КНИГА

Дж. У. Моргана

УРАВНЕНИЯ ЗАЙБЕРГА – ВИТТЕНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТОПОЛОГИИ ГЛАДКИХ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

И ОБЗОР

С. К. Дональдсона

УРАВНЕНИЯ ЗАЙБЕРГА – ВИТТЕНА И ТОПОЛОГИЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

А. Л. Городенцева и *В. В. Долотина*

Москва
1997

Оглавление

Дж. У. Морган.

УРАВНЕНИЯ ЗАЙБЕРГА - ВИТТЕНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ТОПОЛОГИИ ГЛАДКИХ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

С. К. Дональдсон.

УРАВНЕНИЯ ЗАЙБЕРГА - ВИТТЕНА И ТОПОЛОГИЯ ЧЕТЫРЁХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ.

Дж. У. Морган

Уравнения Зайберга - Виттена и их приложения к топологии гладких четырёхмерных многообразий

THE SEIBERG-WITTEN EQUATIONS AND
APPLICATIONS TO THE TOPOLOGY OF
SMOOTH FOUR-MANIFOLDS

BY

JOHN W. MORGAN

Mathematical Notes 44

Princeton University Press
Princeton, New Jersey
1996

Глава 1.

Введение

После революционной работы Дональдсона, относящейся примерно к 1980 году, стало ясно, что калибровочные инварианты главных рассслоений и связностей являются важным инструментом изучения гладких четырёхмерных многообразий. Дональдсон показал, что существенную роль играет пространство модулей антиавтодуальных связностей. В последующие пятнадцать лет в этой области наблюдался взрыв работ, приведший к вычислению полиномиальных инвариантов Дональдсона для широкого класса четырёхмерных многообразий, в особенности, для алгебраических поверхностей. Эти вычисления дали много мощных топологических следствий, среди которых, например, классификация эллиптических поверхностей с точностью до диффеоморфизма. О некоторых результатах, полученных с применением этих методов, см. в [1], [6] и [2].

Прошлой осенью Зайберг и Виттен в ходе исследований по квантовой теории поля ввели новый калибровочный инвариант (см. [9]), который, по их утверждению, должен быть тесно связан с инвариантами Дональдсона, и даже привели явную формулу, соотносящую свой инвариант с дональдсоновским. Хотя математического объяснения этой связи до сих пор нет[1], её наличие несомненно, а формула Зайберга - Виттена явно проверяется во всех просчитанных примерах. Можно, однако, забыв о какой бы то ни было связи, с самого начала работать непосредственно с новыми инвариантами вместо прежних антиавтодуальных, что и происходило в последние год-два.

С самого начала было ясно, что работать с новыми инвариантами будет гораздо легче, ибо они строятся по главным S^1-расслоениям, тогда как теория Дональдсона имела дело с неабелевыми структурными группами типа SU(2). Было удивительно, что столь простые инварианты смогут отразить все тонкости, обнаруживаемые инвариантами Дональдсона. Но довольно скоро Виттен [17], а затем Таубс, Кронхаймер и Мровка показали, что новые инварианты действительно улавливают эти тонкости, и что (по крайней мере, в очень многих случаях) их гораздо легче вычислять. Делается это путём явного решения уравнений Зайберга - Виттена на кэлеровых поверхностях (результаты о кэлеровых поверхностях см. в [3]). И сразу же чередой посыпались замечательные теоремы, каждая из которых по-своему обобщала и усиливала частичные результаты антиавтодуальной теории. Гипотезы, которые в рамках теории Дональдсона казались переспективными, но технически трудными и едва ли посильными, в действительности, вдруг превратились в стандартные упражнения по де-

---

[1] К настоящему времени эта ситуация уже исправлена работами В. Я. Підстригача и А. Н. Тюрина, см. об этом в добавлении С. Дональдсона (*прим. перев.*)

монстрации мощи новых инвариантов. Одна за другой эти гипотезы были доказаны — все кроме одной. Последняя классическая гипотеза, остающаяся открытой, называется «гипотеза $^{11}/_8$ » и относится к квадратичным формам, которые реализуются как формы пересечения на односвязных спинорных четырёхмерных многообразиях.

Цель этой работы — изложить основания теории инвариантов Зайберга - Виттена и показать, как они вычисляются для большинства кэлеровых поверхностей. Мы начинаем с базисных понятий: алгебры Клиффорда, спинорные структуры и их собратья — $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры, спинорные представления и спинорные расслоения. Затем мы рассматриваем оператор Дирака на спинорных расслоениях над четырёхмерными римановыми многообразиями. Переход к кэлеровой геометрии облегчается тем, что на кэлеровом многообразии оператор Дирака тесно связан с $\overline{\partial}$. Всё это будет подробно объяснено. Исчерпывающим введением в предмет является книга Лоусона - Майкельсона [7], в которой тщательно проработаны так же и многие другие вопросы спинорной геометрии.

Далее мы предъявляем уравнения Зайберга - Виттена и показываем, как с их помощью из бесконечномерного конфигурационного пространства получить конечномерное многообразие — пространство модулей классов калибровочно эквивалентных решений этих уравнений. Гомологический класс этого пространства модулей и будет значением инварианта Зайберга - Виттена. Мы получаем аналоги известных теорем антиавтодуальной теории. Уравнения, задающие пространство модулей, являются, по модулю калибровки, эллиптическими. При общем возмущении этих уравнений будет получаться гладкое ориентируемое пространство модулей, размерность которого можно подсчитать по теореме Атьи - Зингера об индексе. Для фиксации ориентации на пространстве модулей достаточно выбрать ориентацию пространств котгомологий H^2_+ и H^1 исходного четырёхмерного многообразия. При $b_2^+ > 1$ пространство модулей гладко зависит от метрики и возмущения. Если $b_2^+ = 1$, то при общем возмущении получается гладкое пространство модулей, но при изменении метрики и возмущения будут возникать особенности, представляющие собой классы приводимых решений. В результате, как и в антиавтодуальной теории, при $b_2^+ = 1$ для инвариантов Зайберга - Виттена возникает структура камер.

Далее мы переходим к доказательству важного отличительного свойства новой теории — компактности пространства модулей, которая вытекает из априорных ограничений на поточечные нормы решений уравнений Зайберга - Виттена. Эти результаты не имеет аналогов для уравнений антиавтодуальности. Обилие геометрии и техническая сложность антиавтодуальной теории, по большей части, напрямую связаны с некомпактностью пространства модулей. На беду или во благо, ничего этого у нас не будет: пространства модулей Зайберга - Виттена компактны и связываются компактным бордизмом при изменении метрики.

Из всех этих технических результатов становится ясно, что гомологический класс, представляемый пространством модулей решений во всём пространстве конфигураций, является инвариантом исходного четырёхмерного многообразия и $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры (по модулю изоморфизма) на нём. По определению, этот класс объявляется инвариантом Зайберга - Виттена $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры.

В заключение мы явно вычисляем пространства модулей решений уравнений Зайберга - Виттена для «большинства» алгебраических поверхностей, что немедленно приводит к нахождению инвариантов Зайберга - Виттена любых $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур на этих поверхностях. Ряд более специальных случаев, которые мы здесь не рассматриваем, можно разобрать, если развить описанные нами методы чуть далее (полный обзор имеется в [3]).

Об уравнениях Зайберга - Виттена и инвариантах, которые определяются из этих уравнений, можно было бы сказать ещё очень и очень многое. Аналоги многих теорем о кэлеровых многообразиях остаются справедливыми и для симплектических многообразий (см. [12,13,14]). Имеются также теоремы о склейке решений, приводящие к принципам Майера - Виеториса (см. [8]), которые, в свою очередь, дают формулы для инвариантов связных сумм, и это один из путей для их топологического осмысления. Несмотря на впечатляющий прогресс, достигнутый за минувший год, многое ещё остаётся сделать. Надеюсь, что эти записи послужат введением, которое позволит ещё большему числу математиков поспособствовать этому прогрессу.

Эта книжка является письменным вариантом цикла лекций, читаных в в прошлом году в университетах Коламбия и Принстон. Я хочу поблагодарить всех аспирантов, которые посещали эти лекции и своими замечаниями и вопросами помогли оформить эти записи.

Глава 2.

Алгебры Клиффорда и спинорные группы

При любом $n > 2$ ортогональная группа $\mathrm{SO}(n)$ имеет фундаментальную группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, и стало быть, обладает нетривиальной двулистной универсальной накрывающей, которая называется группой $\mathrm{Spin}(n)$. Красивая алгебраическая конструкция группы Spin и всего, что с ней связано, опирается на алгебры Клиффорда.

2.1. Алгебры Клиффорда

Пример. Прежде чем углубиться в дебри общих клиффордовых алгебр, рассмотрим один простой пример. Пусть S^3 — единичная сфера в алгебре кватернионов $\mathbb{H}$. Кватернионное умножение индуцирует структуру группы на S^3. Рассмотрим действие этой группы на $\mathbb{H}$ сопряжениями:

$$S^3 \times \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad : \qquad (\alpha, \lambda) \mapsto \alpha\lambda\alpha^{-1} \, .$$

Это действие является ортогональным, т. е. сохраняет норму. Поскольку оно оставляет на месте центр $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ алгебры $\mathbb{H}$, оно будет переводить в себя и ортогональное дополнение к $\mathbb{R}$ — трёхмерное подпространство $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ чисто мнимых кватернионов, которое, разумеется, можно естественно отождествить с алгеброй Ли группы S^3, так что наше действие превратится в присоединнное действием S^3 на своей алгебре Ли. Лёгкое геометрическое упражнение показывает, что сопряжение единичным кватернионом $\alpha \neq \pm 1$ сохраняет комплексную плоскость $\mathbb{C}_\alpha$, натянутую на 1 и α, и её ортогональное дополнение $\mathbb{C}_\alpha^\perp$, причём на первой из них действие тривиально, а на второй состоит во вращении на удвоенный угол ϑ между α и 1. Отсюда следует, что присоединённое действие элемента α на алгебру Ли $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ оставляет на месте касательную к окружности, проходящей через α, а на ортогональном дополнении к ней производит вращение на угол 2ϑ. Стало быть, все вращения $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ находятся в образе представления

$$S^3 \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \mathrm{SO}(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) = \mathrm{SO}(3) \; ,$$

Ясно также, что ядро этого представления есть пересечение S^3 с центром $\mathbb{H}$, т. е. центр S^3, равный $\{\pm 1\}$.

Таким образом, мы построили двойное накрытие группы $\mathrm{SO}(3)$ и отождествили его с мультипликативной группой кватернионов единичной длины.

Определение алгебры Клиффорда для пространства с положительно определенным скалярным произведением в общем случае таково. Пусть V есть конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с положительно определенным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, которое задаёт на V норму, обозначаемую $\|\cdot\|$. Рассмотрим тензорную алгебру пространства V:

$$T(V) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n \text{ раз}} .$$

Это ассоциативная алгебра с единицей 1. Алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ пространства V есть фактор $T(V)$ по двустороннему идеалу, порожденному всеми элементами вида

$$v\otimes v + ||v||^2\cdot 1$$

с $v\in V$. Заметим, что градуировка на $T(V)$ опускается до $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировки на $\mathrm{Cl}(V)$, что дает разложение

$$\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}_0(V)\oplus \mathrm{Cl}_1(V) ,$$

где $\mathrm{Cl}_0(V)$ есть подалгебра в $\mathrm{Cl}(V)$, а $\mathrm{Cl}_1(V)$ — модуль над этой подалгеброй. В соответствии с этим разложением всякий элемент $v\in \mathrm{Cl}(V)$ можно записать в виде v_0+v_1. Мы обозначим через

$$\varepsilon : \mathrm{Cl}(V)\longrightarrow \mathrm{Cl}(V)$$

гомоморфизм алгебр, действующий умножением на $+1$ на $\mathrm{Cl}_0(V)$ и умножением на -1 на $\mathrm{Cl}_1(V)$, т. е. $\varepsilon(v_0+v_1)=v_0-v_1$.

Выбрав в V ортонормированный базис $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, мы можем задать $\mathrm{Cl}(V)$ образующими и соотношениями: $\mathrm{Cl}(V)$ есть $\mathbb{R}$-алгебра, порожденная элементами $e_1,e_2,\ldots,e_n$ с соотношениями

$$e_i^2=-1 \qquad \forall\, i\leqslant n \qquad \text{и} \qquad e_i\cdot e_j = -e_j\cdot e_i \qquad \forall\, i\neq j\ .$$

Из них вытекает, в частности, что всякий элемент $\mathrm{Cl}(V)$ единственным способом записывается как сумма произведений вида $e_{i_1},\ldots,e_{i_t}$ с $i_1<\cdots<i_t$. Таким образом, размерность $\mathrm{Cl}(V)$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$ равна 2^d, где $d=\dim_{\mathbb{R}} V$.

Примеры. Будем понимать под $\mathbb{R}^n$ стандартное n-мерное евклидово пространство.

1) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1)=\mathbb{R}[x]/(x^2+1)\cong\mathbb{C}$; при этом подалгебра $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^1)$ отождествляется с действительными, а $\mathrm{Cl}_1(\mathbb{R}^1)$ — с чисто мнимыми комплексными числами.

2) Аналогично, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2)$ есть алгебра, порожденнная элементами x, y с соотношениями $x^2=-1$, $y^2=-1$, $xy=-yx$, и стало быть, изоморфна алгебре кватернионов $\mathbb{H}$. Подалгебра $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^2)$ порождена элементом xy и может быть отождествлена с $\mathbb{C}\subset\mathbb{H}$.

3) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)$ имеет вещественную размерность 8 и порождается элементами x, y, z, для которых $x^2=y^2=z^2=-1$ и $xy=-yx, xz=-zx, yz=-zy$. Эта алгебра изоморфна $\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$. Изоморфизм $\mathbb{H}$ с первым и вторым слагаемым, задаётся отображением четвёрки образующих $\{1,i,j,k\}$, соответственно, в четвёрки

$$\left\{\frac{1+xyz}{2},\ \frac{xy-z}{2},\ \frac{yz-x}{2},\ \frac{zx-y}{2}\right\}$$

$$\left\{\frac{1-xyz}{2},\ \frac{xy+z}{2},\ \frac{yz+x}{2},\ \frac{zx+y}{2}\right\}$$

Подалгебра $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^3)$ отождествляется с диагональной копией $\mathbb{H}$ в этом разложении.

4) Для произвольного пространства V с скалярным произведением имеется изоморфизм алгебр $\mathrm{Cl}(V) \cong \mathrm{Cl}_0(V \oplus \mathbb{R})$, задаваемый формулой
$$v_0 + v_1 \mapsto v_0 + v_1 e \ ,$$
где e — это единичный базисный вектор в $\mathbb{R}$. Проверка того, что это отображение есть изоморфизм алгебр, является легким упражнением. В частности, $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^4) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Сравнение с внешней алгеброй. Градуировка на $T(V)$ индуцирует возрастающую фильтрацию $\mathrm{Cl}(V)$ линейными подпространствами
$$0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \ \dots \quad ,$$
где $\mathcal{F}_t$ — это образ произведения $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{t\ \text{раз}}$ в $\mathrm{Cl}(V)$. Умножение в $\mathrm{Cl}(V)$ сохраняет эту фильтрацию, т. е. представляется отображениями $\mathcal{F}_i \otimes \mathcal{F}_j \longrightarrow \mathcal{F}_{i+j}$, так что можно определить соответствующую градуированную алгебру
$$\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}_*}(\mathrm{Cl}(V)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n \big/ \mathcal{F}_{n-1}$$
с индуцированным умножением.

Утверждение 2.1.1. $\mathrm{Gr}_{\mathcal{F}_*}(\mathrm{Cl}(V))$ *естественно изоморфна внешней алгебре* $\Lambda^*(V)$.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{F}}_*$ возрастающую фильтрацию на $T(V)$, индуцированную градуировкой. Поскольку алгебры $T(V)$ и $\mathrm{Gr}_{\widetilde{\mathcal{F}}_*}(T(V))$ естественно изоморфны, мы имеем коммутативную диаграмму
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}\left(v \otimes v + ||v||^2\right) \arrow[r] \arrow[d] & T(V) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Cl}(V) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{I}(v \otimes v) \arrow[r] & \mathrm{Gr}_{\widetilde{\mathcal{F}}_*}(T(V)) \arrow[r] & \mathrm{Gr}_{\mathcal{F}_*}(\mathrm{Cl}(V)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как фактор $T(V)$ по двустороннему идеалу, порожденному всевозможными $v \otimes v$ с $v \in V$, есть в точности внешняя алгебра $\Lambda^*(V)$, эта диаграмма индуцирует требуемый изоморфизм. □

Гомоморфизм $\mathrm{Cl}(V) \longrightarrow \Lambda^*(V)$ допускает естественное расщепление. Это расщепление $\Lambda^*(V) \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Cl}(V)$ линейно, но не мультипликативно, и строится следующим образом. Рассмотрим в $\Lambda^k(V)$ разложимый (т. е. содержащийся в $\Lambda^k(W) \subset \Lambda^k(V)$ для некоторого k-мерного подпространства $W \subset V$) элемент. Он записывается в виде $r\, e_1 \wedge \dots \wedge e_k$, где e_i образует ортонормальный базис в W, а $r > 0$. Положим
$$\sigma(r\, e_1 \wedge \dots \wedge e_k) = r\, e_1 \cdots e_k \ .$$

Проверка того, что эта формула корректно задаёт отображение, расщеплящее естественнную проекцию, является легким уражнением.

Изоморфизм σ позволяет воспринимать $\mathrm{Cl}(V)$ как алгебру, получающуюся из $\Lambda^*(V)$ *введением нового умножения*. Это новое умножение на образующих задаётся формулой
$$v \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = v \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_k - v \lrcorner (v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \ ,$$

где через $\llcorner$ обозначена свёртка:

$$v\llcorner(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \big\langle v \,,\, v_i \big\rangle \, v_1 \wedge \cdots \wedge \hat{v}_i \wedge \cdots \wedge v_k \,.$$

2.2. Группы Pin и Spin

Пусть $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$ обозначает мультипликативную группу единиц алгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Мы определяем группу $\mathrm{Pin}(V)$ как подгруппу в $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$, порожденную элементами $v \in V$ с $\|v\|^2 = 1$ (они являются единицами, поскольку квадрат любого из них равен -1). Группу $\mathrm{Spin}(V)$ мы определяем как пересечение $\mathrm{Pin}(V)$ с $\mathrm{Cl}_0(V)$, т. е. как ядро гомоморфизма групп $\mathrm{Pin}(V) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, индуцированного расщеплением $\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}_0(V) \oplus \mathrm{Cl}_1(V)$. Поскольку образующие $\mathrm{Pin}(V)$ содержатся в $\mathrm{Cl}_1(V)$, подгруппа $\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Pin}(V)$ имеет индекс два и состоит из всех тех элементов $\mathrm{Pin}(V)$, которые можно записать в виде произведения чётного числа образующих.

Давайте вычислим эти группы в наших первых трёх примерах.

1) Группа $\mathrm{Pin}(1)$ — это подгруппа $\mathbb{C}$, порожденная $\pm i$, и является, тем самым, циклической группой порядка 4. Её подгруппа $\mathrm{Spin}(1)$ — это группа второго порядка $\{\pm 1\} \subset \mathbb{R}$.

2) Группа $\mathrm{Pin}(2)$ — это подгруппа в $\mathbb{H}$, порожденная окружностью, проходящей через j и k, т. е. элементами вида $\cos(\vartheta)j + \sin(\vartheta)k$, где $\vartheta \in S^1$. Легко видеть, что эта группа есть объединение двух непересекающихся окружностей, первая из которых — это обычная единичная окружность в комплексной плоскости, натянутой на 1 и i, а вторая получается из неё умножением на j. Значит, группа $\mathrm{Spin}(2)$ изоморфна S^1.

3) Группа $\mathrm{Spin}(3)$ изоморфна группе единичных кватернионов в $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H}$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что при построенном выше изоморфизме $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ векторное пространство $\mathbb{R}^3$ отождествляется с множеством всех пар $(\alpha, -\alpha)$, где α — чисто мнимый кватернион. Следовательно, для любой пары α, β чисто мнимых единичных кватернионов, произведение $\alpha\beta \in \mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{H} \overset{\Delta}{\hookrightarrow} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Легко видеть, что множество таких произведений порождает группу S^3 всех единичных кватернионов.

Рассмотрим теперь $\mathrm{Spin}(4) \subset \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^4) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. При отождествлении $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)$ с $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^4)$ группа $\mathrm{Spin}(3)$ превращается, разумеется, в подгруппу группы $\mathrm{Spin}(4)$. Однако, в $\mathbb{R}^4$ есть много различных трёхмерных подпространств, и каждое такое подпространство даёт своё вложение $\mathrm{Spin}(3)$ в $\mathrm{Spin}(4)$. Легко проверить, что объединение образов всех этих вложений порождает подгруппу $S^3 \times S^3 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Тем самым, возникает отождествление $\mathrm{Spin}(4)$ с $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.

Заметим, что если $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — это ортонормированный базис для V, то любое произведение $e_{i_1} \cdots e_{i_t}$ будет элементом $\mathrm{Pin}(V)$. В частности, $\mathrm{Pin}(V)$ содержит базис векторного пространства $\mathrm{Cl}(V)$, а значит, $\mathrm{Cl}(V)$ есть *наименьшая* $\mathbb{R}$-алгебра, содержащая $\mathrm{Pin}(V)$ в качестве мультипликативной подгруппы группы единиц. Точно так же $\mathrm{Spin}(V)$ содержит $\mathbb{R}$-базис алгебры $\mathrm{Cl}_0(V)$.

Следствие 2.2.1. *Два действительных или комплексных представления алгебры* $\mathrm{Cl}_0(V)$, *ограничения которых на группу* $\mathrm{Spin}(V)$ *изоморфны, будут изоморфны и как представления алгебр. Всякое* $\mathrm{Spin}(V)$*-инвариантное подпространство* $A' \subset A$ *в действительном или комплексном* $\mathrm{Cl}_0(V)$*-модуле* A *является* $\mathrm{Cl}_0(V)$*-подмодулем в* A.

Доказательство. Предположим, что между $\mathrm{Cl}_0(V)$-модулями A и A' имеется $\mathbb{R}$-линейная биекция φ, перестановочная с индуцированным действием группы $\mathrm{Spin}(V)$. Тогда φ коммутирует умножением на базисные элементы $\mathrm{Cl}_0(V)$, а значит коммутирует и с действием $\mathrm{Cl}_0(V)$, т. е. является изоморфизмом $\mathrm{Cl}_0(V)$-модулей. Это доказывает первый результат. Второй устанавливается точно так же. □

Заметим, что аналогичные результаты имеются для $\mathrm{Cl}(V)$ и $\mathrm{Pin}(V)$.

Ясно, что естественное действие ортогональной группы $\mathrm{O}(V)$ на V продолжается до действия $\mathrm{O}(V)$ на $\mathrm{Cl}(V)$ сохраняющими $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку автоморфизмами алгебры. Это действие эффективно, и в частности, индуцирует вложение группы $\mathrm{SO}(V)$ в группу автоморфизмов элгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Поскольку алгебра $\mathrm{Cl}(V)$ порождается элементами из V, и $v \cdot v = -\|v\|^2$, образ этого вложения состоит, как легко видеть, из всех автоморфизмов алгебры $\mathrm{Cl}(V)$, которые переводят подпространство $V \subset \mathrm{Cl}(V)$ в себя и действуют на нём с сохранением ориентации. Группа $\mathrm{Spin}(V)$ также действует на $\mathrm{Cl}(V)$ — сопряжениями: $\sigma \cdot c = \sigma c \sigma^{-1}$, и это действие, очевидно, тоже сохраняет структуру алгебры и $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировку. Здесь и проявляется фундаментальная связь между группами $\mathrm{SO}(V)$ и $\mathrm{Spin}(V)$.

Лемма 2.2.2. *Действия* $\mathrm{Spin}(V)$ *сопряжениями на* $\mathrm{Cl}(V)$ *индуцирует представление* $\mathrm{Spin}(V)$ *автоморфизмами алгебры Клиффорда* $\mathrm{Cl}(V)$. *Образ этого представления состоит из всех автоморфизмов, которые переводят* $V \subset \mathrm{Cl}(V)$ *в себя и действуют на* V *с сохранением ориентации, так что возникает эпиморфное отображение* $\mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ *с ядром* $\{\pm 1\}$. *При* $\dim V \geqslant 3$ *это ядро совпадает с центром группы* $\mathrm{Spin}(V)$, *и таким образом,* $\mathrm{Spin}(V)$ *отождествляется с универсальной накрывающей группой для группы* $\mathrm{SO}(V)$.

Доказательство. Во-первых, заметим, что действие $\mathrm{Spin}(V)$ на $\mathrm{Cl}(V)$ получается ограничением действия $\mathrm{Pin}(V)$ на $\mathrm{Cl}(V)$ сопряжениями. Проверим, что последнее сохраняет $V \subset \mathrm{Cl}(V)$. Это достаточно проделать на образующих $\mathrm{Pin}(V)$, т. е. на элементах единичной длины в V. Для любого $w \in V$ с $\|w\|^2 = 1$ и любого $v \in V$ имеем:

$$wvw^{-1} = -R_{w^\perp}(v) ,$$

так что, в частности, $wvw^{-1} \in V$. Следовательно, $\mathrm{Spin}(V)$ переводит V в себя с сохранением ориентации. Заметим, что образ представления $\mathrm{Spin}(V)$ в пространстве V состоит из всевозможных композиций чётного числа отражений в гиперплоскостях, ортогональных векторам единичной длины. Как известно, всякий элемент $\mathrm{SO}(V)$ также является произведением чётного числа отражений. Поэтому гомоморфизм $\mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ сюрьективен. Ясно, что ядром этого представления будет пересечение $\mathrm{Spin}(V)$ с центром $\mathrm{Cl}(V)$.

Утверждение 2.2.3. *Если размерность* V *чётна, то центр алгебры Клиффорда совпадает с* $\mathbb{R} \subset \mathrm{Cl}_0(V)$. *Если размерность* V *нечётна, то центр* $\mathrm{Cl}(V)$ *изоморфен* $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, *а его пересечение с* $\mathrm{Cl}_0(V)$ *совпадает с* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Фиксируем в V ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Прямое вычисление показывает, что на базисных мономах

$$e_j \cdot (e_1 \cdot \cdots \cdot e_t)) = \pm (e_1 \cdot \cdots \cdot e_t)) \cdot e_j ,$$

где знак равен $(-1)^t$, когда j не присутствует среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_t$, и равен $(-1)^{t-1}$ в противном случае. Из единственности разложения по базисным мономам теперь легко следует, что в случае чётной размерности V центр $\mathrm{Cl}(V)$ состоит из одних только действительных кратных единицы 1, а в случае нечётной — является двумерным действительным векторным пространством, натянутым на 1 и $e_1 \cdots e_n$. ☐

Таким образом, центр $\mathrm{Spin}(V)$ есть подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{R}^*$, а поскольку квадрат любой образующей $\mathrm{Pin}(V)$ равен -1, мы заключаем, что $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Spin}(V)$ для всех V.

Утверждение 2.2.4. *Пересечение* $\mathrm{Spin}(V)$ *с центром* $\mathrm{Cl}(V)$ *есть* $\{\pm 1\}$.

Доказательство. Обозначим через $\varphi \longmapsto \varphi^t$ инволюцию на $\mathrm{Cl}(V)$, индуцированную отображением $T(V) \longrightarrow T(V)$, переводящим $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ в $v_r \otimes \cdots \otimes v_1$. Легко показать, что *норма*

$$N: \ \mathrm{Pin}(V) \longrightarrow \mathbb{R}^* \quad : \qquad \alpha \longmapsto \alpha\varepsilon(\alpha^t)$$

(где, напомню, $\varepsilon(x) = x_0 - x_1$ для $x = x_0 + x_1 \in \mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}_0(V) \oplus \mathrm{Cl}_1(V)$) является мультипликативным гомоморфизмом. Поскольку $\mathrm{Pin}(V)$ порождается элементами с квадратом -1, образ норменного отображения $\mathrm{Pin}(V) \xrightarrow{N} \mathbb{R}^*$ содержится в $\{\pm 1\}$. Более того, прямое вычисление показывает, что $N(v) = 1$ для любого $v \in V$ с $||v|| = 1$, так что $N|_{\mathrm{Pin}(V)} \equiv 1$. Ясно также, что ограничение норменного отображения на центр $\mathrm{Cl}(V)$ есть возведение в квадрат. Из этого следует, что центр $\mathrm{Spin}(V)$ содержится в $\{\pm 1\}$, а значит, совпадает с $\{\pm 1\}$. ☐

Итак, мы построили естественный изоморфизм $\mathrm{Spin}(V)/\{\pm 1\} \to \mathrm{SO}(V)$. Покажем теперь, что $\mathrm{Spin}(V)$ не является простым объединением двух дизъюнктных копий $\mathrm{SO}(V)$.

Утверждение 2.2.5. *Если* $\dim V \geqslant 2$, *то естественное отображение*

$$\mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$$

является нетривиальным двойным накрытием.

Доказательство. То, что наш гомоморфизм $\mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ является двойным накрытием, мы уже видели, так что остаётся лишь проверить, что при $\dim V \geqslant 2$ это накрытие нетривиально. Для этого достаточно ограничиться двумерным подпространством $W \subset V$, ибо прообраз $\mathrm{SO}(W) \subset \mathrm{SO}(V)$ есть $\mathrm{Spin}(W) \subset \mathrm{Spin}(V)$, и в силу эпиморфизма $\pi_1(\mathrm{SO}(W)) \to \pi_1(\mathrm{SO}(V))$ достаточно убедиться, что накрытие $\mathrm{Spin}(W) \to \mathrm{SO}(W)$ нетривиально. Выше мы отождествили $\mathrm{Cl}(W)$ с $\mathbb{H}$, а $\mathrm{Spin}(V)$ с единичной окружностью в $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. При этом $W \subset \mathrm{Cl}(W)$ отождествляется с линейной оболочкой j и k. Таким образом, действие $\mathrm{Spin}(W)$ сопряжениями на W есть просто квадрат обычного действия S^1 на W. Отсюда всё следует. ☐

Доказательство леммы 2.2.2 на этом заканчивается. ☐

Следствие 2.2.6. $\mathrm{Spin}(V)$ *есть компактная группа Ли размерности* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ *(где* $n = \dim V$*); она связна при* $n > 1$, *односвязна при* $n > 2$ *и имеет ту же алгебру Ли, что и* $\mathrm{SO}(n)$.

Следствие 2.2.7. *Всякий (действительный или комплексный) модуль над* $\mathrm{Cl}_0(V)$ *или* $\mathrm{Cl}(V)$ *вполне приводим, т. е. может быть разложен в прямую сумму неприводимых модулей.*

Доказательство. Поскольку группы Ли $\mathrm{Spin}(V)$ и $\mathrm{Pin}(V)$ компактны, для их представлений соответствующее утверждение справедливо. Наш результат вытекает отсюда в силу следствия 2.2.1. ☐

Пример. Выше мы отождествили $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)$ с алгеброй $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, а $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^3)$ с образом диагонального вложения $\mathbb{H} \overset{\Delta}{\hookrightarrow} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Поскольку $\dim \mathrm{Spin}(3) = 3$, группа $\mathrm{Spin}(3)$ есть подгруппа всех единиц с нормой $+1$ в $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^3) = \mathbb{H}$ и отождествляется с S^3 или $\mathrm{SU}(2)$. Действие $\mathrm{Spin}(3)$ на $\mathbb{R}^3$ совпадает с ограничением на трёхмерное пространстве чисто мнимых кватернионов обычного действия S^3 сопряжениями в $\mathbb{H}$ и представляет собой стандартное присоединённое действие $\mathrm{SU}(2)$ на своей алгебре Ли. В частности, образом этого представления является $\mathrm{SO}(3)$. Несмотря на то, что в бо́льших размерностях алгебр с делением вроде $\mathbb{H}$ и не существует, мы сумели обобщить эту конструкцию на высшие размерности, использовав в роли $\mathbb{H}$ алгебру Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$. Так, группа $\mathrm{Spin}(4)$ представляет собой двойное накрытие группы $\mathrm{SO}(4) \cong {\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)}\big/_{\{\pm 1\}}$, и тем самым, $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$. Ниже мы подробно изучим это разложение.

2.3. Расщепление алгебры Клиффорда

Пусть теперь V является *ориентированным* действительным векторным пространство с положительно определенным скалярным произведением. Зафиксируем в V положительный ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и рассмотрим в *комплексифицированной* алгебре Клиффорда $\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$, которая является уже $\mathbb{C}$-алгеброй, элемент

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^{[(n+1)/2]} e_1 \cdots e_n \ .$$

Простое вычисление показывает, что $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$, и что $\omega_{\mathbb{C}}$ не зависит от выбора положительного ортонормированного базиса. Таким образом, $\omega_{\mathbb{C}}$ задаёт каноническое разложение пространства $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$ в прямую сумму $(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^+ \oplus (\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^-$ собственных подпространств $(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^\pm$ оператора умножения слева на $\omega_{\mathbb{C}}$, состоящих из векторов с собственными значениями ± 1. Заметим, что при нечётной $\dim V$ элемент $\omega_{\mathbb{C}}$ лежит в центре $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$, тогда как при чётной $\dim V$ он лежит в центре $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$ и антикоммутирует с элементами из $\mathrm{Cl}_1(V) \otimes \mathbb{C}$.

В частности, если $\dim(V) = n$ нечётна, то подпространства $(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^\pm$ являются подалгебрами, которые обнуляют друг друга, т. е. мы имеем ортогональное разложение алгебр

$$\mathrm{Cl}(V) \times \mathbb{C} = (\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^+ \oplus (\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^- \ .$$

Лемма 2.3.1. *Если* $\dim V$ *нечётна, то обе алгебры* $(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^\pm$ *изоморфны* $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$.

Доказательство. Поскольку умножение на $\omega_{\mathbb{C}}$ переставляет $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$ и $\mathrm{Cl}_1(V) \otimes \mathbb{C}$, то $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$ имеет тривиальные пресечения с $(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^\pm$. Поэтому композиции

$$\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\pi^\pm} (\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^\pm$$

суть изоморфизмы алгебр. ☐

Отметимм, что подалгебра $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C} \subset \mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$ представляет собой график изоморфизма алгебр $(\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^+ \to (\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C})^-$.

Примеры. Поскольку $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{C}$, мы имеем $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ и разложение комплексифицированной алгебры в сумму подалгебр $(\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) \otimes \mathbb{C})^\pm$ соответствует стандартному разложению

$$\mathbb{C} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \ .$$

Отметим, что это разложение не соответствует никакому разложению вещественной алгебры Клиффорда, ибо последняя проста. Напротив, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)$ отождествляется с $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, и комплексификация этого расщепления как раз и будет разложением $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}$ в сумму подалгебр

$(\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)\otimes\mathbb{C})^{\pm}$, так что здесь разложение комплексифицированной алгебры индуцируется разложением исходной вещественной алгебры.

Лемма 2.3.2. *Если* $\dim V\equiv 3 \pmod 4$, *то* $\mathrm{Cl}(V)$ *расщепляется в ортогональную прямую сумму двух вещественных алгебр* $\mathrm{Cl}(V)=\mathrm{Cl}(V)^+\oplus\mathrm{Cl}(V)^-$ *и описанное выше разложение комплексифицированной алгебры будет индуцировано этим расщеплением.*

Доказательство. При $\dim V\equiv 3 \pmod 4$ комплексная единица

$$\omega_{\mathbb{C}}=(-1)^{(n+1)/4)}e_1\cdots e_n$$

является на самом деле вещественной, и стало быть её собственные $\pm$-подпространства тоже будут действительными. ☐

Если размерность V чётна, элемент $\omega_{\mathbb{C}}$ доставляет расщепление совсем другого типа. В этом случае $\omega_{\mathbb{C}}$ лежит в центре $\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C}$, и тем самым, индуцирует разложение

$$\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C}=(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^+\oplus(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^-\ ,$$

которое на подпространствах $W\subset V$ коразмерности 1 согласуется с построенным выше разложением «нечётных» алгебр $\mathrm{Cl}(W)\cong\mathrm{Cl}_0(V)$. В частности, имеется изоморфизм алгебр $(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^+\cong(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^-$.

Лемма 2.3.3. *Если* $\dim V$ *чётна, то* $(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^+$ *как алгебра изоморфна* $\mathrm{Cl}(W)\otimes\mathbb{C}$, *где* $W\subset V$ *— произвольное подпространство коразмерности* 2.

Доказательство. Пусть $W\subset W'\subset V$, где $W'\subset V$ есть подпространство коразмерности 1. Поскольку $\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C}\cong\mathrm{Cl}(W')\otimes\mathbb{C}$, мы имеем изоморфизмы

$$(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^+\cong(\mathrm{Cl}(W')\otimes\mathbb{C})^+\cong\mathrm{Cl}_0(W')\otimes\mathbb{C}\cong\mathrm{Cl}(W)\otimes\mathbb{C}\ .$$

☐

Точно так же имеется и разложение

$$\mathrm{Cl}_1(V)\otimes\mathbb{C}=(\mathrm{Cl}_1(V)\otimes\mathbb{C})^+\oplus(\mathrm{Cl}_1(V)\otimes\mathbb{C})^-\ .$$

Отметим (хотя мы и не будем сейчас этого доказывать), что получающееся в результате разложение $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$ на четыре слагаемых соответствует отождествлению $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$ с алгеброй 2×2-матриц над $(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^+$.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, соотносящий положительные спиноры $(\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C})^+$ с автодуальными формами $\Lambda^*_+(V)\otimes\mathbb{C}$.

Лемма 2.3.4. *Пусть* $\dim V=4$. *Естественный изоморфизм векторных пространств* $\Lambda^*(V)\otimes\mathbb{C}\cong\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$ *отождествляет* $(\mathrm{Cl}_0(V)\otimes\mathbb{C})^+$ *с*

$$\mathbb{C}\cdot\frac{1+\omega_{\mathbb{C}}}{2}\oplus(\Lambda^2_+(V)\otimes\mathbb{C})\ .$$

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{Cl}_0(V)$ отождествляется с $\Lambda^0(V)\oplus\Lambda^2(V)\oplus\Lambda^4(V)$, и умножение на $\omega_{\mathbb{C}}$ сохраняет $\Lambda^2(V)\otimes\mathbb{C}$ и переставляет друг с другом $\Lambda^0(V)\otimes\mathbb{C}$ и $\Lambda^4(V)\otimes\mathbb{C}$. Зафиксируем в пространстве V положительный ортонормированный базис $\{e_1,\dots,e_4\}$. Тогда

$$\omega_{\mathbb{C}}\cdot(e_1e_2)=e_3e_4\ ,$$

и в силу симметрии, $\omega_{\mathbb{C}}e_{i_1}e_{i_2}=*(e_{i_1}e_{i_2})$ для любой пары различных индексов i_1,i_2. Отсюда всё следует. ☐

Отметим, что данный результат *неверен* для действительной единицы $\omega_{\mathbb{R}}=e_1e_2e_3e_4$ вместо комплексной.

2.4. Комплексификация $\mathrm{Cl}(V)$

Начнём с первых двух из наших примеров. Как мы видели, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{C}$, а значит $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Далее, мы знаем, что $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$, и стало быть, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{C}$. Запишем элементы $\mathbb{H}$ как $x + jy$ с $x, y \in \mathbb{C}$ и определим отображение из $\mathbb{H}$ в алгебру $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ комплексных 2×2-матриц, отправляя $\alpha + j\beta$ в

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

(действие такой матрицы на $\mathbb{H}$, рассматриваемом как двумерное векторное пространстве над $\mathbb{C}$, заключается в умножении слева на кватернион $\alpha + j\beta$). Это отображение по линейности продолжается до гомоморфизма $\mathbb{C}$-алгебр

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}) \ ,$$

прчём ясно, что это — изоморфизм. Таким образом, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}$ отождествляется с алгеброй комплексных 2×2-матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Заметим, что $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}$ есть алгебра 2×2=матриц над $\mathbb{C} \cong (\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C})^+$.

Этих двух вычислений оказывается достаточно для индуктивного описания строения всех комплексифицированных алгебр Кифформа. Шаг индукции доставляет

Лемма 2.4.1. $\mathrm{Cl}\,(V \oplus \mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C} \cong \left(\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\right) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \left(\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\right)$.

Доказательство. Пусть $v_1, \cdots, v_n$ есть ортонормальный базис в V, а e_1, e_2 — стандартный базис в $\mathbb{R}^2$. Зададим $\mathbb{R}$-линейное отображение

$$V \oplus \mathbb{R}^2 \to \left(\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\right) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}) \ ,$$

отправляя v_j в $iv_j \otimes e_1e_2$ (для всех $1 \le j \le n$), а e_r — в $1 \otimes e_r$. Прямая проверка необходимых соотношений показывает, что это отображение продолжается до гомоморфизма алгебр

$$\mathrm{Cl}(V) \to \left(\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\right) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}) \ ,$$

а затем, по линейности, до отображения

$$\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \to \left(\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\right) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \otimes \mathbb{C}) \ .$$

Поскольку размерности одинаковы, и все образующие правой алгебры попадают в образ, это отображение является изоморфизмом алгебр. ☐

Следствие 2.4.2. *Если* $\dim V = 2n$, *то алгебра* $\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ *изоморфна матричной алгебре* $\mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$. *Если* $\dim V = 2n + 1$, *то алгебра* $\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ *изоморфна прямой сумме двух экземпляров* $\mathrm{Mat}_{2^n}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Это легко доказывается по индукции с использыванием предыдущей леммы, проделанных выше вычислений для размерностей один и два, а также элементарного изоморфизма $\mathrm{Mat}_k(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) \cong \mathrm{Mat}_{km}(\mathbb{C})$. ☐

Следствие 2.4.3. *Если* $\dim V = 2n$, *то* $(\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C})^+ \cong \mathrm{Mat}_{2^{n-1}}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Это сразу получается из предыдущего по лемме 2.3.3. ☐

Если размерность V нечётна, то комплексная единица $\omega_{\mathbb{C}}$ лежит, как мы видели, в центре алгебры $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$, так что разложение последней в прямую сумму матричных алгебр является не чем иным как разложением по собственнм $\pm$-подпространствам элемента $\omega_{\mathbb{C}}$. Стало быть, иинволюция $\alpha \mapsto \varepsilon(\alpha)$ изоморфно переводит слагаемые этого разложения друг в друга, и тем самым, подалгебра $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$ вкладывается в прямую сумму матричных алгебр диагональным образом.

Следствие 2.4.4. *При* $\dim V = 2n$ *алгебра* $\mathrm{Cl}(V)$ *имеет единственное (с точностью до изоморфизма) конечномерное комплексное неприводимое представление, обозначаемое* $S_{\mathbb{C}}(V)$. *Его размерность равна* 2^n, *и действие* $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$ *на* $S_{\mathbb{C}}(V)$ *индуцирует изоморфизм*

$$\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}}(V)) = S_{\mathbb{C}}(V) \otimes S_{\mathbb{C}}(V)^* \,.$$

При $\dim V = 2n+1$ *алгебра* $\mathrm{Cl}(V)$ *имеет (с точностью до изоморфизма) ровно два комплексных конечномерных неприводимых представления одинаковой размерности* 2^n. *Их сужения на* $\mathrm{Cl}_0(V)$ *задают одно и то же представление этой подалгебры, обозначаемое* $S_{\mathbb{C}}(V)$. *Клиффордова умножения индуцирует изоморфизм*

$$\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\,(S_{\mathbb{C}}(V)) = S_{\mathbb{C}}(V) \otimes S_{\mathbb{C}}(V)^* \,.$$

Доказательство. По теореме Веддерберна матричная алгебра $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$ имеет единственное с точностью до изоморфизма комплексное конечномирное неприводимое представление $S^n_{\mathbb{C}}$, отождествляется посредством этого представления с алгеброй эндоморфизмов:

$$\mathrm{Mat}_m(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\,(S^n_{\mathbb{C}}) \,.$$

Чётномерный случай отсюда сразу следует.

В случае, когда размерность V нечётна, теорема Веддерберна показывает, что неизоморфных комплексных конечномирных неприводимых представлений у алгебры $\mathrm{Cl}(V)$ имеется в точности два: они получаются из неприводимых представлений матричных слагаемых путём проектирования $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$ на эти слагаемые. Поскольку $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$ вложено в прямую сумму матричных алгебр диагонально, ограничения этих двух неизоморфных неприводимых комплексных представлений $\mathrm{Cl}(V)$ на $\mathrm{Cl}_0(V)$ будут изоморфны. Поскольку оба они неприводимы, последнее утверждение также легко следует из теоремы Веддерберна. ☐

Следствие 2.4.5. *Пусть размерность* V *чётна, и* $S_{\mathbb{C}}(V)$ *— это (единственное) конечномерное комплексное неприводимое представление алгебры* $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$. *Собственные* $\pm$*-подпространства* $S^{\pm}_{\mathbb{C}}(V)$ *оператора* $\omega_{\mathbb{C}}$ *являются* $\mathrm{Cl}(V)_0 \otimes \mathbb{C}$*-подмодулями, которые будут переставляться действием* $\mathrm{Cl}(V)_1 \otimes \mathbb{C}$, *а клиффордово умножение индуцирует изоморфизмы*

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Cl}(V)_0 \otimes \mathbb{C})^+ &\cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^+_{\mathbb{C}}(V)) \\
(\mathrm{Cl}(V)_0 \otimes \mathbb{C})^- &\cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^-_{\mathbb{C}}(V)) \\
(\mathrm{Cl}(V)_1 \otimes \mathbb{C})^- &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S^+_{\mathbb{C}}(V), S^-_{\mathbb{C}}(V)) \\
(\mathrm{Cl}(V)_1 \otimes \mathbb{C})^+ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S^-_{\mathbb{C}}(V), S^+_{\mathbb{C}}(V)) \,.
\end{aligned}$$

В частности, $\mathrm{Cl}_0(V) \otimes \mathbb{C}$*-модули* $S^{\pm}_{\mathbb{C}}(V)$ *не изоморфны друг другу.*

Доказательство. Легко проверить, что оба слагаемых $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$ действуют именно так, как утверждается. В силу изоморфизма $\mathrm{Cl}(V) \cong \mathrm{End}(S_{\mathbb{C}}(V))$, индуцированного клиффордовым умножением, все остальные факты отсюда сразу следуют. ☐

2.5. Комплексные спинорные представления

Следствие 2.5.1. *С точностью до изоморфизма ровно одно из всех комплексных линейных представлений группы* $\mathrm{Spin}(V)$ *получается ограничением конечномерного комплексного неприводимого представления алгебры* $\mathrm{Cl}(V)$.

Доказательство. Так как $\mathrm{Spin}(V)$, по определению, содержится в $\mathrm{Cl}_0(V)$, это сразу следует из предыдущих результатов и следствия 2.2.1. ☐

Это представление группы $\mathrm{Spin}(V)$ называется *комлексным спинорным представлением* и обозначается

$$\Delta_{\mathbb{C}} : \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{Aut}_C(S_{\mathbb{C}}(V)) .$$

Утверждение 2.5.2. *Если* $\dim V = 2n+1$ *нечётна, то* $\Delta_{\mathbb{C}}$ *является неприводимым представлением группы* $\mathrm{Spin}(V)$ *и имеет размерность* 2^n.

Если $\dim V = 2n$ *чётна, то представление* $\Delta_{\mathbb{C}}$ *разлагается в сумму двух неэквивалентных неприводимых представлений* $S_{\mathbb{C}}^{+}(V)$ *и* $S_{\mathbb{C}}^{-}(V)$, *которые имеют размерность* 2^{n-1} *и обозначаются через* $\Delta_{\mathbb{C}}^{\pm}$.

Доказательство. Это сразу вытекает из следствий 2.2.1 и 2.4.4. ☐

Подчекнём, что мы отнюдь не утверждаем (да это и не верно), что $\Delta_{\mathbb{C}}$ является вообще единственным неприводимым комплексным представлением группы $\mathrm{Spin}(2k+1)$, а $\Delta_{\mathbb{C}}^{\pm}$ — единственными неприводимыми комплексными представлениями группы $\mathrm{Spin}(2k)$. Сказано было только, что это — единственные представления, которые продолжающимися до (автоматически неприводимых) представлений алгебры $\mathrm{Cl}_0(V)$.

Примеры. $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{H}$, и значит, $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C} \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Спинорное представление имеет вид $\Delta_{\mathbb{C}}\mathrm{Spin}(2) \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{C}}} \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ и разлагается в сумму двух одномерных комплексных представлений $\Delta_{\mathbb{C}}^{\pm} : \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{Aut}(S_{\mathbb{C}}^{\pm}(\mathbb{R}^2))$. Разумеется, $\mathrm{Spin}(2) \cong S^1$ стандартным образом вкладывается в $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, и ограничение вложения $\mathbb{H} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ на эту окружность имеет вид

$$\alpha \in S^1 \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} .$$

Поскольку $\omega_{\mathbb{C}} = ie_1e_2$, и элемент e_1e_2 действует на $S_{\mathbb{C}}^{+}(\mathbb{R}^2)$ умножением на $-i$, действие окружности $\mathrm{Spin}(2) \cong S^1$ на $S_{\mathbb{C}}^{-}(\mathbb{R}^2)$ является стандартным, а на $S_{\mathbb{C}}^{+}(\mathbb{R}^2)$ — сопряжённым к стандартному.

Как мы видели, $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$, и спинорное представление $\Delta_{\mathbb{C}}$ в этом случае совпадает с тавтологическим действием $\mathrm{SU}(2)$ на $\mathbb{C}^2$.

Наконец, спинорное представление $\Delta_{\mathbb{C}}^{+}$ группы $\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ есть попросту композиция тавтологического представления $\mathrm{SU}(2)$ на $\mathbb{C}^2$ и проекции $\mathrm{Spin}(4)$ на первый сомножитель. Представление $\Delta_{\mathbb{C}}^{-}$ получается точно так же из проекции на второй сомножитель. Ясно, что эти представления группы $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^4)$ неэквивалентны, но переводятся друг в друга внешним автоморфизмом группы $\mathrm{Spin}(4)$.

2.6. Группа $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$

По определению, $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ — это подгруппа в мультипликативной группы единиц алгебры $\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$, порожденная группой $\mathrm{Spin}(V)$ и единичной окружностью комплексных скаляров.

Лемма 2.6.1. $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{Spin}(V) \underset{\{\pm 1\}}{\times} S^1$.

Доказательство. Поскольку скаляры лежат в центре $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$, комплексная единичная окружность коммутирует со $\mathrm{Spin}(V)$, так что прямо по определению мы имеем естественный эпиморфизм

$$\mathrm{Spin}(V) \times S^1 \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \ ,$$

Ядро которого состоит из всех пар (α, α^{-1}) с $\alpha \in \mathrm{Spin}(V) \cap S^1$. Но мы уже видели, что пересечение $\mathrm{Spin}(V)$ со скалярами есть ± 1, откуд и следует наше утверждение. ☐

Фактором $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ по подгруппе $\{\pm 1\}$ будет группа $\mathrm{SO}(V) \times S^1$. Таким образом $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ является двойным накрытием над $\mathrm{SO}(V) \times S^1$, нетривиальным над каждом сомножителем. Иначе говоря, $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ есть прообраз подгруппы $\mathrm{SO}(V) \times S^1 \subset \mathrm{SO}(V \oplus \mathbb{R}^2)$ при естественном представлении $\mathrm{Spin}(V \oplus \mathbb{R}^2) \to \mathrm{SO}(V \oplus \mathbb{R}^2)$.

Действие $\mathrm{Spin}(V)$ сопряжениями на $\mathrm{Cl}(V)$ продолжается до представления $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ сопряжениями на $\mathrm{Cl}(V) \otimes \mathbb{C}$. Последнее сохраняет вещественную алгебру Клиффорда и имеет тот же самый образ $\mathrm{SO}(V)$, что и действие группы $\mathrm{Spin}(V)$. В частности, ядро этого действия является подгруппа

$$\{\pm 1\} \underset{\{\pm 1\}}{\times} S^1 \cong S^1 \ .$$

Ещё отметим, что $\mathrm{Spin}(V)$ естественно отождествляется с подгруппой

$$\mathrm{Spin}(V) \underset{\{\pm 1\}}{\times} \{\pm 1\} \subset \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \ .$$

Лемма 2.6.2. *Всякое комплексное представление* $\mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\varrho} \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$, *такое что* $\varrho(-1) = -1$, *имеет единственные продолжение до представления* $\widetilde{\varrho} : \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$.

