С.59–75.
9. *Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем: 2-е изд. — М.: ГТТИ, 1950. — 359 с.
10. *Макаров С.М.* Исследование характеристического уравнения линейной системы двух уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами // Прикл. мат. и мех. — 1951. — Т.15, вып. 3. — С.373–378.
11. *Левин Б.Я.* Теория роста целых функций. — М.: ГТТИ.
12. *Коваленко К.Р., Крейн М.Г.* О некоторых исследованиях А.М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами // ДАН СССР. — 1950. — Т.XXV, №4. — С.495–498.
13. *Чаплыгин С.А.* Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений // Собр. соч. — М.: Гостехиздат, 1948. — Т.1. — 347 с.
14. *Калафати П.Д.* Об одной асимптотической формуле // Науч. зап. Николаев. гос. пед. ин-та им. В.Г. Белинского. — Киев: Рад. шк., 1951. — Т.3. — С.92–94.
15. *Кочин Н.Е.* О крутильных колебаниях коленчатых валов // Собр. соч. — М.: Изд-во АН СССР, 1949. — Т.2. — С.507–535.
16. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. — М.: ОГИЗ, 1948. — 423 с.
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: ГТТИ, 1953.

ОБ УСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЕ ЧАСТНЫХ ИНДЕКСОВ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(совместно с И.Ц. Гохбергом)

(Доклады АН СССР. — 1958. — Том 119, № 5)

1. Пусть Г — контур, состоящий из конечного числа простых гладких замкнутых направленных кривых с непрерывной кривизной, ограничивающих слева на комплексной плоскости связную конечную область D_+. Ее дополнение обозначается через D_-. Через H будем обозначать множество всех функций, определенных на Г и удовлетворяющих условию Гельдера. Через $H_{(n\times 1)}$ (соответственно $H_{(n\times n)}$) будем обозначать множество всех n-мерных вектор-функций ($n \times n$-матрицы функций) с координатами (элементами) из H. Линейное множество $H_{(n\times n)}$ мы будем рассматривать как неполное линейное нормированное пространство с определением нормы

$$||A|| = n \max |a_{jk}(t)| \quad (A(t) = ||a_{jk}(t)||_1^n \in H_{(n\times n)}),$$

где максимум берется по всем $t \in \Gamma$ и $j, k = 1, 2, ..., n$.

Пусть $A(t) \in H_{(n\times n)}$ — некоторая неособенная матрица-функция, а $\varkappa_1(A) \geq \varkappa_2(A) \geq \cdots \geq \varkappa_n(A)$ — частные индексы соответствующей задачи Гильберта [1, 2]

$$\Phi_+(t) = A(t)\Phi_-(t). \tag{1}$$

Систему частных индексов $\varkappa_j(A)$ ($j = 1, 2, ..., n$) будем называть ***устойчивой***, если матрице $A(t) \in H_{(n\times n)}$ можно сопоставить такое $\delta > 0$, что у всякой матрицы $B(t) \in H_{(n\times n)}$ из δ-окрестности матрицы $A(t)$: $||B - A|| < \delta$ будут те же индексы, что и у $A(t)$: $\varkappa_j(B) = \varkappa_j(A)$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Это определение оправдывается следующей теоремой.

Теорема 1.† *Пусть неособенная матрица* $A(t) \in H_{(n\times n)}$ $\varkappa = \varkappa(A) = \frac{1}{2\pi}$ $[\arg\det A(t)]_\Gamma$. *Система частных индексов матрицы* $A(t)$ *устойчива в том и только в том случае, когда*

$$\varkappa_1(A) = \cdots = \varkappa_r(A) = q+1; \quad \varkappa_{r+1}(A) = \cdots = \varkappa_n(A) = q, \quad (2)$$

где целые числа q, r *определяются из соотношения* $\varkappa = qn + r$, $0 \leq r < n$.

Необходимость сформулированного предложения легко доказывается повторением рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 10.2 статьи авторов [3].

Из тех же рассуждений вытекает, между прочим, что в любой окрестности произвольной неособенной матрицы-функции $A(t) \in H_{(n\times n)}$ всегда найдутся матрицы $B(t)\,(\in H_{(n\times n)})$ с устойчивой системой индексов.

Достаточность условия теоремы 1 непосредственно вытекает из следующих более общих предложений.

2. **Теорема 2.** *Пусть неособенная матрица-функция* $A(t) \in H_{(n\times n)}$. *Тогда найдется такое число* $\delta(>0)$, *что любая матрица-функция* $B(t)\,(\in H_{(n\times n)})$ *из* δ*-окрестности* $A: ||B - A|| < \delta$ *будет неособенной и при всяком целом* p *будут выполняться неравенства*

$$\sum_{\varkappa_j(A)>p} (\varkappa_j(A) - p) \leq \sum_{\varkappa_j(B)>p} (\varkappa_j(B) - p). \quad (3)$$

Доказательству теоремы предпошлем некоторые замечания.

Естественным образом на контуре Γ определяется гильбертово пространство $L^{(2)}_{(n\times 1)}$ n-мерных вектор-функций, координаты

† После того как настоящая заметка была представлена, авторы узнали о работе Г.Ф.Манджавидзе [7], в которой докладывается устойчивость системы частных индексов при любой ее арифметической структуре; этот результат работы [7] ошибочен.

которых имеют суммируемый квадрат на Г. Для любого $\varphi \in$ $\in L^{(2)}_{(n\times 1)}$ имеет смысл сингулярный интеграл

$$S_\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau, \tag{4}$$

задающий некоторый линейный ограниченный оператор S в пространстве $L^{(2)}_{(n\times 1)}$ [4].

Всякое обращающееся в нуль на бесконечности решение задачи Гильберта (1) порождает решение $\varphi(t) = \Phi_+(t) - \Phi_-(t) \in$ $\in H_{(n\times 1)}$ однородного сингулярного интегрального уравнения

$$(I + A(t))\varphi(t) + (I + A(t))\, S\varphi(t) = 0, \tag{5}$$

при этом

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt. \tag{6}$$

Обратно, всякому решению $\varphi \in H_{(n\times 1)}$ уравнения (5) по формуле (6) соответствует решение задачи Гильберта (1), обращающееся в нуль на бесконечности.

Без особого труда доказывается, что если неособенная матрица-функция $A(t) \in H_{(n\times n)}$, то все решения уравнения (5) принадлежат множеству $H_{(n\times 1)}$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через U оператор, стоящий в левой части равенства (5). Заметим, что размерность $\alpha(u)$ подпространства $\mathfrak{Z}(u)$ всех нулей оператора U равна всегда сумме положительных индексов $\varkappa_j(A)$ задачи Гильберта (1), что легко следует из общего вида решений этой задачи ([1], § 127). Сумма абсолютных величин всех отрицательных индексов задачи (1) дает размерность ортогонального дополнения к множеству значений оператора U.

Положим $A_1(t) = (t - c)^{-p}A(t)$, где c — внутренняя точка из D_+ и p — некоторое целое число, удовлетворяющее неравенствам

$$\varkappa_n(A) \le p \le \varkappa_1(A). \tag{7}$$

Очевидно, $\varkappa_j(A_1) = \varkappa_j(A) - p \quad (j = 1, 2, ..., n)$.

Введем в рассмотрение действующий в $L^{(2)}_{(n\times 1)}$ оператор U_1:

$$U_1\varphi = (I + A_1(t))\,\varphi(t) + (I - A_1(t))\,S\varphi(t).$$

Тогда

$$\alpha(U_1) = \sum_{\varkappa_j(A)>p} (\varkappa_j(A) - p), \quad \beta(U_1) = -\sum_{\varkappa_j(A)<p} (\varkappa_j(A) - p)\,.$$

В силу общей теоремы из [5] (см. также теоремы 2.4 в [6]) найдется такое число $\rho_p > 0$, что для любого линейного оператора V_1, действующего в $L^{(2)}_{(n\times 1)}$ и такого, что

$$||U_1 - V_1|| < \rho_p, \tag{8}$$

будем иметь

$$\alpha(V_1) \leq \alpha(U_1). \tag{9}$$

Обозначим через $\delta(> 0)$ число, меньшее всех величин

$$\rho_p(1 + ||S||)^{-1} \min_{t\in\Gamma} |t - c|^p$$

и такое, что любая матрица-функция из δ-окрестности $A(t)$ будет неособенной. Покажем, что это δ удовлетворяет требованиям теоремы.

Пусть для $B(t) \in H_{(n\times n)}$ выполняется условие $||A - B|| < \delta$. Тогда для любого целого p из интервала (7) матрица-функция $B_1(t) = (t - c)^{-p}B(t)$ будет неособенной и для нее будет:

$$||A_1 - B_1|| < \rho_p\,(1 + ||S||)^{-1} \quad (\varkappa_n(A) \leq p \leq \varkappa_1(A)).$$

Рассмотрим оператор V_1, действующий в пространстве $L^{(2)}_{(n\times 1)}$ согласно равенству $V_1\varphi = (I + B_1(t))\,\varphi(t) + (I - B_1(t))\,S\varphi(t)$.

Так как $||U_1 - V_1|| < ||A_1 - B_1||\,(1 + ||S||)$, то оператор V_1 удовлетворяет условию (8). Стало быть, для оператора V_1 выполняются соотношения (9), эквивалентные соотношениям (3). Таким образом, неравенства (3) будут иметь место для всех целых чисел p

из интервала (7). В частности, при $p = \varkappa_1(A)$ и $p = \varkappa_n(A)$ эти неравенства дают

$$\varkappa_1(A) \geq \varkappa_1(B), \quad \varkappa_n(A) \leq \varkappa_n(B). \tag{10}$$

Так как δ-окрестность матрицы-функции $A(t)$ состоит из неособенных матриц-функций, то для любой матрицы-функции $B(t)$ из этой окрестности $\varkappa(B) = \varkappa(A)$ и, следовательно:

$$\sum_1^n \varkappa_j(B) = \sum_1^n \varkappa_j(A). \tag{11}$$

Отсюда и из (10) следует, что при любом целом p, лежащем вне интервала $(\varkappa_n(A), \varkappa_1(A))$, в соотношении (3) будет иметь место знак равенства.

Теорема доказана.

3. Обозначим через $\mathfrak{S}_n$ совокупность всевозможных упорядоченных систем $\{\varkappa_j\}_1^n$ целых чисел $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \cdots \geq \varkappa_n$. Пусть $\{\varkappa_j\}_1^n$ и $\{\varkappa_j{}'\}_1^n$ — две системы из $\mathfrak{S}_n$; условимся говорить, что вторая система получается из первой при помощи элементарной операции, если при некоторых целых p и q $(1 \leq p < q \leq n)$:

$$\varkappa_p' = \varkappa_p - 1, \quad \varkappa_q{}' = \varkappa_q + 1, \quad \varkappa_j{}' = \varkappa_j \ \text{ при } \ j \neq p, q.$$

Условимся далее писать $\{\varkappa_j\}_1^n \succ \{\varkappa_j{}'\}_1^n$, если система $\{\varkappa_j{}'\}$ либо совпадает с системой $\{\varkappa_j\}$, либо получается из нее путем последовательного применения ряда элементарных операций. Если система $\{\varkappa_j\}_1^n \in \mathfrak{S}_n$, то ее усреднением назовем систему $\{\widehat{\varkappa}_j\}_1^n$, определяемую равенствами

$$\widehat{\varkappa}_1 = \widehat{\varkappa}_2 = \cdots = \widehat{\varkappa}_r = q + 1, \quad \widehat{\varkappa}_{r+1} = \widehat{\varkappa}_{r+2} = \cdots = \widehat{\varkappa}_n = q,$$

где целые числа q и r определяются из соотношений

$$\sum_1^n \varkappa_j = qn + r, \quad 0 \leq r < n.$$

Легко видеть, что всегда

$$\sum_{1}^{n} \varkappa_j = \sum_{1}^{n} \widehat{\varkappa}_j, \quad \{\varkappa_j\}_1^n \succ \{\widehat{\varkappa}_j\}_1^n.$$

Можно показать, что при выполнении равенства (11) совокупность всех соотношений (3) эквивалентна тому, что

$$\{\varkappa_j(A)\}_1^n \succ \{\varkappa_j(B)\}_1^n \quad (\succ \{\widehat{\varkappa}_j(A)\}_1^n).$$

Оказывается, что, как бы ни была выбрана система чисел $\{\varkappa_j{}'\}_1^n$, удовлетворяющая условию

$$\{\varkappa_j(A)\}_1^n \succ \{\varkappa_j{}'\}_1^n,$$

в любой δ-окрестности неособенной матрицы-функции $A(t) \in \in H_{(n\times n)}$ найдется неособенная матрица-функция $B(t) \in H_{(n\times n)}$ такая, что

$$\varkappa_j(B) = \varkappa_j{}' \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.-Л., 1946.
2. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. — М.-Л., 1950.
3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* // Успехи мат. наук. — 1958. — Т.13, вып.2.
4. *Михлин С.Г.*// Успехи мат. наук. — 1948. — Т.3, вып.3.
5. *Крейн М.Г., Красносельский М.А.* // Мат. сб. — 1952. — Т.30(72), №1.
6. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* // Успехи мат. наук. — 1957. — Т.12, вып.2.
7. *Манджавидзе Г.Ф.* // Сообщ. АН ГрузССР. — 1953. — Т.14, №10.

О НАГРУЖЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОТОРЫХ НЕ МОНОТОННЫ

(Сборник памяти акад. Д.А. Граве. — М.: ГИТТЛ, 1940)

Введение. В дальнейшем мы будем рассматривать только ядра $K(x,s)[a \le x, s \le b]$, удовлетворяющие следующим двум условиям:

A) Ядро ограничено: $|K(x,s)| < M$ $[a \le x, s \le b]$.

B) Если фиксировать каким-либо образом значение одной из переменных x или s, то ядро будет непрерывно в интервале $a, b)$ относительно другой переменной.

Можно легко показать, что при этих условиях — для любых функций $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ $(a \le x \le b)$ с ограниченным изменением — интегралы

$$\int\limits_a^b K(x,s)\,d\sigma(s) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b K(x,s)\,d\tau(x)$$

будут непрерывными функциями x, соответственно s в интервале (a,b) и, кроме того,

$$\int\limits_a^b d\tau(x) \int\limits_a^b K(x,s)d\sigma(s) = \int\limits_a^b d\sigma(s) \int\limits_a^b K(x,s)d\tau(x).$$

Мы обозначим общую величину этих двух интегралов через

$$\int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\,d\sigma(s)d\tau(x).$$

Целью этой статьи является детальное изучение, при допущении некоторых дополнительных предположений относительно ядра $K(x,s)$, "нагруженного" интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,d\sigma(s) = f(x), \tag{1}$$

где функция распределения $\sigma(x)$ является произвольной функцией с ограниченным изменением.

