РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК
Институт Диффеотопии

СИММЕТРИИ и законы сохранения *уравнений математической физики*

Под редакцией
А. М. Виноградова и И. С. Красильщика

Москва „Факториал“ 1997

ББК 22.151
С37
УДК 514.7

С37 **Симметрии** и законы сохранения уравнений математической физики/А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов и др./Под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. — М.: Изд-во «Факториал», 1997. — 464 с. — ISBN 5-88688-019-4.

В этой книге описывается геометрическая теория дифференциальных уравнений. На многочисленных примерах авторы объясняют, что такое симметрии дифференциальных уравнений и законы сохранения. Книга предназначена как для математикиков-теоретиков, так и для специалистов в различных прикладных разделах математики, механнки и физики.

Библиогр. 157.

РФФИ

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 95-01-02825.

Научное издание

Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики.

Формат 60 × 90/16. Усл. печ. л. 29. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная.
Подписано к печати 15.06.1997. Тираж 1000 экз. Заказ № 1846

Издательство «Факториал», 117449, Москва, а/я 331; ЛР № 063537 от 22.07.1994.

Оргинал-макет подготовлен с использованием макропакета AP-TEX.

Отпечатано во 2-й типографии издательства «Наука». 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6.

ISBN 5-88688-019-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Классическая теория симметрий общих систем дифференциальных уравнений в частных производных была создана Софусом Ли более ста лет тому назад. Концепции группы и алгебры Ли, столь фундаментальные для современной математики, были обнаружены С. Ли именно в ее контексте, хотя многие современные специалисты по теории групп и алгебр Ли, даже и не подозревают об этом. В то время как основополагающие идеи и результаты С. Ли, касающиеся групп преобразований, были впоследствии разработаны в многочисленных работах, дифференциальные уравнения остались практически в стороне от этого развития. Первые после работ Ли систематические попытки применить теорию Ли к механике сплошной среды были сделаны Л. В. Овсянниковым и его сотрудниками в конце 50 и 60-х годах (см. [54]).

Новая, нелиевская эпоха в теории симметрий дифференциальных уравнений в частных производных началась с открытия «вполне интегрируемых» систем и последующего развития метода обратной задачи рассеяния [1, 31, 53, 104]. Как хорошо известно, каждое вполне интегрируемое уравнение порождает целую иерархию, состоящую из его «высших аналогов». Изучение этих аналогов позволило интерпретировать их как симметрии некоторого уравнения. Однако этот подход никак не вписывается в рамки лиевской теории. Развитая к этому моменту геометрия пространств джетов бесконечного порядка позволила разработать концепцию «высших симметрий».

Нестрого говоря, классические, т. е. лиевские симметрии описываются аналитически в терминах зависимых и независимых переменных и их производных первого порядка, тогда как нелиевские симметрии могут зависеть от производных сколь угодно высокого порядка. Более существенно, однако, то, что классические инфинитезимальные симметрии являются векторными полями на подмногообразии соответствующего пространства джетов, определяемом исходным уравнением, в то время как «высшие», т. е. неклассические симметрии являются классами когомологий некоторого естественного дифференциального комплекса, определенного на так называемом бесконечном продолжении исходного уравнения. По этой причине высшая инфнннтезимальная симметрия заданного уравнения, вообще говоря, не порождает однопараметрической группы (локальных) диффеоморфизмов на пространстве его решений. Иными словами, традиционная связь между группами и алгебрами Ли больше не имеет места в рассматриваемом контексте. Однако она продолжает существовать «виртуально» и материализуется каждый раз, когда в задаче возникают надлежащие дополнительные условия (например, при рассмотрении краевых задач). Этот неклассический, когомологический аспект оказывается гораздо более существенным при построении теории законов сохранения. Заметим, что a'priori было трудно даже предположить, что теория сохраняющихся величин (интегралов, токов и т. п.), допускаемых заданной системой дифференциальных уравнений в частных производных, может опираться на гомологическую алгебру и использовать в качестве основного аппарата теорию спектральных последовательностей и окружающую ее гомологическую алгебру.

Основы теории высших симметрий и законов сохранения были развиты одним из нас в 1975–77 гг. [23, 15, 18]. В последующие годы было осуществлено ее вычислительное тестирование, в результате которого были установлены достаточно эффективные методы вычисления высших симметрий и законов сохранения для конкретных систем дифференциальных уравнений в частных производных [22, 141].

Кроме того, были разработаны наиболее важные теоретические детали [19], позволившие обнаружить удивительный параллелизм между исчислением векторных полей и дифференциальных форм на гладких многообразиях, с одной стороны, и высших симметрий и законов сохранения, с другой. Это позволило предположить, что такой параллелизм имеет гораздо более широкие рамки и может быть распространен на все естественные понятия дифференциального исчисления. Исследование этой гипотезы привело к открытию вторичного дифференциального исчисления, являющегося, с одной стороны, мощным инструментом исследования общих систем дифференциальных уравнений в частных производных, а с другой — представляющегося тем естественным языком, на котором современная квантовая теория поля может быть построена на непертурбативной основе.

Высшие симметрии и законы сохранения являются «локальными» величинами, т. е. зависящими от неизвестных функций (в физике — «полей») и их производных сколь угодно высокого порядка. Однако в этих рамках не оказывается места для таких важных понятий, как, например, преобразование Беклунда и операторы рекурсии, по той причине, что в большинстве практически интересных случаев они требуют привлечения «нелокальных» величин, т. е. величин типа интегралов от локальных объектов. Кроме того, разработка теории симметрий и законов сохранения для интегро-дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, в которых нелокальные величины фигурируют с самого начала, представляет независимый интерес. Желаемое расширение теории нелокальными величинами естественным образом достигается после введения понятия накрытия (точнее, накрывающей системы дифференциальных уравнений) [113].

Основы теории высших симметрий*) и соответствующие вычислительные алгоритмы в настоящее время разработаны достаточно хорошо. Что касается последних, то здесь следует различать алгоритмические методы, ориентированные на компьютерные приложения (см., например, сборник [141]), и аналитическую технику исследования различных модельных систем. Здесь нельзя не упомянуть работы «уфимской школы» ([50, 61, 64, 139] и многие другие). Результаты анализа конкретных уравнений и систем разбросаны по необозримому множеству публикаций. Наиболее представительную (но, к сожалению, постоянно устаревающую) сводку можно найти в энциклопедии [91, 92].

Сейчас существует немало книг, посвященных геометрическим аспектам дифференциальных уравнений и, в частности, их симметриям (см. [86, 78, 157, 33, 54, 55, 140]). Наиболее последовательное изложение геометрических и алгебраических основ теории симметрий и законов сохранения нелинейных дифференциальных уравнений содержится в монографиях [24, 111] и работе [148], однако отнести их к категории «user-friendly» при всем желании трудно. Частично недостатки этих текстов компенсируются статьей [147], а также работами [112, 113] по нелокальной теории. Но и они не компенсировали существующие пробелы в полной мере, к тому же оставаясь малодоступными для русскоязычных читателей.

Поэтому идея написания более популярного, и в то же время математически строгого текста по симметриям и законам сохранения возникла еще в 80-е годы, сразу после выхода в свет книг [24, 111]. Тогда же эта идея и была частично реализована и были написаны первые версии некоторых глав той книги, которую

---

*) В современной литературе используется также термин «обобщенные симметрии» (например, в [55]) и «преобразования Ли — Беклунда» (например, в [33]).

Вы держите сейчас в руках. Так, С. В. Дужиным был написан текст по симметриям обыкновенных уравнений и черновой вариант главы о классических симметриях, А. В. Бочаров написал главу об уравнениях первого порядка, а И. С. Красильщик — о высших симметриях. В силу целого ряда «объективно-исторических причин» этот проект не мог тогда реализоваться, и мы смогли вернуться к нему только через десять лет.

За это время изменилось многое, включая наши взгляды на некоторые аспекты алгебро-геометрических основ теории симметрий. В связи с этим часть старых текстов была значительно переработана: основываясь на тексте А. В. Бочарова, Ю. Н. Торхов написал окончательный вариант гл. 2, А. В. Самохину принадлежит третья глава в ее нынешнем виде, а И. С. Красильщик подготовил обновленный текст гл. 4. Мы посчитали, что книга будет неполной, если не включить в нее материал о законах сохранения, и соответствующая глава была написана А. М. Вербовецким. Наконец, гл. 6 была написана Н. Г. Хорьковой и В. Н. Четвериковым (ему принадлежит параграф, посвященный симметриям интегро-дифференциальных уравнений). Мы также дополнили основной материал книги приложением, содержащим сокращенный и адаптированный к общему контексту перевод статьи А. М. Виноградова о вторичном дифференциальном исчислении и открывающим более широкую перспективу геометрической теории уравнений в частных производных.

В этой книге излагаются основы теории высших и нелокальных симметрий и законов сохранения для общих систем дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. Сюжет книги разворачивается вокруг следующих тем.

Что такое высшие и нелокальные симметрии и законы сохранения, допускаемые заданной системой дифференциальных уравнений?

Каковы методы их эффективного вычисления?

Как можно использовать уже найденные симметрии и законы сохранения.

Что касается последнего пункта, то мы вынуждены ограничиться лишь самыми простыми и непосредственными приложениями построенной теории. Более подробное их изложение потребовало бы написания еще пары томов, которые мы надеемся написать со временем.

В книге мы постарались учесть интересы двух групп наших возможных читателей: во-первых, тех, кто более интересуется теоретическими аспектами, и, во-вторых, тех, кого прежде всего интересует прикладная сторона. Последним, а среди них мы видим специалистов по математической и теоретической физике, теории поля, механике сплошных сред, рекомендуется при чтении пропускать доказательства и обсуждение концептуальных тонкостей и непосредственно обращаться к описанию тех конкретных алгоритмов и методов, которые требуются при практических вычислениях. Мы надеемся, что они изложены достаточно ясно. С другой стороны, мы не сочли возможным сделать изложение более популярным, прибегнув к стандартному в математической физике языку локальных координат. Для понимания концептуальной стороны развиваемой теории, так же как и для эффективного использования соответствующих алгоритмов, это было бы смертельно. Мы можем констатировать, что очень многие работы, написанные по тематике этой книги, являются, по существу, скорее борьбой с координатами, чем с реальными проблемами.

Мы надеемся, что, прочтя эту книгу, Вы не только по-иному сможете взглянуть на различные проблемы, относящиеся к нелинейным дифференциальным уравнениям, но и, взяв в руки карандаш и бумагу (или подойдя к компьютеру и обратившись к одному из доступных пакетов для символьных вычислений), найти что-то новое и интересное в Ваших собственных задачах. Формально говоря, чтобы заняться поиском симметрий и законов сохранения, достаточно знания математики в рамках стандартного вузовского курса и вычислительных формул, содержащихся в книге. Для настоящего же понимания необходимы более углубленные сведения из

геометрии гладких многообразий и векторных расслоений над ними [3, 51, 56, 32, 66, 67],

симплектической геометрии [25, 5],

теории групп и алгебр Ли [11, 57, 63],

коммутативной алгебры [6],

гомологической алгебры [9, 27, 29, 46, 126].

Кроме того, из «идеологических» соображений мы рекомендуем также получить хотя бы предварительные представления об алгебраической геометрии [74] и теории категорий [27, 46].

Авторы этой книги — многолетние участники семинара по алгебро-геометрической теории нелинейных дифференциальных уравнений, работающего на механико-математическом факультете МГУ с конца 60-х годов. От лица всего авторского коллектива мы хотели бы поблагодарить других участников семинара, общение с которыми было чрезвычайно полезно для формирования общей концепции книги и прояснения некоторых частных вопросов. В особенности это относится к М. М. Виноградову, Д. М. Гесслеру, В. В. Лычагину, В. Е. Шемарулину и В. А. Юмагужину.

Наша приятная обязанность — поблагодарить также Российский фонд фундаментальных исследований, без финансовой поддержки которого эта книга не увидела бы свет на русском языке. При написании книги работа А. М. Вербовецкого, И. С. Красильщика и А. В. Самохина (грант № 97–01–00462), а также Ю. Н. Торхова (грант № 96–01–01360), частично поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований.

В заключение отметим, что эта книга может рассматриваться как введение в серию монографий, посвященных изложению вторичного дифференциального исчисления, осуществляемой по программе Института Диффеотопии Российской Академии Естественных Наук.

А. М. Виноградов

И. С. Красильщик

ГЛАВА 1

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Среди всех дифференциальных уравнений два класса — обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией — выделяются целым рядом свойств, облегчающих их изучение и делающих их теорию более доступной с точки зрения приложений. В этой главе мы рассмотрим геометрический подход к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Здесь, уже в простейших ситуациях, мы введем понятия, которые будут широко использоваться на протяжении всей книги. Мы покажем также, что геометрическая теория симметрий позволяет понять и обобщить стандартные приемы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и получить новые результаты в этом направлении.

§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения с точки зрения геометрии

Хорошо известно (см., например, [4]), что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной,

$$u' = f(x, u) \tag{1.1}$$

геометрически можно представлять как векторное поле на плоскости (x, u). Для этого в каждой точке (x_0, u_0) нужно рассмотреть вектор с координатами $(1, f(x_0, u_0))$, которому отвечает оператор дифференцирования по направлению этого вектора. Траектории поля $\dfrac{\partial}{\partial x} + f(x_0, u_0)\dfrac{\partial}{\partial u}$

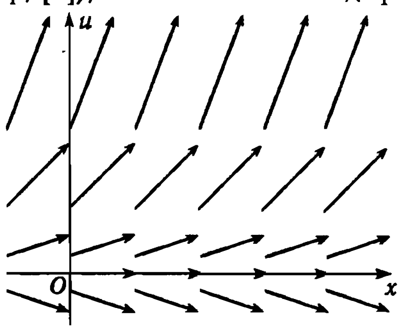

Рис. 1.1. Векторное поле $X = \dfrac{\partial}{\partial x} + u\dfrac{\partial}{\partial u}$, соответствующее дифференциальному уравнению $u' = u$.

называются интегральными кривыми уравнения (1.1). Они представляют собой графики решений рассматриваемого уравнения (рис. 1.1).

Для того, чтобы интерпретировать таким образом уравнение

$$F(x, u, u') = 0, \tag{1.2}$$

нужно разрешить его относительно производной u'. При этом возникает следующее затруднение: некоторым значениям переменных x, u в силу уравнения (1.2) может соответствовать несколько, или ни одного значения переменной u'. Кроме того, в окрестности особой точки (т. е. точки, в которой $\dfrac{\partial F}{\partial u'} = 0$, и поэтому теорема о неявной функции не применима) функция, выражающая u' через x и u, даже если она определена, может не быть гладкой.

Пример 1.1. Пусть

$$F(x, u, u') = u'^2 + u^2 + x^2 - 1.$$

Тогда $u' = \pm\sqrt{1 - x^2 - u^2}$. Эта функция определена в круге $x^2 + u^2 \leqslant 1$, причем в его внутренних точках она принимает по два значения, а на границе круга ее производные обращаются в бесконечность (рис. 1.2).

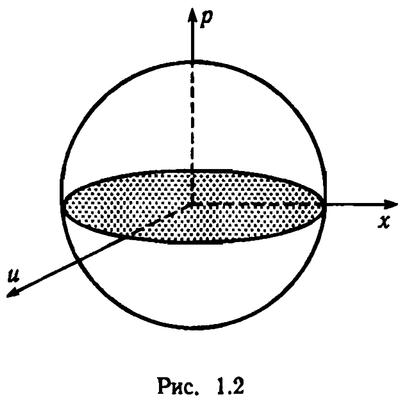

Рис. 1.2

Эти затруднения можно преодолеть следующим образом. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, y, p) и поверхность $\mathcal{E}$, заданную соотношением $F(x, u, p) = 0$. Всякому решению $u = f(x)$ уравнения (1.2) отвечает лежащая на этой поверхности кривая L_f, задаваемая уравнениями

$$u = f(x), \quad p = f'(x). \tag{1.3}$$

На этой кривой координата x может быть принята за параметр, т. е. проекция этой кривой на ось x есть диффеоморфизм. Кроме того, функции, выражающие координаты u и p через параметр x, не произвольны: одна из них есть производная от другой. Поэтому не всякая кривая в $\mathbb{R}^3$ может быть представлена в виде (1.3).

Так как $p_0 = f'(x_0)$, то касательный вектор к кривой (1.3) в точке

$a = (x_0, u_0, p_0)$ представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} + p_0 \frac{\partial}{\partial u} + f''(x_0) \frac{\partial}{\partial p}. \tag{1.4}$$

Поэтому этот вектор лежит в плоскости, заданной уравнением

$$u - u_0 = p_0(x - x_0), \tag{1.5}$$

т. е. в данной точке a он аннулирует 1-форму

$$\omega = du - p\,dx. \tag{1.6}$$

При этом очевидно, что линейиая оболочка всевозможиых векторов вида (1.4) заметает всю плоскость (1.5).

Справедливо и обратное утверждение: всякая кривая в $\mathbb{R}^3$, являющаяся интегральной кривой для 1-формы ω (или, что то же самое, для распределения C коразмерности 1, заданного формой ω) и диффеоморфно проектирующаяся на ось x, может быть представлена в виде (1.3).

Итак, геометрическая структура, которую нужно задать на пространстве $\mathbb{R}^3$ для того, чтобы в нем естественно выделялся класс кривых, соответствующих решениям обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, — это двумерное распределение C, заданное 1-формой (1.6) и называемое *распределением Картана*.

При помощи этого распределения понятие решения дифференциального уравнения переформулируется следующим образом: решение уравнения $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$ — это интегральная кривая распределения C, лежащая на поверхности $\mathcal{E}$ и без особенностей проектирующаяся на ось x.

Заметим, что 2-форма $d\omega = dx \wedge dp$ не может быть представлена в виде $\gamma \wedge \omega$, где γ — некоторая 1-форма, и поэтому по теореме Фробениуса (см., например, [66, 67]) распределение Картана не интегрируемо. Следовательно, его максимальные интегральные многообразия одномерны, а множество точек, в которых плоскости распределения C касаются поверхности $\mathcal{E}$, является замкнутым нигде не плотным подмножеством $\mathcal{E}$. Точки этого множества назовем *особыми*. Таким образом, множество неособых точек поверхности $\mathcal{E}$ открыто и всюду плотно.

Особые точки данного уравнения (1.2) можно найти из условия колинеарности дифференциала dF и формы ω в искомой точке. Это условие можно записать в виде двух соотношений

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

Если точка $a \in \mathcal{E}$ неособая, то пересечение касательной плоскости к поверхности $\mathcal{E}$ в точке a и плоскости C_a распределения C является некоторой прямой l_a, касающейся поверхности $\mathcal{E}$ в точке a. Тем самым на $\mathcal{E}$ возникает поле направлений (одномерное распределение) $a \mapsto l_a$, которое мы будем обозначать через $C_{\mathcal{E}}$. Если некоторая кривая Г является интегральной для поля направлений $C_{\mathcal{E}}$, то это эквивалентно тому, что Г является интегральной кривой распределения C и лежит на $\mathcal{E}$ (если выбросить из рассмотрения особые точки поверхности $\mathcal{E}$). Поэтому можно заключить, что решения уравнения $\mathcal{E}$ — это интегральные кривые поля направлений $C_{\mathcal{E}}$, без вырождения проектирующиеся на ось x.

Заметим, что, рассматривая произвольные интегральные кривые распределения $C_{\mathcal{E}}$ как многозначные решения уравнения $\mathcal{E}$, можно отказаться от условия невырожденности проекции на ось x.

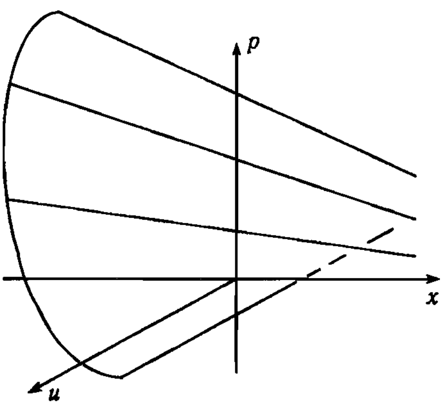

Рис. 1.3. График поверхности $(3x-2u)p=u$, при $p \geqslant -1/2$.

Пример 1.2. Кривая, заданная уравнениями

$$\begin{cases} u^3 - u + x = 0, \\ 3u^2 p - p + 1 = 0, \end{cases}$$

лежит на поверхности

$$(3x-2u)\,p = u$$

и является интегральной для распределения Картана, но не имеет вида (1.3). Следовательно, она представляет собой многозначное решение уравнения $(3x-2u)u' = u$.

Пример 1.3. С геометрической точки зрения уравнение

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2 = 1$$

является цилиндром $\mathcal{E}$ (рис. 1.4) в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (x, u, p), определяемым соотношением $p^2+u^2=1$. На этом цилиндре можно ввести систему координат (x, φ), связанную с переменными (u, p) соотношениями

$$u = \sin\varphi, \quad p = \cos\varphi.$$

Тогда ограничение формы $\omega = du - p\,dx$ имеет вид

$$\omega_{\mathcal{E}} = \cos\varphi\, d\,(\varphi - x).$$

Распределение C касается цилиндра $\mathcal{E}$ в тех точках, где $\omega_{\mathcal{E}}$ обращается в нуль. Очевидно, эти точки образуют пару прямых, которые

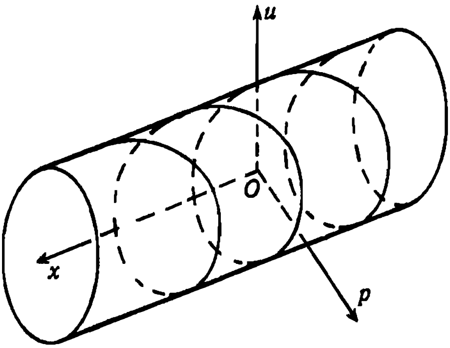

Рис. 1.4

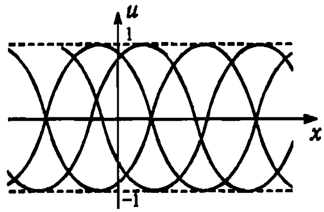

Рис. 1.5

являются пересечением $\mathcal{E}$ с плоскостью $p = 0$ и которые можно рассматривать как особые решения $u = \pm 1$ данного уравнения. Интегральные кривые распределения $C_{\mathcal{E}}$, которые можно найти из уравнения $\omega_{\mathcal{E}} = 0$, сводящегося к уравнению $d\,(\varphi - x) = 0$, являются винтовыми линиями

$$\varphi = x + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Все они проектируются на ось x без особенностей и представляют собой обычные решения уравнения $\mathcal{E}$. Выразив φ через u, мы можем записать эти решения в явном виде:

$$u = \sin(x + c).$$

В проекции на плоскость (x, u) решения рассматриваемого уравнения заполняют полосу $|u| \leqslant 1$ (рис. 1.5).

Особые решения (прямые $u = \pm 1$) являются огибающими синусоид.

Пример 1.4. Рассмотрим уравнение Клеро

$$u - x\frac{du}{dx} = f\left(\frac{du}{dx}\right),$$

где f — некоторая гладкая функция. Вид поверхности $\mathcal{E} = \{u - xp = f(p)\}$ зависит от конкретного выбора функции f. В качестве координат на $\mathcal{E}$ можно взять переменные x, p. Форма ω в этих координатах имеет вид

$$\omega_{\mathcal{E}} = d(xp + f(p)) - p\,dx = (x + f'(p))\,dp.$$

Эта форма равна нулю в точках поверхности $\mathcal{E}$, принадлежащих кривой $x = -f'(p)$. Проекция этой кривой на плоскость (x, u) будет графиком особого решения уравнения Клеро. Для того, чтобы указать его аналитический вид, из уравнения $x = -f'(p)$ нужно найти p как функцию от x и затем подставить ее в уравнение $u - xp = f(p)$. Например, если $f(p) = p^\alpha$, $\alpha < 0$, то

$$u = (1-\alpha)\left(-\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}.$$

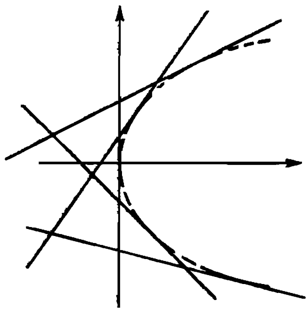

Рис. 1.6

Отметим, что особое решение может быть многозначным (например, $u = \pm 2\sqrt{x}$ при $\alpha = -1$, рис. 1.6).

Интегральные кривые распределения $C_\mathcal{E}$ на множестве $\mathcal{E}_0$ находятся из уравнения $\omega_\mathcal{E} = 0$ при условии, что $x + f'(p) \neq 0$.

Отсюда получаем, что $dp = 0$, $p = c$ и $u = cx + f(c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Как и в примере 1.3, мы видим, что особое решение является огибающей однопараметрического семейства неособых решений.

Однако отметим, что кривая, получаемая при формальном нахождении огибающей, т. е. исключении p из системы уравнений

$$\begin{aligned} &F(x, u, p) = 0, \\ &\frac{\partial F(x, u, p)}{\partial p} = 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

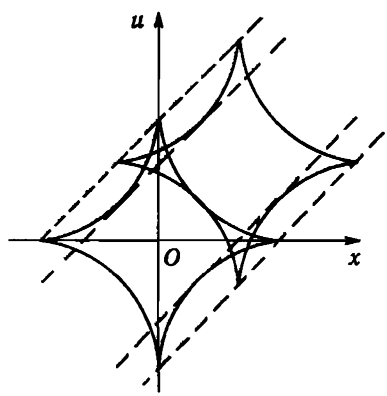

Рис. 1.7

может содержать также точки возврата и точки касания интегральных кривых*).

Рассмотрим, например, уравнение [60]

$$(x-u)^2\left(1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2\right)^3 = a^2\left(1 + \left(\frac{du}{dx}\right)^3\right)^2, \qquad a > 0.$$

*) Более подробно о нахождении огибающих см. [68, 58], об особых решениях дифференциальных уравнений см. [65, 60, 2].

Нетрудно проверить, что решениями этого уравнения являются функции, заданные соотношениями

$$(x-c)^{2/3}+(y-c)^{2/3}=a^{2/3},$$

а решения системы (1.7) имеют вид

$$x-u=\pm a \qquad \text{или} \qquad x-u=\pm a/\sqrt{2}.$$

Это семейство кривых содержит как огибающие решений, так и точки возврата и точки касания интегральных кривых (рис. 1.7).

§ 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения произвольного порядка

Рассуждения, аналогичные тем, которые мы привели в § 1, позволяют построить геометрическую теорию обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка.

Уравнение

$$F\left(x, u, \frac{du}{dx}, \ldots, \frac{d^k u}{dx^k}\right)=0$$

можно рассматривать как гиперповерхность в $(k+2)$-мерном пространстве $\mathbb{R}^{k+2}$ с координатами $(x, u, p_1, \ldots, p_k)$, заданную соотношением $F(x, u, p_1, \ldots, p_k)=0$.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^{k+2}$ распределение размерности 2, задаваемое набором 1-форм

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= du - p_1\,dx,\\
\omega_1 &= dp_1 - p_2\,dx,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\omega_{k-1} &= dp_{k-1} - p_k\,dx.
\end{aligned}$$

При $k=1$ это распределение совпадает с распределением, рассмотренным нами в § 1, поэтому мы также будем называть его *распределением Картана* и обозначать через $\mathcal{C}$.

Заметим, что кривая в пространстве $\mathbb{R}^{k+2}$ имеет вид графика некоторой функции $u=f(x)$ и ее производных

$$L_f=\left\{u=f(x),\ p_1=f'(x), \ldots, p_k=f^k(x)\right\}$$

в том и только том случае, когда эта кривая без вырождения проектируется на ось x и является интегральной кривой для распределения $\mathcal{C}$ (в § 1 мы доказали этот факт для $k=1$).

В терминах распределения Картана $\mathcal{C}$ можно увидеть геометрическую интерпретацию известного приема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, не содержащих явно независимую переменную.

Пример 2.1 (см. также [55]). Рассмотрим уравнение 2-го порядка вида $F\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right) = 0$ или, иначе говоря, гиперповерхность $\mathcal{E}$, задаваемую в пространстве $\mathbb{R}^4$ уравнением

$$F(u, p_1, p_2) = 0.$$

На эту гиперповерхность ограничим распределение, задаваемое 1-формами

$$\omega_0 = du - p_1 dx, \quad \omega_1 = dp_1 - p_2 dx. \tag{2.1}$$

Гиперповерхность $\mathcal{E}$ и формы ω_0, ω_1 (а значит, и распределение $\mathcal{C}$) инвариантны относительно преобразований параллельного переноса пространства $\mathbb{R}^4$ вдоль оси x, т. е. относительно преобразований вида t_c: $(x, u, p_1, p_2) \mapsto (x + c, u, p_1, p_2)$, где c — некоторая постоянная. Это позволяет профакторизовать рассматриваемое уравнение по переменной x (точнее, по действию однопараметрической группы T параллельных переносов t_c), от которой уравнение не зависит.

Иными словами, рассмотрим отображение факторизации π, которое отображает пространство $\mathbb{R}^4$ на 3-мерное пространство $\mathbb{R}^4/T$,

$$\pi\colon\ (x, u, p_1, p_2) \mapsto (u, p_1, p_2).$$

При этом отображении гиперповерхность $\mathcal{E}$ отобразится на гиперповерхность $\mathcal{E}/T$, причем образ гиперповерхности в пространстве $\mathbb{R}^4/T$ будет задаваться тем же уравнением $F(u, p_1, p_2) = 0$. Плоскости распределения $\mathcal{C}$ при отображении факторизации проектируются без вырождения на плоскости пространства $\mathbb{R}^4/T$, определяя в последнем двумерное фактор-распределение $\mathcal{C}/T$. Это распределение может быть задано при помощи 1-формы на $\mathbb{R}^4/T$, которую можно получить, рассматривая, например, следующую линейную комбинацию соотношений (2.1):

$$\widetilde{\omega} = \omega_1 - \frac{p_2}{p_1}\omega_0 = dp_1 - \frac{p_2}{p_1}du.$$

Итак, в результате факторизации мы получили 3-мерное пространство R^4/T, 2-мерную поверхность $\mathcal{E}/T \subset \mathbb{R}^4/T$ и 2-мерное распределение, задаваемое уравнением $\widetilde{\omega} = 0$, т. е. обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Для полного соответствия с § 1 нам осталось отождествить форму $\widetilde{\omega}$ с канонической формой ω. Для этого необходимо ввести в $\mathbb{R}^4/T$ координаты

$$x' = u, \quad u' = p_1, \quad p' = \frac{p_2}{p_1}. \tag{2.2}$$

Тогда получим, что $\widetilde{\omega} = du' - p'dx'$. В новых координатах уравнение поверхности $\mathcal{E}/T$ имеет вид

$$F'(x', u', p') = 0,$$

где $F'(x', u', p') = F(x', u', p'u')$.

Такнм образом, отображение факторизации π отображает исходное уравнение второго порядка в уравнение первого порядка — так называемое факторуравнение

$$F'\left(x', u', \frac{du'}{dx'}\right) = 0.$$

В этом и состоит геометрический смысл замены координат (2.2).

Замечание 2.1. Распределение $\mathcal{C}/T$ можно задать другой 1-формой. Рассмотрим, например, форму

$$\widetilde{\omega} = \omega_0 - \frac{p_1}{p_2}\omega_1 = du - \frac{p_1}{p_2}dp_1 = du - \frac{1}{p_2}d\left(\frac{p_1^2}{2}\right).$$

Чтобы отождествить ее с канонической формой ω, мы должны сделать замену координат

$$x' = \frac{p_1^2}{2}, \quad u' = u, \quad p' = \frac{1}{p_2},$$

которая сведет исходное уравнение к уравнению первого порядка

$$F\left(u', \pm\sqrt{2x'}, \frac{dx'}{du'}\right) = 0.$$

Подобным образом можно на единицу понизить порядок любого уравнения, явно не зависящего от x. Факторизуя по x пространство $\mathbb{R}^{k+2}$ с координатами $x, u, p_1, \ldots, p_k$, мы получнм пространство $\mathbb{R}^{k+2}/T$ с координатами $u, p_1, \ldots, p_k$. При этом распределение Картана $\mathcal{C}$ на $\mathbb{R}^{k+2}$ отобразится на двумерное фактор-распределение $\mathcal{C}/T$, задаваемое в $\mathbb{R}^{k+2}/T$ системой форм

$$\widetilde{\omega}_0 = \omega_1 - \frac{p_2}{p_1}\omega_0 = dp_1 - \frac{p_2}{p_1}du,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{\omega}_{k-2} = \omega_{k-1} - \frac{p_k}{p_1}\omega_0 = dp_{k-1} - \frac{p_k}{p_1}du.$$

В пространстве $\mathbb{R}^{k+2}/T$ перейдем от координат $u, p_1, \ldots, p_k$ к координатам $x', u', p'_1, \ldots, p'_{k-1}$ таким образом, что в новых координатах фактор-распределение $\mathcal{C}/T$ задается формами

$$\widetilde{\omega}'_0 = du' - p'_1\,dx', \quad \ldots, \quad \widetilde{\omega}'_{k-2} = dp'_{k-2} - p'_{k-1}dx'.$$

Это построение проведем по индукции, полагая, что x', u' и $p' = p'_1$ определены по формулам (2.2). Так как

$$dp'_1 = d\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{1}{p_1}\,dp_2 - \frac{p_2}{p_1^2}\,dp_1,$$

то в качестве формы $\widetilde{\omega}'_1$ можно взять выражение

$$\widetilde{\omega}'_1 = \frac{1}{p_1}\,\widetilde{\omega}_1 - \frac{p_2}{p_1^2}\,\widetilde{\omega}_0 = dp'_1 - \left(\frac{p_3}{p_1^2} - \frac{p_2^2}{p_1^3}\right)du.$$

Поэтому

$$p'_2 = \frac{p_3}{p_1^2} - \frac{p_2^2}{p_1^3}.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем искомую замену переменных. Если при этом

$$F(u, p_1, \ldots, p_k) = 0$$

— исходное уравнение порядка k, то, заменив в этой записи переменные $u, \ldots, p_k$ на $x', u', \ldots, p'_{k-1}$, мы получим факторуравнение, имеющее порядок $k - 1$.

Ранее уже отмечалось, что поскольку распределение Картана на $\mathbb{R}^{k+2}$ двумерно, его ограничение $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ на гиперповерхность $\mathcal{E}$ одномерно во всех точках, кроме нигде не плотного множества особых точек, в которых касательная плоскость к поверхности $\mathcal{E}$ содержит плоскость распределения $\mathcal{C}$. Следовательно, распределение $\mathcal{C}_\mathcal{E}$ можно задать при помощи одного векторного поля. Найдем явное выражение одного из таких полей в координатах $(x, u, p_1, \ldots, p_k)$, определив попутно условия, позволяющие отличить особые точки от неособых.

Пусть

$$Y = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta_0\frac{\partial}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial}{\partial p_1} + \cdots + \beta_k\frac{\partial}{\partial p_k}$$

— поле, лежащее в распределении $\mathcal{C}$ и касающееся поверхности $\mathcal{E}$. Условие принадлежности поля Y распределению Картана означает, что

$$\omega_i(Y) = 0, \qquad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

т. е. для всех i кроме $i=k$, выполнено равенство $\beta_i = p_{i+1}\alpha$. Условие касания полем Y поверхности $\mathcal{E}$ равносильно тому, что $Y(\mathcal{E})|_{\mathcal{E}} = 0$, т. е. для некоторой функции λ имеет место равенство

$$\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + p_2\frac{\partial F}{\partial p_1} + \ldots + p_k\frac{\partial F}{\partial p_{k-1}}\right) + \beta_k\frac{\partial F}{\partial p_k} = \lambda F. \quad (2.3)$$

Очевидно, что для выполнения этого равенства достаточно положить

$$\lambda = 0, \quad \alpha = -\frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \beta_k = \frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + \ldots + p_k\frac{\partial F}{\partial p_{k-1}}.$$

Итак, искомое векторное поле можно выбрать в виде

$$Y_F = -\frac{\partial F}{\partial p_k}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + \ldots + p_k\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}\right) + \\ + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + \ldots + p_k\frac{\partial F}{\partial p_{k-1}}\right)\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

В частности, для уравнения первого порядка $F(x, u, p) = 0$ поле Y_F имеет вид

$$Y_F = -\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p}. \quad (2.4)$$

Если уравнение разрешено относительно производной, т. е. если $F = -p + f(x, u)$, то $\mathcal{E} = \{p = f(x, u)\}$ и

$$Y_F = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + pf_u)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Проекция этого поля на плоскость переменных (x, u) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} + f(x, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Траектории полученного поля, как хорошо известно, являются интегральными кривыми данного уравнения.

Точка P уравнения $\mathcal{E}$ является особой, если соотношение (2.3) в этой точке выполняется для любых значений α и β_k. Поскольку правая часть этого соотношения обращается в нуль на уравнении $\mathcal{E}$, то равенства

$$F = \frac{\partial F}{\partial x} + p_1\frac{\partial F}{\partial u} + \ldots + p_k\frac{\partial F}{\partial p_{k-1}} = \frac{\partial F}{\partial p_k} = 0$$

являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы рассматриваемая точка была особой.

Таким образом, особые точки гиперповерхности $\mathcal{E}$ — это те точки, в которых поле Y_F обращается в нуль.

Поле Y_F называется *характеристическим полем* уравнения $\mathcal{E}$. Проекции его траекторий на плоскость переменных x, u представляют собой графики решений этого уравнения.

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение $(3x-2u)u' = u$. Тогда $F = (3x-2u)u' - u$ и по формуле (2.4) мы получаем, что

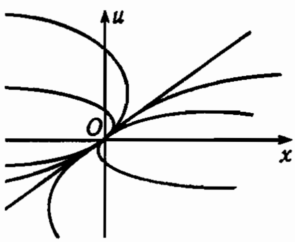

Рис. 1.8

$$Y_F = (2u-3x)\frac{\partial}{\partial x} + p(2u-3x)\frac{\partial}{\partial u} + (2p-2p^2)\frac{\partial}{\partial p} = (2u-3x)\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} + (2p-2p^2)\frac{\partial}{\partial p}$$

(последнее равенство имеет место на уравнении, т. е. на поверхности $\mathcal{E} = \{(3x-2u)p = u\}$). Считая x и u локальными координатами на $\mathcal{E}$, найдем траектории поля Y_F из системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2u - 3x, \\ \dot{u} = -u. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем, что $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$, $u = C_1 e^{-t}$. Отсюда следует, что $x = u + au^3$, $a = \mathrm{const}$. Семейство траекторий поля Y_F изображено на рис. 1.8. Заметим, что в точке $(0, 0, 0)$ — особой точке рассматриваемого уравнения — нарушается теорема о единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 3. Симметрии распределений

Так как решения обыкновенных дифференциальных уравнений (включая многозначные) — это интегральные кривые соответствующих распределений Картана, то изучение симметрий дифференциальных уравнений мы начнем с обсуждения симметрий объектов более общего характера — распределений.

Напомним (см. [66, 67]), что *p-мерным распределением* на многообразии M^n называется сопоставление $a \mapsto L_a$, где $a \in M$, а L_a — p-мерное подпространство касательного пространства T_aM.

Распределение P называется *гладким*, если для каждой точки $a \in \in M$ существует ее окрестность U и p гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_p$, которые порождают распределение P в каждой точке точке окрестности U.

Пусть M — гладкое многообразие и P — распределение на M.

Определение 3.1. Диффеоморфизм $\varphi\colon M \to M$, сохраняющий распределение P, назовем *симметрией* этого распределения.

Пример 3.1. Распределение Картана $\mathcal{C}$ на пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами (x, u, p), определенное 1-формой $\omega = du - p\,dx$, очевидно, инвариантно относительно переносов по x и по u, т. е. диффеоморфизм $\varphi_1 = (x + a, u + b, p)$ при любых a, b является симметрией $\mathcal{C}$. Заметим, что $\varphi_1^*(\omega) = \omega$. Сдвиги $\varphi_2 = (x, u, p + c)$ вдоль оси p не являются симметриями $\mathcal{C}$. Действительно, $\varphi_1^*(\omega) = du - (p + c)\,dx$, а эта форма не пропорциональна ω.

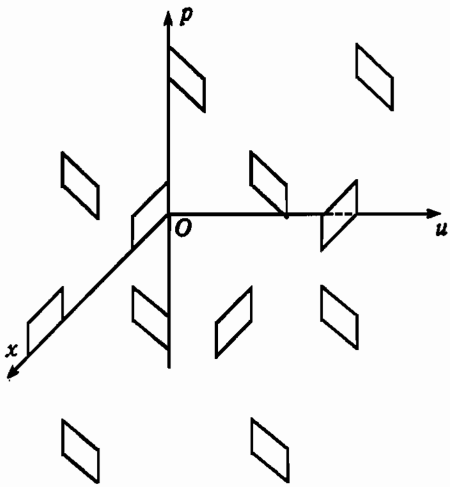

Рис. 1.9. Распределение Картана на пространстве $\mathbb{R}^3$.

Рассматриваемое распределение имеет и менее тривиальные симметрии.

Например, нетрудно проверить, что симметрией является так называемое преобразование Лежандра $\varphi(x, u, p) = (p, u - xp, -x)$, которое также сохраняет форму ω.

Близкое к нему по виду преобразование

$$\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(x, u, p) = (p, xp - u, x),$$

уже не сохраняет форму ω, так как $\psi^*(\omega) = -\omega$. Тем не менее, преобразование ψ является симметрией распределения $\mathcal{C}$.

Совокупность всех симметрий распределения P будем обозначать через $\operatorname{Sym} P$. Очевидно, что композиция двух симметрий снова является симметрией. Отображение, обратное к заданной симметрии, также является симметрией. Поэтому $\operatorname{Sym} P$ образует группу относительно операции композиции.

Через PD обозначим $C^\infty(M)$-модуль таких векторных полей X, что в каждой точке $a \in M$ вектор X_a принадлежит P_a.

Если распределение P порождено полями $X_1, \ldots, X_l \in PD$, то определение 3.1 равносильно тому, что $\varphi_*(X_i) \in PD$ для всех $i = 1, \ldots, l$, или, что эквивалентно,

$$\varphi_*(X_i) = \sum_i \mu_{ij} X_j, \qquad i = 1, \ldots, l, \tag{3.1}$$

для некоторых функций μ_{ij} на M.

Если дифференциальные формы $\omega_1, \ldots, \omega_k$, где $\omega_i = \sum_j \omega_{ij}\, dx_j$, $\omega_{ij} \in C^\infty(M)$, задают распределение P, то условие $\varphi \in \operatorname{Sym} P$ означает, что

$$\varphi^*(\omega_i) = \sum_j \lambda_{ij} \omega_j, \qquad i = 1, \ldots, k, \tag{3.2}$$

для некоторых функций λ_{ij} на M, или, что эквивалентно,

$$\sum_{j,s} \omega_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s}\, dx_s = \sum_{j,s} \lambda_{ij}(x) \omega_{js}(x) dx_s, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

где $s = 1, \ldots, n = \dim M$. Поэтому симметрии φ данного распределения можно искать как решения следующей системы уравнений относительно функций φ_i:

$$\sum_j \omega_{ij}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_s} = \sum_j \lambda_{ij}(x) \omega_{js}(x), \tag{3.3}$$

где λ_{ij} — произвольные гладкие функции, $i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, n$.

Задача отыскания решений этих уравнений не проще исходной задачи отыскания интегральных многообразий данного распределения. Более того, для произвольного распределения P описать множество $\operatorname{Sym} P$ всех симметрий обычно не представляется возможным. Однако при переходе на инфинитезимальную точку зрения, т. е. при рассмотрении инфинитезимальных симметрий вместо определенных выше конечных симметрий, ситуация существенно упрощается.

Определение 3.2. Векторное поле $X \in D(M)$ называется *инфинитезимальной симметрией* распределения P, если преобразования сдвига A_t вдоль траекторий поля X являются симметриями P.

Совокупность всех инфинитезимальных симметрий распределения P мы будем обозначать через D_P.

Как правило, для конкретных вычислений определение 3.2 неудобно. Однако оно допускает более конструктивную переформулировку.

Теорема 3.1. *Пусть P — распределение на многообразии M, $X_1, \ldots, X_l$ — поля, порождающие распределение P, а $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — 1-формы, задающие P. Тогда следующие условия равносильны:*

1) $X \in D_P$;

2) *существуют такие гладкие функции μ_{ij}, что $[X, X_i] = \sum_j \mu_{ij} X_j$ для всех $i = 1, \ldots, l$;*

3) *существуют такие гладкие функции ν_{ij}, что $X(\omega_i) = \sum_j \nu_{ij}\omega_j$ для всех $i = 1, \ldots, k$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Так как при любом t диффеоморфизм A_t сохраняет распределение P, то образ векторного поля $X_i \in PD$ также будет принадлежать PD. Если

$$(A_t)_*(X_i) = \sum \alpha_{ij}(t) X_j,$$

где $\alpha_{ij}(t)$ — гладкие функции на M, зависящие от параметра $t \in \mathbb{R}$, то $[X, X_i] = \sum_j \mu_{ij} X_j$, где $\mu_{ij} = -\left.\dfrac{d\alpha_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=0}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть поле X удовлетворяет условию 2). Тогда докажем, что если 1-форма ω обращается в нуль на полях $X_1, \ldots, X_l$, то форма $X(\omega)$ также обладает этим свойством и, значит, может быть представлена в виде линейной комбинации форм $\omega_1, \ldots, \omega_k$. В самом деле, при любом i имеем

$$X(\omega)(X_i) = -\omega([X, X_i]) = 0.$$

3) $\Rightarrow$ 1). Во-первых, заметим, что из равенства $A_{t+s}^* = A_t^* \circ A_s^*$ следует, что

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} A_t^*(\omega) = A_s^*(X\,\omega).$$

Далее рассмотрим $(k+1)$-формы, зависящие от параметра t,

$$\Omega_i(t) = A_t^*(\omega_i) \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k.$$

Так как $A_0^*(\omega_i) = \omega_i$, то $\Omega_i(0) = 0$. Докажем, что $\Omega_i(t) \equiv 0$. В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\Omega_i(t) = A_t^*(X\,\omega_i) \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k = \sum A_t^*(\nu_{ij})\Omega_j(t).$$

Таким образом, набор $(k+1)$-форм $\Omega_1(t), \ldots, \Omega_k(t)$ является решением линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, причем его начальное значение нулевое. Следовательно, $\Omega_i(t) \equiv 0$ при любом i.

Таким образом, $A_t^*(\omega_i)$ при любом t является линейной комбинацией форм $\omega_1, \ldots, \omega_k$, т. е. A_t — симметрия распределения P. □

Следствие 3.2. *Если $X, Y \in D_P$, то $\alpha X + \beta Y \in D_P$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Кроме того, $[X, Y] \in D_P$. Иначе говоря, D_P является $\mathbb{R}$-алгеброй Ли относительно операции коммутирования.*

Доказательство. Воспользуемся условием (2) доказанной теоремы. Пусть $[X, X_i] = \sum\limits_j \mu_{ij} X_j$, $[Y, X_i] = \sum\limits_j \lambda_{ij} X_j$. Тогда $[\alpha X + \beta Y, X_i] = \sum\limits_j (\alpha \mu_{ij} + \beta \lambda_{ij}) X_j$. Это показывает, что $\alpha X + \beta Y \in$ $\in D_P$.

Далее, в силу тождества Якоби

$$[[X, Y], X_i] = [[X, X_i], Y] - [[Y, X_i], X] = \sum_j ([\mu_{ij} X_j, Y] -$$
$$-[\lambda_{ij} X_j, X]) = \sum_{j,k} (\mu_{ij}\lambda_{jk} - \lambda_{ij}\mu_{ik}) X_k + \sum_j (X(\lambda_{ij}) - Y(\mu_{ij})) X_j.$$

Это доказывает, что $[X, Y] \in D_P$. □

При помощи теоремы 3.1 выпишем координатные условия того, что данное поле $X = \sum\limits_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ является симметрией распределения, заданного системой 1-форм $\omega_1, \ldots, \omega_k$, где $\omega_j = \sum\limits_s \omega_{js} dx_s$.

Справедливо равенство

$$X(\omega_j) = \sum_{i,s} \left(X^i \frac{\partial \omega_{js}}{\partial x_i} + \frac{\partial X^i}{\partial x_s} \omega_{ji} \right) dx_s.$$

По условию 3) теоремы 3.1 1-форма $X(\omega_j)$ должна иметь вид $\sum\limits_i \nu_{ji} \omega_i$, т. е. существуют такие гладкие функции ν_{ji}, что

$$\sum_{i,s} \left(X^i \frac{\partial \omega_{js}}{\partial x_i} + \frac{\partial X^i}{\partial x_s} \omega_{ji} \right) = \sum_i \nu_{ji} \omega_{is}, \tag{3.4}$$

где $j = 1, \ldots, k$; $s = 1, \ldots n$.

Заметим, что в отличие от (3.3) система уравнений (3.4) является линейной относительно полей $X^1, \ldots, X^k$. Она называется *системой линейных уравнений Ли*, ассоциированной с *системой* *нелинейных уравнений Ли* (3.3). Подобно тому, как нелинейные уравнения Ли служат для определения конечных симметрий данного распределения, линейные уравнения Ли служат для нахождения его инфинитезимальных симметрий.

В дальнейшем мы будем в основном заниматься изучением именно инфинитезимальных симметрий, которые для краткости будем называть просто симметриями.

Пример 3.2. Симметрии одномерного распределения, порожденного векторным полем Y, — это такие векторные поля X, что $[X, Y] = \lambda Y$ для некоторой функции λ.

Пусть, например, Y — векторное поле на сфере (рис. 1.10), имеющее в «географических» координатах (φ, θ) вид $Y = \dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. Предположим, что $X = \alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \beta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. Тогда $[X, Y] = -\alpha_\varphi\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \beta_\varphi\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$.

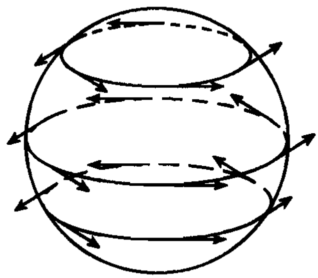

Рис. 1.10

Поле X является симметрией, если $\alpha_\varphi = 0$. Итак, симметрии данного распределения — это поля вида $\alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \beta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, где β — произвольная функция на сфере, а α — функция, постоянная на параллелях.

Конечные симметрии этого распределения задаются парой функций $\bar\theta = f(\theta)$, $\bar\varphi = g(\theta, \varphi)$.

Пример 3.3. Найдем локальную структуру алгебры симметрий произвольного вполне интегрируемого распределения.

В подходящей системе координат вполне интегрируемое распределение P можно задать при помощи базиса

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad X_l = \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Пусть $X = \sum\limits_i X^i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Тогда $[X_j, X] = \sum\limits_i \dfrac{\partial X^i}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, условие $[X, X_j] \in PD$, $j=1,\ldots,l$, равносильно тому, что $\dfrac{\partial X^i}{\partial x_j} = 0$, $j \leqslant l < i$.

Представляя поле X в виде суммы двух составляющих — продольной $\sum\limits_{i\leqslant l} X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, и трансверсальной, $\sum\limits_{i>l} X^i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, мы можем сформулировать ответ в следующем виде. Поле X является симметрией распределения P в том и только том случае, если его трансверсальная составляющая имеет коэффициенты, постоянные на листах, т. е. на максимальных интегральных многообразиях $x_{l+1}=C_{l+1}, \ldots, x_n = C_n$, где $C_i = \mathrm{const}$, распределения P (рис. 1.11).

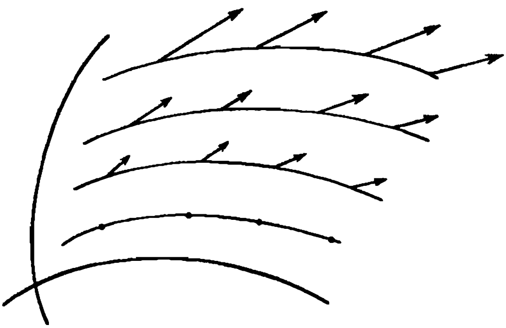

Рис. 1.11

Пример 3.4 Найдем все (инфинитезимальные) симметрии распределения Картана C на $\mathbb{R}^3$, заданного формой $\omega = du - p\,dx$. Если

$$X = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial u} + \gamma\frac{\partial}{\partial p} \tag{3.5}$$

— симметрия, то

$$X(\omega) = (\beta_x - p\alpha_x - \gamma)\,dx + (\beta_u - p\alpha_u)\,du + (\beta_p - p\alpha_p)\,dp.$$

Условие пропорциональности $X(\omega)$ и ω записывается в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \beta_p - p\alpha_p = 0, \\ \beta_x - p\alpha_x - \gamma = -p\,(\beta_u - p\alpha_u). \end{cases}$$

Из этой системы следует, что симметриями распределения C являются векторные поля (3.5), где α, β — любая пара функций, связанных соотношением $\beta_p = p\alpha_p$, а γ выражается через эти функции по формуле $\gamma = \beta_x + p\beta_u - p\alpha_x - p^2\alpha_u$. Рассматривая функцию $f = \beta - p\alpha$, мы видим, что $\alpha = -f_p$, $\beta = f - pf_p$, $\gamma = f_x + pf_u$, т. е.

$$X = -f_p\frac{\partial}{\partial x} + (f - pf_p)\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + pf_u)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Таким образом, симметрия распределения Картана X однозначно определяется некоторой функцией $f = f(x, u, p)$, которая может быть произвольной *).

*) В гл. 2 будет построена теория контактных векторных полей, в которой обобщается этот результат.

Среди симметрий данного распределения P можно выделить симметрии специального вида. Это те векторные поля X, которые сами лежат в распределении P, т. е. $X \in D_P \cap PD$. Они называются *характеристическими*, или тривиальными. Симметрии, не принадлежащие PD, мы будем называть нетривиальными.

Утверждение 3.3. *Пусть $X, Y \in D_P$, причем симметрия Y тривиальна. Тогда симметрия $[X, Y]$ также тривиальна. Иными словами, тривиальные симметрии образуют идеал алгебры Ли D_P.*

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_l$ — векторные поля, порождающие распределение P, и $Y = \sum f_i X_i$. Из теоремы 3.1 следует, что $[X, X_i] = \sum\limits_j \mu_{ij} X_j$. Поэтому

$$[X, Y] = [X, \sum_i f_i X_i] = \sum_i X(f_i) X_i + \sum_{i,j} f_i \mu_{ij} X_j.$$

Таким образом, поле $[X, Y]$ лежит в P. В силу следствия 3.2 оно является симметрией распределения P. $\square$

Обозначим через $\operatorname{char} P \subset D_P$ идеал тривиальных (характеристических) симметрий. По определению $\operatorname{char} P = D_P \cap PD$.

Доказанное утверждение позволяет рассматривать факторалгебру Ли

$$\operatorname{sym} P = D_P / \operatorname{char} P,$$

которую мы назовем алгеброй Ли нетривиальных симметрий распределения P. Отметим, что поскольку для вполне интегрируемых распределений $\operatorname{char} P = PD$, в этом случае имеет место равенство $\operatorname{sym} P = D_P / PD$.

Найдем характеристические поля вполне интегрируемого распределения P. По теореме Фробениуса любое поле, лежащее в P, является для него характеристическим, так как при сдвигах вдоль траекторий этого поля каждый слой распределения P скользит сам по себе. Напротив, если X — нетривиальная симметрия, то при сдвигах вдоль траекторий поля X слои распределения P переходят друг в друга.

Замечание, сделанное нами выше о характеристических полях вполне интегрируемых распределений, справедливо и в более общей ситуации.

Утверждение 3.4. *Характеристическое поле распределения P касается любого его максимального интегрального многообразия.*

Доказательство. Действительно, если характеристическое поле X не касается интегрального многообразия L, то, разнося L по траекториям поля X, мы получим многообразие $\bar{L} = \bigcup_t A_t(L)$, содержащее L.

Полученное многообразие также будет интегральным. В самом деле, касательное пространство в произвольной точке x к многообразию $\bar{L}$ является линейной оболочкой вектора X_x и касательного пространства к подмногообразию $A_t(L)$, проходящему через эту точку. А так как и то, и другое лежат в P_x, то там же лежит и $T_x(\bar{L})$. □

Замечание 3.1. Таким образом, всякое максимальное интегральное многообразие распределения P «соткано» из его характеристик, т. е. траекторий любого из его характеристических полей. Аналогичная конструкция возникает в теории уравнений в частных производных первого порядка — отсюда и сходство терминологии.

Как и в случае вполне интегрируемого распределения, нетривиальные симметрии произвольного распределения, в отличие от характеристических, обладают тем свойством, что сдвиги вдоль их траекторий переводят максимальные интегральные подмногообразия друг в друга, переставляя их. Отметим, что действие элементов из $\operatorname{sym} P$ на максимальных интегральных многообразиях определено корректно, так как согласно утверждению 3.4 каждое такое многообразие при действии тривиальных симметрий переходит в себя.

Утверждение 3.5. *Характеристические поля образуют модуль над кольцом функций, т. е. если $X \in \operatorname{char} P$ и $f \in C^\infty(M)$, то $fX \in \operatorname{char} P$.*

Доказательство. Действительно, в этом случае для произвольного векторного поля $Y \in PD$ мы имеем

$$[fX, Y] = f\,[X, Y] - Y(f)X \in PD,$$

поэтому $fX \in D_P$. Кроме того, $fX \in PD$, значит $fX \in \operatorname{char} P$. □

Следствие 3.6. *Множество $\operatorname{char} P$ состоит из векторных полей, касающихся некоторого распределения.*

Распределение, рассматривающееся в следствии 3.6 называется *характеристическим*. Размерность слоев этого распределения в отдельных точках может падать.

Теорема 3.7. *Характеристическое распределение вполне интегрируемо.*

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из того, что пространство векторных полей $\operatorname{char} P$, будучи идеалом в алгебре Ли D_P, само является алгеброй Ли.

Проиллюстрируем теперь введенные понятия на материале примеров 3.2–3.4.

В примере 3.2 мы рассматривали одномерное распределение, заданное на сфере. Так как любое одномерное распределение вполне интегрируемо, то в этом случае характеристическое распределение совпадает с ним самим.

Характеристическое распределение вполне интегрируемого распределения также совпадает с ним самим.

Пусть, далее, X — характеристическая симметрия распределения Картана, рассмотренного нами в примере 3.4. Поскольку $X \in D_P$, мы имеем

$$X = -f_p\frac{\partial}{\partial x} + (f - pf_p)\frac{\partial}{\partial u} + (f_x + pf_u)\frac{\partial}{\partial p},$$

а так как $X \in \operatorname{char} P$, то $\omega(X) = 0$. Но $\omega(X) = X \rfloor (du - pdx) = f$. Поэтому $f = 0$ и, следовательно, $X = 0$. Таким образом, характеристическое распределение в этом случае нульмерно.

§ 4. Некоторые приложения теории симметрий к интегрированию распределений

В этом параграфе мы покажем, что знание симметрий распределения облегчает задачу нахождения его интегральных многообразий, а в некоторых случаях позволяет полностью ее решить.

4.1. Распределения и характеристические симметрии. Рассмотрим типичную ситуацию. Так как максимальные интегральные многообразия сотканы из характеристик данного распределения, то, зная некоторое характеристическое векторное поле X, мы можем по всякому интегральному многообразию L, трансверсальному к траекториям поля X, построить интегральное многообразие N на единицу большей размерности, а именно, $N = \bigcup_t A_t(L)$, где A_t — сдвиги по траекториям поля X. В частности, стартуя с многообразия L, состоящего из одной точки, мы получим одну из траекторий поля X, которая является одномерным интегральным многообразием.

Пример 4.1. В примере 2.2 мы рассматривали дифференциальное уравнение $(3x - 2u)u' = u$. Для распределения $C_{\mathcal{E}}$, заданного ограничением формы $du - p\,dx$ на $\mathcal{E}$, было построено характеристическое поле Y_F. Траектория этого поля

$$\begin{cases} x = (x_0 - u_0)e^{-3t} + u_0 e^{-t}, \\ u = u_0 e^{-t} \end{cases}$$

представляет собой параметрическую запись решения данного уравнения, проходящего через точку (x_0, u_0, p_0).

Пример 4.2. Рассмотрим многообразие M всех единичных векторов, приложенных к точкам верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y), и введем на этом многообразии локальные координаты (x, y, u), где x — произвольное действительное число, $y > 0$, а u — угловая переменная, определенная по модулю 2π. Далее рассмотрим распределение P, заданное 1-формой

$$\omega = du + \frac{1-\cos u}{y}\,dx - \frac{\sin u}{y}\,dy.$$

Это распределение удовлетворяет условиям теоремы Фробениуса и, следовательно, оно вполне интегрируемо.

Описанное распределение определяет так называемое орициклическое слоение, геометрический смысл которого заключается в следующем.

Напомним, что верхняя полуплоскость с метрикой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ является моделью плоскости Лобачевского, геодезическими («прямыми») в которой являются дуги окружностей с центром на оси x, а также вертикальные лучи.

Слой орициклического слоения состоит из всех таких векторов, что касающиеся их геодезические плоскости Лобачевского проходят через одну и ту же точку на прямой $y = 0$.

Линии $L = \{u = \pi, x = c\}$, где c — некоторая константа, являются интегральными многообразиями P, так как ω обращается в нуль при ограничении на них. Поле

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1-\cos u}{y}\frac{\partial}{\partial u}$$

является характеристическим для P, так как распределение P вполне интегрируемо, а поле D_x обращает в нуль форму ω. Кроме того, очевидно, что поле D_x трансверсально полю $\frac{\partial}{\partial y}$, которое касается линии L.

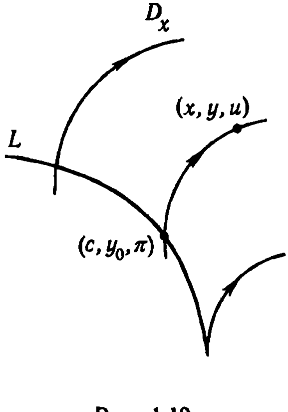

Рис. 1.12

Следовательно, рассматривая все траектории поля D_x, проходящие через L, можно построить двумерную интегральную поверхность распределения P.

Для этого сначала, проинтегрировав систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 1, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{u} = -\dfrac{1-\cos u}{y}, \end{cases}$$

найдем уравнения траекторий поля D_x:

$$y = C_1, \quad x - y \operatorname{ctg}\frac{u}{2} = C_2,$$

где C_1, C_2 — постоянные.

Если некоторая точка (x, y, u) лежит на одной траектории с точкой $(c, y_0, \pi) \in L$, то $y = y_0$, $x - y\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = c - y_0 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что $x - y\operatorname{ctg}\frac{u}{2} = c$. Это и есть поверхность $\bigcup\limits_t A_t(L)$, полученная «разнесением» линии L вдоль траекторий поля D_x. (см. рис. 1.12).

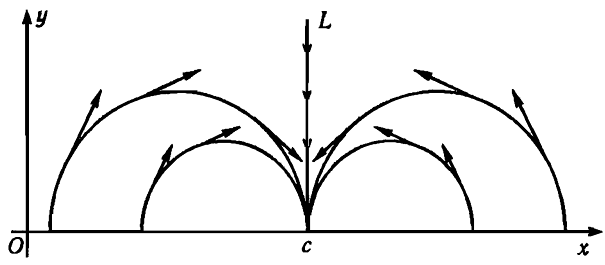

Рис. 1.13

Геометрически эта поверхность представляет собой множество таких единичных векторов, что все окружности с центрами на оси x, которых они касаются, проходят через одну и ту же точку этой оси (рис. 1.13).

4.2. Симметрии и динамические системы. Многие стандартные способы решений дифференциальных уравнений используют теорию симметрий. Вот один из примеров.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, рассматривается как векторное поле X на многообразии (или, иначе говоря, как динамическая система). Симметрией поля X принято называть всякое векторное поле Y, коммутирующее с X, т. е. такое, что $[X, Y] = 0$. Легко понять, что в этом случае сдвиги по траекториям поля Y

переводят траектории поля X в себя, как-то при этом их «перемешивая». В случае, когда известна некоторая симметрия Y динамической системы X, обычно делается замена координат, выпрямляющая поле Y (т. е. выбираются такие координатные функции, которые все, кроме одной, постоянны на траекториях поля Y), и затем система X переписывается в новых координатах. Если при этом в новых координатах $y_1, \ldots, y_n$ поле Y имеет вид $\dfrac{\partial}{\partial y_n}$, то условие $[X, Y]=0$ означает, что коэффициенты поля X в этих координатах не зависят от y_n. Поэтому нахождение траекторий поля X сводится к интегрированию $(n-1)$-мерной динамической системы и одной квадратуре.

Пример 4.3. Рассмотрим 3-мерную динамическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = t\left(\dfrac{x_2^2}{x_3} + \dfrac{x_1^2}{x_2^2}x_3\right) + \dfrac{x_1^2}{x_2}, \\ \dot{x}_2 = t\,\dfrac{x_1 x_3}{x_2} + x_1, \\ \dot{x}_3 = \dfrac{x_1 x_3}{x_2}. \end{cases}$$

Векторное поле

$$Y = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\,\frac{\partial}{\partial x_3}$$

является симметрией этой системы. Действительно, нетрудно проверить, что коммутатор векторных полей

$$X = \left(t\left(\frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_1^2}{x_2^2}x_3\right) + \frac{x_1^2}{x_2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(t\frac{x_1 x_3}{x_2} + x_1\right)\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1 x_3}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

и Y равен нулю. Замена переменных

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1}{x_2}, \\ x_2' = \dfrac{x_2}{x_3}, \\ x_3' = \ln x_3 \end{cases}$$

приводит поле Y к виду $\dfrac{\partial}{\partial x_3'}$, а динамическую систему X к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1' = t x_2', \\ \dot{x}_2' = t x_1', \\ \dot{x}_3' = x_1'. \end{cases}$$

Отсюда следует, что нахождение траекторий динамической системы X сводится к интегрированию 2-мерной динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x}'_1 = t x'_2, \\ \dot{x}'_2 = t x'_1 \end{cases}$$

и одной квадратуре $x'_3 = \int x'_1(t)\,dt$.

Перейдем теперь к обсуждению применения нетривиальных (т. е. нехарактеристических) симметрий к задаче интегрирования распределений.

4.3. Симметрии и нехарактеристические симметрии. Если поле X — симметрия распределения P и $\{A_t\}$ — соответствующая группа сдвигов, то, зная некоторое интегральное многообразие L распределения P, мы можем построить целое однопараметрическое семейство $\{A_t(L)\}$ таких многообразий.

П р и м е р 4.4. Рассмотрим уравнение $(3x-2u)u' = u$, описанное в примере 2.2. Поле $X = u^3\dfrac{\partial}{\partial x}$, записанное в локальных координатах (x, u) на $\mathcal{E}$, очевидно, коммутирует с полем Y_F (см. пример 2.2), ограниченным на $\mathcal{E}$ (проверьте, что это ограничение представляется в виде $(2u-3x)\dfrac{\partial}{\partial x} - u\dfrac{\partial}{\partial u}$). Поэтому X является симметрией одномерного распределения $C_{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}$. Сдвиги вдоль траекторий этого поля позволяют получить любое решение этого уравнения (кроме $u=0$) из одного решения $\{u=x\}=L$. Действительно, диффеоморфизм сдвига по траекториям поля X за время t задается соотношениями

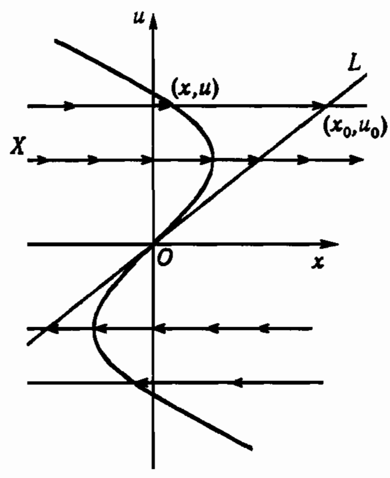

Рис. 1.14

$$\begin{cases} x = u_0^3 t + x_0, \\ u = u_0. \end{cases}$$

Из этих формул очевидно, что образом прямой $L = \{u = x\}$ является кривая $A_t(L) = \{tu^3 + u = x\}$ (рис. 1.14).

Упражнение 4.1. Найдите такую симметрию этого уравнения, которая позволила бы получить любое (или почти любое) решение из нулевого.

Замечание 4.1. Сдвиги по траекториям поля X, рассмотренного в примере 4.4, переводят решение $u=0$ в себя. Это решение называется *инвариантным*, или *автомодельным*.

Упражнение 4.2. Найдите автомодельное решение уравнения $(3x-2u)u'=u$ относительно инфинитезимальной гомотетии $x\dfrac{\partial}{\partial x}+u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

4.4. Интегрирование уравнений в квадратурах. Второй аспект, на который мы хотели бы обратить внимание при обсуждении применения нетривиальных симметрий, — это интегрирование уравнений в квадратурах. Дело в том, что если у вполне интегрируемого распределения известна разрешимая алгебра Ли нетривиальных симметрий, размерность которой равна коразмерности данного распределения, то интегральные многообразия этого распределения можно найти при помощи квадратур. Переходя к описанию этой процедуры, введем понятие первого интеграла распределения.

Определение 4.1. *Первым интегралом распределения P* называется такая функция $f\in C^\infty(M)$, что $X(f)=0$ для любого поля $X\in PD$.

Очевидно, что если функция f является первым интегралом распределения P, то она постоянна на любом интегральном многообразии этого распределения, или, иначе говоря, всякое интегральное многообразие целиком лежит на некоторой поверхности уровня $\{f=c\}$ первого интеграла.

Найдем первые интегралы распределений, рассмотренных нами в примерах 3.2–3.4.

Первые интегралы поля $X=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, заданного на сфере, — это, очевидно, произвольные функции, постоянные на параллелях сферы. Этот пример легко обобщается на случай произвольного одномерного распределения *).

Первые интегралы вполне интегрируемого распределения P, локально задаваемого полями

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\quad \ldots,\quad X_l=\frac{\partial}{\partial x_l},$$

*) Отметим согласование принятой терминологии с терминологией теории уравнений первого порядка в частных производных: если распределение P задано векторным полем X, то его первые интегралы — это первые интегралы уравнения $X(\varphi)=0$, т. е. функции, постоянные на траекториях поля X. См. также гл. 2.

имеют вид $f(x_{l+1},\ldots,x_n)$, где f — произвольная функция.

Наконец, пусть f — первый интеграл распределения Картана, задаваемого формой $\omega = du - p\,dx$. Поскольку поля $\dfrac{\partial}{\partial p}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial u}$ лежат в распределении C, мы имеем $\dfrac{\partial f}{\partial p} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial u} = 0$, откуда следует что $f = \mathrm{const}$. Итак, распределение Картана не имеет нетривиальных первых интегралов.

Знание первого интеграла распределения P сводит задачу нахождения его интегральных многообразий к интегрированию распределения, заданного на многообразии, размерность которого на единицу меньше размерности исходного многообразия. А именно, к интегрированию распределения P, ограниченного на поверхность уровня функции f. Каждый новый независимый первый интеграл приводит к дальнейшему понижению размерности на единицу. В том случае, когда известны функционально независимые первые интегралы $f_1,\ldots,f_k$, где $k = \mathrm{codim}\, P$, рассматриваемое распределение можно задать набором точных 1-форм $df_1,\ldots,df_k$. Тем самым это распределение оказывается вполне интегрируемым, и его слои суть совместные поверхности уровня функций $f_1,\ldots,f_k$, т. е. они имеют вид $\{x \in M \mid f_i(x) = c_i\}$, где $c_1,\ldots,c_k$ — некоторые константы.

Нахождение первых интегралов равносильно отысканию таких точных 1-форм $\omega = df$ в идеале дифференциальных форм, которые обращаются в нуль на векторах, принадлежащих рассматриваемому распределению. Действнтельно, в этом случае $\omega(X) = X(f) = 0$ для любого $X \in PD$. В этих терминах полная интегрируемость распределения означает существование $k = \mathrm{codim}\, P$ независимых точных 1-форм, принадлежащих рассматриваемому идеалу.

Определение 4.2. Линейное подпространство $\mathcal{Y} \subset \mathrm{sym}\, P$ называется *невырожденным*, если для любой точки $x \in M$ и любого поля $X \in \mathcal{Y}$ условие $X_x \in P_x$ равносильно тому, что $X = 0$.

Пусть $x \in M$ и $\mathcal{Y}_x = \{X_x \mid X \in \mathcal{Y}\}$. Если подпространство $\mathcal{Y}$ невырождено, то из определения 4.2 следует, что

$$\dim \mathcal{Y} = \dim \mathcal{Y}_x \leqslant \mathrm{codim}\, P.$$

Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_k$ — система форм, задающая распределение P, н $X_1,\ldots,X_l$ — базис невырожденного подпространства $\mathcal{Y} \subset PD$. Тогда $l \leqslant k$ и функциональная матрица $\|\omega_i(X_j)\|$ имеет ранг l в каждой точке многообразия M. Если $l = k$, то $\det\|\omega_i(X_j)\| \neq 0$ и можно найти другую систему форм, задающую P, скажем, $\omega_1',\ldots,\omega_k'$, что $\omega_i'(X_j) = \delta_{ij}$. Для этого достаточно домножить столбец $(\omega_1,\ldots,\omega_k)^t$

на матрицу, обратную к $\|\omega_i(X_j)\|$. Если пространство $\mathcal{Y}$ замкнуто относительно коммутирования, то имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть P — вполне интегрируемое распределение, заданное 1-формами $\omega_1, \ldots, \omega_k$, и $\mathcal{Y}$ — невырожденная алгебра Ли симметрий этого распределения, базис в которой образуют векторные поля $X_1, \ldots, X_k$, причем $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$. Тогда если*

$$[X_i, X_j] = \sum_s c_{ij}^s X_s,$$

то

$$d\omega_s = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j.$$

Доказательство. По теореме Фробениуса найдутся такие 1-формы γ_{ij}, что

$$d\omega_s = \sum_j \gamma_{sj} \wedge \omega_j.$$

Поскольку $X_i \in PD$, 1-форма $X_i(\omega_s) = X_i \rfloor d\omega_s + d(X_i \rfloor \omega_s)$ на P обращается в нуль, а так как $d(X_i \rfloor \omega_s) = 0$, то 1-форма $X_i \rfloor d\omega_s$ также аннулируется распределением P. Из равенства

$$X_i \rfloor d\omega_s = \sum_j \gamma_{sj}(X_i)\omega_j - \gamma_{si}$$

следует, что формы γ_{sj} обращаются в нуль на P, т. е. для некоторых $a_{ij}^s \in C^\infty(M)$ имеют место соотношения $\gamma_{ij} = \sum_i a_{ij}^s \omega_i$. Значит,

$$d\omega_s = \sum_{i<j} a_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j.$$

С одной стороны, отсюда следует, что

$$d\omega_s(X_i, X_j) = a_{ij}^s, \qquad i < j.$$

С другой стороны,

$$d\omega_s(X_i, X_j) = X_i(\omega_s(X_j)) - X_j(\omega_s(X_i)) - \omega_s([X_i, X_j]) = \\ = -\omega_s\left(\sum_t c_{ij}^t X_t\right) = -c_{ij}^s.$$

Поэтому $a_{ij}^s = -c_{ij}^s$ и

$$d\omega_s = -\sum_{i<j} c_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} c_{ij}^s \omega_i \wedge \omega_j.$$

Следствие 4.2. *Если выполнены условия теоремы* 4.1 *и* $\mathcal{Y}$ — *коммутативная алгебра, то все формы* ω_i *замкнуты и, следовательно, локально представляются в виде* $\omega_i = dh_i$, *где* h_i — *гладкие в рассматриваемой окрестности функции.*

Локально первый интеграл h_i *можно найти по формуле*

$$h_i(a) = \int_{a_0}^{a} \omega_i,$$

где a_0 — *некоторая фиксированная точка многообразия* M.

В частности, так как обыкновенное дифференциальное уравнение k-го порядка сводится к одномерному распределению на $(k+1)$-мерном многообразии, то непосредственно из следствия 4.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Если распределение, соответствующее обыкновенному дифференциальному уравнению порядка* k, *обладает* k-*мерной коммутативной невырожденной алгеброй Ли симметрий, то это уравнение интегрируется в квадратурах.*

Пример 4.4. Пусть задано уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной, правая часть которого не зависит от x:

$$\frac{du}{dx} = f(u).$$

Соответствующее этому уравнению распределение задается на поверхности, определяемой уравнением $p = f(u)$, при помощи 1-формы $\omega = du - f\,dx$. Векторное поле

$$X = \frac{\partial}{\partial x}$$

касается данной поверхности и является нетривиальной симметрией распределения $C_\mathcal{E}$.

В силу теоремы 4.1 и следствия 4.2 форма $\omega_\mathcal{E}/f$ точна. В самом деле,

$$\frac{1}{f}\omega_\mathcal{E} = \frac{1}{f}(du - f\,dx) = d\left(\int \frac{du}{f(u)} - x\right).$$

В домножении на $1/f$ нетрудно узнать известный способ решения уравнений указанного вида методом «разделения переменных». Таким образом, по существу этот метод интегрирования заключается в том, чтобы 1-форму, задающую распределение Картана на уравнении, превратить в точную.

Упражнение 4.3. Докажите, что на уравнении $\mathcal{E}$ поле X совпадает с полем

$$f\frac{\partial}{\partial u}+f'p\frac{\partial}{\partial p}.$$

Предыдущий пример иллюстрирует общее замечание: для интегрируемых распределений коразмерности 1 (в частности, для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка) знание одной нетривиальной симметрии позволяет описать слои этого распределения (в частности, решения этого дифференциального уравнения) в квадратурах. Если X — нетривиальная симметрия, а распределение P задается 1-формой ω, то форма $f\omega$, где $f=1/\omega(X)$, также задающая P, будет замкнутой *). В этом случае слои распределения P совпадают с поверхностями уровня интеграла от этой формы.

Пример 4.5. Рассмотрим распределение P из примера 4.2. Поскольку коэффициенты формы

$$\omega=du+\frac{1-\cos u}{y}dx-\frac{\sin u}{y}dy$$

на зависят от x, поле $X=\dfrac{\partial}{\partial x}$ является его симметрией. Так как $\omega(X)=\dfrac{1-\cos u}{y}\neq 0$, поле X является нетривиальной симметрией. Следовательно, интегрирующий множитель равен $f=\dfrac{1}{\omega(X)}=$ $=\dfrac{y}{1-\cos u}$ и

$$f\omega=dx-\frac{\sin u}{1-\cos u}dy+\frac{y}{1-\cos u}du=d\left(x-y\operatorname{ctg}\frac{u}{2}\right).$$

Соотношение $x-y\operatorname{ctg}\dfrac{u}{2}=c$, $c=\mathrm{const}$, задает все слои данного распределения, кроме слоя $\{u=0\}$ (при $u=0$ функция f не определена).

Пример 4.6. Всякое однородное уравнение $\mathcal{E}$ первого порядка

$$u'=\varphi\left(\frac{u}{x}\right)$$

имеет симметрию $X=x\dfrac{\partial}{\partial x}+u\dfrac{\partial}{\partial u}$. Действительно, если x и u принять за координаты на $\mathcal{E}$, то распределение Картана на $\mathcal{E}$ задается

*) Напомним, что функция f называется *интегрирующим множителем*.

формой
$$\omega_{\mathcal{E}} = du - \varphi\left(\frac{u}{x}\right) dx.$$

Легко проверить, что $X(\varphi) = 0$ и $X(\omega_{\mathcal{E}}) = \omega_{\mathcal{E}}$, поэтому рассматриваемое поле является симметрией. В качестве интегрирующего множителя можно взять функцию

$$f = \frac{1}{\omega_{\mathcal{E}}(X)} = \frac{1}{u - x\varphi(\frac{u}{x})}.$$

В частности, для уравнения $(3x - 2u)u' = u$ (см. пример 2.2), которое всюду, кроме линии $3x - 2u = 0$, равносильно уравнению

$$u' = \frac{u}{3x - 2u},$$

мы имеем
$$\varphi(\xi) = \frac{\xi}{3 - 2\xi}, \qquad f = \frac{3x - 2u}{2u(x - u)},$$
и поэтому
$$\omega'_{\mathcal{E}} = \frac{3x - 2u}{2u(x - u)}\omega_{\mathcal{E}} = d\left[\frac{1}{2}\ln\frac{u^3}{x - u}\right].$$

Отсюда, как и раньше, находим решения данного уравнения в виде $\dfrac{u^3}{x - u} = c$, $c = \text{const}$.

Пример 4.7. Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$a_n u^{(n)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = f,$$

где $a_n, \ldots, a_1, a_0, f$ — функции, зависящие от переменной x. Нетрудно проверить, что поле
$$X_\varphi = \varphi\frac{\partial}{\partial u} + \varphi'\frac{\partial}{\partial p_1} + \ldots + \varphi^{(k)}\frac{\partial}{\partial p_k},$$

где $\varphi(X)$ — произвольное решение соответствующего однородного уравнения $a_n u^{(n)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = 0$, является симметрией распределения, соответствующего рассматриваемому уравнению. Поля такого вида образуют k-мерную коммутативную алгебру Ли, и поэтому применимо следствие 4.3. Так как $\omega_i(X_\varphi) = \varphi^{(i)}$ (где, как и выше, $\omega_i = d\,p_i - p_{i+1}\,dx$), то матрица $\|\omega_i(X_\varphi)\|$, которую по ходу решения нужно обратить для нахождения интегрирующего множителя, представляет собой матрицу Вронского фундаментальной системы решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ однородной системы.

Предположим теперь, что известна невырожденная алгебра Ли $\mathcal{Y}$ симметрий вполне интегрируемого распределения P, которая не является коммутативной, и обозначим через $\mathcal{Y}^{(1)}$ ее коммутаторную подалгебру

$$\mathcal{Y}^{(1)}=[\mathcal{Y},\mathcal{Y}]=\left\{\sum[X,Y]\,|\,X,Y\in\mathcal{Y}\right\}.$$

Предположим, что $\mathcal{Y}^{(1)}\neq\mathcal{Y}$. Тогда в $\mathcal{Y}$ можно так выбрать базис $X_1,\ldots,X_k$, что $X_{r+1},\ldots,X_k\in\mathcal{Y}^{(1)}$. В этом случае для любых полей X_i и X_j коммутатор $[X_i,X_j]\in\mathcal{Y}^{(1)}$ и, следовательно, если $s\leqslant r$, то $c^s_{ij}=0$. Поэтому формы $\omega_1,\ldots,\omega_r$ замкнуты. Пусть (локально) $\omega_1=dh_1,\ldots,\omega_r=dh_r$. Поверхности уровня

$$H_c=\{h_1=c_1,\ldots,h_r=c_r\},\qquad c=(c_1,\ldots,c_r),\quad c_i\in\mathbb{R},$$

инвариантны относительно коммутаторной алгебры $\mathcal{Y}^{(1)}$, поскольку $X_j(h_i)=\omega_i(X_j)=0$ при $i\leqslant r$, $j\geqslant r+1$.

Обозначим через P_c ограничение распределения P на поверхность H_c. Тогда распределение P_c вполне интегрируемо. В самом деле, слоение многообразия M, соответствующее исходному распределению P, высекает слоение на поверхности H_c.

Тот же факт можно доказать и аналитически. Выписывая дифференциал 1-формы ω_s, $s\geqslant r+1$, и учитывая теорему 4.1, мы получаем

$$d\omega_s=-\frac{1}{2}\sum_{i,j>r}c^s_{ij}\omega_i\wedge\omega_j.$$

Формы ω_i при $i\leqslant r$ обращаются на H_c в нуль. Следовательно, по теореме Фробениуса распределение P_c вполне интегрируемо.

Заметим теперь, что $\mathcal{Y}^{(1)}$ представляет собой невырожденную алгебру Ли симметрий распределения P_c. В самом деле, сдвиги по траекториям произвольного поля $X\in\mathcal{Y}^{(1)}$, во-первых, сохраняют многообразие H_c и, во-вторых, переставляют слои распределения P. Следовательно, они переставляют и слои распределения P_c, полученного ограничением P на H_c. Точнее, невырожденность алгебры $\mathcal{Y}^{(1)}$ следует из того, что матрица $\omega_i(X_j)$, $r<i\leqslant k$, $r<j\leqslant k$, единична и поэтому невырождена.

Итак, мы вновь получили невырожденную подалгебру Ли, и потому вправе прибегнуть к проделанной процедуре еще один раз. А именно, рассмотрим коммутаторную подалгебру $\mathcal{Y}^{(2)}$ алгебры $\mathcal{Y}^{(1)}$:

$$\mathcal{Y}^{(2)}=\left[\mathcal{Y}^{(1)},\mathcal{Y}^{(1)}\right].$$

Если $\mathcal{Y}^{(2)} \neq \mathcal{Y}^{(1)}$, то некоторые из 1-форм $\omega_{r+1}|_{dH_c}, \ldots, \omega_k|_{dH_c}$ окажутся замкнутыми. Они порождают локальные интегралы распределения P_c. Это распределение в свою очередь можно ограничить на совместную поверхность уровня этих интегралов и т. д.

Продолжая этот процесс указанным образом, мы получим ряд подалгебр

$$\mathcal{Y} \supset \mathcal{Y}^{(1)} \supset \mathcal{Y}^{(2)} \supset \ldots$$

Если на некотором шаге в этом ряду подалгебр встретится коммутативная подалгебра (это равносильно тому, что на следующем шаге мы получим тривиальную подалгебру), наши рассуждения можно закончить применением теоремы 4.1, а точнее, следствия 4.3.

Алгебра Ли $\mathcal{Y}$, обладающая тем свойством, что $\mathcal{Y}^{(l)} = 0$ при некотором l, называется *разрешимой.* Этот термин разъясняется в следующих теоремах, доказательства которых следуют из приведенных рассуждений.

Теорема 4.2. *Если вполне интегрируемое распределение P коразмерности k обладает k-мерной невырожденной разрешимой алгеброй Ли симметрий $\mathcal{Y} \subset \operatorname{sym} P$, то полный набор его первых интегралов можно найти в квадратурах, т. е. вычислением интегралов от замкнутых 1-форм и решением функциональных уравнений.*

Теорема 4.3 (Бьянки — Ли). *Если обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k имеет невырожденную k-мерную разрешимую алгебру симметрий, то оно интегрируется в квадратурах.*

Именно в контексте этих теорем понятие разрешимости, возникшее в теории Галуа алгебраических уравнений, проникло в теорию групп и алгебр Ли. Отметим также, что вместо алгебр симметрий можно использовать группы Ли конечных симметрий, ибо от группы Ли всегда можно перейти к соответствующей алгебре путем рассмотрения инфинитезимальных образующих группы.

Пример 4.8. Рассмотрим уравнение

$$au^2u''' + buu'u'' + cu'^3 = 0.$$

Оно обладает невырожденной трехмерной алгеброй симметрий, порожденной трансляцией по x (т. е. полем $\dfrac{\partial}{\partial x}$) и произвольными масштабными преобразованиями (т. е. полями вида $ax\dfrac{\partial}{\partial x} + bu\dfrac{\partial}{\partial u}$, где a и b константы), сохраняющими распределение Картана (можно доказать, что эти масштабные преобразования образуют двумерное пространство). В качестве базиса этой алгебры удобно взять поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_2 = -x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + 3p_2\frac{\partial}{\partial p_2} + 4p_3\frac{\partial}{\partial p_3},$$
$$X_3 = u\frac{\partial}{\partial u} + p_1\frac{\partial}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial}{\partial p_2} + p_3\frac{\partial}{\partial p_3}.$$

Замечание 4.2. Интересно, что в справочнике Э. Камке по обыкновенным дифференциальным уравнениям для следующих двух уравнений (7.8 и 7.9):

$$4u^2u''' - 18uu'u'' + 15u'^3 = 0,$$
$$9u^2u''' - 45uu'u'' + 40u'^3 = 0,$$

принадлежащих к типу, рассмотренному в примере 4.8, приведен свой рецепт решения.

Упражнение 4.4. Докажите, что любое линейное пространство, состоящее из инфинитезимальных трансляций и инфинитезимальных масштабных преобразований, образует разрешимую алгебру Ли.

Для этого проверьте, что если $\mathcal{Y}$ — алгебра Ли рассматриваемого типа, то коммутаторная подалгебра $\mathcal{Y}^{(1)}$ состоит только из трансляций и, следовательно, она коммутативна.

Заметим, что всякая алгебра Ли размерности 2 разрешима. Действительно, если X_1 и X_2 — базис алгебры $\mathcal{Y}$, то подалгебра $\mathcal{Y}^{(1)}$ порождена элементами вида $[X_1, X_2]$ и, следовательно, $\mathcal{Y}^{(2)} = 0$. Потому интегрирование любого распределения коразмерности 2, в частности, обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, можно завершить в квадратурах, если известна двумерная алгебра Ли его симметрий.

Пример 4.9. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$u'' = u' + u^n - \frac{2n+2}{(n+3)^2}u, \tag{4.1}$$

где $n \neq -3$, $n \in \mathbb{R}$.

Поскольку это уравнение не содержит явно x, поле

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$$

является его симметрией. Нетрудно проверить, что поле

$$X_2 = e^{kx}\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{k+1}{2}u\frac{\partial}{\partial u} + \left(\frac{k(k+1)}{2}u + \frac{1-k}{2}p\right)\frac{\partial}{\partial p}\right],$$

где $k = \dfrac{1-n}{n+3}$, также является симметрией рассматриваемого уравнения *). При рассмотрении этого примера мы будем далее обозначать u' через p, а u'' через q.

Геометрический образ, связанный с данным уравнением, есть гиперповерхность $\mathcal{E}$ в четырехмерном пространстве с координатами (x, u, p, q), заданная уравнением

$$q = p + u^n - \frac{2n+2}{(n+3)^2}u,$$

вместе с одномерным распределением на $\mathcal{E}$, базисными формы которого являются $\omega_1 = du - p\,dx$ и $\omega_2 = dp - q\,dx$.

Функции x, u, p можно принять за координаты на $\mathcal{E}$. Рассмотрим матрицу

$$M = \|\omega_i(X_j)\| = \begin{pmatrix} -p & e^{kx}\left(\dfrac{k+1}{2}u - p\right) \\ -q & e^{kx}\left(\dfrac{k(k+1)}{2}u + \dfrac{1-k}{2}p - q\right) \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица имеет вид

$$M^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} e^{kx}\left(\dfrac{k(k+1)}{2}u + \dfrac{1-k}{2}p - q\right) & -e^{kx}\left(\dfrac{k+1}{2}u - p\right) \\ q & -p \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \det M = e^{kx}T$, а через T обозначено выражение

$$T = -\frac{k(k+1)}{2}up - \frac{1-k}{2}p^2 + \frac{k+1}{2}uq.$$

Умножая матрицу M^{-1} на столбец, составленный из 1-форм ω_1 и ω_2, получим новый базис форм, задающих распределение $C_{\mathcal{E}}$:

$$\omega_1' = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{k(k+1)}{2}u + \frac{1-k}{2}p - q\right)du - \left(\frac{k+1}{2}u - p\right)dp\right] + dx,$$

$$\omega_2' = \frac{1}{\Delta}[q\,du - p\,dp].$$

*) В отличие от предыдущих примеров, где все симметрии были видны «невооруженным глазом», найти поле X_2 не так просто. Способ, позволяющий это делать, — аппарат производящих функций для симметрий распределения Картана — будет описан в § 5.

По теореме 4.1 форма ω_1' должна быть замкнутой, поскольку $[X_1, X_2] = kX_2$. Чтобы найти первообразную этой формы, заметим, что

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{1-k^2}{2}p + (1-k)u^n + \frac{(k+1)^2(k-1)}{4}u,$$
$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{1-k^2}{2}u - (1-k)p.$$

Поэтому при $k \neq 1$ форму ω_1' можно переписать в виде

$$\omega_1' = \frac{1}{(k-1)T}\left[\frac{\partial T}{\partial u}\,du + \frac{\partial T}{\partial p}\,dp\right] + dx = \frac{1}{k-1}\,d\ln[T e^{(k-1)x}].$$

Таким образом, функция $f = T e^{(k-1)x}$ является первым интегралом рассматриваемого распределения. Заметим, что тем самым мы понизили порядок уравнения (4.1), так как оно равносильно семейству уравнений первого порядка вида

$$\frac{k-1}{2}p^2 + \frac{1-k^2}{2}up + \frac{k+1}{2}u^{n+1} + \\ + \frac{(k+1)^2(k-1)}{8}u^2 - ce^{(1-k)x} = 0, \quad (4.2)$$

где c — произвольная константа.

Ограничим теперь распределение $C_\mathcal{E}$ на поверхность H_c, заданную соотношением (4.2). На этой поверхности переменную p можно выразить через x и u следующим образом:

$$p = \frac{k+1}{2}u \pm \sqrt{\frac{1+k}{1-k}u^{n+1} + \frac{2c}{k-1}e^{(1-k)x}}. \quad (4.3)$$

Кроме того, заметим, что на поверхности H_c выполняется равенство $\Delta = ce^x$. Поэтому

$$\omega_2'|_{H_c} = -d\left(\frac{e^{-x}p^2}{2c}\right) + \frac{e^{-x}}{c}\left(p + u^n + \frac{k^2-1}{4}u\right)du - \frac{e^{-x}}{2c}p^2\,dx,$$

где p определяется соотношением (4.3). Из доказательства теоремы 4.2 следует, что эта форма замкнута. Следовательно, у нее есть интеграл, который задается формулой

$$g = -\frac{e^{-x}}{2c}\left(\frac{k+1}{2}u \pm \sqrt{\frac{1+k}{1-k}u^{n+1} + \frac{2c}{k-1}e^{(1-k)x}}\right)^2 +$$

$$+\frac{e^{-kx}}{k(k-1)}+\frac{e^{-x}}{c}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}+\frac{(k+1)^2}{8}u^2\right)\pm$$
$$\pm\frac{e^{-x}}{c}\int_0^u\sqrt{\frac{1+k}{1-k}\eta^{n+1}+\frac{2c}{k-1}e^{(1-k)x}}\,d\eta.$$

Соотношение $g=c_1$, $c_1=\mathrm{const}$, в неявном виде задает все решения рассматриваемого уравнения. По теореме Чебышева интеграл g представляет собой элементарную функцию тогда и только тогда, когда число $\dfrac{2}{n+1}$ целое.

Упражнение 4.5.

1. Проведите интегрирование до конца в случае $n=-1$.

2. Проинтегрируйте уравнение $u''=u'+ae^{bu}-\dfrac{2}{b}$ при помощи алгебры симметрий с образующими

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=e^{-x}\left[\frac{\partial}{\partial x}+\frac{2}{b}\frac{\partial}{\partial u}+(p-\frac{2}{b})\frac{\partial}{\partial p}\right].$$

§ 5. Производящие функции

В этом параграфе мы опишем метод, позволяющий эффективно описывать симметрии распределения Картана.

Пусть $\mathcal{E}$ — обыкновенное дифференциальное уравнение порядка k, разрешенное относительно старшей производной:

$$u^{(k)}=f(x,u,u^{(1)},\ldots,u^{(k-1)}).\tag{5.1}$$

Переменные $x,p_0,p_1,\ldots,p_{k-1}$, где $p_0=u$, мы будем рассматривать как координаты на поверхности $\mathcal{E}$. В этих координатах ограничение всякого векторного поля X на $\mathcal{E}=\{p_k=f(x,u,p_1,\ldots,p_{k-1})\}$ записывается в виде

$$X=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta_0\frac{\partial}{\partial p_0}+\ldots+\beta_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}.$$

Заметим, что алгебра характеристических полей распределения $C_{\mathcal{E}}$ состоит из всех полей вида $\lambda\bar{D}$, где λ — произвольная функция на $\mathcal{E}$, а $\bar{D}$ — оператор полной производной по переменной x на уравнении $\mathcal{E}$, записываемый в виде

$$\bar{D}=\frac{\partial}{\partial x}+p_1\frac{\partial}{\partial p_0}+\ldots+p_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-2}}+f\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}.\tag{5.2}$$

Заметим, что $\bar{D}(p_i)=p_{i+1}$, $i<k-1$, и, в соответствии с уравнением (5.1), $\bar{D}(p_{k-1})=f$.

На факторпространстве всех полей по $\operatorname{char}\mathcal{C}_{\mathcal{E}}$ имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}=-p_1\frac{\partial}{\partial p_0}-\ldots-p_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-2}}-f\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}.$$

Следовательно, при нахождении нетривиальных симметрий уравнения $\mathcal{E}$ можно ограничится рассмотрением полей вида

$$X=\beta_0\frac{\partial}{\partial p_0}+\ldots+\beta_{k-1}\frac{\partial}{\partial p_{k-1}}. \tag{5.3}$$

В пространстве 1-форм, определенных на многообразии $\mathcal{E}$, для удобства дальнейших вычислений введем операцию *горизонтализации* $\urcorner$, которая определяется своими значениями на образующих по формулам

$$\urcorner\, dx=dx,$$
$$\urcorner\, dp_i=p_{i+1}dx, \qquad i<k-1,$$
$$\urcorner\, dp_{k-1}=f\,dx$$

и далее продолжается на все пространство 1-форм по линейности над кольцом гладких функций.

Лемма 5.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *При операции горизонтализации* 1*-форма обращается в нуль в том и только том случае, если она аннулируется распределением Картана.*

2. *Для произвольной функции* $g\in C^\infty(\mathcal{E})$ *выполнено равенство*

$$\urcorner\, dg=\bar{D}(g)dx.$$

Доказательство. 1) Пусть $\omega=\gamma dx+\sum_i\gamma_i dp_i$. Тогда равенство $\urcorner\,\omega=0$ означает, что $\gamma+\sum_i\gamma_i p_{i+1}+\gamma_{k-1}f=0$. Следовательно,

$$\omega=-\Big(\sum_i\gamma_i p_{i+1}+\gamma_{k-1}f\Big)dx+\sum_i\gamma_i dp_i=\sum_i\gamma_i\omega_i.$$

2) В самом деле, если $g\in C^\infty(\mathcal{E})$, то

$$\urcorner\, dg=\urcorner\left(\frac{\partial g}{\partial x}dx+\sum_i\frac{\partial g}{\partial p_i}dp_i\right)=$$
$$=\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\sum_i p_{i+1}\frac{\partial g}{\partial p_i}+f\frac{\partial g}{\partial p_{k-1}}\right)dx=\bar{D}(g)dx. \quad\square$$

Предположим теперь, что векторное поле X, имеющее вид (5.3), является симметрией распределения Картана $C_{\mathcal{E}}$. В силу теоремы 3.1 и леммы 5.1 это равносильно тому, что

$$\lrcorner\, X(dp_i - p_{i+1}dx) = 0, \qquad i < k-1, \tag{5.4}$$

$$\lrcorner\, X(dp_{k-1} - f dx) = 0. \tag{5.5}$$

Из равенства (5.4) мы получаем, что

$$\left(\bar{D}(\beta_i) - \beta_{i+1}\right) dx = 0.$$

Отсюда следует, что $\beta_{i+1} = \bar{D}\beta_i$ для всех $i < k-1$. Обозначив β_0 через φ, мы можем записать поле X в виде

$$X = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{D}^i(\varphi)\frac{\partial}{\partial p_i} \tag{5.6}$$

Таким образом, если поле X — симметрия распределения Картана, то оно определяется одной функцией $\varphi = X(u)$. Функция φ называется *производящей функцией* поля X, определенного соотношением (5.6). Симметрию с производящей функцией φ мы будем обозначать через X_φ. Разумеется, производящая функция симметрии не может быть произвольной. Из равенства (5.5) следует, что

$$\bar{D}^k(\varphi) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial f}{\partial p_i}\bar{D}^i(\varphi) = 0. \tag{5.7}$$

Линейный дифференциальный оператор, стоящий в левой части равенства (5.7), мы обозначим через $\bar{l}_F$, где $F = p_k - f$ (т. е. F — функция, нули которой определяют поверхность $\mathcal{E}$), а черта обозначает ограничение рассматриваемого оператора на $\mathcal{E}$. Оператор l_F называется *оператором универсальной линеаризации**), соответствующим функции F (или нелинейному дифференциальному уравнению $F = 0$).

Из приведенных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Если уравнение $\mathcal{E}$ задано в виде $F = 0$, где $F = p_k - f(x, u, \ldots, p_k)$, то имеет место изоморфизм*

$$\ker \bar{l}_F \cong \operatorname{sym} \mathcal{E},$$

определяемый формулой $\varphi \mapsto X_\varphi$. □

*) Общая теория этих операторов будет изложена в гл. 4.

Замечание 5.1. Требование разрешимости относительно старшей производной в теореме 5.2 несущественно. Из результатов гл. 4 вытекает, что эта теорема справедлива для «почти любой» функции F. В общем случае оператор l_F определяется равенством

$$l_F = \sum \frac{\partial F}{\partial p_i} D^i.$$

Нетрудно заметить, что эта формула согласуется с приведенным выше выражением для $\bar{l}_F$ в случае, когда $F = p_k - f(x, u, \ldots, p_k)$.

Так как поля вида (5.6) находятся во взаимно однозначном соответствии со своими производящими функциями, то при помощи поля X_φ можно восстановить его производящую функцию φ. Действительно,

$$\varphi = X_\varphi \lrcorner \omega_0 = \omega_0(X_\varphi), \tag{5.8}$$

где $\omega_0 = dp_0 - p_1\, dx$. Заметим, что выражение, стоящее в правой части (5.8), в факторпространстве по множеству всех характеристических полей зависит только от класса элемента X_φ, так как

$$\omega_0(\overline{D}) = 0.$$

Таким образом, для того чтобы найти производящую функцию симметрии распределения Картана, совсем не обязательно приводить это поле к виду (5.6).

Заметим еще, что поскольку форма ω_0 содержит лишь члены с dx и du, производящая функция поля X полностью определяется двумя первыми коэффициентами выражения этого поля в координатах $x, p_0, \ldots, p_{k-1}$:

$$\omega_0\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial u} + \ldots\right) = \beta - \alpha p_1.$$

Рассмотрим теперь такие симметрии X, коэффициенты α и β которых зависят только от x и y. Геометрически это означает, что соответствующее поле X согласовано с проекцией π: $\mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}^2$, заданной формулой $\pi(x, u, p_1, \ldots, p_k) = (x, u)$. Векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$, согласованное с X, обозначим через X_0. В координатах (x, u) оно имеет вид

$$X_0 = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial u}.$$

В рассматриваемом случае поле X однозначно определяется полем X_0 и называется *поднятием* поля X_0. Векторные поля на плоскости $\mathbb{R}^2$, представляющие собой такие инфинитезимальные преобразования, которые смешивают зависимую и независимую переменные, в классической терминологии принято называть *точечными преобразованиями* *).

Таким образом, точечные преобразования (точнее, поднятия точечных преобразований) — это в точности те симметрии распределения Картана, производящие функции которых зависят лишь от x, u и p_1, причем от p_1 — линейно. Если производящая функция является произвольной функцией от переменных x, u и p_1, то соответствующее векторное поле называется *контактным*. Симметрии, производящая функция которых не имеет такого вида, называются *высшими*; общая теория высших симметрий будет построена в гл. 4.

Приведем примеры наиболее популярных в приложениях точечных преобразований вместе с их производящими функциями.

1. Трансляция по x: $X_0 = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Производящая функция равна $-p_1$.

2. Трансляция по u: $X_0 = \dfrac{\partial}{\partial u}$. Производящая функция есть константа 1.

3. Масштабное преобразование: $X_0 = ax\dfrac{\partial}{\partial x} + bu\dfrac{\partial}{\partial u}$, где a, b — константы. Производящая функция этого преобразования равна $bu - axp_1$.

Рассмотрим теперь систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для простоты ограничимся случаем систем уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной:

$$\begin{cases} \dot u_1 = v_1(x, u_1, \ldots, u_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot u_n = v_n(x, u_1, \ldots, u_n). \end{cases} \tag{5.9}$$

Геометрически система (5.9) описывается как многообразие $\mathcal{E}$ с координатами $x, u_1, \ldots, u_n$, снабженное распределением Картана. Базисные формы этого распределения имеют вид

$$\begin{cases} \omega_1 = du_1 - v_1\,dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_n = du_n - v_n\,dx. \end{cases}$$

*) Смысл этого термина прояснится в гл. 2 и 3 при рассмотрении более общих контактных преобразований.

Распределение $C_{\mathcal{E}}$ в этом случае также одномерно и, значит, вполне интегрируемо (его интегральные многообразия являются графиками решений данной системы). Однако, в отличие от случая одного уравнения, симметрия распределения $C_{\mathcal{E}}$ описывается теперь не функцией, а набором n функций (*производящим сечением*). Теорема 5.2 имеет следующий вид.

Теорема 5.3. *Пространство нетривиальных инфинитезимальных симметрий системы* (5.9) *изоморфно ядру матричного оператора $\bar{l}_F$, действующего в пространстве вектор-функций переменных $x, u_1, \ldots, u_n$. Оператор $\bar{l}_F$ имеет вид*

$$\bar{l}_F = \begin{pmatrix} \bar{D} - \dfrac{\partial v_1}{\partial u_1} & -\dfrac{\partial v_1}{\partial u_2} & \ldots & -\dfrac{\partial v_1}{\partial u_n} \\ -\dfrac{\partial v_2}{\partial u_1} & \bar{D} - \dfrac{\partial v_2}{\partial u_2} & \ldots & -\dfrac{\partial v_2}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{\partial v_n}{\partial u_1} & -\dfrac{\partial v_n}{\partial u_2} & \ldots & \bar{D} - \dfrac{\partial v_n}{\partial u_n} \end{pmatrix},$$

где через $\bar{D}$ обозначен оператор $\dfrac{\partial}{\partial x} + v_1 \dfrac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + v_n \dfrac{\partial}{\partial u_n}$.

При этом сечению $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \ker \bar{l}_F$ соответствует векторное поле

$$X_\varphi = \varphi_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + \varphi_n \frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Так как симметрии распределения Картана удобно описывать при помощи производящих функций, то естественно перенести структуру алгебры Ли с пространства векторных полей на пространство производящих функций (а для уравнения k-го порядка — на пространство всех функций от $u, p_0, \ldots, p_{k-1}$). Для этого вычислим коммутатор полей $X_\varphi = \sum \bar{D}^i(\varphi) \dfrac{\partial}{\partial p_i}$ и $X_\psi = \sum \bar{D}^i(\psi) \dfrac{\partial}{\partial p_i}$:

$$[X_\varphi, X_\psi] = \sum_j \sum_i \left(\bar{D}^i(\varphi) \frac{\partial \bar{D}^j(\psi)}{\partial p_i} - \bar{D}^i(\psi) \frac{\partial \bar{D}^j(\varphi)}{\partial p_j} \right) \frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Полученное поле имеет производящую функцию $\{\varphi, \psi\}$, которую можно найти, подставив это поле в 1-форму $\omega_0 = dp_0 - p_1\, du$. Легко проверить, что

$$\{\varphi, \psi\} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\bar{D}^i(\varphi) \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \bar{D}^i(\psi) \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \right).$$

Скобку на пространстве функций от $x, p_1, \ldots, p_{k-1}$, определенную этим равенством, мы будем называть *высшей скобкой Якоби* (на уравнении $\mathcal{E}$).

В случае системы уравнений вида (5.9) скобка Якоби на множестве производящих сечений описывается следующим образом. Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$. Тогда сечение $\chi = \{\varphi, \psi\}$ имеет компоненты

$$\chi_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right), \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Эту формулу нетрудно получить, заметив, что поле с производящим сечением φ имеет вид $\varphi_1 \dfrac{\partial}{\partial u_1} + \ldots, \varphi_n \dfrac{\partial}{\partial u_n}$, а коммутатор сечений соответствует коммутатору полей.

§ 6. Пример использования симметрий для описания уравнений, разрешимых в квадратурах

Найдем все уравнения вида

$$u'' = u' + f(u), \tag{6.1}$$

имеющие двумерную алгебру Ли точечных симметрий [123]. Как уже отмечалось, двумерные алгебры Ли разрешимы, и поэтому все такие уравнения будут интегрироваться в квадратурах.

Так как уравнение (6.1) не содержит явно x, то одна симметрия очевидна — это трансляция по x. Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти условия, при которых это уравнение имеет еще одну симметрию. Напомним, что производящая функция имеет вид

$$\varphi = \alpha p + \beta, \tag{6.2}$$

где $p = p_1$, а α и β — функции от x, u. При этом мы будем исключать из рассмотрения тривиальный частный случай линейной функции f.

В качестве координат на поверхности $\mathcal{E}$, соответствующей уравнению (6.1), можно выбрать функции x, u, p. Оператор полной производной по x имеет вид

$$\bar{D} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial u} + (p + f) \frac{\partial}{\partial p}. \tag{6.3}$$

Тогда производящая функция симметрии должна быть решением уравнения

$$\bar{D}^2(\varphi) - \bar{D}(\varphi) - f'\varphi = 0.$$

Учитывая равенства (6.2) и (6.3), это соотношение можно переписать в виде

$$\alpha_{uu}p^3 + (2\alpha_u + 2\alpha_{xu} + \beta_{uu})p^2 + (3\alpha_u f + \alpha_x + \alpha_{xx} + 2\beta_{xu})P + \\ + (2\alpha_x f + \beta_u f + \beta_{xx} - \beta_x - \beta f') = 0, \qquad (6.4)$$

где индексы x, u обозначают производные по этим переменным, а производная функция f по ее единственному аргументу обозначена штрихом. Полученное выражение представляет собой многочлен относительно p. Так как коэффициенты этого многочлена не зависят от p, то все они тождественно равны нулю. Таким образом, уравнение (6.4) равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha_{uu} = 0, \\ 2\alpha_u + 2\alpha_{xu} + \beta_{uu} = 0, \\ 3f\alpha_u + \alpha_x + \alpha_{xx} + 2\beta_{xu} = 0, \\ 2f\alpha_x + f\beta_u + \beta_{xx} - \beta_x - f'\beta = 0. \end{cases} \qquad (6.5)$$

Из первого уравнения этой системы получаем, что

$$\alpha = \gamma u + \delta, \qquad \gamma, \delta \in C^\infty(x),$$

где через $C^\infty(x)$ обозначено кольцо гладких функций от переменной x. Подставляя полученное выражение во второе уравнение системы, получаем, что

$$\beta = -(\gamma' + \gamma)u^2 + \varepsilon u + \zeta, \qquad \varepsilon, \zeta \in C^\infty(x).$$

Третье уравнение системы сводится к соотношению

$$3f\gamma = 3(\gamma' + \gamma'')u - \delta' - \delta'' - 2\varepsilon'.$$

Ввиду нелинейности функции f полученное уравнение равносильно соотношениям: $\gamma = 0$, $\varepsilon = \dfrac{\varkappa - \delta - \delta'}{2}$, где $\varkappa = \mathrm{const}$.

Нам осталось решить только последнее уравнение системы (6.5), которое можно записать в виде

$$(\varepsilon u + \zeta)f' - \eta f = \theta u + \lambda, \qquad (6.6)$$

где $\eta = 2\delta' + \varepsilon$, $\theta = \varepsilon'' - \varepsilon'$, $\lambda = \zeta'' - \zeta'$ — функции, принадлежащие $C^\infty(x)$.

Уравнение (6.6) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f(u)$, в которое переменная x входит как параметр. При условии, что $\varepsilon \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\varepsilon \neq \eta$, его общее решение дается формулой

$$f(u)=\mu\left(u+\frac{\zeta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\eta}{\varepsilon}}+\frac{\theta}{\varepsilon-\eta}\left(u+\frac{\zeta}{\varepsilon}\right)+\frac{\theta\zeta-\varepsilon\lambda}{\varepsilon\eta}, \tag{6.7}$$

где $\mu \in C^{\infty}(x)$.

Среди функций f вида (6.7) нам требуется выбрать функции, которые не зависят от x и нелинейно зависят от u. При $\dfrac{\eta}{\varepsilon} \neq 2$ функция f имеет требуемый вид в том и только том случае, если

$$\begin{gathered} \mu=a, \quad \frac{\zeta}{\varepsilon}=b, \quad \frac{\eta}{\varepsilon}=c, \\ \frac{\theta}{\varepsilon-\eta}=d, \qquad \frac{\theta\zeta-\varepsilon\lambda}{\varepsilon\eta}=e, \end{gathered} \tag{6.8}$$

где a, b, c, d, e — некоторые константы.

Учитывая связи между функциями $\delta, \varepsilon, \eta, \zeta, \theta, \lambda$, из соотношений (6.8) легко найти, что

$$\varepsilon=-\frac{h}{2}(k+1)e^{kx}, \quad \zeta=b\varepsilon, \quad \eta=c\varepsilon, \quad \theta=(k^2-k)\varepsilon, \quad \lambda=b\theta,$$

где $k=\dfrac{1-c}{c+3}$, а h — произвольная постоянная. Отсюда получаем, что

$$f(u)=a(u+b)^c-\frac{2c+2}{(c+3)^2}(u+b). \tag{6.9}$$

Из связей между $\delta, \varepsilon, \eta, \zeta, \theta$ и λ следует также, что если $\eta=2\varepsilon$ и функция (6.7) не зависит от x, то она имеет вид (6.9) при $c=2$.

Рассмотрим теперь вырожденные случаи. Если $\eta=0$, $\eta=\varepsilon$, то функция $f(u)$ линейна. В случае же, когда $\varepsilon=0$, уравнение (6.6) имеет следующие нелинейные решения, не зависящие от x:

$$f(u)=ae^{bu}-\frac{2}{b}, \qquad a, b=\text{const}.$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Среди нелинейных уравнений вида*

$$u''=u'+f(u)$$

двумерную алгебру точечных симметрий имеют лишь следующие:

1) $u''=u'+a(u+b)^c-\dfrac{2c+2}{(c+3)^2}(u+b), \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 1, -3;$

2) $u''=u'+ae^{bu}-\dfrac{2}{b}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$

В первом случае базис производящих функций симметрий составляют функции

$$\begin{cases} \varphi_1 = p, \\ \varphi_2 = e^{kx}\left(p - \dfrac{k+1}{2}(u+b)\right), \end{cases} \qquad k = \frac{1-c}{c+3},$$

а во втором случае — функции

$$\begin{cases} \varphi_1 = p, \\ \varphi_2 = e^{-x}\left(p - \dfrac{2}{b}\right). \end{cases}$$

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В данной главе мы распространяем геометрический подход к дифференциальным уравнениям и их решениям, рассмотренный в предыдущей главе для обыкновенных дифференциальных уравнений, на уравнения в частных производных первого порядка, содержащие одну зависимую переменную.

При этом, как и в гл. 1, основные свойства дифференциальных уравнений первого порядка мы будем интерпретировать в терминах распределения Картана на этом уравнении. Это в первую очередь относится к таким свойствам уравнения, как симметрия и интегрируемость.

Геометрическая теория уравнений первого порядка тесно связана с симплектической геометрией и, в частности, с гамильтоновой механикой. Эти вопросы также будут обсуждаться в этой главе.

§ 1. Контактные преобразования

1.1. Контактные элементы и распределение Картана. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты на пространстве $\mathbb{R}^n$. Дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции u в этих координатах имеет следующий вид:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где F — гладкая функция от $2n+1$ переменной.

Обозначая через $p_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, p_n = \dfrac{\partial u}{\partial x_n}$ частные производные неизвестной функции u, мы можем рассмотреть $(2n+1)$-мерное линейное пространство $J^1(\mathbb{R}^n)$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots \ldots, p_n)$, а затем интерпретировать дифференциальное уравнение как гиперповерхность $\mathcal{E} = \{F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = 0\}$ в этом пространстве.

Как правило, мы будем предполагать, что дифференциал

$$dF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial u} du + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i$$

отличен от нуля на некотором всюду плотном подмножестве гиперповерхности $\mathcal{E} = \{F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)\}$.

При выполнении этого предположения любая другая функция G, также обращающаяся в нуль на гиперповерхности $\mathcal{E}$, вблизи этой гиперповерхности имеет вид $G = \mu F$, где μ — некоторая гладкая функция от переменных $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$.

В приложениях часто возникают ситуации, когда дифференциальное уравнение рассматривается на более сложном пространстве, чем $\mathbb{R}^n$, например, на торе. Поэтому мы дадим бескоординатную конструкцию многообразия $J^1(M)$, где M — произвольное гладкое многообразие размерности n.

Рассмотрим $(n+1)$-мерное многообразие $J^0(M) = M \times \mathbb{R}$, состоящее из пар (x, u), где $x \in M$, u — вещественное число. *Контактным элементом* в $J^0(M)$ называется пара (θ, L), где $\theta \in J^0(M)$ — произвольная точка, а $L \subset T_\theta(J^0(M))$ — n-мерная плоскость. Контактный элемент (θ, L) будем считать *неособым*, если плоскость L не содержит вертикального касательного вектора $\partial/\partial u$.

Упражнение 1.1. Докажите, что множество всех неособых контактных элементов в $J^0(M)$ является гладким многообразием.

Определение 1.1. *Многообразием* 1-*джетов* гладких функций на M мы будем называть многообразие всех неособых контактных элементов в $J^0(M)$. Это многообразие обозначается через $J^1(M)$.

Отметим, что определены проекции

$$\pi_{1,0}\colon\ J^1(M) \to J^0(M), \qquad \pi_{1,0}(\theta, L) = \theta \tag{1.1}$$

и

$$\pi_1\colon\ J^1(M) \to M, \quad \pi_1\colon\ \pi((x,u), L) = x, \qquad (x,u) \in J^0(M). \tag{1.2}$$

При этом $J^1(M)$ является векторным расслоением как над базой $J^0(M)$, так и над M. Модуль сечений расслоения (1.2) мы будем обозначать через $\mathcal{J}^1(M)$.

Многообразие $J^1(M)$ является основным объектом для геометрической интерпретации дифференциальных уравнений первого порядка.

Всякая гладкая функция $f \in C^\infty(M)$ обладает графиком $\Gamma(f) \subset \subset J^0(M)$, состоящим из точек $b=(a, f(a))$, где a — точка, принадлежащая многообразию M. В каждой точке $b=(a, f(a))$ этого графика определен неособый контактный элемент (b, L), где L — плоскость, касательная к графику в этой точке. Наоборот, очевидно, что всякий неособый контактный элемент $\theta=(b, L_\theta) \in J^1(M)$ является касательным к графику некоторой функции.

Опишем рассматриваемый контактный элемент в локальных координатах. Пусть гладкая функция $f \in C^\infty(M)$ в локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n, u)$ имеет вид $u=f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $b=(a, f(a))$, а $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta)$ — координаты пространства $T_b(J^0(M))$ относительно базиса $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial u}$, то касательная плоскость к графику функции задается уравнением

$$\eta=p_1\xi_1+\ldots+p_n\xi_n, \tag{1.3}$$

где $p_1=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, p_n=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)$.

Тем самым на многообразии 1-джетов мы ввели *специальные локальные координаты* $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$. Они имеют следующий геометрический смысл. Если $\theta=(b, L_\theta) \in J^1(M)$, где L_θ — касательная плоскость к графику функции $u=u(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $b=(a, f(a))$, то контактный элемент (b, L_θ) имеет координаты

$$\left(a_1, \ldots, a_n, f(a), \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Упражнение 1.2. Докажите, что $J^1(M)=T^*(M) \times \mathbb{R}$.

Из упражнения 1.2 следует, что определена проекция π: $J^1(M) \to T^*(M)$. В специальных локальных координатах она задается формулой

$$\pi(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)=(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n). \tag{1.4}$$

Приведем геометрическую интерпретацию решения дифференциального уравнения. Любой гладкой функции $f \in C^\infty(M)$ соответствует отображение

$$j_1(f)\colon\ M \to J^1(M), \qquad j_1(f)\colon\ a \mapsto (b, L_{f(a)}), \tag{1.5}$$

которое каждой точке $a \in M$ ставит в соответствие неособый контактный элемент, состоящий из точки $b=(a, f(a))$ и касательной плоскости к графику функции f в этой точке.

Отображение $j_1(f)$ называется 1-джетом функции f, а его график является n-мерным многообразием: $N_f = j_1(f)(M) \subset J^1(M)$. В специальных локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ это многообразие, очевидно, описывается уравнениями

$$\begin{cases} u = f(x_1, \ldots, x_n), \\ p_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{1.6}$$

Как и в случае одной независимой переменной, многообразие N_f имеет весьма специальный вид. Его геометрическую характеризацию мы дадим при помощи *распределения Картана*, к описанию которого мы сейчас приступаем.

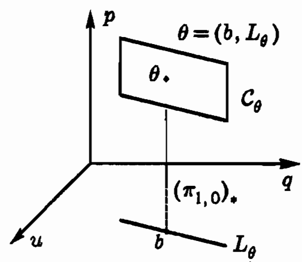

Рис. 2.1

Пусть $\theta = (b, L_\theta)$ — произвольный элемент из $J^1(M)$ и $L_\theta \subset T_b(J^0(M))$.

Рассмотрим в касательном пространстве $T_\theta(J^1(M))$ векторы, которые проектируются в плоскость L_θ при отображении $(\pi_{1,0})_*$:

$$C_\theta = \{\xi \in T_\theta(J^1(M)) \mid (\pi_{1,0})_*(\xi) \in L_\theta\}.$$

Гиперплоскость C_θ называется *картановской плоскостью* в точке $\theta \in J^1(M)$ (рис. 2.1).

Определение 1.2. *Распределением Картана* на многообразии 1-джетов $J^1(M)$ называется соответствие

$$\theta \mapsto C_\theta, \qquad \theta \in J^1(M).$$

Утверждение 1.1. *Пусть $f \in C^\infty(M)$ — произвольная гладкая функция, $a \in M$, $\theta = j_1(f)(a) \in N_f$. Тогда многообразие N_f касается плоскости C_θ.*

Доказательство. В самом деле, при отображении $\pi_{1,0}$ многообразие N_f проектируется в график функции f. Поэтому касательная плоскость $T_\theta(N_f)$ проектируется в касательную плоскость к графику функции f в точке $b = (a, f(a))$, которая по определению совпадает с L_θ. Следовательно, $T_\theta(N_f) \subset C_\theta$. □

Из доказанного утверждения легко вытекает следующее предложение.

Следствие 1.2. *Образ отображения $j_1(f)$: $M \to J^1(M)$ является интегральным многообразием распределения Картана.*

Упражнение 1.3. а. Докажите, что слой проекции (1.1) над фиксированной точкой (x_0, u_0) является интегральным многообразием распределения Картана.

б. Пусть V — произвольное k-мерное подмногообразие $J^0(M)$, $1 \leqslant k \leqslant n = \dim M$. Докажите, что многообразие $P \subset J^1(M)$, составленное из таких контактных элементов (b, L), что $b \in V$, $L \supset T_b(P)$ является интегральным многообразием распределения Картана.

Распределение Картана на многообразии $J^1(M)$ можно задать при помощи некоторой дифференциальной формы. Напомним, что контактный элемент θ состоит из пары (b, L_θ), где $b \in J^0(M)$, а $L_\theta \subset T_b(J^0(M))$. Образ произвольного касательного вектора $\xi \in \in T_\theta(J^1(M))$ при проекции $\pi_{1,0}$: $J^1(M) \to J^0(M)$, $\pi_{1,0}(\theta) = b$, можно однозначно представить в виде суммы $\xi_0 = (\pi_{1,0})_*(\xi) = \rho_\xi \left.\dfrac{\partial}{\partial u}\right|_b + \xi_0'$, где $\xi_0' \in L_\theta$. Определим форму U_1 равенством $U_1(\xi) = \rho_\xi$. Тогда очевидно следующее утверждение.

Утверждение 1.3. *Вектор $\xi \in C_\theta$ в том и только том случае, если $U_1(\xi) = 0$.*

Следовательно, дифференциальная 1-форма U_1 задает распределение Картана. Выпишем форму U_1 в локальных координатах.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ — специальные локальные координаты на $J^1(M)$ в окрестности точки θ. Так как плоскость $L_\theta \subset T_b(J^0(M))$ задается уравнением $\eta = p_1\xi_1 + \ldots + p_n\xi_n$, где $(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta)$ — соответствующие координаты в пространстве $T_b(J^0(M))$, то мы имеем

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\sum_{i=1}^n p_i \xi_i\right) \frac{\partial}{\partial u} \in L_\theta. \tag{1.7}$$

Пусть $\xi = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \eta \dfrac{\partial}{\partial u} + \sum\limits_{i=1}^n \zeta_i \dfrac{\partial}{\partial p_i} \in T_\theta(J^1(M))$. Следовательно, $(\pi_{1,0})_*(\xi) = \sum\limits_{i=1}^n \xi_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \eta \dfrac{\partial}{\partial u}$. Тогда из (1.7) получаем, что

$$(\pi_{1,0})_*(\xi) = \left(\eta - \sum_{i=1}^n p_i \xi_i\right) \frac{\partial}{\partial u} + \chi,$$

где $\chi \in L_\theta$. Поэтому из определения формы U_1 следует, что

$$U_1 = du - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i. \tag{1.8}$$

Замечание 1.1. Симплектическая и контактная геометрии обладают многими похожими свойствами. По существу, эта общность объясняется тем, что $J^1(M) = T^*M \times \mathbb{R}$. Многие сведения о конактной геометрии можно найти в [97, 3, 5].

Так, например, на многообразии $J^1(M)$ можно построить универсальный элемент, аналогичный универсальной форме pdq в симплектической геометрии [42].

Утверждение 1.4. *На многообразии $J^1(M)$ существует единственный элемент $\rho \in \mathcal{J}^1(J^1(M))$, такой, что для любого сечения $\theta \in \mathcal{J}^1(M)$ имеем $\theta^*(\rho) = \theta$.*

Доказательство. Прежде чем определить элемент ρ, сделаем следующее замечание. Каждую точку $x \in J^1(M)$ можно интерпретировать как 1-джет некоторой функции $f \in C^\infty(M)$ в точке $a = \pi_1(x) \in M$, где $\pi_1\colon\ J^1(M) \to M$, $\pi_1(a, f(a), L_\theta) = a$. Определим теперь ρ следующим образом: $\rho|_x = j_1(\pi_1^*(f))|_x$, где $x = j_1(f)|_a$, $a = \pi_1(x)$. Проверим, что так определенный элемент ρ удовлетворяет условию предложения. Пусть x и f таковы, как и выше, а сечение θ выбрано так, что $\theta(a) = x$. Тогда

$$\theta^*(\rho)|_a = \theta^*(j_1(\pi_1^*(f))|_x) = j_1(\theta^*\pi_1^*(f))|_a = j_1(f)|_a = x = \theta(a).$$

Единственность элемента ρ следует из того, что если для некоторого элемента ρ' и всех $\theta \in \mathcal{J}^1(M)$ выполнено равенство $(\theta)^*(\rho') = 0$, то $\rho' = 0$. $\square$

Упражнение 1.4. Докажите, что локально элемент ρ записывается в виде $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$.

Используя разложение пространства $J^1(M) = T^*(M) \times \mathbb{R}$, введем оператор $S\colon\ \mathcal{J}^1(M) \to \Lambda^1(M)$. Если $\mathcal{J}^1(M) = \Lambda^1(M) \oplus C^\infty(M)$, то по определению $S(f, \omega) = df - \omega$.*)

---

*) Оператор S — это простейший оператор из серии операторов Спенсера $S_{k,l}$. В общем случае $S_{k,l}\colon\ \mathcal{J}^k \otimes \Lambda^l \to \mathcal{J}^{k-1} \otimes \Lambda^{l+1}$, $S_{k,l}(aj_k(f) \otimes \omega) = j_{k-1}(f) \otimes (da \wedge \wedge\, \omega)$. См. [24].

В данном случае рассматриваемый комплекс

$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{\ j_1\ } \mathcal{J}^1(M) \xrightarrow{\ S\ } \Lambda^1(M) \longrightarrow 0$$

аналогичен началу комплекса де Рама (хотя, в отличие от него, ацикличен), при этом оператор S играет роль оператора d, а форма U_1 выступает в роли «симплектической структуры». Об операторах Спенсера см. [24].

Упражнение 1.5. Докажите, что образ оператора $j_1\colon C^\infty(M)\to \mathcal{J}^1(M)$ совпадает с ядром оператора S.

Теперь нетрудно вычислить, что искомый элемент $U_1 = S(\rho)$.

Используя следствие 1.2, можно убедиться, что n-мерное интегральное многообразие распределения Картана, «хорошо проектирующееся на M», является графиком 1-джета некоторой гладкой функции $f\in C^\infty(M)$.

Утверждение 1.5. *Произвольное подмногообразие $N\subset J^1(M)$, без особенностей проектирующееся на M при проекции $\pi_1\colon J^1(M)\to M$, является максимальным интегральным многообразием распределения Картана тогда и только тогда, когда оно имеет вид $j_1(f)(M)$ для некоторой функции $f\in C^\infty(M)$.*

Доказательство. Действительно, если n-мерное многообразие $N\subset J^1(M)$ проектируется на M без вырождения, то оно описывается формулами

$$\begin{cases} u = f(x_1,\ldots,x_n),\\ p_1 = g_1(x_1,\ldots,x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_n = g_n(x_1,\ldots,x_n).\end{cases}$$

Многообразие N является интегральным многообразием распределения Картана тогда и только тогда, когда $U_1|_N = 0$. Если $(x_1,\ldots,x_n)$ приняты за координаты на N, то ограничение U_1 на N записывается в виде $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-g_i\right)dx_i$. Таким образом, N будет интегральным многообразием тогда и только тогда, когда $g_i(x_1,\ldots,x_n)=\partial f/\partial x_i$, $i=1,\ldots,n$, т. е. когда N является образом отображения (1.5) и, следовательно, имеет вид N_f. □

Таким образом, распределение Картана на $J^1(M)$ — это та структура, которая позволяет выделить из всех n-мерных подмногообразий в $J^1(M)$ графики 1-джетов.

Рассмотрим произвольное подмногообразие $\mathcal{E}\subset J^1(M)$. Для любой точки $\theta\in\mathcal{E}$, положим $\mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta = \mathcal{C}_\theta\cap T_\theta(\mathcal{E})$. Распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ называется *индуцированным распределением Картана* на подмногообразии $\mathcal{E}$.

Определение 1.3. 1. *Дифференциальным уравнением первого порядка $\mathcal{E}$* мы будем называть подмногообразие коразмерности один многообразия $J^1(M)$ с индуцированным распределением Картана $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

2. *Обобщенным решением* уравнения $\mathcal{E}$ называется n-мерное максимальное интегральное многообразие распределения Картана, лежащее на поверхности $\mathcal{E} \subset J^1(M)$.

Пример 1.1. Рассмотрим стационарное уравнение Гамильтона — Якоби $\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + q^2 = C$, $C = \text{const}$, описывающее одномерный гармонический осцилятор. Соответствующее уравнение $p^2 + q^2 = C$ определяет цилиндр в трехмерном пространстве (q, u, p). Нули распределения Картана задают поле направлений C_E на этом цилиндре Интегральные кривые поля C_E, лежащие на цилиндре (рис. 2.2), и есть обобщенные решения этого уравнения. В данном случае очевидно, что эти кривые проектируются на прямую q с особенностями. На рис. 2.3 показана проекция этих кривых на плоскость (q, u).

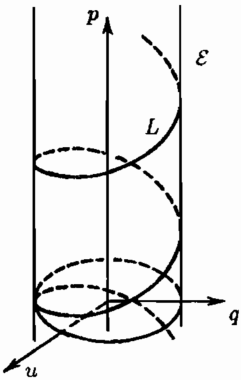

Рис. 2.2

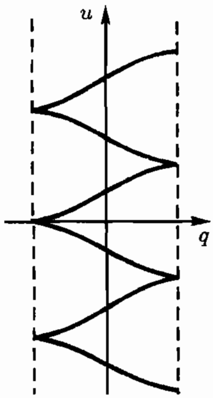

Рис. 2.3

Если касательное пространство $T_\theta(\mathcal{E})$ ни в какой точке $\theta \in \mathcal{E}$ не совпадает с картановской плоскостью C_θ, то индуцированное распределение Картана $C(\mathcal{E})$ будет распределением коразмерности 1 в $T_\theta(\mathcal{E})$.

Определение 1.4. Точка $\theta \in \mathcal{E}$ называется *особой точкой уравнения* $\mathcal{E}$, если $T_\theta(\mathcal{E}) = C_\theta$.

Упражнение 1.6. Докажите, что начало координат является особой точкой для уравнений

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = f \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 = f.$$

Далее, как правило, мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка в окрестности неособых точек.

1.2. Контактные преобразования. Гладкое преобразование $J^1(M) \to J^1(M)$, переводящее распределение Картана в распределение Картана, называется *контактным преобразованием.*

Таким образом, преобразование F является контактным, если выполнено одно из двух равносильных условий:

1) $F_*(C_\theta) \subset C_{F(\theta)}$, для любой точки $\theta \in J^1(M)$,

2) $F^*(U_1) = \lambda U_1$, где $\lambda \in C^\infty(J^1(M))$.

В координатах условие сохранения формы U_1 записывается следующим образом:

$$dU - \sum_{i=1}^{n} P_i\, dX_i = \lambda\left(du - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i\right), \tag{1.9}$$

где $X_i = F^*(x_i)$, $U = F^*(u)$, $P_i = F^*(p_i)$, $\lambda \in C^\infty(J^1(M))$.

Первоначально контактные преобразования возникли при описании таких преобразований плоскости, при которых образы двух касающихся кривых с порядком 1 касаются друг друга с тем же порядком. Такие преобразования были названы преобразованиями прикосновения.

Для описания таких преобразований рассмотрим кривую l, задаваемую уравнением $y = y(x)$ (рис. 2.4). Предположим, что искомое преобразование F имеет вид

$$\begin{aligned} X &= f(x, y, y'), \\ Y &= \varphi(x, y, y'), \end{aligned} \tag{1.10}$$

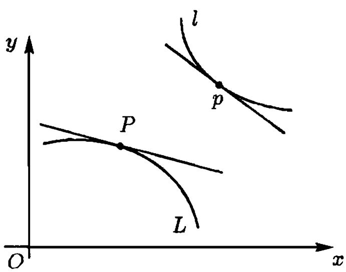

Рис. 2.4

кривая l отображается на кривую L и $F(p) = P$, $p \in l$.

Нетрудно проверить, что

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y' + \dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}.$$

Представим эту дробь в виде

$$\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right)\left(1 + \dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}y'}\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'\right)\left(1 + \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y'}y''}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'}\right)}.$$

Очевидно, что $\dfrac{dY}{dX}$ не зависит от y'' (а это и есть условие того, что преобразование F является преобразованием прикосновения), если выполняется равенство

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right)=\frac{\partial f}{\partial y'}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'\right). \tag{1.11}$$

Как нетрудно проверить, равенство (1.11) в точности означает, что преобразование

$$\bar{F}\colon\ J^1(\mathbb{R}^1)\to J^1(\mathbb{R}^1),\qquad \bar{F}(j_1(y(x))|_p=j_1(Y(X))|_P,$$

сохраняет дифференциальную 1-форму $dp-y\,dx$.

Обобщим этот пример. Пусть произвольное гладкое преобразование F многообразия $J^0(M)$ в локальных координатах $(x_1,\ldots,x_n,u)$ имеет вид

$$(x_1,\ldots,x_n,u)\mapsto(a_1(x,u),\ldots,a_n(x,u),b(x,u)). \tag{1.12}$$

Тогда это преобразование определяет преобразование пространства $J^1(M)$. Нетрудно найти закон преобразования для величин $p_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Упражнение 1.7. Покажите, что при преобразовании (1.12)

$$\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\end{pmatrix}\longmapsto\Delta^{-1}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial b}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial b}{\partial u}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial b}{\partial x_n}+p_n\dfrac{\partial b}{\partial u}\end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

где Δ — это матрица с элементами $\Delta_{ik}=\dfrac{\partial a_k}{\partial x_i}+p_i\dfrac{\partial a_k}{\partial u}$.

Упражнение 1.8. Докажите, что преобразование, задаваемое формулами (1.12) и (1.13), является контактным.

Формулы (1.12), (1.13) определяют преобразование $J^1(M)$ которое называется *продолжением гладкого преобразования* $J^0(M)$ на многообразие $J^1(M)$. При этом отображении контактный элемент (b, L_θ), отвечающий точке $\theta\in J^1(M)$, переходит в элемент $\bar{F}(\theta)=(F(b),(F_*)_b(L_\theta))$.

Поскольку $\pi_{1,0}\circ\bar{F}=F\circ\pi_{1,0}$, и $(F_*)_b(L_\theta)=L_{\bar{F}}(\theta)$, имеет место включение $(\bar{F}_*)_b(C_\theta)\subset C_{\bar{F}(\theta)}$.

Итак, преобразование $\overline{F}$ переводит распределение Картана в себя и, в частности, переводит интегральные многообразия этого распределения в интегральные многообразия *).

Контактные преобразования, полученные продолжением преобразований $J^0(M)$, называются *точечными*.

Множество контактных преобразований не исчерпывается точечными преобразованиями.

Пример 1.2. Рассмотрим *преобразование Лежандра*

$$L: \quad \begin{cases} x_i \longmapsto & p_i, \\ u \longmapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k - u, \\ p_i \longmapsto & x_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{1.14}$$

где $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ — специальные локальные координаты.

Упражнение 1.9. Докажите, что преобразование Лежандра сохраняет распределение Картана.

Упражнение 1.10. Пусть преобразование F имеет вид $F(x, u) = (f(x), u)$, где $f\colon M \to M$ — некоторое гладкое преобразование, $x \in M$, $u \in \mathbb{R}$. Докажите, что продолжение $\overline{F}$ преобразования F сохраняет форму U_1, т. е. $\overline{F}^*(U_1) = U_1$.

Пример 1.3. Следующий вариант преобразования Лежандра называется *преобразованием Эйлера*:

$$E: \quad \begin{cases} x_i \longmapsto & p_i, \\ x_l \longmapsto & x_l, \\ u \longmapsto & \sum\limits_{s=1}^{k} x_s p_s - u, \\ p_i \longmapsto & x_i, \\ p_l \longmapsto & -p_l, \qquad i = 1, \ldots, k; \quad l = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $E_u^*(U_1) = -U_1$, поэтому преобразование Эйлера является контактным.

Приведем, следуя [97], еще некоторые примеры контактных преобразований.

---

*) Строго говоря, отображение F продолжается на $J^1(M)$ не во всех точках, поскольку контактный элемент $\overline{F}(\theta)$ должен быть неособым. Аналитически это требование означает, что матрица Δ должна быть обратимой. Далее мы будем рассматривать только те точки, где выполнено это условие.

Пример 1.4. Рассмотрим преобразование, заданное формулами

$$\bar{x}^i = x^i + \frac{\theta p^i}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2}}, \quad \bar{u} = u - \frac{\theta}{\sqrt{1+\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^2}}, \quad \bar{p}^i = p^i. \tag{1.15}$$

Упражнение 1.11. Докажите, что преобразование (1.15) контактно. Является ли оно точечным преобразованием?

Пример 1.5. Преобразование $\mathbb{R}^3$, задаваемое формулами

$$\bar{q} = \frac{p}{pq-u}, \quad \bar{u} = -\frac{1}{pq-u}, \quad \bar{p} = -\frac{q}{u}, \tag{1.16}$$

является контактным. Оно имеет следующую геометрическую интерпретацию (рис. 2.5). Рассмотрим единичную окружность

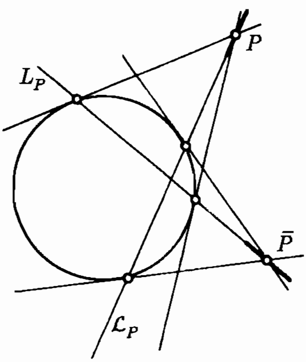

Рис. 2.5

$$q^2 + u^2 = 1.$$

Напомним, что полярой точки $P = (q_0, u_0)$ относительно этой окружности называется прямая L_P, задаваемая уравнением

$$q_0\xi + u_0\eta - 1 = 0.$$

Если точка P лежит вне окружности, то ее поляра проходит через точки пересечения касательных, проходящих через точку P, с окружностью.

Рассмотрим проходящую через точку P прямую $\mathcal{L}_P$, имеющую наклон p_0. Тогда на прямой L_P существует единственная точка $\bar{P}$, для которой прямая $\mathcal{L}_P$ является полярой относительно окружности.

Нетрудно проверить, что координаты точки $\bar{P}$ задаются формулами (1.16).

Аналогичные преобразования определены для произвольной кривой второго порядка.

Пример 1.6. Рассмотрим преобразование $\mathbb{R}^3$, задаваемое формулами

$$\bar{x} = \frac{(xp-u)p}{1+p^2}, \quad \bar{u} = -\frac{xp-u}{1+p^2}, \quad \bar{p} = \frac{xp^2 - x - 2up}{up^2 - u + 2xp}. \tag{1.17}$$

Это преобразование является контактным и называется *подэрным преобразованием*. Приведем его геометрическое описание.

Пусть O — начало координат. Рассмотрим точку $Q = (x_0, u_0)$ и прямую L, проходящую через эту точку с наклоном p. Из точки O опустим перпендикуляр на прямую L. В точке пересечения $\bar{Q} = (\bar{x}_0, \bar{u}_0)$ проведем касательную $\bar{L}$ к окружности с диаметром OQ. Нетрудно проверить, что формулы (1.17) задают координаты точки $\bar{Q}$ и наклон касательной $\bar{L}$ (рис. 2.6).

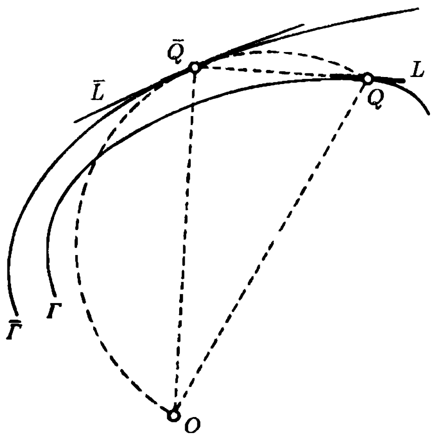

Рис. 2.6

Рассмотрим теперь действие контактных преобразований на дифференциальные уравнения.

Преобразование $\bar{F}$: $J^1(M) \to J^1(M)$ преобразует гиперповерхность $\mathcal{E}$, соответствующую некоторому уравнению, в некоторую (возможно, ту же самую) гиперповерхность. Так как распределение Картана сохраняется при этом преобразовании, то образ уравнения $\mathcal{E}$ «почти всюду» также является дифференциальным уравнением. Заметим, что преобразование $\bar{F}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между (обобщенными) решениями исходного и преобразованного уравнений.

Определение 1.5. Уравнения $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ в $J^1(M)$ называются (*локально*) *эквивалентными*, если существует контактное преобразование $J^1(M)$, при котором образ уравнения $\mathcal{E}$ (локально) совпадает с $\mathcal{E}'$.

Пример 1.7. Рассмотрим действие преобразования, полученного продолжением преобразования $J^0(M)$: $(x_1, x_2, u) \mapsto (u, x_2, x_1)$, на уравнение $\mathcal{E}_1 = \{u = \sqrt{p_2^2/p_1 - x_1^2}\}$. Из формул (1.13) получаем:

$$(x_1, x_2, u, p_1, p_2) \longmapsto (u, x_2, x_1, 1/p_1, -p_2/p_1).$$

Преобразованное уравнение $\mathcal{E}_1' = \{x_1 = \sqrt{p_2^2/p_1 - u^2}\}$ равносильно исходному в области $x_1 > 0$, $u > 0$ и, как легко видеть, совпадает с ним.

Рассмотрим теперь действие этого же преобразования на уравнение $\mathcal{E}_2 = \{4u - p_1^2 - p_2^2 = 0\}$. Так как $(x_1, x_2, u, p_1, p_2) \mapsto$ $\mapsto (u, x_2, x_1, 1/p_1, -p_2/p_1)$, то уравнение $\mathcal{E}_2$ преобразуется в уравнение $\mathcal{E}_2' = \{4x_1p_1^2 - 1 - p_2^2 = 0\}$. График решения $u = x_1^2 + x_2^2$ уравнения $\mathcal{E}_2$ преобразуется в поверхность $u^2 = x_1 - x_2^2$, являющуюся многозначным решением уравнения $\mathcal{E}_2'$. Точки $(x_1 = x_2^2, u = 0)$ этой поверхности являются особыми, поскольку в этих точках она касается вектора $\partial/\partial u$.

В области $x_1 > x_2^2$ решения $u = \pm\sqrt{x_1 - x_2^2}$ однозначны и бесконечно дифференцируемы.

Определение 1.6. Пусть $\mathcal{E} \subset J^1(M)$ — дифференциальное уравнение первого порядка. Контактное преобразование F: $J^1(M) \to J^1(M)$ называется *конечной контактной симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, если $F(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{E}$, задаваемое гиперповерхностью $H = 0$, где $H \in C^\infty(J^1(M))$ — гладкая функция с ненулевым дифференциалом. Тогда очевидно, что контактное преобразование F является симметрией этого уравнения в том и только том случае, если $F^*(H) = \lambda H$, $\lambda \in C^\infty(J^1(M))$.

Очевидно также, что симметрия уравнения $\mathcal{E}$ переводит его (обобщенные) решения в (обобщенные) решения этого же уравнения.

Пример 1.8. Преобразование Лежандра является конечной контактной симметрией уравнения

$$\mathcal{E} = \left\{ u - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \right\}. \tag{1.18}$$

Уравнение (1.18) допускает n-параметрическое семейство решений $u = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i^2$, где b_i — числовые параметры, $1 \leqslant i \leqslant n$. При каждом значении параметров b_i мы можем рассмотреть соответствующее решение — интегральное многообразие распределения Картана. Рассматриваемое семейство решений инвариантно относительно преобразования Лежандра в том смысле, что

$$L\left(j_1\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 \right) \right) = j_1\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{b_i} \right).$$

Рассмотрим теперь график 1-джета постоянной функции в

$J^1(\mathbb{R}^n)$. При преобразовании Лежандра

$$\begin{cases} u = c, \\ p_1 = 0, \\ \dots\dots \\ p_n = 0, \end{cases} \longmapsto \begin{cases} u = -c, \\ x_1 = 0, \\ \dots\dots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

он переходит в интегральное многообразие, проекция которого на многообразие независимых переменных вырождается в точку $(x_1 = \ldots = x_n = 0)$.

Сейчас на примере общего уравнения Клеро мы увидим, что рассмотрение вырождающихся при проекции интегральных многообразий не только осмысленно, но и весьма полезно.

1.3. Уравнение Клеро и его интегралы. Общее уравнение Клеро имеет вид

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - u, p_1, \ldots, p_n\right) = 0, \qquad (1.19)$$

где F — гладкая функция $(n+1)$-й переменной. Преобразование Лежандра переводит это уравнение в уравнение

$$F(u, x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (1.20)$$

которое не содержит производных. Уравнение (1.20) задает n-мерную поверхность в $(n+1)$-мерном линейном пространстве $J^0(\mathbb{R}^n)$, а соответствующее дифференциальное уравнение первого порядка — это ее прообраз при проекции $\pi_{1,0}$: $J^1(\mathbb{R}^n) \to J^0(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим такую точку $(a_1, \ldots, a_n, b) \in J^0(\mathbb{R}^n)$, что $F(b, a_1, \ldots$ $\ldots, a_n) = 0$. Тогда слой проекции $\pi_{1,0}$: $J^1(\mathbb{R}^n) \to J^0(\mathbb{R}^n)$ над этой точкой является обобщенным решением уравнения (1.20).

Применяя преобразование Лежандра к этим обобщенным решениям, мы получим n-параметрическое семейство обычных решений уравнения (1.19), которое называется *полным интегралом уравнения Клеро.*

С другой стороны, в окрестности неособой точки (т. е. там, где $\dfrac{\partial F}{\partial u} \neq 0$) существует единственное решение уравнения (1.20)

$$u = f(x_1, \ldots, x_n), \qquad (1.21)$$

которое получается разрешением уравнения (1.20) относительно u.

Выясним, во что переходит это решение при преобразовании Лежандра. Для этого заметим, что уравнение графика 1-джета функции (1.21) имеет вид

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n), \\ F(u, x_1, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

При преобразовании Лежандра система (1.22) преобразуется в систему

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial f_l}{\partial x_1}(p_1, \ldots, p_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{\partial f_l}{\partial x_n}(p_1, \ldots, p_n), \\ F\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i - u, p_1, \ldots, p_n\right) = 0 \end{cases} \tag{1.23}$$

которая является совместной.

Выражая из первых n уравнений элементы $p_1, \ldots, p_n$ через переменные $x_1, \ldots, x_n$, подставляя их в уравнение (1.19) и выражая затем u через $x_1, \ldots, x_n$ в силу полученного соотношения, мы можем получить конечное число решений исходного уравнения, которые называются *особыми интегралами уравнения Клеро*.

Пример 1.9. Рассмотрим уравнение Клеро с двумя независимыми переменными

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - u = \frac{1}{3}(p_1^3 + p_2^3). \tag{1.24}$$

Применяя преобразование Лежандра, получаем уравнение

$$u = \frac{1}{3}(x_1^3 + x_2^3),$$

при помощи которого легко найти полный интеграл исходного уравнения

$$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 - \frac{1}{3}(a_1^3 + a_2^3), \qquad a_1, a_2 = \mathrm{const}.$$

Для особых интегралов получаем совместную систему

$$\begin{cases} u = x_1p_1 + x_2p_2 - \dfrac{1}{3}(p_1^3 + p_2^3), \\ x_1 = p_1^2, \\ x_2 = p_2^2. \end{cases} \tag{1.25}$$

Отсюда следует, что особые интегралы существуют лишь в квадранте $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и имеют следующий вид:

$$p_1 = \alpha_1\sqrt{x_1}, \qquad p_2 = \alpha_2\sqrt{x_2},$$
$$u = \frac{2}{3}(\alpha_1 x_1^{3/2} + \alpha_2 x_2^{3/2}), \tag{1.26}$$

где α_1 и α_2 принимают независимо значения $+1$ или -1. Таким образом, формулы (1.26) определяет четыре специальных интеграла. Однако с геометрической точки зрения здесь имеется всего одно обобщенное особое решение, а именно — интегральная поверхность распределения Картана, задаваемая системой (1.25). Это поверхность четвертого порядка в $J^1(\mathbb{R}^2)$, которая проектируется на координатную плоскость (x_1, x_2) с особенностями, и поэтому имеет четыре ветви, каждая из которых является графиком отображения для одной из гладких функций, определяемых формулой (1.26).

