

И.Р. Шафаревич

**СОЧИНЕНИЯ
В ТРЕХ ТОМАХ**

Том 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

Часть 2

МОСКВА, 1996

И. Р. Шафаревич

Ш-30 Сочинения. В 3 т. Т. 3. часть 2 – М.: АОЗТ «Прима В»

Ш $\frac{0902050100-011}{966(03)-96}$ Без объявл.

ББК 66.2(2Р)
Ш30

Математические исследования

ISBN 5-85240-061-0

Том 3
Часть 2

АЛГЕБРА
АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

И.Р.Шафаревич. Собрание сочинений в трех томах. Том третий, часть II.

В третий том собрания сочинений вошли математические работы выдающегося русского математика современности академика РАН Игоря Ростиславовича Шафаревича. Вторая часть тома содержит работы по алгебре и алгебраической геометрии.

Ответственные за выпуск *В.М.Имайкин, С.И.Комаров.*

Компьютерный набор в макропакете *AMS-TeX* выполнен при участии :

Н.Н.Бахтиной, О.В.Никишкиной, Ф.Н.Чемерева.

Настоящее издание математических трудов И.Р. Шафаревича осуществлено при участии Международного Фонда содействия православной культуре свят. блгв. князя Александра Невского.

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

1 О нормируемости топологических полей	2
2 Группа гомологий нильпотентных алгебр (с А. И. Костри- киным)	5
3 Псевдогруппа Картана и p -алгебры Ли (с А. И. Костри- киным)	11
4 Неприводимые представления простой трехмерной алге- бры Ли над полем конечной характеристики (с А. Н. Ру- даковым)	16
5 Градуированные алгебры Ли конечной характеристики (с А. И. Кострикиным)	31
6 О факторах одного убывающего центрального ряда	122
7 О деформациях коммутативных алгебр класса 2	126

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

8 Главные однородные пространства, определенные над по- лем функций	149
9 Алгебраические поверхности. Предисловие	185
10 Алгебраические поверхности. Линейчатые поверхности ..	189
11 Алгебраические поверхности. Поверхности с пучком эл- липтических кривых	229
12 Теория Галуа трансцендентных расширений и униформи- зация (с И. И. Пятецким-Шапиро)	251
13 О некоторых бесконечномерных группах	293
14 Теорема Торелли для поверхностей типа $K3$	298
15 Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ (с И. И. Пятецким-Шапиро)	304
16 Арифметика поверхностей поверхностей типа $K3$ (с И. И. Пятецким-Шапиро)	356

17 Несепарабельные морфизмы алгебраических поверхностей (с А. Н. Рудаковым).....	370
18 Замечания к работе “Несепарабельные морфизмы алгебраических поверхностей” (с А. Н. Рудаковым).....	417
19 Квазиэллиптические поверхности типа $K3$ (с А. Н. Рудаковым).....	418
20 Векторные поля на эллиптических поверхностях (с А. Н. Рудаковым).....	421
21 Суперсингулярные поверхности типа $K3$ над полями характеристики 2 (с А. Н. Рудаковым).....	424
22 О вырождении поверхностей типа $K3$ над полями конечной характеристики (с А. Н. Рудаковым).....	450
23 О некоторых бесконечномерных группах. II.....	469
24 Поверхности типа $K3$ над полями конечной характеристики (с А. Н. Рудаковым).....	484
25 Влияние высоты на вырождение алгебраических поверхностей типа $K3$ (с А. Н. Рудаковым и Т. Цинком).....	589
26 О вырождении поверхностей типа $K3$ (с А. Н. Рудаковым)	612
27 Об арифметике сингулярных поверхностей типа $K3$	631

АЛГЕБРА

О НОРМИРУЕМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

ДОКЛ. АКАД. НАУК СССР Т.XL №4 (1943)

В настоящей статье даются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данное топологическое поле было нормируемо. Благодаря этим условиям удастся свести ряд вопросов теории топологических полей к теории нормированных полей. В частности, вся теория локально-бикомпактных полей получается как частный случай теории нормированных полей.

Мы будем говорить, что топологическое поле K нормируемо, если на нем можно задать вещественную функцию $\varphi(x)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $\varphi(x) > 0$ при $x \neq 0$; $\varphi(0) = 0$;
- 2) $\varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$;
- 3) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;
- 4) система множеств $U_\varepsilon \{ \varphi(x) < \varepsilon \}$ образует полную систему окрестностей нуля.

Чтобы сформулировать условия нормируемости, введем несколько обозначений. Через R мы будем обозначать множество таких элементов p поля K , что $p^n \rightarrow 0_{n \rightarrow \infty}$, а через $\tilde{R}$ — множество таких элементов q , что $q^{-1} \notin R$. Про множество W элементов поля K мы будем говорить, что оно ограничено, если для всякой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля V , что $W \cdot V \in U$.

Теорема 1. Для того, чтобы топологическое поле K было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы множество R было открыто, а множество $\tilde{R}$ ограничено.

Необходимость этих условий очевидна. Доказательство достаточности получается при помощи построения нормы $\varphi(x)$.

Пусть p , не равный нулю, — элемент множества R . Тогда множества $p^n R$ ($-\infty < n < +\infty$) образуют полную систему окрестностей нуля и, возрастая при убывании n , в сумме дают все K . Пусть x — любой отличный от нуля элемент поля K . Через $n(x)$ обозначим наибольшее число n , для которого $x \in p^n R$. Составим

последовательность $\alpha_k(x) = \frac{n(x^k)}{k}$. Из легко доказываемых неравенств $\alpha_{k+1}(x) \geq \alpha_k(x)$ и $\alpha_{k+1}(x) \geq \alpha_k(x) - \frac{1}{k+1}$ следует, что при n , стремящемся к бесконечности, $\alpha_k(x)$ стремится к определенному пределу $\alpha(x)$. Возьмем теперь любое число ρ ($0 < \rho < 1$) и определим функцию $\psi_\rho(x)$ следующим образом:

$$\psi_\rho(0) = 0,$$

$$\psi_\rho(x) = \rho^{\alpha(x)} \quad \text{при } x \neq 0.$$

Функция $\psi_\rho(x)$, как можно видеть, удовлетворяет условиям 1), 3) и 4), но не является нормой, так как для нее не при любом ρ выполняется условие 2). Вместо него имеет место более слабое условие:

2') $\psi_\rho(x+y) \leq a_\rho \{\psi_\rho(x) + \psi_\rho(y)\}$ при фиксированном a_ρ .

В самом деле, если бы 2') не имело места, то совокупность чисел $\frac{\psi_\rho(x+y)}{\psi_\rho(x)+\psi_\rho(y)}$ ($x, y \in K$) была бы неограничена, а это значит, что существовала бы такая последовательность z_n , что $\frac{\psi_\rho(1+z_n)}{1+\psi_\rho(z_n)} \rightarrow \infty$.

Из этого следовало бы, что $\frac{1}{\psi_\rho(1+z_n)} = \psi_\rho\left(\frac{1}{1+z_n}\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а так как для $\psi_\rho(\alpha)$ выполняется 4), то было бы $\frac{1}{1+z_n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Но так как $\frac{\psi_\rho(1+z)}{1+\psi_\rho(z)} = \frac{\psi_\rho(1+z^{-1})}{1+\psi_\rho(z^{-1})}$, то из этого следовало бы, что ρ и $\frac{1}{1+z_n^{-1}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, что приводит к противоречию, ибо $\frac{1}{1+z_n} + \frac{1}{1+z_n^{-1}} = 1$.

Теперь остается подобрать ρ так, чтобы стало $a_\rho \leq 1$. Для этого достаточно взять $\rho' = \rho^{\frac{1}{a_\rho+1}}$, что и заканчивает доказательство теоремы.

Из теоремы 1 можно получить ряд следствий, касающихся локально-бикомпактных полей, так как легко доказать, что сформулированные там условия выполняются в любом таком поле. Отсюда можно легко получить структуру всех локально-бикомпактных полей, пользуясь теоремами Островского [1] и Hasse-Schmidt [2] о нормированных полях.

В самом деле, пусть локально-бикомпактное поле K связно. По теореме 1 оно нормируемо, и легко видеть, что норма $\varphi(x)$ должна быть архимедовой. Если же поле не связно, то из теоремы Островского [1] следует, что норма $\varphi(x)$ неархимедова, и можно доказать, что она даже дискретна. В самом деле, из неархимедовости следует, что множество $R\{\varphi(x) < 1\}$ является кольцом, а множества $R_\varepsilon\{\varphi(x) < \varepsilon < 1\}$ идеалами в нем. Но из локальной бикомпактности следует, что кольца классов вычетов $\frac{R}{R_\varepsilon}$ конечны. Это и

приводит к противоречию с предположением, что между двумя числами ε_1 и ε_2 существует бесчисленное множество таких чисел ε_α , что $\varphi(x_\alpha) = \varepsilon_\alpha$ для некоторых x_α из K . Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Всякое локально-бикompактное поле нормируемо. Если оно связно, то норма архимедова, а если не связно, то дискретна.*

Из теоремы 2 и теорем Островского и Hasse-Schmidt сразу получается, что связное локально-бикompактное топологическое поле есть поле вещественных или комплексных чисел [3], а несвязное — поле p -адических или z -адических чисел с конечным полем коэффициентов [4].

В качестве последнего приложения теоремы 1 рассмотрим вопрос о связи между двумя нормами $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, дающими в поле K одну и ту же топологию. Если мы при помощи процесса, описанного в доказательстве теоремы 1, построим норму $\varphi(x)$, определяющую в K ту же топологию, что и $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, пользуясь элементом $p \in R$ и числами $\rho_1 < 1$ и $\rho_2 < 1$, то будем иметь

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)^{\alpha_1}; \quad \varphi(x) = \varphi_2(x)^{\alpha_2},$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\log \rho_1}{\log \varphi_1(p)}; \quad \alpha_2 = \frac{\log \rho_2}{\log \varphi_2(p)},$$

т. е. $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)^\beta$, $\beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Мы получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Если нормы $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ определяют в поле K одну и ту же топологию, то они связаны соотношением $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)^\beta$.*

Поступило 19.II.1943

Литература

- [1] Островский, Acta Mathematica **41** (1918).
- [2] Hasse u. Schmidt, Journ. für Math. **170** (1934).
- [3] Понтрягин, Annals of Math. **II**, no. **33** (1932).
- [4] Van-Dantrig, Studien over topologische Algebra, Amsterdam, (1931).

ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБР

ДОКЛ. АКАД. НАУК СССР Т. 115, no.6 (1957)

(с А. И. Кострикиным)

В этой заметке изучаются верхние группы гомологий $H^n(N, k)$, где N — нильпотентная ассоциативная алгебра конечного ранга над произвольным полем k , а за N — операторный модуль коэффициентов — взято само поле k , на которое элементы N действуют нулевым образом. Все нужные для дальнейшего свойства групп гомологий можно найти в книге [1].

Известно, что группа $H^n(N, k)$ не изменится, если алгебру N заменить алгеброй A , получающейся из N формальным присоединением единицы. Таким образом получается любая алгебра, фактор-алгебра по радикалу которой изоморфна основному полю. Этим свойством обладает, в частности, групповая алгебра A конечной p -группы G над полем из p элементов. В этом случае группа $H^n(A, k)$ совпадает с группой гомологий $H^n(G, Z_p)$ группы G с коэффициентами в циклической группе порядка p .

Группа $H^n(N, k)$ является векторным пространством конечной размерности над полем k . Размерность этого пространства обозначается через b_n и будет называться n -мерным числом Бетти алгебры N . Аналогичные обозначения будут применяться для групп $H^n(G, Z_p)$. Исследование чисел Бетти и является основной целью настоящей работы. Формулировка полученных в этом направлении результатов становится более естественной, если рассмотреть связанную с алгеброй N функцию Пуанкаре $R_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$; аналогичным образом определяется функция $R_G(t)$, где G — конечная p -группа.

Нами получены следующие результаты:

Теорема 1. Пусть $N = N_1 + \dots + N_m$ — прямая сумма m нильпотентных алгебр; $R_N(t) = R(t)$ и $R_{N_i}(t) = R_i(t)$ — соответствующие им функции Пуанкаре. Тогда

$$\frac{1}{R(t)} - 1 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{R_i(t)} - 1 \right).$$

Теорема 2. Числа Бетти нильпотентной алгебры N связаны соотношениями

$$b_n - b_{n-1} + \dots + (-1)^n b_0 \geq \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

которые могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{1+t} R_N(t) \gg \frac{1}{1-t^2}. \quad (2)$$

Здесь соотношение $F(t) \gg G(t)$ означает, что каждый коэффициент степенного ряда $G(t)$ не превосходит соответствующего коэффициента $F(t)$.