Известно, что если ядро $K(x,s)$ непрерывно в квадрате $[a \leq \leq x, s \leq b]$, то для уравнения (1) можно воспроизвести всю классическую теорию Фредгольма, заменяя во всех формулах этой теории, где фигурируют обыкновенные интегралы с дифференциалами dx, ds, dr и т. д., эти интегралы на интегралы Стилтьеса с соответствующими дифференциалами $d\sigma(x)$, $d\sigma(s)$, $d\sigma(r)$ и т.д.[1] Основные результаты теории Фредгольма остаются верными для уравнения (1) также и в случае, когда ядро $K(x,s)$ удовлетворяет условиям A) и B), так как в этом случае интегрированное ядро

$$K^{(2)}(x,s) = \int_a^b K(x,r)\,K(r,s)\,d\sigma(r)$$

непрерывно в квадрате $[a \leq x, s \leq b]$.

С другой стороны, теория Гильберта–Шмидта вообще не верна для уравнения (1) с симметрическим ядром $K(x,s)$. Для сохранения этой теории нужно предположить функцию распределения $\sigma(x)$ существенно возрастающей (или убывающей), так как только в этом случае интеграл $\int_a^b \varphi^2(x)d\sigma(x)$ не обращается в нуль

[1]Уравнение (1) является очень частным случаем уравнений, изученных Радоном (*Radon J.* Uber lineare Funktional transformationen... // Stzsb. Akad. Wiss. Wien, Abt. 11a. — 1919. — Т.128. — С.1083–1121; рус. пер.: Успехи мат. наук. — Вып.1. — С.200–227) и Гюнтером (*Gunter N.* Sur les intégrales de Stiltjes et leurs applications aux problemes de la physique mathématique // Труды Физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1932. — Т.1.), на которые эти авторы распространили теорию Фредгольма.

ни для какой непрерывной функции $\varphi(x) \not\equiv 0$ и все процессы ортогонализации, играющие столь важную роль в теории Гильберта–Шмидта, сохраняются[2].

Задачей этой работы является доказательство того, что для уравнения (1), в котором $\sigma(x)$ произвольно, возможно построить теорию, в известном смысле аналогичную теории Гильберта–Шмидта, если предположить ядро $K(x,s)$ положительным в смысле Мерсера.

Наше исследование уравнения (1) значительно упрощается использованием теоремы Громмера, которую можно сформулировать так:

Теорема Громмера[3]. *Для того чтобы мероморфная функция $F(z) \not\equiv \mathrm{const}$, обладающая в окрестности точки $z = 0$ разложением*

$$F(z) = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \cdots,$$

имела только вещественные полюсы α_i $(i = 1, 2, \dots)$ и допускала во всех точках регулярности разложение

$$F(z) = m_0 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{m_i}{\alpha_i - z} \quad (\omega \le \infty),$$

где $m_0 \ge 0$ и $\operatorname{sgn} m_i = \operatorname{sgn} \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots)$, необходимо и достаточно, чтобы квадратичные формы

$$\sum_{i,k=0}^{n} s_{i+k} \xi_i \xi_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

были все неотрицательными.

---

[2]Можно, впрочем, рассматривать теорию Гильберта–Шмидта как справедливую также и для случая монотонной функции $\sigma(x)$, если условиться не делать различия между двумя непрерывными функциями, отличными друг от друга только в интервалах постоянства функции $\sigma(x)$. Нагруженное интегральное уравнение с симметрическим ядром и с существенно возрастающей $\sigma(x)$ рассматривалось впервые (для одного частного случая) Кнезером (*Kneser A.* Belastete Integralgleichungen // Rendiconti Circ. Mat. di Palermo. — 1914. — V.37. — P.169–197).

[3]*Grommer J.* Ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen // Journ. für die reine und angev. Math. — 1914. — N 144. — S.114–166.

Можно было бы избежать в наших исследованиях использования теоремы Громмера, но мы этого делать не хотим, так как рассматриваем эту теорему как инструмент, употребление которого весьма естественно в известных вопросах теории линейных операторов. Заметим кстати, что теорема Громмера может быть также очень полезна в теории симметризуемых ядер, равно как и в обычной теории интегральных уравнений с симметрическим ядром.

Наиболее трудной частью наших исследований является та, в которой устанавливается, при известных условиях относительно $K(x,s)$, равенство между числом положительных характеристических чисел уравнения (1) и числом точек роста положительного изменения $P(x)$ функции $\sigma(x)$ (см. теорему 4). Мы пользуемся следующим предложением:

Обобщенная теорема Ф. Рисса. *Пусть E — замкнутое множество точек в интервале (a,b) и $\{\varphi_i(x)\}$ — последовательность функций, непрерывных в (a,b). Для того, чтобы для всякой непрерывной функции $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ и всякого $\varepsilon > 0$ существовала линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x)$ такая, что*

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x) \right| < \varepsilon \quad \text{\textit{при}} \quad x \in E,$$

необходимо и достаточно, чтобы всякая функция $\tau(x)$ $(a \leq x \leq$ $\leq b)$ с ограниченным изменением, удовлетворяющая условиям:

$$1)\ \tau(x) = \frac{1}{2}[\tau(x+0) + \tau(x-0)] \quad \text{\textit{при}} \quad a < x < b,$$

$$2)\ \int_a^b \varphi_i(x)\, d\tau(x) = 0 \quad \text{\textit{при всех}} \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

3) *все точки изменения $\tau(x)$ принадлежат к E,*

сводилась к постоянной.

Ф. Рисс установил[4] это предложение для частного случая $E = (a, b)$, в котором, следовательно, условие 3) всегда выполнено. Но можно тем же способом доказать справедливость этого предложения в общем случае[5]. Заметим еще, что интегральное уравнение (1) с симметрическим положительным ядром $K(x,s)$ является сопряженным с полярным интегральным уравнением

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b A(x)K(x,s)\psi(s)\,ds = f(x), \tag{2}$$

если $\sigma(x) = \int_a^x A(x)dx$. Можно поэтому рассматривать наши исследования как содержащие некоторые дополнения к исследованиям Гильберта[6], Марти[7], Гарбе[8] и Мерсера[9].

Заметим, наконец, что конечные результаты этих исследований уже опубликованы в заметке, помещенной в Докладах Парижской академии[10].

1. Пусть $K(x,s)[a \le x, s \le b]$ — симметрическое вещественное ядро, удовлетворяющее условиям А) и В), приведенным во введении. Такое ядро называется положительным, если для каждой функции $\tau(x)$ $(a \le x \le b)$ с ограниченным изменением имеет

---

[4] *Riesz F.* Sur certains systémes singuliers d'equations integrales // Ann. Ec. Norm. Sup. — 1911. — V.28. — P.33–62.

[5] Доказательство этой теоремы можно упростить, употребляя современные методы, изложенные в книге: *Banach S.* Théorie des opérations linéares. — Warszawa, 1932. — C.58–59.

[6] *Hilbert D.* Grundzüge einer allgemeine Theorie der linearen Integralgleichungen // Nachr. Akad. Wiss. Götting. — 1906. — V.4. — P.195–204.

[7] *Marty J.* Sur une equation integrale // C.R. Acad. Sci. — 1910. — N 150. — P.515–518; Développments suivant certaines solutions singuliéres // Ibid. — P.603–606.

[8] *Garbe E.* Zur Theorie der Integralgleichungen dritter Art. Math. Ann. — 1915. — V.76. — P.527–547.

[9] *Mercer J.* Symmetrisable functions and their expansion in terms of biortogonal functions // London Roy. Soc. Proc. A. — 1920. — V.97. — P.401–403.

[10] *Krein M.* Sur les équations intégrales chargées // C.R. Acad. Sci. — 1935. — V.201. — P.24–26. В этой заметке предполагается, что ядро $K(x,s)$ непрерывно в квадрате $[a \le x, s \le b]$, но, как мы покажем далее, достаточно предположить, что $K(x,s)$ удовлетворяет условиям А) и В).

место неравенство

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\,d\tau(x)d\tau(s) \geq 0. \tag{3}$$

Заметим еще, что при положительном ядре $K(x,s)$ равенство

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\,d\tau_0(x)d\tau_0(s) = 0 \tag{4}$$

для какой-либо функции $\tau = \tau_0$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b K(x,s)\,d\tau_0(s) \equiv 0 \qquad (a \leq x \leq b). \tag{5}$$

Действительно, полагая в (3) $\tau(x) = \tau_0(x) + \alpha\xi_t(x)$, где

$$\xi_t(x) = \begin{cases} 0 & (a \leq x < t), \\ 1 & (t \leq x \leq b), \end{cases}$$

получаем в силу (4)

$$2\alpha \int_a^b K(t,s)\,d\tau_0(s) + \alpha^2 K(t,t) \geq 0.$$

Так как это неравенство имеет место для всякого вещественного α, то отсюда заключаем, что

$$\int_a^b K(t,s)\,d\tau_0(s) \equiv 0 \qquad (a \leq t \leq b).$$

Итак, из (4) следует (5); обратное очевидно.

После этого предварительного замечания перейдем к изучению нагруженного интегрального уравнения

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,d\sigma(s) = 0, \tag{6}$$

где $K(x,s)$ — вещественное симметрическое положительное ядро и $\sigma(x)$ — какая-либо определенная функция с ограниченным изменением. Прежде всего, допуская, что это уравнение обладает фундаментальными функциями и, следовательно, характеристическими числами, сформулируем несколько простых предложений:

1°. *Каждые две фундаментальные функции $\varphi_\nu(x)$ и $\varphi_\mu(x)$, соответствующие двум различным характеристическим числам $\lambda_\nu \neq \lambda_\mu$, ортогональны, т.е.*

$$\int_a^b \varphi_\nu(x)\varphi_\mu(x)\,d\sigma(x) = 0.$$

Доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичного предложения в теории обыкновенных уравнений с симметрическим ядром.

2°. *Все характеристические числа рассматриваемого уравнения вещественны.*

В самом деле, пусть λ_0 есть характеристическое число и $\varphi_0(x)$ — соответствующая фундаментальная функция. Если λ_0 комплексно, то сопряженная величина $\overline{\lambda}_0 \neq \lambda_0$ является также характеристическим числом с фундаментальной функцией $\overline{\varphi}_0(x)$. Но тогда фундаментальные функции $\varphi_0(x) = \psi(x) + i\chi(x)$ и $\overline{\varphi}_0(x) = = \psi(x) - i\chi(x)$ ортогональны и потому

$$\lambda_0 \int_a^b \varphi_0(x)\overline{\varphi}_0(x)d\sigma(x) = \int_a^b\int_a^b K(x,s)\varphi_0(x)\bar{\varphi}_0(s)\,d\sigma(x)d\sigma(s) =$$

$$= \int_a^b \int_a^b K(x,s)\psi(x)\psi(s)\, d\sigma(x) d\sigma(s) +$$

$$+ \int_a^b \int_a^b K(x,s)\chi(x)\chi(s)\, d\sigma(x) d\sigma(s) = 0.$$

Так как ядро $K(x,s)$ положительно, то отсюда заключаем, что

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\psi(x)\psi(s)\, d\sigma(x) d\sigma(s) = \int_a^b \int_a^b K(x,s)\chi(x)\chi(s)\, ds = 0.$$

Но это, на основании сделанного выше замечания об эквивалентности равенств (4) и (5), дает

$$\int_a^b K(x,s)\psi(s) d\sigma(s) = \int_a^b K(x,s)\chi(s) d\sigma(s) \equiv 0$$

и, следовательно,

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)\, d\sigma(s) \equiv 0,$$

что невозможно.

Из вещественности характеристических чисел уравнения (6) следует, что всякая фундаментальная функция $\varphi_0(x)$ раскладывается на две вещественные фундаментальные функции $\psi = \frac{1}{2}(\varphi_0 + +\overline{\varphi}_0)$ и $\chi = \frac{1}{2}(\varphi_0 - \overline{\varphi}_0)$. Мы ограничимся поэтому в дальнейшем изучением вещественных фундаментальных функций.

3°. *Конечномерное*[11] *линейное многообразие E_0 всех фундаментальных функций, соответствующих одному и тому же характеристическому числу λ_0, содержит ортогональный базис*

[11] Конечномерность многообразия E_0 вытекает из отмеченного ранее обстоятельства, что для исследуемого интегрального уравнения сохраняет силу теория Фредгольма.

$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$[12] *в том смысле, что*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\lambda_0 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \qquad (i, k = 1, \ldots, m).$$

В самом деле, положим для двух каких-либо функций $\varphi \subset \subset E_0$ и $\psi \subset E_0$

$$[\varphi, \psi] = \operatorname{sgn}\lambda_0 \int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,d\sigma(x).$$

"Произведение" $[\varphi, \psi]$ обладает в E_0 всеми свойствами обыкновенного скалярного произведения: оно билинейно, симметрично и

$$[\varphi, \varphi] = \frac{1}{|\lambda_0|} \int_a^b \int_a^b K(x, s)\varphi(x)\varphi(s)\,d\sigma(x)d\sigma(s) > 0,$$

если $\varphi \subset E_0$ и $\varphi \not\equiv 0$. Следовательно, в метризованном таким образом E_0 существует базис $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, для которого

$$[\varphi_i, \varphi_k] = \begin{cases} 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$$

что и доказывает предложение 3°.

Строя для каждого характеристического числа соответствующий ортогональный базис и располагая функции этих базисов в последовательность (конечную или бесконечную), приходим в силу 1° к следующему заключению.

4°. ***Из фундаментальных функций уравнения (6) можно образовать последовательность*** $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, ***ортонормальную в том смысле, что***

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\lambda_i & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

[12]Так что m является числом измерений многообразия E_0.

где λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — *характеристические числа, соответствующие фундаментальным функциям* φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, *и полную в том смысле, что всякая фундаментальная функция уравнения (6) есть линейная комбинация конечного числа функций этой последовательности.*

Пусть λ_0 — какое-либо из характеристических чисел уравнения (6). Положим

$$K_0(x, s) = K(x, s) - \sum_{\lambda_i = \lambda_0} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \operatorname{sgn} \lambda_0, \tag{8}$$

где суммирование распространяется на значения i, для которых $\lambda_i = \lambda_0$. Здесь, как и в дальнейшем, мы обозначим через $\{\varphi_i\}$ полную ортонормальную последовательность фундаментальных функций уравнения (6) и через $\{\lambda_i\}$ — последовательность соответствующих характеристических чисел.

5°. *Полную ортонормальную последовательность фундаментальных функций уравнения*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_0(x, s)\varphi(s)\, d\sigma(s) = 0 \tag{9}$$

можно получить, выкидывая из последовательности $\{\varphi_i\}$ *фундаментальные функции, соответствующие* λ_0; *соответствующую последовательность характеристических чисел получим, удаляя из последовательности* $\{\lambda_i\}$ *члены, равные* λ_0.