1.4. Контактные многообразия в механике. Аналогом симплектического многообразия в контактной геометрии является контактное многообразие.

Определение 1.7. *Контактным многообразием* называется нечетномерное многообразие M^{2n+1} с такой 1-формой θ, что $\theta \wedge (d\theta)^n$ является формой объема.

Почти контактным многообразием мы будем называть нечетномерное многообразие M с заданной на нем замкнутой 2-формой максимального ранга.

Из результатов п. 1.1 следует, что многообразие 1-джетов $J^1(M)$, конечно же, является контактным многообразием.

Заметим, что если M — произвольное контактное многообразие, то ограничение формы $d\theta$ на нули формы θ невырождено.

Если ω — 2-форма на многообразии M, то множество таких векторов ξ, что $\xi \lrcorner \omega = 0$, называется *характеристическим распределением* формы ω. *Характеристическим векторным полем* на почти контактном многообразии (M, ω) называется такое поле X, что $X \lrcorner \omega = 0$.

В этом пункте, следуя [77], мы приведем некоторые примеры контактных многообразий, возникающие в механике.

Пример 1.10. Пусть (M, ω, H) — гамильтонова система (т. е. M — симплектическое многообразие с формой ω, H — гладкая функция на M) и H_e — регулярная поверхность энергии. Тогда $(H_e, i^*\omega)$, где $i\colon H_e \to M$ — включение, является почти контактным многообразием. Гамильтоново поле X_H, ограниченное на H_e, является характеристическим полем на этом многообразии.

В самом деле, так как $di^*\omega = i^*d\omega = 0$, то форма $i^*\omega$ замкнута. Поскольку форма ω невырождена, а коразмерность H_e равна 1, форма ω имеет максимальный ранг на поверхности H_e. Так как поле X_H касается поверхности H_e, то имеем $X_H|_{H_e} \lrcorner i^*\omega = 0$.

Пример 1.11. Пусть (M, ω) — симплектическое многообразие. Рассмотрим произведение $\mathbb{R} \times M$ и проекцию $\pi_2\colon \mathbb{R} \times M \to M$, $\pi_2(x, t) = x$. Многообразие $(\mathbb{R} \times M, \pi_2^*(\omega))$ является почти контактным.

В самом деле, $d\pi_2^*(\omega) = 0$. Следовательно, форма $\widetilde{\omega} = \pi_2^*(\omega)$ замкнута. Докажем, что ее ранг максимален. Для этого достаточно доказать, что характеристическое распределение этой формы одномерно. Если вектор $((t, r), v_p) \in T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times M)$ лежит в характеристическом пространстве, то

$$\pi_2^*(\omega)_{(t,p)}(((t, r), v_p), ((t, s), w_p)) = 0$$

для любого вектора $w_p \in T_pM$ и $s = \partial/\partial t$. В таком случае из определения формы $\pi_2^*(\omega)$ следует, что $\omega_p(v_p, w_p) = 0$ для любого вектора w_p. Следовательно, $v_p = 0$ и характеристическое распределение задается векторным полем

$$\left.\overline{\frac{\partial}{\partial t}}\right|_{(t,p)} = ((t, 1), 0) \in T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times M) = T_t\mathbb{R} \times T_pM.$$

Заметим, что если $\omega = d\,\theta$ и $\widetilde{\theta} = dt + \pi_2^*(\theta)$, где $t\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$, $t(x, t) = t$, то $\widetilde{\omega} = d\,\widetilde{\theta}$ и $(\mathbb{R} \times M, \widetilde{\omega})$ — контактное многообразие.

Гладкое отображение $X\colon \mathbb{R} \times M \to TM$ называется векторным полем на M, зависящим от времени, если при любом $t \in \mathbb{R}$ отображение $X\colon \{t\} \times M \to TM$ является векторным полем на M. Для любого векторного поля X, зависящего от времени, можно определить векторное поле $\widetilde{X}$ на $\mathbb{R} \times M$, полагая $\widetilde{X} = \overline{\dfrac{\partial}{\partial t}} + X$.

Рассмотрим функцию $H \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$. При каждом $t \in \mathbb{R}$ мы можем рассмотреть гамильтоново векторное поле X_{H_t}, где $H_t\colon M \to \mathbb{R}$, $H_t(x) = H(t, x)$. Тогда $X_H\colon \mathbb{R} \times M \to TM$, $X_H(t, x) = X_{H_t}(x)$ —

векторное поле, зависящее от времени и можно рассмотреть поле $\widetilde{X}_H$ на $\mathbb{R}\times M$.

Теорема 1.6 (Картан). *Пусть (M,ω) — симплектическое многообразие, и $H\in C^\infty(\mathbb{R}\times M)$. На многообразии $\mathbb{R}\times M$ рассмотрим 2-форму $\widetilde{\omega}=\pi_2^*(\omega)$ и положим*

$$\omega_H=\widetilde{\omega}+dH\wedge dt.$$

Тогда

1) $(\mathbb{R}\times M,\omega_H)$ — *почти контактное многообразие;*

2) *поле $\widetilde{X}_H$ порождает характеристическое распределение формы ω_H;*

3) *если $\omega=d\theta$ и $\theta_H=\pi_2^*\theta+H\,dt$, то $\omega_H=d\theta_H$; при этом если функция $H+\pi_2^*(\theta)(X_H)$ нигде не равна нулю, то $(\mathbb{R}\times\times M,\theta_H)$ — контактное многообразие.*

Упражнение 1.12. Докажите теорему 1.5.

§ 2. Инфинитезимальные контактные преобразования и характеристические поля

В гл. 1 мы показали, что для теории обыкновенных дифференциальных уравнений чрезвычайно полезным оказывается переход на инфинитезимальную точку зрения. В этом параграфе мы рассмотрим инфинитезимальные преобразования на многообразии $J^1(M)$.

2.1. Инфинитезимальные контактные преобразования. Пусть $A_t\colon J^1(M)\to J^1(M)$ — однопараметрическая группа конечных контактных преобразований. Рассмотрим векторное поле $X=\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}A_t^*$. По определению контактного преобразования $A_t^*(U_1)=\lambda_tU_1$, где $\lambda_t\in C^\infty(J^1(M))$, поэтому

$$X(U_1)=\lambda U_1,\qquad\text{где}\qquad \lambda=\left.\frac{d\lambda_t}{dt}\right|_{t=0}. \tag{2.1}$$

Определение 2.1. Векторное поле X на многообразии $J^1(M)$ называется *инфинитезимальным контактным преобразованием,* или контактным векторным полем, если оно сохраняет форму U_1, т. е.

$$X(U_1)=\lambda U_1,\qquad\text{где}\qquad \lambda\in C^\infty(J^1(M)),$$

Упражнение 2.1. Докажите, что множество контактных векторных полей замкнуто относительно коммутирования.

Нетрудно проверить, что каждое контактное векторное поле порождает однопараметрическую группу конечных контактных преобразований.

Пример 2.1. Пусть $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ — специальные локальные координаты на $J^1(M)$. Векторные поля $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ и поле $\frac{\partial}{\partial u}$ являются инфинитезимальными контактными преобразованиями, а поля $\frac{\partial}{\partial p_i}$ — нет.

Пример 2.2. Пусть $n = 2$. Векторное поле $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1}$ является инфинитезимальным контактным преобразованием. В самом деле, $X(du - p_1 dx_1 - p_2 dx_2) = -p_2 dx_1 + p_1 dx_2 - p_1 dx_2 + p_2 dx_1 = 0$.

Пример 2.3. Рассмотрим векторное поле $X \in D(J^1(M))$, которое в специальных локальных координатах задается формулой

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta u \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} (\beta - \alpha_i) p_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{2.2}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ — константы. Нетрудно проверить, что $X(U_1) = \beta U_1$, и поэтому X есть инфинитезимальное контактное преобразование.

В § 1 было определено продолжение $\overline{A}$: $J^1(M) \to J^1(M)$ произвольного гладкого преобразования A: $J^0(M) \to J^0(M)$, которое, как мы показали, всегда будет контактным преобразованием многообразия $J^1(M)$. В равной мере это относится и к инфинитезимальным преобразованиям. Если $X \in D(J^0(M))$ и A_t — однопараметрическая группа сдвигов вдоль траектории векторного поля X, то мы можем рассмотреть векторное поле $\overline{X} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \overline{A_t^*} \in D(J^1(M))$, которое будет инфинитезимальным контактным преобразованием. Векторное поле $\overline{X}$ называется *продолжением* векторного поля X на многообразие 1-джетов $J^1(M)$.

Все рассмотренные в предыдущих примерах векторные поля являются продолжениями. Поля $\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial u} \in D(J^1(M))$ являются продолжениями векторных полей $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial u}$, рассматриваемых на $J^0(M)$. Векторное поле из примера 2.2 является продолжением инфинитезимального вращения $x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}$, а векторное поле из примера 2.3 — продолжением инфинитезимального масштабного преобразования

$$\alpha_1 x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n x_n\frac{\partial}{\partial x_n} + \beta u\frac{\partial}{\partial u} \in D(J^0(M)).$$

В этом легко убедиться, выписав соответствующие формулы для поднятий преобразований A_t.

Упражнение 2.2. Проверьте справедливость следующего утверждения: инфинитезимальное контактное преобразование $X \in \in D(J^1(M))$ является продолжением некоторого векторного поля $X^{(0)} \in D(J^0(M))$ в том и только том случае, когда в специальных локальных координатах $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ на $J^1(M)$ выполнено равенство $\left[X, \frac{\partial}{\partial p_i}\right] = \alpha_{i1}\frac{\partial}{\partial p_1} + \ldots + \alpha_{in}\frac{\partial}{\partial p_n}$, где α_{ik} — гладкие функции на $J^1(M)$, $1 \leqslant i, k \leqslant n$.

Пример 2.4. Векторное поле $X = \sum_{i=1}^{n}\left(2p_i\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i^2\frac{\partial}{\partial u}\right)$ является контактным (так как $X(U_1) = 0$), однако $\left[X, \frac{\partial}{\partial p_l}\right] = -2\frac{\partial}{\partial x_l} - - 2p_l\frac{\partial}{\partial u}$ и поэтому X не может быть продолжением какого-либо векторного поля $X^{(0)} \in D(J^0(M))$.

Приведем теперь эффективное описание контактных векторных полей [42].

Теорема 2.1. *Каждое контактное векторное поле X на $J^1(M)$ однозначно определяется функцией $f = U_1(X)$. При этом каждой функции $f \in C^\infty(J^1(M))$ соответствует единственное контактное векторное поле X_f. Соответствие $f \mapsto X_f$ является $\mathbb{R}$-линейным и обладает следующими свойствами:*

$$U_1(X_f) = f,$$
$$X_f(U_1) = X_1(f)\cdot U_1,$$
$$X_{f+g} = X_f + X_g, \qquad g \in C^\infty(J^1(M)),$$

$$X_{fg} = fX_g + gX_f + fgX_1,$$
$$X_f(f) = X_1(f) \cdot f.$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциальную 2-форму dU_1. Докажем, что в любой точке $\theta \in J^1(M)$ 2-форма $(dU_1)_\theta$ невырождена на картановской плоскости C_θ. Действительно, записывая 2-форму (dU_1) в специальных координатах на $J^1(M)$, нетрудно проверить, что вырожденное подпространство 2-формы $(dU_1)_\theta$ в пространстве $T_\theta(J^1(M))$ — это прямая, порожденная вектором $X_1|_\theta$, где $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial u}$. Следовательно, эта 2-форма будет невырождена на любой гиперплоскости, не содержащей вектор $X_1|_\theta$. Так как $(U_1)_\theta(X_1) = 1 \neq 0$, то $C_\theta \not\ni X_1|_\theta$. Очевидно также, что $X_1|_\theta \lrcorner dU_1 = 0$.

Так как форма dU_1 невырождена на плоскостях распределения Картана, то отображение $Y \mapsto Y \lrcorner dU_1$ является изоморфизмом между векторными полями, на которых U_1 обращается в нуль, и 1-формами, равными нулю на X_1.

Пусть X — контактное векторное поле на $J^1(M)$, $X(U_1) = hU_1$, где $h \in C^\infty(J^1(M))$. Представляя X в виде суммы двух полей

$$X = f \cdot X_1 + Y, \qquad \text{где} \qquad f \in C^\infty(J^1(M)), \quad U_1(Y) = 0, \tag{2.3}$$

получаем, что

$$Y \lrcorner dU_1 = X \lrcorner dU_1 = hU_1 - d(X \lrcorner U_1).$$

Таким образом

$$Y \lrcorner dU_1 = hU_1 - df. \tag{2.4}$$

Подставляя в левую и правую части равенства (2.4) поле X_1, получаем, что $h = X_1(f)$.

Поскольку $U_1(Y) = 0$, при любом $\theta \in J^1(M)$ вектор Y_θ лежит в картановской плоскости C_θ, а поскольку 2-форма dU_1 невырождена на пространстве C_θ, условие (2.4) позволяет однозначно восстановить вектор Y_θ. Следовательно, поле X однозначно определяется функцией $f = U_1(X)$.

Обратно, если f — произвольная гладкая функция на $J^1(M)$, то определим поле Y равенством (2.4), где $h = X_1(f)$, а поле $X = X_f$ — равенством (2.3).

Остальные утверждения теоремы легко доказываются при помощи равенств (2.3) и (2.4) и свойств производной Ли. □

Определение 2.2. *Производящей функцией* контактного векторного поля X на $J^1(M)$ называется функция $f = U_1(X)$.

Упражнение 2.3. Используя теорему 2.1, докажите, что для любых гладких функций $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(J^1(M))$ и для любой гладкой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ выполняется равенство

$$Y_{\varphi(f_1,\ldots,f_k)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial f_i} Y_{f_i}, \tag{2.5}$$

где $Y_f = X_f - f X_1$.

Вычислим в координатах поле X_f. Из равенства (2.5) очевидно следует, что достаточно построить базисные характеристические поля Y_{x_i}, Y_u, Y_{p_i} $(i = 1, \ldots, n)$, используя при этом специальные локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$. Непосредственно из определений следует, что

$$Y_{x_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.6}$$

$$Y_u = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{2.7}$$

и, наконец,

$$Y_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial}{\partial u}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

Из формулы (2.5) получаем, что

$$Y_f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{2.9}$$

По определению $X_f = Y_f + f X_1$, поэтому

$$X_f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{2.10}$$

Замечание 2.1. Так как определена проекция $\pi \colon J^1(M) \to T^*(M)$, то каждой функции $H \in C^\infty(T^*(M))$ можно сопоставить гладкую функцию на $J^1(M)$ при помощи отображения π^*. Рассмотрим $f=\pi^*(H)$ и построим контактное векторное поле X_f. Его проекцией на $T^*(M)$ является гамильтоново векторное поле X_H, причем $X_H \lrcorner d\omega = dH$, где $d\omega$ — симплектическая структура на $T^*(M)$. Последнее утверждение следует из равенства $X_f(U_1)=X_1(f)U_1$ и того факта, что $dU_1 = -\pi^*(d\rho)$.

Упражнение 2.4. Векторные поля (2.6), (2.7) и (2.8) образуют в совокупности набор из $2n+1$ векторных полей, однако в каждой точке θ они лежат в $2n$-мерной картановской плоскости C_θ. Найдите линейную (над $C^\infty(J^1(M))$) зависимость между этими полями.

Упражнение 2.5. Рассмотрим произвольное векторное поле $Y \in D(M)$ и продолжим его очевидным образом до поля в $J^0(M)=M\times\mathbb{R}$. Найдите производящую функцию контактного поля $\overline{Y} \in D(J^1(M))$ — поднятия поля Y.

Упражнение 2.6. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C^\infty(J^0(M))$ и $\pi^*(f)\in C^\infty(J^1(M))$, где π — проекция, определяемая формулой (1.1). Докажите, что контактное поле $X_{\pi^*(f)}$ является поднятием некоторого поля $Y \in D(J^0(M))$. Вычислите поле Y в локальных координатах.

Наличие изоморфизма между контактными векторными полями на $J^1(M)$ и гладкими функциями позволяет определять различные спаривания между функциями.

Пусть $f,g \in C^\infty(J^1(M))$, а X_f и X_g — контактные векторные поля с производящими функциями f и g соответственно. Коммутатор этих полей также является контактным векторным полем.

Определение 2.3. *Скобкой Якоби* $\{f,g\}$ функций f и g называется производящая функция контактного поля $[X_f,X_g]$, т. е. $\{f,g\}=U_1([X_f,X_g])$.

Утверждение 2.2. *Если $f,g\in C^\infty(J^1(M))$, то справедливо равенство*

$$\{f,g\}=X_f(g)-X_1(f)g. \tag{2.11}$$

Доказательство. Из тождества $X_f(U_1)=X_f\lrcorner dU_1 + d(X_f\lrcorner U_1)=X_f\lrcorner dU_1+df$ и формулы $X_f(U_1)=X_1(f)\cdot U_1$ следует, что

$$dU_1(X_f,X_g)=gX_1(f)-X_g(f).$$

Следовательно,

$$\{f,g\}=U_1([X_f,X_g])=X_f(U_1(X_g))-X_g(U_1(X_f))-dU_1(X_f,X_g)=$$
$$=X_f(g)-X_g(f)-gX_1(f)+X_g(f)=X_f(g)-X_1(f)g. \quad \square$$

Теорема 2.3. *Пространство функций на $J^1(M)$ образует $\mathbb{R}$-алгебру Ли относительно скобки Якоби.*

Доказательство. Кососимметричность и билинейность (над $\mathbb{R}$) скобки Якоби очевидны. Тождество Якоби легко выводится при помощи формулы (2.11). □

Упражнение 2.7. Используя равенство (2.11), докажите, что в специальных координатах скобка Якоби записывается следующим образом:

$$\{f,g\}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)+ \\ +f\frac{\partial g}{\partial u}-g\frac{\partial f}{\partial u}.$$

Определение 2.4. *Скобкой Майера* $[f,g]$ функций f и $g\in C^\infty(J^1(M))$ называется функция $[f,g]=dU_1(X_f,X_g)$.

Скобка Майера также билинейна (над $\mathbb{R}$) и кососимметрична, но вместо тождества Якоби для нее выполняется равенство

$$[f[g,h]]+[h[f,g]]+[g[h,f]]=X_1(f)[g,h]+X_1(g)[h,f]+X_1(h)[f,g].$$

При помощи тождества

$$[f,g]=Y_f(g)=X_f(g)-fX_1(g)$$

легко найти выражение скобки Майера в координатах:

$$[f,g]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right).$$

И, наконец, дадим определение скобки Пуассона.

Определение 2.5. *Скобкой Пуассона* (f,g) функций f и $g\in C^\infty(J^1(M))$ называется функция $(f,g)=X_f(g)$

Упражнение 2.8. Докажите следующие свойства скобки Пуассона:

1) билинейность над $\mathbb{R}$;
2) $(f,g)+(g,f)=X_1(f)g+X_1(g)f$;
3) $(f,g)=[f,g]+X_1(f)g$;
4) $(f,g)=\{f,g\}+X_1(g)f$.

В координатах скобка Пуассона имеет вид

$$(f,g)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{n}p_i\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right)+f\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Замечание 2.2. Если ограничиться рассмотрением функций, которые являются поднятиями с $T^*(M)$, то все три скобки совпадут со скобкой Пуассона на $T^*(M)$, так как $X_1(\pi^*(H))=0$ для любой функции H.

2.2. Инфинитезимальные симметрии уравнений.

Определение 2.6. Пусть $\mathcal{E}\subset J^1(M)$ — дифференциальное уравнение первого порядка. Контактное векторное поле $X\in D(J^1(M))$ называется *инфинитезимальной контактной симметрией* уравнения $\mathcal{E}$, если в каждой точке $\theta\in\mathcal{E}$ вектор X_θ касается подмногообразия $\mathcal{E}$.

В дальнейшем инфинитезимальные контактные симметрии мы будем называть просто симметриями уравнения $\mathcal{E}$. Имея в виду взаимно однозначное соответствие между контактными векторными полями и производящими функциями, мы будем также говорить, что $f\in C^\infty(J^1(M))$ — симметрия уравнения $\mathcal{E}$, если его симметрией является поле X_f.

Очевидно, что множество симметрий уравнения $\mathcal{E}$ образует $\mathbb{R}$-алгебру Ли относительно коммутирования векторных полей, а множество производящих функций — алгебру Ли относительно скобки Якоби.

Если уравнение $\mathcal{E}$ (локально) имеет вид $\mathcal{E}=\{F=0\}$, $F\in\in C^\infty(J^1(M))$, то векторное поле X является симметрией этого уравнения, если $X(F)|_{\mathcal{E}}\equiv 0$ или, что эквивалентно, $X(F)=\mu F$ для некоторой функции $\mu\in C^\infty(J^1(M))$.

Заметим, что из равенства $X_F(F)=X_1(F)\cdot F$ следует, что уравнение $\mathcal{E}=\{F=0\}$ всегда имеет по крайней мере одну симметрию, а именно, поле X_F.

В качестве примера приведем ряд уравнений, обладающих некоторыми стандартными симметриями.

Пример 2.5. Уравнение $\mathcal{E}=\{F=0\}$ будет иметь среди своих инфинитезимальных симметрий векторное поле X из примера 2.3, если функция $F=F(x_1,\ldots,x_n,u,p_1,\ldots,p_n)$ *квазиоднородна* в следующем смысле: набор чисел $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta)$ можно дополнить таким числом γ, что для любого вещественного числа τ выполнено тождество:

$$F(\tau^{\alpha_1}x_1,\ldots,\tau^{\alpha_n}x_n,\tau^{\beta}u,\tau^{\beta-\alpha_1}p_1,\ldots,\tau^{\beta-\alpha_n}p_n)\equiv \equiv\tau^{\gamma}F(x_1,\ldots,x_n,u,p_1,\ldots,p_n). \quad (2.12)$$

В самом деле, пусть функция F удовлетворяет уравнению (2.12) и $\theta=(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)},u^{(0)},p_1^{(0)},\ldots,p_n^{(0)})\in\mathcal{E}$. Траектория векторного поля X (см. (2.2)), проходящая через точку θ, имеет вид

$$\begin{cases} x_i = x_i^{(0)} e^{\alpha_i t}, \\ u = u^{(0)} e^{\beta t}, \\ p_i = p_i^{(0)} e^{(\beta - \alpha_i)t}, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Полагая $\tau = e^t$, найдем значение функции F в произвольной точке $(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n)$ рассматриваемой траектории:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_n) = \tau^\gamma F(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, u^{(0)}, p_1^{(0)}, \ldots, p_n^{(0)}) = 0.$$

Итак, траектория векторного поля X, проходящая через точку θ, целиком лежит в $\mathcal{E}$, поэтому $X(F) = 0$ на $\mathcal{E}$.

Утверждение 2.4. *Для того, чтобы контактное векторное поле* $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $\left(\textit{соответственно } \dfrac{\partial}{\partial u}\right)$ *было симметрией уравнения $\mathcal{E}$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\mathcal{E}$ в специальных локальных координатах имело вид $\{F = 0\}$, где $F \in C^\infty(J^1(M))$ — функция, не зависящая от x_i. (соответственно от u).*

Доказательство. В самом деле, если $\mathcal{E} = \{G = 0\}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x_i} G = \mu G$, $\mu \in C^\infty(J^1(M))$, то $G = e^\nu F$, где ν — такая гладкая функция, что $\dfrac{\partial \nu}{\partial x_i} = \mu$, а F — функция, не зависищая от x_i. Поскольку e^ν нигде не обращается в нуль, $\mathcal{E} = \{G = 0\} = \{F = 0\}$, что и требовалось доказать. Для поля $\dfrac{\partial}{\partial u}$ доказательство аналогично. □

Упражнение 2.9. Докажите, что векторное поле из примера 2.2 при $n = 2$ является симметрией уравнения $\mathcal{E}$ в том и только том случае, если уравнение имеет вид

$$F(u, x_1^2 + x_2^2, p_1^2 + p_2^2, x_1 p_1 + x_2 p_2) = 0.$$

2.3. Характеристические векторные поля и интегрирование уравнений первого порядка. Напомним (см. гл. 1, § 3), что характеристической симметрией некоторого распределения $\mathcal{F}$ называется векторное поле, принадлежащее этому распределению и сохраняющее его в результате действия производной Ли.

Утверждение 2.5. *Распределение Картана на $J^1(M)$ не имеет ненулевых характеристических симметрий.*

Доказательство. В самом деле, характеристическая симметрия X — это, по определению, такое контактное векторное поле, что $U_1(X)=0$. Следовательно, по теореме 2.1 $X=0$. □

Напомним, что переход на геометрическую точку зрения позволяет свести вопрос о нахождении (обобщенных) решений дифференциальных уравнений к интегрированию распределения Картана, ограниченного на поверхность, соответствующую этому уравнению. Поэтому задачу нахождения всех обобщенных решений уравнения первого порядка можно сформулировать следующим образом.

Рассмотрим уравнение $\mathcal{E}\subset J^1(M)$. Требуется найти все максимальные n-мерные интегральные многообразия индуцированного распределения Картана $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ на гладком многообразии $\mathcal{E}$.

Напомним, что индуцированное распределение Картана $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ задается 1-формой $U_1|_{\mathcal{E}}$. Оказывается, несмотря на то, что распределение Картана на $J^1(M)$ не имеет характеристических симметрий, на любом уравнении первого порядка имеется выделенная нетривиальная характеристическая симметрия индуцированного распределения Картана $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Для любой точки $\theta\in J^1(M)$ дифференциальная 2-форма $(dU_1)_\theta$ невырождена на картановской плоскости $\mathcal{C}_\theta$. Если θ — неособая точка дифференциального уравнения $\mathcal{E}=\{F=0\}$, то

$$\mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta=\mathcal{C}_\theta\cap T_\theta(\mathcal{E})$$

является гиперплоскостью в пространстве $\mathcal{C}_\theta$. На этой гиперплоскости дифференциальная 2-форма $(dU_1)_\theta$ имеет ранг $2n-2$ и, следовательно, вырождена. Таким образом, на всюду плотном подмножестве, состоящем из точек общего положения уравнения $\mathcal{E}$, возникает поле направлений $l_\theta\subset T_\theta(\mathcal{E})$, где $l_\theta\subset\mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta$ — прямая, на которой вырождается форма $(dU_1)_\theta$.

Утверждение 2.6. *Поле направлений l_θ касается любого обобщенного решения уравнения $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Напомним, что n-мерная плоскость $R\subset\mathcal{C}_\theta$ называется лагранжевой относительно симплектической 2-формы $(dU_1)_\theta$, если ограничение $(dU_1)_\theta|_R$ равно нулю. При этом если R содержится в некоторой гиперплоскости $S\subset\mathcal{C}_\theta$, то плоскость R обязана содержать прямую вырождения формы $(dU_1)_\theta$ на этой гиперплоскости.

Пусть N — обобщенное решение уравнения $\mathcal{E}$, т. е. максимальное n-мерное интегральное многообразие распределения Картана, содержащееся в $\mathcal{E}$. Так как $U_1|_N=0$, то имеет место равенство

$(dU_1)_N = 0$, и поэтому при любом $\theta \in N$ плоскость $T_\theta(N) \subset \mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta \subset \mathcal{C}_\theta$ является лагранжевой относительно формы $(dU_1)_\theta$. Следовательно, она содержит прямую l_θ. Итак, $l_\theta \subset T_\theta(N)$, что и требовалось доказать. □

Направление l_θ называется *характеристическим* в точке $\theta \in \mathcal{E}$, а поле $\{l_\theta\}$ — *полем характеристических направлений*. Интегральные кривые поля характеристических направлений называются *характеристиками* уравнения $\mathcal{E}$.

Установим важное свойство характеристик. Пусть уравнение $\mathcal{E}$ задается нулями гладкой функции F, $F \in C^\infty(J^1(M))$.

Утверждение 2.7. *Характеристики являются траекториями характеристического векторного поля Y_F.*

Доказательство. Из равенства $U_1(Y_F) = 0$ следует, что $(Y_F)_\theta \in \mathcal{C}_\theta$ для любой точки $\theta \in J^1(M)$. Из равенства

$$Y_F \rfloor dU_1 = X_1(F)U_1 - dF \tag{2.13}$$

(см. формулу (2.4)) получаем, что

$$Y_F(F) = dF(Y_F) = X_1(F)U_1(Y_F) - dU_1(Y_F, Y_F) = 0,$$

и поэтому поле Y_F касается каждой поверхности уровня функции F. Итак, $(Y_F)_\theta \in \mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta$ при любом $\theta \in \mathcal{E}$.

В силу равенства (2.13) форма $Y_F \rfloor dU_1$ тождественно равна нулю на $(2n-1)$-мерной плоскости $\mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta$. Следовательно, $(Y_F)_\theta$ является вектором вырождения 2-формы $(dU_1)_\theta$ на указанной плоскости, т. е. при любом $\theta \in \mathcal{E}$, имеем $(Y_F)_\theta \in l_\theta$, и траектории поля Y_F на многообразии $\mathcal{E}$ совпадают с характеристиками уравнения $\mathcal{E}$, что и требовалось доказать. □

Утверждение 2.8. *Векторное поле Y_F является инфинитезимальной симметрией распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.*

Доказательство. Поскольку $Y_F = X_F - FX_1$, векторные поля Y_F и X_F совпадают на многообразии $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Осталось заметить, что контактное поле X_F является инфинитезимальной симметрией распределения Картана. □

Перейдем к рассмотрению задачи Коши. Из утверждений 2.6–2.7 следует, что решение нехарактеристической задачи Коши для уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ сводится к решению системы характеристических уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\dfrac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \dot{u} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = \dfrac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \dfrac{\partial F}{\partial u}, \qquad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.14}$$

описывающей траектории векторного поля Y_F.

Далее *данными Коши* для уравнения $\mathcal{E}$ будем называть $(n-1)$-мерное интегральное многообразие распределения Картана, лежащее на $\mathcal{E}$.

Пример 2.6. Пусть $\Gamma \subset M$ — некоторая гладкая гиперповерхность, $u_0(x)$ — некоторая гладкая функция на ней и $\widetilde{u}_0$ — такое продолжение этой функции на окрестность гиперповерхности Γ, что $(n-1)$-мерный график $j_1(\widetilde{u}_0)(\Gamma)$ целиком лежит в уравнении $\mathcal{E}$. Этот график представляет собой некоторые данные Коши.

«Почти всегда» график $j_1(\widetilde{u}_0)(\Gamma)$ зависит лишь от исходной функции u_0, а не от выбора функции $\widetilde{u}_0$. Для того, чтобы убедиться в этом, заметим, что для любой точки $a \in \Gamma$ n-мерная касательная плоскость к графику функции $\widetilde{u}_0$ в точке $(a, u_0(a))$ обязана содержать $(n-1)$-мерную касательную плоскость к поверхности $\{(x, u_0(x)) \mid x \in \Gamma\}$. Поэтому при выборе контактного элемента $j_1(\widetilde{u}_0)(a)$ мы имеем одну степень свободы, и, следовательно, все такие контактные элементы образуют одномерную кривую, которая в «хорошем» случае пересекает уравнение $\mathcal{E}$ в одной точке.

Рассмотрим частный случай этого утверждения. Предположим, что локальные координаты вблизи гиперповерхности $\Gamma \subset M$ выбраны таким образом, что $\Gamma = \{x_n = 0\}$, и уравнение $\mathcal{E}$ приводится к виду $p_n = f(x_1, \ldots, x_n, u, p_1, \ldots, p_{n-1})$. Тогда для любой функции $u_0 \in C^\infty(\Gamma)$ и для любой точки $a \in \Gamma$ искомый контактный элемент $j_1(\widetilde{u}_0)(a)$ определяется однозначно и имеет координаты

$$\left(a_1, \ldots, a_n, u_0(a), \left.\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial u_0}{\partial x_{n-1}}\right|_a, f\left(a, u_0(a), \left.\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\right|_a, \ldots, \left.\frac{\partial u_0}{\partial x_{n-1}}\right|_a\right)\right).$$

Утверждение 2.9. *Пусть $\mathcal{E} \subset J^1(M)$ — уравнение первого порядка, и $R \subset \mathcal{E}$ — такие данные Коши, что характеристическое направление l_θ не касается многообразия R ни в одной точке $\theta \in R$. В этом случае в окрестности многообразия R существует обобщенное решение N уравнения $\mathcal{E}$, содержащее R.*

Доказательство. Действительно, для каждой точки $\theta \in R$ существует такой отрезок χ_θ характеристики уравнения $\mathcal{E}$, проходящий через θ, который (по условию) не пересекает R в других точках. Рассмотрим объединение этих отрезков $N' = \bigcup\limits_{\theta \in R} \chi_\theta \subset \mathcal{E}$. Сужая при необходимости N', в силу теоремы о гладкой зависимости решений от начальных условий мы можем считать, что N' является гладким многообразием.

Поскольку для $\theta \in R$ касательная плоскость $T_\theta(N')$ порождается плоскостью $T_\theta(R) \subset \mathcal{C}_\theta(\mathcal{E})$ и характеристической прямой $l_\theta \subset \subset \mathcal{C}_\theta(\mathcal{E})$, справедливо включение $T_\theta(N') \subset \mathcal{C}_\theta$.

Рассмотрим точку $\theta \in N'$, не лежащую в подмногообразии R. Тогда при помощи сдвига по траекториям характеристического поля эту точку можно отобразить в некоторую точку $\theta_0 \in R$. Заметим, что многообразие N' можно считать инвариантным относительно этого сдвига. Так как характеристическое поле принадлежит распределению Картана, а сдвиг вдоль его траекторий является контактным преобразованием, плоскость $T_\theta(N')$ отображается в плоскость $T_{\theta_0}(N')$, а пространство $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E})$ — в пространство $\mathcal{C}_{\theta_0}(\mathcal{E})$. Следовательно, имеет место включение $T_\theta(N') \subset \mathcal{C}_\theta$.

Итак, сужая при необходимости многообразие N', мы получим n-мерное интегральное многообразие N распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, содержащее данные Коши R, которое и будет обобщенным решением уравнения $\mathcal{E}$. $\square$

Пример 2.7. Рассмотрим уравнение с двумя независимыми переменными $u - \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 0$, т. е. $\mathcal{E} = \{u - p_1 p_2 = 0\}$. Предположим, что необходимо найти решение, которое на гиперповерхности $\Gamma = \{x_2 = 0\}$ совпадает с функцией $u_0(x_1) = x_1^2$. График функции u_0 однозначно достраивается до одномерных данных Коши

$$x_1 = \tau, \quad x_2 = 0, \quad u = \tau^2, \quad p_1 = 2\tau, \quad p_2 = u/p_1 = \tau/2,$$

где τ — вещественный параметр.

Из формулы (2.9) следует, что характеристическое векторное поле имеет вид

$$Y_F = p_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2p_1 p_2 \frac{\partial}{\partial u} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial p_2}.$$

Параметрические уравнения траектории этого векторного поля, пересекающей данные Коши, имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = \tau(e^t+1)/2, \\ x_2 = 2\tau(e^t-1), \\ u = \tau^2 e^{2t}, \\ p_1 = 2\tau e^t, \\ p_2 = \tau e^t/2, \end{cases} \tag{2.15}$$

где t — параметр вдоль траектории.

Заметим, что соотношения (2.15) уже описывают график искомого решения в параметрической форме. Исключая τ и t из первых двух соотношений и подставляя их в третье, мы получим решение задачи Коши в явной форме: $u=(4x_1+x_2)^2/16$.

Пример 2.8. Рассмотрим *уравнение Гамильтона — Якоби* *)

$$H\left(q, \frac{\partial u}{\partial q}\right) = C,$$

где $q=(q_1,\ldots,q_n)$, $\dfrac{\partial u}{\partial q}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial q_1},\ldots,\dfrac{\partial u}{\partial q_n}\right)$, C — константа, т. е. функция H не зависит от u.

Заметим, что поверхность $H(q,p)=c$, как и распределение Картана на $J^1(M)$, инвариантны относительно сдвигов вдоль траекторий поля $\dfrac{\partial}{\partial u}$. В силу этого мы можем рассмотреть факторуравнение Гамильтона — Якоби и фактор-распределение Картана на этом уравнении. Тогда образ формы $-U_1$ совпадает с универсальной формой pdq, образ ее дифференциала $-dU_1$ задает на T^*M стандартную симплектическую структуру, а факторуравнение можно рассматривать как подмногообразие T^*M. Система (2.14), описывающая уравнения характеристического поля, имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \dot{u} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad i=1,\ldots,n. \end{cases}$$

*) Иногда уравнением Гамильтона — Якоби называют уравнение вида $u_t = \varphi(t,x,u_x)$, где $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $u_x=(u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$. Если положить $x_i=q_i$, $t=q_{n+1}$ и $H(q,u_q)=u_t-\varphi(x,u_x)$, то уравнение приводится к указанному виду.

Заметим, что первое и третье уравнение этой системы определяют гамильтоново векторное поле на T^*M.

Таким образом, уравнения характеристик описывается системой уравнений Гамильтона.

Инвариантная теория уравнений Гамильтона — Якоби (включая решение задачи Коши) подробно описано в [25].

2.4. Симметрии и первые интегралы. Итак, вопрос о решении нехарактеристической задачи Коши в окрестности неособой точки дифференциального уравнения первого порядка в частных производных сводится к вопросу об интегрировании поля характеристических направлений l_θ и, в конечном счете, к вопросу о решении системы характеристических уравнений (2.14).

Напомним, что *первым интегралом* системы обыкновенных дифференциальных уравнений (векторного поля) называется функция, постоянная на решениях этой системы (траекториях этого поля). Мы будем говорить, что функция $\varphi \in C^\infty(J^1(M))$ является *первым интегралом уравнения* $\mathcal{E} = \{F = 0\} \subset J^1(M)$, если она — первый интеграл его характеристической системы (2.14). Симметрии уравнений и первые интегралы тесно связаны между собой.

Утверждение 2.10. *Пусть X_{f_1} и X_{f_2} — линейно независимые над $C^\infty(J^1(M))$ симметрии уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Тогда функция $f = f_2/f_1$ является первым интегралом уравнения $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Действительно, пусть

$$\lambda_i F = X_{f_i}(F) = Y_{f_i}(F) + f_i X_1(F) = f_i X_1(F) - Y_F(f_i)$$

для некоторых гладких функций $\lambda_i \in C^\infty(J^1(M))$, $i = 1, 2$. Тогда $Y_F(f_i) = f_i X_1(F) - \lambda_i F$ и

$$Y_f(f_2/f_1) = (Y_F(f_2)f_1 - Y_F(f_1)f_2)/f_1^2 =$$

$$= (f_1 f_2 X_1(F) - \lambda_2 f_1 F - f_1 f_2 X_1(F) + \lambda_1 f_2 F)/f_1^2 = \left(\frac{\lambda_1 f_2 - \lambda_2 f_1}{f_1^2}\right) F,$$

что и требовалось доказать. □

Упражнение 2.10. Докажите, что контактные векторные поля X_{f_1} и X_{f_2} линейно независимы над $C^\infty(J^1(M))$ тогда и только тогда, когда они линейно независимы над $\mathbb{R}$ или, что тоже самое, линейно независимы над $\mathbb{R}$ их производящие функции.

Пример 2.9. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - x_1^a x_2^b u^c = 0$$

при $c \neq 2$ обладает контактными симметриями $X_{\alpha u - x_1 p_1}$, где $\alpha = \frac{a+1}{c-2}$, и $X_{\beta u - x_2 p_2}$, где $\beta = \frac{b+1}{c-2}$. Поэтому функция $f = \frac{\beta u - x_2 p_2}{\alpha u - x_1 p_1}$ является первым интегралом этого уравнения.

Утверждение 2.11. *Если уравнение $\mathcal{E} \subset J^1(M)$ имеет $(l+1)$-мерную абелеву алгебру симметрий, то оно обладает l независимыми первыми интегралами, находящимися в инволюции относительно скобки Майера.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что для любых функций $f, g \in C^\infty(J^1(M))$ выполнено равенство

$$[f, g] = \{f, g\} + f'g - g'f, \tag{2.16}$$

где $f' = X_1(f)$, $g' = X_1(g)$.

Пусть $X_{f_1}, \ldots, X_{f_{l+1}}$ — симметрии уравнения $\mathcal{E}$, коммутирующие между собой на $\mathcal{E}$. Положим $g_1 = f_1/f_{l+1}, \ldots, g_l = f_l/f_{l+1}$ и покажем, что первые интегралы g_i и g_k находятся в инволюции на уравнении $\mathcal{E}$.

Действительно, по определению скобки Якоби $\{f_i, f_k\} = \{f_{l+1}, f_k\} = \{f_{l+1}, f_i\} = 0$ на $\mathcal{E}$. В силу формулы (2.16) на уравнении $\mathcal{E}$ имеем

$$[f_i, f_k] = f_i' f_k - f_k' f_i.$$

При помощи формулы (2.5) нетрудно установить, что

$$[g_i, g_k] = \frac{1}{f_{l+1}^3}(f_{l+1}[f_i, f_k] - f_i[f_{l+1}, f_k] - f_k[f_i, f_{l+1}]) =$$

$$= \frac{1}{f_{l+1}^3}(f_{l+1} f_i' f_k - f_{l+1} f_i f_k' - f_i f_{l+1}' f_k + f_i f_{l+1} f_k' - f_{l+1} f_i' f_k + f_{l+1}' f_i f_k) = 0$$

на уравнении $\mathcal{E}$, что и требовалось доказать. □

Итак, если X_{f_0}, $X_{f_1}, \ldots, X_{f_l}$ — базис абелевой алгебры симметрий уравнения $\mathcal{E}$, то первые интегралы $g_i = f_i/f_0$, $(i = 1, \ldots, l)$ характеристического распределения независимы и находятся в инволюции.

Пример 2.10. Уравнение вида $F(u, p_1, \ldots, p_n) = 0$ имеет n-мерную абелеву алгебру симметрий с образующими

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = X_{p_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} = X_{p_n}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $p_2/p_1, \ldots, p_n/p_1$ — инволютивная система первых интегралов этого уравнения.

§ 3. Полный интеграл дифференциального уравнения первого порядка

В § 2 мы показали, что решение задачи Коши для уравнения первого порядка сводится к интегрированию характеристической системы рассматриваемого уравнения. Это наблюдение позволяет развить еще один метод решения уравнений первого порядка — метод полного интеграла. О некоторых свойствах полных интегралов см. [40, 65]. При построении полных интегралов важную роль играют симметрии.

3.1. Полный интеграл и его свойства. Хорошо известно, что система обыкновенных дифференциальных уравнений с n уравнениями от n неизвестных в окрестности неособой точки имеет n-параметрическое семейство решений. По аналогии с этим решения уравнения $\mathcal{E}$ в частных производных можно искать в виде

$$u = V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n). \tag{3.1}$$

Дифференцируя это соотношение по x_i, мы получаем соотношения

$$p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad p_n = \frac{\partial V}{\partial x_n}. \tag{3.2}$$

Если из соотношений (3.1) и (3.2) можно исключить постоянные $a_1, \ldots, a_n$ и в результате получить исходное уравнение $\mathcal{E}$, то функция $V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$ называется полным интегралом. Записывая аналитически условие исключения постоянных $a_1, \ldots, a_n$ из соотношений (3.1), (3.2), мы получаем следующее определение.

Определение 3.1 (координатное). *Полным интегралом* уравнения $\mathcal{E}$ в частных производных первого порядка с n независимыми переменными называется n-параметрическое семейство решений этого уравнения

$$u = V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \tag{3.3}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — числовые параметры. Полный интеграл называется *невырожденным*, если матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} & \ldots & \dfrac{\partial V}{\partial a_n} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_1} & \ldots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_1 \partial x_n} & \ldots & \dfrac{\partial^2 V}{\partial a_n \partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

имеет максимальный ранг (равный n) почти во всех точках.

Пример 3.1. Полным интегралом уравнения

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + 2u = x_2\frac{\partial u}{\partial x_2}$$

является семейство

$$u = 2a_1x_1x_2^3 + a_1^2x_2^6 + a_2x_2^2.$$

Ранг матрицы (3.4) для этого полного интеграла падает на поверхности $\{x_2 = 0\}$. Вне этой поверхности полный интеграл невырожден.

Пример 3.2. Уравнение вида $F(p_1, \ldots, p_n) = 0$ имеет полный интеграл вида $u = a_1x_1 + \ldots a_{n-1}x_{n-1} + cx_n + a_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные постоянные, а c определяется из равенства $F(a_1, \ldots \ldots, a_{n-1}, c) = 0$.

Пример 3.3. Уравнение Клеро вида $u = x_1p_1 + \ldots + x_np_n + f(p_1, \ldots, p_n)$ имеет полный интеграл $u = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + f(a_1, \ldots \ldots, a_n)$.

3.2. Построение полного интеграла при помощи алгебры симметрий. Рассматриваемый здесь метод интегрирования основывается на «интегрировании» самой алгебры инфинитезимальных симметрий, т. е. на построении группы Ли конечных контактных преобразований, для которой данная алгебра является алгеброй образующих.

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, $\mathcal{E} \subset J^1(M)$ — уравнение коразмерности один, а $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ — независимые инфинитезимальные симметрии этого уравнения, являющиеся базисом некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Предположим, что G — группа Ли с этой алгеброй Ли, реализована как группа Ли конечных контактных преобразований. Это означает, что построено экспоненциальное соответствие, которое определено по крайней мере для достаточно малых значений констант $a_1, \ldots, a_n$ и которое каждому векторному полю $a_1X_{f_1} + \ldots + a_nX_{f_n}$ ставит в соответствие конечное контактное преобразование $A_{(a_1, \ldots, a_n)}$, причем

$$\frac{d}{dt}(A_{(ta_1, \ldots, ta_n)})^* f = (A_{(ta_1, \ldots, ta_n)})^*(a_1X_{f_1} + \ldots + a_nX_{f_n})f,$$

для любой функции $f \in C^\infty(J^1(M))$.

Пусть теперь N — «достаточно хорошее» обобщенное решение уравнения $\mathcal{E}$. Точнее, предположим, что линейная оболочка плоскости $T_\theta(N)$, к которой добавлены векторы $(X_{f_1})_\theta, \ldots, (X_{f_n})_\theta$, имеет размерность $2n$ почти во всех точках $\theta \in N$. Так как конечная контактная симметрия $A_{(a_1, \ldots, a_n)}$ переводит обобщенные решения уравнения $\mathcal{E}$ в обобщенные решения этого же уравнения, то

$$N_{(a_1, \ldots, a_n)} = A_{(a_1, \ldots, a_n)}(N)$$

есть n-параметрическое семейство обобщенных решений, т. е. полный интеграл уравнения $\mathcal{E}$.

Выясним, какие частные решения можно использовать для построения полного интеграла.

Пусть $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ — решение уравнения $\mathcal{E}$. Касательная плоскость к графику $N = j_1(u)(M)$ порождается векторами

$$T_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Таким образом, для построения полного интеграла требуется, чтобы матрица, составленная из коэффициентов полей

$$T_1, \ldots, T_n, X_{f_1}, \ldots, X_{f_n} \tag{3.5}$$

имела ранг $2n$ почти во всех точках многообразия N.

Пример 3.4. Как мы видели в примере 2.10, уравнение $F(u, p_1, \ldots, p_n) = 0$ имеет n-мерную алгебру контактных симметрий с базисом

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}.$$

Экспоненциальное соответствие для этой алгебры имеет вид

$$A_{(a_1, \ldots, a_n)}\colon\ (x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n).$$

Поэтому если $u = \widetilde{u}(x_1, \ldots, x_n)$ — достаточно хорошее в указанном выше смысле решение, то

$$V(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = \widetilde{u}(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

— полный интеграл уравнения.

Заметим, что для невырожденности матрицы (3.5) требуется, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \hdotsfor{4} \\ \dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

почти всюду имела ранг n. Приведем несколько частных случаев.

а. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}=u^a$$

имеет решение $\widetilde{u}=((2-a)^2x_1x_2)^{\frac{1}{2-a}}$ при $a\neq 2$ и решение $\widetilde{u}=e^{2\sqrt{x_1x_2}}$ при $a=2$. Поэтому полный интеграл этого уравнения можно записать в виде $u=[(2-a)^2(x_1-a_1)(x_2-a_2)]^{1/(2-a)}$ в первом случае и $u=e^{2\sqrt{(x_1-a_1)(x_2-a_2)}}$ — во втором.

б. Уравнение $u=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2$ имеет решение $\widetilde{u}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2/4b_i$, при помощи которого строится полный интеграл

$$u=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-b_i)^2}{4b_i}.$$

Пример 3.5. Нетрудно построить экспоненциальное соответствие для абелевой алгебры контактных симметрий, состоящей из инфинитезимальных трансляций и масштабных преобразований (см. примеры 2.1 и 2.3). В этом случае каждое инфинитезимальное преобразование можно интегрировать отдельно.

Уравнение $x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-u\frac{\partial u}{\partial x_2}=au$ имеет абелеву алгебру симметрий с базисом

$$x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-p_1\frac{\partial}{\partial p_1},\qquad \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Из частного решения этого уравнения, задаваемого формулой: $\widetilde{u}^2==2x_2(x_1-a)$, заключаем, что полный интеграл этого уравнения можно задать формулой

$$V^2(x_1,x_2,a_1,a_2)=2(x_2-a_2)(a_1x_1-a).$$

Рассмотрим пример построения полного интеграла при помощи неабелевой алгебры контактных симметрий.

Пример 3.6. Пусть уравнение $F(x_3,u,p_1,p_2,p_3)=0$, помимо очевидных симметрий $\frac{\partial}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}$, имеет еще масштабную симметрию следующего вида:

$$X=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i x_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\beta u\frac{\partial}{\partial u}+\sum_{i=1}^{3}(\beta-\alpha_i)p_i\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{3.6}$$

Рассматривая сдвиги вдоль траекторий этого поля, нетрудно получить следующие формулы для экспоненциального соответствия:

$$A_{(a_1,a_2,a_3)}\colon\ (x_1,x_2,x_3,u,p_1,p_2,p_3)\to$$
$$\to\left[\left(x_1+\frac{a_1}{\alpha_1 a_3}\right)e^{\alpha_1 a_3}-\frac{a_1}{\alpha_1 a_3},\left(x_2+\frac{a_2}{\alpha_2 a_3}\right)e^{\alpha_2 a_3}-\frac{a-2}{\alpha_2 a_3},\right.$$
$$\left.x_3e^{\alpha_3 a_3},ue^{\beta a_3},p_1e^{(\beta-\alpha_1)a_3},p_2e^{(\beta-\alpha_2)a_3},p_3e^{(\beta-\alpha_3)a_3}\right].$$

Например, для уравнения

$$4u=\left(\frac{p_1}{p_3^{\alpha_1}}\right)^2+\left(\frac{p_2}{p_3^{\alpha_2}}\right)^2+4x_3p_3,$$

которое допускает симметрию (3.6) с $\alpha_3=1$ и $\beta=0$, мы при помощи частного решения $\tilde u=x_1^2+x_2^2+x_3$ этого уравнения и найденного выше экспоненциального соответствия строим полный интеграл

$$A_{(a_1,a_2,a_3)}\colon\ (x_1,x_2,x_3,u,p_1,p_2,p_3)\to$$
$$\to\left[\left(x_1+\frac{a_1}{\alpha_1 a_3}\right)e^{\alpha_1 a_3}-\frac{a_1}{\alpha_1 a_3},\left(x_2+\frac{a_2}{\alpha_2 a_3}\right)e^{\alpha_2 a_3}-\frac{a-2}{\alpha_2 a_3},\right.$$
$$\left.x_3e^{\alpha_3 a_3},ue^{\beta a_3},p_1e^{(\beta-\alpha_1)a_3},p_2e^{(\beta-\alpha_2)a_3},p_3e^{(\beta-\alpha_3)a_3}\right].$$

3.3. Инвариантное определение полного интеграла.

Определение 3.2 (геометрическое). Пусть $\mathcal{E}\subset J^1(M)$ — дифференциальное уравнение с одной зависимой переменной, $n=\dim M$. Говорят, что в области $\mathcal{O}\subset\mathcal{E}$ определен *полный интеграл уравнения* $\mathcal{E}$, если эта область расслаивается на n-параметрическое семейство обобщенных решений уравнения (n-мерных интегральных многообразий распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$), т. е. если имеются такое n-мерное гладкое многообразие N и такое регулярное гладкое отображение $\pi_N\colon\ \mathcal{O}\to N$, что для каждой точки $a\in N$ гладкое многообразие $N_a=\pi_N^{-1}(a)$ является n-мерным интегральным многообразием распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Установим эквивалентность определений 3.1 и 3.2. Для этого заметим, что из координатного определения следует существование области $\mathcal{O}\subset\mathcal{E}$, расслаивающейся на решения уравнения $\mathcal{E}$.

Действительно, рассмотрим область параметров $\overline{N}=\{a=(a_1,\ldots,a_n)\}$ и определим отображение $\overline{\alpha}\colon\ M\times\overline{N}\to\mathcal{E}$ по формуле $(b,a)\mapsto j_1(V(x,a))(b)$. Так как матрица (3.4) невырождена, это отображение имеет ранг $2n$ в каждой точке и поэтому является локальным диффеоморфизмом. Следовательно, можно выбрать такие открытые области $U \subset M$, $N \subset \overline{N}$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}$, что отображение $\overline{\alpha}$ сузится до диффеоморфизма

$$\alpha\colon U \times N \to \mathcal{O}, \tag{3.7}$$

причем при каждом $a \in N$ поверхность $W_a = \alpha(U \times \{a\})$ будет решением уравнения $\mathcal{E}$, определенным над областью U. При помощи отображения α строится искомое расслаивающее отображение π_N: если $\alpha^{-1}(\theta) = (\beta_1(\theta), \beta_2(\theta))$, то для любой точки $\theta \in \mathcal{O}$ положим $\pi_N(\theta) = \beta_2(\theta)$. Очевидно, что $W_a = \pi_N^{-1}(a)$.

Применяя рассмотренную процедуру, мы получим в области $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}$ локальные координаты

$$(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n), \tag{3.8}$$

в которых интегральные поверхности, составляющие полный интеграл, задаются уравнениями

$$\begin{cases} a_1 = C_1, \\ \ldots\ldots \\ a_n = C_n, \end{cases}$$

где $C_1, \ldots, C_n$ — некоторые постоянные.

Упражнение 3.1. Докажите, что из геометрического определения полного интеграла следует координатное.

Зная полный интеграл, можно найти характеристическое распределение, не решая в явном виде систему уравнений (2.14).

Для этого заметим, что отображение α (см. (3.7)) задается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} u = V(x, a), \\ p_1 = V_{x_1}(x, a), \\ \ldots\ldots \\ p_n = V_{x_n}(x, a), \end{cases} \tag{3.9}$$

которые явным образом описывают связь между специальными локальными координатами (x, u, p) и координатами (3.8). В частности, форма U_1 в координатах (3.8) имеет вид

$$U_1 = V_{a_1} da_1 + \ldots V_{a_n} da_n = V_{a_1}\left(da_1 + \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}} da_2 + \ldots + \frac{V_{a_n}}{V_{a_1}} da_n\right).$$

Таким образом, поскольку без ограничения общности можно считать, что локально $V_{a_1} \neq 0$, распределение $C(\mathcal{E})$ может быть задано дифференциальной 1-формой

$$\omega = da_1 + \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}} da_2 + \ldots + \frac{V_{a_n}}{V_{a_1}} da_n.$$

Выбрав в качестве первых $2n-1$ координат на $\mathcal{E}$ функции

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad y_2 = \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{V_{a_n}}{V_{a_1}}$$

и дополнив их произвольной независимой функцией y_1, мы получаем, что

$$\omega = da_1 + y_2 da_2 + \ldots + y_n da_n.$$

Поэтому $\dfrac{\partial}{\partial y_1}$ есть направление вырождения формы $d\omega$ на $C(\mathcal{E})$ (т. е. $\dfrac{\partial}{\partial y_1} \rfloor \omega = 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial y_1} \rfloor d\omega = 0$), а функции $a_1, \ldots, a_n, y_2, \ldots, y_n$ являются первыми интегралами характеристического распределения.

Пример 3.7. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \right\}.$$

Нетрудно проверить, что полный интеграл выражается формулой $V(x_1, x_2, a_1, a_2) = \dfrac{(x_1 + x_2 a_2)^2}{2a_2} + a_1$.

Для этого интеграла $V_{a_1} = 1$, $p_1 = (x_1 + x_2 a_2)/a_2$, $p_2 = x_1 + x_2 a_2$, откуда $a_2 = p_2/p_1$, $a_1 = u - p_1 p_2/2$. Исключая a_1 и a_2 из V_{a_2}, мы получаем, что $y_2 = x - 2(x_1 p_1 + x_2 p_2)/p_2$. Функции a_1, a_2, y_2 являются первыми интегралами характеристического распределения.

Пример 3.8. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{E} = \left\{ x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - u \frac{\partial u}{\partial x_2} - au = 0 \right\}.$$

Полный интеграл этого уравнения может быть найден из соотношения

$$u^2 = V^2 = 2(a_1 x_1 - a)(x_2 - a_2).$$

Нетрудно проверить, что

$$y_2 = \frac{V_{a_2}}{V_{a_1}} = -\frac{a_1 p_2}{x_1 p_1}, \quad a_2 = x_2 - \frac{a_1 p_2}{p_1(a_1 x_1 - a)},$$

где a_1 — интеграл, определяемый из уравнения $2p_1(a_1x_2 - a)^2 = u^2 p_2 a_1$. Функции a_1, a_2, y_2 образуют набор первых интегралов характеристического распределения на уравнении $\mathcal{E}$.

3.4. Метод Лагранжа — Шарпи. В случае двух независимых переменных для построения полного интеграла уравнения достаточно знать один нетривиальный первый интеграл его характеристического распределения. Соответствующий метод построения полного интеграла называется методом Лагранжа — Шарпи [65, 30].

Пусть $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, $F \in C^\infty(J^1(\mathbb{R}^2))$, а $f \in C^\infty(J^1(\mathbb{R}^2))$ — интеграл характеристического векторного поля Y_F, т. е.

$$Y_F(f) = 0. \tag{3.10}$$

Будем искать обобщенные решения уравнения $\mathcal{E}$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = 0, \\ f(x_1, x_2, u, p_1, p_2) = a_1, \end{cases} \tag{3.11}$$

где a_1 — произвольная константа.

Разрешая систему уравнений (3.11) относительно переменных p_1, p_2, мы получим

$$\begin{cases} p_1 = g_1(x_1, x_2, u, a_1), \\ p_2 = g_2(x_1, x_2, u, a_1). \end{cases}$$

Можно показать, что при выполнении условий (3.10) и (3.11) форма $dU_1 = du - p_1\,dx_1 - p_2\,dx_2$ замкнута, и поэтому система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = g_1(x_1, x_2, u, a_1), \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = g_2(x_1, x_2, u, a_1), \end{cases}$$

совместна и имеет решение $u = V(x_1, x_2, a_1, a_2)$, представляющее собой искомый полный интеграл уравнения $\mathcal{E}$.

Пример 3.9. Рассмотрим уравнение $2x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - u\dfrac{\partial u}{\partial x_2} + c\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, где a — некоторая константа, отличная от нуля. Нетрудно убедиться, что величина p_2 является первым интегралом характеристического распределения уравнения $\mathcal{E}$. Полагая $p_2 = a_2$, из уравнения $\mathcal{E}$ находим $p_1 = ca_2/(u - x_2a_2)$. Итак, уравнения $\partial u/\partial x_2 = a_2$ и $\partial u/\partial x_1 = ca_2/(u - x_2a_2)$ совместны. Из первого уравнения получаем $u = a_2x_2 + v(x_1)$, а из второго $v_{x_1} = ca_2/v$, откуда $v = \pm\sqrt{2ca_2x_1 + a_1}$. Поэтому $u = V_\pm(x_1, x_2, a_1, a_2) = a_2x_2 \pm \sqrt{2ca_2x_1 + a_1}$ представляет собой полный интеграл уравнения $\mathcal{E}$ при любом выборе знака.

Перед тем как изложить метод Лагранжа — Шарпи в общем случае, рассмотрим вопрос о совместности переопределенной системы уравнений:

$$\begin{cases} f_1 = c_1, \\ \dots\dots \\ f_r = c_r, \end{cases} \tag{3.12}$$

$f_i \in C^\infty(J^1(M))$, $i = 1, \dots, r$, $c_1, \dots, c_r$ — константы.

Утверждение 3.1. *Для совместности системы уравнений* (3.9) *достаточно, чтобы при любых* $1 \leqslant i, k \leqslant r$ *скобка Якоби* $\{f_i, f_k\}$ *была равна нулю на поверхности* (3.12).

Доказательство. Прежде всего заметим, что характеристические векторные поля $Y_{f_1}, \dots, Y_{f_r}$ касаются $(2n - r + 1)$-мерной поверхности в $J^1(M)$, задаваемой системой уравнений (3.12). В самом деле, $Y_{f_i}(f_k) = [f_i, f_k] = 0$ на этой поверхности, так что каждое векторное поле Y_{f_i} касается указанной поверхности.

Воспользуемся теперь следующим свойством коммутатора характеристических векторных полей:

$$[Y_f, Y_g] = Y_{[f,g]} + g'Y_f - f'Y_g + [f, g]X_1, \tag{3.13}$$

где $f' = dU_1([X_1, X_f])$, $g' = dU_1([X_1, X_g])$.

Упражнение 3.2. Докажите равенство (3.13).

В силу равенства (3.13) на поверхности (3.12) имеем $[Y_{f_i}, Y_{f_k}] = f'_kY_{f_i} - f'_iY_{f_k}$.

По теореме Фробениуса отсюда следует, что векторные поля $Y_{f_1}, \dots, Y_{f_r}$ образуют вполне интегрируемое распределение Y на поверхности (3.12).

Заметим, далее, что любое n-мерное интегральное многообразие N распределения Картана имеет с поверхностью (3.12) пересечение, которое по меньшей мере $(n-r)$-мерно. Выберем $(n - r)$-мерное интегральное многообразие R распределения Картана, лежащее на поверхности (3.12) и такое, что касательная плоскость $T_\theta(R)$ имеет нулевое пересечение с плоскостью, натянутой на векторы $(Y_{f_1})_\theta, \ldots, (Y_{f_r})_\theta$, при любом θ, принадлежащем R. Обозначим через N объединение интегральных многообразий распределения Y, проходящих через точки многообразия R. Тогда n-мерное многообразие N является обобщенным решением системы (3.12) вблизи R.

Действительно, для каждой точки $\theta \in R$ пространство $T_\theta(N)$ есть сумма пространств $T_\theta(R) \subset \mathcal{C}_\theta$ и $Y_\theta \subset \mathcal{C}_\theta$. Таким образом, $T_\theta(N) \subset \mathcal{C}_\theta$ для любой точки $\theta \in N$ вблизи R, что и требовалось доказать. $\square$

Напомним, что функция F, задающая уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, выбирается так, что форма $dF|_\mathcal{E}$ почти везде отлична от нуля, и что в этом случае любая функция $f \in C^\infty(J^1(M))$, обращающаяся в нуль на $\mathcal{E}$, имеет вид $f = \nu F$, где $\nu \in C^\infty(J^1(M))$.

Если F удовлетворяет этому условию, то $f \in C^\infty(J^1(M))$ тогда и только тогда будет интегралом характеристического распределения для $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, когда

$$\{F, f\} = \lambda F \quad \text{для некоторой } \lambda \in C^\infty(J^1(M)). \tag{3.14}$$

Пример 3.10. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right] h(x_1^2 + x_2^2) - \left(x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - u\right)^2 = 0.$$

В этом уравнении $F = (p_1^2 + p_2^2)h(x_1^2 + x_2^2) - (x_1 p_1 + x_2 p_2 - u)^2$. Для функции $f = (x_2 p_1 - x_1 p_2)/u$ имеем

$$[F, f] = Y_F(f) = \frac{2}{x_2 p_1 - x_1 p_2} F \equiv 0.$$

Поэтому условие (3.14) выполняется, так что функцию f можно использовать для построения полного интеграла по методу Лагранжа — Шарпи.

Система уравнений (3.12) называется *системой в инволюции*, если $[f_i, f_k] = 0$, $1 \leqslant i, k \leqslant r$, в силу этой системы.

Сформулируем теперь метод Лагранжа — Шарпи в общем случае.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{E} = \{F = 0\} \subset J^1(M)$ — дифференциальное уравнение первого порядка с n независимыми переменными, и пусть $f_2, \ldots, f_n$ — такие гладкие функции на $J^1(M)$, что:*

1) $[F, f_k] = \lambda_k F$, $k = 2, \ldots, n$, $\lambda_k \in C^\infty(J^1(M))$, *т. е.* $X_{f_2}, \ldots$ $\ldots, X_{f_n}$ *— симметрии уравнения* $\mathcal{E}$;

2) $[f_i, f_k] = \lambda_{i,k} F$, $2 \leqslant i, k \leqslant n$, $\lambda_{i,k} \in C^\infty(J^1(M))$;

3) *функции* F, $f_2, \ldots, f_n$ *функционально независимы.*

Тогда полный интеграл уравнения $\mathcal{E}$ *может быть найден из системы уравнений*

$$\begin{cases} F = 0, \\ f_2 = a_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n = a_n. \end{cases} \tag{3.15}$$

Доказательство. В силу утверждения 3.1 система (3.15) определяет $(n+1)$-мерную поверхность P_a, $a = (a_2, \ldots, a_n)$, в $\mathcal{E}$. Пусть $\mathcal{C}(P_a)$ — индуцированное распределение Картана на этой поверхности, т. е. распределение, задаваемое дифференциальной 1-формой $\omega_a = U_1|_{P_a}$ (равносильным образом, $\mathcal{C}(P_a)_\theta = \mathcal{C}_\theta \cap T_\theta(P_a)$ для любого $\theta \in P_a$).

Распределение $\mathcal{C}(P_a)$ вполне интегрируемо. В самом деле, линейно независимые векторы $(Y_F)_\theta$, $(Y_{f_2})_\theta, \ldots, (Y_{f_n})_\theta$ образуют базис в пространстве $\mathcal{C}(P_a)_\theta = \mathcal{C}_\theta \cap T_\theta(P_a)$. Как мы показали при доказательстве утверждения 3.1, векторные поля Y_F, $Y_{f_2}, \ldots, Y_{f_n}$ образуют интегрируемое распределение на P_a.

Обозначим через f_1 интеграл этого распределения. Система уравнений

$$\begin{cases} F = 0, \\ f_1 = b_1, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ f_n = b_n \end{cases}$$

задает некоторое обобщенное решение уравнения $\mathcal{E}$ при любом выборе констант $b_1, \ldots, b_n$. Тем самым мы построили полный интеграл уравнения $\mathcal{E}$ (см. определение 3.2). Для доказательства регулярности параметризующего отображения следует воспользоваться теоремой Фробениуса. $\square$

Пример 3.12. Рассмотрим следующее уравнение с n независимыми переменными:

$$u \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} - x_1 x_2 \ldots x_n = 0.$$

Величины

$$f_1 = \frac{p_1 u^{1/n}}{x_1}, \quad f_2 = \frac{p_2 u^{1/n}}{x_2}, \quad \ldots, \quad f_n = \frac{p_n u^{1/n}}{x_n}$$

являются первыми интегралами характеристического распределения для уравнения $\mathcal{E} = \{u p_1 p_2 \ldots p_n - x_1 \ldots x_n = 0\}$.

Нетрудно проверить, что интегралы $f_1, \ldots, f_n$ находятся в инволюции, так что система уравнений

$$\begin{cases} p_1 u^{1/n} = A_1 x_1, \\ \ldots\ldots \\ p_n u^{1/n} = A_n x_n, \end{cases}$$

совместна для любых констант $A_1, \ldots, A_n$, причем она совместна с исходным уравнением $\mathcal{E}$ при $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = 1$. Решение этой системы можно записать в виде

$$u = u_1(x_1, a_1) + u_2(x_2, a_2) + \ldots + u_n(x_n, a_n),$$

где

$$u_i = \left(\frac{n+1}{2n} A_i x_i^2 + a_i\right)^{\frac{n}{n+1}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

a_i — константы интегрирования. Выбирая $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 1$, получаем, в частности, следующий полный интеграл уравнения $\mathcal{E}$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{n} x_i^2 + a_i\right)^{\frac{n}{n+1}}.$$

ГЛАВА 3

ТЕОРИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ

Методы гл. 2 основывались на представлении дифференциального уравнения первого порядка в виде подмногообразия в пространстве $J^1(M)$, рассматриваемого вместе с распределением Картана. В этой главе мы распространим этот подход на произвольные системы нелинейных дифференциальных уравнений. Здесь рассматривается пространство k-джетов и важнейшие геометрические структуры, связанные с ним. Далее определяются классические симметрии дифференциальных уравнений и на примере некоторых уравнений математической физики демонстрируются методы их вычисления. Кроме того, обсуждается применение классических симметрий уравнений к нахождению точных решений.

§ 1. Уравнения и распределение Картана

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных порядка k:

$$\begin{cases} F_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = 0, \\ \quad \dots\dots\dots \\ F_r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где F_l — некоторые гладкие функции, $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — независимые переменные, $\boldsymbol{u} = (u^1, \dots, u^m)$ — неизвестные функции, а через $\boldsymbol{p}$ обозначен набор частных производных $p^j_\sigma = \dfrac{\partial^{|\sigma|} u^j}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}$, $\sigma = (i_1, \dots$ $\dots, i_n)$ — мультииндекс, $|\sigma| = i_1 + \dots + i_n \leqslant k$.

Геометрический подход к изучению системы (1.1) заключается в том, что уравнения $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$, рассматриваются как условия, наложенные не на сами функции $\boldsymbol{u}$, а на начальные (до степени k включительно) отрезки рядов Тейлора этих функций. Это позволяет ввести некоторое конечномерное пространство, координаты в котором соответствуют значениям функций $\boldsymbol{u}$ и их производным.

Итак, переменные

$$x_1, \ldots, x_n,\ u^1, \ldots, u^m,\ p^i_\sigma, \qquad |\sigma| \leqslant k,$$

будем рассматривать как координаты в некотором пространстве $J^k(n,m)$, размерность которого равна

$$\dim J^k(n,m) = n + m \sum_{i=0}^{k} \binom{n+i-1}{n-1} = n + m \binom{n+k}{k}.$$

Соотношения (1.1) задают в пространстве $J^k(n,m)$ поверхность $\mathcal{E}$ коразмерности r, которая является геометрическим образом, соответствующим данной системе нелинейных дифференциальных уравнений. Эту поверхность в $J^k(n,m)$ мы и будем называть *дифференциальным уравнением* порядка k с n независимыми и m зависимыми переменными. (Далее мы уточним это определение.) Поверхность $\mathcal{E}$ является инвариантным объектом, в отличие от ее записи в виде системы (1.1), так как аналитическая запись одного и того же уравнения может быть различной.

Тот факт, что переменная p^j_σ, $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$, соответствует частной производной u^j по $x_1, \ldots, x_n$, геометрически выражается следующим образом. Рассмотрим на $J^k(n,m)$ *распределение Картана* $\mathcal{C} = \mathcal{C}^k(n,m)$, задаваемое базисными 1-формами

$$\omega^j_\sigma = dp^j_\sigma - \sum_{i=1}^{n} p^j_{\sigma+1_i}\, dx_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad |\sigma| \leqslant k-1, \tag{1.2}$$

где $1_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ и 1 стоит на i-м месте *). Непосредственное вычисление показывает, что общее число базисных 1-форм равно

$$N = m \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+i-1}{n-1} = m \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Нетрудно проверить, что формы ω^j_σ линейно независимы в каждой точке, и поэтому число N совпадает с коразмерностью распределения $\mathcal{C}$. Следовательно, размерность распределения Картана равна

$$\dim \mathcal{C}^k(n,m) = \dim J^k(n,m) - \operatorname{codim} \mathcal{C}^k(n,m) = n + m \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Рассмотрим проекцию

$$\pi_k\colon\ J^k(n,m) \to \mathbb{R}^n, \qquad \pi_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})|_{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{x}. \tag{1.3}$$

---

*) Здесь и далее мы формально полагаем $p^j_{(0,\ldots,0)} = u^j$.

Ранее мы показали (см. § 2 гл. 1 и § 1 гл. 2), что распределение Картана на многообразиях $J^k(1,1)$ и $J^1(n,1)$ позволяет среди всех сечений отображения (1.3) выделять те, которые соответствуют гладким функциям.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $Q \subset J^k(n,m)$ — n-мерная поверхность, которая в окрестности некоторой своей точки $y \in \in Q$ проектируется на пространство независимых переменных $\mathbb{R}^n$ без вырождения. В окрестности этой точки поверхность Q является интегральным многообразием распределения Картана C в том и только том случае, когда локально ее можно задать соотношениями вида*

$$\begin{cases} u^1 = f^1(x_1, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^m = f^m(x_1, \ldots, x_n), \\ p^j_\sigma = \dfrac{\partial^{|\sigma|} f^j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x_1, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{1.4}$$

для некоторых гладких функций $f^1, \ldots, f^m$, где $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$ и $|\sigma| \leqslant k$.

Доказательство. Действительно, условие невырожденности проекции $\pi_k|_Q$ в окрестности точки y означает, что локально уравнение поверхности Q можно представить в виде

$$\begin{cases} u^j = f^j(x_1, \ldots, x_n), \\ p^j_\sigma = f^j_\sigma(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, m$, где f^j, f^j_σ — некоторые гладкие функции. Поверхность Q является интегральной для распределения C, если базисные 1-формы распределения обращаются в нуль на этой поверхности, т. е.

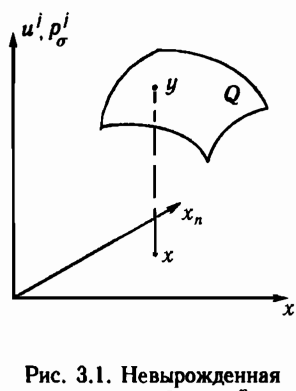

Рис. 3.1. Невырожденная проекция Q на $\mathbb{R}^n$

$$\omega^j_\sigma|_Q = df^j_\sigma - \sum f^j_{\sigma+1_i} dx_i = \sum \left(\frac{\partial f^j_\sigma}{\partial x_i} - f^j_{\sigma+1_i} \right) dx_i = 0,$$

что эквивалентно выполнению равенств

$$f_\sigma^j = \frac{\partial^{|\sigma|} f^j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}$$

для всех $j = 1, \ldots, m$ и $|\sigma| \leqslant k$. $\square$

Определение 1.1. Поверхность Q, заданную соотношениями (1.4), будем обозначать через Γ_f^k и называть *графиком k-джета* вектор-функции $f = (f^1, \ldots, f^m)$.

Из теоремы 1.1 следует, что решение данного уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(n, m)$ есть не что иное, как n-мерное интегральное многообразие распределения Картана C^k, без вырождения проектирующееся на пространство $\mathbb{R}^n$ и целиком лежащее на поверхности $\mathcal{E}$:

$$\omega_\sigma^j|_Q = 0, \quad \ker d\pi_k|_y = 0, \qquad y \in Q, \quad Q \subset \mathcal{E}.$$

Решения уравнения $\mathcal{E}$ можно определить, не апеллируя к тому, что $\mathcal{E}$ — это поверхность в $J^k(n, m)$. А именно, рассмотрим многообразие $\mathcal{E}$ вместе с распределением $C(\mathcal{E})$, которое «высекается» распределением C на $\mathcal{E}$. Плоскость распределения $C(\mathcal{E})$ в каждой точке $y \in \mathcal{E}$ является пересечением плоскости C_y с касательной плоскостью $T_y\mathcal{E}$ к поверхности $\mathcal{E}$. Очевидно, что интегральные многообразия распределения $C(\mathcal{E})$, без вырождения проектирующиеся на пространство независимых переменных $\mathbb{R}^n$, совпадают с интегральными многообразиями распределения C, лежащими на $\mathcal{E}$ и обладающими тем же свойством. Поэтому можно сказать, что решения — это n-мерные интегральные многообразия распределения $C(\mathcal{E})$, диффеоморфно проектирующиеся на пространство $\mathbb{R}^n(x_1, \ldots, x_n)$. Напомним, что именно с такого подхода к решениям уравнений мы начинали гл. 1. Рассмотрение произвольных n-мерных максимальных интегральных многообразий приводит к обобщенным решениям уравнений.

Пример 1.1 (уравнение Бюргерса). Рассмотрим уравнение Бюргерса $u_t - uu_x - u_{xx} = 0$. В 8-мерном пространстве джетов $J^2(2, 1)$ ему соответствует поверхность $\mathcal{E}$, задаваемая в стандартных координатах

$$x = x_1, t = x_2, u, p_{(1,0)}, p_{(0,1)}, p_{(1,1)}, p_{(0,2)}, p_{(2,0)}$$

соотношением

$$p_{(0,1)} - up_{(1,0)} - p_{(2,0)} = 0.$$

Распределение Картана на $J^2(2,1)$ задается базисными 1-формами

$$\begin{aligned}
\omega_{(0,0)} &= du - p_{(1,0)}dx_1 - p_{(0,1)}dx_2,\\
\omega_{(1,0)} &= dp_{(1,0)} - p_{(2,0)}dx_1 - p_{(1,1)}dx_2,\\
\omega_{(0,1)} &= dp_{(0,1)} - p_{(1,1)}dx_1 - p_{(0,2)}dx_2.
\end{aligned}$$

Решениями данного уравнения являются лежащие на $\mathcal{E}$ двумерные интегральные многообразия этого распределения.

Выбрав в качестве координат на поверхности $\mathcal{E}$ функции $x = x_1$, $t = x_2$, u, $p_{(1,0)}$, $p_{(0,1)}$, $p_{(1,1)}$, $p_{(0,2)}$ и заменяя всюду $p_{(2,0)}$ на $p_{(0,1)} - up_{(1,0)}$, мы получим распределение на 7-мерном пространстве, которое задается базисными формами

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{(0,0)} &= du - p_{(1,0)}dx_1 - p_{(0,1)}dx_2,\\
\widetilde{\omega}_{(1,0)} &= dp_{(1,0)} - (p_{(0,1)} - up_{(1,0)})dx_1 - p_{(1,1)}dx_2,\\
\widetilde{\omega}_{(0,1)} &= dp_{(0,1)} - p_{(1,1)}dx_1 - p_{(0,2)}dx_2.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Двумерные интегральные многообразия этого распределения, на которых $u, p_{i,j}$ выражаются через x_1, x_2 (что равносильно невырожденности дифференциала проекции на $\mathbb{R}^2(x,t)$), соответствуют решениям данного уравнения. Например, двумерная поверхность

$$u = -x/t,\ p_{(1,0)} = -1/t,\ p_{(0,1)} = x/t^2,\ p_{(1,1)} = 1/t^2,\ p_{(0,2)} = -2x/t^3.$$

соответствует решению $u = -x/t$.

Отметим, что, в отличие от систем обыкновенных дифференциальных уравнений ($n = 1$), распределение Картана $\mathcal{C}$ на многообразиях $J^k(n,m)$, так же как и распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, получаемые при ограничении $\mathcal{C}$ на уравнение с частными производными $\mathcal{E}$, вообще говоря, не является вполне интегрируемым. Тем не менее, для некоторых переопределенных систем распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ может оказаться вполне интегрируемым.

Упражнение 1.1. Пусть $m = k = 1$, $n = r = 2$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_x = f(x,y,u),\\ u_y = g(x,y,u).\end{cases}$$

Докажите, что если эта система совместна, то распределение Картана, ограниченное на соответствующую поверхность, вполне интегрируемо.

§ 2. Многообразие джетов и распределение Картана

В этом параграфе мы рассмотрим основные объекты, которые важны для геометрической теории дифференциальных уравнений. Это многообразие джетов и распределение Картана на нем. Мы уже встречались с этими объектами при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных первого порядка. Здесь мы приведем наиболее общие определения и изучим основные свойства.

2.1. Геометрическое определение пространства джетов. До сих пор мы рассматривали уравнения на вектор-функцию $\boldsymbol{u} = (u^1, \ldots, u^m)$, зависящую от переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. С геометрической точки зрения функция $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ представляет собой аналитическую запись некоторого сечения проекции $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. В самом деле, задать функцию $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ — это значит сопоставить каждой точке $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ точку $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}^m$, которую можно рассматривать как точку слоя $\mathbb{R}^m$, расположенного над точкой $\boldsymbol{x}_0$ (рис. 3.2).

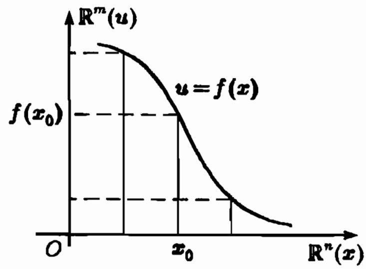

Рис. 3.2

Для того, чтобы рассматривать уравнения на произвольном многообразии, эту конструкцию следует обобщить. Рассмотрим произвольное гладкое m-мерное локально-тривиальное расслоение π: $E \to M$ над n-мерным многообразием M. Напомним, что сечением расслоения π называется такое отображение s: $M \to E$, что $\pi \circ s$ — тождественное отображение базы M. Иными словами, отображение s переводит точку $\boldsymbol{x} \in M$ в некоторую точку слоя $E_{\boldsymbol{x}}$. В частном случае тривиального расслоения $M \times N \to M$ сечения — это отображения $M \to N$. Далее для простоты изложения мы всегда будем считать, что рассматриваемые расслоения являются векторными расслоениями, т. е. их слоями являются векторные пространства, а функциями склейки — линейные преобразования. Однако большинство конструкций, которые мы будем рассматривать, справедливы для произвольных расслоений [132, 24].

Пусть $\mathcal{U} \subset M$ — некоторая окрестность, над которой расслоение π тривиально, т. е. $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m$. Если через $e_1, \ldots, e_m$ обозначить базис в слое расслоения π — пространстве $\mathbb{R}^m$, — то всякое сечение над $\mathcal{U}$ представляется в виде $s = f^1 e_1 + \ldots + f^m e_m$, где f^i — гладкие функции на $\mathcal{U}$. Если $\mathcal{U}$ — координатная окрестность на многообразии M с локальными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$, то любая точка слоя определяется своей проекцией на $\mathcal{U}$ и координатами $(u^1, \ldots, u^m)$ относительно выбранного базиса. Функции $(x_1, \ldots \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m)$ являются координатами в $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ и называются *адаптированными* координатами для данного расслоения. Таким образом, в адаптированных координатах сечение задается вектор-функцией $\boldsymbol{f} = (f^1, \ldots, f^m)$ от переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 2.1. Сечения φ_1, φ_2 расслоения π, мы будем называть *касающимися* над точкой $\boldsymbol{x}_0 \in M$ с порядком k, если вектор-функции $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$, описывающие эти сечения, имеют в точке $\boldsymbol{x}_0$ одинаковые частные производные до порядка k включительно.

Очевидно, что это условие равносильно совпадению отрезков рядов Тейлора вектор-функций до порядка k включительно. Поскольку сами функции можно рассматривать как производные нулевого порядка, при $k = 0$ условие касания сводится к совпадению значений $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}_0)$ и $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}_0)$, т. е. графики сечений s_1 и s_2 должны пересекать слой $E_{\boldsymbol{x}_0}$ в одной и той же точке (рис. 3.3 а)). На рис. 3.3 б) и в) показаны типичные случаи касания сечений с порядками 1 и 2: прямая, касающиеся кривой, и дуга соприкасающейся окружности.

Упражнение 2.1.

1. Докажите, что определение 2.1 инвариантно, т. е. не зависит от выбора адаптированных координат в расслоении π.

2. Докажите, что два сечения имеют касание порядка k, если их графики (см. определение 1.1) касаются с тем же порядком.

Касание сечений с порядком k задает отношение эквивалентности, которое мы будем обозначать следующим образом: $s_1 \overset{k,\boldsymbol{x}}{\sim} s_2$. Множество классов эквивалентных сечений, т. е. множество

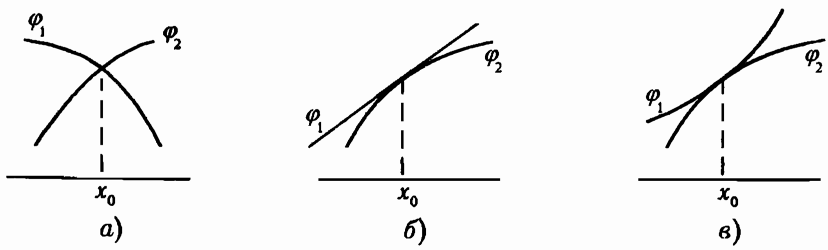

Рис. 3.3

всевозможных рядов Тейлора длины k, будем обозначать через $J^k_{\boldsymbol{x}}$ и называть *пространством k-джетов расслоения π в точке $\boldsymbol{x}$*. Точку этого пространства, которая есть класс эквивалентности сечения s, будем обозначать $[s]^k_{\boldsymbol{x}}$. Таким образом, если $s_1 \overset{k,\boldsymbol{x}}{\sim} s_2$, то

$[s_1]_x^k = [s_2]_x^k$. *Пространство k-джетов расслоения π* — это объединение J_x^k по всем точкам $x \in M$:

$$J^k(\pi) = \bigcup_{x \in M} J_x^k.$$

Для любой точки $\theta = [s]_x^k \in J^k(\pi)$ положим $\pi_k(\theta) = x$. Тем самым определена проекция π_k: $J^k(\pi) \to M$, причем $\pi_k^{-1}(x) = J_x^k$.

При $k = 0$ получаем, что $J^0(\pi) = \bigcup_{x \in M} E_x = E$, т. е. $J^0(\pi)$ совпадает с тотальным пространством расслоения π.

В качестве локальных координат на пространстве k-джетов расслоения π можно рассматривать функции x_i, u^j и p_σ^j, соответствующие зависимым и независимым переменным и частным производным первых по вторым. Действительно, пусть $(x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots$ $\ldots, u^m)$ — адаптированная система координат на расслоении π над некоторой окрестностью $\mathcal{U}$ точки $x \in M$. Рассмотрим множество $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \subset J^k(\pi)$. Локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m)$ дополним функциями p_σ^j, которые определяются по формуле

$$p_\sigma^j([s]_x^k) = \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \qquad j = 1, \ldots, m, \quad |\sigma| \leqslant k,$$

Далее координаты p_σ^j мы будем называть *каноническими координатами*, ассоциированными с адаптированной системой координат (x_i, u^j).

Для данного расслоения π можно рассматривать всевозможные многообразия джетов $J^k(\pi)$, $k = 0, 1, \ldots$, представляя их расположенными одно над другим в виде башни:

Джеты и проекции	**Координаты в джетах**
$J^{k+1}(\pi)$	$x_i, u^j, p_\sigma^j, \ \lvert\sigma\rvert \leqslant k+1,$
$\downarrow \pi_{k+1,k}$	
$J^k(\pi)$	$x_i, u^j, p_\sigma^j, \ \lvert\sigma\rvert \leqslant k,$
$\downarrow \pi_{k,k-1}$	
. . . . .	. . . .
$\downarrow \pi_{1,0}$	
$J^0(\pi) = E$	x_i, u^j
$\downarrow \pi$	
M	$x_i.$

Проекции $\pi_{t+1,t}$ определяются по формуле

$$\pi_{t+1,t}\colon\ J^{t+1}(\pi) \to J^t(\pi), \qquad \pi_{t+1,t}([s]_x^{t+1}) = [s]_x^t,$$

$t = 0, \ldots, k$. Так как класс эквивалентности $[s]_x^{t+1} \in J^{t+1}(\pi)$ однозначно определяет класс $[s]_x^t \in J^t(\pi)$, то определение проекций $\pi_{t+1,t}$ корректно.

Упражнение 2.2.

1. Докажите, что набор окрестностей $\pi_k^{-1}(\mathcal{U})$ с координатными функциями x_i, u^j, p_σ^j задает структуру гладкого многообразия на $J^k(\pi)$.

2. Докажите, что проекция $\pi_k\colon\ J^k(\pi) \to M$ является гладким локально тривиальным расслоением.

Упражнение 2.3. Докажите, что проекции $\pi_{t+1,t}$ являются гладкими локально тривиальными расслоениями. Докажите также, что $\pi_t \circ \pi_{t+1,t} = \pi_{t+1}$.

2.2. Распределение Картана. Введем теперь на многообразии $J^k(\pi)$ основную геометрическую структуру — *распределение Картана*. Прежде всего заметим, что если s — сечение расслоения π, то для любой точки $x \in M$ можно определить элемент $j_k(s)(x) = [s]_x^k \in J_x^k(\pi)$. Очевидно, что отображение $j_k(s)\colon\ M \to J^k(\pi)$ — гладкое сечение расслоения $\pi_k\colon\ J^k(\pi) \to M$. Оно называется *$k$-джетом сечения* s. График k-джета в пространстве $J^k(\pi)$ обозначается через Γ_s^k.

Назовем *R-плоскостью* в касательном пространстве $T_\theta(J^k(\pi))$, $\theta \in J^k(\pi)$, n-мерную плоскость, которая касается графика k-джета некоторого сечения расслоения π. Очевидно, что R-плоскость горизонтальна относительно проекции $\pi\colon\ J^k(M) \to M$.

Заметим, что точку $\theta' \in J^{k+1}(\pi)$ можно рассматривать как пару, состоящую из точки $\theta = \pi_{k+1,k}(\theta') \in J^k(\pi)$ и R-плоскости $R_{\theta'} \subset T_\theta(J^k(\pi))$, которая определяется как плоскость, касательная к графику k-джета некоторого сечения s, определенного условием $[s]_x^{k+1} = \theta'$. (Легко видеть, что эта плоскость однозначно определяется джетом $[s]_x^{k+1}$.) Говоря иначе, θ' — это набор значений производных до порядка $k+1$, а плоскость $R_{\theta'} \subset T_\theta J^k(\pi)$ определяется значениями первых производных от k-х производных.

Упражнение 2.4. Выпишите в координатах условие того, что n-мерная плоскость в $T_\theta(J^k(\pi))$ является R-плоскостью.

Зафиксируем точку $\theta \in J^k(\pi)$ и будем рассматривать различные точки $\theta' \in J^{k+1}(\pi)$, проектирующиеся в θ при отображении $\pi_{k+1,k}$. Эти точки образуют слой расслоения $\pi_{k+1,k}$: $J^{k+1}(\pi) \to J^k(\pi)$ над точкой θ, который мы будем обозначать через $F_{k+1,k}(\theta)$ или F_θ. Иначе говоря, мы фиксируем значение некоторой вектор-функции и ее производных до порядка k, а остальным производным порядка $k+1$ позволяем меняться произвольным образом. Когда точка θ' перемещается вдоль слоя F_θ, соответствующая ей n-мерная плоскость $R_{\theta'} \subset \subset T_\theta(J^k(\pi))$ как-то поворачивается вокруг точки θ', оставаясь при этом всегда горизонтальной относительно проекции π_k: $J^k(\pi) \to M$.

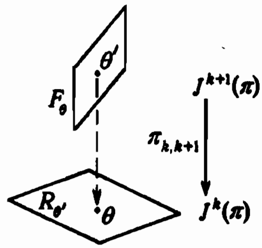

Рис. 3.4. Слой проекции $\pi_{k+1,k}$

Определение 2.2. *Плоскостью Картана* $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_\theta^k$ в точке $\theta \in J^k(\pi)$ называется линейная оболочка всех плоскостей $R_{\theta'}$ при $\theta' \in F_\theta$, т. е. линейная оболочка всех касательных плоскостей к графикам Γ_s^k k-джетов сечений расслоения π, для которых $[s]_a^k = \theta$. Соответствие

$$\mathcal{C}\colon\ \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta^k$$

называется *распределением Картана на* $J^k(\pi)$.

Приведем теперь координатное описание распределения Картана. Для этого, используя адаптированную систему координат $(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m)$, выпишем в явном виде базис плоскости $R_{\theta'}$, которая соответствует точке $\theta' \in J^{k+1}(\pi)$. Координаты точки θ' будем обозначать через $(x_i(\theta'), u^j(\theta'), p_\sigma^j(\theta'))$.

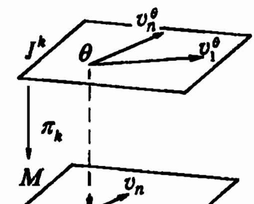

Рис. 3.5. Базис плоскости $R_{\theta'}$.

Рассматривая плоскость R_θ как касательную к графику $\Gamma_s^k \subset J^k(\pi)$ некоторого сечения s, такого что $[s]_a^{k+1} = = \theta'$, выберем в ней базис, состоящий из векторов $v_1^\theta, \ldots, v_n^\theta$, проекции которых на M совпадают с $v_1 = = \left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_a, \ldots, v_n = \left.\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right|_a$. Из соотношений (1.4), задающих поверхность Γ_s^k, легко вывести следующие формулы для базисных векторов v_i^θ:

$$v_i^\theta = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\sigma|<k} \sum_{j=1}^{m} p^j_{\sigma+1_i}(\theta) \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}. \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что часть суммы, соответствующая значениям σ, $|\sigma|<k$, определяется точкой θ и не зависит от выбора точки θ', расположенной над θ. Таким образом, любая плоскость R_η, соответствующая $\eta \in F_\theta$, может быть получена из данной плоскости R_θ поворотом в «вертикальном направлении». Точнее говоря, положение R_η относительно R_θ можно задать набором из n векторов смещения $\delta_i = v_i^\eta - v_i^\theta$ (рис. 3.6), вертикальных относительно проекции $\pi' = \pi_{k,k-1}$. Обозначим пространство вертикальных векторов в точке θ через $V_\theta = T_\theta(F_{\theta''})$, где $\theta'' = \pi_{k,k-1}(\theta)$; векторы $\dfrac{\partial}{\partial p^j_\sigma}$, $|\sigma| = k$, образуют базис в этом пространстве. Заметим, что любой вертикальный касательный вектор $v \in V_\theta$ можно рассматривать как вектор смещения: для базисного вектора $\dfrac{\partial}{\partial p^j_\sigma}$, $|\sigma| = k$, достаточно взять точку $\eta \in F_\theta$, все координаты которой, кроме одной, совпадают с соответствующими координатами точки θ', а $p^j_{\sigma+1_i}(\eta) = p^j_{\sigma+1_i}(\theta') + 1$. Тогда $\delta_i = v_i^\eta - v_i^\theta = \dfrac{\partial}{\partial p^j_\sigma}$.

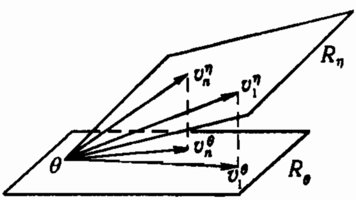

Рис. 3.6. R-плоскости в точке θ'

Из соотношений (2.1) следует, что распределение Картана на $J^k(\pi)$ задается набором 1-форм $\omega^j_\sigma = dp^j_\sigma - \sum_{i=1}^{n} p^j_{\sigma+1_i}\, dx_i$, $|\sigma| \leqslant \leqslant k-1$, которые называются *формами Картана*.

Геометрическая структура плоскостей Картана характеризуется следующей теоремой.

Теорема 2.1 *Пусть C — распределение Картана на многообразии $J^k(\pi)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) ***плоскость Картана $C_\theta \subset T_\theta(J^k(\pi))$ является прямой сум мой вертикального и горизонтального подпространств***

$$C_\theta = V_\theta \oplus R_{\tilde\theta}, \tag{2.2}$$

где V_θ — *касательное пространство к слою проекции* $\pi_{k,k-1}$, *а* $R_{\widetilde{\theta}}$ — *R-плоскость, соответствующая некоторой точке* $\widetilde{\theta}$, *принадлежащей слою* F_θ *над точкой* θ;

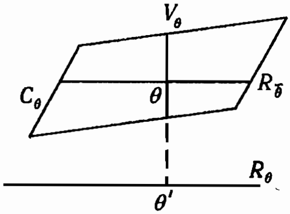

Рис. 3.7. Структура картановской плоскости

2) *плоскость Картана* C_θ *состоит в точности из таких касательных векторов в точке* θ, *которые попадают в* R_θ *при проекции* $\pi_{k,k-1}$, *т. е.*

$$C_\theta = (\pi_{k,k-1})_*^{-1}(R_\theta). \tag{2.3}$$

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предыдущих рассуждений. Заметим только, что в прямом разложении (2.2) первое слагаемое, в отличие от второго, определено точкой θ однозначно.

Для доказательства второго утверждения заметим, что проекция $(\pi_{k,k-1})_*$ отображает подпространство V_θ в нуль, а плоскость $R_{\widetilde{\theta}}$ взаимно однозначно отображает на R_θ. Поэтому $C_\theta \subset (\pi_{k,k-1})_*^{-1}(R_\theta)$. Обратное включение следует из того, что полный прообраз точки $(\pi_{k,k-1})_*^{-1}(\theta'')$ есть в точности $V_\theta \subset C_\theta$. □

Следствие 2.2. *Горизонтальное (относительно проекции* $\pi_{k,k-1}$*) подпространство картановской плоскости* C_θ *не может иметь размерность, превосходящую* $n = \dim M$.

Следствие 2.3. *Плоскость* $P \subset C_\theta$ *является горизонтальной относительно проекции* $\pi_{k,k-1}$ *тогда и только тогда, когда она горизонтальна относительно проекции* $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ *(т. е. вырождение при проекции картановской плоскости при отображениях* $J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi) \to \ldots \to J^0(\pi) \to$ $\to M$ *может происходить только на первом шаге).*

Найдем координатную запись векторного поля X, лежащего в распределении Картана C^k на многообразии $J^k(\pi)$. Для этого используем разложение (2.2). Базис вертикального пространства V_θ образует набор вертикальных векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial p_\sigma^j}$, $j = 1, \ldots, m$, $|\sigma| = k$, в точке θ. Базис горизонтального подпространства можно выбрать в виде набора усеченных операторов полной производной

$$D_i^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\sigma|<k} p^j_{\sigma+1_i} \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}. \tag{2.4}$$

Таким образом, всякое векторное поле X, лежащее в распределении Картана, можно разложить по указанному базису:

$$X = \sum_{i=1}^{m} a^i D_i^{(k)} + \sum_{|\sigma|=k} b_\sigma^j \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}. \tag{2.5}$$

Распределение $\mathcal{C}^k$ не является вполне интегрируемым, так как, например, при $|\sigma| = k-1$ коммутатор

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_{\sigma+1_i}^j}, D_i^{(k)}\right] = \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}$$

не имеет вида (2.5). Поэтому максимальные интегральные многообразия распределения $\mathcal{C}^k$ имеют размерность меньше, чем $\dim \mathcal{C}^k$.

Теперь мы наконец можем сформулировать определение дифференциального уравнения порядка k, которое аналогично определению дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 2.3. *Дифференциальным уравнением порядка* k в расслоении π: $E \to M$ называется подмногообразие $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, снабженное распределением Картана $\mathcal{C}(\mathcal{E})$: $\theta \mapsto \mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_\theta^k \cap T_\theta(\mathcal{E})$, $\theta \in \mathcal{E}$. Максимальное интегральное многообразие распределения Картана (размерности $\dim M$) называется (*обобщенным*) *решением уравнения* $\mathcal{E}$.

Упражнение 2.5. Пусть π: $E \to M$ — расслоение и $\pi_{1,0}$: $J^1(\pi) \to E$. Покажите, что сечения расслоения $\pi_{1,0}$ являются связностями на расслоении π, а условие нулевой кривизны некоторой связности определяет в расслоении $\pi_{1,0}$ уравнение первого порядка.

2.3. Интегральные многообразия распределения Картана. В теореме 1.1 мы показали, что графики k-джетов сечений Γ_f^k являются интегральными многообразиями распределения Картана. Здесь мы опишем локальное строение произвольных максимальных интегральных многообразий.

Определение 2.4. Пусть $P \subset \mathcal{C}_\theta^{k-1}$ — некоторая плоскость размерности s, $s \leqslant \dim M$. Подмножество

$$l(P) = \{\tilde{\theta} \in F_\theta \mid R_{\tilde{\theta}} \supset P\}$$

слоя над точкой θ называется *лучевым подмногообразием* (*лучом*), соответствующим плоскости P. Если $N \subset J^{k-1}(\pi)$ — некоторое подмногообразие, то множество

$$L(N) = \bigcup_{q \in N} l(T_q N)$$

называется *продолжением* (или *поднятием*) *многообразия* N.

Упражнение 2.6. Докажите, что если $\Gamma_f^{k-1} \subset N$, то $\Gamma_f^k \subset \subset L(N)$.

Пример 2.1. Рассмотрим многообразие 1-джетов скалярных функций $J^1(2,1)$ от двух аргументов с координатами (x, y, z, p, q), где z — функция переменных x, y, а p, q — ее производные по x, y соответственно.

Зафиксируем точку $\theta \in J^0(\mathbb{R}^2)$ с координатами (x, y, z). Слой F_θ расслоения $J^1(\mathbb{R}^2) \to J^0(\mathbb{R}^2)$ над этой точкой является плоскостью с координатами (p, q). Пусть $\xi = X\dfrac{\partial}{\partial x} + Y\dfrac{\partial}{\partial y} + Z\dfrac{\partial}{\partial z}$ — ненулевой вектор в точке θ и P — порожденная им прямая. Найдем уравнения соответствующего лучевого многообразия $l(P)$.

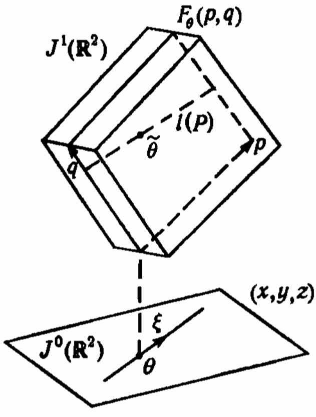

Рис. 3.8. Лучевое многообразие

Пусть точка $\tilde{\theta} \in F_\theta$ имеет координаты p_0, q_0. Тогда соответствующая ей плоскость $R_{\tilde{\theta}}$ описывается уравнением

$$dz - p_0\,dx - q_0\,dy = 0,$$

а условие $R_{\tilde{\theta}} \supset P$, т. е. $\xi \in R_{\tilde{\theta}}$, имеет вид $Xp_0 + Yq_0 = Z$. Следовательно, если величины X, Y, Z фиксированы, а p, q — переменные, то подмногообразие $l(P) \subset \subset F_\theta$ задается уравнением $Xp + Yq = Z$.

В общем положении $l(P)$ представляет собой прямую в плоскости F_θ. Это и есть уравнение подмногообразия $l(P) \subset \subset F_\theta$. Здесь p, q — переменные координаты в F_θ, а величины X, Y, Z фиксированы. Таким образом, в общем случае $l(P)$ представляет собой прямую на плоскости F_θ. Заметим, что направление этой прямой определяется проекцией (X, Y) вектора ξ на плоскость $\mathbb{R}^2_{x,y}$, а положение ее начальной точки зависит также от координаты Z. В исключительном случае, когда вектор ξ вертикален (т. е. $X = Y = 0$, $Z \neq 0$), $l(P)$ пусто, так как R-плоскость не содержит вертикальных направлений.

Теперь рассмотрим подмногообразие $N \subset J^0(\mathbb{R}^2)$, которое проектируется на $\mathbb{R}^2_{x,y}$ без вырождения. В зависимости от размерности N его продолжение $L(N)$ описывается следующим образом.

1. Подмногообразие N состоит из одной точки θ. Тогда $L(N) = = F_\theta$ — слой над точкой θ.

2. Подмногообразие N — кривая, заданная параметрически: $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$. Тогда $L(N)$ — двумерная поверхность в пятимерном пространстве J^1, заданная уравнениями

$$\begin{cases} x = \alpha(t), \\ y = \beta(t), \\ z = \gamma(t), \\ \alpha'(t)p + \beta'(t)q = z. \end{cases} \tag{2.6}$$

Кривую $N \subset J^0(\mathbb{R}^2)$ можно рассматривать как график некоторой функции $z(x, y)$, заданной вдоль некоторой лежащей в плоскости $\mathbb{R}^2_{x,y}$ кривой $x = \alpha(t), y = \beta(t)$. Последнее из уравнений системы (2.6) показывает, как связаны между собой частные производные $p = z_x$, $q = z_y$ данной функции на этой кривой.

3. Подмногообразие N — поверхность вида $z = f(x, y)$. Тогда каждая точка $\theta \in N$ однозначно определяет такую точку $\widetilde{\theta} \in F_\theta$, что $R_{\widetilde{\theta}} = T_\theta(N)$. В самом деле, координаты p, q точки $\widetilde{\theta}$ должны совпадать с угловыми коэффициентами касательной плоскости $T_\theta(N)$. Таким образом, $\widetilde{\theta} = [f]^1_a$ и $L(N) = \Gamma^1_f$ — график 1-джета функции f.

Пример 2.2. Рассмотрим интегральную кривую N распределения Картана на $J^1(2, 1)$ и ее поднятие в $J^2(2, 1)$. Из следствий 2.2 и 2.3 вытекает, что поднятие N непусто только в том случае, если кривая N горизонтальна относительно проекции π_1: $J^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2$. В этом случае на $\mathbb{R}^2$ можно выбрать такие координаты (x, y), что проекция S кривой N в окрестности некоторой ее точки имеет вид $y = 0$ (рис. 3.9). Сама кривая в этом случае может быть описана соотношениями вида

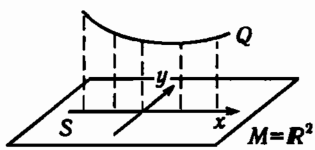

Рис. 3.9

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = \alpha(x), \\ p = \beta(x), \\ q = \gamma(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

Так как эта кривая — интегральное многообразие распределения Картана, задаваемого уравнением $(dz - p\,dx - q\,dy)|_N = 0$, то $\beta = \alpha'$. Условия (2.7) означают, что нам известны значения функции $z(x, y)$ и значения производной $z_y(x, y)$ при $y = 0$. Мы получили стандартный вид данных Коши для уравнений второго порядка. В этой ситуации задачу поднятия можно интерпретировать как описание графиков джетов тех функций, которые удовлетворяют данным Коши.

Пусть $\theta(x, y, z, p, q)$ — точка кривой N и $\xi = (X, Y, Z, P, Q)$ — касательный вектор. Опишем множество $l(\xi)$ в слое F_θ. Обозначим координаты в слое проекции $J^2(\mathbb{R}^2) \to J^1(\mathbb{R}^2)$ через r, s, t (они отвечают соответственно производным z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}). Тогда уравнения

$$\begin{cases} Xr + Ys = P, \\ Xs + Yt = Q \end{cases} \tag{2.8}$$

описывают прямую $l(\xi)$.

Заметим, что классическое понятие характеристик для уравнений второго порядка основывается на рассмотрении системы (2.8) совместно с исследуемым уравнением $\mathcal{E} \subset J^2(\mathbb{R}^2)$.

Заметим теперь, что для любого невырожденного относительно проекции на базу интегрального многообразия $N \subset J^{k-1}(\pi)$ (далее такие подмногообразия мы будем называть «горизонтальными») соответствующее многообразие $L(N) \subset J^k(\pi)$ также будет интегральным. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, применяя теорему 2.1, что в любой точке $\widetilde{\theta} \in L(N)$ образ касательного пространства $T_{\widetilde{\theta}}(L(N))$ при проекции $\pi_{k,k-1}$ содержится в $R_{\widetilde{\theta}}$. В силу определений и построения $L(N)$ имеем $(\pi_{k,k-1})_{*,\widetilde{\theta}}(L(N)) = T_{\widetilde{\theta}}(\pi'(L(N))) = T_\theta(N) \subset R_{\widetilde{\theta}}$. Таким образом, $L(N)$ — интегральное многообразие. Тем самым мы получили способ построения интегральных многообразий в $J^k(\pi)$, исходя из интегральных многообразий в $J^{k-1}(\pi)$.

Как мы докажем в теореме 2.7, описанная конструкция имеет универсальный характер. Сейчас мы опишем локальную структуру горизонтальных интегральных многообразий N и выведем формулу, выражающую размерность $L(N)$ через размерность N.

Утверждение 2.4. *Всякое горизонтальное интегральное многообразие N распределения Картана в $J^k(\pi)$ локально совпадает с графиком k-джета Γ_f^k некоторого сечения f.*

Доказательство. Пусть $r = \dim N \leqslant n$. Введем в окрестности точки $a = \pi_k(\theta)$, $\theta \in N$, координаты $x_1, \ldots, x_n$, в которых $\pi_k(N)$ задается соотношениями $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Так как многообразие N горизонтально, то оно не вырождено относительно проекции $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$. Следовательно, N задано уравнениями

$$x_i = 0, \quad i > r, \qquad p_\sigma^j = f_\sigma^j(x_1, \ldots, x_r), \quad j = 1, \ldots, m, \ |\sigma| \leqslant k.$$

Ограничивая формы Картана на N, получаем (ср. с доказательством теоремы 1.1), что

$$f^j_{\sigma+1_i} = \frac{\partial f^j_\sigma(x_1,\ldots,x_r)}{\partial x_i}, \qquad |\sigma| \leqslant k-1, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Поэтому $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f^1,\ldots,f^m)$, задает требуемое сечение. □

Утверждение 2.5. *Пусть π: $E \to M$ — m-мерное расслоение над n-мерным многообразием M и $N \subset J^k(\pi)$ — горизонтальное интегральное многообразие распределения Картана размерности $r \leqslant n$. Тогда**)

$$\dim L(N) = r + m\binom{n-r+k}{n-r-1}.$$

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку $\theta \in N$. Через P_θ обозначим касательное пространство $T_\theta(N)$. В окрестности точки $\pi_k(\theta)$ введем такую систему координат $x_1,\ldots,x_n$, что $\pi_k(N)$ задается в ней уравнениями $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$. Тогда базис плоскости P_θ образуют векторы

$$\xi_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{|\sigma|<k} a^j_{\sigma,i}\frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}\right)\bigg|_\theta, \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \tag{2.9}$$

где $a^j_{\sigma,i} = \dfrac{\partial^{|\sigma|+1}\boldsymbol{f}^j}{\partial x_\sigma \partial x_i}$ для сечения $\boldsymbol{f} = (f^1,\ldots,f^m)$, построенного в утверждении 2.4.

Условие принадлежности точки $\widetilde{\theta}$, имеющей координаты $\widetilde{p}^j_\tau$ и лежащей в слое над θ, многообразию $l(P)$, можно записать в виде

$$\widetilde{p}^j_{\sigma+1_i} = a^j_{\sigma,i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Эта система линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных $\widetilde{p}^j_\tau$ совместна, т. е. для всех i, l, j, μ выполняются соотношения $a^j_{\mu+1_i,l} = a^j_{\mu+1_l,i}$. Следовательно, соотношения (2.9) позволяют однозначно определить такие координаты $\widetilde{p}^j_\tau$, мультииндекс τ которых, $|\tau| = k+1$, отличен от нуля в первых r компонентах.

На другие координаты соотношений нет; число этих координат при каждом фиксированном $j = 1,\ldots,m$ равно количеству всевозможных мультииндексов τ, $|\tau| = k+1$, отличных от нуля только в $n-r$ компонентах $r+1,\ldots,n$, т. е. $\dbinom{n-r+k}{n-r-1}$.

*) При $\beta < 0$ мы полагаем $\dbinom{\alpha}{\beta} = 0$.

Итак $\dim l(P) = m\binom{n-r+k}{n-r-1}$, и так как многообразие $L(N)$ расслаивается над N со слоем $l(P_\theta)$ над точкой $\theta \in N$, то $\dim L(N) = = r + m\binom{n-r+k}{n-r-1}$. □

Следствие 2.6. *Если $r_1 = \dim N_1 < r_2 = \dim N_2$, то $\dim L(N_1) \geqslant \dim L(N_2)$, причем равенство достигается лишь в следующих случаях:*

а) $m = n = 1$;

б) $k = 0, \quad m = 1$.

Описание всех максимальных интегральных многообразий распределения Картана приводится в следующей теореме.

Теорема 2.7. *Всякое интегральное многообразие Q распределения Картана на $J^k(\pi)$ является максимальным тогда и только тогда, когда оно всюду, кроме, быть может, подмногообразия меньшей размерности, в окрестности любой точки имеет вид $L(N)$ для некоторого горизонтального интегрального многообразия $N \subset J^{k-1}(\pi)$.*

Доказательство. Пусть Q — максимальное интегральное многообразие в $J^k(\pi)$. Докажем утверждение теоремы для любой точки $\theta \in Q$, в окрестности которой ранг отображения $\pi' = \pi_{k,k-1}\colon J^k(\pi) \to \to J^{k-1}(\pi)$ постоянен (очевидно, что эти точки образуют открытое всюду плотное подмножество Q, см. рис. 3.10).

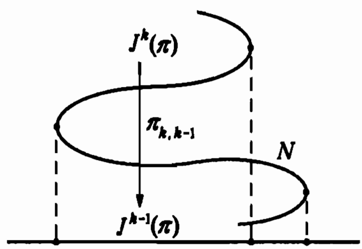

Рис. 3.10. Регулярные и особые точки проекции $\pi_{k,k-1}$

В дальнейшем нам понадобится лемма, которая вытекает из теоремы о неявной функции и приводится нами без доказательства.

Лемма 2.8. *Пусть $f\colon A \to B$ — гладкое отображение многообразий, имеющее в окрестности точки $a \in A$ постоянный ранг p. Тогда множество $f(A)$ является многообразием в окрестности точки $b = f(a)$, причем его касательное пространство есть образ касательного пространства к A: $T_b(f(A)) = f_*(T_a(A))$.*

Вернемся к доказательству теоремы. Пусть $\theta \in Q$ и $N = = \pi'(U)$ — проекция соответствующей окрестности $U \subset Q$ на $J^{k-1}(\pi)$. По лемме 2.8, N — подмногообразие в $J^{k-1}(\pi)$. Пусть $\theta' = \pi'(\theta)$. По той же лемме и теореме 2.1 $T_{\theta'}(N) = T_{\theta'}(\pi'(Q)) = = \pi'_*(T_\theta(Q) \subset \pi'_*(C_\theta) = R_\theta$. Отсюда следует, что N — горизонтальное многообразие и $\dim N \leqslant n$, т. е. применимо утверждение 2.1. Включение $R_\theta \supset T_{\theta'}(N)$ по определению означает, что $\theta \in L(N)$. Таким образом, $U \subset L(N)$, т. е. локально $Q \subset L(N)$. В силу максимальности $Q = L(N)$.

Обратно, рассмотрим многообразие вида $L(N)$. Как только что было установлено, оно содержится в максимальном интегральном многообразии $L(N_1)$ и $\dim L(N) \leqslant \dim(N_1)$. Но $N = \pi'(L(N))$, $N_1 = \pi'(L(N_1))$. Следовательно, $N \subset N_1$ и $\dim N \leqslant \dim N_1$. Отсюда, по следствию 2.6, $\dim L(N_1) \leqslant \dim L(N)$, т. е. $L(N) = L(N_1)$. □

Отметим, что если N — график $(k-1)$-джета некоторого сечения расслоения π, то многообразие $L(N)$ является графиком k-джета того же сечения. Отсюда следует, что графики джетов являются максимальными интегральными многообразиями распределения Картана.

Из доказанной теоремы и следствия 2.6 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.9. *Исключая случаи $m = n = 1$, $k = m = 1$, среди всех интегральных многообразий распределения Картана на $J^k(\pi)$ наибольшую размерность имеют слои проекции $\pi_{k,k-1}$, т. е. многообразия вида $L(N)$, где N нульмерно.*

Этот факт имеет фундаментальное значение для описания преобразований, сохраняющих распределение Картана. Этим преобразованиям посвящен следующий параграф.

§ 3. Преобразования Ли

Говоря неформально, преобразование Ли — это такое преобразование совокупности зависимых и независимых переменных и производных первым по вторым, при котором сохраняются дифференциальные связи между этими переменными. С геометрической точки зрения, преобразования Ли являются диффеоморфизмами многообразия джетов $J^k(\pi)$, сохраняющими распределение Картана, т. е. ту геометрическую структуру, которая содержит информацию об этих связях. Таким образом, преобразования Ли — это симметрии распределения Картана. Симметрии многообразия $J^1(M)$, т. е. контактные преобразования, были рассмотрены в гл. 2. По аналогии с этим, преобразования Ли многообразия $J^k(\pi)$ уместно назвать контактными преобразованиями порядка k. Однако мы покажем, что для одной зависимой переменной такие преобразования сводятся к обычным контактным преобразованиям, а для нескольких зависимых переменных — к точечным преобразованиям, т. е. заменам зависимых и независимых переменных.

3.1. Конечные преобразования Ли. Допустим, что имеется n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ и m зависимых переменных $u^1, \ldots, u^m$. Пусть заданы формулы замены переменных

$$\begin{cases} \overline{x}_i = f^i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \\ \overline{u}^j = g^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{3.1}$$

Тогда мы можем выразить частные производные $\overline{p}^j_\sigma = \dfrac{\partial^{|\sigma|}\overline{u}^j}{\partial \overline{x}^\sigma}$ через x_i, u^j и $p^j_\tau = \dfrac{\partial^{|\tau|}u^j}{\partial x^\tau}$.

Примеры.

3.1. Рассмотрим масштабное преобразование

$$\overline{x}_i = \alpha_i x_i, \qquad \overline{u}^j = \beta_j u^j.$$

Производные $\overline{p}^j_i = \dfrac{\partial^j \overline{u}^j}{\partial \overline{x}_i}$ при этом преобразуется следующим образом:

$$\overline{p}^j_i = \frac{\beta_j}{\alpha_i} p^j_i$$

Можно выписать действие продолжения этого преобразования на производные любого порядка

$$\overline{p}^j_\sigma = \frac{\beta_j}{\alpha^\sigma} p^j_\sigma,$$

где $\alpha^{(i_1, \ldots, i_n)} = \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_1^{i_n}$

3.2. Трансляция (параллельный перенос) на постоянный вектор в пространстве зависимых и независимых переменных описывается формулами

$$\overline{x}_i = x_i + \xi_i, \qquad \overline{u}^j = u^j + \eta^j.$$

Его действие тождественно на переменных p^j_σ

$$\overline{p}^j_\sigma = p^j_\sigma$$

3.3. Преобразование Галилея (переход в движущуюся с постоянной скоростью систему отсчета) задается формулами

$$\overline{t} = t, \qquad \overline{x} = x - vt, \qquad \overline{u} = u.$$

Продолжение этого преобразования на производные первого порядка имеет вид

$$\bar{u}_t = u_t + vu_x, \qquad \bar{u}_x = u_x.$$

3.4. Произвольный диффеоморфизм плоскости x, u (т. е. замена одного зависимого и одного независимого переменного)

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda(x, u), \\ \bar{u} = \mu(x, u) \end{cases} \tag{3.2}$$

порождает преобразование трехмерного пространства x, u, p, которое дробно-линейно по переменной p. Нетрудно проверить, что $\bar{p} = d\bar{u}/d\bar{x}$ как отношение дифференциалов, и мы получаем, что

$$\bar{p} = \frac{d\bar{u}}{d\bar{x}} = \frac{\mu_x dx + \mu_u du}{\lambda_x dx + \lambda_u du} = \frac{\mu_x + \mu_u p}{\lambda_x + \lambda_u p}. \tag{3.3}$$

Упражнение 3.1. Пусть $m = n$, т. е. число независимых переменных совпадает с числом зависимых. Рассмотрим замену переменных

$$\bar{x}_i = u^i, \quad \bar{u}^j = x_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n = m.$$

Это преобразование называется *преобразованием годографа*. Выведите формулы для действия продолжения этого преобразования на первые производные.

Рассмотрим теперь общую геометрическую конструкцию, соответствующую заменам переменных и продолжению действия этих замен на производные по независимым переменным.

Пусть $\pi\colon E \to M$ — некоторое расслоение. Тогда формулы (3.1) можно интерпретировать как координатную запись некоторого диффеоморфизма пространства E. Напомним, что такие преобразования называются *точечными* преобразованиями.

Диффеоморфизм $A\colon E \to E$ для любого $k \geqslant 1$ порождает диффеоморфизм $A^{(k)}\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$, определяемый следующим образом. Пусть θ — некоторая точка многообразия $J^k(\pi)$, b и a — ее проекции в E и M соответственно. Выберем такое сечение φ, что $\theta = [\varphi]_a^k$, и рассмотрим его график $\Gamma_\varphi \subset E$. Под действием преобразования A точка b переходит в некоторую точку $b' \in E$, а график Γ_φ в подмногообразие $A(\Gamma_\varphi) \subset E$. Если это подмногообразие в окрестности точки b' будет имеет вид графика некоторого сечения φ', то положим $\theta' = [\varphi']_{a'}^k$, где $a' = \pi(b')$, и $A^{(k)}(\theta) = \theta'$.

Упражнение 3.2. Докажите, что точка θ' не зависит от выбора сечения φ; она однозначно определяется k-джетом сечения φ в точке a, т. е. точкой θ.

Преобразование $A^{(k)}$ называется *k-м поднятием* точечного преобразования A. Вообще говоря, оно определено не на всем многообразии $J^k(\pi)$, а (как это будет видно из дальнейшего) только в некоторой открытой всюду плотной области $J^k(\pi)$. Этот геометрический факт соответствует тому «формульному» наблюдению, что в процессе преобразований производных могут появляться «члены в знаменателе», обращение которых в нуль задает множество значений переменных, где преобразование не определено (ср. с равенством (3.3)).

Пример 3.5. Рассмотрим преобразование годографа одной независимой и одной зависимой переменной

$$\overline{x} = u, \qquad \overline{u} = x.$$

Пусть $p = \dfrac{du}{dx}$, $\overline{p} = \dfrac{d\overline{u}}{d\overline{x}}$. Тогда, как это следует из упражнения 3.1, $\overline{p} = 1/p$. Заметим, что хотя исходное преобразование A было всюду определенным диффеоморфизмом пространства $\mathbb{R}^3 = J^1(\mathbb{R})$, преобразование $A^{(1)}$ определено в пространстве $\mathbb{R}^3 = J^1(\mathbb{R})$ везде, кроме плоскости $p = 0$.

Из приведенной конструкции преобразования $A^{(k)}$ видно, что в области своего определения оно является симметрией распределения Картана C^k. В самом деле, подпространства C^k_θ являются линейной оболочкой R-плоскостей $R_{\widetilde{\theta}}$, $\widetilde{\theta} \in J^{k+1}$, а касательное отображение $A^{(k)}_*$ переводит такие плоскости друг в друга. В самом деле, если $A(\Gamma_\varphi) = \Gamma_{\varphi'}$, $\theta = [\varphi]^k_a$, $\widetilde{\theta} = [\varphi]^{k+1}_a$ и $\widetilde{\theta}' = [\varphi']^{k+1}_{a'}$, то $A^{(k)}_{*,\theta}(R_{\widetilde{\theta}}) = R_{\widetilde{\theta}'}$.

Определение 3.1. Диффеоморфизм $F\colon J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ называется *преобразованием Ли*, если $F_{*,\theta}(C^k_\theta) = C^k_{F_\theta}$ для любой точки $\theta \in J^k(\pi)$.

Поскольку распределение Картана локально задается набором формул (1.2), диффеоморфизм F является преобразованием Ли в том и только том случае, если для всех $j = 1, \ldots, m$ и $|\sigma| \leqslant k - 1$ локально выполнены равенства

$$F^*(\omega^j_\sigma) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{|\tau| \leqslant k-1} \lambda^{j,\tau}_{\sigma,l}\, \omega^l_\tau,$$

где $\lambda^{j,\tau}_{\sigma,l}$ — гладкие функции на $J^k(\pi)$.

Пример 3.6. Выведем еще раз формулы поднятия в $J^1(\pi)$ точечного преобразования плоскости (3.2), пользуясь только что сформулированным свойством преобразований Ли. Функцию $\overline{p}(x,u,p)$ будем искать из условия, что образ распределения $du-p\,dx=0$ при отображении (3.2) совпадает с распределением $d\overline{u}-\overline{p}\,d\overline{x}=0$. Это требование означает, что, заменяя в выражении $d\overline{u}-\overline{p}\,d\overline{x}$ все переменные на соответствующие функции x,u,p, мы должны получить дифференциальную форму, пропорциональную $du-p\,dx$. Вычисляя, получаем

$$\begin{aligned} d\overline{u}-\overline{p}\,d\overline{x} &= \overline{u}_x dx+\overline{u}_u du-\overline{p}(\overline{x}_x dx+\overline{x}_u du = \\ &= (\overline{u}_u-\overline{p}\,\overline{x}_u)du+(\overline{u}_x-\overline{p}\,\overline{x}_x)dx=\lambda(du-p\,dx), \end{aligned}$$

откуда $\overline{u}_x-\overline{p}\,\overline{x}_x=-p(\overline{u}_u-\overline{p}\,\overline{x}_u)$, и, значит,

$$\overline{p}=\frac{\overline{u}_x+\overline{u}_u p}{\overline{x}_x+\overline{x}_u p},$$

в соответствии с формулой (3.3).

Рассуждая аналогично, мы получим формулы поднятия в $J^1(\pi)$ произвольного точечного преобразования (3.1). А именно, функции *) $\overline{p}_i^j$, $i=1,\ldots,n$, $j=1,\ldots,m$, определяются из m систем линейных уравнений (для $j=1,\ldots,m$)

$$\begin{pmatrix} D_1(\overline{x}_1) & \ldots & D_1(\overline{x}_n) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D_n(\overline{x}_1) & \ldots & D_n(\overline{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{p}_1^j \\ \ldots \\ \overline{p}_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(\overline{u}^j) \\ \ldots\ldots \\ D_n(\overline{u}^j) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где D_i — *оператор полной производной по переменной* x_i, действующий на функции $f(x_1,\ldots,x_n,u^1,\ldots,u^m)$ по формуле

$$D_i(f)=\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}p_i^j\frac{\partial f}{\partial u^j}.$$

Определитель матрицы, стоящей в левой части равенства (3.4), уместно назвать «полным якобианом» системы функций $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n$. Отметим, что обращение в нуль этого якобиана на некотором открытом множестве влечет функциональную зависимость функций $\overline{x}_i$. Поскольку замена (3.1) является локальным диффеоморфизмом,

*) В следующей формуле, и далее в аналогичных случаях, мы будем для краткости писать p_i вместо p_{1_i}

функции $\overline{x}_i$ независимы и уравнения (3.4) почти всюду однозначно определяют значения $\overline{p}_i^j$.

Упражнение 3.3. Докажите, что если поднятие $A^{(1)}$ точечного преобразования A: $J^0(\pi) \to J^0(\pi)$ определено в окрестности точки $\theta \in J^1(\pi)$, то поднятие $A^{(k)}$ определено в окрестности любой точки θ', проектирующейся в θ при отображении $\pi_{k,1}$: $J^k(\pi) \to \to J^1(\pi)$.

Преобразование поднятия применимо не только к диффеоморфизмам многообразия зависимых и независимых переменных $E = = J^0(\pi)$, но и к преобразованиям Ли произвольного многообразия джетов $J^k(\pi)$. В самом деле, пусть дано преобразование Ли A: $J^k(\pi) \to J^k(\pi)$. Как мы знаем, многообразие $J^{k+1}(\pi)$ контактных элементов порядка $k+1$ можно представлять себе как множество всех горизонтальных n-мерных интегральных плоскостей (R-плоскостей) в $J^k(\pi)$. Плоскости, которые «не опрокидываются» преобразованием A (т. е. такие плоскости L, что $A_*(L)$ горизонтальна) образуют в этом многообразии открытое всюду плотное множество. На множестве этих плоскостей определено преобразование поднятия $A^{(k)}$, которое плоскость L отображает в $A_*(L)$.

Пример 3.7. Рассмотрим в пятимерном пространстве $J^1(2,1)$ преобразование Лежандра (см. также § 2 гл. 2)

$$\begin{cases} \overline{x} = -p, \\ \overline{y} = -q, \\ \overline{u} = u - xp - yq, \\ \overline{p} = x, \\ \overline{q} = y. \end{cases} \tag{3.5}$$

Как мы уже показали в гл. 2, это преобразование контактно, и, следовательно, оно является преобразованием Ли. Для того, чтобы описать поднятие $A^{(1)}$ этого преобразования в восьмимерное пространство $J^2(2,1)$, необходимо выразить вторые производные

$$\overline{r} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2}, \quad \overline{s} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x} \partial \overline{y}}, \quad \overline{t} = \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}$$

через x, y, u, p, q, r, s, t. Так как распределение Картана инвариантно, то 1-формы

$$\begin{aligned} d\overline{p} - \overline{r}d\overline{x} - \overline{s}d\overline{y} &= dx + \overline{r}dp + \overline{s}dq, \\ d\overline{q} - \overline{s}d\overline{x} - \overline{t}d\overline{y} &= dy + \overline{s}dp + \overline{t}dq \end{aligned} \tag{3.6}$$

представляются в виде линейных комбинаций 1-форм

$$du - p\,dx - q\,dy, \quad dp - r\,dx - s\,dy, \quad dq - s\,dx - t\,dy.$$

Поэтому выражение (3.6) тождественно обращается в нуль при замене dp на $r\,dx + s\,dy$ и dq на $s\,dx + t\,dy$. Отсюда мы получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar r & \bar s \\ \bar s & \bar t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

из которой следует, что

$$\bar r = -\frac{t}{rt - s^2}, \quad \bar s = \frac{s}{rt - s^2}, \quad \bar t = \frac{r}{rt - s^2}. \tag{3.7}$$

Упражнение 3.4. Пусть A: $J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — преобразование Ли. Докажите, что всюду, где определено поднятие $A^{(l+s)}$: $J^{k+l+s}(\pi) \to J^{k+l+s}(\pi)$, $l, s \in \mathbb{N}$, имеет место равенство $(A^{(l)})^{(s)} = A^{(l+s)}$.

Мы закончим этот параграф полным описанием преобразований Ли.

Теорема 3.1. *Всякое преобразование Ли X многообразия джетов $J^k(\pi)$, $k \geqslant 1$, описывается следующим образом:*

1) *при $\dim \pi = 1$ преобразование X является $(k-1)$-кратным поднятием некоторого (произвольного) контактного преобразования пространства $J^1(\pi)$;*

2) *при $m = \dim \pi > 1$ преобразование X является k-кратным поднятием некоторого (произвольного) диффеоморфизма пространства зависимых и независимых переменных $J^0(\pi)$ (т. е. точечным преобразованием).*

Замечание 3.1. Из теоремы следует, что в случае $m = 1$ контактная геометрия порядка k содержательнее, так как среди контактных преобразований $J^1(\pi)$ имеются как поднятия произвольных диффеоморфизмов $J^0(\pi)$, так и преобразования, не имеющие такого вида. Примером контактного, но не точечного преобразования может служить преобразование Лежандра (3.5).

Доказательство. Доказательство этой теоремы основывается на установленном выше факте: среди всех максимальных интегральных многообразий распределения Картана на $J^k(\pi)$ наибольшую размерность имеют слои проекции $\pi_{k,k-1}$ (см. следствие 2.9). Случай $m = n = 1$ будет рассмотрен особо.

Предположим, что $mn > 1$. Пусть A: $J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ преобразование Ли, причем $k \geqslant 2$, если $m = 1$, и $k \geqslant 1$, если $m > 1$. Поскольку преобразование A сохраняет распределение Картана, оно переводит его максимальные интегральные многообразия в максимальные интегральные многообразия. При этом, так как A — диффеоморфизм, сохраняется размерность этих многообразий. Следовательно, A переводит слои проекции $\pi_{k,k-1}$ друг в друга.

Таким образом, A порождает некоторое преобразование A_1 многообразия $J^{k-1}(\pi)$: если $A(\pi^{-1}_{k,k-1}(\theta)) = \pi^{-1}_{k,k-1}(\eta)$, то $A_1(\theta) = \eta$.

Так как A_1 является проекцией преобразования Ли A, то A_1 само является преобразованием Ли. Рассмотрим преобразование A и поднятие $(A_1)^{(1)}$ преобразования A_1. Оба они являются симметриями распределения Картана $\mathcal{C}^k$, сохраняют слои проекции $\pi_{k,k-1}$: $J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi)$ и индуцируют одно и то же преобразование $J^{k-1}(\pi)$. Поэтому диффеоморфизм $A' = A^{(1)} \circ A^{-1}$ является преобразованием Ли, тождественным на $J^{k-1}(\pi)$.

Упражнение 3.5. Докажите, что преобразования Ли пространства $J^k(\pi)$, проекция которых индуцирует тождественное преобразование $J^{k-1}(\pi)$, являются тождественными.

Следовательно $A = A_1^{(1)}$. К преобразованию A_1 можно применить те же рассуждения, что и к исходному преобразованию A, и так продолжать до тех пор, пока мы не получим некоторое преобразование пространства $J^1(\pi)$ (в случае $m = 1$) или $J^0(\pi)$ (в случае $m > 1$). Для завершения доказательства теперь следует воспользоваться упражнением 3.4.

В случае $m = n = 1$, доказательство теоремы вытекает из следующих рассуждений. Рассмотрим канонические координаты $x, p_0, p_1, \ldots, p_k$ на $J^k(1,1)$. Распределение Картана $\mathcal{C}$ на $J^k(1,1)$ двумерно, оно порождено векторными полями $Z = \dfrac{\partial}{\partial p_k}$ и $D = \dfrac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{k-1} p_{i+1} \dfrac{\partial}{\partial p_i}$. Достаточно доказать, что всякое преобразование Ли A переводит поле Z в себя, т. е. является симметрией одномерного распределения V, порожденного полем Z; дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным ранее для общего случая.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{C}' = [\mathcal{C}, \mathcal{C}]$ — распределение на многообразии $J^k(1,1)$, $k \geqslant 2$, порожденное коммутаторами векторных полей, лежащих в некотором распределении Картана $\mathcal{C}$. Тогда, если через $D(\mathcal{P})$ обозначить совокупность всех векторных полей, лежащих в распределении $\mathcal{P}$, а через $\mathcal{P}_D$ —*

совокупность всех таких полей X, что $[X, D(\mathcal{P})] \subset D(\mathcal{P})$, то

$$D(V) = D(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C}'_D.$$

Доказательство леммы. Очевидно, что распределение $\mathcal{C}'$ трехмерно. Оно порождено полями Z, D и $[Z, D] = \dfrac{\partial}{\partial p_{k-1}} = Y$. Легко видеть, что $[Z, Y] = 0$, $[Y, D] = X = \dfrac{\partial}{\partial p_{k-2}}$. Пусть поле $S = \alpha Z + \beta D$ является симметрией распределения $\mathcal{C}'$. Тогда $[Y, S] \in D(\mathcal{C}')$, т. е. $[Y, S]$ представляется в виде линейной комбинации полей Z, D, Y. Но так как

$$[Y, S] = [Y, \alpha Z + \beta D] = Y(\alpha)Z + Y(\beta)D + \beta X$$

и поскольку поля X, D, Z линейно независимы в каждой точке многообразия J^k, отсюда следует, что $\beta = 0$. Таким образом $S \in D(V)$, что и доказывает лемму.

Пусть теперь $A\colon\ J^k(1,1) \to J^k(1,1)$. Тогда очевидно, что $A_* D(\mathcal{C}) = D(\mathcal{C})$, $A_* \mathcal{C}' = \mathcal{C}'$ и $A_* \mathcal{C}'_D = \mathcal{C}'_D$. Поэтому в силу доказанной леммы $A_* D(V) = D(V)$. Теорема доказана. □

3.2. Поля Ли.

Определение 3.2. Векторное поле X на многообразии $J^k(\pi)$ называется *полем Ли*, если сдвиги по его траекториям являются преобразованиями Ли.

Пусть X — поле Ли на $J^k(\pi)$ и $\{A_t\}$ — соответствующая этому полю (локальная) группа преобразований многообразия $J^k(\pi)$. По определению, A_t — преобразования Ли, и, следовательно, определены их поднятия $A_t^{(l)}$ на многообразие $J^{k+l}(\pi)$, также являющиеся контактными преобразованиями Ли. Поле $X^{(l)}$, соответствующее однопараметрической группе $\{A_t^{(l)}\}$ называется *поднятием* поля X. Как и в случае поднятий преобразований Ли, для любых натуральных чисел l и s имеет место равенство $(X^{(l)})^{(s)} = X^{(l+s)}$.

Теорема 3.3. *Всякое поле Ли на $J^k(\pi)$, $k \geqslant 1$, имеет вид*:

а) $X^{(k)}$ при $\dim \pi > 1$, где X — некоторое векторное поле на пространстве $J^0(\pi)$;

б) $X^{(k-1)}$ при $\dim \pi = 1$, где X — некоторое контактное векторное поле на пространстве $J^1(\pi)$.

Заметим, что в силу обсуждавшихся выше свойств преобразований Ли, всякое векторное поле на $J^0(\pi)$, как и всякое контактное поле на $J^1(\pi)$, могут быть продолжены до поля Ли на $J^k(\pi)$.

Переход на инфинитезимальную точку зрения имеет два преимущества. Первое заключается в том, что поднятие поля Ли, в отличие от поднятия конечного преобразования Ли, всегда определено на всем многообразии. Действительно, для того, чтобы вычислить вектор поля $X^{(1)}$ в некоторой точке $\theta \in J^{k+1}(\pi)$, нужно знать сколь угодно малый участок траектории, проходящей через эту точку при действии соответствующей однопараметрической группы контактных преобразований. Точке θ соответствует R-плоскость L_θ в $J^k(\pi)$, без вырождения проектирующаяся на базу M. Остается заметить, что при достаточно малых преобразованиях образ этой плоскости также будет проектироваться на базу без вырождения, т. е. задавать некоторую точку в $J^{k+1}(\pi)$.

Вторым преимуществом использования полей Ли вместо конечных преобразований является то, что существуют явные вычислительные формулы, выражающие компоненты векторного поля $X^{(k)}$ через компоненты поля X. При этом возникает возможность использования производящих функций (см. ниже).

Рассмотрим расслоение $\pi\colon E \to M$ и канонические координаты в окрестности точки $\theta \in J^k(\pi)$. Заметим, что поле X на $J^k(\pi)$ является полем Ли в том и только том случае, если для любой формы Картана $\omega_\sigma^j = dp_\sigma^j - \sum\limits_{i=1}^n p_{\sigma+1_i}^j\, dx_i$ на $J^k(\pi)$ локально выполнено равенство

$$X(\omega_\sigma^j) = \sum_{l=1}^n \sum_{|\tau| \leqslant k-1} \lambda_{\sigma,l}^{j,\tau} \omega_\tau^l.$$

Теорема 3.4. *Если*

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \sum_{0 \leqslant \sigma \leqslant k} b_\sigma^j \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}, \tag{3.8}$$

— поле Ли, то коэффициенты b_σ^j вычисляются по рекуррентным формулам

$$b_{\sigma+1_i}^j = D_i(b_\sigma^j) - \sum_{s=1}^n p_{\sigma+1_s}^j D_i(a_s), \tag{3.9}$$

где $0 \leqslant |\sigma| \leqslant k-1$, а

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_\sigma p_{\sigma+1_i}^j \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}$$

— оператор полной производной по x_i.

Доказательство. Пусть X — поле Ли вида (3.8). Тогда в силу инвариантности распределения Картана формы

$$X(\omega_\sigma^j) = db_\sigma^j - \sum_{i=1}^n (b_{\sigma+1_i}^j\, dx_i + p_{\sigma+1_i}^j\, da_i) \tag{3.10}$$

являются линейными комбинациями форм Картана.

Упражнение 3.6. Покажите, что любая 1-форма на $J^k(\pi)$ однозначно представима в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \, dx_i + \omega_C, \tag{3.11}$$

где φ_i — функция на $J^{k+1}(\pi)$, а ω_C — линейная комбинация форм Картана.

В частности, для любой гладкой функции φ на $J^k(\pi)$ имеет место равенство

$$d\varphi = \sum_i D_i(\varphi)\, dx_i + \sum_{j,\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma^j} \omega_\sigma^j. \tag{3.12}$$

Заметим, что форма ω, представленная в виде (3.11), обращается в нуль на распределении Картана тогда и только тогда, когда коэффициенты φ_i тривиальны. Применяя это утверждение к равенству (3.10), получаем

$$X(\omega_\sigma^j) = \sum_i (D_i(b_\sigma^j) - b_{\sigma+1_i}^j - \sum_s p_{\sigma+1_i}^j D_i(a_s))\, dx_i + \omega_C,$$

откуда следует (3.9). $\square$

Упражнение 3.7. Проверьте, что равенства (3.9) согласованы с представлением контактных полей на $J^1(M)$ в виде

$$X_f = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(f - \sum_i p_i \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial u}\right) + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Введем теперь понятие *производящего сечения* поля Ли. Для этого рассмотрим эволюцию графиков сечений расслоения π под действием соответствующих однопараметрических групп сдвигов по траекториям.

Пусть $X = a_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} + b^j \dfrac{\partial}{\partial u^j} + \ldots$ — поле Ли на $J^k(\pi)$ и $\{A_t\}$ — соответствующая ему однопараметрическая группа локальных преобразований многообразия $J^k(\pi)$. Рассмотрим некоторое сечение f расслоения π. График его k-джета $\Gamma_f^k \subset J^k(\pi)$ является n-мерным интегральным многообразием распределения Картана на $J^k(\pi)$, без вырождения проектирующимся на базу M. Как уже отмечалось, при достаточно малых t многообразие $A_t(\Gamma_f^k)$ также имеет вид графика k-джета некоторого сечения, которое мы обозначим f_t: $A_t(\Gamma_f^k) = \Gamma_{f_t}^k$.

Таким образом, преобразования семейства A_t порождают эволюцию $\boldsymbol{f}_t$ сечения $\boldsymbol{f}$. Найдем скорость $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \boldsymbol{f}_t$ этой эволюции в начальный момент времени. Чтобы вычислить эту производную, представим поле X в виде суммы двух полей, одно из которых вертикальное, а второе касается многообразия $\Gamma^k_{\boldsymbol{f}}$.

Если сечение $\boldsymbol{f}$ локально задается функциями $u^j = f^j(x_1, \ldots \ldots, x_n)$, $j = 1, \ldots, m$, то векторные поля, касающиеся многообразия $\Gamma^k_{\boldsymbol{f}}$, можно записать в следующем виде (заметим, что на поверхности $\Gamma^k_{\boldsymbol{f}}$ имеют место равенства $p^j_\sigma = \dfrac{\partial^{|\sigma|} f^j}{\partial x^\sigma}$, $|\sigma| \leqslant k$):

$$D_i^{(\boldsymbol{f})} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{|\sigma| < k} p^j_{\sigma + 1_i} \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma} + \sum_{|\sigma| = k} \frac{\partial^{|\sigma|+1} f^j}{\partial x^\sigma \partial x_i} \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma} \right).$$

Следовательно, поле, касающееся графика $\Gamma^k_{\boldsymbol{f}}$, имеет вид

$$X_2 = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i^{(\boldsymbol{f})},$$

а вертикальная компонента поля Ли X равна

$$X_1 = X - \sum_{i=1}^{n} a_i D_i^{(\boldsymbol{f})} = \sum_{i,j} (b^j - a_i p^j_i) \frac{\partial}{\partial u^j} + \ldots$$

Так как поле X_2 сдвигает многообразие $\Gamma^k_{\boldsymbol{f}}$ по себе, то оно не влияет на эволюцию. Что же касается поля X_1, то его коэффициенты при $\dfrac{\partial}{\partial u^j}$ в точности равны скоростям изменения компонент сечения $\boldsymbol{f}_t = (f_t^1, \ldots, f_t^m)$ под действием рассматриваемого потока:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t^j = \left.\left(b^j - \sum_{i=1}^{n} a_i p^j_i \right)\right|_{\Gamma^k_{\boldsymbol{f}}}. \tag{3.13}$$

Вектор-функцию $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$, где

$$\varphi^j = b^j - \sum_{i=1}^{n} a_i p^j_i \tag{3.14}$$

назовем *производящим сечением* (или, в случае $m = 1$, *производящей функцией*) поля Ли

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} b^j \frac{\partial}{\partial u^j} + \ldots \tag{3.15}$$

Упражнение 3.8. Покажите, что в случае тривиального расслоения π: $\mathbb{R}\times M \to M$ данное определение производящей функции совпадает с определением производящей функции контактного векторного поля, приведенным в гл. 2.

Из этого упражнения, а также из теоремы 3.3 вытекает следующее

Утверждение 3.5. *Поле Ли X на $J^k(\pi)$ однозначно определяется своим производящим сечением $\varphi=(\varphi^1,\ldots,\varphi^m)$. При этом компоненты производящего сечения вычисляются по формулам*

$$\varphi^j = X \rfloor \omega^j_{(0,\ldots,0)},$$

где $\omega^j_{(0,\ldots,0)} = du^j - \sum_{i=1}^{n} p_i^j\, dx_i$.

Заметим, что в случае $m>1$ производящее сечение $\varphi=(\varphi^1,\ldots$ $\ldots,\varphi^m)$ линейно зависит от переменных p_i^j, причем для любых i, j, l имеют место равенства

$$\frac{\partial\varphi^j}{\partial p_i^j}=\frac{\partial\varphi^l}{\partial p_i^l}, \qquad \frac{\partial\varphi^j}{\partial p_i^l}=0, \qquad l\neq j.$$

Рассмотрение произвольных производящих сечений приводит к теории высших симметрий, которая будет рассмотрена в гл. 4.

§ 4. Классические симметрии уравнений

4.1. Определяющие уравнения. Пусть $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$ — уравнение порядка k.

Определение 4.1. *Классической (конечной) симметрией уравнения* $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$ называется такое преобразование Ли A: $J^k(\pi)\to J^k(\pi)$, что $A(\mathcal{E})\subset\mathcal{E}$.

Определение 4.2. *Классической инфинитезимальной симметрией уравнения* $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$ называется поле Ли, касающееся $\mathcal{E}$.

Очевидно, что эти определения являются естественным обобщением основных конструкций, рассматриваемых в гл. 1 и 2.

Непосредственным следствием определений и рассуждений § 1–3 является*)

*) Далее в этой главе, говоря о симметриях мы будем всегда подразумевать классические симметрии.

Утверждение 4.1.

1. *Пусть A: $J^k(\pi) \to J^k(\pi)$ — симметрия уравнения $\mathcal{E} \subset \subset J^k(\pi)$ и f — решение этого уравнения, т. е. такое сечение расслоения π, что его график Γ_f^k содержится в $\mathcal{E}$. Тогда $A(\Gamma_f^k)$ — обобщенное решение уравнения $\mathcal{E}$. В частности, если многообразие $A(\Gamma_f^k)$ имеет вид $\Gamma_{f'}^k$, для некоторого сечения $f' = A^* f$, то f' — также решение уравнения $\mathcal{E}$.*

2. *Если X — инфинитезимальная симметрия уравнения $\mathcal{E}$ и f — его решение, то для любой точки $\theta \in \Gamma_f^k$ найдется такая окрестность $\mathcal{U} \ni \theta$ и такое $\varepsilon > 0$, что при любом $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ многообразие $A_t(\mathcal{U})$ локально имеет вид $\Gamma_{A_t^*(f)}^k$, т. е. X определяет поток на множестве решений уравнения $\mathcal{E}$.* $\square$

С практической точки зрения конечные симметрии, разумеется, предпочтительнее; однако искать их нелегко. Общих алгоритмов поиска таких симметрий в сущности нет, и, кроме очевидных соображений, найти их можно лишь случайно или используя «физические» соображения. Напротив, поиск инфинитезимальных симметрий происходит по вполне определенному алгоритму, приводящему, с технической точки зрения, к решению (как правило, сильно переопределенных) систем линейных дифференциальных уравнений. Это объясняется тем, что поля Ли можно эффективно описать при помощи производящих функций. Поэтому далее обычно мы будем употреблять термин «симметрия», имея в виду инфинитезимальную симметрию, а чаще всего — даже производящее сечение инфинитезимальной симметрии. Последнее отождествление не может вызвать недоразумений, поскольку соответствие между полями Ли и их производящими функциями взаимно однозначно.

Пусть φ и ψ — симметрии уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, т. е. поля Ли $X_\varphi^{(s)}$ и $X_\psi^{(s)}$ касаются многообразия $\mathcal{E}$ ($s = k$ при $m > 1$ и $s = k - 1$ при $m = 1$). Тогда, очевидно, коммутатор $[X_\varphi^{(s)}, X_\psi^{(s)}]$ также является симметрией уравнения $\mathcal{E}$ и, следовательно, имеет вид $X_\rho^{(s)}$ для некоторого производящего сечения ρ. Это сечение называется *скобкой Якоби* производящих сечений φ и ψ и обозначается через $\{\varphi, \psi\}$.

Очевидно, множество симметрий образует $\mathbb{R}$-алгебру Ли относительно скобки Якоби.

Если $x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m, \ldots, p_\sigma^j$ — канонические координаты на $J^k(\pi)$, то из определения коммутатора векторных полей и равенств (3.9) следует, что j-я компонента скобки Якоби имеет вид

$$\{\varphi,\psi\}^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{m}\left(\left(\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}+\sum_{\beta=1}^{m}p_i^\beta\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial u^\beta}\right)\frac{\partial\psi^j}{\partial p_i^\alpha}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial x_i}+\sum_{\beta=1}^{m}p_i^\beta\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial u^\beta}\right)\frac{\partial\varphi^j}{\partial p_i^\alpha}\right). \quad (4.1)$$

Выведем теперь локальные условия того, что поле Ли X является симметрией уравнений $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$. Для этого выберем в $J^k(\pi)$ канонические координаты и предположим, что подмногообразие $\mathcal{E}$ задается в этих координатах соотношениями

$$F^\alpha=0,\qquad \alpha=1,\ldots,r, \quad (4.2)$$

где F^α — гладкие функции на $J^k(\pi)$. Предположим, что система (4.2) локально имеет максимальный ранг. Тогда условие касания полем X многообразия $\mathcal{E}=\{F=0\}$, где $F=(F^1,\ldots,F^r)$, имеет вид

$$X(F^\alpha)=\sum_{\beta=1}^{r}\lambda_\beta^\alpha F^\alpha,\qquad \alpha=1,\ldots,r, \quad (4.3)$$

для некоторых гладких функций λ_β^α, или, что эквивалентно,

$$X(F^\alpha)|_{\mathcal{E}}=0,\qquad \alpha=1,\ldots,r. \quad (4.4)$$

Представляя поле X в виде $X_\varphi^{(s)}$, где $s=k$ или $s=k-1$ в зависимости от размерности расслоения π, и выражая коэффициенты поднятия поля X_φ через производящие функции с помощью равенств (3.9), из соотношений (4.2) или (4.3) мы получим систему уравнений на φ. Эти уравнения называются *определяющими уравнениями*.