В частности, при $n = 2$ соотношение (1) дает $b_2 \geq b_1$. Для случая p -групп это показывает, что число неэквивалентных расширений циклической группы Z_p при помощи p -группы G не меньше, чем p^d , где d — число образующих G .

Умножая соотношение (2) на $1+t$, получим

$$R_N(t) \gg \frac{1}{1-t},$$

откуда следует теорема 3.

Теорема 3. Числа Бетти нильпотентной алгебры и конечной p -группы положительны.

Оценку чисел Бетти сверху дает теорема 4.

Теорема 4. Для функции $R_N(t)$, соответствующей нильпотентной алгебре N ранга r , выполняется неравенство

$$R_N(t) \ll \frac{1}{1-rt}.$$

Для функции $R_G(t)$, соответствующей группе G порядка p^ν , выполняется неравенство

$$R_G(t) \ll \frac{1}{(1-t)^\nu}. \quad (3)$$

Следствие. Радиус сходимости ρ ряда $R_N(t)$ заключен в пределах

$$\frac{1}{r} \leq \rho \leq 1.$$

Радиус сходимости ряда $R_G(t)$ равен 1.

Приведем несколько примеров.

1. Для циклической группы G

$$R_G(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Так как, в силу известных соотношений Кюннета, для прямого произведения $G_1 \times G_2$ групп G_1 и G_2

$$R_{G_1 \times G_2}(t) = R_{G_1}(t) \cdot R_{G_2}(t),$$

то для абелевой группы G с d образующими

$$R_G(t) = \frac{1}{(1-t)^d}.$$

2. Группа G является полупрямым расширением циклической группы при помощи циклической:

$$G = \{x, y\}, \quad x^{p^\alpha} = y^{p^\beta} = 1, \quad x^{-1}y^{1+u} = y^{1+u}, \quad (1+u)^{p^\alpha} - 1 = mp^\beta;$$

$$\text{a) } m \equiv 0 \pmod{p}; \quad R_G(t) = \frac{1}{(1-t)^2};$$

$$\text{b) } (m, p) = 1;$$

$$R_G(t) = \frac{1}{(1-t)^2(1+t^2+t^4+\dots+t^{2(p-1)})} = \frac{1+t}{(1-t)(1-t^{2p})}.$$

3. N является фактор-алгеброй алгебры многочленов без свободного члена от d переменных по идеалу многочленов степени ≥ 3 ,

$$R_N(t) = \frac{(1+t)^d}{1 - \sum_1^d \binom{i+1}{2} \binom{d+2}{i+2} t^{i+1}}.$$

4. N является фактор-алгеброй алгебры многочленов без свободного члена от двух переменных по идеалу многочленов степени $\geq r$,

$$R_N(t) = \frac{1+t}{1-t-rt^2}.$$

5. N — приведенная свободная некоммутативная алгебра с соотношением $N^r = 0$ и d образующими,

$$R_N(t) = \frac{1 + dt}{1 - d^r t^2}.$$

Эти и многие другие рассмотренные нами примеры позволяют высказать гипотезу, что для любой нильпотентной алгебры конечного ранга функция $R_N(t)$ является рациональной функцией t . В случае конечной p -группы G все полюса функции $R_G(t)$ являлись бы тогда корнями из 1.

В пользу этой гипотезы говорит и следующая теорема.

Теорема 5. Если все числа Бетти нильпотентной алгебры N над конечным полем k ограничены в совокупности, то $R_N(t)$ — рациональная функция.

Следующий пример показывает, что существует бесконечно много алгебр с ограниченными числами Бетти.

N имеет две образующие e_1 и e_2 ; $N^5 = 0$; k — произвольное поле характеристики $\neq 2$ и

$$e_2 e_1 = -e_1 e_2 + a e_1^3 + b e_1^2 e_2 + c e_1^4; \quad e_2^2 = f e_1^2 + g e_1^2 e_2 + h e_1^4;$$

$$e_1^3 e_2 = 0; \quad b \cdot f \left(f + \left(\frac{g-a}{b} \right)^2 \right) \neq 0;$$

$$R_N(t) = \frac{1 + 2t + 2t^2 + t^3}{1 - t^4} = \frac{1 + t + t^2}{1 - t + t^2 - t^3}.$$

Как известно, такую же функцию Пуанкаре имеет обобщенная группа кватернионов.

Доказательства сформулированных теорем легко следуют из рассмотрения специальной полной резольвенты

$$0 \xleftarrow{\partial_{-1}} X_{-1} \xleftarrow{\partial_0} X_0 \leftarrow \dots \leftarrow X_{n-1} \xleftarrow{\partial_n} X_n \leftarrow \dots, \quad (4)$$

в которой

$$X_{-1} = k, \quad X_0 = A = \alpha e + N, \quad \alpha \in k, \quad e^2 = e, \\ e\nu = \nu, \quad \partial_0(\alpha e + \nu) = \alpha \quad (\nu \in N).$$

Положив

$$\text{Ker}(\partial_n) = J_n,$$

мы обозначим минимальное число образующих J_n как A -операторного модуля через b_{n+1} . Как известно, b_{n+1} равно размерности линейного пространства $J_n - NJ_n$.

Мы положим

$$X_{n+1} = E^{b_{n+1}} \otimes A,$$

где $E^{b_{n+1}}$ — линейное пространство над k размерности b_{n+1} , а $\otimes$ означает тензорное произведение. Легко видеть, что числа b_n совпадают с числами Бетти алгебры N . При доказательстве теоремы 1 можно, конечно, ограничиться случаем $m = 2$. Пусть $N = N_1 + N_2$, $R_1(t) = \sum a_n t^n$, $R_2(t) = \sum b_n t^n$, $R(t) = \sum c_n t^n$; A_n , B_n и C_n — ядра J_n соответствующих точных последовательностей типа (4). Очевидно, что

$$C_0 = A_0 + B_0,$$

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 + B_1 + E^{a_1} \otimes B_0 + E^{b_1} \otimes A_0 = \\ &= A_1 + B_1 + E^{a_1} \otimes C_0 + E^{b_1 - a_1} \otimes A_0. \end{aligned}$$

По индукции отсюда легко следуют соотношения

$$C_{n-1} = A_{n-1} + B_{n-1} + \sum_1^{n-1} E^{d_i} \otimes C_{n-1-i} + \sum_1^{n-1} E^{b_i - d_i} \otimes A_{n-1-i}, \quad (5)$$

где

$$d_n = \sum_0^{n-1} (b_i - d_i) a_{n-i} \quad (d_0 = 0). \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что

$$c_n = b_n + \sum_0^n d_{n-i} c_i, \quad b_n + \sum_0^n d_i a_{n-i} - \sum_0^n b_i a_{n-i} = 0,$$

т. е.

$$R(t) = R_2(t) + R(t)D(t), \quad (7)$$

$$R_2(t) + R_1(t)D(t) - R_1(t)R_2(t) = 0, \quad (8)$$

где

$$D(t) = \sum d_n t^n.$$

Из (7) и (8) легко следует теорема 1.

Теорема 2 следует из того, что в последовательности (4) ранги над полем k модулей X_n и J_n связаны соотношениями

$$r(X_n) = b_n(1 + r(N)) = r(J_n) + r(J_{n-1}).$$

По индукции отсюда получаем, что

$$r(J_{n-1}) = (b_{n-1} - b_{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}b_0)(1 + r(N)) + (-1)^n,$$

откуда, ввиду того, что

$$b_n \geq \frac{r(J_{n-1})}{1 + r(N)},$$

легко следует теорема 2.

Теоремы 3, 4 и 5 аналогичным образом вытекают из рассмотрения последовательности (4). Исключением является только неравенство (3) из теоремы 4. Оно следует из того, что числа Бетти центрального расширения мажорируются числами Бетти прямого произведения. Этот факт известным образом выводится из рассмотрения спектральной последовательности Хохшильда — Серра.

Примечание при корректуре. Уже после сдачи рукописи в печать авторам стало известно, что аналогичной задачей занимается Б. Б. Венков. Результаты его, относящиеся к p -группам, частично совпадают с нашими.

Поступило 21.III.1957

Литература

- [1] Н. Cartan, E. Eilenberg, *Homological Algebra*, Princeton, 1956.

ПСЕВДОГРУППЫ КАРТАНА И p -АЛГЕБРЫ ЛИ

ДОКЛ. АКАД. НАУК СССР Т. 168, no.4 (1966)

(с А. И. Кострикиным)

1. В работе 1909 г. [1] Картан классифицировал все простые транзитивные псевдогруппы преобразований. Современное изложение части результатов Картана см. [2-4]. В этом изложении теоретико-групповой вопрос заменяется эквивалентным ему вопросом об алгебрах Ли $\mathcal{L}$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\mathcal{L}$ — топологическая алгебра Ли с линейной топологией, заданной подпространствами конечной коразмерности; $\mathcal{L}$ полна в этой топологии.

б) в $\mathcal{L}$ существует такая (открытая) подалгебра $\mathcal{L}_0$, что система подалгебр $\mathcal{L}_k$, определенных условиями

$$\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}; \quad \mathcal{L}_{k+1} = \{x \in \mathcal{L}_k \mid [\mathcal{L}, x] \subset \mathcal{L}_k\}, \quad k \geq 0,$$

образует полную систему окрестностей нуля.

Будем называть в дальнейшем алгебры с условиями а), б) *бесконечными алгебрами Ли*. Из определения следует, что $[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] \subset \mathcal{L}_{i+j}$; $\mathcal{L}_k$ — идеал в $\mathcal{L}_0$, $k > 0$. Ввиду этого задано представление Γ конечномерной алгебры $L_0 = \mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$ в конечномерном модуле $V = \mathcal{L}_{-1}/\mathcal{L}_0$.

В упомянутых работах доказано, что если $\mathcal{L}$ — простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль и представление Γ неприводимо, то $\mathcal{L}$ принадлежит к одной из указанных ниже серий. Алгебры всех серий реализованы в кольце дифференциальных операторов $\mathcal{D}$ кольца $K = k[[x_1, \dots, x_n]]$ формальных степенных рядов над полем k ,

$$\mathcal{D} = \sum_1^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in K. \quad (1)$$

Серии таковы:

- 1) $\mathcal{L}$ состоит из всех операторов вида (1) (общая алгебра).
- 2) $\mathcal{L}$ состоит из всех операторов, оставляющих инвариантной дифференциальную форму $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ (специальная алгебра).
- 3) $n = 2m$; $\mathcal{L}$ состоит из всех операторов, оставляющих инвариантной дифференциальную форму $\omega = \sum_1^m dx_i \wedge dx_{m+i}$ (гамильтонова алгебра).

Картан доказал также, что все простые бесконечные алгебры Ли исчерпываются сериями 1) – 3) и серией

- 4) $n = 2m + 1$; $\mathcal{L}_m$ состоит из всех операторов, умножающих форму $\omega = dx_n + \sum_{i=1}^m (x_i dx_{m+i} - x_{m+i} dx_i)$ на элемент кольца K (контактная алгебра).

Настоящая заметка посвящена рассмотрению аналогов алгебр Картана над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. Их определение сохраняет смысл полностью, однако ни одна из них не остается простой. Именно, в $\mathcal{L}$ имеется идеал J , состоящий из всех операторов вида (1), для которых $f_i \in K^p = K \cdot (x_1^p, \dots, x_n^p)$. Фактор-алгебра $\mathcal{L}/J$ для всех четырех серий имеет конечную размерность над k и уже очень близка к простой. Более точно, в случае 1) алгебра $\mathcal{L}/J = W_n$ простая и $\dim W_n = np^n$, $(n, p) \neq (1, 2)$; в случае 2) прост коммутант S_n алгебры $\mathcal{L}/J$ и $\dim S_n = (n-1)(p^n - 1)$, $n > 2$; в случае 3) прост идеал H_n ко-размерности 1 в коммутанте алгебры $\mathcal{L}/J$, $\dim H_n = p^n - 2$ ($p > 2$ или $n > 2$). Наконец, в случае 4) проста алгебра K_n , где $K_n = \mathcal{L}/J$, если $n + 3 \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $K_n = [\mathcal{L}/J, \mathcal{L}/J]$, если $n + 3 \equiv 0 \pmod{p}$, $p > 2$. Соответственно, $\dim K_n = p^n$ или $p^n - 1$.