В самом деле, в силу 1° или (7) имеем

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K_0(x, s)\varphi_i(s)\, d\sigma(s) \quad \text{для} \quad \lambda_i \neq \lambda_0.$$

С другой стороны, если $\psi(x)$ есть фундаментальная функция уравнения (9), то

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K_0(x, s)\psi(s)\, d\sigma(s), \tag{10}$$

а потому, так как

$$\int_a^b K_0(x,s)\varphi_i(x)\,d\sigma(x) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_i = \lambda_0\,, \tag{11}$$

получаем

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_i(x)\,d\sigma(x) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda_i = \lambda_0. \tag{12}$$

Но тогда из (8) и (10) находим, что

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K(x,s)\psi(s)\,d\sigma(s).$$

Следовательно, $\psi(x)$ есть фундаментальная функция уравнения (6); в силу (12) $\mu \neq \lambda_0$ и $\psi(x)$ есть линейная комбинация конечного числа фундаментальных функций φ_i, для которых $\lambda_i = \mu \neq \lambda_0$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $\Gamma(x,s;\lambda)$ резольвенту уравнения (6); в окрестности точки $\lambda = 0$ будем иметь

$$\Gamma(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda K^{(2)}(x,s) + \lambda^2 K^{(3)}(x,s) + \cdots,$$

где итерированные ядра $K^{(n)}(x,s)$ определены следующими формулами:

$$K^{(1)}(x,s) = K(x,s),$$

$$K^{(n+1)}(x,s) = \int_a^b K(x,r)K^{(n)}(r,s)\,d\sigma(r) \quad (n = 2,3,\ldots).$$

Легко проверить с помощью формул (11) и (7), что равенство (8) влечет за собой равенства

$$K^{(n)}(x,s) = K_0^{(n)}(x,s) + \sum_{\lambda_i=\lambda_0} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^n}\operatorname{sgn}\lambda_0$$

и, следовательно,

$$\Gamma(x,s;\lambda)=\Gamma_0(x,s;\lambda)+\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\sum_{\lambda_i=\lambda_0}\varphi_i(x)\varphi_i(s)\operatorname{sgn}\lambda_0. \tag{13}$$

Отсюда мы приходим к такому предложению:

6°. *Пусть $\tau(x)$ — произвольная функция с ограниченным изменением. Главная часть мероморфной функции*

$$F(\lambda)=\int_a^b\int_a^b\Gamma(x,s;\lambda)\,d\tau(x)d\tau(s)$$

в окрестности полюса $\lambda=\lambda_0$ равна

$$\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\sum_{\lambda_i=\lambda_0}\left(\int_a^b\varphi_i(x)\,d\tau(x)\right)^2\operatorname{sgn}\lambda_0.$$

В самом деле, в силу (13)

$$\int_a^b\int_a^b\Gamma(x,s;\lambda)\,d\tau(x)d\tau(s)=\int_a^b\int_a^b\Gamma_0(x,s;\lambda)\,d\tau(x)d\tau(s)+$$

$$+\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\sum_{\lambda_i=\lambda_0}\left(\int_a^b\varphi_i(x)\,d\tau(x)\right)^2\operatorname{sgn}\lambda_0,$$

где первый член правой части является, в силу 5°, функцией, регулярной в точке $\lambda=\lambda_0$.

Теперь мы располагаем всем необходимым для того, чтобы дать достаточно краткое доказательство следующей теоремы:

Теорема 1. *Если ядро $K(x,s)$, удовлетворяющее условиям A) и B), положительно, то интегральное уравнение*

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\,d\sigma(s)=0$$

обладает по крайней мере одним характеристическим числом тогда и только тогда, когда $K^{(2)}(x,s) \not\equiv 0$.

Если это условие выполнено, то уравнению (6) соответствует полная ортонормальная последовательность фундаментальных функций $\{\varphi_i\}$,

$$\int\limits_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\,d\sigma(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\lambda_i & (i=k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases} \tag{14}$$

где λ_i *есть характеристическое число, соответствующее* φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Итерированные ядра $K^{(n)}(x,s)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *разлагаются в ряды по фундаментальным функциям*

$$K^{(n)}(x,s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^n} \operatorname{sgn}\lambda_i \quad (n = 2, 3, \ldots, \quad \omega \leq \infty), \tag{15}$$

равномерно и абсолютно сходящиеся в квадрате $[a \leq x, s \leq b]$.

Кроме того,

$$K(x,s) = R(x,s) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \operatorname{sgn}\lambda_i, \tag{16}$$

где $R(x,s)$ *либо тождественно равно нулю, либо, как и* $K(x,s)$, *есть положительное ядро, удовлетворяющее условиям A) и B) и такое, что*

$$R^{(2)}(x,s) \equiv \int\limits_a^b R(x,r)R(r,s)\,d\sigma(r) \equiv 0.$$

Доказательство. Пусть $\tau(x)$ — какая-либо функция с ограниченным изменением. Рассмотрим мероморфную функцию

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b \int\limits_a^b \Gamma(x,s;\lambda)\,d\tau(x)d\tau(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k \lambda^k,$$

где

$$s_k = \int_a^b \int_a^b K^{(k+1)}(x,s)\,d\tau(x)d\tau(s) \quad (k = 0, 1, 2, ...).$$

Покажем, что квадратичные формы

$$\sum_{i,k=0}^{n} s_{i+k}\eta_i\eta_k \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

все неотрицательны. В самом деле, полагая

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \eta_j \int_a^b K^{(j)}(x,s)\,d\tau(s),$$

находим легко, что

$$\sum_{i,k=0}^{n} s_{i+k}\eta_i\eta_k = \int_a^b \int_a^b K(x,s)g_n(x)g_n(s)\,d\sigma(x)d\sigma(s) \geq 0.$$ [13]

Мы можем применить теперь к функции $F(\lambda)$ теорему Громмера (см. введение). По этой теореме функция $F(\lambda)$ не имеет полюсов только тогда, когда она сводится к постоянной, т.е. когда $s_1 = s_2 = s_3 = \cdots = 0$. Следовательно, если интегральное уравнение (6) не имеет характеристических чисел и, значит, $\Gamma(x, y; \lambda)$ и $F(\lambda)$ суть целые функции, то

$$s_1 = \int_a^b \int_a^b K^{(2)}(x,s)\,d\tau(x)d\tau(s) = 0. \tag{17}$$

Так как это равенство имеет место для всякой функции $\tau(x)$ с ограниченным изменением, то отсюда заключаем, что $K^{(2)}(x,s) \equiv 0$.[14] Обратно, из этого тождества следует, что

[13] Так как $K(x,s)$ положительно.

[14] В самом деле, полагая в (17) $\tau(x), \xi_t(x)$ $(a \leq t \leq b)$, где $\xi_t(x) = \begin{cases} 0 & (a \leq x < t), \\ 1 & (t \leq x \leq b), \end{cases}$ находим, что $K^{(2)}(t,t) = 0$. Полагая затем $\tau(x) = \xi_{t_1}(x) + \xi_{t_2}(x)$ $(a \leq t_1, t_2 \leq b)$, получаем $K^{(2)}(t_1,t_2) = 0$ $(a \leq t_1, t_2 \leq b)$.

$K^{(n)}(x,s) \equiv 0$ $(n = 2,3,...)$, $\Gamma(x,s;\lambda) = K(x,s)$ и, значит, в этом случае уравнение (6) не имеет характеристических чисел. Первая часть теоремы тем самым доказана.

Если $K^{(2)}(x,s) \not\equiv 0$, то функция $F(\lambda)$ является вообще мероморфной с полюсами в точках $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1,2,...)$ и мы получаем, согласно теореме Громмера, разложение

$$\int_a^b\int_a^b \Gamma(x,s;\lambda)\,d\tau(x)d\tau(s) = m_0 + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{m_i}{\lambda_i - \lambda}. \tag{18}$$

Принимая во внимание предложение 6°, мы видим, что здесь можно положить

$$m_i = \Big(\int_a^b \varphi_i(x)d\tau(x)\Big)^2 \operatorname{sgn}\lambda_i \quad (i = 1,2,...).$$

Имея эти выражения для m_i, положим сначала в (18) $\tau(x) = \xi_t(x)$ $(a \le t \le b)$ и затем $\tau(x) = \xi_r(x) + \xi_t(x)$, мы придем тогда к соотношению

$$\Gamma(r,t;\lambda) = R(r,t) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(r)\varphi_i(t)}{\lambda_i - \lambda} \operatorname{sgn}\lambda_i. \tag{19}$$

Это соотношение включает в себя все разложения (15) и (16). Так как $K(t,t)$ представляет величину m_0 в (18) при $\tau(x) = \xi_t(x)$ $(a \le t \le b)$, то, по теореме Громмера, получаем неравенство $R(x,x) \ge 0$ $(a \le x \le b)$. Поэтому из (16) имеем

$$\sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|} \le K(x,x). \tag{20}$$

Опираясь на это неравенство, легко доказать, что разложения (15) сходятся абсолютно и равномерно в квадрате $[a \le x, s \le b]$. Кроме того, неравенство (20) вместе с неравенством

$$\sum_m^n \Big|\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}\Big| \le \sqrt{\sum_m^n \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|}}\sqrt{\sum_m^n \frac{\varphi_i^2(s)}{|\lambda_i|}}$$

показывает, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\omega} \dfrac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{|\lambda_i|}$ сходится абсолютно и равномерно относительно одной из переменных, когда другая фиксирована, и его сумма есть ограниченная функция в квадрате $[a \leq x, s \leq b]$. Отсюда следует, что функция $R(x,s)$ удовлетворяет условиям А) и В). Ядро $R(x,s)$ либо тождественно обращается в нуль, либо положительно, так как в силу (18), (19) и теоремы Громмера

$$m_0 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K(x,s)\, d\tau(x) d\tau(s) \geq 0.$$

Наконец, из разложения (16) следует в силу (14), что

$$\int\limits_a^b R(x,s)\varphi_i(s)\, d\sigma(s) \equiv 0 \quad (a \leq x \leq b; \quad i = 1, 2, \ldots),$$

и значит,

$$K^{(2)}(x,s) = R^{(2)}(x,s) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^2} \operatorname{sgn} \lambda_i.$$

Но это равенство совместимо с (15) лишь при условии $R^{(2)}(x,s) \equiv 0$.

Теорема 1, таким образом, полностью доказана.

2. Не ограничивая общности, мы можем нормировать в дальнейшем функцию $\tau(x)$ с ограниченным изменением (в том числе и функцию распределения $\sigma(x)$) так, чтобы

$$\tau(x) = \frac{\tau(x+0) + \tau(x-0)}{2} \quad \text{при} \quad a < x < b.$$

Дадим два определения.

Определение 1. *Симметрическое ядро $K(x,s)$, удовлетворяющее условиям А) и В), называется абсолютно замкнутым,* *если не существует никакой функции $\tau(x)$ с ограниченным изменением (и нормированной), для которой*

$$\int_a^b K(x,s)\,d\tau(s) \equiv 0 \quad (a \le x \le b).$$

Определение 2. *Симметрическое ядрро $K(x,s)$, удовлетворяющее условиям A) и B), называется абсолютно положительным, если для всякой функции $\tau(x) \not\equiv \mathrm{const}$ с ограниченным изменением (и нормированной) интеграл*

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\,d\tau(x)d\tau(s)$$

положителен.

Согласно замечанию, сделанному в начале настоящего параграфа, положительное ядро $K(x,s)$ абсолютно положительно тогда и только тогда, когда оно абсолютно замкнуто.

Условимся еще обозначать через E_τ совокупность точек изменения функции $\tau(x)$ с ограниченным изменением. Под точкой изменения функции с ограниченным изменением $\tau(x)$ ($a \le \le x \le b$) мы понимаем всякую точку интервала (a,b), которая не содержится ни в каком подинтервале, в котором $\tau(x) = \mathrm{const}$. Очевидно, E_τ всегда замкнуто.

Теорема 2. *Если $K(x,s)$ абсолютно положительна и функция распределения $\sigma(x)$ не есть константа, то $K^{(2)}(x,s) \not\equiv 0$.*

В разложении

$$K(x,s) = R(x,s) + \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}\,\mathrm{sgn}\,\lambda_i \quad (a \le x, s \le b)$$

$R(x,s) = 0$ для $x \subset (a,b)$ и $s \subset E_\tau$.

Доказательство. Положим при всяком $s \subset (a,b)$

$$\tau_s(x) = \int_a^x K(r,s)\,d\sigma(r) \quad (a \le x \le b).$$

Тогда

$$K^{(2)}(x,s)=\int\limits_a^b K(x,r)\,d\tau_s(r).$$

Следовательно, если $K^{(2)}(x,s)\equiv 0$, то $\tau_s(x)=\tau_s(a)=0$ $(a\le x\le$ $\le b)$, так как $K(x,s)$ абсолютно замкнуто. В частности,

$$\tau_s(b)=\int\limits_a^b K(r,s)\,d\sigma(r)=0$$

для всякого $s\subset(a,b)$; но это невозможно для абсолютно замкнутого ядра. Следовательно, первая часть теоремы доказана.

Положим теперь для всякого $s\subset(a,b)$

$$\omega_s(x)=\int\limits_a^x R(r,s)\,d\sigma(r)\quad(a\le x\le b).$$

Тогда

$$\int\limits_a^b K(x,r)d\omega_s(r)=$$

$$=\int\limits_a^b K(x,r)\left(K(r,s)-\sum_{i=1}^{\omega}\frac{\varphi_i(r)\varphi_i(s)}{|\lambda_i|}\right)d\sigma(r)=0,$$

так как

$$K^{(2)}(x,s)=\sum_{i=1}^{\omega}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i^2}\operatorname{sgn}\lambda_i.$$

Но $K(x,s)$ абсолютно замкнуто, поэтому

$$\omega_s(x)=\int\limits_a^x R(r,s)\,d\sigma(r)=0\qquad(a\le x\le b).\tag{21}$$

С другой стороны, легко проверить, что если для непрерывной функции $f(x)$ интеграл $\int\limits_a^x f(r)d\sigma(r)$ тождественно равен нулю, то

$f(x) = 0$ для всех $x \subset E_\sigma$.[15] Поэтому из равенства (21) вытекает, что

$$R(x, s) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \subset E_\sigma.$$

Это имеет место при всяком $s \subset (a, b)$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Если $K(x, s)$ абсолютно положительно и всякая точка $x \subset (a, b)$ есть точка изменения $\sigma(x)$, то разложение*

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{|\lambda_i|} \tag{22}$$

имеет место во всем квадрате $[a \le x, s \le b]$.