Пример 4.1. Рассмотрим в $J^2(2,1)$ общее уравнение второго порядка от двух независимых и одной зависимой переменной:

$$F(x_1,x_2,u,p_1,p_2,p_{(2,0)},p_{(1,1)},p_{(0,2)})=0.$$

Пусть X_φ — контактное векторное поле в $J^1(2,1)$,

$$X_\varphi=-\sum_{i=1}^{n}\varphi_{p_i}\frac{\partial}{\partial x_i}+\left(\varphi-\sum_{i=1}^{n}p_i\varphi_{p_i}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{x_i}+p_i\varphi_u)\frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (4.5)$$

Тогда коэффициенты $b_{(i,j)}$ при $\dfrac{\partial}{\partial p_{(i,j)}}$, $i+j=2$, поднятия поля в $J^2(2,1)$ имеют следующий вид:

$$b_{(2,0)} = p_{(2,0)}\varphi_u + \varphi_{x_1x_1} + 2p_1\varphi_{x_1u} + 2p_{(2,0)}\varphi_{x_1p_1} + 2p_{(1,1)}\varphi_{x_1p_2} + p_1^2\varphi_{uu} +$$
$$+2p_1p_{(2,0)}\varphi_{up_1} + 2p_1p_{(1,1)}\varphi_{up_2} + p_{(2,0)}^2\varphi_{p_1p_1} + 2p_{(2,0)}p_{(1,1)}\varphi_{p_1p_2} + p_{(1,1)}^2\varphi_{p_2p_2},$$
$$b_{(1,1)} = p_{(1,1)}\varphi_u + \varphi_{x_1x_2} + p_2\varphi_{x_1u} + p_1\varphi_{x_2u} + p_{(1,1)}\varphi_{x_1p_1} + p_{(0,2)}\varphi_{x_1p_2} + p_{(2,0)}\varphi_{x_2p_1} +$$
$$+p_{(1,1)}\varphi_{x_2p_2} + p_1p_2\varphi_{uu} + (p_1p_{(1,1)} + p_2p_{(2,0)})\varphi_{up_1} + (p_1p_{(0,2)} + p_2p_{(1,1)})\varphi_{up_2} +$$
$$+p_{(2,0)}p_{(1,1)}\varphi_{p_1p_1} + (p_{(2,0)}p_{(0,2)} + p_{(1,1)}^2)\varphi_{p_1p_2} + p_{(1,1)}p_{(0,2)}\varphi_{p_2p_2},$$
$$b_{(0,2)} = p_{(0,2)}\varphi_u + \varphi_{x_2x_2} + 2p_2\varphi_{x_2u} + 2p_{(1,1)}\varphi_{x_2p_1} + 2p_{(0,2)}\varphi_{x_2p_2} + p_2^2\varphi_{uu} +$$
$$+2p_2p_{(1,1)}\varphi_{up_1} + 2p_2p_{(0,2)}\varphi_{up_2} + +p_{(1,1)}^2\varphi_{p_1p_1} + 2p_{(1,1)}p_{(0,2)}\varphi_{p_1p_2} + p_{(0,2)}^2\varphi_{p_2p_2}.$$

Тогда $X_\varphi^{(1)}F = \lambda F$, где коэффициенты поля $X_\varphi^{(1)}$, вычисленные по приведенным выше формулам, являются определяющими в рассматриваемой ситуации.

Упражнение 4.1. Выведите аналогичные формулы для системы двух уравнений второго порядка от двух зависимых переменных.

4.2. Инвариантные решения и размножение решений. Пусть X — инфинитезимальная симметрия уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, f_0 — его решение, $\Gamma_{f_0}^k = j_k(f_0)(M) \subset \mathcal{E}$. Пусть, далее, $\{A_t\}$ — однопараметрическая подгруппа диффеоморфизмов векторного поля X. Тогда подмногообразие $A_t(\Gamma_{f_0}^k) \subset J^k(\pi)$ является интегральным для распределения Картана; если же $A_t(\Gamma_{f_0}^k)$, как и $\Gamma_{f_0}^k$, горизонтально относительно проекции на базу M, то $A_t(\Gamma_{f_0}^k) = \Gamma_{f_t}^k$ для некоторого сечения f_t. Кроме того, в силу определения симметрии, $A_t(\Gamma_{f_0}^k) \subset \mathcal{E}$. Таким образом, по крайней мере локально, f_t является однопараметрическим семейством решений уравнения $\mathcal{E}$: $j_k(f_t)(M) = \Gamma_{f_t}^k \subset \mathcal{E}$. Переход от исходного решения f к семейству f_t называется *размножением* решения f при помощи симметрии X.

Если φ — производящая функция поля $X = X_\varphi$, то поиск f_t сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \varphi|_{\Gamma_f^k}(x,t), \qquad f(x,0) = f_0(x), \tag{4.6}$$

или, покомпонентно,

$$\frac{\partial f^j}{\partial t}(x,t) = \varphi^j|_{\Gamma_f^k}(x,t), \quad f^j(x,0) = f_0^j(x), \qquad j = 1,\dots,m,$$

что следует из (3.13).

Если $\varphi|_{\Gamma^k_f}(x,t)=0$, то $f(x,t)=f(x,0)$ для всех допустимых значений t, т. е. f_0 является неподвижной точкой для однопараметрической группы преобразований $\{A_t\}$ при ее действии на сечениях. Иными словами, многообразие $\Gamma^k_{f_0}$ инвариантно относительно поля X_φ.

Определение 4.3. Если $\Gamma^k_{f_0}$ инвариантно относительно поля X_φ, то f_0 называется *φ-инвариантным решением* уравнения $\mathcal{E}$.

Введенные понятия имеют следующее естественное обобщение. Пусть G — группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ которой реализована как подалгебра в алгебре инфинитезимальных симметрий (или, что то же самое, в алгебре производящих функций симметрий) уравнения $\mathcal{E}$. Тогда, начиная с любого решения f_0, мы получим $(\dim\mathfrak{g})$-параметрическое семейство решений $\{f_g\,|\,g(\Gamma^k_{f_0})=\Gamma^k_{f_g},\ g\in G\}$ уравнения $\mathcal{E}$ (при условии горизонтальности многообразий $g(\Gamma^k_{f_0})$ относительно проекции на базу M).

Определение 4.4. Если $f_g=f_0$ для всех $g\in G$, то f_0 называется *G-инвариантным решением* уравнения $\mathcal{E}$ (или $\mathfrak{g}$-инвариантным, если мы рассматриваем соответствующую алгебру Ли).

Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_s$ — производящие сечения, являющиеся образующими алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда отыскание $\mathfrak{g}$-инвариантных решений сводится к решению переопределенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} F_1(\theta)=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ F_r(\theta)=0,\\ \varphi_1(\theta)=0,\\ \quad\cdots\cdots\\ \varphi_s(\theta)=0,\end{cases}\tag{4.7}$$

где $\theta\in J^k(\pi)$, $F_1,\ldots,F_r$ — функции, задающие уравнение $\mathcal{E}$. В частности, X_φ-инвариантные решения находятся из системы (4.7) с единственным добавочным по отношению к $\mathcal{E}$ уравнением $\varphi_1=0$.

Отметим одно важное обстоятельство. Наличие у уравнения одной классической симметрии X позволяет на единицу понизить количество независимых переменных при поиске инвариантных для этой симметрии решений. Действительно, рассмотрим для простоты случай $\dim\pi=1$. Тогда уравнения $\varphi_1=0,\ldots,\varphi_s=0$ можно рассматривать как систему уравнений относительно неизвестных

$p_1, \ldots, p_n$. Естественно рассматривать случай, когда эта система имеет максимальный ранг. Тогда без ограничения общности можно считать, что она имеет вид

$$\begin{cases} p_{n-s+1} = \widetilde{\varphi}_1(x, u, p_1, \ldots, p_{n-s}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \widetilde{\varphi}_s(x, u, p_1, \ldots, p_{n-s}). \end{cases}$$

Подставляя эти равенства в исходное уравнение, мы получим уравнение, не содержащее производных по первым $n - s$ переменным. Очевидно, что в случае нескольких зависимых переменных редукция числа независимых переменных осуществляется так же.

Наличие двух симметрий позволяет снизить число независимых переменных на два и т. д. В частности, при $\dim \mathfrak{g} = n-1$, где $n-1$ — число независимых переменных, поиск инвариантных решений сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, а при $\dim \mathfrak{g} = n$ получаемые уравнения будут «алгебраическими», т. е. не содержащими производных. Ниже будут приведены соответствующие примеры.

Мы закончим этот раздел несколькими замечаниями.

1. Вообще говоря, даже при малых t нельзя ожидать, что многообразия $A_t(\Gamma^k_{f_0})$ будут горизонтальны. Поэтому при размножении регулярного решения мы, вообще говоря, будем получать интегральные многообразия распределения Картана размерности $\dim M$ общего вида, т. е. «обобщенные решения» или «решения с особенностями». В некоторых точках касательная плоскость к таким решениям при проектировании на базу вырождается (что соответствует обращению в бесконечность некоторых производных $\boldsymbol{f}_t(x)$), поэтому однозначность решения может нарушаться. Подобные обобщенные решения вполне обычны при анализе распространения разрывов, ударных волн, в теории катастроф и т. д. Физический смысл таких решений обусловливается содержательным контекстом задачи.

2. Для многих нелинейных уравнений бывает удобно сначала найти инвариантное решение для какой-нибудь симметрии, а затем размножать его при помощи других симметрий. Нередко это единственная возможность получать явные формулы.

3. Понятие инвариантного решения включает в себя как частный случай понятие *автомодельного* решения: автомодельными называются решения, инвариантные относительно так называемых *масштабных* симметрий, т. е. симметрий вида

$$X = \sum_{i,j} \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta_j u^j \frac{\partial}{\partial u^j}.$$

§ 5. Примеры вычисления симметрий

Многие примеры вычисления симметрий, построения инвариантных решений и другие вопросы можно найти в [55, 140, 141, 91, 92, 86].

5.1. Уравнение Бюргерса. Уравнение Бюргерса имеет вид

$$u_t = uu_x + u_{xx} \tag{5.1}$$

Это уравнение описывает движение слабо нелинейных волн в газах, в ситуации когда достаточно учитывать эффекты диссипации только в первом приближении. При стремящейся к нулю диссипации это уравнение дает адекватную интерпретацию решения для невязкой среды. Первоначально предложенное Бюргерсом для описания одномерной турбулентности, впоследствии оно использовалось для изучения волновых явлений. Уравнение Бюргерса линеаризуется (приводится к уравнению теплопроводности) подстановкой $u = y_x/y$. Это указывает на наличие большого запаса симметрий.

Переписывая уравнение (5.1) в канонических координатах на $J^2(2,1)$:

$$x_1 = x,\ x_2 = t,\ p_0 = u,\ p_1 = u_x,\ p_2 = u_t,\ p_{(2,0)} = u_{xx},$$

имеем

$$p_2 = p_0 p_1 + p_{(2,0)}.$$

Тогда определяющие уравнения, полученные в примере 4.1, принимают вид

$$\begin{aligned}(\varphi - p_1\varphi_{p_1} - p_2\varphi_{p_2})p_1 + p_0(\varphi_{x_1} + p_1\varphi_{p_0}) + p_{(2,0)}\varphi_{p_0} + \varphi_{x_1x_1} +\\ + 2p_1\varphi_{x_1p_0} + 2p_{(2,0)}\varphi_{x_1p_1} + 2p_{(1,1)}\varphi_{x_1p_2} + p_1^2\varphi_{p_0p_0} + 2p_1p_{(2,0)}\varphi_{p_0p_1} +\\ + 2p_1p_{(1,1)}\varphi_{p_0p_2} + p_{(2,0)}^2\varphi_{p_1p_1} + 2p_{(2,0)}p_{(1,1)}\varphi_{p_1p_2} + p_{(1,1)}^2\varphi_{p_2p_2} -\\ - \varphi_{x_2} - p_2\varphi_{p_0} = \lambda(p_0p_1 + p_{(2,0)} - p_2),\end{aligned} \tag{5.2}$$

где λ — гладкая функция на $J^2(2,1)$. Анализ этого уравнения показывает, что функция φ должна иметь вид

$$\varphi = A(x_1, x_2, p_0)p_1 + B(x_1, x_2, p_0)p_2 + C(x_1, x_2, p_0).$$

Отсюда, с учетом (5.2) получаем, что функции A, B, C удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned}p_1p_2A_{p_0} + p_1A_{x_2} + B_{x_2}p_2 + C_{x_2} + C_{p_0}p_2 - p_0p_1(A_{x_1} + p_1A_{p_0}) -\\ - p_0(C_{x_1} + p_1C_{p_0}) - p_1C - 2D_x(A)p_{(2,0)} - D_x(A_{x_1} + A_{p_0})p_1 -\\ - D_x(C_{x_1} + C_{p_0}) = 0,\end{aligned} \tag{5.3}$$

где D_x — оператор полной производной по переменной $x=x_1$.

Последнее уравнение полиномиально по p_1 и $p_{(2,0)}$. Поэтому коэффициент при $p_{(2,0)}$, равный $-4A_{p_0}p_1+B_{x_2}-2A_{x_1}$, должен обратиться в нуль. В свою очередь этот коэффициент полиномиален по p_1, и коэффициенты этого полинома также тривиальны *).

Итак, $A_{p_0}=0$ и $B_{x_2}-2A_{x_1}=0$. Подставив эти равенства в (5.3), получим

$$p_1A_{x_2}+p_0p_1A_{x_1}+C_{x_2}-p_0C_{x_1}-p_1C-p_1A_{x_1x_1}- \\ -C_{x_1x_1}-2p_1C_{x_1p_0}-p_1^2C_{p_0p_0}=0 \quad (5.4)$$

Последнее равенство квадратично по p_1, откуда следует, что

$$\begin{gathered} C_{p_0p_0}=0; \\ A_{x_2}+p_0A_{x_1}-C-A_{x_1x_1}-2C_{x_1p_0}=0; \\ C_{x_2}-p_0C_{x_1}-C_{x_1x_1}=0. \end{gathered} \quad (5.5)$$

Дифференцируя второе уравнение (5.5) по p_0, получим **)

$$A_{x_1}=C_{p_0}. \quad (5.6)$$

Из первого уравнения системы (5.5) следует, что C линейно по p_0:

$$C=r(x_1,x_2)p_0+s(x_1,x_2).$$

Подставляя это выражение в последнее уравнение системы (5.5), получим квадратичное по p_0 равенство

$$r_{x_2}p_0+s_{x_2}-p_0^2r_{x_1}-p_0s_{x_1}-p_0r_{x_1x_1}-s_{x_1x_1}=0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях p_0, получим соотношения

$$r_{x_1}=0, \quad r_{x_2}-s_{x_1}=0, \quad s_{x_2}-s_{x_1x_1}=0. \quad (5.7)$$

Первое из них означает, что $C_{p_0x_1}=0$. Учитывая (5.6), получаем, что

$$A_{x_1x_1}=0.$$

*) Такое рекурсивное рассуждение с понижением рассматриваемых порядков старших производных весьма характерно для первого этапа решения определяющего уравнения.

**) Вообще говоря, на втором этапе нахождения симметрий типичным является извлечение дифференциальных следствий и использование условий совместности системы уравнений на коэффициенты симметрии, полученной за счет полиномиальности определяющих уравнений по старшим производным.

Дифференцируя второе уравнение (5.7) по переменной x_1 и учитывая первое уравнение, получаем $s_{x_1x_1}=0$, т. е.

$$s=w(x_2)x_1+v(x_2).$$

С учетом третьего уравнения (5.7), имеем соотношение $s_{x_2}=0$, т. е.

$$s=wx_1+v,\ w,v\in\mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Если продифференцировать второе уравнение (5.7) по x_2 при условии (5.8), получим $r_{x_2x_2}=0$, и, значит,

$$r=mx_2+n, \qquad m,n\in\mathbb{R},$$

(напомним, что r не зависит от x_1 в силу первого из уравнений (5.7)). Поэтому из второго уравнения (5.7) получаем $m=w$.

В результате получаем соотношения $(w,v,n,k,l\in\mathbb{R})$

$$\begin{gathered}A=(wx_2+v)x_1+nx_2+k,\\ B=wx_2^2+2wx_2+l,\\ C=(wx_2+v)p_0+vx_1+n.\end{gathered}$$

Отсюда следует, что базис (над $\mathbb{R}$) пространства симметрий уравнения Бюргерса образуют функции

$$\begin{gathered}x_1x_2p_1+x_2^2p_2+x_2p_0+x_1, \quad x_1p_1+2x_2p_2+p_0,\\ x_2p_1+1, \quad p_1, \quad p_2.\end{gathered} \tag{5.9}$$

Если вернуться к «физическим обозначениям», эти функции можно представить в виде

$$\begin{gathered}xtu_x+t^2u_t+tu+x, \quad xu_x+2tu_t+u,\\ tu_x+1, \quad u_x, \quad u_t.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Выпишем наконец поля Ли на $J^0(2,1)$, соответствующие перечисленным производящим функциям φ:

$$\begin{aligned}&(tu+x)\frac{\partial}{\partial u}-tx\frac{\partial}{\partial x}-t^2\frac{\partial}{\partial t},\\ &u\frac{\partial}{\partial u}-x\frac{\partial}{\partial x}-2t\frac{\partial}{\partial t} && \text{(масштабная симметрия)},\\ &\frac{\partial}{\partial u}-t\frac{\partial}{\partial x}, && \text{(галилеевская симметрия)}, \qquad (5.11)\\ &\frac{\partial}{\partial x} && \text{(трансляция вдоль оси } x\text{)},\\ &\frac{\partial}{\partial t} && \text{(трансляция вдоль оси } t\text{)}.\end{aligned}$$

5.2. Уравнение Кортевега — де Фриза. Другим известным уравнением, широко применяемым при изучении нелинейных процессов, является уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Слагаемые uu_x и u_{xxx} отвечают, соответственно, диссипативным и дисперсионным явлениям при описании нелинейных волновых процессов. Оно было предложено Кортевегом и де Фризом в 1895 г. для моделирования волн малой, но конечной амплитуды для больших отрезков времени. Другие приложения этого весьма популярного уравнения включают описание вращающегося потока жидкости в трубе, теорию ионно-звуковых или магнитогидродинамических волн в низкотемпературной плазме, продольных волн в упругих стержнях и др.

С точки зрения математики интерес к уравнению Кортевега — де Фриза вызван особыми свойствами как самого уравнения, так и его решений. В частности, оно обладает решениями в виде уединенных волн (солитонов), обладает бесконечным набором коммутирующих законов сохранения и бесконечномерной алгеброй (высших) симметрий (см. гл. 4).

Опуская выкладки, которые отличаются от проделанных для уравнения Бюргерса лишь деталями, мы сразу приведем ответ. Базис (над $\mathbb{R}$) алгебры симметрий образуют следующие производящие функции

$$xu_x + 3tu_t + 2u, \quad 6tu_x + 1, \quad u_x, \quad u_t, \tag{5.12}$$

которым соответствуют поля Ли

$$\begin{aligned}
&2u\frac{\partial}{\partial u} - x\frac{\partial}{\partial x} - 3t\frac{\partial}{\partial t} && \text{(масштабная симметрия)},\\
&\frac{\partial}{\partial u} - 6t\frac{\partial}{\partial x} && \text{(галилеевская симметрия)},\\
&\frac{\partial}{\partial x} && \text{(трансляция вдоль оси } x\text{)},\\
&\frac{\partial}{\partial t} && \text{(трансляция вдоль оси } t\text{)}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.3. Уравнение Хохлова — Заболотской. Процесс распространения ограниченного трехмерного звукового пучка в нелинейной среде описывается уравнением, безразмерная форма которого имеет вид

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} = 0, \tag{5.14}$$

$$q_1, q_2 > 0, \qquad -\infty < q_3, q_4 < +\infty.$$

В этом уравнении величина u пропорциональна отклонению плотности среды от равновесной плотности, а безразмерные переменные q_1, q_2, q_3, q_4 выражаются через время t и пространственные координаты x, y, z следующим образом:

$$q_1 = \frac{t - x/c_0}{\sqrt{\gamma+1}}\sqrt{\rho_0 c_0}, \quad q_2 = \mu x, \quad q_3 = \sqrt{\frac{2\mu}{c_0}}y, \quad q_4 = \sqrt{\frac{2\mu}{c_0}}z,$$

где c_0 — скорость звука в среде, γ — показатель адиабаты, x — координата в направлении распространения пучка, μ — малый параметр, ρ_0 — равновесная плотность среды. В координатах q_i, p_σ уравнение (5.14) принимает вид

$$-p_{(1,1,0,0)} + up_{(2,0,0,0)} + p_1^2 + p_{(0,0,2,0)} + p_{(0,0,0,2)} = 0. \tag{5.15}$$

Это уравнение и называется уравнением Хохлова — Заболотской.

Теорема 5.1. *Алгебра всех классических симметрий уравнения Хохлова — Заболотской* (5.15) *порождена следующими симметриями* *):

$$\begin{cases} f(A) = A'q_3p_1 + 2Ap_3 + A''q_3, \\ g(B) = B'q_4p_1 + 2Bp_4 + B''q_4, \\ h(C) = Cp_1 + C', \\ \quad T_2 = p_2, \\ \quad L = q_1p_1 + q_2p_2 + q_3p_3 + q_4p_4, \\ \quad M = 2q_1p_1 + 4q_2p_2 + 3q_3p_3 + 3q_4p_4 + 2u, \\ \quad M_{34} = q_4p_3 - q_3p_4, \end{cases} \tag{5.16}$$

где A, B, C *— произвольные гладкие функции от* q_2.

5.3.1. «Физически осмысленные» симметрии. Выделим из алгебры всех классических симметрий уравнения (5.15) «физически осмысленные» симметрии, т. е. сохраняющие условие убывания решения на бесконечности.

Рассмотрим симметрию $f(A)$. Тогда

$$X_{f(A)} = A'q_3\frac{\partial}{\partial q_1} - 2A\frac{\partial}{\partial q_3} + A''q_3\frac{\partial}{\partial u}.$$

*) Отметим, что вычисления, доказывающие эту теорему, крайне трудоемки. Поэтому при вычислении симметрий полезно пользоваться программами символьных вычислений. Детальный анализ этих и последующих выкладок см. в [137, 43, 122]

Легко видеть, что поток этого поля задается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= AA'\tau^2 + A'q_3^0\tau + q_1^0, \\ q_2 &= q_2^0, \\ q_3 &= 2A\tau + q_3^0, \\ q_4 &= q_4^0, \\ u &= -AA''\tau^2 - A''q_3^0\tau + u^0, \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

где $u^0, q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0$ — начальные данные.

Рассмотрим произвольное решение $u^0 = u^0(q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0)$ уравнения (5.15), убывающее на бесконечности, т. е. удовлетворяющее условию $u^0 \to 0$ при $\|(q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0)\| \to \infty$. Тогда поток (5.17) переведет его в решение

$$\begin{aligned} u = -AA''\tau^2 - A''q_3^0\tau + u^0(q_1^0, q_2^0, q_3^0, q_4^0) = \\ = u(AA'\tau^2 + A'q_3^0\tau + q_1^0,\ q_2^0,\ 2A\tau + q_3^0,\ q_4^0). \end{aligned}$$

Пусть $\|AA'\tau^2+A'q_3^0\tau+q_1^0,\ q_2^0,\ 2A\tau+q_3^0,\ q_4^0\| \to \infty$ при фиксированном значении параметра τ. При $A'' \neq 0$ условие убывания u на бесконечности не будет выполняться, так как в этом случае при $q_3^0 \to \infty$ получим $u \to \infty$. Следовательно, $A'' = 0$. Очевидно, это условие является также достаточным для убывания решения на бесконечности.

Из условия $A'' = 0$ следует, что $A = C_1 q_2 + C_2$, где C_1, C_2 — константы. Таким образом, из бесконечного множества симметрий вида $f(A)$ физически осмысленными являются только две:

$$T_3 = p_3, \qquad R_3 = q_3 p_1 + 2q_2 p_3,$$

Точно так же симметрии вида $g(B)$ дают две физически осмысленные симметрии:

$$T_4 = p_4 \qquad R_4 = q_4 p_1 + 2q_2 p_4,$$

а симметрии вида $h(C)$ дают одну физически осмысленную симметрию

$$T_1 = p_1.$$

Легко проверить, что симметрии T_1, T_2, M, M_{34} сохраняют условие убывания решения на бесконечности, а симметрия L — нет.

Однако нетрудно проверить, что следующие линейные комбинации L и M физически осмысленны:

$$M_1 = 2(M + 2L) = 2q_1p_1 + q_3p_3 + q_4p_4 - 2u,$$
$$M_2 = (M - L) = 2q_2p_2 + q_3p_3 + q_4p_4 + 2u.$$

Таким образом, подалгебра физически осмысленных симметрий порождена следующими производящими функциями:

$$\begin{array}{ll} T_i = p_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 & \text{(трансляции);} \\ M_{34} = q_4p_3 - q - 3p_4 & \text{(вращения);} \\ M_1 = 2q_1p_1 + q_3p_3 + q_4p_4 - 2u, & \text{(масштабные} \\ M_2 = 2q_2p_2 + q_3p_3 + q_4p_4 + 2u; & \text{симметрии);} \\ R_3 = q_3p_1 + 2q_2p_3; & \\ R_4 = q_4p_1 + 2q_2p_4. & \end{array}$$

Трансляции $T_i = p_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, отвечают за однородность четырехмерного пространства-времени, вращение M_{34} соответствует изотропности пространства в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка, M_1, M_2 соответствуют инвариантности уравнения Хохлова — Заболотской относительно преобразований подобия

$$A_\tau^{(1)}\colon\ u(q) \mapsto e^{-2\tau} u(e^{2\tau} q_1,\ q_2,\ e^\tau q_3,\ e^\tau q_4),$$
$$A_\tau^{(2)}\colon\ u(q) \mapsto e^{2\tau} u(q_1,\ e^{2\tau} q_2,\ e^\tau q_3,\ e^\tau q_4).$$

Наконец, R_3 и R_4 соответствуют инвариантности уравнений относительно преобразований

$$A_\tau^{(3)}\colon\ u(q) \mapsto u(q_1 + \tau q_3 + \tau^2 q_2,\ q_2,\ q_3 + 2\tau q_2,\ q_4),$$
$$A_\tau^{(4)}\colon\ u(q) \mapsto u(q_1 + \tau q_4 + \tau^2 q_2,\ q_2,\ q_3,\ q_4 + 2\tau q_2).$$

5.3.2. Инвариантные решения. Найдем решения, инвариантные относительно некоторых подалгебр алгебры всех классических симметрий уравнения Хохлова — Заболотской (5.15).

Рассмотрим подалгебру симметрий $\mathcal{G}$, порожденную M_1, M_2, R_3, R_4. Структура алгебры Ли в $\mathcal{G}$ относительно скобки Якоби в базисе $e_1 = (M_1 + M_2)/2$, $e_2 = (-M_2 + M_1)/2$, $e_3 = R_3$, $e_4 = R_4$ задается соотношениями

$$[e_2, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_4] = e_4, \quad [e_3, e_4] = 0,$$
$$[e_1, e_i] = 0, \qquad i = 2, 3, 4.$$

Таким образом, $\mathcal{G}$ — разрешимая алгебра с коммутантом

$$\mathcal{G}^2 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4.$$

Рассмотрим произвольную трехмерную подалгебру $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, содержащую $\mathcal{G}^2$. Каждая такая подалгебра порождена элементами $e_3, e_4, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

Опишем $\mathcal{H}$-инвариантные решения уравнения (5.15). Если $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, то $\mathcal{H}$-инвариантные решения $u(q)$ имеют вид

$$u(q) = x^\lambda v(x^{-2-\lambda} y),$$

где $x = q_2$, $y = 4q_1 q_2 - q_3^2 - q_4^2$, $\lambda = -\dfrac{2\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Подставляя это выражение в уравнение Хохлова — Заболотской, получаем уравнение на $v(t)$:

$$vv'' + (v')^2 + \alpha t v' = 0, \tag{5.18}$$

где $t = x^{-2-\lambda} y$, $\alpha = -\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{4(\lambda_1 + \lambda_2)}$.

Замечая, что левая часть уравнения (5.18) имеет вид $(vv' + \alpha t v' - \alpha v)'$, приходим к уравнению

$$vv' + \alpha t v' - \alpha v = \mathrm{const}.$$

В случае $\mathrm{const} = 0$ это уравнение имеет решение

$$v \ln v + av = \alpha t,$$

где a — некоторая постоянная.

5.4. Уравнения Кадомцева — Погуце. Это уравнение является упрощением общей системы уравнений магнитогидродинамики (МГД), в котором опущены некоторые детали, несущественные с точки зрения задачи удержания высокотемпературной плазмы в установках типа «Токамак». Авторы статьи [34] исходили из идеальных МГД-уравнений, поскольку характеристические времена наиболее интересных в этом контексте физических процессов значительно меньше характерного времени диссипации, вызванной вязкостью и электрическим сопротивлением плазмы. Кроме того, было учтено, что для устойчивости плазмы необходимо, во-первых, чтобы давление плазмы и поперечная компонента давления магнитного поля были много меньше давления, создаваемого продольной компонентой магнитного поля; во-вторых, желательно, чтобы меньший радиус токамака был бы много меньше внешнего радиуса.

В результате была получена система двух скалярных уравнений, которые при подходящей нормировке имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + [\nabla_\perp\varphi, \nabla_\perp\psi]_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp\varphi + [\nabla_\perp\varphi, \nabla_\perp\Delta_\perp\varphi]_z = \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp\psi + [\nabla_\perp\psi, \nabla_\perp\Delta_\perp\psi]_z, \end{cases} \tag{5.19}$$

где $\nabla_\perp = \left\{\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right\}$, $\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ а $[u, v]_z = u_x v_y - u_y v_x$ есть z-компонента векторного произведения $[u, v]$ векторов u и v.

Здесь функции φ и ψ суть потенциалы скорости и поперечной компоненты магнитного поля соответственно (их можно также понимать как потенциал электрического поля и z-компоненту векторного потенциала магнитного поля). Система координат выбрана так, что ось z направлена вдоль оси токамака.

Мы будем называть (5.19) уравнениями Кадомцева — Погуце. В литературе также встречается название «редуцированные МГД-уравнения».

Относительная простота уравнений Кадомцева — Погуце дала возможность построить на их основе теорию кинк-нестабильности, получившую экспериментальное подтверждение; эти уравнения также использовались при численном анализе нестабильности [156].

5.4.1. Вычисление симметрий. Мы отступим здесь от общих обозначений координат в пространствах джетов в пользу индивидуальных, что сделает формулы более доступными для чтения. Для координат в базе мы оставим обозначения независимых координат x, y, z, t, а для обозначения координат в слое $J^0(4, 2)$ будем использовать обозначения φ и ψ. Вместо символов p_σ^1, p_σ^2 будем писать $\varphi_{x^i y^j z^k t^l}$ и $\psi_{x^i y^j z^k t^l}$ соответственно, где $\sigma = (i, j, k, l)$, $|\sigma| = i + j + k + l$. В этих обозначениях уравнения (5.19) приобретают форму

$$F_1 = \psi_t + \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x - \varphi_z = 0, \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} F_2 = \varphi_{x^2t} + \varphi_{y^2t} + \varphi_x\varphi_{x^2y} + \varphi_x\varphi_{y^3} - \varphi_y\varphi_{x^3} - \varphi_y\varphi_{xy^2} - \\ - \psi x^2 z - \psi_{y^2z} - \psi_x\psi_{xy^2} - \psi_x\psi_{y^3} + \psi_y\psi_{x^3} + \psi_y\psi_{xy^2} = 0. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Система уравнений Кадомцева — Погуце содержит две зависимые переменные φ и ψ, поэтому производящая функция для нее является двухкомпонентной:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= S + A\varphi_x + B\varphi_y + C\varphi_z + E\varphi_t, \\ \mathcal{T} &= T + A\psi_x + B\psi_y + C\psi_z + E\psi_t. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Здесь A, B, C, E, S, T — функции на $J^0(4,2)$, т. е. функции координат x, y, z, t.

Теорема 5.2 [59]. *Алгебра классических симметрий системы уравнений Кадомцева — Погуце порождена как линейное пространство над* $\mathbb{R}$ *симметриями с производящими функциями вида*

$$\mathcal{A}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha'(\varphi+\psi) + \alpha(\varphi_z + \varphi_t) \\ \alpha'(\varphi+\psi) + \alpha(\psi_z + \psi_t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_\beta = \begin{pmatrix} \beta'(\varphi-\psi) + \beta(\varphi_z - \varphi_t) \\ -\beta'(\varphi-\psi) + \beta(\psi_z - \psi_t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C}_\gamma = \begin{pmatrix} \gamma'(x^2+y^2) + 2\gamma(y\varphi_x - x\varphi_y) \\ \gamma'(x^2+y^2) + 2\gamma(y\psi_x - x\psi_y) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_\delta = \begin{pmatrix} -\delta'(x^2+y^2) + 2\delta(y\varphi_x - x\varphi_y) \\ \delta'(x^2+y^2) + 2\delta(y\psi_x - x\psi_y) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G}_G = \begin{pmatrix} yG_t + G\varphi_x \\ yG_z + G\psi_x \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_H = \begin{pmatrix} -xH_t + H\varphi_y \\ -xH_z + H\psi_y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_K = \begin{pmatrix} K_t \\ K_z \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \varphi + z\varphi_z + t\varphi_t \\ \psi + z\psi_z + t\psi_t \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} x\varphi_x + y\varphi_y + 2z\varphi_z + 2t\varphi_t \\ x\psi_x + y\psi_y + 2z\psi_z + 2t\psi_t \end{pmatrix}.$$

Здесь $\alpha = \alpha(z+t)$, $\beta = \beta(z-t)$, $\gamma = \gamma(z+t)$, $\delta = \delta(z-t)$, $G = G(z,t)$, $H = H(z,t)$, $K = K(z,t)$ *— произвольные функции и*

$$\alpha'(\zeta) = \frac{d\alpha(\zeta)}{d\zeta}, \quad \beta'(\eta) = \frac{d\beta(\eta)}{d\eta}, \quad \gamma'(\xi) = \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}, \quad \delta'(\theta) = \frac{d\delta(\theta)}{d\theta}.$$

Векторные поля на $J^0(4,2)$, соответствующие перечисленным выше производящим функциям, имеют вид:

$$X_{\mathcal{A}_\alpha} = \alpha'(\varphi+\psi)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\psi}\right) - \alpha\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$X_{\mathcal{B}_\beta} = \beta'(\varphi-\psi)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\psi}\right) - \beta\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\right),$$

$$X_{\mathcal{C}_\gamma} = \gamma'(x^2+y^2)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\psi}\right) - 2\gamma\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$X_{\mathcal{D}_\delta} = \delta'(x^2+y^2)\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\psi}\right) - 2\delta\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$X_{\mathcal{G}_G} = yG_t \frac{\partial}{\partial \varphi} + yG_z \frac{\partial}{\partial \psi} - G \frac{\partial}{\partial x},$$

$$X_{\mathcal{H}_H} = -xH_t \frac{\partial}{\partial \varphi} - xH_z \frac{\partial}{\partial \psi} - H \frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_{\mathcal{K}_K} = K_t \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_z \frac{\partial}{\partial \psi}$$

$$X_{\mathcal{L}} = \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \psi \frac{\partial}{\partial \psi} - z \frac{\partial}{\partial z} - t \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_{\mathcal{M}} = -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} - 2z \frac{\partial}{\partial z} - 2t \frac{\partial}{\partial t}$$

Перечисленные симметрии имеют следующий физический смысл: $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ — масштабные симметрии; $\mathcal{C}_\gamma$ и $\mathcal{D}_\delta$ — обобщенные повороты в плоскости x, y (повороты в случае $\gamma = \delta = \text{const}$); $\mathcal{A}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\beta$ — обобщенные трансляции (переносы) по z и t (в случае $\alpha = \beta = 1$ обычные трансляции являются их линейной комбинацией); симметрии $\mathcal{G}_G$ и $\mathcal{H}_H$ — обобщенные трансляции по x и y соответственно (обычные трансляции при $G = H = 1$); наконец, $\mathcal{K}_K$ — калибровка на тривиальное решение.

О структуре алгебры симметрий дает представление таблица коммутационных соотношений (см. табл. 1).

5.4.2. Инвариантные решения.

$\mathcal{A}_\alpha$-инвариантные решения. Условия инвариантности имеют вид

$$\alpha'(\varphi + \psi) + \alpha(\varphi_z + \varphi_t) = 0, \quad \alpha'(\varphi + \psi) + \alpha(\psi_z + \psi_t) = 0.$$

Решая эту систему, получим

$$\varphi = (\alpha(z+t))^{-1} A(x, y, z-t) + B(x, y, z-t);$$
$$\psi = (\alpha(z+t))^{-1} A(x, y, z-t) + B(x, y, z-t),$$

причем функции A и B подчиняются следующим соотношениям, вытекающим из (5.20) и (5.21):

$$\begin{aligned} A_\eta &= B_x A_y - A_x B_y, \\ \Delta_\perp A_\eta &= B_x \Delta_\perp A_y + A_x \Delta_\perp B_y - A_y \Delta_\perp B_x - B_y \Delta_\perp A_x, \end{aligned} \tag{5.23}$$

где $\eta = z - t$. Отметим, что уравнения (5.23) одинаковы для всех α.

Таблица 1

Коммутационные соотношения в алгебре классических симметрий уравнения Кадомцева — Погуце

[,]	$\mathcal{A}_{\hat\alpha}$	$\mathcal{B}_{\hat\beta}$	$\mathcal{C}_{\hat\gamma}$	$\mathcal{D}_{\hat\delta}$	$\mathcal{G}_{\hat G}$
$\mathcal{A}_\alpha$	$2\mathcal{A}_{\hat\alpha\alpha'-\hat\alpha'\alpha}$	0	$-2\mathcal{G}_{\hat\gamma'\alpha}$	0	$-\mathcal{G}_{\alpha(\hat G_t+\hat G_z)}$
$\mathcal{B}_\beta$	0	$2\mathcal{B}_{\beta'\hat\beta-\hat\beta'\beta}$	0	$-2\mathcal{D}_{\beta\hat\delta'}$	$\mathcal{G}_{\beta(\hat G_t-\hat G_z)}$
$\mathcal{C}_\gamma$	$2\mathcal{C}_{\gamma'\hat\alpha}$	0	0	0	$-2\mathcal{H}_{\delta\hat G}$
$\mathcal{D}_\delta$	0	$2\mathcal{D}_{\delta'\hat\beta}$	0	0	$-2\mathcal{G}_{\hat\delta H}$
$\mathcal{G}_G$	$\mathcal{G}_{\hat\alpha(G_t+G_z)}$	$-\mathcal{G}_{\hat\beta(G_t-G_z)}$	$2\mathcal{H}_{\hat\gamma G}$	$2\mathcal{H}_{\hat\delta G}$	0
$\mathcal{H}_H$	$\mathcal{H}_{\hat\alpha(H_t+H_z)}$	$\mathcal{H}_{\hat\beta(H_t-H_z)}$	$-2\mathcal{G}_{\hat\gamma H}$	$-2\mathcal{G}_{\hat\delta H}$	$-\mathcal{K}_{\hat G H}$
$\mathcal{K}_K$	$-cK_{\hat\alpha(K_t+K_z)}$	$-cK_{\hat\beta(K_t-K_z)}$	0	0	0
$l\mathcal{L}$	$-l\mathcal{A}_{(t+z)\hat\alpha'-\hat\alpha}$	$-l\mathcal{B}_{(z-t)\hat\beta'-\hat\beta}$	$-l\mathcal{C}_{(z+t)\hat\gamma'}$	$-l\mathcal{D}_{(z-t)\hat\delta'}$	$-l\mathcal{G}_{t\hat G_t+z\hat G_z}$
$m\mathcal{M}$	0	0	0	0	$m\mathcal{H}_{\hat H}$

Таблица 1 (продолжение)

[,]	$\mathcal{H}_{\hat H}$	$-\mathcal{K}_{\hat K}$	$\hat l\mathcal{L}$	$\hat m\mathcal{M}$
$\mathcal{A}_\alpha$	$-\mathcal{H}_{\alpha(\hat H_t+\hat H_z)}$	$\mathcal{H}_{\alpha(\hat K_t+\hat K_z)}$	$\hat l\mathcal{A}_{(t+z)\alpha'-\alpha}$	0
$\mathcal{B}_\beta$	$\mathcal{H}_{\beta(\hat H_t-\hat H_z)}$	$\mathcal{K}_{\beta(\hat K_t-\hat K_z)}$	$\hat l\mathcal{B}_{(z-t)\beta'-\beta}$	0
$\mathcal{C}_\gamma$	$2\mathcal{G}_{\gamma\hat H}$	0	$\hat l\mathcal{C}_{(t+z)\gamma'}$	0
$\mathcal{D}_\delta$	$2\mathcal{G}_{\gamma\hat H}$	0	$\hat l\mathcal{D}_{(z-t)\delta'}$	0
$\mathcal{G}_G$	$\mathcal{K}_{G\hat H}$	0	$\hat l\mathcal{G}_{zG_z+tG_t}$	$-\hat m\mathcal{G}_G$
$\mathcal{H}_H$	0	0	$\hat l\mathcal{H}_{tH_t+zH_z}$	$-\hat m\mathcal{H}_H$
$\mathcal{K}_K$	0	0	$\hat l\mathcal{K}_{tK_t+zK_z}$	$-2\hat m\mathcal{K}_K$
$l\mathcal{L}$	$-l\mathcal{H}_{t\hat H_t+z\hat H_z}$	$-l\mathcal{K}_{t\hat K_t+z\hat K_z}$	0	0
$m\mathcal{M}$	$m\mathcal{H}_{\hat H}$	$2m\mathcal{K}_{\hat K}$	0	0

$\mathcal{G}_G$-инвариантные решения. Условия инвариантности дают

$$\varphi = -(G_t/G)xy + A(y,z,t); \quad \psi = -(G_z/G)xy + B(y,z,t),$$

причем A и B удовлетворяют *линейной* системе

$$-B_t + A_z = (y/G)[G_z A - G_t B]_y,$$
$$(A_t - B_z)_{y^2} = (y/G)[G_t A - G_z B]_{y^3}.$$

$\mathcal{C}_\gamma$-инвариантные решения. Условия инвариантности дают

$$\varphi = r^2\theta\gamma'/2\gamma + A(r,z,t); \quad \psi = r^2\theta\gamma'/2\gamma + B(r,z,t),$$

где r и θ — полярные координаты на плоскости x, y. При этом функции A и B удовлетворяют линейной системе

$$-B_t + A_z = (r\gamma'/2\gamma)(A-B)_r$$
$$\Delta_\perp(A_t - B_z) = [(r\gamma'/2\gamma)\Delta_\perp + (2\gamma'/r\gamma)](A-B)_r.$$

Интересно, что $\mathcal{C}_\gamma$-инвариантные решения однозначно определены лишь в секторе $|\theta-\theta_0| < \pi$ для некоторого θ_0. Из таких «кусков» можно строить разрывные решения.

Приведем примеры решений, инвариантных относительно некоторых двумерных подалгебр.

$\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta$-инвариантные решения. Эти решения имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi &= (\alpha(z+t))^{-1}A(x,y) + (\beta(z-t))^{-1}B(x,y),\\ \psi &= (\alpha(z+t))^{-1}A(x,y) - (\beta(z-t))^{-1}B(x,y).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Таким образом, эти решения представляют собой произвольную (так называемую альфвеновскую) волну, распространяющуюся вдоль оси z со скоростью $c_A = 1$ с амплитудой, зависящей от x, y. При этом

$$\begin{cases} A_x B_y - A_y B_x = 0, \\ A_x \Delta B_y - A_y \Delta B_x + B_x \Delta A_y - B_y \Delta A_x = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что $B = f(A)$. Из второго уравнения имеем

$$f'(A)(A_x\Delta A_y - A_y \Delta A_x) + f''(A)[A_{xy}(A_x^2 - A_y^2) - Axy(A_{x^2} - A_{y^2})] = 0.$$

В частности, при $B = A$ имеем

$$\Delta A = F(A). \tag{5.25}$$

Другие примеры инвариантных решений для системы уравнений Кадомцева — Погуце, в том числе для подалгебр размерности три, можно найти в статье [99].

5.5. Размножение решений. Пусть (φ_0, ψ_0) — решение системы (5.20), (5.21), а $Q = (Q^1, Q^2)$ — его симметрия. Напомним, что решение системы

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Q^1\\ Q^2\end{pmatrix}$$

с начальным условием $(\varphi, \psi)|_{\tau=0} = (\varphi_0, \psi_0)$ дает зависящее от τ как от параметра семейство решений уравнения (5.20), (5.21). Таким образом решение (φ_0, ψ_0) оказывается «размноженным» или «деформированным» при помощи симметрии Q. Приведем несколько примеров.

$\mathcal{C}_\gamma$-размножение. В этом случае следует решать уравнения

$$\begin{aligned} &\varphi_\tau = \gamma' r^2/2 + \gamma\varphi_\theta\,, \qquad && \varphi|_{\tau=0} = \varphi_0(r, \theta, z, t),\\ &\psi_\tau = \gamma' r^2/2 + \gamma\psi_\theta, && \psi|_{\tau=0} = \varphi_0(r, \theta, z, t). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Решениями являются $\varphi_\tau = \gamma' r^2\tau/2 + \varphi_0(r, \theta+\tau\gamma, z, t)$, $\psi_\tau = \gamma' r^2\tau/2 + \psi_0(r, \theta + \tau\gamma, z, t)$. Можно заметить, что решение получается однозначным, в то время как инвариантные решения этой симметрии неоднозначны (см. выше).

Вид формул для семейства φ и ψ показывает, что фазу θ можно отклонить вдоль оси z при помощи бегущей с альфвеновской скоростью волны $\gamma(z+t)$, но при этом возникает поправка $\gamma r^2\tau$ к решению. Заметим, что $\mathcal{D}_\delta$-размножение приводит к аналогичным формулам (и к отклонению $\tau\delta(z-t)$ в фазе). Если решение периодично по z (например, ось z токамака замкнута и имеет длину l), то возникает условие «квантования» параметра τ. Например, взяв отклонение фазы равным $\tau z = \tau[(z+t)+(z-t)]/2$, получим требование $\tau l = 2\pi n$, $\tau = 2\pi n/l$. Однако этот эффект может и не проявиться, если отклонение периодично (например, если имеется «дрожание фазы» вида $\gamma = \sin[\pi N(z+t)/l]$).

$\mathcal{G}_G$-размножение. В этом случае

$$\varphi = y\tau G_t + \varphi_0(x + \tau G, y, z, t); \qquad \psi = y\tau G_z + \psi_0(x + \tau G, y, z, t).$$

Здесь решение отклоняется вдоль оси x и возникает поправка к исходному решению, равная $(y\tau G_t, y\tau G_z)$. Вполне аналогично, $\mathcal{H}_H$-размножение представляет собой сдвиг по оси y на τH. Комбинируя сдвиги, можно, скажем, изогнуть решение по спирали.

Следует, однако, отметить, что указанная свобода в выборе деформаций несколько иллюзорна: с физической точки зрения сильная деформация приводит, по-видимому, к необходимости учета давления плазмы, и, следовательно, к добавлению соответствующих слагаемых в исходные уравнения.

$\mathcal{A}_\alpha$-размножение. Для решения системы

$$\begin{aligned}\varphi_\tau &= \alpha(\varphi_z+\varphi_t)+\alpha'(\varphi+\psi)\\ \psi_\tau &= \alpha(\psi_z+\psi_t)+\alpha'(\varphi+\psi)\end{aligned}$$

вычтем и сложим ее уравнения:

$$\begin{aligned}(\varphi+\psi)_\tau &= \alpha[(\varphi+\psi)_z+(\varphi+\psi)_t]+2\alpha'(\varphi+\psi)\\ (\varphi-\psi)_\tau &= \alpha[(\varphi-\psi)_z+(\varphi-\psi)_t].\end{aligned}$$

Преобразованную систему нетрудно решить относительно новых неизвестных функций $(\varphi+\psi)$, $(\varphi-\psi)$. Приведем ответ:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\alpha(\Sigma)+\alpha(z+t)}{2\alpha(z+t)}\varphi_0(x,y,Z,T)+\frac{\alpha(\Sigma)-\alpha(z+t)}{2\alpha(z+t)}\psi_0(x,y,Z,T),\\ \psi &= \frac{\alpha(\Sigma)-\alpha(z+t)}{2\alpha(z+t)}\varphi_0(x,y,Z,T)+\frac{\alpha(\Sigma)+\alpha(z+t)}{2\alpha(z+t)}\psi_0(x,y,Z,T).\end{aligned}$$

Здесь

$$\Sigma=\Gamma^{-1}(\tau+\Gamma(z+t)),\quad \Gamma(z+t)=\frac{1}{2}\int^{z+t}\frac{d\xi}{\alpha(\xi)},$$

$$Z=\frac{1}{2}(z-t+\Sigma),\quad T=\frac{1}{2}(t-z+\Sigma),$$

а Γ^{-1} — обратная функция. Для конкретных значений α получаются явные формулы. Например, при $\psi_0\equiv 0$ и $\alpha=z+t$ имеем «сминание» решения:

$$\varphi=(1+e^\tau)\varphi_0(x,y,e^\tau(z+t),z-t)/2.$$

Интересно отметить, что если взять разрывную симметрию, изначально гладкое решение включается в семейство разрывных. Так, если $\psi_0\equiv 0$, $\alpha=\xi^{-1}$, $\xi=z+t$, то

$$\varphi=5(1+|\xi|(\tau+\xi^2)^{-1/2})\varphi_0(x,y,\operatorname{sgn}(\xi)\sqrt{\tau+\xi^2},z-t)/2.$$

При $\xi=0$, $\tau\neq 0$ возникает бегущий разрыв, пропорциональный величине

$$\varphi_0(x,y,\sqrt{\tau},z-t)-\varphi_0(x,y,-\sqrt{\tau},z-t).$$

Хотя разрыв потенциала φ и не допускает непосредственной физической интерпретации, при четности φ_0 возникает разрыв градиента, что уже физически осмысленно.

Приведем еще один пример использования инвариантных решений для размножения [99]. Выберем $\mathcal{A}_\alpha, \mathcal{B}_\beta$-инвариантное решение (5.24), взяв $\alpha \equiv 2$, $\beta \equiv -2$ и такие функции A и B, что $A = B$ и выполнено равенство $\Delta A = \exp A$ (ср. (5.25)). А именно, в качестве решения возьмем функцию

$$A(z,\theta) = -\ln\left[\frac{r^4}{2}\operatorname{sh}^2\left(\frac{\cos\theta}{r}+1\right)\right].$$

Тогда соответствующее инвариантное решение имеет вид

$$\begin{cases} \varphi = 0, \\ \psi = A. \end{cases}$$

Полученное таким образом решение статично (т. е. не зависит от времени) и постоянно вдоль оси z. Подвергнем его $\mathcal{C}_\alpha$-деформации, где $\alpha(z+t) = \dfrac{1}{2}\exp(-(z+t))$. При $\tau = 1$ из формул (5.26) получим, что

$$\varphi = -\frac{r^2}{2}e^{-(z+t)},$$
$$\psi = \frac{r^2}{2}e^{-(z+t)} - \ln\left\{\frac{r^4}{2}\operatorname{sh}^2\left[\frac{\cos\theta - e^{-(z+t)}}{r} + 1\right]\right\}.$$

На рис. 3.11 изображена магнитная поверхность уровня $\psi(x, y, z, 0) = 5$. Стрелкой показано направление альфвеновской скорости вдоль оси z. Таким образом, после деформации решение утратило статичность и стало неоднородным вдоль оси z.

На рис. 3.12 представлен результат деформации того же частного решения при последовательном применении $\mathcal{L}_G$- и $\mathcal{H}_H$-деформаций, где $G = (\sin 20z)/20$ и $H = (\cos 20z)/20$.

§ 6. Факторизация уравнения по симметриям

Группа симметрий уравнения состоит из диффеоморфизмов пространства джетов, не меняющих самого уравнения и переводящих каждое решение этого уравнения в некоторое другое решение. Что получится, если рассмотреть факторобъект такого действия,

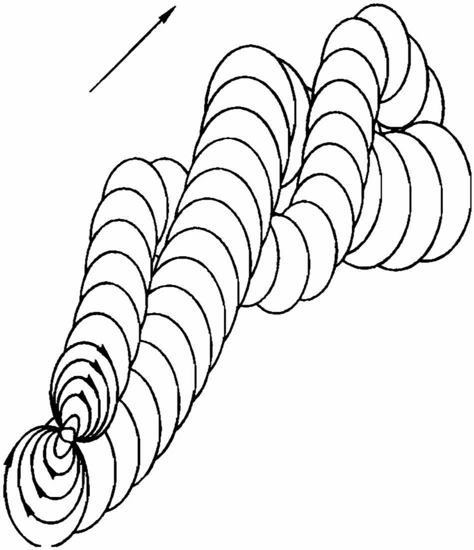

Рис. 3.11

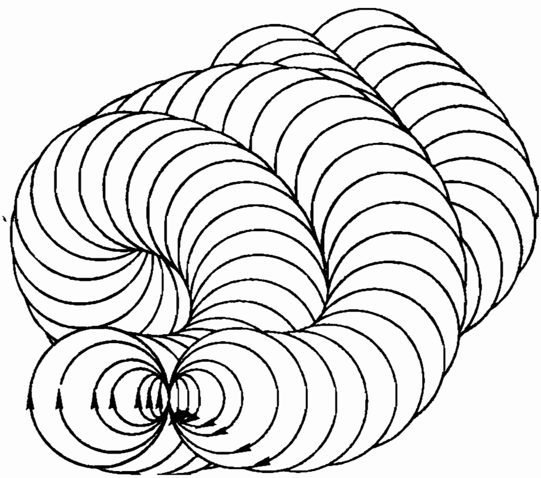

Рис. 3.12

т. е. пространство орбит? Или, более общо, рассмотреть пространство орбит по действию какой-либо подгруппы полной группы симметрий?

Рассмотрим уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, для которого полной группой симметрий является группа Ли G, и пусть $H \subset G$ — подгруппа Ли $H \subset G$. Распределение Картана $\mathcal{C} = \mathcal{C}^k$ инвариантно относительно симметрий, и решения уравнения являются n-мерными максимальными интегральными многообразиями распределения $\mathcal{C}^k(\mathcal{E})$. Рассмотрим пространство орбит по действию H и обозначим через μ отображение факторизации *):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & J^k(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle \mu|_{\mathcal{E}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mu}\big\downarrow \\ \mathcal{E}' & \longrightarrow & J^k(\mathbb{R}^n)/H \end{array}$$

На $\mathcal{E}'$ определено фактор-распределение $\mathcal{C}'$, имеющее почти всюду ту же размерность. Действительно, положим $\mathcal{C}'_a = \mu_*(\mathcal{C}_{\mu^{-1}(a)})$ для $a \in \in J^k(\pi)/H$. Определение корректно ввиду того, что $\mathcal{C}$ инвариантно относительно H. Кроме того, касательные векторы к орбитам H почти всюду не лежат в распределении $\mathcal{C}$. Действительно, пусть $b \in \in J^k(\pi)$ и H_b — орбита точкам b под действием группы H. Тогда отображение $H \to H_b$, $h \in H \mapsto h(b) \in H_b$, порождает эндоморфизм алгебры Ли $\mathcal{H}$ группы Ли H на касательное пространство $T_b(H_b)$. Потому всякий вектор $X_b \in T_b(H_b)$ имеет вид $X_\varphi|_b$, где φ — некоторое производящее сечение из алгебры инфинитезимальных симметрий $\mathcal{H}$. Пусть $X_b \in \mathcal{C}_b$. В частности, это означает, что

$$(X_\varphi \lrcorner (du^j - \sum_{i=1}^{n} p_i^j \, dx_i))_b = \varphi^j(b) = 0.$$

Поэтому почти для всех $b \in J^k(\pi)$ имеем $\mathcal{C}_b \cap \ker \mu_*|_b = \varnothing$ и, следовательно, $\dim \mathcal{C} = \dim \mathcal{C}'$.

Решения уравнения $\mathcal{E}$ — максимальные интегральные n-мерные многообразия распределения $\mathcal{C}$ — проектируются, вообще говоря, в n-мерные интегральные многообразия распределения $\mathcal{C}'$, лежащие в $\mathcal{E}'$. Подчеркнем, что нас интересуют не все интегральные многообразия $\mathcal{C}'$, а именно те, которые являются образами решений исходного уравнения (поскольку оно и является, в конечном итоге, объектом изучения). Поэтому условие, выделяющее нужные нам интегральные многообразия распределения $\mathcal{C}'$ в $\mathcal{E}'$, и будет фактор-уравнением **).

---

*) Мы предполагаем, что пространство орбит является гладким многообразием, а проекция μ — гладким расслоением.

**) Если, конечно, его удастся реализовать (хотя бы локально) как некоторое подмногообразие в $J^{k'}(\pi')$.

Пусть $L' \subset \mathcal{E}'$ является образом некоторого решения L уравнения $\mathcal{E}$. Тогда

$$\mu^{-1}(L') = H(L) = \bigcup_{h \in H} h(L). \tag{6.1}$$

Обозначим через $i_{L'}$ вложение $\mu^{-1}(L') \hookrightarrow J^k(\pi)$. Тогда ограничение распределения Картана на $\mu^{-1}(L')$ задается дифференциальной системой $\mathcal{D}_{L'} = i_{L'}^* \mathcal{D}$, где $\mathcal{D} \subset \Lambda^1(J^k(\pi))$ — дифференциальная система, порожденная формами Картана и задающая $\mathcal{C}$. Легко видеть, что распределение $\mathcal{D}_{L'}$ вполне интегрируемо: каждое из $h(L)$ является его интегральным многообразием, а их объединение составляет все $\mu^{-1}(L')$. Условия Фробениуса $d\mathcal{D}_{L'} \subset \mathcal{D}_{L'}$ полной интегрируемости распределения $\mathcal{D}_{L'}$ и оказываются условиями, выделяющими те L', которые являются образами решений исходного уравнения при факторизации по H. Таким образом, именно эти условия и являются факторуравнением.

В разобраниых ниже частных ситуациях такие факторуравнения удается явно выписать в координатах за счет удачного соотношения размерностей участвующих в них объектов; в более общих ситуациях явную координатную форму получить затруднительно.

6.1. Уравнения второго порядка от двух независимых переменных. Рассмотрим уравнение второго порядка от двух независимых и одной зависимой переменных, на котором действует без неподвижных точек двумерная группа Ли H. Точнее, пусть $\mathcal{E} \subset J^2(2,1)$ с каноническими координатами $q_1, q_2, u, p_1, p_2, p_{(2,0)}, p_{(1,1)}, p_{(0,2)}$. Тогда $\dim \mathcal{E} = 7$, $\dim \mathcal{E}/H = 5$. В этих же координатах базис дифференциальной системы $\mathcal{D}$, задающей распределение Картана, есть

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= du - p_1 dq_1 - p_2 dq_2,\\
\omega_1 &= dp_1 - p_{(2,0)} dq_1 - p_{(1,1)} dq_2,\\
\omega_2 &= dp_2 - p_{(1,1)} dq_1 - p_{(0,2)} dq_2,
\end{aligned}$$

и, следовательно, в точках общего положения размерность картановских плоскостей равна 4.

Как уже объяснялось, векторные поля, образующие алгебру Ли $\mathcal{H}$ группы H, почти всюду не пересекаются с распределением Картана, и поэтому фактор-распределение Картана $\mathcal{C}'$ на пятимерном многообразии $\mathcal{E}/H$ также четырехмерно. Следовательно, задающая его дифференциальная система $\mathcal{D}'$ одномерна и (по крайней мере локально) распределение $\mathcal{C}'$ можно задать одной дифференциальной формой w. В ситуации общего положения одна форма на нечетномерном многообразии задает контактную структуру и, в соответствии с леммой Дарбу, в подходящих координатах x_1, x_2, v, y_1, y_2 на $\mathcal{E}/H$ ее можно записана в виде

$$w = dv - y_1 dx_1 - y_2 dx_2.$$

Таким образом, само фактормногообразие $\mathcal{E}/H$ может быть (локально) отождествлено с $J^1(\mathbb{R}^2)$.

В этих координатах (опять-таки локально) «почти все» максимальные интегральные многообразия формы w могут быть заданы как 1-джеты графиков функции двух переменных:

$$w = g(x_1, x_2), \quad y_1 = \frac{\partial g}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial g}{\partial x_2}.$$

Обозначим это многообразие через V_g. Условия Фробениуса $d\mathcal{D}_{V_g} \subset \subset \mathcal{D}_{V_g}$ полной интегрируемости являются уравнениями в частных производных первого порядка на функции, задающие график 1-джета $j_1(g)$, и, следовательно, уравнениями второго порядка на саму функцию g. Фактически же в разобранных примерах возникает одно уравнение второго порядка, которое и будет являться искомым факторуравнением. Его решениям, как это следует из самой конструкции, соответствуют двупараметрические семейства решений исходного уравнения.

Пример 6.1. Рассмотрим уравнение Лапласа $\mathcal{E} = \{p_{(2,0)} + p_{(0,2)} = 0\}$. Группа H порождена трансляциями вдоль q_1, q_2; ее алгебра Ли $\mathcal{H}$ соответственно имеет базис $\dfrac{\partial}{\partial q_1}, \dfrac{\partial}{\partial q_2}$.

Форма w, задающая контактную структуру на $\mathcal{E}/H$, определяется в этой ситуации однозначно с точностью до пропорциональности условиями

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial q_1} \lrcorner \mu^* w = 0, \quad && \frac{\partial}{\partial q_2} \lrcorner \mu^* w = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial q_1}(\mu^* w) = 0, && \frac{\partial}{\partial q_2}(\mu^* w) = 0, \end{aligned} \tag{6.2}$$

причем $\mu^* w = \alpha_0 \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2$.

С учетом последнего условия, (6.2) приводит к системе

$$(\alpha_0 p_1 + \alpha_1 p_{(2,0)} + \alpha_2 p_{(1,1)})|_{\mathcal{E}} = 0,$$
$$(\alpha_0 p_2 + \alpha_1 p_{(1,1)} + \alpha_2 p_{(0,2)})|_{\mathcal{E}} = 0,$$

откуда, с точностью до пропорциональности,

$$\alpha_0 = (p^2_{(1,1)} - p_{(2,0)}p_{(0,2)})|_{\mathcal{E}}, \qquad \alpha_1 = (p_1 p_{(0,2)} - p_2 p_{(1,1)})|_{\mathcal{E}},$$
$$\alpha_2 = (p_2 p_{(2,0)} - p_1 p_{(1,1)})|_{\mathcal{E}}.$$

Вторая пара условий (6.2) означает, что $\mu^* w$ не зависит от q_1, q_2. Поэтому рассматриваемое отображение факторизации μ можно отождествлять с проекцией на плоскость $\{q_1 = q_2 = 0\} \subset J^2(\mathbb{R})$. Таким образом,

$$\mu^* w = f \cdot [(p^2_{(1,1)} - p_{(2,0)}p_{(0,2)})du - (p_1 p_{(0,2)} - p_2 p_{(1,1)})dp_1 - \\ - (p_2 p_{(2,0)} - p_1 p_{(1,1)})dp_2]|_{\mathcal{E}}$$

где f — некоторая функция (коэффициент пропорциональности).

Положим $f = (p^2_{(1,1)} - p_{(2,0)}p_{(0,2)})^{-1}$. Так как на уравнении выполнено равенство $p_{(0,2)} = -p_{(2,0)}$, имеем

$$w = d\overline{u} - \frac{\overline{p}_2\overline{p}_{(1,1)} + \overline{p}_1\overline{p}_{(2,0)}}{\overline{p}^2_{(2,0)} + \overline{p}_{(1,1)}} d\overline{p}_1 - \frac{\overline{p}_1\overline{p}_{(1,1)} - \overline{p}_2\overline{p}_{(2,0)}}{\overline{p}^2_{(2,0)} + \overline{p}_{(1,1)}} d\overline{p}_2,$$

где $\overline{\xi}$ обозначает ограничение ξ на уравнение. Учитывая, что $w = dv - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$, получим

$$v = \overline{u}, \quad x_i = \overline{p}_i, \quad y_1 = \frac{\overline{p}_2\overline{p}_{(1,1)} + \overline{p}_1\overline{p}_{(2,0)}}{\overline{p}^2_{(2,0)} + \overline{p}_{(1,1)}}, \quad y_2 = \frac{\overline{p}_1\overline{p}_{(1,1)} - \overline{p}_2\overline{p}_{(2,0)}}{\overline{p}^2_{(2,0)} + \overline{p}_{(1,1)}}.$$

Отсюда, в свою очередь, можно найти, что

$$\overline{u} = v, \quad \overline{p}_i = x_i, \quad \overline{p}_{(2,0)} = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2}, \quad \overline{p}_{(1,1)} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1^2 + y_2^2}.$$

В этих новых координатах ограничение форм Картана на уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_0 &= dv - x_1 dq_1 - x_2 dq_2, \\ \overline{\omega}_1 &= dx_1 - \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} dq_1 - \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1^2 + y_2^2} dq_2, \\ \overline{\omega}_2 &= dx_2 - \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{y_1^2 + y_2^2} dq_1 + \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} dq_2. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Рассмотрим теперь в $\mathcal{E}/H$ многообразие вида V_g, являющееся 1-джетом функции $g(x_1, x_2)$:

$$v = g(x_1, x_2), \quad y_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Этими же уравнениями задается и многообразие $\widetilde{V}_g = \mu^{-1}V_g \subset \subset J^2(\mathbb{R}^2)$. Обозначим $\omega_i^g = \omega|_{\widetilde{V}_g}$. Поскольку $\omega|_{V_g} = 0$, имеем

$$\alpha_0\omega_0^g + \alpha_1\omega_1^g + \alpha_2\omega_2^g = 0,$$

т. е. формы $\{\omega_i^g\}$ линейно зависимы *). Поэтому можно, например, считать, что в области $\alpha_2 = -y_2 \neq 0$ ограничение распределения Картана на $\widetilde{V}_g$ задается формами ω_0^g, ω_1^g. Следовательно, условия интегрируемости этого распределения имеют вид:

$$d\omega_0^g \wedge \omega_0^g \wedge \omega_1^g = 0, \qquad d\omega_1^g \wedge \omega_0^g \wedge \omega_1^g = 0. \tag{6.4}$$

С другой стороны, используя (6.3), можно получить следующие выражения для базисных форм ω_0^g, ω_1^g:

$$\omega_0^g = g_{x_1}dx_1 + g_{x_2}dx_2 - x_1dq_1 - x_2dq_2,$$
$$\omega_1^g = dx_1 - \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1^2 + y_2^2}dq_1 - \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1^2 + y_2^2}dq_2.$$

Довольно трудоемкая выкладка показывает, что при подстановке этих выражений в (6.4) первое из условий (6.4) выполняется тождественно, а второе равносильно уравнению $y_2(g_{x_1x_1} + g_{x_2x_2}) = 0$. Однако, в выбранной нами области $y_2 \neq 0$, поэтому равенство

$$g_{x_1x_1} + g_{x_2x_2} = 0$$

и есть условие, выделяющее нужные функции. Иными словами, это и есть факторуравнение для уравнения Лапласа **).

Итак, факторизация снова приводит к уравнению Лапласа (отметим, что уравнение Лапласа линейно, и полная группа его симметрий, следовательно, бесконечна). В соответствни с изложенной выше теорией из совпадения исходного уравнения и факторуравнения следует, что с каждым решением уравнения Лапласа связано двумерное семейство решений этого же уравнения.

В самом деле, если $g(x_1, x_2)$ — решение уравнения Лапласа, то многообразие $\widetilde{V}_g$ является интегральным многообразием для распределения Картана и ограничения $D_{q_i}^g$ полных производных D_{q_i} на $\widetilde{V}_g$

---

*) Легко заметить, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -y_1$, $\alpha_2 = -y_2$, так как $w = dv - y_1\,dx_1 - y_2\,dx_2$.

**) Отметим, что этот результат не зависит, разумеется, от выбора удобной для выкладок области $y_2 \neq 0$: при иных предположениях факторуравнение получается тем же.

имеют вид

$$
\begin{aligned}
D^g_{q_1} &= \left(\frac{\partial}{\partial q_1} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + p_{(1,1)}\frac{\partial}{\partial p_1} + p_{(1,2)}\frac{\partial}{\partial p_2}\right)\Bigg|_{\widetilde{V}_g} = \\
&= \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1^2+y_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2}, \\
D^g_{q_2} &= \left(\frac{\partial}{\partial q_2} + p_1\frac{\partial}{\partial u} + p_{(1,2)}\frac{\partial}{\partial p_1} + p_{(2,2)}\frac{\partial}{\partial p_2}\right)\Bigg|_{\widetilde{V}_g} = \\
&= \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{y_1^2+y_2^2}\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_1y_1 - x_2y_2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\partial}{\partial x_2};
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

здесь $y_i = \dfrac{\partial g}{\partial x_i}$. Уравнения интегральных многообразий на $\widetilde{V}_g$ будем искать в виде

$$q_1 = \varphi(x_1, x_2), \quad q_2 = \psi(x_1, x_2).$$

Функции φ и ψ находятся из условий

$$D^g_{q_i}(q_1 - \varphi) = 0, \quad D^g_{q_i}(q_1 - \psi) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Последнюю систему можно записать явно, используя формулы (6.5). Разрешив ее относительно $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$, получим следующие формулы (где $r = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= \left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)r, & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)r, \\
\frac{\partial\psi}{\partial x_1} &= \left(x_1\frac{\partial g}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)r, & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} &= \left(x_2\frac{\partial g}{\partial x_2} - x_1\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)r.
\end{aligned}
$$

Таким образом, при заданной g функции φ, ψ определяются простым интегрированием.

Например, если $g = x_2$, то $\varphi = \operatorname{arctg}(x_1/x_2) + C_1$, $\psi = \ln(x_1^2 + x_2^2)/2 + C_2$. Возвращаясь к стандартным координатам на $J^2(\mathbb{R}^2)$, получим следующие соотношения, справедливые на $\widetilde{V}_g$, где $g = x_2$:

$$
\begin{gathered}
u = p_2; \quad p_{(2,0)} = -p_{(0,2)}; \quad p_{(2,0)} = -p_2; \quad p_{(1,1)} = p_1; \\
C_1 + q_1 = \operatorname{arctg}(p_2/p_1); \quad C_2 + q_2 = \ln(p_1^2 + p_2^2)/2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
$$

Выражая $p_2 = u$ через q_i, получим искомое двупараметрическое семейство решений уравнения Лапласа:

$$u = e^{q_2 + C_2}\sin(q_1 + C_1).$$

Пример 6.2. Рассмотрим уравнение Лапласа $\mathcal{E} = \{p_{(2,0)} + p_{(0,2)} = 0\}$. Группа H соответствует алгебра Ли $\mathcal{H}$, порожденной полями $X_{q_1} = \dfrac{\partial}{\partial p_1} + q_1\dfrac{\partial}{\partial u}$, $X_{q_2} = \dfrac{\partial}{\partial p_2} + q_2\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Действуя по аналогии с примером 6.1, получим, что факторуравнение снова совпадает с уравнением Лапласа. Каждому решению g факторуравнения соответствует двупараметрическое семейство решений исходного, которое можно найти явно из соотношений

$$\begin{cases} u = g(q_1, q_2) + q_1p_1 + q_2p_2, \\ p_{(0,2)} = -p_{(2,0)}, \\ p_{(2,0)} = -\dfrac{q_1g_{q_1} - q_2g_{q_2}}{q_1^2 + q_2^2}, \\ p_{(1,1)} = -\dfrac{q_1g_{q_2} + q_1g_{q_2}}{q_1^2 + q_2^2}, \\ p_1 = \varphi(q_1, q_2) + C_1, \\ p_2 = \psi(q_1, q_2) + C_2, \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные константы. В свою очередь, функции φ, ψ определяются из соотношений

$$\begin{aligned} &g_{q_1}dq_1 + g_{q_2}dq_2 + q_1dp_1 + q_2dp_2 = \\ &\qquad = q_1(q_1^2 + q_2^2)d(p_1 - \varphi) + q_2(q_1^2 + q_2^2)d(p_2 - \psi), \\ &(q_1^2 + q_2^2)dp_1 + (g_{q_1}q_1 - g_{q_2}q_2)dq_1 + (g_{q_2}q_1 + g_{q_1}q_2)dq_2 = \\ &\qquad = (q_1^2 + q_2^2)d(p_1 - \varphi). \end{aligned}$$

В частности, для $g = q_1$ получим следующее двупараметрическое семейство решений уравнения Лапласа:

$$u = q_1(C_1 - \ln(q_1^2 + q_2^2)/2) + q_2(C_2 + \operatorname{arctg}(q_1/q_2)),$$

Пример 6.3. Волновое уравнение $p_{(2,0)} - p_{(0,2)} = 0$. Рассмотрим группу H трансляций по независимым переменным; ее алгебра Ли $\mathcal{H}$ порождена полями $\dfrac{\partial}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial q_2}$.

В этом случае факторуравнение также совпадает с исходным волновым уравнением. Каждое решение g факторуравнения соответствует двупараметрическому семейству решений исходного, которое можно явно найти из соотношений

$$\begin{cases} u = g(p_1, p_2), \\ p_{(2,0)} = p_{(0,2)}, \\ p_{(2,0)} = \dfrac{p_1 g_{p_1} - p_2 g_{p_2}}{g_{p_1}^2 - g_{p_2}^2}, \\ p_{(1,1)} = \dfrac{p_2 g_{p_1} - p_1 g_{p_2}}{g_{p_1}^2 - g_{p_2}^2}, \\ q_1 = C_1 + \varphi(p_1, p_2), \\ q_2 = C_2 + \psi(p_1, p_2), \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные вещественные константы. В свою очередь, функции φ, ψ определяются из соотношений

$$d\varphi = \frac{p_2 g_{p_2} - p_1 g_{p_1}}{p_2^2 - p_1^2} dp_1 + \frac{p_2 g_{p_1} - p_1 g_{p_2}}{p_2^2 - p_1^2} dp_2,$$
$$d\psi = \frac{p_2 g_{p_1} - p_1 g_{p_2}}{p_2^2 - p_1^2} dp_1 + \frac{p_2 g_{p_2} - p_1 g_{p_1}}{p_2^2 - p_1^2} dp_2.$$

В частности, для $g = q_1$ получим следующее двупараметрическое семейство решений волнового уравнения:

$$u = e^{q_1 + C_1} \operatorname{ch}(q_2 + C_2).$$

Пример 6.4. Рассмотрим уравнение теплопроводности $p_1 = p_{(0,2)}$. Выберем группу H трансляций по независимым переменным; ее алгебра Ли $\mathcal{H}$ порождена полями $\dfrac{\partial}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial}{\partial q_2}$.

В подходящих координатах x, y, v факторуравнение является квазилинейным уравнением параболического типа:

$$(xv_x)^2 v_{xx} - 2(xv_x)(y - xv_y)v_{xy} + (y - xv_y)v_{yy} = 0.$$

Упражнение 6.1. Покажите, что факторуравнение уравнения теплопроводности по группе масштабных симметрий $u \mapsto \tau u$ совпадает с уравнением Бюргерса.

Пример 6.5. Уравнение Бюргерса $p_2 + up_1 + p_{(2,0)} = 0$. Рассмотрим группу H, алгебра Ли которой $\mathcal{H}$ порождена полями $\dfrac{\partial}{\partial q_1}$ и $-q_2 \dfrac{\partial}{\partial q_1} + \dfrac{\partial}{\partial u}$, т. е. трансляцией по q_1 и галилеевой симметрией.

В подходящих координатах x, y, v факторуравнение имеет вид

$$v_{xx} - \frac{v_x^2}{2v} + v_x\frac{x^2}{2v} + \frac{v_y}{2v} - 3x = 0.$$

Пример 6.6 (эволюционные уравнения с одной пространственной переменной). Здесь изложены некоторые из результатов статьи [61], относящейся к эволюционным уравнениям с одной пространственной переменной. Бо́льшая часть примеров, приведенных в этой статье является частным случаем ситуации, разобранной в этом параграфе. Однако, в силу специального вида уравнения $u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}, \ldots)$, почти на все вопросы, связанные с процедурой факторизации, можно ответить более или менее исчерпывающим образом.

Функции, постоянные на орбитах группы H или продолжения ее действия на джеты более высокого порядка, называются скалярными дифференциальными инвариантами этой группы [10, 152, 3]. В статье [61] доказано, что если $\dim \mathcal{H} = m$, то в ситуации общего положения число независимых дифференциальных инвариантов на $J^m(\mathbb{R}^2)$ равно трем.

Эти три инварианта выбираются в качестве одной зависимой и двух независимых координат (т. е. координат в $J^0(\mathbb{R}^2)$) на факторуравнении. В качестве полных производных по новым координатам выбираются «инвариантные дифференцирования», т. е. такие линейные комбинации $pD_t + qD_x$, что $[pD_t + qD_x, h] = 0$ для любой производящей функции $h \in \mathcal{H}$. Выбор как самих инвариантов, так и инвариантных дифференцирований, естественно, неоднозначен, и в статье приводятся рациональные правила, приводящие к возможно более простому виду факторуравнения. На этом пути удается получить, например, следующие результаты.

1. Пусть алгебра Ли $\mathcal{G}_0$, состоящая из симметрий уравнения $\mathcal{E}$, содержит идеал $\mathcal{G}_1$. Если μ_i обозначает факторизацию, определяемую алгеброй $\mathcal{G}_i$ и $\mathcal{E}_i$ — соответствующее факторуравнение, то алгебра всех симметрий уравнения $\mathcal{E}_0$ содержит подалгебру Ли $\mathcal{U} \simeq \mathcal{G}_0/\mathcal{G}_1$. При факторизации μ по подалгебре $\mathcal{U}$ справедливо равенство $\mu_0 = \mu \circ \mu_1$.

2. Результатом факторизации эволюционного уравнения второго порядка является либо снова эволюционное уравнение, либо уравнение, приводящиеся точечным преобразованием к уравнению вида

$$v_{tt} + 2vv_{xt} + v^2v_{xx} + \Phi(v_t, v_x, v, x, t) = 0.$$

В частности, оно всегда имеет параболический тип.

3. Для уравнений вида $u_t = u_{xx} + h(t,x)u$ в число симметрий входят поля $\alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial u}$, где $\alpha(t,x)$ есть решение этого уравнения (сдвиг на решение). Факторизация его по любой конечномерной алгебре, составленной из таких симметрий, приводит снова к линейному уравнению того же вида, но, вообще говоря, с другим потенциалом h. В частности, для одномерной алгебры факторуравнение имеет вид

$$v_t = v_{xx} + (h + 2(\ln\alpha)_{xx})v.$$

Оказывается, что факторизация в этом случае совпадает с процедурой «одевания», применяемой в обратной задаче рассеивания. При этом переход от h к $h + 2(\ln\alpha)_{xx}$ — это ни что иное, как преобразование Дарбу.

§ 7. Внешние и внутренние симметрии

До настоящего момента под симметриями уравнения мы понимали преобразования Ли в $J^k(\pi)$. Такой подход соответствует изучению уравнения как бы «извне». Однако концептуально более оправдан другой подход, основанный на рассмотрении ограничения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ распределения Картана на уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ и диффеоморфизмов $\mathcal{E}$, сохраняющих $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Такая точка зрения соответствует изучению внутренней геометрии уравнения и представляется более адекватной задаче изучения индивидуального уравнения, хотя, с вычислительной точки зрения, является значительно менее удобной. По счастью, для весьма широкого класса уравнений оба подхода оказываются эквивалентными. В этом параграфе описываются достаточные для этого условия; уравнения, для которых такая эквивалентность имеет место, мы называем ниже *жесткими*. Наше изложение основано на результатах [24, 19].

Введем несколько основных понятий, необходимых для дальнейшего. Напомним, что распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ определяется в каждой точке следующим образом: $\mathcal{C}(\mathcal{E})_\theta = \mathcal{C}^k \cap T_\theta(\mathcal{E})$.

Определение 7.1. Диффеоморфизм многообразия $\mathcal{E}$ называется *внутренней* симметрией, если он сохраняет распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Векторное поле на $\mathcal{E}$ называется внутренней *инфинитезимальной симметрией*, если сдвиги вдоль траекторий этого поля сохраняют распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Обозначим через $\mathrm{Sym}_e(\mathcal{E})$ группу внешних симметрий, определенных в § 3.6, а через $\mathrm{Sym}_i(\mathcal{E})$ — группу внутренних симметрий уравнения $\mathcal{E}$. Операция ограничения приводит к естественному отображению

$$\mathrm{Sym}_e\,\mathcal{E} \longrightarrow \mathrm{Sym}_i\,\mathcal{E}.$$

Уравнения, для которых это отображение эпиморфно, будем называть *ординарными.* Жесткость уравнения соответствует биективности этого отображения. Разумеется, жесткие уравнения ординарны, однако обратное неверно (например, для уравнений первого порядка от одной зависимой переменной, см. ниже).

Определение 7.2. Уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ называется *$\mathcal{C}$-общим*, если:

1) множество $\pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$ всюду плотно в $J^{k-1}(\pi)$;

2) слои отображения $\pi_{\mathcal{E}} = \pi_{k,k-1}|_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \to \pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$ связны, причем они и только они являются интегральными многообразиями максимальной размерности распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Оказывается, всякая внутренняя симметрия $\mathcal{C}$-общего уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ определяет некоторое преобразование пространства $J^{k-1}(\pi)$. А именно, справедливо

Утверждение 7.1. *Если $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — $\mathcal{C}$-общее уравнение и A — его симметрия, то найдется такой диффеоморфизм A' пространства $J^{k-1}(\pi)$, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{\ A\ } & \mathcal{E} \\ {\scriptstyle\pi_{\mathcal{E}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi_{\mathcal{E}}}\big\downarrow \\ J^{k-1}(\pi) & \xrightarrow{\ A'\ } & J^{k-1}(\pi). \end{array} \tag{7.1}$$

Доказательство. Пусть $\theta_{k-1} \in \pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$. Тогда по определению $\pi_{k,k-1}^{-1}(\theta_{k-1})$ является интегральным многообразием максимальной размерности распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Поскольку A — автоморфизм распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, то $A(\pi_{k,k-1}^{-1}(\theta_{k-1}))$ — тоже интегральное многообразие максимальной размерности, и, следовательно, оно имеет вид $\pi_{k,k-1}^{-1}(\theta'_{k-1})$ для некоторой точки $\theta'_{k-1} \in \pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$. Положим $A'(\theta_{k-1}) = \theta'_{k-1}$. Коммутативность диаграммы при этом очевидна. $\square$

Выясним теперь, когда отображение A' будет преобразованием Ли пространства $J^{k-1}(\pi)$. Для этого понадобится еще два понятия.

Определение 7.3. Уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ называется *$\mathcal{C}$-полным*, если для любой точки $\theta_{k-1} \in \pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$ линейная оболочка множества *)

$$\bigcup_{\theta_k \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\theta_{k-1})} R_{\theta_k} \subset T_{\theta_{k-1}} J^{k-1}(\pi)$$

совпадает с картановской плоскостью $C_{\theta_{k-1}}$.

Таким образом, уравнение C-полно, если оно целиком определяет картановские плоскости в точках $\pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$.

Обозначим через $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi)$ *l-е продолжение* уравнения $\mathcal{E}$, т. е. уравнение, состоящее из всех *дифференциальных следствий* порядка $\leqslant l$ уравнения $\mathcal{E}$ **).

Определение 7.4. Уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ называется *l-разрешимым* (в точке $\theta_k \in \mathcal{E}$), если $\pi_{l+k,k}\colon\ \mathcal{E}^{(l)} \to \mathcal{E}$ — сюръекция (в точке $\theta_k \in \mathcal{E}$), т. е. $\mathcal{E}^{(l)} \cap \pi_{l+k,k}^{-1}(\theta_k) \neq \varnothing$.

Утверждение 7.2. *Если C-общее уравнение 1-разрешимо и C-полно, то отображение A', построенное выше, является преобразованием Ли. Более того, 1-поднятие A', ограниченное на $\mathcal{E}$, совпадает с A.*

Доказательство. Уравнение $\mathcal{E}$ является C-полным, поэтому для доказательства первого утверждения достаточно показать, что если $v \in R_{\theta_k}$, $\theta_k \in \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\theta_{k-1})$, $\theta_{k-1} \in \pi_{k,k-1}(\mathcal{E})$, то $A'_*(v) \in C_{A'(\theta_{k-1})}$.

Пусть точка $\theta_{k+1} \in \mathcal{E}^{(1)}$ такова, что $\pi_{k+1,k}(\theta_{k+1}) = \theta_k$. Тогда $R_{\theta_{k+1}} \subset T_{\theta_k}(\mathcal{E})$ и $(\pi_{k,k-1})_*(R_{\theta_{k+1}}) = R_{\theta_k}$. Поэтому найдется такой вектор $v_1 \in R_{\theta_{k+1}}$, что $(\pi_{\mathcal{E}})_*(v_1) = v$. Тогда $A'_*(v) = A'_*((\pi_{\mathcal{E}})_*(v_1)) = (\pi_{\mathcal{E}})_*(A_*(v_1))$. Но A — автоморфизм распределения $C(\mathcal{E})$, поэтому $A_*(v_1) \in C_{A(\theta_k)}(\mathcal{E}) \subset C_{A(\theta_k)}$.

С другой стороны, $(\pi_{k,k-1})_*(C_{A(\theta_k)}) = R_{A(\theta_k)}$, так что $A'_*(v) \in R_{A(\theta_k)} \subset C_{A'(\theta_{k-1})}$.

Диффеоморфизм A совпадает с ограничением на $\mathcal{E}$ поднятия преобразования Ли A'. Это означает, что $A'_*(R_{\theta_k}) = R_{A(\theta_k)}$, $\theta_k \in \mathcal{E}$. Но предыдущими рассуждениями показано, что $A'_*(R_{\theta_k}) \subset R_{A(\theta_k)}$, а так как A' — диффеоморфизм и $\dim R_{\theta_k} = \dim R_{A(\theta_k)} = n$, то и это утверждение доказано. □

Уравнения, удовлетворяющие требованиям утверждения 7.2, мы будем называть *нормальными*.

---

*) Напомним, что R_{θ_k} — это R-плоскость в $J^{k-1}(\pi)$, определяемая точкой $\theta_k \in J^k(\pi)$; см. § 3.2.

**) Геометрическое определение см. в § 3 гл. 4.

Поясним, почему нормальности уравнения достаточно для его жесткости. Условие $\mathcal{C}$-полноты в случае 1-разрешимости можно заменить на следующее: линейная оболочка подпространств $(\pi_{k,k-1})_*(\mathcal{C}_{\theta_k}(\mathcal{E}))\subset\mathcal{C}_{\theta_{k-1}}$, где $\theta_k\in\pi_{\mathcal{E}}^{-1}(\theta_{k-1})$, совпадает с $\mathcal{C}_{\theta_{k-1}}$. Действительно, в этом случае имеем $R_{\theta_{k+1}}\subset\mathcal{C}_{\theta_k}(\mathcal{E})$ для $\theta_{k+1}\in\mathcal{E}^{(1)}$ и $(\pi_{k,k-1})_*(R_{\theta_{k+1}})=R_{\theta_k}=(\pi_{k,k-1})_*(\mathcal{C}_{\theta_k})$. Поэтому $(\pi_{k,k-1})_*(\mathcal{C}_{\theta_k}(\mathcal{E}))=$ $=R_{\theta_k}$.

Последнее замечание показывает, что понятие нормальности является «внутренним» в том смысле, что его можно сформулировать, зная только многообразие $\mathcal{E}$ и распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ на нем. Действительно, интегральные многообразия максимальной размерности распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ зададут в этом случае расслоение ν, базу которого B можно снабдить распределением

$$(B\ni b)\mapsto(\mathcal{C}_b=\text{линейная оболочка плоскостей }\{\nu_*(\mathcal{C}_y(\mathcal{E}))\mid y\in\nu^{-1}(b)\}).$$

В рассматриваемом контексте $B=J^{k-1}(\pi)$ и описанное распределение есть распределение Картана на $J^{k-1}(\pi)$. Если, далее, рассмотреть многообразие B^1 всех n-мерных максимальных интегральных подпространств построенного на B распределения, то $\mathcal{E}\subset B^1$ и $B^1=J^k(\pi)$. Эта процедура показывает, что условия нормальности позволяют восстановить «внешнее окружение» уравнения $\mathcal{E}$, т. е. восстановить вложение $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$, исходя только из распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ на $\mathcal{E}$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 7.3. *Нормальные уравнения являются жесткими.* □

Выпишем теперь в явном виде условия 1-разрешимости и $\mathcal{C}$-общности, входящие в требования нормальности.

Пусть уравнение $\mathcal{E}$ задано как множество нулей вектор-функции: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}_\sigma)$, или $\mathcal{E}=\{F_i(\theta,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}_\sigma)=0\mid 1\leqslant i\leqslant r\}$. Тогда локально $\boldsymbol{F}$ можно рассматривать как отображение $\boldsymbol{F}\colon J^k(\pi)\to$ $\to J^0(\pi')$, где π' — некоторое r-мерное расслоение над той же базой. Пусть точка $\theta_{k+1}\in J^{k+1}(\pi)$ представлена в виде пары (θ,L), где L — некоторая R-плоскость в точке $\theta_k=\pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})\in J^k(\pi)$. Тогда для почти всех θ_{k+1} плоскость $\boldsymbol{F}_*(L)$ будет R-плоскостью в точке $G(\theta_k)$. Следовательно, полагая $\boldsymbol{F}^{(1)}(\theta_{k+1})=(\boldsymbol{F}(\theta_k),\boldsymbol{F}_*(L))$, мы получаем отображение $J^{k+1}(\pi)\to J^1(\pi')$. В силу определений следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} J^{k+1}(\pi) & \xrightarrow{\pi_{k+1,k}} & J^k(\pi) & \xrightarrow{\pi_k} & M \\ {\scriptstyle F^{(1)}}\downarrow & & {\scriptstyle F}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow \\ J^1(\pi') & \xrightarrow{\pi'_{1,0}} & J^0(\pi') & \xrightarrow{\pi'_0} & M. \end{array} \tag{7.2}$$

Из коммутативности этой диаграммы следует, что пересечение $\mathcal{E}^{(1)} \cap \cap \pi_{k+1,k}^{-1}(\theta_k)$ непусто, если ограничение $F^{(1)}$ на слой,

$$F^{(1)}\colon\ \pi_{k+1,k}^{-1}(\theta_k) \longrightarrow (\pi'_{1,0})^{-1}(F(\theta_k)),$$

сюръективно. Однако это ограничение есть не что иное, как старший символ отображения F: в координатах он представляется матрицей $\dfrac{\partial G_i}{\partial p_\sigma^j}$, $|\sigma| = k$. Таким образом, уравнение 1-разрешимо, если старший символ задающей его вектор-функции сюръективен.

Если уравнение является определенным (число уравнений совпадает с числом зависимых переменных), то размерность слоев проекции $J^{k+1}(\pi) \to J^k(\pi)$ больше размерности слоев проекции $J^1(\pi') \to J^0(\pi')$. Поэтому в ситуации общего положения требуемая сюръективность всегда имеет место. Если, например, $\dim \pi = \dim \pi' = 1$ и $\mathcal{E} = \{g = 0\}$, то символ сюръективен при условии $\dfrac{\partial g}{\partial p_\sigma} \neq 0$ хотя бы для одного σ, $|\sigma| = k$. Таким образом, 1-разрешимость — весьма слабое требование.

Условие $\mathcal{C}$-общности связано с простыми соображениями размерности.

Утверждение 7.4. *Если $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim \pi = m$, $\dim M = n$ и слои проекции $\pi_\mathcal{E}$ связны, то уравнение $\mathcal{E}$ является $\mathcal{C}$-общим при условии*

$$\operatorname{codim} \mathcal{C} \leqslant m\frac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!} - 2.$$

Доказательство. Действительно, число

$$\lambda = m\frac{(n+k-2)!}{(k-1)!\,(n-1)!} - 1$$

равно разности размерностей интегральных многообразий, проекции которых на $J^{k-1}(\pi)$ имеют размерности $r = 0$ и 1 (см. утверждение 2.5). Поэтому при ограничении распределения Картана на

$\mathcal{E}$ размерность максимальных ($r=0$) интегральных многообразий упадет не менее чем на λ. $\square$

Если $\mathcal{E}$ — определенное уравнение, то условия последнего предложения выполняются во всех случаях, кроме: а) $k=1$, б) $n=1$, в) $m=1$, $k=n=2$.

Приведем примеры уравнений, для которых внешние и внутренние симметрии не совпадают.

Пример 7.1. Пусть $\theta_k \in J^k(\pi)$, где $k \geqslant 0$ при $\dim \pi > 1$ или $k \geqslant 1$ при $\dim \pi = 1$. Пусть, далее, $\mathcal{E} = \pi_{k+1,k}^{-1}(\theta_k)$. Тогда $\mathcal{E}$ — не жесткое и даже не ординарное уравнение.

Действительно, для каждой точки $\theta_{k+1} \in \mathcal{E}$ касательная плоскость $T_{\theta_{k+1}}(\mathcal{E})$ лежит в распределении Картана и поэтому $\mathcal{C}_{\theta_{k+1}}(\mathcal{E}) = T_{\theta_{k+1}}(\mathcal{E})$. Поэтому множество внутренних симметрий этого уравнения совпадает с группой всех его диффеоморфизмов. Однако, каждая внешняя симметрия $\mathcal{E}$ определяется некоторым преобразованием Ли пространства $J^k(\pi)$, оставляющим на месте точку θ_k.

Пример 7.2. Уравнения первого порядка с одной зависимой переменной являются ординарными, но не жесткими.

Пусть $k = \dim \pi = 1$. Мы ограничимся случаем определенных уравнений, т. е. $\operatorname{codim} \mathcal{E} = 1$. Сначала напомним некоторые сведения из гл. 2.

Контактная структура на $J^1(\pi)$ определяется любой из форм вида $\omega_\lambda = \lambda U_1(\pi)$, где функция $\lambda \in C^\infty(J^1(\pi))$ нигде не обращается в нуль. В дальнейшем, чтобы избежать топологических рассмотрений, мы будем предполагать, что найдется функция λ, для которой форма $d\omega_\lambda|_{\mathcal{E}}$ невырождена. Локально это всегда выполнено. Далее, мы полагаем $\omega = \omega_\lambda$, $\widetilde{\omega} = \omega_\lambda|_{\mathcal{E}}$.

Теперь нетрудно описать структуру внутренних инфинитезимальных симметрий уравнения $\mathcal{E}$. Очевидно, что $X \in \operatorname{Sym}_i \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $X(\widetilde{\omega}) = \mu\widetilde{\omega}$, $\mu \in C^\infty(\mathcal{E})$. Так как $X(\widetilde{\omega}) = X \lrcorner d\widetilde{\omega} + d(X \lrcorner \widetilde{\omega})$, то, обозначая $X \lrcorner \widetilde{\omega}$ через f, легко проверить, что $X \in \operatorname{Sym}_i \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда

$$\mu\widetilde{\omega} = X \lrcorner d\widetilde{\omega} + d\widetilde{f} \tag{7.3}$$

Форма $d\widetilde{\omega}$ невырождена, поэтому отображение

$$\Gamma\colon D(\mathcal{E}) \longrightarrow \Lambda^1(\mathcal{E}), \qquad \Gamma\colon Y \mapsto -Y \lrcorner d\widetilde{\omega},$$

является изоморфизмом $C^\infty(\mathcal{E})$-модулей векторных полей и 1-форм на $\mathcal{E}$. Применив отображение Γ^{-1} к равенству (7.3), найдем, что $X \in \operatorname{Sym}_i \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда

$$\mu Y_{\widetilde{\omega}} = Y_{d\widetilde{f}} - X,$$

где $Y_\theta = \Gamma^{-1}(\theta)$, $\theta \in \Lambda^1(\mathcal{E})$.

Заметим теперь, что $Y_\theta \rfloor \theta = -Y_\theta \rfloor (Y_\theta \rfloor d\widetilde{\omega}) = 0$. Поэтому

$$(\mu Y_{\widetilde{\omega}})(\widetilde{\omega}) = (\mu Y_{\widetilde{\omega}}) \rfloor d\widetilde{\omega} + d(\mu Y_{\widetilde{\omega}} \rfloor \widetilde{\omega}) = -\mu\widetilde{\omega},$$

т. е. $\mu Y_{\widetilde{\omega}} \in \mathrm{Sym}_i\, \mathcal{E}$ (нетрудно видеть, что поля вида $\mu Y_{\widetilde{\omega}}$ направлены по характеристикам уравнения $\mathcal{E}$). Поэтому $X \in \mathrm{Sym}_i\, \mathcal{E}$ в том и только том случае, если $Y_{d\widetilde{f}} \in \mathrm{Sym}_i\, \mathcal{E}$. Но

$$Y_{d\widetilde{f}}(\widetilde{\omega}) = Y_{d\widetilde{f}} \rfloor d\widetilde{\omega} + d(Y_{d\widetilde{f}} \rfloor \widetilde{\omega}) = d((X + \mu Y_{\widetilde{\omega}}) \rfloor \widetilde{\omega}) - d\widetilde{f} = d(X \rfloor \widetilde{\omega}) - d\widetilde{f} = 0.$$

Поэтому $Y_{d\widetilde{f}} \in \mathrm{Sym}_i\, \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $Y_{d\widetilde{f}} \rfloor \widetilde{\omega} = \widetilde{f}$.

Перепишем последнее условие в более наглядном виде:

$$Y_{d\widetilde{f}} \rfloor \widetilde{\omega} = -Y_{d\widetilde{f}} \rfloor Y_{\widetilde{\omega}} \rfloor d\widetilde{\omega} = Y_{\widetilde{\omega}} \rfloor Y_{d\widetilde{f}} \rfloor d\widetilde{\omega} = Y_{\widetilde{\omega}} \rfloor (-d\widetilde{f}) = -Y_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{f}).$$

Тем самым доказано следующее предложение.

Утверждение 7.5. *Поле $X \in D(\mathcal{E})$ тогда и только тогда является внутренней симметрией уравнения $\mathcal{E}$, когда оно имеет вид*

$$X = \mu Y_{\widetilde{\omega}} + Y_{d\widetilde{f}},$$

где μ — некоторая функция и $Y_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{f}) = -\widetilde{f}$. При этом $X(\widetilde{\omega}) = \mu\widetilde{\omega}$.

Заметим, что поле Y_{dh}, $h \in C^\infty(\mathcal{E})$, является гамильтоновым с гамильтонианом h относительно той симплектической структуры на уравнении $\mathcal{E}$, которая задается 2-формой $d\widetilde{\omega}$. Поэтому внутренними симметриями уравнения $\mathcal{E}$ являются только те гамильтоновы поля на $\mathcal{E}$, гамильтонианы h которых удовлетворяют условию $Y_{\widetilde{\omega}}(h) = -h$.

Выясним теперь, как связаны между собой $\mathrm{Sym}_i\, \mathcal{E}$ и $\mathrm{Sym}_e\, \mathcal{E}$. Напомним, что контактное поле X на $J^1(\pi)$ однозначно определяется своей производящей функцией $f = X \rfloor \omega$, являясь единственным решением системы двух следующих уравнений

$$X \rfloor d\omega + df = X_1(f)\omega, \qquad f = X \rfloor \omega, \tag{7.4}$$

где поле $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ однозначно определяется условиями

$$X_1 \rfloor \omega = 1, \quad X_1 \rfloor d\omega = 0.$$

Теорема 7.6. *Контактное поле X_f тогда и только тогда является внешней симметрией уравнения $\mathcal{E}$ первого порядка с одной зависимой переменной, когда $Y_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{f}) = \widetilde{f}$.*

Доказательство. Из (7.4) следует, что

$$X_g(f) + X_g \lrcorner X_f \lrcorner d\omega = X_g(df + X_f \lrcorner d\omega) = X_g \lrcorner X_1(f)\omega = gX_1(f).$$

Аналогично, $X_f(g) + X_f \lrcorner X_g \lrcorner d\omega = fX_1(g)$. Так как $X_f \lrcorner X_g \lrcorner d\omega + X_g \lrcorner X_f \lrcorner d\omega = 0$, то

$$X_f(g) + X_g(f) = fX_1(g) + gX_1(f) = X_1(fg).$$

Пусть локально $\mathcal{E} = \{g = 0\}$, $dg_\theta \neq 0$, $\theta \in \mathcal{E}$. Тогда из последнего равенства следует, что

$$X_f(g)|_{\mathcal{E}} = -\widetilde{X}_g(\widetilde{f}) + \widetilde{f}X_1(g)|_{\mathcal{E}}, \tag{7.5}$$

где $\widetilde{X}$ обозначает ограничение поля X на $\mathcal{E}$, если X касается $\mathcal{E}$ (напомним, что поле X_g всегда касается гиперповерхности $\{g = 0\}$). Ограничивая равенство $-X_g \lrcorner d\omega = dg - X_1(g)\omega$ на $\mathcal{E}$, получаем

$$-\widetilde{X}_g \lrcorner d\widetilde{\omega} = \alpha\widetilde{\omega}, \quad \alpha = -X_1(g)|_{\mathcal{E}}.$$

Поэтому, в соответствии с введенными выше обозначениями,

$$\widetilde{X}_g = \alpha Y_{\widetilde{\omega}},$$

и, значит, (7.5) можно переписать в виде

$$X_f(g)|_{\mathcal{E}} = \alpha Y_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{f}) - \alpha\widetilde{f}.$$

Таким образом, равенство $X_f(g)|_{\mathcal{E}} = 0$ (т. е. условие касания поля X_f многообразия $\mathcal{E}$) будет выполнено тогда и только тогда, когда $Y_{\widetilde{\omega}}(\widetilde{f}) = \widetilde{f}$, так как $\alpha = -X_1(g)|_{\mathcal{E}} \neq 0$. Последнее следует из того, что $X_1|_\theta \notin T_\theta(\mathcal{E})$, так как $X_1 \in \ker d\omega|_\theta$, а $d\omega|_{\mathcal{E}} = 0$. □

Следствие 7.7. *Для уравнения первого порядка с одной зависимой переменной отображение* $\mathrm{Sym}_e\,\mathcal{E} \to \mathrm{Sym}_i\,\mathcal{E}$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h = f + \lambda g$, $\lambda \in C^\infty(J^1(\pi))$, $\lambda \neq 0$, и постараемся подобрать функцию λ так, чтобы выполнялось равенство $\widetilde{X}_h = \mu Y_t w + Y_{d\widetilde{f}}$. Согласно доказанной теореме, поле $\widetilde{X}_f$ является внутренней симметрией уравнения $\mathcal{E}$, и поэтому, согласно утверждению 7.5, выполнено равенство

$$\widetilde{X}_f = \nu Y_{\widetilde{\omega}} + Y_{d\widetilde{f}}, \quad \nu \in C^\infty(\mathcal{E}).$$

Далее, как было показано в гл. 2, $X_{\varphi\psi}=\varphi X_\psi+\psi X_\varphi-\varphi\psi X_1$. Отсюда и из (7.5) следует, что

$$\widetilde{X}_{\lambda g}=\widetilde{\lambda}\widetilde{X}_g=\alpha\widetilde{\lambda}Y_{\widetilde{\omega}},\quad \widetilde{\lambda}=\lambda|_{\mathcal{E}}.$$

Поэтому, выбрав в качестве λ такую функцию, что

$$\widetilde{\lambda}=\frac{\mu-\nu}{\alpha},\quad \alpha=-X_1(g)|_{\mathcal{E}},$$

мы можем считать, что $\widetilde{X}_h=\mu Y_{\widetilde{\omega}}+Y_{d\widetilde{f}}$. □

Пусть $\widetilde{X}_f=\mu Y_{\widetilde{\omega}}+Y_{d\widetilde{f}}$. Тогда, ограничивая равенство

$$X_f(\omega)=X_f\,\lrcorner\,d\omega+df=X_1(f)\omega$$

на уравнение $\mathcal{E}$ и учитывая, что X_f касается $\mathcal{E}$, получаем

$$\widetilde{X}_f(\widetilde{\omega})=\widetilde{X}_f\,\lrcorner\,d\widetilde{\omega}+d\widetilde{f}=\beta\widetilde{\omega},\quad \beta=X_1(f)|_{\mathcal{E}}.$$

С другой стороны, как показывает утверждение 7.5, если $Y=\mu Y_{\widetilde{\omega}}+Y_{d\widetilde{f}}$, то $Y(\widetilde{\omega})=\beta\widetilde{\omega}$. Поэтому $\beta=\mu$. Таким образом, справедливо следующее предложение.

Следствие 7.8. *Пусть $Y=\mu Y_{\widetilde{\omega}}+Y_{d\widetilde{f}}\in\operatorname{Sym}_i\mathcal{E}$. Тогда $\widetilde{X}_f=Y$ в том и только в том случае, когда $f|_{\mathcal{E}}=\widetilde{f}$ и $X_1(f)|_{\mathcal{E}}=\mu$.*

Из двух последних следствий непосредственно выводится главное утверждение.

Следствие 7.9. *Уравнения первого порядка относительно одной зависимой переменной являются ординарными, но не жесткими.*

ГЛАВА 4

ВЫСШИЕ СИММЕТРИИ

В гл. 3 мы рассматривали нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных как подмногообразия в пространствах $J^k(\pi)$, снабженные распределением Картана, и на основе этого подхода построили теорию симметрий. Оказывается, что при рассмотрении дифференциального уравнения не «самого по себе», а вместе со всеми его дифференциальными следствиями *) теория симметрий допускает естественное обобщение. При этом дифференциальные следствия образуют так называемое *бесконечное продолжение* уравнения, а «естественной средой», в которую эти продолжения помещаются, являются *пространства бесконечных джетов*. На них также существует распределение Картана, которое, в отличие от рассматривавшихся ранее, вполне интегрируемо. Изучение автоморфизмов этого распределения приводит к понятию *высшей симметрии* дифференциального уравнения. Широко известный пример таких симметрий — это серия высших уравнений Кортевега — де Фриза, а также аналогичные серии для других интегрируемых нелинейных систем (см. например, [31]).

Пространства бесконечных джетов, как и бесконечные продолжения большинства уравнений, являются бесконечномерными многообразиями, и поэтому мы начинаем изложение с описания основных дифференциально-геометрических конструкций (гладких функций, векторных полей, дифференциальных форм и т. д.) на этих многообразиях (§ 4.1). В § 4.2 вводится распределение Картана на пространстве бесконечных джетов и изучаются его инфинитезимальные автоморфизмы. Приводится полное описание этих автоморфизмов в терминах *эволюционных дифференцирований* (обобщений полей Ли) и их производящих функций. Следующий параграф посвящен геометрическому определению бесконечных продолжений и выводу определяющих уравнений на высшие симметрии. Наконец, в § 4.4 рассматриваются некоторые примеры вычислений.

---

*) Отметим, что при рассмотрении внешних и внутренних симметрий (§ 7 гл. 3) мы уже сталкивались с необходимостью рассмотрения дифференциальных следствий уравнения.

§ 1. Пространства бесконечных джетов и основные дифференциально-геометрические структуры на них

Пространство бесконечных джетов сечений расслоения $\pi\colon P \to M$ — это обратный предел башни конечных джетов относительно проекций $\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^k(\pi)$. Задача настоящего параграфа — определить основные элементы анализа и дифференциальной геометрии на $J^\infty(\pi)$ (гладкие функции, векторные поля, формы и т. д.), необходимые для построения теории высших симметрий. Решение этой задачи наталкивается на некоторые методологические трудности, источник которых — бесконечная размерность $J^\infty(\pi)$. Для преодоления этих трудностей мы переходим к двойственному алгебраическому языку колец гладких функций на этих многообразиях. Алгебро-геометрический дуализм значительно упрощает определение необходимых понятий и позволяет сделать все рассмотрения достаточно прозрачными. Чтобы убедиться в этом, достаточно отказаться от использования локальных координат и попытаться последовательно изложить этот материал, пользуясь только инвариантными алгебро-геометрическими средствами.

1.1. Многообразия $J^\infty(\pi)$. Пусть M — гладкое многообразие размерности n и $\pi\colon P \to M$ — гладкое векторное локально тривиальное расслоение над M, слой которого имеет размерность m.

Рассмотрим цепочку проекцнй (см. гл. 3)

$$M \xleftarrow{\pi} P \xleftarrow{\pi_{1,0}} J^1(\pi) \longleftarrow \ldots \longleftarrow J^k(\pi) \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} J^{k+1}(\pi) \longleftarrow \ldots \quad (1.1)$$

и для каждой точки $x \in M$ выберем последовательность точек $\theta_l \in J^l(\pi)$, $l = 0, 1, \ldots, k, \ldots$, так, чтобы имели место равенства $\pi_{l+1,l}(\theta_{l+1}) = \theta_l$, $\pi(\theta_0) = x$. В силу этих равенств, определения пространств $J^l(\pi)$ и леммы Бореля [48] можно выбрать такое локальное сечение s расслоения π, что $\theta_k = [s]_x^l$ при любом l. Таким образом, каждая точка θ_l определяется производными сечения s в точке x вплоть до порядка l, а вся последовательность точек $\{\theta_l\}$ содержит информацию о всех производных сечения s в точке x. Обозначим через $J^\infty(\pi)$ множество последовательностей указанного вида. Очевидно, что точки пространства $J^\infty(\pi)$ можно интерпретировать как классы сечений расслоения π, имеющие касание бесконечного порядка, или, что то же самое, как бесконечные ряды Тейлора этих сеченнй.

Для каждой точки $\theta_\infty = \{x, \theta_k\}_{k \in \mathbf{N}} \in J^\infty(\pi)$ положим $\pi_{\infty,k}(\theta_\infty) = \theta_k$ и $\pi_\infty(\theta_\infty) = x$. Тогда для всех $k \geqslant l \geqslant 0$ имеют место коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} J^\infty(\pi) \arrow[rr, "\pi_{\infty,k}"] \arrow[dr, "\pi_\infty"'] & & J^k(\pi) \arrow[dl, "\pi_k"] \\ & M & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} J^\infty(\pi) \arrow[rr, "\pi_{\infty,k}"] \arrow[dr, "\pi_{\infty,l}"'] & & J^k(\pi) \arrow[dl, "\pi_{k,l}"] \\ & J^l(\pi) & \end{tikzcd} \tag{1.2}$$

т. е. выполнены равенства $\pi_k \circ \pi_{\infty,k} = \pi_\infty$ и $\pi_{k,l} \circ \pi_{\infty,k} = \pi_{\infty,l}$. Кроме того, если s — сечение расслоения π, то определено отображение $j_\infty(s)\colon M \to J^\infty(\pi)$, задаваемое равенством $j_\infty(s)(x) = \{x, [s]_x^k\}_{k \in \mathbf{N}}$.

При этом справедливы соотношения $\pi_{\infty,k} \circ j_\infty(s) = j_k(s)$ и $\pi_\infty \circ j_\infty(s) = \mathrm{id}_M$, где id_M — тождественный диффеоморфизм многообразия M.

Определение 1.1. Сечение $j_\infty(s)$ расслоения $\pi_\infty\colon J^\infty \to M$ называется *бесконечным джетом сечения* $s \in \Gamma(\pi)$.

Как и пространства $J^k(\pi)$, $k \leqslant \infty$, множество $J^\infty(\pi)$ наделяется естественной структурой гладкого многообразия, однако, в отличие от первых, оно является бесконечномерным. Координаты в $J^\infty(\pi)$, возникающие над окрестностью $\mathcal{U} \subset M$, — это $x_1, \ldots, x_n$ и всевозможные функции вида p_σ^j, где $|\sigma|$ имеет произвольное (но конечное) значение.

Определение 1.2. Расслоение $\pi_\infty\colon J^\infty(\pi) \to M$ называется *расслоением бесконечных джетов*, а пространство $J^\infty(\pi)$ — *многообразием бесконечных джетов* расслоения π.

Нашей ближайшей целью будет построение аналогов основных дифференциально-геометрических понятий, встречающихся в дифференциальном исчислении на конечномерных многообразиях. При этом мы будем руководствоваться следующим, пока неформальным, но крайне важным принципом: любая естественная конструкция, возникающая на $J^\infty(\pi)$, должна «помнить» о том, что многообразие бесконечных джетов является пределом башни проекций конечномерных многообразий (1.1). Начнем с понятия гладкой функции на $J^\infty(\pi)$.

1.2. Гладкие функции на $J^\infty(\pi)$. Пусть M — гладкое многообразие и $C^\infty(M)$ — множество гладких функций на нем. Если M' — некоторое гладкое многообразие и $G\colon M' \to M$ — гладкое отображение, то оно порождает отображение $G^*\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M')$, действующее по правилу $G^*(f)(x') = f(G(x'))$, $f \in R$, $x' \in M'$, и удовлетворяющее соотношениям $G^*(f_1 + f_2) = G^*(f_1) + G^*(f_2)$, $G^*(f_1 f_2) = G^*(f_1)G^*(f_2)$ и $G^*(\alpha f) = \alpha G^*(f)$ для любых $f_1, f_2, f \in R$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Иными словами, G^* — гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр. Если G — субмерсия, то, как легко видеть, G^* — мономорфизм, т. е. $\ker G^* = 0$. Рассмотрим теперь последовательность субмерсий (1.1) и обозначим через $\mathcal{F}_k(\pi)$ кольцо гладких функций на многообразии $J^k(\pi)$, $k \geqslant 0$, а через $\mathcal{F}_{-\infty}(\pi)$ — кольцо $C^\infty(M)$. Тогда в соответствии с (1.1) определена цепочка вложений $\mathbb{R}$-алгебр

$$\mathcal{F}_{-\infty}(\pi) \xrightarrow{\nu} \mathcal{F}_0(\pi) \xrightarrow{\nu_{1,0}} \ldots \longrightarrow \mathcal{F}_k(\pi) \xrightarrow{\nu_{k+1,k}} \mathcal{F}_{k+1}(\pi) \longrightarrow \ldots,$$

где $\nu = \pi^*$ и $\nu_{k+1,k} = \pi^*_{k+1,k}$.

Определим теперь $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\pi)$ — алгебру гладких функций на $J^\infty(\pi)$. Из существования проекций $\pi_{\infty,k}$: $J^\infty(\pi) \to J^k(\pi)$ следует, что каждая из алгебр $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k(\pi)$ с помощью некоторого гомоморфизма ν_k должна вкладываться в алгебру $\mathcal{F}$. Из равенств $\pi_l \circ \pi_{k,l} = \pi_k$, $k \geqslant l$ (см. гл. 3), и коммутативности диаграммы (1.2) вытекает, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{-\infty} \arrow[r, "\nu"] \arrow[drr, "\nu_{-\infty}"'] & \mathcal{F}_0 \arrow[r] \arrow[dr, "\nu_0"] & \ldots \arrow[r] & \mathcal{F}_k \arrow[r, "\nu_{k+1,k}"] \arrow[dl, "\nu_k"'] & \mathcal{F}_{k+1} \arrow[r] \arrow[dll, "\nu_{k+1}"] & \ldots \\
 & & \mathcal{F} & & &
\end{tikzcd}$$

также коммутативна. Поэтому алгебра $\mathcal{F}$ должна содержать в себе объединение всех алгебр $\mathcal{F}_k$, $k = -\infty, 0, 1\ldots$ С другой стороны, поскольку $J^\infty(\pi)$ полностью определяется всеми своими проекциями на многообразия $J^k(\pi)$, естественно предположить, что $\mathcal{F}$ исчерпывается этим объединением. Итак, положим $\mathcal{F}(\pi) = \bigcup\limits_k \mathcal{F}_k(\pi)$. Из этого определения следует, что каждая из функций φ на $J^\infty(\pi)$ однозначно определяется своим ограничением на какое-то многообразие $J^k(\pi)$ с достаточно большим номером k. Это число называется *фильтрацией* функции φ и обозначается $\deg(\varphi)$. Очевидно, что множество $\mathcal{F}$ является коммутативной $\mathbb{R}$-алгеброй, операции в которой следующим образом связаны с фильтрацией:

$$\begin{gathered}
\deg(\varphi_1 + \varphi_2) \leqslant \max(\deg(\varphi_1), \deg(\varphi_2)), \\
\deg(\varphi_1 \varphi_2) = \max(\deg(\varphi_1), \deg(\varphi_2)), \\
\deg(\alpha\varphi) = \alpha \deg(\varphi), \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in \mathcal{F}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.
\end{gathered} \tag{1.3}$$

Алгебры $\mathcal{F}_k$ являются подалгебрами в $\mathcal{F}$, определяемыми условиями $\mathcal{F}_k = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \deg(\varphi) \leqslant k\}$. Алгебра $\mathcal{F}$ вместе с функцией $\deg$: $\mathcal{F} \to \mathbb{Z}$, принимающей целочисленные значения (а также, если это необходимо, значения $\pm\infty$) и обладающей свойствами (1.3), называется *фильтрованной*, или алгеброй с фильтраций. Фильтрация на алгебре $\mathcal{F}$ является алгебраическим соответствием башни проекций (1.1). Теперь мы можем уточнить сформулированный выше неформальный принцип.

Все естественные дифференциально-геометрические конструкции на $J^\infty(\pi)$ должны быть согласованы со структурой фильтрованной алгебры в $\mathcal{F}(\pi)$.

Пример 1.1. Пусть $G\colon J^k(\pi)\to J^k(\pi)$ — преобразование Ли пространства k-х джетов. Тогда, как было показано в предыдущей главе, G является k-м поднятием некоторого диффеоморфизма G_0 пространства $J^0(\pi)$, если $\dim(\pi)>1$, и $(k-1)$-м поднятием некоторого контактного преобразования G_1 многообразия $J^1(\pi)$, если $\dim(\pi)=1$. При этом совокупность $\left\{G_\varepsilon^{(l)}\right\}$ всех поднятий отображения G_ε (ε равно 0 или 1 в зависимости от размерности π) согласована с проекциями $\pi_{l,l-1}$ и определяет автоморфизм G_ε^* алгебры $\mathcal{F}$. При этом если $\varphi\in\mathcal{F}$ и $\deg(\varphi)\geqslant\varepsilon$, то

$$\deg G(\varphi)=\deg(\varphi).$$

Поэтому можно считать, что всякое преобразование Ли (рассматриваемое вместе со всеми его поднятиями) определяет диффеоморфизм пространства $J^\infty(\pi)$.

Определение 1.3. Отображение $G\colon J^\infty(\pi)\to J^\infty(\xi)$, где $\pi\colon E\to V$ и $\xi\colon Q\to M$ — векторные расслоения, называется *гладким*, если для всякой функции $\varphi\in\mathcal{F}(\xi)$ элемент $G^*(\varphi)=\varphi\circ G\in\in\mathcal{F}(\pi)$ является гладкой функцией на пространстве $J^\infty(\pi)$ и найдутся такие целые числа l и l_0, что

$$\deg G^*(\varphi)=\deg(\varphi)+l$$

для всех $\varphi\in\mathcal{F}(\xi)$, $\deg(\varphi)\geqslant l_0$.

Ниже мы опишем широкий класс гладких отображений, которые в отличие от отображений, построенных в примере 1.1, повышают фильтрацию. Для этого нам понадобится следующая интерпретация элементов $\varphi\in\mathcal{F}(\pi)$.

Пусть $\varphi\in\mathcal{F}=\mathcal{F}(\pi)$ и $\deg(\varphi)=k$, т. е. $\varphi\in\mathcal{F}_k$. Рассмотрим произвольное сечение s расслоения π. Тогда, как мы знаем, ему соответствует сечение $j_k(s)$ расслоения π_k, а композиция $\varphi\circ j_k(s)=\varphi(s)$ является гладкой функцией на многообразии M. Иными словами, функция φ сопоставляет гладким сечениям расслоения π элементы $C^\infty(M)$ и, поскольку точки, лежащие на графике сечения $j_k(s)$, суть отрезки длины k ряда Тейлора этого сечения, значения функции $\varphi(s)$ определяются производными сечения s до порядка k включительно. Таким образом, функция φ каноническим образом определяет нелинейный скалярный дифференциальный оператор на множестве сечений расслоения π, причем порядок этого оператора совпадает с фильтрацией элемента φ. Это соответствие становится еще более наглядным при переходе к координатным рассмотрениям: если $\mathcal{U}$ — окрестность в M и $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_\sigma, \ldots)$ — соответствующие локальные координаты в $J^\infty(\pi)$, то φ является функцией аргументов x_i, p^j_σ, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, $|\sigma| \leqslant k$, и если $s = (s^1(x), \ldots, s^m(x))$, то $\varphi(s) = \varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, \dfrac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right)$. Иногда удобно различать функции $\varphi \in \mathcal{F}$ и соответствующие им дифференциальные операторы. В этих случаях оператор, определяемый функцией φ, будет обозначаться через Δ_φ, а функция, соответствующая оператору Δ, через φ_Δ.

Построим теперь аналогичное соответствие для матричных дифференциальных операторов. Локально, над некоторой окрестностью $\mathcal{U} \subset M$, всякий матричный оператор, определенный на сечениях расслоения $\pi|_{\mathcal{U}}$, должен принимать свои значения в вектор-функциях, т. е. в сечениях прямого произведения $\pi'|_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^{m'} \to \mathcal{U}$, и на пересечении $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ двух таких окрестностей эти значения должны быть согласованы. Переход на глобальную точку зрения, т. е. изучение операторов, определенных над всем многообразием M, требует рассмотрения некоторого расслоения π', ограничение которого на U совпадает с расслоениями $\pi'|_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}' \to \mathcal{U}$. Иными словами, глобальным аналогом матричных дифференциальных операторов являются операторы, действующие из сечений локально тривиального расслоения π в сечения локально тривиального расслоения π' над тем же многообразием M.

Пусть Δ — матричный дифференциальный оператор порядка k, s — сечение расслоения π и $x \in M$. Тогда значение сечения $\Delta(s)$ в точке x определяется значениями частных производных вплоть до порядка k сечения s в той же точке или, что то же самое, k-м джетом сечения s в точке x. Иначе говоря, оператор Δ позволяет сопоставить каждой точке $\theta_k \in J^k(\pi)$ точку слоя расслоения π', растущего над $x = \pi_k(\theta_k)$. Последнее можно интерпретировать двояко.

Во-первых, это означает, что Δ определяет некоторое сечение φ_Δ расслоения $\pi_k^*(\pi')$ над $J^k(\pi)$, Это расслоение индуцированно из расслоения π' с помощью проекции π_k. Действительно, тотальное пространство индуцированного расслоения $\pi_k^*(\pi')$ состоит из таких точек $(\theta_k, \theta_0') \in J^k(\pi) \times J^0(\pi')$, что $\pi_k(\theta_k) = \pi'(\theta_0')$, и мы можем положить $\Phi_\Delta(\theta_k) = (\theta_k, (\Delta(s))(x))$, где $\theta_k = [s]_x^k$, $s \in \Gamma(\pi)$, рис. 4.1.

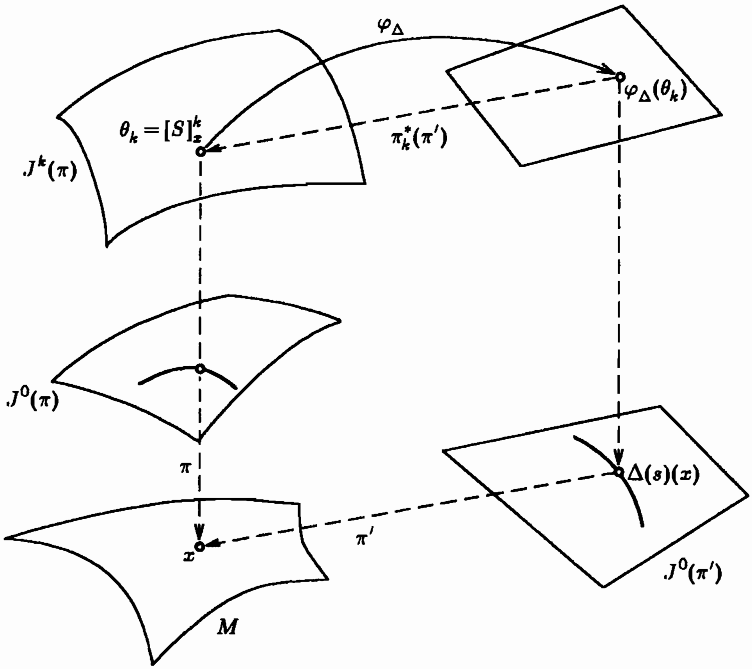

Рис. 4.1. Построение сечения φ_Δ

Во-вторых, из сказанного следует, что оператору Δ соответствует отображение пространств Φ_Δ: $J^k(\pi) \to J^0(\pi')$, согласованное с их проекциями на многообразие M, т. е. обладающее тем свойством, что $\pi' \circ \Phi_\Delta = \pi_k$. Если $\theta_k = [s]_x^k \in J^k(\pi)$, $s \in \Gamma(\pi)$, то мы полагаем $\Phi(\theta_k) = [\Delta(s)]_x^0 = (\Delta(s))(x)$. Тем самым определена следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} J^k(\pi) \arrow[rr, "\Phi_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_k"'] & & J^0(\pi') \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

т. е. Φ_Δ является морфизмом расслоения π_k в расслоение π'. Заметим, что для любого оператора Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ порядка k выполнено тождество

$$\Delta = \Phi_\Delta^* \circ j_k,$$

которое можно принять за определение. Здесь Φ_Δ^*: $\Gamma(\pi_k) \to \Gamma(\pi')$ — отображение, порожденное морфизмом Φ_Δ.

Пример 1.2. Построенный выше оператор j_k является оператором порядка k, действующим из расслоения π в расслоение π_k: $J^k(\pi) \to M$. Соответствующее ему сечение φ_{j_k} сопоставляет каждой точке $\theta_k \in J^k(\pi)$ ту же самую точку, но рассматриваемую как элемент слоя индуцированного расслоения $\pi_k^*(\pi_k)$, растущего над θ_k. Иными словами, φ_{j_k} является диагональю. Легко также видеть, что отображение Φ_{j_k}: $J^k(\pi) \to J^k(\pi) = J^0(\pi_k)$ является тождественным.

1.3. Продолжения дифференциальных операторов. Пусть Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ и Δ': $\Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi'')$ — два дифференциальных оператора порядков k и k' соответственно. Тогда их композиция $\Delta' \circ \Delta$ является дифференциальным оператором порядка не более $k + k'$. Чтобы установить этот (локально очевидный) факт, заметим следующее.

Во-первых, для всякого морфизма Φ расслоений π: $P \to M$ и ξ: $Q \to M$ определены его поднятия

$$\Phi^{(k)}\colon J^k(\pi) \to J^k(\xi), \quad k \geqslant 0, \qquad \Phi^{(k)}([s]_x^k) = [\Phi \circ s]_x^k$$

При этом справедливы соотношения

$$\Phi^{(0)} = \Phi, \qquad \Phi^{(l)} \circ \pi_{k,l} = \xi_{k,l} \circ \Phi^{(k)}, \qquad \xi_k \circ \Phi^{(k)} = \pi_k, \quad k \geqslant l.$$

Во-вторых, для любых $k, k' \geqslant 0$ можно построить отображение

$$\Phi_{k,k'}\colon J^{k+k'}(\pi) \to J^{k'}(\pi_k), \qquad \Phi_{k,k'}([s]_x^{k+k'}) = [j_k(s)]_{\theta_k}^{k'},$$

где $\theta_k = [s]_x^k$. Тогда $\pi_k = \Phi_{k,k'} \circ (\pi_k)_{k'}$ и, как легко видеть, $\Phi_{k,k'}(j_{k+k'}(s)) = j_{k'}(j_k(s))$, т. е., таким образом, $\Phi_{k,k'} \circ j_{k+k'} = j_{k'} \circ j_k$. Иными словами, $\Phi_{k,k'} = \Phi_{j_{k'} \circ j_k}$, и это доказывает, что композиция $j_{k'} \circ j_k$ является дифференциальным оператором порядка $k + k'$.

Вернемся к случаю произвольных операторов Δ, Δ' и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & J^{k'}(\pi_k) \arrow[r, "\Phi_\Delta^{(k')}"] \arrow[d, "(\pi_k)_{k',0}"'] & J^{k'}(\pi') \arrow[d, "\pi'_{k',0}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\Delta'}"] & \\
J^{k+k'}(\pi) \arrow[ur, "\Phi_{k,k'}"] \arrow[drr, "\pi_{k+k'}"'] & J^k(\pi) \arrow[r, "\Phi_\Delta"] \arrow[dr, "\pi_k"] & J^0(\pi') \arrow[d, "\pi'"] & J^0(\pi'') \arrow[dl, "\pi''"] \\
 & & M &
\end{tikzcd}$$

Из коммутативности этой диаграммы следует, что для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ выполняется равенство

$$\Delta'(\Delta(s)) = \Phi_{\Delta'}(\Phi_\Delta^{(k')}(\Phi_{k,k'}(j_{k+k'}(s)))),$$

т. е.

$$\Phi_{\Delta' \circ \Delta} = \Phi_{\Delta'} \circ \Phi_\Delta^{(k')} \circ \Phi_{k,k'},$$

что и доказывает искомый результат.

В частности, для любого оператора Δ определена его композиция Δ_l с оператором j_l: $\Gamma(\pi') \to \Gamma(\pi_l')$, $l \geqslant 0$. Пусть $\Phi_\Delta^l = \Phi_{\Delta_l}$: $J^{k+l}(\pi) \to J^l(\pi')$ — соответствующее отображение многообразий джетов. Тогда, как легко видеть, диаграмма (1.4) достраивается до следующей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & J^k(\pi) \arrow[dl, "\pi_k"'] \arrow[dd, "\Phi_\Delta = \Phi_\Delta^0"] & \ldots \arrow[l] & J^{k+l}(\pi) \arrow[l] \arrow[dd, "\Phi_\Delta^l"] & J^{k+l+1}(\pi) \arrow[l, "\pi_{k+l+1,k+l}"'] \arrow[dd, "\Phi_\Delta^{l+1}"] & \ldots \arrow[l] \\
M & & & & & \\
 & J^0(\pi') \arrow[ul, "\pi'"] & \ldots \arrow[l] & J^l(\pi') \arrow[l] & J^{l+1}(\pi') \arrow[l, "\pi'_{l+1,l}"'] & \ldots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Совокупность отображений $\Phi_\Delta = \{\Phi_\Delta^l\}_{l \geqslant 0}$ определяет гомоморфизм Φ_Δ^*: $\mathcal{F}(\pi') \to \mathcal{F}(\pi)$, который обладает свойством

$$\deg \Phi_\Delta^*(\varphi) = \deg(\varphi) + k, \qquad \varphi \in \mathcal{F}(\pi').$$

Таким образом, Φ_Δ является гладким отображением многообразия $J^\infty(\pi)$ в многообразие $J^\infty(\pi')$.

Определение 1.4. Оператор Δ_l называется *l-м продолжением* нелинейного дифференциального оператора Δ.

Как мы увидим ниже, это понятие играет чрезвычайно важную роль в исследовании дифференциальных уравнений. Пусть $\mathcal{U} \subset M$ — координатная окрестность в M, $(x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m, \ldots, p_\sigma^j, \ldots)$ — соответствующие координаты в $\pi_\infty|_\mathcal{U}$, а $(x_1, \ldots, x_n, v^1, \ldots, v^{m'}, \ldots$ $\ldots, q_\sigma^{j'}, \ldots)$ — координаты в $\pi'_\infty|_\mathcal{U}$. Если

$$(\Delta(s))^{j'} = \varphi^{j'}\left(x_1, \ldots, x_n, s^1(x), \ldots, s^m(x), \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}, \ldots\right),$$
$$s \in \Gamma(\pi|_\mathcal{U}), \tag{1.5}$$

— координатное представление оператора Δ и

$$j_k(s)(x_1,\ldots,x_n)=\left(x_1,\ldots,x_n,\ldots,\frac{\partial^{|\sigma|}s^j}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\ldots\right) \tag{1.6}$$

— координатное представление операторов Δ и j_k соответственно, то, как легко проверить, первое продолжение оператора Δ описывается соотношением (1.5), а также соотношениями

$$(\Delta(s))_i^{j'}=\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi^{j'}\left(x_1,\ldots,x_n,\ldots,\frac{\partial^{|\sigma|}s^j}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\ldots\right)=$$
$$=\frac{\partial\varphi^{j'}}{\partial x_i}+\sum_{j,\sigma}\frac{\partial\varphi^{j'}}{\partial p_\sigma^j}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial^{|\sigma|}s^j}{\partial x_1^{i_1}\ldots\partial x_n^{i_n}},\qquad i=1,\ldots,n;$$

или, эквивалентно, — соотношениями

$$\begin{cases} v^{j'}=\varphi^{j'}(x,\ldots,p_\sigma^j,\ldots),\\ q_i^{j'}=D_i\varphi^{j'},\quad i=1,\ldots,n,\end{cases}$$

где $D_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}+\sum\limits_{|\sigma|=0}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m}p_{\sigma+1_i}^j\dfrac{\partial}{\partial p_\sigma^j}$ — операторы полных производных.

Аналогично l-е продолжение оператора Δ определяется системой соотношений

$$q_\tau^{j'}=D_\tau\varphi^{j'},\qquad j'=1,\ldots,m',\quad |\tau|=0,\ldots,l, \tag{1.7}$$

где $D_\tau=D_1^{l_1}\circ\ldots\circ D_n^{l_n}$, если $\tau=(l_1,\ldots,l_n)$.

Пример 1.3. Пусть Δ — оператор, определяющий уравнение Бюргерса (см. гл. 3) и в координатах представленный в виде

$$v=p_{(0,1)}-up_{(1,0)}-p_{(2,0)}. \tag{1.8}$$

Тогда его первое продолжение имеет вид

$$v=p_{(0,1)}-up_{(1,0)}-p_{(2,0)},$$
$$q_{(1,0)}=p_{(1,1)}-p_{(1,0)}^2-up_{(2,0)}-p_{(3,0)},$$
$$q_{(0,1)}=p_{(0,2)}-p_{(1,0)}p_{(0,1)}-up_{(1,1)}-p_{(2,1)},$$

а l-е продолжение представляется в виде

$$q_{(i,j)}=D_1^iD_2^j(p_{(0,1)}-p_{(0,0)}p_{(1,0)}-p_{(2,0)})=$$
$$=p_{(i,j+1)}-p_{(i+2,j)}-\sum_{\alpha=0}^{i}\binom{i}{\alpha}\sum_{\beta=0}^{j}\binom{j}{\beta}p_{(\alpha,\beta)}p_{(i+1-\alpha,j-\beta)},\quad i+j\leqslant l.$$

Упражнение 1.1. Опишите l-е продолжение оператора j_k.

Рассмотрение матричных дифференциальных операторов приводит к отображениям объектов, имеющих более общий характер, чем алгебры вида $\mathcal{F}(\pi)$. Напомним, что всякий дифференциальный оператор $\nabla\colon \Gamma(\pi)\to\Gamma(\xi)$ порядка k отождествляется с сечением φ_∇ расслоения $\pi_k^*(\xi)$. Обозначим множество таких сечений через $\mathcal{F}_k(\pi,\xi)$. Как и для алгебр $\mathcal{F}(\pi)$, имеет место цепочка вложений

$$\mathcal{F}_{-\infty}(\pi,\xi)=\Gamma(\xi)\xrightarrow{\nu}\mathcal{F}_0(\pi,\xi)\to\ldots\to\mathcal{F}_k(\pi,\xi)\xrightarrow{\nu_{k+1,k}}\mathcal{F}_{k+1}(\pi,\xi)\to\ldots$$

и, следовательно, определено множество $\mathcal{F}(\pi,\xi)=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{F}_k(\pi,\xi)$, фильтрованное подмножествами $\mathcal{F}_k(\pi,\xi)$. Элементы $\mathcal{F}(\pi,\xi)$ можно складывать друг с другом и умножать на элементы из $\mathcal{F}(\pi)$, причем эти операции согласованы с фильтрацией, т. е. $\mathcal{F}(\pi,\xi)$ — *фильтрованный модуль* над фильтрованной алгеброй $\mathcal{F}(\pi)$. Если теперь рассмотреть некоторый оператор $\Delta\colon \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$ порядка l и его композицию с другим оператором $\nabla'\colon \Gamma(\pi')\to\Gamma(\xi)$ порядка k, то мы получим оператор, действующий из $\Gamma(\pi)$ в $\Gamma(\xi)$ и имеющий порядок $k+l$. Таким образом, мы имеем систему отображений $\Phi^k_{\Delta,\xi}\colon \mathcal{F}_k(\pi',\xi)\to\mathcal{F}_{k+l}(\pi,\xi)$ или, что то же самое, отображение $\Phi^*_{\Delta,\xi}\colon \mathcal{F}(\pi',\xi)\to\mathcal{F}(\pi,\xi)$, повышающее фильтрацию на l. При этом выполнены равенства

$$\Phi^*_{\Delta,\xi}(\varphi_1+\varphi_2)=\Phi^*_{\Delta,\xi}(\varphi_1)+\Phi^*_{\Delta,\xi}(\varphi_2),$$
$$\Phi^*_{\Delta,\xi}(\varphi\varphi_1)=\Phi^*_{\Delta}(\varphi)\Phi^*_{\Delta,\xi}(\varphi_1),\qquad \varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}(\pi',\xi),\quad \varphi\in\mathcal{F}(\pi).$$

Иными словами, для любого расслоения ξ отображение $\Phi^*_{\Delta,\xi}$ является гомоморфизмом фильтрованных модулей, действующим над гомоморфизмом Φ^*_Δ фильтрованных алгебр.

Упражнение 1.2. Постройте гомоморфизм $\Phi^*_{\Delta,\xi}$, исходя из гладкого отображения $\Phi_\Delta\colon J^\infty(\pi)\to J^\infty(\pi')$.

1.4. Векторные поля на $J^\infty(\pi)$. Перейдем теперь к анализу понятия векторного поля на многообразии $J^\infty(\pi)$. Пусть X_θ — касательный вектор в точке $\theta\in J^\infty(\pi)$. Тогда по естественным соображениям проекции $\pi_{\infty,k}$ и π_∞ должны определять последовательность касательных векторов $(\pi_{\infty,k})_*(X_\theta)$ в точках $\theta_k=\pi_{\infty,k}(\theta)$, а также касательный вектор $\pi_{\infty,*}(X_\theta)\in T_x(M)$, $x=\pi_\infty(\theta)$. Теперь, следуя уже знакомой читателю логике, мы определим касательный вектор X_θ к многообразию $J^\infty(\pi)$ в точке θ как совокупность $\left\{X_x, X_{\theta_k}\right\}$

таких касательных векторов к многообразиям M и $J^k(\pi)$ в точках $x=\pi_\infty(\theta)$ и $\theta_k=\pi_{\infty,k}(\theta)$ соответственно, что $(\pi_{k+1,k})_*(X_{\theta_{k+1}})=$ $=X_{\theta_k}$, $(\pi_k)_*(X_{\theta_k})=X_x$; см. рис. 4.2.

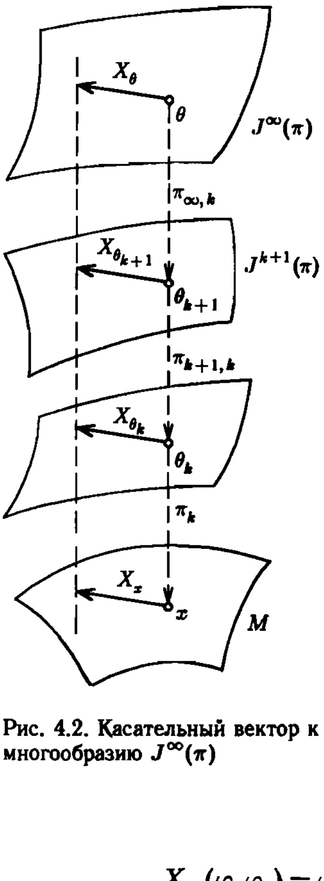

Рис. 4.2. Касательный вектор к многообразию $J^\infty(\pi)$

Если $\mathcal{U}\subset M$ — координатная окрестность точки $x\in M$ и $(x_1,\ldots,x_n,\ldots$ $\ldots,p^j_\sigma,\ldots)$ — канонические координаты в $\pi_\infty^{-1}(\mathcal{U})$, то всякий касательный к $J^\infty(\pi)$ вектор X_θ в точке θ представляется в виде бесконечной суммы

$$X_\theta=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{|\sigma|\geqslant 0}\sum_{j=1}^m b^j_\sigma\frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}, \quad (1.9)$$

в которой коэффициенты a_i, b^j_σ суть действительные числа. При этом

$$(\pi_{\infty,k})_*(X_\theta)=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{|\sigma|=0}^k\sum_{j=1}^m b^j_\sigma\frac{\partial}{\partial p^j_\sigma},$$

$$(\pi_\infty)_*(X_\theta)=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Пусть X_θ — касательный вектор к $J^\infty(\pi)$ в точке θ и X_{θ_k} — его проекция в $T_{\theta_k}(J^k(\pi))$. Тогда вектор X_{θ_k} можно понимать как дифференцирование алгебры гладких функций на $J^k(\pi)$ в поле констант $\mathbb{R}$, т. е. как отображение $X_{\theta_k}\colon$ $\mathcal{F}_k\to\mathbb{R}$, обладающее свойством

$$X_{\theta_k}(\varphi_1\varphi_2)=\varphi_1(\theta_k)X_{\theta_k}(\varphi_2)+\varphi_2(\theta_k)X_{\theta_k}(\varphi_1),$$

где $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{F}_k$. Условие согласованности системы векторов X_{θ_k}, X_x с проекциями $\pi_{\infty,k}$, π_k означает, что $X_{\theta_{k+1}}\circ\nu_{k+1,k}=X_{\theta_k}$, $X_{\theta_0}\circ\nu=X_x$, т. е. что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{-\infty} \arrow[r, "\nu"] \arrow[drrr, "X_x"'] & \mathcal{F}_0 \arrow[r] \arrow[drr, "X_{\theta_0}"] & \ldots \arrow[r] & \mathcal{F}_k \arrow[r, "\nu_{k+1,k}"] \arrow[d, "X_{\theta_k}"'] & \mathcal{F}_{k+1} \arrow[r] \arrow[dl, "X_{\theta_{k+1}}"] & \ldots \\
 & & & \mathbb{R} & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Иными словами, как и в случае конечномерных многообразий, касательный вектор X_θ интерпретируется как дифференцирование алгебры $\mathcal{F}$ со значениями в поле действительных чисел:

$$X_\theta(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1(\theta)X_\theta(\varphi_2) + \varphi_2(\theta)X_\theta(\varphi_1), \tag{1.10}$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$.

Если теперь рассмотреть семейство $X = \{X_\theta\}$ касательных векторов на $J^\infty(\pi)$, параметризованных точками $\theta \in J^\infty(\pi)$, т. е. векторное поле на $J^\infty(\pi)$, то формула (1.10) преобразуется в соотношение

$$X(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1 X(\varphi_2) + \varphi_2 X(\varphi_1), \tag{1.11}$$

справедливое для всех гладких функций φ_1, φ_2 на $J^\infty(\pi)$. Чтобы завершить наши рассуждения, осталось вспомнить о наличии фильтрации в алгебре $\mathcal{F}(\pi)$ и определить векторное поле на многообразии $J^\infty(\pi)$ как такое дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(\pi)$ (т. е. $\mathbb{R}$-линейное отображение $X\colon\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, удовлетворяющее тождеству Лейбница (1.11)), что

$$\deg X(\varphi) = \deg(\varphi) + k, \qquad \varphi \in \mathcal{F},$$

где k — некоторое не зависящее от φ целое число, которое мы обозначим $\deg(X)$. Через $D(\pi)$ обозначим множество векторных полей на $J^\infty(\pi)$.

Определение 1.5. Поле $X \in D(\pi)$ называется *вертикальным* (или *π-вертикальным*), если $X(\pi_\infty^*(\varphi)) = 0$ для любой функции $\varphi \in C^\infty(M) \subset \mathcal{F}$.

Множество вертикальных полей обозначается через $D^v(\pi)$.

Упражнение 1.3. Покажите, что если $X, Y \in D(\pi)$ и $\varphi \in \mathcal{F}$, то $X + Y, \varphi X$ и $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ также являются векторными полями на $J^\infty(\pi)$, причем выполняются тождества

$$\begin{gathered}
[X, Y] + [Y, X] = 0,\\
[X, \varphi Y] = X(\varphi)Y + \varphi[X, Y],\\
[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z],\ \ Z \in D(\pi),\\
[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,
\end{gathered}$$

т. е. множество векторных полей на $J^\infty(\pi)$ обладает теми же алгебраическими свойствами, что и поля на конечномерных многообразиях, и, в частности, образует $\mathbb{R}$-алгебру Ли. При этом $D^v(\pi)$ — ее подалгебра.

Пример 1.4 (поднятия векторных полей). Пусть X — векторное поле на многообразии M, φ — гладкая функция на $J^\infty(\pi)$, для которой $\deg(\varphi) = k$, и $\Delta = \Delta_\varphi\colon\ \Gamma(\pi) \to C^\infty(M)$ — соответствующий ей дифференциальный оператор. Тогда, поскольку X является дифференциальным оператором первого порядка, действующим из $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$, определена композиция $X \circ \Delta$: $\Gamma(\pi) \to C^\infty(M)$, являющаяся дифференциальным оператором порядка $k+1$. Обозначим через $\widehat{X}(\varphi)$ функцию на $\mathcal{F}$, соответствующую оператору $X \circ \Delta$.

Упражнение 1.4. Покажите, что соответствие $\widehat{X}$: $\varphi \mapsto \widehat{X}(\varphi)$ является векторным полем на $J^\infty(\pi)$ с $\deg(\widehat{X}) = 1$.

Дадим геометрический вариант определения поля $\widehat{X}$. Пусть $x \in M$ и θ_k — точка в $J^k(\pi)$, лежащая в слое расслоения π_k над x. Тогда $\theta_k = [s]_x^k$ для некоторого сечения $s \in \Gamma(\pi)$. Если φ — гладкая функция на $J^k(\pi)$ в окрестности точки θ_k, положим $\widehat{X}_{\theta_k}(\varphi) = X_x(s^*(\varphi))$. Очевидно, правая часть последнего выражения не зависит от представителя s точки θ_k. Таким образом, X_{θ_k} — касательный вектор к $J^k(\pi)$ в точке θ_k. Если теперь $\{x, \theta_k\}$ — последовательность точек, определяющая точку $\theta \in J^\infty(\pi)$, то, как легко видеть, $(\pi_{k+1,k})_*(\widehat{X}_{\theta_{k+1}}) = \widehat{X}_{\theta_k}$ и $(\pi_k)_*(\widehat{X}_{\theta_k}) = X_x$, т. е. последовательность векторов $\left\{X_x, \widehat{X}_{\theta_k}\right\}$ определяет касательный вектор к многообразию $J^\infty(\pi)$ в точке θ.

Определение 1.6. Поле $\widehat{X}$ на $J^\infty(\pi)$ называется *поднятием векторного поля* $X \in D(M)$ на пространство бесконечных джетов.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства операции поднятия:

$$\widehat{fX + gY} = f\widehat{X} + g\widehat{Y}, \tag{1.12а}$$

$$\widehat{[X, Y]} = [\widehat{X}, \widehat{Y}], \tag{1.12б}$$

$$\widehat{X}(f\varphi) = X(f)\varphi + f\widehat{X}(\varphi), \tag{1.12в}$$

где $f, g \in C^\infty(M)$, $\varphi \in \mathcal{F}$, $X, Y \in D(M)$. Равенства (1.12а) — (1.12б) означают, что операция поднятия является гомоморфизмом алгебры Ли векторных полей на M в алгебру Ли $D(\pi)$, а из равенства (1.12в) следует, что проекция на M поднятия в $J^\infty(\pi)$ всякого поля $X \in D(M)$ совпадает с исходным полем. Иными словами, соответствие $X \mapsto \widehat{X}$ есть плоская (интегрируемая) связность в расслоении π_∞. Этот факт играет фундаментальную роль в геометрии многообразий $J^\infty(\pi)$, и мы будем неоднократно обращаться к нему при последующем изложении. По причинам, которые станут понятны в § 2, эта связность называется *связностью Картана*.

Если $(x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m, \ldots, p_\sigma^j, \ldots)$ — координаты в $J^\infty(\pi)$ над некоторой координатной окрестностью $\mathcal{U} \subset M$, то всякое поле

$X \in D(M)$ представляется в виде бесконечной суммы

$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial}{\partial x_n} + \ldots + X_\sigma^j \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j} + \ldots, \tag{1.13}$$

где $X_i, X_\sigma^j \in \mathcal{F}(\pi|_{\mathcal{U}})$, причем, начиная с некоторого $k_0 \geqslant 0$, для всех j и таких σ, что $|\sigma| \geqslant k_0$, выполняются равенства $\deg(X_\sigma^j) = |\sigma| + k$, $k = \deg(X)$. Вертикальные поля характеризуются тем, что для них все коэффициенты при X_i равны нулю. Отметим, что бесконечность числа слагаемых в правой части выражения (1.13) не вызывает вычислительных трудностей типа проверки сходимости и т. п., поскольку в силу определения алгебры $\mathcal{F}(\pi)$ каждая функция $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$ может зависеть только от конечного числа аргументов и, следовательно, количество слагаемых в выражениях $X(\varphi)$ для конкретной функции φ также всегда конечно.