Доказательство. Будучи комплексным представлением, ϱ коммутирует с умножением на комплексные скаляры единичной длины $S^1 \times W \to W$, и стало быть, поднимается до представления $\mathrm{Spin}(V) \times S^1 \xrightarrow{\varrho'} \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$. Поскольку $\varrho(-1) = -1$, последнее представление спускается до искомого $\widetilde{\varrho} : \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(W)$. ☐

Следствие 2.6.3. *Комплексное спинорное представление* $\Delta_{\mathbb{C}} : \mathrm{Spin}(V) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}}(V))$ *канонически продолжается до представления* $\widetilde{\Delta}_{\mathbb{C}} : \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}}(V))$. *Если размерность* V *чётна, то это представление* $\widetilde{\Delta}_{\mathbb{C}}$ *расщепляется в сумму двух представлений* $\widetilde{\Delta}_{\mathbb{C}}^{\pm}$, *канонически продолжающих представления* $\Delta_{\mathbb{C}}^{\pm}$.

Доказательство. Единственное, что здесь нужно проверить, — это равенство $\Delta_{\mathbb{C}}(-1) = -1$. Но оно сразу следует из того, что $\Delta_{\mathbb{C}}$ является ограничением представления $\mathbb{C}$-алгебры $\mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$. ☐

Глава 3.

Спинорные расслоения и оператор Дирака

3.1. Спинорные и клиффордовы расслоения

Спинорные расслоения. Фиксируем действительное векторное пространство V с положительно определенным скалярным произведением. В этой главе мы полагаем $\dim V \geqslant 2$. Пусть $P \to X$ есть главное $\mathrm{SO}(V)$-расслоение. Мы хотим понять, когда это расслоение поднимается до главного $\mathrm{Spin}(V)$-расслоения, или, другими словами, когда существует главное $\mathrm{Spin}(V)$-расслоение $\widetilde{P} \to X$, фактор которого по центру $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Spin}(V)$ изоморфен P как $\mathrm{SO}(V)$-расслоение. Разумеется, решение этой стандартной задачи хорошо известно из алгебраической топологии или теории препятствий.

Лемма 3.1.1. *Расслоение $P \to X$ поднимается до главного $\mathrm{Spin}(V)$-расслоения тогда и только тогда, когда второй класс Штифеля-Уитни $w_2(P) \in H^2\left(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ равен нулю.*

По-другому можно сказать, что подъём существует тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\pi_1(P) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, который ограничивается до нетривиального гомоморфизма $\pi_1(\mathrm{SO}(V)) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, или, что то же самое, когда дифференциал

$$H_2\left(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \xrightarrow{d_2} H_1\left(\mathrm{SO}(V); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$$

тривиален, или, эквивалентно, когда P тривиально над 2-остовом X. Если поднятия существуют, то с точностью до изоморфизма они взаимно однозначно соответствуют $H_1\left(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$-торсорам.

Обсуждаемое поднятие называется *спинорной структурой на* P. В частном случае, когда P есть касательное (или кокасательное) расслоение риманова многоообразия, $\widetilde{P} \to X$ называется *спинорной* (или Spin-) *структурой* на X.

С каждым главным $\mathrm{SO}(V)$-расслоением $P \to X$ со спинорной структурой $\widetilde{P} \to X$ ассоциированно комплексное спинорное расслоение $\widetilde{P} \underset{\mathrm{Spin}(n)}{\times} S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, индуцированное представлением $\mathrm{Spin}(n) \xrightarrow{\Delta_{\mathbb{C}}} \mathrm{Aut}\left(S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)\right)$. Обозначим это расслоение через $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$. Расслоение $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, ассоциированное с главным $\mathrm{SO}(n)$-расслоением P, при нечётном n неразложимо и имеет (комплексную) размерность $2^{(n-1)/2}$, а при чётном n раскладывается в прямую сумму

$$S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = S^+_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \oplus S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})\ , \quad \text{где} \quad S^{\pm}_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = \widetilde{P} \underset{\mathrm{Spin}(n)}{\times} S^{\pm}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$$

двух расслоений, которые возникают из расщепления $\Delta_{\mathbb{C}} = \Delta^+_{\mathbb{C}} \oplus \Delta^-_{\mathbb{C}}$ и называются *расслоениями «±»-спиноров*, ассоциированными с $\widetilde{P}$. Оба они имеют (комплексную) размерность $2^{(n/2)-1}$.

Так как группа $\mathrm{Spin}(V)$, как мы видели, компактна, эти расслоения обладают единственным с точностью до изомоморфизма эрмитовым скалярным произведением, которое (поскольку расслоения индуцированы действием алгебры Клиффорда на $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$) можно выбрать $\mathrm{Pin}(\mathbb{R}^n)$-инвариантным. В этом случае клиффордово умножение на единичный вектор из $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ будет изометрией $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Далее мы всюду неявно предполагаем, что эрмитова метрика выбрана именно таким образом.

$\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-расслоения. Обсудим теперь аналоги предыдущих конструкций для группы $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ вместо Spin. Рассмотрим гомоморфизм факторизации по центру $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ и зададимся таким вопросом: когда главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение $P \to X$ поднимается до главнго $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-расслоения? Гомоморфизм $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \to S^1$ факторизации по подгруппе $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$ связывает с любым главным $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-расслоением комплексное 1-расслоение $\mathcal{L} \to X$. Оно называется *детерминантным линейным расслоением* спинорного расслоения. Если спинорное расслоение служит поднятием глвного $\mathrm{SO}(n)$-расслоения $P \to X$, то первый класс Чженя $c_1(\mathcal{L})$ его детерминантного расслоения будет, как легко видеть, сравним с $w_2(P)$ по модулю 2. Обратно, если дано произвольное комплексное 1-расслоение $\mathcal{L} \to X$ с $c_1(\mathcal{L}) \equiv w_2(P) \pmod 2$, то P обладает $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-поднятием с детерминантным линейным расслоением $\mathcal{L}$. Точная последовательность групп

$$\{1\} \to S^1 \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \to \mathrm{SO}(n) \to \{1\}$$

показывает, что $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-поднятия расслоения P образуют $H^2(X;\mathbb{Z})$-торсор и при изменении поднятия на класс $\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ класс детерминанта $c_1(\mathcal{L})$ поменяется на 2α.

С каждым $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-поднятием $\widetilde{P}$ главного $\mathrm{SO}(n)$-расслоения ассоциировано комплексное векторное $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-расслоение

$$S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = \widetilde{P} \underset{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)}{\times} S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)\,.$$

При изменении $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-поднятия на класс $\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ расслоение $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ заменяется на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \otimes L_\alpha$, где L_α есть комплексное линейное расслоение с $c_1(L_\alpha) = \alpha$.

$\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-поднятия расслоения ортогональных реперов. Одним из важнейших для четырёхмерной топологии достоинств $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур является то, что они существуют на любом четырёхмерном ориентированном римановом многообразии.

Лемма 3.1.2. *Расслоение $P \to X$ ортогональных касательных реперов на произвольном ориентированном четырёхмерном римановом многообразии X поднимается до $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$-расслоения $\widetilde{P} \to X$.*

Доказательство. Чтобы доказать существование такого поднятия, достаточно показать, что $w_2(X) \in H^2\left(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ поднимается до целочисленного класса $c \in H^2(X;\mathbb{Z})$. Значение $w_2(X)$ на каком-либо классе $x \in H_2\left(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ вычисляется следующим образом: x реализуется вложенной в X (возможно, не ориентированной) замкнутой поверхностью, и берётся её самопересечение по модулю два. Чтобы убедиться, что $w_2(X)$ поднимается до целочисленного класса надо проверить, что класс Бокштейна $\delta w_2(X)$ нулевой. Но для обращения в нуль целочисленного когомологического класса кручения $\delta w_2(X)$ необходимо и достаточно, чтобы он зануляется на на произвольном трёхмерном $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$-классе гомологий. Последний представляется отображением некоторого гладкого $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$-многообразия в X, и значение $\delta w_2(X)$ на таком классе равно значению $w_2(X)$ на классе Бокштейна этого $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$-многообразия. Остаётся лишь проверить, что $w_2(X)$ зануляется на всех целочисленных классах кручения в $H_2(X;\mathbb{Z})$. Но это ясно, ибо всякий такой класс реализуется гладко вложенной ориентированной поверхностью с нулевым самопересечением. ☐

Клиффордовы расслоения и их действие на спинорах. С заданным $\mathrm{SO}(n)$-расслоением P можно наряду с комплексными спинорноыми расслоениями ассоциировать также и расслоение на комплексные клиффордовы алгебры. В самом деле, $\mathrm{SO}(n)$ действует на $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$, и полагая

$$\mathrm{Cl}(P) = P \underset{\mathrm{SO}(n)}{\times} \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\ ,$$

мы получаем локально тривиальное расслоение на алгебры Клиффорда. Подчеркнём, что оно определено без участия спинорной структуры. Комплексная версия этой конструкции:

$$\mathrm{Cl}(P)\otimes\mathbb{C} = P \underset{\mathrm{SO}(n)}{\times} (\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C})$$

приводит к расслоению на комплексифицированные алгебры Клиффорда. Заметим, что оба этих расслоения разложимы: $\mathrm{Cl}(P) = \mathrm{Cl}_0(P)\oplus\mathrm{Cl}_1(P)$. $\mathrm{SO}(V)$-инвариантный элемент $\omega_{\mathbb{C}}$ определяет сечение расслоения $\mathrm{Cl}(P)$ с квадратом 1, и стало быть индуцирует ещё одно разложение:

$$\mathrm{Cl}(P)\otimes\mathbb{C} = (\mathrm{Cl}(P)\otimes\mathbb{C})^+ \oplus (\mathrm{Cl}(P)\otimes\mathbb{C})^-\ .$$

Для $\mathrm{SO}(n)$-расслоение P с нечётным n это разложение является разложением в ортогональную сумму подалгебр.

При наличии Spin- или $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ возникает действие клиффордовых расслоений на комплексных спинорах. Структура $\mathrm{Cl}(P)\otimes\mathbb{C}$-модуля вводится на комплексном спинорном расслоении $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \to X$ следующим образом. $\mathrm{Cl}(P)$ можно воспринимать как расслоение на алгебры, ассоциированное с главным расслоением $\widetilde{P}$ и представлением группы $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^n)$ (или $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$) на $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ автоморфизмами сопряжения:

$$\alpha\cdot\lambda = \alpha\lambda\alpha^{-1}\ .$$

Легко видеть, что это действие группы $\mathrm{Spin}(n)$ (или $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$) перестановочно с действем алгебры $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C}$ на $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ клиффордовым умножением. Иначе говоря, если $\alpha\in\mathrm{Spin}(n)$ (или $\alpha\in\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$), то

$$(\alpha\lambda\alpha^{-1})\cdot(\alpha\sigma) = \alpha(\lambda\cdot\sigma)$$

для любых $\lambda\in\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathbb{C}$ и $\sigma\in S_{\mathbb{C}}(n)$. Отсюда следует, что послойные клиффордовы умножения организуются в глобальное действие

$$(\mathrm{Cl}(P)\otimes\mathbb{C})\otimes S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \to S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})\ .$$

При чётном n умножение на элементы из $\mathrm{Cl}_0(P)\otimes\mathbb{C}$ будет переводить в себя каждое из двух слагаемых разложения $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = S^+_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})\oplus S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, тогда как умножение на элементы из $\mathrm{Cl}_1(P)\otimes\mathbb{C}$ будет менять эти компоненты местами.

Случай касательного и кокасательного расслоений. Пусть $P \to X$ является главным $\mathrm{SO}(n)$-расслоением ортогональных касательных реперов к риманову многообразию X, и $\mathrm{Cl}(X)$ — ассоциированное с ним расслоение на алгебры Клиффорда. Как мы отмечали при построении клиффордовых алгебр, $\mathrm{Cl}(X)$ может восприниматься как новая алгебраическая структура на внешней алгебре касательного расслоения. Коль скоро X является римановым многообразием, имеется каноническое отождествление касательного и кокасательного расслоений, и значит, мы в равной степени можем рассматривать $\mathrm{Cl}(X)$ и как новую алгебраическую структуру на внешней алгебре кокасательного расслоения. По линейности такая интерпретация распространяется и на комплексифицированные алгебры Клиффорда.

Теперь допустим, что на X задана $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P} \to X$. Действие $\mathrm{Cl}(X)$ на спинорном расслоении $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ может рассматриваться теперь как «клиффордово умножение» спиноров на дифференциальные формы. В силу двойственности между 1-формами и векторными полями клиффордово произведение $\mathbb{C}$-значной 1-формы α и спинорного поля s в точке $u \in X$ удовлетворяет соотношению

$$a \cdot s(u) = \sum_i \alpha(e_i) e_i \cdot s(u) \ , \tag{3-1}$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — ортонормированный базис в $T_u X$.

Примеры. Рассмотрим двумерный тор T^2 снабженный стандартной плоской метрикой. Его касательное и кокасательное расслоения тривиальны. Спинорная структура на них представляет собой плоское S^1-расслоение с голономией $\{\pm 1\}$ и определяется представлениием $\pi_1(T^2) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Расслоение «+»-спиноров будет при этом плоским комплексным 1-расслоением с той же голономией, а расслоение «—»-спиноров будет к нему обратным.

Пусть теперь Σ — это замкнутая ориентированная риманова поверхность рода g. Поскольку гомоморфизм $\mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{SO}(2)$ представляет собой двойное накрытие вида $S^1 \to S^1$, задание спинорной структуры на Σ эквивалентно выбору комплексного 1-расслоения $\mathcal{L}$ степени $1 - g$, квадрат которого изоморфен касательному расслоению. Это 1-расслоение $\mathcal{L}$ как раз и будет ассоциированным расслоением «—»-спиноров и может восприниматься как квадратный корень $\sqrt{K_\Sigma^{-1}}$ из антиканонического линейного расслоения K_Σ^{-1} римановой поверхности. Расслоением «+»-спиноров будет обратное 1-расслоение $\mathcal{L}^{-1}$. Оно представляет собой квадратный корень из канонического расслоения K_Σ.

3.2. Связности и кривизна

Связности на главных расслоениях. Пусть $P \to X$ — это гладкое главное G-расслоение над гладким многообразием. В каждой точке $p \in P$ определено *вертикальное подпространство* $T_p^v P \subset T_p P$ — касательное пространство к слою проекции на X, которое является подпространством всего касательного пространства к P в точке p. *Связностью* на P называется всякое G-инвариантное распределение $\{H_p \subset T_p P\}_{p \in P}$ гладко меняющихся и всюду дополнительных к вертикальным линейных подпространств H_p в касательном расслоении TP. Условие дополнительности к вертикальному распределению означает попросту, что при проекции на X каждое из подпространств H_p изоморфно отображается на касательное пространство к X в соответствующей точке-образе. Распределения с таким свойством называются *горизонтальными*.

Со всякой связностью на P ассоциируется дифференциальная 1-форма ω на P со значениями в *присоединённом* векторном расслоении $\operatorname{ad} P$, индуцированном с главного расслоения P при помощи присоединённого представления G на своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Эта 1-форма называется *формой связности*, и её значение в точке $p \in P$ представляет собой композицию линейных отображений:

$$\omega_p : \ T_pP \xrightarrow{\pi_{H_p}} T_p^{\mathrm{v}}P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g} \ ,$$

первое из которых есть проекция с ядром H_p, а второе обратно к изоморфизму, индуцированному действием G в слое над точкой p. G-инвариантность распределения $\{H_p\}$ означает, что ω преобразуется в соответствии с присоединённым действием G на $\mathfrak{g}$:

$$\omega_{ph}(\tau \cdot h) = h^{-1}\omega_p(\tau)h$$

для любых $h \in G$, $p \in P$ и $\tau \in T_pP$, т. е. ограничение ω_p на слой проекции можно отождествить с левоинвариантной формой Мауэра - Картана — единственной $\mathfrak{g}$-значной G-инвариантной формой на G, значение которой в $1 \in G$ есть тождественный оператор $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (на произвольном $\tau \in T_hG$ её значение, таким образом, будет равно $h^{-1}\tau \in \mathfrak{g}$). Описанные свойства вполне характеризуют 1-формы связности, и по заданной форме связности горизонтальное распределение однозначно восстанавливается как распределение ядер формы связности.

Связность на главном расслоении P позволяет задать связность на любом вектором расслоении $E = P \underset{G}{\times} V$, индуцированном с P посредством линейного представлениия G на вектором пространстве V. Работать с последней удобнее всего в терминах ковариантного дифференцирования

$$\nabla : \Omega^0(X; E) \to \Omega^1(X; E).$$

Это оператор, который линеен относительно умножения на константы (из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и действует на скалярно-значные функции как обычное дифференцирование d:

$$\nabla(f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla(\sigma) + df \otimes \sigma$$

для любого сечения $\sigma \in \Omega^0(X; E)$ и любой скалярно-значной функции f на X. Строится он следующим образом. Пусть у нас есть локальное сечение σ расслоения E вблизи $x \in X$, и пусть $\tau \in T_xX$. Мы проводим гладкую кривую $\gamma \subset X$ через x с касательным вектором $\tau \in T_xX$ и поднимаем её до горизонтальной кривой $p(t) \subset P$, т. е. до кривой в P, касательный вектор к которой в каждой точке p лежат в горизонтальном подпространстве H_p. Ограничение $E|_\gamma$ сечения σ на кривую γ параметрически представляется в виде $[p(t), v(t)]$, где $v(t)$ — некая гладкая функция зо значениями в V. Мы полагаем

$$\nabla(\sigma)(\tau) = \left[p, {}^{\partial v}\!/\!{}_{\partial t}\big|_{t=0}\right] \ .$$

Легко проверить, что результат является корректно определенным дифференцированием.

Если представление $G \longrightarrow GL(V)$ инъективно, то исходная связность на главном G-расслоении будет восстанавливаться по ковариантной производной на ассоциированном векторном расслоении E. К примеру, ковариантная производная на вектором расслоении E, индуцированном с главного $\mathrm{SO}(n)$-расслоения P посредством тавтологического представления $\mathrm{SO}(n)$ на $\mathbb{R}^n$, тогда и только тогда происходит из некой связности на P, когда

$$d\langle \sigma_0 \, , \sigma_1 \rangle = \langle \nabla(\sigma_0) \, , \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_0 \, , \nabla(\sigma_1) \rangle$$

для любых локальных сечений $\sigma_0, \sigma_1 \in \Omega^0(E)$. В противоположность этому, ковариантная производная ассоциированная, скажем, с тривиальным представлениием, есть обычное дифференцирование на соответствующем расслоении, и стало быть, никакой информации о связности на главном расслоении не несёт.

При аомощи правила Лейбница ∇ продолжается до дифференцирования

$$\nabla : \Omega^i(X; E) \to \Omega^{i+1}(X; E)$$

по формуле $\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \nabla(\sigma)$, где ω — произвольная скалярно-значная i-форма, а σ — сечение расслоения E.

Представление связности в локальных координатах. Зафиксируем локальную тривиализацию $P|_U$ главного G-расслоения $P \to X$ со связностью $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ над некоторым открытым подмножества $U \subset X$. Рассматривая эту тривиализацию как сечение $\sigma_0 : U \to P|_U$, получаем форму $\sigma_0^*(\omega) \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$, которая называется *формой связности в данной тривиализации*. Если $G \subset \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$, так что $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, то $\sigma_0^*(\omega)$ будет записываться матрицей из 1-форм $\widetilde{\omega}_{i,j}$ со значениями в $\mathfrak{g}$. Например, если $G = \mathrm{SO}(n)$, то $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ представляет собой кососимметричную матрицу из 1-форм, т. е. $\widetilde{\omega}_{i,j} = -\widetilde{\omega}_{j,i}$.

Если $\sigma : U \to P|_U$ — другая тривиализация, то $\sigma(u) = \sigma_0(u)h(u)$ для некоторого гладкого отображениие $U \xrightarrow{h} G$. Из сказанного выше легко следует, что

$$\sigma^*(\omega)(u) = h(u)^{-1}\sigma_0^*(\omega)(u)h(u) + h(u)^{-1}dh(u)\ .$$

Другими словами, если в исходной тривиализации $\sigma(u) = (u, h(u))$, и если τ — это касательный вектор к U в u, то

$$\omega\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right) = h(u)^{-1}\widetilde{\omega}(\tau)h(u) + h(u)^{-1}\frac{\partial h}{\partial\tau}(u)\ .$$

Пусть теперь имеется представлениие $\varrho : G \to \mathrm{GL}(V)$ с ассоциированным действием алгебры Ли $d\varrho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,V$, и пусть $E = P \underset{G}{\times} V$ — индуцированное векторное расслоение. Тривиализация $P|_U$ определяет тривиализацию $E|_U = U \times V$ расслоения E над U. Вычисляем как действует ковариантная производная $\Omega^0(U; V) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(U; V)$ в терминах этой тривиализации. Пусть $U \xrightarrow{\alpha} V$ — гладкое отображение, задающее сечение $\sigma(U) = (u, \alpha(u))$ расслоения E. Тогда

$$\nabla(\sigma) = \varrho(\widetilde{\omega})(\alpha) + d\alpha\ .$$

Кривизна связности. Для всякой 1-формы ω на P обозначим через $\frac{1}{2}\omega \wedge \omega$ $\mathfrak{g}$-значеную 2-форму, значение которой на паре касательных векторов (τ_1, τ_2) в точке p равно коммутатору $[\omega_p(\tau_1), \omega_p(\tau_2)]$.

Зметим, что $\mathfrak{g}$-значные k-формами на P, которые эквивариантны по отношенитю к присоединённому действию G и зануляются на любом наборе аргументов, содержащем вертикальный вектор, можно отождествить с k-формами со значениями в расслоении $\mathrm{ad}\,P$.

Доказательство следующего утверждения является лёгким упражнением.

Лемма 3.2.1. *Пусть ω является 1-формой связности на главном G-расслоении P над X. Тогда 2-форма $d\omega + \frac{1}{2}\,\omega \wedge \omega$ на P является поднятием некоторой $\mathrm{ad}\,P$-значной 2-формы на X.*

Эта $\operatorname{ad} P$-значеная 2-форма на X называется *формой кривизны* связности ω. Пусть у нас имеется тривиализация $P|_U$ над открытым множеством $U \subset X$. Ограничение формы связности ω на U является обычной 1-формой на U со значениями в алгебре Ли группы G. Пусть $E \to X$ есть векторное расслоение ассоциированное с P и представлением $\varrho : G \to GL(\mathbb{R}^n)$, и пусть дифференциал $d\varrho$ этого представления есть ассоциированное с ϱ представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G $n \times n$-матрицами. Тривиализация $P|_U$ индуцирует тривиализацию $E|_U$ с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$, который возникает из стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Связность на $E|_U$ в этом базисе задаётся формулой

$$\nabla(e_i) = \sum_j (d\varrho(\omega)_{j,i}) \otimes e_j \ ,$$

а форма кривизны имеет вид

$$\Omega(e_i) = \sum_j \Omega_{j,i} \otimes e_j \ ,$$

где $\Omega_{j,i} = d\omega_{j,i} + \sum\limits_k \omega_{j,k} \wedge \omega_{k,i}$.

Для $G = \mathrm{SO}(n)$ кривизна $(\Omega_{i,j})$ представляет собой кососимметричную $n \times n$-матрицу из 2-форм (т. е. $\Omega_{i,j} = -\Omega_{j,i}$).

Прямое вычисление показывает, что квадрат ковариантной производной

$$\nabla \circ \nabla : \quad \Omega^0(X; E) \to \Omega^2(X; E)$$

на векторном расслоении E, которое ассоциированно с главным G-расслоением P над X и представлением G на векторном пространстве V, линеен относительно умножения на функции, и стало быть, является сечением расслоения

$$\Omega^2(X; \operatorname{End}(E)) \ .$$

Непосредственная проверка показывает, что это сечение является образом формы кривизны связности относительно отображения $\mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$, индуцированного действием G на V. В самом деле, в описанной выше локальной тривиализации имеем:

$$\begin{aligned}
\nabla \circ \nabla(e_i) &= \nabla(\sum_j \omega_{j,i} \otimes e_j) = \sum_j d\omega_{j,i} \otimes e_j - \sum_j \omega_{j,i} \wedge \nabla(e_j) = \\
&= \sum_j d\omega_{j,i} \otimes e_j - \sum_k \omega_{k,i} \wedge \left(\sum_j \omega_{j,k} \otimes e_j \right) = \sum_j d\omega_{j,i} \otimes e_j + \sum_j (\sum_k \omega_{j,k} \wedge \omega_{k,i}) \otimes e_j = \\
&= \sum_j (d\omega_{j,i} + \frac{1}{2}(\omega \wedge \omega)_{j,i}) \otimes e_j = \sum_j \Omega_{j,i} \otimes e_j \ .
\end{aligned}$$

Несколько отчётливее это выражается равенством

$$\nabla_{e_r} \circ \nabla_{e_s} - \nabla_{e_s} \nabla_{e_r} = \Omega(e_r, e_s) = \sum_{i,j} \Omega_{j,i}(e_r, e_s) e_j \otimes e_i^*$$

сечений расслоения $\operatorname{End} E|_U$ (здесь $\Omega_{j,i}$ — это вещественная 2-форма на X, а $\Omega_{j,i}(e_r, e_s)$ — значение этой 2-формы на упорядоченной паре касательных векторов (e_r, e_s)).

При подстановке формы кривизны в инвариантные относительно присоединенного действия однородные многочлены на алгебре Ли будут получаться обычные скалярнозначные дифференциальные формы. Несложное вычисление показывает, что эти формы замкнуты и изменяются на точную форму при изменении связности, так что, представляемые ими классы когомологий от связности не зависят. Они называются *характеристическими классами* расслоения P. Действительные классы Чженя и классы Понтрягина получаются именно таким способом. Подробности см. в [4] или [16].

На одном и том же главном расслоении $P \xrightarrow{\pi} X$ имеется много разных связностей. В самом деле, прибавляя к произвольной форме связности ω любую $\mathrm{ad}\,P$-значную 1-форму ν на X, мы вновь получим форму связности $\omega + \pi^*\nu$, и все формы связности на P получаются таким способом. Таким образои, пространство связностей на P является аффинным пространством, ассоциированным с векторным пространством $\Omega^1(X; \mathrm{ad}\,P)$.

Пример. Пусть $P \to X$ есть $\mathrm{U}(1)$-расслоение. Алгебра Ли группы $\mathrm{U}(1)$ естественно отождествляется с множеством чисто мнимых комплексных чисел $i\,\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Форма связности для P — это $\mathrm{U}(1)$-инвариантная 1-форма $\omega \in \Omega^1(P; i\,\mathbb{R})$, такая что для любого $p \in P$ поднятие ω на $\mathrm{U}(1)$ относительно $\mathrm{U}(1) \xrightarrow{h \mapsto ph} P$ совпадает с $i \cdot d\vartheta$. 2-форма $d\omega$ на P поднимается с $i\,\mathbb{R}$-значной 2-формы Ω на X — формы кривизны связности. Первый класс Чженя ассоциированного комплексного линейного расслоения, по определению, представляется замкнутой формой ${}^{i\Omega}\!/_{2\pi}$. Если с языка группы $\mathrm{U}(1)$ перейти на язык группы $\mathrm{SO}(2)$, алгебра Ли которой состоит из кососимметричных 2×2-матриц, то порождающий элемент i алгебры Ли группы $\mathrm{U}(1)$ запишется матрицей

$$e_1 \wedge e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

В этих обозначениях форма связности и кривизна представляются матрицами

$$\begin{pmatrix} 0 & -{}^{\omega}\!/_{i} \\ {}^{\omega}\!/_{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -{}^{\Omega}\!/_{i} \\ {}^{\Omega}\!/_{i} & 0 \end{pmatrix}$$

соответственно. Гауссова кривизна определяется как $(1,2)$-ый элемент матрицы кривизны. Таким образом, гауссова кривизна в нашем случае равна $-{}^{\Omega}\!/_{i} = i\Omega$, что согласуется со стандартной формулой Гаусса - Бонне, гласящей, что делённый на 2π интеграл от гауссовой кривизны равен эйлеровой характеристике, которую иначе можно вычислить как интеграл от первого класса Чженя $\mathrm{U}(1)$-расслоения.

Действие калибровочной группы. По определению, *изменение калибровки* — это всего-навсего автоморфизм главного расслоения $P \to X$, т. е. диффеоморфизм $P \xrightarrow{\varphi} P$, коммутирующий с действием G и проекцией на X. Автоморфизмы образуют группу относительно композиций, обозначаемую $\mathrm{Aut}\,(P)$, действующую на P слева и коммутирующую с правым действием G на P. Мы можем интерпретировать автоморфизм P как функцию из P в G, удовлетворяющую соотношению

$$\psi(ph) = h^{-1}\psi(p)h$$

для любых $h \in G$. Такая функция $P \xrightarrow{\psi} G$ соответствует автоморфизму

$$\varphi : \quad p \longmapsto p\psi(p) ,$$

который, очевидно, коммутирует с проекцией на X. Предыдущее уравнение на ψ эквивалентно G-эквивариантности φ.

Посмотрим как автоморфизмы расслоения $P \to X$ действуют на форму связности. Если ω — форма связности, а φ — автоморфизм расслоения, то $\varphi^*\omega$ также будет формой связности. Оказывается, что

$$\varphi^*(\omega) = \varphi^{-1}\omega\varphi + \varphi^{-1}d\varphi\,.$$

Возможно, самый простой путь для понимания этого уравнения состоит в том, чтобы рассматривать его как уравнение на $\mathfrak{g}$-значные 1-формы на P.

На кривизну связности автоморфизм φ действует сопряжением: если Ω есть форма кривизны для связности ω, а Ω' — для $\varphi^*\omega$, то

$$\Omega' = \varphi^{-1}\Omega\varphi\,.$$

В частности, квадрат нормы кривизны инвариантен относительно действия калибровочной группы.

Связность Леви-Чевита. Теперь допустим, что $P \to X$ есть главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение, ассоциированное с касательным расслоением на римановом многообразии. Как мы видели выше, на касательном расслоении имеется много связностей, согласованых с главным расслоением, т. е. индуцированных $\mathrm{SO}(n)$-связностями на P. Оказывается, среди них есть самая лучшая — связность Леви-Чевита.

Чтобы описать эту связность, давайте рассмотрим локальную карту $U \subset X$ с локальными координатами $\{x^1, \ldots, x^n\}$, обозначим через e_i касательный вектор $\partial/\partial x^i$, и пусть метрика задаётся в этой системе координат симметричной матрицей $\{g_{i,j}\}$. Для любой ковариантной производной существуют n^3 функций $\Gamma^k_{i,j}$, называемых *символами Кристоффеля*, таких что

$$\nabla_{e_i}(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{i,j} e_k\,.$$

Условие того, что эта связность ортогональна

$$\langle\, \nabla_{e_k}(e_i)\,,\, e_j \,\rangle + \langle\, e_i\,,\, \nabla_{e_k}(e_j) \,\rangle = \partial_k \langle\, e_i\,,\, e_j \,\rangle$$

(где ∂_i — это обычное дифференцирование функции по переменной x^i), в терминах символов Кристоффеля переписывается в виде

$$\partial_k g = \Gamma_k \cdot g + g \cdot (\Gamma_k)^{tr}$$

(где Γ_k — это матрица, (r,s)-элемент которой равен $\Gamma^s_{k,r}$).

Связность Леви-Чевита выделяется из всех прочих ортогональных связностей дополнительным требованием *отсутствия кручения*. Это условие имеет смысл только для связностей на касательном расслоении и состоит в том, чтобы для любой пары векторных полей V, W на X было выполнено соотношение

$$\nabla_V(W) - \nabla_W(V) = [V, W]\,.$$

Если V и W являются частными производными вдоль осей локальной координатной системы, то член в правой части зануляется, и условие отсутствия кручения преобретает вид $\nabla_{e_i}(e_j) = \nabla_{e_j}(e_i)$, что в терминах символов Кристоффеля записывается как

$$\Gamma^j_{k,i} = \Gamma^j_{i,k} \qquad \forall\, i,j,k\,.$$

Другими словами, (i,j)-ый элемент матрицы Γ_k должен быть равен (k,j)-ому элементу матрицы Γ_i.

Лемма 3.2.2. *На касательном расслоении к риманову многообразию имеется единственная ортогональная связность без кручения.*

Доказательство. Сначала докажем единственность. Пусть $\Gamma^j_{k,i}$ и $\hat{\Gamma}^j_{k,i}$ есть два набора символов Кристоффеля, дающих ортогональные связности без кручения в локальной системе координат. Для каждого k составим матрицу разностей $\mu_k = \Gamma_k - \hat{\Gamma}_k$. Так как оба символа Кристоффеля задают ортогональные связности, для всех k будет выполняться равенство

$$\mu_k \cdot g + (\mu_k \cdot g)^{\mathrm{tr}} = 0 \ .$$

Отсутствие кручения означает, что $(\mu_k)_{i,j} = (\mu_i)_{k,j}$. Полагая $\nu_k = \mu_k \cdot g$, из первого уравнения получаем, что $\nu_k + \nu_k^{\mathrm{tr}} = 0$ для всех k, а из второго — что $(\nu_k)_{i,j} = (\nu_i)_{k,j}$ для всех i, j, k. Таким образом,

$$\nabla^j_{k,i} = -\nabla^i_{k,j} = -\nabla^i_{j,k} = \nabla^k_{j,i} = \nabla^k_{i,j} = -\nabla^j_{i,k} = -\nabla^j_{k,i} \ ,$$

откуда $\nabla^j_{k,i} = 0$ для всех i, j, k. Поскольку g обратима, это доказывает, что $\mu_k = 0$ для всех k, из чего следует, что $\Gamma_k = \hat{\Gamma}_k$ для всех k. Это и есть единственность.

Что касается существования, то для всякого k рассмотрим

$$(\Upsilon_k)_{i,j} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{i,j} + \partial_i g_{j,k} - \partial_j g_{k,i}) \ .$$

и положим $\Gamma_k = \Upsilon_k \cdot g^{-1}$. Прямое вычисление показывает, что эти символы Кристоффеля задают ортогональную связность без кручения. Другой способ доказать существование связности Леви-Чевита — это так подобрать локальную систему координат, чтобы в точке $x \in X$ с точностью до малых второго порядка метрика записывалась единичной матрицей (локальные гауссовы координаты). В этих координатах символ Кристоффеля зануляется в начале координат. ☐

Определение 3.2.3. Связность Леви-Чевита на римановом многообразии называется *римановой связностью.*

Связности на спинорных расслоениях. Если некое $\mathrm{SO}(n)$-расслоение $P \to X$ поднимается до спинорного расслоения $\widetilde{P} \to X$, то всякая $\mathrm{SO}(n)$-связность на P автоматически поднимается до $\mathrm{Spin}(n)$-связности на $\widetilde{P}$. Если думать о связности как о горизонтальном распределении на P, то это совершенно очевидно: пространство $\widetilde{P}$ двулистно накрывает P, и горизонтальное подпространства в каждой точке поднимаются линейным оператором, обратным к дифференциалу накрывающего отображения. Ясно, что это единственная $\mathrm{Spin}(n)$-связность, которая проецируется на исходную $\mathrm{SO}(n)$-связность.

Связность на $\widetilde{P}$, индуцированная римановой связностью на расслоении $P \to X$ ортогональных касательных реперов, называется *спинорной связностью.*

Но вернёмся к спинорному поднятию $\widetilde{P}$ произвольного $\mathrm{SO}(n)$-расслоения $P \to X$. Связность на P индуцирует связность на $\mathrm{Cl}(P)$, а поднятая связность на $\widetilde{P}$ — связность на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$. Ковариантные производные относительно этих связностей мы обозначаем через ∇ и $\widetilde{\nabla}$ соответственно. Связность $\widetilde{\nabla}$ на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ является унитарной, поскольку спинорное представление $\Delta_{\mathbb{C}}$ группы $\mathrm{Spin}(n)$ унитарно. Связность на $\mathrm{Cl}(P)$ согласована со структурой алгебры, т. е.

$$\nabla(\lambda_1\lambda_2) = \nabla(\lambda_1)\lambda_2 + \lambda_1\nabla(\lambda_2)$$

для любых сечений λ_1, λ_2 расслоения $\mathrm{Cl}(P)$. Точно так же обе связности согласованы с действием $\mathrm{Cl}(P)$ на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, в том смысле, что

$$\widetilde{\nabla}(\lambda \cdot \sigma) = \nabla(\lambda) \cdot \sigma + \lambda \cdot \widetilde{\nabla}(\sigma)$$

для любых сечений $\lambda \in \Omega^0 \mathrm{Cl}(P)$ и $\sigma \in \Omega^0 S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$.

Легко видеть, что разложение $\mathrm{Cl}(P) = \mathrm{Cl}_0(P) \oplus \mathrm{Cl}_1(P)$ инвариантно относительно ∇, а значит на каждом из этих подрасслоений индуцируется своя собственная связность и ковариантная производная. Поскольку сечение $\omega_{\mathbb{C}}$ ковариантно постоянно (т. е. $\nabla(\omega_{\mathbb{C}}) = 0$), подрасслоения $(\mathrm{Cl}(P) \otimes \mathbb{C})^{\pm}$ инвариантны относительно ковариантного дифференцирования. В чётномерном случае расщепление $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ на $S^{\pm}_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ также является ковариантным, так что на обоих спинорных расслоениях индуцируются унитарные связности, которые мы так же обозначим через $\widetilde{\nabla}$.

Алгебра Ли группы $\mathbf{Spin}(n)$ и ее действие на $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$. Двулистное накрытие $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ отождествляет алгебру Ли группы $\mathrm{Spin}(n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(n)$ группы $\mathrm{SO}(n)$, т. е. с пространством вещественных кососимметричных $n \times n$-матриц. Базисом этой алгебры являются матрицы $e_i \wedge e_j$ с $1 \leqslant i < j \leqslant n$, касательные в единице к однопараметрическим подгруппам, задающим вращение i,j-плоскости на угол ϑ по кратчайшей дуге от e_i к e_j. Явная запись матрицы $e_i \wedge e_j$ имеет -1 на (i,j)-том месте, 1 на (j,i)-том месте, и 0 на остальных местах.

Лемма 3.2.4. *При описанном выше отождествлении алгебры Ли группы* $\mathrm{Spin}(n)$ *с* $\mathfrak{so}(n)$ *инфинитезимальный генератор однопараметрической подгруппы*

$$\vartheta \mapsto \cos\vartheta \cdot 1 + \sin\vartheta \cdot e_i e_j \subset \mathrm{Spin}(n) \subset \mathrm{Cl}(n)$$

переходит в $2\, e_i \wedge e_j \in \mathfrak{so}(n)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что

$$\cos\vartheta \cdot 1 + \sin\vartheta \cdot e_i e_j = e_i \left(-\cos\vartheta \cdot e_i + \sin\vartheta \cdot e_j\right),$$

так что это и в самом деле подгруппа в $\mathrm{Spin}(n)$.

Отождествление алгебр Ли индуцируется естественной проекцией

$$\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n),$$

возникающей из действия $\mathrm{Spin}(n)$ сопряжениями на $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$, так что образом нашего инфинитезимального генератора будет инфинитезимальный генератор индуцированной однопараметрической подгруппы вращений $\mathbb{R}^n$. Поскольку сопряжение $\mathbb{R}^n$ единичным вектором v — это взятое со знаком «минус» отражение R_v в ортогональной к v плоскости, действие элемента из нашей однопараметрической подгруппы на $\mathbb{R}^n$ представляется композицией

$$R_{e_i} \circ R_v,$$

где $v = -\cos(\vartheta) e_i + \sin(\vartheta) e_j$, и является, таким образом, поворотом (i,j)-плоскости на угол 2ϑ в направлении от e_i к e_j. Инфинитезимальный генератор такого вращения равен $2 e_i \wedge e_j$.
□

Если рассматривать однопараметрическую подгруппу из предыдущей леммы как подмногообразие в $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$, то её производная в единице будет равна e_1e_2. Таким образом мы установили, что над единицей дифференциал двулистного накрытия $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ переводит элемент $e_ie_j \in \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ в $2\,e_i \wedge e_j \in \mathfrak{so}(n)$.

Явная формула для связности на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$. Пусть $\widetilde{P} \to X$ является спинорным поднятием $\mathrm{SO}(n)$-расслоения $P \to X$ со связностью ω, и $\Omega^0(X; S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})) \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} \Omega^1(X; S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}))$ — индуцированная ковариантная производная на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$. Мы собираемся вывести явную формулу для $\widetilde{\nabla}$ в терминах матрицы связности $\omega = (\omega_{i,j})$ по отношению к фиксированной локальной тривиализации расслоения $P \to X$ (а значит и $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$).

Зафиксируем открытое подмножество $U \subset X$, тривиализацию $P\,|_U = U \times \mathrm{SO}(n)$, и пусть связность $\omega\,|_U$ задаётся в этой тривиализации матрицей из 1-форм $\widetilde{\omega}_{i,j}$ на U. Эта матрица кососимметрична, так как связность ω ортогональна. После отождествления алгебр Ли групп $\mathrm{SO}(n)$ и $\mathrm{Spin}(n)$ посредством дифференциала двулистного накрытия, индуцированная связность на $\widetilde{P}\,|_U$ в индуцированной тривиализации будет задаваться в точности той же самой матрицей из 1-форм $(\widetilde{\omega}_{i,j})$.

Если сечение $\sigma(u)$ расслоения $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}\,|_U)$записывается в выбранной нами тривиализации как $\sigma(u) = (u, s(u))$, то $\widetilde{\nabla}(\sigma)(u) = (\,u\,,\,d\varrho(\widetilde{\omega}_{i,j})(s(u) + ds(u))\,)$, где через $d\varrho$ обозначено действие $so(n)$ на $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$, которое индуцированно представлением $\mathrm{Spin}(n)$ в $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$. Разложение матрицы $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ по базису $e_i \wedge e_j$ из матриц с -1 на (i,j)-том месте и $+1$ на (j,i)-том месте имеет вид $\sum\limits_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i} e_i \wedge e_j$. Согласно лемме 3.2.4 элемент $e_i \wedge e_j$ является образом $\dfrac{e_ie_j}{2} \in \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому

$$d\varrho(\widetilde{\omega}_{i,j}) = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i} e_i e_j\ ,$$

где правая часть действует на $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ посредством клиффордова умножения. Таким образом, окончательная формула для ковариантной производной от сечение $\sigma(u) = (u, s(u))$ в заданной тривиализации такова:

$$\widetilde{\nabla}(\sigma)(u) = \left(u, ds(u) + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i} e_i e_j \cdot s(u)\right)\ .$$

Связности на $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$-расслоениях. Теперь пусть $\widetilde{P} \to X$ будет $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-поднятием $\mathrm{SO}(n)$-расслоения $P \to X$ со связностью ω. Поскольку $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ не является конечным накрытием, мы уже не можем в этом случае автоматически поднять связность ω на P до связности на $\widetilde{P}$, и такое поднятия зависит от дополнительного параметра: $\mathrm{U}(1)$-связности A на детерминантном линейном расслоениии $\mathcal{L} \to X$ $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$. Задание ω и A позволяет задать связность на главном $\mathrm{SO}(n) \times S^1$-расслоении, которое является фактором $\widetilde{P}$ по $\{\pm 1\} \subset \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$. Эта связность уже будет, как и ранее, единственным образом поднимается до связности на $\widetilde{P}$.

Пусть в некой фиксированной локальной тривиализации расслоений P и $\mathcal{L}$ имеющиеся на них связности записываются матрицами $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ и iA соответственно. Разумеется, такая тривиализация будет тривиализацией и для $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, и в ней ковариантная производная от сечения $u \mapsto (u, s(u))$ будет вычисляться по формуле

$$\widetilde{\nabla}_e(\sigma)(u) = \left(u, \frac{ds(u)}{de} + \frac{1}{2}\left(iA(e) + \sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{j,i}(e) e_i e_j\right) \cdot s(u)\right) . \tag{3-2}$$

3.3. Оператор Дирака

В этом параграфе мы введём опретор Дирака на Spin- и $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$- расслоениях над римановым многообразием и установим ряд его фундаментальных свойств. Рассмотрим спинорное расслоение $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, ассоциированное со спинорным или $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-поднятием $\widetilde{P}$ главного $\mathrm{SO}(n)$-расслоения $P \to X$ касательных реперов на римановом многообразии X. В случае $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-поднятия мы также фиксируем $\mathrm{U}(1)$-связность A на детерминантном линейном расслоениии $\mathcal{L}$. Пусть $\widetilde{\nabla}$ — это спинорная связность на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, индуцированная связностью Леви-Чевита и связностью A. Мы определяем *оператор Дирака*

$$\not{\partial}_A : C^\infty(S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})) \to C^\infty(S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}))$$

формулой

$$\not{\partial}_A(\sigma)(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma)(x) ,$$

в которой $\{e_1, \ldots, e_n\}$ есть положительный ортонормированный репер в $T_x X$, а $\cdot$ означает клиффордово умножение. Для Spin-расслоений связность A отсутсутствует, и оператор Дирака обозначается через $\not{\partial}$.

Лемма 3.3.1. *Операторы $\not{\partial}_A$ и $\not{\partial}$, определенные выше, не зависят от выбора ортонормированного репера $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.*

Доказательство. Пусть $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ — другой положительный ортонормированный репер, так что $e'_i = \sum\limits_{j=1}^{n} B_{i,j} e_j$ для некоторого $B \in \mathrm{SO}(n)$. Рассмотрим $\sum\limits_{i=1}^{n} e'_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e'_i}(\sigma)$. Поскольку клиффордово умножение билинейно, мы видим, что

$$e'_i \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} e_j \cdot \alpha$$

для любого $\alpha \in S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$. Поскольку $\widetilde{\nabla}_e$ линеен по e, мы видим так же, что

$$\widetilde{\nabla}_{e'_i}(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} \widetilde{\nabla}_{e_j}(\sigma) .$$

Комбинируя эти две формулы, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} e'_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e'_i}(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} e_j \cdot (\sum_{j'=1}^{n} B_{i,j'} \widetilde{\nabla}_{e_{j'}}(\sigma))\right) = \sum_{i,j,j'} B_{i,j} B_{i,j'} e_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e_{j'}}(\sigma) .$$

Поскольку матрица B ортогональна, $\sum\limits_i B_{i,j}B_{i,j'} = \delta_{j,j'}$, и стало быть,

$$\sum_{i=1}^{n} e'_i \cdot \widetilde{\nabla}_{e'_i}(\sigma) = \sum_{j,j'} \delta_{j,j'} e_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e_{j'}}(\sigma) == \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \widetilde{\nabla}_{e_j}(\sigma)\,.$$

Это завершает доказательство. ☐

Выпишем теперь явное выражение для оператора Дирака в терминах локальной тривиализации. Пусть в этой тривиализации связность на $\widetilde{P}$ представляется матрицей $(\widetilde{\omega}_{i,j})$ из 1-форм, локальное сечение σ расслоения $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ записывается в виде $\sigma(u) = (u, s(u))$, а векторы $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ составляют ортонормальный базис над точками $u \in U \subset X$, приходящий из стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$. Имеем

$$\not{\partial}(\sigma)(u) = \sum_i e_i \widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma)(u) = \left(u, \sum_i e_i \left(\frac{ds(u)}{de_i} + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \widetilde{\omega}_{k,j}(e_i)(e_j e_k)\cdot s(u)\right)\right) =$$

$$= \left(u, \sum_i e_i \cdot \frac{ds(u)}{de_i} + \frac{1}{2}\sum_i \sum_{j<k} \widetilde{\omega}_{k,j}(e_i)(e_i e_j e_k)\cdot s(u)\right)\,,$$

где $\cdot$ соответствует клиффордову умножению. Из последнего выражения сразу видно, что оператор $\not{\partial}$ в точке p имеет вид

$$\sum_i e_i \cdot \frac{\partial}{\partial e_i} + \{\text{члены нулевого порядка}\}\,,$$

т. е. $\not{\partial}$ является линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Для $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-поднятия $\widetilde{P}$ с $\mathrm{U}(1)$-связностью A на $\det \widetilde{P}$ формула преобретает вид

$$\not{\partial}(\sigma)(u) = \sum_l e_l \cdot \frac{ds(u)}{de_l} + \frac{1}{2}\sum_l \left(A(e_l)e_l + \sum_{j<k} \widetilde{\omega}_{k,j}(e_l)(e_j e_k)\right)\cdot s(u)\,. \tag{3-3}$$

Заметим, что согласно уравнению (3-1) $\sum\limits_l A(e_l)e_l \cdot s(u)$ равна клиффордовому произведению $A \cdot s(u)$.

Имеется также простая формула для преобразования оператора Дирака при изменении связности A.

Лемма 3.3.2. *Пусть A и $A' = A + \alpha$ есть две* $\mathrm{U}(1)$*-связности на детерминантном линейном расслоении* $\mathcal{L}$ $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структуры* $\widetilde{P}$ *на* X*. Тогда для любого сечения* ψ *расслоения* $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ *мы имеем*

$$\not{\partial}_{A'}(\psi) = \not{\partial}_A(\psi) + \frac{1}{2}\alpha\cdot\psi\,.$$

Доказательство. Это ясно из уравнения (3-3) и последующего замечания. ☐

Заметим, что на четырёхмерном многообразии оба оператора $\not{\partial}$ и $\not{\partial}_A$ отображают пространства $C^\infty(S^{\pm}_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}))$, соответственно, в $C^\infty(S^{\mp}_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}))$. Важнейшим свойством оператора $\not{\partial}$ является его формальная самосопряжённость.

Лемма 3.3.3. *Пусть X — замкнутое многообразие со* Spin- *или* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структурой* $\widetilde{P}$*. Тогда оператор* $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \xrightarrow{\not{\partial}} S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ *формально самосопряжён в том смысле, что*

$$\left(\not{\partial}(\sigma_1), \sigma_2\right)_{L^2} = \left(\sigma_1, \not{\partial}(\sigma_2)\right)_{L^2}\,,$$

где $(\cdot,\cdot)_{L^2}$ *означает скалярное* L^2*-произведение на сечениях* $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$*, индуцированное поточечным эрмитовым произведения в слоях.*

Доказательство. Эрмитово скалярное произведение на C^∞ сечениях расслоения $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ задается как

$$\big(\not\partial(\sigma_1),\sigma_2\big)_{L^2} = \int\limits_X \big\langle \not\partial(\sigma_1)\,,\,\sigma_2\big\rangle\, d\,\mathrm{Vol}\,,$$

где скалярное произведение в правой части есть поточечное эрмитово скалярное произведение на слоях комплексного спинорного расслоения. Фиксируем систему координат в точке x так, чтобы для стандартных единичных касательных векторов $e_1,e_2,\ldots,e_n$ в точке x иметь $\nabla_{e_i}(e_i)=0$. Вычисляя над x получаем

$$\begin{aligned}\langle\not\partial(\sigma_1),\sigma_2\rangle_x &= -\sum_i\langle\widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma_1),e_i\sigma_2\rangle_x = \sum_i\langle\sigma_1,\widetilde{\nabla}_{e_i}(e_i\sigma_2)\rangle_x - \frac{\partial}{\partial e_i}\langle\sigma_1,e_i\sigma_2\rangle_x = \\ &= \sum_i\langle\sigma_1,e_i\widetilde{\nabla}_{e_i}(\sigma_2)\rangle_x + \langle\sigma_1,\nabla_{e_i}(e_i)\sigma_2\rangle_x - \frac{\partial}{\partial e_i}\langle\sigma_1,e_i\sigma_2\rangle_x = \\ &= \sum_i\langle\sigma_1,e_i\nabla_{e_i}(\sigma_2)\rangle_x - \frac{\partial}{\partial e_i}\langle\sigma_1,e_i\sigma_2\rangle_x = \langle\sigma_1,\not\partial(\sigma_2)\rangle_x - \sum_i\frac{\partial}{\partial e_i}\langle\sigma_1,e_i\sigma_2\rangle_x\,.\end{aligned}$$

Зададим теперь на X комплексифицированное векторное поле V (т. е. сечение $TX\otimes\mathbb{C}$) условием

$$\big\langle V(x)\,,\,W(x)\big\rangle = \big\langle\sigma_1(x)\,,\,W\cdot\sigma_2(x)\big\rangle$$

для всех векторов W и всех $x\in X$. Тогда предыдущие равенства можно записать как

$$\big\langle\not\partial(\sigma_1)\,,\,\sigma_2\big\rangle_x = \big\langle\sigma_1\,,\,\not\partial(\sigma_2)\big\rangle_x - \mathrm{div}\,(V)_x\,.$$

Поскольку все величины в этом выражении глобальны, это равенство будет справедливо в любой точке $x\in X$. Интегрируя по X получаем

$$\big\langle\not\partial(\sigma_1)\,,\,\sigma_2\big\rangle_{L^2} = \big\langle\sigma_1\,,\,\not\partial(\sigma_2)\big\rangle_{L^2} - \int\limits_X \mathrm{div}\,(V)\,d\,\mathrm{Vol}\,.$$

Отсюда сразу следует требуемое.