Алгебры W_n , S_n , H_n и K_n , за которыми мы снова закрепляем названия общей, специальной, гамильтоновой и контактной, являются p -алгебрами Ли. В другом виде они уже были описаны раньше (см. [5–9]). Алгебры этих серий мы будем называть также *алгебрами картановского типа*, а простые p -алгебры, получающиеся редукцией по $\text{mod } p$ из простых алгебр Ли над полем характеристики нуль, — *классическими*. Как сказано выше, все алгебры картановского типа реализуются как алгебры дифференцирований срезанного кольца многочленов $k[x_1, \dots, x_n]$, $x_i^p = 0$.

2. Нам кажется вероятным, что *алгебры картановского типа вместе с классическими исчерпывают все простые p -алгебры Ли* ($p > 5$). Во всяком случае, никакие другие примеры, по-видимому, неизвестны.

Наш основной результат доказывает только что сформулирован-

ную гипотезу при некоторых дополнительных ограничениях.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{L}$ — простая p -алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 7$, обладающая такой собственной подалгеброй L_0 , что $\dim V < p$, $\dim L_0 < p$ и представление Γ неприводимо. Тогда $\mathcal{L}$ является или классической алгеброй или алгеброй картановского типа одной из серий 1) — 3). (Определение V , L_0 и Γ было дано в п.1.)

Остановимся на основных этапах доказательства теоремы 1. Оно протекает параллельно доказательству соответствующей теоремы для бесконечных алгебр Ли над полем характеристики нуль (см. [2, 3]) с преодолением отдельных трудностей, обусловленных конечностью характеристики. Изящное доказательство, имеющееся в работе [3], неприменимо в нашем случае, так как оно использует бесконечность алгебры.

По подалгебре $\mathcal{L}_0$ строится, как указано в п. 1, фильтрация $\{\mathcal{L}_k\}$. Из условия неприводимости представления Γ следует, что все члены $\mathcal{L}_k$ фильтрации будут p -подалгебрами. Различаются два случая.

1) $\mathcal{L}_k = 0$ при $k \geq 2$;

2) $\mathcal{L}_2 \neq 0$.

В случае 1) доказывается, что $\mathcal{L}$ — алгебра классического типа. Это вытекает из результатов, полученных ранее одним из авторов [10, 11]. В случае 2) доказывается, что $\mathcal{L}$ — картановского типа. Прежде всего устанавливается, что L_0 — прямая сумма алгебр классического типа и, быть может, одномерного центра. Это очевидно над полем характеристики нуль, но нетривиально в нашем случае. Полученный результат позволяет применить к исследованию представления Γ теорию Кэртиса [12] p -представлений алгебр классического типа.

Предложение. Разность любых двух весов представления Γ выражается в виде разности некоторых корней алгебры L_0 .

Это утверждение является усилением леммы 5.5 из работы [4]. Можно доказать, что условиям предложения удовлетворяют только алгебры A_n , $A_n + k$, C_n , $C_n + k$ и их стандартные представления. Изложенные соображения уже дают возможность определить по L_0 однозначно градуированную алгебру $L = V + L_0 + L_1 + \dots$, ассоциированную с фильтрацией $\{\mathcal{L}_k\}$. Совпадение $\mathcal{L}$ и L доказывается так же, как и в работе [2], поскольку никаких ограничений на характеристику при этом не возникает.

3. Простые p -алгебры Ли картановского типа обладают принципиальным отличием от классических. Именно, во всех них существуют собственные подалгебры, определенные абсолютно инва-

риантным образом, т. е. инвариантные относительно всех автоморфизмов алгебры. Далее мы будем называть такие подалгебры инвариантными. В алгебре над полем характеристики нуль инвариантная подалгебра, конечно, должна быть идеалом, и поэтому у простой алгебры не может быть собственной инвариантной подалгебры. Точно так же не может быть их и у простой алгебры классического типа над полем характеристики $p > 0$.

Можно высказать следующую гипотезу: *если в простой p -алгебре Ли $\mathcal{L}$ ($p > 5$) нет собственной инвариантной подалгебры, то $\mathcal{L}$ — классического типа*. Разумеется, это предположение вытекает из классификационной гипотезы, сформулированной в начале п. 2.

Пусть $\mathcal{L}$ — простая картановская p -алгебра Ли. В ней существует важная инвариантная подалгебра, которую мы обозначим через $\mathfrak{C}$. Подалгебра $\mathfrak{C}$ порождена всеми элементами $s \in \mathcal{L}$, для которых $(adc)^2 = 0$. Инвариантность $\mathfrak{C}$ очевидна из определения. Относительно общих свойств алгебры $\mathfrak{C}$ см. [10]. Непосредственная проверка показывает, что в алгебрах картановского типа $\mathfrak{C}$ — собственная подалгебра. Более того, для произвольной алгебры $\mathcal{L}$ подалгебра $\mathfrak{C}$ тогда и только тогда отлична от нуля, когда в $\mathcal{L}$ имеется такая подалгебра $\mathcal{L}_0$, что в определенной ею фильтрации $\{\mathcal{L}_k\}$ (см. п. 1) член $\mathcal{L}_2 \neq 0$.

Теорема 2. *В алгебре Ли $\mathcal{L}$ картановского типа существует единственная собственная максимальная инвариантная подалгебра $\mathcal{L}_0$, совпадающая с нормализатором $N_{\mathcal{L}}(\mathfrak{C})$ подалгебры $\mathfrak{C}$. При реализации $\mathcal{L}$ в виде алгебры дифференциальных операторов срезанного кольца многочленов $\mathcal{L}_0$ состоит из всех операторов вида (1), у которых $f_i \in (x_1, \dots, x_n)$. В фильтрации $\{\mathcal{L}_k\}$, определенной подалгеброй $\mathcal{L}_0$, член $\mathcal{L}_k$ состоит из операторов вида (1), у которых $f_i \in (x_1, \dots, x_n)^{k+1}$.*

Для доказательства классификационной гипотезы было бы чрезвычайно важно иметь следующее утверждение: *в любой простой p -алгебре Ли $\mathcal{L}$, отличной от классической, существует единственная собственная максимальная инвариантная подалгебра. Она совпадает с нормализатором $N_{\mathcal{L}}(\mathfrak{C})$ подалгебры $\mathfrak{C}$.*

Справедливость этой гипотезы давала бы возможность выбрать в произвольной простой p -алгебре Ли наиболее естественную фильтрацию. Дело в том, что исследование усложняется наличием ряда патологических фильтратий, отличных от фильтрации, описанной в теореме 2. Например, в гамильтоновой алгебре H_2 существует фильтрация $\{\mathcal{L}'_k\}$ с последним членом $\mathcal{L}'_{p-2} \neq 0$, в которой алгебра $\mathcal{L}'_0$ является общей алгеброй W_1 , а представление Γ — неприводимым представлением этой алгебры степени $p - 1$.

Поступило 4.III.1966

Литература

1. E. Cartan, Ann. Sci. École norm. **26** (1909), 93.
2. V. W. Guillemin, S. Sternberg, Bull. Am. Math. Soc. **70** (1964), 16.
3. Sh. Kobayashi, T. Nagano, J. Math. and Mech. **14**, **4** (1965), 679.
4. J. M. Singer, S. Sternberg, J. d'analyse Math. **15** (1965), 1.
5. N. Jacobson, Duke Math. J. **10** (1943), 107.
6. M. S. Frank, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 713.
7. A. A. Albert, M. S. Frank, Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Math. **14** (1954-1955), 117.
8. R. Block, Trans. Am. Math. Soc. **89** no.2 (1958), 421.
9. M. S. Frank, Trans. Am. Math. Soc. **112** no.3 (1964), 456.
10. А. И. Кострикин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР **64** (1961), 79.
11. А. И. Кострикин, ДАН **150** no.2 (1963), 248.
12. C. W. Curtis, J. Math. Mech. **9** (1960), 307.

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТОЙ ТРЕХМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ НАД ПОЛЕМ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

МАТ. ЗАМЕТКИ Т. 2, no.5 (1967), 439-454

(с А. Н. Рудаковым)

Перечисляются неприводимые представления простой трехмерной алгебры Ли над полем конечной характеристики. Размерности всех представлений не превосходят характеристики p основного поля. Для любой размерности $< p$ существует единственное представление этой размерности. Представления размерности p образуют трехмерное алгебраическое семейство. Библ. 6 назв.

Теория неприводимых представлений простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 была построена Э. Картаном более полувека назад и стала одним из наиболее популярных разделов алгебры. Аналогичные вопросы над полями конечной характеристики почти совсем не исследованы. Исключение составляют p -представления простых алгебр Ли [1], которые, как, в частности, видно из результатов этой работы, составляют очень небольшую часть множества всех представлений. По-видимому, до сих пор ни для одной простой алгебры Ли над полем конечной характеристики не были определены все ее неприводимые представления.

В этой заметке мы даем описание всех неприводимых представлений простой алгебры ранга 3 (алгебры A_1 в обозначениях Картана), определенной над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p \neq 2$. Формулы, задающие неприводимые представления, нетрудно получить, используя связь этого вопроса со свойствами

универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{A}$ алгебры A_1 и тела частных алгебры $\mathfrak{A}$ [2]. При этом оказывается, что неприводимые представления могут быть степени $\leq p$, для любой степени $< p$ существует единственное неприводимое представление, а формулы для произвольного p -мерного представления зависят от координат точки x некоторого трехмерного алгебраического многообразия V .

Ввиду этого результата желательно дать точное определение тому, что означает, что множество представлений параметризуется алгебраическим многообразием, и найти потом это многообразие. Следуя классическим образцам [3], мы вводим понятие универсального семейства представлений алгебры Ли L как такого алгебраического семейства представлений, что любое другое семейство получается из него как обратный образ при некотором однозначно определенном отображении его базы в базу универсального семейства. Как часто бывает, универсальное семейство в нашем случае не существует, однако можно доказать его существование, если снабдить классифицируемые объекты дополнительной "жесткостью". В нашем случае жесткость определяется заданием в пространстве представления некоторого весового вектора (это заменяет выбор старшего веса в классической теории, так как в нашем случае все веса равноправны). Доказательство существования и явное описание универсального семейства жестких представлений являются основным результатом заметки. При этом база универсального семейства имеет вид $X - S$, где X — трехмерное аффинное многообразие, а S — конечное множество его особых точек.

Дальше мы исследуем вырождения неприводимых представлений, т. е. такие семейства представлений, в которых общий слой неприводим, но некоторые слои приводимы. При одном дополнительном ограничении на тип вырождения оказывается, что все семейства, допускающие вырождения рассматриваемого типа, также описываются универсальным семейством, база которого получается из X разрешением особых точек $s \in S$.

В соответствии с общими закономерностями, имеющими место в этой области, конечномерные представления в конечной характеристике аналогичны в характеристике 0 всем представлениям, как конечномерным, так и бесконечномерным. Так как ситуация в конечной характеристике все же проще (представления конечномерны, ввиду чего не возникают аналитические трудности), то дальнейшее исследование этого вопроса, быть может, поможет разобраться в теории бесконечномерных представлений простых алгебр Ли в характеристике 0.

1. Центр универсальной обертывающей алгебры

Рассмотрим алгебру A_1 над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$, $p \neq 2$ и обозначим через e , f и h элементы ее стандартного базиса.

Таким образом,

$$[e, h] = 2e, \quad [f, h] = -2f, \quad [e, f] = h. \quad (1)$$

Элементы e , f и h порождают универсальную обертывающую алгебру $\mathfrak{A}$ алгебры A_1 . Центр алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{Z}$.

Предложение 1. Алгебра $\mathfrak{Z}$ порождается элементами $x = e^p$, $y = f^p$, $z = h^p - h$, $t = (h + 1)^2 - 4ef$. Эти элементы связаны соотношением

$$z^2 - \prod_{k=0}^{p-1} (t - k^2) = 4xy, \quad (2)$$

которое определяет алгебру $\mathfrak{Z}$.