Приведем координатное представление поднятий векторных полей из $D(M)$. Как показывает равенство (1.12а), это достаточно сделать для полей вида $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Пусть $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p_\sigma^j, \ldots) \in \mathcal{F}$ и $s = (s^1, \ldots, s^m) \in \Gamma(\pi)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \Delta_\varphi\right)(s) = \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}, \ldots\right) =$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma} \frac{\partial^{|\sigma|+1} s^j}{\partial x_i \partial x^\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma^j}.$$

Поэтому

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\sigma|=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} p_{\sigma+1_i}^j \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}. \tag{1.14}$$

Таким образом, поднятия базисных векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ совпадают с операторами D_i полных производных по направлению x_i. Равенство (1.12б) показывает, что $[D_{i_1}, D_{i_2}] = 0$ для всех $i_1, i_2 = 1, \ldots, n$. Отметим, что поля D_i переводят функции на k-х джетах в функции на $(k+1)$-х джетах, и потому не определяют никаких векторных полей на многообразиях джетов конечного порядка. Поэтому трактовка «усеченных» полных производных как векторных полей, использовавшаяся в предыдущей главе, некорректна (хотя обманчивый вид их координатной записи может привести к противоположным выводам). Сказанное является одной из иллюстраций пользы перехода к бесконечным джетам.

Замечание 1.1. Конструкция поднятия имеет место в более общей ситуации. Пусть $\nabla\colon\ \Gamma(\xi)\to\Gamma(\xi')$ — линейный дифференциальный оператор, $\varphi\in\mathcal{F}(\pi,\xi)$. Рассмотрим оператор $\Delta=\Delta_\varphi$: $\Gamma(\pi)\to\Gamma(\xi)$ и композицию $\nabla\circ\Delta\colon\ \Gamma(\pi)\to\Gamma(\xi')$. Тогда, полагая $\widehat{\nabla}(\varphi)=$ $=\varphi_{\nabla\circ\Delta}$, получим отображение $\widehat{\nabla}=\widehat{\nabla}_\pi\colon\ \mathcal{F}(\pi,\xi)\to\mathcal{F}(\pi,\xi')$, являющееся $\mathbb{R}$-линейным оператором.

Упражнение 1.5. Дайте точечное определение оператора $\widehat{\nabla}$ аналогично тому, как выше было сделано для поднятий векторных полей, и выпишите оператор $\widehat{\nabla}$ в координатах.

1.5. Дифференциальные формы на $J^\infty(\pi)$. Обсудим понятие дифференциальной формы на $J^\infty(\pi)$. Пусть $\Lambda^i(\pi_k)\overset{\text{def}}{=}$ $\overset{\text{def}}{=}\Lambda^i(J^k(\pi))$ — модуль i-х форм на $J^k(\pi)$. Проекции π и $\pi_{k+1,k}$ порождают бесконечную последовательность вложений

$$\Lambda^i(M)\xrightarrow{\nu}\Lambda^i(\pi_0)\xrightarrow{\nu_{1,0}}\Lambda^i(\pi_1)\to\ldots\to\Lambda^i(\pi_k)\xrightarrow{\nu_{k+1,k}}\Lambda^i(\pi_{k+1})\to\ldots$$

Не вдаваясь в уже знакомые читателю мотивировки, определим модуль $\Lambda^i(\pi)$ i-х форм на $J^\infty(\pi)$, полагая $\Lambda^i(\pi)=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\Lambda^i(\pi_k)$. В частности, $\Lambda^0(\pi)=\mathcal{F}(\pi)$. Положим также $\Lambda^*(\pi)=\oplus_{i=0}^{\infty}\Lambda^i(\pi)$. Как и выше, модули $\Lambda^i(\pi)$ и $\Lambda^*(\pi)$ фильтрованы своими подмодулями $\Lambda^i(\pi_k)$ и $\Lambda^*(\pi_k)$ соответственно*). В силу данного определения любой элемент из $\Lambda^*(\pi)$ на самом деле является формой на некотором многообразии конечных джетов, поэтому для таких элементов определены операция $\wedge$ внешнего умножения и дифференциал d, обладающие обычными свойствами.

Пусть $X\in D(\pi)$ — векторное поле и $\omega\in\Lambda^i(\pi)$ — дифференциальная форма на $J^\infty(\pi)$. Определим *операцию подстановки* $\lrcorner$, сопоставляющую этим двум объектам форму $X\lrcorner\omega\in\Lambda^{i-1}(\pi)$. Пусть $\theta=\{x,\theta_k\}\in J^\infty(\pi)$ — точка в $J^\infty(\pi)$ и $X_\theta=\{X_x,X_{\theta_k}\}$ — вектор поля X в этой точке. Рассмотрим такое число k, что $\omega\in\Lambda^i(\pi_k)$; оно всегда существует по определению модуля $\Lambda^i(\pi)$. Положим $(X\lrcorner\omega)_\theta=$ $=X_{\theta_k}\lrcorner\omega_{\theta_k}$. Для любого $k'\geqslant k$ имеет место равенство $(\pi_{k',k})_*(X_{\theta_{k'}})=$ $=X_{\theta_k}$, поэтому имеем $X_{\theta_{k'}}\lrcorner(\pi^*_{k',k}\omega)_{\theta_{k'}}=X_{\theta_k}\lrcorner\omega_{\theta_k}$, так что данное нами определение корректно. Если при этом $\deg(X)=l$, то вектор X_{θ_k}

*) Точнее говоря, вложения $\nu_{k+1,k}$ являются гомоморфизмами модулей над соответствующими вложениями алгебр $\mathcal{F}_k\to\mathcal{F}_{k+1}$. Чтобы получить фильтрацию модуля $\Lambda^*(\pi)$ системой $\mathcal{F}$-подмодулей, следует рассмотреть подмодули в $\Lambda^*(\pi)$, порожденные элементами из $\Lambda^*(\pi_k)$, т. е. состоящие из дифференциальных форм на $J^k(\pi)$, коэффициенты которых могут быть произвольными функциями из $\mathcal{F}(\pi)$.

определяется точкой $\theta_{k+l} \in J^{k+l}(\pi)$, так что $X \rfloor \omega \in \Lambda^{i-1}(\pi_{k+l}) \subset \subset \Lambda^{i-1}(\pi)$. В частности, операция подстановки векторного поля в 1-форму определят изоморфизм

$$D(\pi) \simeq \hom^0_{\mathcal{F}(\pi)}(\Lambda^1(\pi), \mathcal{F}(\pi)), \tag{1.15}$$

где $\hom^0_{\mathcal{F}(\pi)}$ обозначает множество $\mathcal{F}(\pi)$-гомоморфизмов, сохраняющих фильтрацию. При этом изоморфизме каждому полю $X \in D(\pi)$ сопоставляется гомоморфизм f_X: $\Lambda^1(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$, действующий по правилу $f_X(d\varphi) = X(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$.

Теперь мы можем определить *производную Ли* $L_X\omega$ формы $\omega \in \Lambda^*(\pi)$ вдоль векторного поля $X \in D(\pi)$. Для этого, воспользовавшись инфинитезимальной формулой Стокса, положим

$$L_X\omega = X \rfloor d\omega + d(X \rfloor \omega). \tag{1.16}$$

Очевидно, если $\omega \in \Lambda^i(\pi_k)$ и $\deg(X) = l$, то $L_X\omega \in \Lambda^i(\pi_{k+l})$. Для производной формы ω вдоль поля X мы будем также использовать обозначение $X(\omega)$.

Введенные нами на множестве $\Lambda^*(\pi)$ операции (внешнее умножение, дифференциал де Рама, подстановка и производная Ли) обладают всеми свойствами, которые характерны для их прототипов в конечномерном случае. То же относится и к их координатному представлению. Если $\mathcal{U}$ — координатная окрестность в многообразии M и $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_\sigma, \ldots)$ — соответствующие координаты в $\pi^{-1}_\infty(\mathcal{U})$, то всякую форму $\omega \in \Lambda^i(\pi)$ можно представить в виде

$$\omega = \sum_{\alpha+\beta=i} \varphi^{\sigma_1,\ldots,\sigma_\beta}_{i_1,\ldots,i_\alpha,j_1,\ldots,j_\beta} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge dp^{j_1}_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge dp^{j_\beta}_{\sigma_\beta}, \tag{1.17}$$

где $|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_\beta| \leqslant k$, а $\varphi^{\sigma_1,\ldots,\sigma_\beta}_{i_1,\ldots,i_\alpha,j_1,\ldots,j_\beta}$ — гладкие функции на $\pi^{-1}_\infty(\mathcal{U})$. Тогда координатная запись дифференциала имеет вид

$$d\omega = \sum_{\alpha+\beta=i} d\varphi^{\sigma_1,\ldots,\sigma_\beta}_{i_1,\ldots,i_\alpha,j_1,\ldots,j_\beta} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_\alpha} \wedge dp^{j_1}_{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge dp^{j_\beta}_{\sigma_\beta},$$

где

$$d\varphi^{\sigma_1,\ldots,\sigma_\beta}_{i_1,\ldots,i_\alpha,j_1,\ldots,j_\beta} = \sum_\gamma \frac{\partial \varphi^{\sigma_1,\ldots,\sigma_\beta}_{i_1,\ldots,i_\alpha,j_1,\ldots,j_\beta}}{\partial x_\gamma} dx_\gamma + \sum_{\delta,\tau} \frac{\partial \varphi^{\sigma_1,\ldots,\sigma_\beta}_{i_1,\ldots,i_\alpha,j_1,\ldots,j_\beta}}{\partial p^\delta_\tau} dp^\delta_\tau.$$

Упражнение 1.6. Выпишите координатные формулы для операции подстановки и для производной Ли на $J^\infty(\pi)$.

1.6. Горизонтальный комплекс де Рама. Среди всех форм на $J^\infty(\pi)$ мы выделим специальный класс $\Lambda_0^*(\pi)$, элементы которого будут называться *горизонтальными формами.*

Определение 1.7. Форма $\omega \in \Lambda^*(\pi)$ называется *горизонтальной*, если $X \rfloor \omega = 0$ для любого вертикального поля $X \in D^v(\pi)$.

Поскольку всякое вертикальное поле локально имеет вид

$$X = \sum_{j,\sigma} X_\sigma^j \frac{\partial}{\partial p_\sigma^j},$$

из представления (1.17) следует, что форма ω горизонтальна тогда и только тогда, когда в координатном представлении она имеет вид

$$\omega = \sum \varphi_{i_1,\ldots,i_\alpha} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_\alpha}, \qquad \varphi_{i_1,\ldots,i_\alpha} \in \mathcal{F}(\pi). \tag{1.18}$$

Таким образом, локально всякая горизонтальная форма является линейной комбинацией форм на многообразии M с коэффициентами из $\mathcal{F}$: $\omega = \varphi^1\omega_1 + \ldots + \varphi^l\omega_l$, где $\varphi^1, \ldots, \varphi^l \in \mathcal{F}(\pi), \omega_1, \ldots, \omega_l \in \in \Lambda^*(M)$. Пусть $\Delta^1, \ldots, \Delta^l$ — нелинейные дифференциальные операторы, соответствующие функциям $\varphi^1, \ldots, \varphi^l$ и действующие из сечений расслоения π в $C^\infty(M)$. Тогда форме ω можно сопоставить оператор Δ_ω, действующий по правилу

$$\Delta_\omega(s) = \Delta^1(s)\omega_1 + \ldots + \Delta^l(s)\omega_l, \quad s \in \Gamma(\pi),$$

и сопоставляющий сечениям расслоения π дифференциальные формы на многообразии M. Обратно, всякому такому оператору соответствует форма вида (1.18). Итак, горизонтальные формы на $J^\infty(\pi)$ — это нелинейные дифференциальные операторы на расслоении π со значениями в дифференциальных формах на многообразии M. Модуль горизонтальных i-форм на $J^\infty(\pi)$ обозначается через $\Lambda_0^i(\pi)$.

Если через t^*: $T^*(M) \to M$ обозначить кокасательное расслоение многообразия M, а через $\Lambda^*(t^*)$ — расслоение $\bigoplus_{i=1}^{n} \Lambda^i(t^*)$, то из сказанного выше вытекают отождествления

$$\Lambda_0^i(\pi) = \mathcal{F}(\pi, \Lambda^i(t^*)), \qquad \Lambda_0^*(\pi) = \mathcal{F}(\pi, \Lambda^*(t^*)).$$

Заметим теперь, что оператор $d = d_M$ внешнего дифференцирования форм на многообразии M — это линейный дифференциальный оператор первого порядка, действующий из сечений расслоения $\Lambda^i(t^*)$ в сечения $\Lambda^{i+1}(t^*), i = 0, \ldots, n$. Используя определение поднятия линейного оператора (см. замечание 1.1), мы получим оператор $\widehat{d}\colon \mathcal{F}(\pi, \Lambda^i(t^*)) \to \mathcal{F}(\pi, \Lambda^{i+1}(t^*))$. При этом поскольку $d \circ d = 0$, то и $\widehat{d}^2(\omega) = 0$ для любой горизонтальной формы $\omega \in \Lambda_0^*(\pi)$. Действительно, $\widehat{d}^2(\omega) = (\widehat{d} \circ \widehat{d})(\omega) = (\widehat{d \circ d})(\omega) = 0$. Таким образом, определена последовательность

$$0 \to \mathcal{F}(\pi) \xrightarrow{\widehat{d}} \Lambda_0^1(\pi) \to \ldots$$
$$\ldots \to \Lambda_0^i(\pi) \xrightarrow{\widehat{d}} \Lambda_0^{i+1}(\pi) \to \ldots \to \Lambda_0^n(\pi) \to 0, \qquad (1.19)$$

в которой композиция любых двух соседних операторов тривиальна.

Определение 1.8. Последовательность (1.19) называется *горизонтальным комплексом де Рама* расслоения π.

Выпишем оператор $\widehat{d}$ в координатах. Это достаточно сделать для горизонтальных 0-форм, т. е. для функций на $J^\infty(\pi)$. Пусть $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p_\sigma^j, \ldots) \in \mathcal{F}(\pi|_{\mathcal{U}})$, где $\mathcal{U}$ — координатная окрестность в M, и $s \in \Gamma(\pi)$. Тогда

$$(\widehat{d}\varphi)(s) = d(\varphi(s)) = d\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}, \ldots\right) =$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \sum_{\sigma, j} \frac{\partial^{|\sigma|+1} s^j}{\partial x_\alpha \partial x^\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\sigma^j}\right) dx_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\varphi) dx_\alpha.$$

Таким образом,

$$\widehat{d}(\varphi) = \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha(\varphi) dx_\alpha, \qquad (1.20)$$

где D_α, $\alpha = 1, \ldots, n$, — введенные выше операторы полных производных.

1.7. Распределения на $J^\infty(\pi)$ и их автоморфизмы. Последний вопрос, который нам предстоит обсудить в настоящем параграфе, — это распределения на многообразиях $J^\infty(\pi)$. По аналогии с конечномерным случаем (см. § 1.3) под распределением $\mathcal{P}$ на $J^\infty(\pi)$ следует понимать соответствие $\mathcal{P}\colon \theta \mapsto \mathcal{P}_\theta \subset T_\theta(J^\infty(\pi))$, сопоставляющее каждой точке $\theta \in J^\infty(\pi)$ касательное подпространство, «гладко зависящее от θ». Однако, в силу специфических особенностей многообразия $J^\infty(\pi)$, связанных с его бесконечномерностью, это определение нуждается в уточнении. Пусть для каждого $k \geqslant 0$ на многообразии $J^k(\pi)$ задано распределение $\mathcal{P}^k\colon \theta_k \mapsto \mathcal{P}_{\theta_k}^k \subset T_{\theta_k}(J^k(\pi))$, причем

$$(\pi_{k+1,k})_*(\mathcal{P}_{\theta_{k+1}}^{k+1}) \subset \mathcal{P}_{\pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})}^k \qquad (1.21)$$

для всех $k \geqslant 0$ и точек $\theta_{k+1} \in J^{k+1}(\pi)$.

Определение 1.9. Систему распределений $\mathcal{P}=\{\mathcal{P}^k\}$, удовлетворяющую условию (1.21), мы будем называть *предраспределением на* $J^\infty(\pi)$. Скажем, что два предраспределения $\mathcal{P}$ и $\bar{\mathcal{P}}$ эквивалентны, если найдется такое $k_0 \geqslant 0$, что $\mathcal{P}^k=\bar{\mathcal{P}}^k$ для всех $k \geqslant k_0$, и класс эквивалентных предраспределений будем называть *распределением на* $J^\infty(\pi)$.

Будем говорить, что вектор $X_\theta \in T_\theta(J^\infty(\pi))$ лежит в распределении, если $(\pi_{\infty,k})_*(X_\theta) \in \mathcal{P}^k_{\pi_{\infty,k}(\theta)}$ для всех k, θ и какого-то представителя $\mathcal{P}$ этого распределения.

Упражнение 1.7. Покажите, что отношение принадлежности вектора распределению не зависит от выбора представителя.

Рассмотрим в модуле $\Lambda^1(\pi_k)$ подмножество $\mathcal{P}^k\Lambda^1$, состоящее из 1-форм, аннулируемых векторами из распределения $\mathcal{P}^k$; положим также $\mathcal{P}^k\Lambda^*=\Lambda^*(\pi_k)\wedge\mathcal{P}^k\Lambda^1$. Элементы последнего множества имеют вид $\omega=\sum\limits_\alpha \Omega_\alpha\wedge\omega_\alpha$ где $\Omega_\alpha\in\Lambda^*(\pi_k)$ и $\omega_\alpha\in\mathcal{P}^k\Lambda^1$. Множество $\mathcal{P}^k\Lambda^*$ замкнутое относительно сложения и умножения на произвольную форму из $\Lambda^*(\pi_k)$, называется *идеалом распределения* $\mathcal{P}^k$. Из вложений (1.21) следует существование цепочки вложений

$$\mathcal{P}^0\Lambda^*\subset\mathcal{P}^1\Lambda^*\subset\ldots\subset\mathcal{P}^k\Lambda^*\subset\mathcal{P}^{k+1}\Lambda^*\subset\ldots,$$

которая определяет идеал $\mathcal{P}\Lambda^*=\bigcup\limits_{k\geqslant 0}\mathcal{P}^k\Lambda^*$ в $\Lambda^*(\pi)$. Этот идеал называется идеалом распределения $\mathcal{P}$. Очевидно и обратное: всякий идеал в $\Lambda^*(\pi)$ указанного вида определяет распределение на $J^\infty(\pi)$. Воспользовавшись теперь изоморфизмом (1.15), мы можем дать двойственное определение распределения на $J^\infty(\pi)$ как множества $\mathcal{P}D(\pi)$ таких векторных полей X на $J^\infty(\pi)$, что $X \lrcorner\, \omega=0$ для любой формы $\omega\in\mathcal{P}\Lambda^1(\pi)$.

Упражнение 1.8. Докажите, что $\mathcal{P}\Lambda^*$ и $\mathcal{P}D(\pi)$ не зависят от выбора представителя распределения $\mathcal{P}$.

Напомним, что подмногообразие N конечномерного подмногообразия M с распределением $\mathcal{P}'$ называется интегральным, если для любой точки $x\in N$ имеет место вложение $T_x(N)\subset\mathcal{P}'_x$. Оно максимально, если локально не содержится ни в каком другом интегральном многообразии. Распределение $\mathcal{P}'$ называется вполне интегрируемым, если через любую его точку проходит единственное максимальное интегральное многообразие этого распределения. Классическая теорема Фробениуса [66] утверждает, что распределение $\mathcal{P}'$ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда для любой формы $\omega\in\mathcal{P}'\Lambda^1(N)$ имеет место равенство $d\omega=\Omega\wedge\omega'$, где $\omega'\in\mathcal{P}'\Lambda^1(N)$, а Ω — некоторая форма на M. Иными словами, при действии оператора d идеал $\mathcal{P}'\Lambda^*$ переходит в себя, т. е. является дифференциально замкнутым. Исходя из этого, мы будем говорить, что распределение $\mathcal{P}$ на $J^\infty(\pi)$ *вполне интегрируемо*, если его идеал $\mathcal{P}\Lambda^*$ дифференциально замкнут.

Упражнение 1.9. Покажите, что распределение $\mathcal{P}$ на $J^\infty(\pi)$ вполне интегрируемо в том и только том случае, если множество $\mathcal{P}D(\pi)$ замкнуто относительно операции коммутирования векторных полей, т. е. является подалгеброй Ли в $D(\pi)$.

Пример 1.5. Пусть $\mathcal{P}'$ — распределение в M. Рассмотрим в $D(\pi)$ подмодуль $\widehat{\mathcal{P}}'D(\pi)$, состоящий из линейных комбинаций (с коэффициентами из $\mathcal{F}(\pi)$) полей вида $\widehat{X}, X \in \mathcal{P}'D(M)$. Тогда множество $\mathcal{P}'D(\pi)$ определяет в $J^\infty(\pi)$ некоторое распределение $\mathcal{P} = \widehat{\mathcal{P}}'$. Если $\mathcal{P}'$ вполне интегрируемо, то вполне интегрируемо и распределение $\mathcal{P}$. Действительно,

$$[\varphi\widehat{X}, \psi\widehat{Y}] = \varphi\widehat{X}(\psi)\widehat{Y} - \psi\widehat{Y}(\varphi)\widehat{X} + \varphi\psi[\widehat{X}, \widehat{Y}].$$

Но $[\widehat{X}, \widehat{Y}] = \widehat{[X, Y]}$ в силу (1.12), так что правая часть последнего равенства лежит в $\mathcal{P}D(\pi)$, если $X, Y \in \mathcal{P}'D(M)$ и $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$.

Пусть теперь $\mathcal{P}$ — вполне интегрируемое распределение на $J^\infty(\pi)$. В соответствии с результатами п. 1.3 векторное поле $X \in D(\pi)$ назовем (*инфинитезимальным*) *автоморфизмом* распределения $\mathcal{P}$, если

$$L_X \mathcal{P}\Lambda^*(\pi) \subset \mathcal{P}\Lambda^*(\pi).$$

Двойственным образом автоморфизмы распределения $\mathcal{P}$ можно определить условием

$$[X, \mathcal{P}D(\pi)] \subset \mathcal{P}D(\pi). \tag{1.22}$$

Обозначим через $D_{\mathcal{P}}(\pi)$ множество автоморфизмов распределения $\mathcal{P}$.

Упражнение 1.10. Докажите, что $D_{\mathcal{P}}(\pi)$ — алгебра Ли, а $\mathcal{P}D(\pi) \subset D_{\mathcal{P}}(\pi)$ — ее идеал.

Элементы факторалгебры Ли

$$\mathrm{sym}(\mathcal{P}) = D_{\mathcal{P}}(\pi)/\mathcal{P}D(\pi)$$

будем называть (инфинитезимальными) симметриями распределения $\mathcal{P}$.

§ 2. Распределение Картана на $J^\infty(\pi)$ и его инфинитезимальные автоморфизмы.

В этом параграфе мы определим распределение Картана на $J^\infty(\pi)$. Исследуем его максимальные интегральные многообразия, инфинитезимальные автоморфизмы и симметрии. Это приведет нас к понятию эволюционного дифференцирования на $J^\infty(\pi)$, играющему ключевую роль в теории симметрий нелинейных дифференциальных уравнений.

2.1. Распределение Картана. Пусть, как и выше, $\pi\colon P \to M$ — гладкое векторное расслоение и $J^\infty(\pi)$ — многообразие его бесконечных джетов. Рассмотрим точку $\theta = \{x, \theta_k\}$ в $J^\infty(\pi)$ и картановские плоскости $\mathcal{C}^k_{\theta_k}$ в каждой точке $\theta_k \in J^k(\pi)$. Тогда, если точку θ представить как бесконечный джет $[s]^\infty_x$ некоторого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ в точке $x \in M$, плоскость $\mathcal{C}^{k+1}_{\theta_{k+1}}$ при проекции $\pi_{k+1,k}$ спроектируется в R-плоскость $L_{\theta_{k+1}} \subset \mathcal{C}^k_{\theta_k} \subset T_{\theta_k}(J^k(\pi))$, где $L_{\theta_{k+1}}$ — касательиая плоскость к графику джета $j_k(s)$ в точке θ_k. Таким образом, мы видим, что для всех k имеют место вложения $(\pi_{k+1,k})_*(\mathcal{C}^{k+1}_{\theta_{k+1}}) \subset \mathcal{C}^k_{\theta_k}$, т. е. система распределений $\mathcal{C}^k$ определяет распределение $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\pi)$ на $J^\infty(\pi)$.

Определение 2.1. *Распределением Картана* на многообразии бесконечных джетов называется распределение $\mathcal{C}(\pi)$.

Из сказанного следует, что касательный вектор X_θ к многообразию $J^\infty(\pi)$ тогда и только тогда лежит в плоскости $\mathcal{C}_\theta$, когда его проекция $X_{\theta_k} = (\pi_{\infty,k})_*(X_\theta)$ касается многообразия L_{θ_k}. Воспользовавшись этим замечанием, дадим более эффективное описание распределения Картана на $J^\infty(\pi)$. Именно, если $X_\theta = \left\{X_x, X_{\theta_k}\right\}$ — произвольный касательный вектор и $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$ — гладкая функция на $J^\infty(\pi)$, то рассмотрим проекции $X^v_{\theta_k}$ каждого из векторов X_{θ_k} на слой расслоения $\pi_{k,k-1}\colon J^k(\pi) \to J^{k-1}(\pi)$ над точкой θ_{k-1} вдоль плоскости $L_{\theta_{k+1}}$ (рис. 4.3). Тогда $X^v_\theta = \left\{0, X^v_{\theta_k}\right\}$ — также касатель-

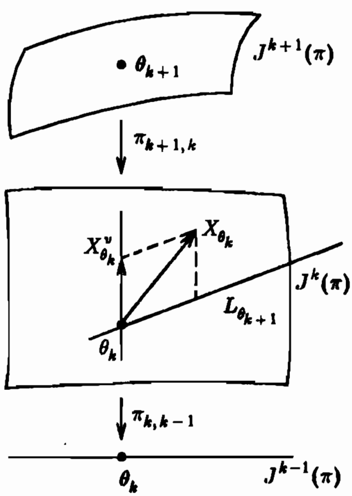

Рис. 4.3. Построение элемента U_1

ный вектор в точке θ и, применяя его к функции φ, можно получить некоторое число. Если теперь $X \in D(\pi)$ — векторное поле, то, повторяя описанную конструкцию в каждой точке $\theta \in J^\infty(\pi)$, мы вначале получим вертикальное поле $X^v \in D^v(\pi)$, которое затем применяется к функции $\varphi \in \mathcal{F}$. Таким образом, для каждой функции $\varphi \in \mathcal{F}$ мы получаем 1-форму на $J^\infty(\pi)$, обозначаемую через $U_1(\varphi)$ и определенную равенством

$$X \rfloor U_1(\varphi) = X^v(\varphi), \qquad X \in D(\pi), \quad \varphi \in \mathcal{F}(\pi). \tag{2.1}$$

Из (2.1) видно, что соответствие $U_1\colon \mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^1(\pi)$ является дифференцированием алгебры $\mathcal{F}$ со значениями в $\mathcal{F}$-модуле $\Lambda^1(\pi)$, т. е. $U_1(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1 U_1(\varphi_2) + \varphi_2 U_1(\varphi_1)$ для любых функций $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}$.

Возвращаясь к началу наших рассуждений, мы видим, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Поле $X \in D(\pi)$ тогда и только тогда лежит в распределении Картана $\mathcal{C}$ на $J^\infty(\pi)$, когда*

$$X \rfloor U_1(\varphi) = 0$$

для всех функций $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$. Иными словами, идеал $\mathcal{C}\Lambda^*(\pi) \subset \Lambda^*(\pi)$ распределения Картана порожден формами вида $U_1(\varphi)$.

Формы вида $U_1(\varphi)$ мы будем называть *формами Картана* *).

Далее нам понадобится более удобное с вычислительной точки зрения описание оператора U_1 и, следовательно, форм Картана. Чтобы получить такое описание, заметим следующее. Из проведенных выше построений вытекает, что каждое векторное поле $X \in D(\pi)$ допускает каноническое разложение

$$X = X^v + X^h, \tag{2.2}$$

где, как уже отмечалось, поле X^v вертикально, а поле $X^h \overset{\text{def}}{=} X - X^v$ обладает тем свойством, что касается всех подмногообразий вида $j_\infty(s)(M)$, т. е. графиков бесконечных джетов сечений s расслоения π. Поэтому равенство (2.1) можно переписать в виде $X \rfloor U_1(\varphi) = (X - X^h)(\varphi) = X(\varphi) - X^h(\varphi)$. Заметим, что первое слагаемое в правой части полученного равенства есть $X \rfloor d\varphi$. Чтобы переписать в требуемом виде второе слагаемое, сравним выражение $X^h(\varphi)$ с определением формы $\widehat{d}\varphi$. В силу точечного определения операции поднятия (см. п. 1.4) ограничение формы $\widehat{d\varphi}$ на график бесконечного джета сечения $s \in \Gamma(\pi)$ имеет вид $X \Delta_\varphi(s)$. Поскольку

*) Ниже мы увидим, что это определение обобщает координатное представление форм Картана, рассматривавшееся в предыдущих главах.

форма $\widehat{d}\varphi$ горизонтальна, имеет место равенство $X \rfloor \widehat{d}\varphi = X^h \rfloor \widehat{d}\varphi$. Наконец, в силу того, что поле X^h касается каждого подмногообразия $j_\infty(s)(M)$, а через каждую точку $\theta \in J^\infty(\pi)$ проходит хотя бы одно такое многообразие*), выполняется равенство $X^h \widehat{d}\varphi = X^h(\varphi)$. Итак, мы приходим к следующему важному равенству

$$U_1 = d - \widehat{d}. \tag{2.3}$$

Таким образом, оператор U_1 «измеряет», насколько полный дифференциал функции $\varphi \in \mathcal{F}$ отличается от горизонтального.

Теперь мы опишем множество $\mathcal{C}D(\pi)$, т. е. такие векторные поля $X \in D(\pi)$, которые аннулируют формы Картана на $J^\infty(\pi)$, или, иными словами, которые удовлетворяют равенствам $X(\varphi) = X \rfloor \widehat{d}\varphi$ для всех гладких функций $\varphi \in \mathcal{F}$. Рассмотрим поле $X \in D(\pi)$ и его ограничение $X_M = X\big|_{\mathcal{F}_{-\infty}(\pi)}\colon C^\infty(M) \to \mathcal{F}_k(\pi)$, которое является дифференцированием кольца $C^\infty(M)$ со значениями в алгебре $\mathcal{F}_k(\pi)$ (существование такого k обеспечивается тем, что X — дифференцирование, согласованное с фильтрацией в $\mathcal{F}(\pi)$). Неформально дифференцирование X_M можно понимать как поле на M, коэффициентами которого являются функции из $\mathcal{F}_k$. Точнее, поле X_M, по крайней мере локально, может быть представлено в виде

$$X_M = \varphi_1 X_1 + \ldots + \varphi_l X_l, \tag{2.4}$$

где $X_1, \ldots, X_l \in D(M)$ — «настоящие» векторные поля на многообразии M, а $\varphi_1, \ldots \varphi_l \in \mathcal{F}_k(\pi)$. Пользуясь представлением (2.4), определим поле $\widehat{X}_M \in D(\pi)$, полагая $\widehat{X}_M = \varphi_1 \widehat{X}_1 + \ldots + \varphi_l \widehat{X}_l$. Поскольку в силу точечного определения операции поднятия в каждой точке $\theta = [s]_x^\infty \in J^\infty(\pi)$ векторы вида $(\widehat{X}_l)_\theta$ касаются графика бесконечного джета сечения $s \in \Gamma(\pi)$, тем же свойством обладает и вектор $(\widehat{X}_M)_\theta = \varphi_1(\theta)(\widehat{X}_1)_\theta + \ldots + \varphi_l(\theta)(\widehat{X}_l)_\theta$. Поэтому $\widehat{X}_M^v = 0$ и, значит, $\widehat{X}_M \rfloor U_1(\varphi) = \widehat{X}_M^v(\varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}$.

Рассмотрим (также локально) поле $X' = X - \widehat{X}_M$. Так как по определению $\widehat{X}_M\big|_{C^\infty(M)} = X_M = X\big|_{\mathcal{F}_{-\infty}(\pi)}$, поле X' вертикально и, следовательно, $X' \rfloor U_1(\varphi) = X'(\varphi)$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}$. С другой стороны, как только что было установлено, $\widehat{X}_M \rfloor U_1(\varphi) = 0$, и если $X \in \mathcal{C}D(\pi)$, то и $X \rfloor U_1(\varphi) = 0$. Таким образом, $X'(\varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}$. Значит, $X' = 0$ и, следовательно, $X = \widehat{X}_M$. Резюмируя сказанное выше, мы получаем следующий результат.

*) Это следует из леммы Бореля [48].

Утверждение 2.2. *Множество $\mathcal{C}D(\pi)$ векторных полей, лежащих в распределении Картана, порождено поднятиями на $J^\infty(\pi)$ полей с многообразия M:*

$$\mathcal{C}D(\pi)=\left\{\varphi_1\widehat{X}_1+\ldots+\varphi_l\widehat{X}_l|\varphi_i\in\mathcal{F}(\pi),\ X_i\in D(M),\ l=1,2,\ldots\right\}.$$

2.2. Интегральные многообразия. Из утверждения 2.2 и примера 1.5 предыдущего параграфа следует, что распределение Картана на $J^\infty(\pi)$ является вполне интегрируемым. Изучим его максимальные интегральные многообразия. Для этого прежде всего отметим два факта: а) картановская плоскость $\mathcal{C}_\theta$ в точке $\theta\in J^\infty(\pi)$ не содержит ненулевых вертикальных векторов — это следует из построений, которые в начале настоящего параграфа мы использовали для определения форм $U_1(\varphi)$; б) размерность пространства $\mathcal{C}_\theta$ совпадает с размерностью многообразия M — это вытекает из только что доказанного утверждения. Пусть $\mathcal{R}^\infty$ — максимальное интегральное многообразие распределения Картана. Тогда из а) следует, что проекции $\pi_{\infty,k}|_{\mathcal{R}^\infty}\colon\ \mathcal{R}^\infty\to\mathcal{R}^k\stackrel{\text{def}}{=}\pi_{\infty,k}(\mathcal{R}^\infty)\subset J^k(\pi)$, $k=0,1,\ldots$, и $\pi_\infty|_{\mathcal{R}^\infty}\colon\ \mathcal{R}^\infty\to\mathcal{R}\stackrel{\text{def}}{=}\pi_\infty(\mathcal{R}^\infty)\subset M$ суть локальные диффеоморфизмы. С другой стороны, как это видно из б), $\dim\mathcal{R}^k=\dim\mathcal{R}^\infty\leqslant n$. Рассмотрим проекцию $\pi|_{\mathcal{R}^0}\colon\ \mathcal{R}^0\to\mathcal{R}$. Поскольку она является локальным диффеоморфизмом, существует такое отображение $s'\colon\ \mathcal{R}\to\mathcal{R}^0$, что $\pi|_{\mathcal{R}^0}\circ s'$ — тождественное на $\mathcal{R}$ отображение. Иными словами, s' — частично определенное сечение расслоения π. Очевидно, что можно выбрать такое сечение $s\in\Gamma(\pi)$, что $s|_{\mathcal{R}}=s'$. Предположим теперь, что вложение $\mathcal{R}\subset M$ строгое, т. е. $\dim\mathcal{R}^k<n$. Тогда условия того, что многообразия $\Gamma_s^k=j_k(s)(M)\subset J^k(\pi)$, $k=0,1,\ldots,\infty$, содержат в себе многообразия $\mathcal{R}^k$ для соответствующих k, являются условиями на нормальные относительно $\mathcal{R}$ производные сечения s. Из теоремы Уитни о продолжении [48] следует, что всегда можно построить сечение, удовлетворяющее этим условиям, что противоречит максимальности $\mathcal{R}^\infty$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.3. *Всякое максимальное интегральное многообразие распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ локально имеет вид графика бесконечного джета некоторого сечения расслоения π.*

Таким образом, через каждую точку $\theta\in J^\infty(\pi)$ проходит хотя бы одно максимальное интегральное многообразие распределения Картана, и у нас имеется полное описание этих многообразий. Конечно, такое многообразие определено неоднозначно. Например, если π: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — тривиальное расслоение, то через начало координат в $J^\infty(\pi)$ наряду с графиком бесконечного джета нулевого сечения проходит и график бесконечного джета функции $u=\exp(-x^2)$. Вообще, если π — произвольное расслоение и $\theta=[s]_x^\infty\in J^\infty(\pi)$, то через точку θ проходят графики бесконечных джетов сечений расслоения π, отличающихся от s на плоское в точке $x\in M$ сечение.

Полученные здесь результаты полезно сравнить с тем, что известно о максимальных интегральных многообразиях распределения Картана на пространствах конечных джетов. Как отмечалось в предыдущей главе, распределение Картана на $J^k(\pi)$, $k<\infty$, содержит вертикальные векторы, а именно, любой вектор, касательный к слою расслоения $\pi_{k,k-1}$, лежит в картановской плоскости $C^k_{\theta_k}$. Это приводит к тому, что множество интегральных многообразий, проходящих через точку $\theta_k\in J^k(\pi)$, можно разбить на различные типы, причем тип многообразия характеризует степень его вырождения при проекции на $J^{k-1}(\pi)$ (или размерность пространства вертикальных векторов, касающихся в данной точке рассматриваемого интегрального многообразия). В частности, графики джетов сечений расслоения π являются многообразиями типа 0 и характеризуются тем, что проектируются на $J^{k-1}(\pi)$ локально диффеоморфно. Причины различий между случаями конечных и бесконечных джетов становятся весьма наглядными, если встать на аналитическую точку зрения. Действительно, зафиксировав точку $\theta_k\in J^k(\pi)$ при $k<\infty$, мы получаем информацию о всех частных производных сечений $s\in\Gamma(\pi)$ в точке $x=\pi_k(\theta_k)\in M$ вплоть до порядка k. Проводя через точку θ_k графики джетов различных сечений, мы располагаем свободой выбора, которая инфинитезимально измеряется векторами, касательными к слою проекции $\pi_{k,k-1}$ (рис. 4.4). Это приводит к тому, что R-плоскость в точке θ_k «раздувается» на множество $\pi_{k,k-1}$-вертикальных векторов. В противоположность описанной ситуации выбор точки $\theta\in J^\infty(\pi)$ фиксирует все частные производные сечения $s\in\Gamma(\pi)$ в точке x, и в силу очевидных соображений наша свобода ограничивается теперь классом плоских функций. Отметим, что наблюдаемая на $J^\infty(\pi)$ картина связана с наличием в расслоении π_∞ связности Картана и ее интегрируемостью.

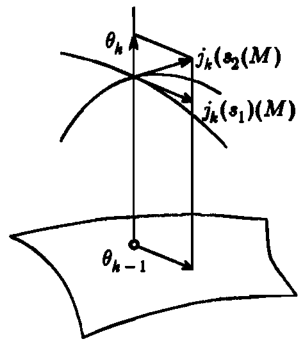

Рис. 4.4. «Раздувание» R-плоскости

Теперь мы начинаем исследование автоморфизмов и симметрий распределения Картана на многообразиях $J^\infty(\pi)$. Прежде чем переходить к обсуждению фактов общего характера, проделаем несложные координатные вычисления, которые полезны для выработки интуитивных представлений о том, какого рода результаты нас ожидают.

2.3. Вычислительный эксперимент. Здесь, как впрочем и в дальнейшем, нам понадобится координатное представление картановских форм $U_1(\varphi)$. Пусть $x \in M$ и $\mathcal{U} \ni x$ — координатная окрестность. Рассмотрим, как обычно, локальные координаты $(x_1, \ldots \ldots, x_n, \ldots, p_\sigma^j, \ldots)$ в окрестности π_∞^{-1}. Тогда, пользуясь формулами (1.20) и (2.3), а также тем, что оператор $U_1\colon \mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^1(\pi)$ является дифференцированием, легко убедиться в том, что модуль Картана $\mathcal{C}\Lambda^*(\pi)\big|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})}$ порожден формами вида

$$\omega_\sigma^j = U_1(p_\sigma^j) = dp_\sigma^j - \sum_{\alpha=1}^{n} p_{\sigma+1_\alpha} dx_\alpha, \tag{2.5}$$

где $j = 1, \ldots, m$, $|\sigma| = 0, 1, \ldots$, т. е. формами Картана, определенными в гл. 3. В частности,

$$\omega_\varnothing^j = U_1(u^j) = du^j - \sum_{\alpha=1}^{n} p_{1_\alpha} dx_\alpha. \tag{2.6}$$

Рассмотрим одномерное расслоение $\pi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ над прямой. Пусть $x = x_1$ — координата в базе и $p_{(0)} = u, \ldots, p_{(k)} = p_k, \ldots$ — координаты в $J^\infty(\pi)$. В силу (2.5) модуль Картана $\mathcal{C}\Lambda^*(\pi)$ в этом случае порожден формами вида

$$\omega_k = dp_k - p_{k+1} dx, \tag{2.7}$$

где $k = 0, 1, \ldots$. Пусть поле $X = a\dfrac{\partial}{\partial x} + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \dfrac{\partial}{\partial p_k} \in D(\pi)$, $a, b_k \in \mathcal{F}(\pi)$, является автоморфизмом распределения Картана. Это равносильно тому, что $X(\omega_k) = \sum\limits_i \lambda_k^i \omega_i$ для всех k, или, что то же самое,

$$db_k - b_{k+1} dx - p_{k+1} da = \sum_i \lambda_k^i (dp_i - p_{i+1} dx). \tag{2.8}$$

Выписывая входящие в левую часть (2.8) дифференциалы в явном виде и приводя подобные члены, мы получаем следующую систему:

$$\left(\frac{\partial b_k}{\partial x} - b_{k+1} - p_{k+1}\frac{\partial a}{\partial x}\right) dx + \sum_i \left(\frac{\partial b_k}{\partial p_i} - p_{k+1}\frac{\partial a}{\partial p_i}\right) dp_i =$$

$$= \sum_i \lambda_k^i (dp_i - p_{i+1} dx),$$

которая равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial b_k}{\partial x} - b_{k+1} - p_{k+1}\dfrac{\partial a}{\partial x} = -\sum\limits_i \lambda_k^i p_{i+1}, \\ \dfrac{\partial b_k}{\partial p_i} - p_{k+1}\dfrac{\partial a}{\partial p_i} = \lambda_k^i, \ i, k \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Подставляя полученные выражения для λ_k^i в первое уравнение (2.9), мы видим, что

$$b_{k+1} = \frac{\partial b_k}{\partial x} - p_{k+1}\frac{\partial a}{\partial x} + \sum_i p_{i+1}\left(\frac{\partial b_k}{\partial p_i} - p_{k+1}\frac{\partial a}{\partial p_i}\right) = \\ = D(b_k) - p_{k+1}D(a), \tag{2.10}$$

где $D = D_1$ — оператор полной производной по x. Как и выше, разложим поле X на горизонтальную и вертикальную составляющие, положив $X^h = a\widehat{\dfrac{\partial}{\partial x}} = aD$ и $X^v = X - X^h$. Пусть $X^v = \sum\limits_k b_k^v \dfrac{\partial}{\partial p_k}$; тогда $b_k = b_k^v + ap_{k+1}$ для всех $k \geqslant 0$. Подставляя полученные выражения в (2.10) и учитывая, что $D(p_k) = p_{k+1}$, мы получаем следующие выражения для коэффициентов b_k^v:

$$b_{k+1}^v = D(b_k^v), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

или

$$b_k^v = D^k(b_0^v), \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, всякий инфинитезимальный автоморфизм распределения Картана на $J^{\infty}(\pi)$ представим в виде

$$X = aD + \sum_{k=0}^{\infty} D^k(b_0^v)\frac{\partial}{\partial p_k}, \tag{2.11}$$

где $b_0^v = b_0 - ap_1$, и, следовательно, однозначно определяется своим ограничением на подалгебру $C^{\infty}(M) \subset \mathcal{F}(\pi)$ (первое слагаемое в представлении (2.11)) и некоторой функцией $b_0^v \in \mathcal{F}(\pi)$ (второе слагаемое). Оказывается, полученный результат носит общий характер.

2.4. Эволюционные дифференцирования. Вновь вернемся к произвольному векторному расслоению $\pi\colon\ P \to M$ и рассмотрим инфинитезимальный автоморфизм $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ распределения Картана на $J^{\infty}(\pi)$.

Утверждение 2.4. *Всякое векторное поле $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ однозначно определяется своим ограничением на подалгебру $\mathcal{F}_0(\pi) = C^\infty(J^0(\pi)) \subset \mathcal{F}(\pi)$.*

Доказательство. Поскольку для любых двух полей $X, X' \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ их разность также лежит в $D_{\mathcal{C}}(\pi)$, нам достаточно показать, что если $X\big|_{\mathcal{F}_0} = 0$, то и $X\big|_{\mathcal{F}_k} = 0$ для всех $k \geqslant 0$. Докажем это индукцией по k. Первый шаг индукции ($k = 0$) — это условия утверждения.

Пусть теперь $k > 0$ и $X\big|_{\mathcal{F}_k} = 0$. Нам нужно показать, что тогда дифференцирование $X\big|_{\mathcal{F}_{k+1}}$ также тривиально. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}_k$. Тогда

$$X(U_1(\varphi)) = X(d\varphi - \widehat{d}\varphi) = dX(\varphi) - X(\widehat{d}\varphi),$$

или, в силу предположения индукции,

$$X(U_1(\varphi)) = -X(\widehat{d}\varphi).$$

С другой стороны, поскольку $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$, найдутся такие функции $f_\alpha, g_\alpha \in \mathcal{F}$, $\alpha = 1, \ldots, l$, что $X(U_1(\varphi)) = \sum\limits_\alpha f_\alpha U_1(g_\alpha)$, т. е.

$$X(\widehat{d}\varphi) = -\sum_\alpha f_\alpha U_1(g_\alpha). \tag{2.12}$$

Форма, стоящая в правой части равенства (2.12), принадлежит модулю Картана, и, значит, ее ограничение на график джета любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ равно нулю.

Воспользуемся теперь тем, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$ форма $\widehat{d}\varphi$ горизонтальна, т. е. ее можно представить в виде $\widehat{d}\varphi = \sum\limits_i \varphi_i dh_i$, где $\varphi_i \in \mathcal{F}$ и $h_i \in C^\infty(M) \subset \mathcal{F}_0$. Следовательно,

$$X(\widehat{d}\varphi) = \sum_i \big(X(\varphi_i)dh_i + \varphi_i dX(h_i)\big) = \sum_i X(\varphi_i)dh_i,$$

так как в силу предположения индукции $X(h_i) = 0$. Таким образом, $X(\widehat{d}\varphi)$ — также горизонтальная форма, причем из (2.12) и сказанного выше следует, что ее ограничения на графики джетов сечений тривиальны. Поскольку горизонтальные формы определяются своими ограничениями на графики джетов (см. § 1), мы получаем, что

$$X(\widehat{d}\varphi) = 0 \tag{2.13}$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{F}_k$.

Рассмотрим в M произвольную координатную окрестность и соответствующие локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_\sigma, \ldots)$. Выберем в качестве φ одну из координатных функций p^j_σ, где $|\sigma| \leqslant k$. Тогда в силу (2.13) имеем

$$X(\widehat{d}p^j_\sigma) = X\left(\sum_{i=1}^n p^j_{\sigma+1_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n X(p^j_{\sigma+1_i})dx_i = 0.$$

Значит, $X(p^j_{\sigma+1_i}) = 0$ для всех σ, $|\sigma| \leqslant k$, $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots \ldots, m$. Иными словами, действие поля на все координатные функции многообразия $J^{k+1}(\pi)$ тривиально, т. е. $X\big|_{\mathcal{F}_{k+1}} = 0$. Это доказывает шаг индукции, а вместе с ним и все утверждение. $\square$

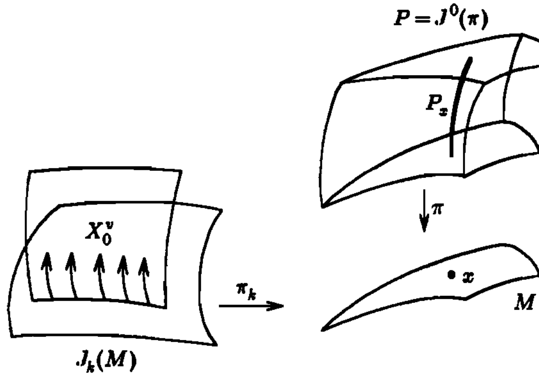

Рис. 4.5. Вертикальное поле X_0^v

Пусть по-прежнему $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ — автоморфизм распределения Картана на $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим ограничение X_M поля X на подалгебру $C^\infty(M) \subset \mathcal{F}$ и соответствующее поднятие $\widehat{X}_M \in D(\pi)$. Поскольку, как мы уже знаем, $\widehat{X}_M \in \mathcal{C}D(\pi) \subset D_{\mathcal{C}}(\pi)$, поле $X^v = X - \widehat{X}_M$ также является автоморфизмом и, кроме того, оно вертикально. Тогда ограничение $X_0^v = X^v\big|_{\mathcal{F}_0}$ является дифференцированием алгебры $\mathcal{F}_0$ со значениями в алгебре $\mathcal{F}_k$ для некоторого конечного k. Так как поле X^v вертикально, дифференцирование X_0^v можно отождествить с семейством векторов, параметризованных точками пространства $J^k(\pi)$ и направленных вдоль слоев индуцированного расслоения $\pi_k^*(\pi)$ (рис. 4.5). С другой стороны, поскольку π — линейное расслоение, касательные векторы к его слоям можно отождествить с точками самих слоев. Сводя воедино проделанные выше построения, мы получим отображение

$$D_{\mathcal{C}}(\pi) \to \mathcal{F}(\pi, \pi), \tag{2.14}$$

причем, как показывают утверждения 2.2 и 2.4, поле X при этом отображении переходит в нуль тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{C}D(\pi)$. Изучим образ отображения (2.14).

Пусть φ — некоторое сечение расслоения $\pi_k^*(\pi)$. Рассмотрим координатную окрестность $\mathcal{U} \subset M$ и окрестность $\mathcal{U}^k = \pi_k^{-1}(\mathcal{U}) \subset J^k(\pi)$. По аналогии с результатами, полученными выше в вычислительном эксперименте, определим в окрестности $\mathcal{U}^k$ поле

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}} = \sum_{j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\frac{\partial}{\partial p_\sigma^j}, \tag{2.15}$$

где φ^j — j-я компонента ограничения сечения φ на окрестность $\mathcal{U}^k$, а D_σ — композиция полных производных, соответствующая мультииндексу σ. Покажем, что дифференцирование (2.15) в рассматриваемой окрестности является автоморфизмом распределения Картана. Действительно, пусть $\psi \in \mathcal{F}$. Тогда

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(U_1(\psi)) = Э_{\varphi,\mathcal{U}}(d\psi - \widehat{d}\psi) = d(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi)) - Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{d}\psi). \tag{2.16}$$

В силу соотношений (1.20) и (2.15) имеем

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(d\widehat{\psi}) = \sum_{i,j,\sigma} D_\sigma(\psi^j)\frac{\partial}{\partial p_\sigma^j} D_i(\psi)dx_i.$$

Но, как легко видеть,

$$\frac{\partial}{\partial p_\sigma^j} D_i(\psi) = \delta(i,\sigma)\frac{\partial}{\partial p_{\sigma-1_i}^j}\psi + D_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma^j}\right), \tag{2.17}$$

где

$$\delta(i,\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-я компонента } \sigma \text{ отлична от } 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{d}\psi) &= \sum_{i,j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\frac{\partial}{\partial p_\sigma^j} D_i(\psi)dx_i = \\ &= \sum_{i,j,\sigma} D_\sigma(\varphi^j)\left(\delta(i,\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial p_{\sigma-1_i}^j} + D_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma^j}\right)\right)dx_i = \\ &= \sum_{i,j,\sigma}\left(D_\sigma(\varphi^i)\delta(i,\sigma)\frac{\partial\psi}{\partial p_{\sigma-1_i}^j} + D_i\left(D_\sigma(\varphi^j)\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma^j}\right) - D_{\sigma+1_i}(\varphi^j)\frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma^j}\right)dx^i. \end{aligned}$$

В полученном выражении первое и последнее слагаемые аннулируют друг друга, и поэтому

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{d}\psi) = \sum_{i,j,\sigma} D_i \left(D_\sigma(\varphi^j) \frac{\psi}{\partial p_\sigma^j} \right) dx_i = \widehat{d}(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi)).$$

Возвращаясь к равенству (2.16), мы видим, что

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(U_1(\psi)) = d(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi)) - \widehat{d}(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi)) = U_1 Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi). \qquad (2.18)$$

Равенство (2.18) показывает, что дифференцирования вида $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ коммутируют с оператором U_1 и, стало быть, являются инфинитезимальными автоморфизмами распределения Картана. При этом ограничение $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ на подалгебру $\mathcal{F}_0(\pi|_{\mathcal{U}})$ отождествляется с сечением φ. Итак, мы научились (пока локально) строить по сечению φ некоторый автоморфизм распределения Картана. Пусть теперь $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subset M$ — две координатные окрестности в M. Тогда ограничения полей $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ и $Э_{\varphi,\mathcal{U}'}$ на алгебру $\mathcal{F}_0(\pi|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'})$ совпадают, откуда, в силу утверждения 2.4 следует, что над пересечением $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'$ совпадают и сами эти поля. Итак, наши построения корректным образом определяют некоторое вертикальное векторное поле $Э_\varphi$ на всем пространстве $J^\infty(\pi)$, являющееся инфинитезимальным автоморфизмом распределения Картана. Иными словами, отображение (2.14) эпиморфно и, значит, доказана следующая теорема.

Теорема 2.5. *Всякий инфинитезимальный автоморфизм X распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ однозначно представляется в виде*

$$X = Э_\varphi + \widehat{X}_M,$$

где φ — некоторое сечение из $\mathcal{F}(\pi,\pi)$. При этом алгебра $\operatorname{sym}\mathcal{C}(\pi) = D_{\mathcal{C}}(\pi)/\mathcal{C}D(\pi)$ симметрий распределения Картана отождествляется с модулем $\mathcal{F}(\pi,\pi)$ сечений индуцированного расслоения $\pi_\infty^*(\pi)$:

$$\operatorname{sym}\mathcal{C}(\pi) \simeq \mathcal{F}(\pi,\pi).$$

Остановимся более подробно на полях вида $Э_\varphi$. В предыдущей главе мы видели, что поля Ли, будучи автоморфизмами распределения Картана на многообразиях конечных джетов $J^k(\pi)$, порождают потоки на множестве сечений расслоения π. Тем же свойством обладают и поля вида $Э_\varphi$, хотя они, вообще говоря, не порождают (см. ниже) однопараметрических групп преобразований на бесконечномерном многообразии $J^\infty(\pi)$. Действительно, пусть $s \in \Gamma(\pi)$ —

некоторое сечение и $\varphi \in \mathcal{F}_k(\pi, \pi)$. Ограничим поле $Э_\varphi$ на график k-го джета сечения s. Тогда при отождествлении касательных пространств к слоям π с самими слоями компоненты этого ограничения будут иметь вид $(j_k(s))^*(\varphi^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$. Поэтому движение сечения s вдоль траекторий $Э_\varphi$, если бы эти траектории существовали, должно было бы управляться уравнениями

$$\frac{\partial s^j}{\partial t} = \varphi^j\left(x, \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} s^l}{\partial x^\sigma}, \ldots\right), \qquad j, l = 1, \ldots, m, \quad |\sigma| \leqslant k,$$

где t — параметр вдоль траектории. Иными словами, дифференцирование $Э_\varphi$ задает эволюцию сечений расслоения π, а «поток», соответствующий $Э_\varphi$, определяется эволюционными уравнениями вида

$$\frac{\partial u^j}{\partial t} = \varphi^j\left(x, \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} u^l}{\partial x^\sigma}, \ldots\right), \qquad j, l = 1, \ldots, m, \quad |\sigma| \leqslant k. \tag{2.19}$$

Определение 2.2. Поля $Э_\varphi$ называются *эволюционными дифференцированиями*; соответствующее сечение $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$ называется *производящим сечением* эволюционного дифференцирования.

Заметим, что специальный вид коэффициентов эволюционного дифференцирования (см. формулу (2.15)) обеспечивает согласованность эволюций всех производных функций u^j:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x^\tau} = (D_\tau \varphi^j)\left(x, \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} u}{\partial x^\sigma}, \ldots\right). \tag{2.20}$$

Равенство (2.20) является координатным выражением того, что $Э_\varphi$ — автоморфизм распределения Картана.

Интересно отметить, что при трактовке эволюционных дифференцирований как векторных полей на «многообразии» $\Gamma(\pi)$ сечений расслоения π оператор $U_1\colon\ \mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^1(\pi)$ играет роль, аналогичную той, которую внешний дифференциал $d\colon\ C^\infty(M) \to \Lambda^1(M)$ играет в классической дифференциальной геометрии. Действительно, если X — эволюционное дифференцирование, то для него (см. разложение (2.2)) $X^v = X$, и поэтому в силу определения оператора U_1

$$X \lrcorner U_1(\varphi) = X(\varphi). \tag{2.21}$$

Равенство (2.21) является точным аналогом равенства

$$Y \lrcorner df = Y(f),$$

справедливого для полей Y и функций f, определенных на некотором конечномерном многообразии. Таким образом, оператор U_1 можно назвать универсальным эволюционным дифференциалом.

2.5. Скобки Якоби. Выше мы показали, что соответствие

$$Э\colon \mathcal{F}(\pi,\pi)\to \mathrm{sym}(\pi)=D_{\mathcal{C}}(\pi)/\mathcal{C}D(\pi),$$

сопоставляющее каждому сечению $\varphi\in\mathcal{F}(\pi,\pi)$ эволюционное дифференцирование $Э_\varphi$, является взаимно однозначным. С другой стороны, поскольку множество эволюционных дифференцирований отождествляется с факторалгеброй Ли $\mathrm{sym}(\pi)$, коммутатор двух эволюционных дифференцирований вновь является эволюционным дифференцированием. Поэтому для любых двух элементов $\varphi,\psi\in \in\mathcal{F}(\pi,\pi)$ можно определить их коммутатор $\{\varphi,\psi\}\in\mathcal{F}(\pi,\pi)$, полагая

$$\{\varphi,\psi\}=Э^{-1}\left([Э_\varphi,Э_\psi]\right) \tag{2.22}$$

или

$$Э_{\{\varphi,\psi\}}=[Э_\varphi,Э_\psi]. \tag{2.23}$$

Определение 2.3. Элемент $\{\varphi,\psi\}$, определенный равенством (2.22), называется *высшей скобкой Якоби* сечений φ и ψ.

Поскольку эволюционные дифференцирования вертикальны и образуют алгебру Ли относительно операции коммутирования векторных полей, модуль $\mathcal{F}(\pi,\pi)$ является $C^\infty(M)$-алгеброй Ли относительно скобки Якоби. Действительно, покажем, например, что скобка $\{\bullet,\bullet\}$ удовлетворяет тождеству Якоби. В силу (2.23) имеем

$$\begin{aligned}Э_{\{\varphi,\{\psi,\chi\}\}}&=[Э_\varphi,Э_{\{\psi,\chi\}}]=[Э_\varphi,[Э_\psi,Э_\chi]]=\\&=[[Э_\varphi,Э_\psi],Э_\chi]+[Э_\psi,[Э_\varphi,Э_\chi]]=Э_{\{\{\varphi,\psi\},\chi\}}+Э_{\{\psi,\{\varphi,\chi\}\}}=\\&=Э_{\{\{\varphi,\psi\},\chi\}+\{\psi,\{\varphi,\chi\}\}},\end{aligned}$$

т. е.

$$\{\varphi,\{\psi,\chi\}\}+\{\psi,\{\chi,\varphi\}\}+\{\chi,\{\varphi,\psi\}\}=0$$

для любых сечений $\varphi,\psi,\chi\in\mathcal{F}(\pi,\pi)$. Аналогичным образом проверяются остальные свойства алгебр Ли.

В локальных координатах скобка Якоби двух сечений φ и ψ, как это следует из (2.15) и (2.23), имеет вид

$$\{\varphi,\psi\}^j=\sum_{\sigma,\alpha}\left(D_\sigma(\varphi^\alpha)\frac{\partial\psi^j}{\partial p^\alpha_\sigma}-D_\sigma(\psi^\alpha)\frac{\partial\varphi^j}{\partial p^\alpha_\sigma}\right),\quad j=1,\ldots,m. \tag{2.24}$$

2.6. Сравнение с полями Ли. В предыдущей главе мы определили поля Ли как такие дифференцирования $Y \in D(J^k(\pi))$, которые сохраняют распределение Картана на $J^k(\pi)$. Поскольку каждое поле Ли может быть каноническим образом поднято в любое пространство $J^{k+l}(\pi)$, где оно вновь будет полем Ли, мы получаем поле $Y^* \in D(\pi)$. Условие того, что все поднятия поля Ли сохраняют распределение Картана на соответствующих пространствах конечных джетов, означает, что $Y^* \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$, т. е. бесконечное поднятие поля Ли является автоморфизмом распределения Картана на $J^\infty(\pi)$. Характерной особенностью дифференцирования Y^* является то, что оно сохраняет фильтрацию элементов из $\mathcal{F}(\pi)$: $\deg(Y^*) = 0$. Обратно, пусть некоторый автоморфизм $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ обладает этим свойством. Тогда найдется такое число k_0, что при всех $k \geqslant k_0$ ограничения $X_k = X\big|_{\mathcal{F}_k}$ являются дифференцированиями алгебр $\mathcal{F}_k$ в себя и, значит, определяют поля Ли на $J^k(\pi)$, причем

$$X_{k+1} \circ \pi^*_{k+1,k} = \pi^*_{k+1,k} \circ X_k, \tag{2.25}$$

т. е. эти поля согласованы с проекциями $\pi_{k+1,k}\colon J^{k+1}(\pi) \to J^k(\pi)$. В силу теоремы о характеризации полей Ли, доказанной в предыдущей главе, для каждого поля X_k существует и единственным образом определено поле Ли $X_k^\varepsilon \in D(J^\varepsilon(\pi))$, для которого X_k является $(k-\varepsilon)$-поднятием*). Используя равенства (2.25), мы видим, что X_{k+1} есть поднятие поля X_k на $J^{k+1}(\pi)$ и, таким образом, X имеет вид Y^*, где Y — поле Ли. Итак, справедливо следующее предложение.

Утверждение 2.6. *Автоморфизм $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ тогда и только тогда имеет вид $X = Y^*$, где Y — поле Ли, когда* $\deg(X) = 0$.

Определение 2.4. Автоморфизмы распределения Картана, удовлетворяющие условиям утверждения 2.6, мы будем называть *полями Ли на многообразии* $J^\infty(\pi)$.

Пусть X — такое поле. Тогда в силу теоремы 2.5 имеет место каноническое разложение

$$X = \mathcal{Э}_\varphi + \widehat{X}_M. \tag{2.26}$$

Заметим, что в силу координатного представления для эволюционных дифференцирований (см. равенство (2.15)) поле $\mathcal{Э}_\varphi$ повышает фильтрацию элементов из $\mathcal{F}(\pi)$ на величину, равную $\deg(\varphi)$. С дру-

*) Напомним, что $\varepsilon = 0$ при $\dim \pi > 1$ и $\varepsilon = 1$ при $\dim \pi = 1$, причем в первом случае X_k^0 — вообще говоря, произвольное поле на $J^0(\pi)$, а во втором — X_k^1 является контактным полем на $J^1(\pi)$.

гой стороны, $\deg(\widehat{X}_M)=1$ для любого поля $\widehat{X}_M \in CD(\pi)$. Поэтому из утверждения 2.6 следует, что если X — поле Ли, то сечение φ, фигурирующее в разложении (2.26), лежит в модуле $\mathcal{F}_1(\pi,\pi)$, т. е. $\deg(\varphi)=1$. Вспомним теперь, что всякое поле Ли на $J^k(\pi)$ определяется своим производящим сечением, и сопоставим выражение полей Ли через производящие сечения, полученное в предыдущей главе (см. § 5 гл. 3), с определением дифференцирования $Э_\varphi$ (см. (2.15)). Тогда нетрудно видеть, что равенство (2.26) можно записать как

$$X_\varphi^* = Э_\varphi - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^j}{\partial p_{1_i}^j} D_i, \qquad (2.27)$$

где X_φ^* — поднятие поля Ли X_φ с производящим сечением $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$ в $J^\infty(\pi)$, а $\varphi^1,\ldots,\varphi^m$ — компоненты этого сечения. При этом, как мы знаем, если $\dim\pi=1$, то сечение φ произвольно, а при $\dim\pi>1$ оно должно иметь вид

$$\varphi^j = a_0 + \sum_{i=1}^n p_{1_i}^j a_i, \qquad j=1,\ldots,m, \quad a_0,\ldots,a_n \in \mathcal{F}_0(\pi).$$

Таким образом, производящие сечения полей Ли, определенные в главе 3, совпадают с рассматриваемыми здесь.

Упражнение 2.1. Покажите, что если X_φ и X_ψ — два поля Ли, то

$$[X_\varphi^*, X_\psi^*] = [X_\varphi, X_\psi]^* = Э_{\{\varphi,\psi\}} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p_{1_i}^j}\{\varphi,\psi\}^j D_i.$$

Иными словами, если φ и ψ — производящие сечения полей Ли, то скобка Якоби этих двух сечений, определенная раньше, совпадает со скобкой Якоби, введенной в настоящем параграфе. Учитывая, кроме того, что в силу (2.27) $X_\varphi=0$ в том и только том случае, если соответствующее эволюционное дифференцирование также тривиально, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2.7. *Отображение, сопоставляющее полям Ли соответствующие им эволюционные дифференцирования, является мономорфизмом алгебр Ли. При этом множество производящих сечений полей Ли является подалгеброй Ли в алгебре Ли $\mathcal{F}(\pi,\pi)$ относительно скобки Якоби.*

Таким образом, теория симметрий распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ является естественным обобщением теории полей Ли на многообразиях конечных джетов.

Пусть X — поле Ли на $J^\infty(\pi)$. Тогда, рассматривая однопараметрические группы сдвигов, соответствующие полям $X_k = X\big|_{J^k(\pi)}$, мы убедимся, что полю X также соответствует однопараметрическая группа сдвигов, действующая на многообразии $J^\infty(\pi)$. Оказывается, что любой автоморфизм распределения Картана на $J^\infty(\pi)$, обладающий однопараметрической группой сдвигов, может быть представлен как поле Ли, возможно, действующее в некотором новом расслоении; [88]. Поясним сказанное, пользуясь не вполне формальными рассуждениями.

Пусть $\pi\colon P \to M$ — расслоение, $X \in D_{\mathcal{C}}(\pi)$ — интегрируемое поле и A_t — соответствующая однопараметрическая группа. Тогда

$$A_t = \exp(tX) = \mathrm{id} + tX + \ldots + \frac{t^k}{k!}X^k + \ldots \tag{2.28}$$

Из (2.28) следует, что найдется такое l, что $X^k(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}_l$ для всех k. Действительно, если бы это было не так, то преобразование A_t не могло бы перевести многообразие $J^0(\pi)$ ни в какое конечное многообразие $J^k(\pi)$, что противоречит определению гладкого отображения многообразия $J^\infty(\pi)$.

Рассмотрим в кольце $\mathcal{F}_l$ подкольцо $\mathcal{F}(X)$, порожденное элементами вида $X(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{F}_0$, т. е. множество сумм вида $\sum X(\varphi_1)\cdot\ldots\cdot X(\varphi_r)$, $\varphi_i \in \mathcal{F}_0$. Из сказанного следует, что подкольцо $\mathcal{F}(X)$ инвариантно относительно действия поля X: $X(\mathcal{F}(X)) \subset \subset \mathcal{F}(X)$. Перейдем на двойственную точку зрения и рассмотрим максимальный вещественный спектр кольца $\mathcal{F}(X)$, т. е. пространство, точками которого являются ядра гомоморфизмов $\mathcal{F}(X) \to \mathbb{R}$. Обозначим это пространство через P_X. Тогда локально, в окрестности точки общего положения, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} J^l(\pi) \arrow[rr, "\varphi_X"] \arrow[dr, "\pi_l"'] & & P_X \arrow[dl, "\pi_X"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

где φ_X — отображение, двойственное вложению $\mathcal{F}(X) \hookrightarrow \mathcal{F}$. В силу инвариантности $\mathcal{F}(X)$ относительно X поле X определяет на P_X некоторое поле $\widetilde{X}_0$. Совокупность всевозможных продолжений отображения φ_X определяет гладкое отображение $\varphi_X^*\colon J^\infty(\pi) \to \to J^\infty(\pi_X)$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} J^\infty(\pi) \arrow[rr, "\varphi_X^*"] \arrow[dr, "\pi_\infty"'] & & J^\infty(\pi_X) \arrow[dl, "(\pi_X)_\infty"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

также коммутативна. Пусть $\widetilde{X}$ — поднятие поля Ли $\widetilde{X}_0$ в $J^\infty(\pi_X)$. Тогда в силу конструкции поднятия и того, что X — интегрируемый автоморфизм распределения Картана в $J^\infty(\pi)$, отображение φ_X^* переводит X в ограничение поля $\widetilde{X}$ на подмногообразие $\mathcal{E}_X = \varphi_X^*(J^\infty(\pi)) \subset J^\infty(\pi_X)$. Таким образом, поля X и $\widetilde{X}\big|_{\mathcal{E}_X}$ локально «устроены одинаково», что и требовалось показать.

2.7. Линеаризации. Заметим, что соответствие между эволюционными дифференцированиями и производящими сечениями позволяет сопоставить паре (φ, ψ), $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$, $\psi \in \mathcal{F}(\pi)$, новое сечение $Э_\varphi(\psi) \in \mathcal{F}(\pi)$. При этом, если φ фиксировано, а ψ произвольно, мы получаем эволюционное дифференцирование в алгебре $\mathcal{F}(\pi)$. Переходя теперь на «сопряженную» точку зрения, т. е. фиксируя сечение ψ и оставляя φ «свободным», мы получим некоторый оператор ℓ_ψ, действующий из модуля $\mathcal{F}(\pi, \pi)$ в алгебру $\mathcal{F}(\pi)$ по правилу

$$\ell_\psi(\varphi) = Э_\varphi(\psi). \tag{2.29}$$

Что это за оператор? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к равенствам (2.15) и с их помощью перепишем определение (2.29) в виде

$$\ell_\psi(\varphi) = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma^j} D_\sigma(\varphi^j)$$

или

$$\ell_\psi = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial p_\sigma^j} D_\sigma^{(j)}, \tag{2.30}$$

где символ $D_\sigma^{(j)}$ означает, что оператор D_σ применяется к j-й компоненте соответствующего сечения. Проанализируем равенство (2.30) более подробно.

Пусть s — некоторое сечение расслоения π. Поскольку каждое из полей D_i касается всех максимальных интегральных многообразий распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ и, значит, допускает ограничение на графики бесконечных джетов, такое ограничение, в силу (2.30), допускает и оператор ℓ_ψ. Точнее, это означает, что для любого $s \in \Gamma(\pi)$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\pi, \pi) \arrow[r, "\ell_\psi"] \arrow[d, "j_\infty(s)^*"'] & \mathcal{F}(\pi) \arrow[d, "j_\infty(s)^*"] \\ \mathcal{F}(\pi \arrow[r, "\ell_\psi|_s"] & \Gamma(\pi) \end{tikzcd} \tag{2.31}$$

где $\ell_\psi\big|_s$ — рассматриваемое ограничение. Объединяя диаграмму (2.31) с равенством (2.30), мы видим, что для любого сечения $\varphi \in \Gamma(\pi)$ имеет место равенство

$$\ell_{\psi,s}(\varphi) = \sum_{j,\sigma} \frac{\partial\psi}{\partial p_\sigma^j}\bigg|_s \frac{\partial^{|\sigma|}\varphi^j}{\partial x^\sigma}. \tag{2.32}$$

Формула (2.32) показывает, что оператор $\ell_{\psi,s}$ есть линеаризация оператора Δ_ψ, соответствующего функции ψ, на сечении $s \in \Gamma(\pi)$. Все такие линеаризации получаются путем ограничения оператора ℓ_ψ на соответствующее сечение.

Определение 2.5. Оператор ℓ_ψ называется оператором *универсальной линеаризации* нелинейного дифференциального оператора Δ_ψ.

Перечислим еще раз основные свойства универсальной линеаризации:

1) оператор ℓ_ψ: $\mathcal{F}(\pi,\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$, $\psi \in \mathcal{F}(\pi)$, линеен;

2) он допускает ограничение на графики бесконечных джетов;

3) оператор ℓ_ψ является двойственным к эволюционным дифференцированиям: $\ell_\psi(\varphi) = Э_\varphi(\psi)$.

Заметим также, что если ψ — линейная по всем переменным p_σ^j функция (т. е. оператор Δ_ψ линеен), то имеет место равенство

$$\ell_\psi = \widehat{\Delta}_\psi. \tag{2.33}$$

Построенный выше оператор ℓ_ψ был определен для нелинейных дифференциальных операторов вида Δ_ψ: $\Gamma(\pi) \to C^\infty(M)$. Обобщим конструкцию универсальной линеаризации на произвольные операторы Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$, где π', как и π, — некоторое локально тривиальное векторное расслоение над многообразием M, $\dim(\pi') = m'$. Пусть $\psi \in \mathcal{F}(\pi,\pi')$ — представляющее сечение оператора Δ. Рассмотрим произвольный элемент $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$ и такое гладко зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство элементов $\varphi_t \in \mathcal{F}(\pi,\pi)$, что $\left.\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi$. Пусть $\nabla_t = \nabla_{\varphi_t}$: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ — соответствующее семейство операторов и $\bar\varphi_t = \varphi_{\Delta\circ\nabla_t}$. Положим

$$\ell_\psi(\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\bar\varphi_t\right)\bigg|_{t=0}. \tag{2.34}$$

Упражнение 2.2. Покажите, что определение (2.34) корректно, т. е. не зависит от выбора семейства φ_t, удовлетворяющего условию $\left.\frac{\partial\varphi_t}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi$.

Оператор $\ell_\psi\colon \mathcal{F}(\pi,\pi)\to\mathcal{F}(\pi,\pi')$ называется универсальной линеаризацией нелинейного дифференциального оператора Δ_ψ и в локальных координатах имеет вид $\ell_\psi=\|\ell_\psi^{\alpha\beta}\|$, где $\|\ell_\psi^{\alpha\beta}\|$ — $(m'\times m)$-матрица, элементы которой суть

$$\ell_\psi^{\alpha\beta}=\sum_\sigma\frac{\partial\psi^\alpha}{\partial p_\sigma^\beta}D_\sigma,\qquad \alpha=1,\ldots,m',\quad \beta=1,\ldots,m. \tag{2.35}$$

Очевидно, что при $m'=1$ этот оператор совпадает с оператором, введенным выше. Более того, он обладает перечисленными выше свойствами (1) — (3), с той лишь разницей, что оператор $Э_\varphi^{\pi'}$, определенный равенством $Э_\varphi^{\pi'}(\psi)=\ell_\psi(\varphi)$, действует теперь не на алгебре $\mathcal{F}(\pi)$, а в модуле $\mathcal{F}(\pi,\pi')$. При этом если $\psi\in\mathcal{F}(\pi,\pi')$ и $f\in\mathcal{F}(\pi)$, то операторы $Э_\varphi^{\pi'}$ и $Э_\varphi$ связаны между собой равенствами

$$Э_\varphi^{\pi'}(f\psi)=Э_\varphi(f)\psi+fЭ_\varphi^{\pi'}(\psi). \tag{2.36}$$

Таким образом, мы видим, что каждое сечение $\varphi\in\mathcal{F}(\pi,\pi)$ определяет семейство дифференцирований $Э_\varphi^{\pi'}\colon \mathcal{F}(\pi,\pi')\to\mathcal{F}(\pi,\pi')$, причем, как это следует из (2.36), каждый оператор $Э_\varphi^{\pi'}$ является дифференцированием модуля $\mathcal{F}(\pi,\pi)$ над дифференцированием $Э_\varphi$ алгебры $\mathcal{F}(\pi)$.

Замечание 2.1. Связь между эволюционными дифференцированиями и линеаризациями становится более наглядной, если вновь обратиться к аналогии с классической дифференциальной геометрией. Действительно, если M и M' — гладкие конечномерные многообразия и $G\colon M\to M'$ — гладкое отображение, то линеаризация (дифференциал) G_* отображения G в точке $x\in M$ строится следующим образом: берется кривая x_t в M, проходящая через точку x, $x_0=x$, рассматривается касательный вектор $v=\left.\frac{dx_t}{dt}\right|_{t=0}$ к этой кривой в точке x и показывается, что равенство $G_*(v)=\frac{d}{dt}G(x_t)$ определяет касательный вектор к M' в точке $G(x)$, зависящий только от выбора v. Если X — векторное поле на M, то эта конструкция, вообще говоря, не позволяет построить соответствующее векторное поле $G_*(X)$ на M'. Понимая, однако, векторные поля как сечения касательного расслоения, мы можем каждому полю $X \in D(M)$ каноническим образом сопоставить сечение $G_*(X)$ расслоения над M, индуцированного из касательного расслоения над M' с помощью отображения G.

В нашей ситуации роль точек рассматриваемых «многообразий» играют сечения расслоений π и π' соответственно, а роль отображения G — нелинейный дифференциальный оператор $\Delta = \Delta_\psi$ (а точнее, отображение Φ_Δ: $J^\infty(\pi) \to J^\infty(\pi')$, см. п. 1.3). Взяв кривую в $\Gamma(\pi)$, мы должны рассмотреть семейство сечений $s(t) \in \Gamma(\pi)$. Как мы знаем, «касательные векторы» к таким кривым определяются эволюционными дифференцированиями в $\mathcal{F}(\pi)$, выполняющими роль векторных полей на $\Gamma(\pi)$, т. е. сечениями $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$. Если ∇ — оператор, соответствующий сечению φ, то кривая $s(t)$ задается эволюционным уравнением

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla(s),$$

а «касательный вектор» к ее образу находится из равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta(s) = j_\infty(s(0))^*(\ell_\psi(\varphi)).$$

Таким образом, как и в конечномерном случае, линеаризация определена на векторных полях, т. е. на эволюционных дифференцированиях, причем возникающая неоднозначность устраняется, если расслоение $(\pi'_\infty)^*(\pi')$ (аналог касательного расслоения) индуцировать на $J^\infty(\pi)$ с помощью отображения $G = \Phi_\Delta$: $J^\infty(\pi) \to J^\infty(\pi')$, определяемого всеми продолжениями оператора Δ (см. рис. 4.6). При этом, как легко видеть,

$$\left(\Phi_\Delta\right)^* (\pi'_\infty)^*(\pi') = \left(\pi'_\infty \circ \Phi_\Delta\right)^* (\pi') = \pi^*_\infty(\pi').$$

Операторы ℓ_ψ и эволюционные дифференцирования вида $Э^{\pi'}_\varphi$ позволяют в удобном виде переписать некоторые из полученных в настоящем параграфе соотношений. Прежде всего заметим, что если id: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ — тождественный оператор, то его линеаризация ℓ_{id}: $\mathcal{F}(\pi, \pi) \to \mathcal{F}(\pi, \pi)$ также является тождественным оператором. Поэтому для любого сечения $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$ выполнено равенство

$$Э^\pi_\varphi(\varphi_{\mathrm{id}}) = \ell_{\mathrm{id}}(\varphi) = \varphi. \qquad (2.37)$$

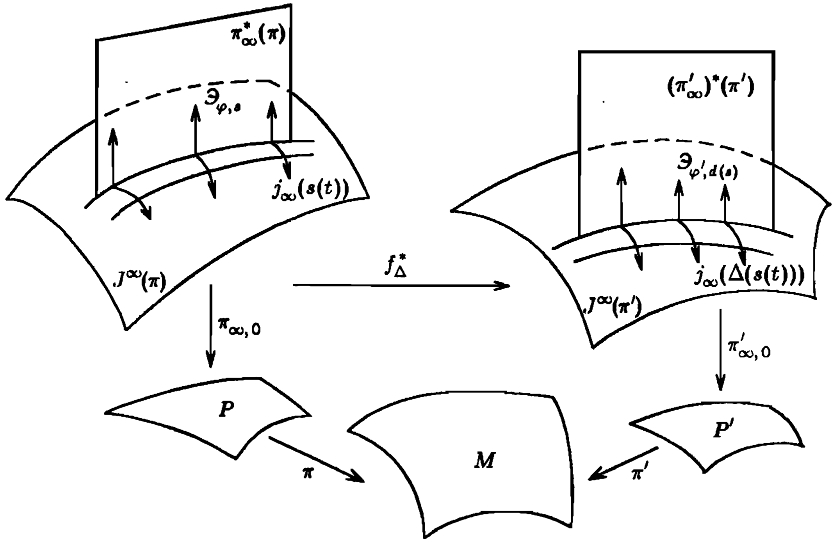

Рис. 4.6. Действие линеаризацией на эволюционные поля

Сопоставляя (2.37) с определением скобки Якоби, мы видим, что

$$\left[Э^\pi_\varphi, Э^\pi_\psi\right](\varphi_{\mathrm{id}}) = Э^\pi_\varphi\left(Э^\pi_\psi(\varphi_{\mathrm{id}})\right) - Э^\pi_\psi\left(Э^\pi_\varphi(\varphi_{\mathrm{id}})\right) = Э^\pi_\varphi(\psi) - Э^\pi_\psi(\varphi),$$

т. е.

$$\{\varphi, \psi\} = Э^\pi_\varphi(\psi) - Э^\pi_\psi(\varphi). \tag{2.38}$$

Другое выражение для скобки Якоби, непосредственно следующее из (2.38), имеет вид

$$\{\varphi, \psi\} = Э^\pi_\varphi(\psi) - \ell_\varphi(\psi)$$

или

$$\{\varphi, \bullet\} = Э^\pi_\varphi - \ell_\varphi. \tag{2.39}$$

Сопоставляя равенство (2.27) с координатным представлением универсальной линеаризации, можно убедиться также, что если π — тривиальное одномерное расслоение, то поле Ли X^*_φ на $J^\infty(\pi)$ может быть представлено в виде

$$X^*_\varphi = Э_\varphi - \ell_\varphi + \ell_\varphi(1) = \{\varphi, \bullet\} + \ell_\varphi(1), \tag{2.40}$$

где 1 — сечение расслоения $\pi^*_\infty(\pi)$: $J^\infty(\pi) \times \mathbb{R} \to J^\infty(\pi)$, тождественно равное 1 в каждой точке многообразия $J^\infty(\pi)$.

Эволюционные дифференцирования и универсальные линеаризации играют важную роль в теории высших симметрий нелинейных дифференциальных уравнений, к изучению которой мы приступаем.

§ 3. Бесконечно продолженные уравнения и теория высших симметрий

В предыдущем параграфе, исследуя инфинитезимальные автоморфизмы распределения Картана на $J^\infty(\pi)$, мы пришли к понятию эволюционного дифференцирования, которое неформально можно понимать как векторное поле на «многообразии» сечений $\Gamma(\pi)$. Наш следующий шаг состоит в распространении этого подхода на произвольные дифференциальные уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$. Пытаясь выяснить, что есть векторное поле на «многообразии» $\operatorname{Sol}\mathcal{E}$ решений уравнения $\mathcal{E}$, мы придем к теории высших симметрий нелинейных дифференциальных уравнений, которая естественным образом обобщает теорию классических симметрий, развитую ранее.

Поскольку решения уравнения $\mathcal{E}$ — это такие сечения $s \in \Gamma(\pi)$, что $\Gamma_s^k = j_k(s)(M) \subset \mathcal{E}$, естественно предположить, что по крайней мере некоторые из искомых полей на $\operatorname{Sol}\mathcal{E}$ должны получаться путем ограничения полей, определенных на объемлющем пространстве $\Gamma(\pi)$, т. е. эволюционных дифференцирований. Однако если мы возьмем произвольное эволюционное дифференцирование $Э_\varphi$ на $J^\infty(\pi)$ и попытаемся ограничить его на $\mathcal{E}$, т. е. применить к функциям из $C^\infty(\mathcal{E})$, то если $\deg(\varphi) \neq 0$, наша попытка окажется неудачной — функция $Э_\varphi(\psi)$, $\psi \in C^\infty(\mathcal{E})$, уже не будет являться элементом алгебры $C^\infty(\mathcal{E})$. Если же использовать поправки к $Э_\varphi$ на поля вида $\widehat{X}_M$, то в этом случае получаемые «поля» на $\operatorname{Sol}\mathcal{E}$ будут исчерпываться уже известными классическими симметриями уравнения $\mathcal{E}$. Причины происходящего понятны — вспомним, что эволюционные дифференцирования возникли при переходе от пространств конечных джетов $J^k(\pi)$ к башне $\ldots \leftarrow J^k(\pi) \leftarrow J^{k+1}(\pi) \leftarrow \ldots$ и рассмотрении распределения Картана на $J^\infty(\pi)$. Аналогом этой конструкции для уравнения $\mathcal{E}$ служит цепочка его *продолжений* $\mathcal{E}^{(l)}$, $l=0,1\ldots$, приводящая к *бесконечно продолженному уравнению* $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$. Заметим, что понятие продолжения играет важную роль в таких вопросах, как теория формальной разрешимости дифференциальных уравнений, особенности их решений (разрывы, ударные фронты) и т. д.

3.1. Продолжения. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — уравнение порядка k, локально задаваемое условиями

$$\mathcal{E} = \left\{\theta_k \in J^k(\pi) \mid F_1(\theta_k) = \ldots = F_r(\theta_k) = 0,\ F_1, \ldots, F_r \in \mathcal{F}_k(\pi)\right\}.$$

Если $s \in \Gamma(\pi)$ — некоторое решение уравнения $\mathcal{E}$, т. е. если

$$F_\alpha\left(x, \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}, \ldots\right)=0, \quad \alpha=1,\ldots,r, \quad j=1,\ldots,m, \quad |\sigma| \leqslant k, \tag{3.1}$$

то s должно удовлетворять и всем дифференциальным следствиям системы (3.1) *). В частности,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial F_\alpha}{\partial p^j_\sigma} \frac{\partial^{|\sigma|+1} s^j}{\partial x_i \partial x^\sigma} = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \quad j = 1, \ldots, m, \quad |\sigma| \leqslant k, \tag{3.2}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$, или

$$(j_{k+1}(s))^* D_i(F_\alpha) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{3.3}$$

где D_i — операторы полных производных. Объединение систем (3.1) и (3.2), возникающее как дифференциальное следствие системы (3.1) порядка $\leqslant 1$, определяет некоторое уравнение $\mathcal{E}^{(1)} \subset J^{k+1}(\pi)$ порядка $k+1$ и называется *первым продолжением уравнения* $\mathcal{E}$.

Чтобы определить понятие первого продолжения инвариантным образом, выясним, при каких условиях точка $\theta_{k+1} \in J^{k+1}(\pi)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}^{(1)}$. Во-первых, очевидно, для этого необходимо, чтобы точка $\theta_k = \pi_{k+1,k}(\theta_{k+1})$ лежала на уравнении $\mathcal{E}$. Далее, представим точку $\theta_{k+1} \in \mathcal{E}^{(1)}$ в виде $\theta_{k+1} = [s]^{k+1}_x$, $s \in \Gamma(\pi)$, и подставим отрезок ряда Тейлора длины $k+1$ сечения s в уравнение (3.1). Раскладывая результат подстановки в ряд Тейлора и сопоставляя полученное выражение с равенствами (3.2), мы убеждаемся, что точка θ_{k+1} лежит в $\mathcal{E}^{(1)}$ тогда и только тогда, когда соответствующее сечение $s \in \Gamma(\pi)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{E}$ в точке θ_k с точностью до бесконечно малых второго порядка. Иначе говоря, точка $\theta_{k+1} = [s]^{k+1}_x$ в том и только в том случае лежит в $\mathcal{E}^{(1)}$, если многообразие $j_k(s)(M)$ касается уравнения $\mathcal{E}$ в точке $\theta_k = [s]^k_x$. Это и есть искомое инвариантное определение первого продолжения. Естественным образом обобщая его, мы приходим к следующему определению.

Определение 3.1. Множество $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi)$, состоящее из таких точек $\theta_{k+l} = [s]^{k+l}_x$, что график $j_k(s)(M)$ k-го джета сечения $s \in \Gamma(\pi)$ касается уравнения $\mathcal{E}$ в точке $\theta_k = [s]^k_x$ с порядком $\geqslant l$, называется *l-м продолжением уравнения* $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$.

Очевидно, условия, задающие l-е продолжение уравнения $\mathcal{E}$, являются дифференциальными следствиями условий (3.1) вплоть до порядка l включительно, т. е. имеют вид

$$D_\tau(F_\alpha) = 0, \qquad |\tau| \leqslant l, \quad \alpha = 1, \ldots, r, \tag{3.4}$$

*) Т. е. всем уравнениям, полученным в результате дифференцирования рассматриваемой системы.

где τ — мультииндекс, а D_τ — соответствующая композиция операторов полных производных.

Пусть теперь ξ — некоторое расслоение размерности r над M и Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$ — оператор порядка k, определяющий уравнение, т. е. обладающий тем свойством, что $\theta_k \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_\Delta(\theta_k) = 0$. Сопоставляя выражения (1.7), полученные в § 1 для продолжений нелинейных дифференциальных операторов, с уравнениями (3.4), мы получаем следующий результат.

Утверждение 3.1. *Если уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ задано дифференциальным оператором Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$, то его l-е продолжение $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi)$ задается оператором $\Delta_l = j_l \circ \Delta$: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi_l)$.*

Упражнение 3.1. Пусть уравнение $\mathcal{E}$ таково, что его l-е продолжение является гладким подмногообразием в $J^{k+l}(\pi)$. Покажите, что в этом случае справедливо равенство $(\mathcal{E}^{(l)})^{(t)} = \mathcal{E}^{(l+t)}$ для всех $t \geqslant 0$. Это, в частности, означает, что в такой ситуации $(l+1)$-е продолжение можно определить индуктивно: $\mathcal{E}^{(l+1)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{E}^{(l)})^{(1)}$.

Упражнение 3.2. Приведите примеры уравнений, для которых $\mathcal{E}^{(1)}$ не является гладким подмногообразием в $J^{k+1}(\pi)$.

3.2. Бесконечно продолженные уравнения. Итак, для каждого $k \geqslant 0$ мы построили множество $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi)$ — l-е продолжение уравнения $\mathcal{E}$. Поскольку касание порядка $l+1$ влечет за собой касание со всеми меньшими порядками, имеют место естественные отображения $\mathcal{E}^{(l+1)} \to \mathcal{E}^{(l)}$, согласованные с проекциями объемлющих пространств джетов:

$$\begin{array}{ccc} J^{k+l+1}(\pi) & \supset & \mathcal{E}^{(l+1)} \\ {\scriptstyle \pi_{k+l+1,k+l}}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ J^{k+l}(\pi) & \supset & \mathcal{E}^{(l)} \end{array} \tag{3.5}$$

и также обозначаемые через $\pi_{k+l+1,k+l}$. Однако, в отличие от проекций джетов, отображение $\pi_{k+l+1,k+l}$: $\mathcal{E}^{(l+1)} \to \mathcal{E}^{(l)}$ может не являться сюръективным.

Упражнение 3.3. Приведите примеры уравнений, для которых отображение $\pi_{k+1,k}$: $\mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}$ не сюръективно.

Цепочка отображений

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(0)} \xleftarrow{\pi_{k+1,k}} \mathcal{E}^{(1)} \longleftarrow \ldots \longleftarrow \mathcal{E}^{(l)} \xleftarrow{\pi_{k+l+1,k+l}} \mathcal{E}^{(l+1)} \longleftarrow \ldots \tag{3.6}$$

позволяет определить обратный предел $\mathcal{E}^\infty = \lim\limits_{l\to\infty} \operatorname{ind} \mathcal{E}^{(l)}$ продолжений уравнения $\mathcal{E}$, называемый ***бесконечным продолжением*** этого уравнения. Множество $\mathcal{E}^\infty$ лежит в многообразии бесконечных джетов $J^\infty(\pi)$, и его точкам можно дать следующую наглядную интерпретацию.

Как мы знаем, точка, лежащая на $\mathcal{E}^{(l)}$, — это отрезок ряда Тейлора сечения расслоения π длины $k+l$, удовлетворяющий $\mathcal{E}$ с точностью до бесконечно малых порядка $l+1$. С другой стороны, точки многообразия $J^\infty(\pi)$ — это полные ряды Тейлора сечений расслоения π. Поэтому точка $\theta = [s]_x^\infty \in J^\infty(\pi)$ тогда и только тогда принадлежит множеству $\mathcal{E}^\infty$, когда ряд Тейлора сечения s в точке $x \in M$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{E}$. Иными словами, точки $\mathcal{E}^\infty$ суть формальные решения уравнения $\mathcal{E}$. Отсюда, в частности, видно, что необходимым условием разрешимости уравнения $\mathcal{E}$ в точке $x \in M$ является непустота множества $\mathcal{E}^\infty \cap \pi_\infty^{-1}(x)$.

Определим алгебру гладких функций на $\mathcal{E}^{(l)}$ как совокупность ограничений гладких функций, определенных на объемлющем многообразии $J^{k+l}(\pi)$:

$$\mathcal{F}_l(\mathcal{E}) = \left\{\varphi\colon\ \mathcal{E}^{(l)} \to \mathbb{R} \mid \exists \bar\varphi \in \mathcal{F}_{k+l}(\pi)\colon\ \bar\varphi\big|_{\mathcal{E}^{(l)}} = \varphi\right\}.$$

В случае, когда $\mathcal{E}^{(l)}$ — гладкое подмногообразие в $J^{k+l}(\pi)$, имеет место равенство $\mathcal{F}_l(\mathcal{E}) = C^\infty(\mathcal{E}^{(l)})$. Наличие коммутативной диаграммы (3.5) позволяет по цепочке отображений (3.6) построить цепочку гомоморфизмов коммутативных алгебр

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{E}) = C^\infty(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi^*_{k+1,k}} \mathcal{F}_1(\mathcal{E}) \to \ldots \to \mathcal{F}_l(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi^*_{k+l+1,k+l}} \mathcal{F}_{l+1}(\mathcal{E}) \to \ldots,$$

прямой предел которой $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \lim\limits_{l\to\infty} \operatorname{dir} \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ называется алгеброй гладких функций на бесконечно продолженном уравнении $\mathcal{E}^\infty$. Для всякого $l \geqslant 0$ определены естественные гомоморфизмы алгебр $\pi^*_{\infty,k+l}\colon \mathcal{F}_l(\mathcal{E}) \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$; поскольку $\operatorname{Im}(\pi^*_{\infty,k+l}) \subset \operatorname{Im} \pi^*_{\infty,k+l+1}$, алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ фильтрована образами этих гомоморфизмов. Образ гомоморфизма $\pi^*_{\infty,k+l}$ в $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ можно отождествить с кольцом гладких функций на множестве $\mathcal{E}_l = \pi_{\infty,k+l}(\mathcal{E}^\infty) \subset \mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi)$. Поэтому если все отображения $\mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^{(l)}$ сюръективны, можно считать, что алгебра $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ фильтрована подалгебрами $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$. Как легко видеть, уравнения, для которых сказанное справедливо, обладают следующим важным свойством: любое решение такого уравнения, построенное с точностью до бесконечно малых порядка l, может быть достроено до формального решения.

Если $\pi'\colon P' \to M$ — другое расслоение над M, то можно также ввести $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$-модули

$$\mathcal{F}_l(\mathcal{E}, \pi') = \{\varphi \in \Gamma(\varepsilon_l^*(\pi')) \mid \exists \bar{\varphi} \in \Gamma(\pi_{k+l}^*(\pi'))\colon\ \bar{\varphi}\big|_{\mathcal{E}^{(l)}} = \varphi\},$$

где $\varepsilon_l\colon \mathcal{E}^{(l)} \hookrightarrow J^{k+l}(\pi)$ — каноническое вложение, и построить фильтрованный $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуль $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi') = \lim\limits_{l\to\infty} \operatorname{dir} \mathcal{F}_l(\mathcal{E}, \pi')$.

Из определения алгебр $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ следует, что при всех $l \geqslant 0$ имеют место эпиморфизмы $\varepsilon_l^*\colon\ \mathcal{F}_{k+l}(\pi) \to \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$. Полагая $\mathcal{E}^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_l = \pi_{k,k+l}(\mathcal{E})$ при $l<0$ и соответствующим образом определяя алгебры $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$, мы приходим к коммутативной диаграмме

$$\begin{CD}
\mathcal{F}_{-\infty}(\pi) @>>> \ldots @>>> \mathcal{F}_{k-1}(\pi) @>>> \mathcal{F}_k(\pi) @>>> \ldots @>>> \mathcal{F}_{k+l}(\pi) @>>> \mathcal{F}_{k+l+1}(\pi) @>>> \ldots\\
@V{\varepsilon_{-\infty}^*}VV @. @V{\varepsilon_{-1}^*}VV @V{\varepsilon_0^*}VV @. @V{\varepsilon_l^*}VV @V{\varepsilon_{l+1}^*}VV\\
\mathcal{F}_{-\infty}(\mathcal{E}) @>>> \ldots @>>> \mathcal{F}_{-1}(\mathcal{E}) @>>> \mathcal{F}_0(\mathcal{E}) @>>> \ldots @>>> \mathcal{F}_l(\mathcal{E}) @>>> \mathcal{F}_{l+1}(\mathcal{E}) @>>> \ldots
\end{CD} \tag{3.7}$$

где $\mathcal{F}_{-\infty}(\mathcal{E}) \stackrel{\text{def}}{=} C^\infty(\pi_\infty(\mathcal{E}^\infty))$. Обозначим через $I_l(\mathcal{E})$ ядро эпиморфизма ε_l^*. Тогда $I_l(\mathcal{E})$ — идеал алгебры $\mathcal{F}_{k+l}(\mathcal{E})$, обладающий тем свойством, что функция φ в том и только том случае лежит в этом идеале, если $\varphi(\theta)=0$ для всех точек $\theta \in \mathcal{E}^{(l)}$. Из коммутативности диаграммы (3.7) следует, что для всех $l \in \mathbb{Z}$ определены вложения $I_l(\mathcal{E}) \subset I_{l+1}(\mathcal{E})$. Поэтому система идеалов $\{I_l(\mathcal{E})\}$ определяет идеал $I(\mathcal{E}) = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}} I_l(\mathcal{E})$ фильтрованной алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, называемый *идеалом уравнения* $\mathcal{E}$.

Пусть $X \in D(\pi)$ — векторное поле на $J^\infty(\pi)$, обладающее тем свойством, что идеал $I(\mathcal{E})$ замкнут относительно дифференцирования X: $X(I(\mathcal{E})) \subset I(\mathcal{E})$. Тогда X порождает дифференцирование $X\big|_{\mathcal{E}}$ факторалгебры $\mathcal{F}(\pi)/I(\mathcal{E})$, т. е. векторное поле на $\mathcal{E}^\infty$. В этом случае мы говорим, что поле X касается многообразия $\mathcal{E}^\infty$ или допускает ограничение на это многообразие.

Заметим, что без ограничения общности мы можем считать, что гомоморфизм $\varepsilon_{-\infty}^*$ является изоморфизмом, т. е. $\mathcal{E}^{(-\infty)} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\infty(\mathcal{E}^\infty) = M$. Действительно, если проекция $\pi_\infty\big|_{\mathcal{E}^\infty}\colon\ \mathcal{E}^\infty \to M$ не является сюръекцией, мы можем ограничить расслоение π на подмногообразие $\pi_\infty(\mathcal{E}^\infty) \subset M$ (или, если это необходимо, на его неособую часть) и в дальнейшем рассматривать все необходимые конструкции в этом ограничении. Более того, по аналогичным соображениям можно считать также, что $\mathcal{E}^{(-k)} = \pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi)$. Поэтому в дальнейшем мы полагаем, что $\mathcal{E}^\infty$ сюръективно проектируется на многообразие нулевых джетов $J^0(\pi)$.

Пусть $F_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$, — соотношения, определяющие уравнение $\mathcal{E}$. Тогда идеал $I_0(\mathcal{E})$ порожден образующими $F_\alpha \in \mathcal{F}_k(\pi)$, т. е. любой элемент $\varphi \in I_0(\mathcal{E})$ имеет вид $\varphi = \varphi_1 F_1 + \ldots + \varphi_r F_r$, $\varphi_\alpha \in \mathcal{F}_k(\mathcal{E})$. Добавляя к этим образующим элементы вида $D_i F_\alpha$, $i = 1, \ldots, n$, мы получим, как это следует из (3.2), идеал $I_1(\mathcal{E})$ и т. д. Наконец, идеал $I(\mathcal{E})$ порожден всеми элементами вида $D_\tau(F_\alpha)$, $|\tau| \geqslant 0$, $\alpha = 1, \ldots, r$, причем $I_l(\mathcal{E}) = I(\mathcal{E}) \cap \mathcal{F}_{k+l}(\pi)$. В частности, идеал $I_0(\mathcal{E})$ тривиален (а его тривиальность эквивалентна сюръективности отображения $\pi_{\infty,0}|_{\mathcal{E}^\infty}$) в том и только том случае, если среди следствий условий $D_\tau(F_\alpha) = 0$ нет равенств вида $f(x, u) = 0$, т. е. если в уравнение $\mathcal{E}$ не входят (может быть, неявным образом) функциональные соотношения. Если же такие соотношения существуют, мы можем локально выбрать в них подсистему максимального ранга и выразить с ее помощью часть переменных x_i, u^j через оставшиеся переменные. Эта операция является координатным эквивалентом описанной выше процедуры редукции произвольного уравнения $\mathcal{E}$ к такому уравнению, для которого $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi)$.

Данное описание идеалов $I_l(\mathcal{E})$ показывает, что идеал $I(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$ обладает следующими двумя важными свойствами:

а) он является идеалом фильтрованной алгебры, т. е.

$$I(\mathcal{E}) \cap \mathcal{F}_{k+l}(\mathcal{E}) = I_l(\mathcal{E}), \qquad I(\mathcal{E}) = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} I_l(\mathcal{E});$$

б) для любого векторного поля $X \in D(M)$ идеал $I(\mathcal{E})$ замкнут относительно поднятия $\widehat{X} \in D(\pi)$: $\widehat{X} I(\mathcal{E}) \subset I(\mathcal{E})$.

(Свойство б) идеала $I(\mathcal{E})$ называется дифференциальной замкнутостью.)

Обратно, пусть в алгебре $\mathcal{F}(\pi)$ задан фильтрованный дифференциально замкнутый идеал I, дифференциально порожденный*) конечным числом образующих $F_1, \ldots, F_r \in \mathcal{F}_k(\pi)$, являющихся функциями $x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_\sigma, \ldots, |\sigma| \leqslant k$. Определим множество $\mathcal{E}_{I,l} \subset$ $\subset J^{k+l}(\pi)$ как многообразие нулей идеала $I_l = I \cap \mathcal{F}_{k+l}(\pi)$:

$$\mathcal{E}_{I,l} = \left\{\theta \in J^{k+l}(\pi) \mid \varphi(\theta) = 0 \ \forall \varphi \in I_l\right\}.$$

Тогда, как легко видеть, $\mathcal{E}_{I,l} = \mathcal{E}_I^{(l)}$, где $l \geqslant 0$ и $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_{I,0}$, а $I = I(\mathcal{E}_I)$. Итак, существует взаимно однозначное соответствие между подмногообразиями вида $\mathcal{E}^\infty$ в $J^\infty(\pi)$ и конечно порожденными дифферен-

*) Мы говорим, что идеал I дифференциально порожден образующими $F_1, \ldots$ $\ldots, F_r$, если он алгебраически порожден элементами $D_\tau F_j$, $|\tau| \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, r$.

циально замкнутыми фильтрованными идеалами алгебры $\mathcal{F}(\pi)$. Отметим параллель этого соответствия с известной в алгебраической геометрии двойственностью между алгебраическими многообразиями и идеалами коммутативных алгебр (см., например, [74]).

3.3. Высшие симметрии. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — уравнение, $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi)$ и $I(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}(\pi)$ — идеал этого уравнения. Тогда факторалгебра $\mathcal{F}(\pi)/I(\mathcal{E}) = \mathcal{F}(\mathcal{E})$ является фильтрованной алгеброй и отождествляется с алгеброй гладких функций на многообразии $\mathcal{E}^\infty$. Теория дифференциальных объектов (полей, форм и др.) на $\mathcal{E}^\infty$ строится точно так же, как это было сделано в § 1 для случая $J^\infty(\pi)$. Так, векторное поле на $\mathcal{E}^\infty$ — это дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{E})$, согласованное с фильтрацией, модуль $\Lambda^i(\mathcal{E}) = \Lambda^i(\mathcal{E}^\infty)$ i-х внешних форм является прямым пределом модулей $\Lambda^i(\mathcal{E}^{(l)})$ и т. п.

Определим *распределение Картана* $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ на $\mathcal{E}^\infty$, полагая *)

$$\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}) = T_\theta(\mathcal{E}^\infty) \cap \mathcal{C}_\theta, \quad \theta \in \mathcal{E}^\infty,$$

где $\mathcal{C}_\theta$ — соответствующий элемент распределения Картана на многообразии $J^\infty(\pi)$. В силу определения бесконечного продолжения распределение $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ нетривиально. Из описания максимальных интегральных многообразий распределения Картана на $J^\infty(\pi)$, данного в § 2, и определения распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ следует, что максимальными интегральными многообразиями последнего являются многообразия вида $\Gamma_s^\infty = j_\infty(s)(M)$, $s \in \Gamma(\pi)$, лежащие в $\mathcal{E}^\infty$, и только они. Заметим, что если $\Gamma_s^\infty \subset \mathcal{E}^\infty$, то многообразие $\pi_{\infty,k}(\Gamma_s^\infty) = \Gamma_s^k$ лежит в $\mathcal{E}$, т. е. s является решением уравнения $\mathcal{E}$. Обратно, для всякого решения s уравнения $\mathcal{E}$ соответствующее многообразие Γ_s^∞ лежит в $\mathcal{E}^\infty$ и, естественно, является максимальным интегральным многообразием распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Таким образом, максимальные интегральные многообразия распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$ суть решения уравнения $\mathcal{E}$.

Замечание 3.1. Кажется более естественным определить картановскую плоскость $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E})$ в точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ как линейную оболочку касательных плоскостей к решениям уравнения $\mathcal{E}$, проходящим через эту точку. Однако этот путь обладает рядом существенных недостатков: во-первых, для его реализации необходимо знание решений уравнения $\mathcal{E}$ и, во-вторых, он приводит к теории, значительно более бедной, чем излагаемая нами. Подход, описываемый нами,

*) Мы используем для распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$ то же обозначение, что и для распределения Картана на $\mathcal{E}$. Это не приведет к двусмысленности, поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело только с бесконечными продолжениями.

состоит, если так можно выразиться, в построении распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$, исходя из «касательных плоскостей к формальным решениям уравнения».

Определим модуль картановских форм на $\mathcal{E}^\infty$ как совокупность $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) \subset \Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ таких 1-форм, которые в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ аннулируются векторами распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$.

Упражнение 3.4. Покажите, что имеет место равенство $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) = \mathcal{C}\Lambda^1(\pi)\big|_{\mathcal{E}^\infty}$, т. е. всякая форма $\omega \in \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ может быть представлена в виде ограничения на $\mathcal{E}^\infty$ некоторой картановской формы на $J^\infty(\pi)$.

Из § 2 и сказанного выше следует, что идеал $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) \wedge \Lambda^*(\mathcal{E}^\infty)$ дифференциально замкнут относительно дифференциала де Рама d: $\Lambda^*(\mathcal{E}^\infty) \to \Lambda^*(\mathcal{E}^\infty)$, т. е.

$$d\left(\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) \wedge \Lambda^*(\mathcal{E}^\infty)\right) \subset \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) \wedge \Lambda^*(\mathcal{E}^\infty). \tag{3.8}$$

Далее, следуя уже знакомым из предыдущего параграфа мотивировкам, введем множества

$$\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty) = \left\{X \in D(\mathcal{E}^\infty) \mid X \,\lrcorner\, \omega = 0,\ \forall \omega \in \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)\right\}$$

и

$$D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) = \{X \in D(\mathcal{E}^\infty) \mid [X, \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)] \subset \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)\}.$$

Из определения следует, что множество $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ является подалгеброй Ли в алгебре Ли векторных полей на $\mathcal{E}^\infty$, а $\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$ — идеал в $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$. Дословно повторяя рассуждения § 2, мы вводим $\mathbb{R}$-алгебру Ли

$$\operatorname{sym} \mathcal{E} = D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)/\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$$

симметрий распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$, неформально отождествляя ее элементы с векторными полями на множестве максимальных интегральных многообразий этого распределения, т. е. на «многообразии» $\operatorname{Sol} \mathcal{E}$ решений уравнения $\mathcal{E}$.

Определение 3.2. Элементы алгебры Ли $\operatorname{sym} \mathcal{E}$ называются *высшими (инфинитезимальными) симметриями уравнения* $\mathcal{E}$.

Наша ближайшая цель — описание алгебры $\operatorname{sym} \mathcal{E}$. Для этого прежде всего заметим следующее.

Пусть $X \in D(M)$ — векторное поле на многообразии M. Тогда, поскольку идеал $I(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$ дифференциально замкнут, т. е. имеет место вложение $\widehat{X}(I(\mathcal{E})) \subset I(\mathcal{E})$, дифференцирование $\widehat{X}$: $\mathcal{F}(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$ определяет некоторое дифференцирование $\widehat{X}\big|_{\mathcal{E}^\infty}$ фильтрованной алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}(\pi)/I(\mathcal{E})$, т. е. векторное поле на $\mathcal{E}^\infty$. Иначе говоря, любое поле вида $\widehat{X}, X \in D(M)$, допускает ограничение на $\mathcal{E}^\infty$. Сказанное, очевидно, справедливо и для всех операторов, порожденных такими полями, т. е. операторов вида $\Delta = \sum \varphi_{i_1,\ldots,i_h} \widehat{X}_{i_1} \circ \ldots \circ \widehat{X}_{i_h} \colon \mathcal{F}(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$, $\varphi_{i_1,\ldots,i_h} \in \mathcal{F}(\pi)$. В частности, как видно из геометрического определения полей $\widehat{X}$, это справедливо для полей из $\mathcal{C}D(\pi)$. Иначе говоря, имеет место гомоморфизм алгебр Ли

$$\mathcal{C}D(\pi) \to \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty). \tag{3.9}$$

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ таково, что $\mathcal{E}^\infty$ сюръективно проектируется на некоторое многообразие $J^{l_0}(\pi)$, $l_0 < k$. Тогда для любого $l \leqslant l_0$ и любого дифференцирования $X \colon \mathcal{F}_{l-k}(\pi) \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$ найдется такое дифференцирование $X' \colon \mathcal{F}_l(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_l(\pi) & \xrightarrow{X'} & \mathcal{F}(\pi) \\ {\scriptstyle \varepsilon^*_{l-k}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon^*} \\ \mathcal{F}_{l-k}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{X} & \mathcal{F}(\mathcal{E}) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Условия леммы означают, что при $l \leqslant l_0$ отображение ε^*_{k-l} — изоморфизм, т. е. $\mathcal{F}_l(\pi) = \mathcal{F}_{l-k}(\mathcal{E})$. Представим (локально) дифференцирование X в виде $X = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\sigma| \leqslant l} \varphi^j_\sigma \frac{\partial}{\partial p^j_\sigma}$. В этом представлении $\varphi_i, \varphi^j_\sigma$ — функции на некотором конечном продолжении $\mathcal{E}^{(r)}$ уравнения $\mathcal{E}$, и их можно продолжить до гладких функций на объемлющем многообразии $J^{k+r}(\pi)$. $\square$

Напомним, что выше мы свели рассмотрение произвольных уравнений $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ к таким, для которых $\mathcal{E}^\infty$ сюръективно проектируется на $J^0(\pi)$. В этой ситуации из доказанной леммы следует, что отображение (3.9) эпиморфно, т. е. всякое поле $X \in \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$ является ограничением на $\mathcal{E}^\infty$ некоторого поля $X' \in \mathcal{C}D(\pi)$. Используя утверждение 2.2, мы видим, что тогда X представляется в виде $X = \sum_i \varphi_i \widehat{X}_i$, где $\varphi_i \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, а $X_i \in D(M)$.

Пусть теперь $X \in D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$. Ограничивая X на $\pi_\infty(\mathcal{E}^\infty) = M$, мы получим дифференцирование $X_M \colon C^\infty(M) \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$, которое в силу эпиморфности (3.9) продолжается до дифференцирования $X'_M \colon C^\infty(M) \to \mathcal{F}(\pi)$. Рассматривая его поднятие $\widehat{X}'_M \colon \mathcal{F}(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$, $\widehat{X}'_M \in \mathcal{C}D(\pi)$, и ограничивая последнее на $\mathcal{E}^\infty$, мы получим дифференцирование $\mathcal{C}X$, лежащее в $\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$.

Упражнение 3.5. Покажите, что $\mathcal{C}X$ однозначно определяется полем $X \in D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$, т. е. не зависит от способа расширения дифференцирования X_M до X'_M.

Обозначим через $D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) \subset D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ множество вертикальных автоморфизмов распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$, т. е. таких элементов $X \in D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$, что $X\big|_{C^\infty(M)} = 0$. Из построения поля $\mathcal{C}X$ следует, что соответствие v: $X \mapsto X^v = X - X^v$ определяет отображение

$$v\colon\ D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) \to D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty). \tag{3.10}$$

Лемма 3.3. *Отображение* (3.10) — *проектор, т. е.* $X^v = X$ *для всех* $X \in D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$.

Доказательство. Действительно, если X — вертикальное поле, дифференцирование $X_M = X\big|_{C^\infty(M)}$ тривиально. Поэтому из определения поля $\mathcal{C}X$ следует, что оно также тривиально. □

Из доказанной леммы вытекает, что имеет место прямое разложение

$$D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) = D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) \oplus \ker(v).$$

Очевидно также, что $\ker(v) = \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3.4. *Если проекция многообразия* $\mathcal{E}^\infty$ *на* M *сюръективна, то алгебра Ли* $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ *раскладывается в полупрямое произведение подалгебры* $D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ *вертикальных полей и идеала* $\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$:

$$D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) = D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty) \ominus \mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty). \tag{3.11}$$

Следствие 3.5. *Разложение* (3.11) *индуцирует изоморфизм алгебр Ли*

$$\operatorname{sym} \mathcal{E} \simeq D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty).$$

3.4. Внешние и внутренние высшие симметрии. Вернемся теперь к алгебре $\operatorname{sym} \mathcal{C}(\pi) = D_{\mathcal{C}}(\pi)/\mathcal{C}D(\pi)$ симметрий распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ и заметим следующее. Поскольку элементы класса смежности $\chi \in \operatorname{sym} \mathcal{C}(\pi)$ отличаются друг от друга на дифференцирования из $\mathcal{C}D(\pi)$, то либо ни один из них не касается многообразия $\mathcal{E}^\infty$, либо, наоборот, все они касаются этого многообразия. В последнем случае элемент χ порождает некоторую симметрию уравнения $\mathcal{E}$ и называется *внешней* (*высшей*) *симметрией* этого уравнения. Поэтому, как и в случае классических симметрий (§ 7 гл. 3), встает проблема сравнения внешнего и внутреннего подхода к определению высших симметрий.

Обозначим множество внешних симметрий через $\operatorname{sym}_e \mathcal{E}$. Очевидно, имеет место гомоморфизм алгебр Ли

$$\operatorname{sym}_e \mathcal{E} \to \operatorname{sym} \mathcal{E}, \tag{3.12}$$

определяемый операцией ограничения. Из результатов § 2 нам известно, что в каждом классе смежности $\chi \in \operatorname{sym} \mathcal{C}(\pi)$ имеется канонический представитель — вертикальное поле, являющееся эволюционным дифференцированием. Поэтому для того, чтобы проверить, является ли некоторый элемент $\chi \in \operatorname{sym} \mathcal{C}(\pi)$ внешней симметрией уравнения $\mathcal{E}$, достаточно убедиться, что соответствующий представитель касается $\mathcal{E}^\infty$. Основываясь на этих замечаниях, мы сейчас покажем, что отображение (3.12) эпиморфно. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 3.6. *Высшие симметрии коммутируют со всеми полями вида $\widehat{Y}$, $Y \in D(M)$. Точнее, для любого элемента $X \in D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ справедливо равенство $[X, \widehat{Y}] = 0$.*

Доказательство. Поскольку поле $\widehat{Y}$ (точнее, его ограничение на $\mathcal{E}^\infty$) лежит в множестве $\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$, которое является идеалом алгебры Ли $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$, коммутатор $[X, \widehat{Y}]$ также лежит в $\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$. Пусть теперь $f \in C^\infty(M)$ — функция на многообразии M. Тогда $\widehat{Y}(f) = Y(f)$ также принадлежит $C^\infty(M)$. Поэтому в силу вертикальности поля X имеют место равенства $X(f) = 0$ и $X(Y(f)) = 0$. Это означает, что $[X, \widehat{Y}](f) = X(Y(f)) - \widehat{Y}(X(f)) = 0$, т. е. поле $[X, \widehat{Y}]$ вертикально. Отсюда, используя разложение (3.11), можно сделать вывод, что $[X, \widehat{Y}] = 0$. □

Рассмотрим симметрию $X \in D^v_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}^\infty)$ уравнения $\mathcal{E}$ и ограничим ее на многообразие $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi)$. В силу леммы 3.2 полученное дифференцирование $X_0\colon \mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{F}(\mathcal{E})$ может быть продолжено до дифференцирования $X_0'\colon \mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{F}(\pi)$. Далее, из результатов, полученных в предыдущем параграфе, следует, что существует и единственным образом определен такой вертикальный автоморфизм $X' \in D^v_{\mathcal{C}}(\pi)$ распределения Картана на $J^\infty(\pi)$, что $X'|_{\mathcal{F}_0(\pi)} = X_0'$. При этом $X'|_{\mathcal{F}_0(\pi)} = X|_{\mathcal{F}_0(\pi)}$, т. е. $X'(\varphi) = X(\varphi)$ для любой функции $\varphi \in$ $\in \mathcal{F}_0(\pi)$.

Пусть $Y_1, \ldots, Y_l$ — произвольные поля на M и $\widehat{Y}_* = \widehat{Y}_1 \circ \ldots \circ \widehat{Y}_l$ — композиция их поднятий на $J^\infty(\pi)$. Тогда в силу леммы 3.6 имеет место равенство

$$[X, \widehat{Y}_*] = \sum_{i=1}^{l} \widehat{Y}_1 \circ \ldots \circ [X, \widehat{Y}_i] \circ \ldots \circ \widehat{Y}_l = 0,$$

откуда следует, что

$$X(\widehat{Y}_*(\varphi)) = \widehat{Y}_*(X(\varphi)) = \widehat{Y}_*(X'(\varphi)) = X'(\widehat{Y}_*(\varphi)). \tag{3.13}$$

Итак, мы показали, что $X'(\psi) = X(\psi)$ для любой функции ψ вида $\psi = \widehat{Y}_*(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{F}_0(\pi)$. Выберем локально в качестве φ координатные функции $p_0^j = u^j$, а в качестве Y^* — композицию полных производных D_σ. Поскольку $D_\sigma(u^j) = p_\sigma^j$, из (3.13) следует, что $X'(p_\sigma^j) = X(p_\sigma^j|_{\mathcal{E}^\infty})$ для всех σ и $j = 1, \ldots, m$. Так как любая гладкая функция ψ на $J^\infty(\pi)$ локально является функцией аргументов $x_1, \ldots, x_n, p_\sigma^j$, отсюда вытекает равенство $X'(\psi) = X(\psi|_{\mathcal{E}^\infty})$ для всех $\psi \in \mathcal{F}(\pi)$. Иными словами, доказана следующая терема.

Теорема 3.7. *Если уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ таково, что $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi)$, то отображение* (3.12) *эпиморфно, т. е. всякая внутренняя высшая симметрия уравнения $\mathcal{E}$ может быть представлена в виде ограничения на $\mathcal{E}^\infty$ некоторой его внешней симметрии. Точнее, для любого поля $X \in D_{\mathcal{C}}^v(\mathcal{E}^\infty)$ найдется такое поле $X' \in D_{\mathcal{C}}^v(\pi)$, что $X'|_{\mathcal{E}^\infty} = X$.*

Напомним, что в классической теории аналогичное утверждение, вообще говоря, несправедливо (см. § 7 гл. 3).

3.5. Определяющие уравнения для высших симметрий. Теперь, используя теорему 3.7, мы дадим аналитическое описание алгебры $\operatorname{sym}\mathcal{E}$, необходимое для конкретных вычислительных применений. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — произвольное уравнение порядка k, бесконечное продолжение которого сюръективно проектируется на $J^0(\pi)$. В силу полученных выше результатов любая высшая симметрия уравнения $\mathcal{E}$ может быть получена путем ограничения на $\mathcal{E}^\infty$ некоторого эволюционного дифференцирования $Э_\varphi \in D_{\mathcal{C}}^v(\pi)$, $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$. В свою очередь все эволюционные дифференцирования, допускающие ограничение на $\mathcal{E}^\infty$, определяются условием

$$Э_\varphi(I(\mathcal{E})) \subset I(\mathcal{E}), \tag{3.14}$$

где $I(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}(\pi)$ — идеал уравнения $\mathcal{E}$. Пусть уравнение $\mathcal{E}$ задается соотношениями $F_\alpha = 0$, $F_\alpha \in \mathcal{F}_k(\pi)$, $\alpha = 1, \ldots, r$, причем в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}$ дифференциалы $d_\theta F_\alpha$ линейно независимы. Это означает, что множество $\{F_1, \ldots, F_r\}$ является системой дифференциальных образующих идеала $I(\mathcal{E})$:

$$I(\mathcal{E}) = \left\{ \psi \in \mathcal{F}(\pi) \mid \psi = \sum_{\alpha,\sigma} \psi_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha),\ \psi_\alpha \in \mathcal{F}(\pi) \right\}.$$

Поэтому условия (3.14) равносильны тому, что для любых функций $\psi_1, \ldots, \psi_r \in \mathcal{F}(\pi)$ найдутся такие функции $\psi'_1, \ldots, \psi'_r \in \mathcal{F}(\pi)$, что

$$Э_\varphi\Big(\sum_{\alpha,\sigma} \psi_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha)\Big) = \sum_{\alpha,\sigma} \psi'_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha). \tag{3.15}$$

Но $Э_\varphi$ — дифференцирование, коммутирующее с операторами полных производных, и поэтому

$$Э_\varphi\Big(\sum_{\alpha,\sigma} \psi_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha)\Big) = \sum_{\alpha,\sigma} Э_\varphi(\psi_{\alpha,\sigma}) D_\sigma(F_\alpha) + \sum_{\alpha,\sigma} \psi_{\alpha,\sigma} D_\sigma(Э_\varphi(F_\alpha)).$$

Значит, условие (3.15) достаточно проверить только на образующих идеала $I(\mathcal{E})$, т. е. равенство (3.14) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} Э_\varphi(F_1) = \sum\limits_{\alpha,\sigma} \psi^1_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha), \\ Э_\varphi(F_2) = \sum\limits_{\alpha,\sigma} \psi^2_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Э_\varphi(F_r) = \sum\limits_{\alpha,\sigma} \psi^r_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha) \end{cases} \tag{3.16}$$

относительно неизвестного сечения $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi)$, где

$$\psi^\beta_{\alpha,\sigma} \in \mathcal{F}(\pi), \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, r, \quad |\sigma| \leqslant k + \deg(\varphi).$$

Применяя определение оператора универсальной линеаризации, которое было дано в § 2, перепишем систему (3.16) в виде

$$\ell_{F_\beta}(\varphi) = \sum_{\alpha,\sigma} \psi^\beta_{\alpha,\sigma} D_\sigma(F_\alpha), \quad \beta = 1, \ldots, r. \tag{3.17}$$

Среди решений системы (3.17) имеются тривиальные, соответствующие ядру эпиморфизма (3.12) и характеризующиеся тем, что ограничение дифференцирования $Э_\varphi$ на $\mathcal{E}^\infty$ для этих решений дает нулевое векторное поле на $\mathcal{E}^\infty$.

Упражнение 3.6. Покажите, что множество тривиальных решений системы (3.17) совпадает с идеалом $I(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$.

Чтобы исключить из рассмотрения тривиальные решения, вспомним, что в силу представления (2.23) оператор универсальной линеаризации выражается через операторы полных производных и, следовательно, допускает ограничение на многообразия вида $\mathcal{E}^\infty$. Положим $\ell_F\big|_{\mathcal{E}^\infty} \overset{\text{def}}{=} \ell_F^{\mathcal{E}}$ и ограничим уравнение (3.17) на $\mathcal{E}^\infty$. Тогда, поскольку в правой части стоят элементы идеала $I(\mathcal{E})$, мы придем к системе уравнений

$$\ell^{\mathcal{E}}_{F_\alpha}(\bar\varphi)=0, \qquad \bar\varphi=\varphi\big|_{\mathcal{E}^\infty},$$

решения которой находятся во взаимно однозначном соответствии с высшими симметриями уравнения $\mathcal{E}$. Более того, при этом соответствии коммутатор двух симметрий переходит в элемент

$$\{\bar\varphi,\bar\psi\}_{\mathcal{E}} \overset{\text{def}}{=} \ell^{\mathcal{E}}_{\psi}(\bar\varphi)-\ell^{\mathcal{E}}_{\varphi}(\bar\psi)=\{\varphi,\psi\}\big|_{\mathcal{E}^\infty}, \qquad \bar\psi=\psi\big|_{\mathcal{E}^\infty}.$$

Сводя воедино полученные результаты, мы видим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3.8. *Если $\mathcal{E}\subset J^k(\pi)$ — такое уравнение, что $\pi_{\infty,0}(\mathcal{E}^\infty)=J^0(\pi)$, и $F_1,\ldots,F_r$ — образующие идеала $I(\mathcal{E})$, то алгебра Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ изоморфна алгебре Ли решений системы уравнений*

$$\ell^{\mathcal{E}}_{F_\alpha}(\varphi)=0, \qquad \alpha=1,\ldots,r, \quad \varphi\in\mathcal{F}(\mathcal{E},\pi), \tag{3.18}$$

в которой структура алгебры задана скобкой $\{\bullet,\bullet\}_{\mathcal{E}}$.

Легко видеть, что если $\Delta\colon \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$ — оператор, определяющий уравнение $\mathcal{E}$ и выбранный таким образом, что соответствующее ему сечение $F=\varphi_\Delta\in\mathcal{F}(\pi,\pi')$ трансверсально к базе расслоения $\pi^*(\pi')$ (точнее, образы нулевого сечения и сечения F трансверсальны в точках их пересечений), то систему (3.18) можно переписать в виде

$$\ell^{\mathcal{E}}_{F}(\varphi)=0, \qquad \varphi\in\mathcal{F}(\mathcal{E},\pi), \quad F\in\mathcal{F}(\pi,\pi'). \tag{3.19}$$

Уравнения (3.18) и (3.19) называются *определяющими* для нахождения высших симметрий.

§ 4. Примеры вычислений

В этом параграфе мы демонстрируем технику вычисления высших симметрий на примере некоторых уравнений математической физики. Другие иллюстрации можно найти, например, в сборнике [141]. Теоретической базой приводимых ниже расчетов служит теорема 3.8, причем обе части ее утверждения оказываются существенными в технике вычислений: представление симметрий (точнее, их производящих функций) в виде решений линейной системы (3.18) позволяет получить «верхнюю и нижнюю оценки» для алгебры Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}$, а замкнутость относительно высшей скобки Якоби

$\{\bullet, \bullet\}_{\mathcal{E}}$ дает возможность уточнить полученные оценки и в некоторых случаях прийти к точному описанию алгебры симметрий. Мы опираемся также на факт совпадения внешних и внутренних симметрий, используя в вычислениях *внутренние координаты* на многообразии $\mathcal{E}^\infty$.

Упражнение 4.1. Для получения «верхней оценки» алгебры $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ полезно также использовать *коммутаторное тождество*

$$[\bar{\Im}_\varphi - \bar{\ell}_\varphi, \ell_F^{\mathcal{E}}] = \mathcal{D} \circ \ell_F^{\mathcal{E}}, \tag{4.1}$$

где φ — симметрия, $\bar{\Im}_\varphi$ и $\bar{\ell}_\varphi$ — ограничения соответствующих операторов на $\mathcal{E}^\infty$, а $\mathcal{D}$ — оператор вида $\mathcal{D} = \sum\limits_\sigma a_\sigma \bar{D}_\sigma$. Докажите это тождество.

Начнем со спецификации общих конструкций применительно к скалярным эволюционным уравнениям второго порядка.

4.1. Подготовительные замечания. Рассмотрим уравнение вида

$$u_t = \Phi(x, t, u, u_x, u_{xx}). \tag{4.2}$$

Бесконечное продолжение $\mathcal{E}^\infty$ этого уравнения является подмногообразием в пространстве $J^\infty(\pi)$ бесконечных джетов тривиального одномерного расслоения над плоскостью $M = \mathbb{R}^2$ независимых переменных $x = x_1$ и $t = x_2$, а координатой в слое расслоения π служит зависимая переменная (неизвестная функция) u. В $J^\infty(\pi)$ возникают стандартные координаты $p_{(\alpha,\beta)}$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, однозначно определяемые равенствами

$$p_{(\alpha,\beta)}\big|_{j_\infty(s)} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} s}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}, \tag{4.3}$$

где $s = s(x,t)$ — произвольное сечение расслоения π, т. е. гладкая функция на $\mathbb{R}^2$. Из (4.3), в силу определения полной производной, следует, что $p_{(\alpha,\beta)} = D_1^\alpha D_2^\beta(u)$, где

$$D_1 = \widehat{\frac{\partial}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} + p_{(1,0)}\frac{\partial}{\partial p_{(0,0)}} + \ldots + p_{(\alpha+1,\beta)}\frac{\partial}{\partial p_{(\alpha,\beta)}} + \ldots,$$

$$D_2 = \widehat{\frac{\partial}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t} + p_{(0,1)}\frac{\partial}{\partial p_{(0,0)}} + \ldots + p_{(\alpha,\beta+1)}\frac{\partial}{\partial p_{(\alpha,\beta)}} + \ldots$$

Поэтому в силу (4.2) на $\mathcal{E}^\infty$ имеют место равенства

$$p_{(\alpha,\beta+1)} = D_1^\alpha D_2^\beta(\Phi), \quad \alpha, \beta \geqslant 0,$$

и в качестве внутренних координат на $\mathcal{E}^\infty$ можно выбрать функции x, t и $p_{(\alpha,0)}\big|_{\mathcal{E}^\infty} \overset{\text{def}}{=} p_\alpha$. В этих координатах ограничения полных производных на $\mathcal{E}^\infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} D_x &\overset{\text{def}}{=} D_1\big|_{\mathcal{E}^\infty} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{\alpha \geqslant 0} p_{\alpha+1}\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \\ D_t &\overset{\text{def}}{=} D_2\big|_{\mathcal{E}^\infty} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha \geqslant 0} D_x^\alpha(\Phi)\frac{\partial}{\partial p_\alpha}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

а система (3.18), определяющая высшие симметрии уравнения $\mathcal{E}$, сведется к уравнению

$$D_t\varphi = \Phi_0\varphi + \Phi_1 D_x\varphi + \Phi_2 D_x^2\varphi, \tag{4.5}$$

где $\varphi = \varphi(x, t, p_0, \ldots, p_k)$ — ограничение производящей функции искомой симметрии на $\mathcal{E}^\infty$, а $\Phi_i \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial\Phi}{\partial p_i}$. Максимальное число k, для которого $\varphi_k = \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_k} \neq 0$, назовем порядком симметрии φ и обозначим $\deg\varphi$.

Далее нам требуется:

а) определить, для каких Φ (в пределах некоторого класса) (4.5) имеет решения сколь угодно высокого порядка;

б) по возможности описать все такие решения. Оказывается, что для получения ответов на эти вопросы технически более удобно перейти от уравнения (4.5) к вытекающей из него системе уравнений относительно функций $\varphi_i \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial\varphi}{\partial p_i}$, где φ — решение системы (4.5). С этой целью введем операторы

$$R_\beta^\alpha \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p_\beta} \circ D_x^\alpha, & \text{если } \alpha, \beta \geqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

действующие в кольце функций на $\mathcal{E}^\infty$.

Лемма 4.1. *Для любой функции $\varphi = \varphi(x, t, p_0, \ldots, p_k)$ и любых целых α, β имеет место равенство*

$$R_\beta^\alpha(\varphi) = \sum_{i=0}^{k} \binom{\alpha}{\alpha - \beta + i} D_x^{\alpha-\beta+i}(\varphi_i), \tag{4.6}$$

где по определению $\dbinom{a}{b} = 0$, если хотя бы одно из чисел a, b отрицательно.

Доказательство. Проведем индукцию по α. При $\alpha = 0$ утверждение очевидно. Пусть $\alpha > 0$ и при $\alpha - 1$ тождество (4.6) доказано. Заметим, что из (4.4) и (2.17) следует, что

$$R^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha-1}_{\beta-1} + D_x \circ R^{\alpha-1}_{\beta}.$$

Поэтому

$$R^{\alpha}_{\beta}(\varphi) = R^{\alpha-1}_{\beta-1}(\varphi) + D_x R^{\alpha-1}_{\beta}(\varphi) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{\alpha-1}{\alpha-\beta+i} D_x^{\alpha-\beta+i}(\varphi_i) + D_x \sum_{i=0}^{k} \binom{\alpha-1}{\alpha-\beta+i-1} D_x^{\alpha-\beta+i-1}(\varphi_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left[\binom{\alpha-1}{\alpha-\beta+i} + \binom{\alpha-1}{\alpha-\beta+i-1} \right] D_x^{\alpha-\beta+i}(\varphi_i) =$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{k} \binom{\alpha}{\alpha-\beta+i} D_x^{\alpha-\beta+i}(\varphi_i). \qquad \square$$

Замечание 4.1. Из равенства (4.6) следует «асимптотическое разложение» величин $D_x^{\alpha}\varphi$ по старшим переменным p_i, полезное при конкретных вычислениях. Именно, поскольку $\deg D_x^{\alpha-\beta+i}(\varphi) \leqslant \alpha - \beta + i + k$, порядок правой части (4.6) не превосходит $\alpha - \beta + 2k$. Поэтому при четных α справедлива оценка

$$D_x^{2r}\varphi = \sum_{\beta=r+k+1}^{2r+k} p_\beta \sum_{i=0}^{k} \binom{2r}{2r-\beta+i} D_x^{2r-\beta+i}\varphi_i +$$
$$+ \frac{1}{2} p_{r+k}^2 \sum_{i=0}^{k} \binom{2r}{r-k+i} D_x^{r-k+i}\varphi_i + O(r+k-1),$$

а при нечетных —

$$D_x^{2r+1}\varphi = \sum_{\beta=r+k}^{2r+k+1} p_\beta \sum_{i=0}^{k} \binom{2r+1}{2r-\beta+i+1} D_x^{2r-\beta+i+1}\varphi_i + O(r+k-1),$$

где $O(i)$ — функция на $\mathcal{E}^{\infty}$, не зависящая от p_β при $\beta > i$.

Продолжим рассмотрение уравнения $\ell_F(\varphi) = 0$ и применим к этому уравнению операторы $\dfrac{\partial}{\partial p_\beta}$, $\beta > 2$. В силу (4.4) имеем

$$D_t\varphi_\beta + \sum_{\alpha \geqslant 0} R^{\alpha}_{\beta}\varphi = \Phi_0\varphi_\beta + \Phi_1 R^1_\beta\varphi + \Phi_2 R^2_\beta\varphi.$$

Используя результаты доказанной леммы и учитывая принятое выше соглашение о значениях биномиальных коэффициентов, это соотношение можно привести к виду

$$\ell_F(\varphi_\beta)+\sum_{i=\beta}^{k}\left[\binom{i}{i-\beta}D_x^{i-\beta}(\Phi_0)+\binom{i}{i-\beta+1}D_x^{i-\beta+1}(\Phi_1)+\right.$$
$$\left.+\binom{i}{i-\beta+2}D_x^{i-\beta+2}(\Phi_2)\right]\varphi_i+(\beta-1)D_x(\Phi_2)\varphi_{\beta-1}=2\Phi_2D_x(\varphi_{\beta-1}).$$

Итак, мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 4.2. *Если функция* $\varphi=\varphi(x,t,p_0,\ldots,p_k)$, $k\geqslant 3$, *является решением уравнения* $\ell_F(\varphi)\equiv D_t(\varphi)-\Phi_0\varphi-\Phi_1D_x(\varphi)-\Phi_2D_x^2(\varphi)=0$, *т. е. высшей симметрией уравнения* $u_t=\Phi(x,t,u,u_x,u_{xx})$ *порядка* k, *то функция* $\varphi_\beta=\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_\beta}$, $\beta=2,\ldots$ $\ldots,k$, *удовлетворяет следующей системе уравнений:*

$$\left\{\begin{aligned}
&kD_x(\Phi_2)\varphi_k=2\Phi_2D_x(\varphi_k),\\
&\ell_F(\varphi_k)+\left[\Phi_0+\binom{k}{1}D_x(\Phi_1)+\binom{k}{2}D_x^2(\Phi_2)\right]\varphi_k+\\
&\qquad\qquad+(k-1)D_x(\Phi_2)\varphi_{k-1}=2\Phi_2D_x(\varphi_{k-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\ell_F(\varphi_\beta)+\sum_{i=\beta}^{k}\left[\binom{i}{i-\beta}D_x^{i-\beta}(\Phi_0)+\binom{i}{i-\beta+1}D_x^{i-\beta+1}(\Phi_1)+\right.\\
&\qquad\left.+\binom{i}{i-\beta+2}D_x^{i-\beta+2}(\Phi_2)\right]\varphi_i+(\beta-1)D_x(\Phi_2)\varphi_{\beta-1}=\\
&\qquad\qquad=2\Phi_2D_x(\varphi_{\beta-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\ell_F(\varphi_3)+\sum_{i=3}^{k}\left[\binom{i}{i-3}D_x^{i-3}(\Phi_0)+\binom{i}{i-2}D_x^{i-2}(\Phi_1)+\right.\\
&\qquad\left.+\binom{i}{i-1}D_x^{i-1}(\Phi_2)\right]\varphi_i+2D_x(\Phi_2)\varphi_2=2\Phi_2D_x(\varphi_2).
\end{aligned}\right.\tag{4.7}$$

Система (4.7) имеет диагональный вид, и, по сравнению с исходным уравнением $\ell_F(\varphi)=0$, ее исследовать удобнее. Рассмотрим подробно такое исследование на примере одного класса эволюционных уравнений.

4.2. Уравнения Бюргерса и теплопроводности. Опишем уравнения вида

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x), \tag{4.8}$$

имеющие симметрии сколь угодно высокого порядка, и вычислим соответствующие алгебры симметрий.

В случае уравнения (4.8) система (4.7) преобразуется к виду

$$\begin{cases} D_x(\varphi_k)=0, \\ 2D_x(\varphi_{k-1})=\ell_F(\varphi_k)+\left[f_0+\binom{k}{1}D_x(f_1)\right]\varphi_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2D_x(\varphi_{\beta-1})=\ell_F(\varphi_\beta)+ \\ \qquad +\sum\limits_{i=\beta}^{k}\left[\binom{i}{i-\beta}D_x^{i-\beta}(f_0)+\binom{i}{i-\beta+1}D_x^{i-\beta+1}(f_1)\right]\varphi_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2D_x(\varphi_2)=\ell_F(\varphi_3)+\sum\limits_{i=3}^{k}\left[\binom{i}{i-3}D_x^{i-3}(f_0)+\binom{i}{i-2}D_x^{i-2}(f_1)\right]\varphi_i. \end{cases} \tag{4.9}$$

Из вида системы (4.9) ясно, что́ может препятствовать наличию у уравнения (4.8) высших симметрий: предположим, что нам удалось решить первые i уравнений системы (4.9); тогда условием разрешимости $(i+1)$-го уравнения является принадлежность его правой части (которая выражается через ранее полученные решения) образу оператора D_x, что, в конечном счете, определяется видом функции f. Продемонстрируем, как работает этот механизм, сделав для упрощения выкладок замену $\varphi_\alpha = 2^{\alpha-k}\psi_\alpha$.

Из первого уравнения системы (4.9) следует, что

$$\psi_k = a_k(t). \tag{4.10}$$

Подставляя ψ_k во второе уравнение, получаем

$$D_x(\psi_{k-1}) = \ell_F(\psi_k) + \left[f_0 + \binom{k}{1}D_x(f_1)\right]\psi_k = \dot a_k + kD_x(f_1)\psi_k,$$

где $\dot a_k = \dfrac{da_k}{dt}$. Отсюда следует, что

$$\psi_{k-1} = \dot a_k x + kf_1 a_k + a_{k-1}(t). \tag{4.11}$$

Подставив выражения (4.10) и (4.11) в третье уравнение системы (4.9) и произведя необходимые преобразования, получим

$$\begin{aligned}D_x(\psi_{k-2}) = \ddot{a}_k x + (k-1)\dot{a}_k \left[f_1 + xD_x(f_1)\right] + \\ +ka_k \left[2D_x(f_0) + (k-2)f_1D_x(f_1) + (k-2)D_x^2(f_1) + D_t(f_1)\right] + \\ +D_x\left[\frac{1}{2}\ddot{a}_k x^2 + (k-1)\dot{a}_k x f_1 + ka_k\left(2f_0 + \frac{1}{2}(k-2)f_1^2 + (k-2)D_x(f_1)\right) + \right. \\ \left. +\dot{a}_{k-1}x + (k-1)a_{k-1}f_1\right] + ka_kD_t(f_1).\end{aligned}$$

Таким образом, если $\deg(\varphi) = k$, то для разрешимости третьего уравнения необходимо и достаточно выполнения условия

$$D_t(f_1) \in \operatorname{im} D_x \tag{4.12}$$

(заметим, что это означает, что f_1 является *законом сохранения* уравнения (4.8), см. гл. 5).

Рассмотрим, при каких f условие (4.12) выполнено. Имеем *)

$$\begin{aligned}D_t(f_1) = (p_2 + f)f_{01} + (p_3 + D_x(f))f_{11} = \\ = (p_2 + f)(f_{01} - D_x(f_{11})) + D_x((p_2 + f)f_{11}).\end{aligned}$$

Иными словами, $D_t(f_1) \in \operatorname{Im} D_x$ в том и только том случае, если

$$(p_2 + f)(f_{01} - D_x(f_{11})) \in \operatorname{Im} D_x. \tag{4.13}$$

Из (4.4) очевидно, что любой элемент, принадлежащий образу оператора D_x, линеен относительно старшей входящей в него переменной p_α; с другой стороны, выражение (4.13) имеет вид $f_{111}p_2^2 + O(1)$. Таким образом, для выполнения условий (4.12) необходимо равенство нулю третьей производной f_{111}. Итак,

$$f = Ap_1^2 + Bp_1 + C, \tag{4.14}$$

где A, B, C — функции p_0. Подставляя полученное выражение в (4.13) и производя аналогичные вычисления, можно убедиться, что условие (4.12) выполнено тогда и только тогда, когда функции A, B и C в (4.14) удовлетворяют уравнениям

$$AB_0 = B_{00}, \qquad CB_0 = \text{const}. \tag{4.15}$$

*) Ниже через f_{ij} обозначена частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial p_i \partial p_j}$. Аналогичный смысл имеют символы f_{ijk}.

Заметим теперь, что любое уравнение

$$u_t = u_{xx} + A(u)u_x^2 + B(u)u_x + C(u)$$

заменой переменных $u \mapsto \Psi(u)$, где функция Ψ, $\Psi_u \neq 0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Psi_{uu} + A(\Psi)\Psi_u^2 = 0,$$

может быть приведено к виду

$$u_t = u_{xx} + \widetilde{B}(u)u_x + \widetilde{C}(u).$$

Следовательно, без ограничения общности в (4.15) можно положить $A=0$ и считать, что $B=\beta_1 u+\beta_0$, $\beta_0, \beta_1 = \mathrm{const}$ и $\beta_1 C = \mathrm{const}$. Теперь имеются две возможности: $\beta_1 \neq 0$ и $\beta_1 = 0$. В первом случае исходное уравнение приводится к виду

$$u_t = u_{xx} + (\beta_1 u + \beta_0)u_x + \gamma, \quad \gamma = \mathrm{const}, \quad \beta_1 \neq 0,$$

во втором — к виду

$$u_t = u_{xx} + \beta_0 u_x + C(u). \tag{4.16}$$

Первое из этих уравнений заменой

$$x \mapsto x - \frac{\gamma t^2}{2}, \quad t \mapsto t, \quad u \mapsto \frac{u + \gamma t - \beta_0}{\beta_1}$$

приводится к виду

$$u_t = u_{xx} + uu_x, \tag{4.17}$$

т. е. эквивалентно уравнению Бюргерса.

Если теперь вернуться к системе (4.9), то можно убедиться в том (мы опускаем соответствующие выкладки, которые просты и теперь уже мало поучительны), что для (4.17) четвертое уравнение этой системы разрешимо, а в случае (4.16) для разрешимости необходима линейность функции $C(u)$. Иначе говоря, уравнение (4.16) должно иметь вид

$$u_t = u_{xx} + \beta_0 u_x + \gamma_1 u + \gamma_0.$$

Последнее уравнение заменой

$$u \mapsto u \exp\left[\left(\gamma_1 - \frac{\beta_0^2}{4}\right)t - \frac{\beta_0}{2}x\right] + u_0,$$

где u_0 — произвольное решение соответствующего однородного уравнения, приводится к виду

$$u_t = u_{xx}.$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Утверждение 4.3. *Всякое уравнение*

$$u_t = u_{xx} + f(u, u_x),$$

имеющее симметрии сколь угодно высокого порядка, эквивалентно либо уравнению Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + uu_x,$$

либо уравнению теплопроводности

$$u_t = u_{xx}.$$

Наша следующая цель — показать, что эти уравнения действительно обладают бесконечными алгебрами высших симметрий, и описать эти алгебры. При этом мы следуем работе [21]. Нам понадобятся некоторые сведения об алгебраической структуре искомого множества симметрий.

Из равенств (4.10) и (4.11) следует, что любая симметрия порядка k, если она существует, имеет вид

$$\varphi_k[a] = ap_k + \left(\frac{1}{2}\dot{a}x + \frac{k}{2}f_1 a + a'\right) p_{k-1} + O(k-2), \tag{4.18}$$

где a, a' — функции t, и, как легко видеть, однозначно, с точностью до симметрии более низкого порядка, определяется функцией a (здесь $f_1 = p_0$ в случае уравнения Бюргерса и $f_1 = 0$ для уравнения теплопроводности). Пусть $\varphi_l[b]$ — также функция вида (4.18). Вычислим скобку Якоби функций $\varphi_k[a]$ и $\varphi_l[b]$. Для любых функций $\varphi, \psi \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, $\deg(\varphi) = k, \deg(\psi) = l$, имеем (см. (2.24))

$$\{\varphi, \psi\}_{\mathcal{E}} = \sum_{i=0}^{l} D_x^i(\varphi)\psi_i - \sum_{j=0}^{k} D_x^j(\psi)\varphi_j.$$

Среди слагаемых, входящих в правую часть этого равенства, максимальный (равный $k + l$) порядок имеют слагаемые $D_x^l(\varphi)\psi_l$ и $-D_x^k(\psi)\varphi_k$. Но в силу замечания к доказанной выше лемме

$$D_x^l(\varphi)\psi_l = (\varphi_k p_{k+l} + O(k+l-1))\psi_l,$$
$$D_x^k(\psi)\varphi_k = (\psi_l p_{k+l} + O(k+l-1))\varphi_k.$$

Поэтому $\deg\{\varphi, \psi\}_{\mathcal{E}} = k + l - 1$. В частности, для функций $\varphi_k[a]$ и $\varphi_l[b]$ с точностью до порядка $k + l - 3$ справедливы равенства

$$\{\varphi_k[a], \varphi_l[b]\}_{\mathcal{E}} = \{ap_k, bp_l\}_{\mathcal{E}} + \left\{ap_k, \left(\frac{1}{2}\dot{b}x + \frac{l}{2}f_1 b + b'\right)p_{l-1}\right\}_{\mathcal{E}} +$$
$$+ \left\{\left(\frac{1}{2}\dot{a}x + \frac{k}{2}f_1 a + a'\right)p_{k-1}, bp_l\right\}_{\mathcal{E}} + O(k + l - 3) =$$
$$= D_x^l(ap_k)b - D_x^k(bp_l)a + D_x^{l-1}(ap_k)\left(\frac{1}{2}\dot{b}x + \frac{l}{2}f_1 b + b'\right) -$$
$$- D_x^k\left[\left(\frac{1}{2}\dot{b}x + \frac{l}{2}f_1 b + b'\right)p_{l-1}\right]a + D_x^l\left[\left(\frac{1}{2}\dot{a}x + \frac{l}{2}f_1 a + a'\right)p_{k-1}\right]b -$$
$$- D_x^{k-1}(bp_l)\left(\frac{1}{2}\dot{a}x + \frac{k}{2}f_1 a + a'\right) + O(k + l - 3) =$$
$$= \frac{1}{2}(l\dot{a}b - k\dot{b}a)p_{k+l-2} + O(k + l - 3).$$

Таким образом, в силу замкнутости алгебры высших симметрий относительно скобки Якоби, из того, что функции $\varphi_k[a]$ и $\varphi_l[b]$ являются симметриями, следует, что функция $\varphi_{k+l-2}[c]$, где

$$c = \frac{1}{2}(l\dot{a}b - k\dot{b}a), \tag{4.19}$$

также является симметрией уравнения $\mathcal{E}$.