Символ оператора Дирака. Пусть D есть диференциальный оператор первого порядка из сечений расслоения $E\to X$ в сечения расслоения $F\to X$. Символ $\mathrm{Symb}\,(D)$ есть гомомрфизм расслоений $\pi^*E\xrightarrow{\mathrm{Symb}\,(D)}\pi^*F$, который действует между поднятиями E и F на кокасательное расслоением T^*X. Символьный линейный оператор зависит только от членов старшего порядка в исходном дифференциальном операторе, и в нашем случае будет включать в себя только члены первого порядка.

Фиксируем в x ортонормированные локальные координаты $(x^1,\ldots,x^n)$, и пусть оператор имеет в этих координатах вид

$$D(\sigma) = \sum_I a_I\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I} + \text{члены меньшего порядка}\,,$$

где сумма старших членов берётся по всем мультииндексам I длины $|I| = n$, а α_I суть линейные отображения из E в F. Тогда значение символа D на кокасательном векторе $\xi \in T^*_xX$ представляет собой линейный оператор из E в F вида

$$\mathrm{Symb}\,(D)(\xi) = i^n \sum_I \alpha_I \xi^I \ ,$$

где $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — это двойственный к $\partial/\partial x^1$, … , $\partial/\partial x^n$ базис в T^*X. В частности, символ оператора $\not{\partial}$ на T^*X есть линейный оператор вида

$$\mathrm{Symb}\,(\not{\partial})(\xi) = i \sum_j \xi_j \cdot (?) \ ,$$

где «·»— это клиффордово умножение.

Отождествляя T^*X и TX мы можем считать, что T^*_xX тоже действует на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ клиффордовым умножением. Тогда значение символа оператора Дирака на кокасательном векторе ξ будет пороcту клиффордовым умножением на $i\xi$. Для любого ненулевого кокасательного вектора ξ клиффордово умножение на $i\xi$ индуцирует изоморфизм слоя $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ на себя. Это означает, по определению, что $\not{\partial}$ является *эллиптическим* линейным дифференциальным оператором первого порядка.

Аналогичным образом, значение символа оператора $\not{\partial}_A$ на кокасательном векторе ξ тоже будет клиффордовым умножением на $i\xi$.

Коль скоро $\not{\partial}$ и $\not{\partial}_A$ оказались эллиптическими операторами, про них можно много чего сказать в ситуации, когда база X компактна. Если рассматривать их как операторами из L^2_k-сечений в L^2_{k-1}-сечения расслоения $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, то они будут фредгольмовыми с независящими от k конечномерными ядрами, всякое L^2-сечение из ядра $\not{\partial}$ или $\not{\partial}_A$ будет на самом деле C^∞-сечением, а образы $\not{\partial}$ и $\not{\partial}_A$ будут замкнутыми подпространствами конечной коразмернрсти в пространстве всех L^2_{k-1}-сечений. Особенно подчеркнём ещё раз, что всякое L^2-ортогональное к образу $\not{\partial}$ или $\not{\partial}_A$ сечение автоматически будет C^∞-сечением.

Примеры. Начнём с компактного связного ориентированного одномерного риманова многообразия X. Метрика на нём автоматически плоская, и значит, такое многообразие изометрично окржности некого радиуса $R > 0$. Ориентация задает тривиализацию ортогонального касательного расслоения P_X. Пусть $\widetilde{P} \to X$ есть спинорная структура на X. Тривиализация P_X определяет локальную тривиализацию на $\widetilde{P}$, голономия которой есть ± 1, в зависимости от того, какую спинорную структуру мы выбрали. Комплексное спинорное расслоение $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ изоморфно $\widetilde{P} \underset{\pm 1}{\times} \mathbb{C}$. Это расслоение наследует локальную тривиализацию с голономией ± 1. Клиффордово умножение на единичный касательный вектор в положительном направлениии есть умножние на i. Ковариантная производная на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ есть обычное дифференцирование в локальной тривиализации. Таким образом, мы видим, что оператор Дирака $\not{\partial} : S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \to S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ действует как $i\,\dfrac{d}{d\vartheta}$ — либо на пространстве комплекснозначных функций на S^1 (если голономия плоской структуры на $\widetilde{P}$ была тривиальна), либо на пространстве комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}^1$ удовлетворяющих $f(x + 2\pi R) = -f(x)$ (если голономия плоской структуры на $\widetilde{P}$ была -1). В первом случае ядро и коядро $\not{\partial}$ одномерны и состоят из постоянных сечений. Во втором случае $\not{\partial}$ является изоморфизмом.

Теперь давайте рассмотрим замкнутое ориентированное двумерное риманово многообразие X. Пусть $P_X \to X$ есть ортогональное касательное расслоение. Это S^1-расслоение, или, что то же, $\mathrm{U}(1)$-раслоение. Алгебра Клиффорда для $\mathbb{R}^2$ отождествляется с $\mathbb{H}$ таким образом, что e_1e_2 соответствует i, e_1 соответствует j, а e_2 соответствует k. Группа $\mathrm{Spin}(2)$ есть единичная окружность в $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, т. е. состоит из всех элементов вида $\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta)e_1e_2$. Спинорная структура $\widetilde{P}$ на P_X представляет собой $\mathrm{U}(1)$-расслоение, являющееся квадратным корнем из P_X.

Запишем $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$. Действие $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H}$ задаётся правым клиффордовым умножением, и значит, действие $\mathrm{Spin}(2)$ на $\mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$ представляется матрицами

$$\zeta \to \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & -\zeta \end{pmatrix} \qquad \forall\, \zeta \in S^1 .$$

Элементы e_1e_2, e_1, e_2 действуют умножением на i, j, k соответственно, и с точки зрения разложения $\mathbb{C} \oplus i\mathbb{C}$ они представляются матрицами

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ есть прямая сумма двух комплексных линейных расслоений, одно из которых ассоциировано с $\widetilde{P}$ при стандартном представлении S^1 в $\mathrm{U}(1)$, а другое является обратным к нему $\mathrm{U}(1)$-расслоением. Поскольку $\omega_{\mathbb{C}} = ie_1e_2$, расслоение $S^+_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ представляет собой комплексное 1-подрасслоение собственных векторов оператора e_1e_2 с собственным значением $-i$ (что как бы «обратно» традиционному восприятию). Это расслоение является корнем квадратным $\sqrt{K_X}$ из канонического расслоения K_X почти комплексной структуры на X. Обратным к нему 1-расслоением, также ассоциированным с квадратным корнем из P_X, будет

$$S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = \sqrt{K_X^{-1}} = K_X^{-1} \otimes \sqrt{K_X} .$$

Связность Леви-Чевита на P_X индуцирует связность на $\widetilde{P}$, и стало быть, ковариантные производные на $S^{\pm}_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$. Выбирая ортонормированный базис (e_1, e_2) в касательном пространстве над какой-либо точкой и пользуясь разложением $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = S^+_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \oplus S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, мы можем записать действие оператора Дирака над этой точкой матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nabla_{e_i} - i\nabla_{e_2} \\ \nabla_{e_i} - i\nabla_{e_2} & 0 \end{pmatrix} .$$

В частности, если метрика в этой точке с точностью до малых второго порядкав записывается единичной матрицей, то мы получим

$$\not{\partial} = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\partial}{\partial e_1} - i\dfrac{\partial}{\partial e_2} \\ -\dfrac{\partial}{\partial e_1} - i\dfrac{\partial}{\partial e_2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Подчекнём, что все эти 2×2-матрицы писались для разложения

$$S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) = S^+_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) \oplus S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}) .$$

Метрика и ориентация задают комплексную структуру на X, причём существует такая локальная голоморфная координата z, что в индуцированных ею вещественных координатах (e_1, e_2) риманова метрика будет стандартной с точностью до малых второго порядка.

Выражение оператора Дирака в терминах комплексного оператора $2\frac{\partial}{\partial\bar z} = \frac{\partial}{\partial e_1} + i\frac{\partial}{\partial e_2}$ имеет вид

$$\not{\partial} = \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{\partial}{\partial z} \\ -2\frac{\partial}{\partial\bar z} & 0 \end{pmatrix} ,$$

где $-\frac{\partial}{\partial\bar z} : \Omega^0\left(\sqrt{K_X}\right) \longrightarrow \Omega^0\left(\sqrt{K_X^{-1}}\right) = \Omega^0\left(\sqrt{K_x}\otimes K_X^{-1}\right)$, а $\frac{\partial}{\partial z}$ ему сопряжён.

Теперь рассмотрим случай $\mathbb{R}^3$. Алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)$ изоморфна $\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$, где слагаемые суть собственные $\pm$-подпространства умножения на $\omega_{\mathbb{C}} = -e_1e_2e_3$. В качестве спинорного представления $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3)$ мы возьмём то, которое пропускается через положительное слагаемое, так что

$$S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{C}\oplus j\mathbb{C} = \mathbb{H} .$$

Базис положительного слагаемого составляют элементы

$$\left\{\frac{1+\omega_{\mathbb{C}}}{2}, \frac{e_3+e_1e_2}{2}, \frac{e_1+e_2e_3}{2}, \frac{e_2+e_3e_1}{2}\right\} ,$$

которые соответствуют образующим $1, i, j, k \in \mathbb{H}$, и их действие на $\mathbb{C}\oplus j\mathbb{C}$ записывается матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

Заметим теперь, что изоморфизм $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^3)$, в котором левое $\mathbb{R}^2$ натягивается на e_1 и e_2, коммутирует со обоими предыдущими изоморфизмами с $\mathbb{H}$. Это означает, что ограничение $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^3)$ на $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Cl}^+(\mathbb{R}^3)$ раскладывается как

$$S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) = S^-_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)\oplus S^+_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2) ,$$

и по отношению к этому разложению оператор Дирака на $\mathbb{R}^3$ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} i\nabla_{e_3} & -\nabla_{e_1} - i\nabla_{e_3} \\ \nabla_{e_1} - i\nabla_{e_2} & -i\nabla_{e_3} \end{pmatrix} ,$$

что в терминах комплексной структуры на $\mathbb{R}^2$ переписывается как

$$\begin{pmatrix} i\nabla_{e_3} & -2\frac{\partial}{\partial\bar z} \\ 2\frac{\partial}{\partial z} & -i\nabla_{e_3} \end{pmatrix} ,$$

Напомню, матрицы пишутся для разложения $S^-_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)\oplus S^+_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^2)$.

Индекс оператора Дирака. Пусть X есть замкнутое ориентированное четырёхмерное риманово многообразие со спинорной структурой $\widetilde{P}\to X$. Поскольку оператор Дирака

$$\not{\partial} : C^\infty(S^+_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})) \to C^\infty(S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}))$$

является эллиптическим, его ядро конечномерно, а образ будет замкнутым подпространством конечной коразмерности. По определению, *индексом* $\not{\partial}$ называется разность

$$\mathrm{ind}\,\not{\partial} = \dim_{\mathbb{C}}\ker\not{\partial} - \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{coker}\,\not{\partial} .$$

Индекс следующим образом вычисляется по символу оператора. Рассмотрим поднятия расслоений $S^{\pm}_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$ на тотальное пространство касательного расслоения T^*X. Всюду над дополнением к нулевому сечению T^*X символ является изоморфизмом между этими поднятиями, и определяет таким образом некий элемент в относительной K-теории пары $(T^*X, (T^*X\setminus X))$. Теорема Атьи-Зингера об индексе вычисляет индекс оператора в терминах этого элемента относительной K-теории. Для оператора Дирака индекс представляет собой $\hat{A}(X)$, — так называемый $\hat{A}$-род многообразия X. $\hat{A}$-род замкнутого ориентированного четырёхмерного многобразия есть

$$\hat{A}(X)=\int\limits_X -\frac{p_1(X)}{24}=-\frac{\sigma(X)}{8}\,,$$

где $\sigma(X)$ – это сигнатура X. Для $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ расслоения, о которых идёт речь, будут немного другими, и формула для индекса в этом случае будет такова

$$\operatorname{ind}\eth_A=\frac{c_1\left(\det(\widetilde{P})\right)^2-\sigma(X)}{8}\,.$$

Отметим пару следствий этих формул: $\hat{A}$-род спинорного многообразия является целым числом, и стало быть, индекс четырёхмерного спинорного многообразия делится на 8 (на самом деле он делится 16).

3.4. Случай комплексных многообразий

Spin$^{\mathbb{C}}$-структуры на почти комплексных многообразиях. Пусть на конечномерном вещественном пространстве V со скалярным произведением задана согласованная с ним комплексная структура, т. е. ортогональный оператор $V\xrightarrow{J}V$ с $J^2=-1$. Разложим $V\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}$ в сумму $V^{1,0}_{\mathbb{C}}\oplus V^{0,1}_{\mathbb{C}}$ собственных подпространств оператора J, отвечающих собственным значениям $+i$ и $-i$ соответственно, и обозначим проекции на эти подпространства через $\pi^{1,0}$ и $\pi^{0,1}$ (отметим, что проекция $\pi^{1,0}$ комплексно линейна). Такое разложение индуцирует биградуировку на комплексной внешней алгебре $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V\otimes\mathbb{C})$. Обозначаем через $\Lambda^*_{\mathbb{C}}V$ подалгебру внешних степеней подпространства $V^{1,0}_{\mathbb{C}}$ (отметим, что она $\mathbb{C}$-линейно изоморфна внешней алгебре V как векторного пространства над $\mathbb{C}$) и зададим действие V на $\Lambda^*_{\mathbb{C}}V$ формулой

$$v\cdot(\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t)=\sqrt{2}\left(\pi^{1,0}(v)\wedge\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t-\pi^{1,0}(v)\llcorner(\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t)\right)\,,$$

где $\pi^{1,0}(v)\llcorner(\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t)=\sum_{i=1}^t(-1)^{i-1}\big\langle\,\alpha^i\,,\,\pi^{1,0}(v)\,\big\rangle\alpha^1\wedge\dots\wedge\hat{\alpha}^i\wedge\dots\wedge\alpha^t$ и скалярное произведение на $V\otimes\mathbb{C}$ является эрмитовым продолжением скалярного произведения с V (комплексно линейным по первому сомножителю и антилейным по второму). Ясно, что при этом получается действие $\mathbb{C}$-линейными эндоморфизмами $\Lambda^*_{\mathbb{C}}V$, которые, однако, не $\mathbb{C}$-линейно зависят от $v\in V$.

Лемма 3.4.1. $v\cdot(v\cdot(\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t))=-|v|^2\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t$

Доказательство. Поскольку при двукратном применении внешнего умножение на $\pi^{1,0}(v)$ или свертки с $\pi^{1,0}(v)$ получится нуль, выражение для $v\cdot(v\cdot(\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t))$ сводится к

$$2\left(-\pi^{1,0}(v)\llcorner(\pi^{1,0}(v)\wedge\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t)-\pi^{1,0}(v)\wedge\left(\pi^{1,0}(v)\llcorner(\alpha^1\wedge\dots\wedge\alpha^t)\right)\right)\,,$$

что в свою очередь равно $-2\left\langle \pi^{1,0}(v)\,,\,(\pi^{1,0}(v))\right\rangle \alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^t$. А так как $v\in V$, то

$$\left\langle \pi^{1,0}(v)\,,\,\pi^{1,0}(v)\right\rangle = |\pi^{1,0}(v)|^2 = |v|^2\!/2\,,$$

что и завершает доказательство. ☐

Следствие 3.4.2. *Действие V на $\Lambda^*_{\mathbb{C}}V$ продолжается до действия $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$ комплексно линейными эндоморфизмами.*

Доказательство. Мы видели, что соотношения, задающие алгебру Клиффорда, сохраняются при данном действии. Поскольку действие комплексно линейно, оно определяет действие комплексной алгебры Клиффорда. ☐

Лемма 3.4.3. *Описанное в предыдущем следствии представление алгебры $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$ изоморфно спинорному представлению.*

Доказательство. Для доказательства достаточно убедиться, что это представление неприводимо. Поскольку это представление нетривиально и его размерность равна размерности единственного неприводимого представления алгебры $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$, мы видим, что это и в самом деле так. ☐

Теперь мы построим вложение ϱ унитарной группы $\mathrm{U}(V)$ в $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$. Всякий унитарный оператор $A\in\mathrm{U}(V)$ на комплексном векторном пространстве V диагонален в подходящем унитарном базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$; скажем, пусть $A(e_k)=e^{i\vartheta_k}e_k$, где $1\leqslant k\leqslant n$. Сопоставим A следующий элемент из комплексифицированной алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)\otimes\mathbb{C}$:

$$e^{i\vartheta/2}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\vartheta_k\!/2\right)+\sin\left(\vartheta_k\!/2\right)\,e_k\,J(e_k)\right)\;,$$

где $\vartheta=\sum\limits_{k=1}^{n}\vartheta_k$. Ясно, что таким образом получается непрерывное отображение $\mathrm{U}(V)\to\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$, переводящее единицу грунны $\mathrm{U}(V)$ в единицу группы $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$. Прямое вычисление показывает, что проекция этого отображения на $\mathrm{SO}(V)\times S^1$ переводит A в $(\iota(A),\det(A))$, где ι представляет собой стандартное включение $\mathrm{U}(V)\hookrightarrow\mathrm{SO}(V)$. Тем самым, ϱ — это единственное поднятие $(\iota,\det)$ в группу гомоморфизмов из $\mathrm{U}(V)$ в $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$.

Лемма 3.4.4. *Действие $\mathrm{U}(V)$ на спинорном модуле $\Lambda^*_{\mathbb{C}}V$, индуцированное вложенииием ϱ, совпадает с естественным действием $\mathrm{U}(V)$ на $\Lambda^*_{\mathbb{C}}(V)$.*

Доказательство. Это прямое вычисление. ☐

Следствие 3.4.5. *На любом компактном $2n$-мерном римановом многообразии X, на котором задана согласованная с метрикой почти комплексная структура $TX\xrightarrow{J}TX$, существует каноническая $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P}_X$ с детерминантным линейным расслоением K_X^{-1} (обратным к каноническому 1-раслоению форм типа $(0,n)$ относительно структуры J). Комплексным спинорным расслоением этой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры является комплексная внешняя алгебра $\Lambda^*T_{\mathbb{C}}X$ комплексного касательного расслоения, на которой алгебра Клиффорда действует как в следствии 3.4.2. При этом расслоение $S^+\mathbb{C}(\widetilde{P}_X)$ отождествляется с чётной частью $\Lambda^{2*}T_{\mathbb{C}}X$, а расслоение $S^-\mathbb{C}(\widetilde{P}_X)$ — нечётной частью $\Lambda^{2*+1}T_{\mathbb{C}}X$ этой внешней алгебры.*

Доказательство. Комплексная структура и риманова метрика редуцируют структурную группу расслоения касательных реперов до $\mathrm{U}(n)$. Другими словами, у нас есть главное $\mathrm{U}(n)$-расслоение $Q_{\mathrm{U}(n)}\to X$ и изоморфизм

$$Q_{\mathrm{U}(n)}\underset{\mathrm{U}(n)}{\times}\mathrm{SO}(2n)\xrightarrow{\sim}P_{\mathrm{SO}(2n)}$$

с расслоением ортогональных касательных реперов на X. С помощью описанного выше вложения $\varrho : \mathrm{U}(n) \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$, образуем

$$\widetilde{P}_X = Q_{\mathrm{U}(n)} \underset{\mathrm{U}(n)}{\times} \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(2n) .$$

Ясно, что

$$\widetilde{P}_X / S^1 = Q_{\mathrm{U}(n)} \underset{\mathrm{U}(n)}{\times} \mathrm{SO}(2n) ,$$

где представление $\mathrm{U}(n) \to \mathrm{SO}(2n)$ спускается с ϱ. По построению, этот спуск совпадает с каноническим вложением ι. Тем самым, $\widetilde{P}_X$ действительно представляет собой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру на X.

Детерминантным линейным расслоением этой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$структуры будет фактор

$$\widetilde{P}_X / \mathrm{Spin}(2n) = Q_{\mathrm{U}(n)} \underset{\mathrm{U}(n)}{\times} S^1$$

(действие $\mathrm{U}(n) \to S^1$ задаётся детерминантном), так что $\det \widetilde{P}_X \cong \det Q_{\mathrm{U}(n)}$. Это 1-расслоение обратно детерминанту $\det Q^*_{\mathrm{U}(n)}$ расслоения унитарных кокасательных реперов, т. е. как раз каноническому 1-расслоению $(0, n)$-форм.

Тот факт, что клиффордово умножение на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}_X)$ такое, как утверждается, немедленно вытекает из из следствия 3.4.2.

Опишем, наконец, собственные подпространства оператора умножения на

$$\omega_{\mathbb{C}} = (i)^n e_1 \dots e_{2n} .$$

Выберем координаты так, чтобы $Je_{2k-1} = e_{2k}$ и положим $d\bar{z}_j = e_{2j-1} + ie_{2j}$. Тогда клиффордово умножение на $\omega_{\mathbb{C}}$ совпадает с клиффордовым умножением на

$$i^n \frac{d\bar{z}_1}{2} \frac{i\, d\bar{z}_1}{2} \dots \frac{d\bar{z}_n}{2} \frac{i\, d\bar{z}_n}{2} .$$

Давйте вычислим $\omega_{\mathbb{C}} \cdot (d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q})$. Поскольку

$$\frac{d\bar{z}_\ell}{2} \frac{i\, d\bar{z}_\ell}{2} \cdot \left(d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}\right) = \begin{cases} -i\, d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} & \text{при } \ell \notin \{j_1, \dots, j_q\} \\ +i\, d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} & \text{при } \ell \in \{j_1, \dots, j_q\} , \end{cases}$$

мы имеем $\omega_{\mathbb{C}} \cdot d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q} = i^n (-i)^{n-q} i^q\, d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}) = (-1)^q\, d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. Тем самым, формы чётной степени образуют собственное подпространство для $\omega_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $+1$, а формы нечётной степени — собственное подпространство с собственным значением -1. ☐

$\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура из следствия 3.4.5 называется $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-*структурой почти комплексной структуры* (или $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурой, *задавемой* почти комплексной структурой).

Следствие 3.4.6. *Комплексное спинорное расслоение почти комплексного риманова многообразия X можно отождествить с расслоением $\bigoplus_q \Omega^{0,q}(X)$ всех внешних комплекснозначных форм типа $(0, *)$. При этом $S^*_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}_X)$ отождествится с «чётными» формами типа $(0, 2*)$, а $S^-_{\mathbb{C}}(\widetilde{P}_X)$*

— с «нечётными» формами типа $(0,2*+1)$, *и клиффордово произведение векторного поля* v *с* $(0,q)$*-формой* μ *будет задаваться формулой*

$$v\cdot\mu=\sqrt{2}\,\left(\pi^{0,1}(v^*)\wedge\mu-\pi^{0,1}(v^*)\llcorner\mu\right)\ ,$$

где v^* *— это 1-форма, двойственная к* v, $\pi^{0,1}$ *обозначает проекцию на* $\Lambda^{0,1}T^*X$, *а* $\llcorner$ *— оператор свёртки.*

Доказательство. Продолжим двойственность $V\to V^*$, задаваемую правилом $v\mapsto v^*=\langle\,\cdot\,,v\,\rangle$, до $\mathbb{C}$-линейного отображения $V\underset{\mathbb{R}}{\otimes}\mathbb{C}\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,\mathbb{C})$. Это отображение индуцирует $\mathbb{C}$-линейный изоморфизм $V^{1,0}\to(V^*)^{0,1}$, внешние степени которого $\mathbb{C}$-линейно отождествляют $\Lambda^*_{\mathbb{C}}V=\bigoplus\limits_q\Lambda^q\left(V^{1,0}\right)$ с $\bigoplus\limits_q\Lambda^q\left((V^*)^{0,1}\right)$. Глобализуя этот изоморфизм мы видим, что на почти комплексном многообразии X расслоение комплексных внешних степеней комплексного касательного расслоения $\mathbb{C}$-линейно изоморфно расслоению $\mathbb{C}$-значных внешних форм типа $(0,q)$. Всё остальное немедленно вытекает из следствия 3.4.5. ☐

Замечание. Если при помощи метрики отождествить $\Omega^i(X;\mathbb{R})$ с пространством сечений расслоения Λ^iTX и вложить последнее в алгебру Клиффорда $\mathrm{Cl}(X)$, то можно считать, что дифференциальные формы $\Omega^i(X;\mathbb{R})$ действуют клиффордовым умножением на $S_{\mathbb{C}}(\widetilde{P})$, так что клиффордово умножение на форму $\mu=a^1\wedge\cdots\wedge a^i$, являющуюся произведением ортонормального над каждой точкой набора k ковекторов a^i, есть композиция последовательных клиффордовых умножений на a^j, которые, в свою очередь, задаются формулой

$$a^j\cdot\nu=\sqrt{2}\,\left(\pi^{0,1}(a^j)\wedge\nu-\pi^{0,1}(a^j)\llcorner\nu\right)\ .$$

Оператор Дирака на кэлеровом многообразии. Теперь мы будем считать, что почти комплексная структура интегрируема и индуцирована кэлеровой структурой на X. Это означает, что на X задана риманова метрика, по отношению к которой оператор комплексной структуры J ортогонален, и в окрестности каждой точк $x\in X$ существует локальная голоморфная система координат, в которой с точностью до малых второго порядка риманова метрика имеет стандартный вид в точке x. В этих координатах мы и вычислим оператор Дирака канонической $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры, индуцированной комплексной структурой. Её детерминантное расслоение, как мы знаем, отождествляется с K_X^{-1} (т. е. обратно к каноническому 1-расслоению), и комплексная стуктура на X, естественно, индуцирует голоморфную структуру (т. е. попросту $(0,1)$-связность) на K_X^{-1}, а метрика на X определяет на K_X^{-1} эрмитову метрику. В результате на K_X^{-1} возниткает единственная эрмитова связность A, согласована с голоморфной структурой (её $(0,1)$-компонента является голоморфной $(0,1)$-связностью).

Как мы только что видели, комплексное спинорное расслоение нашей $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры отождествляется с расслоением $(0,q)$-форм. Пусть σ — произвольная $(0,k)$-форма, рассматриваемая как сечение комплексного спинорного расслоения. Фиксируем в окрестности точки p голоморфные координаты $(z_1,\ldots,z_n)$ так, чтобы в соответствующих вещественных координатах $x_{2i-1}=\mathrm{Re}\,(z_i)$ и $x_{2i}=\mathrm{Im}\,(z_i)$ риманова метрика с точностью до второго порядка малости имела стандартный вид в точке p, и обозначим через e_i единичный касательный вектор в x_i-напрвлении над p. По определению, мы имеем

$$\partial\!\!\!/_A(\sigma)(p)=\sum_{i=1}^{2n}e_i\nabla_{e_i}(\sigma)(p)\ .$$

В соответствии с нашим выбором координат, ковариантное дифференцирование относительно связности A в точке p задаётся операторами $\nabla_{e_i} = \partial_i$, и стало быть,

$$\not{\partial}_A(\sigma)(p) = \sum_{i=1}^{2n} e_i \partial_i(\sigma)(p) \ ,$$

что, в свою очередь, равно $\sqrt{2}\sum\limits_{i=1}^{2n} \pi^{0,1}(dx_i) \wedge \partial_i(\sigma)(p) - \pi^{0,1}(dx_i) \lrcorner \partial_i(\sigma)(p)$. Разумеется,

$$\pi^{0,1}(dx_{2k-1}) = \frac{d\bar{z}_k}{2} \quad , \qquad \pi^{0,1}(dx_{2k}) = \frac{id\bar{z}_k}{2} \ ,$$

и мы получаем для $\not{\partial}_A$ выражение

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} d\bar{z}_k \wedge \frac{1}{2}\left(\partial_{2k-1}(\sigma)(p) + i\partial_{2k}(\sigma)(p) \right) - \sqrt{2}\sum_{i=1}^{2n} \pi^{0,1}(dx_i) \lrcorner \partial_i(\sigma)(p) \ ,$$

которое упрощается до $\sqrt{2} \sum\limits_{k=1}^{n} d\bar{z}_k \wedge \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\sigma) - \sqrt{2} \sum\limits_{i=1}^{2n} \pi^{0,1}(dx_i) \lrcorner \partial_i(\sigma)$. Поскольку свёртка в последней сумме $\mathbb{C}$-антилинена по первой переменной, это преобразуется в

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} d\bar{z}_k \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(\sigma)(p) - \sqrt{2}\sum_{k=1}^{n} (d\bar{z}_k) \lrcorner \frac{1}{2}\left(\partial_{2k-1}(\sigma)(p) - i\partial_{2k}(\sigma)(p) \right) .$$

или в $\sqrt{2}\left(\bar{\partial}(\sigma)(p) - \sum\limits_{k=1}^{n} d\bar{z}_k \lrcorner \dfrac{\partial}{\partial z_k}(\sigma)(p) \right)$. Окончательно получаем

$$\not{\partial}_A(\sigma)(p) = \sqrt{2}\left(\bar{\partial}(\sigma)(p) + \bar{\partial}^*(\sigma)(p) \right) \ .$$

Глава 4.

Пространство модулей Зайберга - Виттена

4.1. Уравнения

Теперь мы готовы выписать уравнения Зайберга - Виттена на замкнутом ориентированном четырёхмерном римановом многообразии X. Для этого мы зафиксируем $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P}$ на расслоении ортогональных касательных реперов $P \to X$ и обозначаем через $S^{\pm}(\widetilde{P})$ ассоциированные с $\widetilde{P}$ комплексные расслоения ±-спиноров, а через $\mathcal{L} = \det S^{+}(\widetilde{P}) = \det S^{-}(\widetilde{P})$ — детерминантное 1-расслоение $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$. Напомним, что на $S^{\pm}(\widetilde{P})$, а стало быть, и на $\mathcal{L}$ есть эрмитово скалярное произведение. Уравнения Зайберга - Виттена — это уравнения на спинорное поле $\psi \in C^{\infty}(S^{+}(\widetilde{P}))$ и унитарную связность A на $\mathcal{L}$. Выглядят они так:

$$F_A^{+} = q(\psi) \overset{\mathrm{def}}{=} \psi \otimes \psi^{*} - \frac{|\psi|^2}{2}\,\mathrm{Id}$$

$$\partial\!\!\!/_A(\psi) = 0$$

Объяснение уравнений. Второе уравнение не нуждается в долгих объяснениях: $\partial\!\!\!/_A$ — это описанный в прошлой главе оператор Дирака, ассоциированный со связностью Леви-Чевита на расслоениии касательных реперов и связностью A на детерминантном расслоении $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ структуры.

Что касается первого уравнения, то через ψ^{*} обозначается образ ψ при $\mathbb{C}$-антилинейном отождествлении $S^{+}(\widetilde{P}) \xrightarrow{\sim} S^{+}(\widetilde{P})^{*}$, доставляемом эрмитовой метрикой. Таким образом,

$$\psi \otimes \psi^{*} \in S^{+}(\widetilde{P}) \otimes S^{+}(\widetilde{P})^{*} = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\left(S^{+}(\widetilde{P})\right)$$

Если мы послойно зафиксируем базис в $S^{+}(\widetilde{P})$ и запишем $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$, то

$$\psi \otimes \psi^{*} = \begin{pmatrix}|\psi_1|^2 & \psi_1\overline{\psi}_2\\ \psi_2\overline{\psi}_1 & |\psi_2|^2\end{pmatrix}$$

в этом базисе. Мы знаем, что клиффордово умножение индуцирует изоморфизм $(\mathrm{Cl}_0(P) \otimes \mathbb{C})^{+} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^{+}(\widetilde{P}))$, при котором элемент $(1+\omega_{\mathbb{C}})/2$ в разложении

$$(\mathrm{Cl}_0(P) \otimes \mathbb{C})^{+} = \mathbb{C} \cdot \frac{1+\omega_{\mathbb{C}}}{2} \oplus (\Lambda^2_{+}(TX) \otimes \mathbb{C})$$

переходит в тождественный оператор, а $\Lambda^2_+(TX)\otimes\mathbb{C}$ — в подпространство бесследных эндоморфизмов $S^+(\widetilde{P})$. Так как $\operatorname{Tr}(\psi\otimes\psi^*) = |\psi|^2$, элемент

$$q(\psi) = \psi\otimes\psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\,\mathrm{Id}$$

имеет нулевой след, и значит, является сечением $\Lambda^2_+(TX)\otimes\mathbb{C}$. Продолжим теперь индуцированный метрикой изоморфизм $TX \xrightarrow{\sim} T^*X$ до $\mathbb{C}$-линейного отождествления комплексификаций $\mathbb{C}\otimes TX \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\otimes T^*X$. Если мы сможем проинтерпретировать $q(\psi)$ как комплекснозначную автодуальную 2-форму, то первое уравнение будет означать, что эта форма является автодуальной частью кривизны. Остаётся лишь доказать такую лемму.

Лемма 4.1.1. *В описанной только что интерпретации $q(\psi)$ действительно является чисто мнимой автодуальной 2-формой.*

Доказательство. Вспомним, что вещественная подалгебра

$$\mathrm{Cl}_0^+(\mathbb{R}^4)\subset(\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^4)\otimes\mathbb{C})^+$$

изоморфна $\mathbb{H}\subset\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, так что её действие на $S^+(\widetilde{P})$ изображается комплексными 2×2-матрицами вида

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{pmatrix}.$$

Таким образом элемент $\lambda\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S^+(\widetilde{P}))$ тогда и только тогда вещественен, когда $\mathrm{Tr}(\lambda)\in\mathbb{R}$ и $\lambda^*+\lambda=\mathrm{Tr}(\lambda)\,\mathrm{Id}$. Из построения ясно, что $\mathrm{Tr}(q(\psi))=0$, и значит, чтобы убедиться, что автоморфизм $q(\psi)$ соответствует чисто мнимой автодуальной 2-форме, нам нужно лишь увидеть, что

$$(iq(\psi))^*+iq(\psi)=0\,.$$

Поскольку взятие звёздочки — это сопряжение с транспонированием, нам надо проверить, что $-i\,\overline{q(\psi)}^{\mathrm{tr}}+i\,q(\psi)=0$ или $q(\psi)^{\mathrm{tr}}=\overline{q(\psi)}$. Но это ясно, поскольку такое соотношение выполняется как для всех элементов вида $\psi\otimes\psi^*$, так и для всех действительных кратных единицы. □

4.2. Конфигурационное пространство

Для построения пространства модулей, с помощью которого будет определяться инвариант $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$ структуры, нам придётся рассмотреть уравнения Зайберга - Виттена в контексте нелинейной эллиптической теории. Начнём с того, что зафиксируем конфигурационное пространство $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ — то пространство, функциями на котором и являются наши уравнения. Оно состоит из всех пар (A,ψ), где A – это $\mathrm{U}(1)$-связность на детерминантном расслоении $\mathcal{L}$ $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$, а ψ – это сечение спинорного расслоения $S^+(\widetilde{P})$. Наивный подход состоит в том, чтобы брать C^∞-связности и сечения. Однако, по техническим причинам удобнее работать с банаховыми или гильбертовыми пространствами. Самый простой (но, конечно, далеко не единственный) путь — это положить

$$\mathcal{C}(\widetilde{P})=\mathcal{A}_{L^2_2}(\mathcal{L})\times L^2_2\left(S^+(\widetilde{P})\right)\ ,$$

где $\mathcal{A}_{L^2_2}(\mathcal{L})$ есть пространство унитарных L^2_2-связностей на $\mathcal{L}$, а через $L^2_k(V)$ здесь и далее обозначается пространство L^2_k-сечений (любого) векторного расслоения V над X. В последствии мы сможем работать и с более сильными нормами: пространство модулей будет при этом всегда одним и тем же и будет (по модулю калибровки) состоять из C^∞ объектов. Касательное пространство к $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ в любой точке естественно отождествляется с

$$L^2_2\left((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\right) ,$$

и на нём имеется каноническое скалярное L^2-произведение. Через

$$F:\ \mathcal{C}(\widetilde{P}) \longrightarrow L^2_1\left((\Lambda^2_+T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\right)$$

мы обозначаем *функционал Зайберга - Виттена*

$$F(A,\psi) = (F^+_A - q(\psi), \not{\partial}_A(\psi)) ,$$

так что уравнения Зайберга - Виттена будут записываться просто как

$$F(A,\psi) = 0 .$$

Лемма 4.2.1. *Функционал Зайберга - Виттена F является гладким отображением, и его дифференциал в точке (A,ψ) задаётся линейным оператором*

$$DF_{(A,\psi)} = \begin{pmatrix} P_+d & -Dq_\psi \\ \frac{1}{2}(?)\cdot\psi & \not{\partial}_A \end{pmatrix}$$

где $\frac{1}{2}(?)\cdot\psi$ — это клиффордово умножение, переводящее 1-форму α в $\frac{1}{2}\,\alpha\cdot\psi \in L^2_1\left(S^-(\widetilde{P})\right)$, а $Dq_\psi(\eta) = \psi\otimes\eta^* + \eta\otimes\psi^* - \dfrac{\langle\,\eta\,,\,\psi\,\rangle + \overline{\langle\,\eta\,,\,\psi\,\rangle}}{2}\,\mathrm{Id}$ (ещё раз отметим, что справа стоит бесследный самосопряжённый автоморфизм, соответствующий клиффордову умножению на чисто мнимую автодуальную 2-форму).

Доказательство. Заметим, что F является суммой аффинного отображения и квадратичного оператора $q(\psi)$. Аффинное отображение непрерывно, а значит, гладко. Теорема о соболевском уможении показывает, что $q(\psi)$ также гладко. Далее все производные вычисляются непосредственно. □

4.3. Калибровочная группа

Теперь мы должны зафиксировать калибровочную группу, т. е. группу автоморфизмов главного $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-расслоения $\widetilde{P}$, тождественно действующих на расслоении касательных реперов. Всякий такой автоморфизм задаётся отображением из X в центр S^1 группы $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(4)$. Как всегда в таких случаях, для получения корректного действия на конфигурационном пространстве нужны автоморфизмы на единичку большей гладкости, так что мы возьмём L^2_3-отображения $X \longrightarrow S^1$ с L^2_3-топологией (отметим, что этот выбор нормы диктуется тем, что калибровочные преобразования должны быть непрерывными автоморфизмами расслоения). Пространство таких отображений мы обозначаем через $\mathcal{G}(\widetilde{P})$. Это гильбертово многообразие, и его касательное пространство в единице состоит из L^2_3-функций на X со значениями в $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Лемма 4.3.1. *Поточечное умножение превращает $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ в бесконечномерную абелеву группу Ли. Её алгебра Ли есть $L^2_3(X; i\mathbb{R})$ (пространство L^2_3-сечений тривиального расслоения $X \times i\mathbb{R}$ над X) с нулевой скобкой.*

Отметим, что на этой алгебре Ли имеется естественное скалярное L^2-произведение.

Доказательство. Надо лишь проверить, что умножение и взятие обратного являются гладкими отображениями гильбертовых многообразий. Второе очевидно. Непрерывность умножения сразу следует из непрерывности соболевского произведения $L^2_3(X) \otimes L^2_3(X) \to L^2_3(X)$. □

4.4. Действие

Покажем теперь, что калибровочная группа естественным образом действует на конфигурационном пространстве. Всякий элемент $\sigma \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$ индуцирует эндоморфизмы

$$\det\sigma : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \qquad \text{и} \qquad S^{\pm}(\sigma) : S^{\pm}(\widetilde{P}) \longrightarrow S^{\pm}(\widetilde{P}) .$$

Отметим, что $\det\sigma$ как S^1-значная функция на X получается из S^1-значной функции σ простым возведением в квадрат. Действие σ на конфигурационном пространстве задаётся формулой

$$(A,\psi)\cdot\sigma = \left((\det\sigma)^*A ,\ S^+(\sigma^{-1})(\psi)\right) .$$

Лемма 4.4.1. *Эта формула определяет гладкое правое действие*

$$\mathcal{C}(\widetilde{P}) \times \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P}) ,$$

при котором $F((A,\psi)\cdot\sigma) = F(A,\psi)\cdot\sigma$, где действие σ на

$$L^2_1\left((\Lambda^2_+T^*X \otimes i\mathbb{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\right)$$

тривиально на первом слагаемом и совпадает с $S^-(\sigma^{-1})$ на втором.

Доказательство. Гладкость действия легко следует из теорем о соболевских произведениях. Для проверки правила преобразования функционала F нужна

Лемма 4.4.2. $\eth_{(\det\sigma)^*A}(S^+(\sigma^{-1})(\psi)) = S^-(\sigma^{-1})(\eth_A(\psi))$ *для всех* $\sigma\in\mathcal{G}$ *и* $\psi\in S^+(\widetilde{P})$.

Доказательство. Сначала заметим, что ковариантные производные ∇' и ∇, которые индуцуруются на $S^{\pm}(\widetilde{P})$ связностью Леви-Чевита и детерминантными связностями $(\det\sigma)^*A$ и A соответственно, связаны соотношением

$$\nabla' = S^{\pm}(\sigma)^*\nabla ,$$

и значит, $\nabla'(S^{\pm}(\sigma^{-1})(\psi)) = S^{\pm}(\sigma^{-1})(\nabla(\psi))$. Лемма сразу следует из этоой формулы в силу того, что клиффордово умножнение коммутирует с автоморфизмами $S^{\pm}(\sigma)$. □

Наша исходная лемма немедленно вытекает из только что доказанной. В частности, мы видим, что пространство решений уравнений Зайберга - Виттена инвариантно относительно действия $\mathcal{G}(\widetilde{P})$. □

4.5. Факторпространство

Теперь нам нам надо профакторизовать $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ по действию $\mathcal{G}(\widetilde{P})$. Существование разумного фактора *a priori* совсем не очевидно. Первым делом, опишем различные типы стабилизаторов нашего действия. Всюду в этом разделе неявно предполагается, что база X является связным многообразием.

Лемма 4.5.1. *Если стабилизатор элемента $(A, \psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$ нетривиален, то $\psi = 0$, а стабилизатор состоит из постоянных отображений $X \longrightarrow S^1$ (и естественно отождествляется с S^1).*

Определение 4.5.2. Конфигурация (A, ψ) называется *неприводимой*, если $\psi \neq 0$, и *приводимой* — в противном случае. Открытое подмножество всех неприводимых конфигураций обозначается через $\mathcal{C}^\circ(\widetilde{P})$.

Доказательство. Поскольку многообразие X связно, стабилизатор всякой связности A представляет собой группу постоянных отображений из X в S^1. Если ψ не равно тождественно нулю, эта группа действует на ψ свободно. При $\psi = 0$ её действие тривиально. □

Основной результат о сходимости. Обратимся теперь к более техническим результатам о структуре нашего действия. Первый из них таков.

Лемма 4.5.3. *Пусть последовательности (a_n, ψ_n) и (b_n, μ_n) сходятся в $\mathcal{C}(\widetilde{P})$, соответственно, к (a, ψ) и (b, μ), и пусть при всех n*

$$(a_n, \psi_n) \cdot \sigma_n = (b_n, \mu_n)$$

для некоторых $\sigma_n \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$. Тогда из последовательности калибровок σ_n можно выбрать подпоследовательность, которая сходится к элементу $\sigma \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$, такому что

$$(a, \psi) \cdot \sigma = (b, \mu) .$$

Доказательство. Пусть $\tau_n = \det(\sigma_n)$. Поскольку все σ_n суть функции со значением на окружности, все нормы $||\sigma_n||_{L^6}$ и $||\tau_n||_{L^6}$ оцениваются константой, не зависящей от n. Равенство $\tau_n^* a_n = b_n$ означает, что

$$d\tau_n = \tau_n(b_n - a_n) .$$

Поскольку последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к L^2_2-связностям a и b соответственно, нормы $||a_n||_{L^2_2}$ и $||b_n||_{L^2_2}$ также будут ограничены равномерно по n. Соболевское умножение $L^6 \otimes L^2_2 \to L^5$ показывает, что $||d\tau_n||_{L^5}$ также равномерно ограничены, а это, в свою очередь, даёт равномерную ограниченность $||\tau_n||_{L^5_1}$. Продолжая этот бутстпапинг, мы получаем равномерную ограниченность $||\tau_n||_{L^4_2}$ и $||\tau_n||_{L^3_3}$. В силу компактности вложения $L^3_3 \subset L^3_2$, мы можем теперь выделить в последовательности (τ_n) подпоследовательность, L^3_2-сходящуюся к некоторому элементу τ. Ясно, что $d\tau = \tau(b - a)$, так что с помощью соболевского умножения мы видим, что $d\tau \in L^2_2$ и что $d\tau_n$ L^2_2-сходится к $d\tau$. Отсюда следует, что $\tau \in L^2_3$ и что τ_n сходится к τ в L^2_3Таким образом, переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $(\sigma_n)^2$ сходится в L^2_3 к элементу τ. Ещё раз переходя к подпоследовательности в этой (σ_n), мы получим подпоследовательность, которая сходится в L^2_3 к элементу σ. Очевидно, что $(a, \psi) \cdot \sigma = (b, \mu)$.
□

Следствие 4.5.4. *Факторпространство $\mathcal{B}(\widetilde{P}) = \mathcal{C}(\widetilde{P})/\mathcal{G}(\widetilde{P})$ хаусдорфово.*

Доказательство. Поскольку все рассматриваемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности, нехаусдорфовость фактора означала бы наличие таких последовательностей (a_n, ψ_n) в $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ и $\sigma_n \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$, что (a_n, ψ_n) сходится, скажем, к (a, ψ), а $(a_n, \psi_n) \cdot \sigma$ — к (b, μ), но при этом (a, ψ) и (b, ψ) не лежат в одной орбите действия. Но это невозможно, так как, переходя к подпоследовательностям, мы можем считать, что σ_n сходится к σ и $(a, \psi) \cdot \sigma = (b, \mu)$.
☐

Слайс-лемма. Следующий результат, который нам нужен о факторпространствах, — это существование локальных срезов (или слайсов) действия калибровочной группы. Наличие *локального среза* (или *слайса*) действия в точке $x \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$, означает, по определению, что некоторая открытая окрестность этой точки содержит гладко в неё вложенное и инвариантное относительно действия стабилизатора x замкнутое гильбертово подмногообразие S, такое что естественное отображение

$$S \underset{\mathrm{Stab}(x)}{\times} \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P})$$

является диффеоморфизмом на некоторую окрестность орбиты точки x.

Лемма 4.5.5. *Действие $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ на $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ в каждой точке обладает локальным срезом.*

Доказательство. Сначала рассмотрим дифференциал действия $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ в точке $(A, \psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$:

$$D: \quad L^2_3(X; i\,\mathbb{R}) \to L^2_2\left((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\vartheta P)\right) ,$$

который действует по правилу $f \overset{D}{\to}\longmapsto (\,2\,df\,,\, -f \cdot \psi\,)$. Линейное приближение к срезу задаётся ядром оператора, сопряжённого к дифференциалу относительно скалярного L^2-произведения, и представляет собой подпространство $(A, \psi) + K$, где K — это ядро линейного отображения

$$\Omega^1(X; i\,\mathbb{R})_{L^2_2} \oplus L^2_2(S^+(\widetilde{P})) \to \Omega^0(X; i\,\mathbb{R})_{L^2_1} ,$$

заданного правилом $(\omega, \mu) \longmapsto 2d^*\omega + i\mathrm{Im}\left\langle\, \mu\,,\, \psi\,\right\rangle_{L^2}$ (отметим, что линейное подпространство K инвариантно относительно действия стабилизатора точки (A, ψ)).

Сам срез будет иметь вид $(A, \psi) + U$, где U достаточно малая $\mathrm{Stab}(A, \psi)$-инвариантная открытая окрестность нуля в K. Для такой окрестность отображение

$$U \underset{\mathrm{Stab}(A,\psi)}{\times} \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P}) \quad : \qquad [u, \sigma] \longmapsto \big((A, \psi) + u\big) \cdot \sigma$$

корректно определено и гладко, а его дифференциал в точке $[0, \mathrm{Id}]$

$$\left(K \oplus L^2_3(X; i\,\mathbb{R})\right) \big/ \mathrm{stab}(A, \psi) \to L^2_2\left((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\right)$$

$(\mathrm{stab}(A, \psi)$ – это касательное пространство к $\mathrm{Stab}(A, \psi))$ действует на первое слагаемое как тавтологическое вложение, а на второе — как

$$D: \quad f \longmapsto (\,2d,\, -f \cdot \psi\,)\,.$$

Поскольку $\ker D = \mathrm{stab}(A, \psi)$, а ортогональное дополнение к $\mathrm{im}\, D$ есть K, дифференциал является линейным изоморфизмом. Следовательно, по теореме об обратной функции, для достаточно малых $\mathrm{Stab}(A,\psi)$-инвариантных окрестностей U и V нуля в K и единицы в $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ отображение

$$U \underset{\mathrm{Stab}(\widetilde{P})}{\times} V \to \mathcal{C}(\widetilde{P})$$

является диффеоморфизмом на некоторую открытую окрестность (A,ψ).

Нам остаётся убедиться, что, возможно, после замены U меньшей окрестностью, отображение

$$U \underset{\mathrm{Stab}(A,\psi)}{\times} \mathcal{G}(\widetilde{P}) \to \mathcal{C}(\widetilde{P})$$

будет диффеоморфизм на открытое подмножество. Поскольку это отображение является, как мы видели, локальным диффеоморфизмом, достаточно показать, что оно взаимно однозначно на достаточно малом U. Но если оно не взаимно однозначно ни в какой окрестности нуля в K, то можно найти сходящиеся к 0 последовательности точек $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, и такие групповые элементы $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $((A,\psi)+a_n)\cdot\sigma_n = (A,\psi)+b_n$, но при этом $[a_n,\sigma_n] \neq [b_n,\mathrm{Id}]$ в расслоенном произведении. Лемма 4.5.3 позволяет нам выделить в σ_n подпоследовательность, которая сходится к к некоторому элементу $\sigma \in \mathcal{G}(\widetilde{P})$. Ясно, что $(A,\psi)\cdot\sigma = (A,\psi)$, т. е. $\sigma \in \mathrm{Stab}(A,\psi)$. Это означает, что как $[a_n,\sigma_n]$, так и $[b_n,\mathrm{Id}]$ содержатся в $U \underset{\mathrm{Stab}(A,\psi)}{\times} V$ при всех достаточно больших n. Мы получаем противоречие с тем, что ограничение нашего отображения на это подмножество является диффеоморфизмом. Это завершает доказательство существования локального среза действия. ☐

Следствие 4.5.6. *Факторпространство $\mathcal{B}(\widetilde{P}) = \mathcal{C}(\widetilde{P})/\mathcal{G}(\widetilde{P})$ хаусдорфово. Дополнение к классам приводимых конфигураций составляет открытое подмножество*

$$\mathcal{B}^{\circ}(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}(\widetilde{P})\,,$$

являющееся гильбертовым многообразием, и его касательное пространство над точкой $[A,\psi]$ отождествляется с

$$\frac{L^2_2\left((T^*X\otimes i\,\mathbb{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\right)}{im\left(f\longmapsto(2\,df\,,\,-f\cdot\psi\,)\right)}\,.$$

Окрестность приводимого класса $[A,0]$ в $\mathcal{C}(\widetilde{P})/\mathcal{G}(\widetilde{P})$ гомеоморфна фактору пространства

$$\frac{L^2_2\left((T^*X\otimes i\,\mathbb{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\right)}{im\left(f\longmapsto(2\,df\,,\,0\,)\right)}\,.$$

по действию окружности $S^1 = \mathrm{Stab}(A,0)$. Это действие линейно и полусвободно, и инварантные относительно него касательные векторы составляют касательный конус к пространству приводимых классов, так что линк страта приводимых классов гомотопически эквивалентен $\mathbb{C}P^{\infty}$

Легко установить также и гомотопический тип фактора.