Возвращаясь к случаю произвольного E_σ, заметим еще, что если $K(x, x)$ непрерывна на множестве E_σ, то разложение (22) абсолютно и равномерно сходится на множестве F точек (x, s), где $x \subset (a, b)$ и $s \subset E_\sigma$. В самом деле, так как разложение

$$K(s, s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i^2(s)}{|\lambda_i|} \qquad (s \subset E_\sigma)$$

равномерно сходится на E_σ, то в силу теоремы Дини[16] мы с помощью неравенства

$$\sum_m^n \left| \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i} \right| \le \sqrt{\sum_m^n \frac{\varphi_i^2(x)}{|\lambda_i|}} \sqrt{\sum_m^n \frac{\varphi_i^2(s)}{|\lambda_i|}}$$

заключаем, что разложение (22) сходится равномерно и абсолютно на F.[17]

[15] В самом деле, предполагая, что, наоборот, $f(x) \ne 0$ при $x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$, где $x_0 \subset E_\sigma$, мы находим из тождества $\tau(x) = \int\limits_a^x f(r)d\sigma(r) = 0$, что $\int\limits_{x_0-\varepsilon}^x d\sigma(x) = \int\limits_{x_0-\varepsilon}^x \frac{1}{f(x)} d\tau(x) = 0$ при $x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$ в противоречии с условием $x_0 \subset E_\sigma$.

[16] См.: *Гурса.* Курс математического анализа, т. III, ч. II, с.120.

[17] Следовательно, ядро $K(x, s)$ непрерывно на F. Вообще можно показать, что если для положительного ядра $K(x, s)$ функция $K(x, x)$ непрерывна на замкнутом множестве $E \subset (a, b)$, то ядро $K(x, s)$ непрерывно на множестве F точек (x, s), для которых $x \subset (a, b)$ и $s \subset E$.

2. Определение. *Конечная или бесконечная последовательность $\{f_i(x)\}$ функций, непрерывных в (a,b), называется абсолютно замкнутой на множестве $E \subset (a,b)$, если для всякой непрерывной на (a,b) функции и всякого $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)$ функций последовательности такая, что*

$$\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right| < \varepsilon$$

для всех $x \subset E$.

Согласно обобщенной теореме Ф. Рисса, последовательность $\{f_i(x)\}$ абсолютно замкнута на замкнутом множестве $E \subset (a,b)$ тогда и только тогда, когда не существует никакой нормированной функции $\tau(x)$ $(a \le x \le b)$ с ограниченным положительным изменением такой, что $E_\tau \subset E$ и $\int\limits_a^b f_i(x)\,d\tau(x) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$.

Опираясь на это, нетрудно доказать следующую теорему:

Теорема 3. *Если ядро $K(x,s)$ абсолютно положительно и* $\operatorname{var}\sigma > 0$, *то полная ортонормальная последовательность $\{\varphi_i\}$ фундаментальных функций уравнения (6) абсолютно замкнута на E_σ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если $\tau(x)$ — нормированная функция с ограниченным положительным изменением и если $E_\tau \subset E$, то согласно теореме 2

$$\int_a^b K(x,s)\,d\tau(s) = \sum_{i=1}^{\omega} \frac{\varphi_i(x)}{|\lambda_i|} \int_a^b \varphi_i(s)\,d\tau(s) \qquad (a \le x \le b), \tag{23}$$

так как

$$\int_a^b R(x,s)\,d\tau(s) \equiv 0 \qquad (a \le x \le b),$$

в силу того, что

$$\int_a^b f(x)\,d\tau(x) = 0,$$

если $f(x) = 0$ для $x \subset E_\tau$.

С другой стороны, так как $K(x,s)$ абсолютно положительно, то левая часть равенства (23) не обращается в нуль тождественно, и поэтому по крайней мере один из интегралов $\int\limits_a^b \varphi_i(s)\,d\tau(s)$ $(i = 1, 2, ...)$ отличен от нуля.

Тем самым теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть*

$$\sigma(x) = \sigma(a) + P(x) - N(x)$$

есть разложение σ *на ее положительное* (P) *и отрицательное* (N) *изменения. Если ядро* $K(x,s)$ *абсолютно положительно, то уравнение (6) имеет конечное число положительных характеристических чисел тогда и только тогда, когда* $P(x)$ *имеет конечное число точек роста, причем тогда эти два числа совпадают. Аналогичная теорема имеет место и для функции* $N(x)$.

Доказательство. В случае, когда $P(x)$ имеет конечное число точек роста $x_1, x_2, ..., x_n$ в интервале (a,b), для всякой непрерывной функции $f(x)$ можно написать равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\sigma(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dP(x) - \int\limits_a^b f(x)\,dN(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i f(x_i) - \int\limits_a^b f(x)\,dN(x), \tag{24}$$

где $m_i = P(x_i + 0) - P(x_i - 0) > 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$.

Полагая в (24) $f(x) = \sum\limits_{i=1}^p \xi_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ образуют какую-либо ортонормальную систему фундаментальных функций уравнения (6), соответствующих положительным характеристическим числам $\lambda_1, ..., \lambda_p$ (некоторые из которых могут совпадать), получаем в силу (14)

$$\sum_{i=1}^p \xi_1^2 = \sum_{j=1}^n m_j H_j^2 - \sum_{i,k=1}^p a_{ik}\xi_i\xi_k, \tag{25}$$

где

$$H_j = \sum_{i=1}^{p} \xi_i \varphi_i(x_j) \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

и квадратичная форма

$$\sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}\xi_i\xi_k = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{p} \xi_i\varphi_i(x)\Big)^2 dN(x)$$

неотрицательна.

Покажем, что, обратно, если в последовательности характеристических чсел $\{\lambda_i\}$ (соответствующей полной ортонормальной системе фундаментальных функций $\{\varphi_i\}$ уравнения (6)) имеется только p положительных характеристических чисел, то число n точек роста $P(x)$ конечно и $\leq p$. Отсюда легко будет вывести справедливость доказываемой теоремы.

Пусть, например, $\lambda_i > 0$ при $i = 1, 2, ..., p$ и $\lambda_i < 0$ для $i > p$. Тогда в силу (14) имеем соотношение

$$\int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{\nu} \xi_i\varphi_i(x)\Big)^2 d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\nu} \xi_i^2 \quad (\nu > p). \tag{26}$$

С другой стороны, легко видеть, что если $P(x)$ имеет по крайней мере m точек роста, то можно выбрать в интервале (a, b) $2m$ точек непрерывности $\sigma(x)$: $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_m < < \beta_m$, так, чтобы

$$\Delta_j = \sigma(\beta_j) - \sigma(\alpha_j) > 0 \qquad (j = 1, 2, ..., m).$$

Отправляясь от полученных таким образом интервалов $I_j = = (\alpha_j, \beta_j)$ $(j = 1, 2, ..., m)$, определим непрерывные функции $\chi_j^{(\varepsilon)}(x)$ $(j = 1, 2, ..., m; \varepsilon > 0)$ следующими условиями:

$$\begin{cases} \chi_j^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \subset CI_j, \\ 1 & \text{при} \quad x \subset (\alpha_j + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon), \end{cases} \\ \chi_j^{(\varepsilon)}(x) \;\; \text{линейна в} \;\; (\alpha_j, \alpha_j + \varepsilon) \;\; \text{и} \;\; (\beta_j - \varepsilon, \beta_j), \end{cases} \tag{27}$$

где $CI_j = (a,b) - I_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Так как последовательность $\{\varphi_i(x)\}$ согласно теореме 3 абсолютно замкнута на E_σ, то для достаточно большого ν существуют линейные комбинации

$$f_j^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{\nu} c_{ji}^{(\varepsilon)} \varphi_i(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

такие, что

$$\left|\chi_j^{(\varepsilon)}(x) - f_j^{(\varepsilon)}(x)\right| < \varepsilon \ \text{ при } \ x \subset E_\sigma. \tag{28}$$

Положим в (26)

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \eta_j f_j^{(\varepsilon)}(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i \varphi_i(x), \tag{29}$$

где ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, очевидно, выражаются линейно через переменные η_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда в силу (26) и (29) получаем

$$\int_a^b f^2(x) d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i^2 - \sum_{i=p+1}^{\nu} \xi_i^2 = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^{(\varepsilon)} \eta_i \eta_k\,, \tag{30}$$

где

$$a_{ik}^{(\varepsilon)} = \int_a^b f_i^{(\varepsilon)}(x) f_k^{(\varepsilon)}(x)\, d\sigma(x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Равенство (30) показывает, что число положительных квадратов квадратичной формы

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^{(\varepsilon)} \eta_i \eta_k \tag{31}$$

не превосходит p.

Покажем теперь, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a_{ik}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} \Delta_k & (i = k), \\ 0 & (i \neq k). \end{cases} \tag{32}$$

В самом деле, ввиду (27) и (28) имеем

$$|f_j^{(\varepsilon)}(x)| < \begin{cases} 1+\varepsilon & \text{при} \quad x \subset I_j \cdot E_\sigma, \\ \varepsilon & \text{при} \quad x \subset CI_j \cdot E_\sigma \end{cases} \qquad (j = 1, ..., m) \qquad (33)$$

и, следовательно, при $i \neq k$

$$|a_{ik}^{(\varepsilon)}| = \left| \int_a^b f_i^{(\varepsilon)}(x) f_k^{(\varepsilon)}(x)\, d\sigma(x) \right| < \varepsilon(1+\varepsilon)\operatorname{var}\sigma \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, из (33) следует, что

$$\left| \left[f_k^{(\varepsilon)}(x)\right]^2 - \left[\chi_k^{(\varepsilon)}(x)\right]^2 \right| =$$

$$= \left| f_k^{(\varepsilon)}(x) - \chi_k^{(\varepsilon)}(x) \right| \left| f_k^{(\varepsilon)}(x) + \chi_k^{(\varepsilon)}(x) \right| < 2\varepsilon(1+\varepsilon)$$

при $x \subset E_\sigma$ и потому

$$\left| \int_a^b [f_k^{(\varepsilon)}(x)]^2 d\sigma(x) - \int_a^b [\chi_k^{(\varepsilon)}(x)]^2 d\sigma(x) \right| < 2\varepsilon(1+\varepsilon)\operatorname{var}\sigma.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b [\chi_k^{(\varepsilon)}(x)]^2 d\sigma(x) = \Delta_k > 0,$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} a_{kk}^{(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b [f_k^{(\varepsilon)}(x)]^2 d\sigma(x) = \Delta_k.$$

Доказав равенства (32), мы заключаем, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ число положительных квадратов квадратичной формы (31) равно m и, следовательно, в силу установленного ранее, $m \leq p$. Итак, число точек роста $P(x)$ не превосходит p, и теорема доказана.

В заключение нашей статьи сделаем следующее замечание. Мы предполагали в теоремах 1–4, что $K(x,s)$ абсолютно положительно; но читатель, вероятно, заметил, что эти теоремы, равно как и их доказательства, верны, если предположить, что $K(x,s)$ абсолютно положительно только на множестве E_σ, т.е. что для всякой нормированной функции $\tau(x)$ с ограниченным положительным изменением и такой, что $E_\tau \subset E_\sigma$, интеграл

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s)\, d\tau(x) d\tau(s)$$

положителен.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ ТРУДОВ М.Г. КРЕЙНА

1926

1. *Le système* dérivé et les contours dérivés // Журн. наук.-дослід. катедр м. Одеси. — 1926. — № 3.— С.61–73.
   Производные контуры и производная система.

1927

2. *О ряде* Тейлора, определяющем аналитическую функцию, регулярную в области, ограниченной несколькими кружками // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. Сер.3. — 1927. — Т.2. — С.50–57.

1928

3. *Über* den Satz von "Curvatura integra" // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. Сер.3. — 1928. — Т.3, вып.1. — С.36–47.
   О теореме "Curvatura integra".
4. *L'integrale* de Stiltjes dans la théorie des contours convexes // Там же. — Т.3, вып.2. — С.81–83.
   Интеграл Стилтьеса в теории выпуклых контуров.

1929

5. *Sur l'aire* mixte de deux ovales // Зап. фіз.-мат. відділу / ВУАН. — 1929. — Т.4, вип. 3. — С.128–130.
   О смешанной площади двух овалов.

1930

6. *О нормальных* операторах в эрмитовом пространстве / Соавт. Ф.Р. Гантмахер // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. Сер. 3. — 1930. — Т.4. — С.71–84.
7. *Zur* Strukturfrage von orthogonalen Matrizen / Mitaut. F.R. Gantmacher // Зап. фіз.-мат. відділу / ВУАН. — 1930. — Т.4, вип.5. — С.1–8.
   К структуре ортогональной матрицы.

1931

8. *Ergänzungen* zu der Abhandlung "Zur Strukturfrage von Orthogonalmatrizen" // Зап. природ.-техн. відділу / ВУАН. — 1931. — Вип.3. — С.103–108.
   Дополнение к работе: Zur Strukturfrage von orthogonalen Matrizen // Зап. фіз.-мат. відділу / ВУАН. — 1930. — Т.4, вип.5 — С.1–8.

1933

9. *К теории* вибраций многопролетных балок // Вестн. инженеров и техников. — 1933. — Вып.4. — С.142–145.

10. *Über* eine neue Klasse von Hermiteschen Formen und über eine Verallgemeinerung des Trigonometrischen momentenproblems // Изв. АН СССР. Отд-е мат. и естест. наук. — 1933. — №9. — С.1259–1275.
    Об одном новом классе эрмитовых форм и об одном обобщении проблемы тригонометрических моментов.

11. *К теории* симметрических полиномов // Мат. сб. — 1933. — Т.40, вып.3. — С.271–283.

12. *О спектре* якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов // Там же. — Т.40, вып.4. — С.455–466.

1934

13. *Об узлах* гармонических колебаний механических систем некоторого специального типа // Мат. сб. — 1934. — Т.41, вып.2. — С.339–348.

14. *Über* Fouriersche Reihen bescränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem / Mitaut. N. Achyeser // Зап. Харк. мат. т-ва. Сер.4. — 1934. — Т.9. — С.9–28; Т.10. — С.3-32.
    О рядах Fourier ограниченных интегрируемых функций и одной новой экстремальной задаче.

15. *Über* eine Transformation der Bezoutiante, die zum Sturm'schen Satze führt / Mitaut. M. Neimark // Там же. — Т.10. — С.33-39.
    Об одном преобразовании безутианты, приводящем к теореме Штурма.

1935

16. *Об одном* специальном классе дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1935. — Т.2, №5–6. — С.345–349. — Библиогр.: 34 назв.

17. *Об одном* специальном классе детерминантов в связи с интегральными ядрами Kellog'a / Соавт. Ф.Р. Гантмахер // Мат. сб. — 1935. — Т.42, вып.4. — С.501–508.

18. *Об интегральных* ядрах типа функций Грина / Соавт. Ф.Р. Гантмахер // Математика. — 1935. — Т.1. — С.39–50. (Тр. Одес. держ. ун-та).