Напомним, что в предыдущей главе мы вычислили классические симметрии уравнения Бюргерса; они имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^0 = p_1,\\
&\varphi_1^1 = tp_1 + 1,\\
&\varphi_2^0 = p_2 + p_0 p_1,\\
&\varphi_2^1 = tp_2 + (tp_0 + \frac{1}{2}x)p_1 + \frac{1}{2}p_0,\\
&\varphi_2^2 = t^2 p_2 + (t^2 p_0 + tx)p_1 + tp_0 + x.
\end{aligned}$$

Аналогичные вычисления показывают, что для уравнения теплопроводности классические симметрии таковы:

$$\varphi_{-\infty} = \varphi_{-\infty}(x, t), \quad \text{где } \varphi_{-\infty} \text{ — произвольное решение уравнения теплопроводности,}$$

$$\varphi_0^0 = p_0,$$
$$\varphi_1^0 = p_1,$$
$$\varphi_1^1 = tp_1 + \frac{1}{2}xp_0,$$
$$\varphi_2^0 = p_2,$$
$$\varphi_2^1 = tp_2 + \frac{1}{2}xp_1,$$
$$\varphi_2^2 = t^2p_2 + txp_1 + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)p_0.$$

Пусть $\varphi_k[a]$, $k > 2$, — симметрия; тогда $\{\varphi_k[a], \varphi_1^0\}_\mathcal{E}$ — также симметрия, которая, в силу проделанных выше вычислений, имеет вид

$$\{\varphi_k[a], \varphi_1^0\}_\mathcal{E} = \frac{1}{2}\dot{a}p_{k-1} + O(k-2).$$

Применив $k-2$ раза оператор $\{\bullet, \varphi_1^0\}_\mathcal{E}$ к функции $\varphi_k[a]$, мы получим классическую симметрию вида

$$2^{-k+2}\frac{d^{k-2}a}{dt^{k-2}}p_2 + O(1).$$

Но у классических симметрий рассматриваемых уравнений коэффициент при p_2 является полиномом по t степени не выше, чем 2. Поэтому a также является полиномом по t, степень которого не превосходит k.

Покажем, что всякий такой полином определяет некоторую симметрию. С этой целью заметим, что рассматриваемые уравнения обладают симметрией вида $\varphi_3[t]$. А именно, прямыми вычислениями можно установить, что уравнение Бюргерса имеет симметрию

$$\varphi_3^1 = tp_3 + \frac{1}{2}(x + 3tp_0)p_2 + \frac{3}{2}tp_1^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}tp_0\right)p_0p_1 + \frac{1}{4}p_0^2,$$

а уравнение теплопроводности — симметрию

$$\varphi_3^1 = tp_3 + \frac{1}{2}xp_2.$$

В силу равенства (4.19) симметрия φ_3^1 следующим образом действует на функции $\varphi_k[a]$:

$$\{\varphi_k[a], \varphi_3^1\}_\mathcal{E} = \frac{1}{2}(3\dot{a}t - ka)p_{k+1} + O(k).$$

В частности, применяя к функции $\varphi_1^0 = p_1$ оператор $\{\bullet, \varphi_3^1\}_{\mathcal{E}}$ k раз, мы получим симметрию вида

$$(-2)^k k! p_{k+1} + O(k),$$

что доказывает существование симметрий

$$\varphi_k[1] \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_k^0 = p_k + O(k-1), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Наконец, рассмотрим симметрию φ_2^2, которая следующим образом действует на функции $\varphi_k[a]$:

$$\{\varphi_k[a], \varphi_2^2\}_{\mathcal{E}} = t(t\dot{a} - ka)p_k + O(k-1).$$

Следовательно, применение i раз оператора $\{\bullet, \varphi_2^2\}_{\mathcal{E}}$ к симметрии φ_k^0, $i \leqslant k$, даст, с точностью до постоянного множителя, симметрию вида

$$\varphi_k[t^i] \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_k^i = t^i p_k + O(k-1).$$

Все сказанное в равной степени относится как к уравнению Бюргерса, так и к уравнению теплопроводности. Сделаем ряд замечаний, специфичных для последнего уравнения. Во-первых, отметим, что любая симметрия уравнения теплопроводности линейна по всем входящим в нее переменным $p_0, p_1, \ldots, p_k$, т. е. имеет вид

$$\varphi = A(x,t) + \sum_{i=0}^{k} A_i(x,t) p_i,$$

причем $\dfrac{\partial A}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2}$. Это легко следует либо из непосредственного анализа уравнения $\ell_F = 0$, либо из рассмотрения системы (4.7). Следовательно, $A(x,t)$ — тоже симметрия, и величины φ_k^i можно считать линейными однородными функциями координат $p_0, \ldots, p_k$. Поэтому

$$\{p_0, \varphi_k^i\}_{\mathcal{E}} = (\mathcal{Э}_{p_0} - \ell_{p_0})\varphi_k^i = \left(\sum_{\alpha \geqslant 0} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - 1\right)\varphi_k^i = 0,$$

а величина

$$\{\varphi_k^i, \varphi_{-\infty}\}_{\mathcal{E}} = \mathcal{Э}_{\varphi_k^i}(\varphi_{-\infty}) - \ell_{\varphi_k^i}(\varphi_{-\infty}) = -\ell_{\varphi_k^i}(\varphi_{-\infty}) =$$
$$= -\sum_{\alpha=0}^{k} \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial p_\alpha} D_x^\alpha(\varphi_{-\infty}) = -\sum_{\alpha=0}^{k} \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial^\alpha \varphi_{-\infty}}{\partial x^\alpha}$$

зависит только от x и t и, следовательно, является решением уравнения теплопроводности. Заметим также, что

$$\{p_0, \varphi_{-\infty}\}_{\mathcal{E}} = \varphi_{-\infty}, \quad \{\varphi'_{-\infty}, \varphi''_{-\infty}\}_{\mathcal{E}} = 0.$$

Итогом всех проведенных здесь рассуждений является следующая теорема.

Теорема 4.4. 1. *Любое уравнение вида* $u_t = u_{xx} + f(u, u_x)$, *имеющее симметрии сколь угодно высокого порядка, эквивалентно либо уравнению Бюргерса* $u_t = u_{xx} + uu_x$, *либо уравнению теплопроводности* $u_t = u_{xx}$.

2. *При каждом* $k > 0$ *эти уравнения имеют ровно по* $k+1$ *симметрии порядка* k *вида*

$$\varphi_k^i = t^i p_k + O(k-1), \qquad i = 1, \ldots, k.$$

3. *Симметрии* φ_k^i *образуют* $\mathbb{R}$*-алгебру Ли* $A_+(\mathcal{E})$, *причем*

$$\{\varphi_k^i, \varphi_l^j\}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}(li - kj)\varphi_{k+l-2}^{i+j-1} + S_{<k+l-2},$$

где $S_{<k+l-2}$ — *симметрии порядка* $< k+l-2$. *Алгебра* $A_+(\mathcal{E})$ *имеет три образующие* φ_1^0, φ_2^2 *и* φ_3^1, *где* $\varphi_1^0 = p_1$, *а*

$$\varphi_2^2 = t^2 p_2 + (t^2 p_0 + tx) + p_1 + tp_0 + x,$$
$$\varphi_3^1 = tp_3 + \frac{1}{2}(x + 3tp_0)p_2 + \frac{3}{2}tp_1^2 + \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}tp_0\right)p_0 p_1 + \frac{1}{4}p_0^2$$

для уравнения Бюргерса и

$$\varphi_2^2 = t^2 p_2 + txp_1 + \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)p_0,$$
$$\varphi_3^1 = tp_3 + \frac{1}{2}xp_2$$

для уравнения теплопроводности.

4. *В случае уравнения Бюргерса алгебра высших симметрий* $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ *совпадает с алгеброй* $A_+(\mathcal{E})$. *Для уравнения теплопроводности алгебра* $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ *является полупрямым произведением* $A_+(\mathcal{E})$ *и идеала* $A_0(\mathcal{E})$, *состоящего из функций вида* $ap_0 + \varphi_{-\infty}(x,t)$, *где* $a = \mathrm{const}$ *и* $\varphi_{-\infty}$ — *произвольное решение уравнения теплопроводности. При этом функции* φ_k^i *линейны по всем входящим в них переменным* p_α, $\alpha = 0, 1, \ldots, k$,

$$\{\varphi_k^i, ap_0 + \varphi_{-\infty}\}_{\mathcal{E}} = -\sum_{\alpha=1}^{k} \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial^\alpha \varphi_{-\infty}}{\partial x^\alpha}$$

и

$$\{a' p_0 + \varphi'_{-\infty}, a'' p_0 + \varphi''_{-\infty}\}_{\mathcal{E}} = a'' \varphi'_{-\infty} - a' \varphi''_{-\infty}.$$

Замечание 4.2. Каждая из построенных выше симметрий φ_k^i определена с точностью до симметрий более низкого порядка; соответствующая неопределенность возникает и в коммутационных соотношениях между φ_k^i (см. п. 3 предыдущей теоремы). Для уравнения Бюргерса степень этой неопределенности может быть значительно уменьшена с помощью следующего приема.

Припишем переменным x, t и u веса следующим образом:

$$\operatorname{gr} x = 1, \qquad \operatorname{gr} t = 2, \qquad \operatorname{gr} u = -1.$$

Относительно этой системы весов уравнение Бюргерса становится однородным. Положим также $\operatorname{gr} p_k = -k-1$, а для любого монома вида $\mathcal{M} = x^\alpha t^\beta p_0^{\gamma_0} p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$ определим его вес как сумму весов входящих в него сомножителей:

$$\operatorname{gr} \mathcal{M} = \alpha + 2\beta - \sum_{i=0}^{k} \gamma_i (i+1).$$

Рассмотрим в кольце $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ функций на бесконечно продолженном уравнении Бюргерса подкольцо $\mathcal{P}(\mathcal{E})$, состоящее из функций, полиномиальных по всем переменным. Тогда, как легко видеть, $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ замкнуто относительно операторов $\ell_F^{\mathcal{E}}$ и $\{\bullet, \bullet\}_{\mathcal{E}}$, причем их ограничения на $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ являются однородными относительно введенных нами весов. При этом если $\varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ — однородные полиномы, то

$$\operatorname{gr} \ell_F^{\mathcal{E}}(\varphi) = \operatorname{gr} \varphi - 2, \quad \operatorname{gr}\{\varphi, \psi\}_{\mathcal{E}} = \operatorname{gr} \varphi + \operatorname{gr} \psi + 1.$$

Следовательно, если $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ является решением уравнения $\ell_F^{\mathcal{E}}(\varphi) = 0$, то и любая однородная компонента полинома φ также является решением этого уравнения.

Далее, симметрии φ_1^0, φ_2^2 и φ_3^1 полиномиальны и являются образующими алгебры Ли $\operatorname{sym} \mathcal{E}$; следовательно, $\operatorname{sym} \mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Таким образом, из сказанного вытекает, что функции φ_k^i можно считать однородными, причем $\operatorname{gr} \varphi_k^i = 2i - k - 1$. Отсюда видно, что условие однородности *однозначно* определяет классические симметрии уравнения Бюргерса, а также симметрии вида φ_k^0 и φ_k^k.

Пусть φ_k^0, φ_l^0 — две однородные симметрии. Тогда, поскольку порядок симметрии $\{\varphi_k^0, \varphi_l^0\}_{\mathcal{E}}$ меньше $k+l-2$, ее вес, не больше $k+l-3$ и не меньше $1-k-l$ (если она отлична от нуля). Но, с другой стороны,

$$\operatorname{gr}\{\varphi_k^0, \varphi_l^0\}_{\mathcal{E}} = \operatorname{gr} \varphi_k^0 + \operatorname{gr} \varphi_l^0 = -1 - k - l.$$

Полученное противоречие показывает, что $\{\varphi_k^0, \varphi_l^0\}_{\mathcal{E}} = 0$, т. е. симметрии вида φ_k^0, $k = 1, 2, \ldots$, попарно коммутируют.

Рассмотрим подробнее действие операторов $\{\varphi_1^0, \bullet\}_{\mathcal{E}}$ и $\{\varphi_2^0, \bullet\}_{\mathcal{E}}$. Имеем

$$\{\varphi_1^0, \bullet\}_{\mathcal{E}} = \text{Э}_{\varphi_1^0} - \ell_{\varphi_1^0} = \sum_{\alpha \geqslant 0} p_{\alpha+1} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - D_x = -\frac{\partial}{\partial x}$$

и

$$\{\varphi_2^0, \bullet\}_{\mathcal{E}} = \text{Э}_{\varphi_2^0} - \ell_{\varphi_2^0} =$$
$$= \sum_{\alpha \geqslant 0} \left[D^\alpha (p_2 + p_0 p_1) \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right] - p_1 - p_0 D_x - D_x^2 = \ell_F^{\mathcal{E}} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Поскольку действие $\{\varphi_2^0, \bullet\}_{\mathcal{E}}$ рассматривается на симметриях уравнения Бюргерса, т. е. на решениях уравнения $\ell_F^{\mathcal{E}}(\varphi) = 0$, в итоге имеем

$$\{\varphi_2^0, \bullet\}_{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Следовательно, симметрии вида φ_k^0 не зависят от x и t. Далее, для однородных компонент, очевидно, имеют место равенства

$$\{\varphi_1^0, \varphi_k^1\}_{\mathcal{E}} = -\frac{1}{2}\varphi_{k-1}^0, \quad \{\varphi_2^0, \varphi_k^1\}_{\mathcal{E}} = -\varphi_k^1.$$

Поэтому симметрии φ_k^1 линейны по x и t. Таким же образом элементарной индукцией доказывается, что φ_k^i является полиномом i-й степени по t и x.

Замечание 4.3. Вернемся к уравнению теплопроводности и укажем для него простой способ построения высших симметрий. В этом случае оператор ℓ_F имеет вид $D_t - D_x^2$ и, следовательно, коммутирует с оператором D_x. Поэтому если φ — симметрия, то

$$\ell_F(D_x\varphi) = D_x(\ell_F\varphi) = 0,$$

т. е. $D_x\varphi$ — тоже симметрия уравнения теплопроводности. Этот факт является проявлением более общего результата.

Пусть $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ — линейное уравнение и $\Delta = \Delta_F$ — соответствующий линейный дифференциальный оператор. Тогда (см. формулу (2.33)) $\ell_F = \widehat{\Delta}$. Пусть ∂ — другой линейный оператор, для которого

$$\Delta \circ \partial = \partial' \circ \Delta,$$

где ∂' — также линейный дифференциальный оператор. Положим $\mathcal{R} = \widehat{\partial}$. Тогда

$$\ell_F \circ \mathcal{R} = \widehat{\Delta} \circ \widehat{\partial} = \widehat{\Delta \circ \partial} = \widehat{\partial' \circ \Delta} = \widehat{\partial'} \circ \ell_F$$

и, таким образом, оператор $\mathcal{R}$ действует в алгебре $\operatorname{sym}\mathcal{E}$. Такие операторы называются *операторами рекурсии* и широко используются для построения высших симметрий [110]. В частности, использование оператора рекурсии будет продемонстрировано в следующем примере. Однако, для нелинейных уравнений ситуация оказывается более сложной, и мы вернемся к ее обсуждению в гл. 5.

4.3. Уравнения пластичности. Рассмотрим систему $\mathcal{E}$ уравнений

$$\begin{cases} \sigma_x = 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta), \\ \sigma_y = 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta), \end{cases} \tag{4.20}$$

описывающую плоское напряженное состояние пластичной среды Мизеса, где σ — гидростатическое давление, θ — угол между осью абсцисс и главным направлением тензора напряжений, $k \neq 0$ — постоянная пластичности. При описании симметрий этого уравнения *) мы следуем работе [134].

Заменой

$$\begin{cases} \sigma = k(\xi + \eta), \\ \theta = \dfrac{1}{2}(\eta - \xi), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = u \cos \dfrac{1}{2}(\eta - \xi) - v \sin \dfrac{1}{2}(\eta - \xi), \\ y = u \sin \dfrac{1}{2}(\eta - \xi) + v \cos \dfrac{1}{2}(\eta - \xi), \end{cases} \tag{4.21}$$

где u, v — новые зависимые, а ξ, η — новые независимые переменные, система (4.20) приводится к системе

$$\begin{cases} u_\xi + \dfrac{1}{2} v = 0, \\ v_\eta + \dfrac{1}{2} u = 0, \end{cases} \tag{4.22}$$

которую мы также обозначим через $\mathcal{E}$, и оператор универсальной линеаризации для которой имеет вид

$$\ell_F = \begin{pmatrix} D_\xi & 1/2 \\ 1/2 & D_\eta \end{pmatrix}.$$

Выберем на $\mathcal{E}^\infty$ внутренние координаты ξ, η, u_k, v_k таким образом, что u_k соответствует производной $\dfrac{\partial^k u}{\partial \eta^k}$ а v_k — производной $\dfrac{\partial^k v}{\partial \xi^k}$.

*) В последующем мы не останавливаемся подробно на технических деталях вычислений и акцентируем внимание на структуре доказательств и наиболее интересных специфических моментах. Восстановление опущенных деталей — полезное упражнение в практическом вычислении симметрий.

Тогда ограничения полных производных на $\mathcal{E}^\infty$ запишутся в этих координатах в виде

$$D_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{2} v_0 \frac{\partial}{\partial u_0} + \frac{1}{4} \sum_{k \geqslant 1} u_{k-1} \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{k \geqslant 0} v_{k+1} \frac{\partial}{\partial v_k},$$
$$D_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{1}{2} u_0 \frac{\partial}{\partial v_0} + \sum_{k \geqslant 0} u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k} + \frac{1}{4} \sum_{k \geqslant 1} v_{k-1} \frac{\partial}{\partial v_k},$$

и если $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ — симметрия порядка k, то определяющие ее уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \dfrac{1}{2} v_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial u_0} + v_1 \dfrac{\partial \varphi}{\partial v_0} + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{k} \left(\frac{1}{4} u_{\alpha-1} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\alpha} + v_{\alpha+1} \frac{\partial \varphi}{\partial v_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \psi = 0, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \eta} + u_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial u_0} - \dfrac{1}{2} u_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial v_0} + \displaystyle\sum_{\alpha=1}^{k} \left(u_{\alpha+1} \frac{\partial \psi}{\partial u_\alpha} + \frac{1}{4} v_{\alpha-1} \frac{\partial \psi}{\partial v_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \varphi = 0. \end{cases} \tag{4.23}$$

Решая систему (4.23) при $k \leqslant 1$, мы получим классические симметрии уравнения (4.22), любая из которых является линейной комбинацией следующих симметрий:

$$S_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad f_1^0 = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_0/2 \end{pmatrix}, \quad g_1^0 = \begin{pmatrix} -v_0/2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$
$$S_1 = \begin{pmatrix} \eta u_1 + u_0/3 + \xi v_0/2 \\ -\xi v_1 - v_0/2 - \eta u_0/2 \end{pmatrix},$$

а также симметрии вида $H = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, где $u = f$, $v = g$ — произвольное решение уравнения (4.22).

Исследование (4.23) «при больших k» дает следующее «асимптотическое разложение» ее решений, если таковые существуют:

$$\begin{pmatrix} Au_k - \dfrac{1}{2} B v_{k-1} + a u_{k-1} + \dfrac{1}{2}(B' - b) v_{k-2} + \left(\alpha - \dfrac{1}{4} \xi A' \right) u_{k-2} + O(k-3) \\ B v_k - \dfrac{1}{2} A u_{k-1} + b v_{k-1} + \dfrac{1}{2}(A' - a) u_{k-2} + \left(\beta - \dfrac{1}{4} \eta B' \right) v_{k-2} + O(k-3) \end{pmatrix},$$

где A, a, α — функции η, B, b, β — функции ξ, а «штрих» обозначает производную по ξ или η. Обозначим это решение через $\Phi_k(A, B)$.

Следуя замечанию 4.3, построим для уравнения (4.22) операторы рекурсии первого порядка. Как нетрудно убедиться, такие операторы существуют и имеют вид

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} a_{11}D_\xi + b_{11}D_\eta + c_{11} & b_{12}D_\eta + c_{12} \\ a_{21}D_\xi + c_{21} & a_{22}D_\xi + b_{22}D_\eta + c_{22} \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

где $a_{11}, c_{11}, b_{22}, c_{22}$ — произвольные функции ξ и η,

$$a_{21} = 2c_{11} + \alpha_1, \quad b_{12} = 2c_{22} + \alpha_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 = \mathrm{const},$$
$$a_{22} = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)\xi + \beta_1, \quad b_{11} = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\eta + \beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 = \mathrm{const},$$
$$c_{12} = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}), \quad c_{21} = \frac{1}{2}(b_{22} - b_{11}).$$

В частности, среди операторов вида (4.24) имеется оператор

$$\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} D_\xi & 0 \\ 0 & D_\xi \end{pmatrix},$$

применение которого к функциям вида $\Phi_k(A, B)$ дает следующее уравнение:

$$\mathcal{R}_1\Phi_k(A, B) = \Phi_{k+1}(0, B) + \Phi_k(0, B') + \frac{1}{4}\Phi_{k-1}(A, 0) + O(k-2).$$

С другой стороны, если на функцию $\Phi_k(A, B)$ подействовать симметрией f_1^0, мы получим

$$\{\Phi_k(A, B), f_1^0\}_\mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial\eta}\Phi_k(A, B) = \Phi_k(A', 0) - \frac{1}{4}\Phi_{k-2}(0, B') + O(k-3).$$

Поэтому

$$\mathcal{R}_1\{\Phi_k(A, B), f_1^0\}_\mathcal{E} = \frac{1}{4}\Phi_{k-1}(A', -B') + O(k-2). \tag{4.25}$$

Теперь индукцией по k (основанием индукции служит данное выше представление классических симметрий уравнения (4.22), а шаг индукции состоит в использовании равенства (4.25)) легко показывается, что всякая симметрия порядка $k > 0$, если она существует, является линейной комбинацией следующих симметрий:

$$S_k = \Phi_k(\eta^k, (-\xi)^k), \quad f_k^i = \Phi_k(\eta^i, 0), \quad g_k^i = \Phi_k(0, \xi^i), \quad 0 \leqslant i \leqslant k.$$

Для доказательства существования этих симметрий заметим, что среди операторов рекурсии вида (4.24) есть оператор

$$\mathcal{R}_2 = \begin{pmatrix} -\eta D_\xi + \eta D_\eta + \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}(\xi - \eta) \\ \dfrac{1}{2}(\xi - \eta) & \xi D_\xi - \xi D_\eta - \dfrac{1}{2} \end{pmatrix},$$

применение которого k раз к симметрии S_0 дает, с точностью до постоянного множителя, симметрию S_k. Далее, применение $k-i$ раз оператора $\{\bullet, f_1^0\}_\mathcal{E}$ к симметрии S_k приводит к симметрии f_k^i. Наконец, применив $k-i$ раз оператор $\{\bullet, g_1^0\}_\mathcal{E}$ к симметрии S_k, мы докажем существование g_k^i.

Приведенные здесь сведения можно объединить в следующий результат.

Теорема 4.5. *Алгебра высших симметрий системы* (4.22) *является полупрямым произведением коммутативного идеала* $\mathrm{sym}_0\,\mathcal{E}$*, состоящего из симметрий* $H = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$*, где* f, g *— произвольное решение* (4.22), *и алгебры* $\mathrm{sym}_+\,\mathcal{E}$*, которая как векторное пространство порождена элементами* S_k, f_k^i, g_k^i, $0 \leqslant i < k$, $k = 0, 1, \ldots$, *а как алгебра Ли — элементами* $f_1^0, g_1^0, S_0, S_1, \ldots, S_k, \ldots$ *При этом симметрия* S_k *имеет вид* $S_k = \mathcal{R}_2^k(S_0)$.

4.4. Преобразование симметрий при заменах переменных. Чтобы переформулировать полученные результаты в терминах исходного уравнения (4.20), необходимо выяснить, как при заменах переменных преобразуются производящие сечения симметрий и операторы рекурсии. Для этого заметим следующее.

Пусть в $J^1(\pi)$ локально задана каноническая система координат $\mathcal{S} = (x_1, \ldots, x_n, u^1, \ldots, u^m, p_1^1, \ldots, p_n^m)$, где $p_i^j \overset{\text{def}}{=} p_{1_i}^j$. Рассмотрим в той же окрестности другую каноническую систему координат $\widetilde{\mathcal{S}} = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n, \widetilde{u}^1, \ldots, \widetilde{u}^m, \widetilde{p}_1^1, \ldots, \widetilde{p}_n^m)$, согласованную с имеющейся в $J^1(\pi)$ контактной структурой *). Распределение Картана в $J^1(\pi)$ задается системой картановских форм

$$\omega^1 = du^1 - \sum_\alpha p_\alpha^1 dx_\alpha, \quad \ldots, \quad \omega^m = du^m - \sum_\alpha p_\alpha^m dx_\alpha,$$

которые мы будем представлять в виде столбца $\Omega = (\omega^1, \ldots, \omega^m)^t$. С другой стороны, в системе $\widetilde{\mathcal{S}}$ набор форм $\widetilde{\Omega}$ определяет, в силу сказанного, то же самое распределение, и поэтому имеет место равенство

$$\widetilde{\Omega} = \Lambda\Omega, \tag{4.26}$$

где $\Lambda = \|\lambda_\beta^\alpha\|$ — невырожденная матрица перехода $\widetilde{\omega}^\alpha = \sum\limits_\beta \lambda_\beta^\alpha \omega^\beta$.

*) Это означает, что преобразование замены координат $\widetilde{x} = \widetilde{x}(x, u), \widetilde{u} = \widetilde{u}(x, u), \widetilde{p} = \widetilde{p}(x, u, p)$ является преобразованием Ли (см. гл. 3).

Пусть X — поле Ли на $J^1(\pi)$. Тогда его производящее сечение в системе координат $\mathcal{S}$, также представленное в виде вектор-столбца $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)^t$, определяется равенством $\varphi = X \rfloor \Omega = (X \rfloor \omega^1, \ldots$ $\ldots, X \rfloor \omega^m)^t$ (см. гл. 3). По той же причине производящее сечение поля X в новой системе координат представляется в виде $\widetilde{\varphi} = X \rfloor \widetilde{\Omega}$. Поэтому, используя (4.26), получаем

$$\widetilde{\varphi} = X \rfloor \widetilde{\Omega} = X \rfloor \Lambda\Omega = \Lambda\varphi, \tag{4.27}$$

что и дает искомое правило преобразования производящих сечений при заменах координат.

Пусть теперь $\mathcal{R}$ — некоторый оператор, действующий в пространстве производящих сечений и записанный в системе координат $\mathcal{S}$. Тогда из (4.27) следует, что его запись в системе $\widetilde{\mathcal{S}}$ имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{R}} = \Lambda \mathcal{R} \Lambda^{-1}. \tag{4.28}$$

Поскольку в обсуждаемом контексте нас интересуют операторы рекурсии, имеющие вид $\mathcal{R} = \| \sum\limits_{\alpha} a_{ij}^{\alpha} D_{\alpha} + b_{ij} \|$, необходимо также выяснить, каким образом при заменах координат преобразуются операторы полных производных.

Пусть $D_i = D_{x_i}$ и $\widetilde{D}_i = D_{\widetilde{x}_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку поля D_i, равно как и поля $\widetilde{D}_i$, образуют базис распределения Картана в $J^\infty(\pi)$, должны выполняться равенства $\widetilde{D}_i = \sum\limits_{\alpha} \mu_i^{\alpha} D_{\alpha}$, а так как $D_i(x_\alpha) = \delta_{i\alpha}$, где $\delta_{i\alpha}$ — символы Кронекера, то $\mu_i^\alpha = \widetilde{D}_i(x_\alpha)$ и, следовательно,

$$\widetilde{D}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \widetilde{D}_i(x_\alpha) D_\alpha, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.29}$$

Вернемся к уравнению (4.20). Для преобразования (4.21) матрица перехода имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\sigma_x \cos\theta - \sigma_y \sin\theta, & \sigma_x \sin\theta - \sigma_y \cos\theta \\ -\theta_x \cos\theta - \theta_y \sin\theta, & \theta_x \sin\theta - \theta_y \cos\theta \end{pmatrix},$$

а операторы полных производных —

$$D_\xi = \frac{k}{I} \left[\left(\frac{\sigma_y}{2k} + \theta_y\right) D_x - \left(\frac{\sigma_x}{2k} + \theta_x\right) D_y \right],$$

$$D_\eta = \frac{k}{I} \left[\left(\theta_y - \frac{\sigma_y}{2k}\right) D_x - \left(\theta_x - \frac{\sigma_x}{2k}\right) D_y \right],$$

где $I=\sigma_x\theta_y-\sigma_y\theta_x$. Поэтому симметриям H, S_0, f_1^0 и g_1^0 преобразованного уравнения соответствуют симметрии

$$\widetilde{H}=D\begin{pmatrix}(-\sigma_x\cos\theta-\sigma_y\sin\theta)f, & (\sigma_x\sin\theta-\sigma_y\cos\theta)g\\ (-\theta_x\cos\theta-\theta_y\sin\theta)f, & (\theta_x\sin\theta-\theta_y\cos\theta)g\end{pmatrix},$$

где $f=f(\frac{\sigma}{2k}-\theta,\ \frac{\sigma}{2k}+\theta)$, $g=g(\frac{\sigma}{2k}-\theta,\ \frac{\sigma}{2k}+\theta)$, и

$$\widetilde{S}_0=\begin{pmatrix}-x\sigma_x-y\sigma_y\\ -x\theta_x-y\theta_y\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{f}_1^0=\begin{pmatrix}k+\frac{1}{2}(y\sigma_x-x\sigma_y)\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(y\theta_x-x\theta_y)\end{pmatrix},\quad \widetilde{g}_1^0=\begin{pmatrix}k-\frac{1}{2}(y\sigma_x-x\sigma_y)\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(y\theta_x-x\theta_y)\end{pmatrix}$$

исходного уравнения, а оператору рекурсии $\mathcal{R}_2$ — оператор

$$\widetilde{\mathcal{R}}_2=\begin{pmatrix}r_{11}, & r_{12}\\ r_{21}, & r_{22},\end{pmatrix}$$

где

$$r_{11}=\frac{\sigma}{k}\Delta+\frac{2k\theta}{I}(\theta_x^2+\theta_y^2+c\Delta(d)-d\Delta(c))-\frac{\Delta(I)}{I},$$

$$r_{12}=2k^2\theta\Delta+\frac{2k}{I}(c^2-d^2-\Delta(I))+4k(c\Delta(d)-d\Delta(c)),$$

$$r_{21}=\frac{\theta}{4k}\Delta+\frac{\theta}{I}(c\Delta(d)-d\Delta(c)+c^2-d^2)+\frac{k}{4},$$

$$r_{22}=\frac{\sigma}{k}\Delta+\frac{2k\theta}{I}(c\Delta(d)-d\Delta(c)-\theta_x^2-\theta_y^2)-\frac{\Delta(I)}{I}$$

и

$$c=-\theta_x\cos\theta-\theta_y\sin\theta,\, d=\theta_x\sin\theta-\theta_y\cos\theta,\, \Delta=\sigma_xD_y-\sigma_yD_x.$$

Применяя оператор $\widetilde{\mathcal{R}}_2^k$ к симметрии $\widetilde{S}_0$, мы получим симметрии $\widetilde{S}_k$, а применяя $(k-i)$ раз операторы $\{\bullet,\widetilde{f}_1^0\}_{\mathcal{E}}$ и $\{\bullet,\widetilde{g}_1^0\}_{\mathcal{E}}$ к $\widetilde{S}_k$, мы получим (с точностью до постоянных множителей) соответственно симметрии $\widetilde{f}_k^i$ и $\widetilde{g}_k^i$. Таким образом, имеется возможность эффективно вычислить любую симметрию уравнения (4.20) (хотя, конечно, получаемые при этом явные выражения будут весьма громоздки).

4.5. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мы завершаем эту главу исследованием высших симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений. Помимо фактов, касающихся высших симметрий, мы приводим также результаты, связанные с классическими симметриями этих уравнений.

Пусть $M = \mathbb{R}$ и $\pi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — тривиальное расслоение. Рассмотрим определенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, т. е. такую систему, для которой $\operatorname{codim} \mathcal{E} = \dim \pi = m$. Поскольку база расслоения π одномерна, это означает, что размерность многообразия $\mathcal{E}$ совпадает с размерностью пространства $J^{k-1}(\pi)$, равной $m(k-1)+1$. Назовем точку $\theta \in \mathcal{E}$ точкой общего положения, если проекция $\pi_{k,k-1}|_{\mathcal{E}}$ в ней имеет максимальный ранг $m(k-1)+1$, и ограничимся рассмотрением уравнений, все точки которых находятся в общем положении (в противном случае все последующие рассуждения будут справедливы в окрестности такой точки). Это означает, что $\mathcal{E}$ диффеоморфно проектируется иа $J^{k-1}(\pi)$, или, что то же самое, рассматриваемое уравнение разрешимо относительно всех входящих в него старших производных $\dfrac{\partial^k u^1}{\partial x^k}, \ldots, \dfrac{\partial^k u^m}{\partial x^k}$, где $x = x_1$ — единственная независимая переменная. Следовательно, $\mathcal{E}$ можно представить в виде

$$\mathcal{E} = s(J^{k-1}(\pi)), \tag{4.30}$$

где $s = s_0\colon J^{k-1}(\pi) \to J^k(\pi)$ — сечение расслоения $\pi_{k,k-1}$. Представление (4.30) позволяет получить удобное описание многообразия $\mathcal{E}^\infty$ и распределения Картана на нем.

Именно, рассмотрим произвольную точку $\theta \in \mathcal{E}$ и некоторую R-плоскость L (в нашем случае L является прямой), лежащую в пространстве $T_\theta(\mathcal{E})$. Пусть L' — другая такая плоскость и $v \in L$, $v' \in L'$ — такие векторы, что $\pi_{k,k-1}(v) = \pi_{k,k-1}(v')$. Тогда $v - v'$ является $\pi_{k,k-1}$-вертикальным вектором, лежащим в $T_\theta(\mathcal{E})$. Но в силу (4.30) пересечение $T_\theta(\mathcal{E})$ и касательного пространства к слою расслоения $\pi_{k,k-1}$ в точке θ тривиально. Значит, $v = v'$ и $L = L'$, т. е. распределение Картана на $\mathcal{E}$ в каждой точке содержит не более одной R-плоскости. Покажем, что такая плоскость всегда существует. Действительно, представим точку $\theta \in \mathcal{E}$ в виде пары (θ', L_θ), где $\theta' = \pi_{k,k-1}(\theta)$ и L_θ — R-плоскость в точке θ', определяемая точкой θ. Тогда, очевидно, R-плоскость $L_\theta^0 = s_*(L_\theta)$ лежит в $T_\theta(\mathcal{E})$. Таким образом, распределение Картана на $\mathcal{E}$ совпадает с полем направлений $\mathcal{L}^0 = \{L_\theta^0 \mid \theta \in \mathcal{E}\}$. Заметим, что сечение s осуществляет изоморфизм между многообразием $J^{k-1}(\pi)$, оснащенным полем направлений $\mathcal{L} = \{L_\theta \mid \theta \in \mathcal{E}\}$, и парой $(\mathcal{E}, \mathcal{L}^0)$.

Далее, пара (θ, L_θ^0), $\theta \in \mathcal{E}$, определяет точку $\theta_1 \in J^{k+1}(\pi)$, и множество таких точек заполняет многообразие $\mathcal{E}^{(1)}$. При этом, очевидно, $\mathcal{E}^{(1)}$ представляется в виде $s_1(J^{k-1}(\pi))$, где s_1 — сечение расслоения $\pi_{k+1,k-1}$, а распределение Картана на $\mathcal{E}^{(1)}$ совпадает с полем направлений

$$\mathcal{L}^{(1)} = \{L^1_{\theta_1} \mid L^1_{\theta_1} = (s_1)_*(L_\theta), \theta_1 = s_1(\theta), \theta \in \mathcal{E}\}.$$

Продолжая этот процесс, мы придем к следующему утверждению.

Утверждение 4.6. *Пусть* $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$, $\dim(M) = 1$, $\operatorname{codim}(\mathcal{E}) = \dim(\pi)$, *обыкновенное дифференциальное уравнение, разрешимое относительно старшей производной. Тогда при любом* $l = 0, 1, \ldots, \infty$ *многообразие* $\mathcal{E}^{(l)}$ *представимо в виде* $\mathcal{E}^{(l)} = s_l(J^{k-1}(\pi))$, *где* $s_l \in \Gamma(\pi_{k+l,k-1})$ *и* $s_l = \pi_{k+l+1,k+l} \circ s_{l+1}$, *а распределение Картана на* $\mathcal{E}^{(l)}$ *совпадает с полем направлений*

$$\mathcal{L}^{(l)} = \{L^l_{\theta_l} \mid L^l_{\theta_l} = (s_l)_*(L_\theta), \theta_l = s_l(\theta), \theta \in \mathcal{E}\}.$$

Таким образом, все $\mathcal{E}^{(l)}$ (*включая* $\mathcal{E}^\infty$) *как многообразия с распределениями попарно изоморфны и изоморфны многообразию* $J^{k-1}(\pi)$, *оснащенному полем направлений* $\mathcal{L}$.

Предположим, что уравнение $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям утверждения 4.6, и рассмотрим некоторую его высшую симметрию $X \in \operatorname{sym}\mathcal{E}$. В силу утверждения 4.6 для всякого l поле X однозначно проектируется в векторное поле X_l на $\mathcal{E}^{(l)}$, причем последнее сохраняет соответствующее распределение Картана. В частности, $X_0 \in D(\mathcal{E})$ является классической внутренней симметрией уравнения $\mathcal{E}$. Рассматривая множество $\operatorname{Sym}_i \mathcal{E}$ таких симметрий, мы, таким образом, получаем гомоморфизм алгебр Ли

$$sL\colon \operatorname{sym}\mathcal{E} \to \operatorname{Sym}_i \mathcal{E}. \tag{4.31}$$

Изучим его более подробно, для чего заметим следующее. Поскольку в рассматриваемой ситуации $\mathcal{E}^\infty$ является конечномерным многообразием, симметрия X определяет на нем однопараметрическую группу сдвигов $\{A_t\}$. Применяя преобразование A_t к некоторому решению $f \in \Gamma(\pi)$ уравнения $\mathcal{E}$, мы вновь получим решение $f_t = A_t^*(f)$ этого уравнения. В силу теоремы о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных, множество $\operatorname{Sol}\mathcal{E}$ решений уравнения $\mathcal{E}$ является гладким (возможно, с особенностями) многообразием, а A_t — однопараметрической группой. Обозначая через X^* соответствующее векторное поле, мы получаем отображение $X \mapsto X^*$, определяющее гомоморфизм алгебр Ли

$$\mathrm{sD}\colon \operatorname{sym}\mathcal{E} \to D(\operatorname{Sol}\mathcal{E}). \tag{4.32}$$

Совершенно аналогично строится гомоморфизм

$$\mathrm{LD}\colon \operatorname{Sym}_i(\mathcal{E}) \to D(\operatorname{Sol}\mathcal{E}). \tag{4.33}$$

Обратно, пусть $Y \in D(\operatorname{Sol}\mathcal{E})$ и $\{B_t\}$ — соответствующая однопараметрическая группа преобразований. Рассмотрим точку $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ и решение f_θ, проходящее через нее (такое решение существует и единственно). Сопоставим точке θ точку $B'_t(\theta) = [B_t(f_\theta)]_x^\infty$, $x = \pi_\infty(\theta)$. Тогда $\{B'_t\}$ — однопараметрическая группа преобразований многообразия $\mathcal{E}^\infty$, элементы которой сохраняют распределение Картана. Соответствующее векторное поле вертикально и определяет высшую симметрию уравнения $\mathcal{E}$. Таким образом, мы построили гомоморфизм

$$Ds\colon D(\operatorname{Sol}\mathcal{E}) \to \operatorname{sym}\mathcal{E}, \tag{4.34}$$

очевидно, являющийся обратным к гомоморфизму (4.32). Легко видеть, что построенные нами гомоморфизмы согласованы друг с другом в следующем смысле.

Утверждение 4.7. *Пусть $\mathcal{E}$ — уравнение, удовлетворяющее условиям утверждения 4.6. Тогда построенные отображения sD, Ds, sL и LD являются изоморфизмами алгебр Ли, причем $sD \circ Ds = \mathrm{id}$ и $LD \circ sL = sD$. Иными словами, в рассматриваемой ситуации алгебры Ли высших симметрий, внутренних классических симметрий и диффеоморфизмов многообразия решений изоморфны.*

Доказательство. Равенства $sD \circ Ds = \mathrm{id}$ и $LD \circ sL = sD$ вытекают из построений. Поэтому sL — мономорфизм, а LD — эпиморфизм. Следовательно, для завершения доказательства достаточно, например, показать, что LD не имеет ядра. Из определения гомоморфизма LD следует, что его ядро состоит из симметрий, для которых все решения являются инвариантными, а из данного выше описания распределения Картана на $\mathcal{E}$ мы видим, что эти симметрии должны лежать в распределении Картана. Но распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$ не содержит вертикальных полей. □

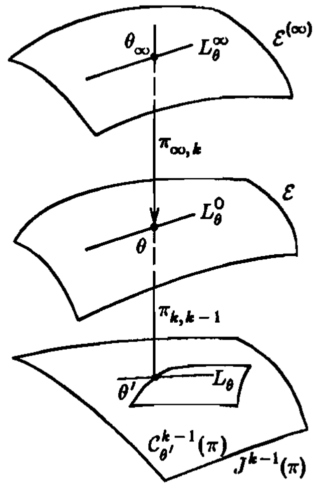

Рис. 4.7. Поле направлений L_θ на $J^{k-1}(\pi)$

Итак, в рассмотренной ситуации использованная аналогия между симметриями и полями на многообразии $\operatorname{Sol}\mathcal{E}$ приобретает точный смысл.

Заметим, что утверждение 4.6 позволяет наглядно проиллюстрировать несовпадение алгебр внешних и внутренних классических симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений (см. § 9 гл. 3). Действительно, внутренние симметрии отождествляются с полями на $J^{k-1}(\pi)$, сохраняющими поле направлений $\mathcal{L}=\{L_\theta\}$, которое содержится в распределении Картана на $J^{k-1}(\pi)$ (рис. 4.7). С другой стороны, внешние симметрии должны сохранять как это поле направлений, так и само распределение Картана на $J^{k-1}(\pi)$. Поэтому если порядок уравнения больше 1, внешние симметрии образуют собственную подалгебру в алгебре Ли внутренних симметрий.

Перейдем теперь к координатным вычислениям и рассмотрим уравнение вида

$$Lf(x)\equiv\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n+\sum_0^{n-1}A_i(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^i\right]f(x)=g(x), \qquad (4.35)$$

где A_i суть $m\times m$ матрицы и f, g — m-векторы. Ниже «симметрия» означает высшую инфинитезимальную симметрию.

Уравнение (4.35) эквивалентно уравнению

$$Lf(x)=\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n+\sum_0^{n-1}A_i(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\right)^i\right]f(x)=0, \qquad (4.36)$$

Эквивалентность задается преобразованием

$$f(x)\mapsto f(x)-f^*(x),$$

где $f^*(x)$ — некоторое решение (4.35). Уравнение (4.36) определяет подмногообразие $\mathcal{E}$ в $J^n(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ вида

$$\mathcal{E}=\left\{y\in J^n(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)\;\middle|\; p^n+\sum_{i=0}^{n-1}A_i(x)\cdot p^i=0\right\}$$

Продолжения $\mathcal{E}$, обозначаемые $\mathcal{E}^{(N)}\subset J^{n+N}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m)$ задаются уравнениями

$$p^{n+k}+D^k\left(\sum_{i=0}^{n-1}A_i(x)\cdot p^i\right)=0, \qquad 0\leqslant k\leqslant N<\infty,$$

где

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}p_k^{i+1}\frac{\partial}{\partial p_k^i}$$

— полная производная по x. Пространство решений (4.36) изоморфно $\mathbb{R}^d$, $d=m\cdot n$, так как n начальных условий на m-вектора $f^{(0)},\ldots,f^{(n-1)}$ однозначно определяют решение. Зафиксируем некоторый базис $\{\boldsymbol{R}_i \mid 1 \leqslant i \leqslant m\cdot n\}$ в пространстве $\operatorname{Ker} L$ решений (4.36). Тогда для любого решения $\boldsymbol{f}$ уравнения (4.36) мы получим

$$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{d} c_i \cdot \boldsymbol{R}_i, \tag{4.37}$$

где константы $c_i = c_i(\boldsymbol{f}) \in \mathbb{R}$. Зависимость c от $\boldsymbol{f}$ явно задается при помощи вронскианов:

$$c_i = \frac{W_i(\boldsymbol{f})}{W} \tag{4.38}$$

Здесь $W = W(\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{R}_i, \ldots, \boldsymbol{R}_d)$,

$$W = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 & \ldots & \boldsymbol{R}_i & \ldots & \boldsymbol{R}_d \\ \boldsymbol{R}_1' & \ldots & \boldsymbol{R}_i' & \ldots & \boldsymbol{R}_d' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{R}_1^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{R}_i^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{R}_d^{(n-1)} \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

и $W_i(\boldsymbol{f}) = W(\boldsymbol{R}_1, \ldots, \boldsymbol{f}(x), \ldots, \boldsymbol{R}_d)$,

$$W_i(\boldsymbol{f}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 & \ldots & \boldsymbol{f}(x) & \ldots & \boldsymbol{R}_d \\ \boldsymbol{R}_1' & \ldots & \boldsymbol{f}'(x) & \ldots & \boldsymbol{R}_d' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{R}_1^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{f}^{(n-1)}(x) & \ldots & \boldsymbol{R}_d^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{4.40}$$

Соответствия $\boldsymbol{f} \mapsto W_i(\boldsymbol{f})$ или $\boldsymbol{f} \mapsto c_i(\boldsymbol{f})$ суть дифференциальные линейные операторы порядка $n-1$. Будем интерпретировать их как функции на пространстве джетов $J^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. Определим

$$\widetilde{W}_i = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 & \ldots & \boldsymbol{p}^0 & \ldots & \boldsymbol{R}_d \\ \boldsymbol{R}_1' & \ldots & \boldsymbol{p}^1 & \ldots & \boldsymbol{R}_d' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{R}_1^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{p}^{(n-1)} & \ldots & \boldsymbol{R}_d^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

Тогда $W_i(\boldsymbol{f}) = \widetilde{W}\big|_{j_{n-1}(\boldsymbol{f})}$.

Определяющее уравнение в этой ситуации имеет вид

$$\left[D^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(x) \cdot D^i\right] \mathcal{G}\big|_{\mathcal{E}^{(\infty)}} = 0, \tag{4.42}$$

где D — ограничение оператора D_x на $\mathcal{E}^{\infty}$.

При этом любая точечная симметрия должна иметь вид

$$\beta(x,\boldsymbol{p}^0)+\xi(x,\boldsymbol{p}^0)\cdot\boldsymbol{p}^1 \tag{4.43}$$

и удовлетворять (4.42). Здесь x, ξ — скаляры, $\boldsymbol{p}^0$, bp^1 и β суть m-векторы.

Координатным аналогом утверждения 3.4 является следующее утверждение.

Утверждение 4.8. *Полная алгебра симметрий* $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ *изоморфна алгебре векторных полей на пространстве* $\operatorname{Sol}\mathcal{E}$ *решений* (4.36). *Изоморфизм задается формулой*

$$\sum_{i=1}^{d}F_i(c_1,\ldots,c_d)\cdot\frac{\partial}{\partial c_i}\mapsto\sum_{i=1}^{d}F_i\left(\frac{W_1}{W},\ldots,\frac{W_d}{W}\right)\cdot\boldsymbol{R}_i.$$

Имеет место также следующий факт, уточняющий структуру алгебры Ли $\operatorname{sym}\mathcal{E}$.

Теорема 4.9. *Пусть* $d=\dim\operatorname{Sol}\mathcal{E}$. *Тогда набором функций*

$$\boldsymbol{p}_0,\qquad \boldsymbol{R}_k,\qquad \frac{\widetilde{W}_l}{W}\boldsymbol{R}_k,\qquad \frac{\widetilde{W}_l}{W}\boldsymbol{p}^0,\qquad l,k=1,\ldots,d$$

и

$$\frac{\widetilde{W}_l}{W}\boldsymbol{R}_k,\qquad i,k=1,\ldots,d,$$

порождают в $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ *подалгебры, изоморфные* $gl(d+1,\mathbb{R})$ *и* $gl(d,\mathbb{R})$ *соответственно.*

Следующий результат описывает подалгебру точечных симметрий в $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ *).

Теорема 4.10. *Любая точечная симметрия уравнения* (4.36) *имеет вид*

$$\mathcal{G}=\left(-\frac{n-1}{2}\cdot\xi'(x)+M\right)\boldsymbol{p}^0+\xi(x)\cdot\boldsymbol{p}^1+\boldsymbol{b}(x), \tag{4.44}$$

где ξ *— скалярная функция,* $\boldsymbol{b}$ *— некоторое решение* (4.36) *и* M *— постоянная* $m\times m$*-матрица, коммутирующая со всеми коэффициентными матрицами* $A_i(x)$ *в уравнении* (4.36).

Следствие 4.11. *Размерность* N *алгебры точечных симметрий уравнения* (4.35) *удовлетворяет неравенству*

$$m\cdot n+1\leqslant N\leqslant(m+n)\cdot m+3.$$

*) Подробные вычисления приведены в статье Samokhin A. V. Symmetries of ordinary differential equations // AMS Transl. 2. — 1995. — V. 167.

ГЛАВА 5

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В этой главе рассматривается теория законов сохранения дифференциальных уравнений. Мы начинаем с исследования концепции закона сохранения. Оказывается, что наиболее естественный и в то же время эффективный подход к законам сохранения состоит в отождествлении их с элементами одного из членов *$\mathcal{C}$-спектральной последовательности* [14, 15, 148]. Эта последовательность возникает из рассмотрения в комплексе де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ фильтрации, образованной степенями идеала картановских форм. Теория $\mathcal{C}$-спектральной последовательности, изложенная в § 2, позволяет каждому закону сохранения сопоставить некоторую производящую функцию. В § 3 на различных примерах мы иллюстрируем технику вычисления законов сохранения, основанную на производящих функциях. В § 4 обсуждается связь между симметриями и законами сохранения дифференциальных уравнений, а также рассматривается теорема Нётер и гамильтонов формализм на пространстве бесконечных джетов.

Отметим, что теория $\mathcal{C}$-спектральной последовательности изложена в § 2 довольно лаконично и многие вычисления вынесены в упражнения. С другой стороны, читатель, интересующийся в большей степени результатами и примерами, а не доказательствами, может читать § 3 и § 4 сразу после § 1.

§ 1. Элементарное понятие о законах сохранения

Прототипом закона сохранения может служить закон неразрывности движущейся жидкости. Если $\rho(x,t)$ — плотность жидкости, а $v(x,t)=(v^1(x,t), v^2(x,t), v^3(x,t))$ — скорость в точке $x=(x_1,x_2,x_3)$ в момент времени t, то это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v^1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\rho v^3)}{\partial x_3}=0. \tag{1.1}$$

Воспользовавшись теоремой Гаусса — Остроградского, можно переписать уравнение неразрывности в интегральной форме

$$-\frac{d}{dt}\int_V \rho(x,t)\,dx = \int_{\partial V} (\rho \boldsymbol{v}\cdot \boldsymbol{n})\,d\sigma. \tag{1.2}$$

Здесь V — некоторая фиксированная область пространства, ∂V — ее граница, $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к ∂V, $d\sigma$ — элемент поверхности. Интеграл по поверхности представляет собой поток жидкости из области V, и уравнение (1.2), таким образом, гласит, что масса жидкости внутри V уменьшается на массу вытекшей жидкости. В частности, если нормальная компонента скорости $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ равна нулю, получаем уравнение сохранения массы

$$\int_V \rho(x,t)\,dx = \mathrm{const}.$$

Сходным образом описываются многие другие сохраняющиеся величины. Пусть S — плотность некоторой сохраняющейся величины, например плотность энергии, компонента плотности импульса или момента и т. п.; в только что рассмотренном примере $S=\rho$. Плотности S сопоставляется вектор $\bar{S}=(S_1,\ldots,S_{n-1})$ — плотность потока величины S, где $(n-1)$ — число пространственных переменных. В нашем примере $\bar{S}=\rho\boldsymbol{v}$. Уравнение сохранения, обобщающее (1.1), будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial S_i}{\partial x_i}=0, \tag{1.3}$$

или, в интегральной форме,

$$-\frac{d}{dt}\int_V S\,dx = \int_{\partial V} \bar{S}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma.$$

Сохраняющимся током называется n-мерный вектор $S=(S_1,\ldots,S_{n-1},S)$, удовлетворяющий соотношениям (1.3).

Рассмотрим теперь уравнение (1.3) с точки зрения теории дифференциальных уравнений. Предположим, что мы изучаем физическую систему, описываемую уравнением $\mathcal{E}=\{F=0\}\subset J^k(\pi)$. Тогда S и S_i можно считать функциями на $\mathcal{E}^\infty$, и уравнение (1.3) записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{D}_i(S_i)=0, \tag{1.4}$$

где $S_n = S$, $\bar{D}_i$ — ограничения операторов полной производной D_i на уравнение $\mathcal{E}^\infty$, n — число независимых переменных. Это замечание позволяет определить *сохраняющийся ток для уравнения* $\mathcal{E}$ как вектор-функцию $\bar{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ на $\mathcal{E}^\infty$, $S_i \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$, удовлетворяющую на $\mathcal{E}^\infty$ уравнению (1.4).

В том случае, когда одна из независимых переменных выделяется как время $t = x_n$, а остальные переменные $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ рассматриваются как пространственные, компоненту S_n называют *плотностью* сохраняющейся величины, а вектор-функцию $(S_1, \ldots$ $\ldots, S_{n-1})$ — *плотностью потока* (или просто *потоком*).

Существует один очень простой способ построения сохраняющихся токов. Возьмем произвольный набор функций $\mathcal{L}_{ij} \in \mathcal{F}(\pi)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, и положим

$$S_i = \sum_{j<i} D_j(\mathcal{L}_{ji}) - \sum_{i<j} D_j(\mathcal{L}_{ij}).$$

Разумеется, такие сохраняющиеся токи, называемые *тривиальными*, никак не связаны с интересующей нас системой уравнений*). Чтобы избавиться от них, отождествим все токи, отличающиеся друг от друга на тривиальный ток. Полученные таким образом классы эквивалентности назовем *законами сохранения* уравнения $\mathcal{E}$. (В качестве синонима используется также термин *интеграл движения*.)

Упражнение 1.1. Пусть $\mathcal{E}$ — система обыкновенных дифференциальных уравнений. Убедитесь, что понятие закона сохранения в этом случае эквивалентно понятию *первого интеграла*.

Замечание 1.1. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейные уравнения в частных производных, как правило, не обладают (даже в малой окрестности) полным набором законов сохранения**). Вопрос о том, можно ли обобщить определение закона сохранения таким образом, чтобы исправить эту ситуацию, остается интересной и интригующей задачей.

---

*) Это не означает, что такие токи обязательно неинтересны с физической точки зрения. Например, в калибровочных теориях большую роль играют так называемые *несобственные токи*, которые получаются с помощью теоремы Нётер из калибровочных симметрий (см., например, [52, 37, 85, 84]). Такие токи всегда тривиальны и, следовательно, не зависят от уравнений теории, однако они содержат информацию о структуре калибровочной группы, относительно которой эти уравнения инвариантны.

**) Набор называется *полным*, если всякое решение рассматриваемого уравнения полностью определяется отвечающими ему значениями сохраняющихся величин.

Здесь мы ограничимся тем, что сформулируем гипотезу, высказанную в [20, 151]: любое регулярное уравнение обладает полным набором *нелокальных* законов сохранения по крайней мере в достаточно малой окрестности (о нелокальных законах сохранения см. п. 1.8 гл. 6).

Определение закона сохранения (в той форме, как мы его сформулировали), конечно, нельзя использовать для практического нахождения всех законов сохранения заданного уравнения. Для этого следует научиться описывать целые классы сохраняющихся токов. Решение этой задачи достигается переформулировкой определения закона сохранения в терминах *горизонтальных когомологий де Рама* (т. е. когомологий горизонтального комплекса де Рама, см. п. 1.6 гл. 4), что позволяет воспользоваться средствами гомологической алгебры. В § 2 мы рассмотрим эту когомологическую теорию. (Читатели, интересующиеся главным образом практической стороной поиска законов сохранения, могут перейти сразу к § 3.)

§ 2. $\mathcal{C}$-спектральная последовательность

$\mathcal{C}$-спектральная последовательность, впервые рассмотренная в работах [14, 15], имеет фундаментальное значение в теории законов сохранения. Подробности и обсуждение близких вопросов можно найти, например, в [148, 152, 153, 16, 81, 142, 144, 145, 96, 146, 125, 87, 78, 79, 157, 93, 95, 47, 114, 55].

2.1. Определение $\mathcal{C}$-спектральной последовательности. Пусть $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$ — бесконечно продолженное уравнение и $\Lambda^*(\mathcal{E}) = \sum_{i\geqslant 0} \Lambda^i(\mathcal{E})$ — алгебра дифференциальных форм на $\mathcal{E}^\infty$. Рассмотрим идеал $\mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E}) = \sum_{i\geqslant 0} \mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{E})$ в алгебре $\Lambda^*(\mathcal{E})$, состоящий из картановских форм (т. е. форм, обращающихся в нуль при ограничении на распределение Картана: $\omega \in \mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{E})$ тогда и только тогда, когда $\omega(X_1, \ldots, X_i) = 0$ для любого набора $X_1, \ldots, X_i \in \mathcal{C}D(\mathcal{E})$; см. п. 2.1 гл. 4). Через $\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{E})$ обозначим k-ю степень идеала $\mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E})$, т. е. подмодуль в $\Lambda^*(\mathcal{E})$, порожденный формами вида $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$, где $\omega_i \in \mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E})$. Очевидно, что идеал $\mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E})$ (а следовательно, и все идеалы $\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{E})$) устойчив относительно действия внешнего дифференциала d, т. е.

$$d(\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{E})) \subset \mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{E}).$$

Поэтому можно рассмотреть фильтрацию

$$\Lambda^*(\mathcal{E}) \supset \mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{E}) \supset \mathcal{C}^2\Lambda^*(\mathcal{E}) \supset \ldots \supset \mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{E}) \supset \ldots \tag{2.1}$$

комплекса де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ его подкомплексами $(\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{E}), d)$. Спектральная последовательность *) $(E_r^{p,q}(\mathcal{E}), d_r^{p,q})$, построенная по этой фильтрации, называется *$\mathcal{C}$-спектральной последовательностью* уравнения $\mathcal{E}$. Исходная фильтрация конечна в каждой размерности, т. е.

$$\Lambda^k(\mathcal{E}) \supset \mathcal{C}^1\Lambda^k(\mathcal{E}) \supset \mathcal{C}^2\Lambda^k(\mathcal{E}) \supset \ldots \supset \mathcal{C}^k\Lambda^k(\mathcal{E}) \supset \mathcal{C}^{k+1}\Lambda^k(\mathcal{E}) = 0,$$

поэтому спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама $H^*(\mathcal{E}^\infty)$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$.

Как обычно, число p называется фильтрационной степенью, а $p+q$ — полной степенью.

2.2. Член E_0. Рассмотрим член $E_0(\mathcal{E}) = \sum_{p,q} E_0^{p,q}(\mathcal{E})$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности.

По определению

$$E_0^{p,q}(\mathcal{E}) = {\mathcal{C}^p\Lambda^{p+q}(\mathcal{E})}\Big/{\mathcal{C}^{p+1}\Lambda^{p+q}(\mathcal{E})}.$$

Дифференциал $d_0^{p,q}\colon E_0^{p,q}(\mathcal{E}) \to E_0^{p,q+1}(\mathcal{E})$ индуцирован внешним дифференциалом d. Представим себе, как это обычно принято, что член спектральной последовательности $E_r^{p,q}$ расположен в вершине (p,q) решетки на плоскости (рис. 5.1). Тогда дифференциал d_0 можно изобразить стрелкой, направленной вертикально вверх. Таким образом, $E_0(\mathcal{E})$ является прямой суммой комплексов

$$0 \to E_0^{p,0}(\mathcal{E}) \to E_0^{p,1}(\mathcal{E}) \to \ldots$$
$$\ldots \to E_0^{p,q}(\mathcal{E}) \to E_0^{p,q+1}(\mathcal{E}) \to \ldots,$$

которые изображаются на плоскости вертикальными столбцами. Нулевой столбец члена E_0 образует *горизонтальный комплекс де Рама* (см. п. 1.6 гл. 4):

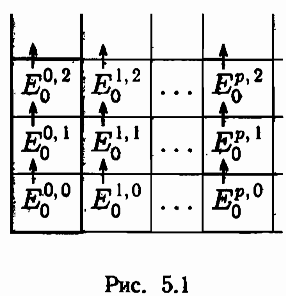

Рис. 5.1

$$E_0^{0,q}(\mathcal{E}) = {\Lambda^q(\mathcal{E})}\Big/{\mathcal{C}\Lambda^q(\mathcal{E})} = \Lambda_0^q(\mathcal{E}), \qquad d_0^{0,q} = \widehat{d}.$$

*) О теории спектральных последовательностей можно прочитать, например, в [46, 126, 27, 29].

Когомологии $\bar{H}^q(\mathcal{E})$ горизонтального комплекса де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ тесно связаны с законами сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Действительно, пусть $S=(S_1,\ldots,S_n)$ — сохраняющийся ток. Сопоставим ему горизонтальную $(n-1)$-форму

$$\omega_S=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Тогда условие (1.4) означает, что $\widehat{d}\omega_S=0$, причем ток S тривиален тогда и только тогда, когда форма ω_S точна: $\omega_S=\widehat{d}\omega'$.

Определение 2.1. *Законом сохранения для уравнения* $\mathcal{E}$ называется $(n-1)$-й класс когомологий горизонтального комплекса де Рама на $\mathcal{E}^\infty$.

Таким образом, $\bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ — группа законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Иногда законами сохранения называют элементы группы $\bar{H}^q(\mathcal{E})$ при $q<n-1$. Однако для большинства уравнений, встречающихся в приложениях, такие группы имеют чисто топологическую природу *). Наконец, группу $\bar{H}^n(\mathcal{E})$ следует рассматривать как совокупность лагранжианов (см. пп. 2.5, 4.1) в лагранжевом формализме со связями, выражаемыми уравнением $\mathcal{E}$ **).

Чтобы завершить описание члена $E_0(\mathcal{E})$, заметим, что из очевидного разложения $\Lambda^1(\mathcal{E})=\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})\oplus\Lambda_0^1(\mathcal{E})$ следует $E_0^{p,q}(\mathcal{E})=$ $=\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^q(\mathcal{E})$. При этом дифференциал $d_0^{p,q}$ совпадает с композицией

$$\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^q(\mathcal{E})\xrightarrow{d}\mathcal{C}^{p+1}\Lambda^{p+1}(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^q(\mathcal{E})\oplus\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^{q+1}(\mathcal{E})\xrightarrow{\alpha}$$
$$\xrightarrow{\alpha}\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^{q+1}(\mathcal{E}),$$

где α — проекция на второе слагаемое. В частности, все ненулевые члены $E_0^{p,q}(\mathcal{E})$ расположены в полосе $0\leqslant q\leqslant n$.

Упражнение 2.1. Покажите, что имеет место вложение

$$d(\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^q(\mathcal{E}))\subset\mathcal{C}^{p+1}\Lambda^{p+1}(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^q(\mathcal{E})\oplus\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes\Lambda_0^{q+1}(\mathcal{E}).$$

Воспользуйтесь для этого прямым разложением $d=\widehat{d}+U_1$ и свойствами оператора U_1 (см. п. 2.1 гл. 4).

---

*) Содержательные «законы сохранения», принадлежащие $\bar{H}^q(\mathcal{E})$, $q<n-1$, можно найти, например, в калибровочных теориях (см. [85, 84, 103] и пр.).

**) Существуют различные неэквивалентные формулировки лагранжева формализма со связями. Мы имеем в виду задачу Лагранжа о стационарном значении функционала действия в классе сечений расслоения π, являющихся решениями уравнения $\mathcal{E}$. В этом случае уравнения Эйлера — Лагранжа определяются ограничением соответствующего лагранжиана на $\mathcal{E}^\infty$.

2.3. Член E_1: подготовительные результаты. Здесь мы докажем несколько важных утверждений, необходимых для описания члена E_1 $\mathcal{C}$-спектральной последовательности.

Начнем со следующего определения. $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуль P называется *горизонтальным*, если он изоморфен модулю сечений $\mathcal{F}(\mathcal{E},\xi)$ на $\mathcal{E}$ для некоторого конечномерного векторного расслоения $\xi\colon N_\xi \to M$.

Упражнение 2.2. Покажите, что $P = \Gamma(\xi)\otimes_{C^\infty(M)}\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Горизонтальный модуль P фильтрован своими подмодулями $P_k = \mathcal{F}_k(\mathcal{E},\xi) = \Gamma(\xi)\otimes_{C^\infty(M)}\mathcal{F}_k(\mathcal{E})$. Как было показано в п. 2.1 гл. 4, $\Lambda_0^q(\mathcal{E})$ является горизонтальным модулем.

Рассмотрим теперь два векторных расслоения, $\xi\colon N_\xi \to M$ и $\eta\colon N_\eta \to M$. Пусть $P = \mathcal{F}(\mathcal{E},\xi)$, $Q = \mathcal{F}(\mathcal{E},\eta)$. Дифференциальный оператор $\Delta\colon P \to Q$ называется *$\mathcal{C}$-дифференциальным* (или *горизонтальным*), если он имеет вид $\Delta = f_1\widehat{\square}_1 + f_2\widehat{\square}_2 + \ldots + f_r\widehat{\square}_r$, где $\widehat{\square}_i$ — поднятия (см. замечание 1.1 гл. 4) некоторых линейных дифференциальных операторов $\square_i\colon \Gamma(\xi)\to\Gamma(\eta)$, $f_i\in\mathcal{F}(\mathcal{E})$, $i = 1,\ldots,r$. Например, $\mathcal{C}$-дифференциальными операторами являются все операторы вида ℓ_φ (универсальные линеаризации). Будем обозначать $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуль всех $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов из P в Q через $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,Q)$, а его подмодули, состоящие из операторов порядка не более k, — через $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P,Q)$.

Упражнение 2.3. Проверьте, что в локальных координатах скалярные $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы порядка не более k записываются в виде

$$\Delta = \sum_{|\sigma|=0}^{k} a_\sigma \bar{D}_\sigma,$$

где $\bar{D}_\sigma = \bar{D}_1^{\sigma_1}\circ\ldots\circ\bar{D}_n^{\sigma_n}$, $\sigma = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, $a_\sigma\in\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

Упражнение 2.4. Покажите, что $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,Q)$ — горизонтальный модуль.

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_l, Q$ — произвольные горизонтальные модули. Положим

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,P_2,\ldots,P_l;Q) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_2,\ldots,\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_l,Q)\ldots))$$

и рассмотрим комплекс

$$0\to\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,P_2,\ldots,P_l;\mathcal{F}(\mathcal{E}))\xrightarrow{w}\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,P_2,\ldots,P_l;\Lambda_0^1(\mathcal{E}))\xrightarrow{w}\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{w}\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,P_2,\ldots,P_l;\Lambda_0^n(\mathcal{E}))\to 0, \quad (2.2)$$

где $w(\nabla) = \widehat{d}\circ\nabla$, $\nabla\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,P_2,\ldots,P_l;\Lambda_0^q(\mathcal{E}))$.

Теорема 2.1. *Когомологии комплекса* (2.2) *равны нулю в членах* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_l; \Lambda_0^q(\mathcal{E}))$ *при* $q < n$, *а его группа когомологий в члене* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E}))$ *изоморфна* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_{l-1}; \widehat{P}_l)$, *где* $\widehat{P}_l = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}(P_l, \Lambda_0^n(\mathcal{E}))$.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_l; Q)$ подмодуль в $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_l; Q)$, состоящий из таких операторов ∇, что при любых $p_1 \in P_1$, $p_2 \in P_2$, $\ldots$, $p_{l-1} \in P_{l-1}$ оператор $\nabla(p_1, p_2, \ldots, p_{l-1})$: $P_l \to Q$ имеет порядок не более k (здесь и всюду ниже $\nabla(p_1, p_2, \ldots, p_{l-1})$ обозначает $\nabla(p_1)(p_2)\ldots(p_{l-1})$). Таким образом,

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P_1, \ldots, P_l; Q) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_{l-1}; \mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P_l, Q))$$

и вложения $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_k(P_l, Q) \subset \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{k+1}(P_l, Q)$ индуцируют гомоморфизмы подкомплексов (через $\bullet$ обозначено выражение $P_1, \ldots, P_l$)

$$\begin{array}{ccccc}
\to \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{k-n+i}(\bullet; \Lambda_0^i(\mathcal{E})) & \xrightarrow{w} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{k-n+i+1}(\bullet; \Lambda_0^{i+1}(\mathcal{E})) \to \\
\uparrow & & \uparrow \\
\to \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{k-n+i-1}(\bullet; \Lambda_0^i(\mathcal{E})) & \xrightarrow{w} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{k-n+i}(\bullet; \Lambda_0^{i+1}(\mathcal{E})) \to
\end{array} \tag{2.3}$$

Поэтому определен факторкомплекс

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\bullet; S_{k-n}(P_l)) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\bullet; S_{k-n+1}(P_l) \otimes \Lambda_0^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{\delta} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\bullet; S_k(P_l) \otimes \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to 0, \tag{2.4}$$

где $\bullet$ обозначает $P_1, \ldots, P_{l-1}$ и

$$S_r(P) = {}^{\mathcal{C}\mathrm{Diff}_r(P, \mathcal{F}(\mathcal{E}))}\!\big/_{\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{r-1}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E}))}.$$

Если мы докажем, что комплекс (2.4) точен при $k > 0$, то это будет означать, что комплексы (2.3) при $k > 0$ имеют одинаковые когомологии и, следовательно, когомологии комплекса (2.2) совпадают с когомологиями комплекса

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}_0(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to 0.$$

Тем самым теорема будет доказана.

Дифференциалы δ в комплексе (2.4) являются $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-гомоморфизмами. Поэтому точность (2.4) достаточно проверить в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}$. Поскольку функтор $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \cdot)$ точен, можно считать, что $l = 1$. Таким образом, мы должны доказать ацикличность комплексов

$$0 \to S_{k-n}(P)_\theta \to S_{k-n+1}(P)_\theta \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda_0^1(\mathcal{E})_\theta \to \ldots \to S_k(P)_\theta \otimes_{\mathbf{R}} \Lambda_0^n(\mathcal{E})_\theta \to 0$$

при $k > 0$. В качестве базиса в пространстве $S_i(P)_\theta$ выберем элементы $e_\xi \otimes D_\sigma|_\theta$, $|\sigma| = i$, где e_ξ — базис в $(P_\theta)^*$, а в пространстве $\Lambda_0^q(\mathcal{E})_\theta$ — элементы $dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}|_\theta$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n$. Тогда дифференциал δ запишется следующим образом:

$$\delta(e_\xi \otimes D_\sigma \otimes dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}|_\theta) = \sum_{i=1}^{n} e_\xi \otimes D_{\sigma + 1_i} \otimes dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}|_\theta.$$

Тем самым комплекс (2.4) является комплексом Кошуля алгебры многочленов (см., например, [9]), и поэтому точен при $k > 0$. □

Упражнение 2.5. Покажите, что вложение

$$i_l\colon\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_{l-1}; \widehat{P}_l) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E})),$$

порожденное вложением $\widehat{P}_l = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}(P_l, \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_l, \Lambda_0^n(\mathcal{E}))$, расщепляет естественную проекцию

$$\mu_l\colon\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to$$
$$\to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E}))/\operatorname{im} w = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_{l-1}; \widehat{P}_l).$$

Тем самым $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_{l-1}; \widehat{P}_l) = \operatorname{im} i_l$ оказывается прямым слагаемым в модуле $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E}))$.

Рассмотрим произвольный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\Delta\colon P \to Q$. Он индуцирует цепное отображение комплексов (2.2)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E})) & \xrightarrow{w} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_0^1(\mathcal{E})) & \xrightarrow{w} \ldots \xrightarrow{w} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to 0 \\
\Delta' \Big\uparrow & & \Delta' \Big\uparrow & & \Delta' \Big\uparrow \\
0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(Q, \mathcal{F}(\mathcal{E})) & \xrightarrow{w} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_0^1(\mathcal{E})) & \xrightarrow{w} \ldots \xrightarrow{w} & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to 0,
\end{array}$$

где $\Delta'(\nabla) = \nabla \circ \Delta$, $\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(Q, \Lambda_0^q(\mathcal{E}))$. Применяя теорему 2.1, мы видим, что отображение Δ' порождает отображение когомологий $\Delta^*\colon \widehat{Q} \to \widehat{P}$. Оператор Δ^* называется *сопряженным* к оператору Δ.

Упражнение 2.6. Покажите, что

а) если $\Delta = \sum_\sigma a_\sigma D_\sigma$ — скалярный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, то $\Delta^* = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \circ a_\sigma$;

б) если $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор Δ в локальных координатах записывается в виде матрицы $\Delta = \|\Delta_{ij}\|$, то $\Delta^* = \|\Delta^*_{ji}\|$.

В частности, из этого упражнения следует, что Δ^* — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, порядок которого совпадает с порядком оператора Δ.

Упражнение 2.7. Докажите, что для любого $\Delta \in \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, Q)$ и любых $p \in P$ и $\widehat{q} \in \widehat{Q}$ существует такая форма $\omega_{p,\widehat{q}}(\Delta) \in \Lambda_0^{n-1}(\mathcal{E})$, что

$$\widehat{q}(\Delta(p)) - (\Delta^*(\widehat{q}))(p) = \widehat{d}\omega_{p,\widehat{q}}(\Delta). \tag{2.5}$$

Упражнение 2.8. Убедитесь в том, что для любых двух $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов $\Delta_1\colon P \to Q$ и $\Delta_2\colon Q \to R$ выполняется равенство $(\Delta_2 \circ \Delta_1)^* = \Delta_1^* \circ \Delta_2^*$.

Упражнение 2.9. Пусть $X \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_1(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \Lambda_0^n(\mathcal{E}))$. Покажите, что $X + X^* \in \Lambda_0^n(\mathcal{E})$, т. е. $X + X^*$ — оператор нулевого порядка.

Упражнение 2.10. Покажите, что естественная проекция

$$\mu_l\colon \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to \\ \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E}))/\operatorname{im} w = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_{l-1}; \widehat{P}_l)$$

задается формулой:

$$\mu_l(\nabla)(p_1, \ldots, p_{l-1}) = (\nabla(p_1, \ldots, p_{l-1}))^*(1).$$

Обозначим через $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(P; Q)$ модуль $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\underbrace{P, \ldots, P}_{l}; Q)$, а через $\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l)}(P; Q)$ — подмодуль в $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(P; Q)$, состоящий из всех кососимметрических операторов, т. е. таких операторов $\nabla \in \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(P; Q)$, что

$$\nabla(p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots, p_l) = -\nabla(p_1, \ldots, p_{i+1}, p_i, \ldots, p_l)$$

для любых элементов $p_1, \ldots, p_l \in P$, $\quad i = 1, \ldots, l-1$.

Рассмотрим комплекс (2.2) для $P_1 = P_2 = \ldots = P_l = P$:

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(P; \mathcal{F}(\mathcal{E}))) \xrightarrow{w} \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(P; \Lambda_0^1(\mathcal{E})) \xrightarrow{w} \ldots \\ \ldots \xrightarrow{w} \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(P; \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \to 0. \tag{2.6}$$

На этом комплексе действует симметрическая группа S_l:

$$\tau(\nabla)(p_1,\ldots,p_l)=\nabla(p_{\tau(1)},\ldots,p_{\tau(l)}),\qquad \tau\in S_l.$$

Действие этой группы, очевидно, коммутирует с дифференциалом w. Поэтому из теоремы 2.1 следует, что кососимметрическая часть комплекса (2.6), т. е. подкомплекс

$$0\to \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l)}(P;\mathcal{F}(\mathcal{E}))\xrightarrow{w}\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l)}(P;\Lambda^1_0(\mathcal{E}))\xrightarrow{w}\ldots$$
$$\ldots\xrightarrow{w}\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l)}(P;\Lambda^n_0(\mathcal{E}))\to 0,\qquad (2.7)$$

ацикличен во всех размерностях, отличных от n, а его n-я группа когомологий изоморфна некоторому подмодулю в $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l-1)}(P;\widehat{P})$, который мы будем обозначать через $K_l(P)$.

Явное описание модуля $K_l(P)$ может быть получено следующим образом. Прежде всего заметим, что вложение (см. упр. 2.5)

$$i_l\colon\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,\ldots,P_{l-1};\widehat{P}_l)\to\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1,\ldots,P_l;\Lambda^n_0(\mathcal{E}))$$

коммутирует с действием подгруппы $S_{l-1}\subset S_l$, оставляющей неподвижным l-й аргумент. Поэтому определено вложение

$$K_l(P)\subset\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l-1)}(P;\widehat{P}).$$

Рассмотрим теперь действие транспозиции $\tau\in S_l$, меняющей местами j-й и l-й аргументы, $j<l$, на произвольный оператор $\Delta\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l-1)}(P,\widehat{P})$. Зафиксируем некоторые элементы $p_1,\ldots$ $\ldots,p_{j-1},p_{j+1},\ldots,p_{l-1}\in P$ и рассмотрим оператор

$$\square(p)=\Delta(p_1,\ldots,p_{j-1},p,p_{j+1},\ldots,p_{l-1}).$$

Из формулы (2.5) следует, что

$$\square(p)(p')-\square^*(p')(p)\in\operatorname{im}\widehat{d}$$

для любых $p,p'\in P$. Поэтому оператор $\tau(\Delta)$ может быть записан в виде $\tau(\Delta)(p_1,\ldots,p_{l-1})=\square^*(p_j)$.

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2. *Комплекс* (2.7) *ацикличен в членах* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l)}(P;\Lambda^q_0(\mathcal{E}))$ *при* $q<n$. *Группа когомологий в члене* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l)}(P;\Lambda^n_0(\mathcal{E}))$ *изоморфна модулю* $K_l(P)\subset\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(l-1)}(P;\widehat{P})$, *состоящему из всех таких операторов* ∇, *что для любых элементов* $p_1,\ldots,p_{l-2}\in P$ *выполнены равенства*

$$(\nabla(p_1,\ldots,p_{l-2}))^*=-\nabla(p_1,\ldots,p_{l-2}).$$

2.4. Обобщения. Приведем полезное обобщение теорем 2.1 и 2.2. Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Упражнение 2.11. Произвольному $\mathcal{C}$-дифференциальному оператору $\Delta\colon P_1 \to P_2$ сопоставим семейство операторов $\Delta(p_1, p_2^*) \in \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, где

$$\Delta(p_1, p_2^*)(f) = p_2^*(\Delta(f p_1)), \qquad p_1 \in P_1, \quad p_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}(P_2, \mathcal{F}(\mathcal{E})).$$

Докажите, что семейство $\Delta(p_1, p_2^*)$ определяет оператор Δ однозначно, и что для любого семейства $\Delta[p_1, p_2^*] \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, $p_1 \in P_1$, $p_2^* \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{E})}(P_2, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, удовлетворяющего условиям

$$\Delta\left[p_1, \sum_i f_i p_2^{*i}\right] = \sum_i f_i \Delta[p_1, p_2^{*i}], \qquad \Delta\left[\sum_i f_i p_1^i, p_2^*\right] = \sum_i \Delta[p_1^i, p_2^*] \circ f_i,$$

найдется такой оператор $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2)$, что $\Delta[p_1, p_2^*] = \Delta(p_1, p_2^*)$.

Пусть Q — левый модуль над кольцом $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathcal{E}))$. Так как

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}_0(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathcal{E})) \subset \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathcal{E})),$$

модуль Q является также $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модулем. Предположим, что как $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модуль он горизонтален. При помощи упражнения 2.11 оператору $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2)$ сопоставим такой оператор $\Delta_Q \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1 \otimes \otimes Q, P_2 \otimes Q)$, что

$$\Delta_Q[p_1 \otimes q, p_2^* \otimes q^*] = q^*(\Delta(p_1, p_2^*)q).$$

Таким образом, любой комплекс $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов

$$\ldots \to P_k \xrightarrow{\Delta_k} P_{k+1} \to \ldots$$

можно умножить на Q и затем рассмотреть комплекс

$$\ldots \to P_k \otimes Q \xrightarrow{(\Delta_k)_Q} P_{k+1} \otimes Q \to \ldots$$

В частности, умножая комплекс (2.2) на Q, мы получаем комплекс

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \mathcal{F}(\mathcal{E})) \otimes Q \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^1(\mathcal{E})) \otimes Q \to \ldots \\ \ldots \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \otimes Q \to 0. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Повторяя дословно доказательство теоремы 2.1, получаем следующую теорему.

Теорема 2.3. *Когомологии комплекса* (2.8) *равны нулю в членах* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_l; \Lambda_0^i(\mathcal{E})) \otimes Q$ *при* $i < n$. *Группа когомологий в члене* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_l; \Lambda_0^n(\mathcal{E})) \otimes Q$ *изоморфна* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2, \ldots, P_{l-1}; \widehat{P}_l) \otimes Q$.

Теорема 2.2 также допускает аналогичное обобщение.

Упражнение 2.12. Покажите, что на модуле $\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})$ существует ровно одна такая структура левого $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\mathcal{F}(\mathcal{E}), \mathcal{F}(\mathcal{E}))$-модуля, что

$$f \cdot \omega = f\omega, \qquad f \in \mathcal{F}(\mathcal{E}),$$
$$X \cdot \omega = L_X(\omega), \qquad X \in \mathcal{C}D(\mathcal{E}).$$

2.5. Член E_1: случай $J^\infty(\pi)$. Рассмотрим теперь член E_1 $\mathcal{C}$-спектральной последовательности для «пустого» уравнения $\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$. В этой ситуации мы будем использовать обозначения п. 2.1, заменяя символ $\mathcal{E}$ на π; например, $\mathcal{C}^k\Lambda^q(\pi)$ и т. п.

По определению первый член E_1 спектральной последовательности — когомология ее нулевого члена E_0. Таким образом, нулевой столбец состоит из групп горизонтальных когомологий пространства $J^\infty(\pi)$: $E_1^{0,q}(\pi) = \overline{H}^q(\pi)$. Чтобы описать члены $E_1^{p,q}(\pi)$ при $p > 0$, мы должны вычислить когомологии комплексов (см. п. 2.3)

$$0 \to \mathcal{C}^p\Lambda^p(\pi) \xrightarrow{\widehat{d}} \mathcal{C}^p\Lambda^p(\pi) \otimes \Lambda_0^1(\pi) \xrightarrow{\widehat{d}} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{\widehat{d}} \mathcal{C}^p\Lambda^p(\pi) \otimes \Lambda_0^1(\pi) \to 0. \quad (2.9)$$

Пусть $\varkappa(\pi) = \mathcal{F}(\pi, \pi)$ — $\mathcal{F}(\pi)$-модуль эволюционных дифференцирований. Каждой форме $\omega \in \mathcal{C}^p\Lambda^p(\pi)$ сопоставим оператор $\nabla_\omega \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi); \mathcal{F}(\pi))$, полагая

$$\nabla_\omega(\chi_1, \ldots, \chi_p) = \vartheta_{\chi_p} \lrcorner (\ldots(\vartheta_{\chi_1} \lrcorner\, \omega)\ldots), \qquad (2.10)$$

где $\chi_i \in \varkappa(\pi)$.

Лемма 2.4. *Соответствие* (2.10) *является изоморфизмом* $\mathcal{F}(\mathcal{E})$*-модулей* $\mathcal{C}^p\Lambda^p(\pi)$ *и* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi); \mathcal{F}(\pi))$.

Доказательство. Построим отображение, обратное к заданному отображению $\omega \mapsto \nabla_\omega$. Пусть $\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}^{\mathrm{alt}}(\varkappa(\pi); \mathcal{F}(\mathcal{E}))$. Каждый вертикальный вектор ξ в точке $\theta \in J^\infty(\pi)$ можно представить в виде $\vartheta_\chi|_\theta$ для некоторого χ (это следует, например, из координатного выражения для ϑ_χ (см. равенство (2.15 гл. 4))). Зададим форму $\omega_\nabla \in \mathcal{C}^p\Lambda^p(\pi)$ условием

$$\omega_\nabla|_\theta(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \nabla(\chi_1, \ldots, \chi_p)(\theta),$$

где $\xi_i = \partial_{\chi_i}|_\theta$. Очевидно, что отображение $\nabla \mapsto \omega_\nabla$ есть требуемое обратное отображение. Остальные детали доказательства мы оставляем читателю в качестве упражнения. $\square$

Таким образом, комплекс (2.9) можно переписать в виде

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa(\pi); \mathcal{F}(\pi)) \xrightarrow{w} \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa(\pi); \Lambda^1_0(\pi)) \xrightarrow{w} \dots$$
$$\dots \xrightarrow{w} \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa(\pi); \Lambda^n_0(\pi)) \to 0. \quad (2.11)$$

Упражнение 2.13. Докажите, что дифференциалу w соответствует дифференциал $\widehat{d}$ в комплексе (2.9).

Когомологии комплекса (2.11) известны из теоремы 2.2. В результате мы приходим к следующему описанию члена E_1 на $J^\infty(\pi)$.

Теорема 2.5. *Пусть π — гладкое локально тривиальное расслоение над гладким многообразием M, $\dim M = n$. Тогда:*

1) $E_1^{0,q}(\pi) = \overline{H}^q(\pi)$ *для всех* $q \geqslant 0$;
2) $E_1^{p,q}(\pi) = 0$ *при* $p > 0$, $q \neq n$;
3) $E_1^{p,n}(\pi) = K_p(\varkappa(\pi))$, $p > 0$.

Поскольку в рассматриваемом случае $\mathcal{C}$-спектральная последовательность сходится к когомологиям де Рама многообразия $J^\infty(\pi)$, теорема 2.5 имеет очевидное следствие.

Следствие 2.6. 1) $E_r^{p,q}(\pi) = 0$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, *если* $p > 0$, $q \neq n$ *или* $p = 0$, $q > n$;
2) $E_1^{0,q}(\pi) = E_\infty^{0,q}(\pi) = H^q(J^\infty(\pi)) = H^q(J^0(\pi))$, $q < n$;
3) $E_2^{p,n}(\pi) = E_\infty^{p,n}(\pi) = H^{p+n}(J^\infty(\pi)) = H^{p+n}(J^0(\pi))$, $p \geqslant 0$.

Упражнение 2.14. Докажите равенство $H^q(J^\infty(\pi)) = H^q(J^0(\pi))$.

Обратимся теперь к дифференциалам $d_1^{p,n}$.

Упражнение 2.15. а. Покажите, что оператор

$$E_1^{0,n}(\pi) = \overline{H}^n(\pi) \xrightarrow{d_1^{0,n}} E_1^{1,n}(\pi) = \widehat{\varkappa}(\pi)$$

задается формулой $d_1^{0,n}([\omega]) = \ell_\omega^*(1)$, где $\omega \in \Lambda_0^n(\pi)$, $[\omega]$ — горизонтальный когомологический класс формы ω. (Выражение ℓ_ω имеет смысл, поскольку ω — горизонтальная n-форма, т. е. нелинейный дифференциальный оператор, действующий из $\Gamma(\pi)$ в $\Lambda^n(M)$.)

б. Записав оператор $d_1^{0,n}$ в координатах, убедитесь, что он совпадает со стандартным оператором Эйлера (т. е. оператором, ставящим в соответствие каждому лагранжиану соответствующее уравнение Эйлера — Лагранжа (см. ниже и п. 4.1)).

Вычислим оператор $d_1^{p,n}$, $p > 0$.

Пусть оператор $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p+1)}(\varkappa(\pi), \Lambda_0^n(\pi))$ определен равенством

$$\square(\chi_1, \ldots, \chi_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathcal{Э}_{\chi_i}(\nabla(\chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \chi_{p+1})) + \\ + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p+1} (-1)^{i+j} \nabla(\{\chi_i, \chi_j\}, \chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \widehat{\chi}_j, \ldots, \chi_{p+1}). \quad (2.12)$$

Упражнение 2.16. Докажите, что если $\nabla \in K_p(\varkappa(\pi))$, то $d_1^{p,n}(\nabla) = \mu_{p+1}(\square)$.

Замечание 2.1. Формула (2.12) следует, разумеется, из стандартной формулы внешнего дифференциала. Необходимо, однако, убедиться, что мы действительно можем воспользоваться этой формулой, не альтернируя оператор ∇.

Из (2.12) получаем

$$\begin{aligned}
\square(\chi_1, \ldots, \chi_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \mathcal{Э}_{\chi_i}(\nabla(\chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \chi_p))(\chi_{p+1}) + \\
+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \nabla(\chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \chi_p, \mathcal{Э}_{\chi_i}(\chi_{p+1})) + \\
+ (-1)^p \mathcal{Э}_{\chi_{p+1}}(\nabla(\chi_1, \ldots, \chi_p)) + \\
+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} \nabla(\{\chi_i, \chi_j\}, \chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \widehat{\chi}_j, \ldots, \chi_{p+1}) + \\
+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+p+1} \nabla(\{\chi_i, \chi_{p+1}\}, \chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \chi_p) = \\
= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \mathcal{Э}_{\chi_i}(\nabla(\chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \chi_p))(\chi_{p+1}) + \\
+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} \nabla(\{\chi_i, \chi_j\}, \chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \widehat{\chi}_j, \ldots, \chi_{p+1}) + \\
+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \nabla(\chi_1, \ldots, \widehat{\chi}_i, \ldots, \chi_p, \ell_{\chi_i}(\chi_{p+1})) + (-1)^p \ell_{\nabla(\chi_1, \ldots, \chi_p)}(\chi_{p+1}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$d_1^{p,n}(\nabla)(\chi_1,\ldots,\chi_p)=\mu_{p+1}(\square)(\chi_1,\ldots,\chi_p)=$$
$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\mathcal{Э}_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\nabla(\{\chi_i,\chi_j\},\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\widehat{\chi}_j,\ldots,\chi_p)+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\ell^*_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p))+(-1)^p\ell^*_{\nabla(\chi_1,\ldots,\chi_p)}(1). \quad (2.13)$$

Используя легко проверяемое равенство

$$\ell^*_{\psi(\varphi)}(1)=\ell^*_\psi(\varphi)+\ell^*_\varphi(\psi), \qquad \varphi\in\varkappa(\pi), \quad \psi\in\widehat{\varkappa}(\pi),$$

(ср. упр. 2.17), преобразуем последнее слагаемое в (2.13) следующим образом:

$$(-1)^p\ell^*_{(\nabla(\chi_1,\ldots,\chi_p))}(1)=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\ell^*_{(\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p,\chi_i))}(1)=$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^i(\ell^*_{\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p)}(\chi_i)+\ell^*_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p))).$$

Наконец, получаем:

$$\left(d_1^{p,n}(\nabla)\right)(\chi_1,\ldots,\chi_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}\mathcal{Э}_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p))+$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\nabla(\{\chi_i,\chi_j\},\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\widehat{\chi}_j,\ldots,\chi_p)+$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i+1}((p-1)\ell^*_{\chi_i}(\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p))-\ell^*_{\nabla(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_p)}(\chi_i)).$$

В частности, при $p=1$ имеем

$$d_1^{1,n}(\psi)(\varphi)=\mathcal{Э}_\varphi(\psi)-\ell^*_\psi(\varphi)=\ell_\psi(\varphi)-\ell^*_\psi(\varphi), \qquad \psi\in\widehat{\varkappa}(\pi), \quad \varphi\in\varkappa(\pi),$$

т. е.

$$d_1^{1,n}(\psi)=\ell_\psi-\ell^*_\psi. \quad (2.14)$$

Заметим, что горизонтальный комплекс де Рама на $J^\infty(\pi)$ можно объединить с комплексом $(E_1^{p,n}(\pi),d_1^{p,n})$ при помощи оператора Е, равного композиции отображений $\Lambda_0^n(\pi) \to \overline{H}^n(\pi)$ и $\overline{H}^n(\pi) \xrightarrow{d_1^{0,n}}$ $\xrightarrow{d_1^{0,n}} E_1^{1,n}(\pi)$, первое из которых — каноническая проекция *). Таким образом, на $J^\infty(\pi)$ определен комплекс:

$$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\widehat{d}} \Lambda_0^1(\pi) \xrightarrow{\widehat{d}} \ldots \xrightarrow{\widehat{d}} \Lambda_0^n \xrightarrow{\mathsf{E}}$$
$$\xrightarrow{\mathsf{E}} E_1^{1,n}(\pi) \xrightarrow{d_1^{1,n}} E_1^{2,n}(\pi) \xrightarrow{d_1^{2,n}} \ldots \qquad (2.15)$$

Когомологии этого комплекса равны $H^i(J^0(\pi))$ (следствие 2.6). Оператор Е (см. упр. 2.15 б)) — это оператор Эйлера. Каждой лагранжевой плотности $\omega \in \Lambda_0^n(\pi)$ он ставит в соответствие уравнение Эйлера — Лагранжа $\mathsf{E}(\omega)$. Таким образом функционал действия

$$s \mapsto \int_M j_\infty(s)^*(\omega), \qquad s \in \Gamma(\pi),$$

стационарен на сечении s тогда и только тогда, когда $j_\infty(s)^*\bigl(\mathsf{E}(\omega)\bigr) = 0$.

Комплекс (2.15) часто называют (глобальным) *вариационным комплексом* расслоения π. Если когомологии пространства $J^0(\pi)$ тривиальны, то этот комплекс точен. Из этого результата сразу вытекает ряд следствий. Приведем три важнейших:

1) $\ker \mathsf{E} = \operatorname{im} \widehat{d}$ («если вариационная производная лагранжиана равна нулю, то он является дивергенцией»);

2) $\widehat{d}\omega = 0$ тогда и только тогда, когда форма ω имеет вид $\omega = \widehat{d}\eta$, $\omega \in \Lambda_0^{n-1}(\pi)$ («все нулевые дивергенции суть полные роторы»);

3) $\ell_\psi = \ell_\psi^*$ тогда и только тогда, когда форма ψ имеет вид $\psi = \mathsf{E}(\omega)$, $\psi \in \widehat{\varkappa}(\pi)$ (это утверждение составляет решение обратной задачи вариационного исчисления).

Упражнение 2.17. Пусть P — горизонтальный модуль и $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_0^n(\pi))$. Докажите, что для любого $p \in P$ выполнено равенство

$$\mathsf{E}(\Delta(p)) = \ell_p^*(\Delta^*(1)) + \ell_{\Delta^*(1)}^*(p).$$

Выведите отсюда, что для всех $\varphi \in \varkappa(\pi)$ и $\omega \in \Lambda_0^n(\pi)$ справедливо соотношение

$$\mathsf{E}(\mathit{Э}_\varphi(\omega)) = \mathit{Э}_\varphi(\mathsf{E}(\omega)) + \ell_\varphi^*(\mathsf{E}(\omega)).$$

*) В дальнейшем оператор $d_1^{0,n}\colon \overline{H}^n(\pi) \to E_1^{1,n}(\pi)$ мы будем также обозначать через Е.

2.6. Член E_1: общий случай. Перейдем теперь к описанию члена $E_1(\mathcal{E})$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности на уравнении $\mathcal{E}^\infty$.

Пусть $I(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$ — идеал уравнения $\mathcal{E}$. Напомним, что если уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ имеет вид $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, где $F \in P_k = \mathcal{F}_k(\pi, \xi)$ для некоторого расслоения ξ: $N_\xi \to M$ над M, и сюрьективно проектируется на M, то

$$I(\mathcal{E}) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\pi))(F),$$

где $P = \mathcal{F}(\pi, \xi)$ (т. е. компоненты вектор-функции F суть дифференциальные образующие идеала $I(\mathcal{E})$). Назовем такие уравнения *регулярными*. Как отмечалось в гл. 4, условие регулярности, разумеется, не обременительно и, как правило, выполняется для уравнений, встречающихся в приложениях.

Для регулярных уравнений модуль $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})$ может быть описан следующим образом. Пусть $\varkappa = \varkappa(\pi)/I(\mathcal{E})\cdot\varkappa(\pi)$ — ограничение модуля $\varkappa(\pi)$ на $\mathcal{E}^\infty$. Рассмотрим в $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$ подмодуль L, состоящий из операторов вида $\square \circ \ell_F^{\mathcal{E}}$, где $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, $\ell_F^{\mathcal{E}} = \ell_F |_{\mathcal{E}^\infty}$. Здесь $P = \mathcal{F}(\mathcal{E}, \xi)$ — ограничение модуля $\mathcal{F}(\pi, \xi)$ на уравнение $\mathcal{E}^\infty$. (Далее мы будем обозначать модули и их ограничения на $\mathcal{E}^\infty$ одной и той же буквой.) Следующие два утверждения являются обобщением леммы 2.4.

Лемма 2.7. *Сопоставим каждой форме $\omega \in \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})$ оператор $\nabla_\omega \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, действующий по формуле*

$$\nabla_\omega(\chi) = \omega(\mathit{Э}_\chi), \qquad \chi \in \varkappa. \tag{2.16}$$

Если $\mathcal{E}$ — регулярное уравнение, то соответствие (2.16) *является изоморфизмом $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модулей $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})$ и $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \mathcal{F}(\mathcal{E}))/L$.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathcal{C}\Lambda^1 = \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, где $\mathcal{C}\Lambda^1$ — ограничение $\mathcal{C}\Lambda^1(\pi)$ на $\mathcal{E}^\infty$. Ядро L' естественной проекции $\mathcal{C}\Lambda^1 \to \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E})$ порождено формами вида $d^v f$, где $f \in I(\mathcal{E})$, а d^v: $\mathcal{F}(\pi) \to \mathcal{C}\Lambda^1$ — композиция дифференциала d: $\mathcal{F}(\pi) \to \Lambda^1(\pi)$ и проекции $\Lambda^1(\pi) \to \mathcal{C}\Lambda^1$. В терминах $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов это означает, что L' порождено операторами вида $\ell_f^{\mathcal{E}}$, где $f \in I(\mathcal{E})$. Поскольку $\mathcal{E}$ регулярно, функцию $f \in I(\mathcal{E})$ можно представить в виде $f = \nabla(F)$, $\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\pi))$. Тем самым $\ell_f^{\mathcal{E}} = \nabla \circ \ell_F^{\mathcal{E}}$ и, следовательно, $L' = L$. $\square$

Упражнение 2.18. Покажите, что

$$\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E}) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa; \mathcal{F}(\mathcal{E}))/L_p,$$

где $L_p = \mathrm{alt}(\mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p-1)}(\varkappa; \mathcal{F}(\mathcal{E})) \otimes L)$ (через alt обозначена операция альтернирования alt: $\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(p)}(\varkappa; \mathcal{F}(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa; \mathcal{F}(\mathcal{E}))$.)

Таким образом, для регулярного уравнения $\mathcal{E}$ имеется точная последовательность $\mathcal{F}(\mathcal{E})$-модулей

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \mathcal{F}(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \to 0.$$

Левая стрелка не является, вообще говоря, вложением, т. е. оператор $\square \circ \ell_F^{\mathcal{E}}$, $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, может быть равен нулю при нетривиальном операторе $\square$. Регулярные уравнения, для которых последовательность

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \mathcal{F}(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \to 0 \tag{2.17}$$

точна, называются *ℓ-нормальными.*

Для того, чтобы выяснить, является ли данное уравнение ℓ-нормальным, полезно следующее утверждение.

Утверждение 2.8. *Пусть $\mathcal{E}$ — регулярное уравнение с n независимыми переменными. Если в каждой координатной окрестности на $\mathcal{E}^\infty$ можно выбрать такое множество «внутренних» координат θ, что функции $D_i(\theta)$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, могут быть выражены через внутренние координаты, то уравнение $\mathcal{E}$ является ℓ-нормальным.*

Доказательство. Очевидно, что локально (возможно, после подходящей замены переменных) рассматриваемое уравнение имеет вид

$$p^{i_r}_{(0,\ldots,0,k_r)} = f_r, \qquad i_r \in A \subset \{1, \ldots, m\}, \quad r = 1, \ldots, l, \quad k_r > 0,$$

где f_r — функции от внутренних координат, причем в качестве последних можно выбрать $x_1, \ldots, x_n$, p^i_σ, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\sigma_n < k_r$, если $i_r = i \in A$. Следовательно, оператор $\ell_F^{\mathcal{E}}$ имеет вид $\ell_F^{\mathcal{E}} = \Delta - \ell_f$, где $f = (f_1, \ldots, f_l)$, $\Delta = \|\Delta_{ij}\|$ — $(l \times m)$-матрица, причем $\Delta_{ri_r} = \bar{D}_n^{k_r}$, $r = 1, \ldots, l$, а остальные компоненты Δ_{ij} тривиальны. Отсюда стандартным образом следует, что если $\square \circ \ell_F^{\mathcal{E}} = 0$, $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \mathcal{F}(\mathcal{E}))$, то $\square = 0$. $\square$

Таким образом, если рассматриваемое уравнение не переопределено, т. е. число уравнений не больше числа неизвестных ($l \leqslant m$), оно в большинстве случаев оно будет ℓ-нормальным. Приведем, тем не менее, пример определенного, но не ℓ-нормального уравнения.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} p_2^3 - p_3^2 + u^2 p_4^3 - u^3 p_4^2 = 0, \\ p_3^1 - p_1^3 + u^3 p_4^1 - u^1 p_4^3 = 0, \\ p_1^2 - p_2^1 + u^1 p_4^2 - u^2 p_4^1 = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Система (2.18) представляет собой условие интегрируемости трехмерного распределения в четырехмерном пространстве с координатами (x_1, x_2, x_3, x_4), задаваемого формой $\omega = dx_4 - \sum_{i=1}^{3} u^i\, dx_i$.

Упражнение 2.19. Найдите оператор $\square$, для которого выполняется условие $\square \circ \ell_F^{\mathcal{E}} = 0$, где F — левая часть (2.18). (*Ответ*: $\square = (\bar{D}_1 + u^1\bar{D}_4 - p_4^1, \bar{D}_2 + u^2\bar{D}_4 - p_4^2, \bar{D}_3 + u^3\bar{D}_4 - p_4^3)$).

Замечание 2.2. Примерами уравнений, не являющихся ℓ-нормальными, являются уравнения Максвелла, Янга — Миллса и Эйнштейна. Неформально это можно пояснить следующим образом. Все эти уравнения симметричны относительно некоторой псевдогруппы, т. е. существует такой нетривиальный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $R\colon Q \to \varkappa$, где Q — некоторый горизонтальный модуль, что $\bar{\ell}_F \circ R = 0$. Отсюда получаем, что имеет место равенство $R^* \circ \bar{\ell}_F^* = 0$ и, поскольку рассматриваемые уравнения являются уравнениями Эйлера — Лагранжа (т. е. $\bar{\ell}_F^* = \bar{\ell}_F$), имеем $R^* \circ \bar{\ell}_F = 0$. Таким образом, оператор R^* нарушает условие ℓ-нормальности.

Несмотря на эти примеры, существенно подчеркнуть, что ℓ-нормальные уравнения — это наиболее важный класс непереопределенных уравнений, охватывающий подавляющее большинство уравнений, встречающихся в приложениях.

Начиная с этого момента, мы рассматриваем только ℓ-нормальные уравнения*). Для такого уравнения $\mathcal{E}$ последовательность (2.17) точна и, следовательно, имеется точная последовательность комплексов

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_0^q(\mathcal{E})) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \Lambda_0^q(\mathcal{E})) \to \Lambda_0^q(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \to 0.$$

Умножим каждый из этих комплексов на $\mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E})$ (см. упр. 2.12):

$$0 \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_0^q(\mathcal{E})) \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \Lambda_0^q(\mathcal{E})) \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \\ \to \Lambda_0^q(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \to 0. \quad (2.19)$$

Из точной когомологической последовательности для (2.19) и теоремы 2.3 получаем следующее утверждение.

Утверждение 2.9. *Пусть $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное уравнение. Тогда когомологии комплекса*

$$0 \to \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \to \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda_0^1(\mathcal{E}) \to \ldots \\ \ldots \to \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \otimes \Lambda_0^n(\mathcal{E}) \to 0 \quad (2.20)$$

*) Более подробный анализ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности, чем тот, что мы предприняли в этой книге, позволяет вычислять законы сохранения и для уравнений, не являющихся ℓ-нормальными (см. [148, 146]).

тривиальны во всех размерностях, отличных от $n-1$ и n. Группы когомологий в размерностях $n-1$ и n изоморфны соответственно ядру и коядру оператора

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{\mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E})} \colon \widehat{P}\otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \to \widehat{\varkappa}\otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}).$$

Упражнение 2.20. Пусть $\nabla_\omega \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p)}(\varkappa; P)$ — оператор, соответствующий P-значной форме $\omega \in \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes P$ (см. лемму 2.7). Покажите, что если $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_1, P_2)$, то оператор

$$\Delta_{\mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})}\colon \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes P_1 \to \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E})\otimes P_2$$

переводит ∇_ω в $\Delta\circ\nabla_\omega$.

Комплекс

$$0\to \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E}) \to \Lambda^1_0(\mathcal{E})\otimes \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E}) \to \ldots \to \Lambda^n_0(\mathcal{E})\otimes \mathcal{C}^p\Lambda^p(\mathcal{E}) \to 0$$

является, очевидно, прямым слагаемым в комплексе (2.20). Поэтому его когомологии тривиальны во всех размерностях, отличных от $n-1$ и n. Группы когомологий в размерностях $n-1$ и n изоморфны соответственно антисимметрическим частям ядра и коядра оператора $\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)}$.

Упражнение 2.21. Если $\omega \in \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)} \subset \widehat{P}\otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E})$, то, как следует из предыдущего упражнения, соответствующий оператор $\nabla_\omega \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p-1)}(\varkappa; \widehat{P})$ удовлетворяет соотношению

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* (\nabla_\omega(\chi_1,\ldots,\chi_{p-1})) = \sum_{i=1}^{p-1} \Delta_i(\chi_1,\ldots,\widehat{\chi}_i,\ldots,\chi_{p-1})(\ell_F^{\mathcal{E}}(\chi_i))$$

для некоторых операторов $\Delta_i \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p-2)}(\varkappa; \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,\widehat{\varkappa}))$. Докажите, что ω принадлежит антисимметрической части $\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)}$ тогда и только тогда, когда

$$\nabla_\omega = (-1)^{p-i}\Delta_i^* \mod L_{p-1}\otimes \widehat{P}, \qquad 1\leqslant i\leqslant p-1,$$

где * означает сопряжение по последнему аргументу (т. е. по P), а L_{p-1} — модуль, определенный в упр. 2.18.

Упражнение 2.22. Покажите, что $\omega \in \operatorname{coker}\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)} \subset \widehat{\varkappa}\otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E})$ лежит в кососимметрической части $\operatorname{coker}\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)}$

тогда и только тогда, когда оператор $\nabla_\omega \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}^{\mathrm{alt}}_{(p-1)}(\varkappa; \widehat{\varkappa})$, отвечающий ω, удовлетворяет условию

$$\nabla_\omega = -\nabla_\omega^{*_i} \mod L_{p-1} \otimes \widehat{\varkappa}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant p-1,$$

(символ ^{*_i} означает сопряжение по i-му аргументу).

Упражнение 2.23. а. Покажите, что оператор

$$d_1^{0,n-1}\colon\ E_1^{0,n-1}(\mathcal{E}) = \overline{H}^{n-1}(\mathcal{E}) \to E_1^{1,n-1}(\mathcal{E}) = \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* \subset \widehat{P}$$

имеет вид

$$d_1^{0,n-1}(h) = \square^*(1),$$

где $h = [\omega] \in \overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})$, $\omega \in \Lambda_0^{n-1}(\mathcal{E})$ и $\square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \Lambda_0^n(\mathcal{E}))$ — некоторый оператор, удовлетворяющий условию $\widehat{d}\omega = \square(F)$.

б. Убедитесь, что член $E_1^{2,n-1}(\mathcal{E})$ можно описать как фактормножество

$$\{\nabla \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa, \widehat{P}) \mid \left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* \circ \nabla = \nabla^* \circ \ell_F^{\mathcal{E}}\}/\theta,$$

где $\theta = \{\square \circ \ell_F^{\mathcal{E}} \mid \square \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \widehat{P}), \quad \square^* = \square\}$.

в. Покажите, что оператор $d_1^{1,n-1}\colon\ E_1^{1,n-1}(\mathcal{E}) = \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* \to$ $\to E_1^{2,n-1}(\mathcal{E})$ имеет вид

$$d_1^{1,n-1}(\psi) = (\ell_\psi^{\mathcal{E}} + \Delta^*) \mod \theta,$$

где $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, \widehat{\varkappa})$ — некоторый оператор, удовлетворяющий условию $\ell_F^*(\psi) = \Delta(F)$.

г. Опишите операторы $d_1^{p,n}$ и $d_1^{p,n-1}$ для всех $p \geqslant 0$.

Собирая вместе все сказанное выше, мы приходим к следующему описанию члена $E_1(\mathcal{E})$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности.

Теорема о двух строчках. *Пусть $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное уравнение. Тогда*

1) *$E_1^{p,q}(\mathcal{E}) = 0$ если $p \geqslant 1$, $q \neq n-1, n$;*

2) *$E_1^{p,n-1}(\mathcal{E})$ (соответственно, $E_1^{p,n}(\mathcal{E})$) совпадает с антисимметрической частью ядра (соответственно, коядра) оператора*

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*_{(p-1)}\colon\ \widehat{P} \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}) \to \widehat{\varkappa} \otimes \mathcal{C}^{p-1}\Lambda^{p-1}(\mathcal{E}).$$

Эта теорема имеет очевидное следствие.

Следствие 2.10. *Группы $E_r^{p,q}(\mathcal{E})$ $\mathcal{C}$-спектральной последовательности удовлетворяют следующим условиям:*

1) $E_r^{p,q}(\mathcal{E})=0$ *если* $p\geqslant 1$, $q\neq n-1, n$, $1\leqslant r\leqslant\infty$;
2) $E_3^{p,q}(\mathcal{E})=E_\infty^{p,q}(\mathcal{E})$;
3) $E_1^{0,q}(\mathcal{E})=E_\infty^{0,q}(\mathcal{E})=H^q(\mathcal{E}^\infty)$, $q\leqslant n-2$;
4) $E_2^{0,n-1}(\mathcal{E})=E_\infty^{0,n-1}(\mathcal{E})=H^{n-1}(\mathcal{E}^\infty)$;
5) $E_2^{1,n-1}(\mathcal{E})=E_\infty^{1,n-1}(\mathcal{E})$.

2.7. Законы сохранения и производящие функции. Применим теперь результаты предыдущего пункта к вычислению законов сохранения ℓ-нормального уравнения $\mathcal{E}$.

Прежде всего отметим, что для формально интегрируемого уравнения $\mathcal{E}$ проекции $\mathcal{E}^{(k+1)}\to\mathcal{E}^{(k)}$ являются аффинными расслоениями, поэтому $\mathcal{E}^{(k+1)}$ и $\mathcal{E}^{(k)}$ имеют одинаковый гомотопический тип. Следовательно $H^*(\mathcal{E}^\infty)=H^*(\mathcal{E})$.

Далее, из теоремы о двух строчках вытекает существование следующей точной последовательности:

$$0\to H^{n-1}(\mathcal{E})\to \overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})\xrightarrow{d_1^{0,n-1}}\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*.$$

Напомним, что группа $\overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ — это группа законов сохранения уравнения $\mathcal{E}$ (см. определение 2.1). Законы сохранения $\omega\in H^{n-1}(\mathcal{E})\subset\overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ называются *топологическими*, поскольку они определяются только топологией уравнения $\mathcal{E}$. В частности, соответствующие сохраняющиеся величины не меняются при непрерывной деформации решений уравнения $\mathcal{E}$. Поэтому топологические законы сохранения *) для нас здесь не очень интересны, и мы рассмотрим факторгруппу $\mathrm{cl}(\mathcal{E})=\overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})/H^{n-1}(\mathcal{E})$, элементы которой называются *собственными* законами сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Из теоремы о двух строчках непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2.11. *Если уравнение $\mathcal{E}$ является ℓ-нормальным, то*

$$\mathrm{cl}(\mathcal{E})\subset\ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*.$$

Если, кроме того, $H^n(\mathcal{E})\subset\overline{H}^n(\mathcal{E})$ (например, $H^n(\mathcal{E})=0$), то

$$\mathrm{cl}(\mathcal{E})=\ker d_1^{1,n-1}.$$

---

*) О них можно прочитать, например, в книге [75].

Элемент $\psi \in \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$, отвечающий закону сохранения $[\omega] \in \operatorname{cl}(\mathcal{E})$, называется его *производящей функцией*.

Теорема 2.11 дает эффективное описание группы (собственных) законов сохранения $\operatorname{cl}(\mathcal{E})$. Мы проиллюстрируем ее применение в § 3.

Упражнение 2.24. Покажите, что производящую функцию любого закона сохранения можно продолжить на все пространство $J^\infty(\pi)$ таким образом, что выполнено равенство

$$l_F^*(\psi) + l_\psi^*(F) = 0. \tag{2.21}$$

Докажите, что

а) равенство (2.21) выполнено тождественно, если $\psi = \square(F)$ и $\square = -\square^*$;

б) решения (2.21) вида $\psi = \square(F)$ для некоторого оператора $\square$, $\square = \square^*$, соответствуют топологическим законам сохранения;

в) двум топологическим законам сохранения соответствует одно и то же решение, описанное в б), в том и только том случае, если они отличаются на элемент из образа естественного отображения $H^{n-1}(J^\infty(\pi)) = \bar{H}^{n-1}(\pi) \to \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$.

Отметим еще один важный факт. Пусть $\varphi \in \ker \ell_F^{\mathcal{E}}$ — симметрия, а $[\omega] \in \bar{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ — закон сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Тогда $\left[Э_\varphi(\omega)\right]$ по очевидным соображениям опять будет законом сохранения для $\mathcal{E}$.

Упражнение 2.25. Докажите, что если $\psi \in \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$ — производящая функция закона сохранения $[\omega]$ некоторого ℓ-нормального уравнения $\mathcal{E}$, то производящая функция закона сохранения $\left[Э_\varphi(\omega)\right]$ имеет вид $Э_\varphi(\psi) + \Delta^*(\psi)$, где $\Delta \in \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P, P)$ определяется условием $Э_\varphi(F) = \Delta(F)$.

2.8. Уравнения Эйлера — Лагранжа. Рассмотрим некоторое уравнение Эйлера — Лагранжа $\mathcal{E} = \{\mathrm{E}(\mathcal{L}) = 0\}$, отвечающее лагранжиану $\mathcal{L} = [\omega] \in \bar{H}^n(\pi)$. Пусть $\varphi \in \varkappa(\pi)$ — нётерова симметрия лагранжиана $\mathcal{L}$, т. е. $Э_\varphi(\mathcal{L}) = 0$.

Упражнение 2.26. Убедитесь, что нётерова симметрия лагранжиана $\mathcal{L}$ является также симметрией уравнения Эйлера — Лагранжа $\mathcal{E}$, т. е. $\operatorname{sym}\mathcal{L} \subset \operatorname{sym}\mathcal{E}$.

Упражнение 2.27. Покажите, что если $E_2^{0,n}(\mathcal{E}) = 0$, то нахождение нётеровых симметрий лагранжиана $\mathcal{L} = [\omega]$ сводится к решению уравнения $\mathrm{E}(\ell_\omega(\varphi)) = 0$.

Пусть $Э_\varphi(\omega)=\widehat{d}\nu$, где $\nu\in\Lambda_0^{n-1}(\pi)$. При помощи (2.5) получаем

$$Э_\varphi(\omega)-\widehat{d}\nu=\ell_\omega(\varphi)-\widehat{d}\nu=\ell_\omega^*(1)(\varphi)+\widehat{d}\omega_{\varphi,1}(\ell_\omega)-\widehat{d}\nu=$$
$$=\mathsf{E}(\mathcal{L})(\varphi)+\widehat{d}(\omega_{\varphi,1}(\ell_\omega)-\nu)=0.$$

Положим
$$\eta=(\omega_{\varphi,1}(\ell_\omega)-\nu)|_{\mathcal{E}^\infty}\in\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{E}).$$

Таким образом, $\widehat{d}\eta|_{\mathcal{E}^\infty}=0$, т. е. форма η определяет закон сохранения $[\eta]\in\overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})$ уравнения $\mathcal{E}$. Отображение

$$\operatorname{sym}\mathcal{L}\to\overline{H}^{n-1}(\mathcal{E}),\qquad \varphi\mapsto[\eta],$$

называется *отображением Нётер*.

Упражнение 2.28. Проверьте, что отображение Нётер определено однозначно с точностью до образа естественного гомоморфизма $H^{n-1}(J^\infty(\pi))=\overline{H}^{n-1}(\pi)\to\overline{H}^{n-1}(\mathcal{E})$.

Замечание 2.3. Как видно из конструкции отображения Нётер, оно определено для любого, необязательно ℓ-нормального уравнения Эйлера — Лагранжа.

Упражнение 2.29. Докажите, что для ℓ-нормального уравнения Эйлера — Лагранжа $\mathcal{E}$ выполнено равенство

$$d_1^{0,n-1}([\eta])=\varphi, \tag{2.22}$$

т. е. отображение $d_1^{0,n-1}$ является обратным к отображению Нётер.

Замечание 2.4. Отображение Нётер можно понимать как нахождение сохраняющегося тока, отвечающего данной производящей функции закона сохранения.

Упражнение 2.30. Используя предыдущее упражнение, покажите, что если $F=0$ — уравнение Эйлера — Лагранжа, то $Э_\varphi$ является нётеровой симметрией его лагранжиана тогда и только тогда, когда $Э_\varphi(F)+\ell_\varphi^*(F)=0$.

2.9. Гамильтонов формализм на $J^\infty(\pi)$. В заключение остановимся на гамильтоновом формализме на $J^\infty(\pi)$.

Пусть $A\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\widehat{\varkappa}(\pi),\varkappa(\pi))$ — некоторый $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Определим скобку Пуассона на $\overline{H}^n(\pi)$, соответствующую оператору A, формулой

$$\{\omega_1,\omega_2\}_A=\langle A(\mathsf{E}(\omega_1)),\mathsf{E}(\omega_2)\rangle,$$

где $\langle\,,\,\rangle$ — естественное спаривание $\varkappa(\pi)\times\widehat{\varkappa}(\pi)\to\overline{H}^n(\pi)$.

Упражнение 2.31. а. Пусть $A\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\widehat{\varkappa}(\pi),P)$, где P — произвольный $\mathcal{F}(\pi)$-модуль. Докажите, что если $A\circ\mathsf{E}=0$, то $A=0$.

б. Пусть $A\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}_{(l)}(\widehat{\varkappa}(\pi),\Lambda_0^n(\pi))$. Докажите, что если для любых $\omega_1,\ldots,\omega_l\in\overline{H}^n(\pi)$ элемент $A(\mathsf{E}(\omega_1),\ldots,\mathsf{E}(\omega_l))$ принадлежит образу оператора $\widehat{d}$, то $\operatorname{im}A\subset\operatorname{im}\widehat{d}$, т. е. $\mu_l(A)=0$ (см. упр. 2.5 и 2.10). В частности, если для любого элемента $\omega\in\overline{H}^n(\pi)$ имеет место равенство $\mathcal{Э}_\varphi(\omega)=\langle\varphi,\mathsf{E}(\omega)\rangle=0$, $\varphi\in\varkappa(\pi)$, то $\varphi=0$. Отметим, что равенство $\mathcal{Э}_\varphi(\omega)=\langle\varphi,\mathsf{E}(\omega)\rangle$ вытекает из соотношений

$$\langle\varphi,\mathsf{E}(\omega)\rangle=\langle\varphi,\ell_\omega^*(1)\rangle=\langle\ell_\omega(\varphi),1\rangle=\langle\mathcal{Э}_\varphi(\omega),1\rangle.$$

в. С помощью пп. а. и б. убедитесь, что если для любых ω_1,ω_2 их скобка $\{\omega_1,\omega_2\}_A$ тривиальна, то $A=0$.

Оператор A называется *гамильтоновым*, если его скобка Пуассона задает на $\overline{H}^n(\pi)$ структуру $\mathbb{R}$-алгебры Ли, т. е. если

$$\{\omega_1,\omega_2\}_A=-\{\omega_2,\omega_1\}_A, \tag{2.23}$$
$$\{\{\omega_1,\omega_2\}_A,\omega_3\}_A+\{\{\omega_2,\omega_3\}_A,\omega_1\}_A+\{\{\omega_3,\omega_1\}_A,\omega_2\}_A=0. \tag{2.24}$$

Скобка $\{\,,\,\}_A$ называется *гамильтоновой структурой*.

Упражнение 2.32. Докажите, что скобка Пуассона, отвечающая оператору A, кососимметрична, т. е. условие (2.23) выполнено тогда и только тогда, когда оператор A кососопряжен (т. е. $A^*=-A$).

Теперь мы сформулируем критерии, позволяющие определить, является ли кососопряженный оператор $A\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\widehat{\varkappa}(\pi),\varkappa(\pi))$ гамильтоновым. Для этого заметим следующее. Пусть $P=\mathcal{F}(\pi,\xi)$, $P'=\mathcal{F}(\pi,\xi')$ — горизонтальные модули и $\Delta\colon P\to P'$ — $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Пусть $D_\sigma=D_1^{\sigma_1}\circ\ldots\circ D_n^{\sigma_n}$. Тогда для любого сечения $s\in\Gamma(\pi)$ имеет место равенство $j_\infty(s)^*(D_\sigma f)=\dfrac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_\sigma}(j_\infty(s)^*f)$ (см. гл. 4). Поэтому Δ можно рассматривать как нелинейный дифференциальный оператор, действующий из сечений расслоения π, значения которого суть линейные дифференциальные операторы $\Gamma(\xi)\to\to\Gamma(\xi')$. Универсальная линеаризация этого оператора, которую мы обозначим через ℓ_Δ, есть элемент модуля $\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P,P'))=\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa,P;P')$. Для произвольного $\mathcal{C}$-дифференциального оператора $A\colon\widehat{\varkappa}(\pi)\to\varkappa(\pi)$ и $\psi\in\widehat{\varkappa}(\pi)$ определим $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\ell_{A,\psi}\colon\varkappa(\pi)\to\varkappa(\pi)$, полагая

$$\ell_{A,\psi}(\varphi)=(\ell_A(\varphi))(\psi).$$

Упражнение 2.33. Докажите, что

$$\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2)=\ell^*_{A^*,\psi_2}(\psi_1).$$

Теорема 2.12. *Пусть* $A\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\widehat{\varkappa}(\pi),\varkappa(\pi))$ — *кососопряженный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A — *гамильтонов оператор;*

2) *равенство*

$$\langle\ell_A(A(\psi_1))(\psi_2),\psi_3\rangle+\langle\ell_A(A(\psi_2))(\psi_3),\psi_1\rangle+\langle\ell_A(A(\psi_3))(\psi_1),\psi_2\rangle=0$$

выполнено для любых элементов $\psi_1,\psi_2,\psi_3\in\widehat{\varkappa}(\pi)$;

3) *равенство* $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2))-\ell_{A,\psi_2}(A(\psi_1))=A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1))$ *выполнено для любых элементов* $\psi_1,\psi_2\in\widehat{\varkappa}(\pi)$;

4) *выражение* $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2))+\dfrac{1}{2}A(\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2))$ *симметрично относительно* $\psi_1,\psi_2\in\widehat{\varkappa}(\pi)$;

5) *для любого элемента* $\psi\in\widehat{\varkappa}(\pi)$ *имеет место равенство* *)

$$[\mathcal{Э}_{A(\psi)},A]=\ell_{A(\psi)}\circ A+A\circ\ell^*_{A(\psi)}.$$

При этом условия 2)–5) *достаточно проверять на элементах* $\psi_i\in\operatorname{im}\mathsf{E}$.

Доказательство. Пусть $\omega_1,\omega_2,\omega_3\in\overline{H}^n(\pi)$ и $\psi_i=\mathsf{E}(\omega_i)$. Тождество Якоби (2.24) имеет вид

$$\begin{aligned}\{\{\omega_1,\omega_2\}_A,\omega_3\}_A+(\text{цикл.})&=-\mathcal{Э}_{A(\psi_3)}\langle A(\psi_1),\psi_2\rangle+(\text{цикл.})=\\&=-\langle\mathcal{Э}_{A(\psi_3)}(A)(\psi_1),\psi_2\rangle-\langle A(\ell_{\psi_1}(A(\psi_3))),\psi_2\rangle-\\&\qquad-\langle A(\psi_1),\ell_{\psi_2}(A(\psi_3))\rangle+(\text{цикл.})=\\&=-\langle\ell_A(A(\psi_3))(\psi_1),\psi_2\rangle+\langle A(\psi_2),\ell_{\psi_1}(A(\psi_3))\rangle-\\&\qquad-\langle A(\psi_1),\ell_{\psi_2}(A(\psi_3))\rangle+(\text{цикл.})=\\&=-\langle\ell_A(A(\psi_3))(\psi_1),\psi_2\rangle+(\text{цикл.})=0,\end{aligned}\tag{2.25}$$

где (цикл.) обозначает слагаемые, получаемые циклической перестановкой индексов. Из упр. 2.31 следует, что равенство (2.25) выполняется для любых элементов $\psi_i\in\widehat{\varkappa}(\pi)$. Критерий 2) доказан.

---

*) Пусть $P=\mathcal{F}(\pi,\xi)$, $P'=\mathcal{F}(\pi,\xi')$ — два горизонтальных модуля и $F\colon P\to P'$ — некоторое отображение. Тогда для любого $\varphi\in\mathcal{F}(\pi,\pi)$ определен коммутатор $[\mathcal{Э}_\varphi,F]\overset{\text{def}}{=}\mathcal{Э}^{\xi'}_\varphi\circ F-F\circ\mathcal{Э}^{\xi}_\varphi$, поскольку всякое поле $\mathcal{Э}_\varphi$ определяет семейство дифференцирований $\mathcal{Э}^{\xi}_\varphi\colon\mathcal{F}(\pi,\xi)\to\mathcal{F}(\pi,\xi)$ (см. гл. 4).

Перепишем теперь тождество Якоби в виде

$$\langle \ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)), \psi_3\rangle + \langle A(\psi_1), \ell^*_{A,\psi_3}(\psi_2)\rangle - \langle A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1)), \psi_3\rangle = 0.$$

Используя упр. 2.33, получаем

$$\langle \ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)), \psi_3\rangle - \langle \ell_{A,\psi_2}(A(\psi_1)), \psi_3\rangle - \langle A\left(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1)\right), \psi_3\rangle = 0,$$

откуда, ввиду упр. 2.31, следует критерий 3).

Эквивалентность критериев 3) и 4) вытекает из упр. 2.33.

Критерий 5) эквивалентен критерию 3) в силу очевидных равенств

$$[\mathcal{Э}_{A(\psi_2)}, A](\psi_1) = \ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)),$$
$$\ell_{A,\psi} \circ A = \ell_{A(\psi)} \circ A - A \circ \ell_\psi \circ A.$$

Теорема доказана. □

Пусть $A\colon \hat{\varkappa}(\pi) \to \varkappa(\pi)$ — гамильтонов оператор. Для каждого $\omega \in \overline{H}^n(\pi)$ эволюционное дифференцирование $X_\omega = \mathcal{Э}_{A(\mathsf{E}(\omega))}$ называется *гамильтоновым* векторным полем, отвечающим гамильтониану ω. Очевидно, что

$$X_{\omega_1}(\omega_2) = \langle A\mathsf{E}(\omega_1), \mathsf{E}(\omega_2)\rangle = \{\omega_1, \omega_2\}_A.$$

Отсюда вытекает, что

$$X_{\{\omega_1,\omega_2\}_A} = \{\{\omega_1, \omega_2\}_A, \omega\}_A = \{\omega_1, \{\omega_2, \omega\}_A\}_A - \{\omega_2, \{\omega_1, \omega\}_A\}_A =$$
$$= (X_{\omega_1} \circ X_{\omega_2} - X_{\omega_2} \circ X_{\omega_1})(\omega) = [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}](\omega)$$

для всех $\omega \in \overline{H}^n(\pi)$, следовательно,

$$X_{\omega_1}(\omega_2) = [X_{\omega_1}, X_{\omega_2}]. \tag{2.26}$$

Как и в конечномерном гамильтоновом формализме, из равенства (2.26) следует результат, аналогичный теореме Нётер.

Для каждого $\mathcal{H} \in \overline{H}^n(\pi)$ эволюционное уравнение

$$u_t = A(\mathsf{E}(\mathcal{H})), \tag{2.27}$$

отвечающее гамильтонову полю с гамильтонианом $\mathcal{H}$, назовем *гамильтоновым* эволюционным уравнением.

Теорема 2.13. *Гамильтонов оператор A отображает производящие функции законов сохранения уравнения* (2.27) *в симметрии этого уравнения.*

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{\omega}_0(t)+\widetilde{\omega}_1(t)\wedge dt\in\Lambda_0^n(\pi)\oplus\Lambda_0^{n-1}(\pi)\wedge dt$$

— сохраняющийся ток для уравнения (2.27). Это означает, что $\bar{D}_t(\omega_0(t))=0$, где $\omega_0(t)\in\bar{H}^n(\pi)$ — горизонтальный когомологический класс, отвечающий форме $\widetilde{\omega}_0(t)$, а $\bar{D}_t$ — ограниченная на уравнение полная производная по t. Далее,

$$\bar{D}_t(\omega_0)=\frac{\partial\omega_0}{\partial t}+\mathcal{Э}_{A(\mathrm{E}(\mathcal{H}))}(\omega_0)=\frac{\partial\omega_0}{\partial t}+\{\mathcal{H},\omega_0\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}X_{\omega_0}+[X_{\mathcal{H}},X_{\omega_0}]=0.$$

Следовательно, поле $X_{\omega_0}=\mathcal{Э}_{A(\mathrm{E}(\omega_0))}$ — симметрия уравнения (2.27). Остается заметить, что $\mathrm{E}(\omega_0)$ — производящая функция рассматриваемого закона сохранения (ср. упр. 3.2). Теорема доказана. □

Упражнение 2.34. а. Кососопряженный оператор

$$B\in E_1^{2,n}(\pi)\subset\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa(\pi),\widehat{\varkappa}(\pi))$$

называется *симплектическим*, если $d_1^{2,n}(B)=0$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

1) B — симплектический оператор,

2) равенство

$$\langle\ell_B(\varphi_1)(\varphi_2),\varphi_3\rangle+\langle\ell_B(\varphi_2)(\varphi_3),\varphi_1\rangle+\langle\ell_B(\varphi_3)(\varphi_1),\varphi_2\rangle=0$$

выполнено для всех $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in\varkappa(\pi)$;

3) равенство $\ell_{B,\varphi_1}(\varphi_2)-\ell_{B,\varphi_2}(\varphi_1)=\ell^*_{B,\varphi_1}(\varphi_2)$ имеет место для любых $\varphi_1,\varphi_2,\in\varkappa(\pi)$;

4) выражение $\ell_{B,\varphi_1}(\varphi)-\dfrac{1}{2}\ell^*_{B,\varphi_1}(\varphi_2)$ симметрично по $\varphi_1,\varphi_2,\in\varkappa(\pi)$;

5) $\ell_B(\varphi)=\ell_{B,\varphi}-\ell^*_{B,\varphi}$, где, как и выше, оператор $\ell_{B,\varphi_1}\in\in\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa(\pi),\widehat{\varkappa}(\pi))$, $\varphi\in\varkappa(\pi)$, определяется равенством $\ell_{B,\varphi_1}(\varphi_2)==\ell_B(\varphi_2)(\varphi_1)$.

б. Эволюционное уравнение $u_t=\varphi$, $\varphi\in\varkappa(\pi)$, называется *гамильтоновым* (относительно симплектического оператора B), если $B(\varphi)=\mathrm{E}(\mathcal{H})$ для некоторого гамильтониана $\mathcal{H}\in\Lambda_0^n(\pi)$. Выясните, как связаны симметрии и законы сохранения такого гамильтонова уравнения.

§ 3. Вычисление законов сохранения

В этом параграфе мы рассматриваем теорию $\mathcal{C}$-спектральной последовательности с точки зрения приложений. Прежде всего мы описываем процедуру нахождения законов сохранения, основанную на теореме 2.11. Использование аппарата производящих функций позволяет, во-первых, эффективно описывать законы сохранения, т. е. сохраняющиеся токи по модулю тривиальных, и, во-вторых, находить *все* законы сохранения рассматриваемого уравнения. Далее приводятся некоторые конкретные результаты, иллюстрирующие технику вычисления законов сохранения.

3.1. Общие сведения. В этом пункте мы формулируем основные результаты, касающиеся производящих функций законов сохранения, в координатной форме, удобной для конкретных вычислений. Этот материал можно читать независимо от § 2.

Пусть $S=(S_1,\ldots,S_n)$ — сохраняющийся ток для уравнения $\mathcal{E}=\{F=0\}$ с n независимыми и m зависимыми переменными. Тогда равенство (1.4), выполняющееся на $\mathcal{E}^\infty$, эквивалентно равенству

$$\sum_{i=1}^{n} D_i(S_i)=\sum_{j=1}^{l}\square_j(F_j), \tag{3.1}$$

где l — число уравнений, $\square_j=\sum\limits_\sigma a_\sigma^j D_\sigma$ — скалярные дифференциальные операторы, $F=(F_1,\ldots,F_l)$.

Напомним, что операторы вида $\sum\limits_\sigma a_\sigma D_\sigma$ называются $\mathcal{C}$-дифференциальными или горизонтальными, и что если $\Delta=\sum\limits_\sigma a_\sigma D_\sigma$ — скалярный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, то $\Delta^*=\sum\limits_\sigma(-1)^{|\sigma|}D_\sigma\circ a_\sigma$ — *(формально) сопряженный с Δ оператор*. Если $\Delta=\|\Delta_{ij}\|$ — матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, то $\Delta^*=\|\Delta^*_{ji}\|$.

Имеет место следующий фундаментальный факт (см. теорему 2.11).

Теорема 3.1. *Пусть $\square_1,\ldots,\square_l$ — операторы, удовлетворяющие равенству* (3.1). *Тогда ограничение $\psi=(\square_1^*(1),\ldots,\square_l^*(1))|_{\mathcal{E}^\infty}$ вектор-функции $(\square_1^*(1),\ldots,\square_l^*(1))$ на уравнение $\mathcal{E}^\infty$ удовлетворяет уравнению*

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*(\psi)=0.$$

Заметим, что вектор-функция ψ неоднозначно определяется по сохраняющемуся току S.

Упражнение 3.1. Убедитесь, что такая неоднозначность имеет место для уравнения (2.18).

Если для рассматриваемого уравнения вектор-функция ψ определяется по сохраняющемуся току однозначно, то она, очевидно, не меняется при добавлении к S тривиального тока. Таким образом, ψ одинакова для всех эквивалентных сохраняющихся токов, и поэтому характеризует соответствующий закон сохранения. Такая вектор-функция ψ называется *производящей функцией* закона сохранения.

Упражнение 3.2. Докажите, что для эволюционных уравнений

$$u_t = f(x, u, u_x, u_{xx}, \ldots)$$

производящая функция, соответствующая сохраняющемуся току $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, где S_0 — t-компонента, имеет вид $\psi = \ell^*_{S_0}(1)$, т. е. ψ — левая часть уравнений Эйлера — Лагранжа, отвечающих лагранжиану S_0, если последний понимать как функцию только переменных $x, u, u_x, u_{xx}, \ldots$

Важнейший класс уравнений, для которых каждому закону сохранения однозначно соответствует производящая функция, составляют регулярные и определенные ($l = m$) уравнения. Такие уравнения называются *ℓ-нормальными уравнениями* (см. п. 2.6). Почти все встречающиеся на практике уравнения ℓ-нормальны.

Выясним, насколько однозначно определяется закон сохранения своей производящей функцией. Если рассматриваемое уравнение $\mathcal{E}$ является ℓ-нормальным, то любой класс когомологий де Рама $\xi \in H^{n-1}(\mathcal{E})$ может быть проинтерпретирован как закон сохранения уравнения $\mathcal{E}$. Такие *топологические* законы сохранения, разумеется, малоинтересны (см., однако, [75]), поскольку они постоянны на всех решениях, получающихся друг из друга непрерывной деформацией. Из результатов п. 2.7 следует следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{E}$ — ℓ-нормальное уравнение. Два закона сохранения уравнения $\mathcal{E}$ имеют одну и ту же производящую функцию тогда и только тогда, когда они отличаются на топологический закон сохранения.*

Факторгруппа всех законов сохранения по топологическим называется группой *собственных законов сохранения*.

Таким образом, для ℓ-нормальных уравнений вопрос о нахождении собственных законов сохранения эквивалентен вопросу о вычислении их производящих функций, т. е. о решении уравнения

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* (\psi) = 0. \tag{3.2}$$

Однако не всякое решение (3.2) является производящей функцией некоторого закона сохранения. Процедура «отбраковки» ненужных решений состоит в следующем.

Пусть ψ — решение уравнения (3.2). Это означает, что $\ell_F^*(\psi) = \Delta(F)$, где Δ — некоторый матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор размерности $m \times l$. Если существует такой матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор ∇ размерности $l \times l$, что

$$\ell_\psi^{\mathcal{E}} + \left(\Delta\,|_{\mathcal{E}^\infty}\right)^* = \nabla\,|_{\mathcal{E}^\infty} \circ \ell_F^{\mathcal{E}},$$
$$\nabla^* = \nabla,$$

то ψ является производящей функцией некоторого закона сохранения, и наоборот. Это было доказано в п. 2.6. (См. упр. 2.23 в. и следствие 2.10 4.)

В заключение опишем действие симметрий уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ на его законы сохранения в терминах производящих функций. Пусть $\varphi \in \operatorname{sym}\mathcal{E}$ и $\psi \in \ker\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*$ — производящая функция закона сохранения. Тогда $Э_\varphi(F) = \Delta(F)$, где Δ — некоторый $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор. Из упр. 2.25 следует, что $Э_\varphi$ действует на пространстве производящих функций по формуле $\psi \mapsto Э_\varphi(\psi) + \Delta^*(\psi)$.

Упражнение 3.3. Выведите аналог коммутаторного тождества (4.1) гл. 4 для законов сохранения.

3.2. Примеры. В этом пункте мы приводим несколько примеров, иллюстрирующих описанный выше алгоритм вычисления законов сохранения*).

Пример 3.1. Мы начнем с вычисления законов сохранения уравнения Бюргерса:

$$F = u_{xx} + uu_x - u_t = 0.$$

Оператор $\ell_F^{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, имеет вид $\ell_F^{\mathcal{E}} = D_x^2 + uD_x + p_1 - D_t$ (обозначения см. в п. 4.1 гл. 4), следовательно,

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* = D_x^2 - D_x \circ u + p_1 + D_t = D_x^2 - uD_x + D_t.$$

Будем искать производящую функцию ψ в форме $\psi(x, t, u, \ldots, p_k)$, где $k \geqslant 0$ и $\dfrac{\partial\psi}{\partial p_k} \neq 0$. Тогда, используя формулы для D_x и D_t из п. 4.1

*) Вычисление законов сохранения в техническом плане совершенно аналогично вычислению симметрий, которое было подробно разобрано в гл. 4. Поэтому мы не останавливаемся здесь на подробностях вычислений. Детали вычислений, относящиеся к примерам 3.2, 3.7, 3.9–3.11, можно найти в [141].

гл. 4, получим

$$D_x^2(\psi) = p_{k+2}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} + O(k+1),$$
$$D_t(\psi) = p_{k+2}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} + O(k+1).$$

Таким образом,

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*(\psi) = 2p_{k+2}\frac{\partial\psi}{\partial p_k} + O(k+1),$$

и равенство $\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*(\psi) = 0$ означает, что $\dfrac{\partial\psi}{\partial p_k} = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\psi = \psi(x,t)$ и, следовательно,

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^*(\psi) = \psi_{xx} + \psi_t - u\psi_x = 0.$$

Поскольку ψ не зависит от u, то $\psi_x = 0$. Следовательно, $\psi_t = 0$, т. е. $\psi = \mathrm{const}$. Сохраняющийся ток, соответствующий производящей функции $\psi = 1$, имеет вид $\left(-u, u_x + \dfrac{u^2}{2}\right)$. Итак, мы доказали, что группа законов сохранения уравнения Бюргерса одномерна и порождена сохраняющимся током $\left(-u, u_x + \dfrac{u^2}{2}\right)$.

Пример 3.2. Рассмотрим многомерное уравнение типа уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta(u^\alpha) + f(u), \qquad \Delta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad \alpha \neq 0.$$

В этом случае из уравнения (3.2) легко следует, что ψ зависит только от переменных (t,x), причем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha u^{\alpha-1}\Delta\right)\psi + f'(u)\psi = 0. \tag{3.3}$$

Простой анализ уравнения (3.3) показывает, что рассматриваемое уравнение имеет законы сохранения только в том случае, если выполнено равенство

$$f(u) = au^\alpha + bu + c.$$

Тогда если $\alpha \neq 1$, то $\psi = v(x)e^{-bt}$, причем функция $v = v(x)$ удовлетворяет уравнению $\Delta v + av = 0$. Если $\alpha = 1$, то $f(u) = bu + c$ и функция $\psi = \psi(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\psi_t + \Delta\psi + b\psi = 0$.

Сохраняющийся ток, отвечающий производящей функции ψ, имеет вид

$$(\psi u, \psi_{x_1} u^\alpha - \alpha\psi u^{\alpha-1} u_{x_1} - c\int \psi\, dx_1, \psi_{x_2} u^\alpha - \alpha\psi u^{\alpha-1} u_{x_2}, \ldots$$
$$\ldots, \psi_{x_n} u^\alpha - \alpha\psi u^{\alpha-1} u_{x_n}).$$

Пример 3.3. Если $\mathcal{E} = \{\Delta = 0\}$ — линейная система уравнений, заданная оператором Δ, то, очевидно, всякому решению сопряженной системы $\mathcal{E}^* = \{\Delta^* = 0\}$ соответствует некоторый закон сохранения (ср. с примером 3.2 в случае, когда $\alpha = 1$).

Упражнение 3.4. Выясните, являются ли *линейные законы сохранения* из примера 3.3 полным набором законов сохранения (см. § 1) для ℓ-нормального линейного уравнения.

Пример 3.4 [76]. Уравнение

$$u_t - \Delta u_t = \Delta u, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \tag{3.4}$$

описывающее процесс фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде, обладает полным набором линейных законов сохранения. Продемонстрируем это на примере краевой задачи с условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in \bar{V},$$
$$u(x,t) = h(x,t), \qquad x \in \partial V, \quad t \geqslant 0,$$

где $V \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно гладкой границей ∂V, $\varphi(x) = h(x,0)$ при $x \in \partial V$. Будем искать производящие функции $v(x,t)$ линейных законов сохранения уравнения (3.4), т. е. решения уравнения

$$v_t - \Delta v_t + \Delta v = 0, \tag{3.5}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$v(x,t)|_{\partial V} = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Воспользовавшись для этого стандартным методом Фурье разделения переменных, получим полную и ортогональную в $L^2(V)$ систему функций, удовлетворяющих уравнениям (3.5) и (3.6):

$$v_k(x,t) = e^{\lambda_k t} X_k(x), \qquad \lambda_k = \frac{\bar{\lambda}_k}{1+\bar{\lambda}_k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\bar\lambda_k$ и $X_k(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta X + \bar\lambda X = 0, \\ X|_{\partial V} = 0. \end{cases}$$

Закон сохранения с производящей функцией $v(x,t)$ в интегральной форме имеет вид

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_V (v-\Delta v)u\,dx = \int\limits_{\partial V}\left((u_t+u)\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}} - \left(\frac{\partial u_t}{\partial \boldsymbol{n}} + \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)v\right)d\sigma, \quad (3.7)$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичная внешняя нормаль к ∂V, а $d\sigma$ — элемент поверхности. При заданной функции $v(x,t)$ в правой части формулы (3.7) из начальных и граничных условий известны все величины, поэтому можно найти значения интеграла $\int\limits_V (v-\Delta v)u\,dx$ в произвольный момент времени, если известно его значение в начальный момент $t=0$. Это позволяет найти коэффициенты Фурье $c_k(t)$ функции $u(x,t)$ по ортогональной системе $\{v_k\}$, поскольку

$$c_k(t) = \frac{1}{\|v_k\|^2}\int\limits_V v_k u\,dx = \frac{1}{(1+\bar\lambda_k)\|v_k\|^2}\int\limits_V (v_k - \Delta v_k)u\,dx.$$

Таким образом, полнота системы функций $\{v_k\}$ в пространстве $L^2(V)$ означает полноту системы законов сохранения с производящими функциями $v_k(x,t)$.

Пример 3.5. Уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

обладает, как хорошо известно, бесконечной серией законов сохранения (см., например, [47, 1, 53, 55, 93, 95]), начинающейся с законов сохранения массы, момента количества движения и энергии:

$$u_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0,$$
$$(u^2)_t + (-4u^3 + 2uu_{xx} - u_x^2)_x = 0,$$
$$\left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right)_t + \left(-\frac{9}{2}u^4 + 3u^2u_{xx} - 6uu_x^2 + u_xu_{xxx} - \frac{1}{2}u_{xx}^2\right)_x = 0.$$

Доказательство теоремы о существовании бесконечной серии законов сохранения и их вид были получены различными авторами и различными способами (см., в частности, утверждение 4.1). Решение этой проблемы привело к открытию знаменитого метода обратной задачи рассеяния (о котором в настоящее время имеется обширнейшая литература, см., например, книги [1, 53, 31, 93, 95, 104] и содержащуюся в них библиографию). Описанная выше техника вычислений позволяет не только без особого труда получить бесконечную серию законов сохранения, но и доказать, что других законов сохранения у уравнения Кортевега — де Фриза нет.

Упражнение 3.5. Докажите, что эволюционные уравнения $u_t = f(x, u_x, u_{xx}, \ldots)$ *четного* порядка не могут иметь бесконечное множество законов сохранения с неограниченным ростом входящих в них производных.

Пример 3.6. Нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\psi_t = \Delta\psi + |\psi|^2\psi, \qquad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

имеет два физически очевидных закона сохранения:

$$(|\psi|^2)_t + i\nabla(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}) = 0, \qquad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right);$$

$$(|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4)_t + i\nabla((\Delta\psi + |\psi|^2\psi)\nabla\bar{\psi} - (\Delta\bar{\psi} + |\psi|^2\bar{\psi})\nabla\psi) = 0.$$

Если число пространственных переменных $n = 1$, то, как и уравнение Кортевега — де Фриза, оно обладает хорошо известной бесконечной серией законов сохранения. Напротив, при $n > 1$ других законов сохранения у этого уравнения нет.

Замечание 3.1. Всплеск интереса к уравнению Кортевега — де Фриза и нелинейному уравнению Шрёдингера в конце 60 — начале 70 гг. привел к открытию довольно большого класса нелинейных уравнений, обладающих полным набором законов сохранения и допускающих, благодаря этому, решение методом обратной задачи теории рассеяния. К нему относятся уравнения Буссинеска, Кадомцева — Петвиашвили, Гарри — Дима, sin-Гордон и многие другие.

Пример 3.7. Рассмотрим систему уравнений Захарова, описывающую процессы нелинейного взаимодействия двух волн различных пространственно-временных масштабов:

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xx} - n\psi = 0, \\ n_t + u_x = 0, \\ u_t + n_x + \left(|\psi|^2\right)_x = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Эта система уравнений неинтегрируема, хотя она обладает целым рядом свойств, характерных для «солитонных уравнений». Прямое вычисление законов сохранения с помощью (3.2) в данном случае оказывается практически невозможным. Доказать неинтегрируемость (3.8) удается лишь с использованием техники гамильтоновых структур (см. п. 4.2).

Уравнение (3.8) обладает восемью законами сохранения:

1) $\left(\frac{1}{2i}(\psi\bar{\psi}_x - \bar{\psi}\psi_x) - nu,\ \frac{1}{2}(|\psi|^2)_{xx} - 2|\psi_x|^2 - n|\psi|^2 - \frac{n^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right)$

(закон сохранения квази-импульса)

2) $\left(|\psi_x|^2 + n|\psi|^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{u^2}{2},\ \frac{1}{i}(\psi_{xx}\bar{\psi}_x - \bar{\psi}_{xx}\psi_x) + \right.$

$\left. + \frac{n}{i}(\bar{\psi}\psi_x - \bar{\psi}_x\psi)_x + nu - u|\psi|^2\right)$

(закон сохранения квази-энергии)

3) $(|\psi|^2, i(\bar{\psi}_x\psi - \bar{\psi}\psi_x))$

(закон сохранения квази-частиц)

4) $\left(t|\psi|^2 + tn - xu,\ \frac{t}{i}(\bar{\psi}\psi_x - \psi\overline{\psi_x}) - x|\psi|^2 - xn + tu\right)$

5) $\left(t^2|\psi|^2 + (x^2+t^2)n - 2txu, \frac{t^2}{i}(\bar{\psi}\psi_x - \psi\bar{\psi}_x) - \right.$

$\left. -2tx|\psi|^2 - 2txn + (x^2+t^2)u\right)$

6) $(tu - xn,\ tn - xu + t|\psi|^2)$

7) $(n,\ u)$

8) $(u,\ n + |\psi|^2)$

Пример 3.8 [134]. Уравнения пластичности (см. п. 4.3 гл. 4):

$$\begin{cases} u_\xi + \frac{1}{2}v = 0, \\ v_\eta + \frac{1}{2}u = 0, \end{cases}$$

допускают бесконечную серию законов сохранения, которая получается из одного закона сохранения с производящей функцией

$$T_0 = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

действием симметрий f^i_{2k}, g^i_{2k}, $0 \leqslant i \leqslant 2k$, и применением оператора $\left(\mathcal{R}_2^{2k}\right)^*$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (см. теорему 4.8 в гл. 4). Эта серия вместе с законами сохранения, производящие функции $(B_1(\xi, \eta), B_2(\xi, \eta))$ которых являются решениями системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B_1}{\partial \xi} - \dfrac{1}{2} B_2 = 0, \\ \dfrac{\partial B_2}{\partial \eta} - \dfrac{1}{2} B_1 = 0, \end{cases}$$

образуют все пространство законов сохранения уравнений пластичности.