Лемма 4.5.7. *Открытое подмножество $\mathcal{B}^{\circ}(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}(\widetilde{P})$, состоящее из неприводимых классов является классифицирующим пространством для группы $(S^1)^X$, и в частности, оно гомотопически эквивалентно произведению $\mathbb{C}P^{\infty}$ на пространство Эйленберга - Маклейна*

$$K(H^1(X;\mathbb{Z}),1)\,.$$

Доказательство. Пространство $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ аффинно и поэтому стягиваемо. Приводимые классы составляют в нём аффинное подпространство бесконечной коразмерности, так что открытое подмножество $\mathcal{C}^\circ(\widetilde{P})$ неприводимых классов также стягиваемо. Поскольку действие $(S^1)^X$ на нём свободно и имеет локальные срезы, факторпространство $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ действительно является классифицирующим пространством для $(S^1)^X$. Эта группа представляет собой произведение связной компоненты единицы (т. е. группы всех гомотопически тривиальных отображений $X \to S^1$) на дискретную группу $H^1(X;\mathbb{Z})$. Первая гомотопически эквивалентна S^1, поскольку группа постоянных отображений является её деформационном ретрактом. Отсюда сразу следует утверждение о гомотопическом типе классифицирующего пространства. □

Над $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ есть универсальное S^1-расслоение, первый класс Чженя которого служит той образующей в $H^2(\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P});\mathbb{Z})$, которая приходит из сомножителя $\mathbb{C}P^\infty$. Строится оно так. Фиксируем точку $x \in X$ на базе и обозначим через $\mathcal{G}_0(\widetilde{P})$ подгруппу в $\mathcal{G}(\widetilde{P})$, состоящую из всех калибровочных преобразований, тривиальных в слое над x. $\mathcal{G}_0(\widetilde{P})$ представляет собой ядро гомоморфизма $\mathcal{G}(\widetilde{P}) \xrightarrow{\mathrm{ev}_x} S^1$ вычисления значения над x. Тотальным пространством универсального S^1-расслоения над $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ является фактор $\mathcal{B}_0(\widetilde{P}) = \mathcal{C}^\circ(\widetilde{P})/\mathcal{G}_0(\widetilde{P})$. Легко понять, что его первый класс Чженя порождает вторые когомологии $\mathbb{C}P^\infty$-сомножителя в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$. Более того, ограничение этого класса на линк приводимого страта будет порождать вторые когомологии этого линка (который, как мы помним, тоже гомотопически эквивалентен $\mathbb{C}P^\infty$).

4.6. Эллиптический комплекс

Со всяким решением $(A,\psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$ уравнений Зайберга - Виттена естественно ассоциируется эллиптический комплекс, который заключает в себе всю информацию как о линеаризации самих уравнений, так и о линеаризованном действии калибровочной группы. Он обозначается $\mathcal{E}(A,\psi)$ и представляет собой последовательность

$$0 \to L^2_3(X; i\,\mathbb{R}) \xrightarrow{D_1} L^2_2\Big((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big) \xrightarrow{D_2} L^2_1\big((\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^-(\widetilde{P}) \to 0\,,$$

в которой $D_1 = D:\ f \longmapsto (\,2\,df\,,\,-f\cdot\psi\,)$, а $D_2 = DF_{(A,\psi)} = \begin{pmatrix} P_+d & -Dq_\psi \\ \frac{1}{2}(?)\cdot\psi & \not\partial_A \end{pmatrix}$. Мы покажем, что это эллиптический комплекс и вычислим его эйлерову характеристику.

Утверждение 4.6.1. *Написанная выше последовательность является комплексом над любым решением (A,ψ) уравнений Зайберга - Виттена.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in L^2_3(X; i\,\mathbb{R})$. Тогда $D_1(\varphi) = (2d\varphi, -\varphi\psi)$, а значит

$$D_2 \circ D_1(\psi) = \big(\,2\,P_+dd\varphi + Dq_\psi(\varphi\psi)\,,\, d\varphi\cdot\psi - \not\partial_A(\varphi\psi)\,\big)\ ,$$

где $2P_+dd\varphi = 0$, а $Dq_\psi(\varphi\psi) = \psi\otimes\overline{\varphi}\psi^* + \varphi\psi\otimes\psi^* - \mathrm{Re}\,\langle\,\psi\,,\,\varphi\psi\,\rangle\cdot\mathrm{Id}$. Первые два члена в последнем равенстве взаимно уничтожаются, так как φ чисто мнимо, и значит, $\overline{\varphi} = -\varphi$. По той же причине занулится и последний член. Тем самым, первая компонента композиции тривиальна. Что касается второй компоненты, то поскольку ператор Дирака действует на функции дифференцированием, $\not\partial_A(\varphi\psi) = d\varphi\cdot\psi + \varphi\not\partial_A(\psi)$, так что вторая компонента композици равна $-\not\partial_A(\psi)$ и зануляется, когда (A,ψ) является решением уравнений Зайберга - Виттена. □

Пусть $[A,\psi]$ — это неприводимое решение уравнений Зайберга - Виттена. Тогда наш комплекс точен слева, а его первые когомологии образуют конечномерное линейное подпространство в касательном пространстве $T\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ над точкой $[A,\psi]$. Оно называется *касательным пространством Зарисского* (или *формальным касательным пространством*) к пространству модулей в этой точке. Вторые когомологии нашего комплекса называются *пространством препятствий* в точке $[A,\psi]$. Мы видим, что разность размерностей касательного пространства Зарисского и пространства препятствий равна взятой с минусом эйлеровой характеристике эллиптического комплекса. Будем говорить, что $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ *гладко* в неприводимом решении, если пространство препятствий тривиально. Из теоремы о неявной функции следует, что если $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ гладко в неприводимой точке $[A,\psi]$, то окрестность $[A,\psi]$ в $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ будет гладким подмногообразием в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$, и его касательное пространство в $[A,\psi]$ будет совпадать с касательным пространством Зарисского.

Вычислим теперь эйлерову характеристику эллиптического комплекса. Для начала заметим, что при помощи подходящей гомотопической эквивалентности можно избавиться от членов нулевого порядка. При этом ни последовательность символов, ни эйлерова характеристика не изменятся, а результирующий комплекс распадётся в прямую сумму двух комплексов:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^2_3(X; i\,\mathbb{R}) \arrow[r, "2d"] & L^2_2(T^*X\otimes i\,\mathbb{R}) \arrow[r, "P_+d"] & L^2_1\left(\Lambda^2_+T^*X\otimes i\,\mathbb{R}\right) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^2_2\left(S^+(\widetilde{P})\right) \arrow[r, "\not{\partial}_A"] & L^2_1\left(S^-(\widetilde{P})\right) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ясно, что оба они (а тем самым, и исходный комплекс) эллиптичны. Эйлерова характеристика первого комплекса равна $1+b_2^+(X)-b_1(X)$. Комплексная эйлерова характеристика второго совпадает с $-\operatorname{ind}\not{\partial}_A$, и равна, как мы видели, $\frac{1}{8}\left(\operatorname{sign}(X)-c_1(\mathcal{L})^2\right)$. Таким образом, интересующая нас вещественная эйлерова характеристика исходного комплекса равна

$$1+b_2^+(X)-b_1(X)+\frac{1}{4}\left(\operatorname{sign}(X)-c_1(\mathcal{L})^2\right)\ ,$$

что упрощается до $\frac{1}{4}\left(2\chi(X)+3\operatorname{sign}(X)-c_1(\mathcal{L})^2\right)$.

Следствие 4.6.2. *Разность размерностей касательного пространства Зарисского и пространства препятствий в неприводимой точке $[A,\psi]\in\mathcal{M}(\widetilde{P})$ равна*

$$d=\frac{c_1(\mathcal{L})^2-2\chi(X)-3,sign\,(X)}{4}\ ,$$

и пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ является гладким d-мерным многообразием в окрестности каждой гладкой неприводимая точки $[A,\psi]$.

Глава 5.

Соотношения и оценки на кривизну

Основной результат этой главы — компактность пространства модулей решений уравнений Зайберга-Виттена, причём компактность в весьма сильном смысле: для любой метрики на X существует лишь конечное множество непустых пространств модулей, и каждое из них компактно. (На самом деле здесь неявно предполагается, что мы имеем дело только с пространствами модулей, виртуальная размерность которых неотрицательна. При достаточно общем возмущении уравнений неотрицательная виртуальная размерность будет, разумеется, только у непустых пространств модулей.) Результат о компактности есть следствие двух обстоятельств. Во-первых, общий критерий компактности Уленбек в нашем контексте показывает, что L^2-оценок на кривизну связности достаточно для получения L^1-оценок на саму связность в подходящей калибровке. Второе обстоятельство, которое имеет место в силу специфики наших уравнений и отсутствует в теории ASD-связностей, — это априорная поточечная ограниченность нормы спинорного поля, а тем самым, и автодуальной составляющей кривизны любого решения. Вместе с оценкой на c_1^2, вытекающей из предположения о неотрицательности виртуальной размерности пространства модулей, это даёт L^2-ограниченность кривизны.

Мы начнём с результатов о кривизне, необходимых для получения её априорной оценки.

5.1. Соотношения на кривизну

Пусть ∇ – связность Леви-Чевита на касательном расслоении к риманову многообразию X, и пусть R – кривизна этой связности, понимаемая как 2-форма со значениями в кососимметричных эндоморфизмах касательного расслоения. Косой эндоморфизм, возникающий как значение кривизны на паре векторов $U, V \in T_xX$, мы обозначаем через $R(U,V): T_xX \longrightarrow T_xX$. Поскольку $R = \nabla \circ \nabla$,

$$R(U,V) = \nabla_U \circ \nabla_V - \nabla_V \circ \nabla_U$$

как эндоморфизмы T_xX.

Лемма 5.1.1. *Для любых трёх касательных векторов U, V, W к точке $x \in X$ в T_xX выполняется соотношение*

$$R(U,V)(W) + R(V,W)(U) + R(W,U)(V) = 0\,.$$

Доказательство. Напомним, что отсутствие кручения означает, что

$$\nabla_A(B) = \nabla_B(A) \ ,$$

где A и B предполагаются продолженными до коммутирующих в некоторой окрестности векторных полей. Мы продолжим U, V, W в некоторую окрестность точки $x \in X$ до векторных полей с тривиальными коммутаторами. Так как кривизна является тензором, утверждение леммы не зависит от выбора этого продолжения. Кривизна как 2-форма со значениями в эндоморфизмах происходит из оператора $\nabla \circ \nabla$, отображающего сечения TX в TX-значные 2-формы. Из-за тривиальности попарных скобок между полями U, V, W это означает, что

$$R(U,V)(W) = \nabla_U \circ \nabla_V(W) - \nabla_V \circ \nabla_U(W)$$

и аналогично для остальных перестановок. Складывая эти три равенства, получаем

$$\begin{aligned} R(U,V)(W) + R(V,W)(U) + R(W,U)(V) = \\ = \nabla_U \circ \nabla_V(W) - \nabla_V \circ \nabla_U(W) + \nabla_V \circ \nabla_W(U) - \\ - \nabla_W \circ \nabla_V(U) + \nabla_W \circ \nabla_U(V) - \nabla_U \circ \nabla_W(V) \ . \end{aligned}$$

Отсутствие кручения позволяет переставить два последних касательных вектора в третьем, пятом и шестом слагаемых, приводя к нужному нам сокращению. □

Определение 5.1.2. Пусть ∇ – это ковариантная производная римановой связности на римановом многообразии X с 2-формой кривизны R. Билинейная форма Ric на TX, заданная как

$$\operatorname{Ric}(V,W) = \Big\langle -\sum_i R(e_i,V)(e_i) \, , \, W \Big\rangle \ ,$$

где $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ – ортонормированный базис в T_xX, называется *кривизной Риччи* многообразия X.

Пусть координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ таковы, что их стандартные касательные векторы составляют ортонормированную систему в точке x. Тогда форма кривизны в этой точке имеет вид

$$R = \sum_{k,l} \left(R^{k,l}_{i,j} \right) dx_k \wedge dx_l \ ,$$

где верхняя пара индексов приходит из индексов 2-формы, а нижние два индекса суть матричные индексы в алгебре Ли. Тензор R кососимметричен по обеим этим парам индексов. 2-форму кривизны можно также записать в виде

$$\sum_{i<j} \sum_{k<l} -R^{k,l}_{i,j} \, dx^k \wedge dx^l (e_i \wedge e_j) = \sum_{i<j} \sum_{k<l} R^{k,l}_{j,i} \, dx^k \wedge dx^l (e_i \wedge e_j) \ ,$$

где, как и ранее, $e_i \wedge e_j$ есть инфинитезимальный генератор вращения (i,j)-плоскости, переводящего e_i в e_j. Знак «–» появился из-за того, что это вращение задаётся матрицей с 1 в позиции (i,j) и -1 в позиции (j,i). Таким образом, $\big\langle R(e_i,e_j)(e_i) \, , \, e_k \big\rangle = -R^{i,j}_{i,k}$, и следовательно, $\operatorname{Ric}(e_j,e_k) = \sum\limits_i R^{i,j}_{i,k}$.

Лемма 5.1.3. *Кривизна Риччи корректно определена и является симметричной билинейной формой.*

Доказательство. Рассмотрим два ортонормированных базиса $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, связанных некоторой ортогональной матрицей A:

$$e'_i = \sum_j A_{i,j} e_j \ .$$

Тогда в силу линейности R по каждому из своих аргументов мы получаем

$$\sum_i \Big\langle \sum_i R(e'_i, V)(e'_i)\, , W \Big\rangle = \sum_i \sum_j A_{i,j} \Big\langle \sum_i R(e_j, V)(e'_i)\, , W \Big\rangle =$$
$$= \sum_i \sum_j \sum_k A_{i,j} A_{i,k} \Big\langle \sum_i R(e_j, V)(e_k)\, , W \Big\rangle =$$
$$= \sum_{j,k} \left(\sum_i A_{i,j} A_{i,k} \Big\langle \sum_i R(e_j, V)(e_k)\, , W \Big\rangle \right) .$$

Поскольку матрица A ортогональна, $\sum_i A_{i,j} A_{i,k} = \delta_{i,j}$ и значит,

$$\sum_i \Big\langle \sum_i R(e'_i, V)(e'_i)\, , W \Big\rangle = \sum_{jk} \delta_{j,k} \Big\langle \sum_i R(e_j, V)(e_k)\, , W \Big\rangle = \sum_j \Big\langle \sum_i R(e_j, V)(e_j)\, , W \Big\rangle ,$$

что доказывает корректность определения кривизны Риччи.

Докажем теперь её симметричность. Заметим сначала, что выражение $\big\langle R(U, V)(W)\, , Y \big\rangle$ кососимметрично по первым двум переменным, так как кривизна является 2-формой, и кососимметрично по последним двум переменным, поскольку форма кривизны принимает значения в алгебре Ли ортогональной группы, состоящей из кососимметричных эндоморфизмов $\mathbb{R}^n$. Покажем, что оно симметрично относительно перестановки первой пары аргументов со второй парой аргументов — симметричность кривизны Риччи отсюда сразу получается.

Используя лемму 5.1.1 и косую симметрию, вычисляем:

$$\big\langle R(U, V)(W)\, , Y \big\rangle =$$
$$= -\big\langle R(W, U)(V)\, , Y \big\rangle - \big\langle R(V, W)(U)\, , Y \big\rangle = \big\langle R(W, U)(Y)\, , V \big\rangle + \big\langle R(V, W)(Y)\, , U \big\rangle =$$
$$= -\big\langle R(Y, W)(U)\, , V \big\rangle - \big\langle R(U, Y)(W)\, , V \big\rangle - \big\langle R(W, Y)(V)\, , U \big\rangle - \big\langle R(Y, V)(W)\, , U \big\rangle =$$
$$= 2\big\langle R(W, Y)(U)\, , V \big\rangle + \big\langle R(U, Y)(V)\, , W \big\rangle + \big\langle R(Y, V)(U)\, , W \big\rangle =$$
$$= 2\big\langle R(W, Y)(U)\, , V \big\rangle - \big\langle R(V, U)(Y)\, , W \big\rangle = 2\big\langle R(W, Y)(U)\, , V \big\rangle - \big\langle R(U, V)(W)\, , Y \big\rangle ,$$

что и даёт нужную нам симметрию. □

Имеется ещё одна кривизна, представляющая собой попросту след кривизны Риччи как симметрического эндоморфизма TX.

Определение 5.1.4. Функция $\varkappa : X \longrightarrow \mathbb{R}$, заданная как $\varkappa = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ric})$, называется *скалярной кривизной* риманова многообразия X. В терминах 2-формы кривизны

$$\varkappa = \sum_{i,j} R^{i,j}_{i,j} = 2 \sum_{i<j} R^{i,j}_{i,j} \ .$$

Отметим, что если X – это риманова поверхность, скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой кривизне.

Теперь мы переходим к формуле бохнеровского типа, играющей важную роль в нашей теории.

Предложение 5.1.5. *Пусть X — риманово многообразие со $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурой $\widetilde{P} \longrightarrow X$, и пусть A – это связность на $\det(\widetilde{P})$, а $\not{\partial}_A$ – оператор Дирака на $S(\widetilde{P})$, построенный по связности Леви-Чевита на расслоении ортогональных касательных реперов и связности A на детерминантном расслоении. Тогда для любого сечения ψ спинорного расслоения $S(\widetilde{P})$ имеем*

$$\not{\partial}_A \circ \not{\partial}_A = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\varkappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2} \cdot \psi \,, \tag{5-1}$$

где $F_A \in \Omega^2(X; i\,\mathbb{R})$ есть кривизна A, и умножение в последнем слагаемом есть клиффордово умножение на 2-форму.

Доказательство. Пусть R — это 2-форма со значениями в эндоморфизмах TX, представляющая кривизну связности Леви-Чевита, а F_A — чисто мнимая 2-форма, представляющая кривизну связности A. Тогда кривизна F ковариантного дифференцирования на расслоенном произведении детерминантного расслоения с расслоением касательных реперов есть

$$F = R + F_A \,.$$

Записывая кривизну расслоения реперов в виде $-\sum\limits_{i<j} R_{i,j} e_i \wedge e_j$, мы, как и в главе 3, видим, что действие F на $S(\widetilde{P})$ задаётся формулой

$$F \cdot \psi = \frac{1}{2} \sum_{i<j} R_{i,j} e_i e_j \cdot \psi + \frac{F_A}{2} \cdot \psi \,.$$

Фиксируем над точкой ортонормальный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, запишем в этой точке $\nabla_A = \nabla_{e_k} \otimes de_k$ и продолжим e_k до попарно коммутирующих векторных полей, так что $\nabla_{e_k}(e_l) = 0$ для любых k, l (например, с помощью гауссовых нормальныех координат с центром в нашей точке). Вычисление даёт:

$$\begin{aligned}
&\sum_k e_k \nabla_{e_k} \left(\sum_l e_l \nabla_{e_l}(\psi) \right) = \sum_{kl} e_k e_l \nabla_{e_k} \circ \nabla_{e_l}(\psi) = \\
&\quad = \sum_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_l}(\psi) + \sum_{k<l} e_k e_l \big(\nabla_{e_k} \circ \nabla_{e_l} - \nabla_{e_l} \circ \nabla_{e_k} \big)(\psi) = \sum_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_l}(\psi) + \sum_{k<l} e_k e_l F^{kl}(\psi) = \\
&\qquad = \sum_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_l}(\psi) + \sum_{k<l} e_k e_l \left(\frac{1}{2} \sum_{i<j} R_{ji}^{kl} e_i e_j + \frac{F_A^{kl}}{2} \right) \cdot \psi
\end{aligned} \tag{5-2}$$

Рассмотрим первую сумму в (5-2).

Утверждение 5.1.6. $\nabla_A^* \nabla_A(\psi) = -\sum\limits_k \nabla_{e_k} \nabla_{e_l}(\psi)$.

Доказательство. Для начала покажем, что на $S(\widetilde{P})$-значных 1-формах выполнено $\nabla_A^* = -*\nabla_A*$, где $*$ означает оператор звёздочки Ходжа. Пусть α – это 1-форма со значениями в $S(\widetilde{P})$, а φ – сечение $S(\widetilde{P})$. По определению, мы имеем

$$\big\langle \nabla_A \varphi \,,\, \alpha \big\rangle_{L^2} = \big\langle \varphi \,,\, \nabla_A^*(\alpha) \big\rangle_{L^2} \,.$$

С другой стороны, поскольку связность сохраняет метрику,

$$d\left\langle \varphi(x)\,,\, *\alpha(x)\right\rangle = \left\langle \nabla_A(\varphi)(x)\,,\, *a(x)\right\rangle + \left\langle \varphi(x)\,,\, \nabla_A(*\alpha)(x)\right\rangle$$

Поэтому,

$$\left\langle \nabla_A(\varphi)\,,\, *\alpha\right\rangle_{L^2} = \int\limits_X \left\langle \nabla_A\varphi(x)\,,\, *\alpha(x)\right\rangle = \int\limits_X \left\langle \varphi(x)\,,\, \nabla_A(*\alpha)(x)\right\rangle = \left\langle \varphi\,,\, -*\nabla_A(*\alpha)\right\rangle_{L^2},$$

и следовательно, для любых φ и α мы имеем

$$\left\langle \varphi\,,\, \nabla_A^*(\alpha)\right\rangle_{L^2} = \left\langle \varphi\,,\, -*\nabla_A(*\alpha)\right\rangle_{L^2},$$

а это и есть равенство $\nabla_A^* = -*\nabla_A*$ на $S(\widetilde{P})$-значных 1-формах.

Применим теперь это равенство для докательства нашего утверждения:

$$\nabla_A^*\nabla_A(\psi) = -*\nabla_A\left(\sum_k \nabla_{e_k}(\psi)*(de_k)\right) = -*\sum_k \nabla_{e_k}\nabla_{e_k}(\psi)\,d\,\mathrm{Vol} = -\sum_k \nabla_{e_k}\nabla_{e_k}(\psi)\,.$$

□

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (5-2). Из-за кососимметричности R по верхней и нижней парам индеков можно переписать последнюю строку предыдущего равенства в виде

$$\sum_{k<l} e_k e_l \left(\sum_{i<j} R^{k,l}_{j,i} e_k e_l e_i e_j \psi\right) = \frac{1}{8}\sum_{k,l,i,j} R^{k,l}_{j,i} e_k e_l e_i e_j \psi = -\frac{1}{8}\sum_{k,l,i,j} R^{k,l}_{i,j} e_k e_l e_i e_j \psi$$

Разобьём теперь эту сумму на несколько частей

$$\sum_{k,l,i,j} R^{k,l}_{i,j} e_k e_l e_i e_j \psi = \sum_j \left(\widehat{\sum}_{k,l,i} R^{k,l}_{i,j} e_k e_l e_i + \sum_{k,l} R^{k,l}_{k,j} e_k e_l e_k + R^{k,l}_{l,j} e_k e_l e_l\right) e_j \psi\,,$$

где первая сумма в скобках распространяется на все попарно различные k, l, i, и стало быть, зануляется по лемме 5.1.1. Вторая и третья суммы каждая упрощаются до

$$\sum_j \sum_{k,l} R^{k,l}_{k,j} e_l e_j\,.$$

Складывая их друг с другом и используя симметрию кривизны Риччи по l, j, получаем

$$2\sum_{k,j} R^{k,j}_{k,j} e_j e_j \psi = -2\sum_{k,j} R^{k,j}_{k,j}\psi = -2\varkappa\psi\,.$$

Таким образом, вторая сумма в (5-2) равна $\dfrac{\varkappa}{4}\psi$.

Наконец, последнее слагаемое в (5-2), равное $\sum\limits_{k<l} \dfrac{F_A^{k,l}}{2} e_k e_l \psi$, по определению, совпадает с клиффордовым произведением спинорного поля ψ с 2-формой $\dfrac{1}{2}F_A$.

Подставляя найденные три значения в (5-2), видим что

$$di_A\eth_A = \nabla_A^*\nabla_A(\psi) + \frac{\varkappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2}\cdot\psi\,, \tag{5-3}$$

как и утверждалось. ☐

Следствие 5.1.7. *Пусть (A,ψ) является решением уравнений Зайберга - Виттена на компактном четырёхмерном римановом многообразии X со $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурой $\widetilde{P}$. Тогда*

$$\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\big\langle\, \varkappa\psi\,,\, \psi\,\big\rangle_{L^2} + \frac{\|\psi\|_{L^4}^4}{4} = 0\,,$$

и в частности, полагая $\varkappa_X^- = \max\limits_{x\in X}\big(0\,,\,-\varkappa(x)\,\big)$, мы имеем $\varkappa_X^-\|\psi\|_{L^2}^2 \geqslant \|\psi\|_{L^4}^4$.

Доказательство. Поскольку ψ является гармоническим спинором, из (5-1) получается, что

$$0 = \eth_A\eth_A = \nabla_A^*\nabla_A(\psi) + \frac{\varkappa}{4}\psi + \frac{F_A}{2}\cdot\psi\,.$$

Так как ψ – это плюс-спинор, мы имеем $F_A\cdot\psi = F_A^+\cdot\psi$, и стало быть, предыдущее равенство с помощью первого уравнения Зайдерга - Виттена переписывается в виде

$$0 = \nabla_A^*\nabla_A(\psi) + \frac{\varkappa}{4}\psi + \frac{1}{2}\left(\psi\otimes\psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\right)\psi\,,$$

который упрощается до

$$0 = \nabla_A^*\nabla_A(\psi) + \frac{\varkappa}{4}\psi + \frac{|\psi|^2}{4}\psi\,.$$

Скалярно умножая обе части на ψ в L^2, получаем

$$\|\nabla_A(\psi)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\big\langle\, \varkappa\psi\,,\, \psi\,\big\rangle_{L^2} + \frac{\|\psi\|_{L^4}^4}{4} = 0\,,$$

что и требовалось. ☐

Из этого результата немедленно вытекает

Следствие 5.1.8. *Все решения уравнений Зайберга - Виттена на компактном четырёхмерном римановом многообразии с неотрицательной скалярной кривизной имеют тождественно нулевую спинорную составляющую ψ (вне зависимости от выбора $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры на X).*

5.2. Априорная ограниченность

Теперь мы можем использовать уравнение (5-1) для получения поточечной оценки величины спинорной составляющей произвольного решения уравнений Зайберга - Виттена.

Прежде всего напомним, что C^∞-пары (A,ψ) плотны в конфигурационном пространстве, а произвольная конфигурация (A',ψ') калибровочно эквивалентна паре (A'',ψ''), лежащей в срезе действия калибровочной группы над некоторым C^∞-решением. Ограничение уравнений

Зайберга - Виттена на слайс C^∞-конфигурации является эллиптической системой с C^∞-коэффициентами. Значит, всякое решение, лежащее в слайсе C^∞-пары, тоже будет C^∞-парой. Тем самым, доказана

Лемма 5.2.1. *Всякое решение ситемы уравнений Зайберга - Виттена калибровочно эквивалентно C^∞-решению.*

Следствие 5.2.2. *Пусть X — компактное четырёхмерное риманово многообразие. Зададим функцию $\varkappa^- : X \longrightarrow \mathbb{R}$ правилом $\varkappa^-(x) = \max\big(-\varkappa(x)\,,\,0\big)$ и положим $\varkappa^-_X = \max\limits_{x\in X} \varkappa^-(x)$. Допустим, что (A,ψ) является решением уравнений Зайберга - Виттена для некоторой фиксированной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P} \to X$. Тогда для любого $x \in X$*

$$|\psi(x)|^2 \leqslant \varkappa^-_X\,.$$

Доказательство. Так как всякое решение калибровочно эквивалентно C^∞-решению, а неравенство, которое мы намерены установить, калибровочно инвариантно, достаточно рассмотреть только случай C^∞-решения, что мы и сделаем.

Рассмотрим точку $x_0 \in X$, в которой $|\psi(x_0)|^2$ достигает своего максимума. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$|\psi(x_0)|^2 \leqslant \varkappa^-(x_0)\,.$$

Сделаем это.

Коль скоро (A,ψ) является C^∞-решением уравнений Зайберга - Виттена, в соответствии с равенством (5-1) для каждого $x \in X$ мы имеем

$$\nabla_A^*\nabla_A(\psi(x)) + \frac{\varkappa(x)}{4}\psi(x) + \frac{|\psi(x)|^2}{4}\psi(x) = 0\,.$$

Поточечно умножая обе части скалярно на ψ, получаем

$$\big\langle\, \nabla_A^*\nabla_A(\psi(x))\,,\, \psi(x)\,\big\rangle + \frac{\varkappa(x)}{4}|\psi(x)|^2 + \frac{|\psi(x)|^4}{4} = 0\,,$$

в частности, $\big\langle\, \nabla_A^*\nabla_A(\psi(x))\,,\, \psi(x)\,\big\rangle$ является вещественным. Далее, у нас есть ещё соотношение

$$\begin{aligned} -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial e_i^2}\big\langle\, \psi(x)\,,\,\psi(x)\,\big\rangle = {}&-\sum_i \big\langle\, \nabla_{e_i}\circ\nabla_{e_i}(\psi(x))\,,\,\psi(x)\,\big\rangle - \\ &-2\sum_i \big\langle\, \nabla_{e_i}(\psi(x))\,,\,\nabla_{e_i}(\psi(x))\,\big\rangle - \sum_i \big\langle\, \psi(x)\,,\,\nabla_{e_i}\circ\nabla_{e_i}(\psi(x))\,\big\rangle\,, \end{aligned}$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \Delta(|\psi(x)|^2 + 2|\nabla_{e_i}(\psi(x))|^2 = {}&\big\langle\, \nabla_A^*\circ\nabla_A(\psi(x))\,,\,\psi(x)\,\big\rangle + \big\langle\, \psi(x)\,,\,\nabla_A^*\circ\nabla_A(\psi(x))\,\big\rangle = \\ &= 2\mathrm{Re}\,\Big(\big\langle\, \nabla_A^*\circ\nabla_A(\psi(x))\,,\,\psi(x)\,\big\rangle\Big)\,, \end{aligned}$$

где через Δ обозначен оператор Дапласа на функциях. Если x_0 является локальным максимумом $|\psi(x)|^2$, то $\Delta\left(|\psi(x)|^2\right) \geqslant 0$, и тем самым,

$$\mathrm{Re}\,\Big(\big\langle\, \nabla_A^*\circ\nabla_A(\psi(x))\,,\,\psi(x)\,\big\rangle\Big) \geqslant 0\,.$$

Мы видели выше, что $\left\langle \nabla_A^* \circ \nabla_A(\psi(x))\,,\, \psi(x) \right\rangle$ вещественно. Теперь мы можем добавить, что оно ещё и неотрицательно.

Таким образом, в точке $x_0 \in X$, где достигается максимум $|\psi(x)|^2$, выполнено неравенство

$$\frac{\varkappa(x_0)}{4}|\psi(x_0)|^2 + \frac{|\psi(x_0)|^4}{4} \leqslant 0\,,$$

из которого следует, что либо $|\psi(x_0)|^2 = 0$ (и это означает, что спинорное поле ψ тождественно нулевое), либо $|\psi(x_0)|^2 \leqslant \varkappa^-(x_0)$. Это доказывает лемму. ☐

Следствие 5.2.3. *Для любого решения (A, ψ) уравнений Зайберга - Виттена в любой точке $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\left|F_A^+(x)\right| \leqslant \frac{\varkappa_X^-}{2}\,.$$

Доказательство. Нам известно, что

$$F_A^+ = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2}\,\mathrm{Id}\,,$$

откуда $\left|F_A^+(x)\right| = \dfrac{|\psi|^2}{2}$, что с учётом предыдущего следствия сразу даёт нужную оценку. ☐

Эти оценки приводят нас к первой «теореме компактности», ограничивающей число $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур, для которых существуют решения уравнений Зайберга - Виттена.

Теорема 5.2.4. *Для заданной римановой метрики на X существует лишь конечное с точностью до изоморфизма число $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур, для которых пространство молдулей решений уравнений Зайберга - Виттена непусто и имеет неотрицательную виртуальную размерность. При этом всякое решения (A, ψ), для которого виртуальная размерность пространства модулей неотрицательна, удовлетворяет в каждой точке $x \in X$ неравенствам*

$$\begin{aligned}
|\psi(x)|^2 &\leqslant \varkappa_X^- \\
||\nabla_A(\psi)||_{L^2}^2 &\leqslant \frac{\varkappa_X^-}{4}\,\mathrm{Vol}(X) \\
\left|F_A^+(x)\right|^2 &\leqslant \frac{\varkappa_X^-}{2} \\
\left|\left|F_A^+(x)\right|\right|_{L^2}^2 &\leqslant \left(\frac{\varkappa_X^-}{2}\right)^2 \mathrm{Vol}(X) \\
\left|\left|F_A^-(x)\right|\right|_{L^2}^2 &\leqslant \left(\frac{\varkappa_X^-}{2}\right)^2 \mathrm{Vol}(X) - 8\pi^2\chi(X) - 12\pi^2\,\mathrm{sign}(X)\,.
\end{aligned}$$

Доказательство. Первое и третье неравенство были только что установлены в предыдущих двух следствиях. Второе неравенство следует из первого и первого соотношения из следствия 5.1.7. Четвёртое неравенство получается из третьего интегрированием по X. Поскольку

$$c_1(\mathcal{L})^2 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\left|\left|F_A^+\right|\right|_{L^2}^2 - \left|\left|F_A^-\right|\right|_{L^2}^2\right)\,,$$

последнее неравенство вытекает из четвёртого и нашего предположения о неотрицательности виртуальной размерности, означающего, что

$$c_1(\mathcal{L})^2 - (2\chi(X) + 3\,\mathrm{sign}(X)) \geqslant 0\,.$$

Теперь покажем, что с точностью до изоморфизма есть лишь конечное число $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур, для которых пространство модулей решений уравнений Зайберга - Виттена непусто и имеет неотрицательную виртуальную размерность. Для всякого решения (A, ψ) с неотрицательной виртуальной размерностью пространства модулей $\left|\left|F_A^+\right|\right|_{L^2}^2$ и $\left|\left|F_A^-\right|\right|_{L^2}^2$ ограничены константами, зависящими лишь от римановой структуры. Это означает, что класс когомологий ${}^{iF_A}\!/_{2\pi}$ содержится внутри некоторого компактного подмножества в $H^2(X;\mathbb{R})$. Поскольку этот класс когомологий – целочисленный, для значений первого класса Чженя $c_1(\mathcal{L})$ детерминатного расслоения $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры имеется только конечное число возможностей. Число же $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур, детерминантные расслоения которых имеют заданный первый класс Чженя, также конечно по модулю изоморфизмов. ☐

5.3. Компактность пространства модулей

Теперь мы зафиксируем $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P} \longrightarrow X$ и покажем, что пространство модулей всех решений уравнений Зайберга - Виттена для $\widetilde{P}$ компактно.

Выбор калибровки. Для начала нам нужна фиксирующая калибровку лемма типа леммы Уленбек об $\mathrm{SU}(2)$-расслоениях, но, разумеется, намного более простая в следствие линейности наших уравнений.

Лемма 5.3.1. *Пусть $\mathcal{L}$ – комплексное эрмитово линейное расслоение на X. Фиксируем на $\mathcal{L}$ унитарную C^∞-связность A_0. Для всякого $\ell \geqslant 0$ можно указать такие константы $K, C > 0$ (зависящие только от X, A_0 и ℓ), что для любой унитарной L^2_ℓ-связности на $\mathcal{L}$ будет существовать $L^2_{\ell+1}$-калибровочное преобразование σ, для которого $\sigma^*(A) = A_0 + \alpha$, где $\alpha \in L^2_\ell\,(T^*X \otimes i\,\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям*

$$d^*\alpha = 0 \qquad \text{и} \qquad ||\alpha||^2_{L^2_\ell} \leqslant C\,\left|\left|F_A^+\right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} + K\,.$$

Доказательство. Запишем A как $A = A_0 + \alpha_0$ с $\alpha_0 \in L^2_\ell\,(T^*X \otimes i\,\mathbb{R})$. Функция $d^*(\alpha_0) \in L^2_{\ell-1}\,(i\,\mathbb{R})$ лежит в L^2_ℓ-ортогонале $\mathcal{I}_{L^2_{\ell-1}}$ к константам. Ограничение лапласиана на этот ортогонал обладает непрерывным обратным линейным оператором

$$\Delta^{-1}:\ \mathcal{I}_{L^2_{\ell-1}} \longrightarrow \mathcal{I}_{L^2_{\ell+1}}\,.$$

Пусть

$$s_0 = -\frac{1}{2}\Delta^{-1}\left(d^*(\alpha_0)\right) \in L^2_{\ell+1}\,(i\,\mathbb{R})$$

и $\sigma_0 = e^{s_0}$. Ясно, что σ_0 авляется калибровочным преобразованием класса $L^2_{\ell+1}$. Положим

$$\alpha_1 = \alpha_0 + 2\,d\sigma_0 \in \Omega^1(X; i\,\mathbb{R})\,.$$

Понятно, что $(\det\sigma_0)^*A = A_0 + \alpha_1$ и

$$d^*(\alpha_1) = d^*(\alpha_0) - d^*d\,\Delta^{-1}d^*(\alpha_0) = 0\,.$$

Итак, к настоящему моменту мы объяснили, каким образом надо фиксировать калибровку, для того чтобы A превратилась в $A_0 + \alpha_1$ с $d^*(\alpha_1) = 0$. Займёмся теперь получением оценки. Линейный оператор

$$(d^*, d):\ L^2_\ell\,(T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\ell-1}\left(i\,\mathbb{R} \oplus \left(\Lambda^2_+T^*X \otimes i\,\mathbb{R}\right)\right)$$

является эллиптическим линейным оператором, и его ядро состоит из гармонических 1-форм. Тем самым α_1 представляется в виде $\alpha_1 = (h, \beta)$, где h – гармоническая 1-форма, а β лежит в L^2-ортогонале к пространству гармонических 1-форм. Но для всякой 1-формы b, ортогональной к пространству гармонических 1-форм, найдётся константа C (зависящая только от X и ℓ), такая что

$$||b||^2_{L^2_\ell} \leqslant C \, \left|\left| \left(d^*(b), d^+(b)\right) \right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} .$$

У нас $d^*(\beta) = 0$ и $d^+(\beta) = F^+_A - F^+_{A_0}$, а значит,

$$||\beta||^2_{L^2_\ell} \leqslant C \, \left|\left| F^+_A - F^+_{A_0} \right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} \leqslant C \, \left|\left|F^+_A\right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} + C \, \left|\left|F^+_{A_0}\right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} .$$

Полагая $K_1 = \left|\left|F^+_{A_0}\right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}}$, мы получаем, что

$$||\beta||^2_{L^2_\ell} \leqslant C \, \left|\left| F^+_A \right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} + C K_1 .$$

Займёмся теперь гармонической проекцией h формы α_1. Она может и не быть ограниченной, однако мы можем сделать её ограничееной, применив дополнительное калибровочное преобразование, не изменяющее β.

Утверждение 5.3.2. *Любая чисто мнимая гармоническая 1-форма h_0, все периоды которой содержатся в $\left({}^{2\pi}\!/_{i}\right) \cdot \mathbb{Z}$, является дифференциалом некоторой гармонической функции $\varphi\colon\; X \longrightarrow S^1$.*

Доказательство. Выберем точку $x_0 \in X$ и построим C^∞-функцию на универсальном накрытии X

$$\widetilde{\varphi}\colon\; \widetilde{X} \longrightarrow i\mathbb{R} ,$$

интегрируя форму h_0 по путям с началом в x_0. Коль скоро все периоды h_0 лежат в $\left({}^{2\pi}\!/_{i}\right) \cdot \mathbb{Z}$, функция $\widetilde{\varphi}$ спускается до функции

$$\varphi\colon\; X \longrightarrow {}^{i\mathbb{R}}\!/_{2\pi i\,\mathbb{Z}} = S^1 ,$$

причём ясно, что $d\varphi = h_0$ и $d^*d\,\varphi = 0$, так что φ – искомая гармоническая функция. □

Поскольку факторпространство чисто мнимых 1-форм по подпространству форм с периодами в $\left({}^{2\pi}\!/_{i}\right)$ $\mathbb{Z}$ есть компактный тор, существует константа K_2 (зависящая только от ℓ), такая что любую чисто мнимую 1-форму h можно представить в виде $h_1 + 2h_2$, где $||h_1||_{L^2_\ell} \leqslant K_2$, а h_2 имеет периоды в $\left({}^{2\pi}\!/_{i}\right)$ $\mathbb{Z}$. Применяя это к гармонической проекции h формы α_1, запишем

$$h = h_1 - 2\,d\varphi ,$$

где $X \xrightarrow{\varphi} S^1$ – некоторая гармоническая функция, и $||h_1||_{L^2_\ell} \leqslant K_2$. Ясно, что

$$(\det\varphi)^* \left(A_0 + \alpha_1\right) = A_0 + \alpha_1 + 2\,d\varphi = A_0 + b_1 + \beta .$$

Полагая $\alpha = h_1 + \beta$, получим $(\det\varphi)^* \, (\sigma_0)^* A = A_0 + \alpha$ с $d^*(\alpha) = 0$ и

$$||\alpha||^2_{L^2_\ell} \leqslant ||h_1||^2_{L^2_\ell} + ||\beta||^2_{L^2_\ell} \leqslant K_2 + CK_1 + C \left|\left|F^+_A\right|\right|^2_{L^2_{\ell-1}} ,$$

так что взяв $K = K_1 + K_2$, мы получим нужную нам оценку. Доказательство леммы о выборе калибровки на этом закончено. $\square$

Ограниченность dF_A^+ и A. Следующим шагом в доказательстве компактности является получение априорной верхней границы для L^2-нормы dF_A^+ любого решения (A, ψ) уравнений Зайберга - Виттена.

Лемма 5.3.3. *Существует константа C (зависящая только от X), такая что*

$$\left|\left|dF_A^+\right|\right|^2_{L^2} \leqslant C$$

для любого решения (A, ψ) системы уравнений Зайберга - Виттена.

Доказательство. Обозначим через ∇_{LC} связность Леви-Чевита

$$\nabla_{\mathrm{LC}} : \ \Omega^0\left(X; \Lambda^2_+ T^*X\right) \longrightarrow \Omega^1\left(X; \Lambda^2_+ T^*X\right) .$$

Из уравнений Зайберга - Виттена мы имеем $F_A^+ = \psi \otimes \psi^* - \frac{|\psi|^2}{2} \,\mathrm{Id}$, откуда

$$\nabla_{\mathrm{LC}} F_A^+ = \nabla_A(\psi) \otimes \psi^* + \psi \otimes \nabla_A(\psi) - \mathrm{Re} \left\langle \nabla_A(\psi) \, , \, \psi \right\rangle \mathrm{Id} \ .$$

Но выше мы уже получили априорные оценки на $||\nabla_A(\psi)||^2_{L^2}$ и L^∞-норму ψ, так что у нас есть априорная оценка для $\left|\left|\nabla_{\mathrm{LC}} F_A^+\right|\right|^2_{L^2}$. Поскольку внешнее дифференцирование d есть композиция

$$\Omega^2_+(X; \mathbb{R}) = \Omega^0\left(X; \Lambda^2_+ T^*X\right) \xrightarrow{\nabla_{\mathrm{LC}}} \Omega^1\left(X; \Lambda^2_+ T^*X\right) \xrightarrow{\mathrm{alt}} \Omega^3(X; \mathbb{R}) \ ,$$

где последняя стрелка – это оператор кососимметризации (доказательство этого факта является простым упражнением на отсутствие кручения у связности Леви-Чевита), из ограниченности $\left|\left|\nabla_{\mathrm{LC}} F_A^+\right|\right|^2_{L^2}$ вытекает априорная ограниченность и на $\left|\left|dF_A^+\right|\right|^2_{L^2}$. $\square$

Следствие 5.3.4. *Существует константа C_1 (зависящая только от X), такая что*

$$\left|\left|dF_A^+\right|\right|^2_{L^2_1} \leqslant C_1$$

для любого решения (A, ψ) системы уравнений Зайберга - Виттена.

Доказательство. Как следует из элементарной теории Ходжа, для каждого $\ell \geqslant 0$ существует такая константа $C' > 0$, что для любой автодуальной 2-формы F выполняется неравенство

$$||\Pi(F)||^2_{L^2_\ell} \leqslant C \ ||\Pi(dF)||^2_{L^2_{\ell-1}} \ ,$$

в котором через Π обозначена проекция на L^2-ортогонал к пространству гармонических автодуальных форм. Таким образом, беря разложение $F_A^+ = H^+ + B$, в котором H^+ – автодуальная гармоническая форма, а B ортогональна пространству автодуальных гармонических форм, будем иметь

$$||B||^2_{L^2_1} \leqslant C' \left|\left|dF_A^+\right|\right|^2_{L^2_2} \leqslant C'C \ .$$

С другой стороны, у нас есть априорная оценка на F_A^+, из которой вытекает наличие такой константы $C'' > 0$, что квадрат L^2_1-нормы гармонической проекции H^+ формы F_A^+ не превосходит C''. Полагая $C_1 = C'C + C''$, получаем наше утверждение. $\square$

Объединяя всё это с доказанной в предыдущем пункте в леммой о выборе калибровки, мы получаем следующую оценку.

Следствие 5.3.5. *Для фиксированной* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структуры* $\widetilde{P}$ *с фиксированной* C^∞*-связностью на* $\mathcal{L} = \det(\widetilde{P})$ *существует такая константа* K_1*, зависящая только от* X *и* A_0*, что для каждого решения* (A, ψ) *уравнений Зайберга - Виттена мы можем построить калибровочно эквивалентную* A *связность* $A' = A_0 + \alpha$ *с*

$$d^*\alpha = 0 \qquad \text{и} \qquad ||\alpha||^2_{L^2_2} \leqslant K_1 \ .$$

C^∞-оценки на A и ψ. Теперь мы готовы к тому, чтобы сопоставить L^2_2-оценку A и L^∞-оценку ψ с их C^∞-оцеками. Делается это стандартным для теории эллиптических уравнений «бутстраппингом».

Теорема 5.3.6. *Допустим, что* (A, ψ) *является решением уравнений Зайберга - Виттена, причём калибровка выбрана так, что* $A = A_0 + \alpha$*, где* A_0 *– фиксированная* C^∞*-связность на детерминантном расслоении,* $d^*\alpha = 0$*, а гармоническая проекция* α *содержится в заданной компактной фундаментальной области по модулю подрешётки гармонических форм с периодами в* $\left({}^{4\pi}\!/_{i}\right)\mathbb{Z}$*. Тогда для каждого* $\ell \geqslant 2$ *существует константа* $C(\ell)$*, зависящая только от* X*,* A_0 *и* ℓ*, такая что*

$$||\alpha||^2_{L^2_\ell} + ||\psi||^2_{L^2_\ell} \leqslant C(\ell) \ ,$$

где L^2_ℓ*-норма спинорного поля берётся по отношению к* ∇_{A_0}*.*

Доказательство. Нам уже известно, что ψ поточечно ограничено и что α ограничена в L^2_2. У нас также есть оценка на $||\nabla_A\psi||^2_{L^2}$. Из L^2_2-оценки на α получается L^2_1 оценка на ψ (напомню, что для определения нормы ψ берутся производные по отношению к A_0, а не к A !).

Покажем теперь, что ψ ограничено в L^2_3. Из уравнения Дирака имеем

$$\not{\partial}_{A_0}(\psi) = -\alpha \cdot \psi$$

и поскольку ψ поточечно ограничено, а α ограничена в L^2_2 , $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$ будет ограничено в L^4. Поскольку оператор $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$ – эллиптический, ортогональная L^2-проекция ψ вдоль ядра $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$ тоже ограничена в L^4. Но ψ ограничено в L^2, и значит, его L^2-проекция на ядро $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$ также будет L^2-ограничена. Всё это вместе показывает, что ψ ограничено в L^4_1. Взяв соболевское произведение $L^2_2 \otimes L^4_1 \longrightarrow L^3_1$, мы видим, что $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$ ограниено в L^3_1, и тем самым, ψ ограничено в L^3_2. Те же аргументы в применении к соболевскому произведению $L^2_2 \otimes L^3_3 \longrightarrow L^2_1$ показывают, что $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$ ограниено в L^2_2, а ψ – в L^3_2.

Коль скоро мы выяснили, что ψ ограничено в L^2_3, уравнение на кривизну и соболевское произведение $L^2_3 \otimes L^2_3 \longrightarrow L^2_3$ дают ограниченность F^+_A в L^2_3, откуда в силу нашего выбора калибровки α будет ограничена в L^2_4.

Далее работает стандартный «бутстраппинг». Предполагая по индукции, что для некоторого $\ell \geqslant 3$ у нас есть L^2_ℓ-оценки для α и ψ, из уравнеия Дирака и непрерывного умножения $L^2_\ell \otimes L^2_\ell \longrightarrow L^2_\ell$ мы получаем L^2_ℓ-ограниченность $\not{\partial}_{A_0}(\psi)$, и стало быть, $L^2_{\ell+1}$-ограниченность ψ. Затем, из уравнения на кривизну мы выводим, что F^+_A ограничена в L^2_ℓ, откуда, по выбору калибровки, получается $L^2_{\ell+1}$-ограниченность α. Это завершает индуктивный переход. ☐

Поскольку вложение $L^2_\ell \hookrightarrow C^{\ell-3}$ компактно, мы получаем следующий строгий результат.

Следствие 5.3.7. *Всякая последовательность* (A_n, ψ_n) *решений уравнений Зайберга - Виттена, возможно, после перехода к подпоследовательности и надлежащего выбора* L^2_3*-калибровки,* *становится последовательностью C^∞-объектов, которая сходится в C^∞-топологии, и её предел (A, ψ) также будет решением уравнений Зайберга - Виттена. В частности, пространство модулей решений уравнений Зайберга - Виттена компактно.*

Мы получаем также и независимость пространства модулей от выбора нормы.

Следствие 5.3.8. *Для произвольного $\ell \geqslant 2$ обозначим через $\mathcal{C}_\ell(\widetilde{P})$ конфигурационное пространство L^2_ℓ-пар (A, ψ), а через $\mathcal{G}_{\ell+1}$ группу $L^2_{\ell+1}$-калибровочных преобразований. Образуем соответствующее факторпространство $\mathcal{B}_\ell(\widetilde{P})$ и рассмотрим в нём открытое подмножество $\mathcal{B}^\circ_\ell(\widetilde{P})$, состоящее из классов эквивалентных неприводимых пар. Это $\mathcal{B}^\circ_\ell(\widetilde{P})$ является гильбертовым многообразием.*

Пусть $\mathcal{M}_\ell(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}^\circ_\ell(\widetilde{P})$ есть пространство модулей классов эквивалентных решений системы Зайберга - Виттена. Тогда естественное отображение $\iota : \mathcal{B}_\ell(\widetilde{P}) \longrightarrow \mathcal{B}(\widetilde{P})$ инъективно, является гладким вложением на открытом подмножестве неприводимых классов и индуцирует гомеоморфизм между $\mathcal{M}_\ell(\widetilde{P})$ и $\mathcal{M}(\widetilde{P})$. Более того, в каждой неприводимой точке $[A, \psi] \in \mathcal{M}_\ell(\widetilde{P})$ дифференциал ι индуцирует изоморфизм между касательными пространствами Зарисского к пространствам модулей решений, в частности, открытое подмножество гладких неприводимых точек $\mathcal{M}_\ell(\widetilde{P})$ диффеоморфно отображается на открытое подмножество гладких неприводимых точек $\mathcal{M}(\widetilde{P})$.

Глава 6.

Инвариант Зайберга - Виттена

6.1. Формулировка результата

Вообще-то нет никаких оснований ожидать, что решения уравнений Зайберга - Виттена составляют гладкое многообразие. Максимум, на что можно надеяться, — это на гладкость «в общем случае». В теории антиавтодуальных SU(2)-связностей метрика берётся в роли параметра, и доказывается, что для общей метрики пространство модулей ASD связностей будет гладким (см. п. 3.2 из гл. III книги [2]). Для нашего случая подобных утверждений о метрике не известно, и вместо параметра используется возмущение: к правой части уравнения на кривизну прибавляется чисто мнимая автодуальная 2-форма.