19. *Про застосування* безутіанти до питань відокремлення коренів алгебраїчних рівнянь / Співавт. М. Неймарк // Там же. — С.51–69.

20. *Общий* метод составления уравнений частот вибрирующих плоских рам / Соавт. Я.Л. Нудельман // Тр. Одес. ин-та инж. вод. трансп. — 1935. — Вып.1. — С.63–71.

21. *Sur* quelques applications des noyaux de Kellog aux problèmes d'oscillation // Зап. Харк. мат. т-ва. Сер.4. — 1935. — Т.11. — С.3–19.
    О некоторых приложениях ядер Келлога к проблемам осцилляции.

22. *Über* eine Transformation der reellen, Toeplitzschen Formen und das Momentenproblem in einem endlichen Intervalle / Mitaut. N. Achyeser // Там же. — С.21–26.
Об одном преобразовании Теплицевых форм и проблеме моментов в конечном интервале.

23. *Sur* les vibrations propres des tiges dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre // Там же. — Т.12. — С.3–11.
О свободных колебаниях стержней, один конец которых закреплен, а другой свободен.

24. *Das* Momentenproblem bei der zusätzlichen Bedingung von A. Markoff / Mitaut. N. Achyeser // Там же. — С.13–35.
Проблема моментов при дополнительном условии акад. А.А. Маркова.

25. *Bemerkung* sur Arbeit: "Über Fouriersche Reinen beschränkter summierbarer Funktionen und ein neues Extremumproblem" / Mitaut. N. Achyeser // Там же. — С.37–40.
Замечания к работе "О рядах Fourier ограниченных интегрируемых функций и одной новой экстремальной задаче".

26. *Sur* les dérivées des noyaux de Mercer // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. — 1935. — V.200, N 10. — P.797–799.
О производных ядер Мерсера.

27. *Sur* une formule de quadrature de Tchebicheff / Collab. N. Akhyeser // Ibid. — V.200, N 11. — P.890–892.
Об одной квадратурной формуле Чебышева.

28. *Sur* les equations integrales chargées / Ibid. — V.201, N 1. — P.24–26.
О нагруженных интегральных уравнениях.

29. *Sur* les Matrices oscillatoires / Collab. F. Gantmacher // Ibid. — V.201, N 15. — P.577–579.
Об осцилляционных матрицах.

1936

30. *Метод* симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений / Соавт. М. Неймарк. — Х.: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. — 43 с. — Библиогр.: С.39–42.

31. *О рядах* Fourier ограниченных суммируемых функций / Соавт. Н.И. Ахиезер // Тр. II Всесоюз. мат. съезда. Ленингр., 24–30 июля 1934 г. — М., 1936. — Т.2. — С.151.

32. *Об одном* обобщении исследований акад. А.А. Маркова о предельных величинах интегралов // Там же. — С.152–154.

33. *Алгебра* эрмитовых форм в теории ограниченных функций // Там же. — С.160.

34. *Об интегральных* уравнениях с осциллирующими фундаментальными функциями // Там же. — С.259–262.

35. *О функциях* Грина, положительных в смысле Мерсера // Докл. АН СССР. — 1936. — Т.1, №2. — С.55-58.

36. *О билинейных* разложениях симметрических ядер, положительных в смысле Мерсера / Соавт. А.М. Данилевский // Там же. — №8. — С.303–306. — Библиогр.: 5 назв.

37. *О двух* minimum-проблемах, связанных с проблемой моментов / Соавт. Н.И. Ахиезер // Там же. — Т.4, №9. — С.331–334. — Библиогр.: 4 назв.

38. *Об осцилляционных* дифференциальных операторах // Там же. — С.379–382. — Библиогр.: 5 назв.

39. *О работе* П.Ф. Папковича "Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов" / Соавт. Ф.Р. Гантмахер // Прикл. мат. и мех. — 1936. — Т.3, вып.1. — С.159–161.

40. *Sur* quelques propriétés des noyaux de Kellog // Зап. Харк. мат. т-ва. Сер.4. — 1936. — Т.13. — С.15–28.
О некоторых свойствах ядер Келлога.

1937

41. *О некоторых* вопросах геометрии выпуклых ансамблей, принадлежащих линейному нормированному и полному пространству // Докл. АН СССР. — 1937. — Т.14, №1. — С.5–8. — Библиогр.: 4 назв.

42. *О наилучшем* приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций / Соавт. Н.И. Ахиезер // Там же. — Т.15, №3. — С.107–112. — Библиогр.: 1 назв.

43. *Проблема* моментів на двох інтервалах при додатковій умові А.А. Маркова // Зап. Харк. мат. т-ва. Сер. 4. — 1937. — Т.14. — С.47–59.

44. *Про деякі* властивості резольвенти ядра Kellog's // Там же. — С.61–73.

45. *Про позитивні* адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах // Там же. — С.227–237.

46. *О характеристических* числах дифференцируемых симметрических ядер // Мат. сб. — 1937. — Т.44, вып.4. — С.725–732.

47. *Sur les développements* des fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites quelconque // Там же. — Т.44, вып.5. — С.923–933.
О разложениях произвольных функций в ряды по фундаментальным функциям краевой задачи.

48. *Sur les opérateurs* differentiels autoadjoints et leurs fonctions de Green symétriques // Там же. — Т.44, вып.6. — С.1023–1072.
О дифференциальных самосопряженных операторах и их симметрических функциях Грина.

49. *Sur les matrices* completement non negatives et oscillatoires / Collab. F. Gantmacher // Compositio Mathematics. — 1937. — V.4, N 3. — P.445–476.

1938

50. *О некоторых* вопросах теории моментов / Соавт. Н. Ахиезер. — X.: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1938. — 265 с. — Ин-т математики и механики Харьк. гос. ун-та.
51. *К теории* наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. — 1938. — Т.18, №4–5. —С.245–249. — Библиогр.: 4 назв.
52. *О наилучшей* аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси // Там же. — Т.18, №9. — С.619–628. — Библиогр.: 7 назв.
53. *Деякі* зауваження про коефіцієнти квадратурних формул гауссовського типу / Співавт. Н. Ахієзер // Математика. — 1938. — Т.2. — С.29–37. (Тр. Одес. держ. ун-та).
54. *До проблеми* Nevanlinna–Pick'a / Співавт. П. Рехтман // Там же. — С.63–68.
55. *Про мінімальні* властивості вузлів обертонів вібруючого стрижня / Співавт. Я. Нудельман // Там же. — С.103–112.
56. *До теорії* вібрації стрижневих систем / Співавт. Я. Нудельман // Там же. — С.193–225.

1939

57. *О линейных* операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество // Докл. АН СССР. — 1939. — Т.23, №8. — С.749–752. — Библиогр.: 5 назв.
58. *О вполне* неотрицательных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов / Соавт. Г.М. Финкельштейн // Там же. — Т.24, №3. — С.220–223. — Библиогр.: 3 назв.
59. *О несимметрических* осцилляционных функциях Грина обыкновенных дифференциальных операторов // Там же. — Т.25, №8. — С.643–646. — Библиогр.: 5 назв.
60. *Осцилляционные* теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка // Там же. — Т.25, №9. — С.717–720. — Библиогр.: 1 назв.
61. *О разложениях* функционала на положительные составляющие / Соавт. Ю. Гросберг // Там же. — С.721–724. — Библиогр.: 1 назв.

1940

62. *О некоторых* формулах квадратур П. Чебышева и А. Маркова / Соавт. Н.И. Ахиезер // Сб. памяти акад. Д.А. Граве. — М.; Л., 1940. — С.15–38.

63. *О нагруженных* интегральных уравнениях, функции распределения которых не монотонны // Там же. — С.88–103.

64. *О проблеме* продолжения эрмитово положительных непрерывных функций // Докл. АН СССР. — 1940. — Т.26, №1. — С.17–21. — Библиогр.: 9 назв.

65. *Об одной* внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном множестве / Соавт. С. Крейн // Там же. — Т.27, №5. — С.427–431. — Библиогр.: 14 назв.

66. *Основные* свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха // Там же. — Т.28, №1. — С.13–17. — Библиогр.: 4 назв.

67. *О минимальном* разложении линейного функционала на положительные составляющие // Там же. — С.18–22. — Библиогр.: 9 назв.

68. *Об одном* кольце функций, определенных на топологической группе // Там же. — Т.29, №4. — С.275–280. — Библиогр.: 11 назв.

69. *Об одном* специальном кольце функций // Там же. — Т.29, №5–6. — С.355–359. — Библиогр.: 7 назв.

70. *Об одном* свойстве базиса в пространстве Banach'a / Соавт.: Д. Мильман, М. Рутман // Зап. Харк. мат. т-ва. Сер.4. — 1940. — Т.16. — С.106–110.

71. *Some* remarks about three papers of M.S. Verblunsky / Coauth. N. Achyeser // Там же. — С.129–134.
Несколько замечаний о трех статьях М.С. Верблюнского.

72. *On some* minimum-problems in the class of Stepanoff almost periodic functions / Coauth. B.M. Levitan // Там же. — Т.17. — С.111–124.
О некоторых минимум-проблемах в классе почти периодических функций Степанова.

73. *On regularly* convex sets in the space conjugate to a Banach space / Coaut. V. Smulian // Ann. Math. — 1940. — V.41, N 3. — P.556–588.
О регулярных выпуклых множествах в пространстве, сопряженном с пространством Банаха.

74. *On extreme* points of regular convex sets / Coaut. D. Milman // Studia math. — 1940. — V.9. — P.133–138.
Об экстремальных точках регулярных выпуклых множеств.

1941

75. *Осцилляционные* матрицы и малые колебания механических систем / Соавт. Ф.Р. Гантмахер. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941. — 220 с.

76. *К теории* почти-периодических функций на топологической группе // Докл. АН СССР. — 1941. — Т.30, №1. — С.5–8. — Библиогр.: 7 назв.

77. *О положительных* функционалах на почти-периодических функциях // Там же. — С.9–12. — Библиогр.: 10 назв.

78. *Об одном* обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе // Там же. — Т.30, №6. — С.482–486. — Библиогр.: 10 назв.

79. *Об одном* новом свойстве оператора Штурма–Лиувилля // Математика. — 1941. — Т.3. — С.15–32. (Тр. Одес. гос. ун-та).

1943

80. *О представлении* функций интегралами Фурье–Стилтьеса // Учен. зап. Куйбышев. гос. пед. ин-та. — 1943. — Вып.7. — С.123–147.

81. *Sur l'espace* des fonctions continues sur un bicompact de Hausdorff et ses sousespaces semiordonnés / Coaut. S. Krein // Мат. сб. — 1943. — Т.13, №1. — С.1–38. — Библиогр.: 19 назв.
О пространстве непрерывных функций, определенных на бикомпакте, и его полуупорядоченных подпространствах.

1944

82. *Об эрмитовых* операторах с дефект-индексами, равными единице. Ч.1 // Докл. АН СССР. — 1944. — Т.43. — С.339–342.

83. *Об эрмитовых* операторах с дефект-индексами, равными единице. Ч.2 // Там же. — Т.44, №4. — С.143–146. — Библиогр.: 2 назв.

84. *Об одном* замечательном классе эрмитовых операторов // Там же. — Т.44, №5. — С.191–195. — Библиогр.: 7 назв.

85. *Об обобщенной* проблеме моментов // Там же. — Т.44, №6. — С.233–243. — Библиогр.: 7 назв.

86. *О логарифме* безгранично разложимой эрмитово-положительной функции // Там же. — Т.45, №3. — С.99–102.

87. *О проблеме* продолжения винтовых дуг в гильбертовом пространстве // Там же. — Т.45, №4. — С.147–156. — Библиогр.: 4 назв.

1945

88. *Об одном* обобщении исследований G. Szegö, В.И. Смирнова и А.Н. Колмогорова // Докл. АН СССР. — 1945. — Т.46, №3. — С.95–98. — Библиогр.: 6 назв.

89. *Об одной* экстраполяционной проблеме А.Н. Колмогорова // Там же. — Т.46, №8. — С.339–342. — Библиогр.: 8 назв.

90. *О самосопряженных* расширениях и полуограниченных эрмитовых операторов // Там же. — Т.48, №5. — С.323–326. — Библиогр.: 4 назв.

1946

91. *О резольвентах* эрмитова оператора с индексом дефекта (m, m) // Докл. АН СССР. — 1946. — Т.52, №8. — С.657–660. — Библиогр.: 6 назв.

92. *Об одном* общем методе разложения положительно-определенных ядер на элементарные произведения // Там же. — Т.58, №1. — С.3–6. — Библиогр.: 10 назв.

93. *Об одной* теореме М.Я. Выгодского // Мат. сб. — 1946. — Т.18, №3. — С.447–450. — Библиогр.: 2 назв.

1947

94. *Про лінійні* цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР. — 1947. — Вип.9. — С.104–129. — Бібліогр.: 8 назв.

95. *К теории* целых функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1947. — Т.11, №4 . — С.309–326. — Библиогр.: 6 назв.

96. *Теория* самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат. сб. — 1947. — Т.20, №3. — С.431–495. — Библиогр.: 12 назв.

97. *Основные* теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов / Соавт. М.А. Красносельский // Успехи мат. наук. — 1947. — Т.2, вып.3. — С.60–106. — Библиогр.: 36 назв.

98. *Об одном* общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные // Там же. — С.181.

1948

99. *Функциональный* анализ / Соавт. Л.А. Люстерник // Математика в СССР за тридцать лет. — М.; Л., 1948. — С.608–697. — Библиогр.: С.673–679.

100. *Линейные* операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха / Соавт. М.А. Рутман // Успехи мат. наук. — 1948. — Т.3, вып.1. — С.3–95. — Библиогр.: 63 назв.

101. *Винтовые* линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений и лоренцовы преобразования // Там же. — Т.3, вып.3. — С.158–160. — Библиогр.: 4 назв.

102. *О некоторых* вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости // Там же. — С.166–169. — Библиогр.: 7 назв.

103. *Про Ермітові* оператори с напрямними функціоналами // Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР. — 1948. — Вип.10. — С.83–106. — Бібліогр.: 12 назв.

104. *О дефектных* числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах / Соавт.: М.А. Красносельский, Д.И. Мильман // Сб. трудов Ин-та математики АН УССР. — 1948. — №1. — С.97–112. — Библиогр.: 7 назв.

105. *Софья* Ковалевская // Большевист. знамя. — 1948. — 6 марта: порт.

1949

106. *О целых* почти-периодических функциях экспоненциального типа / Соавт. Б. Левин // Докл. АН СССР. — 1949. — Т.64, №3. — С.285–287. — Библиогр.: 3 назв.