Упражнение 3.6. Проверьте, что производящей функции (ψ_1, ψ_2) отвечает сохраняющийся ток $(u\psi_1, v\psi_2)$.

Пример 3.9. Уравнение Хохлова — Заболотской нелинейной акустики ограниченных звуковых пучков (см. п. 5.3 гл. 3) имеет вид

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 (u^2)}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_4^2} = 0.$$

Оно обладает большой группой законов сохранения, производящие функции которых описываются следующим образом:

$$\psi = q_1 \mathcal{A}(q_2, q_3, q_4) + \mathcal{B}(q_2, q_3, q_4),$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — произвольные решения системы

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{q_3 q_3} + \mathcal{A}_{q_4 q_4} = 0, \\ \mathcal{B}_{q_3 q_3} + \mathcal{B}_{q_4 q_4} = \mathcal{A}_{q_2}. \end{cases}$$

Сохраняющийся ток, отвечающий функции ψ, равен

$$\Big((q_1\mathcal{A} - \mathcal{B})(uu_{q_1} - u_{q_2}) - \mathcal{A}\frac{u^2}{2},\ \mathcal{A}u,$$
$$(q_1\mathcal{A} + \mathcal{B})u_{q_3} - (q_1\mathcal{A}_{q_3} + \mathcal{B}_{q_3})u,\ (q_1\mathcal{A} + \mathcal{B})u_{q_4} - (q_1\mathcal{A}_{q_4} + \mathcal{B}_{q_4})u\Big).$$

Двумерный аналог уравнения Хохлова — Заболотской выглядит следующим образом:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(u^2)}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2}=0.$$

Производящие функции законов сохранения для этого уравнения имеют вид

$$\psi=q_1 a(q_2)q_3+a'(q_2)\frac{q_3^3}{6}+q_1 b(q_2)+b'(q_2)\frac{q_3^2}{2}+c(q_2)q_3+d(q_2), \quad (3.9)$$

где a, b, c, d — произвольные функции от q_2.

Для осесимметрического уравнения Хохлова — Заболотской

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial q_1 \partial q_2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(u^2)}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2}+\frac{1}{q_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}=0$$

производящие функции законов сохранения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi=q_1 a(q_2)q_3\ln q_3+\frac{1}{4}a'(q_2)q_3^3(\ln q_3-1)+{}&\\ +q_1 b(q_2)q_3+\frac{1}{4}b'(q_2)q_3^3+c(q_2)q_3\ln q_3+d(q_2)q_3,&\quad (3.10)\end{aligned}$$

где вновь a, b, c, d — произвольные функции от q_2.

Упражнение 3.7. Найдите сохраняющиеся токи, соответствующие производящим функциям (3.9) и (3.10).

Пример 3.10. Уравнения Навье — Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости в трехмерной области

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{u},\\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}=0\end{cases}$$

(здесь $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2,u^3)$ — поле скоростей, p — давление) обладают 7-мерным пространством законов сохранения. Базисные производящие функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\psi_1 = (x_2, -x_1, 0, u^1 x_2 - u^2 x_1),\\
&\psi_2 = (x_3, 0, -x_1, u^1 x_3 - u^3 x_1),\\
&\psi_3 = (0, x_3, -x_2, u^2 x_3 - u^3 x_2),\\
&\psi_4 = (a_1(t), 0, 0, u^1 a_1(t) - a_1'(t) x_1),\\
&\psi_5 = (0, a_2(t), 0, u^2 a_2(t) - a_2'(t) x_2),\\
&\psi_6 = (0, 0, a_3(t), u^3 a_3(t) - a_3'(t) x_3),\\
&\psi_7 = (0, 0, 0, f(t)),
\end{aligned}$$

где a_1, a_2, a_3, f — произвольные функции переменной t.

Упражнение 3.8. Найдите сохраняющиеся токи, отвечающие этим производящим функциям, и определите физический смысл всех законов сохранения.

Пример 3.11. Уравнеиия Кадомцева — Погуце (см. п. 5.4 гл. 3), описывающие нелинейные процессы в высокотемпературной плазме, записываются в виде:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + [\nabla_\perp\varphi, \nabla_\perp\psi]_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z},\\[2mm]
\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp\varphi + [\nabla_\perp\varphi, \nabla_\perp\Delta_\perp\varphi]_z = \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta_\perp\psi + [\nabla_\perp\psi, \nabla_\perp\Delta_\perp\psi]_z,
\end{cases}$$

где $\nabla_\perp = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, $\Delta_\perp = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $[u, v]_z = u_x v_y - u_y v_x$, (x, y, z, t) — стандартные пространственно-временные координаты, φ и ψ суть потенциалы скорости и поперечной компоненты магнитного поля соответственно.

Производящие функции законов сохранения этого уравнения, зависящие от производных порядка не больше трех, выглядят так *):

$$\begin{aligned}
&\theta_1 = ((ax + by + c)G(z, t),\ 0),\\
&\theta_2 = (\alpha(x^2 + y^2),\ -4\alpha),\\
&\theta_3 = (\beta(x^2 + y^2),\ 4\beta),\\
&\theta_4 = (\gamma(\varphi - \psi),\ \gamma(\Delta_\perp\psi - \Delta_\perp\varphi)),\\
&\theta_5 = (\delta(\varphi + \psi),\ \delta(\Delta_\perp\varphi + \Delta_\perp\psi)),
\end{aligned}$$

*) По-видимому, другими законами сохранения уравнение Кадомцева — Погуце не обладает.

где $G=G(z,t)$, $\alpha=\alpha(z-t)$, $\beta=\beta(z+t)$, $\gamma=\gamma(z-t)$, $\delta=\delta(z+t)$, a, b, c — произвольные константы.

Упражнение 3.9. Найдите сохраняющиеся токи для функций $\theta_1, \ldots, \theta_5$. Какова физическая интерпретация закона сохранения, соответствующего производящей функции θ_4?

Упражнение 3.10. Убедитесь, что законы сохранения, отвечающие функциям θ_2 и θ_4, переводятся в законы сохранения, отвечающие функциям θ_3 и θ_5, с помощью преобразования $t \mapsto -z$, $\varphi \mapsto -\psi$, являющегося дискретной симметрией уравнений Кадомцева — Погуце.

§ 4. Симметрии и законы сохранения

4.1. Теорема Нётер. Как известно, законы сохранения уравнений, возникающих из вариационного принципа, происходят из тех или иных симметрий действия. В этом состоит (первая) теорема Нётер [52]. Поскольку до работ [14, 15, 148] по $\mathcal{C}$-спектральной последовательности эта теорема служила единственным общим методом нахождения законов сохранения, до сих пор распространено мнение, что существование сохраняющихся величин всегда является проявлением каких-либо свойств симметрии рассматриваемого уравнения. Однако примеры, приведенные в § 3, показывают, что это, вообще говоря, не так. Скажем, уравнение Бюргерса имеет лишь один закон сохранения, тогда как алгебра симметрий в этом случае бесконечномерна (теорема 4.4 гл. 4).

В то же время ясно, что концепции симметрии и закона сохранения нельзя рассматривать как совершенно независимые: для их нахождения приходится решать взаимно сопряженные уравнения (3.19) гл. 4 и (3.2). Этот факт проясняет природу теоремы Нётер. Напомним (см. п. 2.5), что уравнение $F=0$ (локально) является следствием некоторого вариационного принципа в том и только том случае, если $\ell_F=\ell_F^*$. Поэтому в данном случае системы (3.19) гл. 4 и (3.2) совпадают и, значит, всякому закону сохранения отвечает некоторая симметрия. Из равенства (2.22) следует, что построенное таким образом отображение законов сохранения в симметрии представляет собой обращение отображения Нётер, которое всякой нётеровой симметрии лагранжиана сопоставляет закон сохранения соответствующего ему уравнения Эйлера — Лагранжа (см. п. 2.8).

Напомним, что *лагранжианом* (*действием*, или *вариационным функционалом*) $\mathcal{L}=\int L(x,u,p_\sigma^i)\,dx$, где $dx=dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, называется функционал, определенный на сечениях некоторого расслоения π и имеющий вид

$$s \mapsto \int\limits_M L(x, s(x), \ldots, \frac{\partial^{|\sigma|} s^i}{\partial x_\sigma}, \ldots)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad s \in \Gamma(\pi).$$

Функция $L \in \mathcal{F}(\pi)$ (или форма $L\,dx \in \Lambda_0^n(\pi)$) называется *плотностью* лагранжиана. *Лагранжевой* (*вариационной*) производной лагранжиана $\mathcal{L} = \int L\,dx$ называется функция

$$\frac{\delta L}{\delta u^i} = \sum_\sigma (-1)^{|\sigma|} D_\sigma \left(\frac{\partial L}{\partial p_\sigma^i} \right) \in \mathcal{F}(\pi).$$

Упражнение 4.1. Убедитесь, что лагранжева производная $\dfrac{\delta L}{\delta u^i}$ однозначно определяется функционалом $\mathcal{L} = \int L\,dx$ и не зависит от выбора плотности L.

Оператор $\mathrm{E}(\mathcal{L}) = \left(\dfrac{\delta L}{\delta u^1}, \ldots, \dfrac{\delta L}{\delta u^m} \right)$ называется *оператором Эйлера*, а уравнение $\mathrm{E}(\mathcal{L}) = 0$ — *уравнением Эйлера — Лагранжа*, отвечающим лагранжиану $\mathcal{L}$. В п. 2.5 мы доказали, что уравнение Эйлера — Лагранжа тривиально в том и только том случае, когда плотность L является полной дивергенцией, т. е. когда для некоторых $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{F}(\pi)$ выполнено равенство

$$L = D_1(P_1) + D_2(P_2) + \ldots + D_n(P_n).$$

Кроме того, в п. 2.5 было показано, что уравнение $F = 0$ является уравнением Эйлера — Лагранжа для некоторого лагранжиана тогда и только тогда, когда

$$\ell_F = \ell_F^*.$$

Эволюционное дифференцирование $\mathcal{Э}_\varphi$ называется *нётеровой симметрией лагранжиана* $\mathcal{L}$, если $\mathcal{Э}_\varphi(\mathcal{L}) = 0$, т. е. если существуют такие функции $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{F}(\pi)$, что

$$\mathcal{Э}_\varphi(L) = D_1(P_1) + D_2(P_2) + \ldots + D_n(P_n).$$

Если $F = 0$ — уравнение Эйлера — Лагранжа, отвечающее лагранжиану $\mathcal{L}$, т. е. $F = \mathrm{E}(\mathcal{L})$, то $\mathcal{Э}_\varphi$ является нётеровой симметрией $\mathcal{L}$ в том и только том случае, если

$$\mathcal{Э}_\varphi(F) + \ell_\varphi^*(F) = 0 \tag{4.1}$$

(см. упр. 2.30). В частности, φ — симметрия уравнения $F=0$ (обращение последнего утверждения *неверно*!).

Из результатов, обсуждавшихся в п. 2.8, вытекает следующая фундаментальная теорема.

Теорема Нётер. *Пусть* $\mathcal{E}=\{\mathrm{E}(\mathcal{L})=0\}$ — *ℓ-нормальное уравнение Эйлера — Лагранжа, отвечающее лагранжиану $\mathcal{L}$. Тогда эволюционное дифференцирование* $Э_\varphi$ *является нётеровой симметрией лагранжиана $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда φ — производящая функция закона сохранения для уравнения $\mathcal{E}$* *).

Пример 4.1. Рассмотрим уравнение sin-Гордон

$$u_{xy}=\sin u.$$

Оно является уравнением Эйлера — Лагранжа (проверьте условие $\ell_F=\ell_F^*$!) для лагранжиана с плотностью

$$L=\frac{1}{2}u_x u_y-\cos u.$$

Упражнение 4.2. Применяя (4.1), проверьте, что функции

$$\begin{gathered}\varphi_1=u_x,\\ \varphi_2=u_{xxx}+\frac{1}{2}u_x^3,\\ \varphi_3=u_{xxxxx}+\frac{5}{2}u_x^2u_{xxx}+\frac{5}{2}u_xu_{xx}^2+\frac{3}{8}u_x^5\end{gathered}$$

являются нётеровыми симметриями рассматриваемого лагранжиана.

Замечание 4.1. Симметрии φ_1, φ_2 и φ_3 получаются одна из другой с помощью известного оператора рекурсии $R=D_x^2+u_x^2-u_xD_x^{-1}\cdot u_{xx}$, $\varphi_2=R(\varphi_1)$, $\varphi_3=R(\varphi_2)=R^2(\varphi_1)$.

По теореме Нётер функции φ_1, φ_2 и φ_3 являются производящими функциями законов сохранения уравнения sin-Гордон.

---

*) Как уже упоминалось выше, важнейший класс уравнений Эйлера — Лагранжа, не являющихся ℓ-нормальными, составляют уравнения, обладающие калибровочной инвариантностью, такие как уравнения Максвелла, Янга — Миллса, Эйнштейна. У этих уравнений ядро отображения Нётер, т. е. множество нётеровых симметрий, дающих тривиальные законы сохранения, совпадает с множеством калибровочных симметрий.

Пример 4.2. Рассмотрим задачу о движении r материальных точек с массами $m_1, \ldots, m_r$ в некотором потенциальном поле. Пусть $x^j = (x_1^j, x_2^j, x_3^j)$ — координаты точки с номером j. Как хорошо известно, ньютоновские уравнения движения

$$m_j x_{tt}^j = -\operatorname{grad}_j U = \left(-\frac{\partial U}{\partial x_1^j}, -\frac{\partial U}{\partial x_2^j}, -\frac{\partial U}{\partial x_3^j}\right), \qquad j = 1, \ldots, r,$$

где $U(t, x_i^j)$ — потенциальная энергия, являются уравнениями Эйлера — Лагранжа для лагранжиана с плотностью

$$L = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{2} m_j ((\dot{x}_1^j)^2 + (\dot{x}_2^j)^2 + (\dot{x}_3^j)^2) - U.$$

В этом примере мы рассмотрим классические нётеровы симметрии, производящие функции которых имеют вид

$$\varphi_l^k = b_l^k(t, x_i^j) - a(t, x_i^j)\dot{x}_l^k, \qquad k = 1, \ldots, r, \quad l = 1, 2, 3.$$

При этом ограничимся симметриями, удовлетворяющими условию

$$X^{(1)}(L\,dt) = 0,$$

где $X = a(t, x_i^j)\dfrac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{k,l} b_l^k(t, x_i^j)\dfrac{\partial}{\partial x_l^k}$, а $X^{(1)}$ — поднятие поля X в пространство 1-джетов (см. гл. 3).

По теореме Нётер такой симметрии отвечает первый интеграл

$$\sum_{i,j} m_j b_i^j \dot{x}_i^j - aE = \text{const},$$

где $E = \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{1}{2} m((\dot{x}_1^j)^2 + (\dot{x}_2^j)^2 + (\dot{x}_3^j)^2) + U$ — полная энергия системы (проверьте!).

Если потенциальная энергия U не зависит явно от времени, т. е. $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$, то, как легко проверить, $\varphi_i^j = \dot{x}_i^j$ — нётерова симметрия. Получающийся первый интеграл есть энергия $E = \text{const}$. Мы сталкиваемся здесь с обычной в физике ситуацией: сохранение энергии есть проявление инвариантности рассматриваемой системы относительно сдвигов по времени.

Если функция U инвариантна относительно пространственных сдвигов в каком-то фиксированном направлении $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3$, то

$\varphi_i^j = l_i$ — нётерова симметрия. Соответствующий первый интеграл есть импульс

$$\sum_{i,j} m_j l_i \dot{x}_i^j = \text{const}.$$

Мы видим, что сохранение импульса связано с трансляционной инвариантностью.

Еще один пример такого же рода: инвариантность U относительно вращений влечет за собой сохранение момента количества движения. Возьмем, например, ось z. Соответствующая нётерова симметрия имеет вид $\varphi_1^j = -x_2^j$, $\varphi_2^j = x_1^j$, $\varphi_3^j = 0$, и ей отвечает сохранение z-компоненты момента импульса:

$$\sum_j m_j \left(x_1^j \dot{x}_2^j - \dot{x}_1^j x_2^j\right) = \text{const}.$$

Замечание 4.2. Из нашего обсуждения теоремы Нётер видно, что соответствие симметрий законам сохранения, задаваемое обратной теоремой Нётер, имеет место для значительно более широкого класса уравнений, чем уравнения Эйлера — Лагранжа, а именно для таких уравнений $\mathcal{E} = \{F = 0\}$, для которых имеет место равенство

$$\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* = \lambda \ell_F^{\mathcal{E}}, \qquad \lambda \in \mathcal{F}(\mathcal{E}).$$

Простейший пример уравнения такого рода — кососопряженное уравнение $u_x = u_y$. Для этого уравнения мы имеем $\left(\ell_F^{\mathcal{E}}\right)^* = -\ell_F^{\mathcal{E}}$.

4.2. Гамильтоновы уравнения. В этом пункте мы обсуждаем гамильтоновы дифференциальные уравнения. Дальнейшие подробности заинтересованный читатель может найти в [16, 81, 93, 95, 114, 55, 47] и др.

Матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $A = \|A^{ij}\|$ размерности $m \times m$, $A^{ij} = \sum_\sigma A_\sigma^{ij} D_\sigma$, называется *гамильтоновым*, если соответствующая ему скобка Пуассона

$$\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\} = \int \sum_{i,j} A^{ij} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta u^j}\right) \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta u^i}\, dx,$$

где $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — лагранжианы, задает структуру алгебры Ли на пространстве лагранжианов. Кососимметричность скобки Пуассона равносильна кососопряженности оператора A, т. е. выполнению равенства $A^* = -A$. Для проверки тождества Якоби на практике используют один из следующих четырех эквивалентных критериев (см. § 2):

1) $\langle \ell_A(A(\psi_1))(\psi_2), \psi_3\rangle + \langle \ell_A(A(\psi_2))(\psi_3), \psi_1\rangle + \langle \ell_A(A(\psi_3))(\psi_1), \psi_2\rangle = 0$;

2) $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)) - \ell_{A,\psi_2}(A(\psi_1)) = A(\ell^*_{A,\psi_2}(\psi_1))$;

3) выражение $\ell_{A,\psi_1}(A(\psi_2)) + \frac{1}{2}A(\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2))$ симметрично по ψ_1 и ψ_2;

4) $[\mathcal{Э}_{A(\psi)}, A] = \ell_{A(\psi)} \circ A + A \circ \ell^*_{A(\psi)}$, где $\psi_i = (\psi_i^1, \ldots, \psi_i^n)$ — вектор-функции, $\ell_{A,\psi}$ — матричный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор размерности $n \times n$, определяемый по формуле

$$\left(\ell_{A,\psi}\right)_\tau^{ij} = \sum_{k,\sigma} \frac{\partial A_\sigma^{ik}}{\partial p_\tau^j} D_\sigma(\psi^k) D_\tau.$$

Упражнение 4.3. а. Выпишите условие гамильтоновости в координатной форме.

б. Покажите, что $\ell^*_{A,\psi_1}(\psi_2) = \ell^*_{A^*,\psi_2}(\psi_1)$ (ср. упр. 2.33).

Пример 4.3. Рассмотрим случай одной зависимой и одной независимой переменной $n = m = 1$. Простейший гамильтонов оператор первого порядка — это оператор D_x.

Упражнение 4.4. Опишите в рассматриваемой ситуации все гамильтоновы операторы первого порядка.

Пример 4.4. Очевидно, что любой кососопряженный оператор с коэффициентами, зависящими только от x, является гамильтоновым.

Упражнение 4.5. Докажите, что в случае $n=1$ оператор A вида $A = 2LD_x + D_x(L)$, где L — некоторая симметрическая матрица с коэффициентами, зависящими только от x и u^i, гамильтонов.

Упражнение 4.6. Докажите, что в случае $n=m=1$ имеется 2-параметрическое семейство гамильтоновых операторов третьего порядка

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = D_x^3 + (\alpha + \beta u)D_x + \frac{1}{2}\beta u_x. \tag{4.2}$$

Эволюционное дифференциальное уравнение называется *гамильтоновым* (относительно гамильтонова оператора A), если для некоторого функционала действия $\mathcal{H}$, называемого *гамильтонианом*, оно записывается в виде

$$u_t^i = A^{ij} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^j}.$$

Можно показать (см. теорему 2.13), что оператор A отображает производящие функции законов сохранения гамильтонова уравнения в его симметрии.

Пример 4.5. Уравнения Захарова (3.8)

$$\begin{cases} i\psi_t + \psi_{xx} - n\psi = 0, \\ n_t + u_x = 0, \\ u_t + n_x + \left(|\psi|^2\right)_x = 0 \end{cases}$$

гамильтоновы относительно оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D_x \\ 0 & 0 & -D_x & 0 \end{pmatrix}$$

с функционалом энергии

$$\mathcal{H} = \int \left(|\psi_x|^2 + n|\psi|^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{u^2}{2}\right) dx$$

в качестве гамильтониана.

Упражнение 4.7. Используя пример 3.7, найдите все гамильтоновы симметрии уравнений Захарова *).

Пример 4.6. Уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

можно записать в гамильтоновой форме двумя различными способами. Первая гамильтонова структура совершенно очевидна:

$$u_t = D_x(3u^2 - u_{xx}) = D_x\left(\frac{\delta}{\delta u}\left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right)\right) = A_1\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_1,$$

где $A_1 = D_x$ — гамильтонов оператор, $\mathcal{H}_1 = \int \left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right) dx$ — гамильтониан.

Вторая гамильтонова структура записывается следующим образом:

$$u_t = \left(D_x^3 - 4uD_x - 2u_x\right)\left(\frac{\delta}{\delta u}\left(-\frac{u^2}{2}\right)\right) = A_2\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_0.$$

*) На самом деле других симметрий у уравнений Захарова нет.

Здесь $A_2 = D_x^3 - 4uD_x - 2u_x$, $\mathcal{H}_0 = \int \left(-\frac{1}{2}u^2\right) dx$. Гамильтонов оператор A_2 принадлежит семейству (4.2), так как $A_2 = \Gamma_{0,4}$.

Как мы знаем (см. п. 5.2 гл. 3), базис пространства классических симметрий уравнения Кортевега — де Фриза составляют следующие производящие функции

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 = u_x && \text{(трансляция вдоль } x\text{)},\\
&\varphi_2 = u_t && \text{(трансляция вдоль } t\text{)},\\
&\varphi_3 = 6tu_x + 1 && \text{(преобразование Галилея)},\\
&\varphi_4 = xu_x + 3tu_t + 2u && \text{(масштабная симметрия)}.
\end{aligned}
$$

Относительно гамильтонова оператора $A_1 = D_x$ первые три симметрии гамильтоновы, т. е. имеют вид

$$
\varphi_i = A_1 \frac{\delta}{\delta u} \mathcal{Q}_i, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{4.3}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \int \frac{1}{2}u^2\, dx,\\
\mathcal{Q}_2 &= \int \left(u^3 + \frac{1}{2}u_x^2\right) dx,\\
\mathcal{Q}_3 &= \int \left(xu + 3tu^2\right) dx.
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\mathcal{Q}_i$ суть сохраняющиеся величины ($\psi_i = \dfrac{\delta \mathcal{Q}_i}{\delta u}$ — соответствующие производящие функции). Четвертая симметрия φ_4 не имеет вида (4.3), и ей не соответствует закон сохранения. Отметим, что рассматриваемый гамильтонов оператор $A_1 = D_x$ имеет одномерное ядро. Это означает существование еще одного закона сохранения с производящей функцией $\psi = 1$ (закон сохранения массы $\mathcal{Q}_0 = \int u\, dx$).

Перейдем ко второму гамильтонову оператору $A_2 = D_x^3 - 4uD_x - 2u_x$. В этом случае симметрии φ_1, φ_2 и φ_4 гамильтоновы:

$$
\varphi_i = A_2 \frac{\delta}{\delta u} \mathcal{P}_i, \qquad i = 1, 2, 4,
$$

где

$$\mathcal{P}_1 = \int -\frac{1}{2}u\,dx = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_0,$$
$$\mathcal{P}_2 = \int -\frac{1}{2}u^2\,dx = -\mathcal{Q}_1,$$
$$\mathcal{P}_4 = \int \left(-\frac{1}{2}xu - \frac{3}{2}tu^2\right)dx = -\frac{1}{2}\mathcal{Q}_3.$$

Симметрия φ_3 не является гамильтоновой.

Закону сохранения энергии $\mathcal{Q}_2$ не отвечает ни одна из классических симметрий. Это означает, что он происходит из некоторой высшей симметрии, производящая функция которой имеет вид

$$\varphi_5 = A_2\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{Q}_2 = -u_{xxxxx} + 10uu_{xxx} + 20u_xu_{xx} - 30u^2u_x.$$

Симметрия φ_5, оказывается, удовлетворяет условию гамильтоновости (4.3) для оператора A_1, и соответствующий функционал

$$\mathcal{Q}_5 = \int \left(-\frac{1}{2}u_{xx}^2 - 5uu_x^2 - \frac{5}{2}u^4\right)dx$$

служит еще одним законом сохранения для уравнения Кортевега — де Фриза. Способ, с помощью которого мы из сохраняющейся величины $\mathcal{Q}_2$ получили сохраняющуюся величину $\mathcal{Q}_5$, можно применить к самой $\mathcal{Q}_5$ и получить новую сохраняющуюся величину и т. д. Иначе говоря, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Существует такая бесконечная последовательность сохраняющихся величин уравнения Кортевега — де Фриза* $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$, *что*

1) $\mathcal{H}_0 = \int -\frac{1}{2}u^2\,dx;$

2) $A_1\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_n = A_2\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_{n-1};$

3) *функционалы* $\mathcal{H}_i$ *попарно находятся в инволюции относительно обеих скобок Пуассона:*

$$\{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l\}_{A_1} = \{\mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l\}_{A_2} = 0 \qquad \text{для любых } k, l \geqslant 0;$$

4) *симметрии* $\varphi_i = A_1\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_i = A_2\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_{i-1}$, $i > 0$, *отвечающие гамильтонианам* $\mathcal{H}_i$, *попарно коммутируют:*

$$\{\varphi_k, \varphi_l\} = 0 \qquad \text{для всех } k, l > 0.$$

Доказательство мы оставляем читателю в качестве упражнения. □

Заметим, что оператор $\mathcal{R}=A_2\circ A_1^{-1}=D_x^2-4u-2u_xD_x^{-1}$ переводит симметрию φ_k в симметрию φ_{k+1}.

Упражнение 4.8. Докажите, что $\mathcal{R}$ является оператором рекурсии (см. замечание 4.3 гл. 4) для уравнения Кортевега — де Фриза (оператор рекурсии Ленарда).

Упражнение 4.9. Уравнение Гарри — Дима имеет вид

$$u_t=\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)_{xxx}.$$

Убедитесь, что это уравнение обладает двумя гамильтоновыми структурами:

$$u_t=A_1\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_1=A_2\frac{\delta}{\delta u}\mathcal{H}_0,$$

где $A_1=2uD_x+u_x$, $\mathcal{H}_1=\displaystyle\int\left(\frac{u_{xx}}{2\sqrt{u^3}}-\frac{5u_x^2}{8\sqrt{u^5}}\right)dx$, $A_2=D_x^3=\Gamma_{0,0}$, $\mathcal{H}_0=\displaystyle\int 2\sqrt{u}\,dx$. Проанализируйте симметрии и законы сохранения этого уравнения и докажите для него аналог утверждения 4.1.

Г Л А В А 6

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

§ 1. Накрытия

В предыдущих главах мы имели дело с локальными объектами (симметриями, законами сохранения и др.), т. е. объектами, дифференциально зависящими от неизвестных функций $u^1, \ldots$ $\ldots, u^m$. Например, производящие сечения симметрий, будучи элементами модуля $\mathcal{F}(\pi, \pi)$, являются дифференциальными операторами в расслоении π. Естественно напрашивающееся обобщение — рассмотрение «интегро-дифференциальных зависимостей» — аналогично известной в теории алгебраических уравнений процедуре расширения основного поля. За этим, на первый взгляд, формальным шагом лежат весьма общие геометрические конструкции — накрытия над бесконечно продолженными дифференциальными уравнениями [22, 112, 113]. Переписывая на языке накрытий основные элементы развитой выше теории, мы приходим к теории нелокальных симметрий и законов сохранения дифференциальных уравнений. При этом оказывается, что многие известные конструкции (различные дифференциальные подстановки, преобразования Беклунда, операторы рекурсии и т. д.) являются элементами теории накрытий [113].

1.1. Первые примеры. Рассмотрим несколько примеров, проясняющих механизм возникновения нелокальных объектов.

Пример 1.1. Уравнение Бюргерса $\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xx}\}$. Алгебра $\operatorname{sym}\mathcal{E}$ локальных симметрий этого уравнения отождествляется с ядром оператора $\bar{\ell}_F = \bar{D}_x^2 + p_0\bar{D}_x + p_1 - \bar{D}_t$ (см. гл. 4), где

$$\bar{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_k p_{k+1}\frac{\partial}{\partial p_k}, \quad \bar{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \bar{D}_x^k(p_0p_1 + p_2)\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Попытаемся найти простейшую «интегро-дифференциальную» симметрию уравнения Бюргерса, производящая функция которой зависит от «интегральной» переменной $p_{-1} = \int p_0 dx = \bar{D}_x^{-1}(p_0)$. С формальной точки зрения это означает, что мы должны расширить многообразие $\mathcal{E}^\infty$ до многообразия $\widetilde{\mathcal{E}}$, добавив к внутренним координатам на $\mathcal{E}^\infty$ еще одну, полная производная которой по x равна p_0. Полную производную по t этой новой переменной естественно определить следующим образом:

$$\bar{D}_t(p_{-1}) = \bar{D}_t(\bar{D}_x^{-1}(p_0)) = \bar{D}_x^{-1}(\bar{D}_t(p_0)) =$$
$$= \bar{D}_x^{-1}(p_2 + p_0 p_1) = p_1 + \frac{1}{2}p_0^2 + c,$$

где $c = c(t)$ — «константа интегрирования», которую можно положить равной нулю. Иначе говоря, вместе с расширением многообразия $\mathcal{E}^\infty$ мы должны «расширить» и операторы полных производных $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_t$, полагая

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0 \frac{\partial}{\partial p_{-1}}, \qquad \widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2\right)\frac{\partial}{\partial p_{-1}}.$$

Очевидно, что при этом сохраняется «условие интегрируемости»: $[\widetilde{D}_x, \widetilde{D}_t] = 0$.

Оператор $\bar{\ell}_F$ в этом случае естественно расширяется до оператора

$$\widetilde{\ell}_F = \widetilde{D}_x^2 + p_0\widetilde{D}_x + p_1 - \widetilde{D}_t.$$

Нелокальной симметрией уравнения Бюргерса, зависящей от p_{-1}, можно назвать решение уравнения $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$.

Если функция φ зависит только от переменных x, t, p_{-1} и p_0, то уравнение $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$ легко решить в явном виде и получить, что

$$\varphi = \varphi_a = \left(ap_0 - 2\frac{\partial a}{\partial x}\right)e^{-\frac{1}{2}p_{-1}},$$

где $a = a(x, t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $a_t = a_{xx}$.

Чтобы показать применение проделанных вычислений, найдем решения уравнения Бюргерса, инвариантные относительно некоторой симметрии φ_a. Согласно общей теории (см. гл. 4), такие решения определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + uu_x, \\ \left(au - 2\dfrac{\partial a}{\partial x}\right)e^{-\frac{1}{2}\int u\,dx} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы, в частности, получаем, что $u = 2a_x/a$, т. е. мы получили подстановку Коула — Хопфа, сводящую уравнение Бюргерса к уравнению теплопроводности.

«Интегро-дифференциальные» симметрии естественным образом возникают при исследовании уравнений, допускающих оператор рекурсии.

Пример 1.2. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза *)

$$\mathcal{E} = \{u_t = u_{xxx} + uu_x\}.$$

Оператор

$$R = \bar{D}_x^2 + \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_1\bar{D}_x^{-1}$$

коммутирует с оператором универсальной линеаризации

$$\bar{\ell}_F = \bar{D}_x^3 + p_0\bar{D}_x + p_1 - \bar{D}_t.$$

Следовательно, если $\bar{\ell}_F(\varphi) = 0$, то $\bar{\ell}_F(R(\varphi)) = R(\bar{\ell}_F(\varphi)) = 0$. Это означает, что если $\varphi \in \operatorname{sym}\mathcal{E}$ и $R(\varphi) \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$, то $R(\varphi)$ также является локальной симметрией уравнения $\mathcal{E}$. Такие операторы называют *операторами рекурсии* (см., например, [55]).

Уравнение Кортевега — де Фриза имеет бесконечную серию локальных симметрий $\varphi_k = R^k(p_1)$, где p_1 — трансляция по x, а также еще две симметрии, галилееву и масштабную, причем оператор рекурсии переводит первую во вторую. Эти две симметрии можно рассматривать как начало второй серии симметрий. Однако, легко убедиться в том, что применив оператор рекурсии к масштабной симметрии, получим выражение, содержащее $\bar{D}_x^{-1}(p_0)$.

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \vdots \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & \bullet & \circ\ ? \\
 & \uparrow R & \uparrow \\
\varphi_2=p_5+p_0p_3+p_1p_2+p_0^2p_1 & \bullet & \circ\ t\varphi_2+x\varphi_1+\frac{4}{3}p_2+\frac{4}{9}p_0^2+\frac{1}{9}p_1\bar{D}_x^{-1}p_0? \\
 & \uparrow R & \uparrow R \\
\varphi_1 = p_3 + p_0p_1 & \bullet & \bullet\ t\varphi_1 + \frac{1}{3}xp_1 + \frac{2}{3}p_0 \\
 & \uparrow R & \uparrow R \\
\varphi_0 = p_1 & \bullet & \bullet\ tp_1 + 1
\end{array}
$$

*) Приведенная здесь нормировка уравнения КдФ отличается от рассмотренной в гл. 3, 4. Очевидно, что обе формы эквивалентны и переводятся друг в друга масштабным преобразованием.

Тем не менее, введя дополнительную переменную p_{-1} и расширив операторы $\bar{D}_x, \bar{D}_t$ и $\bar{\ell}_F$ до операторов $\tilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0 \dfrac{\partial}{\partial p_{-1}}$, $\tilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_2 + \dfrac{1}{2}p_0^2\right)\dfrac{\partial}{\partial p_{-1}}$ и $\tilde{\ell}_F = \tilde{D}_x^3 + p_0\tilde{D}_x + p_1 - \tilde{D}_t$ соответственно, мы обнаружим, что функция $t\varphi_2 + x\varphi_1 + \dfrac{4}{3}p_2 + \dfrac{4}{9}p_0^2 + \dfrac{1}{9}p_1p_{-1}$ является решением уравнения $\bar{\ell}_F(\varphi) = 0$ и, следовательно, может быть названа нелокальной симметрией уравнения Кортевега — де Фриза.

Упражнение 1.1. Покажите, что оператор $R = \bar{D}_x + \dfrac{1}{2}p_0 + \dfrac{1}{2}p_1\bar{D}_x^{-1}$ является оператором рекурсии для уравнения Бюргерса.

Пример 1.3. Рассмотрим теперь потенциальное уравнение Кортевега — де Фриза

$$\mathcal{E} = \left\{u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^2\right\}.$$

Для этого уравнения процедура введения новой переменной $p_{-1} = \bar{D}^{-1}(p_0)$ оказывается более сложной. А именно, попробуем вычислить $\bar{D}_t(p_{-1})$:

$$\bar{D}_t(p_{-1}) = \bar{D}_t(\bar{D}_x^{-1}(p_0)) = \bar{D}_x^{-1}(\bar{D}_t(p_0)) = \\ = \bar{D}_x^{-1}\left(p_3 + \frac{1}{2}p_1^2\right) = p_2 + \frac{1}{2}\bar{D}_x^{-1}(p_1^2).$$

Здесь мы сталкиваемся с необходимостью ввести еще одну переменную w, полная производная по x от которой равна p_1^2. Тогда

$$\bar{D}_t(w) = \bar{D}_t(\bar{D}_x^{-1}(p_1^2)) = \bar{D}_x^{-1}(\bar{D}_t(p_1^2)) = 2\bar{D}_x^{-1}(p_1(p_4 + p_1p_2)) = \\ = 2\left(p_1p_3 - \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{3}p_1^3\right).$$

Таким образом, операторы $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_t$ надо расширить до операторов

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0\frac{\partial}{\partial p_{-1}} + p_1^2\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\tilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_2 + \frac{1}{2}w\right)\frac{\partial}{\partial p_{-1}} + 2\left(p_1p_3 - \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{3}p_1^3\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Упражнение 1.2. Попробуйте ввести переменную p_{-1} для уравнения $\mathcal{E} = \{u_t = u_{xxx} + u_x^3\}$.

Последние два примера показывают, что попытки применить приведенные выше построения в более общей ситуации наталкиваются на технические трудности. Это заставляет вспомнить, что на самом деле у нас нет никаких оснований — кроме формальной аналогии с локальной ситуацией — считать «нелокальные» решения уравнения $\bar{\ell}_F(\varphi)=0$ нелокальными симметриями (см., например, [35, 69]). Ясно, что здесь нужен концептуальный анализ самого понятия нелокальной симметрии. По этим причинам необходимо подойти к определению нелокальной симметрии, анализируя геометрические структуры на многообразии $\widetilde{\mathcal{E}}$, ведь именно так было получено определение локальных симметрий уравнения $\mathcal{E}^\infty$.

1.2. Определение накрытия. Пусть $\mathcal{E}$ — дифференциальное уравнение в расслоении $\pi\colon\ E^{n+m}\to M^n$, $\mathcal{E}^\infty$ — его бесконечное продолжение. Напомним, что в каждой точке $\theta\in\mathcal{E}^\infty$ определено n-мерное подпространство $\mathcal{C}_\theta\subset T_\theta(\mathcal{E}^\infty)$ — картановская плоскость. Распределение Картана $\mathcal{C}=\{\mathcal{C}_\theta\}_{\theta\in\mathcal{E}^\infty}$ на $\mathcal{E}^\infty$ является интегрируемым распределением, т. е. оно удовлетворяет условиям классической теоремы Фробениуса. В локальных координатах распределение Картана на $\mathcal{E}^\infty$ задается системой n векторных полей $\bar{D}_1,\ldots,\bar{D}_n$, где $\bar{D}_i$ — ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ оператора полной производной по i-й независимой переменной. Процедуру расширения многообразия $\mathcal{E}^\infty$, рассмотренную в предыдущем разделе на примерах, можно формализовать, введя понятие накрытия.

Определение 1.1. Мы будем говорить, что задано *накрытие* $\tau\colon\ \widetilde{\mathcal{E}}\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}$, если заданы:

некоторое, вообще говоря, бесконечномерное*) многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$,

n-мерное интегрируемое распределение $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$ и

такое регулярное отображение τ многообразия $\widetilde{\mathcal{E}}$ на $\mathcal{E}^\infty$, что для любой точки $\theta\in\widetilde{\mathcal{E}}$ касательное отображение $\tau_{*,\theta}$ является изоморфизмом плоскости $\widetilde{\mathcal{C}}_\theta$ на картановскую плоскость $\mathcal{C}_{\tau(\theta)}$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ в точке $\tau(\theta)$.

Размерностью накрытия называется размерность слоя отображения τ. Ниже через $\mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ обозначается кольцо гладких функций на $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Из определения накрытия вытекает, что при действии τ любое n-мерное интегральное многообразие $\widetilde{\mathcal{U}}\subset\widetilde{\mathcal{E}}$ распределения $\widetilde{\mathcal{C}}=$

---

*) Все рассматриваемые здесь бесконечномерные многообразия являются обратными пределами цепочек проекций конечномерных многообразий. Дифференциальная геометрия таких объектов строится так же, как для многообразий вида $\mathcal{E}^\infty$ (см. гл. 4), что позволяет избежать известных топологических трудностей.

$=\{\widetilde{C}_\theta\}_{\theta\in\widetilde{\mathcal{E}}}$ отображается в n-мерное интегральное многообразие $\mathcal{U}=$ $=\tau(\widetilde{\mathcal{U}})\subset\mathcal{E}^\infty$ распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$, т. е. в решение уравнения $\mathcal{E}$. Обратно, если $\mathcal{U}\subset\mathcal{E}^\infty$ — некоторое решение уравнения $\mathcal{E}$, то ограничение распределения $\widetilde{\mathcal{C}}$ на прообраз $\widetilde{\mathcal{U}}=\tau^{-1}(\mathcal{U})\subset\widetilde{\mathcal{E}}$ является, как нетрудно видеть, интегрируемым n-мерным распределением. Если, в частности, $\dim\tau^{-1}(\theta)=N<\infty$, $\theta\in\mathcal{U}$, из этого следует, что локально многообразие $\widetilde{\mathcal{U}}$ расслаивается на N-параметрическое семейство интегральных многообразий распределения $\widetilde{\mathcal{C}}|_{\widetilde{\mathcal{U}}}$.

Итак, всякому решению уравнения $\mathcal{E}$ соответствует целое семейство интегральных многообразий, лежащих в $\widetilde{\mathcal{E}}$. Элементы этого семейства удобно понимать как решения уравнения $\mathcal{E}$, параметризованные некоторыми нелокальными величинами. В примерах 1.1 и 1.2 параметром можно считать константу интегрирования.

1.3. Накрытия в категории дифференциальных уравнений. Если «забыть» о распределениях на многообразиях $\mathcal{E}^\infty$ и $\widetilde{\mathcal{E}}$, то гладкое отображение $\tau\colon\widetilde{\mathcal{E}}\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$ гладких многообразий является расслоением. Использование термина «накрытие» для введенного понятия можно объяснить параллелью между категорией дифференциальных уравнений (далее — категория DE) и категорией гладких многообразий.

Ниже мы приводим простейшее определение категории DE, которое достаточно для наших целей, хотя следует отметить, что имеется более глубокий подход к определению этой категории (см., например, [24]).

Объектами категории DE являются бесконечномерные многообразия $\mathcal{O}$, снабженные вполне интегрируемым конечиомерным распределением $\mathcal{P}$.

Очевидно, что бесконечно продолженное дифференциальное уравнение $\mathcal{E}^\infty$ вместе с распределением Картана $\mathcal{C}$ является объектом этой категории.

Морфизмами в категории DE являются такие гладкие отображения $\varphi\colon\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$, для которых во всех точках $\theta\in\mathcal{O}$ имеем $\varphi_*(\mathcal{P}_\theta)\subset$ $\subset\mathcal{P}'_{\varphi(\theta)}$, где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ — распределения на $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ соответственно.

Размерностью объекта $(\mathcal{O},\mathcal{P})$ в категории DE будем называть размерность распределения $\mathcal{P}$.

Проводя аналогию с понятием накрытия в категории гладких многообразий, определение накрытия в категории DE естественно дать в следующем виде.

Определение 1.2. Эпиморфизм $\varphi\colon\mathcal{O}\to\mathcal{O}'$ называется *накрытием в категории DE*, если он сохраняет размерности, т. е. $\dim\mathcal{O}=\dim\mathcal{O}'$ и для любой точки $\theta\in\mathcal{O}$ имеем $\varphi_*(\mathcal{P}_\theta)=\mathcal{P}'_{\varphi(\theta)}$.

1.4. Примеры накрытий. Приведем несколько примеров, которые продемонстрируют различные ситуации, в которых возникают накрытия.

Пример 1.4 (накрытие, ассоциированное с дифференциальным оператором $\Delta\colon \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$). Пусть $\Delta\colon \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$ — дифференциальный оператор k-го порядка, действующий из сечений расслоения $\pi\colon E\to M$ в сечения расслоения $\pi'\colon E'\to M$. Оператор Δ и его продолжения $\Delta_s = j_s\circ\Delta$ определяют семейство гладких отображений $\varphi_s=\Phi_{\Delta_s}\colon J^{k+s}(\pi)\to J^s(\pi')$ (см. пп. 1.2, 1.3 гл. 4), которые включаются в следующую коммутативную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\ldots\longrightarrow & J^{k+s+1}(\pi) & \xrightarrow{\pi_{k+s+1,k+s}} & J^{k+s}(\pi) & \longrightarrow\ldots\longrightarrow & J^{k}(\pi) & & & \\
& \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{s+1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_s} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_0} & \searrow{\scriptstyle\pi_k} & & \\
\ldots\longrightarrow & J^{s+1}(\pi') & \xrightarrow{\pi'_{s+1,s}} & J^{s}(\pi') & \longrightarrow\ldots\longrightarrow & J^{0}(\pi')=E' & \xrightarrow{\pi'} & M. &
\end{array}
$$

Легко видеть, что если оператор Δ является регулярным (т. е. все отображения φ_s сюръективны), то система отображений $\varphi=\{\varphi_s\}$ определяет накрытие $\varphi\colon J^\infty(\pi)\to J^\infty(\pi')$. Мы будем говорить, что это *накрытие ассоциировано с оператором* Δ.

Если дано уравнение $\mathcal{E}\subset J^k(\pi')$, то, используя только что рассмотренную конструкцию, можно построить накрытие φ: $\varphi^{-1}(\mathcal{E}^\infty)\to\mathcal{E}^\infty$. Подобные накрытия соответствуют дифференциальным заменам переменных вида

$$v^i=\varphi^i(x,u^1,\ldots,u^m,\ldots,u^j_\sigma),$$

где v^i и u^j — зависимые переменные в расслоениях π' и π соответственно. В следующих двух примерах мы рассмотрим накрытия этого типа.

Пример 1.5 (Преобразования Лапласа). Рассмотрим уравнение $\mathcal{E}$ следующего вида

$$u_{xy}+Au_x+Bu_y+Cu=0. \tag{1.1}$$

Напомним (см. [54]), что *инвариантами Лапласа* уравнения (1.1) называются функции $h=\dfrac{\partial A}{\partial x}+AB-C$ и $l=\dfrac{\partial B}{\partial y}+AB-C$. Предположим, что $h,l\neq0$ и рассмотрим одномерные накрытия уравнения $\mathcal{E}^\infty$, задаваемые операторами

τ_h: $u=(w^1_x+w^1)/h$ (x-преобразование Лапласа),

τ_l: $u=(w^2_y+w^2)/l$ (y-преобразование Лапласа).

Несложно показать, что пространства этих накрытий изоморфны уравнению $(\mathcal{E}')^\infty$, где $\mathcal{E}'$ имеет вид (1.1) с некоторыми новыми функциями A, B и C. Обозначим возникающие уравнения через $\mathcal{E}_h$ и $\mathcal{E}_l$ соответственно. Если инвариант Лапласа l уравнения $\mathcal{E}_h$ не равен нулю, то можно рассмотреть уравнение $(\mathcal{E}_h)_l$ (или, аналогично, уравнение $(\mathcal{E}_l)_h$), которое оказывается эквивалентным уравнению $\mathcal{E}$. Таким образом, мы получаем двумерное накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$ над самим собой. Если, продолжая этот процесс, мы получим уравнение, у которого хотя бы один из инвариантов h или l обратился в нуль, то мы сможем построить формулу для общего решения рассматриваемого уравнения (подробности можно найти в [54]).

Пример 1.6 (накрытие, ассоциированное с локальной симметрией). Пусть дано уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ и пусть φ — производящая функция некоторой симметрии этого уравнения. Тогда, как было показано в примере 1.4, возникает накрытие φ: $\varphi^{-1}(\mathcal{E}^\infty) \to \mathcal{E}^\infty$. Если уравнение $\mathcal{E}$ задается дифференциальным оператором Δ, т. е. $\mathcal{E} = \{\varphi_\Delta = 0\}$, то функция φ удовлетворяет уравнению $\bar{\ell}_\Delta(\varphi) = 0$, где $\bar{\ell}_\Delta$ — оператор универсальной линеаризации для Δ, ограниченный на $\mathcal{E}^\infty$. Таким образом, пространство рассматриваемого накрытия определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \bar{\ell}_\Delta(\varphi) = 0, & \\ \varphi^j \quad = u^j, & j = 1, \ldots, \dim \pi. \end{cases}$$

Если $\mathcal{E}$ — линейное уравнение, то можно считать, что $\bar{\ell}_\Delta = \Delta$. Это означает, что пространством накрытия является само уравнение $\mathcal{E}^\infty$.

Пример 1.7 (факторизация дифференциальных уравнений). Пусть дано уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ и пусть F — конечномерная подгруппа группы его классических симметрий. Легко понять, что отображение факторизации (см. гл. 3, § 6) π_F: $\mathcal{E}^\infty \to \mathcal{E}^\infty / F$ является накрытием.

Например, уравнение теплопроводности $u_t = u_{xx}$ допускает однопараметрическую группу масштабных симметрий $u \mapsto \varepsilon u$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Соответствующее факторуравнение эквивалентно уравнению Бюргерса. Таким образом, возникает накрытие уравнения Бюргерса уравнением теплопроводности.

1.5. Координаты. Рассмотрим координатную интерпретацию определения накрытия.

Многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$ и отображение τ: $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ (в силу регулярности τ) локально можно реализовать как прямое произведение

$\mathcal{E}^\infty \times W$ ($W \subseteq \mathbb{R}^N$ — открытое множество, $0 < N \leqslant \infty$) и естественную проекцию $\mathcal{E}^\infty \times W \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ соответственно. Тогда распределение $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times W$ может быть задано системой векторных полей (рис. 6.1)

$$\widetilde{D}_i = \overline{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где $X_i = \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \frac{\partial}{\partial w_j}$, $X_{ij} \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ — τ-вертикальные поля на $\widetilde{\mathcal{E}}$, $w_1, w_2, \ldots$ — стандартные координаты в $\mathbb{R}^N$. В этих терминах условие Фробениуса эквивалентно тому, что $[\widetilde{D}_i, \widetilde{D}_j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, или, что равносильно, выполнению равенств

$$\widetilde{D}_i(X_{jk}) = \widetilde{D}_j(X_{ik}) \tag{1.3}$$

для всех $i, j = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant k \leqslant N$ (поскольку $[\overline{D}_i, \overline{D}_j] = 0$).

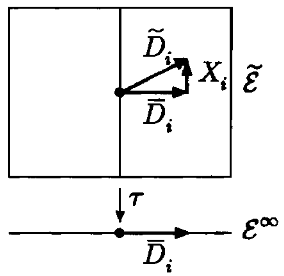

Рис. 6.1

Соотношения (1.3) представляют собой систему дифференциальных уравнений на функции X_{ij}, описывающие всевозможные N-мерные накрытия уравнения $\mathcal{E}$.

Координаты w_i будем называть *нелокальными переменными*.

1.6. Основные понятия теории накрытий. В этом пункте собраны некоторые понятия теории накрытий, которые понадобятся в дальнейшем.

Определение 1.3. Два накрытия τ_i: $\widetilde{\mathcal{E}}_i \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, $i = 1, 2$, называются *эквивалентными*, если существует диффеоморфизм α: $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_2$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{E}}_1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\tau_1"'] & & \widetilde{\mathcal{E}}_2 \arrow[dl, "\tau_2"] \\ & \mathcal{E}^\infty & \end{tikzcd}$$

коммутативна и $\alpha_*(\widetilde{\mathcal{C}}^1_y) = \widetilde{\mathcal{C}}^2_{\alpha(y)}$ для всех точек $y \in \widetilde{\mathcal{E}}_1$.

Упражнение 1.3. Покажите, что если диффеоморфизм α устанавливает эквивалентность накрытий τ_1 и τ_2 уравнения $\mathcal{E}^\infty$ с распределениями, задаваемыми полями

$$\widetilde{D}_i^{(1)} = \bar{D}_i + \sum_k X_{ik}^{(1)} \frac{\partial}{\partial w_k^{(1)}}, \qquad \widetilde{D}_i^{(2)} = \bar{D}_i + \sum_l X_{ik}^{(2)} \frac{\partial}{\partial w_k^{(2)}},$$

$i = 1, \ldots, n$, соответственно, то $\alpha_* \widetilde{D}_i^{(1)} = \widetilde{D}_i^{(2)}$, т. е.

$$\alpha_* \widetilde{D}_i^{(1)} = \bar{D}_i + \sum_k (\alpha^{-1})^* (\widetilde{D}_i^{(1)}(\alpha_k)) \frac{\partial}{\partial w_k^{(2)}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где $w_k^{(i)}$ — нелокальные переменные в накрытии τ_i, $i = 1, 2$, и

$$\alpha(x_i, p_\sigma^j, w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \ldots) =$$
$$= (x_i, p_\sigma^j, \alpha_1(x_i, p_\sigma^j, w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \ldots), \alpha_2(x_i, p_\sigma^j, w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \ldots), \ldots).$$

Соотношения (1.4) можно переписать также в виде

$$\widetilde{D}_i^{(1)}(\alpha_k) = \alpha^*(X_{ik}^{(2)}). \tag{1.5}$$

Пусть теперь $\mathcal{E}^\infty$ — некоторое дифференциальное уравнение, распределенне Картана на котором задают поля $\bar{D}_1, \ldots, \bar{D}_n$. Рассмотрим одно специальное накрытие над $\mathcal{E}^\infty$. Положим $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N$, $\tau = \mathrm{pr}_N \colon \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — проекция на первый сомножитель, а распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}$ задается полями $\bar{D}_1, \ldots, \bar{D}_n$.

Определение 1.4. Накрытие $\tau \colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ называется *тривиальным*, если оно эквивалентно накрытию pr_N для некоторого $0 < N \leqslant \infty$.

Упражнение 1.4. Покажите, что если накрытие $\tau \colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ тривиально, то накрывающее пространство $\widetilde{\mathcal{E}}$ расслаивается на интегральные подмногообразия, изоморфные $\mathcal{E}^\infty$.

Пример 1.8. Пусть $\mathcal{E} = \{u_t = u_{xx} + uu_x\}$ — уравнение Бюргерса. Рассмотрим одномерное накрытие $\tau \colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, где $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^1$, τ — проекция на первый сомножитель, v — нелокальная переменная, а распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}$ задается полями

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_1 \frac{\partial}{\partial v}, \qquad \widetilde{D}_t = \bar{D}_t + (p_2 + p_0 p_1) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Покажем, что это накрытие эквивалентно одномерному тривиальному накрытию уравнения Бюргерса. Определим отображение

$\alpha\colon \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^1 = \widetilde{\mathcal{E}}$, полагая $\alpha(x,t,p_k,w) = (x,t,p_k,w+p_0)$. Тогда α — послойный диффеоморфизм и

$$\alpha_*\bar{D}_x = \bar{D}_x + \bar{D}_x(w+p_0)\frac{\partial}{\partial v} = \bar{D}_x + p_1\frac{\partial}{\partial v} = \widetilde{D}_x,$$

$$\alpha_*\bar{D}_t = \bar{D}_t + \bar{D}_t(w+p_0)\frac{\partial}{\partial v} = \bar{D}_x + (p_2+p_0p_1)\frac{\partial}{\partial v} = \widetilde{D}_t.$$

Таким образом, отображение α устанавливает эквивалентность накрытий pr_1 и τ.

Приведем теперь одну конструкцию, играющую важную роль в теории накрытий. Пусть $\tau_i\colon \widetilde{\mathcal{E}}_i \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, $i=1,2$, — два накрытия уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Рассмотрим прямое произведение $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \times \widetilde{\mathcal{E}}_2$ и выделим в нем множество $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2$ таких точек (y_1,y_2), $y_1 \in \widetilde{\mathcal{E}}_1$, $y_2 \in \widetilde{\mathcal{E}}_2$, что $\tau_1(y_1) = \tau_2(y_2)$. Тогда определена проекция $\tau_1 \oplus \tau_2\colon \widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2 \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, для которой $(\tau_1 \oplus \tau_2)(y_1,y_2) = \tau_1(y_1) = \tau_2(y_2)$. Очевидно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2 \arrow[dl, "\tau_1(\tau_2)"'] \arrow[dr, "\tau_2(\tau_1)"] \arrow[dd, "\tau_1 \oplus \tau_2"] & \\
\widetilde{\mathcal{E}}_1 \arrow[dr, "\tau_1"'] & & \widetilde{\mathcal{E}}_2 \arrow[dl, "\tau_2"] \\
 & \mathcal{E}^\infty &
\end{tikzcd}$$

в которой отображения $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$ индуцированы проекциями на левый и правый сомножители соответственно. Иначе говоря, $\tau_1 \oplus \tau_2$: $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2 \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ есть сумма Уитни расслоений $\tau_i\colon \widetilde{\mathcal{E}}_i \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, $i=1,2$. Определим теперь на многообразии $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2$ распределение $\mathcal{C}^\oplus$, полагая $\mathcal{C}^\oplus_{(y_1,y_2)} = (\tau_1(\tau_2))_*^{-1}(\mathcal{C}^{(1)}_{y_1}) \cap (\tau_2(\tau_1))_*^{-1}(\mathcal{C}^{(2)}_{y_2})$, $(y_1,y_2) \in \widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2$. Очевидно, это распределение интегрируемо, причем $(\tau_1 \oplus \tau_2)_*\left(\mathcal{C}^\oplus_{(y_1,y_2)}\right) = \mathcal{C}_{(\tau_1 \oplus \tau_2)(y_1,y_2)}$, т. е. проекция $\tau_1 \oplus \tau_2$ и распределение $\mathcal{C}^\oplus$ определяет на многообразии $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2$ структуру накрытия над $\mathcal{E}^\infty$. Это накрытие называется *суммой Уитни* накрытий τ_1 и τ_2. Заметим также, что проекции $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$ являются накрытиями над объектами $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ соответственно.

Координатная интерпретация накрытия $\tau_1 \oplus \tau_2$ такова. Пусть $\mathbb{R}^{N_\alpha}$ — слой накрытия τ_α; $w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, \ldots$ — координаты в слое проекции τ_1; $w_1^{(2)}, w_2^{(2)}, \ldots$ — координаты в слое проекции τ_2. Пусть накрытия τ_1 и τ_2 локально задаются полями $\widetilde{D}_i^{(1)} = \bar{D}_i + X_i^{(1)}$ и $\widetilde{D}_i^{(2)} = \bar{D}_i +$

$+X_i^{(2)}$, $i=1,\ldots,n$, соответственно, где $X_i^{(\alpha)}=\sum\limits_k X_{ik}^{(\alpha)}\dfrac{\partial}{\partial w_k^{(\alpha)}}$, $\alpha=1,2$. Тогда слоем накрытия $\tau_1\oplus\tau_2$ является пространство $\mathbb{R}^{N_1}\oplus\mathbb{R}^{N_2}$ с координатами $w_1^{(1)},w_2^{(1)},\ldots,w_1^{(2)},w_2^{(2)},\ldots$, а распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}_1\oplus\widetilde{\mathcal{E}}_2$ задаётся полями

$$\widetilde{D}_i^{\oplus}=\bar{D}_i+\sum_k X_{ik}^{(1)}\frac{\partial}{\partial w_k^{(1)}}+\sum_l X_{il}^{(2)}\frac{\partial}{\partial w_l^{(2)}},\qquad i=1,\ldots,n.$$

Аналогичным образом определяется сумма Уитни произвольного числа накрытий.

Конструкция суммы Уитни удобна при анализе эквивалентности накрытий. А именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.1. *Пусть τ_1 и τ_2 — два накрытия конечной размерности $N=\dim\tau_1=\dim\tau_2$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Эти накрытия эквивалентны в том и только том случае, если существует такое инвариантное многообразие* *) $\mathcal{X}\subset\widetilde{\mathcal{E}}_1\oplus\widetilde{\mathcal{E}}_2$ *распределения $\widetilde{\mathcal{C}}^{\oplus}$ коразмерности N, для которого ограничения $\tau_1(\tau_2)|_{\mathcal{X}}$ и $\tau_2(\tau_1)|_{\mathcal{X}}$ сюръективны.*

Доказательство состоит в простой проверке определений. Действительно, пусть накрытия τ_1 и τ_2 эквивалентны и α — диффеоморфизм, реализующий их эквивалентность. Положим $\mathcal{X}=\{(y,\alpha(y))\mid y\in\widetilde{\mathcal{E}}_1\}\subset\widetilde{\mathcal{E}}_1\oplus\widetilde{\mathcal{E}}_2$. Очевидно, $\operatorname{codim}\mathcal{X}=N$, $\tau_1(\tau_2)|_{\mathcal{X}}$ и $\tau_2(\tau_1)|_{\mathcal{X}}$ — сюръекции, и, поскольку α_* переводит распределение $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ в $\widetilde{\mathcal{C}}_2$, подмногообразие $\mathcal{X}$ инвариантно относительно распределения $\widetilde{\mathcal{C}}^{\oplus}$. Обратно, пусть $\mathcal{X}\subset\widetilde{\mathcal{E}}_1\oplus\widetilde{\mathcal{E}}_2$ — подмногообразие, удовлетворяющее условиям утверждения. Тогда соответствие $y\mapsto\tau_2(\tau_1)\left((\tau_1(\tau_2))^{-1}(y)\cap\mathcal{X}\right)$, $y\in\widetilde{\mathcal{E}}_1$, определяет изоморфизм расслоений τ_1 и τ_2, являющийся, в силу инвариантности $\mathcal{X}$, эквивалентностью накрытий. $\square$

Введем еще одно понятие.

Определение 1.5. Накрытие $\tau\colon\widetilde{\mathcal{E}}\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ называется *приводимым*, если оно эквивалентно накрытию $\tau_1\oplus\mathrm{pr}_N$, где τ_1 — некоторое накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, а $N>0$. В противном случае накрытие называется *неприводимым*.

Локальный аналог этого определения формулируется естественным образом.

Если $\tau\colon\widetilde{\mathcal{E}}\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$ — приводимое накрытие, то через каждую точку $\theta\in\widetilde{\mathcal{E}}$ можно провести такое инвариантное многообразие $\mathcal{X}$

*) Многообразие $\mathcal{X}\subset\widetilde{\mathcal{E}}$ называется *инвариантным* относительно распределения $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$, если в каждой точке $x\in\mathcal{X}$ имеет место включение $T_x\mathcal{X}\supset\widetilde{\mathcal{C}}_x$.

распределения $\widetilde{\mathcal{C}}$, что ограничение $\tau|_{\mathcal{X}}\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ проекции τ сюръективно и это отображение вместе с ограничением распределения $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\mathcal{X}$ задают в $\mathcal{X}$ структуру накрытия над $\mathcal{E}^\infty$.

При помощи утверждения 1.1 легко доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *Пусть τ_1 и τ_2 — неприводимые накрытия конечной размерности $N = \dim\tau_1 = \dim\tau_2$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Тогда, если сумма Уитни $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2$ этих накрытий приводима, причем коразмерность инвариантных многообразий распределения $\widetilde{\mathcal{C}}^\oplus$ равна N, то почти во всех точках $\theta \in \widetilde{\mathcal{E}}$ накрытие τ_1 эквивалентно накрытию τ_2.*

Доказательство. Рассмотрим инвариантные многообразия распределения $\widetilde{\mathcal{C}}^\oplus$. Почти все они сюръективно проектируются на $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{E}}_2$ при отображениях $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$ соответственно. Действительно, в противном случае их образы при проекциях $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$ являлись бы инвариантными многообразиями распределений $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ соответственно, что противоречит неприводимости накрытий τ_1 и τ_2. Выбирая одно из таких многообразий, мы приходим к утверждению 1.1, и это завершает доказательство. □

Следствие 1.3. *Если τ_1 и τ_2 — одномерные нетривиальные накрытия над уравнением $\mathcal{E}$ и их сумма Уитни приводима, то почти во всех точках $\theta \in \widetilde{\mathcal{E}}$ накрытие τ_1 эквивалентно накрытию τ_2.*

В локальных координатах вопрос о приводимости накрытия сводится к изучению системы линейных дифференциальных уравнений. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.4. *Пусть $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{E}^\infty$ такая область, что многообразие $\widetilde{\mathcal{U}} = \tau^{-1}(\mathcal{U})$ представимо в виде прямого произведения $\mathcal{U} \times \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, \dots, \infty$, отображение $\tau|_{\widetilde{\mathcal{U}}}\colon \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ является проекцией на первый сомножитель, а поля $\widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n$ задают распределение $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{U}}$. Тогда накрытие τ локально неприводимо в том и только том случае, если решения системы уравнений*

$$\widetilde{D}_1(\varphi) = 0, \quad \dots, \quad \widetilde{D}_n(\varphi) = 0, \tag{1.6}$$

где $\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, состоят из одних констант.

Доказательство. Предположим, что накрытие τ локально неприводимо, но существует функция $\varphi \neq \mathrm{const}$, являющаяся решением системы (1.6). Тогда, так как решениями системы

$$\bar{D}_1(\varphi) = 0, \quad \dots, \quad \bar{D}_n(\varphi) = 0$$

являются только константы, то φ зависит хотя бы от одной нелокальной переменной. Без ограничения общности можно считать, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial w_1} \neq 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{U}' \times W$, $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, $W \subseteq \mathbb{R}^N$. Определим диффеоморфизм α: $\mathcal{U}' \times W \to \alpha(\mathcal{U}' \times W)$ формулой $\alpha(x_i, p_\sigma^j, w_1, \ldots, w_N) = (x_i, p_\sigma^j, \varphi, w_2, \ldots, w_N)$. Так как $\alpha_* \widetilde{D}_i = \overline{D}_i + \sum\limits_{j>1} X_{ij} \dfrac{\partial}{\partial w_j}$, то локально накрытие τ эквивалентно накрытию $\mathrm{pr}_1 \oplus \tau_1$ для некоторого накрытия τ_1, т. е. τ приводимо.

Предположим теперь, что решениями системы (1.6) являются только константы, но накрытие τ локально приводимо, т. е. локально эквивалентно некоторому накрытию вида $\tau_1 \oplus \mathrm{pr}_{N'}$, и пусть отображение α устанавливает эту эквивалентность. Тогда, если f — гладкая функция на пространстве накрытия $\mathrm{pr}_{N'}$, то функция $\alpha^*\left((\mathrm{pr}_{N'}(\tau_1))^*(f)\right) = f^* \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ является решением системы (1.6). Очевидно, что найдется такая функция f на пространстве накрытия $\mathrm{pr}_{N'}$, что функция $f^* \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ не является константой. Мы опять получили противоречие, которое доказывает наше утверждение. $\square$

1.7. Накрытия и связности. Пусть τ: $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — произвольное накрытие и пусть $v \in \mathcal{C}_\theta$. Тогда для любой точки $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{E}}$, которая при действии отображения φ проектируется в θ, однозначно определен вектор $\widetilde{v} \in \mathcal{C}_{\widetilde{\theta}}$, для которого $\tau_* \widetilde{v} = v$.

Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$. Напомним, что в расслоении π_∞: $J^\infty(\pi) \to M$ имеется картановская связность, которая векторному полю $X \in D(M)$ ставит в соответствие векторное поле $\widehat{X} \in D(J^\infty(\pi))$ (см. п. 1.4 гл. 4). Все векторные поля $\widehat{X}$, построенные таким образом, касаются $\mathcal{E}^\infty$ и порождают распределение Картана на этом многообразии. Поэтому любому полю $X \in D(M)$ можно однозначно сопоставить такое поле $\widetilde{X} \in D(\widetilde{\mathcal{E}})$, что $\tau_*(\widetilde{X}) = \widehat{X}$. Кроме того, очевидно, что если поля $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in D(\widetilde{\mathcal{E}})$ являются поднятиями полей $X, Y \in D(M)$ соответственно, то $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$. Таким образом, накрытие τ: $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ определяет в расслоении $\widetilde{\pi} = \pi_\infty \circ \tau$: $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ плоскую связность, согласованную с картановской связностью. Легко убедиться в том, что верно и обратное утверждение. Более точно, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — уравнение и τ: $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — некоторое расслоение. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *в расслоении τ задана структура накрытия;*

2) *в расслоении* $\widetilde{\pi} = \pi_\infty \circ \tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow M$ *задана связность* $\nabla^\tau\colon D(M) \to D(\widetilde{\mathcal{E}})$, $\nabla^\tau(X) = \widetilde{X}$, *которая обладает свойствами* а) $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$ *для любых векторных полей* $X, Y \in D(M)$ (*связность* ∇^τ *плоская*); б) $\tau_*(\widetilde{X}) = \widehat{X}$ (∇^τ *согласована с картановской связностью*).

Отметим, что для любой точки $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{E}}$ плоскость $\widetilde{C}_{\widetilde{\theta}}$ порождена векторами вида $\widetilde{X}_{\widetilde{\theta}}$, $X \in D(M)$.

В локальных координатах связность в накрытии $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ определяется соответствием $\overline{D}_i \mapsto \widetilde{D}_i$, $i = 1, \ldots, n$, которое позволяет поднимать на $\widetilde{\mathcal{E}}$ $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы $\Delta\colon \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$. А именно, если $\Delta = \sum\limits_\sigma a_\sigma \overline{D}_\sigma\colon \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$ — некоторый $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор, то его можно продолжить до оператора $\widetilde{\Delta}\colon \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}) \longrightarrow \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, полагая

$$\widetilde{\Delta} = \sum_\sigma a_\sigma \widetilde{D}_\sigma.$$

В частности, если $\mathcal{E}^\infty = J^\infty(\pi)$ и $\pi'\colon E' \to M$ — еще одно векторное расслоение, то для любого элемента $F \in \mathcal{F}(\pi, \pi')$ определено поднятие $\widetilde{\ell}_F$ соответствующего оператора универсальной линеаризации. Следуя гл. 4, положим $\widetilde{Э}_\varphi(F) = \widetilde{\ell}_F(\varphi)$, где φ — сечение индуцированного расслоения $\pi^*(\pi')$. В координатах поле $\widetilde{Э}_\varphi$ имеет вид

$$\widetilde{Э}_\varphi = \sum_{\sigma, i}{}' \widetilde{D}_\sigma(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial p_\sigma^i},$$

где $\varphi_i \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, а штрих у знака суммы означает суммирование по всем внутренним координатам.

1.8. Горизонтальный комплекс де Рама накрытия и нелокальные законы сохранения. Если задано некоторое накрытие $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$, то горизонтальный комплекс де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ также может быть поднят на $\widetilde{\mathcal{E}}$, поскольку входящие в него дифференциалы являются $\mathcal{C}$-дифференциальными операторами. Локально это поднятие описывается следующим образом. Горизонтальные k-формы на $\widetilde{\mathcal{E}}$ имеют вид

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}, \qquad a_{i_1 \ldots i_k} \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}); \tag{1.7}$$

дифференциал $\widetilde{d}$ действует следующим образом

$$\widetilde{d}\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \left(\sum_{j=1}^n \widetilde{D}_j(a_{i_1 \ldots i_k}) dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}. \tag{1.8}$$

Когомологии горизонтального комплекса де Рама на $\widetilde{\mathcal{E}}$ будем обозначать через $\widetilde{H}^k(\widetilde{\mathcal{E}})$. Группу $\widetilde{H}^{n-1}(\widetilde{\mathcal{E}})$ по аналогии с локальной ситуацией будем называть *группой нелокальных законов сохранения уравнения* $\mathcal{E}^\infty$.

Заметим, что горизонтальный комплекс де Рама на $\widetilde{\mathcal{E}}$ может быть определен непосредственно, подобно горизонтальному комплексу де Рама на $\mathcal{E}^\infty$ (т. е. без использования процедуры поднятия $\mathcal{C}$-дифференциальных операторов в пространство накрытия). Введем для этого два понятия.

Векторное поле X на $\widetilde{\mathcal{E}}$ называется *вертикальным*, если $X((\tau\circ\pi_\infty)^*f)=0$ для любой функции $f\in C^\infty(M^n)$.

Дифференциальная форма $\omega\in\Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})$ называется *горизонтальной*, если $\omega(X)=0$ для любого вертикального векторного поля X на $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Горизонтальные формы степени k образуют подмодуль в $\Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})$, который будем обозначать $\Lambda_0^k(\widetilde{\mathcal{E}})$.

Упражнение 1.5. Покажите, что в локальных координатах форма $\omega\in\widetilde{\Lambda}_0^k(\widetilde{\mathcal{E}})$ записывается в виде (1.7).

Дифференциальная форма $\omega\in\Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})$ называется *картановской*, если $\omega(X)=0$ для любого векторного поля X, лежащего в распределении $\widetilde{\mathcal{C}}$.

Картановские формы степени k образуют подмодуль в $\Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})$, который будем обозначать $\mathcal{C}\Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})$. Имеет место разложение

$$\Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})=\sum_{\alpha+\beta=k}\widetilde{\Lambda}_0^\alpha(\widetilde{\mathcal{E}})\wedge\mathcal{C}\Lambda^\beta(\widetilde{\mathcal{E}}).\tag{1.9}$$

Дифференциал де Рама $d\colon\ \Lambda^k(\widetilde{\mathcal{E}})\longrightarrow\Lambda^{k+1}(\widetilde{\mathcal{E}})$ действует на форму $\omega\in\widetilde{\Lambda}_0^\alpha(\widetilde{\mathcal{E}})\wedge\mathcal{C}\Lambda^\beta(\widetilde{\mathcal{E}})$ следующим образом:

$$d\omega=\omega_0+\omega_{\mathcal{C}},$$

где $\omega_0\in\widetilde{\Lambda}_0^{\alpha+1}(\widetilde{\mathcal{E}})\wedge\mathcal{C}\Lambda^\beta(\widetilde{\mathcal{E}})$, $\omega_{\mathcal{C}}\in\widetilde{\Lambda}_0^\alpha(\widetilde{\mathcal{E}})\wedge\mathcal{C}\Lambda_0^{\beta+1}(\widetilde{\mathcal{E}})$. При помощи разложения (1.9) можно ввести отображение

$$\widehat{d}\colon\ \widetilde{\Lambda}_0^\alpha(\widetilde{\mathcal{E}})\wedge\mathcal{C}\Lambda^\beta(\widetilde{\mathcal{E}})\longrightarrow\widetilde{\Lambda}_0^{\alpha+1}(\widetilde{\mathcal{E}})\wedge\mathcal{C}\Lambda^\beta(\widetilde{\mathcal{E}}),$$

полагая $\widehat{d}\omega=\omega_0$.

Легко убедиться в том, что $d_h^2=0$ и что в локальных координатах оператор $\widehat{d}\big|_{\Lambda_0^*(\widetilde{\mathcal{E}})}$ действует по формуле (1.8), т. е. комплекс $\{\Lambda_0^*(\widetilde{\mathcal{E}}),\widehat{d}\}$ — горизонтальный комплекс де Рама на $\widetilde{\mathcal{E}}$.

1.9. Накрывающие уравнения. Рассмотрим накрытие $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. Выясним, когда накрывающее многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$ имеет вид $(\mathcal{E}')^\infty$ для некоторого уравнения $\mathcal{E}' \subset J^l(\pi')$. Для того, чтобы ответить на этот вопрос мы ограничимся следующей ситуацией.

Пусть имеются два расслоения $\pi\colon E \to M$ и $\xi\colon W \to M$ над многообразием M. Тогда имеет место следующая коммутативная диаграмма, где через $\pi_i^*(\xi)\colon W^i \to J^k(\pi)$, $i = 1, 2, \ldots, \infty$, обозначены индуцированные расслоения:

$$\begin{array}{ccccccccc}
W^\infty & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & W^1 & \longrightarrow & W^0 & \longrightarrow & W \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_\infty^*(\xi)=\tau} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1^*(\xi)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi^*(\xi)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi} \\
J^\infty(\pi) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & J^1(\pi) & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M
\end{array}$$

Обозначим через τ проекцию $\pi_\infty^*(\xi)$ и предположим, что в расслоении $\tau\colon W^\infty \to J^\infty(\pi)$ задана структура накрытия. Как было показано в теореме 1.5, это означает, что в расслоении $\pi_\infty \circ \tau$ имеется плоская связность ∇^τ, коэффициентами которой являются функции на $J^\infty(\pi)$, т. е. дифференциальные операторы, действующие из $\Gamma(\pi)$ в $C^\infty(M)$. Пусть $f \in \Gamma(\pi)$ — сечение расслоения π. Тогда в расслоении $j_\infty(f)^*(\tau) \approx \xi$ естественным образом индуцируется плоская связность, которую будем обозначать через $\nabla^\tau(f)$. Другими словами, структура накрытия в τ определяет дифференциальный оператор, который сечению расслоения π сопоставляет плоскую связность в расслоении ξ. Обозначим через $\deg\tau$ порядок этого оператора и назовем его также *порядком накрытия* τ.

Рассмотрим теперь точку $\theta \in W^k$, $\theta = ([f]_x^k, w_0)$, где $x \in M$, $f \in \Gamma(\pi)$ и $w_0 \in \xi^{-1}(x) \subset W$. Так как в расслоении $\xi\colon W \to M$ имеется плоская связность $\nabla^\tau(f)$, мы можем рассмотреть сечение g, проходящее через точку w_0. Пара (f, g) определяет сечение суммы Уитни $\pi \oplus \xi$ расслоений π и ξ. Положим

$$\rho_k(\theta) = [(f, g)]_x^k \in J^k(\pi \oplus \xi).$$

Семейство $\rho = \{\rho_k\}$ отображений $\rho_k\colon W^k \to J^k(\pi \oplus \xi)$ обладает следующими свойствами:

1) отображение ρ_k является вложением для любого k;

2) для любого k имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
W^{k+1} & \xrightarrow{\rho_{k+1}} & J^{k+1}(\pi \oplus \xi) \\
\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle (\pi\oplus\xi)_{k+1,k}} \\
W^k & \xrightarrow{\rho_k} & J^k(\pi \oplus \xi)
\end{array}$$

3) если $k_0 = \max(1, \deg\tau)$ и $\mathcal{E}_\tau = \rho_{k_0}(W^{k_0}) \subset J^{k_0}(\pi \oplus \xi)$, то для всех $k > k_0$ выполнено равенство $\rho_k(W^k) = (\mathcal{E}_\tau)^{(k-k_0)}$;

4) распределение $\widetilde{\mathcal{C}}$ на W^∞ под действием $\rho_{\infty,*}$ отображается на распределение Картана уравнения $(\mathcal{E}_\tau)^\infty$.

Другими словами, пространство накрытия $\tau\colon W^\infty \to J^\infty(\pi)$, рассматриваемое как многообразие с распределением, изоморфно бесконечно продолженному уравнению $(\mathcal{E}_\tau)^\infty$. В случае, когда базой накрытия является уравнение $\mathcal{E}^\infty \subset J^\infty(\pi)$, проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что пространство накрытия $\widetilde{\mathcal{E}}$ изоморфно бесконечно продолженному уравнению $(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_\tau)^\infty = \mathcal{E}^\infty \cap \cap(\mathcal{E}_\tau)^\infty$. Мы будем говорить, что уравнение $\mathcal{E}_\tau$ *накрывает* $\mathcal{E}$. Уравнение $\mathcal{E}_\tau$ будем называть также *накрывающим уравнением* для $\mathcal{E}$.

Если в локальных координатах распределение $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$ задается полями $\widetilde{D}_i = \overline{D}_i + \sum\limits_{j=1}^{N} X_{ij}(x_\alpha, p_\sigma^\beta, w_\gamma)\dfrac{\partial}{\partial w_j}$, $i = 1, \ldots, n$, то накрывающее уравнение $\mathcal{E}_\tau$ локально определяется соотношениями

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_i} = X_{ij}(x_\alpha, u_\sigma^\beta, w_\gamma), \qquad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.10}$$

Тот факт, что связность ∇^τ в расслоении $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ является плоской, означает, что условия совместности системы (1.10) представляют собой дифференциальные следствия уравнения $\mathcal{E}$. Каждому решению этого уравнения соответствует N-параметрическое семейство решений накрывающего уравнения, причем параметры этого семейства являются аналогами констант интегрирования для системы (1.10).

Пример 1.9. Рассмотрим одномерное накрытие уравнения Кортевега — де Фриза $\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xxx}\}$, задаваемое полями:

$$\begin{cases} \widetilde{D}_x = \overline{D}_x + \left(p_0 + \dfrac{1}{6}w^2\right)\dfrac{\partial}{\partial w}, \\[2ex] \widetilde{D}_t = \overline{D}_t + \left(p_2 + \dfrac{1}{3}wp_1 + \dfrac{1}{3}p_0^2 + \dfrac{1}{18}w^2p_0\right)\dfrac{\partial}{\partial w}. \end{cases}$$

Исключив u из системы

$$\begin{cases} w_x = u + \dfrac{1}{6}w^2, \\[2ex] w_t = u_{xx} + \dfrac{1}{3}wu_x + \dfrac{1}{3}u^2 + \dfrac{1}{18}w^2u, \end{cases}$$

получим, что накрывающим уравнением для уравнения Кортевега — де Фриза является модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$w_t = w_{xxx} - \frac{1}{6} w^2 w_x.$$

Связь переменных u и w, даваемая уравнением $w_x = u + \frac{1}{6} w^2$, есть не что иное, как преобразование Миуры — Гарднера [127, 128].

Упражнение 1.6. Покажите, что в одномерном накрытии уравнения Кортевега — де Фриза, задаваемом полями

$$\begin{cases} \widetilde{D}_x = \overline{D}_x + p_0 \dfrac{\partial}{\partial w}, \\ \widetilde{D}_t = \overline{D}_t + (p_2 + \dfrac{1}{2} p_0^2) \dfrac{\partial}{\partial w}, \end{cases}$$

накрывающим уравнением является потенциальное уравнение Кортевега — де Фриза $w_t = w_{xxx} + \frac{1}{2} w_x^2$.

1.10. Горизонтальные когомологии де Рама и накрытия. В этом разделе мы установим связь между группой $(n-1)$-мерных горизонтальных когомологий де Рама $\overline{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$ и накрытиями уравнения $\mathcal{E}^\infty$ специального вида.

Пусть сначала $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — одномерное накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}$, τ — проекция на первый сомножитель, а распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}$ задается полями

$$\widetilde{D}_i = \overline{D}_i + X_i \frac{\partial}{\partial w}, \qquad X_i \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty). \tag{1.11}$$

Сопоставим этому накрытию горизонтальную форму

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i.$$

Условия (1.3) в данном случае имеют вид $\overline{D}_i(X_j) = \overline{D}_j(X_i)$ или $\widehat{d}(\omega) = 0$, т. е. в горизонтальном комплексе де Рама форма ω замкнута. Обратно, горизонтальной замкнутой 1-форме $\omega = \sum_{i=1}^{n} X_i dx_i$ соответствует одномерное накрытие над $\mathcal{E}^\infty$, локально задаваемое полями (1.11).

Нетрудно доказать следующие два утверждения.

Утверждение 1.6. *Пусть $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — одномерное накрытие вида* (1.11), *которому соответствует* 1*-форма ω. Накрытие τ тривиально, тогда и только тогда, когда* *форма ω точна, т. е. ω порождает тривиальный элемент в группе когомологий $\overline{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$.*

Утверждение 1.7. *Пусть $\tau_i\colon \widetilde{\mathcal{E}}_i \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, $i=1,2$ — два одномерных накрытия над $\mathcal{E}^\infty$ вида (1.11), которым соответствуют формы ω_1 и ω_2. Накрытия τ_1 и τ_2 эквивалентны, тогда и только тогда, когда соответствующие классы когомологий $[\omega_1]$ и $[\omega_2]$ совпадают.*

Упражнение 1.7. Докажите утверждения 1.6 и 1.7.

Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между элементами группы $\overline{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$ и классами эквивалентности одномерных накрытий над $\mathcal{E}^\infty$ специального вида (1.11).

Пусть теперь $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — N-мерное накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, где $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N$, τ — проекция на первый сомножитель, а распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}$ задается полями

$$\widetilde{D}_i = \overline{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij}\frac{\partial}{\partial w_j}, \qquad X_{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty), \quad i=1,\ldots,n.$$

Легко видеть, что горизонтальные 1-формы

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}\,dx_i, \qquad j=1,\ldots,N$$

замкнуты. Значит, они порождают некоторые элементы $[\omega_1],\ldots,[\omega_N]$ группы $\overline{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$. Пусть $V(\tau)$ — подпространство линейного пространства $\overline{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$, порожденное элементами $[\omega_1],\ldots,[\omega_N]$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.8. *Пусть $\tau_i\colon \widetilde{\mathcal{E}}_i \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, $i=1,2$ — локально неприводимые накрытия уравнения $\mathcal{E}^\infty$ конечной размерности N, $\widetilde{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N$, τ_i — проекции на первый сомножитель, а распределения на $\widetilde{\mathcal{E}}_i$ задаются полями*

$$\widetilde{D}_j^{(i)} = \overline{D}_j + \sum_k X_{jk}^{(i)}\frac{\partial}{\partial w_k^{(i)}}, \; X_{jk}^{(i)} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty), \quad j=1,\ldots,n, \quad i=1,2.$$

Тогда накрытия τ_1 и τ_2 эквивалентны в том и только в том случае, если $V(\tau_1) = V(\tau_2)$.

Доказательство. Пусть накрытия τ_1 и τ_2 эквивалентны и послойный диффеоморфизм $\alpha\colon \widetilde{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_2$ устанавливает их эквивалентность. Тогда $\alpha_*(\widetilde{D}_j^{(1)}) = \widetilde{D}_j^{(2)}$, т. е. $\alpha^*(X_{jk}^{(2)}) = \widetilde{D}_j^{(1)}(\alpha_k)$, где $\alpha(x_i, p_\sigma^j, w_k^{(1)}) = (x_i, p_\sigma^j, \alpha_1(x_i, p_\sigma^j, w_k^{(1)}), \alpha_2(x_i, p_\sigma^j, w_k^{(1)}), \ldots)$ (см. (1.5)).

Так как $X_{jk}^{(i)} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$, то $\left[\widetilde{D}_j^{(1)}, \dfrac{\partial}{\partial w_s^{(1)}}\right] = 0$ и $\widetilde{D}_j^{(1)}\left(\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial w_s^{(1)}}\right) = 0$ для любых j, k, s. Поскольку накрытие τ_1 неприводимо, из утверждения 1.4 следует, что $\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial w_s^{(1)}} = c_{ks} = \mathrm{const}$, т. е. $\alpha_k = \sum\limits_{s=1}^{N} c_{ks} w_s^{(1)} + \varphi_k(x, p_\sigma^i)$. Отсюда получаем, что

$$\alpha^*(X_{jk}^{(2)}) = \widetilde{D}_j^{(1)}(\alpha_k) = \sum_{s=1}^{N} c_{ks} X_{js}^{(1)} + \overline{D}_j(\varphi_k)$$

и

$$\omega_k^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} X_{jk}^{(2)} dx_j = \sum_{s=1}^{N} c_{ks} \omega_s^{(1)} + \widehat{d}(\varphi_k).$$

Таким образом, $\omega_k^{(2)} \in V(\tau_1)$ при любом $k = 1, \ldots, N$. Проведя аналогичные выкладки для диффеоморфизма α^{-1}, получим, что $\omega_k^{(1)} \in V(\tau_2)$ при любом $k = 1, \ldots, N$. Следовательно $V(\tau_1) = V(\tau_2)$.

Пусть теперь $V(\tau_1) = V(\tau_2) = V$. Так как накрытие τ_1 неприводимо, то можно считать, что формы $\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_N^{(1)}$, определяющие накрытие τ_1, образуют базис пространства V. Тогда имеем разложение

$$[\omega_k^{(2)}] = \sum_{s=1}^{N} c_{ks} [\omega_s^{(1)}], \qquad c_{ks} \in \mathbb{R},$$

или

$$\omega_k^{(2)} = \sum_{s=1}^{N} c_{ks} \omega_s^{(1)} + \widehat{d}(\varphi_k), \qquad \varphi_k \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty).$$

Легко видеть, что подмногообразие пространства $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \oplus \widetilde{\mathcal{E}}_2$, задаваемое уравнениями

$$w_k^{(2)} - \sum_{s=1}^{N} c_{ks} w_s^{(1)} - \varphi_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

является инвариантным подмногообразием распределения $\widetilde{\mathcal{C}}^\oplus$ и имеет коразмерность N. Из утверждения 1.2 следует, что накрытия τ_1 и τ_2 эквивалентны. $\square$

Упражнение 1.8. Докажите, что конечномерное накрытие τ рассматриваемого вида неприводимо тогда и только тогда, когда $\dim V(\tau) = \dim \tau$.

Замечание 1.1. Из сказанного выше следует, что в случае $\dim M = 2$ (т. е. уравнение $\mathcal{E}$ имеет две независимые переменные) имеется взаимно однозначное соответствие между одномерными накрытиями рассматриваемого вида и законами сохранения уравнения $\mathcal{E}$.

1.11. Преобразования Беклунда. Примеры, которые были рассмотрены, показывают, что теория накрытий является удобным и корректным языком описания различных нелокальных эффектов, возникающих при изучении дифференциальных уравнений. В частности, было продемонстрировано, что такие конструкции, как подстановка Коула — Хопфа и преобразование Миуры — Гарднера имеют общую природу и естественным образом интерпретируются в терминах теории накрытий. В § 2 мы увидим, что продолженные структуры Уолквиста — Эстабрука являются частными случаями накрытий, а в этом пункте приведем определение преобразований Беклунда на языке теории накрытий.

Напомним [115, 130], что преобразованием Беклунда между уравнениями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ называется система дифференциальных соотношений на неизвестные функции u и u', которая обладает следующим свойством: если функция u является решением уравнения $\mathcal{E}$ и функции u и u' удовлетворяют этим соотношениям, то функция u также является решением уравнения $\mathcal{E}'$.

На языке накрытий это определение звучит следующим образом [113].

Определение 1.6. *Преобразованием Беклунда* между уравнениями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ называется следующая диаграмма, в которой отображения τ и τ' являются накрытиями

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathcal{E}} \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ \mathcal{E}^\infty & & (\mathcal{E}')^\infty \end{tikzcd}$$

Если $\mathcal{E}^\infty = (\mathcal{E}')^\infty$, то преобразование Беклунда уравнения $\mathcal{E}$ иногда называют автопреобразованием.

Пример 1.10. Рассмотрим следующую систему уравнений $\widetilde{\mathcal{E}}$

$$\widetilde{w}_x = a\sin w, \qquad w_y = \frac{1}{a}\sin\widetilde{w}, \quad a\in\mathbb{R}, \quad a\neq 0,$$

в двумерном расслоении $\pi\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Тогда, оператор нулевого порядка (т. е. морфизм расслоений) $\Delta^+\colon v = w+\widetilde{w}$ определяет накрытие $\tau^+\colon J^\infty(\pi)\to J^\infty(\xi)$, где $\xi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ (см. п. 1.4). Ограничение этого накрытия на $\widetilde{\mathcal{E}}^\infty$ определяет накрытие уравнения $\mathcal{E} = \{v_{xy} = \sin(v)\}$ уравнением $\widetilde{\mathcal{E}}^\infty$. Аналогичным образом оператор Δ^-: $v = w - \widetilde{w}$ определяет еще одно накрытие $\tau^-\colon \widetilde{\mathcal{E}}^\infty\to\mathcal{E}^\infty$. Таким образом, мы имеем автопреобразование Беклунда уравнения sin-Гордон

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{\mathcal{E}}^\infty \arrow[dl, "\tau^+"'] \arrow[dr, "\tau^-"] & \\ \mathcal{E}^\infty & & \mathcal{E}^\infty \end{tikzcd}$$

которое совпадает с открытым Беклундом [83].

Укажем один естественный способ построения преобразований Беклунда. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{E}}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_1"] & \widetilde{\mathcal{E}}_2 \arrow[d, "\tau_2"] \\ \mathcal{E}_1^\infty & \mathcal{E}_2^\infty \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки — накрытия, а отображение φ — изоморфизм. Тогда, очевидно, $\tau_2 \circ \varphi\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}_2^\infty$ — накрытие и мы показали, что уравнения $\mathcal{E}_1^\infty$ и $\mathcal{E}_2^\infty$ связаны преобразованием Беклунда.

Следующие примеры показывают, что известные преобразования Беклунда могут быть получены именно таким способом.

Пример 1.11. Рассмотрим модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + 6u^2 u_x \tag{1.12}$$

Векторные поля $\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + X$, $\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + T$, где

$$X = p_0 \frac{\partial}{\partial w} + (p_0 + \alpha \sin(w + \widetilde{w})) \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}},$$

$$T = (p_2 + p_0^3) \frac{\partial}{\partial w} + (p_2 + 2\alpha p_1 \cos(w + \widetilde{w}) + 2p_0^3 + \\ + 2\alpha p_0^2 \sin(w + \widetilde{w}) + 2\alpha^2 p_0 + \alpha^3 \sin(w + \widetilde{w})) \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}},$$

определяют двумерное накрытие $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}}^\infty = \mathbb{R}^2 \times \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. С помощью замены переменных $w \mapsto \widetilde{w}$, $\widetilde{w} \mapsto w$ мы получаем новое накрытие. Следовательно, если $u(t,x)$ — решение уравнения (1.12), а функции $w(t,x)$ и $\widetilde{w}(t,x)$ удовлетворяют соотношениям

$$u = w_x, \qquad \widetilde{w}_x - w_x = \alpha \sin(w + \widetilde{w}),$$

то функция $\widetilde{u} = \widetilde{w}_x$ также является решением уравнения (1.12). Это хорошо известное преобразование Беклунда модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза [120].

Пример 1.12. Рассмотрим уравнение Кортевега — де Фриза

$$u_t = u_{xxx} + 12uu_x$$

Над этим уравнением имеется двумерное накрытие, определяемое полем X следующего вида

$$X = p_0 \frac{\partial}{\partial w} + (\alpha - p_0 - (w - \widetilde{w})^2) \frac{\partial}{\partial \widetilde{w}}$$

(вычисление поля T мы оставляем читателю). Как и в предыдущем примере, помощью замены $w \mapsto \widetilde{w}$, $\widetilde{w} \mapsto w$ [120], мы получаем преобразование Беклунда

$$u = w_x, \qquad \widetilde{w}_x + w_x = \alpha - (w - \widetilde{w})^2, \qquad \widetilde{u} = \widetilde{w}_x.$$

§ 2. Примеры вычислений: накрытия

В этом параграфе мы найдем накрытия специального вида для некоторых популярных уравнений математической физики с двумя независимыми переменными.

Процесс построения накрытий для конкретных дифференциальных уравнений представляет собой вычислительную процедуру, аналогичную той, которая применялась для нахождения симметрий дифференциальных уравнений. Именно, накрывающее пространство $\widetilde{\mathcal{E}}$ любого накрытия локально диффеоморфно прямому произведению $\mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N$, а отображение τ: $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ является проекцией на первый сомножитель. Поэтому локально накрытие определяется распределением $\widetilde{\mathcal{C}}$, которое в случае уравнения с двумя независимыми переменными задается двумя полями $\widetilde{D}_1 = \overline{D}_1 + X_1$ и $\widetilde{D}_2 = \overline{D}_2 + X_2$, где $X_i = \sum\limits_{j=1}^{N} X_{ij} \dfrac{\partial}{\partial w_j}$, $X_{ij} \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, $i = 1, 2$; $w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_N$ — координаты в слое $\mathbb{R}^N$ (нелокальные переменные), $0 < N \leqslant \infty$. Условие интегрируемости этого распределения $[\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2] = 0$ имеет вид

$$[\overline{D}_1, X_2] + [X_1, \overline{D}_2] + [X_1, X_2] = 0. \tag{2.1}$$

Это соотношение представляет собой систему дифференциальных уравнений на функции $X_{ij} \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, описывающие всевозможные

N-мерные накрытия уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Решив эту систему, мы найдем все накрытия рассматриваемого уравнения. При установлении эквивалентности накрытий мы пользуемся следствием 1.3.

2.1. Накрытия уравнения Бюргерса [113]. Рассмотрим уравнение Бюргерса

$$\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xx}\}.$$

В качестве внутренних переменных на $\mathcal{E}^\infty$ возьмем функции $x, t, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ (см. п. 4.1 гл. 4).

Полные производные $\bar{D}_x = \bar{D}_1$ и $\bar{D}_t = \bar{D}_2$ на $\mathcal{E}^\infty$ имеют вид

$$\bar{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_k p_{k+1} \frac{\partial}{\partial p_k}, \qquad \bar{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \bar{D}_x^k (p_0 p_1 + p_2) \frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Пусть распределение на $\tilde{\mathcal{E}}$ задается полями

$$\tilde{D}_x = \bar{D}_x + X, \qquad \tilde{D}_t = \bar{D}_t + T,$$

где

$$X = \sum_j X_j \frac{\partial}{\partial w_j}, \qquad T = \sum_k T_k \frac{\partial}{\partial w_k}, \qquad X_j, T_k \in \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{E}}).$$

Тогда условие интегрируемости (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \sum_{i \geqslant 0} p_{i+1} \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial t} - \sum_{j \geqslant 0} \bar{D}_x^j (p_0 p_1 + p_2) \frac{\partial X}{\partial p_j} + [X, T] = 0, \quad (2.2)$$

где операторы $\dfrac{\partial}{\partial p_k}$ действуют на поля X и T покомпонентно (коэффициенты полей X и T зависят от $x, t, p_1, \ldots, p_k, \ldots, w_1, \ldots, w_N$). Мы ограничимся случаем, когда все функции X_j, T_k не зависят от переменных x, t и p_i, $i > 1$. В этом случае уравнение (2.2) записывается в виде

$$p_1 \frac{\partial T}{\partial p_0} + p_2 \frac{\partial T}{\partial p_1} - (p_0 p_1 + p_2) \frac{\partial X}{\partial p_0} - \\ -(p_1^2 + p_0 p_2 + p_3) \frac{\partial X}{\partial p_1} + [X, T] = 0. \quad (2.3)$$

Левая часть (2.3) полиномиально зависит от p_2 и p_3. Поэтому коэффициенты при p_2 и p_3 равны нулю, откуда следует, что функция X не зависит от p_1 и $\dfrac{\partial T}{\partial p_1} = \dfrac{\partial X}{\partial p_0}$, т. е.

$$T = p_1 \frac{\partial X}{\partial p_0} + R, \quad (2.4)$$

где коэффициенты поля R не зависят от p_1. Подставляя теперь соотношение (2.4) в уравнение (2.3), получаем

$$p_1^2 \frac{\partial^2 X}{\partial p_0^2} + p_1\left(\frac{\partial R}{\partial p_0} - p_0\frac{\partial X}{\partial p_0} + \left[X, \frac{\partial X}{\partial p_0}\right]\right) + [X, R] = 0.$$

Так как поля X и R не зависят от p_1, последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 X}{\partial p_0^2} = 0, \\ &\frac{\partial R}{\partial p_0} = p_0\frac{\partial X}{\partial p_0} + \left[X, \frac{\partial X}{\partial p_0}\right], \\ &[X, R] = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из первого уравнения этой системы следует, что

$$X = p_0 A + B, \tag{2.6}$$

где коэффициенты полей A и B зависят уже только от переменных w_k. Иначе говоря, A и B являются полями в слое накрытия $\mathbb{R}^N$. С учетом (2.6) второе уравнение системы (2.5) приобретает вид $\dfrac{\partial R}{\partial p_0} = p_0 A + [A, B]$, или

$$R = \frac{1}{2} p_0^2 A + p_0[A, B] + C, \tag{2.7}$$

где C — поле на $\mathbb{R}^N$. Наконец, подставляя выражения (2.6) и (2.7) в последнее уравнение системы (2.5), получаем уравнение

$$p_0^2\left([A,[A,B]] + \frac{1}{2}[B, A]\right) + p_0([A, C] + [B, [A, B]]) + [B, C] = 0,$$

которое эквивалентно соотношениям

$$[A,[A,B]] = \frac{1}{2}[A, B], \quad [B,[B,A]] = [A, C], \quad [B, C] = 0. \tag{2.8}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Всякое накрытие уравнения Бюргерса, где коэффициенты полей X и T не зависят от переменных t, x и p_k, $k > 1$, определяется полями вида*

$$\widetilde{D}_x = \overline{D}_x + p_0 A + B,$$

$$\widetilde{D}_t = \overline{D}_t + \left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2\right)A + p_0[A, B] + C,$$

где A, B и C — произвольные поля в слое накрытия, удовлетворяющие соотношениям (2.8).

Замечание 2.1. Отметим здесь одно замечательное обстоятельство. Рассмотрим свободную алгебру Ли $\mathcal{G}$ с образующими a, b и c, которые удовлетворяют соотношениям

$$[a,[a,b]]=\frac{1}{2}[a,b], \qquad [b,[b,a]]=[a,c], \qquad [b,c]=0.$$

Тогда алгебра Ли, порожденная векторными полями A,B и C, является образом алгебры $\mathcal{G}$ при некотором ее представлении в алгебре Ли векторных полей на многообразии $\mathbb{R}^N$. Таким образом, теорема 2.1 показывает, что накрытия уравнения Бюргерса рассматриваемого класса однозначно определяются представлениями алгебры $\mathcal{G}$ в векторных полях. По этой причине мы будем называть алгебру Ли $\mathcal{G}$ *универсальной*.

Замечание 2.2. Универсальные алгебры впервые появились в так называемых *продолженных структурах Уолквиста — Эстабрука* [155, 105]. Примеры универсальных алгебр, построенные для различных эволюционных уравнений, а также некоторые их конкретные представления можно найти в работах [94]. Отметим, что понятие продолженной структуры Уолквиста — Эстабрука является частным случаем понятия накрытия.

Опишем теперь одномерные накрытия уравнения Бюргерса рассматриваемого типа. Пусть w — нелокальная переменная. Тогда $A=\alpha\dfrac{\partial}{\partial w}$, $B=\beta\dfrac{\partial}{\partial w}$, $C=\gamma\dfrac{\partial}{\partial w}$, где $\alpha,\beta,\gamma\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, и (2.8) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений на функции α,β и γ.

Рассмотрим сначала случай $A=0$. Тогда система (2.8) сводится к соотношению $[B,C]=0$, или $\beta'\gamma-\beta\gamma'=0$, где штрих обозначает производную по w. Если поле B отлично от нуля, то координату w на $\mathbb{R}$ можно локально выбрать так, что $B=\dfrac{\partial}{\partial w}$, откуда следует, что $\gamma=\mathrm{const}$. Отметим, что, выбирая новую координату в слое, мы в действительности переходим к новому накрытию, эквивалентному исходному. Если же $B=0$, то $C\neq 0$ и этот случай рассматривается аналогично. Таким образом, координату w локально всегда можно выбрать так, чтобы $\beta,\gamma=\mathrm{const}$. Поэтому система полей

$$\widetilde{D}_x=\overline{D}_x+\beta\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \widetilde{D}_t=\overline{D}_t+\gamma\frac{\partial}{\partial w}$$

имеет нетривиальное ядро, порожденное функцией $w-\beta x-\gamma t$. Иначе говоря, многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$ расслаивается на инвариантные подмногообразия вида $\mathcal{X}_\lambda = \{w - \beta x - \gamma t = \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, изоморфные многообразию $\mathcal{E}^\infty$, т. е. рассматриваемое накрытие тривиально.

Перейдем теперь к случаю $A \neq 0$ и изучим структуру возникающих при этом накрытий в окрестности неособой точки поля A. Выберем в рассматриваемой окрестности координату w так, чтобы $A = \dfrac{\partial}{\partial w}$. Тогда система (2.8) принимает вид

$$\beta'' = \frac{1}{2}\beta', \qquad (\beta')^2 - \beta\beta'' = \gamma', \qquad \beta'\gamma = \gamma'\beta$$

и имеет решения двух типов:

$$\beta = \mathrm{const}, \qquad \gamma = \mathrm{const}$$

и

$$\beta = \mu e^{w/2} + \nu, \quad \gamma = -\frac{\nu}{2}(\mu e^{w/2} + \nu), \quad \mu = \mathrm{const} \neq 0, \quad \nu = \mathrm{const} \tag{2.9}$$

Все накрытия первого типа попарно эквивалентны и заменой координат $w \mapsto w - \beta x - \gamma t$ приводятся к виду:

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Рассмотрим накрытия второго типа и обозначим накрытие, задаваемое соотношениями (2.9) через $\tau_{\mu,\nu}$. Тогда накрытия τ_{μ_1,ν_1} и τ_{μ_2,ν_2} эквивалентны в том и только том случае, если $\operatorname{sign}\mu_1 = \operatorname{sign}\mu_2$ и $\nu_1 = \nu_2$.

Итак, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Каждое нетривиальное одномерное накрытие уравнения Бюргерса $\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xx}\}$, где коэффициенты полей X и T не зависят от переменных t, x и p_k, $k > 1$, локально эквивалентно одному из следующих:*

$$\tau^0: \quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\tau_\nu^+: \quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + (p_0 + e^{w/2} + \nu)\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2 + \frac{1}{2}e^{w/2}p_0 - \frac{\nu}{2}e^{w/2} - \frac{\nu^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\tau_\nu^-:\quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + (p_0 - e^{w/2} + \nu)\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2 - \frac{1}{2}e^{w/2}p_0 + \frac{\nu}{2}e^{w/2} - \frac{\nu^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$\nu = \mathrm{const}$. *Эти накрытия попарно неэквивалентны.*

В каждом из перечисленных случаев многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$ контактно диффеоморфно некоторому многообразию вида $(\mathcal{E}')^\infty$, где $\mathcal{E}'$ — эволюционное уравнение второго порядка. Соответствующие замены переменных имеют вид

$u = w_x$ — для накрытия τ^0;

$u = w_x - e^{w/2} - \nu$ — для накрытий τ_ν^+;

$u = w_x + e^{w/2} - \nu$ — для накрытий τ_ν^-.

Упражнение 2.1. Выпишите накрывающее уравнение в каждом из перечисленных случаев.

Замечание 2.3. Аналогичные, но более громоздкие рассуждения, позволяют описать накрытия более высоких размерностей над уравнением Бюргерса. Так, например, имеется шесть 3-параметрических и по одному 4-х и 1-параметрических семейств нетривиальных и попарно неэквивалентных двумерных накрытий.

2.2. Накрытия уравнения Кортевега — де Фриза. Рассмотрим теперь уравнение Кортевега — де Фриза

$$\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xxx}\}.$$

В качестве внутренних переменных на $\mathcal{E}^\infty$ возьмем функции $x, t, p_1, \ldots, p_k, \ldots$ Полные производные на $\mathcal{E}^\infty$ имеют вид

$$\bar{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_k p_{k+1}\frac{\partial}{\partial p_k}, \qquad \bar{D}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \bar{D}_x^k(p_0p_1 + p_3)\frac{\partial}{\partial p_k}.$$

Пусть распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}$ задается полями

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + X, \qquad \widetilde{D}_t = \bar{D}_t + T,$$

где

$$X = \sum_j X_j\frac{\partial}{\partial w_j}, \quad T = \sum_k T_k\frac{\partial}{\partial w_k}, \quad X_j, T_k \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}).$$

Мы будем решать уравнение (2.1) в предположении, что все функции X_j, T_k не зависят от переменных x, t и p_i, $i > 2$. Тогда рассуждения, аналогичные проведенным в п. 2.1, приводят к следующему результату.

Теорема 2.3. *Всякое накрытие уравнения Кортевега — де Фриза, где коэффициенты полей X и T не зависят* *от переменных t, x и p_k, $k > 2$, определяется полями вида*

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0^2 A + p_0 B + C,$$

$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(2p_0p_2 - p_1^2 + \frac{2}{3}p_0^3 A\right) + \left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right)B + \\ + p_1[B, C] + \frac{1}{2}p_0^2[B,[C,B]] + p_0[C,[C,B]] + D,$$

где A, B, C, D — векторные поля в слое накрытия, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} [A, B] = [A, C] = [C, D] = 0, \\ [B,[B,[B,C]]] = 0, \quad [B, D] + [C,[C,[C,B]]] = 0, \\ [A, D] + \frac{1}{2}[C, B] + \frac{3}{2}[B,[C,[C,B]]] = 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

З а м е ч а н и е 2.4. Свободная алгебра Ли с четырьмя образующими и соотношениями (2.10) является универсальной алгеброй уравнения Кортевега — де Фриза. Она появилась при исследовании продолженных структур [155]. Известно, что эта алгебра бесконечномерна [136].

Опишем одномерные накрытия уравнения Кортевега — де Фриза. Легко видеть, что для того, чтобы накрытие было нетривиальным, необходимо, чтобы хотя бы одно из полей A или B не было равно нулю. Предположим, что $A \neq 0$. Тогда нелокальную переменную w можно выбрать так, что $A = \dfrac{\partial}{\partial w}$, и из (2.10) легко следует, что

$$B = \beta\frac{\partial}{\partial w}, \qquad C = \gamma\frac{\partial}{\partial w}, \qquad D = \delta\frac{\partial}{\partial w},$$

где β, γ, δ — константы. Таким образом, любое накрытие над уравнением КдФ с $A \neq 0$ эквивалентно накрытию, задаваемому полями

$$\begin{aligned} X &= (p_0^2 + \beta p_0 + \gamma)\frac{\partial}{\partial w}, \\ T &= \left(2p_0p_2 - p_1^2 + \frac{2}{3}p_0^3 + \beta\left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right) + \delta\right)\frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из результатов п. 1.6 легко следует, что накрытия вида (2.11) нетривиальны. Для того, чтобы проверить есть ли среди этих накрытий эквивалентные, рассмотрим сумму Уитни двух накрытий вида (2.11)

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + (p_0^2 + \beta_1 p_0 + \gamma_1)\frac{\partial}{\partial w_1} + (p_0^2 + \beta_2 p_0 + \gamma_2)\frac{\partial}{\partial w_2},$$

$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(2p_0p_2 - p_1^2 + \frac{2}{3}p_0^3 + \beta_1\left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right) + \delta_1\right)\frac{\partial}{\partial w_1} + \\ + \left(2p_0p_2 - p_1^2 + \frac{2}{3}p_0^3 + \beta_2\left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right) + \delta_2\right)\frac{\partial}{\partial w_2}$$

и линейную систему

$$\widetilde{D}_x(f) = 0, \qquad \widetilde{D}_t(f) = 0,$$

где f — функция на пространстве суммы Уитни. Легко видеть, что эта система эквивалентна следующей

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + \gamma_2\frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, && \frac{\partial f}{\partial t} + \delta_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + \delta_2\frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, \\ &\beta_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + \beta_2\frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, && \frac{\partial f}{\partial w_1} + \frac{\partial f}{\partial w_2} = 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $f = f(x, t, w_1, w_2)$. Решения (2.12) отличны от констант тогда и только тогда, когда $\beta_1 = \beta_2$. Используя (2.12), легко показать, что классы эквивалентностей накрытий с $A \neq 0$ параметризуются величиной β и их представители могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} X &= (p_0^2 + \beta p_0)\frac{\partial}{\partial w}, \\ T &= \left(2p_0p_2 - p_1^2 + \frac{2}{3}p_0^3 + \beta\left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Предположим теперь, что $A = 0$. Тогда $B \neq 0$ и в подходящей системе координат поле B может быть записано как $\dfrac{\partial}{\partial w}$. Тогда соотношения (2.10) преобразуется к следующему виду

$$\frac{\partial^3 C}{\partial w^3} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial w} = 3\left[\frac{\partial C}{\partial w}, C\right], \quad \frac{\partial D}{\partial w} = \left[C, \left[C, \frac{\partial C}{\partial w}\right]\right], \quad [C, D] = 0.$$

Эта система имеет решения двух типов:

$$C = \left(\frac{1}{6}w^2 + \beta w + \gamma\right)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad D = \left(\beta^2 - \frac{2}{3}\gamma\right)\frac{\partial}{\partial w}$$

и

$$C = \gamma\frac{\partial}{\partial w}, \qquad D = \delta\frac{\partial}{\partial w},$$

где β, γ, δ — константы. Соответственно мы имеем два типа накрытий:

$$X = \left(p_0 + \frac{1}{6}w^2 + \beta w + \gamma\right)\frac{\partial}{\partial w},$$
$$T = \left(p_2 + p_1\left(\frac{1}{3}w + \beta\right) + \frac{1}{3}p_0^2 + \left(\frac{1}{18}w^2 + \frac{1}{3}\beta w + \beta^2 - \frac{1}{3}\gamma\right)p_0 + \right.$$
$$\left. + \left(\beta^2 - \frac{2}{3}\gamma\right)\left(\frac{1}{6}w^2 + \beta w + \gamma\right)\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

и

$$X = \left(p_0 + \gamma\right)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad T = \left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2 + \delta\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

В первом случае, делая замену $w \mapsto w - \frac{1}{3}\beta$, мы можем преобразовать накрытие к виду

$$X = \left(p_0 + \frac{1}{6}w^2 + \alpha\right)\frac{\partial}{\partial w}, \tag{2.14}$$
$$T = \left(p_2 + \frac{1}{3}wp_1 + \frac{1}{3}p_0^2 + \left(\frac{1}{18}w^2 - \frac{1}{3}\alpha\right)p_0 - \frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{6}w^2 + \alpha\right)\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

где α — произвольная постоянная. Накрытия этого семейства попарно неэквивалентны.

Во втором случае все накрытия эквивалентны между собой. В качестве представителя этого класса можно взять, например,

$$X = p_0\frac{\partial}{\partial w}, \qquad T = \left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right)\frac{\partial}{\partial w}. \tag{2.15}$$

Легко видеть, что все накрытия (2.13)–(2.15) попарно неэквивалентны. Таким образом, мы получили полное описание одномерных накрытий уравнения КдФ рассматриваемого класса. Подведем итог.

Утверждение 2.4. *Каждое нетривиальное одномерное накрытие уравнения Кортевега — де Фриза $\mathcal{E} = \{u_t = uu_x + u_{xxx}\}$, где коэффициенты полей X и T не зависят от переменных t, x и p_k, $k > 2$, локально эквивалентно одному из следующих*

$$\tau^0: \quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0\frac{\partial}{\partial w},$$
$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_2 + \frac{1}{2}p_0^2\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\tau^1_\alpha\colon\quad \widetilde{D}_x=\bar{D}_x+\left(p_0+\frac{1}{6}w^2+\alpha\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\widetilde{D}_t=\bar{D}_t+\left(p_2+\frac{1}{3}wp_1+\frac{1}{3}p_0^2+\left(\frac{1}{18}w^2-\frac{1}{3}\alpha\right)p_0-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\alpha\left(\frac{1}{6}w^2+\alpha\right)\right)\frac{\partial}{\partial w},\qquad \alpha\in\mathbb{R},$$

$$\tau^2_\beta\colon\quad \widetilde{D}_x=\bar{D}_x+\left(p_0^2+\beta p_0\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\widetilde{D}_t=\bar{D}_t+\left(2p_0p_2-p_1^2+\frac{2}{3}p_0^3+\beta\left(p_2+\frac{1}{2}p_0^2\right)\right)\frac{\partial}{\partial w},\qquad \beta\in\mathbb{R}.$$

Эти накрытия попарно неэквивалентны.

В каждом из перечисленных случаев многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$ контактно диффеоморфно некоторому многообразию вида $(\mathcal{E}')^\infty$, где $\mathcal{E}'$ — эволюционное уравнение третьего порядка. Соответствующие замены переменных имеют вид

$u=w_x$ — для накрытия τ^0;

$u=w_x-\dfrac{1}{6}w^2-\dfrac{3}{2}\alpha$ — для накрытий τ^1_α;

$u=-\alpha\pm\sqrt{\beta^2+w_x}$ — для накрытий τ^2_β.

Как мы уже видели (см. п. 1.9), накрывающим уравнением для накрытия τ^0 является потенциальное уравнение Кортевега — де Фриза $w_t=w_{xxx}+\dfrac{1}{2}w_x^2$, а для накрытия τ^1_α, при $\alpha=0$, модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза $w_t=w_{xxx}-\dfrac{1}{6}w^2w_x$.

2.3. Накрытия уравнения $u_t=\dfrac{\partial}{\partial x}(B(u)u_x)$. Приведем без доказательства еще один результат вычисления накрытий [36].

Утверждение 2.5. *Каждое нетривиальное одномерное или двумерное накрытие уравнения $\mathcal{E}=\{u_t=\dfrac{\partial}{\partial x}(B(u)u_x)\}$, где коэффициенты полей X и T не зависят от переменных t,x и p_k, $k>1$, локально эквивалентно одному из следующих*

$$\tau^1\colon\quad \widetilde{D}_x=\bar{D}_x+p_0\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\widetilde{D}_t=\bar{D}_t+B(p_0)\,p_1\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\tau_1^2\colon\quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + p_0\frac{\partial}{\partial w_1} + w_1\frac{\partial}{\partial w_2},$$
$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + B(p_0)\,p_1\frac{\partial}{\partial w_1} + \widetilde{B}(p_0)\frac{\partial}{\partial w_2},$$

$$\tau_2^2\colon\quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + \frac{\partial}{\partial w_1} - p_0 w_1\frac{\partial}{\partial w_2},$$
$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + (\widetilde{B}(p_0) - w_1 B(p_0)\,p_1)\frac{\partial}{\partial w_2},$$

Неприводимых накрытий, размерность которых больше 2, нет.

В заключение рассмотрим два примера, в которых исходное уравнение не является эволюционным.

2.4. Накрытия уравнения f-Гордон. Пусть $\mathcal{E}_f = \{u_{xy} = f\}$, где $f = f(u)$ — произвольная функция, зависящая от u. Выберем в качестве координат на $\mathcal{E}_f^\infty$ функции $x, y, u, p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k, \ldots$, где $x = x_1$, $y = x_2$, $u = p_{(0,0)}$, $p_k = p_{(k,0)}$, $q_k = p_{(0,k)}$. Рассмотрим такие накрытия $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}}_f = \mathcal{E}_f^\infty \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{E}_f^\infty$, $\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + X$, $\widetilde{D}_y = \bar{D}_y + Y$, $\bar{D}_x = \bar{D}_1$, $\bar{D}_y = \bar{D}_2$, что коэффициенты полей X и Y не зависят от переменных x, y и p_i, q_i, $i > 1$. В этом случае условия (2.1) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial q_1} - \dfrac{\partial Y}{\partial p_1} = 0, \\ p_1\dfrac{\partial Y}{\partial u} + f\left(\dfrac{\partial Y}{\partial q_1} - \dfrac{\partial X}{\partial p_1}\right) - q_1\dfrac{\partial X}{\partial u} + [X, Y] = 0. \end{cases}$$

Результаты анализа этой системы в случае одномерных накрытий рассматриваемого типа следующие.

Утверждение 2.6. *Каждое нетривиальное одномерное накрытие уравнения $\mathcal{E} = \{u_{xy} = f\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial u} \neq 0$, где коэффициенты полей X и Y не зависят от переменных x, y и p_i, q_i, $i > 1$, локально $\left(\text{в окрестности любой точки, где } \dfrac{\partial^2 X}{\partial p_1^2} \neq 0 \text{ и } \dfrac{\partial Y^2}{\partial q_1^2} \neq 0\right)$ эквивалентно следующему*

$$\tau_\alpha^f\colon\quad \widetilde{D}_x = \bar{D}_x + (\alpha p_1^2 + 2F)\frac{\partial}{\partial w},\quad \widetilde{D}_y = \bar{D}_y + (q_1^2 + 2\alpha F)\frac{\partial}{\partial w},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $F(u) = \int\limits_0^u f(u)\,du$. Эти накрытия попарно неэквивалентны при разных значениях параметра α.

Рассмотрим уравнения $\mathcal{E}_f$ и $\mathcal{E}_g$ и приравняем правые части равенств, определяющих накрытие τ^f_α, к правым частям соответствующих равенств, определяющих накрытие τ^g_β. В результате мы получим систему

$$\begin{aligned} \alpha u_x^2 + 2F(u) &= \beta v_x^2 + 2G(v), \\ u_y^2 + 2\alpha F(u) &= v_y^2 + 2\beta G(v). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Простая проверка показывает, что если $v = v(x, y)$ — такое решение уравнения $\mathcal{E}_g$, что система (2.16) совместна, то любая функция $u = u(x, y)$, являющаяся решением (2.16) при заданном значении v, и для которой $\alpha u_x + u_y \neq 0$, является решением уравнения $\mathcal{E}_f$. Таким образом, система (2.16) определяет «частичное преобразование Беклунда» между уравнением $\mathcal{E}_f$ и $\mathcal{E}_g$.

Замечание 2.5. В работе [135] изучались продолженные структуры уравнения $\mathcal{E}_f$. Полученный результат можно переформулировать следующим образом: уравнение $\mathcal{E}_f$ обладает нетривиальными одномерными накрытиями, для которых коэффициенты полей X и Y линейны по p_1 и q_1 соответственно, в том и только том случае, если функция f удовлетворяет уравнению $\dfrac{d^2 f}{du^2} = af$, $a = \mathrm{const}$. В частности, если $f = \sin u$, то многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}$ контактно диффеоморфно $(\mathcal{E}_{\sin u})^\infty$ и соответствующее накрытие представляет собой классическое преобразование Беклунда уравнения sin-Гордон. Если $f = e^u$, то $\widetilde{\mathcal{E}}_f$ контактно диффеоморфно многообразию $(\mathcal{E}_0)^\infty$ и соответствующее накрытие определяет преобразование Беклунда между уравнением Лиувилля и волновым уравнением.

2.5. Накрытия уравнения $u_{xx} + u_{yy} = \varphi(u)$ [113]. Рассмотрим теперь уравнение $\mathcal{E}_\varphi = \{u_{xx} + u_{yy} = \varphi(u)\}$, где φ — некоторая гладкая функция, зависящая от u. Выберем в качестве координат на $\mathcal{E}^\infty$ функции $x, y, u, p_1, q_1, \ldots, p_k, q_k, \ldots$, где $p_k = p_{(k,0)}$, $q_k = p_{(k-1,1)}$. Тогда полные производные $\bar{D}_x$ и $\bar{D}_y$ на $\mathcal{E}^\infty$ имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{D}_x &= \frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_k p_{k+1} \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_k q_{k+1} \frac{\partial}{\partial q_k}, \\ \bar{D}_y &= \frac{\partial}{\partial y} + q_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_k q_{k+1} \frac{\partial}{\partial p_k} + \sum_k \bar{D}_x^{k-1}(\varphi - p_2) \frac{\partial}{\partial q_k}. \end{aligned} \right.$$

Положим $\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + X$, $\widetilde{D}_y = \bar{D}_y + Y$ и предположим, что коэффициенты полей X и Y зависят только от переменных $w_1, \ldots, w_s, u, p_1, q_1$.

В этом случае условия (2.1) преобразуются к виду

$$\frac{\partial Y}{\partial p_1}+\frac{\partial X}{\partial q_1}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial q_1}-\frac{\partial X}{\partial p_1}=0,$$
$$p_1\frac{\partial Y}{\partial u}-q_1\frac{\partial X}{\partial u}-\varphi\frac{\partial X}{\partial q_1}+[X,Y]=0. \tag{2.17}$$

Введем новые комплексные переменные $z=p_1+iq_1$, $H=X+iY$. Тогда из первых двух уравнений (2.17) следует, что H — аналитическая функция переменной z:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty}H_k z^k,\quad H_k=H_k(w,u)=X_k+iY_k, \tag{2.18}$$

а третье уравнение этой системы приобретает вид

$$\bar z\frac{\partial H}{\partial u}-z\frac{\partial \overline{H}}{\partial u}+\varphi\left(\frac{\partial H}{\partial z}-\frac{\partial \overline{H}}{\partial z}\right)-[H,\overline{H}]=0, \tag{2.19}$$

Подставляя (2.18) в (2.19), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\bar z z^k\frac{\partial H_k}{\partial u}-z\bar z^k\frac{\partial \overline{H}_k}{\partial u}+k\varphi(z^{k-1}H_k-\bar z^{k-1}\overline{H}_k)\right)=$$
$$=\sum_{k,j=0}^{\infty}z^k\bar z^j[H_k,\overline{H}_j],$$

откуда следует, что

$$\varphi(H_1-\overline{H}_1)=[H_0,\overline{H}_0],\quad \frac{\partial H_0}{\partial u}-2\varphi H_2=[H_0,\overline{H}_1],$$
$$\frac{\partial H_1}{\partial u}-\frac{\partial \overline{H}_1}{\partial u}=[H_1,\overline{H}_1],\quad (k+1)\varphi H_{k+1}=[H_k,\overline{H}_0], \tag{2.20}$$
$$\frac{\partial H_k}{\partial u}=[H_k,\overline{H}_1],\ [H_k,\overline{H}_j]=0,\quad k,j>1,k\geqslant j.$$

Заметим, что с помощью замены переменных в слое накрытия поле $\dfrac{\partial}{\partial u}+X_1$ можно преобразовать в $\dfrac{\partial}{\partial u}$. Тогда уравнения (2.20) примут вид

$$2i\varphi Y_1=[H_0,\overline{H}_0],\qquad 2\varphi H_2=\left[\frac{\partial}{\partial u}+iY_1,\overline{H}_0\right],$$
$$\frac{\partial Y_1}{\partial u}=0,\qquad (k+1)\varphi H_{k+1}=[H_k,\overline{H}_0], \tag{2.21}$$
$$[H_k,\overline{H}_j]=0,\qquad k,j>1,k\geqslant j.$$

Для поля Y_1 имеются две возможности: а) $Y_1 = 0$ и б) $Y_1 \neq 0$. Для первого случая имеем

$$\begin{aligned} &2i[H_0, \overline{H}_0] = 0, \qquad 2\varphi H_2 = \frac{\partial H_0}{\partial u}, \\ &\frac{\partial H_k}{\partial u} = 0, \qquad (k+1)\varphi H_{k+1} = [H_k, \overline{H}_0], \\ &[H_k, \overline{H}_j] = 0, \qquad k, j > 1, k \geqslant j. \end{aligned} \tag{2.22}$$

В случае б) после подходящей замены координат в слое поле Y_1 преобразуется в поле $\dfrac{\partial}{\partial w}$, где $w = w_1$, и система (2.21) принимает вид

$$\begin{aligned} &2i\varphi \frac{\partial}{\partial w} = [H_0, \overline{H}_0], \qquad 2\varphi H_2 = i\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \xi}, \\ &\frac{\partial H_k}{\partial \bar{\xi}} = 0, \qquad (k+1)\varphi H_{k+1} = [H_k, \overline{H}_0], \\ &[H_k, \overline{H}_j] = 0, \qquad k, j > 1, k \geqslant j, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где $\xi = w + iu$. Решая системы (2.22) и (2.23) в случае $\dim \tau = 1$, получаем, что

$$H = (2\mu_2\Phi + \mu_0 + \bar{\mu}_2 z^2)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \Phi = \int_{u_0}^{u} \varphi\, du,$$

где φ — произвольная функция, $\mu \in \mathbb{C}$.

Для $\varphi = 0$ (и уравнений, которые могут быть преобразованы к такому виду) имеем

$$H = \left(\exp(\gamma\xi) \sum_{k \neq 1} \mu_k z^k + iz\right)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \tau \in \mathbb{R}$$

и

$$H = \sum_{k \neq 1} \mu_k z^k \frac{\partial}{\partial w}.$$

Если $\varphi = u$, то

$$H = \left(\mu_0 + \mu_1\xi + iz\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Для

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right)\mathrm{sh}(2\gamma u), \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, 1,$$

имеем

$$H = \left(\cos(\gamma\xi) + \frac{1}{\gamma}\sin(\gamma\xi) + iz\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

и для

$$\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)\sin(2\gamma u), \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \quad \gamma \neq 0, 1,$$

имеем

$$H = \left(\operatorname{ch}(\gamma\xi) + \frac{1}{\gamma}\sin(\gamma\xi) + iz\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

В первом случае (для произвольного φ) классы нетривиальных накрытий представлены следующими полями

$$H = \left(2\exp(i\theta)\Phi + \exp(-i\theta)z^2\right)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

Анализ остальных случаев оставляется читателю.

§ 3. Нелокальные симметрии

3.1. Определение нелокальной симметрии. Пусть $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$. *Нелокальной симметрией* уравнения $\mathcal{E}$ назовем всякую локальную симметрию объекта $\widetilde{\mathcal{E}}$. Иначе говоря, нелокальная симметрия уравнения $\mathcal{E}$ — это преобразование (конечное или инфинитезимальное) объекта $\widetilde{\mathcal{E}}$, которое сохраняет распределение $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$. Отметим, что определение нелокальной симметрии подразумевает задание некоторого накрытия уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Чтобы это подчеркнуть, нелокальные симметрии в накрытии $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ мы будем называть нелокальными симметриями типа τ или нелокальными τ-симметриями. В дальнейшем будут рассматриваться только *инфинитезимальные* нелокальные симметрии, поэтому прилагательное «инфинитезимальная», будет опускаться и такие симметрии будем называть просто нелокальными.

Поскольку дифференциально-геометрическое строение накрывающих многообразий $\widetilde{\mathcal{E}}$ вполне аналогично строению бесконечно продолженных уравнений, определение нелокальных инфинитезимальных симметрий в точности соответствует определению высших симметрий дифференциальных уравнений.

Определение 3.1. *Алгеброй нелокальных симметрий типа* τ или *нелокальных* τ*-симметрией уравнения* $\mathcal{E}$, называется факторалгебра Ли

$$\operatorname{sym}_\tau \mathcal{E} = D_{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathcal{E}}) \big/ \mathcal{C}D(\widetilde{\mathcal{E}}),$$

где

$$\mathcal{C}D(\widetilde{\mathcal{E}}) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \widetilde{D}_i | \varphi_i \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}) \right\},$$

а $D_{\mathcal{C}}(\widetilde{\mathcal{E}})$ состоит из таких векторных полей X на $\widetilde{\mathcal{E}}$, что $[X, \mathcal{C}D(\widetilde{\mathcal{E}})] \subset \subset \mathcal{C}D(\widetilde{\mathcal{E}})$.

Упражнение 3.1. Докажите, что если накрытия τ_1 и τ_2 эквивалентны, то алгебры Ли нелокальных симметрий $\mathrm{sym}_{\tau_1} \mathcal{E}$ и $\mathrm{sym}_{\tau_2} \mathcal{E}$ изоморфны.

3.2. Как искать нелокальные симметрии? Процедура нахождения нелокальных симметрий для конкретного дифференциального уравнения естественным образом распадается на два этапа: сначала необходимо построить некоторое накрытие τ рассматриваемого уравнения, а затем найти τ-симметрии.

Задача отыскания накрытий подробно обсуждалась в § 2. Отметим здесь, что выбранное накрытие должно быть специально подобранным с точки зрения симметрий: вообще говоря алгебра $\mathrm{sym}_\tau \mathcal{E}$ может оказаться беднее алгебры $\mathrm{sym}\, \mathcal{E}$. Таково, например, накрытие уравнения Кортевега — де Фриза модифицированным уравнением Кортевега — де Фриза (см. пример 3.1). Кроме того, некоторые нелокальные симметрии могут быть неинтересны для приложений (например, симметрии тривиального накрытия).

Рассмотрим теперь задачу вычисления алгебры нелокальных симметрий заданного накрытия $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. Если накрывающий объект $\widetilde{\mathcal{E}}$ имеет вид $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}')^\infty$, то задача сводится к вычислению локальных симметрий уравнения $(\mathcal{E}')^\infty$. Если же $\widetilde{\mathcal{E}}$ не задан явно в таком виде, то процедура вычисления нелокальных симметрий может быть основана на одной из двух теорем, доказываемых ниже. Примеры вычисления нелокальных симметрий будут приведены в следующем параграфе.

Теорема 3.1. *Алгебра $\mathrm{sym}_\tau \mathcal{E}$ изоморфна алгебре Ли векторных полей X на $\widetilde{\mathcal{E}}$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1) *X — вертикальное векторное поле, т. е. $X(\tau^*(f)) = 0$ для любой функции $f \in C^\infty(M) \subset \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$;*
2) *$[X, \widetilde{D}_i] = 0, \quad i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Заметим, что условие 1) означает, что в координатах коэффициенты поля X при $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, равны нулю. Поэтому пересечение множества вертикальных векторных полей на $\widetilde{\mathcal{E}}$ с алгеброй $\mathcal{C}D(\widetilde{\mathcal{E}})$ тривиально. С другой стороны, в каждом классе смежности $[X] \in \mathrm{sym}_\tau\, \mathcal{E}$ существует один и только один вертикальный представитель X^v. Действительно, пусть X — произвольный представитель класса $[X]$; тогда $X^v = X - \sum_{i=1}^{n} a_i \widetilde{D}_i$, где a_i — коэффициенты поля X при $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. □

Теорема 3.2. *Пусть накрытие* $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ *локально задается полями* $\widetilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \dfrac{\partial}{\partial w_j}$, $i = 1, \ldots, n$, $X_{ij} \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, *где* $w_1, w_2, \ldots$ — *нелокальные переменные. Тогда любая нелокальная симметрия типа* τ *уравнения* $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ *имеет вид*

$$\widetilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi, A} = \widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial w_j},$$

где $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $A = (a_1, \ldots, a_N)$, $\varphi_i, a_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, *причем функции* φ_i, a_j *удовлетворяют уравнениям:*

$$\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0, \tag{3.1}$$

$$\widetilde{D}_i(a_j) = \widetilde{\mathfrak{Э}}_{\varphi, A}(X_{ij}). \tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{sym}_\tau\, \mathcal{E}$. Воспользуемся теоремой 3.1 и запишем вертикальное поле S в локальных координатах на $\widetilde{\mathcal{E}}$ в виде

$$S = \sum_{\sigma, k}{}' b_\sigma^k \frac{\partial}{\partial p_\sigma^k} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial w_j}, \qquad b_\sigma^k, a_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}),$$

где штрих над знаком первой суммы означает суммирование по всем внутренним координатам p_σ^k уравнения $\mathcal{E}$. Приравняв к нулю коэффициент при $\dfrac{\partial}{\partial p_\sigma^k}$ в коммутаторе $[S, \widetilde{D}_i]$, получим уравнения $\widetilde{D}_i(b_\sigma^k) = b_{\sigma+1_i}^k$ или $\widetilde{D}_i(b_\sigma^k) = S(\bar{p}_{\sigma+1_i}^k)$ в зависимости от того, является или нет $p_{\sigma+1_i}^k$ внутренней координатой на $\mathcal{E}^\infty$.

Решая эти уравнения аналогично тому, как это делалось для локальных симметрий, получим

$$b_\sigma^k = \widetilde{D}_\sigma(b_\varnothing^k), \qquad \widetilde{\ell}_F(b_\varnothing) = 0, \qquad b_\varnothing = (b_\varnothing^1, \ldots, b_\varnothing^N).$$

В частности $S = \widetilde{Э}_{\varphi, A}$, где $\varphi = b_{\varnothing}$. Тогда уравнения (3.2) представляют собой результат приравнивания к нулю коэффициентов при $\dfrac{\partial}{\partial w_j}$ коммутатора $[S, \widetilde{D}_i]$. □

Заметим, что если N конечно, то накрывающее уравнение локально имеет вид $(\mathcal{E}')^\infty$, где $\mathcal{E}' = \{F' = 0\}$, а

$$F' = \left(F, \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - X_{ij}\right), \qquad i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, N,$$

и система уравнений на его локальные симметрии с производящей функцией $\psi = (\varphi, A)$ в точности совпадает с системой (3.1)–(3.2).

Упражнение 3.2. Докажите следующее тождество

$$[\widetilde{Э}_{\varphi, A}, \widetilde{Э}_{\psi, B}] = \widetilde{Э}_{\chi, C},$$

где $\chi = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(\psi) - \widetilde{Э}_{\psi, B}(\varphi)$, $C = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(B) - \widetilde{Э}_{\psi, B}(A)$.

Замечание 3.1. Если накрытие нульмерно (при этом, естественно, $X_{ij} = 0$), т. е. τ — локальный изоморфизм, то уравнения (3.2) выполняются тривиальным образом, а система (3.1)–(3.2) сводится к уравнению $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$. Таким образом, локальная теория симметрий естественным образом вкладывается в нелокальную. Более точно, алгебра локальных симметрий уравнения $\mathcal{E}$ совпадает с алгеброй нелокальных симметрий в накрытии id: $\mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$.

Если дано некоторое накрытие $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ и функция $\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ удовлетворяет уравнению (3.1), то, вообще говоря, симметрии вида $\widetilde{Э}_{\varphi, A}$ может не существовать, так как может оказаться, что система уравнений (3.2) для данного φ не имеет решений. В частности, не всякая локальная симметрия $\bar{Э}_{\varphi}$, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$ может быть продолжена до симметрии $\widetilde{Э}_{\varphi, A}$ в накрытии $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$.

Пример 3.1. Рассмотрим одномерное накрытие $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\infty \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ уравнения Кортевега — де Фриза $\mathcal{E} = \{u_t = u_{xxx} + uu_x\}$, задаваемое полями

$$\widetilde{D}_x = \bar{D}_x + \left(p_0 + \frac{1}{6}w^2\right)\frac{\partial}{\partial w},$$

$$\widetilde{D}_t = \bar{D}_t + \left(p_2 + \frac{1}{3}wp_1 + \frac{1}{3}p_0^2 + \frac{1}{18}w^2 p_0\right)\frac{\partial}{\partial w}.$$

Как мы уже видели (см. пример 1.9), $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}')^\infty$, где $\mathcal{E}'$ есть модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$w_t = w_{xxx} - \frac{1}{6}w^2 w_x.$$

Рассмотрим локальную симметрию уравнения КдФ с производящей функцией $\varphi = tp_1 + 1$ (галилеева симметрия) и попытаемся продолжить ее до симметрии $\widetilde{Э}_{\varphi,a} = \widetilde{Э}_{\varphi} + a\dfrac{\partial}{\partial w}$, $a \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, в накрытии τ.

Для этого надо решить следующую систему уравнений на функцию $a \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$:

$$\widetilde{D}_x(a) = \widetilde{Э}_{\varphi,a}\left(p_0 + \frac{1}{6}w^2\right) = \varphi + \frac{1}{3}aw,$$

$$\widetilde{D}_t(a) = \widetilde{Э}_{\varphi,a}\left(p_2 + \frac{1}{3}wp_1 + \frac{1}{3}p_0^2 + \frac{1}{18}w^2 p_0\right) =$$

$$= \bar{D}_x^2(\varphi) + \frac{1}{3}w\bar{D}_x(\varphi) + \left(\frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{18}w^2\right)\varphi + a\left(\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{9}wp_0\right).$$

Нетрудно убедиться в том, что эта система не имеет решений. Таким образом, симметрии $\widetilde{Э}_{\varphi,a}$, где φ — галилеева симметрия, в рассматриваемом накрытии не существует и для данного накрытия алгебра нелокальных симметрий оказывается беднее алгебры локальных симметрий. Однако, мы можем рассматривать различные накрытия и можно надеяться, что таким образом удастся расширить алгебру симметрий данного уравнения. Проблеме продолжения симметрий будет посвящен § 5.

§ 4. Примеры вычислений: нелокальные симметрии уравнения Бюргерса.

Рассмотрим теперь задачу нахождения нелокальных симметрий уравнения Бюргерса в накрытиях, описываемых теоремой 2.1 (см. [112]). Пользуясь теоремой 3.1 мы будем отождествлять элементы алгебры $\mathrm{sym}_\tau\, \mathcal{E}$ с такими полями S на $\widetilde{\mathcal{E}}$, что $S = P + \Phi$, где

$$P = \sum_{i \geqslant 0} P_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \Phi = \sum_{j \geqslant 0} \Phi_j \frac{\partial}{\partial w_j},$$

где $P_i, \Phi_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ и $[S, \widetilde{D}_x] = [S, \widetilde{D}_t] = 0$.

С учетом равенств (2.8) эти соотношения принимают вид

$$[S, \widetilde{D}_x] = \sum_{i \geqslant 0}\left(P_{i+1} - \widetilde{D}_x(P_i)\right)\frac{\partial}{\partial p_i} + P_0 A + [\Phi, \widetilde{D}_x] = 0,$$

$$[S, \widetilde{D}_t] = \sum_{i \geqslant 0} \left(\sum_{k \geqslant 0} \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\widetilde{D}_x^i (p_0 p_1 + p_2) \right) - \widetilde{D}_t(P_i) \right) \frac{\partial}{\partial p_i} +$$
$$+ (P_1 + p_0 P_0) A + P_0 [A, B] + [\Phi, \widetilde{D}_t] = 0.$$

Коэффициенты полей $[\Phi, \widetilde{D}_x]$ и $[\Phi, \widetilde{D}_t]$ при $\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ для всех $i \geqslant 0$ равны нулю, т. е. эти поля вертикальны относительно проекции τ. Поэтому первое из полученных соотношений равносильно тому, что

$$P_0 A + [\Phi, \widetilde{D}_x] = 0, \qquad P_{i+1} = \widetilde{D}_x(P_i), \qquad i = 0, 1, \ldots,$$

откуда следует, что $P_i = \widetilde{D}_x^i(\psi)$, где через ψ обозначена функция P_0, т. е. $P = \widetilde{Э}_\psi = \sum\limits_{i \geqslant 0} \widetilde{D}_x^i(\psi) \dfrac{\partial}{\partial p_i}$. Аналогично, второе соотношение эквивалентно равенствам

$$(\widetilde{D}_x(\psi) + p_0 \psi) A + \psi [A, B] + [\Phi, \widetilde{D}_t] = 0, \tag{4.1}$$

$$Э_\psi \left(\widetilde{D}_x^i (p_0 p_1 + p_2) \right) = \widetilde{D}_t (\widetilde{D}_x^i(\psi)), \qquad i \geqslant 0. \tag{4.2}$$

Так как $[\widetilde{Э}_\psi, \widetilde{D}_x] = 0$, то уравнение (4.2) при $i > 0$ получается применением оператора $\widetilde{D}_x^i$ к равенству (4.2) при $i = 0$, т. е.

$$Э_\psi (p_0 p_1 + p_2) = \widetilde{D}_t(\psi),$$

или, что то же самое,

$$\widetilde{D}_x^2(\psi) + p_0 \widetilde{D}_x(\psi) + p_1 \psi = \widetilde{D}_t(\psi).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Всякая нелокальная симметрия уравнения Бюргерса в накрытии* (2.8) *имеет вид* $\widetilde{Э}_\psi + \Phi$, *где* $\Phi = \sum\limits_{j \geqslant 0} \Phi_j \dfrac{\partial}{\partial w_j}$, ψ, $\Phi_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ *причем функция* ψ *и поле* Φ *удовлетворяют следующим уравнениям*

$$\begin{gathered} \psi A = [\widetilde{D}_x, \Phi], \\ (\widetilde{D}_x(\psi) + p_0 \psi) A + \psi [A, B] + [\Phi, \widetilde{D}_t] = 0, \\ \widetilde{\ell}_F(\psi) = \widetilde{D}_x^2(\psi) + p_0 \widetilde{D}_x(\psi) + p_1 \psi - \widetilde{D}_t(\psi) = 0, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где F *— функция, задающая уравнение Бюргерса.*

Дальнейший анализ системы (4.3) должен опираться на конкретные реализации универсальной алгебры уравнения Бюргерса. Начнем с изучения нелокальных симметрий в накрытиях, описываемых утверждением 2.4. Рассмотрим накрытие τ^0. Пусть $\Phi = \varphi\dfrac{\partial}{\partial w}$. Тогда для накрытия τ^0 система (4.3) принимает вид

$$\begin{aligned} &\psi = \widetilde{D}_x(\varphi),\\ &\widetilde{D}_x(\psi) + p_0\psi = \widetilde{D}_t(\varphi),\\ &\widetilde{\ell}_F(\psi) = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Заметим, что мы получили бы ту же самую систему уравнений, если бы воспользовались теоремой 3.2.

Нетрудно видеть, что третье уравнение системы (4.4) является следствием первых двух, поэтому рассматриваемую систему можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} &\psi = \widetilde{D}_x(\varphi),\\ &\widetilde{D}_x^2(\varphi) + p_0\widetilde{D}_x(\varphi) = \widetilde{D}_t(\varphi). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что второе уравнение имеет вид $\widetilde{\ell}_H(\varphi) = 0$, где $\widetilde{\ell}_H$ — оператор универсальной линеаризации для уравнения $\mathcal{E}' = \left\{v_t = v_{xx} + \dfrac{1}{2}v_x^2\right\}$. Это согласуется с тем, что уравнение $\widetilde{\mathcal{E}}$ контактно диффеоморфно многообразию $(\mathcal{E}')^\infty$. Диффеоморфизм устанавливается с помощью следующей замены координат

$$x = x', \quad w = p_0', \quad t = t', \quad p_k = p_{k+1}', \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где x', t', p_k' — стандартные координаты на $(\mathcal{E}')^\infty$. Отсюда следует, что $\operatorname{sym}_{\tau^0}\mathcal{E} = \operatorname{sym}\mathcal{E}'$. Вычисляя алгебру $\operatorname{sym}\mathcal{E}'$ по схеме, описанной в гл. 4, и используя описанный диффеоморфизм, мы получим, что алгебра $\operatorname{sym}\mathcal{E}'$ аддитивно порождена элементами вида

$$\begin{aligned} &\varphi_{-\infty} = \eta(x,t)e^{-w/2}, \qquad \eta_{xx} = \eta_t, \qquad \varphi_{-1}^0 = 1,\\ &\varphi_k^i = t^i p_k + \frac{1}{2}((k+1)t^i p_0 + ixt^{i-1})p_{k-1} + O(k-2),\\ &\qquad\qquad k = 0, 1, \ldots,\ i = 0, 1, \ldots, k+1, \end{aligned}$$

где функция $O(r)$ зависит только от переменных $x, t, p_0, \ldots, p_r$.

Обратим внимание на то, что вид системы (4.3) существенно зависит от выбора координаты в $\mathbb{R}$, т. е. от формы записи поля A. Если $A = \alpha(w)\dfrac{\partial}{\partial w}$, а B и C по-прежнему равны нулю, то соотношения (4.3) приводятся к виду

$$\psi = \frac{1}{a}\left(tD_x(\varphi) - p_0\alpha'\varphi\right),$$

$$\widetilde{D}_x^2(\varphi) + (1-2\alpha')p_0\widetilde{D}_x(\varphi) + \left((\alpha')^2 - \alpha\alpha'' - \frac{1}{2}\alpha'\right)p_0^2\varphi = \widetilde{D}_t(\varphi).$$

Перепишем последнее равенство в виде $L(\varphi) = 0$, где

$$L = \widetilde{D}_x^2 + (1-2\alpha')p_0\widetilde{D}_x - \widetilde{D}_t + \left((\alpha')^2 - \alpha\alpha'' - \frac{1}{2}\alpha'\right).$$

Оператор L приобретает более простой вид, если положить $\alpha = \dfrac{1}{2}w$. Тогда $L = \widetilde{D}_x^2 - \widetilde{D}_t$.

В этом случае $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}'')^\infty$, где $\mathcal{E}''$ — уравнение теплопроводности $w_{xx} = w_t$. Таким образом, при подходящем выборе координаты в слое рассматриваемое накрытие τ_0 приводится к виду $(\mathcal{E}'')^\infty \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ и, более того, уравнение Бюргерса $\mathcal{E}$ при этом оказывается факторуравнением уравнения теплопроводности $\mathcal{E}''$ по однопараметрической группе его преобразований (симметрий) $w \mapsto \varepsilon w$, где ε — параметр. Заметим, что такая группа преобразований допускается всеми линейными уравнениями. В рассматриваемой системе координат на $\widetilde{\mathcal{E}}$ $\left(\text{т. е. когда } A = \dfrac{1}{2}w\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$ образующие алгебры $\operatorname{sym}_{\tau^0}\mathcal{E} = \operatorname{sym}\mathcal{E}''$ имеют вид

$$\varphi_{-\infty} = \eta(x,t)e^{-w/2}, \quad \eta_{xx} = \eta_t, \quad \varphi_{-1}^0 = w,$$

$$\varphi_k^i = w\left(t^i p_k + \frac{1}{2}\left((k+1)t^i p_0 + ixt^{i-1}\right)p_{k-1} + O(k-2)\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, \; i = 0, 1, \ldots, k+1.$$

Рассмотрим накрытия $\tau_\nu^\pm$. Система (4.3) для этих накрытий без труда приводится к виду

$$\begin{aligned} &\Box(\varphi) = 0, \\ &\psi = \widetilde{D}_x(\varphi) - \beta'\varphi, \end{aligned} \tag{4.5}$$

где $\beta = \pm e^{w/2} + \nu$ и

$$\square = \widetilde{D}_x^2 + p_0\widetilde{D}_x - \widetilde{D}_t - \beta'(p_0 + \beta). \tag{4.6}$$

Система (4.5) (сводящаяся к одному уравнению $\square(\varphi) = 0$) решается точно так же, как и уравнение $\bar{\ell}_F(\varphi) = 0$, определяющее высшие симметрии уравнения Бюргерса (см. гл. 4). При этом оказывается, что алгебры $\mathrm{sym}_{\tau_\nu^\pm}\mathcal{E}$ изоморфны алгебре $\mathrm{sym}\,\mathcal{E}$. Функции φ, являющиеся решениями уравнения (4.5), и зависящие от переменных x, t, w, p_0 и p_1, являются линейными комбинациями нижеследующих

$$\begin{aligned}
\varphi_1^0 &= p_0 + \beta,\\
\varphi_1^1 &= t(p_0 + \beta) - (\beta')^{-1},\\
\varphi_2^0 &= p_1 + \frac{1}{2}p_0^2 + \beta' p_0 - \frac{1}{2}\nu\beta,\\
\varphi_2^1 &= t\left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2\right) + \left(t\beta' + \frac{1}{2}x\right)p_0 + \frac{1}{2}\beta(x - \nu t) + \frac{1}{2}\nu(\beta')^{-1} + 1,\\
\varphi_2^2 &= t^2\left(p_1 + \frac{1}{2}p_0^2\right) + (t^2\beta' + xt)p_0 + \frac{1}{2}\beta(2xt - \nu t^2) + (\nu t - x)(\beta')^{-1} + 2t.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Соответствующие им функции ψ имеют вид

$$\begin{aligned}
\psi_1^0 &= p_1,\\
\psi_1^1 &= tp_1 + \frac{1}{2}(p_0 + \nu)(\beta')^{-1} + 2,\\
\psi_2^0 &= p_2 + p_0 p_1,\\
\psi_2^1 &= t(p_2 + p_0 p_1) + \frac{1}{2}(xp_1 + p_0) - \frac{1}{4}\nu(p_0 + \beta)(\beta')^{-1},\\
\psi_2^2 &= t^2(p_2 + p_0 p_1) + t(xp_1 + p_0) - \frac{1}{2}\nu(p_0 + \beta)(\beta')^{-1} +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2}x(p_0 + \beta + 2\beta') - 1\right)(\beta')^{-1}.
\end{aligned}$$

Пусть S_j^i — симметрия, соответствующая функции φ_j^i. Тогда из (4.7) следует, что симметрии S_1^0 и S_2^0 локальны, симметрия S_1^2 существенно нелокальна, если $\nu \neq 0$, симметрии S_1^1 и S_2^2 существенно нелокальны.