Проверим, что элементы x , y , z , $t \in \mathfrak{Z}$. Для x , y и z это следует из существования структуры p -алгебры в алгебре A_1 и соотношений $e^{[p]} = 0$, $f^{[p]} = 0$, $h^{[p]} = h$, которые легко вывести, например, используя двумерное представление алгебры A_1 . Чтобы установить, что $t \in \mathfrak{Z}$, рассмотрим e , f , h и t как элементы тела частных D алгебры $\mathfrak{A}$ (см. [4], гл. V, § 3). Из формул (1) следует, что в D

$$e^{-1}he = h - 2, \quad f^{-1}hf = h + 2. \quad (3)$$

Отсюда вытекает, что $[ef, h] = 0$, и, значит, $[t, h] = 0$. Аналогично из (1) следует, что $e^{-1}(ef)e = ef - h$ и $e^{-1}te = (h - 1)^2 - 4(ef - h) = t$, т. е. $[e, t] = 0$. Так же доказывается, что $[f, t] = 0$. Отсюда уже вытекает, что $t \in \mathfrak{Z}$.

Обозначим через K поле частных кольца $\mathfrak{Z}$ и положим $k(x, y, z) = K^* \subset K$ и $k[x, y, z] = \mathfrak{Z}^* \subset \mathfrak{Z}$. Из результатов работы [2] вытекает, что $\dim_K D = p^3$, а так как $\dim_K D$ является полным квадратом, то $[K : K^*] = p$, $\dim_K D = p^2$. Легко проверить, что $t \notin K^*$. Действительно, из равенства $t = P(x, y, z)Q(x, y, z)^{-1}$ следует $Qt = P$, что приводит к противоречию, если сравнить члены старшей степени относительно стандартной градуировки алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, $K = K^*(t) = k(x, y, z, t)$.

Для вывода соотношения (2) применим главную норму N в алгебре D/K (см. [5], стр. 214). Из того, что $4ef = (h + 1)^2 - t$, мы получаем

$$N(4ef) = N((h + 1)^2 - t), \quad \text{или} \quad 4xy = \prod_{k=0}^{p-1} ((h + k)^2 - t), \quad (4)$$

так как элемент h порождает нормальное поле $K(h)$ с автоморфизмами $\sigma_k h = h + k$, $k = 0, \dots, p-1$. Для вычисления многочлена в правой части (4) введем новую переменную s , положив $t = s^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \prod((h+k)^2 - t) &= \prod((h+k)^2 - s^2) = \\ &= \prod(h+k-s) \prod(h+k+s) = \\ &= ((h+s)^p - (h+s))((h-s)^p - (h-s)) = \\ &= (h^p - h + s^p - s)(h^p - h - (s^p - s)) = \\ &= (h^p - h)^2 - (s^p - s)^2 = z^2 - s^2(s^{p-1} - 1)^2 = \\ &= z^2 - t(t^{(p-1)/2} - 1)^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$N((h+1)^2 - t) = z^2 - t(t^{(p-1)/2} - 1)^2, \quad (5)$$

откуда и вытекает соотношение (2).

Заметим теперь, что $k[x, y, z, t] = 3^*[t] \subset 3$ и оба кольца имеют одно и то же поле частных K . Кроме того, 3 — модуль конечного типа над $3^*[t]$, так как $3 \subset \mathcal{A}$, а $\mathcal{A}$ — конечного типа над 3 и тем более над $3^*[t]$. Как легко проверить, $3^*[t]$ целозамкнуто, откуда и следует, что $3 = 3^*[t]$. Предложение 1 доказано.

2. Неприводимые представления

Зная структуру алгебры 3 , не представляет труда перечислить “теоретико-множественно” все неприводимые представления алгебры A_1 . Действительно, всякое неприводимое представление φ определяет максимальный идеал $\mathfrak{m}_\varphi \in \text{Spec } 3$. Все представления с $\mathfrak{m}_\varphi = \mathfrak{m}$ — это неприводимые представления конечномерной алгебры $\mathcal{A} \otimes_3 k = \mathcal{A}/\mathfrak{m}$. Степени всех неприводимых представлений не превосходят p , и максимальному идеалу $\mathfrak{m} \in \text{Spec } 3$ тогда и только тогда соответствует неприводимое представление степени p (автоматически единственное), когда $\mathcal{A}/\mathfrak{m} \simeq k_p$ — алгебра матриц порядка p над k ([2]).

Согласно предложению 1 идеал $\mathfrak{m} \in \text{Spec } 3$ задается точкой трехмерного аффинного многообразия Z , которое определяется уравнением (2). Обозначим через ρ гомоморфизм $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{m}$. Предположим, что точка $P = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$, соответствующая $\mathfrak{m}$, такова, что $\xi \neq 0$. Тогда в $\mathcal{A}/\mathfrak{m}$ элемент $\rho(e)$ обратим, так как $\rho(e)^p = \xi \neq 0$. Из

формул (3) следует, что элементы $\rho(e)$ и $\rho(h)$ порождают скрещенное произведение, изоморфное k_p . Из обратимости элемента $\rho(e)$ и соотношения $4ef = (h+1)^2 - t$ вытекает, что $\rho(f)$ выражается через $\rho(e)$ и $\rho(h)$, и поэтому $\mathfrak{A}/\mathfrak{m} \simeq k_p$, так что точке P соответствует в точности одно неприводимое p -мерное представление. То же рассуждение можно привести и в случае, когда $\eta \neq 0$.

Предположим теперь, что $\xi = \eta = 0$. Положим $f^{p-1} + e = g$ и вычислим элемент $\rho(g)^p$. Начнем с преобразований в алгебре D . В ней

$$\begin{aligned} g &= e + yf^{-1} = (ef + y)f^{-1} = \left(\frac{(h+1)^2 - t}{4} + y \right) f^{-1}, \\ g^p &= \left(\left(\frac{(h+1)^2 - t}{4} + y \right) f^{-1} \right)^p = \\ &= N \left(\frac{(h+1)^2 - t}{4} + y \right) y^{-1} = N \left(\frac{h^2 - t}{4} + y \right) y^{-1}. \end{aligned}$$

Подставив в соотношение (5), которое верно для любого элемента $t \in \mathfrak{Z}$, $t - 4y$ вместо t , мы получим, что $g^p = \frac{1}{4}(z^2 - (t - 4y)((t - 4y)^{(p-1)/2} - 1)^2)y^{-1}$. Ввиду соотношения (2) в кольце $\mathfrak{Z}$ $g^p \equiv x + 1 - t^{(p-1)/2} \pmod{y}$, откуда следует, что при $\rho(x) = \rho(y) = 0$

$$\rho(g)^p = 1 - \rho(t)^{(p-1)/2}. \quad (6)$$

Рассмотрим сначала случай $\xi = \eta = 0$, $\tau^{(p-1)/2} \neq 1$, т. е. $\tau \neq k^2$, $k \neq 0$. Тогда ввиду (6) $\rho(g)^p = 1 - \tau^{(p-1)/2} \neq 0$, так что элемент $\rho(g)$ обратим в алгебре $\rho(\mathfrak{A})$. Прежнее рассуждение показывает, что $\rho(g)$ и $\rho(h)$ порождают алгебру k_p . Так как $4\rho(g)\rho(f) = \rho((h+1)^2 - t)$, то $\rho(f)$ и $\rho(e)$ выражаются через $\rho(g)$ и $\rho(h)$, и, значит, $\rho(\mathfrak{A}) = k_p$. Таким образом, и в этом случае точке P соответствует единственное p -мерное неприводимое представление.

Остается рассмотреть случай $\xi = \eta = \tau^{(p-1)/2} - 1 = 0$. Ввиду (2) тогда и $\zeta = 0$. Поэтому неприводимое представление, соответствующее такой точке, является p -представлением. Классификация p -представлений любой классической простой алгебры содержится в работе [1]. В случае алгебры A_1 она приводит к тому, что имеется p неприводимых p -представлений, причем они получаются редукцией по модулю p неприводимых представлений степеней k , $1 \leq k \leq p$, алгебры A_1 в характеристике 0. Простая проверка показывает, что p -представлению степени k соответствует значение $\tau = k^2$, и, следовательно, любой точке $(0, 0, 0, k^2)$, $k \neq 0$, соответствуют два неприводимых представления степеней k и $p - k$.

Нами получен следующий результат.

Предложение 2. Точке $P = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$ многообразия Z , определенного уравнением (2), соответствует единственное неприводимое p -мерное представление, если $P \neq (0, 0, 0, k^2)$, $k \neq 0$, а точке $P = (0, 0, 0, k^2)$, $k \neq 0$, соответствуют два неприводимых представления степеней k и $p - k$.

Заметим, что уравнение (2) можно переписать в виде

$$z^2 - t \prod_{k=1}^{(p-1)/2} (t - k^2)^2 = 4xy,$$

откуда легко увидеть, что $(p-1)/2$ точек $(0, 0, 0, k^2)$, $k \neq 0$, являются особыми точками многообразия Z . Множество особых точек многообразия Z обозначим через S .

3. Семейства представлений

Пусть Y — схема над полем k . Семейством представлений k -алгебры Ли L с базой Y называется векторное расслоение E над Y и представление L в алгебре $\text{End} E$, $\varphi : L \rightarrow \text{End} E$. Для любого $y \in Y$ тогда определено представление $\varphi_y : L \rightarrow \text{End} E_y$. Размерностью семейства называется размерность слоев расслоения E . Семейство называется неприводимым, если для любого $y \in Y$ представление φ_y неприводимо.

Если $f : X' \rightarrow X$ — морфизм и $E \rightarrow X$ — семейство представлений, то обратный образ $f^*E \rightarrow X'$ расслоения E , естественно, снабжается структурой семейства представлений. Обозначим M_X множество семейств неприводимых представлений размерности n с базой X (с точностью до изоморфизма).

Семейство представлений $U \rightarrow B$ называется универсальным, если отображение, сопоставляющее любому морфизму $f : X \rightarrow B$ семейство f^*U над X , определяет взаимно однозначное соответствие $\alpha : \text{Hom}(X, B) \rightarrow M_X$. В частности, так как представление можно рассматривать как расслоение с базой, являющейся точкой, то каждое представление встречается ровно один раз в качестве слоя универсального семейства.

Наилучшим решением вопроса об описании неприводимых представлений заданной размерности n алгебры Ли L было бы построение семейства ее представлений, универсального в множестве всех неприводимых представлений размерности n . Мы покажем, однако, что при $L = A_1$ и $n = p$ универсального семейства не существует.

Рассмотрим произвольное семейство представлений $E \rightarrow Y$. Отображение $\varphi : L \rightarrow \text{End} E$ определяет гомоморфизм $\psi : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End} E$. При этом при любом $y \in Y$ гомоморфизм $\psi_y : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End} E_y$ является,

ввиду теоремы Бернсайда, эпиморфизмом, а значит, $\psi_y(\mathfrak{Z})$ состоит из гомотетий пространства E_y . Поэтому существует такой гомоморфизм $\lambda: \mathfrak{Z} \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O})$, что $\psi_y(u)m = \lambda(u)m$ для $u \in \mathfrak{Z}$, $m \in E_y$. Так как такой гомоморфизм определен также для любого открытого множества многообразия Y , то Y является схемой над $\mathfrak{Z}$ и определен морфизм $\varphi_Y: Y \rightarrow \text{Спец } \mathfrak{Z} = Z$.

Для любой точки $y \in Y$ точка $\varphi_Y(y) \in Z$ соответствует, в смысле предложения 2, представлению $\varphi_y: L \rightarrow E_y$. Так как по условию φ_y неприводимо, то $\varphi_Y(Y) \subset Z - S$ (напомним, что $n = p$).

Предположим, что $E \rightarrow X$ — универсальное семейство. Тогда морфизм $\varphi_X: X \rightarrow Z - S$ взаимно однозначен (на множестве замкнутых точек). Это означает, что многообразие X неприводимо, поле $k(X)$ содержит поле $k(Z) = K$ и расширение $k(X)/K$ чисто несепарабельно. С другой стороны, ниже будет построено такое семейство $\overline{E} \rightarrow \overline{Z}$, что морфизм $\varphi_{\overline{Z}}: \overline{Z} \rightarrow Z$ неразветвлен, откуда следует, что $k(\overline{Z})/K$ сепарабельно. Из предположения о том, что X — база универсального семейства, вытекает наличие такого морфизма $\varphi: \overline{Z} \rightarrow X$, что $\varphi_{\overline{Z}} = \varphi_X \cdot \varphi$. Мы получаем, что $k(\overline{Z}) \supset k(X) \supset K$, причем $k(\overline{Z})/K$ сепарабельно, а $k(X)/K$ чисто несепарабельно. Это возможно только в случае $k(X) = K$.