107. *Бесконечные* J-матрицы и матричная проблема моментов // Там же. — Т.69, №2. — С.125–128. — Библиогр.: 3 назв.

108. *Принцип* двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры // Там же. — Т.69, №6. — С.725–728. — Библиогр.: 8 назв.

109. *Основные* положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) // Укр. мат. журн. — 1949. — №2. — С.1–66. — Библиогр.: 27 назв.

110. *Эрмитово-положительные* ядра на однородных пространствах. Ч.1 // Там же. — №4. — С.64–98. — Библиогр.: 54 назв.

1950

111. *Осцилляционные* матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Соавт. Ф.Р. Гантмахер. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.

112. *Обобщение* некоторых исследований А.М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. — 1950. — Т.73, №3. — С.445–448. — Библиогр.: 6 назв.

113. *О краевой* задаче Штурма–Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ и об одном классе интегральных уравнений // Там же. — Т.73, №6. — С.1125–1128. — Библиогр.: 7 назв.

114. *Об одномерной* сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$ // Там же. — Т.74, №1. — С.9–12. — Библиогр.: 13 назв.

115. *О некоторых* исследованиях А.М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами / Соавт. К.Р. Коваленко // Там же. — Т.75, №4. — С.495–498. — Библиогр.: 10 назв.

116. *Эрмитово-положительные* ядра на однородных пространствах. Ч.2 // Укр. мат. журн. — 1950. — Т.2, №1. — С.10–59. — Библиогр.: 54 назв.

117. *Замечание* об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А.Н. Колмогорова / Соавт. С.И. Зуховицкий // Успехи мат. наук. — 1950. — Т.5, вып.1. — С.217–229. — Библиогр.: 4 назв.

118. *Об одном* применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространства с индефинитной метрикой // Там же. — Т.5, вып.2. — С.180–190. — Библиогр.: 6 назв.

1951

119. *Решение* обратной задачи Штурма–Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1951. — Т.76, №1. — С.21–24. — Библиогр.: 7 назв.

120. *Определение* плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот // Там же. — Т.76, №3. — С.345–348. — Библиогр.: 9 назв.

121. *О некоторых* задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // Прикл. мат. и мех. — 1951. — Т.15, вып.3. — С.323–348. — Библиогр.: 13 назв.

122. *К математической* теории метода оптимальной амплитудно-фазовой модуляции / Соавт.: Б.И. Коренблюм, С.И. Тетельбаум // Сб. тр. Ин-та электротехники АН УССР. — 1951. — Вып.7. — С.96–104.

123. *К теории* целых матриц-функций экспоненциального типа // Укр. мат. журн. — 1951. — Т.3, №2. — С.164–173. — Библиогр.: 8 назв.

124. *О применении* одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии // Успехи мат. наук. — 1951. — Т.6, вып.1. — С.171–177. — Библиогр.: 6 назв.

125. *Идеи* П.Л. Чебышева и А.А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие / Соавт. И.Г. Рехтман // Там же. — Т.6, вып.4. — С.3–120. — Библиогр.: 82 назв.

1952

126. *Об обратных* задачах для неоднородной струны // Докл. АН СССР. — 1952. — Т.82, №5. — С.669–672. — Библиогр.: 6 назв.

127. *Об одном* обобщении исследований Стилтьеса // Там же. — Т.87, №6. — С.881–884. — Библиогр.: 5 назв.

128. *Об одном* обобщении лемм Шварца и Левнера / Соавт. Н.И. Ахиезер // Зап. мат. отд. физ.-мат. фак. Харьк. ун-та и Харьк. мат о-ва. — 1952. — Т.23. — С.95–101.

129. *О неопределенном* случае краевой задачи Штурма–Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1952. — Т.16, №4. — С.293–324. — Библиогр.: 12 назв.

130. *Устойчивость* индекса неограниченного оператора / Соавт. М.А. Красносельский // Мат. сб. — 1952. — Т.30, №1. — С.219–224. — Библиогр.: 3 назв.

131. *О некоторых* новых задачах теории колебаний штурмовых систем // Прикл. мат. и мех. — 1952. — Т.16, вып.5. — С.555–568. — Библиогр.: 10 назв.

1953

132. *О переходной* функции одномерной краевой задачи второго порядка // Докл. АН СССР. — 1953. — Т.88, №3. — С.405–408. — Библиогр.: 6 назв.

133. *Аналог* неравенств Чебышева–Маркова в одномерной краевой задаче // Там же. — Т.89, №1. — С.5–8. — Библиогр.: 11 назв.

134. *О некоторых* случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции // Там же. — Т.93, №4. — С.617–620. — Библиогр.: 8 назв.

135. *Об обратных* задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости // Там же. — Т.93, №5. — С.767–770. — Библиогр.: 7 назв.

136. *О формуле* следов в теории возмущений // Мат. сб. — 1953. — Т.33, №3. — С.597–626. — Библиогр.: 15 назв.

1954

137. *Об основной* аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов // Докл. АН СССР. — 1954. — Т.94, №1. — С.13–16. — Библиогр.: 9 назв.

138. *Об одном* методе эффективного решения обратной краевой задачи // Там же. — Т.94, №6. — С.987–990. — Библиогр.: 7 назв.

139. *Об интегральных* уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка // Там же. — Т.97, №1. — С.21–24. — Библиогр.: 3 назв.

140. *Теория* спектральных и переходных функций одномерных краевых задач и ее приложения // Успехи мат. наук. — 1954. — Т.9, вып.3. — С.221.

1955

141. *Основные* положения теории λ-зон устойчивости канонической системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Памяти А.А. Андронова / М.: Изд-во АН СССР, 1955. — С.413–498. — Библиогр.: 29 назв.

142. *Об одном* новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода // Докл. АН СССР. — 1955. — Т.100, №3. — С.413–416. — Библиогр.: 6 назв.

143. *Об определении* потенциала частицы по ее S-функции // Там же. — Т.105, №3. — С.433-436. — Библиогр.: 6 назв.

144. *Континуальные* аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности // Там же. — Т.105, №4. — С.637–640. — Библиогр.: 8 назв.

145. *О признаках* устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем // Прикл. мат. и мех. — 1955. — Т.19, вып.6. — С.641–680. — Библиогр.: 18 назв.

146. *Развитие* теории Чебышева–Маркова предельных величин интегралов в одном новом направлении / Соавт. И.Г. Рехтман // Успехи мат. наук. — 1955. — Т.10, вып.1. — С.67–78. — Библиогр.: 5 назв.

147. *On the inverse* problem of filter theory and the zone of stability. — Mass.: M.G. West Concord, 1955. — 7 p.
Пер. ст.: Об обратных задачах теории фильтров и λ-зон устойчивости // Докл. АН СССР. — 1953. — Т.93, №5. — С.767–770.

148. *On an application* of the fixed-point principle in the theory of linear transformations of spaces with indefinite metric // Amer. Math. Soc. Transl. — 1955. — V.1. — P.27–35.
Пер. ст.: Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой // Успехи мат. наук. — 1950. — Т.5, №2. — С.180-190.

1956

149. *О дифференциальных* уравнениях в банаховом пространстве / Соавт.: М.А. Красносельский, С.Г. Крейн // Тр. III Всесоюз. мат. съезда. М., июнь-июль 1956 г. — М., 1956. — Т.2. — С.11.

150. *Обыкновенные* дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами // Там же. — С.11.

151. *О некоторых* основных положениях теории систем интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / Соавт. И.Ц. Гохберг // Там же. — С.37–38.

152. *Эволюция* проблемы моментов и задача о колебаниях струны // Там же. — С.40.

153. *К теории* акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем // Докл. АН СССР. — 1956. — Т.111, №6. — С.1167–1170. — Библиогр.: 6 назв.

154. *Спектральная* теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Ч.1 / Соавт. И.С. Иохвидов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т.5. — С.367–432. — Библиогр.: 20 назв.

155. *Спектральная* теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Соавт. И.С. Иохвидов // Успехи мат. наук. — 1956. — Т.11, вып.4. — С.169–171. — Библиогр.: 6 назв.

1957

156. *О континуальном* аналоге одной формулы Кристоффеля из теории ортогональных многочленов // Докл. АН СССР. — 1957. — Т.113, №5. — С.970–973. — Библиогр.: 7 назв.

157. *О характеристической* функции $A(\lambda)$ линейной канонической системы дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами // Прикл. мат. и мех. — 1957. — Т.21, вып.3. — С.320–329. — Библиогр.: 7 назв.

158. *Замечание* к статье "Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Ч.1 / Соавт. И.С. Иохвидов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1957. — Т.6. — С.486.

159. *Основные* положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов / Соавт. И.Ц. Гохберг // Успехи мат. наук. — 1957. — Т.12, вып.2. — С.43–118. — Библиогр.: 64 назв.

160. *О базисах* Бари пространства Гильберта // Там же. — Т.12, вып.3. — С.333–341. — Библиогр.: 5 назв.

1958

161. *Об устойчивой* системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций / Соавт. И.Ц. Гохберг // Докл. АН СССР. — 1958. — Т.119, №5. — С.854–857. — Библиогр.: 7 назв.

162. *Критерий* дискретности спектра сингулярной струны / Соавт. И.С. Кац // Изв. вузов. Сер. мат. — 1958. — №2. — С.136–153. — Библиогр.: 7 назв.

163. *О парном* интегральном уравнении и его транспонированном. Сообщ. I / Соавт. И.Ц. Гохберг // Теорет. и прикл. математика (Львов. ун-т). — 1958. — Вып.1. — С.58–81.

164. *Системы* интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / Соавт. И.Ц. Гохберг // Успехи мат. наук. — 1958. — Т.13, вып.2. — С.3–72. — Библиогр.: 33 назв.

165. *Поправка* / Соавт. И.Ц. Гохберг // Там же. — Т.13, вып.4. — С.232. Поправка к ст.: Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Там же. — Т.13, вып.2. — С.3–72.

166. *Интегральные* уравнения на полупрямой с ядром, зависящими от разности аргументов // Там же. — Т.13, вып.5. — С.3–120. — Библиогр.: 53 назв.

1959

167. *Об интегральном* представлении непрерывной эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов // Докл. АН СССР. — 1959. — Т.125, №1. — С.31–34. — Библиогр.: 9 назв.

168. *О вполне* непрерывных операторах со спектром, сосредоточенным в нуле / Соавт. И.Ц. Гохберг // Там же. — Т.128, №2. — С.227–230. — Библиогр.: 10 назв.

169. *Спектральная* теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. Ч. 2 / Соавт. И.С. Иохвидов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1959. — Т.8. — С.413–496. — Библиогр.: 28 назв.

170. *О признаках* полноты системы корневых векторов диосипативного оператора // Успехи мат. наук. — 1959. — Т.14, вып.3. — С.145–152. — Библиогр.: 8 назв.

171. *Development* in a new direction of the Čebysev–Marcov theory of limiting values of integrals / Coaut. P.G. Rehtman // Amer. Math. Soc. Transl. — 1959. — V.12. — P.123–135.
Развитие теории Чебышева–Маркова предельных величин интегралов в одном новом направлении / Пер. из: Успехи мат. наук. — 1955. — Т.10, вып.1. — С.67–78.

1960

172. *К теории* линейных несамосопряженных операторов // Докл. АН СССР. — 1960. — Т.130, №2. — С.254–256. — Библиогр.: 9 назв.

173. *Oszillationsmatrizen*, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme / Mitaut. F.R. Gantmacher. — Übers. aus der 2. — Berlin: Acad.-Verl., 1960. — 359 S.
Пер. кн.: Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 360 с.

174. *Spectral* theory of operators in spaces with an indefinite metric. I / Coaut. I.S. Iohvidov // Amer. Math. Soc. Transl. — 1960. — V.13. — P.105–175.
Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Пер. из журн.: Тр. Моск. мат. о-ва. — 1956. — Т.5. — С.367–432.

175. *The basic* propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators / Coaut. I. Gohberg // Amer. Math. Soc. Transl. — 1960. — V.13. — P.185–264.
Пер. ст.: Основные положения о дефектных числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. — 1957. — Т.12, вып.2. — С.43–118.

176. *Systems* of integral equations on a half-line with kernels depending on the difference of arguments / Coaut. I.C. Gohberg // Amer. Math. Soc.

Transl. — 1960. — V.14. — P.217–287.
Пер. ст.: Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. — 1958. — Т.13, вып.2. — С.3–72.

177. *Марк Аронович Наймарк:* К 50-летию со дня рождения / Соавт. Г.Е. Шилов // Там же. — 1960. — Т.15, вып.2. — С.231–236.

1961

178. *Гамильтоновы* системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / Соавт. В.А. Якубович. — Киев.: Ин-т математики АН УССР, 1961. — 55 с. — (Междунар. союз по теорет. и прикл. механике. Симп. по линейным колебаниям. Киев, сент. 1961 г.)

179. *К теории* треугольных представлений несамосопряженных операторов / Соавт. И.Ц. Гохберг // Докл. АН СССР. — 1961. — Т.137, №5. — С.1034–1037. — Библиогр.: 7 назв.

180. *О вольтерровых* операторах с мнимой компонентой того или иного класса / Соавт. И.Ц. Гохберг // Там же. — Т.139, №4. — С.779–782. — Библиогр.: 7 назв.

181. *К теории* полос пропускания периодических волноводов / Соавт. Г.Я. Любарский // Прикл. мат. и мех. — 1961. — Т.25, вып.1. — С.24–37. — Библиогр.: 11 назв.

182. *О влиянии* некоторых трансформаций ядер интегральных уравнений на спектры этих уравнений / Соавт. И.Ц. Гохберг // Укр. мат. журн. — 1961. — Т.13, №3. — С.12–38.

183. *Одна* экстремум-проблема относительно многочленов / Соавт. Н.И. Ахиезер // Ann. Univ. Scient. — Budapest: Sec. Math. — 1960–1961. — N 3–4. — P.9–14.

184. *Наум Ильич Ахиезер:* К 60-летию со дня рождения / Соавт. Б.Я. Левин // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, вып.4. — С.223–234.

1962

185. *Об определителях* возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. — 1962. — Т.144, №2. — С.268–271. — Библиогр.: 9 назв.

186. *К теории* волновых операторов рассеяния / Соавт. М.Ш. Бирман // Там же. — Т.144, №3. — С.475–478. — Библиогр.: 13 назв.

187. *О проблеме* факторизации операторов в гильбертовом пространстве / Соавт. И.Ц. Гохберг // Там же. — Т.147, №2. — С.279–282. — Библиогр.: 15 назв.

188. *Об аналитических* свойствах мультипликаторов периодических канонических дифференциальных систем положительного типа / Соавт. Г.Я. Любарский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1961. — Т.26, №4. — С.549–572. — Библиогр.: 12 назв.