Наличие изоморфизма алгебр $\mathrm{sym}_{\tau_\nu^\pm}\mathcal{E}$ и $\mathrm{sym}\,\mathcal{E}$ позволяет высказать предположение, что пространство $\widetilde{\mathcal{E}}_{\tau_\nu^\pm}$ накрытия $\tau_\nu^\pm$ контактно диффеоморфно бесконечному продолжению $\mathcal{E}^\infty$ уравнения Бюргерса $\mathcal{E}$. Чтобы проверить эту гипотезу, попытаемся представить многообразие $\widetilde{\mathcal{E}}_{\tau_\nu^\pm}$ в виде $(\mathcal{E}')^\infty$, где $\mathcal{E}'$ — некоторое дифференциальное уравнение. Считая, что x и t — независимые переменные на $\mathcal{E}$, а w — зависимая переменная, введем на $\widetilde{\mathcal{E}}_{\tau_\nu^\pm}$ координаты $x, t, y_0 = w, \ldots, y_i = \widetilde{D}_x^i(w), \ldots$ Тогда, как легко видеть, $\widetilde{D}_t(w) = y_2 + \frac{1}{2}y_1^2 - \beta y_1$, т. е. искомое уравнение $\mathcal{E}$ имеет вид

$$w_{xx} + \frac{1}{2}w_x^2 - \beta w_x = w_t. \tag{4.8}$$

При этом, как и следовало ожидать, оператор универсальной линеаризации для уравнения (4.8) совпадает с оператором (4.6).

Далее, замена $v = -\beta \mp e^{w/2} - \nu$ переводит уравнение (4.8) в уравнение Бюргерса $v_t = v_{xx} + vv_x$. Итак, выбрав на $\widetilde{\mathcal{E}}_{\tau_\nu^\pm}$ координаты

$$x,\ t,\ y_0' = v,\ \ldots,\ y_i' = \widetilde{D}_x^i(v),\ \ldots,$$

мы обнаружим, что что $\widetilde{\mathcal{E}}_{\tau_\nu^\pm} \approx \mathcal{E}^\infty$ и, в силу этого, отображение $\tau_\nu^\pm$ можно рассматривать как отображение уравнения Бюргерса в себя. Явная формула для этого отображения находится из соотношения $v_x = \widetilde{D}_x(v) = -\beta'(u + \beta) = \frac{1}{2}(v + \nu)(u - \nu)$, откуда имеем, что

$$u = \frac{2v_x}{v + \nu} + v \tag{4.9}$$

Таким образом, мы пришли к следующему замечательному результату. Если v — решение уравнения Бюргерса, то и функция u, определяемая формулой (4.9), также является решением уравнения Бюргерса при любых значениях параметра ν.

В заключение рассмотрим одно бесконечномерное накрытие уравнения Бюргерса. Положим

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial w_1}, \\ B &= e^{w_1/2}\frac{\partial}{\partial w_2} + w_2\frac{\partial}{\partial w_3} + w_3\frac{\partial}{\partial w_4} + \ldots, \\ C &= e^{w_1/2}\frac{\partial}{\partial w_3} + w_2\frac{\partial}{\partial w_4} + w_3\frac{\partial}{\partial w_5} + \ldots \end{aligned} \tag{4.10}$$

Очевидно, что поля A, B и C удовлетворяют соотношениям (2.8) и поэтому задают бесконечномерное накрытие над уравнением Бюргерса. Пусть $S = \widetilde{Э}_\psi + \sum_i \Phi_i \frac{\partial}{\partial w_i}$ — нелокальная симметрия в этом накрытии. Тогда, поскольку $[A, B] = \frac{1}{2} e^{w_1/1} \frac{\partial}{\partial w_2}$, система (4.3) в рассматриваемом случае имеет вид

$$
\begin{array}{ll}
 & p_1\psi + p_0\widetilde{D}_x(\psi) + \widetilde{D}_x^2(\psi) = \widetilde{D}_t(\psi), \\
\psi = \widetilde{D}_x(\Phi_1), & p_0\psi + \widetilde{D}_x(\psi) = \widetilde{D}_t(\Phi_1), \\
\Phi_1 = 2e^{-w_1/2}\widetilde{D}_x(\Phi_2), & \psi + \frac{1}{2}p_0\Phi_1 = 2e^{-w_1/2}\widetilde{D}_x(\Phi_2), \\
\Phi_2 = \widetilde{D}_x(\Phi_3), & \Phi_1 = 2e^{-w_1/2}\widetilde{D}_x(\Phi_3), \\
\Phi_3 = \widetilde{D}_x(\Phi_4), & \Phi_2 = \widetilde{D}_t(\Phi_4), \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\Phi_{k-1} = \widetilde{D}_x(\Phi_k), & \Phi_{k-2} = \widetilde{D}_t(\Phi_k), \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

Как легко проверить, эта система эквивалентна следующей:

$$
\begin{array}{ll}
\psi = \widetilde{D}_x(\Phi_1), & p_1\psi + p_0\widetilde{D}_x(\psi) + \widetilde{D}_x^2(\psi) = \widetilde{D}_t(\psi), \\
\Phi_1 = 2e^{-w_1/2}\widetilde{D}_x(\Phi_2), & p_0\widetilde{D}_x(\Phi_1) + \widetilde{D}_x^2(\Phi_1) = \widetilde{D}_t(\Phi_1), \\
\Phi_2 = \widetilde{D}_x(\Phi_3), & \widetilde{D}_x^2(\Phi_2) = \widetilde{D}_t(\Phi_2), \\
\Phi_3 = \widetilde{D}_x(\Phi_4), & \widetilde{D}_x^2(\Phi_3) = \widetilde{D}_t(\Phi_3), \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\Phi_k = \widetilde{D}_x(\Phi_{k+1}), & \widetilde{D}_x^2(\Phi_k) = \widetilde{D}_t(\Phi_k), \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
\tag{4.11}
$$

Прежде, чем решать эту систему дифференциальных уравнений, в алгебру $\mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ введем фильтрацию, полагая $\deg\varphi = k$ для любого $\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, если $\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = 0$ при всех $i > k$; $\deg\varphi = -k$, если $\frac{\partial\varphi}{\partial w_j} = 0$ при всех $j < k$; $\frac{\partial\varphi}{\partial p_i} = 0$ при всех $i \geqslant 0$. Далее заметим, что если элемент ψ удовлетворяет всем уравнениям левого столбца системы (4.11), и если ψ удовлетворяет уравнению с номером k из правого столбца, то ψ удовлетворяет всем уравнениям системы (4.11) при $i < k$.

Для дальнейших рассуждений удобно рассмотреть два случая: а) $\deg \Phi_2 \geqslant 4$ и б) $\deg \Phi_2 < 4$. В первом из них, поскольку оператор $\widetilde{D}_x$ повышает фильтрацию на 1, из уравнений левого столбца следует, что найдется такой номер k, начиная с которого функции Φ_i будут зависеть только от переменных $t, x, w_4, w_5, \ldots$ Пусть $(\psi, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k)$ — решение $(k+1)$ уравнения системы (4.11) и k таково, что

$$\Phi_k = \Phi_k(t, x, w_4, w_5, \ldots, w_r), \qquad \frac{\partial \Phi_k}{\partial w_4} = 0, \qquad k \geqslant 2. \tag{4.12}$$

Для функций вида (4.12) уравнение системы (4.11) для Φ_k преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + 2\sum_{i=4}^{r} w_{i-1}\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial w_i} + \sum_{i,j=4}^{r} w_{i-1}w_{j-1}\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial w_i \partial w_i} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial t}.$$

Применяя индукцию по r можно показать, что всякое решение этого уравнения линейно зависит от переменных w_i, т. е.

$$\Phi_k = \varphi_{k4}w_4 + \varphi_{k5}w_5 + \ldots + \varphi_{kr}w_r + \varphi_{k0},$$

причем функция φ_{k0} является решением уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial^2 \varphi_{k0}}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \varphi_{k0}}{\partial t}$, а функции φ_{ki}, $i = 4, \ldots, r$, должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_{k4}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial^2 \varphi_{k4}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \varphi_{k5}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{k4}}{\partial t},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^2 \varphi_{kr-1}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial \varphi_{kr}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{kr-1}}{\partial t},\\
&\frac{\partial^2 \varphi_{kr}}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_{kr}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Легко доказать, что все решения системы (4.13) полиномиальны по x и t, причем φ_{k4} — произвольный полином степени $r-4$, зависящий только от t. Для вычисления нелокальных симметрий в рассматриваемом накрытии нам необходимо найти такие решения системы (4.13), которые определены с точностью до решений, обладающих свойством $\varphi_{k4} = 0$. Это пространство имеет размерность $r - 3$, его базис определяется значениями $\varphi_{k4} = 1, t, \ldots, t^{r-4}$.

Пусть $\Phi_k = \varphi_{k4} w_4 + \varphi_{k5} w_5 + \ldots + \varphi_{kr} w_r + \varphi_{k0}$ — некоторое решение k-ой пары системы (4.11). Чтобы найти соответствующую нелокальную симметрию уравнения Бюргерса, необходимо построить такие Φ_{k+i}, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие $(k+i)$-й паре системы (4.11), что $\Phi_k = \widetilde{D}_x(\Phi_{k+1})$, $\Phi_{k+1} = \widetilde{D}_x(\Phi_{k+2}), \ldots$ Положим

$$\Phi_{k+1} = \sum_{i=4}^{r} \sum_{\alpha>0} (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial^{\alpha-1}\varphi_{ki}}{\partial x^{\alpha-1}} w_{i+\alpha}. \tag{4.14}$$

Поскольку, как было сказано выше, все функции φ_{ki} полиномиальны по x, функция Φ_{k+1} определена соотношением (4.11) корректно. Вычисляя $\widetilde{D}_x^2(\Phi_{k+1})$ и $\widetilde{D}_t(\Phi_{k+1})$ и используя соотношения (4.13), легко убедиться в том, что Φ_{k+1} удовлетворяет $(k+1)$-й паре уравнений из (4.11). Точно так же строятся функции $\Phi_{k+2}, \ldots$ $\ldots, \Phi_{k+i}, \ldots$ и доказывается, что они удовлетворяют соответствующим уравнениям системы (4.11).

Приведенные рассуждения с незначительными изменениями переносятся на случай б), когда $\Phi_2 = \Phi_2(t, x, w_5, \ldots, w_r)$.

Обозначим через Φ_k^i, где $k \geqslant -2$, $i \geqslant 0$, симметрию, для которой функция Φ_{k+4} имеет вид $\Phi_{k+4} = t^i w_4 + \Psi(t, x, w_5, \ldots, w_r)$, а через Φ_k^i, где $k < -2$, $i \geqslant 0$, симметрию, для которой функция Φ_2 равна $\Phi_2 = t^i w_{2-k} + \Psi(t, x, w_{2-k+1}, \ldots, w_r)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Алгебра Ли нелокальных симметрий уравнения Бюргерса в накрытии τ, определяемом полями* (4.10), *аддитивно порождена образующими Φ_k^i, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, а также симметриями, для которых $\Phi_2 = \Phi_2(x, t)$ — произвольное решение уравнения теплопроводности $\dfrac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial t}$.*

Заметим, что образующим Φ_k^i при $k > 0$, $i < k$, соответствуют локальные симметрии вида $\psi_k^i = t^i p_k + O(k-1)$; у остальных образующих нет соответствующих локальных симметрий. Например, образующей Φ_{-2}^0 соответствует производящая функция $\psi = (2w_2 - w_3 p_0) e^{-w_1/2}$, образующей Φ_{-1}^0 — функция $\psi = 1 - w_2 p_0 e^{-w_1/2}$, образующей Φ_1^1 — функция $\psi = t p_1 - 2 w_2 p_0 e^{-w_1/2} + 5$, а если Φ_2 — решение уравнения теплопроводности, то $\psi = \left(2\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} p_0\right) e^{-w_1/2}$.

§ 5. Задача реконструкции симметрий

Пусть $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — произвольное накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, а $\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}, \pi)$ — некоторое решение уравнения $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$, $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Как было показано в гл. 4, если $\varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty, \pi)$, то $\bar{Э}_\varphi$ — локальная симметрия уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Назовем *задачей реконструкции симметрии* нахождение для функции $\varphi \in \ker \widetilde{\ell}_F$ симметрии типа τ вида $\widetilde{Э}_{\varphi, A} = \widetilde{Э}_\varphi + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i \dfrac{\partial}{\partial w_i}$. Как мы уже видели (см. пример 3.1), эта задача в общем случае не имеет решения. Ниже для произвольного дифференциального уравнения мы строим одно накрытие, для которого эта задача всегда разрешима. Оказывается также, что в этом накрытии возникают дополнительные серии нелокальных симметрий уравнений, имеющих оператор рекурсии.

5.1. Универсальное абелево накрытие [72, 73]. Среди всех накрытий (1.2) над уравнением $\mathcal{E}^\infty$, где $X_{ij} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$ есть одно выделенное: сумма Уитни одномерных накрытий, определяемых элементами базиса пространства $\bar{H}^1(\mathcal{E}^\infty)$. Это накрытие обозначим τ_1: $\widetilde{\mathcal{E}}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. Затем возьмем сумму Уитни всех одномерных накрытий над $\widetilde{\mathcal{E}}^{(1)}$, определяемых элементами базиса пространства $\widetilde{H}^1(\widetilde{\mathcal{E}}^{(1)})$. Получим накрытие $\tau_{2,1}$: $\widetilde{\mathcal{E}}^{(2)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}^{(1)}$ над $\widetilde{\mathcal{E}}^{(1)}$, которое определяет накрытие $\tau_2 = \tau_1 \circ \tau_{2,1}$: $\widetilde{\mathcal{E}}^{(2)} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ над $\mathcal{E}^\infty$. Продолжая этот процесс, получим башню накрытий*) над $\mathcal{E}^\infty$:

$$\ldots \xrightarrow{\tau_{k+1,k}} \widetilde{\mathcal{E}}^{(k)} \xrightarrow{\tau_{k,k-1}} \widetilde{\mathcal{E}}^{(k-1)} \xrightarrow{\tau_{k-1,k-2}} \ldots \xrightarrow{\tau_{2,1}} \widetilde{\mathcal{E}}^{(1)} \xrightarrow{\tau} \mathcal{E}^\infty, \tag{5.1}$$

обратный предел которой обозначается через τ^*: $\widetilde{\mathcal{E}}^* \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$. Назовем τ^* *универсальным абелевым накрытием* уравнения $\mathcal{E}^\infty$.

Замечание 5.1. Условие $\widetilde{H}^1(\widetilde{\mathcal{E}}^*) = 0$ удобно переформулировать следующим образом. Пусть локально накрытие τ^* задается полями $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n$. Тогда, если $A_1, \ldots, A_n \in F(\widetilde{\mathcal{E}}^*)$ и

$$\widetilde{D}_i(A_j) = \widetilde{D}_j(A_i), \tag{5.2}$$

*) Возникающие здесь бесконечномерные многообразия могут не являться обратными пределами цепочек проекций конечномерных многообразий. Такая ситуация, например, имеет место, если уравнение $\mathcal{E}^{(k)}$ для некоторого $k \geqslant 0$ имеет семейство законов сохранения, зависящее от функционального параметра. Построение соответствующей теории, подобной изложенной в гл. 4 для многообразий $\mathcal{E}^\infty$, выходит за рамки данной книги.

то существует такая функция $A \in F(\widetilde{\mathcal{E}}^*)$, что $A_i = \widetilde{D}_i(A)$ для любого i.

5.2. Симметрии в универсальном абелевом накрытии. Далее до конца этого параграфа волна над знаком оператора будет обозначать его поднятие в накрытие τ^*.

Теорема 5.1. *Пусть $\tau^*\colon \widetilde{\mathcal{E}}^* \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — универсальное абелево накрытие уравнения $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\varphi_i \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}^*)$, удовлетворяющей уравнению $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$, существует набор функций $A = (a_{i\alpha})$, $a_{i\alpha} \in F(\widetilde{\mathcal{E}}^*)$ таких, что $Э_{\varphi, A}$ есть нелокальная симметрия типа τ^* уравнения $\mathcal{E}$.*

Доказательство. Будем считать, что локально распределение на $\widetilde{\mathcal{E}}^*$ задается векторными полями $\widetilde{D}_i = \bar{D}_i + \sum_{j,\alpha} X_{ij}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial w_{j\alpha}}$, $X_{ij}^\alpha \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, где индекс i нумерует независимые переменные, индекс j — этажи башни, а α на j-м этаже нумерует элементы базиса пространства $\widetilde{H}^1(\widetilde{\mathcal{E}}^{(j)})$. Функции X_{ij} удовлетворяют условиям

$$\widetilde{D}_i(X_{jk}^\alpha) = \widetilde{D}_j(X_{ik}^\alpha). \tag{5.3}$$

Отметим, что по построению X_{ij}^α есть функция на $\widetilde{\mathcal{E}}^{(j-1)}$ ($\widetilde{\mathcal{E}}^{(0)} = \mathcal{E}^\infty$) при любых i, α, т. е. не зависит от $w_{k\alpha}$ при $k \geqslant j$. Мы должны доказать разрешимость уравнений

$$\widetilde{D}_i(a_{j\alpha}) = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(X_{ij}^\alpha) \tag{5.4}$$

при любом $\varphi \in \ker \widetilde{\ell}_F$

В силу замечания 5.1 достаточно доказать существование таких функций $(a_{j\alpha}) = A$, что функции $A_i = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(X_{ij}^\alpha)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, при любых фиксированных j и α удовлетворяют (5.2). Доказательство проведем индукцией по j. Пусть $j = 1$. Поскольку $[\widetilde{D}_i, \widetilde{Э}_{\varphi, A}] = \sum_{j,\alpha} (\widetilde{D}_i(a_{j\alpha}) - \widetilde{Э}_{\varphi, A}(X_{ij}^\alpha)) \dfrac{\partial}{\partial w_{j\alpha}}$, а X_{i1}^α — функции на $\mathcal{E}^\infty$, то для любого набора функций $A = (a_{j\alpha})$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$ имеем

$$\widetilde{D}_i(\widetilde{Э}_{\varphi, A}(X_{k1}^\alpha)) = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(\widetilde{D}_i(X_{k1}^\alpha)) = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(\widetilde{D}_k(X_{i1}^\alpha)) = \widetilde{D}_k(\widetilde{Э}_{\varphi, A}(X_{i1}^\alpha))$$

(второе равенство имеет место в силу (5.3)), что влечет разрешимость уравнений (5.4) при $j = 1$.

Предположим теперь, что разрешимость уравнений (5.4) доказана при $j < s$, и пусть $\overset{0}{a}_{j\alpha}$, $j < s$ — произвольные решения. Тогда для любого набора $A = (a_{j\alpha})$, где $a_{j\alpha} = \overset{0}{a}_{j\alpha}$ при $j < s$, а остальные $a_{j\alpha}$ произвольны, имеем $[\widetilde{D}_i, \widetilde{Э}_{\varphi,A}]|_{\widetilde{\mathcal{E}}^{(s-1)}} = 0$. Поскольку $X^\alpha_{is} \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}^{s-1})$, аналогично случаю $j = 1$ получаем равенство (5.2) для $A_i = \widetilde{Э}_{\varphi,A}(X^\alpha_{is})$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Теорема доказана. □

5.3. Нелокальные симметрии уравнений, допускающих оператор рекурсии. Рассмотрим теперь ситуацию, когда уравнение $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ имеет оператор рекурсии R. Операторы рекурсии, рассматриваемые в литературе, вообще говоря, не являются дифференциальными операторами, а потому выражение $R(\varphi)$, где φ — симметрия данного уравнения, может быть не определено. Имеются различные интерпретации выражений для рекурсий (см., например, [129, 64, 109]). Мы предлагаем вместо оператора R рассматривать оператор $\widetilde{R}$, который в ряде случаев оказывается определенным на множестве $\ker \widetilde{\ell}_F$. Выделим один класс уравнений, оператор рекурсии которых обладает этим свойством (другие примеры см. в п. 5.6).

Утверждение 5.2. *Пусть эволюционное уравнение $\mathcal{E} = \{u_t = D_x(h(x,t,u,u_1,\ldots,u_k))\}$ имеет оператор рекурсии $R = \sum\limits_{i=-1}^{N} f_i D_x^i$, $f_i \in \mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$. Тогда для любой симметрии $\widetilde{Э}_{\varphi,A}$ в накрытии τ^* существует симметрия $\widetilde{Э}_{\varphi',A'}$, где $\varphi' = R(\varphi)$.*

Доказательство. Существование функции φ' легко вытекает из замечания 5.2. Действительно, так как $\widetilde{Э}_{\varphi,A}$ — симметрия, функция φ удовлетворяет уравнению $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$, которое в рассматриваемом случае имеет вид $\widetilde{D}_t(\varphi) = \widetilde{D}_x(\widetilde{\ell}_h(\varphi))$, что совпадает с уравнениями (5.2). Поэтому найдется такая функция φ', что $\varphi = \widetilde{D}_x(\varphi')$ или $\varphi' = \widetilde{D}_x^{-1}(\varphi)$. Существование симметрии $\widetilde{Э}_{\varphi',A'}$ обеспечивается теоремой 5.3. □

5.4. Пример: нелокальные симметрии уравнения Кортевега — де Фриза. Рассмотрим уравнение КдФ $\mathcal{E} = \{u_t = u_{xxx} + uu_x\}$. В силу утверждения 5.4 это уравнение имеет серию нелокальных симметрий $\widetilde{Э}_{\psi_n,A}$, где $\psi_n = \widetilde{R}^n(tp_1 + 1)$, $R = D_x^2 + \frac{2}{3}p_0 + \frac{1}{3}p_1 D_x^{-1}$. Оказывается, что $\psi_n \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}^{(1)})$ при любом n. Это вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 5.3. *Пусть уравнение $\mathcal{E}$ и его оператор рекурсии R удовлетворяют условиям утверждения 5.2. Пред-*

положим также, что существует локальная симметрия φ уравнения $\mathcal{E}$, порождающая с помощью оператора R бесконечную серию локальных симметрий $\mathcal{S}=\{R^n(\varphi)\mid n=0,1,\ldots\}$, причем $f_{-1}\in\mathcal{S}$. Пусть $\widetilde{R}^{(1)}$ — поднятие оператора R в накрытие $\tau_1\colon\ \widetilde{\mathcal{E}}^{(1)}\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$, w_α — нелокальные переменные в накрытии τ_1. Тогда, если $\Phi=\sum\varphi_i w_i+\Psi\in\ker\widetilde{\ell}_F$, где под знаком суммы отлично от нуля только конечное число членов, $\varphi_i\in\mathcal{S}$, $\Psi\in\mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty)$, то функция $\widetilde{R}^{(1)}(\Phi)$ лежит в $\mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}^{(1)})$ и имеет аналогичный вид.

Доказательство. Буквы с индексом «лок» будут обозначать функции на $\mathcal{E}^\infty$. Их точный вид нам не понадобится.

Имеем $\widetilde{R}^{(1)}(\Phi)=\sum w_iR(\varphi_i)+f_{-1}\widetilde{D}_x^{-1}(\Psi-\sum\widetilde{D}_x(w_i)\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i))+\Psi_{\text{лок}}$, поскольку по формуле Грина (см. [148, 147])

$$\widetilde{D}_x^{-1}(w_i\varphi_i)=w_i\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i)-\widetilde{D}_x^{-1}(\widetilde{D}_x(w_i)\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i)).$$

Положим $X_{\text{лок}}=\Psi-\sum\widetilde{D}_x(w_i)\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i)$ и покажем, что $\bar{D}_t(X_{\text{лок}})=\bar{D}_x(T_{\text{лок}})$ для некоторой функции $T_{\text{лок}}$. Так как это означает, что $X_{\text{лок}}dx+T_{\text{лок}}dt$ — локальная сохраняющийся ток, то утверждение будет доказано. Имеем

$$\widetilde{D}_x^{-1}(\Phi)=\sum w_i\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i)+\widetilde{D}_x^{-1}(X_{\text{лок}})+A_{\text{лок}}.$$

Отсюда и из равенства $\widetilde{D}_t(\Phi)=\widetilde{D}_x(\widetilde{\ell}_g(\Phi))$ следует, что

$$\widetilde{D}_t(\widetilde{D}_x^{-1}(\Phi))=\widetilde{D}_x^{-1}(\widetilde{D}_t(\Phi))=\widetilde{\ell}_g(\Phi)=\sum w_i\widetilde{\ell}_g(\varphi_i)+B_{\text{лок}}.$$

С другой стороны, так как φ_i — симметрия, имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_t(\widetilde{D}_x^{-1}(\Phi))=\widetilde{D}_t\left(\sum w_i\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i)+\widetilde{D}_x^{-1}(X_{\text{лок}})+A_{\text{лок}}\right)=\\=\sum w_i\widetilde{D}_t(\widetilde{D}_x^{-1}(\varphi_i))+\widetilde{D}_t(\widetilde{D}_x^{-1}(X_{\text{лок}}))+C_{\text{лок}}=\\=\sum w_i\widetilde{\ell}_g(\varphi_i)+\widetilde{D}_t(\widetilde{D}_x^{-1}(X_{\text{лок}}))+C_{\text{лок}}.\end{aligned}$$

Сравнивая эти два выражения, получаем

$$\widetilde{D}_t(\widetilde{D}_x^{-1}(X_{\text{лок}}))=B_{\text{лок}}-C_{\text{лок}}=T_{\text{лок}}.$$

утверждение доказано. □

Выпишем несколько первых симметрий из нелокальной серии уравнения Кортевега — де Фриза. Введем нелокальные переменные, определяемые равенствами $\widetilde{D}_x w_0 = p_0$, $\widetilde{D}_x w_1 = \frac{1}{2}p_0^2$, $\widetilde{D}_x w_2 = \frac{1}{6}(p_0^3 - 3p_1^2), \ldots$, и положим $\varphi_k = R^k p_1$, $k \geqslant 0$. Тогда

$$\psi_0 = t\varphi_0 + 1,$$
$$\psi_1 = t\varphi_1 + \frac{1}{3}x\varphi_0 + \frac{2}{3}p_0,$$
$$\psi_2 = t\varphi_2 + \frac{1}{3}x\varphi_1 + \frac{4}{3}p_2 + \frac{4}{9}p_0^2 + \frac{1}{9}\varphi_0 w_0,$$
$$\psi_3 = t\varphi_3 + \frac{1}{3}x\varphi_2 + 2\bar{D}_x(\varphi_1) + \frac{2}{3}p_0p_2 + \frac{8}{27}p_0^3 + \frac{1}{9}\varphi_1 w_0 + \frac{1}{9}\varphi_0 w_1.$$

5.5. Мастер-симметрия. Рассмотрим в накрытии τ^* уравнения Кортевега — де Фриза симметрию $\widetilde{\text{Э}}_{\psi_2, A}$, и пусть $\widetilde{\text{Э}}_{\varphi, B}$ — еще одна τ^*-симметрия, где функция φ — локальная симметрия, не зависящая от переменных x и t. Прокоммутировав эти две симметрии, получим новую τ^*-симметрию $\widetilde{\text{Э}}_{\chi, C} = [\widetilde{\text{Э}}_{\psi_2, A}, \widetilde{\text{Э}}_{\varphi, B}]$, где $\chi = \widetilde{\text{Э}}_{\psi_2, A}(\varphi) - \widetilde{\text{Э}}_{\varphi, B}(\psi_2) \in \ker \widetilde{\ell}_F$. В результате несложных выкладок, можно убедиться в том, что функция χ является локальной симметрией уравнения Кортевега — де Фриза, не зависящей от переменных x и t. Действительно, так как φ — локальная симметрия, а ψ_2 зависит только от одной нелокальной переменной w_0, которая удовлетворяет соотношению $\widetilde{D}_x w_0 = p_0$, то $\chi = \widetilde{\text{Э}}_{\psi_2}(\varphi) - \widetilde{\text{Э}}_{\varphi}(\psi_2) - \frac{1}{9}p_1 \widetilde{D}_x^{-1}\varphi$, т. е. функция χ может зависеть только от локальных переменных и переменной w_0.

Далее, так как локальные симметрии уравнения Кортевега — де Фриза, не зависящие от переменных x и t, коммутируют между собой, в частности, $\{\varphi, \varphi_1\} = \{\varphi, \varphi_2\} = 0$, получаем

$$\chi = \frac{1}{3}\sum j\bar{D}_x^{j-1}\varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} + \widetilde{\text{Э}}_{\Psi}(\varphi) - \bar{\text{Э}}_{\varphi}(\Psi) - \frac{1}{9}p_1\widetilde{D}_x^{-1}\varphi, \tag{5.5}$$

где $\Psi = \frac{4}{3}p_2 + \frac{4}{9}p_0^2 + \frac{1}{9}\varphi_0 w_0$. Из выражения (5.5) следует, что χ не зависит от x и t. Расписав подробно эволюционные дифференцирования, легко убедиться, что χ не зависит от w_0. Итак, χ — локальная симметрия, не зависящая от переменных x и t.

Пусть $s = 2k + 1$ — порядок симметрии φ, т. е. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial p_s} = \text{const} \neq 0$ и

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_j}=0$ для всех $j>s$. Тогда, легко видеть, что функция χ имеет вид

$$\chi=\frac{1}{3}sp_{s+2}\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}+\text{слагаемые меньшего порядка } =$$
$$=c\varphi_{k+1}+\text{симметрии меньшего порядка},$$

где $c=\dfrac{1}{3}s\dfrac{\partial\varphi}{\partial p_s}=\mathrm{const}$.

Это означает, что оператор коммутирования с τ^*-симметрией $\widetilde{Э}_{\psi_2,A}$ действует на первую компоненту производящей функции τ^*-симметрии $\widetilde{Э}_{\varphi,B}$ с точностью до симметрий меньшего порядка, так же, как и оператор рекурсии R. Таким образом, оператор коммутирования с первой нелокальной симметрией уравнения Кортевега — де Фриза выполняет функцию оператора рекурсии.

Отметим, что аналогичная ситуация имеет место и для уравнений, рассматриваемых в следующем пункте.

5.6. Примеры. В этом пункте приводятся примеры уравнений с операторами рекурсии, которые формально не попадают под утверждение 5.2, но тем не менее в накрытии τ^* у них возникают дополнительные серии нелокальных симметрий.

Рассмотрим уравнение с двумя независимыми переменными $x=x_1$, $t=x_2$ и оператором рекурсии вида

$$R=\sum_{i=0}^{M}f_iD_x^i+aD_x^{-1}\circ b,\qquad f_i,a,b\in\mathcal{F}(\mathcal{E}^\infty).$$

Для того, чтобы доказать существование функции $R\varphi\in F(\mathcal{E}^*)$ для любой $\varphi\in\ker\widetilde{\ell}_F$, достаточно показать, что выражение $b\varphi$ является полной производной, т. е. $b\varphi=\widetilde{D}_x\psi$ для некоторой функции $\psi\in F(\mathcal{E}^*)$. Этот факт будет установлен, если будет доказано существование такой функции $T\in F(\mathcal{E}^*)$, что $\overline{D}_t(b\varphi)=\overline{D}_x(T)$. В каждом конкретном случае выполнение этого условия несложно проверить.

Пример 5.1. Модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза

$$\mathcal{E}=\{u_t=u_{xxx}+u^2u_x\}. \tag{5.6}$$

Оператор рекурсии для этого уравнения имеет вид [55]:

$$R=\overline{D}_x^2+\frac{2}{3}p_0^2+\frac{2}{3}p_1\overline{D}_x^{-1}\circ p_0.$$

Покажем, что оператор $\widetilde{R}$ может быть применен к любой функции $\varphi \in \ker \widetilde{\ell}_F$. Действительно,

$$\widetilde{D}_t(p_0\varphi) = \widetilde{D}_x\left(\left(p_2 + \frac{1}{3}p_0^3\right)\varphi + p_0(\widetilde{D}_x^2(\varphi) + p_0^2\varphi) - p_1\widetilde{D}_x(\varphi) - \frac{1}{3}p_0^3\varphi\right),$$

$$\widetilde{D}_t(\varphi) = \widetilde{D}_x^3(\varphi) + p_0^2\widetilde{D}_x(\varphi) + 2p_0p_1\varphi.$$

Поэтому уравнение (5.6) имеет серию нелокальных симметрий $Э_{\psi_n, A}$, где

$$\psi_n = \widetilde{R}^n\left(t(p_3 + p_0^2p_1) + \frac{1}{3}xp_1 + \frac{1}{3}p_0\right).$$

Пример 5.2. Уравнение sin-Гордон

$$\mathcal{E} = \{u_{xt} = \sin u\}. \tag{5.7}$$

Если φ удовлетворяет уравнению $\widetilde{D}_x\widetilde{D}_t(\varphi) = \varphi\cos p_{(0,0)}$, то поскольку $\widetilde{D}_t(p_{(2,0)}\varphi) = \widetilde{D}_x(p_{(1,0)}\widetilde{D}_t(\varphi))$, оператор рекурсии $\widetilde{R} = \widetilde{D}_x^2 + p_{(1,0)}^2 - p_{(1,0)}\widetilde{D}_x^{-1} \circ p_{(2,0)}$ (см. [55]) определен на $\ker \widetilde{\ell}_F$. Следовательно, уравнение (5.7) имеет серию нелокальных симметрий $Э_{\psi_n, A}$, где $\psi_n = \widetilde{R}^n(xp_{(1,0)} - tp_{(0,1)})$.

Пример 5.3. Система уравнений типа Шрёдингера

$$\begin{cases} u_t = iu_{xx} + 2uu_xv \\ v_t = -iv_{xx} - 2uvv_x \end{cases}$$

имеет следующий оператор рекурсии [8]

$$R = \begin{pmatrix} \bar{D}_x + i(p_1^1\bar{D}_x^{-1} \circ p_0^2 - & i(p_0^1\bar{D}_x^{-1} \circ p_1^1 + p_1^1\bar{D}_x^{-1} \circ p_0^1) \\ \quad -p_0^1\bar{D}_x^{-1} \circ p_1^2 + p_0^1p_0^2) & \\ i(p_0^2\bar{D}_x^{-1} \circ p_1^2 + p_1^2\bar{D}_x^{-1} \circ p_0^2) & -\bar{D}_x + i(p_1^2\bar{D}_x^{-1} \circ p_0^1 - \\ & \quad -p_0^2\bar{D}_x^{-1} \circ p_1^1 + p_0^1p_0^2) \end{pmatrix}$$

Здесь $p_k^i = p_{k0}^i$, $x_1 = x$, $x_2 = t$.

Для того, чтобы проверить, что оператор $\widetilde{R}$ порождает бесконечную серию нелокальных симметрий типа τ^*, достаточно показать, что $\widetilde{D}_x^{-1}(p_1^2\varphi - p_1^1\psi)$, $\widetilde{D}_x^{-1}(p_0^2\varphi + p_0^1\psi) \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}^*)$ для любой вектор-функции $(\varphi, \psi) \in \ker \widetilde{\ell}_F$. Это вытекает из следующих равенств:

$$\widetilde{D}_x^{-1}(p_1^2\varphi - p_1^1\psi) = \widetilde{D}_x(i(p_1^2\widetilde{D}_x\varphi - p_1^2\varphi + p_1^1\widetilde{D}_x\psi - p_1^1\psi) + \\ + 2p_0^1p_0^2(p_1^1\psi - p_1^2\varphi)),$$

$$\widetilde{D}_x^{-1}(p_0^2\varphi + p_0^1\psi) = \widetilde{D}_x(i(p_0^2\widetilde{D}_x\varphi - p_1^2\varphi + p_1^1\widetilde{D}_x\psi - p_0^1\psi) - \\ - 2p_0^1p_0^2(p_0^1\psi - p_0^2\varphi)).$$

Итак, оператор $\widetilde{R}$ определен на $\mathrm{sym}_{\tau^*}\mathcal{E}$ и симметрия

$$\Phi = (tp_2^1 + \frac{1}{2}xp_1^1, tp_2^2 + \frac{1}{2}xp_1^2 + \frac{1}{2}p_0^2)$$

порождает серию нелокальных симметрий рассматриваемой системы.

5.7. Общая проблема реконструкции нелокальных симметрий. Рассмотрим теперь общую ситуацию. Именно, пусть τ: $\widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ — произвольное накрытие уравнения $\mathcal{E}^\infty$, а $\varphi \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}, \pi)$ — произвольное решение уравнения $\widetilde{\ell}_F(\varphi) = 0$, где $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. Для того, чтобы найти симметрию типа τ вида $\widetilde{Э}_{\varphi, A} = \widetilde{Э}_\varphi + \sum\limits_{i=1}^N a_i \dfrac{\partial}{\partial w_i}$, надо найти функции $a_1, \ldots, a_N$, $a_j \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$, удовлетворяющие уравнениям

$$\widetilde{D}_i(a_j) = \widetilde{Э}_{\varphi, A}(X_{ij}). \tag{5.8}$$

Однако, как мы уже видели, для данного φ эта система может не иметь решений. Поэтому заметим, что формальные условия совместности системы (5.8) имеют вид

$$\widetilde{D}_i(Y_{jk}) = \widetilde{D}_j(Y_{ik}), \tag{5.9}$$

где через Y_{ij} обозначены правые части (5.8). Далее заметим, что условие интегрируемости распределения $\widetilde{\mathcal{C}}$ на $\widetilde{\mathcal{E}}$, $[\widetilde{D}_i, \widetilde{D}_j] = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, в локальных координатах имеет вид (см. (1.3))

$$\widetilde{D}_i(X_{jk}) = \widetilde{D}_j(X_{ik}), \tag{5.10}$$

где $\widetilde{D}_i = \overline{D}_i + \sum\limits_{j=1}^N X_{ij} \dfrac{\partial}{\partial w_j}$, $i = 1, \ldots, n$. Условия (5.9) и (5.10) имеют одинаковую структуру. Пользуясь этим, построим новое накрытие τ_1: $\widetilde{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, введя новые нелокальные переменные $a_1, \ldots$ $\ldots, a_N$ и определив новые полные производные $\widetilde{D}_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$, на $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ формулой $\widetilde{D}_i^{(1)} = \widetilde{D}_i + \sum\limits_j Y_{ij} \dfrac{\partial}{\partial a_j}$. Вводя накрытие

$$\tau_1\colon\ \widetilde{\mathcal{E}}_1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty,$$

мы получаем возможность решить систему (5.8), однако это не является решением первоначальной задачи, так как поле $\widetilde{Э}_{\varphi, A} = \widetilde{Э}_\varphi + \sum\limits_{i=1}^N a_j \dfrac{\partial}{\partial w_j}$ может не быть симметрией в накрытии τ_1. Это поле надо продолжить до поля вида

$$\widetilde{Э}_{\varphi,A,B}=\widetilde{Э}_{\varphi}+\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial w_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial a_j}$$

на многообразии $\widetilde{\mathcal{E}}_1$, причем функции b_j должны удовлетворять системе уравнений, аналогичной (5.8), которая может не иметь решений. Поэтому описанную процедуру построения нового накрытия придется повторить, и в результате мы получим цепочку накрытий, подобную той, что возникала при построении универсального абелева накрытия. Более формально эта процедура реализуется в следующих двух разделах.

5.8. Конструкция Кисо [106]. Пусть дано произвольное накрытие τ: $\widetilde{\mathcal{E}}\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$ уравнения $\mathcal{E}=\{F=0\}$, задаваемое полями (1.2), и пусть $\varphi\in\ker\widetilde{\ell}_F$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$, $\varphi_i\in\mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$. В работе [106] для эволюционных уравнений с одной пространственной переменной построено накрытие τ_φ: $\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$, в котором функция φ порождает симметрию. Ниже приводится обобщение этой конструкция на произвольные уравнения.

Положим $\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi=\widetilde{\mathcal{E}}\times\mathbb{R}^\infty$. Пусть w_j^l, $j=1,\ldots,N$, $l=1,2,\ldots$ — координаты в $\mathbb{R}^\infty$ (новые нелокальные переменные). Отображение τ_φ: $\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$, есть композиция проекции на первый сомножитель и отображения τ.

Определим векторные поля $\widetilde{D}_i^\varphi$ на $\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi$ формулой

$$\widetilde{D}_i^\varphi=\bar{D}_i+\sum_{j,l>0}\left(\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w\right)^l\left(X_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial w_j^l},\qquad i=1,\ldots,n,\tag{5.11}$$

где *) $\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}={\sum_{\sigma,k}}'\widetilde{D}_\sigma^\varphi(\varphi_k)\dfrac{\partial}{\partial p_\sigma^k}$, $S_w=\sum_{j,l}w_j^{l+1}\dfrac{\partial}{\partial w_j^l}$, $w_j^0=w_j$.

Утверждение 5.4. 1) $[\widetilde{D}_i^\varphi,\widetilde{D}_k^\varphi]=0$, $i,k=1,\ldots,n$, *т. е. совокупность полей* (5.11) *задает структуру накрытия в* $\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi$.

2) *Если* $\varphi\in\ker\widetilde{\ell}_F$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)$, $\varphi_i\in F(\widetilde{\mathcal{E}})$, *то* $[\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w,\widetilde{D}_i^\varphi]=0$, $i=1,\ldots,n$, *т. е.* $\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w$ — *симметрия типа* τ_φ *уравнения* $\mathcal{E}^\infty$.

*) Штрихом обозначено суммирование по внутренним координатам.

Доказательство. Покажем сначала, что если $\widetilde{\ell}_F(\varphi)=0$, то $[\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w, \widetilde{D}_i^\varphi]=0$, $i=1,\ldots,n$. Имеем

$$[\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w, \widetilde{D}_i^\varphi]=\sum_{\sigma,k}{}' \widetilde{Э}_\varphi(\bar{p}^k_{\sigma+1_i})\frac{\partial}{\partial p^k_\sigma}+\sum_{j,l>0}(\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w)^{l+1}(X_{ij})\frac{\partial}{\partial w^l_j}-$$

$$-\sum_{\sigma,k}{}' \widetilde{D}_i^\varphi(\widetilde{D}_\sigma(\varphi_k))\frac{\partial}{\partial p^k_\sigma}-\sum_{j,l>0}(\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w)^{l+1}(X_{ij})\frac{\partial}{\partial w^l_j}=$$

$$=\sum_{\sigma,k}{}'(\widetilde{Э}_\varphi(\bar{p}^k_{\sigma+1_i})-\widetilde{D}_{\sigma+1_i}(\varphi_k))\frac{\partial}{\partial p^k_\sigma}=0.$$

Далее рассмотрим коммутатор $[\widetilde{D}_i^\varphi, \widetilde{D}_k^\varphi]$. Так как $[\bar{D}_i, \bar{D}_k]=0$ и координаты векторных полей $\bar{D}_j$ не зависят от w^l_j, то

$$[\widetilde{D}_i^\varphi, \widetilde{D}_k^\varphi]=\sum_{j,l>0}\{\widetilde{D}_i^\varphi(\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w)^l(X_{kj})-\widetilde{D}_k^\varphi(\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w)^l(X_{ij})\}\frac{\partial}{\partial w^l_j}.$$

В силу п. 1 доказываемого утверждения имеем

$$[\widetilde{D}_i^\varphi, \widetilde{D}_k^\varphi]=\sum_{j,l>0}(\widetilde{Э}_\varphi^{(\varphi)}+S_w)^l(\widetilde{D}_i^\varphi(X_{kj})-\widetilde{D}_k^\varphi(X_{ij}))\frac{\partial}{\partial w^l_j}=0,$$

так как $\widetilde{D}_i^\varphi(X_{kj})-\widetilde{D}_k^\varphi(X_{ij})=\widetilde{D}_i(X_{kj})-\widetilde{D}_k(X_{ij})=0$. Утверждение доказано. □

5.9. Конструкция накрытия τ_S [73]. Положим $\widetilde{\mathcal{E}}_\tau=\widetilde{\mathcal{E}}\times\mathbb{R}^\infty$, где координатами в $\mathbb{R}^\infty$ (нелокальными переменными) являются переменные*) v^l_j, $j=1,\ldots,N$, $l=1,2,\ldots$ $p^{(k)}_\sigma$, $k>0$.

Отображение τ_S: $\widetilde{\mathcal{E}}_\tau\longrightarrow\mathcal{E}^\infty$ является композицией проекции на первый сомножитель и отображения τ.

Систему полей $\widetilde{D}_1^\tau,\ldots,\widetilde{D}_n^\tau$ на $\widetilde{\mathcal{E}}_\tau$ определим так:

$$\widetilde{D}_i^\tau=\bar{D}_i^S+\sum_{l\geqslant 0,j}\left(S_p+S_v\right)^l\left(X_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial v^l_j},\qquad i=1,\ldots,n,\tag{5.12}$$

где

$$\bar{D}_i^S=\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{l\geqslant 0,\sigma}{}' S_p^l(\bar{p}_{\sigma+1_i})\frac{\partial}{\partial p^{(l)}_\sigma},\qquad p^{(0)}_\sigma=p_\sigma,\tag{5.13}$$

*) Здесь верхний индекс у переменной p_σ, соответствующий номеру зависимой переменной, для упрощения обозначений опущен. Верхний индекс, взятый в скобки, нумерует новые нелокальные переменные.

$$S_p = \sum_{l\geqslant 0,\sigma}{}' \bar{p}^{\,l+1}_{\sigma+1_i}\frac{\partial}{\partial p_\sigma^{(l)}}, \quad S_v = \sum_{l\geqslant 0,j} v_j^{l+1}\frac{\partial}{\partial v_j^l}, \quad v_j^0 = w_j. \tag{5.14}$$

Утверждение 5.5. 1) $[\widetilde{D}_i^\tau, \widetilde{D}_k^\tau] = 0$, $i, k = 1, \ldots, n$, *т. е. совокупность полей* (5.12) *задает структуру накрытия в* $\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi$.

2) *Векторное поле* $S_\tau = S_p + S_v$ *является нелокальной симметрией типа* τ_S *уравнения* $\mathcal{E}^\infty$.

Доказательство. Из формул (5.12)–(5.14) легко следует, что $[S_\tau, \widetilde{D}_i^\tau] = 0$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. S_τ является нелокальной симметрией. Вычислим теперь коммутатор $[S_\tau, \widetilde{D}_i^\tau]$:

$$[\widetilde{D}_i^\tau, \widetilde{D}_k^\tau] = \sum{}' \left\{\widetilde{D}_i^\tau\left(S_p^l(\bar{p}_{\sigma+1_j})\right) - \widetilde{D}_j^\tau\left(S_p^l(\bar{p}_{\sigma+1_i})\right)\right\}\frac{\partial}{\partial p_\sigma^{(l)}} +$$

$$+ \sum\left\{\widetilde{D}_i^\tau\left(S_\tau^l\left(X_{jk}\right)\right) - \widetilde{D}_j^\tau\left(S_\tau^l\left(X_{ik}\right)\right)\right\}\frac{\partial}{\partial v_k^l} =$$

$$= \sum{}' S_P^l\left\{\widetilde{D}_i^\tau\left(\bar{p}_{\sigma+1_j}\right) - \widetilde{D}_j^\tau\left(\bar{p}_{\sigma+1_i}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial p_\sigma^{(l)}} +$$

$$+ \sum S_\tau^l\left\{\widetilde{D}_i^\tau\left(X_{jk}\right) - \widetilde{D}_j^\tau\left(X_{ik}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial v_k^l} = 0,$$

так как $[\bar{D}_i, \bar{D}_k] = [\widetilde{D}_i, \widetilde{D}_k] = 0$. Утверждение доказано. □

Следствием утверждений 5.4 и 5.5 является следующая теорема.

Теорема 5.6. *Для любого накрытия* $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ *уравнения* $\mathcal{E} = \{F = 0\}$ *существует такое накрытие* $\tau'\colon \widetilde{\mathcal{E}}_\tau \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$, *что любая вектор-функция* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\varphi_i \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}_\tau)$, *удовлетворяющая уравнению* $\widetilde{\ell}_F^\tau(\varphi) = 0$, *где* $\widetilde{\ell}_F^\tau$ *— поднятие оператора* ℓ_F *на* $\widetilde{\mathcal{E}}_\tau$, *порождает нелокальную симметрию типа* τ' *уравнения* $\mathcal{E}^\infty$.

5.10. Универсальное свойство симметрии S_τ. В заключение обсудим связь конструкций п. 5.8 и п. 5.9. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 5.7. *Пусть* $\tau\colon \widetilde{\mathcal{E}} \longrightarrow \mathcal{E}^\infty$ *— накрытие уравнения* $\mathcal{E} = \{F = 0\}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in \ker \widetilde{\ell}_F$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $\varphi_i \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}})$ *существует такое вложе-*

ние $i_\varphi\colon\ \widetilde{\mathcal{E}}_\varphi \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_\tau$, *что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{E}}_\varphi \arrow[rr, "i_\varphi"] \arrow[dr, "\tau_\varphi"'] & & \widetilde{\mathcal{E}}_\tau \arrow[dl, "\tau_S"] \\ & \widetilde{\mathcal{E}} & \end{tikzcd}$$

коммутативна. При этом $\Pi_\varphi = i_\varphi(\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi)$ *является интегральным подмногообразием распределения на* $\widetilde{\mathcal{E}}_\tau$, *задаваемого полями* (5.11) *и*

$$S_\tau\,|_{\Pi_\varphi} = (i_\varphi)_*\left(\widetilde{Э}^{(\varphi)}_\varphi + S_w\right), \qquad \widetilde{D}^\tau_i\,|_{\Pi_\varphi} = (i_\varphi)_*\widetilde{D}^\varphi_i.$$

Доказательство. Определим вложение i_φ формулой $i_\varphi(p_\sigma) = (p^{(i)}_\sigma, v^l_j)$, где $p^{(i)}_\sigma = \left(\widetilde{Э}_\varphi + S_w\right)^i (p_\sigma)$, $v^l_j = w^l_j$. Тогда многообразие Π_φ задается уравнениями $p^{(i)}_\sigma = \left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)$. Покажем, что поле $S_\tau = S_p + S_v$ касается Π_φ. Действительно,

$$\left\{S_\tau\left(p^{(i)}_\sigma - \left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)\right)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= \left\{p^{(i+1)}_\sigma - S_\tau\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= \left\{\left(\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^{i+1} - S_\tau\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i\right)(p_\sigma)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= \left\{\left(\widetilde{Э}_\varphi - S_p\right)\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= \left\{\left(\sum_{\sigma'}{}' \widetilde{D}_{\sigma'}(\varphi)\frac{\partial}{\partial p_{\sigma'}} - \sum_{\sigma', i}{}' p^{(i+1)}_{\sigma'}\Big|_{\Pi_\varphi}\frac{\partial}{\partial p^{(i)}_{\sigma'}}\right)\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= \left\{\left(\sum_{\sigma'}{}' \widetilde{D}_{\sigma'}(\varphi)\frac{\partial}{\partial p_{\sigma'}} - \sum_{\sigma'}{}' p^{(1)}_{\sigma'}\Big|_{\Pi_\varphi}\frac{\partial}{\partial p_{\sigma'}}\right)\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= \left\{\sum_{\sigma'}{}' \left(\widetilde{D}_{\sigma'}(\varphi) - \left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_{\sigma'})\right)\frac{\partial}{\partial p_{\sigma'}}\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} = 0,$$

так как $\left(\widetilde{Э}_\varphi + S_v\right)^i (p_\sigma) = \widetilde{Э}_\varphi(p_\sigma) = \widetilde{D}_\sigma(\varphi)$. Докажем теперь, что для любой функции $f \in \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi)$ имеет место равенство

$$S_\tau|_{\Pi_\varphi}\left((i_\varphi^*)^{-1}(f)\right) = (i_\varphi^*)^{-1}\left(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi^{(\varphi)} + S_w\right)(f).$$

Действительно

$$S_\tau\Big|_{\Pi_\varphi}\left((i_\varphi^*)^{-1}(f)\right) = \left(\sum_{\sigma,i}{}' p_\sigma^{(i+1)}\Big|_{\Pi_\varphi}\frac{\partial}{\partial p_\sigma^i} + S_v\right)\Big|_{\Pi_\varphi}\left((i_\varphi^*)^{-1}(f)\right) =$$

$$= \left(\sum_\sigma{}' p_\sigma^{(1)}\Big|_{\Pi_\varphi}\frac{\partial}{\partial p_\sigma} + S_v\right)\Big|_{\Pi_\varphi}\left((i_\varphi^*)^{-1}(f)\right) =$$

$$= \left(\sum_\sigma{}' \widetilde{D}_\sigma(\varphi)\frac{\partial}{\partial p_\sigma} + S_v\right)\Big|_{\Pi_\varphi}\left((i_\varphi^*)^{-1}(f)\right) = (i_\varphi^*)^{-1}\left(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi^{(\varphi)} + S_w\right)(f).$$

Отсюда следует, что $S_\tau|_{\Pi_\varphi} = (i_\varphi)_*\left(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi^{(\varphi)} + S_w\right)$.

Покажем, что поля $\widetilde{D}_i^\tau$ касаются Π_φ, $\varphi \in \ker \widetilde{\ell}_F$, т. е. что Π_φ — инвариантное подмногообразие. В самом деле,

$$\left\{\widetilde{D}_i^\tau\left(p_\sigma^{(l)} - \left(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + S_v\right)^l(p_\sigma)\right)\right\}\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= S_p^l(\bar{p}_{\sigma+1_i})\Big|_{\Pi_\varphi} - \widetilde{D}_i^\tau(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + S_v)^l(p_\sigma)\Big|_{\Pi_\varphi} =$$

$$= S_\tau^l(\bar{p}_{\sigma+1_i})\Big|_{\Pi_\varphi} - (i_\varphi^*)^{-1}\left(\widetilde{D}_i^\varphi(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + S_v)^l(p_\sigma)\right) =$$

$$= S_\tau^l(\bar{p}_{\sigma+1_i})\Big|_{\Pi_\varphi} - (i_\varphi^*)^{-1}\left((\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + S_v)^l\widetilde{D}_i^\varphi(p_\sigma)\right) =$$

$$= S_\tau^l(\bar{p}_{\sigma+1_i})\Big|_{\Pi_\varphi} - (i_\varphi^*)^{-1}\left((\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + S_v)^l(p_{\sigma+1_i})\right) = 0.$$

Покажем, наконец, что $\widetilde{D}_i^\tau\Big|_{\Pi_\varphi} = (i_\varphi)_*\widetilde{D}_i^\varphi$. Действительно, для произвольной функции $f \in F(\widetilde{\mathcal{E}}_\varphi)$ имеем

$$\widetilde{D}_i^\tau\Big|_{\Pi_\varphi}((i_\varphi^*)^{-1}(f)) = \left(\bar{D}_i + \sum_{l\geqslant 0,j} S_\tau^l(X_{ij})\Big|_{\Pi_\varphi}\frac{\partial}{\partial v_j^l}\right)((i_\varphi^*)^{-1}(f)) =$$

$$= \left(\bar{D}_i + \sum_{l\geqslant 0,j}(\widetilde{\mathfrak{Э}}_\varphi + S_v)^l(X_{ij})\Big|_{\Pi_\varphi}\frac{\partial}{\partial v_j^l}\right)((i_\varphi^*)^{-1}(f)) = (i_\varphi^*)^{-1}\widetilde{D}_i^\varphi(f)$$

Утверждение доказано. $\square$

§ 6. Симметрии интегро-дифференциальных уравнений

Построенная выше теория нелокальных симметрий основывается на понятии накрытия, т. е. на введении нелокальных переменных в пространство бесконечно продолженного уравнения. Напомним, что такие нелокальности носят характер неопределенных интегралов. Теперь мы рассмотрим ситуацию, когда исходный объект является нелокальным, причем входящие в него нелокальности суть определенные интегралы. Такими объектами являются *интегро-дифференциальные уравнения*, и ниже мы развиваем теорию симметрий этих уравнений.

6.1. Преобразование интегро-дифференциальных уравнений в гранично-дифференциальную форму. Представим систему интегро-дифференциальных уравнений в виде

$$G_j(x, u, p_\sigma, I) = 0, \quad j = 1, \ldots, m_1, \tag{6.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — независимые переменные, $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — зависимые переменные, $p_\sigma = (p_\sigma^1, \ldots, p_\sigma^m)$ — производные зависимых по независимым, $I = (I_1, \ldots, I_{m_2})$ — интегралы. Значения интегралов могут зависеть как от выбора точки x, так и от выбора сечения u. Наиболее известные интегро-дифференциальные уравнения (см. [71]) содержат интегралы трех типов:

$$\int\limits_a^b f(x, s, u(s + x))ds, \tag{6.2}$$

$$\int\limits_0^x f(t, x, s, u(t, s), u(t, x - s), p_\sigma(t, s), p_\sigma(t, x - s))ds, \tag{6.3}$$

$$\int\limits_a^b f(t, x, s, u(t, s))ds, \tag{6.4}$$

где t, x — независимые переменные, u — зависимая переменная, p_σ — ее производные, s — переменная интегрирования. Эти (и многие другие) типы интегралов объединяются в одну форму следующим образом.

Пусть M — многообразие независимых переменных $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$, N — многообразие независимых переменных и переменных интегрирования $(x, s) = (x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_{n_1})$, $\rho\colon N \to M$ — соответствующее расслоение (возможно с особенностями), N_x — слой над точкой $x \in M$ расслоения ρ. Заметим, что подынтегральная функция зависит от x, s и $u(x)$ и существуют гладкие отображения $h_i\colon N \to M$, $i = 1, \ldots, m_2$, которые позволяют записать (6.2)–(6.4) в виде

$$\int\limits_{N_x} f(x, s, h_1{}^*(u), h_1{}^*(p_\sigma), \ldots, h_l{}^*(u), h_l{}^*(p_\sigma))ds. \tag{6.5}$$

Пример 6.1. Для интеграла (6.2) имеем: $M = \mathbb{R}$, $N = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant s \leqslant b\}$, N_x — отрезок $[a, b]$ для любого x, $l = 1$, $h\colon (x, s) \mapsto x + s$.

Пример 6.2. Для интеграла (6.3) имеем: $M = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\}$, $N = \{(t, x, s) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant s \leqslant x\}$, $N_{(t,x)}$ — отрезок $[0, x]$ (в особых точках $\{x = 0\}$ отрезок стягивается в точку), $l = 2$, $h_1\colon (t, x, s) \mapsto (t, s)$, $h_2\colon (t, x, s) \mapsto (t, x - s)$.

Пример 6.3. Для интеграла (6.4) в случае $b = \infty$ имеем: $M = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant a\}$, $N = \{(t, x, s) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant a,\ s \geqslant a\}$, $N_{(t,x)}$ — луч $\{s \geqslant a\}$, $l = 1$, $h\colon (t, x, s) \mapsto (t, s)$. Случай конечного b рассматривается аналогично.

Для упрощения дальнейших формул будем считать, что все встречающиеся интегралы одномерны. Случай кратного интеграла может быть рассмотрен аналогично, для этого достаточно представить его в виде повторного.

Если интеграл (6.5) одномерен, то N_x есть или отрезок, или бесконечный полуинтервал, или прямая. В случае $N_x = [a_x, b_x]$ введем нелокальную переменную v, зависящую от x, s, так, чтобы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial s} = f(x, s, h_1{}^*(u), h_1{}^*(p_\sigma), \ldots, h_l{}^*(u), h_l{}^*(p_\sigma)), \\ &v\big|_{s = a_x} = 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Значение интеграла (6.5) в точке $x \in M$ совпадает в этом случае с величиной $v\big|_{s = b_x}$. Введем отображения

$$a\colon M \to N; \quad x \mapsto (x, a_x), \qquad b\colon M \to N; \quad x \mapsto (x, b_x).$$

Тогда

$$v\big|_{s = a_x} = a^*(v), \qquad v\big|_{s = b_x} = b^*(v).$$

Случай $N_x = [a_x, \infty)$ (аналогично $(-\infty, b_x]$ и $(-\infty, \infty)$) может быть сведен к случаю отрезка переходом к новой переменной интегрирования. Такой переход осуществляется построением диффеоморфизма μ: $N \to N'$, при котором бесконечные интервалы интегрирования $N_x = [a_x, \infty)$ переходят в конечные полуинтервалы $\mu(N_x) = [\bar{a}_x, b_x)$. Добавляя к многообразию N' предельные точки $\{b_x \mid x \in M\}$ полуинтервалов $\mu(N_x)$, мы получаем многообразие $\overline{N}$ и расслоение $\bar{\rho}$: $\overline{N} \to M$, ограничение которого на подмножество $N' \subset \overline{N}$ совпадает с отображением $\rho \circ \mu^{-1}$, а слои расслоения $\bar{\rho}$ суть отрезки $(\bar{\rho})^{-1}(x) = [\bar{a}_x, b_x]$, $x \in M$. Таким образом, мы можем ограничиться случаем, когда множества N_x, $x \in M$, отрезки (см. также замечание 6.1 ниже).

Итак, систему (6.1) можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&G_j(x, u, p_\sigma, \ldots, b_k{}^*(v^k), \ldots) = 0, \quad j = 1, \ldots, m_1,\\
&a_k{}^*(v^k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m_2,\\
&\frac{\partial v^k}{\partial s_k} = f_k(x, s_k, \ldots, (h_i^k)^*(u), (h_i^k)^*(p_\sigma), \ldots), \quad k = 1, \ldots, m_2,
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — координаты на многообразии M, $u = (u^1, \ldots \ldots, u^m)$ — сечение расслоения π над M, $p_\sigma = (p_\sigma^1, \ldots, p_\sigma^m)$ — его производные, v^k — функция на многообразии N_k, b_k, a_k — вложения M в N_k, h_i^k, $i = 1, \ldots, l_k$ — проекции N_k в M, $k = 1, \ldots, m_2$. При этом, так как переменные v^k, $k = 1, \ldots, m_2$, однозначно определяются по переменным u^j, $j = 1, \ldots, m$, с помощью второго и третьего уравнений (6.7), то системы (6.1) и (6.7) эквивалентны в том смысле, что решения одной восстанавливаются по решениям другой.

Система (6.7) — это система на сечения над разными многообразиями $M, N_1, \ldots, N_{m_2}$. В случае, когда многообразия $N_1, \ldots, N_{m_2}$ диффеоморфны между собой, мы можем представить все функции и сечения, входящие в систему (6.7), как функции и сечения над одним многообразием. Действительно, пусть N — многообразие, F_k: $N \to N_k$, $k = 1, \ldots, m_2$, — диффеоморфизмы, a_0: $M \to N$ — некоторое вложение (например, $a_0 = F_1^{-1} \circ a_1$), h_0: $N \to M$ — гладкое отображение, обратное слева к a_0, т. е. $h_0 \circ a_0 = \mathrm{id}_M$. Положим

$$\bar{u} = h_0{}^*(u), \qquad \bar{v}^k = F_k{}^*(v^k), \qquad k = 1, \ldots, m_2.$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
a_0{}^*(\bar{u}) = a_0{}^*(h_0{}^*(u)) = (h_0 \circ a_0)^*(u) = u,\\
v^k = (F_k^{-1})^*(\bar{v}^k), \quad (h_i^k)^*(u) = (h_i^k)^*(a_0{}^*(\bar{u})) = (a_0 \circ h_i^k)^*(\bar{u}),
\end{gathered}
$$

$$b_k{}^*(v^k) = b_k{}^*((F_k^{-1})^*(\bar v^k)) = (F_k^{-1} \circ b_k)^*(\bar v^k)$$

и т. д. Используя эти равенства и действуя гомоморфизмом $h_0{}^*$ на первое и второе уравнения (6.7), переписываем эти уравнения в виде

$$G_j(h_0{}^*(x), \bar u, h_0{}^*(p_\sigma), \dots, \bar b_k^*(\bar v^k), \dots) = 0, \qquad (6.8)$$
$$\bar a_k^*(\bar v^k) = 0,$$

где $\bar b_k = F_k^{-1} \circ b_k \circ h_0$, $\bar a_k = F_k^{-1} \circ a_k \circ h_0$ — отображения N в N. На третье уравнение (6.7) подействуем изоморфизмом $F_k{}^*$. Используя равенство

$$F_k{}^*\left(\frac{\partial v^k}{\partial s_k}\right) = (F_k^{-1})_*\left(\frac{\partial}{\partial s_k}\right)(F_k{}^*(v^k)) = X_k(\bar v^k),$$

где $X_k = (F_k^{-1})_*\left(\dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)$ — векторное поле на N, получаем уравнение

$$X_k(\bar v^k) = f_k(F_k{}^*(x), F_k{}^*(s_k), (\bar h_i^k)^*(\bar u), (\bar h_i^k)^*(h_0{}^*(p_\sigma))), \qquad (6.9)$$

где $\bar h_i^k = a_0 \circ h_i^k \circ F_k$ — отображение N в N.

Заметим, что функции вида $h_0{}^*(p_\sigma^r)$ можно представить как производные функций $\bar u^r$, если

$$h_{0,*}(Y_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_i \in D(N), \quad i = 1, \dots, n.$$

В этом случае

$$h_0{}^*\left(\frac{\partial u^r}{\partial x_i}\right) = Y_i(\bar u^r), \qquad h_0{}^*\left(\frac{\partial^2 u^r}{\partial x_i \partial x_l}\right) = Y_i(Y_l(\bar u^r))$$

и т. д. А значит, $h_0{}^*(p_\sigma^r)$ есть функция от $x, s, \bar u$ и $\bar p_\sigma$. Кроме того, $\bar u$ — сечение вида $h_0^*(u)$, $u \in \Gamma(\pi)$. Такие сечения, и только они, удовлетворяют уравнению

$$(a_0 \circ h_0)^*(\bar u) = \bar u. \qquad (6.10)$$

Действительно,

$$(a_0 \circ h_0)^*(\bar u) = h_0{}^*(a_0{}^*(\bar u)),$$

и можно положить $u = a_0{}^*(\bar u)$. Если $\bar u = h_0^*(u)$, то

$$(a_0 \circ h_0)^*(\bar u) = (h_0 \circ a_0 \circ h_0)^*(u) = h_0{}^*(u) = \bar u,$$

так как $h_0 \circ a_0 = \mathrm{id}_M$.

Таким образом, система (6.7) (а значит, и система (6.1)) эквивалентна системе уравнений (6.8)–(6.10), $j=1,\ldots,m_1$, $k=1,\ldots,m_2$. При этом функции $\bar{u}^j,\bar{v}^k$, входящие в эти уравнения, суть функции на N, а $\bar{b}_k,\bar{a}_k,\bar{h}_i^k,\bar{h}_0=a_0\circ h_0$ — отображения N в N. Возвращаясь к предыдущим обозначениям, т. е. обозначая через u сечение $(\bar{u}^1,\ldots$ $\ldots,\bar{u}^m,\bar{v}^1,\ldots,\bar{v}^{m_2})$ над N, а через $x=(x_1,\ldots,x_{n+m_2})$ — координаты на N, эту систему записываем как систему уравнений вида

$$G(x,u,p_\sigma,g^*(u),g^*(p_\sigma))=0, \tag{6.11}$$

где $g=g_1,\ldots,g_l$ — отображения из N в N. Будем называть уравнения вида (6.11) *гранично-дифференциальными*, имея в виду, что в примерах, как правило, образ g_k, $k=1,\ldots,m_2$, принадлежит границе N, а значение $g_k{}^*(u)$ определяется значениями u на границе N. Другое название таких уравнений — *функционально-дифференциальные* (см. например [71]).

Для продолжения уравнений вида (6.11) мы можем использовать как операцию дифференцирования, так и действие гомоморфизма g^*, где g — некоторое отображение из N в N. Легко видеть, что новое (продолженное) уравнение будет содержать сечения вида $g^*(g_i{}^*(u))=(g_i\circ g)^*(u)$, где $g_1,\ldots,g_l$ — отображения, используемые в записи системы уравнений (6.11). Поэтому кроме g мы должны рассматривать все композиции $g_i\circ g$, $i=1,\ldots,l$. Если в качестве g брать только отображения, входящие в уравнения (6.11) и различные их продолжения, то мы должны будем рассмотреть полугруппу, содержащую $g_1,\ldots,g_l$, тождественное отображение $g_0=\mathrm{id}_N$ и различные композиции отображений $g_1,\ldots,g_l$. Будем называть эту полугруппу *полугруппой системы гранично-дифференциальных уравнений* (6.11) и обозначать через $\mathcal{G}$.

Пример 6.4. Пусть система $\mathcal{E}_0$ интегро-дифференциальных уравнений содержит один интеграл типа (6.3) и один интеграл типа (6.4) с $a=0,b=\infty$. Найдем полугруппу отображений для соответствующей системы $\mathcal{E}_1$ гранично-дифференциальных уравнений. Многообразие независимых переменных системы $\mathcal{E}_0$ есть $M=$ $=\{(t,x)\mid x\geqslant 0\}$ (см. примеры 6.2 и 6.3). Многообразие N_1 для интеграла (6.3) есть $N_1=\{(t,x,s)\mid x\geqslant 0, 0\leqslant s\leqslant x\}$, для интеграла (6.4) — $N_2=\{(t,x,s)\mid x\geqslant 0, s\geqslant 0\}$ $(a=0,b=\infty)$. На этих многообразиях заданы отображения (рис. 6.2)

Замечание 6.1. Приведенная выше схема преобразования интегро-дифференциального уравнения к системе гранично-дифференциальных уравнений требует, чтобы мы свели несобственный интеграл типа (6.4) с $b=\infty$ к определенному интегралу с ко-

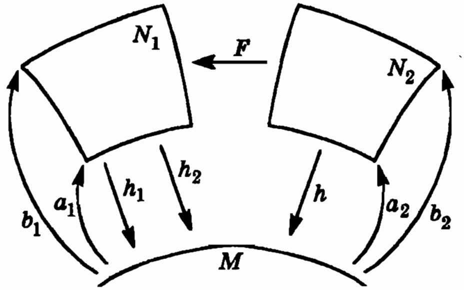

Рис. 6.2.
h_1: $(t,x,s)\mapsto(t,s)$,
h_2: $(t,x,s)\mapsto(t,x-s)$,
a_1: $(t,x)\mapsto(t,x,0)$,
b_1: $(t,x)\mapsto(t,x,x)$,
h: $(t,x,s)\mapsto(t,s)$,
a_2: $(t,x)\mapsto(t,x,0)$,
b_2: $(t,x)\mapsto(t,x,\infty)$.

нечными пределами интегрирования. Это осуществляется построением диффеоморфизма μ: $N_2\to N_2'$ и многообразия $\overline{N}$, которое получается из N_2' добавлением некоторых предельных точек (см. с. 372). Такой подход существенно усложняет уравнения. Вместо этого мы будем считать, что к многообразию N_2 добавлены множества $\{(t,x,\infty),(t,\infty,s),(t,\infty,\infty)\,|\,x\geqslant 0, s\geqslant 0\}$, а гладкая структура на полученном множестве вводится через определение кольца гладких функций. А именно, гладкой функцией на новом многообразии называется гладкая функция f от t,x,s, для которой существуют пределы

$$f(t,x,\infty)=\lim_{s\to\infty}f(t,x,s),$$
$$f(t,\infty,s)=\lim_{x\to\infty}f(t,x,s),$$
$$f(t,\infty,\infty)=\lim_{\substack{x\to\infty\\ s\to\infty}}f(t,x,s),$$

равные значениям функции f в добавленных точках. Полученное многообразие, которое в дальнейшем мы также будем обозначать через N_2, диффеоморфно $\overline{N}_2$. Аналогичные гладкие структуры мы вводим на M и N_1. При таком подходе отображения b_2, g_3 (см. ниже) и различные композиции, содержащие g_3, однозначно определены.

Многообразия N_1 и N_2 диффеоморфны и F: $N_2\to N_1$: $(t,x,s)\mapsto(t,x+s,s)$ — диффеоморфизм. Выберем в качестве многообразия независимых переменных искомой системы гранично-дифференциальных уравнений многообразие $N=N_2$, в качестве вложения — отображение $a_0=F^{-1}\circ a_1$: $M\to N$, а в качестве обратного левого к нему — отображение $h_0=h_2\circ F$: $N\to M$. Тогда отображения

$$g_1=\bar a_1=\bar h_2=F^{-1}\circ a_1\circ h_2\circ F=\bar a_2=a_2\circ h_2\circ F;$$
$$g_1\colon\ (t,x,s)\mapsto(t,x,0),$$
$$g_2=\bar b_1=F^{-1}\circ b_1\circ h_2\circ F;\qquad g_2\colon\ (t,x,s)\mapsto(t,0,x),$$

$g_3 = \bar{b}_2 = b_2 \circ h_2 \circ F;$ $\qquad g_3\colon\ (t, x, s) \mapsto (t, x, \infty),$

$g_4 = \bar{h}_1 = F^{-1} \circ a_1 \circ h_1 \circ F = \bar{h} = F^{-1} \circ a_1 \circ h;$ $\quad g_4\colon\ (t, x, s) \mapsto (t, s, 0)$

порождают полугруппу $\mathcal{G}$, а вся полугруппа состоит из 11 элементов: $g_0 = \mathrm{id}_M$, g_1, g_2, g_3, g_4, g_2^2, $g_3 \circ g_2$, $g_2 \circ g_4$, $g_3 \circ g_4$, $g_4 \circ g_3$, $g_3 \circ g_4 \circ g_3$.

Пример 6.5. Найдем систему гранично-дифференциальных уравнений для *уравнения коагуляции Смолуховского* [138, 26]:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^x K(x-s,s)u(t,x-s)u(t,s)ds - \\ -u(t,x)\int\limits_0^\infty K(x,s)u(t,s)ds, \qquad (6.12)$$

где $K(x,s)$ — заданная функция, удовлетворяющая равенству $K(s,x) = K(x,s)$ для любых $x \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$. Повторим для этого уравнения рассуждения, приведенные выше для общего случая. Уравнение (6.12) содержит один интеграл типа (6.3) и один интеграл типа (6.4). Многообразие N и полугруппа описаны в примере 6.4. Для каждого решения $u(t,x)$ уравнения (6.12) вводим функцию $v^1(t,x,s)$ на N_1 и функцию $v^2(t,x,s)$ на N_2:

$$\frac{\partial v^1}{\partial s} = K(x-s,s)h_1{}^*(u)h_2{}^*(u), \qquad (6.13)$$

$$a_1{}^*(v^1) = 0, \qquad (6.14)$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial s} = K(x,s)h^*(u),$$

$$a_2{}^*(v^2) = 0 \qquad (6.15)$$

(отображения h, h_1, h_2, a_1, b_1, a_2, b_2, F определены в примере 6.4). Тогда уравнение коагуляции записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}b_1{}^*(v^1) - ub_2{}^*(v^2). \qquad (6.16)$$

Вводя обозначения $u^1 = (h_2 \circ F)^*(u)$, $u^2 = F^*(v^1)$, $u^3 = v^2$, действуя на уравнения (6.14), (6.15) и (6.16) гомоморфизмом $(h_2 \circ F)^*$, а на уравнение (6.13) — изоморфизмом F^*, и используя равенство $(F^{-1})_*(\frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial x}$, получаем систему гранично-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} = \frac{1}{2}g_2{}^*(u^2) - u^1 g_3{}^*(u^3),$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u^2}{\partial s} - \frac{\partial u^2}{\partial x} = K g_4{}^*(u^1)u^1, \\ &\frac{\partial u^3}{\partial s} = K g_4{}^*(u^1), \\ &g_1{}^*(u^1) = u^1, \ g_1{}^*(u^2) = 0, \ g_1{}^*(u^3) = 0, \end{aligned} \tag{6.17}$$

которая эквивалентна уравнению (6.12).

Дадим геометрическую интерпретацию гранично-дифференциальных уравнений, воспользовавшись аналогией с дифференциальными уравнениями.

6.2. Пространства $(k, \mathcal{G})$-джетов. Обобщим понятие пространства джетов так, чтобы гранично-дифференциальные уравнения можно было интерпретировать как подмногообразия этого пространства. Пусть π: $E \to M$ — гладкое векторное локально тривиальное расслоение над многообразием с краем M, $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, π_k: $J^k(\pi) \to M$ — соответствующее расслоение k-джетов, а $\mathcal{G}$ — конечное множество гладких отображений M в M, содержащее тождественное отображение id_M. Обозначим через $\pi_k^{\mathcal{G}}$ сумму Уитни индуцированных расслоений: $\pi_k^{\mathcal{G}} = \bigoplus\limits_{g \in \mathcal{G}} g^*(\pi_k)$. Через $J^k(\pi; \mathcal{G})$ обозначим тотальное пространство расслоения $\pi_k^{\mathcal{G}}$. Множество $J^k(\pi; \mathcal{G})$ есть конечномерное гладкое многообразие, если k конечно, и бесконечномерное многообразие, если k бесконечно.

Каждая точка из $J^k(\pi; \mathcal{G})$ над $x \in M$ представляет собой набор k-джетов $\theta_k^g \in J^k(\pi)$, $g \in \mathcal{G}$, удовлетворяющих условию $\pi_k(\theta_k^g) = g(x)$. Для каждого $g \in \mathcal{G}$ найдется такое гладкое сечение s_g расслоения π, что $[s_g]_{g(x)}^k = \theta_k^g$. Набор k-джетов $\{[s_g]_{g(x)}^k\}_{g \in \mathcal{G}}$ будем называть *$(k, \mathcal{G})$-джетом семейства сечений* $\{s_g\}$ в точке x. Каждое семейство сечений $\{s_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ определяет сечение $j_k(\{s_g\})$ расслоения $\pi_k^{\mathcal{G}}$:

$$j_k(\{s_g\})(x) = \{[s_g]_{g(x)}^k\}_{g \in \mathcal{G}}. \tag{6.18}$$

Если все сечения s_g, $g \in \mathcal{G}$, совпадают с сечением s, то соответствующий набор джетов будем называть *$(k, \mathcal{G})$-джетом сечения s* в точке x и обозначать $[s]_x^{(k, \mathcal{G})}$. Сечение $x \mapsto [s]_x^{(k, \mathcal{G})}$ будем обозначать через $j_k(s)$, а подмножество $(k, \mathcal{G})$-джетов сечений расслоения π — через $J^k(\pi; \mathcal{G})_0$. Геометрически $(k, \mathcal{G})$-джет сечения s интерпретируется как класс сечений расслоения π, касающихся с порядком $\geqslant k$ сечения s во всех точках $g(x)$, $g \in \mathcal{G}$ (рис. 6.3). Назовем многообразие $J^k(\pi; \mathcal{G})$ *многообразием* (*пространством*) *$(k, \mathcal{G})$-джетов*, а расслоение $\pi_k^{\mathcal{G}}$ — *расслоением $(k, \mathcal{G})$-джетов*.

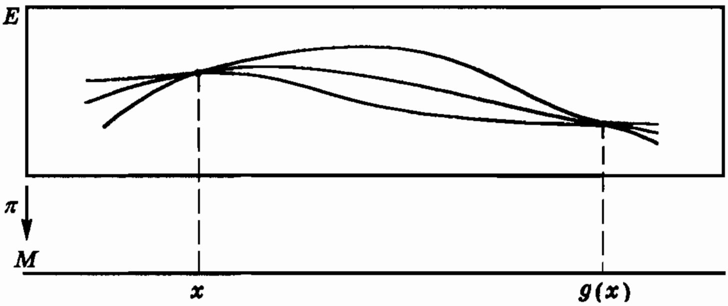

Рис. 6.3

Опишем подмножество $J^k(\pi;\mathcal{G})_0$. Если точка $x \in M$ такова, что все точки $g(x)$, $g \in \mathcal{G}$, отличны друг от друга, то для любого набора сечений $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ найдется гладкое сечение s, которое касается сечения s_g в точке $g(x)$ с порядком $\geqslant k$ для каждого $g \in \mathcal{G}$. Следовательно, слой $(\pi_k^{\mathcal{G}})^{-1}(x)$ лежит в $J^k(\pi;\mathcal{G})_0$. Если же для точки $x \in M$ существуют два таких отображения $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$, $g_1 \neq g_2$, что $g_1(x) = g_2(x)$, то $(k,\mathcal{G})$-джет семейства сечений $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ является $(k,\mathcal{G})$-джетом сечения только в случае, когда

$$[s_{g_1}]^k_{g_1(x)} = [s_{g_2}]^k_{g_2(x)}.$$

Гранично-дифференциальным уравнением порядка k на сечения расслоения π относительно множества отображений $\mathcal{G}$ (или просто *уравнением*) будем называть подмногообразие $\mathcal{E}$ многообразия $J^k(\pi;\mathcal{G})$. ***Решениями уравнения*** $\mathcal{E} \subset J^k(\pi;\mathcal{G})$ будем называть такие сечения $s \in \Gamma(\pi)$, что $j_k(s)(M) \subset \mathcal{E}$.

Замечание 6.2. Подмногообразия вида $j_k(s)(M)$ содержатся в $J^k(\pi;\mathcal{G})_0$. Казалось бы, в гранично-дифференциальном случае, в качестве аналога пространства $J^k(\pi)$ следует взять множество $J^k(\pi;\mathcal{G})_0$. Но поскольку в дальнейшем будет использоваться дифференциально-геометрический язык, а множество $J^k(\pi;\mathcal{G})_0$ не является многообразием, то мы расширили $J^k(\pi;\mathcal{G})_0$ до многообразия $J^k(\pi;\mathcal{G})$ и в качестве аналога $J^k(\pi)$ взяли $J^k(\pi;\mathcal{G})$.

Введем на многообразии $J^k(\pi;\mathcal{G})$ следующую каноническую систему координат. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты в окрестности $U \subset M$, $(u^1, \ldots, u^m)$ — координаты в слое расслоения $\pi|_U$, $(x_i,\ p^j_\sigma,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m,\ |\sigma| \leqslant k)$ — соответствующие координаты в $J^k(\pi)$. Тогда, обозначая через $(p^j_{\sigma g})$ соответствующие координаты в слое расслоения $g^*(\pi_k)$, получаем систему координат

$$(x_i,\ p^j_{\sigma g}),\qquad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,m,\quad |\sigma|\leqslant k,\quad g\in\mathcal{G},\quad (6.19)$$

на $J^k(\pi;\mathcal{G})$. При этом p-координаты $(k,\mathcal{G})$-джета семейства сечений $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ в точке x равны

$$p^j_{\sigma g}=\frac{\partial^{|\sigma|}s^j_g}{\partial x^\sigma}(g(x)),$$

где $s^1_g,\ldots,s^m_g$ — компоненты сечения s_g. На многообразии $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ имеем ту же каноническую систему координат (6.19), но без ограничений на $|\sigma|$.

Упражнение 6.1. Опишете множество $J^\infty(\pi;\mathcal{G})_0$ в канонических координатах.

Как и в случае обычных джетов, для $k>l$ и для $k=\infty$ определено расслоение

$$\pi^{\mathcal{G}}_{k,l}\colon\ J^k(\pi;\mathcal{G})\to J^l(\pi;\mathcal{G}),\qquad (6.20)$$

а именно:

$$\pi^{\mathcal{G}}_{k,l}(\{\theta^g_k\}_{g\in\mathcal{G}})=\{\pi_{k,l}(\theta^g_k)\}_{g\in\mathcal{G}}.\qquad (6.21)$$

При этом выполняется равенство

$$\pi^{\mathcal{G}}_{k,l}\circ j_k(\{s_g\})=j_l(\{s_g\}),\qquad (6.22)$$

где $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ — произвольное семейство сечений расслоения π.

Упражнение 6.2. Покажите, что пространство бесконечных джетов $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ является обратным пределом башни конечных джетов, порожденной отображениями $\pi^{\mathcal{G}}_{l+1,l}$, $l\geqslant 0$.

Если $\mathcal{G}_1$ — подмножество $\mathcal{G}$, то формула

$$\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k(\{\theta^g_k\}_{g\in\mathcal{G}})=\{\theta^g_k\}_{g\in\mathcal{G}_1}\qquad (6.23)$$

определяет расслоение

$$\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k\colon\ J^k(\pi;\mathcal{G})\to J^k(\pi;\mathcal{G}_1),\qquad (6.24)$$

причем справедливы равенства

$$\pi^{\mathcal{G}_1}_k\circ\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k=\pi^{\mathcal{G}}_k,\qquad (6.25)$$

$$\pi^{\mathcal{G}_1}_{k,l}\circ\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k=\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_l\circ\pi^{\mathcal{G}}_{k,l},\qquad (6.26)$$

$$\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k\circ j_k(\{s_g\})=j_k(\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}_1}),\qquad (6.27)$$

где $\{s_g\}$ — произвольное семейство сечений расслоения π и $g\in\mathcal{G}$, а через $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}_1}$ обозначены те сечения s_g, для которых $g\in\mathcal{G}_1$.

Замечание 6.3. Если множество $\mathcal{G}$ состоит только из тождественного отображения, то $J^k(\pi; \{\mathrm{id}_M\})$ совпадает с обычным пространством джетов $J^k(\pi)$, определенным в гл. 3 и 4. Если же множество $\mathcal{G}$ кроме тождественного имеет другие отображения, то $J^0(\pi; \mathcal{G}) \neq E = J^0(\pi)$. Отметим, что для любого k имеется расслоение

$$\pi_0^{\mathcal{G}, \{\mathrm{id}_M\}} \circ \pi_{k,0}^{\mathcal{G}}\colon J^k(\pi; \mathcal{G}) \to J^0(\pi; \mathcal{G}) \to E.$$

В случае бесконечного множества $\mathcal{G}$ многообразие $(k, \mathcal{G})$-джетов определяется следующим образом. Пусть $\{\mathcal{G}_\alpha\}$ — всевозможные конечные подмножества множества $\mathcal{G}$, содержащие id_M. Тогда для любой пары $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}_\beta$ определены отображения $\pi_k^{\mathcal{G}_\beta, \mathcal{G}_\alpha}\colon J^k(\pi; \mathcal{G}_\beta) \to J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$, причем $\pi_k^{\mathcal{G}_\beta, \mathcal{G}_\alpha} \circ \pi_k^{\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_\beta} = \pi_k^{\mathcal{G}_\gamma, \mathcal{G}_\alpha}$, если $\mathcal{G}_\alpha \subset \subset \mathcal{G}_\beta \subset \mathcal{G}_\gamma$. Определим $J^k(\pi; \mathcal{G})$ как обратный предел многообразий $J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$ относительно системы отображений $\{\pi_k^{\mathcal{G}_\beta, \mathcal{G}_\alpha}\}_{\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}_\beta}$. Иными словами, точкой θ_k множества $J^k(\pi; \mathcal{G})$ назовем набор таких точек $\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha} \in J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$, что $\mathcal{G}_\alpha$ — произвольное конечное подмножество $\mathcal{G}$, а если $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}_\beta$, то

$$\pi_k^{\mathcal{G}_\beta, \mathcal{G}_\alpha}(\theta_k^{\mathcal{G}_\beta}) = \theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}. \tag{6.28}$$

В этом случае отображение $\pi_k^{\mathcal{G}}\colon J^k(\pi; \mathcal{G}) \to M$ определим формулой $\pi_k^{\mathcal{G}}(\theta_k) = \pi_k^{\mathcal{G}_\gamma}(\theta_k^{\mathcal{G}_\gamma})$, где $\theta_k^{\mathcal{G}_\gamma}$ — произвольный элемент набора $\theta_k = \{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}\}_{\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}}$. Из формул (6.25) и (6.28) следует, что точка $\pi_k^{\mathcal{G}_\gamma}(\theta_k^{\mathcal{G}_\gamma}) \in \in M$ не зависит от выбора элемента $\theta_k^{\mathcal{G}_\gamma}$ из набора θ_k.

Так как точки $\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha} \in J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$ в случае конечного множества $\mathcal{G}_\alpha$ сами являются наборами k-джетов $\{\theta_k^g\}_{g \in \mathcal{G}_\alpha}$, а условие (6.28) означает только, что набор $\{\theta_k^g\}_{g \in \mathcal{G}_\alpha}$ есть часть набора $\{\theta_k^g\}_{g \in \mathcal{G}_\beta}$, если $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}_\beta$, то точку $J^k(\pi; \mathcal{G})$ в случае бесконечного множества $\mathcal{G}$ можно понимать, как бесконечный набор k-джетов $\{\theta_k^g\}_{g \in \mathcal{G}}$ или точнее, как $\{[s_g]_{g(x)}^k\}_{g \in \mathcal{G}}$. Формулы (6.21), (6.23), (6.18) определяют отображения (6.20), (6.24), $j_k(\{s_g\})\colon M \to J^k(\pi; \mathcal{G})$ и в случае бесконечного $\mathcal{G}$, причем, как и в конечном случае, справедливы равенства (6.22), (6.25), (6.26), (6.27), а также $\pi_k^{\mathcal{G}} \circ j_k(\{s_g\}) = \mathrm{id}_M$ и т. п. (см. гл. 4).

Как и $J^\infty(\pi)$, множество $J^k(\pi; \mathcal{G})$ в случае бесконечного $\mathcal{G}$ и конечного или бесконечного k наделяется структурой бесконечномерного многообразия. Координаты в $J^k(\pi; \mathcal{G})$ задаются набором функций (6.19), но с бесконечным множеством $\mathcal{G}$. Понятие гладкой функции, гладкого отображения, касательного вектора, векторного поля, дифференциальной формы и т. д. вводятся на $J^k(\pi;\mathcal{G})$ так же, как на $J^\infty(\pi)$ (см. гл. 4).

Обозначим через $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$ и $\mathcal{F}_k(\pi;\mathcal{G})$ алгебры гладких функций на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ и на $J^k(\pi;\mathcal{G})$ соответственно, а через $\Lambda^*(\pi;\mathcal{G})$ — модуль дифференциальных форм на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$. Мономорфизмы $(\pi^{\mathcal{G}}_{\infty,k})^*$ и $(\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}_\infty)^*$, где $\mathcal{G}'\subset\mathcal{G}$, вкладывают алгебры $\mathcal{F}_k(\pi;\mathcal{G})$ и $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G}')$ в алгебру $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$. Образы этих мономорфизмов будем обозначать также через $\mathcal{F}_k(\pi;\mathcal{G})$ и $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G}')$. В частности, $\mathcal{F}(\pi)=\mathcal{F}(\pi;\{\mathrm{id}_M\})$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$. Указанные вложения позволяют ввести на алгебре $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$ (аналогично, на модуле $\Lambda^*(\pi;\mathcal{G})$) две фильтрации: фильтрацию по k, аналогичную фильтрации $\mathcal{F}(\pi)$ (см. гл. 4), и фильтрацию, соответствующую вложениям конечных подмножеств $\mathcal{G}_\alpha$ множества $\mathcal{G}$. Вторая фильтрация ставит в соответствие функции φ из $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$ конечное подмножество $\mathcal{G}_\alpha$ множества $\mathcal{G}$, если φ является функцией на $J^k(\pi;\mathcal{G}_\alpha)$. Для первой фильтрации выполняются равенства (4.5) гл. 4. Для второй фильтрации равенства (4.5) следует переписать следующим образом: под $\deg\varphi$ следует понимать соответствующее подмножество $\mathcal{G}_\alpha\subset\mathcal{G}$, а неравенство $\leqslant$ заменяется на включение $\subseteq$.

Для упрощения дальнейшего мы не будем использовать понятие фильтрации, хотя дальнейшее изложение будет совершенно аналогично гл. 4. Так, под гладким отображением G из $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ в $J^\infty(\xi;\mathcal{G}')$, где $\xi\colon\ Q\to M$ — векторное расслоение, а $\mathcal{G}'$ — второе множество отображений M в M, мы будем понимать такое отображение множеств, что для всякой функции $\varphi\in\mathcal{F}(\xi;\mathcal{G}')$ элемент $G^*(\varphi)=\varphi\circ G$ является гладкой функцией на пространстве $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ и для любого числа k и любого конечного подмножества $\mathcal{G}_\alpha\subset\mathcal{G}'$ найдутся такое число l и конечное подмножество $\mathcal{G}_\beta\subset\mathcal{G}$, что

$$G^*(\mathcal{F}_k(\xi;\mathcal{G}_\alpha))\subset\mathcal{F}_l(\pi;\mathcal{G}_\beta).$$

Касательный вектор X_θ к многообразию $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ в точке θ определяется как совокупность $\{X_x, X_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}}\}$ таких касательных векторов к конечномерным многообразиям M и $J^k(\pi;\mathcal{G}_\alpha)$ в точках $x=\pi^{\mathcal{G}}_\infty(\theta)$ и $\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}=\pi_k^{\mathcal{G},\mathcal{G}_\alpha}(\pi^{\mathcal{G}}_{\infty,k}(\theta))$ соответственно, что

$$(\pi^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1,k})_*(X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}})=X_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}},\quad (\pi_k^{\mathcal{G}_\beta,\mathcal{G}_\alpha})_*(X_{\theta_k^{\mathcal{G}_\beta}})=X_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}},\quad (\pi_k^{\mathcal{G}_\alpha})_*(X_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}})=X_x.$$

Векторное поле на многообразии $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ есть по определению такое дифференцирование X алгебры $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$, что для любого числа

k и любого конечного подмножества $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ найдутся такое число l и конечное подмножество $\mathcal{G}_\beta \subset \mathcal{G}$, что

$$X(\mathcal{F}_k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)) \subset \mathcal{F}_l(\pi; \mathcal{G}_\beta).$$

Множество векторных полей на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ обозначим через $D(\pi; \mathcal{G})$. *Подстановка* векторного поля X на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ в форму $\omega \in \Lambda^i(\pi; \mathcal{G})$ дает нам форму $X \rfloor \omega \in \Lambda^{i-1}(\pi; \mathcal{G})$, значение которой в точке $\theta = \{x, \theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}\}$ равно $X_{\theta_l^{\mathcal{G}_\beta}} \rfloor \omega_{\theta_l^{\mathcal{G}_\beta}}$, если ω является формой на $J^l(\pi; \mathcal{G}_\beta)$.

Упражнение 6.3. Дайте определение дифференциала $d\omega$ и производной Ли $X(\omega)$ в случае $\omega \in \Lambda^*(\pi; \mathcal{G}_1)$, $X \in D(\pi; \mathcal{G}_2)$, $\mathcal{G}_1 \neq \mathcal{G}_2$.

6.3. Гранично-дифференциальные операторы Пусть π и π' — гладкие векторные локально тривиальные расслоения над многообразием M, $\mathcal{G}$ — конечное множество гладких отображений M в M, содержащее тождественное отображение id_M. Отображение Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ называется *гранично-дифференциальным оператором порядка k относительно множества $\mathcal{G}$*, если для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ значение сечения $\Delta(s)$ в произвольной точке $x \in M$ определяется k-джетами сечения s в точках $g(x)$, $g \in \mathcal{G}$. Аналогично дифференциальному случаю (см. гл. 4) каждое сечение φ расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi')$ определяет гранично-дифференциальный оператор Δ_φ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ порядка k с помощью формулы

$$\Delta_\varphi(s) = \varphi \circ j_k(s). \tag{6.29}$$

В координатах $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p_{\sigma g}^j, \ldots)$ на $J^k(\pi; \mathcal{G})$ это соответствие выглядит следующим образом. Если $\varphi = \{\varphi^i(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p_{\sigma g}^j, \ldots)\}$, а $s = \{s^j(x_1, \ldots, x_n)\}$, то $\Delta_\varphi(s) = \left\{\varphi^i\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, g^*\left(\dfrac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}\right), \ldots\right)\right\}$.

Особенностью гранично-дифференциального случая является то, что не всякому гранично-дифференциальному оператору порядка k соответствует сечение расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi')$. Это объясняется тем, что с помощью формулы (6.29) по оператору Δ_φ мы можем восстановить только значения сечения φ в $(k, \mathcal{G})$-джетах сечений расслоения π, т. е. в точках подмножества $J^k(\pi; \mathcal{G})_0$. Поэтому формула (6.29) определяет гранично-дифференциальный оператор Δ_φ не только в случае, когда φ — сечение расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi')$, но и в случае, когда φ — сечение ограничения расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi')$ на подмножество $J^k(\pi; \mathcal{G})_0$.

Пример 6.6. Пусть $M = \mathbb{R}$, $\pi = \pi'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — тривиальное расслоение, множество $\mathcal{G}$ состоит из двух отображений: тождественного отображения $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ и проекции g многообразия $\mathbb{R}$ в точку $0 \in \mathbb{R}$. На $J^0(\pi; \mathcal{G})$ имеем систему координат (x, p_{0g_0}, p_{0g}). В этой системе координат точки множества $J^0(\pi; \mathcal{G}) \setminus J^0(\pi; \mathcal{G})_0$ образуют плоскость $\{x = 0\}$ без прямой $\{x = 0, p_{0g_0} = p_{0g}\}$. Гранично-дифференциальный оператор

$$\Delta\colon\ s \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2 + (s(x) - s(0))^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $s \in \Gamma(\pi)$, определяет гладкую функцию на $J^0(\pi; \mathcal{G})_0$, которую нельзя продолжить на все $J^0(\pi; \mathcal{G})$.

Упражнение 6.4. Докажите это.

В дальнейшем *гранично-дифференциальными операторами* мы будем называть только операторы вида Δ_φ, где φ — сечение расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi')$. Поскольку этому условию не удовлетворяют только гранично-дифференциальные операторы весьма «экзотического» вида (см. пример 6.6), то это ограничение не будет существенным. Через $\mathcal{F}_k(\pi, \pi'; \mathcal{G})$ мы будем обозначать множество сечений расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi')$. Как и в дифференциальном случае, для любого k имеются вложения

$$\mathcal{F}_k(\pi, \pi'; \mathcal{G}) \subset \mathcal{F}_{k+1}(\pi, \pi'; \mathcal{G}).$$

Поэтому мы можем положить

$$\mathcal{F}(\pi, \pi'; \mathcal{G}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k(\pi, \pi'; \mathcal{G}).$$

Покажем теперь, что композиция гранично-дифференциальных операторов вида Δ_φ есть гранично-дифференциальный оператор вида Δ_φ. Докажем это сначала для композиции $j_{k'}^{\mathcal{G}'} \circ j_k^{\mathcal{G}}$, где через $j_k^{\mathcal{G}}$ мы обозначаем оператор, отображающий произвольное сечение s какого-либо расслоения π в сечение $j_k(s)$ расслоения $\pi_k^{\mathcal{G}}$. В композиции $j_{k'}^{\mathcal{G}'} \circ j_k^{\mathcal{G}}$ оператор $j_{k'}^{\mathcal{G}'}$ отображает сечения расслоения $\pi_k^{\mathcal{G}}$ в сечения расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})_{k'}^{\mathcal{G}'}$. Обозначим через $\mathcal{G} \circ \mathcal{G}'$ множество отображений многообразия M вида $g \circ g'$, $g \in \mathcal{G}$, $g' \in \mathcal{G}'$. Построим отображение

$$\Phi_{k,k'}^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}\colon\ J^{k+k'}(\pi; \mathcal{G} \circ \mathcal{G}') \to J^{k'}(\pi_k^{\mathcal{G}}; \mathcal{G}'),$$

положив

$$\Phi_{k,k'}^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}(\{[s_g]_{g(x)}^{k+k'}\}_{g \in \mathcal{G} \circ \mathcal{G}'}) = \{[j_k(\{s_g\}_{g \in \mathcal{G}})]_{g'(x)}^{k'}\}_{g' \in \mathcal{G}'}.$$

Тогда для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ имеем

$$\Phi^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}_{k,k'} \circ j^{\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'}_{k+k'}(s) = (j^{\mathcal{G}'}_{k'} \circ j^{\mathcal{G}}_{k})(s), \tag{6.30}$$

т. е. $j^{\mathcal{G}'}_{k'} \circ j^{\mathcal{G}}_{k} = \Delta_\varphi$, где φ — сечение расслоения $(\pi^{\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'}_{k+k'})^*((\pi^{\mathcal{G}}_{k})^{\mathcal{G}'}_{k'})$, определенное отображением $\Phi^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}_{k,k'}$. Поэтому композиция $j^{\mathcal{G}'}_{k'} \circ j^{\mathcal{G}}_{k}$ есть гранично-дифференциальный оператор порядка $k+k'$ относительно множества $\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'$.

Для всякого морфизма Φ расслоений π и π' определим его поднятие

$$\Phi^{(k)}\colon\ J^k(\pi;\mathcal{G}) \to J^k(\pi';\mathcal{G})$$

формулой

$$\Phi^{(k)}(\{[s_g]^k_{g(x)}\}_{g\in\mathcal{G}}) = \{[\Phi\circ s_g]^k_{g(x)}\}_{g\in\mathcal{G}}.$$

Тогда, очевидно, для любого сечения $s \in \Gamma(\pi)$ выполнено равенство

$$\Phi^{(k)} \circ j_k(s) = j_k(\Phi\circ s). \tag{6.31}$$

Пусть теперь $\Delta_\varphi\colon\ \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$ и $\Delta_{\varphi'}\colon\ \Gamma(\pi')\to\Gamma(\pi'')$ — два гранично-дифференциальных оператора порядка k и k' относительно множества отображений $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ соответственно. Тогда, используя последовательно равенства (6.29), (6.31) и (6.30), получаем

$$\Delta_{\varphi'}(\Delta_\varphi(s)) = \Delta_{\varphi'}(\varphi\circ j^{\mathcal{G}}_{k}(s)) = \varphi'\circ j^{\mathcal{G}'}_{k'}(\varphi\circ j^{\mathcal{G}}_{k}(s)) =$$
$$= \varphi'\circ\varphi^{(k)}\circ j^{\mathcal{G}'}_{k'}(j^{\mathcal{G}}_{k}(s)) = \varphi'\circ\varphi^{(k)}\circ\Phi^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}_{k,k'}\circ j^{\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'}_{k+k'}(s).$$

А значит, отображение

$$\Phi = \varphi'\circ\varphi^{(k)}\circ\Phi^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}_{k,k'}\colon\ J^{k+k'}(\pi;\mathcal{G}\circ\mathcal{G}') \to E'',$$

где E'' — пространство расслоения π'', есть сечение расслоения $(\pi^{\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'}_{k+k'})^*(\pi'')$, задающее оператор $\Delta_{\varphi'}\circ\Delta_\varphi$. Иными словами композиция $\Delta_{\varphi'}\circ\Delta_\varphi = \Delta_\Phi$, является гранично-дифференциальным оператором порядка $k+k'$ относительно множества отображений $\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'$.

Если $\Delta\colon\ \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$ — гранично-дифференциальный оператор порядка k относительно множества отображений $\mathcal{G}$, а $\mathcal{G}'$ — второе множество отображений многообразия M, то композиция

$$\Delta^{\mathcal{G}'}_{l} = j^{\mathcal{G}'}_{l}\circ\Delta\colon\ \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi'^{\mathcal{G}'}_{l})$$

является гранично-дифференциальным оператором порядка $k+l$ относительно множества отображений $\mathcal{G}\circ\mathcal{G}'$. Оператор $\Delta^{\mathcal{G}'}_{l}$ будем называть $(l,\mathcal{G}')$-*продолжением* гранично-дифференциального оператора Δ.

Упражнение 6.5. Пусть $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}'$ — множества отображений многообразия M, содержащие тождественные отображения, причем $\mathcal{G}$ конечно. Покажите, что совокупность отображений

$$\{\varphi_{\Delta_l^{\mathcal{G}'}}\colon J^{k+l}(\pi; \mathcal{G}\circ\mathcal{G}') \to J^l(\pi'; \mathcal{G}')\}_{l\geqslant 0}$$

является гладким отображением многообразия $J^\infty(\pi; \mathcal{G}\circ\mathcal{G}')$ в многообразие $J^\infty(\pi'; \mathcal{G}')$.

Пусть теперь $\nabla\colon\ \Gamma(\xi)\to\Gamma(\xi')$ — линейный гранично-дифференциальный оператор относительно множества отображений $\mathcal{G}'$, π — расслоение над той же базой M, что и ξ, и ξ', $\mathcal{G}$ — множество отображений M. Как и в дифференциальном случае, определим *поднятие*

$$\widehat{\nabla}\colon\ \mathcal{F}(\pi, \xi; \mathcal{G}) \to \mathcal{F}(\pi, \xi'; \mathcal{G}\circ\mathcal{G}')$$

оператора ∇. Пусть θ — точка пространства $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ — семейство сечений, бесконечный джет которого в точке x есть θ, φ — сечение расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\xi)$. Положим по определению

$$\widehat{\nabla}(\varphi)(\theta) = \nabla(j_k(\{s_g\})^*(\varphi))(x).$$

Упражнение 6.6. Докажите равенство $\widehat{\nabla}(\varphi) = \varphi_{\nabla\circ\Delta}$, где $\Delta = \Delta_\varphi$, в точках $J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$. Приведите пример, когда это равенство неверно в остальных точках пространства $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Таким образом, мы не можем воспользоваться «глобальным» определением поднятия, данным в гл. 4.

Векторное поле X на многообразии M и гомоморфизм $g_1{}^*$, где g_1 — отображение из M в M, являются линейными гранично-дифференциальными операторами из $C^\infty(M)$ в $C^\infty(M)$ относительно множеств отображений $\{\mathrm{id}_M\}$ и $\{\mathrm{id}_M, g_1\}$ соответственно. Поэтому определены поднятия $\widehat{X}$ и $\widehat{g_1{}^*}$.

Упражнение 6.7. Убедитесь, что $\widehat{X}$ есть векторное поле на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ и для него выполнены равенства (1.12) из гл. 4 при $\varphi\in\mathcal{F}(\pi; \mathcal{G})$.

Гладкое отображение $g_1\colon\ M\to M$ поднимается до гладкого отображения

$$\widehat{g_1}\colon\ J^k(\pi; \mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}) \to J^k(\pi; \mathcal{G}),$$

где $\mathcal{G}_{g_1} = \{\mathrm{id}_M, g_1\}$, $k = 0, 1, \ldots, \infty$. А именно, отображение $\widehat{g_1}$ отображает точку $\theta_k = \{\theta_k^g\}_{g\in\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}}$ в точку $\widetilde{\theta}_k = \{\widetilde{\theta}_k^g\}_{g\in\mathcal{G}}$, где $\widetilde{\theta}_k^g = \theta_k^{g\circ g_1}$.

При этом если $\pi_k^{\mathcal{G}}(\theta)=x$, то θ_k^g есть k-джет в точке $g(x)$, а $\widetilde{\theta}_k^g$ есть k-джет в точке $g(x_1)$, где $x_1=g_1(x)$. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} J^k(\pi;\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}) & \xrightarrow{\widehat{g_1}} & J^k(\pi;\mathcal{G}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_k^{\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_k^{\mathcal{G}}} \\ M & \xrightarrow{g_1} & M \end{array} \qquad (6.32)$$

коммутативна, так же как и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} J^k(\pi;\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}) & \xrightarrow{\widehat{g_1}} & J^k(\pi;\mathcal{G}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_k^{\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1},\mathcal{G}'\circ\mathcal{G}_{g_1}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_k^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}} \\ J^k(\pi;\mathcal{G}'\circ\mathcal{G}_{g_1}) & \xrightarrow{\widehat{g_1}} & J^k(\pi;\mathcal{G}'), \end{array} \qquad (6.33)$$

где $\mathcal{G}'\subset\mathcal{G}$. Кроме того, верна формула

$$\widehat{g_1}\circ j_k(\{s_{\widetilde{g}}\})=j_k(\{\widetilde{s}_g\})\circ g_1, \qquad (6.34)$$

где $\widetilde{g}\in\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}$, $g\in\mathcal{G}$, $\widetilde{s}_g=s_{g\circ g_1}$, поскольку

$$\widehat{g_1}(j_k(\{s_{\widetilde{g}}\})(x))=\widehat{g_1}(\{[s_{\widetilde{g}}]^k_{\widetilde{g}(x)}\}_{\widetilde{g}\in\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}})=$$
$$=\{[s_{g\circ g_1}]^k_{g(g_1(x))}\}_{g\in\mathcal{G}}=j_k(\{s_{g\circ g_1}\})(g_1(x)).$$

Отображение $\widehat{g_1}$ является гладким для $k=0,1,\ldots,\infty$, так как для любого числа $l\geqslant 0$ и конечного подмножества $\mathcal{G}_\alpha\subset\mathcal{G}$ имеем

$$(\widehat{g_1})^*(\mathcal{F}_l(\pi;\mathcal{G}_\alpha))\subset\mathcal{F}_l(\pi;\mathcal{G}_\alpha\circ\mathcal{G}_{g_1}).$$

Упражнение 6.8. Покажите, что в случае $k=\infty$ справедливо равенство $\widehat{g}^*=\widehat{g^*}$.

Заметим, что равенство $\mathcal{G}\circ\mathcal{G}_{g_1}=\mathcal{G}$ означает инвариантность множества отображений $\mathcal{G}$ относительно правого действия g_1, т. е. $g\circ g_1\in\mathcal{G}$ для любого $g\in\mathcal{G}$. Если множество $\mathcal{G}$ инвариантно относительно правого действия и g_1, и g_2, то справедливо равенство

$$\widehat{g_1\circ g_2}=\widehat{g_1}\circ\widehat{g_2}. \qquad (6.35)$$

Действительно, $\widehat{g_2}(\{\theta_k^g\}_{g\in\mathcal{G}})=\{\widetilde{\theta}_k^g\}_{g\in\mathcal{G}}$, где $\widetilde{\theta}_k^g=\theta_k^{g\circ g_2}$, а

$$\widehat{g_1}(\{\widetilde{\theta}_k^g\}_{g\in\mathcal{G}})=\{\widetilde{\theta}_k^{g\circ g_1}\}_{g\in\mathcal{G}}=\{\theta_k^{g\circ g_1\circ g_2}\}_{g\in\mathcal{G}}=\widehat{g_1\circ g_2}(\{\theta_k^g\}_{g\in\mathcal{G}}).$$

Равенство (6.35), например, справедливо в случае, когда $\mathcal{G}$ — полугруппа, а g_1, g_2 — ее элементы.

Приведем координатное представление поднятий векторных полей и отображений, а также координатное представление $(l, \mathcal{G}')$-продолжения гранично-дифференциального оператора. Пусть $(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_{\sigma g}, \ldots)$ — координаты на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, $X = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_{\sigma g}, \ldots) \in \mathcal{F}(\pi; \mathcal{G})$ и $s = (s^1, \ldots, s^m) \in \Gamma(\pi)$. Тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \Delta_\varphi\right)(s) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \ldots, g^*\left(\frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}\right), \ldots\right)\right) = \\ = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{j,\sigma,g} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^*\left(\frac{\partial^{|\sigma|} s^j}{\partial x^\sigma}\right)\right) \frac{\partial \varphi}{\partial p^j_{\sigma g}}.$$

Поэтому в силу равенства $\dfrac{\partial}{\partial x_i} \circ g^* = \sum\limits_l \dfrac{\partial g^*(x_l)}{\partial x_i} g^* \circ \dfrac{\partial}{\partial x_l}$ имеем

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{|\sigma|, j, g, l} \frac{\partial g^*(x_l)}{\partial x_i} p^j_{\sigma + 1_l, g} \frac{\partial}{\partial p^j_{\sigma g}}. \tag{6.36}$$

Как и в дифференциальном случае, оператор $\widehat{\dfrac{\partial}{\partial x_i}}$ будем обозначать через D_i и называть *полной производной* по переменной x_i.

Отображение $\widehat{g_1}$, где g_1 — отображение из M в M, индуцирует, очевидно, следующие действия на координатные функции: $\widehat{g_1}^*(x_i) = g_1^*(x_i)$, $\widehat{g_1}^*(p^j_{\sigma g}) = p^j_{\sigma g_2}$, где $g_2 = g \circ g_1$.

Наконец, пусть $\Delta\colon\ \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi')$ — гранично-дифференциальный оператор, $(x_1, \ldots, x_n, v^1, \ldots, v^{m'}, \ldots, q^j_{\sigma g'}, \ldots)$ — координаты на $J^\infty(\pi'; \mathcal{G}')$, и оператор Δ определяется соотношениями

$$v^{j'} = \varphi^{j'}(x_1, \ldots, x_n, \ldots, p^j_{\sigma g}, \ldots), \qquad j' = 1, \ldots, m'.$$

Тогда $(l, \mathcal{G}')$-продолжение оператора Δ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &v^{j'} = \varphi^{j'}, \\ &q^{j'}_{\tau g'} = g'^*(D_\tau \varphi^{j'}), \qquad j' = 1, \ldots, m', \quad |\tau| = 0, \ldots, l, \quad g' \in \mathcal{G}'. \end{aligned} \tag{6.37}$$

где $D_\tau = D_1^{l_1} \circ \ldots \circ D_n^{l_n}$, если $\tau = (l_1, \ldots, l_n)$.

6.4. Распределение Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ Если $\mathcal{G}$ — конечное множество, то по аналогии с дифференциальным случаем через $L_{\theta_{k+1}}$ обозначим касательную плоскость к графику сечения $j_k(\{s_g\})$ в точке $\theta_k \in J^k(\pi; \mathcal{G})$, где $\{s_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ — семейство сечений расслоения π, $(k+1, \mathcal{G})$-джет которого есть $\theta_{k+1} \in J^{k+1}(\pi; \mathcal{G})$, а $\theta_k = \pi^{\mathcal{G}}_{k+1,k}(\theta_{k+1})$. В случае конечных $\mathcal{G}$ и k, *распределение Картана* $\mathcal{C}^k$ на $J^k(\pi; \mathcal{G})$ в точке θ_k определим как линейную оболочку подпространств $L_{\theta_{k+1}}$, где $\theta_{k+1} \in (\pi^{\mathcal{G}}_{k+1,k})^{-1}(\theta_k)$.

Из формул (6.22) и (6.27) следует, что проекции $\pi^{\mathcal{G}}_{k,k-1}$ и $\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k$, где $\mathcal{G}_1$ — подмножество $\mathcal{G}$, отображают график сечения $j_k(\{s_g\})$ в графики аналогичных сечений. Для касательных отображений из этого факта следуют равенства

$$(\pi^{\mathcal{G}}_{k,k-1})_*(L_{\theta_{k+1}}) = L_{\theta_k}, \qquad (\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k)_*(L_{\theta_{k+1}}) = L_{\widetilde{\theta}_{k+1}}, \tag{6.38}$$

где $\theta_k = \pi^{\mathcal{G}}_{k+1,k}(\theta_{k+1})$, $\widetilde{\theta}_{k+1} = \pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_{k+1}(\theta_{k+1})$. А значит,

$$(\pi^{\mathcal{G}}_{k,k-1})_*(\mathcal{C}^k_{\theta_k}) = L_{\theta_k} \subset \mathcal{C}^{k-1}_{\theta_{k-1}}, \tag{6.39}$$

$$(\pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k)_*(\mathcal{C}^k_{\theta_k}) = \mathcal{C}^k_{\widetilde{\theta}_k}, \tag{6.40}$$

где $\theta_{k-1} = \pi^{\mathcal{G}}_{k,k-1}(\theta_k)$, $\widetilde{\theta}_k = \pi^{\mathcal{G},\mathcal{G}_1}_k(\theta_k)$.

Формула (6.39) означает, что распределение $\mathcal{C}^k$ на $J^k(\pi; \mathcal{G})$ определяет распределение $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\pi; \mathcal{G})$ на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ в случае конечного множества $\mathcal{G}$. Если $\mathcal{G}$ — бесконечное множество отображений, то формула (6.40) позволяет определить распределения $\mathcal{C}^k$ на $J^k(\pi; \mathcal{G})$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\pi; \mathcal{G})$ на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Так, касательный вектор $X_\theta = \{X_x, X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}\}$ к многообразию $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ в точке $\theta = \{x, \theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k\}$ по определению принадлежит плоскости $\mathcal{C}_\theta$, если для любого числа $k \geqslant 0$ и любого конечного подмножества $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ вектор $X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}$ лежит в распределении Картана $\mathcal{C}^k$ на $J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$ в точке $\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k$. Будем называть распределение $\mathcal{C}_\theta$, $\theta \in J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, *распределением Картана на* $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Опишем распределение Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ с различных точек зрения.

Утверждение 6.1. *В произвольной точке* $\theta = \{[s_g]^\infty_{g(x)}\}_{g \in \mathcal{G}} \in J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ *картановская плоскость* $\mathcal{C}_\theta$ *является касательной плоскостью к графику сечения* $j_\infty(\{s_g\})$ *в точке* θ. *А именно, вектор* $X_\theta = \{X_x, X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}\}$ *лежит в плоскости* $\mathcal{C}_\theta$ *в том и только том случае, когда для любого числа* $k \geqslant 0$ *и любого конечного подмножества* $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ *вектор* $X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}$ *касается подмногообразия* $j_k(\{s_g\})(M) \subset J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$.

Доказательство. Если вектор $X_\theta = \{X_x, X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}\}$ в точке $\theta = \{x, \theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k\}$ принадлежит плоскости $\mathcal{C}_\theta$, то по определению распределения Картана для любого числа $k \geqslant 0$ и конечного подмножества

$\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ вектор $X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}}$ лежит в плоскости $C^{k+1}_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}}$. Поэтому из (6.39) получаем:

$$X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k} = (\pi^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1,k})_*(X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}}) \in L_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}} = T_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}(j_k(\{s_g\})(M)),$$

где $\theta = \{[s_g]^\infty_{g(x)}\}_{g\in\mathcal{G}}$, а $\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1} = \{[s_g]^{k+1}_{g(x)}\}_{g\in\mathcal{G}_\alpha}$.

Наоборот, если вектор $X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}$ касается подмногообразия $j_k(\{s_g\})(M)$, то он лежит в распределении Картана на $J^k(\pi;\mathcal{G}_\alpha)$. А так как это верно для любых $k \geqslant 0$ и $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$, то $X_\theta = \{X_x, X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}\} \in \mathcal{C}_\theta$. □

Утверждение 6.2. *Распределение Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ задает связность в расслоении $\pi^{\mathcal{G}}_\infty$: в каждой точке $\theta \in J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ касательное отображение $(\pi^{\mathcal{G}}_\infty)_{*,\theta}$ изоморфно отображает картановскую плоскость $\mathcal{C}_\theta$ на касательное пространство $T_x(M)$, где $x = \pi^{\mathcal{G}}_\infty(\theta)$.*

Доказательство. В каждой точке $\theta = \{x, \theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k\} \in J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ построим обратное отображение к отображению $(\pi^{\mathcal{G}}_\infty)_{*,\theta}\colon \mathcal{C}_\theta \to T_x(M)$. Для любого числа $k \geqslant 0$ и конечного подмножества $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$ касательное отображение $(\pi^{\mathcal{G}_\alpha}_k)_{*,\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}$ изоморфно отображает плоскость $L_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}}$ на пространство $T_x(M)$. Поэтому каждый вектор $X_x \in T_x(M)$ однозначно определяет такой набор векторов $X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k} \in L_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k+1}}$, $k \geqslant 0$, $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$, что $(\pi^{\mathcal{G}_\alpha}_k)_*(X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}) = X_x$. Из однозначности определения этого набора и формул (6.38) следует, что для любого числа $k \geqslant 0$ и конечных подмножеств $\mathcal{G}_\beta \subset \mathcal{G}_\alpha$ множества $\mathcal{G}$ выполнены равенства

$$(\pi^{\mathcal{G}_\alpha}_{k,k-1})_*(X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}) = X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_{k-1}}, \qquad (\pi^{\mathcal{G}_\alpha,\mathcal{G}_\beta}_k)_*(X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}) = X_{\theta^{\mathcal{G}_\beta}_k}.$$

А значит, набор векторов $\{X_x, X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}\}$ задает касательный вектор X_θ, лежащий в картановской плоскости $\mathcal{C}_\theta$. Из однозначности определения набора векторов $\{X_{\theta^{\mathcal{G}_\alpha}_k}\}$ следует также, что построенное отображение $X_x \mapsto X_\theta$ является обратным к отображению $(\pi^{\mathcal{G}}_\infty)_*|_{\mathcal{C}_\theta}$. □

Докажем теперь обобщения утверждений 2.1–2.3 гл. 4.

Утверждение 6.3. *Множество $\mathcal{C}D(\pi;\mathcal{G})$ векторных полей, лежащих в распределении Картана, порождено поднятиями на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ полей с многообразия M:*

$$\mathcal{C}D(\pi;\mathcal{G}) = \{\varphi_1\widehat{X_1} + \ldots + \varphi_l\widehat{X_l} \mid \varphi_i \in \mathcal{F}(\pi;\mathcal{G}),\ X_i \in D(M),\ l = 1, 2, \ldots\}.$$

Доказательство. Докажем, что любой вектор вида $\widehat{X}_\theta$, где $\theta = \{x, \theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}\} \in J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, $X \in D(M)$, лежит в плоскости $\mathcal{C}_\theta$. Это эквивалентно тому, что любая проекция $\widehat{X}_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}}$ вектора $\widehat{X}_\theta$ на конечномерное пространство джетов $J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$ лежит в соответствующей плоскости $L_{\theta_{k+1}^{\mathcal{G}_\alpha}}$. Рассмотрим произвольную функцию φ на $J^k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$, постоянную вдоль графика сечения $j_k(\{s_g\})$, где $\{s_g\}_{g \in \mathcal{G}_\alpha}$ — семейство сечений расслоения π, $(k+1, \mathcal{G}_\alpha)$-джет которого равен $\theta_{k+1}^{\mathcal{G}_\alpha}$. Тогда

$$\widehat{X}_\theta(\varphi) = \widehat{X}_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}}(\varphi) = X(j_k(\{s_g\})^*(\varphi))(x) = X(\mathrm{const})(x) = 0.$$

Так как это верно для любой такой функции φ, вектор $\widehat{X}_{\theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}}$ касается графика сечения $j_k(\{s_g\})$, а значит лежит в $L_{\theta_{k+1}^{\mathcal{G}_\alpha}}$. Отсюда $\widehat{X}_\theta \in \mathcal{C}_\theta$ и $\widehat{X} \in \mathcal{C}D(\pi; \mathcal{G})$.

Рассмотрим теперь произвольное поле X из $\mathcal{C}D(\pi; \mathcal{G})$. По определению векторного поля существует такое число k, что $X(C^\infty(M)) \subset \mathcal{F}_k(\pi; \mathcal{G})$. Аналогично дифференциальному случаю (см. гл. 4) ограничение X_M поля X на $C^\infty(M)$ может быть локально представлено в виде $X_M = \varphi_1 X_1 + \ldots + \varphi_l X_l$, где $X_1, \ldots, X_l \in D(M)$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in \mathcal{F}_k(\pi; \mathcal{G})$. Покажем, что локально поле X совпадает с полем

$$\widehat{X}_M = \varphi_1 \widehat{X}_1 + \ldots + \varphi_l \widehat{X}_l \in \mathcal{C}D(\pi; \mathcal{G}).$$

Для этого рассмотрим произвольную точку $\theta = \{x, \theta_k^{\mathcal{G}_\alpha}\} \in J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, где определено поле $\widehat{X}_M$. Векторы X_θ и $\widehat{X}_{M,\theta}$ лежат в $\mathcal{C}_\theta$, и по построению поля $\widehat{X}_M$ их проекции на M вдоль отображения $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$ совпадают. Отсюда и из утверждения 6.2 следует равенство $X_\theta = \widehat{X}_{M,\theta}$. Применяя стандартное рассуждение с использованием разбиения единицы [51], получаем глобальное представление поля X в виде $\varphi_1 \widehat{X}_1 + \ldots + \varphi_l \widehat{X}_l$. $\square$

Утверждение 6.4. *Поле $X \in D(\pi; \mathcal{G})$ тогда и только тогда лежит в распределении Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, когда для каждой функций $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$ и каждого отображения $g \in \mathcal{G}$ справедливо тождество*

$$X \lrcorner (\widehat{g} \circ \pi_\infty^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_g})^*(U_1(\varphi)) = 0,$$

где $U_1(\varphi)$ — форма Картана на $J^\infty(\pi)$, а $\mathcal{G}_g$ — множество, состоящее из двух отображений id_M и g.

Формы вида $(\widehat{g}\circ\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}_g})^*(U_1(\varphi))$ будем называть *формами Картана на* $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$. Модуль, порожденный этими формами, будем называть *модулем Картана* и обозначать через $\mathcal{C}\Lambda^1(\pi;\mathcal{G})$.

Доказательство. Из формул (6.34) и (6.27) следует, что отображения $\widehat{g}$ и $\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}_g}$ сохраняют распределение Картана. Поэтому, если $X_\theta\in\mathcal{C}_\theta$, $\theta\in J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, то

$$X_\theta \lrcorner (\widehat{g}\circ\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}_g})^*(U_1(\varphi)) = (\widehat{g}\circ\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}_g})_*(X_\theta)\lrcorner U_1(\varphi)=0.$$

Так как расслоение $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$ есть сумма Уитни расслоений $g^*(\pi_\infty)$, $g\in\mathcal{G}$, то для произвольной точки $x\in M$ слой $(\pi_\infty^{\mathcal{G}})^{-1}(x)$ представляет собой прямое произведение слоев $(g^*(\pi_\infty))^{-1}(x)$, $g\in\mathcal{G}$. С другой стороны, по определению расслоения $g^*(\pi_\infty)$ слой $(g^*(\pi_\infty))^{-1}(x)$ совпадает со слоем $\pi_\infty^{-1}(g(x))$. Отсюда получаем равенство

$$(\pi_\infty^{\mathcal{G}})^{-1}(x)=\prod_{g\in\mathcal{G}}\pi_\infty^{-1}(g(x)).$$

Отображение $(\widehat{g}\circ\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}_g})\big|_{(\pi_\infty^{\mathcal{G}})^{-1}(x)}$ является проекцией на компоненту $\pi_\infty^{-1}(g(x))$ этого прямого произведения. Действительно, каждая точка θ слоя $(\pi_\infty^{\mathcal{G}})^{-1}(x)$ представляет собой набор $\{\theta^g\}_{g\in\mathcal{G}}$ бесконечных джетов в соответствующих точках $g(x)$, $g\in\mathcal{G}$, т. е. $\theta^g\in\pi_\infty^{-1}(g(x))$. Отображение $\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}_g}$ отображает точку θ в набор из двух джетов $\{\theta^{g_0},\theta^g\}$, где $g_0=\mathrm{id}_M$, а отображение $\widehat{g}$ отображает этот набор в джет θ^g.

Отсюда следует, что линейное пространство вертикальных векторов расслоения $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$ в точке $\theta\in J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ является прямой суммой линейных пространств вертикальных векторов расслоения π_∞ в точках $\theta^g\in J^\infty(\pi)$ по всем $g\in\mathcal{G}$:

$$V_\theta(J^\infty(\pi;\mathcal{G}))\simeq\bigoplus_{g\in\mathcal{G}}V_{\theta^g}(J^\infty(\pi)),$$

где через V_θ обозначено пространство вертикальных векторов соответствующего расслоения джетов в точке θ.

Из утверждения 6.2 следует, что касательное пространство к многообразию $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ в точке θ есть прямая сумма пространства вертикальных векторов и картановской плоскости $\mathcal{C}_\theta$. Отсюда получаем разложение

$$T_\theta\big(J^\infty(\pi;\mathcal{G})\big)\simeq\Big(\bigoplus_{g\in\mathcal{G}}V_{\theta^g}\big(J^\infty(\pi)\big)\Big)\bigoplus\mathcal{C}_\theta,\quad \theta=\{\theta^g\}_{g\in\mathcal{G}}. \tag{6.41}$$

При этом касательное отображение $(\widehat{g} \circ \pi_{\infty}^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_g})_*$ изоморфно отображает компоненту $\mathcal{C}_\theta$ в картановскую плоскость $\mathcal{C}_{\theta g} \subset T_{\theta g}(J^\infty(\pi))$, компоненту $V_{\theta g}(J^\infty(\pi))$ — тождественно на себя, а остальные компоненты отображает в нуль.

Рассмотрим теперь произвольный касательный вектор X_θ к многообразию $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ в точке θ и его разложение в представлении (6.41): $X_\theta = \sum\limits_{g \in \mathcal{G}} X_{\theta g} + Y_\theta$, где $X_{\theta g} \in V_{\theta g}(J^\infty(\pi))$, $Y_\theta \in \mathcal{C}_\theta$. Если вектор X_θ не лежит в распределении Картана, то существует по крайней мере одно такое отображение $g_1 \in \mathcal{G}$, что вертикальный вектор $X_{\theta g_1}$ отличен от нуля. Тогда из утверждения 4.2.1 следует, что найдется такая функция $\varphi \in \mathcal{F}(\pi)$, что $X_{\theta g_1} \rfloor U_1(\varphi) \neq 0$. Отсюда имеем

$$X_\theta \rfloor (\widehat{g_1} \circ \pi_{\infty}^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_{g_1}})^*(U_1(\varphi)) =$$
$$= \Big(\sum_{g \in \mathcal{G}} X_{\theta g}\Big) \rfloor (\widehat{g_1} \circ \pi_{\infty}^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_{g_1}})^*(U_1(\varphi)) + Y_\theta \rfloor (\widehat{g_1} \circ \pi_{\infty}^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_{g_1}})^*(U_1(\varphi)) =$$
$$= (\widehat{g_1} \circ \pi_{\infty}^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_{g_1}})_* \Big(\sum_{g \in \mathcal{G}} X_{\theta g}\Big) \rfloor U_1(\varphi) + 0 = X_{\theta g_1} \rfloor U_1(\varphi) \neq 0,$$

т. е. в этом случае X_θ не удовлетворяет нашему тождеству. □

Утверждение 6.5. *Всякое максимальное интегральное многообразие распределения Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ локально имеет вид графика бесконечного джета некоторого семейства $\{s_g\}_{g \in \mathcal{G}}$ сечений расслоения π.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.3 гл. 4. А именно, пусть $\mathcal{R}^\infty$ — максимальное интегральное многообразие распределения Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Проекции

$$\pi_{\infty,k}^{\mathcal{G}}\big|_{\mathcal{R}^\infty} \colon \mathcal{R}^\infty \to \mathcal{R}^k \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\infty,k}^{\mathcal{G}}(\mathcal{R}^\infty) \subset J^k(\pi; \mathcal{G}), \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

и

$$\pi_{\infty}^{\mathcal{G}}\big|_{\mathcal{R}^\infty} \colon \mathcal{R}^\infty \to \mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{\infty}^{\mathcal{G}}(\mathcal{R}^\infty) \subset M$$

суть локальные диффеоморфизмы, так как картановские плоскости $\mathcal{C}_\theta$, $\theta \in J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ (а значит, касательные пространства к $\mathcal{R}^\infty$) не содержат ненулевых вертикальных векторов (см. утверждение 6.2). Поэтому проекция $\pi_0^{\mathcal{G}}\big|_{\mathcal{R}^0} \colon \mathcal{R}^0 \to \mathcal{R}$ также является локальным диффеоморфизмом. Следовательно, существует такое отображение s': $\mathcal{R} \to \mathcal{R}^0$, что $\pi_0^{\mathcal{G}}\big|_{\mathcal{R}^0} \circ s'$ есть тождественное отображение. Продолжим отображение s' аналогично дифференциальному случаю (см. гл. 4) до сечения $\widetilde{s}$ расслоения $\pi_0^{\mathcal{G}}$. Так как $\pi_0^{\mathcal{G}}$ есть сумма Уитни расслоений $g^*(\pi_0) = g^*(\pi)$, $g \in \mathcal{G}$, сечение $\widetilde{s}$ расслоения $\pi_0^{\mathcal{G}}$ представляет собой набор $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ сечений расслоения π. Многообразия $j_k(\{s_g\})(M) \subset J^k(\pi;\mathcal{G})$ при $k=0,1,\ldots,\infty$, являются интегральными многообразиями распределения Картана и содержат в себе многообразия $\mathcal{R}^k$ для соответствующих k. А так как $\mathcal{R}^\infty$ есть максимальное интегральное многообразие, то, по крайней мере локально, многообразия $\mathcal{R}^\infty$ и $j_\infty(\{s_g\})(M)$ совпадают. □

Из этого утверждения следует, что кроме многообразий $j_\infty(s)(M)$, которые соответствуют решениям уравнения $\mathcal{E} \subset \subset J^k(\pi;\mathcal{G})$, могут существовать и другие максимальные интегральные многообразия распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$. Выделить среди всех максимальных интегральных многообразий нужные нам позволяет следующее утверждение.

Утверждение 6.6. *Пусть множество $\mathcal{G}$ является полугруппой отображений многообразия M, а N — график сечения расслоения $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$. Тогда N есть график сечения вида $j_\infty(s)$, $s \in \Gamma(\pi)$, в том и только том случае, когда N является максимальным интегральным многообразием распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, инвариантным относительно любого отображения $\widehat{g}$, $g \in \mathcal{G}$, т. е. $\widehat{g}(N) \subset N$.*

Доказательство. Из определения распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ следует, что многообразие $N = j_\infty(s)(M)$ является максимальным интегральным многообразием этого распределения. Кроме того, если $\theta = [s]_x^{(\infty,\mathcal{G})} \in N$, то $\widehat{g}(\theta) = [s]_{g(x)}^{(\infty,\mathcal{G})} \in N$.

Пусть теперь N — максимальное интегральное многообразие, инвариантное относительно $\mathcal{G}$. Так как N есть график сечения расслоения $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$, то $\mathcal{R} = \pi_\infty^{\mathcal{G}}(N) = M$ и s' есть сечение расслоения $\pi_0^{\mathcal{G}}$, определенное во всех точках M (см. доказательство предыдущего утверждения). Следовательно, N есть график сечения вида $j_\infty(\{s_g\})$, где $\{s_g\}_{g\in\mathcal{G}}$ — семейство сечений расслоения π, определенное сечением s'.

Рассмотрим произвольное отображение $g_1 \in \mathcal{G}$, произвольную точку x многообразия M и соответствующую точку $\theta = = j_\infty(\{s_g\})(x) = \{[s_g]_{g(x)}^\infty\}_{g\in\mathcal{G}}$ многообразия N. По условию, точка $\widehat{g_1}(\theta)$, которая по определению $\widehat{g_1}$ является бесконечным джетом в точке $x_1 = g_1(x)$, лежит на многообразии $N = j_\infty(\{s_g\})(M)$. Поэтому $\widehat{g_1}(\theta) = j_\infty(\{s_g\})(x_1)$. Следовательно, $\{[s_{g\circ g_1}]_{g(x_1)}^\infty\}_{g\in\mathcal{G}} = \{[s_g]_{g(x_1)}^\infty\}_{g\in\mathcal{G}}$ и, значит,

$$[s_{g\circ g_1}]_{(g\circ g_1)(x)}^\infty = [s_g]_{(g\circ g_1)(x)}^\infty$$

для любых $g \in \mathcal{G}$. Подставляя в это равенство $g = \mathrm{id}_M$ и обозначая s_{id_M} через s, для любого $g_1 \in \mathcal{G}$ получаем равенство $[s_{g_1}]^\infty_{g_1(x)} = [s]^\infty_{g_1(x)}$. А значит,

$$\theta = \{[s]^\infty_{g(x)}\}_{g \in \mathcal{G}} = j_\infty(s)(x).$$

Так как это верно для любого $x \in M$, то $N = j_\infty(s)(M)$. $\square$

Везде далее будем считать, что $\mathcal{G}$ — полугруппа отображений многообразия M.

6.5. $\mathcal{G}$-инвариантные симметрии распределения Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Опишем инфинитезимальные преобразования пространства $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, «сохраняющие» максимальные интегральные многообразия вида $j_\infty(s)(M)$. Заметим, что любое многообразие $j_\infty(s)(M)$ лежит в $J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$. Поэтому такое преобразование есть, вообще говоря, преобразование множества $J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$. Но по соображениям, сформулированным в замечании 6.2, мы будем считать, что наше преобразование X продолжено на все пространство $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. При этом из утверждения 6.1 следует, что касательные плоскости к многообразиям вида $j_\infty(s)(M)$ есть картановские плоскости в точках множества $J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$. А значит (см. гл. 4), в точках множества $J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$ мы имеем вложение

$$X(\mathcal{C}\Lambda^1(\pi; \mathcal{G})) \subset \mathcal{C}\Lambda^1(\pi; \mathcal{G}). \tag{6.42}$$

С другой стороны, поле, лежащее в $\mathcal{C}D(\pi; \mathcal{G})$, касается всех интегральных многообразий распределения $\mathcal{C}(\pi; \mathcal{G})$. Поэтому оно касается многообразий вида $j_\infty(s)(M)$, а значит является искомым, но «тривиальным» преобразованием (ср. с гл. 4). По этой причине нам достаточно найти только вертикальные инфинитезимальные преобразования, сохраняющие класс многообразий вида $j_\infty(s)(M)$.

Пусть X — такое вертикальное поле, θ — произвольная точка многообразия $N = j_\infty(s)(M)$, $\mathcal{G}$ — полугруппа отображений многообразия M, а g — ее элемент. Предположим также, что поле X обладает локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов $\{A_t\}$. Любое многообразие $N_t = A_t(N)$ имеет вид $j_\infty(s_t)(M)$, $s_t \in \Gamma(\pi)$, а значит $\widehat{g}(N_t) \subset N_t$ (см. утверждение 6.6). Отсюда $\widehat{g}(A_t(\theta)) \in N_t$. Так как $\widehat{g}(\theta) \in \widehat{g}(N) \subset N$, точка $A_t(\widehat{g}(\theta))$ также лежит на N_t. При этом, поскольку X — вертикальное поле, отображение A_t сохраняет каждый слой расслоения $\pi^{\mathcal{G}}_\infty$. Отсюда и из коммутативной диаграммы (6.32) имеем

$$\pi^{\mathcal{G}}_\infty(A_t(\widehat{g}(\theta))) = \pi^{\mathcal{G}}_\infty(\widehat{g}(\theta)) = g(\pi^{\mathcal{G}}_\infty(\theta)),$$

а также

$$\pi^{\mathcal{G}}_\infty(\widehat{g}(A_t(\theta))) = g(\pi^{\mathcal{G}}_\infty(A_t(\theta))) = g(\pi^{\mathcal{G}}_\infty(\theta)).$$

Следовательно, точки $A_t(\widehat{g}(\theta))$ и $\widehat{g}(A_t(\theta))$ проектируются в одну точку при отображении $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$ и лежат на графике N_t сечения расслоения $\pi_\infty^{\mathcal{G}}$. Поэтому эти точки совпадают. А так как N — произвольное многообразие вида $j_\infty(s)(M)$, то θ — произвольная точка множества $J^\infty(\pi;\mathcal{G})_0$. Следовательно, в точках множества $J^\infty(\pi;\mathcal{G})_0$ для достаточно малых t мы имеем равенство $A_t\circ\widehat{g}=\widehat{g}\circ A_t$, а для любой функции $\varphi\in\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$ — равенство $\widehat{g}^*(A_t{}^*(\varphi))=A_t{}^*(\widehat{g}^*(\varphi))$. Дифференцируя последнее равенство по t в точке $t=0$, получаем формулу $\widehat{g}^*(X(\varphi))=X(\widehat{g}^*(\varphi))$, которая верна в точках множества $J^\infty(\pi;\mathcal{G})_0$ для любой функции $\varphi\in\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$.

Таким образом, вертикальное поле X, сохраняющее класс подмногообразий вида $j_\infty(s)(M)$, $s\in\Gamma(\pi)$, и обладающее однопараметрической группой диффеоморфизмов, должно удовлетворять условию (6.42) и коммутировать с любым гомоморфизмом $\widehat{g}^*$, $g\in\mathcal{G}$. Эти условия должны выполняться только в точках множества $J^\infty(\pi;\mathcal{G})_0$. Но если замыкание множества $J^\infty(\pi;\mathcal{G})_0$ совпадает со всем пространством $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ (а в рассматриваемых примерах ситуация именно такая), то поле X удовлетворяет этим условиям во всех точках пространства $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$. Это объясняет, почему мы должны рассматривать вертикальные поля X на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, удовлетворяющие условиям (6.42) и $\widehat{g}^*\circ X=X\circ\widehat{g}^*$ для любого $g\in\mathcal{G}$. Будем называть такие поля *$\mathcal{G}$-инвариантными (инфинитезимальными) симметриями распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$*. Обозначим через $\operatorname{sym}^{\mathcal{G}}\mathcal{C}(\pi)$ множество таких полей.

Утверждение 6.7. *Всякое векторное поле $X\in\operatorname{sym}^{\mathcal{G}}\mathcal{C}(\pi)$ однозначно определяется своим ограничением на подалгебру $\mathcal{F}_0(\pi)\subset\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$.*

Доказательство. Автоморфизм X распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, равный нулю на подалгебре $\mathcal{F}_0(\pi)\subset\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$, равен нулю и на $\mathcal{F}(\pi)\subset\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$. Этот факт доказывается абсолютно так же, как утверждение 2.4 гл. 4, причем то, что X — дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$, а не $\mathcal{F}(\pi)$, несущественно.

Пусть $X\in\operatorname{sym}^{\mathcal{G}}\mathcal{C}(\pi)$ и $X\big|_{\mathcal{F}(\pi)}=0$. Рассмотрим в M произвольную координатную окрестность и соответствующие локальные координаты $(x_1,\dots,x_n,\dots,p^j_{\sigma g},\dots)$ в $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$. Если $g_0=\mathrm{id}_M$, то $p^j_{\sigma g_0}\in\mathcal{F}(\pi)$ и $X(p^j_{\sigma g_0})=0$. Если $g\neq g_0$, то

$$X(p^j_{\sigma g})=X(\widehat{g}^*(p^j_{\sigma g_0}))=\widehat{g}^*(X(p^j_{\sigma g_0}))=0.$$

А значит $X=0$. $\square$

Пусть $X\in\operatorname{sym}^{\mathcal{G}}\mathcal{C}(\pi)$. Тогда, аналогично дифференциальному случаю (см. гл. 4), ограничение $X_0=X\big|_{\mathcal{F}_0(\pi)}$ является дифференцированием алгебры $\mathcal{F}_0(\pi)$ со значениями в алгебре $\mathcal{F}_k(\pi;\mathcal{G}_\alpha)$ для некоторого числа $k \geqslant 0$ и конечного подмножества $\mathcal{G}_\alpha \subset \mathcal{G}$. Следовательно, в каждой точке $\theta_k \in J_k(\pi; \mathcal{G}_\alpha)$ вектор X_{0,θ_k} отождествляется с касательным вектором к слою $\pi^{-1}(x)$ расслоения π, где $x = \pi_k^{\mathcal{G}_\alpha}(\theta_k)$. Так как π — линейное расслоение, то касательные векторы к его слоям отождествляются с точками самих слоев. Поэтому вектор X_{0,θ_k} отождествляется с точкой слоя $\pi^{-1}(x)$, а дифференцирование X_0 — с сечением расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}_\alpha})^*(\pi)$. Таким образом, мы получаем отображение

$$\operatorname{sym}^{\mathcal{G}} \mathcal{C}(\pi) \to \mathcal{F}(\pi, \pi; \mathcal{G}). \tag{6.43}$$

Инъективность этого отображения следует из утверждения 6.7. Докажем сюръективность отображения (6.43).

Пусть φ — некоторое сечение расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}_\alpha})^*(\pi)$. Рассмотрим координатную окрестность $\mathcal{U} \subset M$ и соответствующую окрестность $\mathcal{U}^\infty = (\pi_\infty^{\mathcal{G}})^{-1}(\mathcal{U}) \subset J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Определим в окрестности $\mathcal{U}^\infty$ поле

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}} = \sum_{j,\sigma,g} \widehat{g}^*(D_\sigma(\varphi^j)) \frac{\partial}{\partial p^j_{\sigma g}},$$

где φ^j — j-я компонента ограничения сечения φ на окрестность $\mathcal{U}^\infty$, D_σ — композиция полных производных, соответствующая мультииндексу σ. Покажем, что дифференцирование $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ в окрестности $\mathcal{U}^\infty$ является $\mathcal{G}$-инвариантной симметрией распределения Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$.

Поле $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ вертикально. Докажем, что оно коммутирует с любым гомоморфизмом $\widehat{g_1}^*$, $g_1 \in \mathcal{G}$. Для любого $i = 1, \ldots, n$ функция $\widehat{g_1}^*(x_i) = g_1{}^*(x_i)$ есть функция на M, и, значит,

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{g_1}^*(x_i)) = 0 = \widehat{g_1}^*(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(x_i)).$$

Для функции $p^j_{\sigma g}$, используя формулу (6.35), получаем

$$\begin{aligned} Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{g_1}^*(p^j_{\sigma g})) = Э_{\varphi,\mathcal{U}}(p^j_{\sigma, g\circ g_1}) = (\widehat{g \circ g_1})^*(D_\sigma(\varphi^j)) = \\ = (\widehat{g_1}^* \circ \widehat{g}^*)(D_\sigma(\varphi^j)) = \widehat{g_1}^*(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(p^j_{\sigma g})), \end{aligned}$$

т. е. равенство $Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{g_1}^*(\psi)) = \widehat{g_1}^*(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi))$ верно для любой координатной функции ψ на $\mathcal{U}^\infty$, а значит, для любой функции на $\mathcal{U}^\infty$.

Рассмотрим форму Картана

$$\omega = (\widehat{g_1} \circ \pi_\infty^{\mathcal{G}, \mathcal{G}_{g_1}})^*(U_1(\psi)),$$

где $g_1 \in \mathcal{G}$, $\psi \in \mathcal{F}(\pi)$. Из коммутативной диаграммы (6.33), где $k = \infty$, $\mathcal{G}' = \{\mathrm{id}_M\}$, а $\mathcal{G} \circ \mathcal{G}_{g_1} = \mathcal{G}$, поскольку $\mathcal{G}$ — полугруппа и $g_1 \in \mathcal{G}$, получаем

$$\omega = (\pi_\infty^{\mathcal{G}, \{\mathrm{id}_M\}} \circ \widehat{g_1})^*(U_1(\psi)).$$

Так как $(\pi_\infty^{\mathcal{G}, \{\mathrm{id}_M\}})^*$ есть вложение модуля $\Lambda^1(\pi)$ в $\Lambda^1(\pi; \mathcal{G})$, имеем $\omega = \widehat{g_1}^*(U_1(\psi))$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\omega) = Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\widehat{g_1}^*(U_1(\psi))) = \widehat{g_1}^*(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(U_1(\psi))) = \\ = \widehat{g_1}^*\left(dЭ_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi) - \sum_i Э_{\varphi,\mathcal{U}}(D_i(\psi))dx_i\right).\end{aligned}$$

Используя выкладки аналогичные дифференциальному случаю (см. гл. 4), и то, что $\psi \in \mathcal{F}(\pi)$, легко доказать равенства

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(D_i(\psi)) = D_i(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Поэтому

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\omega) = \widehat{g_1}^*\left(dЭ_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi) - \sum_i D_i(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi))dx_i\right).$$

Форма $\Omega = dЭ_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi) - \sum_i D_i(Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\psi))dx_i$ является элементом модуля Картана, так как элементы этого модуля и только они равны нулю на распределении Картана (это легко вывести из утверждения 6.4), а $D_j \lrcorner \Omega = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Отображение $\widehat{g_1}$ сохраняет распределение Картана (см. формулу (6.34)), поэтому индуцированное отображение $\widehat{g_1}^*$ сохраняет модуль Картана, а значит,

$$Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\omega) = \widehat{g_1}^*(\Omega) \in \mathcal{C}\Lambda^1(\pi; \mathcal{G}) \quad \text{и} \quad Э_{\varphi,\mathcal{U}}(\mathcal{C}\Lambda^1(\pi; \mathcal{G})) \subset \mathcal{C}\Lambda^1(\pi; \mathcal{G}).$$

Так как ограничение поля $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ на подалгебру $\mathcal{F}_0(\pi|_{\mathcal{U}})$ есть дифференцирование $\varphi^1 \dfrac{\partial}{\partial p_0^1} + \ldots + \varphi^m \dfrac{\partial}{\partial p_0^m}$, поле $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ при отображении (6.43) переходит в сечение $\varphi|_{\mathcal{U}}$. Пусть теперь $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subset M$ — две координатные окрестности в M. Тогда ограничения полей $Э_{\varphi,\mathcal{U}}$ и $Э_{\varphi,\mathcal{U}'}$ на алгебру $\mathcal{F}_0(\pi|_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'})$ совпадают. Отсюда в силу утверждения 6.7 получаем совпадение этих полей в окрестности $(\pi_\infty^{\mathcal{G}})^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$. Таким образом, аналогично дифференциальному случаю, каждое сечение φ расслоения $(\pi_k^{\mathcal{G}})^*(\pi)$ определяет поле $Э_\varphi \in \mathrm{sym}^{\mathcal{G}}\mathcal{C}(\pi)$. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 6.8. *Всякая $\mathcal{G}$-инвариантная симметрия распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$ имеет вид $Э_\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G})$. При этом алгебра $\operatorname{sym}^{\mathcal{G}}\mathcal{C}(\pi)$ отождествляется с модулем $\mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G})$.*

Как и в дифференциальном случае, дифференцирования $Э_\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G})$, называются *эволюционными дифференцированиями* и задают эволюцию сечений расслоения π, которая определяется эволюционными уравнениями

$$\frac{\partial u^j}{\partial t} = \varphi^j\left(x,\ldots,g^*\left(\frac{\partial^{|\sigma|}u^l}{\partial x^\sigma}\right),\ldots\right),\qquad j=1,\ldots,m.$$

Поле $Э_\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G}')$, можно понимать и как поле на $J^\infty(\pi;\mathcal{G}')$, и как поле на любом пространстве джетов $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, где $\mathcal{G}$ — такая полугруппа отображений, что $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. В тех случаях, когда необходимо указать, что поле $Э_\varphi$ действует на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, будем использовать обозначение $Э_\varphi^{\mathcal{G}}$.