Теорема 6.1.1. *Пусть $b_2^+ > 0$, метрика на X фиксирована, и пусть h — общая вещественная автодуальная 2-форма класса C^∞. Тогда для любой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ на X пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h) \subset \mathcal{B}(\widetilde{P})$ классов калибровочно эквивалентных решений $[A, \psi]$ возмущённых уравнений Зайберга - Виттена*

$$(\mathrm{SW}_h) \qquad \begin{cases} F_A^+ = q(\psi) + ih \\ \eth_A(\psi) = 0 \end{cases}$$

является гладким подмногообразием в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ размерности

$$\frac{c_1(\mathcal{L})^2 - 2\,(2\chi(X) + 3\sigma(X))}{4},$$

где $\chi(X)$ – эйлерова характеристика, а $\sigma(X)$ – сигнатура многообразия X. В частности, если для какой-то $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ эта размерность отрицательна, то возмущённая система Зайберга - Виттена не будет иметь решений для этой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры.

Доказательство этой теоремы состоит из нескольких шагов. Для начала мы введём параметризованные пространства модулей.

6.2. Параметризованное пространство модулей

Зафиксируем на X $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P}$. Мы будем изучать пространство модулей решений возмущённой системы, параметризованное пространством всех автодуальных 2-форм, и докажем, что оно является гладким. Конечно, работать с соболевским пространством удобнее, чем с C^∞-формами. Чтобы для решений возмущённой системы сохранились поточечные оценки из главы 5, возмущение должно быть непрерывным. Мы остановим свой выбор на L^2_3-возмущениях (хотя можно было бы работать и с более строгой нормой). Чтобы остаться в рамках эллиптической теории, нам предётся рассматривать L^2_4-конфигурации и L^2_5-калибровки. Соответствующие конфигурационное пространство и калибровочную группу мы обозначим через $\mathcal{C}_4(\widetilde{P})$ и $\mathcal{G}_5(\widetilde{P})$.

Рассмотрим отображение

$$\mathcal{C}_4(\widetilde{P}) \times L^2_3\left(\Lambda^2_+T^*X \otimes \mathbb{R}\right) \xrightarrow{F} L^2_3\Big(\left(\Lambda^2_+T^*X \otimes \mathbb{R}\right) \oplus S^-(\widetilde{P})\Big)\ ,$$

переводящее $\big((A,\psi)\,,\,h\big)$ в $F(A,\psi,h) = \big(F^+_A - q(\psi) - ih\,,\,\not{\partial}_A(\psi)\big)$.

Лемма 6.2.1. *Во всех точках (A,ψ,h), где $F(A,\psi,h) = 0$, но $\psi \neq 0$, дифференциал DF сюръективен.*

Доказательство. Для проверки нашего утверждения заметим сначала, что ограничение дифференциала DF на второй сомножитель есть взятое с противоположным знаком вложение в стоящую в образе прямую сумму её первого слагаемого. Поэтому ограничение DF на второй сомножитель левой части эпиморфно накрывает первое слагаемое в правой части. Для завершения доказательства остаётся проверить, что композиция ограничение DF на касательное пространство

$$L^2_4\Big(\left(\Lambda^2_+T^*X \otimes i\,\mathbb{R}\right) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big)$$

к $\mathcal{C}_4(\widetilde{P})$ с проекцией на второе слагаемое правой части является эпиморфной. Эта композиция задаётся формулой

$$G:\ (\alpha,\eta) \longmapsto \not{\partial}_A(\eta) + \frac{1}{2}\,\alpha\cdot\psi$$

(в последнем члене стоит клиффордово произведение). Нам надо показать, что G сюръективно. Пусть $\lambda \in L^2_3\Big(S^-(\widetilde{P})\Big)$ — элемент, лежащий в L^2-ортогонале к образу G. Тогда λ будет ортогонален и к образу оператора Дирака $\not{\partial}_A$, а значит, будет лежать в его ядре, ибо $\not{\partial}_A$ самосапряжён. Допустим, что $\lambda \neq 0$. В следствие эллиптической регулярности λ не может зануляться ни на каком открытом подмножестве в X. Аналогично, ни на каком открытом подмножестве не может зануляться и поле ψ (тоже лежащее в ядре $\not{\partial}_A$ и по условию ненулевое). Разумеется, и λ, и ψ непрерывны. Ваберем маленький открытый шар U с центром в некоторой точке x_0, где и ψ, и λ отличны от нуля. Сделаем U настолько малым, чтобы можно было считать λ и ψ примерно постоянными по отношению к системе координат на U. Ясно, что проекция

$$\mathbb{R}^4 \to \mathrm{Cl}_1(\mathbb{R}^4)^+$$

и клиффордово умножение

$$\mathbb{R}^4 \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \simeq \Big(\mathrm{Cl}_1(\mathbb{R}^4) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}\Big)^- \xrightarrow{\sim} \hom_{\mathbb{C}}\left(S^+(\mathbb{R}^4)\,,\,S^-(\mathbb{R}^4)\right)$$

являются изоморфизмами. Это означает, что для заданных ненулевых векторов $\sigma^\pm \in S^\pm(\mathbb{R}^4)$ найдётся $a \in \mathbb{R}^4$ с

$$\mathrm{Re}\,\big(\big\langle a\cdot\sigma^+\,,\,\sigma^-\big\rangle\big) > 0\,.$$

Следовательно, существует $a \in T^*X_{x_0}$, такой что

$$\mathrm{Re}\,\big(\langle\, a\cdot\psi(x_0)\,,\,\lambda(x_0)\,\rangle\big) > 0\;.$$

Продолжая a в U посредством тривиализации кокасательного расслоения координатами на U, получаем 1-форму a, для которой в каждой точке $x\in U$

$$\mathrm{Re}\,\big(\langle\, a(x)\cdot\psi(x)\,,\,\lambda(x)\,\rangle\big) > 0\;.$$

Гладко занулив a вблизи границы U, мы получим глобальную 1-форму на X, тождественно нулевую вне U, но такую, что

$$\int\limits_X \mathrm{Re}\,\big(\langle\, a(x)\cdot\psi(x)\,,\,\lambda(x)\,\rangle\big)\,d\,\mathrm{Vol} > 0\;.$$

Тем самым, λ *не* ортогонален к $G(2a,0)$, и это противоречие показывает, что ортогональное дополнение к образу отображения

$$L^2_4\Big((T^*X\otimes i\,\mathbb{R})\oplus S^+(\widetilde{P})\Big)\xrightarrow{DF_{(A,\psi)}} L^2_3\Big(\big(\Lambda^2_+T^*X\otimes i\,\mathbb{R}\big)\oplus S^-(\widetilde{P})\Big)$$

на самом деле тривиально, а значит, отображение это сюръективно. Наше утверждение полностью доказано. ☐

Предложение 6.2.2. *Пусть X — замкнутое ориентированное четырёхмерное риманово многообразие с фиксированной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурой $\widetilde{P}$. Параметризованное пространство модулей неприводимых решений (т. е. подпространство*

$$\mathcal{PM}^\circ(\widetilde{P})\ \subset\ \mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})\times L^2_3\left(\Lambda^2_+T^*X\otimes\mathbb{R}\right)\ ,$$

состоящее из всех $\big([A,\psi]\,,\,h\big)$ с $F^+_A = q(\psi)+ih$ и $\not{\partial}_A(\psi) = 0$) является гладким подмногообразием, и его проекция на пространство параметров $L^2_3\left(\Lambda^2_+T^*X\otimes\mathbb{R}\right)$ есть гладкое отображение, слоями которого служат пространства модулей $\mathcal{M}^\circ(\widetilde{P},h)$ классов калибровочно эквивалентных неприводимых решений возмущённых уравнений Зайберга - Виттена (SW_h). Ядро дифференциала этой проекции в точке $\big([A,\psi]\,,\,h\big)$ представляет собой касательное пространство Зарисского к $\mathcal{M}^\circ(\widetilde{P},h)$ в точке $[A,\psi]$. Из условия трансверсальности коядро дифференциала отождествляется с пространством препятствий для $\mathcal{M}^\circ(\widetilde{P},h)$ в точке $[A,\psi]$. Таким образом, дифференциал проекции является фредгольмовым оператором индекса

$$d(\mathcal{L}) = \frac{c_1(\mathcal{L}^2)-\big(\,2\chi(X)+3\sigma(X)\,\big)}{4}\;.$$

Доказательство. Из леммы следует, что подпространство

$$\widetilde{\mathcal{PM}}^\circ(\widetilde{P})\ \subset\ \mathcal{C}_4(\widetilde{P})\times L^2_3\left(\Lambda^2_+T^*X\otimes\mathbb{R}\right)\ ,$$

состоящее из всех (A,ψ,h) с $F^+_A = q(\psi)+ih$ и $\not{\partial}_A(\psi) = 0$ является гладким подмногообразием. Факторизация по действию калибровочной группы приводит к гладкому подмногообразию

$$\mathcal{PM}^\circ(\widetilde{P})\ \subset\ \mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})\times L^2_3\left(\Lambda^2_+T^*X\otimes\mathbb{R}\right)\ .$$

Все утверждения о дифференциале проекции проверяются непосредственно. □

Следствие 6.2.3. *Для общей $h \in L^2_3\left(\Lambda^2_+ T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$ пространство модулей $\mathcal{M}^\circ(\widetilde{P}, h)$ классов неприводимых решений возмущённой системы (SW_h) является гладким подмногообразием размерности $d(\mathcal{L})$ в $\mathcal{B}^\circ_4(\widetilde{P})$.*

Доказательство. Из предыдущего результата и теоремы Сарда - Смейла вытекает, что для общего $h \in L^2_3\left(\Lambda^2_+ T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$ линеаризация возмущённой системы (SW_h) в любом неприводимом решении является сюръективной, а пространство модулей всех неприводимых решений является гладким (бесконечномерным) многообразием. Факторизуя по калибровочной группе (которая на неприводимых решениях действует свободно), мы видим, что пространство модулей классов калибровочно эквивалентных решений возмущённой системы (SW_h) является гладким многообразием, индекс которого равен взятой с обратным знаком эйлеровой характеристике фундаментального эллиптического комплекса $\mathcal{E}(A, \psi)$. □

6.3. Приводимые связности

Разберёмся теперь с приводимыми связностями. Именно здесь нам понадобится условие $b_2^+ > 0$.

Предложение 6.3.1. *Пусть $b_2^+ > 0$. Если класс когомологий $c_1(\mathcal{L})$ детерминантного расслоения $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P} \longrightarrow X$ не является элементом кручения, то для общей метрики приводимых связностей, удовлетворяющих уравнениям Зайберга - Виттена не существует.*

В случае произвольной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-стуктуры из отсутствия приводимых решений у ситемы Зайберга - Виттена вытекает их отсутствие и у всех возмущённых систем (SW_h) с достаточно малыми h, и для любой метрики общая возмущённая система (SW_h) не имеет приводимых решений.

Доказательство. Приводимое решение уравнений Зайберга - Виттена представляет собой антиавтодуальную связность на на детерминантном расслоении и нулевое спинорное поле. Кривизна такой связности является гармонической 2-формой из когомологического класса $\left({}^{2\pi}\!/_{i}\right) c_1(\mathcal{L})$ и её антиавтодуальность равносильна ортогональности к пространству автодуальных гармонических 2-форм. Но если класс $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X; \mathbb{R})$ отличен от нуля, то условие ортогональности, как показано в [11], является в пространстве всех метрик замкнутым условием коразмерности 2.

Для произвольной метрики приводимое решение возмущённой системы удовлетворяет соотношению $F_A^+ = ih$. Но если ортогональные проекции форм h и $2\pi c_1(\mathcal{L})$ на подпространство автодуальных гармонических 2-форм различны, то таких решений не существует. Отсюда сразу следуют последние два утверждения. □

Следствие 6.3.2. *Если X является замкнутым гладким ориентированным римановым многообразием с $b_2^+ > 0$, то для общей L^2_3-автодуальной вещественной 2-формы h пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h)$ будет гладким подмногообразием размерности $d(\mathcal{L})$ в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$.*

Доказательство. Мы установили, что что при общем возмущении приводимых решений не будет, а в каждом неприводимом решении пространство модулей гладко и имеет нужную размерность. □

6.4. Компактность возмущённого пространства модулей

Предложение 6.4.1. *Зафиксируем замкнутое ориентированное четырёхмерное риманово многообразие X и* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структуру $\widetilde{P} \longrightarrow X$ на нём. Пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h)$ является компактным* $\forall\ h \in L^2_3\left(\Lambda^2_+ T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$.

Доказательство. Формула Бохнера 5-3 в случае, когда рассматривается решение возмущённой системы, приобретает вид

$$0 = \nabla_A^* \nabla_A(\psi) + \frac{\varkappa}{4}\psi + \frac{|\psi|^2}{4}\psi + ih \cdot \psi\,. \tag{6-1}$$

Беря поточечное скалярное произведение с ψ и вычисляя значение в точке x_0, где $|\psi|$ достигает своего максимума, мы, рассуждая так же, как и при доказательстве следствия 5.2.2, получим, что

$$0 \geqslant \frac{\varkappa(x_0)}{4}|\psi(x_0)|^2 + \frac{|\psi(x_0)|^4}{4} + \mathrm{Re}\left(\left\langle ih(x_0) \cdot \psi(x_0)\,,\, \psi(x_0)\right\rangle\right).$$

Ясно, что норма последнего слагаемого в этом выражении не превосходит

$$|h(x_0)| \cdot |\psi(x_0)|^2\,,$$

откуда либо $\psi(x_0) = 0$ (и стало быть, ψ – тождественно нулевое поле), либо

$$0 \geqslant \frac{\varkappa}{4} + \frac{|\psi(x_0)|^2}{4} - |h(x_0)|\,.$$

Тем самым, если ψ не есть тождественный нуль, то $|\psi(x_0)|^2 \geqslant 4|h(x_0)| - \varkappa(x_0)$, и значит, всякое решение возмущённых уравнений удовлетворяет неравенству

$$|\psi(x_0)|^2 \leqslant \max\left(0\,,\, \max_{y\in X}\bigl(4|h(y)| - \varkappa(y)\bigr)\right),$$

которое выступает теперь вместо поточечной оценки ψ из следствия 5.2.2.

У нас также есть и априорная поточечная ограниченность $||\nabla_A(\psi)||^2_{L^2}$: скалярно умножая равенство (6-1) на ψ в L^2, получим

$$||\nabla_A(\psi)||^2_{L^2} + \frac{\varkappa}{4}\,||\psi||^2_{L^2} + ||\psi||^4_{L^4} + \left\langle ih\psi\,,\, \psi\right\rangle_{L^2},$$

и коль скоро $\varkappa$, ψ и h поточечно ограничены *a priori*, таковой же будет и $||\nabla_A(\psi)||^2_{L^2}$.

Сопоставляя эти две априорные оценки, мы дословно так же как в п. 5.3 установим, что решения возмущённых уравнений ограничены в $\mathcal{L}^2_\ell$ для всех ℓ, и следовательно, их пространство модулей будет компактным. ☐

Следствие 6.4.2. *Пусть $b_2^+(X) > 0$ и на X зафиксирована* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структура $\widetilde{P}$. Существует открытое плотное подмножество $U(\widetilde{P}) \subset L^2_3\left(\Lambda^2_+ T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$, такое, что для каждого $h \in U(\widetilde{P})$ пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P}, h)$ состоит только из классов неприводимых решений и является гладким подмногообразием размерности $d(\mathcal{L})$ в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$.*

Доказательство. Мы только что показали, что параметризованное пространство модулей неприводимых решений

$$\mathcal{PM}^\circ(\widetilde{P}) \subset \mathcal{B}_4^\circ(\widetilde{P}) \times L_3^2\left(\Lambda_+^2 T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$$

является гладким многообразием, а его проекция на пространство параметров

$$L_3^2\left(\Lambda_+^2 T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$$

является гладким отображением. Поскольку $b_2^+ > 0$, возмущённая система Зайберга - Виттена может иметь приводимые решения только над некоторым замкнутым нигде не плотным подмножеством пространства параметров. Исключая это подмножество из пространства параметров, а его полный прообраз — из параметризованного пространства модулей, мы получаем на оставшейся части проекцию с фредгольмовым дифференциалом и компактными слоями. Значит, в пространстве параметров имеется плотное открытое множество, состоящее из регулярных значений проекции. Поскольку пространство модулей классов L_5^2-калибровочно эквивалентных L_4^2-решений возмущённых уравнений совпадает с пространством L_3^2-калибровочно эквивалентных L_2^2-решений, мы получаем таким образом и требуемое открытое подмножество $U(\widetilde{P}) \subset L_3^2\left(\Lambda_+^2 T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$. □

Доказательство теоремы 6.1.1. Для произвольной Spin$^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ обозначим через $U^\infty(\widetilde{P})$ пересечение открытого подмножества

$$U(\widetilde{P}) \subset L_3^2\left(\Lambda_+^2 T^*X \otimes \mathbb{R}\right)$$

из предыдущего следствия с пространством C^∞-форм. Из 6.4.2 ясно, что $U^\infty(\widetilde{P})$ открыто и плотно в пространстве автодуальных бесконечно гладких 2-форм на X, и что конструкция теоремы 6.1.1 благополучно работает для любой Spin$^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ и всех $h \in U^\infty(\widetilde{P})$. Обозначим теперь через U^∞ пересечение подмножеств $U^\infty(\widetilde{P})$ для всех Spin$^{\mathbb{C}}$-структур$\widetilde{P}$ на X. Поскольку $U^\infty(\widetilde{P})$ зависит, очевидно, только от класса изоморфизма Spin$^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$, и множество таких классов счётно, U^∞ будет плотным G_δ-подмножеством в пространстве бесконечно гладких автодуальных 2-форм. Ясно, что утверждение теоремы 6.1.1 выполняется для всех $h \in U^\infty$. □

6.5. Ориентируемость пространства модулей

Последнее, что нам осталось сделать прежде, чем мы сможем определить инвариант Зайберга - Виттена Spin$^{\mathbb{C}}$-структуры на X, — это установить ориентируемость пространства модулей.

Определим *детерминант* $\det(F)$ фредгольмова линеного отображения

$$V \xrightarrow{F} W$$

как тензорное произведение старшей внешней степени ядра F и обратной старшей внешней степени коядра F. Если задано непрерывное семейство $\{F_s\}_{s\in S}$ фредгольмовых операторов, то детерминантные прямые $\det(F_s)$ естественно организуются в 1-расслоение $L \longrightarrow S$ над пространством параметров S (см., например, [2], гл. IV, п. 5.3).

Сначала – элементарная лемма:

Лемма 6.5.1. *Пусть $\{F_s\}_{s\in S}$ и $\{F'_s\}_{s\in S}$ — два гомотопных непрерывных семейства фредгольмовых операторов над одним и тем же пространством параметров S. Тогда гомотопия между*

$\{F_s\}_{s\in S}$ *и* $\{F'_s\}_{s\in S}$ *однозначно с точностью до умножения на положительную функцию* $S \longrightarrow \mathbb{R}$ *определяет изоморфизм детерминантных 1-расслоений* $L \longrightarrow S$ *и* $L' \longrightarrow S$ *этих семейств.*

Доказательство. Гомотопия между двумя семействами операторов есть семейство фредгольмовых операторов над $I \times S$, детерминанты которых составляют 1-расслоение над $I \times S$. Но всякое 1-расслоение над $I \times S$ изоморфно произведению I на 1-расслоение над S, что даёт однозначно (с точностью до умножения на положительную функцию) определённый изоморфизм между расслоениями над концами $\{0\} \times S$ и $\{1\} \times S$. ☐

Теперь мы применим это к семейству фредгольмовых операторов, параметризованному точками $\mathcal{C}(\widetilde{P})$. Для каждого $(A, \psi) \in \mathcal{C}(\widetilde{P})$ мы имеем «эллиптический комплекс»

$$0 \longrightarrow L^2_3(X; i\,\mathbb{R}) \xrightarrow{D_1} L^2_2\Big((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big) \xrightarrow{D_2}$$

$$\xrightarrow{D_2} L^2_1\Big((\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^-(\widetilde{P})\Big) \longrightarrow 0\,,$$

в котором $D_1 : \ f \longmapsto (2d\,,\ -f\psi)$, а D_2 задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} P_+d & -Dq_\psi \\ \psi\big/2 & \not{\partial}_A \end{pmatrix}.$$

В строгом смысле слова, написанная последовательность не является комплексом, поскольку если (A, ψ) не удовлетворяет уравнениям Зайберга - Виттена, композиция $D_2 \circ D_1$ может быть и ненулевой. Тем не менее, мы можем построить по этой последовательности фредгольмов оператор $D_{(A,\psi)} = (\,D_2\,,\ D_1^*\,)$:

$$L^2_2\Big((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big) \xrightarrow{D_{(A,\psi)}} L^2_1\Big((\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^-(\widetilde{P}) \oplus i\,\mathbb{R}\Big)\,.$$

Таким образом мы получаем семейство фредгольмовых операторов, параметризованное точками $\mathcal{C}(\widetilde{P})$. Удобно продеформировать это семейство при помощи гомотопии

$$D_{(A,\psi)}(t) = (\,D_2(t)\,,\ D_1(t)^*\,)\,,$$

где $D_1(t) : \ f \longmapsto (2d\,,\ -(1-t)f\psi)$, а $D_2(t)$ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} P_+d & -(1-t)Dq_\psi \\ \frac{1}{2}(1-t)\psi & \not{\partial}_A \end{pmatrix}.$$

Эта гомотопия переводит семейство $D_{(A,\psi)}$, соответствующее $t = 0$, в семейство $E_{(A,\psi)} = d^+ + \not{\partial}_A + 2d^*$:

$$L^2_2\Big((T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^+(\widetilde{P})\Big) \xrightarrow{E_{(A,\psi)}} L^2_1\Big((\Lambda^2_+ T^*X \otimes i\,\mathbb{R}) \oplus S^-(\widetilde{P}) \oplus i\,\mathbb{R}\Big)\,,$$

возникающее при $t = 1$.

Детерминантное расслоение семейства $D_{(A,\psi)}(t)$ есть вещественное 1-расслоение над $I \times \mathcal{C}(\widetilde{P})$, и действие $\mathcal{G}(\widetilde{P})$ на $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ очевидным образом поднимается до послойно линейного действия на тотальном пространстве этого расслоения. После ограничения на $I \times \mathcal{C}^\circ(\widetilde{P})$ и факторизации получаем детерминантное расслоение ξ над $I \times \mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$.

Утверждение 6.5.2. *Вещественное детерминантное 1-расслоение* ξ *над* $I \times \mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ *изоморфно тривиальному вещественному 1-расслоению. Ориентация на нём определяется выбором* *ориентации на*

$$\Lambda^{top}H^1\left(x; i\,\mathbb{R}\right)\otimes\left(\Lambda^{top}H^0\left(x; i\,\mathbb{R}\right)\otimes\Lambda^{top}H^2_+\left(x; i\,\mathbb{R}\right)\right)^{-1}.$$

Доказательство. Достаточно доказать тривиальность ограничения нашего 1-расслоения на $\{1\}\times\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$. Над $\{1\}\times\mathcal{C}^\circ(\widetilde{P})$ семейство фредгомольмовых операторов распадается в прямую сумму постоянного оператора $d^+ + 2d^*$ и переменного комплексного линейного оператора $\eth_A$. Поэтому детерминантное расслоение будет тензорным произведением тривиального 1-расслоения, соответствующего постоянному оператору, и вещественного детерминантного 1-расслоения переменного семейства комплексных операторов. Калибровочная группа сохраняет это разложение и комплексную структуру на втором сомножителе, так что после факторизации мы получим точно такое же разложение в произведение. Но вещественное детерминантное расслоение любого семейства комплексных операторов тривиально и имеет какноническую ориентацию, индуцированную комплексной структурой. Этим доказано, что ξ является тривиальным 1-раслоением.

Чтобы задать ориентацию на ξ, достаточно, в следствие односвязности $I\times\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$, фиксировать ориентацию над какой-либо одной точкой.. Рассмотрим точку $(x,1)\in\{1\}\times\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$. Из предыдущего ясно, что для задания ориентации детерминантной прямой над такой точкой достаточно фиксировать ориентацию на постоянном тензорном сомножителе. Но ядро постоянного семейства совпадает с $H^1(X; i\,\mathbb{R})$, а коядро — с $H^2_+(X; i\,\mathbb{R})\oplus H^0(X; i\,\mathbb{R})$, что и завершает доказательство утверждения. ☐

Следствие 6.5.3. *Открытое подмножество в $\mathcal{M}(\widetilde{P})$, состоящее гладких неприводимых точек, является ориентируемым многообразием, и выбор ориентации в $H^0(X; i\,\mathbb{R})$, $H^1(X; i\,\mathbb{R})$ и $H^2_+(X; i\,\mathbb{R})$ задаёт ориентацию во всех гладких неприводимых точках $\mathcal{M}(\widetilde{P})$.*

Доказательство. Выбор ориентации трёх пространств когомологий фиксирует ориентацию детерминантного расслоения ξ над $\mathcal{B}(\widetilde{P})$, получающегося факторизацией детерминантного расслоения семейства фредгольмовых операторов $D_{(A,\psi)}$ над $\mathcal{C}^\circ(\widetilde{P})$. Над гладкой неприводимой точкой $[A,\psi]\in\mathcal{M}(\widetilde{P})$ коядро $D_{(A,\psi)}$ тривиально, а ядро совпадает с касательным пространством к $\mathcal{M}(\widetilde{P})$, так что $\det\left(D_{(A,\psi)}\right)$ естественно отждествляется со старшей внешней степенью касательного расслоения к $\mathcal{M}(\widetilde{P})$. Поэтому из ориентируемости детерминантного расслоения вытекает ориентируемость подмногообразия гладких неприводимых точек в $\mathcal{M}(\widetilde{P})$. Остальные утверждения тоже легко получаются из доказанных выше свойств детерминантного расслоения. ☐

Всё сказанное в равной степени справедливо и для возмущённых уравнений и параметризованных пространств модулей над любым ориентированным пространством параметров.

Следствие 6.5.4. *Пусть на многообразии X заданы семейство римановых метрик g_s и семейство вещественных автодуальных 2-форм h_s, гладко зависящие от точки s некоего гладкого конечномерного ориентируемого многообразия S. Обозначим через $\mathcal{M}(\widetilde{P},S)$ параметризованное пространство модулей троек $([A,\psi],s)$, в которых $[A,\psi]$ является классом калибровочно-эквивалентных решений возмущённых при помощи формы ih_s уравнений Зайберга - Виттена для метрики g_s. Если $\mathcal{M}(\widetilde{P},S)$ является гладким многообразием, то оно ориентируемо, и его ориентация определяется выбором ориентации на S и пространствах $H^0(X; i\,\mathbb{R})$, $H^1(X; i\,\mathbb{R})$ и $H^2_+(X; i\,\mathbb{R})$.*

Соглашение о выборе ориентации. Зафиксируем точное правило, связывающее ориентацию детерминантного расслоения с ориентациями на $H^1(X;\mathbb{R})$ и $H^2_+(X;\mathbb{R})$ (мы всегда считаем, что ориентация на $H^0(X;\mathbb{R})$ задаётся, как обычно, единичным когомологическим классом 1). Ориентация на ядре постоянного оператора

$$\ker\left(d^+ + 3d^*\right) = H^1(X; i\,\mathbb{R})$$

переносится с $H^1(X;\mathbb{R})$ посредством умножения на i. Ориентация на

$$\operatorname{coker}\left(d^+ + 3d^*\right) = H^2_+(X; i\,\mathbb{R}) \oplus H^0(X; i\,\mathbb{R})$$

есть прямая сумма умноженных на i ориентаций на $H^2_+(X;\mathbb{R})$ и $H^0(X;\mathbb{R})$ (именно в таком порядке).

6.6. Случай $b_2^+(X) > 1$

Фиксируем риманово многообразие X, $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P} \longrightarrow X$, ориентацию на пространствах $H^1(X;\mathbb{R})$ и $H^2_+(X;\mathbb{R})$ и предположим, что $b_2^+(X) > 1$. Тогда для общей автодуальной бесконечно гладкой 2-формы h пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P},h)$ решений возмущённых уравнений Зайберга - Виттена будет гладким компактным подмногообразием в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$, и ориентация на когомологических пространствах задаёт ориентацию на этом пространстве модулей.

В п. 4.5 мы видели, что над $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ имеется универсальное главное S^1-расслоение, тотальное пространство которого состоит из классов неприводимых конфигураций по модулю действия *базированной* калибровочной группы $\mathcal{G}_0(\widetilde{P})$. Пусть первый класс Чженя этого универсального S^1-расслоения равен

$$\mu \in H^2\left(\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})\,,\,\mathbb{Z}\right)\,.$$

Если размерность пространства модулей

$$d(\mathcal{L}) = \frac{1}{4}\left(c_1(\mathcal{L})^2 - 2\,\chi(X) - 3\,\sigma(X)\right)$$

чётна и равна, скажем, $2d$, мы определим *инвариант Зайберга - Виттена* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ формулой

$$SW(\widetilde{P}) = \int\limits_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h)} \mu^d\,.$$

Если размерность пространства модулей нечётна, мы полагаем инвариант Зайберга - Виттена равным нулю.

Замечание. Размерность пространства $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ по модулю 2 сравнима с

$$b_1(X) - b_2^+(X) - 1\,,$$

так что она будет чётной если и только если $b_1(X) - b_2^+(X)$ нечётно.

Лемма 6.6.1. *В предположении, что* $b_2^+(X) > 1$, *данное выше определение инварианта* $SW(\widetilde{P})$ *не зависит ни от выбора возмщения* h, *ни от выбора римановой метрики на* X.

Доказательство. Предположим, что на X заданы две римановы метрики g_1, g_2 и два общих возмущения h_1 и h_2. Метрики g_1 и g_2 можно соединить C^∞-путём в пространстве метрик, а возмущения h_1 и h_2 — достаточно общим путём η в пространстве возмущений. Получим параметризованное пространство модулей

$$\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta) \subset \mathcal{B}^\circ(\widetilde{P}) \times I ,$$

которое будет гладким компактным многообразием с краем (условие $b_2^+ > 1$ нужно для того, чтобы гарантировать отсутствие приводимых решений в этом однопараметрическом семействе пространств модулей). Ориентация на I и на когомологиях X задаёт ориентацию на $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$, а $\mathcal{M}(\widetilde{P},1) - \mathcal{M}(\widetilde{P},0)$ является его ориентированной границей. Таким образом, классы этих двух краевых пространств модулей когомологичны в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$, и значит,

$$\int\limits_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h_1)} \mu^d = \int\limits_{\mathcal{M}(\widetilde{P},h_2)} \mu^d .$$

Стало быть, оба способа подсчёта инварианта Зайберга - Виттена приводят к одинаковому результату. □

Замечание 6.6.2. Отметим, что в действительности мы показали, что при $b_2^+ > 1$ уже класс бордизма $\mathcal{M}(\widetilde{P},h)$ в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ является инвариантом $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P} \to X$.

Теорема 6.6.3. *Пусть X является замкнутым ориентированным гладким четырёхмерным многообразием с $b_2^+(X) > 1$. Обозначим через $\mathcal{S}(\mathcal{X})$ множество классов изорфных* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-*структур на X. Тогда построенный выше инвариант Зайберга - Виттена есть корректно определённая функцией $\mathcal{S}(\mathcal{X}) \xrightarrow{SW} \mathbb{Z}$, принимающая ненулевые значение лишь на конечном подмножестве в $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Всё за исключением последнего утверждения было доказано непосредственно перед формулировкой теоремы. Последнее утверждение немедленно вытекает из теоремы 5.2.4. □

6.7. Инволюция комплексного сопряжения

Есть одно общее соотношение между инвариантами Зайберга - Виттена разных $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур: на множестве $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурдействует инволюция комплексного сопряжения, и значения инварианта Зайберга - Виттена на сопряжённых $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурах различаются знаком.

Мы начнём с нескольких базисных разновидностей комплексного сопряжения. Пусть V — вещественное конечномерное евклидово пространство. Тогда на $\mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ мы имеем комплексное сопряжение, которое обозначим через

$$c \longmapsto \bar{c} .$$

Оно индуцирует отображение $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V) \to \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$, которое мы тоже назовём комплексным сопряжением. Это отображение тождественно действует на $\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(V)$ и действует как комплексное сопряжение на детерминанте.

Допустим теперь, что размерность V сравнима с 2 или 4 по модулю 8, и обозначим эту размерность через $2d$. Тогда алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ будет изоморфна матричной алгебре над

$\mathbb{H}$ (см. [7], ch.1, sec.4), а неприводимый комплексный $\mathrm{Cl}(V)$-модуль $S_{\mathbb{C}}(V)$ можно отождествить с $\mathbb{H}^{2^{d-1}}$, на котором алгебра Клиффорда действует левыми умножениями на кватернионные матрицы, а комплексная структура задаётся правым комплексным умножением. Имеется изоморфизм $S_{\mathbb{C}}(V) \xrightarrow{\iota} S_{\mathbb{C}}(V)$, коммутирующий с левым клиффордовым и антикоммутирующий с правым комплексным умножениями. Он задаётся правым кватернионным умножением на j. Для $c \in \mathrm{Cl}(V) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ и $s \in S_{\mathbb{C}}(V)$ имеем

$$\iota(c \cdot s) = \bar{c} \cdot \iota(s) \ .$$

Пусть теперь $\widetilde{P} \longrightarrow X$ есть $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура на гладком четырёхмерном римановом ориентированном многообразии. Обозначим через $P_{\mathrm{SO}(n)}X$ главное расслоение, ассоциированное с касательным, а через P_{S^1} – главное S^1-расслоение, ассоциированнон с детерминантом $\widetilde{P}$, и рассотрим $\widetilde{P}$ как двойное накрытие над $P_{\mathrm{SO}(4)}X \underset{X}{\times} P_{S^1}$. Пусть $P^*_{S^1}$ – это двойственное (или сопряжённое) к P_{S^1} расслоение. Мы имеем отображение

$$(\mathrm{Id}, \iota) : \ P_{\mathrm{SO}(4)}X \underset{X}{\times} P^*_{S^1} \longrightarrow P_{\mathrm{SO}(4)}X \underset{X}{\times} P_{S^1} \ ,$$

тождественное на первом сомножителе, и действующее сопряжением на втором. Поднятие двойного накрытия индуцирует на X $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру, которую мы обозначим через $-\widetilde{P}$. Её детерминант есть $P^*_{S^1}$. Разумеется, существует отображение

$$\tilde{c} : \ (-\widetilde{P}) \longrightarrow \widetilde{P} \ ,$$

накрывающее (Id, ι). Легко видеть, что $\tilde{c}$ является морфизмом главных расслоений, перестановочным с комплексно сопряжёнными действиями $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)$.

Пусть $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ — это неприводимый комплексный $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$-модуль. Отображение комплексных спинорных расслоений

$$\iota_{\widetilde{P}} : \ (-\widetilde{P}) \underset{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)}{\times} S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^4) \longrightarrow \widetilde{P} \underset{\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}(n)}{\times} S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^4)$$

индуцированное отображением $\tilde{c}$ главных $\mathrm{Spin}(n)$-расслоений и правым умножением на j в $S_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^4)$, является комплексно антилинейным изоморфизмом между $S(-\widetilde{P})$ и $S(\widetilde{P})$. Единица $\omega_{\mathbb{C}}$ лежит в вещественной алгебре Клиффорда, и стало быть остаётся на месте под действием $\iota_{\widetilde{P}}$. Поэтому $\iota_{\widetilde{P}}$ сохраняет спинорное разложение и индуцирует изоморфизмы $S^{\pm}(-\widetilde{P}) \xrightarrow{\iota^{\pm}_{\widetilde{P}}} S(\widetilde{P})$. Отметим, что если c и ψ суть сечения $\mathrm{Cl}(TX) \otimes \mathbb{C}$ и $S(-\widetilde{P})$ соответственно, то

$$\iota_{\widetilde{P}}(c \cdot \psi) = \bar{c} \cdot \iota_{\widetilde{P}}(\psi) \ .$$

В частности, если $c \in \mathrm{Cl}(TX)$ лежит в вещественной алгебре Клиффорда, то $\iota_{\widetilde{P}}(c \cdot \psi) = c \cdot \iota_{\widetilde{P}}(\psi)$.

Лемма 6.7.1. *Пусть A — это связность на детерминанте P_{S^1} расслоения $\widetilde{P}$, а A^* — сопряжённая связность на $P^*_{S^1}$. Тогда они определяют связности ∇_A и ∇_{A^*} на расслоениях $\widetilde{P}$ и $-\widetilde{P}$ и операторы Дирака $\not{D}_{A^*}$ и $\not{D}_A$ на расслоениях $S^{\pm}(-\widetilde{P})$ и $S^{\pm}(\widetilde{P})$ соответственно, и для любого сечения ψ расслоения $S(-\widetilde{P})$ выполнено соотношение*

$$\iota_{\widetilde{P}}\left(\not{D}_{A^*}(\psi)\right) = \not{D}_A\left(\iota_{\widetilde{P}}(\psi)\right) \ .$$

Доказательство. Лемма сразу следует из того, что связность ∇_{A^*} является поднятием связности ∇_A относительно $(-\widetilde{P}) \xrightarrow{\iota_{\widetilde{P}}} \widetilde{P}$, а отображение $S(-\widetilde{P}) \longrightarrow S(\widetilde{P})$ перестановочно с клиффордовым действием $\mathrm{Cl}(TX)$. □

Следствие 6.7.2. *Отображение $\iota_{\widetilde{P}}$ индуцирует изоморфизм пространств голоморфных сечений расслоений $S^{\pm}(-\widetilde{P})$ с соответствующими пространствами голоморфных сечений расслоений $S^{\pm}(\widetilde{P})$.* □

Посмотрим теперь, что происходит с уравнением Зайберга - Виттена на кривизну. Ясно, что $F^+_{A^*} = -F^+_A$, и эндоморфизм $q(\psi)$ расслоения $S^+(\widetilde{P})$ переходит под действием $\iota_{\widetilde{P}}$ в эндоморфизм $q(\iota_{\widetilde{P}}(\psi))$ расслоения $S^+(-\widetilde{P})$. Поскольку $F^+_{A^*}$ является чисто мнимой 2-формой, её действие на $S^+(-\widetilde{P})$ клиффордовым умножением превращается под действием $\iota_{\widetilde{P}}$ в действие $-F^+_{A^*} = F^+_A$ на $S(\widetilde{P})$. Нами доказана

Теорема 6.7.3. *Отображение $(A,\psi) \longmapsto \left(A^*, \iota_{\widetilde{P}}^{-1}(\psi)\right)$ из конфигурационного пространства $\mathcal{C}(\widetilde{P})$ в конфигурационное пространство $\mathcal{C}(-\widetilde{P})$ является диффеоморфизмом, перестановочным с комплексно сопряжёнными действиями калибровочной группы на этих пространствах. Оно задаёт гомеоморфизм $\mathcal{B}(\widetilde{P}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}(-\widetilde{P})$, являющийся диффеоморфизмом между открытоми подмножествами неприводимых конфигураций. Изоморфизм конфигурационных пространств индуцирует гомеоморфизм пространств модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(-\widetilde{P})$ и линейный изоморфизм касательных пространств Зарисского над каждым неприводимым решением. Более того, для произвольной автодуальной 2-формы h наше отождествление конфигурационных пространств индуцирует гомеоморфизм $\mathcal{M}(-\widetilde{P},h) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}\left(-\widetilde{P},h\right)$, и в частности, если одно из этих пространств модулей гладко, то другое тоже гладко и диффеоморфно первому.* □

Теперь мы переформулируем эту теорему в утверждение о значениях инвариантов $SW(-\widetilde{P})$ и $SW(\widetilde{P})$.

Следствие 6.7.4. *Предположим, что замкнутое ориентированное четырёхмерное многообразие X имеет $b_2^+ > 1$, и на пространствах $H^1(X,\mathbb{R})$ и $H^2_+(X,\mathbb{R})$ задана ориентация, фиксирующая ориентации на всех пространствах модулей и знаки у инвариантов Зайберга - Виттена всех $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур на X. Тогда $SW(-\widetilde{P}) = (-1)^{\varepsilon(X)}SW(\widetilde{P})$, где $\varepsilon(X) = \dfrac{1}{2}\left(1+b_2^+(X)-b_1(X)\right)$.*

Доказательство. Мы должны лишь вычислить, что происходит при инволюции с ориентацией пространства модулей и с классом μ.

Прежде всего, комплексное сопряжение в калибровочной группе задаёт изоморфизм сопряжения между универсальными S^1-расслоениями над $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ и $\mathcal{B}^\circ(-\widetilde{P})$. Поэтому отождествление конфигурационных пространств превращает μ в $-\mu$.

Рассмотрим теперь действие инволюции на детерминантные 1-расслоения над $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$ и $\mathcal{B}^\circ(-\widetilde{P})$. Достаточно проследить за тем, что происходит с детерминантным 1-расслоением гомотопического семейства $\left(d^+ + 2d^* + \not\partial_A\right)$. Сопряжение переводит i в $-i$, и стало быть, действует на группах $H^0(X,\, i\,\mathbb{R})$, $H^1(X,\, i\,\mathbb{R})$ и $H^2_+(X,\, i\,\mathbb{R})$ умножением на -1. Таким образом, результирующее действие на детерминантное расслоение, а с ним и на ориентацию пространства модулей, есть умножение на $(-1)^{\delta}$, где $\delta = 1 + b_1(X) + b_2^+(X) + \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\left(\not\partial_A\right)$.

Пусть виртуальная размерность $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ равна d. Тогда изоморфизм конфигурационных пространств переводит $\mu^{d/2}$ в $(-1)^{d/2}$.

Вместе эти два факта показывают, что при действии инволюции значение инварианта Зайберга - Виттена умножается на $(-1)^{\delta+d/2}$. Но по теореме об индексе

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}\left(b_1(X) - 1 - b_2^+(X)\right) + \mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\left(\not{\partial}_A\right).$$

Соединяя всё воедино, видим, что $SW(-\widetilde{P}) = (-1)^{\varepsilon(X)} SW(-\widetilde{P})$. □

6.8. Случай $b_2^+(X) = 1$

Здесь мы предполагаем, что X — это гладкое ориентированное замкнутое четырёхмерное многообразие с $b_2^+(X) = 1$ и зафиксированной ориентацией на $H^1(X, \mathbb{R})$ и $H_+^2(X, \mathbb{R})$. Действовать мы будем так же, как и выше, за одним исключением: нам следует выбросить из пространства метрик подмногообразие коразмерности 1, состоящее из метрик, для которых у уравнений Зайберга - Виттена бывают приводимые решения.

Лемма 6.8.1. *Пусть* $b_2^+ = 1$ *и* g *— метрика на* X*. Уавнения Зайберга - Виттена для* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структуры* $\widetilde{P}$ *тогда и толко тогда имеют приводимое решение, когда когомологический класс* $c_1(\mathcal{L})$ $\cup$*-ортогонален когомологическому классу нетривиальной* g*-автодуальной гармонической 2-формы.*

Доказательство. Наличие неприодимого решения у уравнений Зайберга - Виттена равносильно существованию автодуальной связности на $\mathcal{L}$. Кривизна такой связности должна быть g-автодуальной 2-формой и для существования такой связности необходимо и достаточно, чтобы $c_1(\mathcal{L})$ был $\cup$-ортогонален пространству g-автодуальных гармонических 2-форм, которое по нашему предположению одномерно. Отсюда всё и следует. □

Допустим теперь, что g-автодуальная гармоническая 2-форма не ортогональна к $c_1(\mathcal{L})$. Тогда у уравнений Зайберга - Виттена не будет приводимых решений. При достаточно малом возмущении приводимых решений не будет и у возмущённых уравнений. Тем самым, при достаточно общем малом h пространство модулей $\mathcal{M}(-\widetilde{P}, h)$ будет гладким компактным многообразием. Оно будет представлять некий цикл в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P})$. Если его размерность чётна и равна, скажем, $2d$, мы можем определить инвариант Зайберга - Виттена как

$$SW_g(\widetilde{P}) = \int\limits_{\mathcal{M}(-\widetilde{P},h)} \mu^d,$$

где для ориентации пространства модулей (как и при $b_2^+ > 1$) используется зафиксированная нами ориентация на когомологиях X. Легко видеть, что для всех достаточно малых возмущений значение интеграла будет одним и тем же, так что $SW_g(\widetilde{P})$ определён корректно.

Таким образом, при $b_2^+ = 1$ мы определили инвариант, зависящий не толко от $\widetilde{P} \longrightarrow X$, но и от связной компоненты подмножества подмножества в пространстве всех метрик на X, состоящего из всех тех метрик, для которых автодуальная гармоническая 2-форма не ортогональна к $c_1(\mathcal{L})$. Покажем теперь, что по крайней мере при $H_1(X, \mathbb{Z}) = 0$ этот инвариант зависит только от знака пересечения $c_1(\mathcal{L})$ с гармонической автодуальной 2-формой, задающей ориентацию на $H_+^2(X, \mathbb{R})$, и тем самым при вариации метрики инвариант данной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры будет принимать лишь два значения. Изучение разности между этими значениями является одной из главных изюминок теории.

Формулы для проходов сквозь стенки[1]**.** В этом пункте мы сосредоточим внимание на случае $b_2^+(X) = 1$ и зафиксируем $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-расслоение $\widetilde{P} \longrightarrow X$. Если уравнения Зайберга - Виттена не имеют приводимых решений ни для одной из метрик некоторого гладкого однопараметрического семейства g_t, то для достаточно общего семейства $\eta = \{h_t\}_{0\leqslant t\leqslant 1}$ достаточно малых автодуальных 2-форм, параметризованное пространство модулей $\mathcal{M}\left(\widetilde{P}, \eta\right)$ будет, как мы видели, замкнутым ориентированным гладким многообразием. Поэтому вычисляя инвариант Зайберга - Виттена при помощи разных метрик g_0 и g_1 из такого семейства, мы получим одно и то же значение. Однако, это рассуждение перестаёт работать, если для одной из метрик семейства g_t у уравнений Зайберга - Виттена появится приводимое решение. Это происходит в тот момент, когда прямая g_t-автодуальных гармонических 2-форм оказывается $\cup$-ортогональной к $c_1(\mathcal{L})$.

Отображение из пространства метрик в пространство прямых в $H^2(X, \mathbb{R})$, сопоставляющее каждой метрике прямую, состоящую из автодуальных относительно этой метрики гармонических форм, является субмерсией. Мы зафиксируем ориентацию на $H_+^2(X, \mathbb{R})$ и для каждой метрики g_t обозначим через $\omega^+(g_t)$ единственную g_t-автодуальную гармоническую 2-форму с нормой 1, лежащую в положительной части $H_+^2(X, \mathbb{R})$.

Теорема 6.8.2. *Пусть X — гладкое ориентированное замкнутое четырёхмерное многообразие с $H_1(X) = 0$ и $b_2^+(X) = 1$. Зафиксируем ориентацию на $H_+^2(X, \mathbb{R})$ и $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P}$ с $c_1(\mathcal{L}) \neq 0$. Обозначим через $\mathcal{R}$ пространство всех римановых метрик на X, через $\mathcal{R}_+$ — подмножество в $\mathcal{R}$, состоящее из всех метрик g, для которых $\omega^+(g) \cdot c_1(\mathcal{L}) > 0$, через $\mathcal{R}_-$ — подмножество всех метрик, удовлетворяющих противоположному неравенству, а через $\mathcal{R}'$ — дизъюнктное объединение $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_+ \coprod \mathcal{R}_-$.*

Тогда для любой метрики $g \in \mathcal{R}'$ инвариант Зайберга - Виттена $SW_g(\widetilde{P})$ определён, и функция $g \longmapsto SW_g(\widetilde{P})$ постоянна на каждом из подмножеств $\mathcal{R}_\pm$. Обозначая её значения на $\mathcal{R}_\pm$ через $SW_\pm(\widetilde{P})$, будем иметь

$$SW_+(\widetilde{P}) = SW_-(\widetilde{P}) - (-1)^{d/2} ,$$

в предположении, что виртуальная размерность d пространства модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ чётна и положительна.

Остаток главы будет посвящён доказательству этой теоремы. Начнём с элементарной леммы.

Лемма 6.8.3. *Пусть на замкнутом ориентированном четырёхмерном римановом многообразии X задана $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P} \longrightarrow X$, обладающая тем свойством, что её оператор Дирака (отображающий сечения $S^+(\widetilde{P})$ в сечения $S^-(\widetilde{P})$) имеет ненулевой индекс. Тогда для любой связности A на $\mathcal{L}$ существует откратое плотное подмножество из форм $a \in \Omega^1(X, i\,\mathbb{R})$, для которых оператор $S^+(\widetilde{P}) \xrightarrow{D_{A,a}} S^-(\widetilde{P})$, действующий по правилу*

$$D_{A,a}(\psi) = \not{\partial}_A(\psi) + a \cdot \psi ,$$

является эпиморфизмом.

Доказательство. Из вычисления, проделанного при доказательстве леммы 6.2.1 вытекает, что для общей 1-формы a класса L_2^2 оператор $D_{A,a}$ сюръективен. И уж конечно, множество таких a открыто. □

---

[1] т. е. wall-crossing-формулы, – в последние годы эта буквальная калька с английского стала почти что официальным термином (*прим. перев*)

Пусть теперь X удовлетворяет условиям теоремы, и на $H^2_+(X, \mathbb{R})$ выбрана ориентация. По стандартным соображениям трансверсальности, теорема 6.9.2 вытекает из следующего локального вычисления.

Предложение 6.8.4. *Предположим, что в гладком однапараметрическом семействе* $\{g_t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ *метрик на* X *приводимые решения системы у Зайберга - Виттена появляются для одной только метрики* $g_{1/2}$, *прчём пересечение классов* g_t*-автодуальных гармонических 2-форм* $\omega^+(g_t)$ *с классом* $c_1(\mathcal{L})$ *как функция от* t *при* $t = {}^1\!/_2$ *трансверсально меняет знак с минуса на плюс. Если виртуальная размерность* d *пространства модулей* $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ *чётна и неотрицательна, то*

$$SW_{g_1}(\widetilde{P}) - SW_{g_0}(\widetilde{P}) = -(-1)^{d/2} .$$

Доказательство. Из условий на $H^*(X, \mathbb{R})$ вытекает, что виртуальная размерность d пространства $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ равна $2\,\mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\left(\eth_{A_0}\right) - 2$. Таким образом, неотрицательность d означает, что $\mathrm{ind}_{\mathbb{C}}\left(\eth_{A_0}\right) \geqslant 1$. Обозначим наше семейство метрик через γ. Параметризованное пространство модулей $\mathcal{M}_\gamma(\widetilde{P})$ является компактным подмногообразием в $\mathcal{B}^\circ(\widetilde{P}) \times I$ и на нём есть одно приводимое решение, скажем, $([A_0, 0], t)$. Зададимся достаточно общей формой $a \in \Omega^1(X,\, i\,\mathbb{R})$, такой чтобы оператор $S^+(\widetilde{P}) \xrightarrow{D_{A,a}} S^-(\widetilde{P})$, действующий по правилу

$$D_{A,a}(\psi) = \eth_A(\psi) + a \cdot \psi ,$$

имел нулевое коядро согласно лемме 6.9.3.

Выясним теперь, что представляет собой пространство модулей всех решений возмущённой системы

$$\begin{aligned} F_A^+ &= q(\psi) \\ \eth_A(\psi) + a \cdot (\psi) &= 0 . \end{aligned}$$

Отметим, что возмущённые уравнения имеют в точности то же множество приводимых решений, что и исходные. Поскольку a поточечно ограничена вместе со своей производной, а $D_{A_0,a}$ является эллиптическим оператором, аргументы предыдущего параграфа показывают, что параметризованное нашим семейством метрик γ пространство $\mathcal{M}'(-\widetilde{P}, \gamma)$ решений возмущённых уравнений является компактным и содержит ровно одно приводимое решение. Из того, что коядро $D_{A_0,a}$ тривиально, а частная производная по t является сохраняющим ориентацию эпиморфизмом на $H^2_+(X,\, i\,\mathbb{R})$, вытекает, что вторые когомологии эллиптического комплекса возмущённого пространства модулей над приводимым решением тривиальны. Стало быть, окрестность этого решения изоморфна фактору $\mathbb{C}^{1+d/2}$ по действию стабилизатора A_0, а значит, гомеомрфна конусу над комплексным проективным пространством.