189. *Some questions* in the theory of moments / Coaut. N.I. Akhiezer. — Providence: Amer. Math. Soc. — 1962. — 265 p.
Пер. кн.: О некоторых вопросах теории моментов. — Х.: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1938. — 255 с.

1963

190. *Некоторые* вопросы теории волновых операторов рассеяния / Соавт. М.Ш. Бирман // Матер. совмест. сов.-амер. симп. по уравнениям с частными производными. Новосибирск, авг. 1963 г. Сиб. отд-ние АН СССР. — Новосибирск, 1963. — С.11.

191. *Гамильтоновы* системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / Соавт. В.А. Якубович // Тр. Междунар. симп. по нелинейным колебаниям. Киев, 12–18 сент. 1961 г. — Киев, 1963. — Т.1. — С.277–305. — Библиогр.: 33 назв.

192. *О некоторых* новых результатах в теории возмущений линейных операторов // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Ленингр., 3–12 июля 1961 г. — Л., 1963. — Т.1. — С.133–134.

193. *О спектральной* функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой / Соавт. Г.К. Лангер // Докл. АН СССР. — 1963. — Т.152, №1. — С.39–42. — Библиогр.: 3 назв.

194. *Spectral* theory of operators in spaces with an indefinite metric. II // Coaut. I.S. Iohvidov // Amer. Math. Soc. Transl. — 1963. — V.34. — P.283–373.

1964

195. *Лекции* по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Отв. ред. Ю.Л. Далецкий. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. — 186 с. — Библиогр.: 37 назв.

196. *О некоторых* новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов // I летняя мат. школа / Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. — Ч.1. — С.103–187. — Библиогр.: С.184–187.

197. *О некоторых* новых исследованиях по терии несамосопряженных операторов / Соавт.: М.С. Бродский, И.Ц. Гохберг, В.И. Мацаев // Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Ленингр., 3–12 июля 1961 г. — Л., 1964. — Т.2. — С.261–271. — Библиогр.: 38 назв.

198. *Об одном* новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов, в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. — 1964. — Т.154, №5. — С.1023–1026. — Библиогр.: 12 назв.

199. *К теории* квадратичных пучков самосопряженных операторов / Соавт. Г.К. Лангер // Там же. — Т.154, №6. — С.1258–1261. — Библиогр.: 11 назв.

200. *Критерий* полноты системы корневых векторов сжатия / Соавт. И.Ц. Гохберг // Укр. мат. журн. — 1964. — Т.16, №1. — С.78–82. — Библиогр.: 9 назв.

201. *О факторизации* операторов в гильбертовом пространстве / Соавт. И.Ц. Гохберг // Acta Sci. Math. — Szeged, 1964. — V.25, N 1–2. — P.90–123.

202. *The effect* of some transformations of kernels of integral equations upon the equations spectra / Coaut I. Gohberg // Amer. Math. Soc. Transl. — 1964. — V.35. — P.263–295.
Пер.: О влиянии некоторых трансформаций ядер интегральных уравнений на спектры этих уравнений // Укр. мат. журн. — 1961. — Т.13, №3. — С.12–38.

1965

203. *Введение* в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / Соавт. И.Ц. Гохберг. — М.: Наука, 1965. — 448 с. — Библиогр.: С.425–435.

204. *Введение* в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах // II летняя мат. шк. / Киев: Ин-т математики АН УССР, 1965. — Ч.1. — С.15–92. — Библиогр.: 64 назв.

205. *О некоторых* математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов / Соавт. Г.К. Лангер // Прил. к теории функций в механике сплошной среды. — М., 1965. — Т.2. — С.283–322. — Библиогр.: 31 назв.

206. *О мультипликативном* представлении характеристических функций операторов, близких к унитарным / Соавт. И.Ц. Гохберг // Докл. АН СССР. — 1965. — Т.164, №4. — С.732–735. — Библиогр.: 15 назв.

207. *К теории* нагруженных интегральных уравнений // Изв. АН МолдССР. — 1965. — №7. — С.40–46. — Библиогр.: 5 назв.

208. *Письмо* в редакцию / Соавт. И.С. Иохвидов // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1965. — Т.15. — С.452–454.

209. *Витольд Львович Шмульян:* К 50-летию со дня рождения и 20-летию со дня смерти // Успехи мат. наук. — 1965. — Т.20, вып.2. — С.131–133.

210. *Феликс Рувимович Гантмахер* / Соавт.: М.А. Айзерман, Л.А. Люстерник, М.А. Наймарк и др. // Там же. — С.149–157.

1966

211. *Аналитические* проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве // Тез. докл. на Междунар. конгр. математиков. М., 16–26 авг. 1966 г. — М., 1966. — С.22-26.

212. *О некоторых* новых результатах в теории резольвент эрмитовых операторов / Соавт. Ш.Н. Саакян // Докл. АН СССР. — 1966. — Т.169, №6. — С.1269–1272. — Библиогр.: 13 назв.

213. *Об одном* классе операторов в пространстве с индефинитной метрикой / Соавт. Ю.Л. Шмульян // Там же. — Т.170, №1. — С.34-37. — Библиогр.: 12 назв.

214. *О некоторых* новых банаховых алгебрах и теоремах типа теорем Винера-Леви для рядов и интегралов Фурье // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР. — 1966. — Т.1, вып.1. — С.82–109. — Библиогр.: 23 назв.

215. *О плюс-операторах* в пространстве с индефинитной метрикой / Соавт. Ю.Л. Шмульян // Там же. — С.131–161. — Библиогр.: 20 назв.

216. *J-полярное* представление плюс-операторов / Соавт. Ю.Л. Шмульян // Там же. — Т.1, вып.2. — С.172–210. — Библиогр.: 23 назв.

217. *О расположении* корней многочленов, ортогональных на единичной окружности по знакопеременному весу // Теория функций, функц. анализ и их приложения: Респ. науч. сб. — 1966. — Вып.2. — С.131–137. — Библиогр.: 8 назв.

218. *On factorization* of operators in Hilbert space / Coaut. I. Gohberg // Amer. Math. Soc. Transl. — 1966. — V.51. — P.155–188.
Пер.: О факторизации операторов в гильбертовом пространстве // Acta Sci. Math. — Szeged, 1964. — V.25, N 1–2. — P.90–123.

219. *Criteria* for completeness of the system of root vectors of a contraction / Coaut. I. Gohberg // Amer. Math. Soc. Transl. — 1966. — V.54. — P.119–124.
Пер.: Критерий полноты системы корневых векторов сжатия // Укр. мат. журн. — 1964. — Т.16, №1. — С.78–82.

1967

220. *Теория* вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения / Соавт. И.Ц. Гохберг. — М.: Наука, 1967. — 508 с.: ил. — Библиогр.: С.486–498.

221. *О треугольных* представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций / Соавт. И.Ц. Гохберг // Докл. АН СССР. — 1967. — Т.176, №2. — С.272–275. — Библиогр.: 11 назв.

222. *Описание* всех решений усеченной степенной проблемы моментов и некоторые операторные вопросы // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР, 1967. — Т.2, вып.2. — С.114–132. — Библиогр.: 20 назв.

223. *О дробно-линейных* преобразованиях с операторными коэффициентами / Соавт. Ю.Л. Шмульян // Там же. — Т.2, вып.3. — С.64–96. — Библиогр.: 20 назв.

224. *Об одном* описании операторов сжатия, подобных унитарным / Соавт. И.Ц. Гохберг // Функц. анализ и его приложения. — 1967. — Т.1, вып.1. — С.38–60. — Библиогр.: 19 назв.

1968

225. *R-функции* — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя / Соавт. И.С. Кац // *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М., 1968. — С.629–647.

226. *О спектральных* функциях струны / Соавт. И.С. Кац // Там же. — С.648–733. — Библиогр.: 66 назв.

227. *Аналитические* проблемы и результаты теории линейных операторов в гильбертовом пространстве // Тр. Междунар. конгр. математиков. М., 16–20 авг. 1966 г. — М., 1968. — С.189–216. — Библиогр.: 43 назв.

228. *К теории* S-матриц канонических дифференциальных уравнений с суммируемым потенциалом / Соавт. Ф.Э. Мелик-Адамян // Докл. АН АрмССР. — 1968. — Т.46, №4. — С.150–155. — Библиогр.: 8 назв.

229. *О бесконечных* ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори–Фейера и Ф. Рисса / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Функц. анализ и его приложения. — 1968. — Т.1, вып.1. — С.1–19. — Библиогр.: 18 назв.

230. *Бесконечные* ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори–Фейера и И. Шура / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Там же. — Т.2, вып.4. — С.1–17. — Библиогр.: 14 назв.

231. *Борис Яковлевич Левин:* К 60-летию со дня рождения / Соавт. Н.В. Ефимов, И.В. Островский // Успехи мат. наук. — 1968. — Т.23, вып.5. — С.187–191.

1969

232. *Об угловой* локализации спектра мультипликативного интеграла в гильбертовом пространстве // Функц. анализ и его приложения. — 1969. — Т.3, вып.1. — С.89–90. — Библиогр.: 12 назв.

233. *Об ограниченных* операторах, коммутирующих со сжатием класса C_{00} единичного ранга неунитарности / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Там же. — Т.3, вып.3. — С.86–87. — Библиогр.: 9 назв.

234. *Общие* теоремы о треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций / Соавт.: В.М. Бродский, И.Ц. Гохберг // Там же. — Т.3, вып.4. — С.1–27. — Библиогр.: 38 назв.

235. *Introduction* to the theory of linear nonselfadjoint operators / Coaut. I. Gohberg. — Providence: Amer. Math. Soc., 1969. — 378 p.
Введение в теорию пинейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

1970

236. *Устойчивость* решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Соавт. Ю.Л. Далецкий. — М.: Наука, 1970. — 534 с. — Библиогр.: С.518–524.

237. *О некоторых* результатах и проблемах теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Соавт. Ю.Л. Далецкий // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. Киев, 25 авг.– 4 сент. 1969 г. — Киев, 1970. — Т.1. — С.332–347.

238. *О новых* неравенствах для характеристических чисел интегральных уравнений с гладкими ядрами / Соавт. И.Ц. Гохберг // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР, 1970. — Т.5, вып.1. — С.22–39. — Библиогр.: 9 назв.

239. *Неравенства* Чебышева–Маркова в теории спектральных функций струны // Там же. — С.77–101. — Библиогр.: 6 назв.

240. *Определение* и основные свойства характеристической функции Y-узла / Соавт.: В.М. Бродский, И.Ц. Гохберг // Функц. анализ и его приложения. — 1970. — Т.4, вып.1. — С.88–90. — Библиогр.: 17 назв.

241. *Резольвентная* матрица эрмитова оператора и связанные с нею характеристические функции / Соавт. Ш.Н. Саакян // Там же. — Т.4, вып.3. — С.103–104. — Библиогр.: 5 назв.

242. *Некоторые* приложения теоремы факторизации унитарной матрицы / Соавт. Ф.Э. Мелик-Адамян // Там же. — Т.4, вып.4. — С.73–75. — Библиогр.: 6 назв.

243. *Theory* and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space / Coaut. I. Gohberg. — Providence: Amer. Math. Soc., 1970. — 430 p.
Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее припожения.

244. *Uber* die Vrallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume $\Pi_{\varkappa}$ / Mitaut. H. Langer // Colloquia Mathematics Soc. Janos Bolyai. 5. Hilbert Space Operators. — Tihany (Hangery), 1970. — P.353–399.
Обобщенные резольвенты и характеристическая функция изометрического оператора в пространстве.

1971

245. *Ганкелевые* операторы, задачи экстраполяции матриц-функций и теория S-матриц / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории функций комплекс. переменного. — Х., 1971. — С.6–8.

246. *Бесконечные* блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1971. — Т.6, №2–3. — С.87–112. — Библиогр.: 17 назв.

247. *Аналитические* свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура–Такаги / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Мат. сб. — 1971. — Т.86, №1. — С.34–75. — Библиогр.: 22 назв.

248. *О дефектных* подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$. Ч.1 / Соавт. Г.К. Лангер // Функц. анализ и его приложения. — 1971. — Т.5, вып.2. — С.59–71. — Библиогр.: 24 назв.

249. *О дефектных* подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$. Ч.2 / Соавт. Г.К. Лангер // Там же. — Т.6, вып.3. — С.54–69.

250. *О характеристических* функциях обратимого оператора / Соавт.: В.М. Бродский, И.Ц. Гохберг // Acta sci. math. — Szeged, 1971. — V.32, fasc. 1–2. — P.141–164.

251. *Introduction* à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints dans un espace hilbertien / Collab. I. Gohberg. — Paris: Dunod, 1971. — 372 p. Пер.: Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

1973

252. *Проблема* моментов Маркова и экстремальные задачи: Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие / Соавт. П.Я. Нудельман. — М.: Наука, 1973. — 551 с.: ил. — Библиогр.: С.531–546.

253. *О некоторых* новых задачах для функций класса Харди и континуальных семействах функций с двойной ортогональностью / Соавт. П.Я. Нудельман // Докл. АН СССР. — 1973. — Т.209, №3. — С.537–540. — Библиогр.: 13 назв.

254. *Об одном* предположении А.М. Ляпунова // Функц. анализ и его приложения. — 1973. — Т.7, вып.3. — С.45–54. — Библиогр.: 5 назв.

255. *О некоторых* пространственных изопериметрических задачах / Соавт. А.А. Нудельман // Квант. — 1973. — №2. — С.22–26.

256. *Баллистическая* задача в космосе / Соавт. К.Р. Коваленко // Там же. — №5. — С.2–6.

257. *Uber die Q*-Funktionen eines π-hermiteschen Operators im Raume $\Pi_\varkappa$ / Mitaut. H. Langer // Acta sci. math. — Szeged, 1973. — V.34. — P.191–230.
О Q-функции π-эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$.

1975

258. *Аппроксимация* функций из $L_2(\omega_1, \omega_2)$ передаточными функциями линейных систем с минимальной энергией / Соавт. П.Я. Нудельман // Пробл. передачи информ. — 1975. — Т.11, вып.2. — С.37–60. — Библиогр.: 21 назв.

1976

259. *Об индефинитной* степенной проблеме моментов / Соавт. Г.К. Лангер // Докл. АН СССР. — 1976. — Т.226, №2. — С.261–264. — Библиогр.: 7 назв.

260. *Об обобщенных* резольвентах и резольвентных матрицах положительных эрмитовых операторов / Соавт. И.Е. Овчаренко // Там же. — Т.231, №5. — С.1063–1066. — Библиогр.: 13 назв.

261. *До теорії* узагальнених резольвент нещільно заданих ермітових стиснень / Співавт. І.Е. Овчаренко // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1976. — №10. — С.881–884. — Бібліогр.: 4 назв.