Рассмотрим гомоморфизм $\psi_x: \mathfrak{A} \rightarrow E_x$, соответствующий общей точке x базы X семейства $E \rightarrow X$. Так как $E_x = K^p$, то мы получаем вложение $D = \mathfrak{A} \otimes K \rightarrow \text{End } K^p$ (ввиду того, что D — алгебра с делением). Однако D является алгеброй с делением над K , $\dim_K D = p^2$, и поэтому D не имеет представлений матрицами порядка p над K .

Теперь мы так изменим понятия представления и семейства представлений, чтобы для новых понятий можно было доказать существование универсального семейства.

Жестким представлением алгебры L называется представление $\varphi: L \rightarrow \text{End } E$ и выбор в E весового вектора a , т. е. собственного вектора для алгебры $\varphi(H)$, где H — подалгебра Картана алгебры L . Морфизм жестких представлений определяется естественным образом. Очевидно, что замена вектора a пропорциональным не меняет структуру жесткого представления.

Заметим, что во всей этой теории мы фиксируем раз и навсегда некоторую подалгебру Картана $H \subset L$.

В случае, когда $L = A_1$, $H = \{\alpha h\}$, и если a — весовой вектор p -мерного представления φ , то $\varphi(h)a = \lambda a$, $\lambda \in k$, откуда следует, что $\varphi(h)\varphi(e)^i a = (\lambda - 2i)\varphi(e)^i a$, $\varphi(h)\varphi(f)^j a = (\lambda + 2j)\varphi(f)^j a$. Пользуясь этим, можно показать, что неприводимое p -мерное представление φ обладает p различными структурами жесткого представления.

Семейством жестких представлений называется семейство E —

X , в котором зафиксировано такое сечение $s : X \rightarrow E$, что для любого $x \in X$ вектор $s(r) \neq 0$ и является весовым вектором представления $\varphi_x : L \rightarrow \text{End} E_x$. Морфизм семейств жестких представлений и универсальное семейство определяются естественным образом.

Мы переходим к построению семейства жестких p -мерных представлений, про которое будет доказана его универсальность. Обозначим через $\bar{\mathfrak{Z}}$ подалгебру $\mathfrak{Z}[h]$ алгебры $\mathfrak{A}$, а через $\bar{S}$ прообраз множества S при естественном отображении $\bar{Z} = \text{Spec} \bar{\mathfrak{Z}} \rightarrow Z$. Очевидно, что $\bar{S}$ состоит из $p(p-1)/2$ точек. Алгебраическое многообразие $\bar{Z} - \bar{S}$ мы обозначим через B . Оно и будет базой универсального семейства. Очевидно, что морфизм $\bar{Z} \rightarrow Z$ неразветвлен, и поэтому $\bar{S}$ совпадает с множеством особых точек многообразия $\bar{Z}$.

Начнем с описания кольца $\bar{\mathfrak{Z}}$. По определению

$$\bar{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}[h] = k[x, y, z, t, h].$$

Так как $t = (h+1)^2 - 4ef$, то $\bar{\mathfrak{Z}} = k[x, y, h, u]$, где $u = ef$. Найдем соотношение между x, y, h и u , определяющее алгебру $\bar{\mathfrak{Z}}$. Оно получается из (2) подстановкой

$$z = h^p - h, \quad t = (h+1)^2 - 4u$$

и приведением подобных членов. Однако проще найти это соотношение, вычислив $N(u)$ двумя способами. С одной стороны,

$$N(u) = N(ef) = xy.$$

Но, с другой стороны,

$$N(u) = \prod_{k=0}^{p-1} e^{-k} u e^k = \prod_{k=0}^{p-1} L_k, \quad L_k = e^{-k} u e^k.$$

Из соотношений (3) мы получаем

$$\begin{aligned} L_k &= e^{-k} u e^k = e^{-(k-1)} f e e^{k-1} = e^{-(k-1)} (u - h) e^{k-1} = \\ &= L_{k-1} - h + 2(k-1), \end{aligned}$$

откуда

$$L_k = u - kh + k(k-1).$$

Окончательно мы находим соотношение

$$xy = \prod_{k=0}^{p-1} L_k(u, h) = \prod_{k=0}^{p-1} (u - kh + k(k-1)) . \quad (7)$$

Очевидно, это соотношение совпадает с тем, которое получается из (2) указанной выше подстановкой. Таким образом, алгебра $\bar{\mathfrak{Z}}$ определяется соотношением (7). Легко проверить, что множество $\bar{S}$ состоит из точек, для которых $x = 0$, $y = 0$, $L_i(u, h) = 0$, $L_j(u, h) = 0$ для некоторой пары индексов $i \neq j$.

Рассмотрим $\mathfrak{A}$ как правый $\bar{\mathfrak{Z}}$ -модуль. Он определяет на многообразии $\bar{Z}$ когерентный алгебраический пучок $\bar{\mathfrak{F}}$ (см. [6], п. 41). Ограничение этого пучка на открытое множество V обозначим через $\mathfrak{F}$.

Предложение 3. Пучок $\mathfrak{F}$ изоморфен прямой сумме обратимых пучков $\mathfrak{F}_{D_i}$, $i = 0, \dots, p-1$, соответствующих дивизорам D_i : $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{D_0} \oplus \dots \oplus \mathfrak{F}_{D_{p-1}}$. Дивизоры D_i определяются условиями $L_1 \dots L_i = 0$, $x = 0$, $i \geq 1$; $D_0 = 0$.

Доказательство. Модуль $\mathfrak{A}$ над $\bar{\mathfrak{Z}}$ порождается, очевидно, p^2 элементами $e^i f^j$, $0 \leq i, j < p$, но ввиду соотношения $ef = u \in \bar{\mathfrak{Z}}$ также и $2p-1$ элементами e^i , f^j , $0 \leq i, j < p$. Между этими элементами существуют соотношения:

$$\begin{aligned} e^k y &= f^{p-k} P_k, & f^{p-k} x &= Q_k, & P_k &= L_1 \dots L_k, \\ Q_k &= L_{k+1} \dots L_p, \end{aligned} \quad (8)$$

которое легко доказывается индукцией, используя (6) и то, что

$$x = e^p, \quad y = f^p .$$

Обозначим через $\bar{K}$ поле частных кольца $\bar{\mathfrak{Z}}$ и положим $M_i = \mathfrak{A} \cap e^i \bar{K}$, $i = 0, 1, \dots, p-1$. Из предшествующих замечаний следует, что $\mathfrak{A} = \bigoplus M_i$ (как $\bar{\mathfrak{Z}}$ -модуль) и M_i порождается элементами e^i и f^{p-i} . Легко проверить, рассматривая в отдельности каждое множество

$$\begin{aligned} P_k &\neq 0, & Q_k &\neq 0, \\ x &\neq 0, & y &\neq 0, \end{aligned}$$

что пучок, соответствующий модулю M_k , определяется соотношениями (8) над множеством V . С другой стороны, этими же соотношениями определяется пучок, соответствующий идеалу (P_k, x) , что и доказывает предложение.

Так как пучок $\mathfrak{F}$ локально свободен, то он определяет векторное расслоение $E \rightarrow B$. Рассматривая $\mathfrak{A}$ как левый L -модуль, мы определим в этом расслоении структуру семейства представлений.

Вычислим эту структуру. Для этого заметим, что эндоморфизм α расслоения $\oplus_i \mathfrak{F}_{D_i}$ задается матрицей α_{ij} , где $\alpha_{ij} \in \text{Hom}(\mathfrak{F}_{D_i}, \mathfrak{F}_{D_j})$, $0 \leq i, j < p$. Так как $\text{Hom}(\mathfrak{F}_{D_i}, \mathfrak{F}_{D_j}) \simeq \Gamma(\mathfrak{F}_{D_j - D_i})$, то всякий эндоморфизм расслоения E определяется системой элементов $\alpha_{ij} \in \bar{\mathfrak{Z}}$, $\alpha_{ij} \equiv 0 \ (D_j - D_i)$ на B .

Предложение 4. Семейство представлений $E \rightarrow B$ определяется гомоморфизмом $\varphi: L \rightarrow \text{End} E$, где

$$\begin{aligned} \varphi(e)_{i,i+1} &= 1, & i &= 1, \dots, p-1, & \varphi(e)_{p-1,p} &= x, \\ \varphi(f)_{i,i-1} &= L_i, & i &= 0, 1, \dots, p-1, \\ \varphi(h)_{i,i} &= h + 2i, & i &= 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (9)$$

и все невыписанные компоненты равны 0.

Доказательство. Если элемент $a \in L$ таков, что эндоморфизм $\varphi(a)$ переводит подрасслоение F_{D_i} в F_{D_j} , то элемент $\alpha_{ij} = \varphi(a)_{ij} \in \bar{K}$ определяется из условия $am = m'\alpha_{ij}$ для всех $m \in M_i$, $m' \in M_j$. Для определения элемента α_{ij} достаточно положить $m = e^i$. Первая и третья группы формул (9) становятся тогда очевидными. Вторая группа формул вытекает из тождеств $fe^i = e^{i-1}L_i$, являющихся простыми следствиями (8).

Введем в E структуру семейства жестких представлений при помощи сечения, соответствующего элементу 1 алгебры $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. Построенное семейство представлений E является универсальным для всех семейств жестких неприводимых p -мерных представлений алгебры A_1 .

Пусть X — произвольная k -схема. Для доказательства теоремы достаточно построить отображение $\beta: M_X \rightarrow \text{Hom}(X, B)$, обратное отображению α . Пусть $\xi: E' \rightarrow X$ — семейство жестких представлений с жесткостью, определяемой сечением s . Тогда определен гомоморфизм $\mathfrak{A} \rightarrow \text{End} E'$, причем для элемента $u \in \bar{\mathfrak{Z}}$ сечения $u \cdot s$ и u линейно зависимы в любой точке — для $u \in \bar{\mathfrak{Z}}$ это следует, как уже указывалось, из неприводимости представления, а для $u = h$ — из определения жесткости. Поэтому $us = \lambda_u s$, $\lambda_u \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. Мы получаем гомоморфизм $\bar{\mathfrak{Z}}$ в $\Gamma(X, \mathcal{O})$ и тем самым морфизм $f: X \rightarrow \bar{\mathfrak{Z}}$. Рассмотрим когерентный пучок $\bar{\mathfrak{F}}$, который $\mathfrak{A}$ определяет над $\bar{\mathfrak{Z}}$. Мы построим гомоморфизм пучка $f^* \bar{\mathfrak{F}}$ над X в пучок $\mathcal{E}'$, соответствующий расслоению E' . Этот гомоморфизм мы построим сначала

над аффинными открытыми множествами в X . Пусть X_0 — аффинное открытое множество в X , $X_0 = \text{Spec } A$, M' — модуль над A , соответствующий E' , и $\sigma \in M'$ соответствует s . Из того, что E' — семейство представлений, следует, что M' является $\mathfrak{A}$ -модулем и действие $\mathfrak{A}$ перестановочно с действием A .

Морфизм f определяет гомоморфизм $\varphi: \bar{\mathfrak{Z}} \rightarrow A$. Пучку $\bar{\mathfrak{F}}$ над $\bar{\mathfrak{Z}}$ соответствует $\mathfrak{A}$, как $\mathfrak{Z}$ -модуль, а $f^*\bar{\mathfrak{F}}$ — модуль $M'' = \mathfrak{A} \otimes_{\bar{\mathfrak{Z}}} A$. Построим отображение $h: \mathfrak{A} \rightarrow M'$, положив $h(v) = v\sigma$. Очевидно, что h является гомоморфизмом модулей, согласованным с φ . Поэтому он определяет гомоморфизм $h^*: f^*\bar{\mathfrak{F}} \rightarrow \mathcal{E}'$ над X_0 . Из конструкции ясно, что таким образом получается единый гомоморфизм над X .

Обозначим через $\mathfrak{m}_x$ максимальный идеал локального кольца $\mathcal{O}_x$ точки x . Гомоморфизм h^* определяет гомоморфизмы векторных пространств над k :

$$h_x^*: \mathfrak{F}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathfrak{F}_{f(x)} \rightarrow E'_x,$$

которые являются, как легко видеть, ненулевыми гомоморфизмами L -модулей. Ввиду неприводимости E'_x отсюда следует, что все h_x^* эпиморфны.