Вычислим ориентацию в произвольной неособой точке этой окрестности. Ядро нашего оператора

$$\mathcal{C}(\widetilde{P}) \times I \xrightarrow{(D_{A_0,a}, d^*)} \Omega^2_+ \left(X;\, i\,\mathbb{R}\right) \oplus \Omega^0 \left(X;\, i\,\mathbb{R}\right)$$

представляет собой пространство гармонических спиноров с ориентацией, индуцированной комплексной структурой.

Утверждение 6.8.5. *Коядро оператора* $(D_{A_0,a}, d^*)$ *— это* $H^0(X,\, i\,\mathbb{R})$ *с канонической ориентацией.*

Доказательство. Тот факт, что классы 2-форм $\omega^+(g_t)$ изображаются в пространстве когомологий путём, который трансверсально пересекает стенку, ортогональную классу $c_1(\mathcal{L})$, проходя из отрицательного полупространства в положительное, означает, что внутреннее произведение $\omega^+(g_t)\cdot c_1(\mathcal{L})$ как вещественнозначная функция от t трансверсально пересекает нулевой уровень меняя знак с минуса на плюс при возрастании t. Значит, при возрастании t гармоническая проекция формы $F^+_{A_0}$ из отрицательного кратного $\left({}^{2\pi}\!/_{i}\right)\omega^+(g_t)$ превращается в положительное кратное. Иначе говоря, в зафиксированной нами ориентации на $H^2_+(X,\,i\,\mathbb{R})$ путь, заметаемый этими проекциями в $H^2_+(X,\,i\,\mathbb{R})$, трансверсально пересекает нуль, проходя из отрицательной полупрямой в положительную. Итак, мы видим, что образ касательного вектора ∂_t под действием дифференциала положительно ориентирован в $H^2_+(X,\,i\,\mathbb{R})$. Ориентация на коядре получается факторизацией ориентации на $H^2_+(X,\,i\,\mathbb{R})\oplus H^0(X,\,i\,\mathbb{R})$ по этому образу. Поскольку при этом попросту стирается первый базисный вектор, мы получим в результате $H^0(X,\,i\,\mathbb{R})$ со стандартной ориентацией. Утверждение доказано. □

Действие стабилизатора S^1 приводимого решения на гармонические спиноры, разумеется, противоположно обычному комплексному действию. Поэтому ориентация на факторе будет противоположна стандартной ориентации фактора комплексного пространства по обычному комплексному действию. Таким образом, положительно ориентированный базис над неособой точкой пространства модулей, рассматриваемого как конус над комплексным проективным пространством, представляет собой отрицательный базис этого проективного пространства, дополненный справа касательным вектором, идущим вдоль образующей конуса от особенности к нашей точке. В частности, вырезав окрестность особенности, мы получим на границе оставшейся части стандартную ориентацию комплексного проективного пространства. Поэтому, интегрируя $\mu^{d/2}$ по этой границе, мы получим $(-1)^{d/2}$, ибо класс μ индуцирован действием S^1, а значит, противоположен стандартной образующей вторых когомологий.

Теперь мы выберем достаточно общий путь $\eta=\{h(t)\}\subset\Omega^2_+(X;\,\mathbb{R})$ так, чтобы параметризованное пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P},\eta)$ было гладким всюду за исключением, разве что, приводимых точек. Если $h(t)$ и $\partial_t h(t)$ достаточно малы, то приводимая точка будет только одна, причём функция

$$t\longmapsto\big(\omega^+(g_t)-\pi\big(h(t)\big)\big)\cdot c_1(\mathcal{L})$$

в этой точке будет трансверсальна нулю (через π здесь обозначена L^2-ортогональная проекция на гармонические g_t-автодуальные формы). Более того, вторые когомологии эллиптического комплекса над приводимым решением возмущённой системы будут тривиальны при малых h, ибо они были тривиальны над исходным невозмущённым приводимым решением. Тем самым, дополнение к окрестности приводимого решения в параметризованном пространстве модулей будет компактным ориентированным многообразием с краем, который представляется ориентированным циклом

$$\mathcal{M}(\widetilde{P},h_1)-\mathcal{M}(\widetilde{P},h_0)+\mathbb{CP}^{d/2}\,.$$

Поскольку интеграл от $\mu^{d/2}$ по этому циклу нулевой, мы получаем соотношение

$$SW_{g_1}(\widetilde{P})-SW_{g_0}(\widetilde{P})=(-1)^{d/2}\,,$$

что и доказывает предложение 6.9.4. Как мы уже отмечали выше, теорема 6.9.2 сразу следует из этого предложения. □ □

Глава 7.

Инварианты кэлеровых поверхностей

Точное вычисление SW-инвариантов на компактной кэлеровой поверхности мы начнём с того, что проинтерпретируем уравнения Зайберга - Виттена на языке комплексной геометрии, после чего их уже легко будет полностью решить в терминах стандартных голоморфных объектов.

7.1. Уравнения на кэлеровых поверхностях

В этом параграфе мы дадим точное описание пространства модулей Зайберга - Виттена в ситуации, когда подлежащее четырёхмерное риманово многообразие является компактной кэлеровой поверхностью. Напомним (см. гл. 3), что ортогональная почти комплексная структура $TX \xrightarrow{J} TX$ на четырёхмерном римановом многообразии X индуцирует $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P}_J \longrightarrow X$ с детерминантным расслоением K_X^{-1}, обратным к каноническому расслоению почти комплексной структуры J. При этом спинорные расслоения задаются как

$$\begin{aligned} S^+(\widetilde{P}_J) &= \Lambda^0(X,\mathbb{C}) \oplus \Lambda^{0,2}(X,\mathbb{C}) \ , \\ S^-(\widetilde{P}_J) &= \Lambda^{0,1}(X,\mathbb{C}) \ , \end{aligned}$$

а клиффордово произведение с 1-формой $a \in \Omega^1(X,\mathbb{C})$ есть разность внешнего произвения и свёртки с $\sqrt{2}\pi^{0,1}(a) \in \Omega^{0,1}(X,\mathbb{C})$. Далее, если почти комплексная структура приходит из настоящей комплексной, и рниманова метрика является для неё кэлеровой метрикой, то ассоциированный с $\widetilde{P}_J$ и канонической голоморфной эрмитовой связностью на K_X^{-1} оператор Дирака действует на «+»-спиноры как

$$\sqrt{2}\left(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*\right) \, : \, \Lambda^0(X,\mathbb{C}) \oplus \Lambda^{0,2}(X,\mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda^{0,1}(X,\mathbb{C}) \ .$$

Любая другая $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P}$ отличается от $\widetilde{P}_J$ подкруткой на некоторое $\mathrm{U}(1)$-расслоение $Q \longrightarrow X$. Если обозначить через $\mathcal{L}_0$ комплексное 1-расслоение, ассоциированное с Q, то спинораные расслоения для $\widetilde{P}$ будут задаваться как

$$\begin{aligned} S^+(\widetilde{P}) &= S^+(\widetilde{P}_J) \otimes \mathcal{L}_0 = \Lambda^0(X,\mathcal{L}_0) \oplus \Lambda^{0,2}(X,\mathcal{L}_0) \ , \\ S^-(\widetilde{P}) &= S^-(\widetilde{P}_J) \otimes \mathcal{L}_0 = \Lambda^{0,1}(X,\mathcal{L}_0) \ , \end{aligned}$$

а клиффордово умножение на 1-форму $a \in \Omega^1(X, \mathbb{C})$, как и ранее, будет разностью внешнего умножения и свёртки с $\sqrt{2}\pi^{0,1}(a) \in \Omega^{0,1}(X, \mathbb{C})$. Детерминантное расслоение $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ естественно отождествляется с $K_X^{-1} \otimes \mathcal{L}_0^2$, так что $\mathcal{L}_0$ можно иначе описать как квадратный корень из $K_X \otimes \mathcal{L}$, где $\mathcal{L} = \det \widetilde{P}$, как обычно. Задать $\mathrm{U}(1)$-связность A на $\mathcal{L}$ — это всё равно, что задать унитарную связность A_0 на $\mathcal{L}_0$, ибо они связаны соотношением

$$(A_0)^2 = A_{K_X} \otimes A\ ,$$

где A_{K_X} — каноническая голоморфная эрмитова связность на K_X. Оператор Дирака, ассоциированный со связностью A на $\mathcal{L}$ есть

$$\sqrt{2}\left(\overline{\partial}_{A_0} + \overline{\partial}^*_{A_0}\right)\ :\ \Lambda^0(X, \mathcal{L}_0) \oplus \Lambda^{0,2}(X, \mathcal{L}_0) \longrightarrow \Lambda^{0,1}(X, \mathcal{L}_0)$$

и получается из $\sqrt{2}\left(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*\right)$ спариванием с ковариантным дифференциалом ∇_{A_0} на $\mathcal{L}_0$. Подчеркнём, что наши обозначения ни коим образом не предполагают, что $\overline{\partial}_{A_0}$ задаёт голоморфную структуру, ибо в общем случае это и неверно.

Уравнение Дирака приобретает теперь очень простой вид. Спинорное поле ψ, являясь сечением $S^+(\widetilde{P})$ имеет две компоненты

$$\psi = (\alpha, \beta) \in \Omega^0(X; \mathcal{L}_0) \oplus \Omega^{0,2}(X; \mathcal{L}_0)\ ,$$

и уравнение Дирака выглядит так:

$$\sqrt{2}\left(\overline{\partial}_{A_0}(\alpha) + \overline{\partial}^*_{A_0}(\beta)\right) = 0\ .$$

Посмотрим, как в кэлеровой геометрии выглядит уравнение на кривизну. Пусть ω — кэлерова форма. Это нигде не обращающаяся в нуль вещественная автодуальная 2-форма типа $(1,1)$. Пространство комплекснозначных автодуальных 2-форм на кэлеровом многообразии распадается в сумму

$$\Omega^0(X; \mathbb{C}) \cdot \omega\ \oplus\ \left(\Omega^{2,0}(X; \mathbb{C}) \oplus \Omega^{0,2}(X; \mathbb{C})\right)\ ,$$

так что пространство чисто мнимых автодуальных 2-форм имеет вид

$$\Omega^0(X;\, i\,\mathbb{R}) \cdot \omega \oplus \left\{\, \mu - \overline{\mu} \mid \mu \in \Omega^{0,2}(X; \mathbb{C}) \,\right\}\ .$$

Следовательно, автодуальная составляющая кривизны унитарной связности A на $\mathcal{L}$ может быть записана как $F_A^+ = if\omega + \mu - \overline{\mu}$, где f — некая вещественнозначная функция, а μ — некая комплекснозначная 2-форма на X. Выясним, как такая автодуальная 2-форма действует на $S^+(\widetilde{P})$. Для этого фиксируем локальные голоморфные координаты (z_1, z_2) так, чтобы кэлерова метрика в начале отсчёта с точностью до второго порядка малости записывалась стандартным образом.

Вычислим сначала действие $d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_2$ клиффордовым умножением на $S^+(\widetilde{P})$. Поскольку $d\overline{z}_1$ и $d\overline{z}_2$ ортогональны, их внешнее произведение совпадает с их произведением $d\overline{z}_1 \cdot d\overline{z}_2$ в алгебре Клиффорда. Аналогично, элемент клиффордовой алгебры, соответствующий форме $dz_1 \wedge dz_2$, равен клиффордову произведению $dz_1 \cdot dz_2$. Поскольку $\pi^{0,1}(dz_i) = 0$, мы немедленно получаем, что действие $dz_1 \wedge dz_2$ на расслоении положителных спиноров тривиально.

Теперь сосчитаем, как действует на $S^+(\widetilde{P})$ форма $d\bar z_1 \wedge d\bar z_2$. Поскольку $\sqrt{2}\,\pi^{0,1}(d\bar z_j) = \sqrt{2}\,d\bar z_j$ и композиция свёртки с $d\bar z_1$ с умножением на $d\bar z_2$ тривиальна на $\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)$, клиффордово действие $d\bar z_1 \wedge d\bar z_2$ на $S^+(\widetilde{P})$ задаётся внешним умножением на $d\bar z_1 \wedge d\bar z_2$.

Подобным же образом усматривается, что и вообще, клиффордово умножение на произвольную $(0,2)$-форму μ действует и на $\Omega^0(X;\mathcal{L}_0)$ и на $\Omega^{0,2}(X;\mathcal{L}_0)$ как внешнее умножение на 2μ. Прямое вычисление показывает также, что свёртка μ с $(0,2)$-формой λ есть $*\left(\mu \wedge \overline{\lambda}\right)$ (здесь имеется в виду эрмитово продолжение $*$ по правилу $*f\,d\,\mathrm{Vol} = \overline{f}$).

Рассмотрим теперь действие кэлеровой формы ω. В заданных выше локальных координатах

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2\ .$$

Соответствующий элемент алгебры Клиффорда в силу ортогональности dx_i и dy_i равен

$$dx_1\,dy_1 + dx_2\,dy_2$$

(отметьте, что он не равен $\frac{i}{2}\,(dz_1\,d\bar z_1 + dz_2\,d\bar z_2)$; причина в том, что dz_1 и $d\bar z_1$ не ортогональны). Действие ω на $\Omega^0(X,\mathcal{L}_0)$ заключается в умножении на $\frac{1}{\sqrt{2}}\,(d\bar z_1 + d\bar z_2)$ с последующей свёрткой с $-\frac{1}{\sqrt{2}}\,(d\bar z_1 + d\bar z_2)$. Прямой подсчёт показывает, что это сводится к умножению на $-2i$. Действие ω на $\Omega^{0,2}(X,\mathcal{L}_0)$ заключается, наоборот, сначала в свёртке, а затем в умножении. Поскольку свёртка антилинейна по первой переменной, эта композиция будет умножением на $2i$.

Из проделанных вычислений вытекает, что если

$$F_A^+ = if\omega + \mu - \overline{\mu}\ ,$$

где f — вещественнозначная функция, а μ — комплекснозначная 2-форма на X, то эндоморфизм клиффордова умножения на F_A^+ задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} 2f & *2\left(\mu \wedge \overline{(\,?\,)}\right) \\ 2\,(\mu \wedge (\,?\,)) & -2f \end{pmatrix}$$

С другой стороны, матричное представление для $\psi \otimes \overline{\psi}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\overline{\beta} \\ \overline{\alpha}\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}\ ,$$

и, конечно, $|\psi|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Значит, $q(\psi)$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,(|\alpha|^2 - |\beta|^2) & \alpha\overline{\beta} \\ \overline{\alpha}\beta & \frac{1}{2}\,(|\beta|^2 - |\alpha|^2) \end{pmatrix}\ ,$$

Таким образом, уравнение на кривизну эквивалентно системе следующих двух уравнений:

$$\left(F_A^+\right)^{1,1} = \frac{i}{4}\left(|\alpha|^2 - |\beta|^2\right)\omega \qquad (7\text{-}1)$$

$$\left(F_A^+\right)^{0,2} = \frac{1}{2}\,\overline{\alpha}\beta \qquad (7\text{-}2)$$

7.2. Голоморфное описание пространства модулей

Теперь мы решим полученные в предыдущем параграфе уравнения в терминах голоморфной геометрии. Зафиксируем связную кэлерову поверхность X и $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P} \to X$ с детерминантным расслоением $\mathcal{L}$, так что ассоциированный квадратный корень из $K_X \otimes \mathcal{L}$ равен $\mathcal{L}_0$. Определим *степень* $\mathcal{L}$ как

$$\deg(\mathcal{L}) = \int_X c_1(\mathcal{L}) \wedge \omega \ .$$

Лемма 7.2.1. *Пусть (A, ψ) является решением уравнений Зайберга - Виттена. Как и в предыдущем параграфе, запишем $\psi = (\alpha, \beta)$ с $\alpha \in \Omega^0(X; \mathcal{L}_0)$, $\beta \in \Omega^{0,2}(X; \mathcal{L}_0)$. Тогда если $\deg \mathcal{L} \leqslant 0$, то $\beta = 0$, а если $\deg \mathcal{L} \geqslant 0$, то $\alpha = 0$. Более того, A задаёт голоморфную структуру на $\mathcal{L}$, и по отношению к индуцированной голоморфной структуре на $\mathcal{L}_0$ α будет голоморфным сечением $\mathcal{L}_0$, а $\overline{\beta}$ — голоморфным сечением $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\alpha\overline{\beta} = 0$. Применяя $\frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\partial}_{A_0}$ к уравнению гармонического спинора

$$\sqrt{2}\left(\overline{\partial}_{A_0}(\alpha) + \overline{\partial}^*_{A_0}(\beta)\right) = 0 \ , \tag{7-3}$$

получаем

$$\overline{\partial}_{A_0}\overline{\partial}_{A_0}(\alpha) + \overline{\partial}_{A_0}\overline{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0 \ , \tag{7-4}$$

где, конечно, $\overline{\partial}_{A_0}\overline{\partial}_{A_0}(\alpha) = F^{0,2}_{A_0} \cdot \alpha$. Поскольку связность A_0 на $\sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}}$ равна квадратному корню из тензорного произведения голоморфной связности на K_X и связности A на $\mathcal{L}$, из уравнения (7-2) ясно, что

$$F^{0,2}_{A_0} = \frac{1}{2} F^{0,2}_A = \frac{1}{4}\overline{\alpha}\beta \ .$$

Подставляя это в (7-4), получаем

$$\frac{1}{4}|\alpha|^2\beta + \overline{\partial}_{A_0}\overline{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0 \ .$$

Беря скалярное L^2-произведение с β, приходим к равенству

$$\int_X \frac{1}{2}|\alpha|^2|\beta|^2 \, d\mathrm{Vol} + \left|\left|\overline{\partial}^*_{A_0}(\beta)\right|\right|^2_{L_2} = 0 \ ,$$

которое из-за неотрицательности обоих слагаемых возможно только если оба они обращаются в нуль. Поскольку $|\overline{\alpha}\beta|^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$, мы заключаем, что $\overline{\alpha}\beta = 0$.

Это означает, что $F^{0,2}_A = 0$, и следовательно, A является голоморфной связностью. Но тогда и A_0 является голоморфной связностью. Кроме того, мы видим, что $\overline{\partial}^*_{A_0}(\beta) = 0$, а значит, β — антиголоморфное сечение, или, что то же самое, $\overline{\beta}$ есть голоморфная 2-форма со значениями в $\overline{\mathcal{L}_0} = \mathcal{L}_0^{-1}$. Из уравнения (7-3) теперь следует, что α будет голоморфным сечением $\mathcal{L}_0$.

Поскольку X связно, зануления α или β над открытым подмножеством означает тождественное зануление на всём X. Тем самым, одна из форм α, β тождественно обращается в нуль, ибо их произведение есть тождественный нуль. Нам остаётся лишь показать, что то, какая именно из этих двух форм занулится, определяется знаком детерминанта $\mathcal{L}$. Из уравнения (7-1) мы видим, что

$$\deg\mathcal{L} = \int\limits_X c_1(\mathcal{L})\wedge\omega = \frac{1}{8\pi}\int\limits_X \left(|\beta|^2 - |\alpha|^2\right) d\,\mathrm{Vol}\ .$$

Так как по крайней мере одна из форм α, β тождественно обращается в нуль, $\deg\mathcal{L}$ будет неотрицательна при $\alpha = 0$ и неположительна — при $\beta = 0$. □

Следствие 7.2.2. *Если $\deg\mathcal{L} \leqslant 0$, то всякое решение уравнений Зайберга - Виттена состоит из голоморфной эрмитовой связности A на расслоении $\mathcal{L}$ и голоморфного сечения α расслоения $\mathcal{L}_0$, таких что*

$$\left(F_A^+\right)^{1,1} = \frac{i}{4}\,|\alpha|^2\omega\ .$$

Две пары (A,α) и (A',α') тогда и только тогда определяют одну и ту же точку пространства модулей, когда существует голоморфный эрмитов изоморфизм между структурами $\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{L}_{A'}$, такой что индуцированный им голоморфный изоморфизм на $\mathcal{L}_0$ переводит α в α'.

Доказательство. Мы уже видели, что перечисленные в следствии условия на (A,α) эквивалентны тому, что эта пара доставляет решение уравнений Зайберга - Виттена, а также что всякое решение получается таким способом, если только $\deg\mathcal{L} \leqslant 0$. Утверждение о единственности очевидно. □

Подобный результат имеется и для случая $\deg\mathcal{L} \geqslant 0$. Убедиться в этом можно двумя способами — либо прямым повтором аналогичных рассуждений, либо при помощи обращающей $\mathcal{L}$ инволюции на множестве $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур, которая была описана в п. 6.8. Мы остановимся на втором. Коль скоро инволюция обращает $\mathcal{L}$, она заменяет $\mathcal{L}_0$ на $K_X\otimes\mathcal{L}_0^{-1}$. Отождествим $S_{\mathbb{C}}^+(\mathbb{R}^4)$ с $\mathbb{H}$. Подпространства $\mathbb{C}$ и $j\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ будут $\mathrm{U}(2)$-инвариантны, и им соответствуют $\Lambda^0(X;\mathcal{L}_0)$ и $\Lambda^{0,2}(X;\mathcal{L}_0)$ в $S_{\mathbb{C}}^+(\widetilde{P})$. Таким образом, правое умножение на j в $S_{\mathbb{C}}^+(\mathbb{R}^4)$ индуцирует изоморфизм расслоения $S_{\mathbb{C}}^+(\widetilde{P})$ с $S_{\mathbb{C}}^+(-\widetilde{P})$, при котором (α,β) переходит в $\left(-\overline{\beta},\overline{\alpha}\right)$. Из этого и из следствия 7.2.2 вытекает

Следствие 7.2.3. *Если $\deg\mathcal{L} \geqslant 0$, то всякое решение уравнений Зайберга - Виттена состоит из голоморфной эрмитовой связности A на расслоении $\mathcal{L}$ и голоморфного сечения $\overline{\beta}$ расслоения $K_X\otimes\mathcal{L}_0^{-1}$, таких что*

$$\left(F_A^+\right)^{1,1} = -\frac{i}{4}\,|\beta|^2\omega\ .$$

Две пары (A,β) и (A',β') тогда и только тогда определяют одну и ту же точку пространства модулей, когда существует голоморфный эрмитов изоморфизм между структурами $\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{L}_{A'}$, такой что индуцированный им голоморфный изоморфизм на $K_X\otimes\mathcal{L}_0^{-1}$ переводит $\overline{\beta}$ в $\overline{\beta}'$.

Нам осталось разобраться со вторым из уравнений на кривизну и показать, что при $\deg\mathcal{L} < 0$ всякая голоморфная структура на $\mathcal{L}$ и любое ненулевое голоморфное сечение α расслоения $\mathcal{L}_0$ определяют точку на пространстве модулей.

Лемма 7.2.4. *Допустим, что $\deg\mathcal{L} < 0$, и допустим, что A является голоморфной эрмитовой связностью на $\mathcal{L}$, а α — ненулевым голоморфным сечением $\mathcal{L}_0$ (относительно голоморфной структуры, заданной при помощи A_0). Тогда на $\mathcal{L}$ существует (возможно, другая) эрмитова* *структура h', такая что соответствующая ей эрмитова связность A' будет задавать на $\mathcal{L}$ ту же самую голморфную структуру, что и A, но при этом удовлетворять соотношению*

$$F^{1,1}_{A'} = -\frac{i}{4}\,|\alpha|^2_{h'}\omega\ ,$$

в котором под $|\alpha|^2_{h'}$ понимается норма по отношению к эрмитовой структуре на $\mathcal{L}_0$, индуцированной с h'.

Доказательство. Обозначим исходное эрмитово скалярное произведение на $\mathcal{L}$ через h. Новая эрмитова структура h' представляется в виде $h' = e^{\lambda}h$, где λ – некая гладкая вещественнозначная функция. Ясно, что $|\alpha|^2_{h'} = e^{\lambda}|\alpha|^2$, а кривизна эрмитовой по отношению к h' связности A' равна

$$F_{A'} = F_A + \overline{\partial}\partial(\lambda)\ .$$

Таким образом, для отыскания λ мы должны решить уравнение

$$F_A^{+} + \left(\overline{\partial}\partial(\lambda)\right)^{+} = \frac{i}{4}e^{\lambda}|\alpha|^2\omega\ ,$$

которое эквивалентно

$$F_A\wedge\omega + \overline{\partial}\partial(\lambda)\wedge\omega = \frac{i}{4}e^{\lambda}|\alpha|^2\omega\wedge\omega\ . \tag{7-5}$$

В силу кэлеровости метрики мы имеем

$$\partial\partial(\lambda)\wedge\omega = \frac{2}{i}\left(-\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_1\overline{\partial}z_1} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_2\overline{\partial}z_2}\right)d\,\mathrm{Vol} = \frac{2}{i}\Delta(\lambda)\,d\,\mathrm{Vol}\ ,$$

а из-за отрицательности $\deg\mathcal{L}$ мы имеем ещё и

$$\int\limits_X (iF_A\wedge\omega) < 0\ .$$

Итак, уравнение (7-5) можно переписать в виде

$$\Delta(\lambda) + \frac{|\alpha|^2}{4}e^{\lambda} + C = 0\ ,$$

где C – гладкая функция, определяемая равенством

$$C\,d\,\mathrm{Vol} = \frac{i}{2}F_A\wedge\omega\ .$$

Условие $\deg\mathcal{L} < 0$ означает, что $\int\limits_X C\,d\mathrm{Vol} < 0$. В соответствии с [5], такая задача имеет и притом единственное решение $X \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$. □

Поскольку любые две эрмитовы структуры на $\mathcal{L}$ переводятся друг в друга подходящим $\mathbb{C}$-линеным автоморфизмом расслоения $\mathcal{L}$, мы приходим к следующему окончательному описанию пространства модулей.

Следствие 7.2.5. *Пусть на кэлеровой поверхности X задана $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P}$ с детерминантным расслоением $\mathcal{L}$ отрицательной степени. Зафиксируем пару $(\overline{\partial}_{\mathcal{L}}, \alpha_0)$, в которой $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ – голоморфная структура на $\mathcal{L}$, а α_0 – ненулевое голоморфное сечение расслоения $\mathcal{L}_0 = \sqrt{K_X\otimes\mathcal{L}}$. Тогда уравнения Зайберга - Виттена обладают решением (A,α), как в следствии 7.2.2, со следующими свойствами:*

1) *A определяет на $\mathcal{L}$ голоморфную структуру, которая изоморфна структуре $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$;*

2) *голоморфный изоморфизм между структурами A и $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ можно выбрать так, чтобы он переводил α в α_0.*

Это решение (A,α) единственно с точностью до калибровочной эквивалентности. Тем самым, каждая пара $(\overline{\partial}_{\mathcal{L}},\alpha_0)$ задаёт точку на пространстве модулей. Более того, все точки пространства $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ получаются таким образом, и две различных пары $(\overline{\partial}_{\mathcal{L}},\alpha_0)$ и $(\overline{\partial}'_{\mathcal{L}},\alpha'_0)$ тогда и только тогда изображаются одной и той же точкой на $\mathcal{M}(\widetilde{P})$, когда между голоморфными структурами ∂ и ∂' существует такой изоморфизм, что индуцированный им голоморфный изоморфизм на $\mathcal{L}_0$ переводит α_0 и α'_0 в скалярные кратные друг друга.

Доказательство. Обозначим исходное эрмитово скалярное произведение на $\mathcal{L}$ через h, и пусть пара $(\overline{\partial}_{\mathcal{L}},\alpha_0)$ удовлетворяет перечисленным в формулировке следствия условиям. Согласно лемме 7.2.4, на $\mathcal{L}$ существует эрмитова метрика h', такя что соответствующая ей эрмитова связность A' задаёт на $\mathcal{L}$ ту же голоморфную структуру, что и $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$, и удовлетворяет соотношению

$$F^+_{A'} = -\frac{i}{4}\left(|\alpha_0|^2_{h'}\right)\omega\,.$$

Рассмотрим такой бесконечно гладкий комплексно линейный изоморфизм

$$\varrho\colon\ \mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}\,,$$

чтобы $\varrho^*(h') = h$, и положим $A = \varrho^*(A')$. Тогда A будет эрмитовой связностью для h и задаст на $\mathcal{L}$ голоморфную структуру, изоморфную $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$, а $\alpha = \varrho^{-1}(\alpha_0)$ будет голоморфным сечением $\mathcal{L}_0$, таким что

$$F^+_A = -\frac{i}{4}\,|\alpha|^2\omega\,.$$

Это доказывает первое утверждение.

Покажем теперь, что получающееся в результате решение (A,α) единственно по модулю калибровки. Это вытекает из единственности функции λ, задающей коэффициент пропорциональности между метриками. Такая единственность означает, что изоморфизм ϱ из предыдущего абзаца единственен по модулю S^1-калибровки, что сразу даёт единственность (A,α) с точностью до действия калибровочной группы.

Отметим, что при замене α на $\lambda_0\alpha$, где $\lambda_0\neq 0$ – комплексная константа, соответствующее решение уравнений Зайберга - Виттена заменится на калибровочно эквивалентное решение.

То, что описанная нами процедура исчерпывает все решения уравнений Зайберга - Виттена, было доказано в лемме 7.2.1.

Последнее, что нам осталось, — это выяснить, когда две разных пары $(\overline{\partial}_{\mathcal{L}},\alpha_0)$ и $(\overline{\partial}'_{\mathcal{L}},\alpha'_0)$ из условия следствия приводят к калибровочно эквивалентным решениям. Если решения эквивалентны, то голоморфные структуры $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ и $\overline{\partial}'_{\mathcal{L}}$ изоморфны, так что мы можем считать, что $\overline{\partial}_{\mathcal{L}} = \overline{\partial}'_{\mathcal{L}}$. Ясно также, что если решения эквивалентны, то должен существовать $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$-голоморфный изоморфизм, переводящий α_0 в α'_0. Но голоморфные изоморфизмы голоморфного 1-расслоения исчерпываются умножениями на ненулевые скаляры. Доказательство закончено. ☐

Вполне аналогичный результат имеет место и в случае $\deg\mathcal{L} > 0$.

Следствие 7.2.6. *Пусть на кэлеровой поверхности X задана $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P}$ с детерминантным расслоением $\mathcal{L}$ положительной степени. Зафиксируем пару $(\overline{\partial}_{\mathcal{L}},\beta_0)$, в которой $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ – голоморфная структура на $\mathcal{L}$, а $\overline{\beta}_0$ – ненулевое голоморфное сечение расслоения*

$K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1} = \sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}^{-1}}$. Тогда уравнения Зайберга - Виттена обладают решением (A, β), как в следствии 7.2.3, со следующими свойствами:

1) *A определяет на $\mathcal{L}$ голоморфную структуру, которая изоморфна структуре $\bar\partial_{\mathcal{L}}$;*

2) *между структурами A и $\bar\partial_{\mathcal{L}}$ имеется голоморфный изоморфизм, переводящий β в β_0.*

Это решение (A, β) единственно с точностью до калибровочной эквивалентности. Тем самым, каждая пара $(\bar\partial_{\mathcal{L}}, \beta_0)$ задаёт точку на пространстве модулей. Более того, все точки пространства $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ получаются таким образом, и две различных пары $(\bar\partial_{\mathcal{L}}, \beta_0)$ и $(\bar\partial'_{\mathcal{L}}, \beta'_0)$ тогда и только тогда изображаются одной и той же точкой на $\mathcal{M}(\widetilde{P})$, когда между голоморфными структурами ∂ и ∂' существует такой изоморфизм, что индуцированный им голоморфный изоморфизм на $\mathcal{L}_0$ переводит β_0 и β'_0 в скалярные кратные друг друга. ☐

Разберём, наконец, случай $\deg \mathcal{L} = 0$. Так как в этом случае выполняются оба неравенства $\deg \mathcal{L} \leqslant 0$ и $\deg \mathcal{L} \geqslant 0$, спинорное поле (α, β) будет тождественно нулевым, и мы приходим к следующему результату.

Следствие 7.2.7. *Пусть на кэлеровой поверхности X задана $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P}$ с детерминантным расслоением $\mathcal{L}$ нулевой степени. Тогда всякое решение уравнений Зайберга - Виттена состоит из антиавтодуальной связности A на $\mathcal{L}$ и тождественно нулевого спинорного поля. Таким образом, в этом случае пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ отождествляется с пространством классов калибровочно эквивалентных ASD-связностей на $\mathcal{L}$.* ☐

7.3. Подсчёт инвариантов на кэлеровой поверхности

Вначале условимся о том, как ориентировать $H^2_+(X, \mathbb{R})$ и $H^1(X, \mathbb{R})$ в случае, когда X – кэлерова поверхность (напомню, что этот выбор ориентации определяет знак инварианта Зайберга - Виттена). Проекция $H^1(X, \mathbb{R})$ на $H^{0,1}(X, \mathbb{C})$ является вещественным изоморфизмом, и ориентацию на $H^1(X, \mathbb{R})$ мы выберем так, чтобы при этом изоморфизме она переходила в стандартную ориентацию на $H^{0,1}(X, \mathbb{C})$, индуцированную комплексной структурой на этом пространстве. Что касается $H^2_+(X, \mathbb{R})$, то оно распадается в ортогональную прямую сумму вещественных кратных кэлерова класса и пересечения $H^2(X, \mathbb{R})$ с $H^{2,0}(X, \mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X, \mathbb{C})$. В качестве положительного базисного вектора в $\mathbb{R}\omega$ мы выберем ω, а ортогональное дополнение ориентируем так, чтобы проекция на $H^{0,2}(X, \mathbb{C})$ была сохраняющим ориентацию изоморфизмом (ориентация на $H^{0,2}(X, \mathbb{C})$, как и выше, канонически индуцирована его комплексной структурой). Начиная с этого места все вычисления, связанные с инвариантами Зайберга - Виттена на кэлеровой поверхности, неуклонно предполагают использование именно таких ориентаций.

Предложение 7.3.1. *Пусть X – это кэлерова поверхность с фиксированной кэлеровой метрикой. Тогда:*

1) *если $\deg K_X < 0$, то все решения уравнений Зайбега - Виттена приводимы;*

2) *если $\deg K_X > 0$, то $SW(\widetilde{P}_X) = 1$, где $\widetilde{P}_X$ — каноническая $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура с детерминантом K_X^{-1}, индуцированная комплексной структурой на X, и инвариант вычисляется по отношению к фиксированной на X кэлеровой метрике.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда степень K_X относительно кэлеровой формы отрицательна. Зафиксируем какую-либо $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру $\widetilde{P}$ с детерминантом $\mathcal{L}$. Допустим вначале, что $\deg \mathcal{L} \leqslant 0$. По лемме 7.2.1 в этом случае $\beta = 0$, а α является голоморфным сечением $\mathcal{L}_0$. Но если $\alpha \neq 0$, то тем самым, $\deg \mathcal{L}_0 \geqslant 0$, что невозможно, поскольку $\mathcal{L}_0^2 = K_X \otimes \mathcal{L}$ имеет отрицательную степень. Стало быть, $\alpha = 0$ и решение в этом случае приводимо. Если $\deg \mathcal{L} \geqslant 0$, то по лемме 7.2.1 $\alpha = 0$, а $\overline{\beta}$ будет голоморфным сечением $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1}$, и если $\beta \neq 0$, то степень этого расслоения неотрицательна. Однако $K_X \otimes \mathcal{L}_0^{-1} = \sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}^{-1}}$, и значит, имеет отрицательную степень. Стало быть, и в этом случае $\alpha = \beta = 0$ и решение приводимо. Первое утверждение предложения доказано.

Допустим теперь, что $\deg K_X > 0$, и $\widetilde{P}_X$ — каноническая $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура, индуцированная комплексной структурой на X, с детерминантным расслоением $\mathcal{L} = K_X^{-1}$ (так что $\deg \mathcal{L} < 0$). Комплексное 1-расслоение $\mathcal{L}_0$ для этой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры будет тривиально как C^∞-расслоение. Если (A, α) является решением уравнений Зайберга - Виттена для $\widetilde{P}_X$, то связность A_0 задаст на $\mathcal{L}_0$ голоморфную структуру, для которой α будет ненулевым голоморфным сечением. В силу топологической тривиальности $\mathcal{L}_0$ это сечение должно нигде не обращающимся в нуль, и значит, постоянно. Следовательно, пространство модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P}_X)$ состоит из одной точки.

Покажем теперь, что эта точка — гладкая. Для этого мы вычислим когомологии эллиптического комплекса

$$0 \longrightarrow \Omega^0(X;\, i\,\mathbb{R}) \xrightarrow{D_1} \begin{array}{c} \Omega^1(X;\, i\,\mathbb{R}) \\ \oplus \\ \Omega^0(X;\mathbb{C}) \oplus \Omega^{0,2}(X;\mathbb{C}) \end{array} \xrightarrow{D_2} \begin{array}{c} \Omega^2_+(X;\, i\,\mathbb{R}) \\ \oplus \\ \Omega^{0,1}(X;\mathbb{C}) \end{array} \longrightarrow 0\,, \tag{7-6}$$

который ассоциирован с решением (A, α) и имеет

$$D_1(if) = \begin{pmatrix} 2i\,df \\ -if \cdot \alpha \end{pmatrix}$$

$$D_2 \begin{pmatrix} i\lambda \\ (a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ d(i\lambda) - \mathrm{Re}\ (a\overline{\alpha})\ \dfrac{i\omega}{2} + \dfrac{1}{2}\left(\alpha\bar{b} - \overline{\alpha}b\right) \\ \sqrt{2}\,\overline{\partial}(a) + \sqrt{2}\,\overline{\partial}^*(b) + \pi^{0,1}(i\lambda) \cdot \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\,.$$

Поскольку α – это ненулевое постоянное сечение, $\ker D_1 = 0$. Обратимся к ядру D_2. Пусть

$$D_2 \begin{pmatrix} i\lambda \\ (a,b) \end{pmatrix} = 0\,.$$

Применяя ∂ ко второй координате образа $D_2 \begin{pmatrix} i\lambda \\ (a,b) \end{pmatrix}$ и пользуясь тем, что $\partial \circ \partial = 0$ и $\partial\alpha = 0$, мы получаем, что

$$\frac{1}{2}\,\partial\left(\pi^{0,1}(i\lambda)\right) \cdot \alpha + \partial\,\partial^*(b) = 0\,.$$

Из обращения в нуль первой координаты у $D_2 \begin{pmatrix} i\lambda \\ (a,b) \end{pmatrix}$ мы получаем ещё одно соотношение

$$\partial\left(\pi^{0,1}(i\lambda)\right) = \partial(i\lambda)^{0,2} = \frac{\overline{\alpha}b}{2}\,,$$

подстановка которого в предыдущее равенство приводит к

$$\frac{|\alpha|^2 b}{4} + \partial\,\partial^* b = 0\ .$$

Беря скалярное L^2-произведение этого с b, получаем

$$\frac{1}{4}\,||\overline{\alpha}b||^2_{L^2} + ||\partial^*(b)||^2_{L^2} = 0\ ,$$

откуда $\overline{\alpha}b = 0$, а с ним и $b = 0$.

Теперь если мы распишем $i\lambda$ в виде $i\lambda = \overline{\xi} - \xi$ с $\overline{\xi} \in \Omega^{0,1}(X, \mathbb{C})$, то условия принадлежности элемента ядру дифференциала D_2 приобретут вид

$$\sqrt{2}\,\partial a + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi}\cdot\alpha = 0 \tag{7-7}$$

$$P_+\left(\partial\overline{\xi} - \overline{\partial}\xi\right) = \mathrm{Re}\,\left(a\overline{\alpha}\right)\,\frac{i\omega}{2}\ . \tag{7-8}$$

Если записать $a = (u + iv)\alpha$, где u и v — вещественнозначные функции, то добавляя $D_1(iv)$ к $(i\lambda, a, b)$, мы можем считать, что на самом деле $a = u\alpha$ с вещественным u, после чего уравнение (7-7) приобретёт вид

$$\sqrt{2}\,\partial u\cdot\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi}\cdot\alpha = 0\ ,$$

который показывает, что $\overline{\xi} = -2\overline{\partial}u$, и позволяет переписать (7-8) как

$$8\Delta(u) + u = 0\ .$$

Поскольку оператор Δ имеет неотрицательный спектр, мы получаем, что $u = 0$, а с ней и $i\lambda = 0$, и $\alpha = 0$. Таким образом, мы доказали, что всякий элемент из $\ker D_2$ лежит в образе D_1, и стало быть, первые когомологии элиптического комплекса тривиальны.

Чтобы найти вторые когомологии, воспользуемся тем, что индекс нашего комплекса равен

$$\frac{K_X^2 - (2\chi(X) + 3\sigma(X))}{4}\ .$$

Так как на кэлеровом многообразии этот индекс должен быть нулевым, и мы уже видели, что $H^0 = H^1 = 0$, мы получаем, что вторые когомологии также нулевые.

Итак, мы доказали, что единственное решение уравнений Зайберга - Виттена представляет собой гладкую точку пространства модулей, и следовательно инвариант Зайберга - Виттена канонической $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}_X$ равен ±1. Наша следующая задача — определить этот знак.

Представим дифференциалы эллиптического комплекса в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= \overline{D}_1 + E_1 \\ D_2 &= \overline{D}_2 + E_2 = \left(P_+ d + \not{\partial}_A\right) + E_2\ , \end{aligned}$$

где E_1 и E_2 суть операторы нулевого порядка, а составляющие комплекс пространства разложим в суммы $\mathcal{H}^i \oplus \left(\mathcal{H}^i\right)^\perp$, где $\mathcal{H}^i$ — это пространство гармонических форм для оператора

$\overline{D}_i$, а $\left(\mathcal{H}^i\right)^{\perp}$ — его L^2-ортогонал. Легко видеть, что операторы E_i сохраняют это разложение. Ориентация на детерминантном расслоении эллиптического комплекса задаётся, по построению, стандартной комплексной ориентацией на пространстве гармонических спиноров и ориентациями на пространствах $\mathcal{H}^i$, индуцированными с зафиксированных выше ориентаций на $H^i(X,\, i\mathbb{R})$. Таким образом, знак детерминантного расслоения над решением равен знаку детерминанта комплекса конечномерных векторных пространств

$$0 \to H^0(X;\, i\mathbb{R}) \xrightarrow{E_1} \begin{array}{c} H^1(X;\, i\mathbb{R}) \\ \oplus \\ H^0(X;\mathbb{C}) \oplus H^{0,2}(X;\mathbb{C}) \end{array} \xrightarrow{E_2} \begin{array}{c} H^2_+(X;\, i\mathbb{R}) \\ \oplus \\ H^{0,1}(X;\mathbb{C}) \end{array} \to 0\,,$$

в котором комплексные когомологии рассматриваются с ориентацией, приходящей из их комплексной структуры, а ориентации на когомологиях с коэффициентами в $i\mathbb{R}$ получается из ориентаций, зафиксированных нами в начале этого параграфа, умножением на i.

При таких соглашениях об ориентациях E_1 индуцирует сохраняющий ориентацию изоморфизм $H^1(X;\, i\mathbb{R}) \to H^1(X;\mathbb{C})$, а E_2 — сохраняющий ориентацию изоморфизм $H^{0,2}(X;\mathbb{C})$ с ортогональным дополнением к кэлерову классу в $H^2_+(X;\, i\mathbb{R})$. Отфакторизовывая по этим изоморфизмам, получаем точную троику

$$0 \to i\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to i\mathbb{R} \to 0\,,$$

в которой первая стрелка является каноническим вложением, а вторая — композицией взятия вещественной части с последующим умножения на $i/2$. Детерминант этого комплекса равен, очевидно, $+1$. Доказательство равенства $SW(\widetilde{P}_X) = +1$ на этом закончено. ☐

7.4. Значения инвариантов на кэлеровых поверхностях

Теорема 7.4.1. *Пусть X — минимальная алгебраическая поверхность общего типа. Тогда при любом выборе кэлеровой метрики на X*

$$SW(\widetilde{P}) = \begin{cases} 1 & \text{если } \widetilde{P} \cong \widetilde{P}_X \\ (-1)^{1+p_g(X)-q(X)} & \text{если } \widetilde{P} \cong -\widetilde{P}_X \\ 0 & \text{в остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Доказательство. Минимальная поверхность общего типа характеризуется тем, что $K_X^2 > 0$ $K_X \cdot D \geqslant 0$ для любого эффективного дивизора $D \subset X$ (последнее свойство называется *численной эффективностью* канонического класса K_X). Пусть ω — это кэлерова форма, отвечающая кэлеровой метрике на X. В силу численной эффективности $K_X \cdot \omega \geqslant 0$, причём если $K_X \cdot \omega = 0$, то по теореме Ходжа об индексе мы бы имели $K_X^2 \leqslant 0$, что невозможно. Поэтому степень K_X относительно кэлерова класса положительна. Таким образом, значение $SW(\widetilde{P}_X)$ вычисляется по предложению 7.3.1, а значение $SW(-\widetilde{P}_X)$ получается из него по следствию 6.8.4.

Покажем теперь, что $SW(\widetilde{P})$ отличен от нуля только для этих двух $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структур.

Пусть виртуальная размерность пространства модулей $\mathcal{M}(\widetilde{P})$ неотрицательна. Это означает, что детерминантное расслоение $\mathcal{L}$ $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ удовлетворяет неравенству

$$c_1(\mathcal{L}) \geqslant K_X^2 > 0\,.$$

В частности, класс $c_1(\mathcal{L})^+$ не является элементом кручения, а значит, приводимых решений нет. Следовательно, $\deg \mathcal{L} < 0$. Мы намерены показать, что если $SW(\widetilde{P}) \neq 0$, то $\widetilde{P} = \widetilde{P}_X$.

При наших предположениях на $\widetilde{P}$ уравнения Зайберга - Виттена для этой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры обязаны иметь хоть одно решение. Это означает наличие голоморфной структуры на $\mathcal{L}$, относительно которой $\mathcal{L}_0 = \sqrt{K_X \otimes \mathcal{L}}$ обладает ненулевым голоморфным сечением. Если $c_1(\mathcal{L}) = L$, то из существования такого сечения и критерия численной эффективности мы получаем, что

$$K_X \cdot \frac{K_X + L}{2} \geqslant 0\,.$$

Поскольку степень K_X положительна, а степень $\mathcal{L}$ отрицательна, можно подобрать такое $t \geqslant 0$, что

$$\omega \cdot (K_X + tL) = 0\,.$$

По теореме Ходжа об индексе имеем

$$0 \geqslant (K_X + tL)^2 = K_X^2 + 2t\,K_X \cdot L + t^2 L^2\,.$$

Максимум квадратичной функции от t в правой части равен

$$K_X^2 - \frac{K_X \cdot L}{L^2}$$

и достигается при $t = {}^{(K_X \cdot L)}\!/_{L^2}$. Неравенства

$$L^2 \geqslant K_X^2 \geqslant -K_X \cdot L \qquad \text{и} \qquad K_X^2 > 0$$

показывают, что этот максимум неотрицателен, а стало быть, равен нулю и достигается при $t = 1$. Таким образом, $(K_X + L) = 0$ и $\omega \cdot (K_X + L) = 0$. По теореме Ходжа об индексе из этих двух неравенств вытекает, что класс $K_X + L = c_1(\mathcal{L}_0)$ является элементом кручения. Поскольку $\mathcal{L}_0$ обладает нетривиальным голоморфным сечением, $\mathcal{L}_0$ оно тривиально как голоморфное расслоение. Тем самым, наша $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура есть не что иное как $\widetilde{P}_X$. □

Следствие 7.4.2. *Функция Зайберга - Виттена на минимальной алгебраической поверхности общего типа не зависит от выбора кэлеровой метрики.*

Отметим, что до сих пор мы могли это утверждать только при $b_2^+ \neq 1$. Важнейшим для дифференциальной топологии кэлеровых поверхностей является

Следствие 7.4.3. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y$ *— сохраняющий ориентацию диффеоморфизм между минимальными кэлеровыми поверхностями общего типа. Тогда* $f^*(K_Y) = \pm K_X$.

Обратимся теперь к случаю, когда X является эллиптической поверхностью.

Теорема 7.4.4. *Пусть* X *— минимальная кэлерова эллиптическая поверхность, канонический класс* K_X *которой не является элементом кручения. Тогда* $SW(\widetilde{P}_X) = 1$, *а* $SW(-\widetilde{P}_X) = (-1)^{1+p_g(X)-q(X)}$

Если $SW(\widetilde{P}) \neq 0$ *для некоей* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структуры* $\widetilde{P}$, *то образ первого класса Чженя* $c_1(\mathcal{L})$ *её детерминантного расслоения в рациональных когомологиях многообразия* X *имеет вид* λK_X, *где* $\lambda \in \mathbb{Q}$ *удовлетворяет неравенствам* $1 \leqslant \lambda \leqslant -1$, *и* $\lambda = \pm 1$ *означает, что* $c_1(\mathcal{L}) = \pm K_X$.

Доказательство. Поверхности, о которой идёт речь в теореме, всегда имеет численно эффективный канонический класс K_X с $K_X^2 = 0$. Коль скоро K_X численно эффективен, выполняется неравенство $K_X \cdot \omega \geqslant 0$. По теореме Ходжа об индексе $K_X \cdot \omega \neq 0$. Таким образом $\deg K_X > 0$ и $SW(\pm\widetilde{P}_X)$ вычисляются согласно 7.1.3 и 6.8.4.

Допустим теперь, что некая $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура $\widetilde{P}$ имеет ненулевой инвариант Зайберга - Виттена. Воспользуемся тем, что в этом случае уравнения Зайберга - Виттена имеют решение, и виртуальная размерность пространства модулей неотрицательна. Используя инволюцию, мы можем считать, что $\deg \mathcal{L} \leqslant 0$. Более того, неотрицательность размерности означает, что $\mathcal{L}^2 \geqslant K_X^2 = 0$, и если $\deg \mathcal{L} = 0$, то $c_1(\mathcal{L})^2 = 0$ и $c_1(\mathcal{L})$ будет элементом кручения, вопреки предположению теоремы.

Итак, всюду далее мы считаем, что степень $\mathcal{L}$ отрицательна, а значит, $\mathcal{L}_0$ обладает нетривиальным голоморфным сечением α. Как и выше, отсюда и численной эффективности K_X следует, что

$$K_X \cdot (K_X + L) = K_X \cdot L \geqslant 0\ .$$

Для некоторого $t_0 > 0$ класс $K_X + t_0 L$ будет иметь нулевую степень, так что по теореме Ходжа об индексе получим

$$2\,t_0 K_X \cdot L \;+\; t_0^2 L^2 \;\leqslant\; 0\ ,$$

где равенство равносильно тому, что класс $K_X + t_0 L$ является элементом кручения. Поскольку $K_X \cdot L \geqslant 0$, имеем $L^2 \leqslant 0$. Если $L^2 < 0$, то квадратичная функция от t_0 в левой части предыдущего неравенства при

$$t_0 = -\frac{(K_X \cdot L)^2}{L^2}$$

принимает положительное значение $-{(K_X \cdot L)^2}/{L^2}$, что невозможно. Следовательно, $L^2 = 0$, $K_X \cdot L = 0$, а класс $k_X + t_0 L$ является элементом кручения. Так как оба класса K_X и L целочисленны и K_X нетривиален по модулю кручения, число t_0 будет рациональным.

Множитель t_0 не может быть меньше -1, поскольку в проотивном случае степень $\mathcal{L}_0$ будет отрицательной, что невозможно, так как у $\mathcal{L}_0$ есть нетривиальное голоморфное сечение. По этой же причине при $t_0 = -1$ расслоение $\mathcal{L}_0$ будет голоморфно тривиальным, а стало быть, $\widetilde{P} = \widetilde{P}_X$. Случай $\mathcal{L} > 0$, как мы уже говорили, симметричен. ☐

Следствие 7.4.5. *Пусть* $X \xrightarrow{f} Y$ *— сохраняющий ориентацию диффеоморфизм между минимальными кэлеровыми поверхностями, каждая из которых является либо поверхностью общего типа, либо эллиптической поверхностью, у которой* K_X *не является элементом кручения. Тогда* $f^*(K_Y) = \pm K_X$.

Замечание. Аналагичные результаты можно доказывать и в случаях, когда K_X является элементом кручения, к примеру, для $K3$-поверхностей, но потребуется более тщательное исследование приводимых решений, — все необходимые дополнительные соображения описаны в [3].