Утверждение 6.9. *Если $\mathcal{G}'$ — подполугруппа полугруппы $\mathcal{G}$ и $\varphi \in \mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G}')$, то при отображении $\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}$ поле $Э_\varphi^{\mathcal{G}}$ проектируется в поле $Э_\varphi^{\mathcal{G}'}$.*

Доказательство. Индуцированное отображение $(\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}'})^*$ вкладывает алгебру $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G}')$ в $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$. Из определения полей $Э_\varphi^{\mathcal{G}}$ и $Э_\varphi^{\mathcal{G}'}$ следует, что эти поля совпадают на алгебре $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G}')$. А значит, в произвольной точке $\theta \in J^\infty(\pi;\mathcal{G})$, для произвольной функции $f \in \mathcal{F}(\pi;\mathcal{G}')$, имеем

$$((\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}'})_*(Э_\varphi^{\mathcal{G}}|_\theta))(f) = Э_\varphi^{\mathcal{G}}|_\theta((\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}'})^*(f)) = Э_\varphi^{\mathcal{G}'}|_{\theta'}(f),$$

где $\theta' = \pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}'}(\theta) \in J^\infty(\pi;\mathcal{G}')$. Следовательно, $(\pi_\infty^{\mathcal{G},\mathcal{G}'})_*(Э_\varphi^{\mathcal{G}}|_\theta) = Э_\varphi^{\mathcal{G}'}|_{\theta'}$. □

Из утверждения 6.9, в частности, следует, что для любой полугруппы $\mathcal{G}$ классическим симметриям распределения Картана на $J^\infty(\pi)$ соответствуют $\mathcal{G}$-инвариантные симметрии распределения Картана на $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$. Эти симметрии будем называть *классическими симметриями распределения Картана на* $J^\infty(\pi;\mathcal{G})$.

Скобка Якоби $\{\varphi,\psi\}$ двух сечений $\varphi,\psi \in \mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G})$ определяется формулой

$$Э_{\{\varphi,\psi\}} = [Э_\varphi, Э_\psi].$$

При этом верно равенство $\{\varphi,\psi\} = Э_\varphi(\psi) - Э_\psi(\varphi)$, а в локальных координатах — равенство

$$\{\varphi,\psi\}^j = \sum_{\alpha,\sigma,g} \Big(\widehat{g}^*(D_\sigma(\varphi^\alpha))\frac{\partial\psi^j}{\partial p^\alpha_{\sigma g}} - \widehat{g}^*(D_\sigma(\psi^\alpha))\frac{\partial\varphi^j}{\partial p^\alpha_{\sigma g}}\Big), \quad j = 1,\ldots,m.$$

Упражнение 6.9. Докажите приведенные равенства.

Формула

$$l_\psi(\varphi) = Э_\varphi(\psi)$$

определяет *оператор универсальной линеаризации* l_ψ нелинейного гранично-дифференциального оператора Δ_ψ, $\psi \in \mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$. Оператор l_ψ действует из $\mathcal{F}(\pi,\pi;\mathcal{G})$ в $\mathcal{F}(\pi;\mathcal{G})$, и его свойства аналогичны свойствам соответствующего оператора в дифференциальном случае (см. гл. 4). Кроме того, легко доказывается формула

$$l_{\widehat{g}^*(\psi)} = \widehat{g}^* \circ l_\psi.$$

Упражнение 6.10. Сформулируйте и докажите указанные свойства оператора l_ψ.

6.6. Высшие симметрии гранично-дифференциальных уравнений. Введем сначала понятие бесконечного продолжения гранично-дифференциального уравнения. Пусть $\mathcal{E} \subset J^k(\pi;\mathcal{G})$ — уравнение порядка k, $\mathcal{G}$ — полугруппа. *Продолжением порядка l уравнения $\mathcal{E}$* называется множество $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi;\mathcal{G})$, состоящее из таких точек $\theta_{k+l} = \{[s_g]^{k+l}_{g(x)}\}_{g\in\mathcal{G}}$, что все точки $\widehat{g}(\theta_k)$, $g \in \mathcal{G}$, где $\theta_k = \pi^{\mathcal{G}}_{k+l,k}(\theta_{k+l})$, лежат в $\mathcal{E}$, а график сечения $j_k(\{s_g\})$ касается с порядком $\geqslant l$ уравнения $\mathcal{E}$ во всех точках $\widehat{g}(\theta_k)$, $g \in \mathcal{G}$.

Замечание 6.4. Множество $\mathcal{E}^{(0)}$ всегда лежит в $\mathcal{E}$, хотя, в отличие от дифференциального случая, $\mathcal{E}^{(0)}$ может не совпадать с $\mathcal{E}$. При этом уравнение $\mathcal{E}$ может быть не инвариантно относительно отображений $\widehat{g}$, $g \in \mathcal{G}$, но любое его продолжение $\mathcal{E}^{(l)}$, в том числе $\mathcal{E}^{(0)}$, инвариантно относительно этих отображений.

Если уравнение $\mathcal{E}$ определяется системой

$$G_j\left(x,\ldots,g^*\left(\frac{\partial^{|\sigma|}s^l}{\partial x^\sigma}\right),\ldots\right) = 0, \qquad j = 1,\ldots,r,$$

где s^l, $l = 1,\ldots,m$, — компоненты сечения $s \in \Gamma(\pi)$, $|\sigma| \leqslant k$, $g \in \mathcal{G}$, то его нулевое продолжение $\mathcal{E}^{(0)}$ задается системой

$$G_j\left({g_1}^*(x),\ldots,(g\circ g_1)^*\left(\frac{\partial^{|\sigma|}s^l}{\partial x^\sigma}\right),\ldots\right) = 0, \qquad j = 1,\ldots,r, \quad g_1 \in \mathcal{G},$$

а l-е продолжение $\mathcal{E}^{(l)}$ — уравнениями

$$\widehat{g}_1{}^*(D_\sigma(G_j)) = 0, \qquad j = 1,\ldots,r, \quad g_1 \in \mathcal{G}, \quad |\sigma| \leqslant l,$$

где D_σ — композиция полных производных, соответствующая мультииндексу σ. Таким образом, для получения всех следствий уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi; \mathcal{G})$ мы должны использовать как операции взятия полной производной D_i, $i = 1, \ldots, n$, так и действия гомоморфизмов $\widehat{g_1}^*$, $g_1 \in \mathcal{G}$.

Упражнение 6.11. Покажите, что если уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi; \mathcal{G})$ задано гранично-дифференциальным оператором Δ: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi)$, то его l-продолжение $\mathcal{E}^{(l)} \subset J^{k+l}(\pi; \mathcal{G})$ задается $(l, \mathcal{G})$-продолжением $\Delta_l^{\mathcal{G}} = j_l^{\mathcal{G}} \circ \Delta$: $\Gamma(\pi) \to \Gamma(\xi_l^{\mathcal{G}})$ этого оператора.

Как и в дифференциальном случае (см. гл. 4), для любого l множество $\mathcal{E}^{(l+1)}$ проектируется в множество $\mathcal{E}^{(l)}$ при отображении $\pi^{\mathcal{G}}_{k+l+1,k+l}$. Обратный предел башни уравнений $\mathcal{E}^{(l)}$, $l \geqslant 0$, порожденной отображениями $\pi^{\mathcal{G}}_{k+l+1,k+l}$, называется *бесконечным продолжением* уравнения $\mathcal{E}$ и обозначается через $\mathcal{E}^\infty$. Точка $\theta = [s]_x^{(\infty,\mathcal{G})} \in J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$ тогда и только тогда принадлежит множеству $\mathcal{E}^\infty$, когда ряды Тейлора сечения s в точках $g(x) \in M$, $g \in \mathcal{G}$, удовлетворяют уравнению $\mathcal{E}$. Поэтому точки множества $\mathcal{E}^\infty \cap J^\infty(\pi; \mathcal{G})_0$ естественно назвать *формальными решениями* гранично-дифференциального уравнения $\mathcal{E}$.

Совокупность ограничений на $\mathcal{E}^{(l)}$ гладких функций, определенных на объемлющем пространстве $J^{k+l}(\pi; \mathcal{G})$, обозначим через $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$. Для любого $l \geqslant 0$ имеем вложение $\mathcal{F}_l(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}_{l+1}(\mathcal{E})$. Элементы множества $\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{F}_l(\mathcal{E})$ будем называть гладкими функциями на бесконечно продолженном уравнении $\mathcal{E}^\infty$. Множество $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ является алгеброй, так как алгебрами являются множества $\mathcal{F}_l(\mathcal{E})$.

Если $\theta = \{[s_g]^\infty_{g(x)}\}_{g \in \mathcal{G}} \in \mathcal{E}^\infty$, то график сечения $j_\infty(\{s_g\})$ касается множества $\mathcal{E}^\infty$ в точке θ. Отсюда и из утверждения 6.1 следует, что картановская плоскость $\mathcal{C}_\theta$ в точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ лежит в касательном пространстве $T_\theta(\mathcal{E}^\infty)$. Распределение $\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E}) = \mathcal{C}_\theta$, $\theta \in \mathcal{E}^\infty$, назовем *распределением Картана на* $\mathcal{E}^\infty$. Из этого определения следует, что максимальные интегральные многообразия распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ одновременно являются максимальными интегральными многообразиями распределение Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. Кроме того, так как любое конечное продолжение уравнения $\mathcal{E}$ инвариантно относительно любого отображения $\widehat{g}$, $g \in \mathcal{G}$, то этому условию удовлетворяет и бесконечное продолжение $\mathcal{E}^\infty$. Отсюда и из утверждения 6.6 получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.10. *График сечения расслоения $\pi^{\mathcal{G}}_\infty|_{\mathcal{E}^\infty}$ является максимальным интегральным многообразием распределения Картана на $\mathcal{E}^\infty$, инвариантным относительно любого отображения $\widehat{g}$, $g \in \mathcal{G}$, в том и только том случае,* *когда он имеет вид* $j_\infty(s)(M)$, *где* $s \in \Gamma(\pi)$ — *решение уравнения* $\mathcal{E}$.

Ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ отображения $\widehat{g}$, $g \in \mathcal{G}$, будем обозначать также через $\widehat{g}$.

Так как плоскости распределения Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ в точках $\mathcal{E}^\infty$ совпадают с плоскостями этого распределения на $\mathcal{E}^\infty$, любое поле, лежащее в распределении Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, касается уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Будем обозначать множество ограничений на $\mathcal{E}^\infty$ таких полей через $\mathcal{C}D(\mathcal{E}^\infty)$.

Как и в дифференциальном случае, определим модуль картановских форм на $\mathcal{E}^\infty$ как множество $\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty) \subset \Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)$ таких 1-форм, которые в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ аннулируются векторами распределения $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. Будем называть *высшей* (*инфинитезимальной*) *симметрией* уравнения $\mathcal{E} \subset J^k(\pi; \mathcal{G})$ такое вертикальное поле X на $\mathcal{E}^\infty$, которое удовлетворяет условиям

$$X(\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty)) \subset \mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{E}^\infty), \qquad \widehat{g}^* \circ X = X \circ \widehat{g}^*$$

для любого $g \in \mathcal{G}$. Множество таких полей образует алгебру Ли, которую мы обозначаем через $\mathrm{sym}(\mathcal{E})$.

Ограничение на $\mathcal{E}^\infty$ $\mathcal{G}$-инвариантной симметрии распределения Картана на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$, касающейся $\mathcal{E}^\infty$, является высшей симметрией этого уравнения. Будем называть такие симметрии *внешними симметриями*.

Теорема 6.11. *Если уравнение* $\mathcal{E} \subset J^k(\pi; \mathcal{G})$ *таково, что*

$$(\pi_0^{\mathcal{G}, \{\mathrm{id}_M\}} \circ \pi_{\infty,0}^{\mathcal{G}})(\mathcal{E}^\infty) = J^0(\pi), \tag{6.44}$$

то всякая высшая симметрия уравнения $\mathcal{E}$ *есть ограничение на* $\mathcal{E}^\infty$ *некоторой его внешней симметрии.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.13 гл. 4. А именно, если X — высшая симметрия уравнения, то ограничение X на $\mathcal{F}_0(\pi)$ продолжается до дифференцирования X_0': $\mathcal{F}_0(\pi) \to \mathcal{F}(\pi; \mathcal{G})$. Дифференцирование X_0' определяет такое эволюционное дифференцирование $Э_\varphi$, что $Э_\varphi\big|_{\mathcal{F}_0(\pi)} = X_0'$ (см. рассуждение после доказательства утверждения 6.7). Ограничение поля $Э_\varphi$ на $\mathcal{E}^\infty$ совпадает с X. Действительно, любая координатная функция на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$ получается из элементов алгебры $\mathcal{F}_0(\pi)$ действием полей $\widehat{Y}$, $Y \in D(M)$, и гомоморфизмов $\widehat{g}^*$, $g \in \mathcal{G}$. Координатные функции на $\mathcal{E}^\infty$ получаются ограничением на $\mathcal{E}^\infty$ некоторых координатных функций на $J^\infty(\pi; \mathcal{G})$. А так как поля $Э_\varphi$ и X коммутируют и с $\widehat{Y}$, и с $\widehat{g}^*$, а $Э_\varphi\big|_{\mathcal{F}_0(\pi)} = X\big|_{\mathcal{F}_0(\pi)}$, то поля $Э_\varphi$ и X совпадают на любой функции на $\mathcal{E}^\infty$. $\square$

Выведем уравнения на высшие симметрии. Пусть уравнение $\mathcal{E}$ задается соотношениями

$$G_j = 0, \qquad G_j \in \mathcal{F}_k(\pi; \mathcal{G}), \quad j = 1, \ldots, r. \tag{6.45}$$

Из теорем 6.8 и 6.11 следует, что всякая высшая симметрия уравнения $\mathcal{E}$ может быть получена ограничением на $\mathcal{E}^\infty$ некоторого эволюционного дифференцирования $Э_\varphi$, $\varphi \in \mathcal{F}(\pi, \pi; \mathcal{G})$, касающегося уравнения $\mathcal{E}^\infty$. Аналогично дифференциальному случаю (см. гл. 4) условие касания поля $Э_\varphi$ уравнения $\mathcal{E}^\infty$ записывается в виде

$$Э_\varphi(G_j) = \sum_{l,\sigma,g} \psi'_{l,\sigma,g} \widehat{g}^*(D_\sigma(G_l)), \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Правые части этих равенств равны нулю на $\mathcal{E}^\infty$, а левые имеют вид

$$Э_\varphi(G_j)\big|_{\mathcal{E}^\infty} = l_{G_j}(\varphi)\big|_{\mathcal{E}^\infty} = l^{\mathcal{E}}_{G_j}(\bar\varphi), \qquad j = 1, \ldots, r,$$

где $\bar\varphi = \varphi\big|_{\mathcal{E}^\infty}$, $l^{\mathcal{E}}_G = l_G\big|_{\mathcal{E}^\infty}$. Обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi; \mathcal{G})$ множество ограничений на $\mathcal{E}^\infty$ элементов модуля $\mathcal{F}(\pi, \pi; \mathcal{G})$ и определим для элементов $\bar\varphi, \bar\psi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi; \mathcal{G})$ скобку

$$\{\bar\varphi, \bar\psi\}_{\mathcal{E}} \overset{\text{def}}{=} l^{\mathcal{E}}_\psi(\varphi) - l^{\mathcal{E}}_\varphi(\psi) = \{\varphi, \psi\}\big|_{\mathcal{E}^\infty},$$

где $\bar\varphi = \varphi\big|_{\mathcal{E}^\infty}$, $\bar\psi = \psi\big|_{\mathcal{E}^\infty}$.

Теорема 6.12. *Если уравнение $\mathcal{E} \subset J^k(\pi; \mathcal{G})$ задается соотношениями* (6.45) *и удовлетворяет условию* (6.44), *то алгебра Ли* $\mathrm{sym}(\mathcal{E})$ *изоморфна алгебре решений системы уравнений*

$$l^{\mathcal{E}}_{G_j}(\varphi) = 0, \quad j = 1, \ldots, r, \ \varphi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \pi; \mathcal{G}), \tag{6.46}$$

структура алгебры Ли в которой задана скобкой $\{\bullet, \bullet\}_{\mathcal{E}}$.

Упражнение 6.12. Выпишите систему (6.46) для системы гранично-дифференциальных уравнений (6.17).

6.7. Примеры. Производящие сечения φ симметрий интегро-дифференциальных уравнений имеют значительно большее количество аргументов, чем соответствующие сечения в дифференциальном случае. По этой причине решать уравнение (6.46) без применения компьютера затруднительно.

Анализ методов решения уравнений типа (6.46) (см. примеры из гл. 3–6), показывает, что основным приемом решения является дифференцирование обеих частей уравнения по какой-либо переменной. Чаще всего такая переменная содержится в уравнении, но от нее не зависят компоненты сечения φ, либо от нее зависят одна или две компоненты. После дифференцирования мы получаем новое уравнение на компоненты φ. Если новое уравнение достаточно просто и содержит производную компоненты φ^i по некоторой переменной v, то, решая его, мы определяем зависимость компоненты φ^i от переменной v. Подставляя найденный вид φ в уравнение (6.46) и дифференцируя по другой переменной (например, по v), мы получаем новые уравнения и повторяем эту процедуру до окончательного решения уравнение (6.46).

Первый из приведенных здесь примеров рассчитан с использованием программы, написанной средствами MAPLE V, которая выписывает и анализирует систему уравнений (6.46), осуществляет поиск подходящих переменных дифференцирования, операцию дифференцирования по этим переменным соответствующих уравнений и выбор из полученного списка новых уравнений наиболее простых. Решение последних уравнений осуществлялось вручную и описано ниже. При этом использовалась следующая лемма, которая может быть полезна и при решении других уравнений.

Лемма 6.13. 1) *Пусть подмногообразие N многообразия M задается уравнениями*

$$f_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

где $f_i \in C^\infty(M)$ и ковекторы $df_i\big|_x$, $i = 1, \ldots, k$, линейно независимы в каждой точке $x \in N$. Тогда любая функция f на M, равная нулю на N, представляется в виде

$$f = \sum_{i=1}^{k} f_i a_i, \tag{6.47}$$

где a_i, $i = 1, \ldots, k$, — некоторые гладкие функции на M.

2) *Пусть, кроме того, второе подмногообразие $N_1 \subset M$ задается уравнениями*

$$g_j = 0, \qquad j = 1, \ldots, l, \qquad g_j \in C^\infty(M),$$

и ковекторы $df_i\big|_x$, $dg_j\big|_x$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$, также линейно независимы в каждой точке $x \in N_1$. Тогда любая функция f на M, равная нулю и на N, и на N_1, представляется в виде

$$f = \sum_{i,j} f_i g_j b_{ij}, \tag{6.48}$$

где $b_{ij} \in C^\infty(M)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l$.

Доказательство следует из леммы 2.1 гл. 3, [48]. □

Пример 6.7. Найдем симметрии уравнения (6.12). Это уравнение эквивалентно системе гранично-дифференциальных уравнений (6.17). Используем следующие обозначения. Пусть $\mathcal{G}$ — полугруппы отображений из примера 6.4. Если v — какая-либо координата слоя пространства джетов с полугруппой $\mathcal{G}$, то через v_1, v_2 и v_3 будем обозначать координаты, соответствующие производным v по x, s и t соответственно. Так, например, координата u^2_{13} соответствует производной $\dfrac{\partial^2 u^2}{\partial x \partial t}$. Через $g_{[ab]}$, где буквы a, b есть символы $0, x, s$ или ∞, обозначим отображение из полугруппы $\mathcal{G}$, которое отображает точку с координатами (t, x, s) в точку с координатами (t, a, b). Так $g_1 = g_{[x0]}$, $g_2 = g_{[0x]}$ и т. д. (см. пример 6.4). Через $v_{[ab]}$, где v — какая-либо функция на пространстве джетов, обозначим функцию $g_{[ab]}{}^*(v)$. Например, $g_2{}^*(u^2) = u^2_{[0,x]}$, $g_1{}^*(\dfrac{\partial u^1}{\partial x}) = u^1_{1[x0]}$ и т. п. Вместо $v_{[xs]}$ будем писать просто v. Заметим, что если ограничение функции v на сечение $j_k(h)$ есть $f(t, x, s)$, то ограничение функции $v_{[ab]}$ на $j_k(h)$ есть $f(t, a, b)$.

Упражнение 6.13. Опишите e, f через a, b, c, d, если $g_{[ef]} = g_{[ab]} \circ g_{[cd]}$.

Используя введенные обозначения, систему (6.17) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &u^1_3 = \frac{1}{2} u^2_{[0x]} - u^1 u^3_{[x\infty]}, \quad u^2_2 = u^2_1 + K u^1_{[s0]} u^1, \\ &u^3_2 = K u^1_{[s0]}, \quad u^1_{[x0]} = u^1, \quad u^2_{[x0]} = 0, \quad u^3_{[x0]} = 0. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Линеаризация системы (6.49) имеет вид

$$D_3(\varphi^1) = \frac{1}{2} \varphi^2_{[0x]} - u^1 \varphi^3_{[x\infty]} - u^3_{[x\infty]} \varphi^1, \tag{6.50}$$

$$D_2(\varphi^2) = D_1(\varphi^2) + K u^1_{[s0]} \varphi^1 + K u^1 \varphi^1_{[s0]}, \tag{6.51}$$

$$D_2(\varphi^3) = K \varphi^1_{[s0]}, \tag{6.52}$$

$$\varphi^1_{[x0]} = \varphi^1, \tag{6.53}$$

$$\varphi^2_{[x0]} = 0, \tag{6.54}$$

$$\varphi^3_{[x0]} = 0, \tag{6.55}$$

где D_1, D_2, D_3 — полные производные по x, s, t соответственно, $\varphi^2_{[0x]} = g_{[0x]}{}^*(\varphi^2)$ и т. д.

Будем решать систему (6.50)–(6.55) в предположении, что искомые функции $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ зависят только от координат на $\pi^{\mathcal{G}}_{\infty,1}(\mathcal{E}^\infty) \subset J^1(\pi; \mathcal{G})$, т. е. от переменных

$$
\begin{gathered}
x, s, t, u^1, u^2, u^3, u^1_1, u^2_1, u^2_3, u^3_1, u^3_3, u^1_{[00]}, u^1_{[\infty 0]}, u^1_{[s0]}, u^2_{[0\infty]},\\
u^2_{[0s]}, u^2_{[0x]}, u^2_{[\infty\infty]}, u^2_{[s\infty]}, u^2_{[x\infty]}, u^3_{[0\infty]}, u^3_{[0s]}, u^3_{[0x]}, u^3_{[\infty\infty]},\\
u^3_{[s\infty]}, u^3_{[x\infty]}, u^1_{1[00]}, u^1_{1[\infty 0]}, u^1_{1[s0]}, u^2_{1[0\infty]}, u^2_{1[0s]}, u^2_{1[0x]},\\
u^2_{1[\infty\infty]}, u^2_{1[s\infty]}, u^2_{1[x\infty]}, u^2_{3[0\infty]}, u^2_{3[0s]}, u^2_{3[0x]}, u^2_{3[\infty\infty]},\\
u^2_{3[s\infty]}, u^2_{3[x\infty]}, u^3_{1[0\infty]}, u^3_{1[0s]}, u^3_{1[0x]}, u^3_{1[\infty\infty]}, u^3_{1[s\infty]},\\
u^3_{1[x\infty]}, u^3_{3[0\infty]}, u^3_{3[0s]}, u^3_{3[0x]}, u^3_{3[\infty\infty]}, u^3_{3[s\infty]}, u^3_{3[x\infty]}.
\end{gathered}
\tag{6.56}
$$

Из уравнения (6.53) следует, что функция φ^1 зависит только от тех переменных, которые получаются из (6.56) действием гомоморфизма $g_{[x,0]}{}^*$, а именно, от переменных

$$
\begin{gathered}
x, t, u^1_{[00]}, u^1_{[\infty 0]}, u^1, u^2_{[0\infty]}, u^2_{[0x]}, u^2_{[\infty\infty]}, u^2_{[x\infty]}, u^3_{[0\infty]},\\
u^3_{[0x]}, u^3_{[\infty\infty]}, u^3_{[x\infty]}, u^1_{1[00]}, u^1_{1[\infty 0]}, u^1_1, u^2_{1[0\infty]}, u^2_{1[0x]},\\
u^2_{1[\infty\infty]}, u^2_{1[x\infty]}, u^2_{3[0\infty]}, u^2_{3[0x]}, u^2_{3[\infty\infty]}, u^2_{3[x\infty]}, u^3_{1[0\infty]},\\
u^3_{1[0x]}, u^3_{1[\infty\infty]}, u^3_{1[x\infty]}, u^3_{3[0\infty]}, u^3_{3[0x]}, u^3_{3[\infty\infty]}, u^3_{3[x\infty]}.
\end{gathered}
$$

Программа дифференцирования, о которой говорилось в начале этого пункта, применялась к уравнениям (6.50)–(6.52). Результатом каждого применения является набор новых уравнений. Те уравнения, которые существенны для дальнейшего, выписываются ниже и анализируются.

Этап 1. Дифференцирование указанных уравнений по переменным, соответствующим производным второго порядка, дает нам уравнения, из которых следует, что функция φ^1 не зависит от переменных

$$
\begin{gathered}
u^2_{1[0\infty]}, u^2_{1[0x]}, u^2_{1[\infty\infty]}, u^2_{1[x\infty]}, u^2_{3[0\infty]}, u^2_{3[0x]}, u^2_{3[\infty\infty]}, u^2_{3[x\infty]},\\
u^3_{1[0\infty]}, u^3_{1[0x]}, u^3_{1[\infty\infty]}, u^3_{1[x\infty]}, u^3_{3[0\infty]}, u^3_{3[0x]}, u^3_{3[\infty\infty]}, u^3_{3[x\infty]};
\end{gathered}
$$

функция φ^2 — от переменных

$$
\begin{gathered}
u^3_1, u^3_3, u^1_{1[s0]}, u^1_{1[x0]}, u^2_{1[0s]}, u^2_{1[0x]}, u^2_{1[s\infty]}, u^2_{1[x\infty]}, u^2_{3[0s]}, u^2_{3[0x]},\\
u^2_{3[s\infty]}, u^2_{3[x\infty]}, u^3_{1[s\infty]}, u^3_{1[x\infty]}, u^3_{3[s\infty]}, u^3_{3[x\infty]};
\end{gathered}
$$

функция φ^3 — от

$$u_1^2, u_3^2, u_{1[s0]}^1, u_{1[0s]}^2, u_{1[s\infty]}^2, u_{3[0s]}^2, u_{3[s\infty]}^2, u_{1[s\infty]}^3, u_{3[s\infty]}^3.$$

Этап 2. Дифференцирование уравнения (6.51) по переменным u_1^3, $u_{1[0s]}^2$, $u_{1[0x]}^2, u_{1[s\infty]}^2, u_{1[x\infty]}^2, u_{1[s\infty]}^3, u_{1[x\infty]}^3$ и уравнения (6.52) по переменным $u_1^2, u_{1[0s]}^2, u_{1[s\infty]}^2, u_{1[s\infty]}^3$ доказывает независимость функции φ^2 от переменных

$$u^3, u_{[0s]}^2, u_{[0x]}^2, u_{[s\infty]}^2, u_{[x\infty]}^2, u_{[s\infty]}^3, u_{[x\infty]}^3,$$

и функции φ^3 — от переменных

$$u^2, u_{[0s]}^2, u_{[s\infty]}^2, u_{[s\infty]}^3.$$

Этап 3. Дифференцируя уравнение (6.50) по $u_{3[x\infty]}^2$, уравнение (6.51) — по $u_{[0x]}^2, u_{[x\infty]}^3, u_1^1, u_{[0s]}^2, u_{1[s0]}^1$, и уравнение (6.52) — по $u_{[0s]}^2$, $u_{1[s0]}^1$, получаем следующие равенства

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u_{[x\infty]}^2} = 0, \tag{6.57}$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u_3^2} K u_{[s0]}^1 - \frac{\partial\varphi^2}{\partial u_{3[0x]}^3} K_{[0x]} = 2K u_{[s0]}^1 \frac{\partial\varphi^1}{\partial u_{[0x]}^2}, \tag{6.58}$$

$$-\frac{\partial\varphi^2}{\partial u_3^2} K u_{[s0]}^1 u^1 + \frac{\partial\varphi^2}{\partial u_{3[0x]}^3} K_{[0x]} u^1 = K u_{[s0]}^1 \frac{\partial\varphi^1}{\partial u_{[x\infty]}^3}, \tag{6.59}$$

$$-\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^1} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial u_1^2} K u_{[s0]}^1 - K u_{[s0]}^1 \frac{\partial\varphi^1}{\partial u_1^1} = 0, \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u_{3[0s]}^3} K_{[0s]} + \frac{\partial\varphi^2}{\partial u_3^2} K u^1 = 2K u^1 \frac{\partial\varphi_{[s0]}^1}{\partial u_{[0s]}^2}, \tag{6.61}$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u_{[s0]}^1} = K u^1 \frac{\partial\varphi_{[s0]}^1}{\partial u_{1[s0]}^1}, \tag{6.62}$$

$$\frac{\partial\varphi^3}{\partial u_{3[0s]}^3} K_{[0s]} + K \frac{\partial\varphi^3}{\partial u_3^3} = 2K \frac{\partial\varphi_{[s0]}^1}{\partial u_{[0s]}^2}, \tag{6.63}$$

$$\frac{\partial\varphi^3}{\partial u_{[s0]}^1} = K \frac{\partial\varphi_{[s0]}^1}{\partial u_{1[s0]}^1}. \tag{6.64}$$

Положим $\varphi^4 = \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial u_1^1}$, $\varphi^5 = 2\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial u^2_{[0x]}}$. Тогда функции φ^4, φ^5 зависят от тех же переменных, что и φ^1, т. е. от

$$t, u^1_{[00]}, u^1_{[\infty 0]}, u^2_{[0\infty]}, u^2_{[\infty\infty]}, u^3_{[0\infty]}, u^3_{[\infty\infty]}, u^1_{1[00]}, u^1_{1[\infty 0]} \tag{6.65}$$

и $x, u^1, u^1_1, u^2_{[0x]}, u^3_{[0x]}, u^3_{[x\infty]}$ (здесь учтено уравнение (6.57)).

Умножая уравнение (6.58) на u^1, складывая с уравнением (6.59) и сокращая на $Ku^1_{[s0]}$, получаем равенство

$$\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^3_{[x\infty]}} = -u^1\varphi^5. \tag{6.66}$$

Правая часть уравнения (6.63) есть $K\varphi^5_{[s0]}$, а значит, она зависит от переменных (6.65) и $x, s, u^1_{[s0]}, u^1_{1[s0]}, u^2_{[0s]}, u^3_{[0s]}, u^3_{[s\infty]}$. Левая часть этого уравнения не зависит от $u^1_{1[s0]}, u^2_{[0s]}, u^3_{[s\infty]}$. Поэтому φ^5 не может зависеть от $u^1_1, u^2_{[0x]}, u^3_{[x\infty]}$. Из уравнения (6.64) и аналогичных рассуждений следует, что функция φ^4 также не зависит от $u^1_1, u^2_{[0x]}, u^3_{[x\infty]}$.

Так как

$$\frac{\partial\varphi^1_{[s0]}}{\partial u^1_{1[s0]}} = g_{[s0]}{}^*\Big(\frac{\partial\varphi^1}{\partial u^1_1}\Big) = \varphi^4_{[s0]},$$

уравнение (6.62) переписывается в виде

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^1_{[s0]}} = Ku^1\varphi^4_{[s0]}. \tag{6.67}$$

Продифференцируем уравнение (6.60) по $u^1_{[s0]}$. Функция $\dfrac{\partial\varphi^1}{\partial u^1_1} = \varphi^4$ не зависит от $u^1_{[s0]}$, а из уравнения (6.67) мы получаем

$$\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial u^1_{[s0]}\partial u^2_1} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2\varphi^2}{\partial u^1_{[s0]}\partial u^1} = K\varphi^4_{[s0]}.$$

Поэтому дифференцирование уравнения (6.60) дает нам равенство

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^2_1} = \varphi^4 + \varphi^4_{[s0]}, \tag{6.68}$$

и уравнение (6.60) переписывается в виде

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^1} = Ku^1_{[s0]}\varphi^4_{[s0]}. \tag{6.69}$$

Из сравнения производных уравнения (6.68) по u^1 и уравнения (6.69) по u_1^2 следует независимость функции φ^4 от u^1.

Из равенства (6.67) легко вывести, что производные функции φ^2, входящие в уравнение (6.58), не зависят от $u^1_{[s0]}$. Поэтому уравнение (6.58) расщепляется на два уравнения:

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u_3^2}=\varphi^5, \tag{6.70}$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^3_{3[0x]}}=0. \tag{6.71}$$

Аналогично из (6.69) следует расщепление уравнения (6.61) на равенства

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u_3^2}=\varphi^5_{[s0]}, \tag{6.72}$$

$$\frac{\partial\varphi^2}{\partial u^3_{3[0s]}}=0. \tag{6.73}$$

Из уравнений (6.70) и (6.72) получаем равенство $\varphi^5=\varphi^5_{[s0]}$. Его левая часть может зависеть только от переменных (6.65) и $x, u^1, u^3_{[0x]}$, правая — от (6.65) и $s, u^1_{[s0]}, u^3_{[0s]}$. Поэтому функция φ^5 зависит только от переменных (6.65).

Представим функции $\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3$ в виде

$$\varphi^1=\varphi^4u_1^1+\varphi^5(1/2u^2_{[0x]}-u^1u^3_{[x\infty]})+\varphi^6, \tag{6.74}$$

$$\varphi^2=\varphi^4_{[s0]}Ku^1u^1_{[s0]}+(\varphi^4+\varphi^4_{[s0]})u_1^2+\varphi^5u_3^2+\varphi^7, \tag{6.75}$$

$$\varphi^3=\varphi^4_{[s0]}Ku^1_{[s0]}+\varphi^8, \tag{6.76}$$

где $\varphi^6,\varphi^7,\varphi^8$ — некоторые функции. Просмотрев списки аргументов функций $\varphi^4,\varphi^5,\varphi^4_{[s0]}$, легко увидеть, что функции $\varphi^6,\varphi^7,\varphi^8$ могут зависеть только от переменных, от которых зависят φ^1,φ^2 и φ^3 соответственно. Дифференцируя уравнение (6.74) по $u^2_{[0x]}, u^3_{[x\infty]}, u_1^1$ и используя формулу (6.66) и определения φ^4,φ^5, мы получаем, что φ^6 не зависит от $u^2_{[0x]}, u^3_{[x\infty]}$ и u^1_1. Аналогично доказывается, что φ^7 не зависит от $u^1_{[s0]}, u^2_1, u^1, u^2_3, u^3_{3[0x]}, u^3_{3[0s]}$, а φ^8 — от $u^1_{[s0]}$. Для этого достаточно продифференцировать уравнения (6.75) и (6.76) по соответствующим переменным и использовать уравнения (6.67)–(6.71), (6.73) и (6.64).

Этап 4. Дифференцированием уравнения (6.51) по u_1^2 получаем равенство

$$g_{[s0]}{}^*\left(\frac{\partial\varphi^4}{\partial x}\right) - \frac{\partial\varphi^4}{\partial x} + K_{[0s]}u^1_{[s0]}g_{[s0]}{}^*\left(\frac{\partial\varphi^4}{\partial u^3_{[0x]}}\right) - K_{[0x]}u^1\frac{\partial\varphi^4}{\partial u^3_{[0x]}} = 0.$$

Так как функция φ^4 не зависит от u^1 и $u^1_{[s0]}$, имеем

$$\frac{\partial\varphi^4}{\partial u^3_{[0x]}} = 0, \qquad g_{[s0]}{}^*\left(\frac{\partial\varphi^4}{\partial x}\right) = \frac{\partial\varphi^4}{\partial x}.$$

Из последнего равенства следует, что производная $\dfrac{\partial\varphi^4}{\partial x}$ не зависит от x. Следовательно, $\varphi^4 = \varphi^9 x + \widetilde{\varphi}^9$, где φ^9 и $\widetilde{\varphi}^9$ — функции, зависящие только от переменных (6.65).

Подставляя в уравнения (6.75) и (6.54) полученные представления для функций φ^2, φ^4 и учитывая равенства $u^2_{1[x,0]} = 0$, $u^2_{3[x,0]} = 0$, которые выводятся из пятого уравнения системы (6.49), переписываем (6.54) в виде

$$\widetilde{\varphi}^9 K_{[x0]}u^1u^1_{[00]} + \varphi^7_{[x0]} = 0.$$

Так как функция φ^7 не зависит от u^1, то $\varphi^7_{[x0]}$ также не зависит от u^1, и поэтому $\widetilde{\varphi}^9 = 0 = \varphi^7_{[x0]}$. Отсюда $\varphi^4 = \varphi^9 x$.

Этап 5. На этом и следующих шагах при вычислении $\varphi^3_{[x,\infty]}$ необходимо учитывать равенство $g_{[x,\infty]}{}^*(Ku^1_{[s0]}s) = 0$, которое следует из сходимости несобственного интеграла уравнения (6.12). Двойное дифференцирование уравнения (6.51) по переменным u^1 и $u^1_{[s0]}$ дает уравнение

$$-\frac{\partial\varphi^6_{[s0]}}{\partial u^1_{[s0]}} + \varphi^9 g + \frac{\partial\varphi^7}{\partial u^2} - \frac{\partial\varphi^6}{\partial u^1} = 0, \tag{6.77}$$

где

$$g = 1 + \frac{1}{K}\left(s\frac{\partial K}{\partial s} + x\frac{\partial K}{\partial x}\right) \tag{6.78}$$

— функция от x и s. Функция φ^6 линейно зависит от u^1, так как в равенстве (6.77) первые три слагаемые не зависят от u^1. Подставляя в (6.77) выражение $\varphi^6 = u^1\varphi^{10} + \varphi^{11}$, где φ^{10}, φ^{11} — некоторые функции, зависящие от всех аргументов функции φ^6, кроме u^1, получаем

$$\varphi^7 = u^2(\varphi^{10} + \varphi^{10}_{[s0]} - \varphi^9 g) + \varphi^{12},$$

где функция φ^{12} зависит от всех аргументов функции φ^7, кроме u^2.

Этап 6. Дифференцируя уравнение (6.50) по u_1^1, $u^3_{[x\infty]}$, $u^3_{1[x\infty]}$, $u^3_{3[x\infty]}$ и уравнение (6.51) — дважды по u^2 и u^1, получаем равенства

$$xD_3(\varphi^9)+u^1\frac{\partial\varphi^8_{[x\infty]}}{\partial u_1^1}=0, \tag{6.79}$$

$$u^1D_3(\varphi^5)=u^1\frac{\partial\varphi^8_{[x\infty]}}{\partial u^3_{[x\infty]}}+\varphi^{11}, \tag{6.80}$$

$$\frac{\partial\varphi^8_{[x\infty]}}{\partial u^3_{1[x\infty]}}=\varphi^9x, \qquad \frac{\partial\varphi^8_{[x\infty]}}{\partial u^3_{3[x\infty]}}=\varphi^5, \tag{6.81}$$

$$\frac{\partial\varphi^{10}}{\partial u^3_{[0x]}}=0. \tag{6.82}$$

При этом уравнение (6.51) после учета всех уравнений, которые получаются из него дифференцированием, принимает вид

$$\frac{\partial\varphi^{12}}{\partial s}-\frac{\partial\varphi^{12}}{\partial x}=0. \tag{6.83}$$

Подставляя в уравнение (6.54) полученное представление для φ^2, имеем $\varphi^{12}_{[x0]}=0$. С учетом уравнения (6.83) φ^{12} есть функция следующих аргументов:

$$\begin{aligned}\varphi^{12}=\widetilde{\varphi}(x+s,\ & u^3_{[0s]}, u^3_{1[0s]}, t, u^1_{[00]}, u^1_{[\infty0]}, u^2_{[0\infty]}, u^2_{[\infty\infty]}, u^3_{[0\infty]},\\ & u^3_{[0x]}, u^3_{[\infty\infty]}, u^1_{1[00]}, u^1_{1[\infty0]}, u^2_{1[0\infty]}, u^2_{1[\infty\infty]}, u^2_{3[0\infty]},\\ & u^2_{3[\infty\infty]}, u^3_{1[0\infty]}, u^3_{1[0x]}, u^3_{1[\infty\infty]}, u^3_{3[0\infty]}, u^3_{3[\infty\infty]}).\end{aligned}$$

Гомоморфизм $g_{[x0]}{}^*$ меняет только первые три аргумента функции φ^{12}:

$$\begin{aligned}\varphi^{12}_{[x0]}=\widetilde{\varphi}(x,\ & u^3_{[00]}, u^3_{1[00]}, t, u^1_{[00]}, u^1_{[\infty0]}, u^2_{[0\infty]}, u^2_{[\infty\infty]}, u^3_{[0\infty]},\\ & u^3_{[0x]}, u^3_{[\infty\infty]}, u^1_{1[00]}, u^1_{1[\infty0]}, u^2_{1[0\infty]}, u^2_{1[\infty\infty]}, u^2_{3[0\infty]},\\ & u^2_{3[\infty\infty]}, u^3_{1[0\infty]}, u^3_{1[0x]}, u^3_{1[\infty\infty]}, u^3_{3[0\infty]}, u^3_{3[\infty\infty]}),\end{aligned} \tag{6.84}$$

а так как аргументы функции (6.84) независимы, из равенства $\varphi^{12}_{[x0]}=0$ получаем равенство $\varphi^{12}=\widetilde{\varphi}=0$.

Слагаемые $xD_3(\varphi^9)$ и φ^{11} в уравнениях (6.79) и (6.80) не зависят от u^1. Поэтому, полагая в этих уравнениях $u^1=0$, получаем

$$D_3(\varphi^9)=0, \tag{6.85}$$

$$\varphi^{11}=0. \tag{6.86}$$

Из уравнений (6.86) и (6.80) следует равенство

$$\frac{\partial \varphi^8_{[x\infty]}}{\partial u^3_{[x\infty]}} = D_3(\varphi^5). \tag{6.87}$$

Уравнения (6.87) и (6.81) показывают, что мы упростим уравнение (6.50), положив

$$\varphi^8 = u^3 D_3(\varphi^5) - u^3_1 x \varphi^9 + u^3_3 \varphi^5 + \varphi^{13},$$

где φ^{13} — функция тех же аргументов, что и φ^8.

Этап 7. На этом этапе мы дифференцируем уравнение (6.85) по переменным, от которых не зависит функция φ^9. В результате получаем уравнения, из которых следует, что функция φ^9 не зависит от переменных

$$u^1_{[\infty 0]},\ u^2_{[0\infty]},\ u^2_{[\infty\infty\infty]},\ u^3_{[0\infty]},\ u^3_{[\infty\infty\infty]},\ u^1_{1[00]},\ u^1_{1[\infty 0]}.$$

Значит, она может зависеть только от $u^1_{[00]}$ и t. Таким образом, уравнение (6.85) принимает форму

$$\frac{\partial \varphi^9}{\partial t} - u^1_{[00]} u^3_{[0\infty]} \frac{\partial \varphi^9}{\partial u^1_{[00]}} = 0,$$

откуда следует, что φ^9 — константа.

Этап 8. Дифференцирование уравнения (6.52) по $u^1_{[s0]}$ дает равенство

$$X(\varphi^{13}) = (\varphi^{10}_{[s0]} - \varphi^9 g - D_3(\varphi^5))K, \tag{6.88}$$

где

$$X = K\frac{\partial}{\partial u^3} + K_1 \frac{\partial}{\partial u^3_1} + K_{[0s]} \frac{\partial}{\partial u^3_{[0s]}} + K_{1[0s]} \frac{\partial}{\partial u^3_{1[0s]}}, \qquad K_1 = \frac{\partial K}{\partial x}.$$

Уравнения (6.50), (6.52) и (6.55) после учета их дифференциальных следствий переписываются в виде

$$D_3(\varphi^{10}) + \varphi^{13}_{[x\infty]} = 0, \tag{6.89}$$

$$\frac{\partial \varphi^{13}}{\partial s} = 0,$$

$$\varphi^{13}_{[x0]} = 0. \tag{6.90}$$

Таким образом функция φ^{13} зависит от переменных

$$\begin{gathered}
u^3, u^3_1, u^3_3, u^3_{[0s]}, u^3_{1[0s]}, u^3_{3[0s]}, x, t, u^1_{[00]}, u^1_{[\infty 0]},\\
u^1, u^2_{[0\infty]}, u^2_{[0x]}, u^2_{[\infty\infty]}, u^2_{[x\infty]}, u^3_{[0\infty]}, u^3_{[0x]}, u^3_{[\infty\infty]},\\
u^3_{[x\infty]}, u^1_1, u^1_{1[00]}, u^1_{1[\infty 0]}, u^2_{1[0\infty]}, u^2_{1[0x]}, u^2_{1[\infty\infty]},\\
u^2_{1[x\infty]}, u^2_{3[0\infty]}, u^2_{3[0x]}, u^2_{3[\infty\infty]}, u^2_{3[x\infty]}, u^3_{1[0\infty]}, u^3_{1[0x]},\\
u^3_{1[\infty\infty]}, u^3_{1[x\infty]}, u^3_{3[0\infty]}, u^3_{3[0x]}, u^3_{3[\infty\infty]}, u^3_{3[x\infty]}.
\end{gathered} \tag{6.91}$$

Равенство (6.90) означает, что функция φ^{13} равна нулю на подмногообразии $N = \operatorname{im} g_{[x0]}$. В пространстве координат (6.91) подмногообразие N задается равенством нулю функций

$$u^3, u^3_1, u^3_3, u^3_{[0s]}, u^3_{1[0s]}, u^3_{3[0s]} \tag{6.92}$$

(см. последнее уравнение системы (6.49)). Поэтому из первой части леммы 6.13 получаем представление

$$\varphi^{13} = u^3 a^1 + u^3_1 a^2 + u^3_3 a^3 + u^3_{[0s]} a^4 + u^3_{1[0s]} a^5 + u^3_{3[0s]} a^6, \tag{6.93}$$

где $a^i, i = 1, \ldots, 6$, — некоторые гладкие функции переменных (6.91)

Подставляя представление (6.93) в уравнение (6.89) получаем равенство

$$\begin{aligned}
D_3(\varphi^{10}) + u^3_{[x\infty]} a^1_{[x\infty]} + u^3_{1[x\infty]} a^2_{[x\infty]} + u^3_{3[x\infty]} a^3_{[x\infty]} +&\\
+ u^3_{[0\infty]} a^4_{[x\infty]} + u^3_{1[0\infty]} a^5_{[x\infty]} + u^3_{3[0\infty]} a^6_{[x\infty]} &= 0.
\end{aligned}$$

Так как функция $D_3(\varphi^{10})$ не зависит от переменных

$$u^3_{[x\infty]}, u^3_{1[x\infty]}, u^3_{3[x\infty]}, u^3_{[0\infty]}, u^3_{1[0\infty]}, u^3_{3[0\infty]},$$

из последнего равенства получаем уравнение $D_3(\varphi^{10}) = 0$. Значит (см. решение уравнения (6.85) на этапе 7 и уравнения (6.82) и (6.89)), функция φ^{10} зависит только от x, и мы имеем равенство $\varphi^{13}_{[x\infty]} = 0$. Последнее означает, что функция φ^{13} равна нулю на подмногообразии $N_1 = \operatorname{im} g_{[x\infty]}$, которое в пространстве координат (6.91) задается равенством нулю функций

$$\begin{gathered}
u^3 - u^3_{[x\infty]}, u^3_1 - u^3_{1[x\infty]}, u^3_3 - u^3_{3[x\infty]},\\
u^3_{[0s]} - u^3_{[0\infty]}, u^3_{1[0s]} - u^3_{1[0\infty]}, u^3_{3[0s]} - u^3_{3[0\infty]}.
\end{gathered} \tag{6.94}$$

Отсюда и из второй части леммы 6.13 мы получаем представление

$$\varphi^{13} = \sum_{i,j} f_i g_j b_{ij},$$

где через $f_i, i = 1, \ldots, 6$, обозначены функции (6.92), через $g_j, j = 1, \ldots, 6$, — функции (6.94), а b_{ij} — некоторые функции переменных (6.91).

Подставляя полученное представление для функции φ^{13} в уравнение (6.88), получаем в его левой части выражение

$$\sum_i f_i\left(\sum_j X(g_j b_{ij})\right)+\sum_j g_j\left(\sum_i X(f_i)b_{ij}\right).$$

При этом функции, стоящие в правой части (6.88), не зависят от переменных, которые входят в запись функций $f_1, \ldots, f_6, g_1, \ldots, g_6$. Следовательно,

$$\varphi^{10}_{[s0]} - \varphi^9 g - D_3(\varphi^5) = 0. \tag{6.95}$$

Функции $\varphi^{10}_{[s0]}$ и φ^5 не зависят от x. Поэтому при $\varphi^9 \neq 0$ из равенства (6.95) следует, что g также не зависят от x. Но так как эта функция симметрична относительно x и s (это следует из ее определения (6.78) и симметричности функции $K(x, s)$), в этом случае g не зависит и от s. Следовательно, произведение $\varphi^9 g$ является константой. Из (6.95) следует, что $\varphi^{10}_{[s0]}$ не зависит от s, а значит, φ^{10} — константа.

Обозначим

$$\varphi^{14} = \varphi^{10} - \varphi^9 g, \quad \varphi^{15} = \varphi^5 - \varphi^{14} t.$$

Уравнение (6.95) переписывается в виде $D_3(\varphi^{15}) = 0$. Отсюда и из этапа 7 следует, что φ^{15} — также константа. Таким образом,

$$\varphi^1 = \varphi^9(xu^1_1 + u^1 g) + \varphi^{14}(u^1 + tu^1_3) + \varphi^{15}u^1_3. \tag{6.96}$$

Заметим, что если $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ — решение системы (6.50)–(6.55), то функции φ^2 и φ^3 однозначно определяются функцией φ^1. Действительно, функции φ^2 и φ^3 задают эволюцию переменных u^2 и u^3. Переменные u^2 и u^3 однозначно определяются переменной u^1 (см. (6.49)). Поэтому достаточно найти какие-нибудь функции φ^2 и φ^3, удовлетворяющие вместе с φ^1 системе (6.50)–(6.55). Положив $\varphi^{13} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \varphi^9(su^2_2 + xu^2_1 + u^2 g) + \varphi^{14}(2u^2 + tu^2_3) + \varphi^{15}u^2_3,\\ \varphi^3 &= \varphi^9(su^3_2 + u^3 g + xu^3_1) + \varphi^{14}(u^3 + u^3_3 t) + \varphi^{15}u^3_3.\end{aligned} \tag{6.97}$$

Легко видеть, что функции (6.96)–(6.97) удовлетворяют системе (6.50)–(6.55) и задают классические симметрии, соответствующие поднятию полей

$$\varphi^9\left(u^1 g\frac{\partial}{\partial u^1}-x\frac{\partial}{\partial x}\right)+\varphi^{14}\left(u^1\frac{\partial}{\partial u^1}-t\frac{\partial}{\partial t}\right)+\varphi^{15}\frac{\partial}{\partial t},$$

где $\varphi^9, \varphi^{14}, \varphi^{15}$ — константы. При этом, если φ^9 отлична от нуля, то g — константа, и из уравнения (6.78) следует, что $K(x,s)$ — однородная функция с коэффициентом однородности $\sigma = g-1$.

Упражнение 6.14. Проверьте справедливость приведенных в этом примере выкладок и рассуждений.

В работе [89] исследовалась другая система гранично-дифференциальных уравнений, также эквивалентная уравнению (6.12), но с большей полугруппой. Алгебра симметрий оказалась та же. В работе [90] приведен результат вычисления симметрий обобщения уравнения (6.12). При этом искались симметрии наиболее близкого вида к найденным симметриям (6.96)-(6.97). Вычисления не оказались слишком громоздкими, несмотря на значительное усложнение уравнения, и результаты были получены без использования компьютера.

Замечание 6.5. Выбор полугруппы для заданного уравнения не является однозначным. Всегда можно расширить полугруппу, а в некоторых случаях уменьшить ее (ср. полугруппы уравнения коагуляции (6.12) в [89] и в примере 6.4). Изменение полугруппы может привести к изменению алгебры симметрий (см. замечание из § 5 в [90]). Возникает задача выбора полугруппы для получения наиболее широкой алгебры симметрий. Можно показать, что в дифференциальном случае расширение полугруппы, которая состоит из одного элемента — тождественного отображения, может привести только к «тривиальному» расширению алгебры симметрий. Например, пусть наше уравнение имеет симметрию $\varphi(c)$, зависящую от произвольной константы c, и имеется интегральная (или гранично-дифференциальная) величина v, которая не зависит от независимых переменных уравнения. Например, v — значение зависимой переменной в какой-нибудь точке. Тогда, заменяя c на v, мы получаем новую симметрию $\varphi(v)$. Если симметрия $\varphi(c)$ зависит от произвольной функции c какой-либо независимой переменной z, то абсолютно так же мы можем заменить c на величину v, зависящую только от z, и получить новую симметрию $\varphi(v)$. Такое расширение алгебры симметрий мы называем «расширением с помощью фиктивной константы». Оно тривиально в том смысле, что в слое $v=c$ нашего уравнения симметрии $\varphi(v)$ и $\varphi(c)$ совпадают.

Пример 6.8. Уравнение Хохлова — Заболотской (см. п. 5.3 гл. 3) обладает симметрией

$$\varphi = q_3 p_{2g} p_1 + 2p_g p_3 + q_3 p_{22g},$$

где g: $(q_1, q_2, q_3, q_4) \mapsto (a, q_2, b, c)$, a, b, c — произвольные числа. Эта симметрия получена из симметрии $f(A)$ (см. (5.16) гл. 3) заменой произвольной функции $A(q_2)$ на p_g.

Замечание 6.6. В случае, когда рассматриваются не все решения дифференциального уравнения, а только удовлетворяющие дополнительным условиям (граничным или интегральным), расширение полугруппы может привести к нетривиальному расширению алгебры симметрий. Пример нахождения интегральной симметрии дифференциального уравнения читатель может найти в книге [70]. В ней авторы ищут симметрии системы уравнений Максвелла. Они находят классические симметрии Фурье-образа этой системы, и с помощью обратного преобразования Фурье получают из этих симметрий интегральные симметрии системы, которая состоит из уравнений Максвелла и уравнений, представляющих собой условия существования соответствующего Фурье-образа.

В заключение приведем пример использования преобразования Лапласа для нахождения интегральной симметрии интегро-дифференциального уравнения.

Пример 6.9. Рассмотрим уравнение (6.12) в случае $K(x, s) = x + s$. Преобразование Лапласа по переменной x преобразует это уравнение в гранично-дифференциальное уравнение

$$\Phi_2 = \Phi_A \Phi_1 + \Phi_{1A}\Phi - \Phi\Phi_1, \tag{6.98}$$

где

$$\Phi = \Phi(p, t) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-px} dx,$$

$$\Phi_A = \int_0^\infty u(x, t) dx = \Phi(0, t),$$

$$\Phi_{1A} = -\int_0^\infty x u(x, t) dx = \frac{\partial \Phi}{\partial p}(0, t),$$

Φ_1 и Φ_2 — производные Φ по p и t соответственно. Полугруппа этого уравнения состоит из двух отображений: тождественного и A: $(p, t) \mapsto (0, t)$. Уравнение на производящую функцию симметрии ψ имеет вид

$$X(\psi) = \Phi_1 \widehat{A}^*(\psi) + \Phi \widehat{A}^*(D_1(\psi)) + (\Phi_{1A} - \Phi_1)\psi, \tag{6.99}$$

где $X = D_2 - \Phi_A D_1 + \Phi D_1$. Нулевое продолжение уравнения (6.98) представляет собой пространство переменных $p, t, \Phi_A, \Phi_{1A}, \Phi, \Phi_1$. Если искать функцию ψ, зависящую только от координат нулевого продолжения, то X можно считать векторным полем на нулевом продолжении и легко найти первые интегралы этого поля:

$$q_1 = \Phi_{1A}, \qquad q_2 = \Phi_A e^{-q_1 t}, \qquad q_3 = \Phi e^{-q_1 t},$$
$$q_4 = q_1 p + \Phi_A - \Phi, \qquad q_5 = \left(\frac{q_1}{\Phi_1} - 1\right) e^{q_1 t}.$$

Уравнение (6.99) в этом случае нетрудно решить. Общее решение без учета слагаемых, отвечающих за «тривиальное» расширение алгебры классических симметрий, полученных в примере 6.7, есть

$$\psi = (f - \widehat{A}^*(f)) \frac{\Phi_1}{q_1} + \frac{\Phi_1}{q_1} e^{q_1 t} \widehat{A}^*\left(\frac{\partial f}{\partial q_5}\right), \tag{6.100}$$

где f — такая функция от q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, что $\widehat{A}^*(\frac{\partial f}{\partial q_3}) = 0$. Подставляя $f = q_1 q_3 q_4$ в формулу (6.100), получаем

$$\psi = q_3 q_4 \Phi_1 = \Phi e^{-q_1 t}(q_1 p + \Phi_A - \Phi)\Phi_1.$$

Соответствующая симметрия уравнения (6.12) при $K(x, s) = x + s$ имеет вид

$$\varphi = e^{-q_1 t}\left[\frac{x}{3} \int\limits_0^x \int\limits_0^{s_1} u(x - s_1, t) u(s_1 - s_2, t) u(s_2, t)\, ds_2 ds_1 - \right.$$
$$- q_1 \int\limits_0^x u(x - s, t) s u'_s(s, t)\, ds - q_1 \int\limits_0^x u(x - s, t) u(s, t)\, ds -$$
$$\left. - \frac{x}{2} \int\limits_0^\infty u(s, t)\, ds \int\limits_0^x u(x - s, t) u(s, t)\, ds\right],$$

где $q_1 = -\int\limits_0^\infty s u(s, t)\, ds$.

Упражнение 6.15. Убедитесь в справедливости формулы (6.100) и, используя ее, найдите все симметрии уравнения (6.12) при $K(x, s) = x + s$, содержащие двойные интегралы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

От симметрий дифференциальных уравнений к вторичному («квантованному») дифференциальному исчислению *)

> Но наука — это не просто каталог установленных фактов о вселенной; это способ прогресса, иногда мучительного, иногда — неуверенного. И наш интерес к науке — это не просто желание услышать о последних фактах, добавленных в коллекцию, мы хотим обсуждать наши надежды и опасения, возможности и ожидания.
>
> Сэр А. Эддингтон

Введение

Предысторией рациональной механики было изучение так называемых простых механизмов. В то время был сделан ряд попыток объяснить всю Природу как машину, составленную из этих механизмов. «Стандартные схемы» и «модели» современной квантовой теории поля (КТП) очень напоминают эти простые механизмы.

Возможно, эта аналогия проясняет причины широко распространенного чувства, что КТП пока еще не является «настоящей» сформировавшейся теорией. Ниже мы пытаемся проанализировать, почему это так и какие ингредиенты необходимо добавить в раствор, чтобы добиться искомой кристаллизации.

Имея это в виду, мы начнем с некоторых общих наблюдений о происхождении крупномасштабных теорий. Эти вводные страницы придадут последующим рассуждениям необходимый начальный импульс. Следуя ему, мы придем в конечном итоге ко *вторичному*, или, выражаясь более спекулятивно, к *квантованному диффе-*

---

*) Сокращенный перевод статьи А. М. Виноградова: From symmetries of partial differential equations towards secondary (quantized) calculus // J. Geom. Phys. — 1994 — V. 14. — P. 146–194.

Печатается с любезного разрешения издательства Elsevier Science — NL, Sara Burgerhartstraat 25, 1055 KV Amsterdam, the Netherlands.

ренциальному исчислению, у которого, по-видимому, есть некоторые шансы стать математическим аппаратом, необходимым для перехода от «стандартных моделей» к «настоящей» теории.

С самого начала хотелось бы подчеркнуть, что вторичное исчисление является лишь языком, на котором, как мы надеемся, КТП можно будет построить естественно, т. е. без «перенормировок», «аномалий» и т. п. Если это так, то фундаментальную проблему перевода КТП на язык вторичного исчисления предстоит решить отдельно. Безусловно, для достижения этой цели необходимы накопленные к настоящему времени результаты и опыт исследования конкретных моделей.

Этот текст не является ни обзором, ни отчетом об исследованиях; к нему следует относиться как к расширенной мотивировке построения такого вторичного исчисления. Мы неформально описываем некоторые принципиальные идеи и уже полученные в этой области результаты, а также останавливаемся на проблемах и перспективах, которые кажутся сейчас наиболее интересными.

В наши намерения не входило систематическое и строгое изложение вторичного исчисления, и это едва ли возможно в рамках такого текста. Поэтому мы ограничиваемся общей панорамой, которая могла бы помочь заинтересовавшемуся читателю вникнуть в предмет, пользуясь приводимой в конце книги библиографией. С некоторыми деталями и методами читатель уже познакомился в основном тексте книги; в качестве дополнительного материала можно предложить также работы [147, 150, 19], вслед за которыми рекомендуется прочесть [3, 24, 148, 142, 152, 144, 145, 108, 113, 149, 44].

И, наконец, оговоримся, что первые, «философские» страницы настоящего приложения нужно читать полусерьезно, помня о принципе неопределенности: чрезмерное уточнение смысла используемых здесь слов убивает мотивирующие импульсы, которые, как мы надеемся, они источают.

§ 1. От симметрий к концепциям

То, что источником всякой теории являются весьма простые понятия, — банальность. Но что это за понятия? В обыденном языке слово «простой» имеет много значений. В линейном приближении их можно представить следующей диаграммой:

$$\boxed{\text{БАНАЛЬНЫЙ}}\text{---}\boxed{\cdot}\text{---}\cdots\text{---}\boxed{\cdot}\text{---}\boxed{\text{СИММЕТРИЧНЫЙ}}$$

в которой точки обозначают «промежуточные состояния». Другими словами, у нас есть достаточно причин интерпретировать термин «симметричный» как «простой, но не банальный». Детали лишь заслоняют симметрию. Поэтому модели, отражающие только суть явлений, по необходимости симметричны. Вспомним евклидову геометрию, планетарную систему Коперника, законы механики Ньютона или специальную теорию относительности, которые иллюстрируют эту мысль. Следовательно, в качестве руководящего принципа мы принимаем то, что начальной стадией в генезисе теорий является изучение симметричных моделей. (Конечно, эти замечания применимы только к достаточно масштабным ситуациям.)

При изучении таких моделей соображения симметрии достаточно хорошо заменяют концептуальное мышление. Вот почему они хорошо работают вначале, особенно для математически обоснованных теорий, поскольку в этом случае «симметричность» влечет за собой «разрешимость» и «интегрируемость».

В этот момент теория переходит к следующей стадии своего развития, доминирующая парадигма которой утверждает, что все составлено из простых (симметричных) элементов, изученных ранее, и что остается только понять, каким именно образом. Схематически этот период можно охарактеризовать как время, когда оперативные концепции будущей «истинной», но еще не открытой теории заменяются их «морфемами» и когда более или менее механистическая мозаика последних заменяет исчисление этих концепций. Вот почему мы называем эту стадию «морфологической».

Серьезным недостатком морфологических схем является то, что их приходится постоянно корректировать, чтобы оставаться в согласии с новыми экспериментальными данными и теоретическими требованиями. Это порождает многочисленные схемы типа теории возмущений, очень характерные для морфологической эры.

Планетарная система Птолемея с ее многочисленными эпи- и гипоциклами и квантовая электродинамика с ее перенормировками хорошо это иллюстрируют. Кроме того, из этих примеров можно понять, что неправдоподобно точное соответствие экспериментам — еще не все, что требуется от «настоящей» теории. Конечно, нет ничего плохого в использовании теории возмущений для технических нужд, но едва ли было бы разумно возводить небоскреб на «слегка расшатанном» фундаменте.

После этого для теории наступает стадия концептуальной самоорганизации или, лучше сказать, «смутное время». Безусловно, это самый длительный, загадочный и даже драматичный период в процессе рождения новой теории. В это время какие-то скрытые механизмы, действующие в соответствующем научном сообществе, шаг за шагом отбирают необходимые новые понятия, и в один прекрасный день выясняется, что эти понятия составляют тот единственный язык, на котором рассматриваемые явления можно выразить вполне адекватно и, следовательно, элегантно. Это и есть день рождения новой теории.

По-видимому, теория Дарвина вполне применима к процессу отбора концепций. Например, в ходе этого процесса возникает множество фантастических созданий (вспомним историю развития КТП последних десятилетий). Таковы типичные ситуации, когда выразительные возможности языка не соответствует описываемому предмету.

Резюмируя, представим нашу мысль о генезисе математически обоснованных теорий с помощью схемы:

симметричное начало («прекрасная эпоха») = морфологическая эра =

= концептуальная самоорганизация («смутное время») = концептуальный хэппи энд (1)

Конечно, на деле указанные периоды перемешиваются друг с другом, и иногда это происходит очень любопытным образом. Например, в наши дни синтетические геометрии — создания, весьма типичные для морфологической эры, — почти вымерли, уступив место дифференциальной геометрии. С другой стороны, теория меры — морфологическая реализация идеи интегрирования — мирно уживается со своим будущим победителем — теорией когомологий де Рама.

Переход от попыток смоделировать область действия новых явлений в терминах «старого», уже существующего математического языка, к новому языку более высокого уровня, выразительный потенциал которого в точности отвечает новым требованиям, — суть схемы (1). Мы используем здесь слова «математический язык» в духе термина «язык программирования». Это дает нам возможность учитывать антропоморфные элементы, неявно присутствующие в теориях в силу того, что индивидуальный человеческий мозг и научные сообщества иногда похожи на компьютеры и компьютерные сети соответственно. История метрической геометрии от ее эллинистической симметричной формы, основанной на обыденной логике, до современной римановой формы, базирующейся на дифференциальном исчислении, — идеальная иллюстрация описанной выше схемы.

§ 2. «Смутное время» квантовой теории поля

В предположении, что схема (1) верна, становится совершенно ясно, что КТП переживает сейчас свое «смутное время». Даже некоторые слова из современного словаря КТП — «перенормировки», «нарушение симметрии», «аномалии», «духи» и т. п. — указывают на глубокие противоречия между физическим содержанием и используемым математическим аппаратом. Кроме того, мы встречаем слишком много групп и алгебр Ли (вплоть до квантовых и квазиквантовых) и основанных на них соображений симметрии, играющих фундаментальную роль в современной КТП. Это говорит о том, что теория еще недалеко ушла от своего симметрического начала. В действительности самым сильным и очевидным свидетельством «смутного времени» служит широкое использование теории возмущений в современной КТП. Однако отсутствие реальных альтернатив и устойчивые привычки снизили ценность этого аргумента почти до нуля.

Мы понимаем, что скептически настроенный читатель, даже поверивший в это «смутное время», предпочтет продолжить свои текущие исследования в ожидании, когда упомянутый выше механизм отбора завершит свою работу. Так что мы обращаемся главным образом к тем, кому интересно заняться поисками возможных механизмов искусственного отбора, которые, как хорошо известно, работают гораздо быстрее.

С этого момента, используя в качестве мотивировки упомянутую выше эволюционную теорию, мы займемся поисками «языка программирования» для КТП. Конечно, для правильного понимания этот язык следовало бы изложить гораздо детальнее. Однако мы не рискнем двигаться в этом направлении дальше, памятуя об отношении к любой философии, господствующем в конце нашей «теоретико-множественной эпохи». Вместо этого мы приглашаем читателя после прочтения текста до конца снова вернуться к этому месту. Развитие изложенных идей можно найти также в [3, гл. 1]. В частности, там мы касаемся таких тем, как антропоморфные факторы, стоящие за попытками положить в основание всей математики теорию множеств, и объясняем, почему правильно понятое дифференциальное исчисление является языком классической физики.

§ 3. «Лингвинизация» принципа соответствия Бора

Начальные данные мы находим в следующих двух общих постулатах, представляющихся несомненными.

I. Дифференциальное исчисление является языком классической физики.

II. Классическая механика является предельным случаем квантовой при $h \to 0$ («принцип соответствия Бора»).

Для нас это начальные значения координат и импульсов соответственно.

Чтобы избежать недопонимания, подчеркнем, что слова «дифференциальное исчисление» понимаются здесь и ниже в своем прямом смысле, т. е. как система понятий (скажем, векторные поля, дифференциальные формы, дифференциальные операторы, джеты, когомологии де Рама, Спенсера и т. д.), связанная общими правилами или формулами (типа $d^2=0$, $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$, ...). Как было показано в [12], все они составляют «алгебру логики» в силу того факта, что дифференциальное исчисление можно на самом деле построить чисто алгебраически над произвольной (супер)коммутативной алгеброй A (см. также [24, гл. 1]). Построенное алгебраически дифференциальное исчисление совпадает со стандартным в случае алгебры гладких функций $A = C^\infty(M)$. Кроме того, алгебраический подход — и это очень важно подчеркнуть — помогает выяснить, что для замыкания этой алгебры логики, т. е. для построения всего исчисления, требуется еще многое понять. Высшие аналоги комплексов де Рама [17] являются примером такого рода.

Итак, первый постулат побуждает нас заняться поисками расширения стандартного дифференциального исчисления, а второй уточняет направление, в котором нужно искать. Имея это в виду, попытаемся выделить математическую суть принципа соответствия Бора. Следующая диаграмма иллюстрирует, как это можно сделать:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{уравнения квантовой}\\ \text{механики}\\ \text{(уравнения Шредингера)}\end{array}} \arrow[r, shift left, "h \to 0"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{уравнения классической}\\ \text{механики}\\ \text{(уравнения Гамильтона)}\end{array}} \arrow[l, shift left, dashed, "\text{квантование}"] \arrow[d, Rightarrow, "\text{«математизация»}"] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{дифференциальные}\\ \text{уравнения}\\ \text{в частных производных}\end{array}} \arrow[r, "\mathrm{CHAR_Q}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{обыкновенные}\\ \text{дифференциальные}\\ \text{уравнения}\end{array}}
\end{tikzcd}$$

Здесь CHAR_Σ обозначает отображение, сопоставляющее данной системе уравнений в частных производных $\mathcal{E}$ систему обыкновенных уравнений $\mathcal{E}^0_\Sigma$, описывающую, как распространяются особенности типа Σ решений системы $\mathcal{E}$. Что подразумевается под особенностями решений типа Σ и что, в частности, понимается под упомянутым выше типом Q, мы обсудим позднее (см. также работы [13, 149, 45, 44]). А сейчас мы объясним, каковы основания полагать, что отображение CHAR_Q описывает принцип соответствия Бора.

Во-первых, отметим, что переход от волновой оптики к геометрической математически может быть представлен в виде $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^0_{\mathrm{FOLD}}$, где FOLD обозначает особенности типа складки многозначных решений уравнения $\mathcal{E}$ (см. § 9). С другой стороны, многозначность решений связана с неоднозначностью решения задачи Коши и, следовательно, с теорией (би)характеристик.

Замечание 1. Существует двойственный путь перехода к геометрической оптике, предложенный Лунебургом [121] и основанный на изучении разрывных решений. Однако переход на эту точку зрения не приведет к существенным изменениям в последующих рассуждениях.

Во-вторых, памятуя о том, что Шрёдингер открыл свои знаменитые уравнения, отталкиваясь от аналогии с волновой и геометрической оптикой, можно ожидать, что аналогичная схема работоспособна и при переходе от квантовой к классической механике, [133]. Говоря точнее, кажется естественным предположить, что уравнения классической механики суть Q-характеристические уравнения соответствующих уравнений квантовой механики. По отношению к соответствующим типам особенностей «квантовых» решений эти гипотетические Q-характеристические уравнения должны играть ту же роль, какую стандартные характеристические уравнения играют для сингулярной задачи Коши. Эта гипотеза становится почти очевидной в рамках подхода Маслова к квазиклассическим асимптотикам [49]. Мы отсылаем читателя также к лекциям Леви-Чевиты [117] и к работе Ракаха [131], одной из первых попыток продвинуться в этом направлении.

Все сказанное приводит нас к формуле

$$\text{КВАНТОВАНИЕ} = \mathrm{CHAR}_\mathrm{Q}^{-1}\,. \tag{2}$$

Эта формула послужит нам путеводным принципом, и мы займемся поиском следствий из нее.

Прежде всего, попытка непосредственного применения (2) к КТП сразу приводит к проблеме, иллюстрируемой следующей диаграммой:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{квантованные поля}} \arrow[r, "\hbar\to 0"] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "\text{«математизация»}"] & \boxed{\text{классические поля}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\quad ? \quad} \arrow[r, "\mathrm{CHAR}_Q"] & \boxed{\text{дифференциальные уравнения в частных производных}}
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

Иными словами, нам нужно ответить на следующий вопрос: какие математические объекты следует поместить в нижний левый угол диаграммы (3), или, точнее, какова математическая природа уравнений, распространение особенностей решений которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных? Следующая схема

$$
\boxed{\text{обыкновенные дифференциальные уравнения}} \xleftarrow{\mathrm{CHAR}} \boxed{\text{дифференциальные уравнения в частных производных}} \xleftarrow{\mathrm{CHAR}} \boxed{\quad ? \quad}
$$

дает основание назвать эти еще не известные математические объекты *вторично квантованными дифференциальными уравнениями.*

Таким образом, следующая подлежащая рассмотрению проблема формулируется так:

Что такое вторично квантованные дифференциальные уравнения? (4)

Все предыдущие рассуждения не дают нам необходимого импульса к ее решению. В поисках такого импульса рассмотрим простейшую ситуацию, когда возникает отображение типа CHAR:

$$\sum_i a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x) \xrightarrow{\mathrm{CHAR}} \{\dot{x}_i = a_i(x)\}.$$

Другими словами, мы рассмотрим переход от векторных полей к обыкновенным дифференциальным уравнениям и попытаемся при этом понять, каковы должны быть вторичные («квантованные») векторные поля.

Воспользуемся тем, что рассматриваемая ситуация проста и поэтому, в полном соответствии с § 1, симметрична. Точнее, инфинитезимальные симметрии системы $\dot{x}_i = a_i(x)$ — это векторные поля $Y = \sum c_i \partial/\partial x_i$, коммутирующие с полем $X = \sum a_i \partial/\partial x_i$, а, как хорошо известно, любое векторное поле локально допускает множество коммутирующих с ним полей. Для наших целей важно заметить, что симметрии системы $\dot{x}_i = a_i(x)$ — это объекты той же природы, что и дифференциальный оператор (а именно, $X = \sum a_i \partial/\partial x_i$), определяющий член первого порядка в исходном уравнении $X(u) = b$. По этой причине представляется весьма вероятным, что вторично квантованные векторные поля идентичны симметриям уравнений в частных производных.

Чтобы проверить эту гипотезу, целесообразно рассмотреть теорию дифференциальных уравнений с категорной точки зрения, которая позволила бы систематически проводить аналогии с категорией гладких многообразий.

§ 4. Дифференциальные уравнения суть диффеотопы

Естественное обобщение понятия бесконечно продолженного уравнения, возникающее при факторизации (гл. 3), рассмотрении нелокальных симметрий (гл. 6) и в других ситуациях, дается следующим определением.

Определение 1. Многообразие $\mathcal{O}$, снабженное интегрируемым распределением *) $\mathcal{C}$, называется *диффеотопом* **), если локально ***) оно имеет вид бесконечно продолженного уравнения $\mathcal{E}^\infty$.

Размерность n распределения $\mathcal{C}$ называется *размерностью* диффеотопа $\mathcal{O}$ и обозначается $\operatorname{Dim} \mathcal{O}$. Конечно, она отличается от «обычной» размерности многообразия $\mathcal{O}$, которая, как правило, бесконечна.

Пример 1 (проективный диффеотоп). Пусть $E = E^{n+m}$ — гладкое $(n+m)$-мерное многообразие. Рассмотрим множество E_n^k, точками которого являются пары $(\theta, [M]_\theta^k)$, где $\theta \in E$, а $[M]_\theta^k$ — класс подмногообразий размерности n, проходящих через точку θ

---

*) Интегрируемость понимается здесь формально — должны выполняться условия Фробениуса.

**) По английски *diffiety* (=DIFFerential varIETY).

***) Конечно, надо также потребовать, чтобы «функции склейки» сохраняли соответствующие распределения.

и касающихся друг друга с порядком k. Вспоминая конструкцию пространств $J^k(\pi)$, $k=0,\ldots,\infty$, читатель без труда убедится, что

1) множества E_n^k снабжены естественной структурой гладкого многообразия;

2) имеют место естественные проекции $E_n^{k+1} \to E_n^k$;

3) пространство $J^\infty(E,n) = E_n^\infty$, определяемое как обратный предел этих проекций, снабжено естественным интегрируемым распределением.

Очевидно также, что локально $J^\infty(E,n)$ имеет вид $J^\infty(\pi)$ для некоторого m-мерного расслоения π над n-мерным многообразием и является диффеотопом размерности n.

Диффеотопы являются объектами категории, морфизмы которой суть гладкие отображения, сохраняющие распределения. Эту категорию естественно назвать *категорией дифференциальных уравнений.*

Все естественные конструкции геометрической теории дифференциальных уравнений буквально или в несколько модифицированном виде переносятся на произвольные диффеотопы. В частности, локальный изоморфизм $\tau\colon \mathcal{O}' \to \mathcal{O}$ называется *накрытием* в категории дифференциальных уравнений, а симметрии объекта $\mathcal{O}'$ — τ-нелокальными симметриями для $\mathcal{O}$. Конечно, нелокальные симметрии типа τ образуют алгебру Ли, совпадающую с $\operatorname{sym}\mathcal{O}'$. На первый взгляд кажется абсурдным пытаться найти коммутатор двух нелокальных симметрий, определенных в разных накрытиях. Оказывается, однако, возможным построить этот коммутатор в некотором третьем накрытии. Поэтому для того, чтобы снабдить множество всех нелокальных симметрий объектно алгебраической структурой, например, структурой алгебры Ли, следует одновременно рассматривать все накрытия над $\mathcal{O}$.

Все накрытия данного диффеотопа естественным образом образуют категорию, которую в [113] мы назвали «паутиной». Эта конструкция влечет множество важных для вторичного исчисления следствий, но в настоящее время это всего лишь прекрасная перспектива для будущих исследований.

Заметим также, что диффеотопы являются аналогами аффинных многообразий в алгебраической геометрии, в то время как паутины — аналоги полей рациональных функций на них.

Имеются два естественных вложения категории гладких многообразий в категорию дифференциальных уравнений: а) $M^n \Rightarrow \Rightarrow J^\infty(M^n, n)$ и б) $M^n \Rightarrow J^\infty(M^n, 0)$. В первом случае n-мерные многообразия переходят в n-мерные (в диффеотопическом смысле) объекты, во втором — в 0-мерные. Эти два способа в некотором смысле двойственны друг другу, и поэтому их наличие указывает на существование двойственности в теории дифференциальных уравнений. В то же время можно убедиться, что традиционная «дифференциальная» математика (анализ, геометрия, уравнения и т. д.), рассматриваемая как часть теории диффеотопов, становится концептуально замкнутой только в том случае, если все многообразия понимать как 0-мерные диффеотопы. Иными словами, стандартная «дифференциальная» математика составляет нульмерную часть теории диффеотопов. Это замечание вызывает подозрение, что большая часть математики, необходимой для того, чтобы естественно проквантовать классические поля, еще не открыта.

Вернемся теперь к гипотезе, сформулированной в конце предыдущего параграфа, и спросим себя, к чему сводится понятие симметрии дифференциального уравнения в случае нульмерного диффеотопа (т. е. обычного многообразия M). Очевидно, что $\operatorname{sym} M = D(M)$, где $D(M)$ — алгебра Ли всех векторных полей на многообразии M. В произвольной системе координат $u^1, \ldots, u^m$ на M стандартное выражение

$$X = \sum_i \varphi_i(u) \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad u = (u^1, \ldots, u^m),$$

для любого векторного поля X на M является частным случаем формулы (2.15) гл. 4 для эволюционного дифференцирования

$$Э_\varphi = \sum_{i,\sigma} D_\sigma(\varphi_i) \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Напомним, что эволюционному дифференцированию $Э_\varphi$ отвечает эволюционное уравнение (2.19) гл. 4

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \varphi_i(x, u, \ldots, u^j_\sigma, \ldots), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

В случае $X = Э_\varphi$ система (5) принимает вид

$$\frac{du^i}{dt} = \varphi_i(u^1, \ldots, u^m), \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Обыкновенные уравнения (6) представляют собой уравнения характеристик для операторов первого порядка $X = \sum_i \varphi_i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Таким образом, аналогия $X \mapsto Э_\varphi$, $(6) \mapsto (5)$ мотивирует следующее заключение.

Если $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — производящая функция симметрии $\chi \in \operatorname{sym} \mathcal{E}_\infty$, то система (5) дифференциальных уравнений в частных производных может естественным образом рассматриваться как характеристическая система для оператора χ.

Сопоставляя этот результат со схемой (3), мы получаем решение проблемы (4):

симметрии дифференциальных уравнений в частных производных суть вторично квантованные дифференциальные операторы первого порядка.

Это утверждение будет для нас отправной точкой в поисках вторично квантованных дифференциальных операторов высших порядков.

§ 5. Вторичные («квантованные») функции

Кажется естественным определить вторично квантованные дифференциальные операторы высших порядков как композиции операторов первого порядка. Но на этом пути немедленно возникает следующая трудность.

Вторичные дифференциальные операторы первого порядка — суть элементы алгебры $\operatorname{sym} \mathcal{O}$. С другой стороны, последние — это не «обычные» дифференциальные операторы, а классы их эквивалентности. Поэтому встает вопрос: как перемножать эти классы? Заинтересованному читателю мы предлагаем проверить, что прямолинейный подход к этой задаче не приводит к ее решению.

Другой аспект этой проблемы возникает из аналогичного вопроса: на какого сорта объектах действуют вторичные дифференциальные операторы? Несомненно, вторичные операторы должны быть «настоящими» операторами, т. е. действовать на каких-то объектах. В качестве таковых нельзя взять обычные функции. В этом можно убедиться, попытавшись определить действие алгебры $\operatorname{sym} \mathcal{O}$ на $C^\infty(\mathcal{O})$. Единственный естественный способ сделать это — положить $\chi(f) = X(f)$ для $\chi \in \operatorname{sym} \mathcal{O}$, $X \in D_\mathcal{C}(\mathcal{O})$, $\chi = X \mod \mathcal{C}D(\mathcal{O})$ и $f \in C^\infty(\mathcal{O})$. Но такое определение некорректно. Действительно, если $X_1, X_2 \in D_\mathcal{C}(\mathcal{O})$ и $X_1 \equiv X_2 \mod \mathcal{C}D(\mathcal{O})$, то, вообще говоря, $X_1(f) \neq X_2(f)$ при $X_1 \neq X_2$.

Однако с лингвистической точки зрения ясно, что вторичные операторы должны действовать на вторичные функции, и мы изменим вопрос, попытаясь выяснить, что это такое. Следующая аналогия поможет нам это сделать.

Пусть $\Lambda^i(M)$ — пространство дифференциальных i-форм на многообразии M. Дифференциал де Рама

$$C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \tag{7}$$

дает «универсальное решение» экстремальных задач для гладких функций на M. Понимая гладкие многообразия как 0-мерные диффеотопы, мы видим, что аналогом (7) должно быть отображение, дающее универсальное решение вариационных задач с кратными интегралами. Но это хорошо известное отображение Эйлера — Лагранжа:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{вариационные функционалы,}\\ \text{или «действия»}\end{matrix}} \xrightarrow{\mathrm{E}} \boxed{\begin{matrix}\text{дифференциальные}\\ \text{операторы}\end{matrix}} \tag{8}$$

т. е. E сопоставляет «действию» $\int\limits_{\Omega} L dx_1 \ldots dx_n$ левую часть соответствующего уравнения Эйлера — Лагранжа. Из аналогии между (7) и (8) следует, что в качестве вторичных (или «квантованных») функций следует взять «действия». Эта мысль требует уточнения, поскольку стандартное понимание «действия» содержит одну излишнюю для наших целей деталь, которую необходимо исключить из определения. Эта деталь — точное указание области интегрирования Ω. Так что наша следующая задача — найти смысл иероглифов типа $\int L dx_1 \ldots dx_n$ (без Ω!). Мы решим ее, интерпретируя их как некоторые когомологические классы (более детальные мотивировки см. в [100]). Но прежде сделаем несколько предварительных замечаний.

Пусть $\mathcal{O}$ — диффеотоп, $\operatorname{Dim} \mathcal{O} = n$. Заметим, что, как и в случае бесконечно продолженных уравнений, на $\mathcal{O}$ можно построить горизонтальный комплекс де Рама. Действительно, рассмотрим в $\Lambda^i(\mathcal{O})$ подмодуль $\mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O})$, состоящий из форм, ограничение которых на контактное распределение в $\mathcal{O}$ тривиально:

$$\omega \in \mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O}) \Leftrightarrow \omega(Y_1, \ldots, Y_i) = 0 \qquad \forall\, Y_1, \ldots, Y_i \in \mathcal{C}D(\mathcal{O}),$$

и положим

$$\Lambda_0^i(\mathcal{O}) = \Lambda^i(\mathcal{O}) / \mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O}).$$

Элементы модуля $\Lambda_0^i(\mathcal{O})$ называются *горизонтальными формами* на $\mathcal{O}$. Очевидно, $\Lambda_0^i(\mathcal{O}) = 0$ при $i > n$.

Легко видеть, что $d(\mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O})) \subset \mathcal{C}\Lambda^{i+}(\mathcal{O})$, и поэтому определен *горизонтальный дифференциал*

$$\widehat{d}\colon\ \Lambda_0^i(\mathcal{O}) \to \Lambda_0^{i+1}(\mathcal{O}).$$

Конечно, $\widehat{d}^2 = 0$, и мы получаем горизонтальный комплекс де Рама диффеотопа $\mathcal{O}$, когомологии которого называются *горизонтальными когомологиями де Рама* и обозначаются $\overline{H}^i(\mathcal{O})$, $i = 0, \ldots, n$.

В итоге мы приходим к следующему основополагающему утверждению.

Вторичные (или «квантованные») функции на $\mathcal{O}$ суть элементы группы когомологий $\overline{H}^n(\mathcal{O})$.

Иными словами, мы понимаем группу когомологий $\overline{H}^n(\mathcal{O})$, $\operatorname{Dim}\mathcal{O} = n$, как аналог алгебры гладких функций во вторичном исчислении.

Чтобы обосновать сделанный выбор, напомним координатное представление «горизонтальных конструкций» для случая $\mathcal{O} = J^\infty(E, n)$ (см. гл. 4 и 5). Прежде всего заметим, что класс эквивалентности дифференциальной формы $\omega \in \Lambda^i(J^\infty(E, n))$ по модулю $\mathcal{C}\Lambda^i(J^\infty(E, n))$ содержит единственный элемент вида

$$\rho = \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots k_i \leqslant n} a_{k_1, \ldots k_i}(x, u, \ldots, u_\sigma^j, \ldots)\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_i},$$

где $a_{k_1, \ldots k_i} \in C^\infty(J^\infty(E, n))$. Характерная черта этих форм состоит в том, что дифференциалы вида du^j, du_σ^j не входят в их координатное выражение. Следовательно, модуль $\Lambda_0^i(J^\infty(E, n))$ локально можно отождествить с модулем форм такого вида.

Как уже отмечалось, горизонтальный дифференциал де Рама выглядит следующим образом:

$$\widehat{d}\rho = \sum_{s, k_1, \ldots, k_i} D_s(a_{k_1, \ldots k_i})\, dx_s \wedge dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_i},$$

где D_s — s-я полная производная. В частности, всякую горизонтальную $(n-1)$-форму можно однозначно представить в виде

$$\rho = \sum_i (-1)^{i-1} a_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,\quad a_i \in C^\infty(J^\infty(E, n)),$$

причем

$$\widehat{d}\rho = \operatorname{div}(A)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где $A=(a_1,\ldots,a_n)$ и $\operatorname{div}(A)=\sum\limits_i D_i(a_i)$. Кроме того, горизонтальные n-формы имеют вид

$$L(x,u,\ldots,u^j_\sigma,\ldots)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n,\qquad L\in C^\infty(J^\infty(E,n)),$$

и в них легко узнать лагранжевы плотности. Таким образом, мы видим, что горизонтальные когомологии $\overline{H}^n(J^\infty(E,n))$ можно локально отождествить с линейным пространством классов плотностей лагранжианов на $J^\infty(E,n)$ относительно следующего отношения эквивалентности:

$$L_1\sim L_2\Leftrightarrow L_1-L_2=\operatorname{div}(A)\ \text{для некоторого}\ A.$$

С другой стороны, действия $\int\limits_\Omega L_i dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$, $i=1,2$, эквивалентны, т. е. приводят к одинаковым уравнениям Эйлера — Лагранжа, в том и только том случае, если $L_1\sim L_2$ и эта эквивалентность не зависит от выбора области Ω. По этим причинам иероглифы $\int L dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$ естественно отождествить с классами n-мерных горизонтальных когомологий.

Отметим в заключение, что аналогичные рассуждения справедливы и для произвольных диффеотопов.

§ 6. Вторичные («квантованные») скалярные дифференциальные операторы высших порядков

Прежде всего нам нужно оправдать принятое выше определение вторичных функций, показав, что вторичные дифференциальные операторы первого порядка на самом деле на них действуют. Иными словами, мы должны найти естественное действие алгебры $\operatorname{sym}\mathcal{O}$ на пространстве $\overline{H}^n(\mathcal{O})$. Это можно сделать непосредственно.

Во-первых, заметим, что если $X\in D_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$, $\omega\in\mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O})$ и L_X обозначает производную Ли вдоль поля X, то $L_X(\omega)\in\mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O})$. Это следует из определений и того факта, что

$$\mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O})=\mathcal{C}\Lambda^1(\mathcal{O})\wedge\Lambda^{i-1}(\mathcal{O}),\qquad i>1.$$

Поэтому мы можем определить производную Ли от горизонтальных форм, переходя к фактормодулям:

$$L_X\colon\ \Lambda^i_0(\mathcal{O})\to\Lambda^i_0(\mathcal{O}).$$

Положим далее

$$\chi \in \operatorname{sym} \mathcal{O}, \quad \chi = X \mod \mathcal{C}D(\mathcal{O}) \qquad \text{для } X \in D_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}),$$
$$\theta \in \overline{H}^n(\mathcal{O}), \quad \theta = \omega \mod \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O}) \quad \text{для } \omega \in \Lambda_0^n(\mathcal{O}).$$

Определим теперь действие χ на θ, полагая

$$\chi(\theta) = L_X(\omega) \mod \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O}) \in \overline{H}^n(\mathcal{O}).$$

Корректность этого определения непосредственно вытекает из следующих двух фактов:

1) $L_Y(\omega) \in \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})$, если $\omega \in \Lambda_0^n(\mathcal{O})$ и $Y \in \mathcal{C}D(\mathcal{O})$;

2) $L_X \circ \widehat{d} = \widehat{d} \circ L_X$.

Оба они — прямые следствия определений.

Теперь мы видим, что данное выше определение вторичной функции хорошо согласуется с другими «вторичными» конструкциями, и потому может служить примером при продвижении к более сложным «вторичным» понятиям. Отметим, например, что нам удалось определить действие одного фактормножества (а именно, $\operatorname{sym} \mathcal{O} = D_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})/\mathcal{C}D(\mathcal{O})$) на другое (на $\overline{H}^n(\mathcal{O}) = \Lambda_0^n(\mathcal{O})/\widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})$) благодаря следующим фактам:

1) модуль $D_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$ состоит из дифференциальных операторов первого порядка, действующих на $C^\infty(\mathcal{O})$-модуле $\Lambda_0^n(\mathcal{O})$, оставляя инвариантным подмодуль $\widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})$;

2) образы элементов из $\Lambda_0^n(\mathcal{O})$ при действии операторов первого порядка из $\mathcal{C}D(\mathcal{O})$ содержатся в $\widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})$.

Мы придем к искомому определению вторичных дифференциальных операторов высших порядков, просто заменяя выше слово «первый» на «k-й». Точнее, пусть $\operatorname{Diff}_k(\Lambda_0^n(\mathcal{O}))$ обозначает $C^\infty(\mathcal{O})$-модуль «обычных» дифференциальных операторов порядка $\leqslant k$, действующих в $\Lambda_0^n(\mathcal{O})$. Положим

$$\underline{\operatorname{Diff}}_k(\mathcal{O}) = \{\Delta \in \operatorname{Diff}_k(\Lambda_0^n(\mathcal{O})) \mid \Delta(\widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})) \subset \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})\},$$
$$\overline{\operatorname{Diff}}_k(\mathcal{O}) = \{\Delta \in \operatorname{Diff}_k(\Lambda_0^n(\mathcal{O})) \mid \Delta(\Lambda_0^n(\mathcal{O})) \subset \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})\}.$$

Тогда пространство *скалярных вторичных* (*«квантованных»*) *операторов* порядка $\leqslant k$ определяется как фактормодуль

$$\mathfrak{Diff}_k(\mathcal{O}) = \underline{\operatorname{Diff}}_k(\mathcal{O}) / \overline{\operatorname{Diff}}_k(\mathcal{O}). \tag{9}$$

Конечно, всякий *вторичный оператор* $\Delta \in \mathfrak{Diff}_k(\mathcal{O})$ можно на самом деле понимать как оператор

$$\Delta\colon \overline{H}^n(\mathcal{O}) \to \overline{H}^n(\mathcal{O}),$$

действующий на вторичных функциях. Действительно, если

$$\Delta = \delta \mod \overline{\mathrm{Diff}}_k(\mathcal{O}) \quad \text{для } \delta \in \underline{\mathrm{Diff}}_k(\mathcal{O}),$$
$$\Theta = \omega \mod \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O}) \quad \text{для } \omega \in \Lambda_0^n(\mathcal{O}),$$

то класс горизонтальных когомологий

$$\Delta(\Theta) = \delta(\omega) \mod \widehat{d}\Lambda_0^{n-1}(\mathcal{O})$$

определен корректно, т. е. не зависит от выбора представителей δ и ω.

Для $\mathcal{O} = J^\infty(E, n)$ определенные таким образом вторичные дифференциальные операторы допускают следующее координатное представление. Операторы вида

$$\sum_{s=1}^{k} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_s \\ \sigma_1,\dots,\sigma_s}} a_{\sigma_1,\dots,\sigma_s}^{i_1,\dots,i_s} \frac{\partial^s}{\partial u_{\sigma_1}^{i_1} \dots \partial u_{\sigma_s}^{i_s}} + \mathrm{const},$$

где $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ — мультииндексы, называются *вертикальными* (относительно выбранной системы координат). Можно доказать, что каждый класс

$$\Delta = \delta \mod \overline{\mathrm{Diff}}_k(J^\infty(E, n)) \in \mathfrak{Diff}(J^\infty(E, n)), \quad \delta \in \underline{\mathrm{Diff}}_k(J^\infty(E, n)),$$

содержит единственный вертикальный оператор. Поэтому фактормодуль (9), состоящий из вторичных дифференциальных операторов можно локально отождествить с множеством всех *вертикальных вторичных операторов*. Эти последние, если они имеют порядок $\leqslant k$, можно представить в виде

$$\mathfrak{Э}_\nabla = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\sigma} \mathcal{L}(\nabla^i) \circ \frac{\partial}{\partial p_\sigma^i},$$

где $\nabla = (\nabla^1, \dots, \nabla^m)$, $\nabla^i \in \mathrm{Diff}_{k-1}(C^\infty(J^\infty(E, n)))$, являются произвольными $C^\infty(J^\infty(E, n))$-вертикальные операторы и

$$\mathcal{L}_\sigma(\nabla^i) = [D_{i_1}, \dots, [D_{i_s}, \nabla^i] \dots]$$

для $\sigma = (i_1, \dots, i_s)$. Производящий оператор ∇ является аналогом высшего порядка производящих функций эволюционных дифференцирований, но, в отличие от них, не определен однозначно при $k > 1$.

Вторичные операторы порядка > 1 не сводятся к композициям операторов первого порядка, и этот факт весьма поучителен в связи с рассуждениями начала § 5.

Заметим, что явное описание вторичных дифференциальных операторов на произвольных диффеотопах — значительно более сложная задача.

Дальнейшие детали, результаты и альтернативные точки зрения на вторичные дифференциальные операторы можно найти в работе [100].

Наконец, возвращаясь к вопросу (4), мы можем представить простейшее линейное вторичное (квантованное) дифференциальное уравнение k-го порядка в виде

$$\Delta(H)=0, \qquad \Delta\in\mathfrak{Diff}_l(\mathcal{O}), \qquad H\in\overline{H}^n(\mathcal{O}).$$

Следует однако отметить, что эти уравнения образуют всего лишь очень специальный класс вторичных дифференциальных уравнений. Например, дифференциалы $\mathcal{C}$-спектральной последовательности $d_1^{p,q}=d_1^{p,q}(\mathcal{O})$ (см. гл. 5 и § 7), являются другими примерами вторичных операторов и, следовательно, вторичных уравнений. Одно из них имеет вид

$$\mathrm{E}\left(\int L\,dx\right)=0,$$

где $\int L\,dx\in\overline{H}^n(\mathcal{O})$, а E — оператор Эйлера, сопоставляющий действию $\int L\,dx$ соответствующее уравнение Эйлера — Лагранжа. Это следует из уже известного нам факта, что $\mathrm{E}=d_1^{0,n}$. Заметим также, что операторы $d_1^{p,q}$ имеют конечный порядок, скажем, $\pi(k)$ при ограничении на элементы фильтрации k, но $\pi(k)\to\infty$ при $k\to\infty$. Например, $\pi(k)=2k$ для оператора E.

§ 7. Вторичные («квантованные») дифференциальные формы

В этом параграфе мы рассмотрим еще один аспект вторичного исчисления — вторичные («квантованные») дифференциальные формы. Что это такое? Ответить на этот вопрос сложнее, чем на уже рассмотренный вопрос о вторичных дифференциальных операторах. По этой и некоторым другим причинам мы опустим предварительные мотивационные соображения, приводящие к точным определениям. Однако приведем некоторые апостериорные оправдания.

Пусть $\mathcal{O}$ — диффеотоп. Сохраняя обозначения § 6, рассмотрим алгебру

$$\Lambda^*(\mathcal{O}) = \sum_{i \geqslant 0} \Lambda^i(\mathcal{O})$$

всех дифференциальных форм на $\mathcal{O}$ и ее идеал

$$\mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{O}) = \sum_{i \geqslant 0} \mathcal{C}\Lambda^i(\mathcal{O}).$$

Обозначим k-ю степень этого идеала через $\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O})$. Тогда все идеалы $\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O})$ замкнуты относительно внешнего дифференциала d, и мы получаем фильтрацию

$$\Lambda^*(\mathcal{O}) \supset \mathcal{C}\Lambda^*(\mathcal{O}) \supset \mathcal{C}^2\Lambda^*(\mathcal{O}) \supset \ldots \supset \mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O}) \supset \ldots$$

комплекса де Рама на диффеотопе $\mathcal{O}$ его подкомплексами $\{\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O}), d\}$, причем идеалы $\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O})$ естественно градуированы:

$$\mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O}) = \sum_{s \geqslant 0} \mathcal{C}^k\Lambda^{k+s}(\mathcal{O}),$$

где

$$\mathcal{C}^k\Lambda^{k+s}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}^k\Lambda^*(\mathcal{O}) \cap \Lambda^{k+s}(\mathcal{O}).$$

Таким образом, как и в гл. 5 для бесконечно продолженных уравнений, в случае произвольного диффеотопа $\mathcal{O}$ мы можем построить спектральную последовательность

$$E_r(\mathcal{O}) = \sum_{p,q} E_r^{p,q}(\mathcal{O}), \qquad d_r = \sum_{p,q} d_r^{p,q},$$

называемую *$\mathcal{C}$-спектральной последовательностью диффеотопа $\mathcal{O}$*. Если $\operatorname{Dim}\mathcal{O} = n$, то нетривиальные члены $E_r^{p,q}(\mathcal{O})$ расположены в полосе $p \geqslant 0$, $0 \leqslant q \leqslant n$, т. е. так же, как и в случае бесконечно продолженных уравнений.

Определение 2. Элементы группы $E_1(\mathcal{O})$ называются *вторичными* (*«квантованными»*) *дифференциальными формами* диффеотопа $\mathcal{O}$.

Некоторые аргументы в пользу этой интерпретации таковы. Пусть M — конечномерное многообразие, понимаемое как 0-мерный диффеотоп (см. § 4). Тогда член E_1 соответствующей $\mathcal{C}$-спектральной последовательности вырождается в нулевую строку вида

$\Lambda^0(M)$	$\Lambda^1(M)$	$\ldots$	$\Lambda^p(M)$	$\ldots$	$\Lambda^n(M)$

причем $d_1^{p,0} = d$. Иными словами, мы видим, что комплекс де Рама многообразия M совпадает с первым членом его $\mathcal{C}$-спектральной последовательности этого многообразия.

Можно заметить, что стандартные конструкции и формулы, связывающие «обычные» векторные поля и дифференциальные формы, остаются справедливыми для их вторичных («квантованных») аналогов. Например, как оператор подстановки вторичных векторных полей («симметрий») во вторичные дифференциальные формы, так и соответствующие производные Ли, корректно определены. Более того, они связаны между собой с помощью вторичного аналога инфинитезимальной формулы Стокса

$$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X,$$

в которой внешний дифференциал d следует заменить его вторичным аналогом, т. е. $d_1(\mathcal{O})$.

Наконец, отметим, что вторичные дифференциальные формы являются биградуированными объектами в отличие от «обычных», несущих только одну градуировку; причина кроется в двумерности члена E_1. Это служит иллюстрацией того, что вторичные объекты богаче и сложнее своих «первичных» аналогов. Ту же мысль можно выразить по-другому, сказав, что «обычные» (или «первичные») математические объекты являются вырожденной формой вторичных. Это утверждение можно рассматривать как математический парафраз принципа соответствия Бора:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{вторичное дифференциальное}\\ \text{исчисление}\end{array}} \xrightarrow{\mathrm{Dim}\to 0} \boxed{\begin{array}{c}\text{дифференциальное}\\ \text{исчисление}\end{array}}$$

Теория нелокальной паутины (§ 4) позволяет придать точный смысл выражению $\mathrm{Dim} \to 0$, поскольку Dim (но не $\dim$!) является $\mathbb{R}$-значной функцией в этой ситуации.

В гл. 5 мы видели принципы работы $\mathcal{C}$-спектральной последовательности. Сделаем еще несколько замечаний относительно члена E_2. В случае бесконечно продолженных уравнений член $E_2(\mathcal{E}^\infty)$ состоит из характеристических классов бордизмов, «сотканных» из решений уравнения $\mathcal{E}$. Стандартную теорию «дифференциальных характеристических классов» можно получить, подходящим образом выбрав уравнение $\mathcal{E}$ (см. [152, 10]). Однако этот подход приводит к более тонким характеристическим классам — например, к *специальным характеристическим классам*. Проиллюстрируем это на примере решений (вакуумного) уравнения Эйнштейна (или многообразий Эйнштейна). Пусть $\mathcal{E}$ — система уравнений Эйнштейна на многообразии M. Тогда можно показать, что

$$\mathcal{E}^\infty / \mathrm{Diffeo}(M) = \mathcal{E}'^\infty,$$

где $\mathrm{Diffeo}(M)$ — группа диффеоморфизмов многообразия M, естественно действующая на $\mathcal{E}^\infty$, а $\mathcal{E}'$ — некоторая система дифференциальных уравнений. На самом деле $\mathcal{E}'$ не зависит от многообразия M и, следовательно, ее решения — в точности классы диффеоморфизмов многообразий Эйнштейна. Соответствующие специальные характеристические классы являются элементами группы $E_2(\mathcal{E}'^\infty)$.

§ 8. Квантование или распространение особенностей? Гейзенберг или Шрёдингер?

На предыдущих страницах мы достигли берегов *terra incognita*, т. е. диффеотопов и вторичного исчисления на них, предсказанных с помощью лингвистической версии принципа соответствия Бора (§ 3). Будучи точным аналогом алгебраической геометрии для дифференциальных уравнений в частных производных, эта область математики заслуживает систематического исследования — может быть, гораздо большего, чем сама алгебраическая геометрия — вне зависимости от возможных физических приложений, стимулировавших нашу экспедицию. Немного позже мы обсудим некоторые другие темы, связанные со вторичным исчислением. Но сейчас пришло время вернуться к тому, насколько мы продвинулись в решении проблемы квантования полей, получив в качестве инструмента вторичное дифференциальное исчисление.

С самого начала следует подчеркнуть, что переход к «лингвинизированному» варианту принципа соответствия Бора стоил нам потери его исходного физического содержания. С другой стороны, накопленный опыт работы со вторичным исчислением убеждает нас, что любая *естественная* конструкция классического анализа имеет вторичный аналог, который можно найти с помощью более или менее регулярной процедуры. Поэтому можно ожидать, что фундаментальные уравнения КТП могут быть выведены путем «овторичивания» модельной ситуации, в которой и источник, и цель принципа соответствия Бора лежат в области классического дифференциального исчисления.

Очевидно, квантовая механика частиц является в точности такой моделью, поскольку здесь принцип соответствия берет начало в дифференциальном уравнении (уравнении Шрёдингера) и заканчивается также дифференциальными уравнениями (уравнениями Гамильтона). Однако, чтобы проделать нашу процедуру, принцип Бора следует переформулировать полностью в терминах дифференциального исчисления, и это ключевой момент.

Искомая переформулировка неочевидна и, в частности, она не должна опираться на переход $\hbar \to 0$, разложения в формальные ряды по $\hbar$, деформации, гильбертовы пространства и т. п. В качестве первого приближения мы берем формулу (2). Тогда наш подход к КТП можно выразить в виде

$$\text{КВАНТОВАНИЕ ПОЛЯ} = \mathrm{CHAR}^{-1}_{S(\mathrm{Q})},$$

где S обозначает переход к вторичным объектам. Следовательно, вопрос, на который следует ответить в первую очередь, таков: что такое тип (или типы) особенностей решений, о котором говорилось в § 3?

Последняя проблема относится к теории особенностей решений уравнений в частных производных, которая еще не достаточно разработана, чтобы дать немедленный ответ. Поэтому мы отложим попытки прямого подхода к ней и ограничимся кратким обзором теории некоторых особенностей специального вида, которые называются *геометрическими*. Помимо всего прочего читатель сможет извлечь для себя из этой модели более точные представления об общей теории, а равно и более детальные мотивировки формулы (2). Но вначале мы позволим себе некоторые замечания исторического характера.

Как хорошо известно, в основании квантовой механики лежали два подхода — Гейзенберга и Шрёдингера. Говоря современным языком, первый базировался на формальной некоммутативной деформации коммутативной алгебры классических наблюдаемых, а второй исходил из аналогии с оптикой. Оба они были объявлены эквивалентными (были даже даны доказательства этого), и именно это мы хотели бы поставить здесь под сомнение. По-видимому, теорему об эквивалентности более точно следует формулировать так:

Точка зрения Шрёдингера становится эквивалентной подходу Гейзенберга после подходящей редукции.

Ниже мы приводим некоторые краткие соображения общего характера в пользу этого утверждения, а читателя просим в дальнейшем не путать слова «подход» и «картина».

Во-первых, подход Гейзенберга «запрограммирован» на языке операторных алгебр, в то время как подход Шрёдингера — на языке дифференциального исчисления. Первый принципиально не поддается локализации, и в этом его главный недостаток, если говорить о приложениях к фундаментальным (не техническим!) проблемам физики. В частности, пользуясь только этим языком, нельзя выразить переход от одной области пространства — времени к другой (см., например, [101]). Но очевидно, что фундаментальные физические теории — как на классическом, так и на квантовом уровне — по самой своей природе должны быть локализуемы. С другой стороны, дифференциальное исчисление является единственным локализуемым языком, поскольку операторы, допускающие локализацию, — это дифференциальные операторы.

Во-вторых, в подходе Гейзенберга классическая механика возникает как предельной случай квантовой и, наоборот, последняя рассматривается как некоммутативная деформация первой. Это, в частности, означает, что обе они суть вещи одной природы, отличающиеся друг от друга только параметром. В подходе Шрёдингера дело обстоит не так. На самом деле, как это следует из общих математических основ перехода от волновой оптики к геометрической, последняя является частным аспектом первой. Итак, используя аналогию между квантовой механикой и оптикой, обнаруженную Шрёдингером, мы заключаем, что

> *классическая механика является частным аспектом квантовой.*

В связи с этим уместно также отметить, что постоянная Планка действительно есть величина постоянная и, следовательно, выражение «$h \to 0$» может служить лишь эвристическим трюком, но не краеугольным камнем теории.

Таковы вкратце соображения в пользу точки зрения Шрёдингера. С другой стороны, ясно, что у нее не было шансов реализоваться математически в период построения квантовой электродинамики и других квантовых теорий поля. Поэтому подход Гейзенберга, благодаря его формальному и абстрактному характеру, явился единственным возможным путем развития этих теорий. Это было его бесценным историческим преимуществом, потенциал которого сейчас начинает исчерпываться. Наконец, добавим, что развиваемые здесь идеи можно рассматривать как попытку дополнить подход Шрёдингера таким математическим аппаратом, который позволил бы распространить его на КТП.

§ 9. Геометрические особенности решений уравнений в частных производных

В этом параграфе мы обсуждаем геометрические особенности решений (нелинейных) уравнений в частных производных и некоторые общие результаты о них, связанные с нашим обсуждением проблемы квантования. В следующем параграфе собраны примеры, иллюстрирующие общую теорию и, в частности, механизм связи между волновой и геометрической оптикой.

Особенности решений, которые мы называем геометрическими, естественно возникают в контексте теории многозначных решений (нелинейных) уравнений в частных производных. Существует несколько способов реализовать идею многозначности, и мы выбираем один из них, основанный на понятии R-многообразия.

Напомним (см. гл. 3 и 4), что подмногообразие $W \subset J^k(E, n)$, $0 \leqslant k \leqslant \infty$, называется *интегральным*, если $T_\theta W \subset \mathcal{C}_\theta$ для любой точки $\theta \in J^k(E, n)$ (через $\mathcal{C}_\theta$ обозначена плоскость распределения Картана в точке θ). Интегральное многообразие W называется *локально максимальным*, если никакая его открытая область не принадлежит другому интегральному многообразию большей размерности.

Определение 3. Локально максимальное интегральное многообразие в $J^k(E, n)$ размерности n называется *R-многообразием.*

Частным случаем R-многообразий являются графики джетов сечений $L_{(k)} = M_f^k$ некоторого расслоения $\pi\colon\ E \to M$. Они характеризуются двумя следующими свойствами:

1) многообразие $L_{(k)}$ локально максимально,
2) ограничение проекции

$$\pi_{k,k-1}\colon\ J^k(E, n) \to J^{k-1}(E, n)$$

на $L_{(k)}$ является иммерсией.

Таким образом, опуская требование 2), мы получаем многозначный аналог многообразий $L_{(k)}$, т. е. R-многообразия.

Замечание 2. Напомним, что в $J^k(E, n)$ существуют различные типы интегральных многообразий, отличающиеся размерностью. Один из них — это слои проекции $\pi_{k,k-1}$; они имеют максимально возможную размерность.

Неформально говоря, R-многообразия можно понимать как негладкие n-мерные подмногообразия в $E = J^0(E, n)$, особенности которых разрешаются при поднятии в подходящее пространство $J^k(E, n)$.

Определим теперь *многозначное решение* уравнения в частных производных $\mathcal{E} \subset J^k(E, n)$ как R-многообразие (скажем, W), лежащее в одном из продолжений $\mathcal{E}^{(s)} \subset J^{k+s}(E, n)$, $0 \leqslant s < \infty$. Если $W \subset J^k(E, n)$ — R-многообразие, то его *особенностями*, или *точками ветвления*, называются особые точки проекции $\pi_{k,k-1}$: $J^k(E, n) \to J^{k-1}(E, n)$, ограниченной на W (см. рис. 1). Множество особых точек многообразия W будет обозначаться через $\operatorname{sing} W$. Подчеркнем, что W является гладким (неособым) многообразием в $J^k(E, n)$, так что прилагательное «особый» относится только к проекции $\pi_{k,k-1}$.

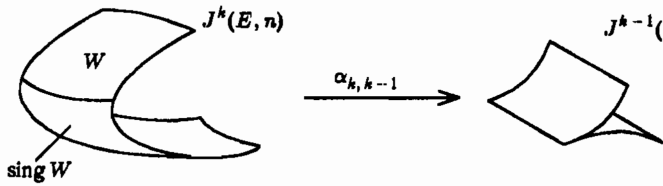

Рис. 7.1

За этими простыми определениями стоит очень богатая и интересная структурная теория, которая не сводится к стандартной теории особенностей (или катастроф). Напротив, последняя является специальным вырожденным случаем первой.

Мы начнем с классификации геометрических особенностей, что, безусловно, является первой структурной проблемой, которую надлежит решить. В соответствии с «общими принципами», мы должны классифицировать s-джеты R-многообразий в $J^k(E, \pi)$ для заданного натурального s относительно группы контактных преобразований этого пространства джетов. Для наших целей достаточно рассмотреть случай $s = 1$.

Пусть $W \subset J^k(E, n)$ — R-многообразие и $\theta \in \operatorname{sing} W$. Подпространства касательного пространства $T_\theta J^k(E, n)$, имеющие вид $T_\theta W$, называются *сингулярными R-плоскостями* (в точке θ). Таким образом, наша задача состоит в классификации сингулярных R-плоскостей.

Пусть $P = T_\theta W$ — сингулярная R-плоскость в точке θ. Подпространство $P_0 \subset P$, состоящее из векторов, проектирующихся в нуль при отображении $(\pi_{k,k-1})_*$, называется *меткой* плоскости P. Оказывается, что сингулярные R-плоскости эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны их метки. Определим *тип* R-плоскости (сингулярной или неособой) как размерность ее метки:

$$\operatorname{type} P = \dim P_0, \qquad 0 \leqslant \operatorname{type} P \leqslant n.$$

Очевидно, $\operatorname{type} P = 0$ в том и только том случае, когда P — неособая плоскость.

Пример 1. Ветвящиеся римановы поверхности совпадают с многозначными решениями классического уравнения Коши — Римана. Пусть W — одно из таких решений. Тогда множество $\operatorname{sing} W$ состоит из набора изолированных точек, скажем, θ_α. В этом случае $\operatorname{type} P_\alpha = 2$ для любой плоскости $P_\alpha = T_{\theta_\alpha} W$.

Окончательный результат классификации меток таков [154].

Теорема 1. *Классы эквивалентности меток геометрических особенностей находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами эквивалентности унитарных коммутативных $\mathbb{R}$-алгебр, причем размерность метки совпадает с размерностью соответствующей алгебры.*

Напомним, что всякая унитарная коммутативная конечномерная алгебра раскладывается в прямую сумму алгебр $\mathbb{F}_{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\mathbb{F}_{(k)}$ обозначает унитарную $\mathbb{F}$-алгебру, порожденную одним элементом ξ, для которого $\xi^k = 0$, а $\xi^{k-1} \neq 0$ (здесь $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Такое разложение не является единственным, однако кратность, с которой данная алгебра $\mathbb{F}_{(k)}$ в него входит, не зависит от способа разложения. Следовательно, эти кратности полностью определяют класс изоморфных алгебр рассматриваемого вида.

Ниже мы говорим об A-типе геометрической особенности, подразумевая связанную с ней в силу сформулированной выше теоремы коммутативную алгебру A.

Пример 2. Поскольку единственной одномерной $\mathbb{R}$-алгеброй является само поле $\mathbb{R}$, существует только один тип геометрических особенностей с одномерными метками. Этот тип реализуется R-многообразиями, проектирующимися на многообразие независимых переменных в виде складки. По этой причине такой тип обозначается FOLD. В теории FOLD-особенностей естественную роль играет стандартная теория характеристических ковекторов.

Пример 3. Существуют три класса изоморфных двумерных унитарных коммутативных алгебр: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_{(2)} = \{1, \xi \mid \xi^2 = 0\}$ и $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Для уравнений с двумя независимыми переменными геометрические особенности $\mathbb{C}$-типа имеют вид точек ветвления римановых поверхностей; в случае n независимых переменных это $(n-2)$-мерные семейства таких точек. В четырехмерном пространстве — времени особенности $\mathbb{C}$-типа можно рассматривать как вихри, окружающие движущуюся кривую. Это вызывает подозрение, что $\mathbb{C}$-особенности могут играть важную роль в будущей теории турбулентности.

При исследовании конкретных уравнений сразу возникает следующий вопрос.

Какие типы меток особенностей решений допускает данная система уравнений в частных производных?

Это чисто алгебраическая задача. Не вдаваясь в общие рассуждения, мы проиллюстрируем ее следующими примерами.

Пример 4. Система уравнений в частных производных допускает особенности FOLD-типа только в случае, когда у нее есть нетривиальные характеристические ковекторы. Например, у решений эллиптических уравнений не может быть FOLD-особенностей.

Пример 5. Пусть $\mathcal{E}$ — скалярное дифференциальное уравнение с двумя независимыми переменными. Тогда оно допускает только один из перечисленных выше типов двумерных особенностей: это $\mathbb{C}$-тип для эллиптических уравнений, $\mathbb{R}_{(2)}$-тип для параболических и $(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})$-тип для гиперболических.

Более тонкая задача — описание подмногообразий вида $\operatorname{sing}_\Sigma W$ для многозначных решений W данного дифференциального уравнения с заданным типом особенностей Σ. Здесь $\operatorname{sing}_\Sigma W \subset W$ обозначает подмногообразие Σ-особых точек в W. Иными словами, мы интересуемся определением формы Σ-особенностей, допускаемых данным уравнением.

Решение этой проблемы кратко можно описать следующим образом. Пусть зафиксирована метка особенности типа Σ. Тогда с данной системой $\mathcal{E}$ уравнений в частных производных можно связать другую систему $\mathcal{E}_\Sigma$, для которой многообразия вида $\operatorname{sing}_\Sigma W$ являются решениями, когда W — решение системы $\mathcal{E}$, и, наоборот, всякое решение $\mathcal{E}_\Sigma$ имеет вид $\operatorname{sing}_\Sigma W$ для некоторого (возможно, формального) многозначного решения системы $\mathcal{E}$.

Если n — число независимых переменных уравнения $\mathcal{E}$, то в $\mathcal{E}_\Sigma$ входит $n-s$ независимых переменных, где s — размерность метки Σ. Конструкция уравнения $\mathcal{E}_\Sigma$ не столь проста, чтобы воспроизводить ее здесь. В следующем параграфе мы приведем некоторые примеры, которые помогут читателю понять ее суть. Говоря неформально, если $\mathcal{E}$ описывает физическую субстанцию, скажем, поле или непрерывную среду, то $\mathcal{E}_\Sigma$ описывает определенного вида особенности этой субстанции, которые можно охарактеризовать метками типа Σ. В случае, когда $\mathcal{E}$ относится к независимым пространственновременны́м переменным, $\mathcal{E}_\Sigma$ описывает распространение Σ-особенностей в соответствующей субстанции.

Обозначим через CHAR_Σ функтор, сопоставляющий уравнению $\mathcal{E}$ соответствующее уравнение $\mathcal{E}_\Sigma$. Проблема

в какой степени поведение особенностей данного типа определяет исходную физическую систему?

очевидно, имеет фундаментальное значение, а поиск области обратимости функтора CHAR_Σ — возможно, наиболее важный ее аспект. Следующий результат является поучительным примером такого рода.

Теорема о FOLD-восстановлении *Любая гиперболическая система дифференциальных уравнений в частных производных полностью определяется ассоциированной с ней системой $\mathcal{E}_{\mathrm{FOLD}}$.*

Другими словами, гиперболическую систему $\mathcal{E}$ можно выписать явно, зная только систему $\mathcal{E}_{\mathrm{FOLD}}$.

Эту теорему можно сформулировать иначе, сказав, что функтор CHAR_Σ обратим в классе гиперболических уравнений. С другой стороны, он не является обратимым в классе эллиптических уравнений, поскольку множество $\mathcal{E}_{\mathrm{FOLD}}$ в этом случае пусто.

Общая проблема восстановления уравнения по особенностям может иметь разные оттенки в зависимости от выбранного типа особенностей (не обязательно геометрических) решений. Например, ее частным случаем можно считать классическую задачу поля и источника. Другие интересные примеры можно найти в электродинамике. Замечая, что элементарные законы электричества и магнетизма, такие как законы Кулона и Фарадея, описывают поведение некоторых особенностей электромагнитного поля, мы видим, что решением соответствующей проблемы восстановления являются уравнения Максвелла.

Важность теории многозначных решений проявляется также в ее связях с теорией Соболева — Шварца обобщенных решений линейных уравнений в частных производных. Эти связи основываются на наблюдении, что обобщенное решение данного линейного уравнения можно получить простым суммированием ветвей соответствующего многозначного решения. На самом деле процедура построения обобщенного решения по многозначному является более тонкой, чем простое суммирование, и основывается на выборе теории когомологий типа де Рама и правильного класса пробных функций. Тогда возникают характеристические классы типа классов Маслова, являющиеся препятствиями к реализации этой процедуры, и их природа зависит от выбранной теории когомологий (см [45, 149, 44]).

Следует подчеркнуть, что обобщенные решения, сопоставляемые многозначным решением без FOLD-особенностей, являются на самом деле гладкими. Это замечательно согласуется с хорошо известным фактом, что обобщенные решения эллиптических уравнений исчерпываются гладкими, т. е. однозначными, в то время как те же уравнения допускают нетривиальные многозначные решения (например, ветвящиеся римановы поверхности в случае уравнений Коши — Римана) без особенностей FOLD-типа. Этот и подобные факты показывают, что многозначные решения являются адекватной заменой обобщенных для нелинейных уравнений, для которых последние определить нельзя. Более того, многозначность является более тонким понятием даже в линейном случае.

Дальнейшие детали и результаты, связанные с обсуждаемой темой, читатель может найти в книге [24] и в лекции [149], а также в [154]. Много интересных аспектов теории особенностей решений рассмотрены в обзоре В. В. Лычагина [44].

Многозначные решения были введены в работе [13], за которой последовала техническая, но поучительная работа А. П. Крищенко [38]. Затем последовала важная серия работ В. В. Лычагина. К сожалению, эти имена почти полностью исчерпывают тех, кто работал в этой области. Полную библиографию можно найти в [24, 44, 154]*).

§ 10. Волновая и геометрическая оптика и другие примеры

Здесь общие рассуждения предыдущих параграфов будут проиллюстрированы некоторыми простыми примерами, взятыми из [119]. Мы не вдаемся в технические детали и в интерпретацию рассматриваемых уравнений, отсылая читателя к [119].

1. Σ-характеристические уравнения. Пусть $\pi\colon E \to M$ — расслоение, $\mathcal{E} \subset J^k(\pi)$ — система дифференциальных уравнений и Σ — метка типа особенностей ее решений. *Σ-характеристическая система*, соответствующая метке Σ, — это система дифференциальных уравнений, решения которой имеют вид $\pi_k(\operatorname{sing}_\Sigma W)$, где $\pi_k\colon J^k(\pi) \to M$ — естественная проекция, а W — многозначное решение системы $\mathcal{E}$.

*) См. также недавнюю статью А. Б. Гивенталя [98] (добавлено при переводе).

Обозначим Σ-характеристическое уравнение системы $\mathcal{E}$ через $\mathcal{E}^0_\Sigma$ и заметим, что вся система $\mathcal{E}_\Sigma$ получается из $\mathcal{E}^0_\Sigma$ добавлением некоторых уравнений, которые мы называем *дополнительными.* Если $\mathcal{E}$ содержит независимые переменные пространства — времени, то $\mathcal{E}^0_\Sigma$ управляет движением Σ-сингулярных областей рассматриваемой физической системы, а дополнительные уравнения описывают внутренние структуры Σ-особенностей.

Классические характеристические уравнения, теорию которых начал изучать Гюгонио, а систематически продолжил Адамар (см. [102]), естественным образом возникают при исследовании однозначности решения задачи с начальными значениями. Как мы уже отметили, задача единственности входит в теорию FOLD-особенностей. Поэтому не удивительно, что FOLD-характеристические уравнения совпадают с классическими. Мы рекомендуем работы [117, 116, 131], в которых были сделаны первые попытки применить классические характеристические уравнения к квантовой механике и теории относительности.

Координатное представление FOLD-характеристических уравнений имеет следующий вид. Пусть основное уравнение $\mathcal{E}$ задано соотношениями

$$F_j(x, u, \ldots, u^i_\sigma, \ldots) = 0, \qquad j = 1, \ldots, l,$$

где $F_j \in \mathcal{F}_k(\pi)$. Введем *характеристическую матрицу* уравнения $\mathcal{E}$, полагая

$$\mathcal{M}_F = \begin{pmatrix} \sum\limits_{|\sigma|=k} \dfrac{\partial F_1}{\partial u^1_\sigma} p^\sigma & \ldots & \sum\limits_{|\sigma|=k} \dfrac{\partial F_1}{\partial u^m_\sigma} p^\sigma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{|\sigma|=k} \dfrac{\partial F_l}{\partial u^1_\sigma} p^\sigma & \ldots & \sum\limits_{|\sigma|=k} \dfrac{\partial F_l}{\partial u^m_\sigma} p^\sigma \end{pmatrix},$$

где $p^\sigma = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{i_n}$, если $\sigma = (i_1, \ldots, i_n)$. FOLD-характеристическое уравнение тривиально, т. е. имеет вид $0 = 0$, если $l < m$. Если $l \geqslant m$, мы получаем FOLD-характеристическое уравнение $\mathcal{E}^0_{\mathrm{FOLD}}$ на Σ-сингулярные области вида $x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, заменяя в $\mathcal{M}_F$ переменные p_i на $\partial\varphi/\partial x_i$, а p_n — на -1 и приравнивая к нулю все m-миноры полученной таким образом матрицы.

З а м е ч а н и е 3. Строго говоря, описанная процедура применима только к формально интегрируемым уравнениям $\mathcal{E}$.

2. Уравнения Максвелла и геометрическая оптика. Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме («волновую оптику»):

$$\operatorname{div} E = 0, \qquad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{rot} H = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}.$$

В этом случае $n=4$, $m=6$, $l=8$, так что характеристическая матрица — это прямоугольная матрица размера 8×6. Прямые вычисления показывают, что все ее миноры шестого порядка имеют вид

$$\lambda\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2-\frac{1}{c^2}p_4^2\right)^2,$$

где $\lambda=0$ или $\pm p_i p_j$. Таким образом, полагая $x_4=t$, мы видим, что уравнение $\mathcal{E}^0_{\mathrm{FOLD}}$ совпадает со стандартным уравнением эйконала

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2=\frac{1}{c^2}. \tag{10}$$

Следовательно, мы получаем интерпретацию этого известного факта в терминах теории особенностей решений. Однако это дает нам и нечто большее: дополнительные уравнения, которые вместе с уравнением эйконала составляют всю систему $\mathcal{E}_{\mathrm{FOLD}}$. Они имеют вид

$$\operatorname{div} h_E = \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{rot} h_H,$$
$$\operatorname{rot} h_E + \operatorname{div} h_H\cdot\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\varphi\times\operatorname{rot} h_H.$$

Здесь h_E и h_H — сингулярные значения, т. е. значения на сингулярной поверхности $t=\varphi(x_1,x_2,x_3)$, электрического и магнитного поля соответственно.

3. О дополнительных уравнениях. Из процедуры, описанной в п. 1, видно, что самые разные дифференциальные уравнения могут иметь одно и то же характеристическое уравнение. Например, уравнение эйконала (10) является характеристическим и для уравнения Клейна — Гордона

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u-m^2u=0.$$

Поэтому нельзя восстановить исходное уравнение, зная только его характеристическое уравнение. В силу теоремы о восстановлении, сформулированной в § 9, вся остальная информация, необходимая для восстановления, содержится в дополнительных уравнениях. Поэтому независимая и прямая интерпретация величин, входящих в эти уравнения, позволила бы получить нужную для решения проблемы восстановления информацию. Теперь видно, что эта задача *интерпретации особенностей* очень важна. Например, для сплошной среды решение этой задачи предоставит нам регулярный метод

> ***вывода уравнений, описывающих соответствующую сплошную среду, из наблюдения за распространением особенностей заданного типа.***

Это весьма привлекательная альтернатива современному феноменологическому состоянию механики сплошной среды.

Ясно, что квантование «à la Шрёдингер» также можно понимать как такую интерпретационную задачу. В этом контексте к классическим уравнениям Гамильтона — Якоби, понимаемым как Q-характеристические уравнения, необходимо добавить подходящие дополнительные уравнения. Естественно предположить, что стандартный метод квантования «à la Гейзенберг» как раз заполняет ту брешь, которую образует отсутствие этих гипотетических дополнительных уравнений.

4. Альтернативные особенности через переход к однородности. Классическое, т. е. FOLD-характеристическое, уравнение для уравнения Шрёдингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi-V\psi=0 \tag{11}$$

для сингулярных областей, имеющих вид $t=x_4=\varphi(x_1,x_2,x_3)$, записывается как

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2=0.$$

Это показывает, что геометрических особенностей недостаточно для описания соответствия между квантовой и классической механикой. Гипотетические особенности «квантового» типа (см. § 3) должны описываться Q-характеристическим уравнением $\mathcal{E}_Q^0$ вида

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2-V=0. \tag{12}$$

Можно, однако, интерпретировать (12) как характеристическое уравнение «однородного аналога» уравнения Шрёдингера

$$\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial t\partial s}-\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial x_i^2}+V\frac{\partial^2\widetilde{\psi}}{\partial s^2}=0, \tag{13}$$

записанного в пятимерном пространстве — времени (x_1, x_2, x_3, t, s), в предположении, что сингулярные области имеют вид $s-\varphi(x_1, x_2, x_3, t)=0$. С другой стороны, уравнение (13) сводится к (11) на функциях

$$\widetilde{\psi}=\psi(x,t)\exp\left(\frac{i}{\hbar}s\right). \tag{14}$$

Это приводит к мысли определить Q-особенности как редукцию FOLD-особенностей на функции (14). Делается это, однако, не столь прямолинейно, и мы отсылаем читателя к [119] за дальнейшими деталями.

5. $\mathbb{R}_{(k)}$-характеристические уравнения. Здесь мы опишем некоторые аналоги уравнения Гамильтона — Якоби для расширенных (не точечных) сингулярных областей. Для простоты мы выбрали волновое уравнение

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

в качестве исходного. Так как $\mathbb{R}_{(1)}=\mathrm{FOLD}$, то $\mathbb{R}_{(1)}$-характеристическое уравнение совпадает со стандартным уравнением эйконала (10).

Для $k=2$ и сингулярных областей вида

$$x_2=\varphi(s,t),\qquad x_3=\psi(s,t)\quad \text{при } s=x_1$$

$\mathbb{R}_{(2)}$-характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial s}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2-c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2-c^2-0.$$

Его решения — двумерные поверхности, касающиеся светового конуса.

Наконец, $\mathbb{R}_{(3)}$-характеристическое уравнение на сингулярные кривые вида $x_i=x_i(t)$, $i=1,2,3$, имеет вид

$$\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2=c^2.$$

Другие примеры, результаты и дальнейшее обсуждение можно найти в [119].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.

2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ГНТИ Украины, 1939.

3. Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 28. — М.: ВИНИТИ, 1988.

4. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.

5. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1985. — Т. 4. — С. 7–139.

6. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Мир, 1972.

7. Биркгоф Г. Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

8. Боголюбов Н. Н. (мл.) и др. Нелинейная модель типа Шредингера: законы сохранения, гамильтонова структура и интегрируемость // ТМиМФ. — 1985. — Т. 65, № 2. — С. 271–284.

9. Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. — М.: Наука, 1987.

10. Вербовецкий А. М., Виноградов А. М., Гесслер Д. М. Скалярные дифференциальные инварианты и характеристические классы однородных геометрических структур // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51, № 6. — С. 15–26.

11. Винберг Э. Б., Онищик А. Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: Наука, 1988.

12. Виноградов А. М. Алгебра логики теории линейных дифференциальных операторов // Докл. АН СССР. — 1972. — Т. 205, № 5. — С. 1025–1028.

13. Виноградов А. М. Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 210, № 1. — С. 11–14.

14. Виноградов А. М. К алгебро-геометрическим основаниям лагранжевой теории поля // Докл. АН СССР. — 1977. — Т. 236, № 2. — С. 284–287.

15. Виноградов А. М. Одна спектральная последовательность, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением, и алгебро-геометрические основания лагранжевой теории поля со связями // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 238, № 5. — С. 1028–1031.

16. Виноградов А. М. Гамильтоновы структуры в теории поля // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 1. — С. 18–21.

17. Виноградов А. М. Некоторые гомологические системы, связанные с дифференциальным исчислением в коммутативных алгебрах // УМН. — 1979. — Т. 34, вып. 6. — С. 145–150.

18. Виноградов А. М. Теория высших инфинитезимальных симметрий нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 248, № 2. — С. 274–278.

19. Виноградов А. М. Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 11. — М. ВИНИТИ, 1980. — С. 89–134.

20. Виноградов А. М. Интегрируемость и симметрии // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. — М.: Наука, 1987. — С. 279–290.

21. Виноградов А. М., Красильщик И. С. Один метод вычисления высших симметрий нелинейных эволюционных уравнений и нелокальные симметрии // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 253, № 6. — С.1289–1293.

22. Виноградов А. М., Красильщик И. С. К теории нелокальных симметрий нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 275, № 5. — С. 1044–1049.

23. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Применение нелинейных уравнений в гражданской авиации. — М.: МИИГА, 1977.

24. Виноградов А. М., Красильщик И. С., Лычагин В. В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1986.

25. Виноградов А. М., Купершмидт Б. А. Структура гамильтоновой механики // УМН. — 1977. — Т. 32, вып. 4. — С. 175–236.

26. Волощук В. М. Кинетическая теория коагуляции. — Л.: Гидрометеоиздат, 1984.

27. Гельфанд С. И., Манин Ю. И. Методы гомологической алгебры. Т. 1. Введение в теорию когомологий и производные категории. — М.: Наука, 1988.

28. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Мир, 1981.

29. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

30. Гюнтер Н. М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. — Москва — Ленинград: ОНТИ ГТТИ, 1934.

31. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.

32. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979.

33. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983.

34. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 65, № 2.

35. Капцов О. В. Расширение симметрий эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 256, № 5. — С. 1056–1059.

36. Кирнасов Е. Г. О накрытиях типа Уолквиста — Эстабрука над уравнением теплопроводности // Матем. заметки. — 1987. — Т. 42, № 3. — С. 422–433.

37. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. — М.: Атомиздат, 1980.

38. Крищенко А. П. О загибаниях R-многообразий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1977. — № 1. — С. 17–20.

39. Купершмидт Б. А. О геометрии многообразий джетов // УМН. — 1975. — Т. 30, № 5. — С. 211–212.

40. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.

41. Лезнов А. Н., Савельев М. В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1985.

42. Лычагин В. В. Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // УМН. — 1975. — Т. 30, вып. 1. — С. 101–171.

43. Лычагин В. В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. — 1979. — Т. 34, вып. 1. — С. 137–165.

44. Лычагин В. В. Геометрическая теория особенностей решений нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 20. — М.: ВИНИТИ, 1980. — С. 207–247.

45. Лычагин В. В. Геометрия и топология ударных волн // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 264, № 3. — С. 551–555.

46. Маклейн С. Гомология. — М.: Мир, 1966.

47. Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 11. — 1978. — С. 5–152.

48. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. — М.: Мир, 1968.

49. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.

50. Михайлов А. В., Шабат А. Б., Ямилов Р. И. Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем // УМН. — 1987. — Т. 42, № 4. — С. 3–53.

51. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

52. Нётер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. — М.: Физматгиз, 1959.

53. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989.

54. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

55. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989.

56. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия. — М.: Наука, 1987.

57. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр V. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.

58. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М., Л.: ГИТТЛ, 1950.

59. Самохин А. В. Нелинейные МГД-уравнения: симметрии, решения и законы сохранения // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 285. — С. 1101–1106.

60. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954.

61. Свинолупов С. И., Соколов В. В. Факторизация эволюционных уравнений // УМН. — 1992. — Т. 47. — С. 115–146.

62. Седов Л. И. Методы подобия и размерность в механике. — М.: Наука, 1987.

63. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.

64. Соколов В. В., Шабат А. Б. Необходимые условия нетривиальности алгебры Ли — Беклунда и существование законов сохранения / Препр. — Уфа, 1982.

65. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1953.

66. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.

67. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. — М.: Мир, 1987.

68. Фиников С. П. Курс дифференциаьной геометрии. — М.: Гостехиздат, 1952.

69. Фущич В. И., Владимиров В. А. О дополнительной инвариантности для векторных полей // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 257, № 5. — С. 1105–1109.

70. Фущич В. И., Никитин А. Г. — Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наук. думка, 1983.

71. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.

72. Хорькова Н. Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии // Матем. заметки. — 1988. — Т. 44, вып. 1. — С. 134–144.

73. Хорькова Н. Г. Законы сохранения и нелокальные симметрии // Тр. МВТУ. — 1988. — № 512. — С. 105–119.

74. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. В 2 т. — М.: Наука, 1988.

75. Шварц А. С. Квантовая теория поля и топология. — М.: Наука, 1989.

76. Шемарулин В. Е. Прямой метод решения краевых задач // (в печати).

77. Abraham R., Marsden J. Foundation of mechanics. — Reading: Benjamin, Cummings Publ., 1978.

78. Anderson I. M. Introduction to the variational bicomplex // Contemp. Math. V. 132. Mathematical Aspects of Classical Field Theory. — Providence (USA, R. I.): Amer. Math. Soc., 1992. — P. 51–73.

79. Anderson I. M. The variational bicomplex. — Boston: Academic Press (to appear).

80. Anderson R. L. Ibragimov N. H. Lie—Bäcklund transformations in applications // SIAM Stud. in Appl. Math. — Philadelphia, 1979.

81. Astashov A. M., Vinogradov A. M. On the structure of Hamiltonian operators in field theory // J. Geom. Phys. — 1986. — V. 3. — P. 263–287.

82. Bäcklund A. V. Zur Theorie der Flachentransformationen // Math. Ann. — 1882. — Bd. 19. — S. 387–422.

83. Bäcklund transformations. — Lecture Notes in Math. V. 515. — Springer-Verlag, 1976.

84. Barnich G., Brandt F., Henneaux M. Local BRST cohomology in Einstein—Yang—Mills theory // Nucl. Phys. B. — 1995. — V. 445. — P. 357–408.

85. Barnich G., Brandt F., Henneaux M. Local BRST cohomology in the antifield formalism. I. General theorems // Commun. Math. Phys. — 1995. — V. 174. — P. 57–91.

86. Bluman G. W., Kumei S. Symmetries and differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1989.

87. Bryant R. L., Griffiths P. A. Characteristic cohomology of differential systems: general theory // J. AMS (to appear).

88. Chetverikov V. N. On the structure of integrable C-fields // Diff. Geom. Appl. — 1991. — V. 1. — P. 309–325.

89. Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G. A method for computing symmetries and conservation laws of integro-differential equations // Acta Appl. Math. — 1995. — V. 41, № 1–3. — P. 45–56.

90. Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G. Modelling integro-differential equations and a method for computing their symmetries and conservation laws // AMS Transl. 2. — 1995. — V. 167. — P. 1–22.

91. CRC handbook of Lie group to differential equations. V. 1. Symmetries, exact solutions and conservation laws / Ed. Ibragimov N. H. — Boca Raton: CRC Press, 1994.

92. CRC Handbook of Lie group to differential equations. V. 2. Applications in ingeneering and physical sciences / Ed. Ibragimov N. H. — Boca Raton: CRC Press, 1995.

93. Dickey L. A. Soliton equations and Hamiltonian systems. — Singapore: World Scientific, 1991.

94. Dodd R., Fordy A. The prolongation structures of quasi-polynomial flows // Proc. R. Soc. London. — 1983. — V. A385. — P. 389–429.

95. Dorfman I. Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations. — Chichester: John Wiley & Sons, 1993.

96. Gessler D. On the Vinogradov C-spectral sequence for determined systems of differential equations // Diff. Geom. Appl. — 1996 (to appear).

97. Giaquinta M., Hildebrandt S. Calculus of variation. V. 2. The Hamiltonian formalism. — Berlin: Springer-Verlag, 1996.

98. Givental A. B. Whitney singularities of solutions of partial differential equations // J. Geom. Phys. — 1995. — V. 15. — P. 353–368.

99. Gusyatnikova V. N., Samokhin A. V., Vinogradov A. M., Yumaguzhin V. A. Symmetries and conservation laws of Kadomtsev—Pogutse equations // Acta Appl. Math. — 1989. — V. 15. — P. 24–64.

100. Gusyatnikova V. N., Vinogradov A. M., Yumaguzhin V. A. Secondary differential operators // J. Geom. Phys. — 1985. — V. 2, № 2. — P. 23–66.

101. Haag R. Local quantum physics. — Springer-Verlag, 1992.

102. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes. — Paris: Hermann, 1903.

103. Henneaux M., Knaepen B., Schomblond C. Characteristic cohomology of p-form gauge theories // 1996. — hep-th/9606181.

104. Important developments in soliton theory/Eds. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1993.

105. Kaup D. J. The Estabrook—Wahlkwist method with examples of applications // Physica D. — 1980. — V. 1. — P. 391–411.

106. Kiso K. Pseudopotentials and symmetries of evolution equation // Hokkaido Math. J. — 1989. — V. 18, № 1. — P. 125–136.

107. Konopelchenko B. G. Nonlinear integrable equations (Recursion operators, group-theoretical and Hamiltonian structures of soliton equations) // Lecture Notes in Physics. V. 270. — Berlin: Springer-Verlag, 1987.

108. Krasil'shchik I. S. Some new cohomological invariants for nonlinear differential equations // Diff. Geom. Appl. — 1992. — V. 2. — P. 307–350.

109. Krasil'shchik I. S., Kersten P. H. M. Deformations and recursion operators for evolution equations in partial differential equations // Geometry in partial differential equations/Eds. Pràstro A., Rassias Th. M. — Singapore: World Scientific, 1994. — P. 114–154.

110. Krasil'shchik I. S., Kersten P. H. M. Graded differential equations and their deformations: a computational theory for recursion operators // Acta Appl. Math. — 1995. — V. 41. — P. 167–191.

111. Krasil'shchik I. S., Lychagin V. V., Vinogradov A. M. Geometry of jet spaces and non linear partial differential equations. — New York: Gordon and Breach, 1986.

112. Krasil'shchik I. S., Vinogradov A. M. Nonlocal symmetries and the theory of covering // Acta Appl. Math. — 1984. — V. 2. — P. 79–86.

113. Krasil'shchik I. S., Vinogradov A. M. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations // Acta Appl. Math. — 1989. — V. 15. — P. 161–209.

114. Kuperschmidt B. A. The variational principles of dynamics. — Singapore: World Scientific, 1992.

115. Lamb G. L. Bäcklund transformation at the turn of the century // Lecture Notes in Math. V. 515. — Springer-Verlag, 1976. — P. 69–79.

116. Levi-Civitá T. Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein // Rend. Accad. Naz. Lincei (Scienze Fis., Mat. Nat.). — 1930. — V. 11. — P. 3–11, 113–121.

117. Levi-Civitá T. Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. — Bologna: Zanichelli, 1988.

118. Lie S. Gesammelte Abhandlungen. Bd. 1–4. — Leipzig: Teubner, 1929.

119. Lizzi F., Marmo G., Sparano G., Vinogradov A. M. Eikonal type equations for geometrical singularities of solutions in field theory // J. Geom. Phys. — 1994. — V. 14.

120. Lonngren K., Scott A. (eds). Soliton in action. — Acad. Press: 1978.

121. Luneburg R. K. Mathematical theory of optics. — Berkeley: Univ. of California Press, 1964.

122. Lychagin V. V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear phenomena // Acta Appl. Math. — 1985. — V. 3. — 135–173.

123. Lychagin V. V. Lectures on geometry of differential equations. — Roma, 1992.

124. Marvan M. On the $\mathcal{C}$-spectral scquence with "general" coefficients // Proc. Conf. on Differential Geometry and its Applications (Brno, 1989)/Eds. Janyška J., Krupka D. — Singapore: World Scientific, 1990. — P. 361–371.

125. Marvan M. On zero-curvature representations of partial differential equations // Differential Geom. and Its Appl. Proc. Conf. (Czechosl., Opava, 1992). — Silesian Univ., 1993. — P. 103–122.

126. McCleary J. A user's guide to spectral sequences. — Wilmington (USA, Delaware): Publish or Perish, 1986.

127. Miura R. M. Korteweg—de Vries equation and generalisations. A remarkable explicit nonlinear transformation // J. Math. Phys. — 1968. — V. 9. — P. 1202–1204.

128. Miura R. M., Gardner C. S., Kruskal M. D. Korteweg—de Vries equation and generalisations. — Existence of conservation laws and constants of motion // J. Math. Phys. — 1969. — V. 9. — P. 1204–1209.

129. Olver P. J. Evolution equation possessing infinitely many symmetries // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18, № 6. — P. 1212–1215.

130. Pirani F. A. E., Robison D. C., Shadwick W. F. Local jet bundle formulation of Bäcklund transformations. — Dordrecht: D. Reidel, 1979.

131. Racah G. Characteristiche delle equazioni di Dirac e principio di indeterminazione // Rend. Accad. Naz. Lincei. — 1931. — V. 13. — P. 424–427.

132. Saunders D. J. The geometry of jet bundles. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

133. Schrödinger E. Abhandlungen zur Wellenmechanik. — Leipzig: Barth, 1927.

134. Senashov S. I., Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of 2-dimensional ideal plasticity // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1988. — V. 31. — P. 415–439.

135. Shadwick W. F. The Bäcklund problem for the equation $z_{xy}=f(z)$ // J. Math. Phys. — 1978. — V. 19, № 11. — P. 2312–2317.

136. Shadwick W. F. The KdV prolongation algebra // J. Math. Phys. — 1980. — V. 21, № 3. — P. 454–461.

137. Sharomet N. Symmetries, invariant solutions and conservation laws of nonlinear acoustic equation // Symmetry of partial diffnential equations (conservation laws—applications—algorithms). — Dordrecht: Kluwer, 1989. — P. 83–120.

138. Smoluchowsky M. Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. — Phys. Ztschr. — 1916. — Bd. 17. — S. 557–585. [Имеется перевод в кн.: Броуновское движение. — М.: ОНТИ, 1936. — С. 332–417.]

139. Sokolov B. V., Shabat A. B. Classification of integrable evolution equations // Sov. Scientific Rev. Section C. — New York: Hardwood Acad. Publ., 1984. — V. 4. — P. 221–280.

140. Stephani H. Differential equations: their solutions using symmetries. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

141. Symmetry of partial differential equations (conservation laws—applications—algorithms)/Ed. Vinogradov A. M. — Dordrecht: Kluwer, 1989. [Reprinted from Acta Appl. Math. — 1989. — V. 15, 16.]

142. Tsujishita T. On variation bicomplexes associated to differential equations // Osaka J. Math. — 1982. — V. 19. — P. 311–363.

143. Tsujishita T. Characteristic classes for families of foliations // Foliations. Advanced Studies in Pure Math. № 5. — Tokyo: Kinokuniya, 1985. — P. 195–210.

144. Tsujishita T. Formal geometry of systems of differential equations // Sugaku Exposition. — 1989. — V. 2. — P. 1–40.

145. Tsujishita T. Homological method of computing invariants of involutive systems of differential equations // Diff. Geom. Appl. — 1991. — V. 1. — P. 3–34.

146. Verbovetsky A. M. Notes on horizontal cohomology // Contemp. Math. — Providence (USA, R. I.): Amer. Math. Soc. (to appear).

147. Vinogradov A. M. Local symmetries and conservation laws // Acta Appl. Math. — 1984 — V. 2, № 1. — P. 21–78.

148. Vinogradov A. M. The $\mathcal{C}$-spectral sequence, Lagrangian formalism, and conservation laws // J. Math. Anal. Appl. — 1984. — V. 100, № 3. — P. 1–129.

149. Vinogradov A. M. Geometric singularities of solutions of partial differential equations // Proc. Conf. on Differential Geometry and its Applications (Brno, 1986). — Dordrecht: Purkyne Univ., Reidel, 1987. — P. 359–379.

150. Vinogradov A. M. An informal introduction to geometry of jet spaces // Proc. Conf. on Differential Geometry and Topology (Cala Gonone, 1988). — Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari. — 1988. — Suppl. al v. 58. — P. 301–329.

151. Vinogradov A. M. Symmetries and conservation laws of partial differential equations: basic notions and results // Symmetry of partial diffnential equations (conservation laws—applications—algorithms). — Dordrecht: Kluwer, 1989. — P. 3–21.

152. Vinogradov A. M. Scalar differential invariants, diffieties and characteristic classes // Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange/Ed. M. Francaviglia. — Elsevier Science, 1991. — P. 379–414.

153. Vinogradov A. M. From symmetries of partial differential equations towards secondary ("quantized") calculus // J. Geom. Phys. — 1994. — V. 14. — P. 146–194. [Имеется перевод в настоящем издании, с. 418–450.]

154. Vinogradov A. M. On geometric solution singularities // (to appear).

155. Wahlquist H. D., Estabrook F. B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. — 1975. — V. 16, № 1. — P. 1–7.

156. White R., Monticello D., Rosenbluth M. N., Strauss H., Kadomtsev B. B. Numerical study of nonlinear evolution of kink and tearing modes in tokamaks // Intern. Conf. of Plasma Physics (Tokyo, 1974). V. 1. — Vienna: IAEA, 1975. — P. 495–504.

157. Zharinov V. Geometrical aspects of partial differential equations. — Singapore: World Scientific, 1992.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