Если $f(x) \in \bar{S}$, то, согласно предложению 2, все композиционные факторы L -модуля $\mathfrak{F}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathfrak{F}_{f(x)}$ имеют размерность меньше чем p , откуда следует, что $f(X) \subset B$. Мы будем дальше рассматривать f как морфизм X в B . Если $f(x) \notin \bar{S}$, то модуль $\mathfrak{F}_{f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)}\mathfrak{F}_{f(x)}$ изоморфен E'_x , и поэтому h_x^* должен быть изоморфизмом.

Мы можем теперь определить отображение β , положив $\beta(\xi) = f$. Остается доказать, что $\beta\alpha = 1$ и $\alpha\beta = 1$. Первое утверждение является, как легко видеть, тавтологией. Второе означает, что если $\xi: E' \rightarrow X$, а $f: X \rightarrow B$ — соответствующий морфизм, то f^*E и E' — изоморфизмы. Выше мы построили гомоморфизм h^* расслоения f^*E в E' и доказали, что на любом слое h^* индуцирует изоморфизм. Отсюда следует, что h является изоморфизмом, а это и доказывает теорему.

4. Вырождения неприводимых представлений

Пучок $\bar{\mathfrak{F}}$ не локально свободен в точках $\bar{s} \in s$ многообразия $\bar{\mathfrak{Z}}$. Мы построим многообразие $\mathfrak{B}$, бирационально изоморфное $\bar{\mathfrak{Z}}$, на котором $\bar{\mathfrak{F}}$ локально свободен. Возьмем настолько мелкое покрытие U_α многообразия $\bar{\mathfrak{Z}}$, что в каждом U_α содержится не больше одной точки множества $\bar{S}$. Обозначим через $D(F)$ открытое множество,

состоящее из точек, где $F(x) \neq 0$. Пусть

$$F_{ij} = \prod_{k \neq i, k \neq j} L_k, \quad i < j.$$

Тогда уравнение многообразия $\bar{Z}$ примет вид

$$L_i L_j F_{ij} = xy.$$

Точка s_{ij} : $L_i = 0$, $L_j = 0$, $x = 0$, $y = 0$ является особой на этом многообразии. Разрешим ее, сделав обобщенный σ -процесс в объемлющем пространстве (h, u, x, y) вдоль подпространства $L_i = 0$, $y = 0$. На B этот процесс индуцирует изоморфизм. Рассмотрим преобразование, которое на U_α , содержащем точку s_{ij} , $i < j$, индуцируется σ -процессом, а во всех остальных U_α тождественное. Объединяя их, мы получим многообразие $\mathfrak{B}$ и морфизм $\pi : \mathfrak{B} \rightarrow \bar{Z}$, который является изоморфизмом на $\mathfrak{B} - \pi^{-1}(\bar{S})$ и разрешает каждую особую точку s_{ij} в проективную прямую (последнее получается простым вычислением).

На многообразии $\bar{Z}$ был определен когерентный пучок $\mathfrak{F}$. Положим $\mathfrak{G} = \pi^* \mathfrak{F}$ и докажем, что $\mathfrak{G}$ локально свободен. По построению в $\pi^{-1}(U_\alpha)$, $U_\alpha \ni s_{ij}$, $\mathfrak{B}$ задается уравнениями

$$L_i L_j F_{ij} = xy, \quad L_i t_0 = y t_1 \quad (10)$$

в $\mathbf{A}^4 \times \mathbf{P}^1$, где $(t_0 : t_1)$ — координаты на $\mathbf{P}^1$. Пусть, например, $t_0 \neq 0$. Это аффинное открытое множество V является спектром некоторого кольца A , причем $t_1 t_0^{-1} = L_i y^{-1} \in A$. Пусть ограничение $\mathfrak{G}$ на V соответствует модулю $M = \mathfrak{A} \otimes_{\bar{\mathfrak{A}}} A$. Элементы $f^k \otimes 1$ и $e^k \otimes 1$ порождают M над A . Формулы (8) дают:

$$\begin{aligned} e^n y &= f^{p-n} \delta_n, & \text{если} & \quad 0 < n < i, \\ e^n y &= f^{p-n} L_i \delta_n, & \text{если} & \quad i \leq n < j, \\ f^{p-n} x &= e^n \varepsilon_n, & \text{если} & \quad j \leq n < p, \end{aligned}$$

где $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathfrak{F}$ обратимы в A . Отсюда сразу видно, что $e^k \otimes 1$, $0 \leq k < i$, $f^{p-k} \otimes 1$, $i \leq k < p$, являются образующими M . Так как число их равно p , то они будут свободными образующими. Это и значит, что модуль M свободен, а пучок $\mathfrak{G}$ локально свободен.

Так как на пучке $\mathfrak{F}$ действовала алгебра $\mathfrak{A}$, то это верно и для $\mathfrak{G}$, который тем самым определяет семейство p -мерных представлений.

Мы введем в это семейство жесткость при помощи сечения $1 \otimes 1$. Обозначим полученное семейство $U \rightarrow \mathfrak{B}$. Назовем *p-семейством* семейство жестких неприводимых представлений алгебры A_1 , у которого слои над точками некоторого открытого всюду плотного множества неприводимы и слой в каждой точке x порождается векторами $\mathfrak{A} \cdot s(x)$, где s — жесткость. В частности, семейство $U \rightarrow \mathfrak{B}$ является *p-семейством*.

Пусть X есть k -схема, M_X — множество *p-семейств* с базой X . Пусть $E \rightarrow Y$ есть *p-семейство* и $Y_0 \subset Y$ — открытое всюду плотное множество, над точками которого слои неприводимы. Обозначим $\text{Hom}^0(X, Y)$ множество таких отображений $f \in \text{Hom}(X, Y)$, что $f^{-1}Y_0$ всюду плотно в X . Тогда f^*E есть *p-семейство* над X . Таким образом, возникает отображение $\alpha : \text{Hom}^0(X, Y) \rightarrow M_X$; *p-семейство* $E \rightarrow Y$ называется *универсальным*, если α взаимно однозначно для любого *p-семейства* X .

Теорема 2. *p-семейство* $U \rightarrow \mathfrak{B}$ универсально.

Пусть $E \rightarrow X$ есть *p-семейство*, s — жесткость, $h \cdot s = a \cdot s$, $a \in \Gamma(X, \mathcal{O})$. Тогда $(h - a)^p - (h - a)$ коммутирует в $\text{End } E$ со всеми $u \in \mathfrak{A}$, равен 0 на s и тем самым, ввиду того что E есть *p-семейство*, равен 0 на всем E . В кольце $\mathbb{F}_p[T]$ имеем равенство

$$T^p - T = \prod_{k \in \mathbb{F}_p} (T - k).$$

Дифференцируя, получаем

$$-1 = \sum_{l \in \mathbb{F}_p} \prod_{k \in \mathbb{F}_p \setminus l} (T - k).$$

Обозначим

$$P_l(T) = - \prod_{k \in \mathbb{F}_p \setminus l} (T - k).$$

Тогда

$$\sum_{l \in \mathbb{F}_p} P_l(h - a) = 1, \quad P_l(h - a)P_k(h - a) = 0$$

на E , $l \neq k$, так как $(h - a)^p = h - a$. Поэтому

$$E = \oplus P_l(h - a)E.$$

Подрасслоения $P_l(h-a)E$ одномерны, так как если слой над точкой x неприводим, то $(P_l(h-a)E)_x$ одномерны.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} e^k P_l(h-a)E &= P_{l-2k}(h-a)E, \\ f^k P_l(h-a)E &= P_{l+2k}(h-a)E. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы достаточно построить обратное отображение $\beta : M_X \rightarrow \text{Hom}^0(X, \mathfrak{B})$. Пусть $\xi^i : E \rightarrow X$ есть p -семейство, s — жесткость. Так как s — весовой вектор, us и s линейно зависимы в каждой точке для любого $u \in \bar{\mathfrak{Z}}$. Положим $us = \lambda_u s$. Это определяет гомоморфизм $\bar{\mathfrak{Z}} \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})$ и тем самым отображение $\bar{f} : X \rightarrow \bar{\mathfrak{Z}}$. Надо построить $f : X \rightarrow \mathfrak{B}$, чтобы $\pi f = \bar{f}$. Определим f на аффинных открытых подмножествах X . Пусть W — аффинное открытое подмножество X . Если $\bar{f}(W) \subset \bar{\mathfrak{Z}} \setminus \bar{S}$, то f на W сразу определяется условием $\pi f = \bar{f}$. Пусть W таково, что $\bar{f}(W) \subset U_\alpha$, $U_\alpha \ni s$. Пусть x — произвольная точка W , E_x — слой семейства над x , $k_x = \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$, s — жесткость в E_x ,

$$E_x = E_0 \oplus \dots \oplus E_{p-1}$$

— разложение, соответствующее разложению M . Все E_k одномерны, $E_0 = k_x s$. Ясно, что подпространство, порожденное $\mathfrak{A}s$, совпадает с подпространством, порожденным $e^k s$, $f^l s$, и его пересечение с E_{-2i} есть $k_x e^i s + k_x f^{p-i} s$. По определению p -семейства $E_{-2i} \neq 0$, откуда или $e^i s(x)$, или $f^{p-i} s(x)$ не равно 0.

Если $e \in E_{-2i}$, $e \neq 0$, то

$$e^i s(x) = \alpha(x)e, \quad f^{p-1} s(x) = \beta(x)e$$

и, таким образом, $x \rightarrow (\beta(x) : \alpha(x))$ определяет морфизм $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Пусть $f = (\bar{f}, \bar{f}) : W \rightarrow \bar{\mathfrak{Z}} \times \mathbf{P}^1$. Мы можем считать, что f отображает W в $\mathbf{A}^4 \times \mathbf{P}^1$ и для $P \in f(W)$ удовлетворяются (10), что легко непосредственно проверить. Таким образом, мы имеем морфизм $f : W \rightarrow \mathfrak{B}$. Эти морфизмы для различных открытых множеств W согласованы и определяют морфизм $\beta : X \rightarrow \mathfrak{B}$. Остается проверить, что $\alpha\beta = 1$ и $\beta\alpha = 1$. Это доказывается при помощи рассуждения, совершенно аналогичного тому, какое было использовано в соответствующем месте доказательства теоремы 1. Роль

неприводимости представления E_X играет теперь то, что E_X порождается вектором $s(x)$.

(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР)

Поступило 15.VI.1967

Литература

- [1] Curtis C., *Representations of Lie algebras of classical type with applications to linear groups*, J. Math. and Mech. **9** (1960), 307–326.
- [2] Zassenhaus H., *The representations of Lie algebras of prime characteristic*, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2** (1954), 1–36.
- [3] Grothendieck A., *Fondements de la géométrie algébrique*, Paris, 1962. (препринт)
- [4] Джекобсон Н., *Алгебры Ли*, М., 1964.
- [5] Джекобсон Н., *Теория колец*, М., 1947.
- [6] Серр Ж. П., *Алгебраические когерентные пучки*, Сб. переводов “Расслоенные пространства и их приложения”, М., 1958.

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР, СЕР. МАТЕМ., 33 (1969), 251-322

(с А. И. Кострикиным)

Резюме. Дано инвариантное описание конечномерных алгебр картановского типа и, при некоторых ограничениях, получено отождествление с ними абстрактных градуированных алгебр Ли, определенных над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 7$.

Введение

Эта статья содержит попытку нового подхода к проблеме классификации простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$. Во введении мы опишем постановку вопроса, основные результаты и план работы.

1. Классические алгебры. Как известно, простые алгебры Ли, определенные над полями характеристики 0, имеют естественные аналоги над полями характеристики $p > 0$. В основе их определения лежит процесс редукции по модулю p . Именно, согласно Шевалле [25], каждая простая алгебра Ли $\mathfrak{L}$ над полем комплексных чисел обладает стандартным базисом, элементы которого определены однозначно с точностью до множителей ± 1 или с точностью до автоморфизма алгебры $\mathfrak{L}$. Структурные константы относительно этого базиса целочисленны. Поэтому можно рассмотреть алгебру с той же таблицей умножения, определенную над произвольным полем k . Для алгебр, получающихся на этом пути из простых алгебр Ли типов $A_n, B_n, \dots$, мы сохраняем аналогичные обозначения $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n$ и т. д.