В заключение мы рассмотрим раздутия поверхностей, охватываемых двумя только что доказанными теоремами.

Теорема 7.4.6. *Пусть минимальная модель* ${}^{\mathrm{M}}X$ *кэлеровой поверхности* X *либо имеет общий тип, либо эллиптична и* $K_{{}^{\mathrm{M}}X}$ *не является элементом кручения. Предположим, что нетривиальными слоями проекции* $X \xrightarrow{\pi} {}^{\mathrm{M}}X$ *являются исключительные кривые* $E_1, E_2, \ldots, E_k$ *и кэлеров класс имеет вид*

$$\omega = {}^{\mathrm{M}}\omega + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i\,[E_i]^*$$

где $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ *– достаточно малые положительные числа,* ${}^{\text{м}}\omega$ *– кэлеров класс на* ${}^{\text{м}}X$*, а через* $[E_i]^*$ *обозначены когомологические классы, двойственные по Пуанкаре к исключительным дивизорам* E_i*. Тогда всякая* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структура* $\widetilde{P} \longrightarrow X$ *с ненулевым инвариантом Зайберга - Виттена является тензорным произведением обратного образа* $\pi^*({}^{\text{м}}\widetilde{P})$ *некоторой* $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$*-структуры* ${}^{\text{м}}\widetilde{P} \longrightarrow {}^{\text{м}}X$ *с ненулевым инвариантом Зайберга - Виттена и* $\mathrm{U}(1)$*-расслоения с первым классом Чженя вида* $\pm E_1 \pm \cdots \pm E_k$*. При этом*

$$SW_X(\widetilde{P}) = \pm SW_{{}^{\text{м}}X}({}^{\text{м}}\widetilde{P}) \ .$$

Доказательство. Обозначим через $X \xrightarrow{\pi} {}^{\text{м}}X$ проекцию на минимальную модель, и допустим, что расслоение $\mathcal{L}_0$ имеет нетривиальное голоморфное сечение α. Тогда ${}^{\text{м}}\alpha = \pi_*(\alpha)$ будет нетривиальным голоморфным сечением прямого образа ${}^{\text{м}}\mathcal{L}_0 = \pi_*(\mathcal{L}_0)$. Тем самым, прямой образ относительно π любой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ на X, для которой уравнения Зайберга - Виттена имеют решение, а степень детерминантного расслоения $\mathcal{L}$ отрицательна, даст $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру ${}^{\text{м}}\widetilde{P}$ на ${}^{\text{м}}X$ с теми же свойствами. Поскольку первый класс Чженя

$$c_1(\mathcal{L}) = \pi^*\Big(c_1({}^{\text{м}}\mathcal{L}_0)\Big) + \sum_{i=1}^{k} n_i[E_i]^*$$

с целыми нечётными n_i , мы имеем

$$c_1(\mathcal{L})^2 - K_X^2 \leqslant c_1({}^{\text{м}}\mathcal{L})^2 - K_{{}^{\text{м}}X}^2 \ .$$

Но если уравнения Зайберга - Виттена имеют решения для $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры ${}^{\text{м}}\widetilde{P}$ на ${}^{\text{м}}X$, то, как мы видели, $c_1({}^{\text{м}}\mathcal{L})^2 \leqslant K_{{}^{\text{м}}X}^2$, и на X это неравенство тем более будет выполнено. Следовательно, детерминант $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $\widetilde{P}$ на X, для которой виртуальная размерность неотрицательна, имеет вид

$$c_1(\mathcal{L}) = \pi^*\Big(c_1({}^{\text{м}}\mathcal{L}_0)\Big) + \sum_{i=1}^{k} \pm[E_i]^*$$

Дальнейшее сопоставление решений и значений инвариантов Зайберга - Виттена оставляется читателю (детали см. в [3]). ☐

7.5. Заключительные замечания

В этой главе мы сосредоточили внимание на решении уравнений Зайберга - Виттена на кэлеровых поверхностях. Аналогичные результаты для симплектических многообразий были доказаны (чуть попроще) в недавней серии работ Таубса (см. [12, 13, 14]). Он показал, в частности, что значение инварианта Зайберга - Виттена симплектического многообразия с $b_2^+ > 1$ на антиканоническом классе симплектической структуры всегда равно 1, что обобщает наш предыдущий результат о кэлеровых поверхностях. Результаты Таубса простираются вплоть до доказательства аналога теоремы 7.4.4 и того, что инвариант Зайберга - Виттена совпадает с инвариантом Громова, равным числу псевдо-голоморфных кривых из данного класса, проходящих через заданный набор точек. Ясно, что все эти результаты представляют собой первые шаги в реализации обширной программы отыскания адекватного симплектического аналога стандартным конструкциям кэлеровой геометрии. Время покажет, насколько глубокой окажется эта аналогия, но огромные переспективность подобных исследований несомненна уже и сейчас.

Список литературы

[1] *S. Donaldson, P. Kroheimer. The geometry of Four-Manifolds.* Claredon, Oxford, 1990.

[2] *R. Friedman, J. Morgan. Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grendsgebiete 3. Folge, Band 27, Springer-Verlag, New-York, 1994.

[3] *R. Friedman, J. Morgan. Algebraic Surfaces and Seiberg - Witten Invariants.* (готовится к печати).

[4] *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. Принципы алгебраической Геометрии, т. 1, 2.* М., «Мир», 1982.

[5] *J. Kazdan, P. Warner. Curvature functions for compact 2-manifolds.* Ann. of Math. **99** (1974), 14–47.

[6] *P. Kroheimer, T. Mrovka. Gauge theory for embedded surfaces, I and II.* (готовится к печати).

[7] *B. Lawson, M-L. Michelson.* Spin-*Geometry.* Princeton University Press, Princeton, 1989.

[8] *J. Morgan, Z. Szabó, C. Taubes. A Product Formula for the Seiberg - Witten Invariants and the Generalized Thom Conjecture.* (готовится к печати).

[9] *N. Seiberg, E. Witten. Electromagnetic duality, monopole condensation and confinement in* $N = 2$ *Supersymmetric Yang - Mills theory.* Nucl. Phys. **B426** (1994), 19–52.

[10] *N. Seiberg, E. Witten. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in* $N = 2$ *Supersymmetric QCD.* Nucl. Phys. **B431** (1994), 581–640.

[11] *C. Taubes. Self-dual connections on non-self-dual four-manifolds.* J. Differ. Geom. **17** (1982), 139–170.

[12] *C. Taubes. The Seiberg - Witten Invariant and symplectic forms.* Math. Res. Letters **1** (1994), 809–822.

[13] *C. Taubes. More constrains on symplectic manifolds from Seiberg - Witten equations.* Math. Res. Letters **2** (1995), 9–14.

[14] *C. Taubes. The Seiberg - Witten and Gromov invariants.* Math. Res. Letters **2** (1995), 221–238.

[15] *K. Uhlenbeck. Removable Singularities in Yang - Mills fields.* Commun. Math. Phys. **83** (1982), 11–29.

[16] *R. Wells. Differencial Analysis on Complex Manifolds.* Prentice Hall, Engelwood Cliffs, N.J. 1973, 2nd ed. Springer-Verlag, New-York.

[17] *E. Witten. Monopoles and 4-manifolds.* Math. Res. Letters **1** (1994), 764–796.

С. К. Дональдсон

Уравнения Зайберга - Виттена и топологиия четырёхмерных многообразий

THE SEIBERG-WITTEN EQUATIONS AND
4-MANIFOLD TOPOLOGY

BY

S. K. DONALDSON

Bulletin of American Mathematical Society
(Research Reports)

Volume 33, Number 1, January 1996

§1. Введение

Калибровочная теория проникла в исследования по топологии четырёхмерных многообразий в 1982 году в облике инстантонных уравнений Янга - Миллса. Такое привлечение дифференциальной геометрии и диференциальных уравнений поначалу имело оттенок чего-то неожиданного и вычурного. Однако с годами эти идеи стали более привычными, и калибровочная техника начала широко применяться в работах многих математиков, в результате чего высветились некоторые новые тайны четырёхмерной топологии и возник ряд головоломных загадок в самой калибровочной теории. В последние три месяца 1994 произошло знаменательное событие — Зайберг и Виттен ввели новый тип дфференциальных уравнений, произведших ошеломляющий переворот в исследованиях: в течении нескольких недель были решены проблемы, которые до этого долго оставались неприступными, и были обнаружены новые неожиданные факты, решительно упрощающие старые результаты и открывающие новые горизонты для исследований. В настоящем обзоре будет рассказано о некоторых из этих достижений, возросших на благодатной почве работ Зайберга [S] и Зайберга и Виттена [SW] стараниями разных матемaтематиков, среди которых стоит отметить Кронхеймера, Мровку, Моргана, Стерна и Таубса. Он написан как попытка критического осмысления успехов, достигнутых на этой ранней стадии повышенной активности. Поскольку прошло сравнительно мало времени, трудно дать точные ссылки на ряд новейших материалов, а также ясно очертить некоторые детали. Автор признателен нескольким математикам, особенно Петеру Кронхеймеру, за объяснение новых открытий прямо в ходе их появления.

§2. Уравнения Зайберга - Виттена

Уравнения, введённые Виттеном в статье [W3], которая появилась вслед за работой Зайберга и Виттена [SW], суть уравнения на U(1)-связность и на «спинорное поле» так что для их изучения надо кое-что знать о спинорах, а точнее, о тесно связянных с ними $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурах на четырёхмерных многообразиях. Напомню, что Spin-структурой на четырёхмерном римановом многообразии X называется поднятие структурной группы SO(3) его касательного расслоения до её двойного накрытия Spin(4). Замечательный изоморфизм $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ позволяет выразить это конкретнее, в терминах расслоений: задать Spin-структуру — это то же самое, что задать пару двумерных комплексных векторных SU(2)-расслоений $S^{\pm} \longrightarrow X$, связанных с касательным расслоением посредством структурного изоморфизма $c\colon\ \mathrm{Hom}(S^+, S^-) \xrightarrow{\sim} TX$, основной алгебраической моделью которого является изоморфизм

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \overset{c}{\longmapsto} \begin{pmatrix} x_0 + ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & x_0 - ix_1 \end{pmatrix}$$

Сопоставление $e \wedge f \longmapsto c^*(e)\, c(f) - c^*(f)\, c(e)$ индуцирует изоморфизм

$$\varrho : \quad \Lambda^2_+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(S^+, S^+)$$

пространства автодуальных 2-форм с пространством эрмитовых эндоморфизмов S^+, задающий стандартное отождествление алгебр Ли $\mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{su}(2)$.

Гомоморфизм c представляет собой символ дифференциального оператора Дирака

$$\not{\partial} : \ \Gamma(S^+) \longrightarrow \Gamma(S^-) \ .$$

Одно из самых колоритных вычислений дифференциальной геометрии даёт для оператора Дирака *формулу Лихнеровича - Вейценбока*:

$$\not{\partial}^* \not{\partial}\, \psi = \nabla^* \nabla \psi + \frac{1}{4} R \psi \ , \tag{1}$$

в которой ∇ есть ковариантное дифференцирование спиноров, индуцированное связностью Леви-Чевита, а R — скалярная кривизна, действующая на спиноры как поточечная гомотетия. При наличии отдельного дополнительного расслоения E, на котором заданы эрмитовы метрика и связность, мы можем рассмотреть E-значные спиноры — сечения расслоений $S^\pm \otimes E$. Оператор Дирака на таких скрученных спинорах удовлетворяет соотношению

$$\not{\partial}^* \not{\partial}\, \psi = \nabla^* \nabla \psi + \frac{1}{4} R \psi - F_E^+(\psi) \ ,$$

где $F_E^+ = \dfrac{1}{2}\left(F_E + *F_E\right)$ есть автодуальная составляющая кривизны связности на E, которая действует на спиноры так, как это объяснялось выше.

Глобальной Spin-структуры на многообразии X может и не быть: препятствием к этому служит класс Штифеля - Уитни $w_2(X) \in H^2\left(X; {}^{\mathbb{Z}}\!/\!{}_{2\mathbb{Z}}\right)$. Однако её модификация, – $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура, – существует всегда. Она задаётся парой комплексных эрмитовых 2-расслоений $W^\pm$ с изоморфными детерминантами $\Lambda^2(W^+) = \Lambda^2(W^-) = L$, так чтобы локально $W^\pm = S^\pm \otimes L^{1/2}$, где через $L^{1/2}$ обозначен локальный квадратный корень из 1-расслоения L: $L^{1/2} \otimes L^{1/2} = L$. Старый результат Хирцебруха и Хопфа гарантирует существование $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры на любом ориентированном четырёхмерном многообразии, и с точностью до действия конечной группы $H^1\left(X; {}^{\mathbb{Z}}\!/\!{}_{2\mathbb{Z}}\right)$ все они классифицируются поднятиями $w_2(X)$ в $H^2(X; \mathbb{Z})$, задающими первый класс Чженя $c_1(L)$. Если задать на L связность, то можно рассмотреть оператор Дирака

$$\not{\partial} : \ \Gamma(W^+) \longrightarrow \not{\partial}\Gamma(W^-) \ ,$$

который локально устроен как оператор Дирака на $L^{1/2}$-значных спинорах, и в частности, удовлетворяет формуле Лихнеровича

$$\not{\partial}^* \not{\partial}\, \psi = \nabla^* \nabla \psi + \frac{1}{4} R \psi - \frac{1}{2} F_L^+(\psi) \tag{2}$$

(множитель ${}^1\!/\!{}_2$ возникает из-за присутствия квадратного корня $L^{1/2}$). Подчеркнём, что

$$\mathrm{Hom}\left(W^+, W^-\right) = \mathrm{Hom}\left(S^+, S^-\right) = TX \ .$$

Перейдём теперь к уравнениям Зайберга - Виттена на четырёхмерном многообразии X со $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурой $W^{\pm}$. Это — уравнения на пару (A,ψ), в которой A есть унитарная связность на $L = \Lambda^2 W^{\pm}$, а ψ есть сечение расслоения W^+. Если даны два сечения $\xi,\eta \in \Gamma(W^+)$, то через $\xi\eta^* \in \mathrm{End}(W^+)$ мы обозначаем эндоморфизм $\vartheta \longmapsto \left\langle \vartheta\,,\,\eta \right\rangle \xi$. Бесследная составляющая этого эндоромофизма лежит в $\mathrm{im}\,\varrho$, и её прообраз в $\Lambda^2_+ \otimes \mathbb{C}$ обозначается через $\tau(\xi,\eta)$. Таким образом, $\tau:\ W^+ \times W^+ \longrightarrow \Lambda^2_+ \otimes \mathbb{C}$ является полуторалинейным оператором. Уравнения Зайберга - Виттена имеют вид

$$\begin{cases} \not{D}_A\psi = 0 \\ F_A^+ = -\tau(\psi,\psi) \end{cases}$$

Знак «*минус*» перед квадратичным членом $\tau(\psi,\psi)$ черезвычайно важен, как будет видно из приводимого ниже вычисления, основаного на формуле Лихнеровича (по большому счёту, оно предопределяет облик всей теории).

Пусть (A,ψ) является решением уравнений Зайберга - Виттена на компвктном четырёхмерном многообразии X. Тогда мы имеем:

$$0 = \not{D}_A^*\not{D}_A\psi = \nabla_A^*\nabla_A\psi - \frac{1}{2}F_A^+(\psi) + \frac{1}{4}R\psi\,.$$

Скалярное L^2-произведение с ψ даёт

$$\int\limits_X |\nabla_A\psi|^2 - \frac{1}{2}\left\langle F_A^+(\psi)\,,\,\psi\right\rangle + \frac{1}{4}R\,|\psi|^2\,d\mu = 0\,.$$

Теперь воспользуемся вторым уравнением, из которого

$$\left\langle F_A^+(\psi)\,,\,\psi\right\rangle = -\left\langle \tau(\psi,\psi)\,(\psi)\,,\,\psi\right\rangle\,.$$

Прямое матричное вычисление показывает, что $\tau(\psi,\psi)\,(\psi) = \dfrac{1}{2}|\psi|^2\psi$ (если представить ψ вектор-столбцом $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix}(|a|^2-|b|^2)/2 & a\bar b\\ b\bar a & (|b|^2-|a|^2)/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\left(|a|^2+|b|^2\right)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$). Таким образом $\left\langle F_A^+(\psi)\,,\,\psi\right\rangle = \dfrac{1}{2}|\psi|^4$, и мы имеем

$$\int\limits_X |\nabla_A\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{4}\,d\mu = -\int\limits_X \frac{R\,|\psi|^2}{4}\,d\mu$$

Из этого вычисления сразу видно, что на многообразии с нигде не отрицательной скалярной кривизной R решениями уравнений Зайберга - Виттена будут лишь пары (A,ψ) с $\psi = 0$ и $F_A^+ = 0$, т. е. в точности $\mathrm{U}(1)$-инстантоны (это получается сравнением знаков правой и левой части). Такое использование формулы Лихнеровича, бесспорно, весьма близко к работам Лихнеровича, Хитчина, Громова и Лосана, где оператор Дирака похожим образом обыгрывался в контексте римановой геометрии (ср. с [GL]), однако теперь уравнения содержат новый дополнительный квадратичный член, в котором связность взаймодействует со спинором. И даже безо всяких предположений о кривизне мы можем извлечь из них кое-какую информацию.

Обозначим через $-c \leqslant 0$ минимальное значение скалярной кривизны R на X. Тогда в силу неравенства Коши - Шварца

$$\int\limits_X |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{4}\, |\psi|^4 \, d\mu \leqslant \frac{1}{4}\, c \int\limits_X |\psi|^2 \, d\mu \leqslant \frac{1}{4}\, c \,\mathrm{Vol}(X)^{1/2} \left(\int\limits_X |\psi|^4 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Таким образом, интеграл от $|\psi|^4$ ограничен константой $+c^2\,\mathrm{Vol}(X)$, что после подстановки в уравнения даёт априорную оценку F_A^+ в терминах геометрии подлежащего многообразия X, которую можно сопоставить с формулой Чженя - Вейля для топологического инварианта $c_1(L)^2 \in H^4(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$:

$$c_1(L)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_X F_A \wedge F_A = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_X \left|F_A^+\right|^2 - \left|F_A^+\right|^2 \, d\mu \, .$$

Итак, если решение существует, то $c_1(L)^2$ ограничен сверху.

Похожее вычисление позволяет придать уравнениям Зайберга - Виттена также и вариационную интерпретацию. Для каждой пары (A, ψ) рассмотрим интеграл

$$E(A,\psi) = \int\limits_X |\nabla_A \psi|^2 + \frac{1}{2}\, |F_A|^2 + \frac{1}{8}\, \left(|\psi|^2 + R\right)^2 \, d\mu \, . \tag{3}$$

Входящие в него величины являются типичными объектами рассмотрения в работах по математической физике (см. [JT]). Если воспользоваться формулой Вейценбока и выразить $\nabla_A \psi$ через $D\!\!\!/_A \psi$, то с учётом предыдущей формулы для c_1 мы получим формулу

$$E(A,\psi) = \int\limits_X \left|D\!\!\!/_A \psi\right|^2 + \frac{1}{2}\, \left|F_A^+ \tau(\psi,\psi)\right|^2 \, d\mu + E_0 \, , \tag{4}$$

в которой E_0 зависит только от X и L:

$$E_0 = 2\pi^2 c_1(L)^2 + \int\limits_X \frac{R^2}{8} \, d\mu \, .$$

Итак, мы видим, что решения уравнений Зайберга - Виттена представляют собой абсолютные минимумы функционала E на данном расслоении, в точности также, как янг-миллсовы инстантоны доставляют абсолютные минимумы обычного функционала Янга - Миллса.

§3. Инварианты Зайберга - Виттена

Сначала напомним кое-какие общие факты о «топологических инвариантах», определяемых посредством решения дифференциальных уравнений с частными производными. В дифференциальной геометрии известно множество ситуаций, в которых решения «уравнения» $y = f(x)$ на уровне гомологий остаются неизменными при непрерывной вариации параметров. Например, если f – это отображение $P \xrightarrow{f} Q$ компактных ориентированных многообразий, то клас $f^{-1}(y)$ в $H_*(P)$ для общего $y \in Q$ будет гомотопическим инвариантом f, ибо он двойственен по Пуанкаре обратному образу фундаментального когомологического класса Q. Или, пусть f — это сечение ориентированного векторного расслоения $V \longrightarrow P$, а $y = 0$. Решением в этом случае является множество нулей сечения, и при условии трансверсальности оно локализует класс, двойственный по Пуанкаре к эйлеровому классу расслоения V. Когда у нас есть семейство дифференциальных уравнений в частных производных, зависящее от непрерывных параметров, мы также можем надеяться получить аналогичные инварианты исходя из гомологических классов на пространстве решений. Нужная для этого формальная техника может быть развита в рамках дифференциальной топологии банаховых многообразий. Так или иначе, основные идеи такого подхода теперь хорошо известны, и для построения инвариантов, подобных конечномерным, необходимо проверять следующие ключевые факты:

1) используемые отображения должны быть *фредгольмовыми*; на практике это означает, что линеаризация уравнения вблизи решения должна представляться *эллиптическим* оператором, скажем, над компактным многообразием; индекс линеаризованного уравнения даёт «виртуальную размерность» пространства решений, и необходимо убедиться, что при достаточно общем малом возмущении уравнений фактическая размерность пространства решений будет совпадать с виртуальной;

2) требуется *компактность* пространства решений, либо подходящий ослабленный вариант компактности;

3) как и в конечномерном случае, пространство решений должно быть ориентировано, — иначе получатся лишь инварианты по mod 2; орентацию можно задать в рамках индексной теории семейства операторов.

В калибровочной теории, где УрЧП описывают связности и прочие структуры на расслоении $P \longrightarrow X$, существует ещё один важный момент: на решениях действует группа калибровочных автоморфизмов расслоения, оставляющая уравнения инвариантными, и строится пространство классов решений по модулю этого действия. Трудности здесь возникают из-за наличия *приводимых решений* с нетривиальным стабилизатором. Это привносит ещё одно требование:

4) в общем однопараметрическом семействе уравнений не должны попадаться уравнения с приводимыми решениями.

Инварианты четырёхмерных многообразий, доставляемые пространствами модулей инстантонов вполне вписываются в эту сзему. Действительно, рассматривается уравнение $F_A^+ = 0$ на связность, допустим, на SU(2)-расслоении $E \longrightarrow X$ со вторым классом Чженя $k > 0$. Линеаризация этого уравнения по модулю калибровки представляется эллиптическим оператором

$$d_A^+ + d_A^* : \ \Omega^1(\operatorname{ad} E) \longrightarrow \Omega^0(\operatorname{ad} E) \oplus \Omega^2_+(\operatorname{ad} E)$$

индекса $8k - 3\left(1 - b_1 + b_2^+\right)$, где b_2^+ есть размерность положительного подпространства формы пересечения (т. е. размерность пространства H^2_+ автодуальных гармонических 2-форм). Для общей метрики на X пространство модулей M_k классов калибровочно эквивалентных решений является вне множества приводимых точек гладким многообразием указанной размерности. Если $b_2^+ > 0$, то для общей метрики все решения будут неприводимыми, а если

$b_2^+ > 1$, то это будет иметь место для каждой метрики в общем однопараметрическом семействе. Итак, пусть $b_2^+ > 1$. Пространство модулей можно ориентировать, задав ориентацию на прямой

$$\det H^1(X) \otimes \det H^2_+(X) \tag{5}$$

(где под det понимается старшая внешняя степень). Пространста модулей некомпактны (это обуславливается калибровочной инвариантностью уравнения), однако, допускают вполне прозрачную компактивикацию, что позволяет определить соответствующий фундаментальный класс $[M_k]$ и спаривать его со специальными классами, поднятыми с X посредством гомоморфизмов

$$\mu_i : \ H_i(X) \longrightarrow H^{4-i}(M_k) \ .$$

Допустим теперь, что $b_1(X)-b_2^+(X)$ *нечётно*. Тогда пространства модулей будут чётномерны, и мы полагаем

$$q_{p,r}(\alpha) = \left\langle \mu_2(\alpha)^p \, u^r \ , \ [M_k] \right\rangle \ , \tag{6}$$

где $\alpha \in H_2(X)$, $u = \mu_0(\text{класс точки}) \in H^d(M_k)$, а значения индексов r и p выбираются так, чтобы $2p+4r = 2d$ равнялось размерности пространства модулей. Эти инвариянты представляют собой набор полиномов на группе когомологий $H^2(X;\mathbb{R})$. Важно то, что многочлены, построеные при помощи метрики, оказываются в конце концов дифференциально-топологическими инвариантами, не зависящими от выбора метрики. Дальнейшие подробности, включая ряд технических моментов, опущенных нами здесь ради краткости, читатель найдёт в [DK].

Вооружившись всем сказанным, самое время вернуться к уравнениям Зайберга - Виттена. Они тоже приводят к дифференциально-топологическим инвариантам подлежащего четырёхмерного многообразия, поскольку перечисленные выше ключевые требования будут для них выполнены, прчём проверить это гораздо проще, чем для инстантонов.

При доказательстве фредгольмовости можно не обращать внимания на квадратичный член $\tau(\psi,\psi)$, ибо он всё равно не влияет на символ (т. е. главный член) линеаризованного уравнения, который будет равен сумме оператора Дирака $\not{\partial}_A$ и символа линеаризованного уравнения на $\mathrm{U}(1)$-инстаноны. Последний по модулю калибровки представляется оператором $d^* + d^+$, действущим на обычных формах. Оба оператора эллиптичны, и окончательно индекс нашего уравнения получается[1] равным

$$\begin{aligned} i(L) = \operatorname{ind}\left(d^* + d^+\right) + \operatorname{ind}_{\mathbb{R}}\left(\not{\partial}_A\right) = \left(b_1 - 1 - b_2^+\right) + \frac{1}{2}\ \left(c_1(L)^2 - \tau(X)\right) = \\ = \frac{1}{4}\ \left(\, c_1(L)^2 - \left(2\chi(X) + 3\tau(X)\right)\right)\ , \end{aligned} \tag{7}$$

где через τ и χ обозначены сигнатура и эйлерова характеристика. Число $i(L)$ представляет собой виртуальную размерность пространства модулей. Естественным возмущением системы Зайберга - Ввиттена является замена второго уравнения уравнением

$$F_A^+ = -\tau(\psi,\psi) + \vartheta \ ,$$

в котором ϑ — произвольная автодуальная 2-форма на X. Можно найти сколь угодно малые ϑ, для которых пространство решений возмущённой системы вне множества приводимых точек будет многообразием размерности $i(L)$ (см. [KM3] и [W3]; аргументация здесь гораздо

---

[1] при вычислении $\operatorname{ind} \not{\partial}_A$ используется простейший вариант теоремы Атьи - Зингера об индексе

проще, чем для SU(2)-инстантонов, поскольку кривизна связности на 1-расслоении является обычной 2-формой на X, а не 2-формой со значениями в 2-расслоении).

Следующий момент – компактность. В отличие от инстантонов, пространства модулей Зайберга - Виттена компактны уже сами по себе. Это следует из априорной ограниченности решений, которую можно доказать либо оценив энергию с помощью интегрирования по частям, как в предыдущем параграфе, либо прямо с помощью принципа максимума для уравнений второго порядка ([KM3], [W3]): всякое решение удовлетворяет, как мы видели, соотношению $\nabla_A^* \nabla_A \psi = -\tau(\psi,\psi)\,\psi - R\psi$, из которого следует

$$2\Delta\left(|\psi|^2\right) \leqslant c\,|\psi|^2 - |\psi|^4\,,$$

где $-c$, как и выше, обозначает нижнюю границу скалярной кривизны. В точке, где $|\psi|$ максимальна, мы будем иметь $\Delta\left(|\psi|^2\right) > 0$, откуда $\max|\psi| \leqslant \sqrt{c}$. Подставляя это в уравнения, получаем L^∞-ограниченность F_A^+, из которой средствами эллиптической теории получается L^p-ограниченность полной кривизны F_A при всех p. Компактность из этого легко следует (для сравнения: L^2-норма инстантонов также ограничена, но L^p-норма с $p > 2$, как правило, уже нет).

Остаётся разобраться с приводимыми решениями и ориентацией. Если калибровочное преобразование $g \in \mathrm{Aut}(L)$ оставляет пару (A,ψ) на месте, то поле ψ обязано быть нулевым, а само $g \in \mathrm{U}(1)$ — постоянным скаляром. Стало быть, приводимые решения уравнений Зайберга - Виттена исчерпываются автодуальными U(1)-связностями, а таковых, как мы уже упоминали выше, не встречается в общих r-мерных семействах метрик, если только $b_2^+(X) > r$. Таким образом, при $b_2^+ > 1$ приводимые решения не влияют на построение инвариантов. Теперь об ориентации. Пространство модулей ориентируется путём задания ориентации на «детерминантной прямой» индекного расслоения над пространством $\mathcal{C}^*$ всех неприводимых пар (A,ψ) по модулю калибровки. Как и при вычислении индекса, этот детерминант раскладывается в тензорное произведение детерминанта, связанного с действием оператора Дирака $\not{\partial}_A$, и детерминанта, связанного с действием оператора $d^* + d^+$ на обычных формах. На первом из них есть каноническая ориентация, возникающая из комплексной структуры на спинорном расслоении и $\mathbb{C}$-линейности оператора Дирака. Второй множитель не зависит от связности и ориентируется заданием ориентации на прямой

$$\det\mathrm{ind}\left(d^* + d^+\right) = \det H^1 \otimes \det H^2_+\,.$$

Итак, ориентация на пространстве модулей решений уравнений Зайберга - Виттена задаётся в точности тем же набором данных, что и ориентация на пространстве инстантонов.

Суммируя сказанное, получаем, что при $b_2^+ > 1$ и фиксированной ориентации на прямой (5) класс гомологий $[M_{\mathrm{SW}}]$ пространства модулей решений уравнений Зайберга - Виттена (возможно, подвергнутых малому возмущению) как элемент $H_i\left(\mathcal{C}^*\right)$, где i вычисляется по формуле (7), не зависит от выбора метрики на X. Далее, в $H^2\left(\mathcal{C}^*\right)$ имеется канонический элемент[2] h — первый класс Чженя главного U(1)-расслоения над

$$\mathcal{C}^* = \left\{\,(A,\psi) \mid \psi \neq 0\,\right\}/\mathrm{Aut}(L)\,,$$

---

[2] Отметим, что при $H^1(X) \neq 0$ возникают и другие естественные классы, которые можно пытаться привлечь к делу

индуцированного гомоморфизмом вычисления $\mathrm{Aut}(L) \xrightarrow{\mathrm{ev}_{x_0}} \mathrm{U}(1)$ в фиксированной базисной точке $x_0 \in X$. Предположим теперь, что $b_1 - b_2^+$ *нечётно*. Тогда $i(L)$ будет чётен, скажем, равен $3s$. Получаем инвариант

$$n_L = \left\langle h^s \, , \, [M_{\mathrm{SW}}] \right\rangle . \tag{8}$$

Коль скоро L определяется своим первым классом Чженя, инвариант этот можно воспринимать как инвариант пары: четырёхмерного многообразия X и класса $c_1(L) \in H^2(X;\mathbb{Z})$. При замене L на L^{-1} пространство модулей по-существу не изменяется, — происходит лишь обращение комплексных структур на $W^{\pm}$, что влияет только на знак:

$$n_{L^{-1}} = \pm n_L \, .$$

Инвариант n_L будет отличен от нуля лишь для конечного числа классов $c_1(L)$, поскольку для общей метрики на X существует лишь конечное число 1-расслоений L, для которых пространство модулей непусто. В самом деле, интегральные формулы из предыдущего параграфа дают верхнюю границу для автодуальной компоненты гармонической формы, представляющей класс $c_1(L)$, а неотрицательность индекса $i(L)$ доставляет нижнюю границу для $c_1(L)^2$, а значит, и для антиавтодуальной компоненты гармонической проекции.

В случае, когда $b_2^+ = 1$, картина сильно усложняется. Как и в инстантонной теории, инвариант теперь будет зависеть от выбора той «камеры» в пространстве когомологий X, в которую попадает автодуальная гармоническая форма, ассоциированная с метрикой. При проходе сквозь стенку между камерами появляется приводимое решения, что приводит к изменению значения инварианта от камеры к камере. Однако, не смотря на такие сложности, полезную информацию удаётся извлекать и в этом случае (см. п. Д6 ниже).

§4. Истоки: базисные классы и основная гипотеза

Перечислим теперь некоторые мотивы, приведшие к появлению инвариантов Зайберга - Виттена. Рассмотрим двумерный класс когомологий α на четырёхмерном многообразии X. Такой класс всегда может быть реализован гладко вложенной поверхностью Σ, внутренние топологические свойства которой вполне определяются её родом $g(\Sigma)$. Немного повозившись, можно построить реализацию сколь угодно большого рода, но гораздо интереснее представить данный класс α поверхностью *минимального возможного* рода. Знаменитая гипотеза, которую теперь часто приписывают Тому, утверждает, на $\mathbb{CP}_2$ минимально возможный род в своём когомологическом классе имеют голоморфные кривые. В лекции [K] на Международном Конгрессе 1986 года Кронхеймер выдвинул программу штурма этой гипотезы с позиций калибровочной теории. Точнее, он исследовал инстантонны над $X \setminus \Sigma$ с особенностями вдоль Σ. В течении последующего года Кронхеймер и Мровка работали над реализацией этой программы. Первый из их результатов состоял в том, что если при $b_2^+ > 1$ и $\alpha \cdot \alpha > 0$ не все инстантонные инварианты оказываются тривиальными, то

$$2g\,(\Sigma) - 2 \geqslant \alpha \cdot \alpha \, . \tag{9}$$

Напомним теперь, что для комплексной кривой Σ на комплексной поверхности X имеется *формула присоединения*:

$$2g\,(\Sigma) - 2 = \alpha \cdot \alpha + K_X \cdot \alpha \tag{10}$$

(через K_X мы обозначаем как каноническое 1-расслоение, так и его первый класс Чженя $-c_1(TX) \in H^2(X)$. Сравнение формул показывает, что Кронхеймер и Мровка доказали аналог гипотезы Тома для поверхности типа $K3$, где $K_X = 0$. Это не связано напрямую с исходной гипотезой Тома, так как $c_1(\mathbb{CP}_2) = 1$.

В следующей работе с помощью сингулярных инстантонов Кронхеймер и Мровка получили весьма продвинутую структурную теорему об инстантонных инвариантах односвязных четырёхмерных многообразий (напомним, что эти инварианты представляют собой набор полиномов $q_{p,r}$ на $H_2(X)$). Кронхеймер и Мровка ввели понятие четырёхмерного многообразия *простого типа*. По-определению, это означает что полиномы $q_{p,r}$ на таком многообразии подчинены реккурентному соотношению

$$q_{p,r+2} = 4\, q_{p,r}\ . \tag{11}$$

На практике это означает наличие небольшой дополнительная информации, закодированной посредством некоего четырёхмерного класса u на пространстве инстантонов. Кронхеймер и Мровка показали, что огромное количество четырёхмерных многообразий относится к простому типу. Таковы, например, все комплексные поверхности, представимые в виде полного пересечения гиперповерхностей достаточно высокой степени в $\mathbb{CP}_n$. Пока не известно ни одного примера односвязного четырёхмерного многообразия, которое не имело бы простой тип. На многообразии простого типа все инстантонные инварианты кодируются одним формальным степенным рядом $\mathcal{D}(\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\bar{q}_p(\alpha)$, в котором

$$\bar{q}_p = \begin{cases} q_{p,0} & \text{при } p \equiv b_2^+ + 1 \pmod 2 \\ q_{p,1}/2 & \text{при } p \equiv b_2^+ \pmod 2 \end{cases}$$

суть полиномы степени p. Структурная теорема Кронхеймера и Мровки для многообразий простого типа утверхдает, что существует конечное число классов $\varkappa_i \in H^2(X)$, называемых *базисными*, и соответствующий ему набор рациональных коэффициентов $a_i \in \mathbb{Q}$, такие что

$$\mathcal{D}(\alpha) = e^{\frac{1}{2}(\alpha\cdot\alpha)} \sum_i a_i\, e^{\frac{1}{2}(\varkappa_i\cdot\alpha)}\ . \tag{12}$$

Таким образом, вся информация об инстантонных инвариантах свернулась в конечный набор базисных классов и соответствующих им рациональных чисел a_i. Более того, Кронхеймер и Мровка доказали, что нижнюю границу (9) можно улучшить до

$$2g\,(\Sigma) - 2 \geqslant \alpha\cdot\alpha + \max_i |k_i\cdot\alpha|\ . \tag{13}$$

Для многих комплексных поверхностей удаётся проверить, что канонический класс K_X является одним из базисных, так что сравнение с формулой присоединения доставляет дальнейшие аналоги гипотезы Тома.

На этом поприще были и другие результаты. Так, Финтушель и Стерн вывели структурную теорему для большого числа четырёхмерных многообразий при помощи более элементарных, но менее прямых аргументов, использующих разложение четырёхмерного многообразия X в «обобщённую связную сумму» $X = X_1 \underset{Y}{\cup} X_2$ по трёхмерному многообразию Y. Главной проблемой здесь является получение формулы, связывающей инварианты многообразия X с инвариантами связной суммы $X \sharp \overline{\mathbb{CP}}_2$. Прямолинейное вычисление наталкивается на огромные трудности, ибо требует глубокого анализа деталей компактификации пространства модулей инстантонов. Для многообразий простого типа Кронхеймер и Мровка при помощи своей структурной теории получили довольно простую формулу, содержащую тригонометрические функции. Используя косвенные аргументы, Финтушель и Стерн ([FS]) доказали, что для многообразий X, не относящихся к простому типу, существует формула, содержащая эллиптические функции. В следующей своей работе Кронхеймер и Мровка предложили подход к доказательству того, что всякое односвязное четырёхмерное многообразие имеет «конечный тип». Последнее, по определению, означает, что существует $m \in \mathbb{N}$, такое что m-тая степень оператора T, действующего на двухиндексных последовательностях $(q_{p,r})$ по правилу

$$q_{p,r} \xmapsto{T} q'_{p,r+2} = q_{p,r+2} - 2\, q_{p,r} \ ,$$

аннулирует последовательность инстантонных инвариантов многообразия X (в частности, простота типа означает, что можно взять $m = 1$). Побочным продуктом структурной теории Кронхеймера и Мровки явились найденные ими выражения инстантонных инвариантов через более сложные величины, содержащие эллиптические функции, однако, по-прежнему включающие в себя набор выделенных класов в $H^2(X)$ и соответствующих им рациональных коэффициентов.

Теперь от работ по дифференциальной геометрии и топологии мы перейдём к математической физике и квантовой теории поля. Увы, пробелы в образовании вынуждают автора ограничится здесь лишь весьма поверхностной картиной. Вскоре после введения инстанных инвариантов Виттен в [W] показал, что они могут быть интерпретированы как континуальные интегралы по пространству связностей и определённым внешним полям, и являются на самом деле средними значениями естественных величин в подходящей «$N = 2$ суперсимметричной» теории Янга - Миллса. Атья, Джефри и другие несколько прояснили формулы из работы Виттена, поместив их в общий контекст дифференциально-геометрической теории Чженя - Вейля для эйлерова класса расслоения с сечением (см. [AJ]). Хотя такая «квантовая» интерпретация и таит в себе огромные внутренние проблемы, обусловленные отсутствием чёткого математического определения континуальных интегралов, она послужила одним из мотивов, пробудивших к жизни идею «топологической квантовой теории поля», которая позже и совсем в ином направлении была разработана Виттеном в его знаменитой работе об узлах и инвариантах трёхмерных многообразий. В 1993 Виттен распространил методы квантовой теории поля на инварианты четырёхмерных многообразий, сначала для $K3$-поверхностей. На этих многообразиях есть гиперкэлерова структура, вносящая дополнительные симметрии, и Виттен, пользуясь идеами квантовой теории поля, в принципе, объяснил как с её помощью можно получить все инварианты таких многообразий. Его результаты хорошо согласовывались со структурной теоремой Кронхеймера - Мровки и более ранними вычислениями Фридмана, Моргана и О'Грэди: единственным базисным классом на $K3$-поверхности является $K_X = 0$, так что,

$$\mathcal{D}_{K3}(\alpha) = e^{\frac{1}{2}(\alpha \cdot \alpha)} \ .$$

Затем в [W2] Виттен рассмотрел случай произвольной кэлеровой поверхности X. При $b_2^+(X) > 1$ на X имеется нетривиальная голоморфная 2-форма, которая задаёт аналог гиперкэлеровой структуры на дополнении к множеству своих нулей, представляющему собой объединение голоморфных кривых на X. Виттен утверждал, что вычисления могут быть локализованы вблизи этих кривых и получил формулу Кронхеймера и Мровки, указав при этом дополнительно, что базисные классы исчерпываются неприводимыми компонентами дивизора нулей общей голоморфной 2-формы. Хотя это последнее предсказание и подтверждалось всеми известными примерами, оно, определённо, не укладывалось в рамки результатов, полученных к тому времени геометрами. Так, если рассмотреть комплексную поверхность S, накрывающую $\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1$ с ветвлением в подходящей кривой (такая поверхность будет иметь простой тип), то нулями общей голоморфной 2-формы будет связная голоморфная кривая, локализующая канонический класс K_S, и стало быть, базисные классы, согласно Виттену, должны исчерпываться классами $\pm K_S$. С другой стороны, есть много других потенциальных кандитаов в базисные классы (например, классы поднятые из $H^2(\mathbb{CP}_1 \times \mathbb{CP}_1) = \mathbb{Z}^2$), которые невозможно отбросить известными математическими методами вроде соображений симметрии или разложения Ходжа.

Своего аппогея эта история достигла во второй половине 1994 года, когда Зайберг и Виттен опубликовали работу об инвариантах произвольных четырёхмерных многообразий. Мы не в силах и пытаться описывать используемые в ней результаты из супперсимметричной $N = 2$ теории Янга - Миллса, иначе как пересказав некоторые места из [W3]. Задачи, которые исследуются в квантовой теории поля, содержат скалярный параметр t («скаллингметрики») и комплексный параметр u, связанный с внешними полями, входящими в континуальный интеграл. Инварианты можно вычислять для любого значения t. То, что получается при $t \to 0$ и $u = 0$ (внешние поля отсутствуют), геометрически интерпретируется как инварианты, построенные исходя из пространства модулей инстантонов. В другом пределе, при $t \to \infty$, ситуация описывается аналитической функцией τ, которая зависит от переменной u и может иметь особенности. Замечательно, что при $b_2^+(X) > 1$ удаётся показать, что эта функция τ *модулярна* по отношению к действию $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Главное место в этом действии занимает симметрия $u \longmapsto u^{-1}$, которая соответствует двойственности между электричеством и магнетизмом, сформулированной в 1977 году Оливом и Монтоненом. Модулярность приводит к появлению в теории эллиптических кривых и эллиптических функций, и естественно надеяться, что они как-то связаны с эллиптическими функциями из формул Финтушеля - Стерна для связных сумм. Условие модулярности настолько сильно, что функция τ однозначно определяется своими разложениями Тейлора вблизи двух специальных точек $u = \pm 1$. Вичисление коэффициентов этих разложений и приводит к инвариантам Зайберга - Виттена.

В сумме своей аргументы Зайберга и Виттена говоряли о том, что инстантонные инварианты четырёхмерного многообразия с $b_2^+ > 1$ можно выразить через инварианты Зайберга - Виттена, а для многообразий простого типа это предсказание даже записывалось точной формулой

$$\mathcal{D}_X(\alpha) = 2^{m(X)}\, e^{\frac{1}{2}(\alpha\cdot\alpha)} \left(\sum_{L\in\Lambda} n_L e^{c_1(L)\cdot\alpha} \right) , \tag{14}$$

где через Λ обозначено множество классов изоморфных 1-расслоений L с

$$c_1(L)^2 = 2\chi(X) + 3\tau(X) ,$$

а $m(X) = 2 + \dfrac{7\,\chi(X) + 11\,\tau(X)}{4}$ есть элементарный топологический инвариант многообразия X. Другими словами,

1) все базисные классы Кронхеймера - Мровки удовлетворяют соотношению $\varkappa_i^2 = 2\chi + 3\tau$ (такое предположение уже высказывалась Кронхеймером и Мровкой),

2) базисными могут быть только первые классы Чженя 1-расслоений L, для которых $n_L \neq 0$ (и удовлетворяющие предыдущему условию на $c_1(L)^2$, означающему теперь в точности нульмерность пространства модулей Зайберга - Виттена),

3) коффициенты a_i с точностью до общего множителя $2^{m(X)}$ совпадают со значениями инвариантов Зайберга - Виттена.

Более того, при помощи инвариантов Зайберга - Виттена, приходящих с многомерных пространств модулей, есть надежда распространить эту очаровательную «магическую формулу» и на многообразия, не имеющие простого типа Замечательно, что обе части формулы имеют строгое математическое определение, тогда как аргументы, использованные при её выводе, находятся далеко за пределами математического понимания (так же обстоят дела и с другими знаменитыми «физическими предсказаниями» типа «зеркальной» симметрии).

С точки зрения прагматичных четырёхмерных топологов сама эта формула, соотносящая две теории, пожалуй, не так уж и нужна, и в оставшейся части этого обзора мы покажем, что заполучив в руки инвариант Зайберга - Виттена, можно вообще без всяких инстантов доказать множество замечательных теорем о четырёхмерных многообразиях. И всё же, дать надёжное обоснавание предыдущей формулы, безусловно, черезвычайно важно, тем более, что все известные свойства обоих инвариантов не оставляют ни малейших сомнений в её справедливости. На этом фоне В. Я. Підстригач разработал (в лекциях декабре 1994 г.) и по большей части реализовал геометрический метод, который, похоже, позволяет доказать, как минимум, весьма существенную часть формулы. Идея Підстригача довольно естественна и перекликается с целым рядом других соображений из калибровочной теории: он рассматривает непосредственное обобщение уравнений Зайберга - Виттена на случай U(2)-расслоения $E \to X$. Это пара уравнений на связность на E и E-значный спинор $\Psi \in \Gamma(E \otimes W^+)$, в которых берётся только бесследная часть автодуальной кривизны (по-сути, — кривизна ассоциированной $\mathbb{P}\mathrm{U}(2) = \mathrm{SO}(3)$ - связности), а центральная составляющая связности произвольным образом фиксируется. Далее строится пространство модулей M решений этих U(2)-уравнений по модулю SU(2)-калибровки. Оно содержит в себе пространство модулей обычных инстантонов (для которых $\Psi = 0$) и пространства Зайберга - Виттена для 1-расслоений, которые возникают из приводимых связностей на E и представляют собой неподвижные действия на M окружности (гомотетиями расслоения E). Другими словами, при факторизации по большей калибровочной группе U(2) у U(2)-уравнений возникает два типа приводимых решений. Так или иначе, стандартные рассуждения позволяют связать топологические данные о модулях инстантонов, дающие один набор инвариантов, с топологическими данными о модулях Зайберга - Виттена, дающими другие инварианты. Единственная, но весьма серьёзная, проблема — это некомпактность и необходимость учитывать вклад возникающий при компактификации пространства модулей инстантонов.

Оглядывась назад, можно провести ретрапективу от идеи Підстригача к предыдущим геометрическим работам по пространствам модулей. С одной стороны, в статье Тюрина и Підстригача [PT] о «Spin$^{\mathbb{C}}$-инвариантах» четырёхмерных многообразий уже был введён некий ослабленный вариант уравнений Зайберга - Виттена. С другой стороны, очень многое можно делать по аналогии с двумерной калибровочной терией. Простейшим примером здесь является «уравнение вихря» на связность и сечение расслоения E над римановой поверхностью; другой пример — введёное Хитчиным в [H] уравнение, задающее голоморфную форму со значениями в расслоении эндоморфизмов расслоения E (в [BDGW] дан обзор некоторых такого рода работ). Подход Підстригача можно сравнить с работой Таддеуша [Th], связывающей пространство модулей плоских связностей на римановой поверхности с пространством модулей абелевых вихрей. Весьма похоже, что в случае кэлеровых многообразий метод Підстригача допускает чисто алгебро-геометрическую переформулировку в стиле Таддеуша. В связи с этим довольно естественно модифицировать уравнения Зайберга - Виттена на четырёхмерных многообразиях параллельно тому, как это делается в двумерном случае. Одна из таких модификаций уже была рассмотрена Вафой и Виттеном в [VW] и обнаружила неожиданную связь с модулярными формами.

§5. Кэлеровы и симплектические многообразия

В [W3] Виттен показал, что инварианты Зайберга - Виттена кэлеровой поверхности X могут быть полностью описаны в терминах её комплексной геометрии. Исходным пунктом для этого является наличие на кэлеровой поверхности выделенной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры с

$$W^+ = \Lambda^0 \oplus \Lambda^{0,2} \qquad \text{и} \qquad W^- = \Lambda^{0,1}\,, \tag{15}$$

где разложение W^+ соответствует разложению автодуальных 2-форм

$$\Lambda^+ = \mathbb{R}\cdot\omega \oplus \Lambda^{0,2}\,, \tag{16}$$

в котором через ω обозначена кэлерова форма. Детерминантное расслоение этой $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры двойственно каноническому 1-раслоению $K_X = \Lambda^2 T^*_{\mathbb{C}} X$, которое удовлетворяет условию $K_X \cdot K_X = 2\chi + 3\tau$, означающему нульмерность пространства модулей (тут мы обозначили через K_X как само каноническое расслоение, так и его первый класс Чженя). На самом деле для того, чтобы класс $c \in H^2(X)$ *на произвольном* четырёхмерном многообразии X был первым классом Чженя некоторой *почти комплексной* структуры необходимо и достаточно, чтобы $c \equiv w_2(X) \pmod 2$ и $c\cdot c = 2\chi + 3\tau$.

Оператор Дирака, индуцированный связностью Леви-Чевита, в кэлеровом случае имеет вид

$$\not\partial = \sqrt{2}\left(\bar\partial + \bar\partial^*\right) \,:\, \Lambda^0 \oplus \Lambda^{0,2} \longrightarrow \Lambda^{0,1}\,.$$

Рассмотрим уравнения Зайберга - Виттена для выделенной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры. Если Γ — это связность на K_X, индуцированная связностью Леви-Чевита, то произвольную связность на K_X можно представить в виде $\Gamma + B$, где B может восприниматься как связность на тривиальном 1-расслоении. Таким образом, в качестве неизвестных в уравнениях Зайберга - Виттена будут выступать

1) связность B на тривиальном 1-расслоении Λ^0,
2) сечение α расслоения Λ^0 (т. е. функция на X),
3) сечение β расслоения $\Lambda^{0,2}$ (т. е. 2-форма на X),

и с учётом разложения (16) сами эти уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} \bar\partial_B \alpha = -\bar\partial_B^* \beta \\ F_B^{0,2} = \bar\alpha \beta \\ iF_B^{1,1}\cdot\omega = \left(|\beta|^2 - |\alpha|^2\right) - iF_\Gamma^{1,1} \end{cases},$$

где операторы $\overline{\partial}_B$ и $\overline{\partial}_B^*$ в первом уравнении получаются обычным спариванием со связностью B. Теперь, если (B, α, β) является их решением, мы применим оператор $\overline{\partial}_B$ к первому уравнению, и пользуясь определением кривизны как квадрата скрученной внешней производной, получим

$$\overline{\partial}_B\overline{\partial}_B^*\beta = -\overline{\partial}_B\overline{\partial}_B\alpha = -F_B^{0,2} .$$

Подстановка во второе уравнение даёт

$$\overline{\partial}_B\overline{\partial}_B^*\beta + |\alpha|^2\beta = 0 .$$

Беря скалярное L^2-произведение с β, получаем

$$\int\limits_X \left|\overline{\partial}_B^*\beta\right|^2 + |\alpha|^2|\beta|^2\, d\mu = 0 .$$

В сущности, это всё то же базисное вычисление из первого параграфа, модернизированное с учётом разложения спинорного пространства. Из него следет, что либо β является тождественно нулевым, либо таковыми являются α и $\overline{\partial}_B^*\beta$, ибо из зануления α или β на открытом множестве вытекает (в силу единственности продолжения для решений эллиптических уравнений с частными производными) их тождественное обращение в нуль. В любом случае произведение $\overline{\alpha}\beta$, а с ним и $F_B^{0,2}$, будет нулевыми, так что связность B задаст голоморфную структуру на тривиальном 1-расслоении. Напомним теперь, что инвариант Зайберга - Виттена однозначно определён только при $b_2^+ > 1$. На кэлеровом многообразии X это условие означает наличие нетривиального сечения у канонического расслоения, и значит, *степень* $c_1(K_X)\cdot[\omega]$ будет в этом случае неотрицательной. По теории Чженя - Вайля это означает, что

$$c_1(K_X)\cdot[\omega] = -\frac{i}{2\pi}\int\limits_X F_\Gamma\cdot\omega\, d\mu \geqslant 0 ,$$

Поскольку F_B – точная форма, интеграл от $F_B\cdot\omega$ по X будет нулевым, и мы получаем, что

$$\int\limits_X |\alpha|^2 - |\beta|^2 \geqslant 0 .$$

Тем самым тождественно зануляется именно β, а сечение α даёт *голоморфную* тривиализацию голоморфной структуры, определяемой связностью B. Наоборот, все связности, совместимые с голоморфной структурой на тривиальном голоморфном 1-расслоении, параметризуются функциями вида e^f на X — нормами тривиализующего голоморфного сечения, и чтобы получить решение уравнений Зайберга - Виттена, нам достаточно решить нелинейное уравнение

$$\Delta f + e^{2f} = \sigma , \tag{17}$$

где $\sigma = -iF_\Gamma\cdot\omega$ есть одна восьмая от взятой с обратным знаком скалярной кривизны римановой метрики. Стандартное рассуждение показывает, что уравнение (17) имеет единственное решение для любой функции σ, интеграл от которой по X неотрицателен.