262. *О нелинейных* интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера–Хопфа. Ч.1 // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР. — 1976. — Вып.42. — С.47–90. — Библиогр.: 7 назв.

1977

263. *О некоторых* новых результатах по теории факторизации матриц-функций на единичной окружности / Соавт. И.М. Спитковский // Докл. АН СССР. — 1977. — Т.234, №2. — С.287–290. — Библиогр.: 13 назв.

264. *Об одной* интерполяционной проблеме, родственной проблеме моментов Стилтьеса / Соавт А.А. Нудельман // Докл. АН УРСР. — Сер. А. — 1977. — №12. — С.1063–1072. — Библиогр.: 7 назв.

265. *О нелинейных* интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера–Хопфа. Ч.2 // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР. — 1977. — Вып.45. — С.67–92. — Библиогр.: 3 назв.

266. *О Q-функциях* и SC-резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий / Соавт. И.Е. Овчаренко // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т.18, №5. — С.1032–1056. — Библиогр.: 16 назв.

267. *Замечание* об одной теореме из статьи В.А. Якубовича "Частная теорема для случая, когда ..., II" // Там же. — Т.18, №6. — С.1411–1413. — Библиогр.: 3 назв.

268. *Über* einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitischer Operatoren im Raume $\Pi_\varkappa$ Zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen / Mitaut. H. Langer // Math. Nachr. — 1977. — Bd.77. — S.187–236.

   О некоторых проблемах продолжения, тесно связанных с теорией эрмитовых операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$. I. Некоторые функциональные классы и их представления.

269. *Борис Яковлевич Левин:* К 70-летию со дня рождения / Соавт. Н.И. Ахиезер, Н.В. Ефимов, М.А. Лаврентьев и др. // Успехи мат. наук. — 1977. — Т.32, №5. — С.210–213.

1978

270. *Обратные* задачи для Q-функций и резольвентных матриц положительных эрмитовых операторов / Соавт. И.Е. Овчаренко // Докл. АН СССР. — 1978. — Т.242, №3. — С.521–524. — Библиогр.: 6 назв.

271. *Аппроксимация* функций класса L^∞ функциями класса $H^\infty + C$ / Соавт.: В.М. Адамян, Д.З. Аров // Исслед. по линейным операторам и теории функций: 99 нерешен. задач линейного и комплекс. анализа: Зап. науч. семинаров ЛОМИ. — Л., 1978. — Т.81. — С.190–192. — Библиогр.: 9 назв.

272. *Об измеримых* эрмитово-положительных функциях // Мат. заметки. — 1978. — Т.23, вып.1. — С.79–89. — Библиогр.: 7 назв.

273. *О факторизации* $\mathcal{L}$-спектральных матриц-функций на единичной окружности / Соавт. И.М. Спитковский // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР. — 1978. — Вып.47. — С.41–63. — Библиогр.: 17 назв.

274. *Introduction* to the theory of linear nonselfadjoint operators / Coaut. I. Gohberg. — 2-nd print. — Providence: Amer. Math. Soc., 1978. — 378 p.

275. *On some* mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua. I. / Coaut. H. Langer // Integr. Equat. and Oper. Theory. — 1978. — V.1, N 3. — P.364–399.

   Первая часть перевода: О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Прил. теорий функций в механике сплошной среды. — М., 1965. — Т.2. — С.283–322.

276. *Über* einige Fortsetzungsproblems, die eng mit der Theorie hermitischer Operatoren im Raume $\Pi_\varkappa$ zusammenhängen. II. Verallgemeinerte Resolventen, u-Resolventen und ganze Operatoren / Mitaut. H. Langer // J. Funct. Anal. — 1978. — Bd.30, N 3. — S.390–447.

   О некоторых проблемах продолжения, тесно связанных с теорией эрмитовых операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$. II. Обобщенные резольвенты, u-резольвенты и целые операторы.

1979

277. *О прямых* и обратных задачах для частот граничной диссипации неоднородной струны / Соавт. А.А. Нудельман // Докл. АН СССР. — 1979. — Т.247, №5. — С.1046–1049. — Библиогр.: 10 назв.

278. *О некоторых* предложениях типа теорем Фурье–順 Планшереля и Винера–Пэйли, получаемых методами теории спектральных функций / Соавт. А.А. Нудельман // Функц. анализ и его приложения. — 1979. — Т.13, вып.4. — С.79–80. — Библиогр.: 10 назв.

279. *On some* extension problems which are closely connected with the theory of hermitian operators in a space $\Pi_\varkappa$. III. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems. Part I / Coaut. H. Langer // Beitr. Anal. — 1979. — N 14. — S.25–40.

   О некоторых проблемах продолжения, тесно связанных с теорией эрмитовых операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$. III. Индефинитные аналоги проблем моментов Гамбургера и Стилтьеса. Ч.1.

1980

280. *Марк Аронович Наймарк:* Некролог / Соавт.: И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Д.П. Желобенко и др. // Успехи мат. наук. — 1980. — Т.35, №4. — С.135–140.

1981

281. *Континуальные* аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ними проблемы продолжения / Соавт. Г.К. Лангер // Докл. АН СССР. — 1981. — Т.258, №3. — С.537–541. — Библиогр.: 15 назв.

282. *О представлении* целых функций, положительных на вещественной оси, или на полуоси, или вне конечного интервала / Соавт. А.А. Нудельман // Мат. исслед. / Ин-т математики АН МолдССР. — 1981. — Вып.61. — С.40–59. — Библиогр.: 19 назв.

283. *Задача* об отыскании минимума энтропии в неопределенных проблемах продолжения / Соавт. Д.З. Аров // Функц. анализ и его приложения. — 1981. — Т.15, вып.2. — С.61–64. — Библиогр.: 17 назв.

284. *Замечательные* пределы, порождаемые классическими средними / Соавт. А. Нудельман // Квант. — 1981. — №9. — С.13–15.

285. *О нестандартных* вариационных задачах определения оптимальной формы судна / Соавт. В.Г. Сизов // Тр. юбил. науч. сессии / Болг. ин-т гидродинамики судна. — София, 1981.†

†Издание нет возможности просмотреть de visu.

286. *О функциях* спектрального сдвига, возникающих при возмущениях положительного оператора / Соавт. В.А. Яврян // J. operator theory. — Bucharest, 1981. — V.6. — P.155–191.

287. *Some* propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space $\Pi_\varkappa$ / Coaut. H. Langer // Acta sci. Math. — Szeged, 1981. — V.43, fasc 1–2. — P.181–205.
Некоторые суждения об аналитических матричных функциях, связанных с теорией операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$.

288. *On some* extension problems which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space $\Pi_\varkappa$. Part 3: Indefinite analogues of the Hamburger and Stiltjes moment problems (part 2) / Coaut. H. Langer // Beitr. Anal. — 1981. — V.15. — P.27–45.
О некоторых проблемах продолжения, тесно связанных с теорией эрмитовых операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$. Ч.3: Индефинитные аналоги проблем моментов Гамбургера и Стилтьеса (ч.2).

289. *The method* of symmetric and Hermitian forms in the theory of the separation of the roots of algebraic equations / Coaut. M.A. Naimark // Linear and Multilinear Algebra. — 1981. — V.10, N 4. — P.265–308.
Метод симметрических и эрмитовых форм и теории отделения корней алгебраических уравнений. Перевод статьи, впервые опубликованной в 1936 г. в Харькове.

290. *Наум Ильич Ахиезер:* Некролог / Соавт.: А.Н. Колмогоров, Б.Я. Левин, Б.М. Левитан и др. // Успехи мат. наук. — 1981. — Т.36, вып.4. — С.183–184: портр.

291. *Феликс Александрович Березин* (1931–1980): Некролог / Соавт. Н.Н. Боголюбов, И.М. Гельфанд, Р.Л. Добрушин и др. // Успехи мат. наук. — 1981. — Т.35, вып.4. — С.185–190: портр.

1982

292. *К теории* обратных задач для канонического дифференциального уравнения / Соавт. И.Е. Овчаренко // Докл. АН СССР. — Сер.А. — 1982. — №2. — С.14–18. — Библиогр.: 9 назв.

293. *Уравнения* Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральное представление через экспоненты / Соавт. Ю.Л. Шмульян // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1982. — Т.17, №4. — С.307–327; Т.17, №5. — С.335–375. — Библиогр.: 16 назв.

294. *Introduction* to the spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric / Coaut.: I.S. Iohvidov, H. Langer // Math. Res. — 1982. — V.9. — 120 p.
Введение в спектральную теорию операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

1983

295. *Теорема* Борсука–Улама, или кое-что о погоде, о дрессированной лошади и двумерных полях / Соавт. А.А. Нудельман // Квант. — 1983. — №8. — С.20–25.

296. *Introduction* to the theory of linear nonselfadjoint operators / Coaut. I. Gohberg. — 3-rd print. — Providence: Amer. Math. Soc., 1983. — 378 p.

297. *Topics* in differential and integral equations and operator theory. — Basel: Birkhäuser Verl., 1983.†

298. *О вычислении* энтропийных функционалов и их минимумов в неопределенных проблемах продолжения / Соавт. Д.З. Аров // Acta Sci. Math. — Szeged, 1983. — V.45, fasc. 1–4. — P.33–50.

299. *О некоторых* обобщениях первой предельной теоремы / Соавт. И.М. Спитковский // Analysis Mathematica / Acad. Kiado. — Budapest, 1983. — V.9, fasc. 1. — P.23–41.

1984

300. *О специальном* представлении многочлена, положительного на системе замкнутых интервалов / Соавт.: В.Я. Левин, А.А. Нудельман. — Х., 1984. — 48 с. — (Препр. / АН УССР, ФТИНТ; 28-84).

301. *Интегральные* ганкелевы операторы и связанные с ними проблемы продолжения / Соавт. Ф.Э. Мелик-Адамян // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1984. — Т.19, №4. — С.311–332; Т.19, №5. — С.339–360. — Библиогр.: 17 назв.

302. *Some* function theoretic problems connected with the theory of spectral measures of isometric operator / Coaut.: V.M. Adamjan, D.Z. Arov // Lecture Notes in Math. — 1984. — V.1043. — P.160–163.
Некоторые функциональные теоретические проблемы, связанные с теорией мер изометрических операторов.

303. *Approximation* of bounded functions by elements of $H^\infty + C$ / Coaut.: V.M. Adamjan, D.Z. Arov // Ibid. — P.254–257.
Аппроксимация ограниченных функций элементами $H^\infty + C$.

304. *Some* problems connected with the Szegö limit theorems / Coaut.: I.M. Spitkovsky // Ibid. — P.285–288.
Некоторые проблемы, связанные с предельными теоремами Szegö.

305. *Banach* algebras of functions generated by the set of all almost periodic polynomials whose exponents belong to a given interval // Ibid. — P.632–635.

† Издание нет возможности просмотреть de visu.

Банаховы алгебры функций, порожденные множеством почти-периодических полиномов, чьи показатели принадлежат данному интервалу.

1985

306. *Диофантово* уравнение А.А. Маркова // Квант. — 1985. — №4. — С.13–16; №5. — С.59.

307. *On some* continuation probleme which are closely related to the theory of Hermitian operators in spaces $\Pi_{\varkappa}$. Part 4: Continuous analogues of orthogonal polynomials on the unit circle with respect to an indefinite weight and related continuation problems for some classes of functions / Coaut. H. Langer // J. of operator theory. — Bucharest, 1985. — V.13, N 2. — P.299–417.

О некоторых проблемах продолжения, тесно связанных с теорией эрмитовых операторов в пространстве $\Pi_{\varkappa}$. Ч.4. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на единичной окружности по индефинитному весу и связанные с ними проблемы продолжения для некоторых классов функций.

308. *Иосиф Семенович Иохвидов* (1919–1984): Некролог / Соавт.: Ю.М. Березанский, С.Л. Соболев, Е.М. Семенов // Успехи мат. наук. — 1985. — Т.40, №6. — С.131–132.

1986

309. *Матрично-континуальные* аналоги задач Шура и Каратеодори–Теплица / Соавт. Ф.Э. Мелик-Адамян // Изв. АН АрмССР. Сер. мат. — 1986. — Т.21, №2. — С.107–141. — Библиогр.: 17 назв.

310. *Об одном* дополнении к статье “Уравнения Винера–Хопфа, ядра которых допускают интегральные представления через экспоненты” / Соавт. Ю.Л. Шмульян // Там же. — Т.21, №3. — С.301–305. — Библиогр.: 6 назв.

1987

311. *Об определителях* возмущения и формуле следов для некоторых классов пар операторов // J. of operator theory. — Bucharest, 1987. — V.17, N 1. — P.129–187.

312. *Борис Яковлевич Левин:* К 80-летию со дня рождения / Соавт.: И.М. Гельфанд, Н.К. Никольский и др. // Успехи мат. наук. — 1987. — Т.42, №4. — С.207–210.

313. *Юрий Львович Далецкий:* К 60-летию со дня рождения / Соавт. Ю.М. Березанский, И.М. Гельфанд, С.Г. Крейн и др. // Там же. — С.213–214.

1988

314. *Introduction* to the theory of linear nonselfadjoint operators / Coaut. I. Gohberg. — 4-th print. — Providence: Amer. Math. Soc., 1988. — 378 p.

1989

315. *О некоторых* спектральных свойствах неоднородной струны с диссипативным граничным условием / Соавт. А.А. Нудельман // J. of operator theory. — 1989. — V.22. — P.369–395.

316. *Reminiscences* // Operator Theory: Advances and Applications. — 1989. — V.40. — P.60–61. — (The Gohberg Anniversary Collection).

1990

317. *On special* representations of polynomials that are positive on a system of closed intervals, and some applic. (Совместно с Б.Я. Левиным и А.А. Нудельманом) // Funct. Anal. Optimisation and Math. Economics. — N.-Y.; Oxgord: Oxford Univ. Press, 1990.

СОДЕРЖАНИЕ

М.Г. Крейн — ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В трех книгах

Книга I

КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ, ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПРИМЫКАЮЩИЕ ВОПРОСЫ

Книга II

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Научное издание

М.Г. Крейн

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

В трех книгах

Книга III

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СТРУНЫ И ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Компьютерный набор *В.В. Башинская*
И.Г. Васинюк
А.Г. Городничева

Компьютерная верстка *В.М. Чирков*

Подп. в печ. 22.10.97. Формат 60×90/16. Бум. офс. № 1.
Гарн. новая, газетная. Офс. печ. Физ. печ. л. 20,0.
Усл. печ. л. 20,0. Зак. № 171.

Оригинал-макет подготовлен на персональных компьютерах
и отпечатан в Институте математики НАН Украины.
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.