Те же алгебры можно характеризовать и другими свойствами. Например, они совпадают с алгебрами Ли простых алгебраических

групп, определенных над алгебраически замкнутым полем k . С другой стороны, если (при $p > 5$) рассмотреть класс неразложимых в прямую сумму алгебр, которые в каком-либо точном представлении обладают невырожденной симметрической билинейной формой, то мы придем к тем же алгебрам, исключая алгебры $\tilde{A}_n$, $n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, на которых такой формы нет [3].

Из всех алгебр описанного типа лишь алгебры $\tilde{A}_n$, $n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, не являются простыми, обладая одномерным центром, фактор по которому прост. Простые факторалгебры алгебр $\tilde{A}_n, \tilde{B}_n, \dots, \tilde{E}_8$ мы будем снова обозначать через $A_n, B_n, \dots, E_8$ и называть классическими алгебрами Ли. Таким образом, $A_n = \tilde{A}_n$ при $n + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $B_n = \tilde{B}_n, \dots, E_8 = \tilde{E}_8$. Все классические алгебры являются p -алгебрами Ли [19].

2. Алгебры картановского типа. В отличие от того, что имеет место над полями нулевой характеристики, классические алгебры далеко не исчерпывают всех простых алгебр Ли или хотя бы простых p -алгебр Ли над полем характеристики p . Первый пример неклассической алгебры был построен Виттом еще в тридцатых годах, и впоследствии было найдено много аналогичных примеров, относящихся как к p -алгебрам, так и к простым алгебрам Ли, не являющимся p -алгебрами.

В заметке [21] мы обратили внимание на тот факт, что все известные в настоящее время примеры простых неклассических p -алгебр Ли поразительно похожи на простые бесконечномерные алгебры Ли, возникающие в теории псевдогрупп Э. Картана [4]. Более подробно, в теории Картана основную роль играют четыре серии алгебр Ли над полем k характеристики 0. Все эти алгебры состоят из (непрерывных) дифференцирований кольца $k[[x_1, \dots, x_n]]$ формальных степенных рядов, т. е. из операторов вида

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in k[[x_1, \dots, x_n]].$$

Определения отдельных серий таковы:

- 1⁰. Все дифференцирования кольца $k[[x_1, \dots, x_n]]$.
- 2⁰. Все дифференцирования $\mathcal{D}$, удовлетворяющие условию $\mathcal{D}\omega = 0$, $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.
- 3⁰. Все дифференцирования, удовлетворяющие при $n = 2n'$ условию $\mathcal{D}\omega = 0$, где ω — невырожденная двумерная дифференциальная форма с постоянными коэффициентами, т. е.

$$\omega = \sum \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad \alpha_{ji} = -\alpha_{ij}, \quad \det(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

4⁰. Все дифференцирования, удовлетворяющие при $n = 2n' + 1$ условию $\mathcal{D}\omega = f\omega$, где f — зависящая от $\mathcal{D}$ функция из $k[[x_1, \dots, x_n]]$, а ω — одномерная дифференциальная форма с полиномиальными коэффициентами степени ≤ 1 и невырожденным дифференциалом $d\omega$.

Определение этих простых (при $\text{char } k = 0$) алгебр Ли сохраняет смысл и в случае поля k характеристики $p > 0$, однако теперь они уже перестают быть простыми — в каждой из алгебр дифференцирования $\mathcal{D} = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ с $f_i \in (x_1^p, \dots, x_n^p)$ образуют идеал конечной коразмерности. В случаях 1⁰, 2⁰, 3⁰ и 4⁰ мы обозначим соответствующие факторалгебры Ли через W_n , $\tilde{S}_{n-1}$, $\tilde{H}_{n'}$ и $\tilde{K}_{n'+1}$. Иначе эти алгебры можно описать как алгебры тех дифференцирований кольца $k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p, \dots, x_n^p)$, которые удовлетворяют одному из условий типа 1⁰, 2⁰, 3⁰ и 4⁰. Введем еще алгебры S_{n-1}^* и $H_{n'}^*$, в которых условия 2⁰ и 3⁰ заменены условием $\mathcal{D}\omega = c\omega$, $c \in k$. Очевидно, что $\tilde{S}_{n-1}$ — идеал в S_{n-1}^* , $\tilde{H}_{n'}$ — идеал в $H_{n'}^*$ и $\dim S_{n-1}^*/\tilde{S}_{n-1} = \dim H_{n'}^*/\tilde{H}_{n'} = 1$.

Построенные алгебры Ли или являются простыми, или очень мало отличаются от простых. Именно, алгебра W_n проста, а алгебры $\tilde{S}_n$, $\tilde{H}_n$, $\tilde{K}_n$ содержат такие идеалы $S_n \subset \tilde{S}_n$, $H_n \subset \tilde{H}_n$, $K_n \subset \tilde{K}_n$, являющиеся простыми алгебрами, что факторы по ним абелевы, за единственным исключением алгебр $\tilde{S}_1$ и $\tilde{H}_1$ (они изоморфны), когда $\tilde{S}_1/S_1$ — трехмерная нильпотентная неабелева алгебра.

Как и в [21], алгебры W_n , S_n , H_n и K_n мы будем называть общей, специальной, гамильтоновой и контактной алгебрами соответственно. Обратим, однако, внимание на следующее обстоятельство. В отличие от [21] нижний индекс у W_n , S_n , H_n , K_n указывает теперь на реализацию элементов этих алгебр дифференцированиями кольца $k[x_1, \dots, x_s]/(x_1^p, \dots, x_s^p)$ от числа переменных $s = n, n+1, 2n$ и $2n-1$ соответственно и имеет, приблизительно, тот же внутренний смысл, что и нижний индекс в обозначениях алгебр классического типа. Они являются p -алгебрами и исчерпывают все известные нам примеры неклассических простых p -алгебр Ли (при $p > 5$).

Приведенная конструкция может быть обобщена так, что она будет давать простые алгебры Ли, не являющиеся p -алгебрами. Для этого фиксируем последовательность натуральных чисел $m_1, \dots, m_n$. Вместо кольца $k[x_1, \dots, x_n]$ рассмотрим алгебру разделенных степеней от n переменных, а в качестве аналога кольца $k[x_1, \dots, x_n]/(x_1^p, \dots, x_n^p)$ — подалгебру O алгебры разделенных степеней, порожденную элементами $x_i^{(p^j)}$, $0 \leq j < m_i$. В O рассмотрим диффе-

ренцирования $\partial_i : x_1^{(\alpha_1)} \dots x_n^{(\alpha_n)} \rightarrow x_1^{(\alpha_1)} \dots x_i^{(\alpha_i-1)} \dots x_n^{(\alpha_n)}$. Алгебры Ли дифференцирований $\mathcal{D} = \sum f_i \partial_i$, $f_i \in O$, удовлетворяющих условиям $1^0, 2^0, 3^0$ и 4^0 , мы будем по-прежнему обозначать через $W, \tilde{S}, \tilde{H}, \tilde{K}$, опуская, однако, нижние индексы. Простые алгебры W, S, H и K определяются аналогично предыдущему, и за ними также закрепляется название алгебр картановского типа. Их инвариантное описание, не зависящее от выбора образующих $x_1, \dots, x_n$, дано в §3 гл. I. Они являются p -алгебрами Ли лишь при $m_1 = \dots = m_n = 1$.

3. Основные результаты. В работе рассматриваются только градуированные алгебры Ли. Важная роль, которую алгебры картановского типа играют при изучении абстрактных градуированных и, более общо, фильтрованных алгебр Ли, связана с наличием в них естественной фильтрации. Именно, в алгебре $\mathcal{L}$ картановского типа обозначим через $\mathcal{L}_i$ подалгебру, состоящую из таких дифференцирований $\mathcal{D} = \sum f_k \partial_k$, что в f_k входят только одночлены $x_1^{(\alpha_1)} \dots x_n^{(\alpha_n)}$ с $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq i+1$. Подалгебры $\mathcal{L}_i$ определяют фильтрацию $\{\mathcal{L}_i\}$ в $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-1}$, обладающую следующим важным свойством: $\mathcal{L}_{i+1}$, $i \geq 0$, состоит из всех элементов $x \in \mathcal{L}_i$, для которых $[\mathcal{L}, x] \subseteq \mathcal{L}_i$. Таким образом, фильтрация полностью описывается заданием подалгебры $\mathcal{L}_0$. Далее мы будем включать это свойство в определение фильтрованной алгебры, а для градуированной алгебры $L = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$ будем считать, что тем же свойством

обладает фильтрация $\{\mathcal{L}_i; \mathcal{L}_i = \bigoplus_{k \geq i} L_k\}$. С любой фильтрованной алгеброй $\mathcal{L}$ ассоциируется градуированная алгебра $\text{Gr } \mathcal{L}$, содержащая большую информацию об $\mathcal{L}$. В этой связи отметим, что относительно естественной фильтрации все алгебры картановского типа являются даже градуированными, за исключением алгебр серии K . Впрочем, и они обладают градуировкой, в которой, однако, присутствует слагаемое L_{-2} (см. (8) в §7 гл. I).

Важнейшими инвариантами градуированной алгебры

$$L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus \dots \oplus L_r$$

являются подалгебра L_0 и ее представление $\Gamma : L_0 \rightarrow \text{End } L_{-1}$, определенное коммутированием в L .

Основной результат работы — перечисление при $p > 7$ всех градуированных алгебр Ли, удовлетворяющих условиям: 1) L_0 — p -алгебра, 2) Γ — неприводимое p -представление размерности $\dim L_{-1} < p-1$; 3) $L_2 \neq 0$.

Доказывается, что любая градуированная алгебра с этими свойствами изоморфна либо алгебре W , либо такой подалгебре L алге-

бры S^* (соответственно, H^*), что $S \subseteq L \subseteq S^*$ (соответственно, $H \subseteq L \subseteq H^*$)¹.

Ввиду того, что строение факторов S^*/S и H^*/H очень простое, наш результат дает эффективное описание всех алгебр рассматриваемого типа. В применении к p -алгебрам из этой теоремы легко вывести следующее утверждение.

Если в простой градуированной p -алгебре Ли $L \dim L_{-1} < p-1$, то L изоморфна или классической простой алгебре, или p -алгебре картановского типа.

4. План работы. В любой градуированной алгебре Ли L пространства L_i , $i \geq 1$, "ограничены сверху" в терминах алгебры L_0 и ее представления Γ в пространстве L_{-1} . Именно, всегда $L_i \subseteq L^{(i)}$, где $L^{(i)}$ (i -е продолжения Картана) определяются индуктивно, начиная с $L^{(0)} = L_0$; $L^{(i+1)} \subseteq \text{Hom}(L_{-1}, L^{(i)})$ состоит из таких гомоморфизмов $f: L_{-1} \rightarrow L^{(i)}$, для которых

$$f(x)(y) = f(y)(x), \quad x, y \in L_{-1}$$

(надо помнить, что $f(x) \in L^{(i)} \subseteq \text{Hom}(L_{-1}, L^{(i-1)})$).

Глава II посвящена нахождению всех p -алгебр L_0 и их неприводимых p -представлений Γ в пространстве L_{-1} , $\dim L_{-1} < p-1$, для которых $L^{(2)} \neq 0$. Ответ очень прост: L_0 может быть только одной из алгебр $A_n, C_n, A_n \oplus k, C_n \oplus k$, а Γ — ее стандартным представлением, т. е. имеет место тот же результат, что и над полями характеристики 0 [13].

К сожалению, доказательство не обошлось без переборов. Сначала, исходя из общих свойств весов, мы приходим к довольно ограниченному запасу возможностей, которые все сведены в таблице в §4 гл. II. Множество получающихся таким образом алгебр и их представителей имеет простой смысл: это, во-первых, алгебры и представления указанных выше четырех типов и, во-вторых, те алгебры и неприводимые представления, которые встречаются в градуированных классических алгебрах Ли [13]. Для всех алгебр и представлений последнего типа приходится сначала явно вычислять первое продолжение $L^{(1)}$, а потом доказывать, что $L^{(2)} = 0$. В этой части, следовательно, мы имеем дело скорее с проверкой, чем с доказательством.

В главе III для возможных типов L_0 и Γ с условием $L^{(2)} \neq 0$ строятся все модули $L^{(i)}$ и показывается, что они приводят к небольшому числу указанных выше алгебр картановского типа. В

¹ См. примечание в конце статьи

случае простых p -алгебр условие $L^{(2)} = 0$ выделяет классические алгебры.