Итак, мы заключаем, что уравнения Зайберга - Виттена имеют в точности одно решение, и стало быть, инвариант Зайберга - Виттена n_K равен ±1.

Уравнение (17) возникает при построении метрики постоянной кривизны на римановой поверхности, так что приведённое рассуждение может восприниматься как обобщение теремы об униформизации на более высокие размерности. Другой подход состоит с в том, чтобы заменить третье уравнение уравнением

$$iF_B^{1,1} \cdot \omega = |\beta|^2 - |\alpha|^2 + 1 ,$$

которое имеет очевидное решение с тривиальной связностью B, нулевым β и $\alpha = 1$. В действительности это не сильно отличается от предыдущего, поскольку доказательство того, что возмущение не повлияет на число решений, по сути, представляет собой тот же «метод продолжения», что и в доказательстве существования решения у (17).

В случае произвольного детерминантного расслоения L виттеновский анализ уравнений производится аналогичным образом. Запишем L как $L = \xi^2 \otimes K_X^*$, так что в качестве неизвестных можно будет взять связность B на 1-расслоении ξ, его сечение α и ξ-значную (0,2)-форму β. Предыдущее рассуждение показывает, что при наличии решения ξ обладает голоморфной структурой и одно из полей α, β тождественно зануляется, причём какое именно – зависит от знака $c_1(L) \cdot \omega$. При правильном выборе знака получающееся в результате пространство модулей можно будет отождествить с объединением проективизированных пространств голоморфных сечений 1-расслоения ξ, соответствующих всевозможным голоморфным структурам на нём, т. е. с пространством голоморфных кривых на X, представляющих класс $c_1(L)$. Размерность этого пространства может и не совпасть с виртуальной размерностью, предписываемой теоремой об индексе, если множество нулей окажется «нерегулярным». Поэтому для вычисления инварианта Виттен придумал изящное возмущение второго уравнения:

$$F_B^{0,2} = \overline{\alpha}\beta - \overline{\eta} ,$$

где η — общая голоморфная 2-форма на X. В предположении, что у невозмущённого уравнения имеется решение, и стало быть, первый класс Чженя 1-расслоения ξ имеет тип (1,1) относительно ходжева разложения когомологий X, имеем

$$\int_X F_B \wedge \eta = \int_X F_B^{0,2} \wedge \eta = 0 .$$

Возмущённое уравнение даёт теперь соотношение

$$\overline{\partial}_B \overline{\partial}_B^* \beta + |\alpha|^2 \beta = \alpha\eta ,$$

Умножив это с учётом предудущего равенства скалярно на β в L^2 и подставив обратно во второе уравнение, получим

$$\int_X \left|\overline{\partial}_B^* \beta\right|^2 + \left|\alpha\overline{\beta} - \eta\right|^2 d\mu = 0 ,$$

откуда $\overline{\partial}_B^* \beta = \overline{\partial}_B \alpha = 0$, так что $F_B^{0,2} = 0$ и $\alpha\overline{\beta} = \overline{\eta}$. Это означает, что B задаёт на ξ голоморфную структуру, относительно которой α будет голоморфным сечением ξ, а $\overline{\beta}$ — голоморфным сечением $K_X \otimes \xi^*$. Наоборот, при наличиии этих данных мы, как и выше, можем восстановить связность B, решив соответствующее уравнение. Тем самым, множество решений возмущённых уравнений имеет чисто алгебро-геометрическое описание. Если дивизор нулей сечения η представляется в $\operatorname{Pic}(X)$ в виде $\sum r_i C_i$, то детерминантные расслоения L, приводящие к ненулевым инвариантам Зайберга - Виттена, — это только суммы вида $\sum s_i C_i$ с $0 \leqslant s_i \leqslant r_i$. Виттен указал также и правило для определения знаков, с которыми надлежит учитывать возмущённые решения. Отметим, что решения возмущённых уравнений всегда изолированы, так что все инварианты, строящиеся по многомерным пространствам модулей, равны нулю, и значит, с точки зрения общих гипотез из п. Д3, всякая кэлерова поверхность имеет простой тип.

По существу есть лишь два примера кэлеровых поверхностей, на которых имеются базисные классы Зайберга - Виттена, не совпадающие с каноническим классом. В первом из них X является раздутием кэлеровой поверхности X_0, так что канонический дивизор на X равен сумме исключительного дивизора E и собственного прообраза канонического дивизора с X_0. Общий результат, описывающий базисные классы на X, в этом случае состоит в том, что все они имеют вид $\varkappa_i \pm E$, где $\varkappa_i$ пробегают базисные классы на X_0 (мы считаем $H^2(X_0)$ канонически вложенным в $H^2(X)$). Во втором примере X есть эллиптический пучок, так что канонический дивизор является суммой слоёв, среди которых могут быть и кратные. В этом случае все базисные классы являются рациональными кратными канонического дивизора, в полном соответствии с вычислениями производившимися и для инстанных инвариантов.

Симплектические четырёхмерные многообразия. В двух статьях [T1], [T2], вышедших уже ближе к концу 1994 года, Таубс показал, что значительная часть описанной выше теории переносится на случай четырёхмерных *симплектических* многообразий, и это ведёт к самым поразительным из результатов, полученных с помощью инвариантов Зайберга - Виттена. В марте 1995 года, Таубс в [T3] анонсировал и дальнейшие результаты, позволяющие работать с *псевдоголоморфными* кривыми на симплектических многообразиях. Техника, описываемая Таубсом в этой последней статье, позволила несколько упростить предыдущие доказательства.

Рассмотрим компактное четырёхмерное многообразие с симплектической формой ω. На нём можно выбрать почти комплексную структуру и согласованную с нею эрмитову метрику, относительно которых ω является автодуальной. Такая почти комплексная структура единственна с точностью до гомотопии, и в частности, когомологический класс $K_X = -c_1(TX)$ зависит только от ω. Как мы уже упоминали выше, K_X имеет лишь нульмерные пространства модулей Зайберга - Виттена. Первая серия результатов Таубса, относящаяся к многообразиям с $b_2^+ > 1$, такова:

1) Инвариант Зайберга - Виттена от K_X равен ±1.

2) Обозначая класс когомологий ω через $[\omega]$, будем иметь $K_X \cdot [\omega] \geqslant 0$; всякий класс $\varkappa$ с ненулевым инвариантом Зайберга - Виттена удовлетворяет неравенству $|\varkappa \cdot [\omega]| \leqslant K_X \cdot [\omega]$, которое превращается в равенство тогда и только тогда, когда $\varkappa = \pm K_X$.

В кэлеровом случае (1) представляет собой в точности первый из обсуждавшихся выше результатов Виттена, а (2) вытекает из виттеновского рассуждения и неравенства $c_1(L) \cdot [\omega] > 0$, справедливого для любого голоморфного 1-расслоения L, обладающего нетривиальным голоморфным сечением.

В работах Таубса задействована дифференциальная геометрия почти комплексных многообразий. На всяком таком многообразии имеется разложение дифференциальных форм по битипам и определены операторы ∂ и $\overline{\partial}$ взятия соответствующих компонент от внешней производной. Однако, квадрат $\overline{\partial}^2$ будет, вообще говоря, ненулевым, и его действие на функции определяется формулой

$$\overline{\partial}^2 f = N \circ \partial f \ , \tag{18}$$

где алгебраический оператор $N \in \mathrm{Hom}\left(\Lambda^{1,0}, \Lambda^{0,2}\right)$ называется *тензором Ниенхуйса*, и его зануление равносильно интегрируемости почти комплексной структуры. Каноническую $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру, ассоциированную с выбранной нами почти комплексной структурой, можно описать в терминах дифференциальных форм на X дословно так же, как и в кэлеровом случае, и даже равенство $\not{\partial} = \sqrt{2}\left(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*\right)$ будет выполнено. Таким образом возмущёные подходящей автодуальной 2-формой уравнения запишутся как

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\partial}_B \alpha &= -\overline{\partial}^*_B \beta \\ F^{0,2}_B &= \overline{\alpha}\beta \\ iF^{1,1}_B \cdot \omega &= \left(|\beta|^2 - |\alpha|^2 + 1\right) \end{aligned} \right. \ .$$

Однако, продолжая действовать как и выше, мы получим теперь

$$\overline{\partial}_B \overline{\partial}^*_B \beta = -\overline{\partial}_B \overline{\partial}_B \alpha = -|\alpha|^2 \beta + N \circ \partial_B \alpha \ ,$$

и последнее слагаемое испортит всё дело.

Первоначальный подход Таубса состоял в том, чтобы продеформировать второе уравнение, внедрив в него численный множитель:

$$F^{0,2}_B = \overline{\alpha}\beta - \frac{r\overline{\alpha}}{1 - r|\alpha|^2} N \circ \partial_B \alpha \ ,$$

где r — достаточно большой параметр. Таубс показал, что такое возмущение уравнений допустимо, и что при больших r очевидное решение уравнений является единственным. Это потребовало очень точных оценок. В более поздней работе Таубс ввёл другое возмущение, сделавшее доказательство очень простым. Новое семейство возмущённых уравнений имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\partial}_B \alpha &= -\overline{\partial}^*_B \beta \\ F^{0,2}_B &= \overline{\alpha}\beta \\ iF^{1,1}_B \cdot \omega &= \left(|\beta|^2 - |\alpha|^2 + \varrho^2\right) \end{aligned} \right. \ ,$$

где вещественный параметр ϱ вновь будет сделан большим. Воспользуемся теперь формулой Вейценбока для $\overline{\partial}$-оператора. В почти комплексном случае эта формула имеет тот же самый вид, что и в более знакомой кэлеровой ситуации:

$$\nabla^*_B \nabla_B f = 2\,\overline{\partial}^*_B \overline{\partial}_B f + i\left(F^{1,1}_B \cdot \omega\right) f \ .$$

Применяя это к α и пользуясь нашими тремя уравнениями, находим

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_X |\nabla_B\alpha|^2 \, d\mu = \int\limits_X 2\langle \overline{\partial}^*_B\overline{\partial}_B\alpha \, , \, \alpha \rangle - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - \varrho^2\right) |\alpha| \, d\mu = \\
&= \int\limits_X -2\langle \overline{\partial}^*_B\overline{\partial}^*_B\beta \, , \, \alpha \rangle - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - \varrho^2\right) |\alpha| \, d\mu = \int\limits_X -2\langle \beta \, , \, \overline{\partial}_B\overline{\partial}_B\alpha \rangle - \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - \varrho^2\right) |\alpha| \, d\mu = \\
&\qquad = -2\int\limits_X \langle \beta \, , \, N \circ \partial_B\alpha \rangle \, d\mu - 2\int\limits_X |\alpha|^2|\beta|^2 \, d\mu - \int\limits_X \left(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - \varrho^2\right) |\alpha| \, d\mu = \\
&\qquad = -2\int\limits_X \langle \beta \, , \, N \circ \partial_B\alpha \rangle \, d\mu - 2\int\limits_X |\alpha|^2|\beta|^2 \, d\mu - \int\limits_X \left(|\alpha|^2 - \varrho^2\right)^2 \, d\mu - \varrho^2 \int\limits_X |\alpha|^2 - \varrho^2 \, d\mu \, .
\end{aligned}
$$

Теперь мы подошли к ключевому шагу: $\int_X F_B^{1,1} \cdot \omega \, d\mu$ есть не что иное, как интеграл по X от 4-формы $F_B \wedge \omega$, и стало быть, равен нулю, поскольку F_B представляет первый класс Чженя тривиального 1-расслоения, а ω замкнута. Таким образом, из третьего уравнения

$$
\int\limits_X |\alpha|^2 - \varrho^2 \, d\mu = \int\limits_X |\beta|^2 \, d\mu \, ,
$$

и мы получам, что

$$
\int\limits_X |\nabla_B\alpha|^2 + |\alpha|^2|\beta|^2 + \left(|\alpha|^2 - \varrho^2\right)^2 + \varrho^2|\beta|^2 \, d\mu = -2\int\limits_X \langle \beta \, , \, N \circ \partial_B\alpha \rangle \, d\mu \, ,
$$

где все слагаемые в левой части неотрицательны. Этот трюк перекликается с виттеновским рассуждением для (0,2)-возмущённых уравнений и представляет собой лишь иную версию базисного интегрирования по частям из п. Д1.

Чтобы применить полученную формулу заметим, что её правая часть ограничена постоянным кратным $||\beta|| \cdot ||\nabla_B\alpha||$, и значит не превосходит

$$
\frac{1}{2} \, ||\nabla_B\alpha||^2 + C^2 \, ||\beta||^2
$$

для некоторого C, зависящего только от геометрии подлежащего многообразия. Таким образом,

$$
||\nabla_B\alpha||^2 + \varrho \, ||\beta||^2 + \left| \, ||\alpha||^2 - \varrho^2 \, \right|^2 \leqslant \frac{1}{2} \, ||\nabla_B\alpha||^2 + C^2 \, ||\beta||^2 \ ,
$$

и следовательно, при $\varrho^2 > 2C$ нет никаких других решений, кроме очевидного: связность B – тривиальна, $\alpha = \varrho$ – константа, а $\beta = 0$. Этим, по существу, доказан первый из результатов Таубса (1), а второй результат (2) получается точно также.

В более поздней работе (детали которой ещё не были опубликованы к моменту написания данного обзора) Таубс устанавливает далеко идущие связи теории Зайберга - Виттена с «инвариантами Громова», которые вычисляются путём подсчёта числа псевдоголоморфных кривых. Он показал, что базисные классы Зайберга - Виттена имеют вид $\pm(2\xi - K_X)$, где ξ таков, что двойственный ему по Пуанкаре 2-мерный класс когомологий имеет ненулевой инвариант Громова; в частности, ξ представляется псевдоголоморфной кривой. Более того, инвариант Громова, который равен числу псевдоголоморфных кривых в классе ξ, совпадает с инвариантом Зайберга - Виттена. Грубо говоря, Таубс показывает, что множество нулей сечения α, возникающего из решения предыдущих возмущённых уравнений, но уже для общего 1-расслоения ξ, при больших ϱ становится очень близко к псевдоголоморфной кривой. Эти результаты хорошо подстыковываются к кэлерову случаю, где «регулярными» в смысле теории Громова [D4] решениями уравнений Коши - Римана и являются как раз только базисные компоненты канонической линейной системы.

§6. Теория склейки

В этом разделе мы обсудим технику вычисления инвариантов Зайберга - Виттена для четырёхмерного многообразия $X = X_1 \underset{Y}{\cup} X_2$, разрезанного на два куска по трёхмерному многообразию Y. Для инстантонных инвариантов на этот счёт было проделано много работы с использованием теории когомологий Флоера или её вариантов. Простейшим случаем, изучавшимся Виттеном [W3] и другими авторами является связная сумма $X = \overline{X}_1 \sharp \overline{X}_2$, скажем, над трёхмерной сферой. Рассуждения здесь очень близки к соответствующим инстантонным и приводят к такой теореме об обращении в нуль: если $b_2^+(X_1)$ и $b_2^+(X_2)$ оба строго положительны, то все инварианты Зайберга - Виттена для X нулевые. На связной сумме можно рассмотреть такое семейство метрик, в котором «перешеек» сужается до сферы нулевого радиуса, но скалярная кривизна остаётся ограниченой. Априорные оценки для решений уравнений Зайберга - Виттена и простые рассуждения об устранимых особенностях показывают, что из последовательности решений, построенных для этих метрик и фиксированной $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуры $c \in H^2(X)$, можно выбрать подпоследовательность, которая всюду вне перешейка сходится к решениям на замкнутых многообразиях $\overline{X}_{1,2}$ со $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структурами $c_{1,2}$, такими что $c_1 + c_2 = c$. По теореме об индексе $i(c) = i(c_1) + i(c_2) - 1$, так что $i(c) = 0$ только если один из $i(c_{1,2})$ нулевой. Тем самым, для общей метрики все решения приводимы. Коль скоро приводимых решений также нет (из-за условий на b_2^+), все инварианты Зайберга - Виттена, получающиеся из 0-мерных пространств модулей, равны нулю. Это рассуждение легко обобщается и на многомерные пространства модулей. Появление лишней единицы в формуле для индекса геометрически обусловлено наличием *параметра склейки*: имеется ровно $\mathrm{U}(1)$ способов отождествить ограничения расслоений с $\overline{X}_{1,2}$ на перешеек для того, чтобы склеить из них решение, определённое на всём X. Если форма пересечения на одном из кусков, скажем, на X_2, отрицательно определена, то инварианты связной суммы можно вычислять анализируя решения, полученные склейкой с приводимыми решениями на X_2. К примеру, если X_2 гомотопически эквивалентно $\overline{\mathbb{CP}}^2$, то базисные классы Зайберга - Виттена для связной суммы имеют вид $\varkappa_i \pm E$, где $\varkappa_i$ пробегает базисные классы на $\overline{X}_1$, а E — это образующая $H^2(\overline{X}_2)$, — в полном соответствии с тем, что происходит при раздутиях комплексных кэлеровых поверхностей.

Для более общих разложений $X = X_1 \underset{Y}{\cup} X_2$ естественно воспользоваться другим вырождением метрики, при котором перешеек растягивается в узкую длинную трубку $Y \times [-L, L]$ изометрично вложенную в X. В результате получается теория, очень близкая к теории Флоера для инстантонных уравнений. Напомним, что на замкнутом четырёхмерном многообразии

X решения уравнений Зайберга - Виттена минимизируют функционал

$$\int\limits_X |\nabla_A\psi|^2 + \frac{1}{2}\,\bigl|\,|\psi|^2 + R\,\bigr|^2 + \frac{1}{2}\,|F_A|^2\; d\mu\ ,$$

и это устанавливется двукратным применением теоремы Стокса. Рассмотрим теперь четырёхмерное многообразие Z, краем которого является трёхмерное многообразие Y. $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структура на Z индуцирует $\mathrm{Spin}^{\mathbb{C}}$-структуру на Y. Обозначим ограничение (A,ψ) на край через (a,φ). Вычисление по формуле Стокса приведёт теперь к появлению дополнительного интеграла по границе:

$$J_Y(a,\varphi) = \int\limits_Y \langle\, \not{\partial}_a\varphi\,,\ \varphi\,\rangle\, d\mu\ +\ \frac{1}{2}\ \mathrm{CS}(a)\ , \tag{19}$$

где через $\not{\partial}_a$ обозначен оператор Дирака на Y, а через CS – функционал Черна - Саймонса. В случае, когда рассматриваемое нами расслоение тривиально над Y и a может рассматриваться как 1-форма связности, этот функционал имеет вид

$$\mathrm{CS}(a) = \int\limits_Y a \wedge da\ .$$

В общем случае функционал Черна - Саймонса определён только по модулю $4\pi^2$. Пространство $\mathcal{C}$ всех неприводимых пар (a,φ), где a есть связность на $\mathrm{U}(1)$-расслоении L над Y, имеет гомотопический тип произведения $\mathbb{CP}^\infty$ с тором $H^1(Y,\mathbb{R})\big/H^1(Y,\mathbb{Z})$. Функционал Черна - Саймонса представляет собой отображение из $\mathcal{C}$ в S^1, гомотопический класс которого при изоморфизме $[\mathcal{C}, S^1] = H_1(Y)\big/\mathrm{Torsion}$ естественно отождествляется с двойственным по Пуанкаре к $c_1(L)$. Решения уравнений Зайберга - Виттена над $Y \times \mathbb{R}$ можно рассматривать, следуя Флоеру, как траектории градиентного потока функционала J_Y на $\mathcal{C}$. В частности, трансляционно инвариантные решения при этом будут соответствовать критическим точкам J_Y, которые определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \not{\partial}_a\varphi &= 0 \\ F_a &= -\tau(\varphi,\varphi) \end{aligned} \tag{20}$$

на Y. Квадратичное отображение τ здесь определяется точно так же как и в четырёхмерном случае. Конструкция Флоера доставляет цепной комплекс, который строится из неприводимых решений уравнений (20), подвергнутых, возможно, малому возмущению. Дифференциалы этого комплекса определяются решениями уравнений Зайберга - Виттена на трубке. В результате возникают группы $\mathit{HFSW}_*(Y)$ и $\mathit{HFSW}^*(Y)$ гомологий и когомологий Зайберга - Виттена - Флоера, которые превращаются друг в друга при смене ориентации на Y. В хороших случаях инварианты Зайберга - Виттена многообразия $X = X_1 \underset{Y}{\cup} X_2$ получаются из относительных инвариантов X_1 и X_2 со значениями в $\mathit{HFSW}_*(Y)$ и $\mathit{HFSW}^*(Y)$ при помощи свёртки $\mathit{HFSW}_*(Y) \otimes \mathit{HFSW}^*(Y) \longrightarrow \mathbb{Z}$. В общей теории приходится рассматривать ещё и приводимые критические точки на $\mathcal{C}$ (в духе эквивариантной флоеровской теории Аустина и Браама [AB]).

Если 1-расслоение L нетривиально, то приводимых решений нет. Если же расслоение L тривиально, то возникает новый феномен: флоеровские группы Зайбега - Виттена оказываются не вполне независимыми от метрики, и будут меняться, кода последняя проходит в пространстве метрик через «стенки» коразмерности 1, образованные метриками, для которых обычный оператор Дирака имеет нетривиальное ядро. Для инстантонных уравнений соответствующие критические точки, составляющие основу теории Флоера, представляют собой в точности плоские связности на Y и могут быть вполне конкретно описаны в терминах фундаментальной группы. Напротив, уравнения (20), к которым приводит теория Зайберга - Виттена, проинтерпретивать довольно сложно. Вот два случая, когда что-то удаётся сказать:

1) на трёхмерном многообразии Y есть метрика положительной скалярной кривизны;

2) $Y = \Sigma \times S^1$, где Σ – поверхность.

В первом случае один из вариантов теоремы об обращении в нуль из [W3] показывает, что все решения уравнений Зайберга - Виттена приводимы (т. е. $\varphi = 0$ и a является плоской U(1)-связностью), и стало быть, группы Зайберга - Виттена - Флоера тривиальны. Во втором случае допустим, что 1-расслоение L на $S^1 \times \Sigma$ является поднятием некоторого 1-расслоения степени d на Σ. Элементы теории Флоера в этой ситуации изучались Кронхеймером и Мровкой в [KM3], а также в [MST]. Ключевое наблюдение заключается в том, что решения уравнения (20) на $S^1 \times \Sigma$ *инвариантны относительно поворотов окружности.* Вообще, для любого трёхмерного многоообразия W и расслоения L над $S^1 \times W$, класс которого не содержит кюннетовской компоненты из $H^1(S^1) \otimes H^1(W) \subset H^2(S^1 \times W)$, всякое решение уравнений Зайберга - Виттена будет S^1-инвариантно — это следует из интерпретации уравнений (20) в терминах градиентного потока и описания гомотопического класса функционала Черна - Саймонса примерно так же, как доказывается отсутствие непостоянных замкнутых орбит у градиентного потока чисто вещественнозначной функции. Применяя это наблюдение к $W = S^1 \times \Sigma$, мы (ввиду симметричной роли окружностей в прозведении $W = S^1 \times S^1 \times \Sigma$) получаем S^1-инвариантность и в нужном нам случае. Но уравнения для S^1-инвариантных решений системы (20) редуцируются к упоминавшимся в п. Д3 *уравнениям вихря.* Заменяя, если надо, L на L^{-1}, мы можем считать, что степень d 1-расслоения на Σ положительна. Уравнения вихря, о которых идёт речь, суть уравнения на связность A нак L и сечение ψ 1-расслоения $K_\Sigma^{1/2} \otimes L^{-1/2}$. Они имеют вид

$$\begin{cases} -\overline{\partial}_A \psi = 0 \\ iF_A \psi = -|\psi|^2 \end{cases},$$

где первое уравнение означает, что ψ является голоморфным сечением. Из наличия голоморфного сечения вытекает, что $K_\Sigma^{1/2} \otimes L^{-1/2}$ имеет положительную степень. Таким образом, решение существует тогда и только тогда, когда $2g - 2 \geqslant d$. Если выполняется равенство, то система имеет лишь тривиальное решение. Если выполнено строгое неравенство, т. е. $r = (2g - 2) - d > 0$, то сопоставление решению множества нулей сечения ψ отождествляет пространство решений с симметрической степенбю $S^r\Sigma$. Это — «основная теорема о соответствии» в теории вихревых уравнений [BDPW]. На языке флоеровских групп она означает, что когомологии Флоера 1-расслоения поднятого с Σ совпадают с обычными когомологиями r-той симметрической степени Σ.

§7. Приложения уравнений Зайберга - Виттена

В этом разделе мы перечислим некоторые результаты о четырёхмерных многообразиях, доказанные с помощью уравнений Зайберга - Виттена. Хотя последние логически никак и не связаны с инстантонами, налицо очевидное сходство между двумя этими подходами, как в самих результатах, так и в методах их получения. Тем более поразительно, что новая теория позволила доказать многие вещи, казавшиеся для старой теории совершенно недоступными, а ранее полученные старыми методами результаты стали доказываться намного проще.

Риманова геометрия четырёхмерных многообразий. Пожалуй, самым банальным является применение инвариантов Зайберга - Виттена к различению не диффеоморфных, но гомеоморфных гладких многообразий: тут можно было бы привести мириады примеров. Простейший заключается в том, что связные суммы X_{pq} из p экземпляров $\mathbb{CP}^2$ и $q > 1$ экземпляров $\overline{\mathbb{CP}}^2$, для которых инварианты Зайберга - Виттена будут нулевыми, не могут быть диффеоморфны никакой кэлеровой поверхности того же топологического типа (равно как и никакому другому многообразию с ненулевыми инвариантами Зайберга - Виттена), — и конечно, многие из этих примеров были уже получены ранее с помощью инстантонов. Однако теперь из теоремы об обращении в нуль для многообразий положительной скалярной кривизны получается более сильный новый результат: на многообразии с $b_2^+ > 1$ и ненулевыми инвариантами Зайберга - Виттена не существует метрики с положительной скалярной кривизной. Для сравнения: все многообразия X_{pq} обладают такой метрикой (см. [GL]). Из этого видно, что классификация многообразий с метрикой положительной скалярной кривизны в четырёхмерии радикально отличается от многомерного случая, где все препятствия к существованию такой метрики перечисляются в рамках теории кобордизмов и характеристических классов. Подобным же образом теорема об обращении в нуль всех решений уравнений (20) на трёхмерных многообразиях положительной скалярной кривизны показывает, что они не вкладываются ни в какие четырёхмерные многообразия с ненулевыми инвариантами Зайберга - Виттена так, чтобы b_2^+ было положително по обе стороны. Это — новый тип препятствия к существованию метрики положительной скалярной кривизны на трёхмерном многообразии. Для сферы Пуанкаре и других многообразий постоянной кривизны этот результат был доказан ранее Аустином [A] при помощи обычной теории Флоера, но его рассуждения были гораздо менее прямыми и включали в себя исследование взаймодействия приводимых и неприводимых связностей.

Ещё один выход на риманову геометрию был обнаружен Ле Бруном [L]. Скомбинировав уточнённую версию теоремы об обращении в нуль с формулой Хитчина - Торпа для характеристических чисел четырёхмерного многообразия, он показал, что для любого эйншнейнова четырёхмерного многообразия с ненулевыми инвариантами Зайберга - Виттена выполняется неравенство $\chi - 3\tau \geqslant 0$. Для комплексных поверхностей это превращается в неравенство Мияоки - Яо[3] $c_1^2 \leqslant 3c_2$, а для общих четырёхмерных многообразий доставляет новое препятствие к существованию метрики Эйнштейна. В случае, когда имеет место равенство, Ле Брун доказал, что все эйнштейновы метрики на компактнх комплексных пространствах вида $\mathbb{CH}^2/\Gamma$ исчерпываются каноническими.

Кэлеровы и симплектические многообразия. В яркой обзорной статье [FM], написанной вскоре после открытия инстантонных инвариантов, Фридман и Морган выдвинули

---

[3] более известного как *неравенство Богомолова - Мияоки* (*прим. перев.*)

ряд гипотез о дифференциальной топологии комплексных поверхностей. Усилиями большого числа математиков по многим из них в последующие годы был достигнут значительный прогресс. Одним из следствий виттеновского описания [W3] инвариантов Зайберга - Виттена комплексных поверхностей является окончательное доказательство одной из главнейших гипотез: *канонический класс минимальной поверхности общего типа с* $p_g > 0$ *является, с точностью до знака, инвариантом гладкости* (т. е. сохраняется при диффеоморфизмах поверхности), поскольку из свойств канонических линейных систем вытекает, что базисные классы Зайберга - Виттена исчерпываются в этом случае классами $\pm K_X$. Другим новым следствием теории Зайберга - Виттена является *гладкая неразложимость* минимальных кэлеровых поверхностей: одна из компонент любого разложения кэлеровой поверхности в связную сумму гладких многообразий обязана быть гомотопической четырёхмерной сферой. Аналогичным образом Кронхеймер с помощью инвариантов Зайберга - Виттена дал крайне простое доказательство другой основной гипотезы: *кодаирова размерность кэлеровой поверхности является её гладким инвариантом* (эта проблема была окончательно решена незадолго до этого Фридманом и Куином [FQ]). Такое применение теории Зайберга - Виттена по существу свело на нет всю предшествующую деятельность, и выводы, которые можно получить с её помощью в кэлеровом случае представляются, скорее, негативными: по-сути, единственным источником для получения информации посредством инвариантов Зайберга - Виттена является один только канонический класс. То же самое, разумеется, отноится и к инстантонным инвариантам, если учесть их связь с инвариантами Зайберга - Виттена, обсуждавшуюся в п. Д3. Таким образом, в настоящий момент мы не располагаем средствами для штурма третьей основной проблемы: существуют ли диффеоморфные поверхности, которые «деформационно не эквивалентны» (множество потенциальных кандидатов, — разветвлённые накрытия $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, — описано Катанезе и Манетти в [M]).

На сегодняшний день наиболее глубокие приложения теории Зайберга - Виттена связаны с работами Таубса по четырёхмерным симплектическим многообразиям. Кэлеровы поерхности доставляют базисную серию примеров четырёхмерных симплектических многообразий, но на ряду с ними можно рассматривать и произвольные четырёхмерные многообразия X, на которых имеются:

1) класс $[\omega] \in H^2(X;\mathbb{R})$, такой что $|\omega|^2 > 0$,

2) почти комплексная структура, определяющая «канонический класс»:

$$K = -c_1(TX) \; .$$

Выполнение этих условий очевидным образом обеспечивает наличие на X симплектической структуры, и таких многообразий намного больше, чем кэлеровых поверхностей: как мы уже отмечали выше, класс когомологий K тогда и только тогда является канклассом почти комплексной структуры, когда $K^2 = -3\tau + 2\chi$, и стало быть, любое четырёхмерное многообразие с неопределённой формой пересечения и нечётным $b_1 - b_2^+$ обладает рассматриваемой нами структурой. Почти двадцать лет назад Тёрстон показал, что не все симплектические многообразия кэлеровы, но его пример был неодносвязен, а про односвязные многообразия до последнего времени было мало что известно, и оба крайних вопроса — всякое ли односвязное четырёхмерное многообразие кэлерово и любая ли тройка $(X, [\omega], K)$ реализуется некоторой симплектической структурой — оставались открытыми. Отрицательный ответ на первый вопрос был получен Гомпфом [Go], который построил некэлерово симплектическое многообразие, гомотопически эквивалентное $K3$-поверхности, но отличаемое от нё при помощи инстантонных инвариантов. Работы Таубса дают отрицательный ответ на второй вопрос: на связных суммах X_{pq} с $p, q > 1$ и нечётным p существуют требуемые классы $[\omega]$ и K, но симплектической структуры на них нет, ибо все инварианты Зайберга - Виттена зануляются, что противоречит первому результату Таубса. И снова можно строить мириады примеров: даже если подлежащее многообразие X допускает симплектическую структуру, можно, тем не менее, указать множество пар $K, \omega \in H^2(X)$, которые нельзя реализовать *никакой* симплектической структурой. Такие многообразия занимают особое промежуточное положение. Для них всё ещё справедливы многие важные свойства инвариантов Зайберга - Виттена кэлеровых поверхностей, но возникает куда большее разнообразие: в то время как инварианты Зайберга - Виттена большинства кэлеровых поверхностей сводятся к каноническому классу, среди этих многообразий Стипжичем[4] [St], а также Морганом и Цабо[5] были найдены примеры таких, у которых есть множество различных базисных классов.

Таубс также рассматривает и четырёхмерные многообразия с $b_2^+ = 1$ (где инварианты Зайберга - Виттена связаны с камерами). В частности, он доказал два замечательных свойства комплексной прективной плоскости.

1) На $\mathbb{CP}^2$ не существует симплектической структуры с $K = \lambda\omega$, где $\lambda > 0$.

2) Всякая симплектическая структура на $\mathbb{CP}^2$, для которой $K = \lambda\omega$, где $\lambda \leqslant 0$, диффеоморфна некоторой кратности стандартной симплектической структуры.

Доказательство второго утверждения использует теорему Громова [Gr], которая сводит задачу к нахождению псевдоголоморфной кривой, представляющей образующий класс в $H^2(\mathbb{CP}^2)$. Вместе эти две теоремы Таубса показывают, что на гладком многообразии $\mathbb{CP}^2$ имеется, по существу, ровно одна симплектическая структура.

Неравенства присоединения и гипотеза Тома. Как мы уже говорили в п. Д3, одним из основных мотивов, направлявших работу Кронхеймера и Мровки, было изучение римановых поверхностей минимального рода в данном гомологическом классе на четырёхмерном многообразии и доказательство гипотезы о том, что минимальный род реализуется комплексными кривыми. В настоящее время эта гипотеза доказана при помощи инвариантов Зайберга - Виттена в достаточной общности, включающей в себя, в частности, изначальную «гипотезу Тома» о кривых на $\mathbb{CP}^2$. Более того, доказательство получилось намного проще старых предварительных соображений, основанных на инстантонной технике.

Исходным результатом здесь является неравенство присоединения для базисных классов Зайберга - Виттена. Если Σ — это ориентированная поверхность рода g, вложенная в четырёхмерное многообразие X с $b_2^+ > 1$ так, что $\Sigma \cdot \Sigma \geqslant 0$, то любой базисный класс $\varkappa \in H^2(X)$ должен удовлетворять неравенству

$$2g - 2 \geqslant \Sigma \cdot \Sigma + \varkappa \cdot \Sigma \, .$$

Для доказательства рассмотрим сначала случай $\Sigma \cdot \Sigma = 0$. Границей трубчатой окрестности Σ в этом случае будет трёхмерное многообразие $S^1 \times \Sigma$, и как объяснялось в п. Д5, инвариант

---

[4] A. Stipsicz

[5] Z. Szabo

Зайберга - Виттена для класса $\varkappa$ на X можно вычислить в терминах относительного инварианта, принимающего значения во флоеровской группе, возникающей при решении трёхмерных уравнений Зайберга - Виттена над $S^1 \times \Sigma$. Последние, как мы видели в п. Д5, сводятся к уравнению вихря для 1-расслоения степени $d = \varkappa \cdot \Sigma$ над Σ. Если $\varkappa \cdot \Sigma \geqslant 2g - 2$, то уравнение вихря не имеет решений. Тем самым, инвариант Зайберга - Виттена будет нулевым, и стало быть, $\varkappa$ не является базисным классом. Общий случай $\Sigma \cdot \Sigma = n > 0$ сводится к только что рассмотренному при помощи раздутий. Пусть $\widetilde{X}$ получается из X взятием связной суммы с n экземплярами $\overline{\mathbb{CP}}^2$ в n точках, лежащих на Σ, и пусть $\widetilde{\Sigma}$ получается из Σ взятием в тех же точках «связной суммы» с n проективными прямыми, лежащими в $\overline{\mathbb{CP}}^2$ (т. е. «собственный прообраз» Σ, если бы речь шла о настоящем комплексном раздутии). Тогда $\widetilde{\Sigma}$ будет иметь нулевое самопересечение в $\widetilde{X}$ и по теореме о базисных классах связной суммы для каждого базисного класса $\varkappa$ на X на $\widetilde{X}$ найдётся базисный класс $\widetilde{\varkappa}$ с $\widetilde{\varkappa} \cdot \widetilde{\Sigma} = \varkappa \cdot \Sigma - n$.

На кэлеровой поверхности X с $b_2^+ > 1$ канонический класс K_X является базисным, и для всякой комплексной кривой $C \subset X$ справедлива формула присоединения

$$2\,g(C) - 2 = C \cdot C + C \cdot K_X \,.$$

Таким образом, комплексные ривые имеют минимальный род в данном классе гомологий. Согласно результатам Таубса, то же самое справедливо и для псевдоголоморфных кривых на симплектическом четырёхмерном многообразии. Доказательство первоначальной гипотезы Тома для $\mathbb{CP}^2$ требует ещё некоторых дополнительных соображений, учитывающих камерную структуру на инвариантах Зайберга - Виттена (см. [KM3] и [MST]).

Новые ограничения на форму пересечения. Самым первым приложением инстантонов в четырёхмерной топологии было отнюдь не построение инвариантов, а совсем иного рода деятельность, направленная на доказательство того, что некоторые формы пересечения не могут быть реализованы на гладких четырёхмерных многообразиях. А именно, в [D1] было показано, что

1) никогда не реализуются исключительные определённые формы,

2) чётные формы вида $\lambda\,E_8 + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ с $\mu = 1, 2$ не реализуются на четырёхмерных многообразиях без 2-кручения в H_1.

Знаменитая «гипотеза ${}^{11}\!/_{8}$» утверждает, что на спинорном многобразии всегда

$$\mu \geqslant {}^{3\lambda}\!/_{2}$$

(равенство достигается для связных сумм $K3$-поверхностей). Результаты [D1] подтверждают эту гипотезу при $\lambda \leqslant 2$ в отсутствие 2-кручения. Кронхеймер и прочие при помощи инвариантов Зайберга - Виттена передоказали и усилили эти результаты.

Проще всего понять, почему отрицательно определённые чтные формы не реализуются на односвязном спинорном многобразии X. Кронхеймер рассматривает на таком многообразии пространство модулей решений уравнений Зайберга - Виттена для тривиального детерминантного 1-расслоения ξ. Его размерность есть $-2\,\tau(X) - 1$, где по нашему предположению сигнатура $\tau = -b_2(X)$. Если $b_2 > 1$, то в окрестности приводимого решения, отвечающего тривиальной плоской связности, пространство модулей устроено как конус над $\mathbb{CP}^{b_2 - 1}$. Если обозначить через h поднятие стандартной образующей $H^2(\mathbb{CP}^2)$ в когомологии пространства модулей, то интегрируя h^{b_2-1} по границе обрезанного пространства модулей мы приходим к противоречию. Общая схема рассуждения — ограничиться на линк осбенности пространства модулей, соответствующей приводимому решению, — осталась та же, что и в инстантонной теории.

Расширение этого результата на нечётные определённые формы Q основывается на недавнем результате Н. Элкиса [E], что каждая исключительная форма Q обладает *характеристического вектора* c, для которого $-c^2 < \operatorname{rk} Q$. Случай неопределённых чётных форм был передоказан Кронхеймером в слегка усиленном варианте без предположения об отсутствии 2-кручения. Его доказательство строится на на рассмотрении линка приводимого решения в различных теориях кобордизмов, что при больших μ наталкивается, похоже, на принципиальные трудности. Однако как раз в момент написания этого обзора М. Фурута анонсировал доказательство оценки «${}^{10}\!/_{8}$» для всех спинорных многообразий с $\mu \leqslant \lambda$. Доказательство Фуруты использует ту же общую схему и изощрённые алгебро-топологические вычисления в относительной теории кобордизмов.

Интересные обобщения предыдущего возникают при рассмотрении четырёхмерных многообразий с краем. В инстантонной теории таким образом получаются результаты, связывающие форму пересечения с когомологиями Флоера границы. Например, если границей четырёхмерного многообразия с отрицательно определённой исключительной формой пересечения служит трёхмерная гомологическая сфера Y, то её когомологии Флоера должны быть нетривиальны (в недавней работе Фроюшова эта техника используется для получения более конкретных утверждений про специальные трёхмерные многообразия Y). Если рассуждать точно таким же образом с нвариантами Зайберга - Виттена, то мы мы столкнёмся с новой ситуацией, где в игру вступает *η-инвариант края* Атьи - Патоди - Зингера. Так, если границей четырёхмерного многообразия Z с отрицательно определённой исключительной формой пересечения E_8 служит трёхмерная сфера Пуанкаре P, то группы Зайберга - Виттена - Флоера будут, как мы видели, тривиальны. Причина, по которой рассуждение Кронхеймера (приклеивание полубесконечной трубки к полному многообразию) не даёт противоречия применительно к Z, заключается в том, что индекс оператора Дирака на Z равен $\operatorname{ind}\left(\not{D}_Z\right) = \varrho(P,g) + {}^{\sigma(Z)}\!/_{8}$, где через $\varrho(P,g)$ обозначена разность между η-инвариантом и инвариантом Черна - Саймонса метрики g на P. Редукция $\varrho \pmod 2$ есть не что иное как инвариант Рохлина. Для сферы Пуанкаре инвариант Рохлина равен 1, так что расхождение со случаем замкнутого четырёхмерного многообразия при вычислении индекса будет возникать всегда.

§8. Заключительные замечния

Уравнения Зайберга - Виттена привели к глубочайшему прорыву в теории четырёхмерных многообразий. Можно сказать, что в какой-то мере они придали окончательный вид теории калибровочных инвариантов, ибо сняли большинство основных проблем, на решение которых были направлены исследования последнего десятилетия. При этом наиболее волнтельным откровением для математиков явилось, пожалуй, осознание необходимости усвоения идей квантовой теории поля, приведших к столь значительному прогрессу как здесь, так и в других областях (зеркальная симметрия, инварианты трёхмерных многообразий, конформная теория поля и т. д.), и без которых едва ли возможно добиться надлежащего понимания замысловатых структур, открытых Зайбергом и Виттеном.

В то же время есть несколько довольно чётко поставленных вопросов, которе пока остаются нерешёнными. Один из них: верно ли, что все односвязные многообразия имеют простой тип? Более широкая проблема состоит в понимании структуры инвариантов и связей между инстантонами и теорией Зайберга - Виттена для четырёхмерных многообразий с $b_2^+ = 1$. Как раз в момент ухода этой рукописи в печать Готтише [Got] анонсировал решение целого ряда глубоких вопросов, касающихся инстантонов, включая окончательную формулу для инвариантов $\mathbb{CP}^2$, обобщающую более ранние вычисления Котчика - Лиски [KL] и прочих. Формулы Готтише содержат модулярные формы, что (по крайней мере, в общих чертах) согласуется с картиной, возникающей в квантовой теории поля.

Ещё одна область, остающаяся пока без должного внимания, — это исследование инвариантов семейств четырёхмерных многообразий. При рассмотрении r-мерных семейств тех или иных уравнений должны бы получаться инварианты, представляющие собой, грубо говоря, классы когомологий из $H^r(\mathbb{B}\,\mathrm{Diff}(X))$, где $\mathbb{B}\,\mathrm{Diff}(X)$ — классифицирующее пространство группы диффеоморфизмов четырёхмерного многообразия X (см. [D4]). При этом всё то, что для обычных инвариантов вступает в игру при $b_2^+ = 1$, будет теперь возникать для любого X при $r \geqslant b_2^+ - 1$.

Другое направление — рассмотрение негладких четырёхмерных многообразий. Инстантонная теория распространяется на класс *квазиконформных* четырёхмерных многообразий, на которых функции перехода должны быть квазиконформными, но не обязательно гладкими (см. [DS]). Теория Зайберга - Виттена основана на спинорах и уравнении Дирака, а опыт показывает, что гладкость или, по крайней мере, C^1-структура (см. [Su]) при этом существенна. И хотя в настоящее время не найдено ни одного квазиконформного многообразия, на котором нельзя было бы ввести гладкую структуру, вполне возможно, что такой пример существует и отражает какие-то новые явления.

В заключение обратимся к вопросам собственно о четырёхмерных многообразиях как таковых. Несмотря на огромный прогресс, произошедший за последние два года, многие фундаментальные проблемы, похоже, всё ещё весьма далеки от своего решения. Один круг задач состоит в том, чтобы для ряда примеров четырёхмерных многообразий с одинаковыми калибровочными инвариантами (таких, как поверхности Катанезе - Манетти) либо научиться различать гладкие структуры, либо доказать диффеоморфность. До середины 1994 года здесь ещё оставались каки-то надежды на инстантоны. Друга задача — доказать или опровергнуть гипотезу «$^{11}\!/_{8}$». Наконец, самым амбициозным мечтанием по сию пору является создание сколь-нибудь систематической *позитивной техники*, которая позволяла бы, скажем, строить диффеоморфизмы между многообразиями или находить вложенные поверхности данного рода, и возможно, поставила бы точку в списке найденных инвариантов и препятствий. Проблеск надежды на это появился, возможно, в теории четырёхмерных симлектических многообразий.

В целом, все эти последние достижения дали ошеломляюще новое ви́дение четырёхмерной геометрии и топологии, но в высшей степени неясно, насколько близко оно подводит нас к окончательному пониманию предмета.

Список литературы

[AJ] *M. F. Atyah, I. C. Jeffrey. Topological Lagrangians and cohomology.* J. Geom. and Phys., **7** (1990), 119–136.

[A] *D. Austin. Equivariant Floer Theory for binary polyhedral spaces.* Preprint.

[AB] *D. Austin, P. Braam. Equivariant Floer cohomology.* Topology (готовится к печати).

[BDGW] *S.Bradlow, G. Daskalopoulos, O. Garcia-Prada, R. Wentworth. Stable augumentet bundles over Riemann surfaces.* Vector Bundles in Algebraic Geometry (Ed. by Hitchin, Newstead, Oxbury), Cambridge UP, 1995.

[D1] *S. Donaldson. Connections, cohomology and the intersection forms of four-manifolds.* J. Diff. Geom. **24** (1986), 275–341.

[D2] *S. Donaldson. Irrationality and the h-cobordism conjecture.* J. Diff. Geom. **26** (1987), 141–168.

[D3] *S. Donaldson. Polynomial Invariants for smooth four-manifolds.* Topology **29** (1990), 257–315.

[D4] *S. Donaldson. Yang - Mills invariants of four-manifolds.* Geometry of low-dimensional manifolds, Vol. 1 (Ed. Donaldson, Thomas), Cambridge UP, 1990.

[DK] *S. Donaldson, P. Kronheimer. The geometry of four-manifolds.* Oxford UP, 1990.

[DS] *S. Donaldson, D. Sullivan. Quasiconformal four-manifolds.* Acta Math., **163** (1989), 181–252.

[E] *N. Elkies. A characterisation of the $\mathbb{Z}^n$-lattice.* Math. Res. Letters (готовится к печати).

[FS] *R. Fintushel, R. Stern. The blow-up formula for Donaldson invariants* . Preprint (1994).

[FS] *R. Friedman, J. Morgan. Algebraic surfaces and four-manifolds: some conjectures and speculations.* Bull. Amer. Math. Soc., **18** (1988), 1–19.

[FS] *R. Friedman, Z. Qin. The smooth invariance of the Kodaira dimension of a complex surface.* Math. Res. Letters, **1** (1994), 369–376.

[Go] *R. Gompf. A new construction of symplectic manifolds.* Preprint (1994).

[Got] *L. Gottishe. Modular forms and Donaldson invariants for 4-manifolds with $b_2^+ = 1$.* Preprint (1995).

[Gr] *M. Gromov. Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds.* Invent. Math., **82** (1985), 305–347.

[GL] *M. Gromov, H.Lawson. The classification of simply-connected manifolds of positive scalar curvature.* Invent. Math., **111** (1980), 423–434.

[H] *N. Hitchin. The self-duality equations on a Riemann surface.* Proc. Lond. Math. Soc., **55** (1987), 59–126.

[JT] *A. Jaffe, C. Taubes. Vortices and Monopoles.* Birkhauser, (198o).

[K] *P. Kroheimer. Embedded surfaces in 4-manifolds.* Proc. Int. Congress Mathematicians, Kyoto (1990), 529–539.

[KL] *P. Kroheimer, P. Lisca. Instanton invariants of* $\mathbb{CP}^2$ *via topology.* Preprint.

[KM1] *P. Kroheimer, T. Mrovka. Gauge theory for embedded surfaces.* Topology, **32** (1993), 773–826.

[KM2] *P. Kroheimer, T. Mrovka. Recurrence relatioms and asymptotics for four-manifold invariants.* Bull. Amer. Math. Soc., **30** (1994), 215–221.

[KM3] *P. Kroheimer, T. Mrovka. The genus of embedded surface in the projective plane.* Math. Res. Letters, **1** (1994), 797–808.

[L] *C. LeBrun. Einstein metricsw and Mostow rigidity.* Math. Res. Letters, **2** (1995), 1–8.

[M] *M. Manetti. On some components of moduli spaces of surfaces of general type.* Composito Math., **92** (1994), 285–297.

[MST] *J. Morgan, Z. Szabó, C. Taubes. The Generalized Thom Conjecture.* (готовится к печати).

[PT] *В. Я. Підстригач, А. Н. Тюрин. Инварианты гладкой структуры на алгебраической поверхности.* Изв. РАН, сер. математ., **40:2** (1993), 267–351.

[S] *N. Seiberg.* . Phys. Letters, **318** (1993), 469.

[SW] *N. Seiberg, E. Witten. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in* $N = 2$ *Supersymmetric QCD.* Nucl. Phys. **B431** (1994), 581–640.

[St] *A. Stipsicz. Donaldson invariants of certain symplectic 4-manifolds.* Crelles J. (готовится к печати).

[Su] *D. Sullivan. Exterior d, the local index, and smoothability.* IHES preprint (1995).

[T1] *C. Taubes. The Seiberg - Witten Invariant and symplectic forms.* Math. Res. Letters **1** (1994), 809–822.

[T2] *C. Taubes. More constrains on symplectic manifolds from Seiberg - Witten equations.* Math. Res. Letters **2** (1995), 9–14.

[T3] *C. Taubes. The Seiberg - Witten and Gromov invariants.* Math. Res. Letters **2** (1995), 221–238.

[Th] *M. Thaddeus. Stable pairs, linear systems, and the Verlinde formula.* Invent. Math..**117** (1994), 217–353.

[VW] *E. Witten. A strong coupling test of S-duality.* Nucl. Phys. B (готовится к печати).

[W1] *E. Witten. Topological Quantun Field Theory.* Comm. Math. Phys., **117** (1988), 353–386.

[W2] *E. Witten. Supersymmetric Yang - Mills theory on a four-manifold.* J. Math. Phys., **35** (1994).

[W3] *E. Witten. Monopoles and 4-manifolds.* Math. Res. Letters **1** (1994), 764–796.