Глава I имеет самостоятельное значение и содержит всю необходимую информацию об алгебрах кэртановского типа, включая вопрос об их простоте, условия быть p -алгебрами и пр. В частности, доказывается, что *существует только конечное число неизоморфных алгебр кэртановского типа заданной размерности*. Это не очевидно, так как определение алгебр типов H и K зависит от выбора формы ω .

В конце работы приведен пример, показывающий существенность ограничения $\dim L_{-1} < p - 1$. Именно, строится градуированная p -алгебра L с $\dim L_{-1} = p - 1$, неинволютивным представлением Γ и $L_2 \neq 0$, неизоморфная, как градуированная алгебра, ни одной из алгебр кэртановского типа. Впрочем, это относится только к ее структуре градуированной (или фильтрованной) алгебры. Без учета такой структуры — это алгебра H_1 .

5. Роль фильтрации $\{\mathcal{L}_i\}$. Примеры, аналогичные вышеупомянутому, свидетельствуют о том, что кроме естественной фильтрации $\{\mathcal{L}_i\}$, определенной в п. 3, алгебра кэртановского типа обладает и другими, так сказать, патологическими фильтрациями. В главе I мы рассматриваем один из возможных способов задания естественной фильтрации $\{\mathcal{L}_i\}$ в p -алгебрах кэртановского типа, отличающихся от первоначального тем, что подалгебра $\mathcal{L}_0$, по которой восстанавливается вся фильтрация, определяется целиком структурными свойствами алгебры. Суть этого определения основана на простом замечании, что в любой p -алгебре кэртановского типа существуют элементы $x \neq 0$, для которых $(\text{ad } x)^2 = 0$. Порожденная ими подалгебра $\mathcal{C}$ имеет нормализатором как раз алгебру $\mathcal{L}_0$.

Таким образом, *все подалгебры $\mathcal{L}_i$ определяются внутренним образом и, в частности, инварианты относительно всех автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}$* , хотя, конечно, они не являются идеалами. Это интересное явление связано с наличием нильпотентных элементов в схемах автоморфизмов алгебр кэртановского типа. Мы доказываем и другую внутреннюю характеристику алгебры $\mathcal{L}_0$ — *она является максимальной подалгеброй алгебры $\mathcal{L}$, инвариантной относительно всех ее автоморфизмов, т. е. содержит все другие инвариантные подалгебры*.

В заключение отметим, что в настоящей статье доказывается в одном отношении больше, а в другом — меньше, чем в заметке [21]; больше, так как теперь мы рассматриваем не только случай p -алгебр, а также не требуем выполнения неравенства $\dim L_0 < p$, и меньше, поскольку здесь мы ограничиваемся рассмотрением

градуированных алгебр.

ГЛАВА I. АЛГЕБРЫ КАРТАНОВСКОГО ТИПА

§1. Бесконечномерные алгебры Ли конечной характеристики

В теории Картана бесконечномерные алгебры Ли реализуются в качестве алгебр дифференцирований кольца степенных рядов. Над полями конечной характеристики естественным аналогом алгебры полиномов является алгебра разделенных степеней. Мы опишем сейчас эту алгебру (см. также, например, [5]).

1. Алгебра разделенных степеней. Всюду в дальнейшем k — поле характеристики $p > 0$, E — конечномерное векторное пространство над k . Напомним, что алгебра разделенных степеней над E задается образующими $x^{(h)}$, $x \in E$, $h \in \mathbb{Z}$, $h \geq 0$, и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned}(x+y)^{(h)} &= \sum_{i=0}^h x^{(i)} y^{(h-i)}, & x, y \in E, \\ (\alpha x)^{(h)} &= \alpha^h x^{(h)}, \\ x^{(k)} x^{(l)} &= \binom{k+l}{k} x^{(k+l)}, \\ x^{(0)} &= 1.\end{aligned}$$

Алгебру разделенных степеней над пространством E мы обозначим через $O(E)$. Ее элементами являются “полиномы”

$$\sum \alpha_{h_1 \dots h_n} x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)},$$

где $x_1, \dots, x_n$ — базис пространства E .

Введем в $O(E)$ градуировку, в которой $\deg x^{(h)} = h$, $x \in E$:

$$O(E) = \sum_{i \geq 0} O(E)_i.$$

Соответствующая фильтрация будет обозначаться через $\{m^{(i)}\}$:

$$m^{(i)} = \sum_{k \geq i} O(E)_k.$$

2. Специальные дифференцирования алгебры $O(E)$. Рассмотрим дифференцирования $\mathcal{D}$ алгебры $O(E)$, обладающие тем свойством, что

$$\mathcal{D}(x^{(h)}) = x^{(h-1)}\mathcal{D}(x)$$

для всех $x \in E$. Назовем их специальными дифференцированиями. Простая проверка показывает, что специальные дифференцирования образуют подалгебру Ли и $O(E)$ — подмодуль в алгебре всех дифференцирований алгебры $O(E)$. Алгебру специальных дифференцирований обозначим символом $W(E)$.

ТЕОРЕМА 1. Алгебра $W(E)$ является свободным $O(E)$ -модулем ранга $n = \dim_k E$.

Доказательство. Обозначим через E^* пространство, дуальное к E . Для любого $\xi \in E^*$ отображение

$$\partial_\xi : x^{(h)} \rightarrow x^{(h-1)}\xi(x), \quad x \in E,$$

продолжается до специального дифференцирования, которое мы обозначим тоже через ∂_ξ . Выберем в E базис $\{x_1, \dots, x_n\}$, обозначим через $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ дуальный базис E^* и положим $\partial_i = \partial_{\xi_i}$. Мы проверим, что ∂_i образует свободный базис алгебры $W(E)$ над $O(E)$. Для $\mathcal{D} \in W(E)$ положим $\mathcal{D}(x_i) = f_i \in O(E)$. Тогда дифференцирования $\mathcal{D}$ и $\sum f_i \partial_i$ совпадают на E . Но специальное дифференцирование, очевидно, определяется своим действием на E , откуда

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i. \quad (1)$$

Однозначность такого представления следует из того, что $f_i = \mathcal{D}(x_i)$.

3. Дифференциальные формы. Модуль $\text{Hom}_{O(E)}(W(E), O(E))$ обозначим через $\Omega^1(E)$, а его внешнюю r -ю степень $\bigwedge^r \Omega^1(E)$ над $O(E)$ — через $\Omega^r(E)$. Для $f \in O(E)$ элемент $df \in \Omega^1(E)$ определяется равенством

$$(df)(\mathcal{D}) = \mathcal{D}f, \quad \mathcal{D} \in W(E).$$

Очевидно, что

$$d(f + g) = df + dg, \quad dfg = fdg + gdf,$$

и если $\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис E , то элементы

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_r,$$

составляют свободный базис $\Omega^r(E)$ над $O(E)$. Кольцо

$$\Omega(E) = \bigoplus \Omega^r(E)$$

является градуированной алгеброй над $O(E)$, в которой определен дифференциал

$$d : \Omega(E) \rightarrow \Omega(E),$$

продолжающий дифференциал d с $O(E)$ и имеющий степень 1. Любое дифференцирование $\mathcal{D}$ алгебры $O(E)$ может быть единственным образом продолжено на $\Omega(E)$ как дифференцирование этой алгебры, перестановочное с дифференциалом d .

В частности, для любого специального дифференцирования $\mathcal{D}$ и дифференциальной формы $\omega \in \Omega^r(E)$ определена форма $\mathcal{D}\omega \in \Omega^r(E)$.

4. Серии простых алгебр Ли. Теперь мы можем ввести четыре основные серии бесконечномерных алгебр Ли.

1) Алгебра $W(E)$ уже определена в п. 2.

2) Алгебра $S(E)$ состоит из всех $\mathcal{D} \in W(E)$, для которых $\mathcal{D}\omega = 0$. Здесь $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, где $\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис E , $n > 2$.

3) Предположим, что $\dim E = n = 2n'$, $n' \geq 1$. Алгебра $H(E)$ состоит из всех $\mathcal{D} \in W(E)$, для которых $\mathcal{D}\omega = 0$. Здесь

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n'+i}, \{x_1, \dots, x_n\}$$

— базис E .

4) Предположим, что $n = \dim E$ нечетно, $(n-1)/2 = n' \geq 1$. Алгебра $K(E)$ состоит из всех $\mathcal{D} \in W(E)$, для которых $\mathcal{D}\omega = u\omega$, $u \equiv u(\mathcal{D}) \in O(E)$. Здесь

$$\omega = dx_n + \sum_{i=1}^{n'} (x_i dx_{n'+i} - x_{n'+i} dx_i),$$

$\{x_1, \dots, x_n\}$ — базис E .

Алгебры всех четырех серий $W(E)$, $S(E)$, $H(E)$, $K(E)$ являются простыми алгебрами Ли. Доказательство этого несложно и сразу же вытекает из тех рассуждений, которые будут дальше применяться для доказательства более тонких фактов.

§2. Инвариантные подалгебры алгебры $O(E)$

Цель этого параграфа — описать градуированные подалгебры алгебры $O(E)$, инвариантные относительно всех специальных дифференцирований степени -1 этой алгебры, т. е. дифференцирований ∂_ξ , $\xi \in E^*$. Сначала опишем конструкцию, дающую ответ.

Определение. Под (обобщенным) флагом $\mathcal{F}$ мы будем понимать систему вложенных друг в друга подпространств пространства E :

$$E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_k \supset E_{k+1} = 0 \quad (E_k \neq 0). \quad (1)$$

В последовательности возможны и повторения.

Каждому флагу $\mathcal{F}$ можно сопоставить подалгебру в $O(E)$, порожденную всеми элементами

$$x^{(p^i)}, \quad x \in E_i. \quad (2)$$

Эту алгебру мы обозначим символом $O(\mathcal{F})$. Ввиду конечности флага, она имеет конечную размерность над полем k , которую легко найти. Если $\dim E_i = n_i$ и $\{x_{ij}; j = 1, \dots, n_i\}$ — базис подпространства E_i , то $x_{ij}^{(p^i)}$ — система образующих алгебры $O(\mathcal{F})$. Из строения алгебры разделенных степеней следует, что указанные образующие не связаны другими соотношениями, кроме

$$(x_{ij}^{(p^i)})^p = 0.$$

Поэтому

$$\dim_k O(\mathcal{F}) = p^{n_0 + \dots + n_k}. \quad (3)$$

Так как алгебра $O(\mathcal{F})$ имеет систему образующих (2), состоящую из однородных элементов, то она — градуированная подалгебра в $O(E)$. Ввиду того, что

$$\partial_\xi x^{(p^i)} = x^{(p^{i-1})} \xi(x),$$

а $x^{(p^{i-1})}$ есть полином от $x^{(p^j)}$, $j < i$ (или 1 — при $i = 0$), алгебра $O(\mathcal{F})$ инвариантна относительно всех дифференцирований. Чтобы указать базис алгебры $O(\mathcal{F})$, выберем в каждом подпространстве E_i векторы x_{ij} , образы которых составляют базис в E_i/E_{i+1} (если $E_i = E_{i+1}$, то все x_{ij} заменяются единичным элементом). Тогда одночлены

$$\prod_{i,j} x_{ij}^{(\alpha_{ij})}, \quad 0 \leq \alpha_{ij} < p^{i+1}, \quad (4)$$

составляют базис алгебры $O(\mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 1. Подалгебра $O(\mathcal{F})$ алгебры $O(E)$ совпадает со множеством всех элементов $u \in O(E)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\partial_{\xi}^{p^i}(u) = 0, \quad \xi \in \text{Ann } E_i \subset E^* \quad (5)$$

($\text{Ann } E_i$ — аннулятор подпространства E_i в E^*).

Доказательство. Проверим сначала, что все элементы $u \in O(\mathcal{F})$ удовлетворяют соотношениям (5). Так как $\partial_{\xi}^{p^i}$ — дифференцирование алгебры $O(E)$, то достаточно проверить (5) для образующих из $O(\mathcal{F})$, т. е. для $u = x^{(p^j)}$, $x \in E_j$. Тогда

$$\partial_{\xi}^{p^i} x^{(p^j)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i > j, \\ x^{(p^j - p^i)} \xi(x)^{p^i}, & \text{если } i \leq j. \end{cases}$$

Во втором случае $E_i \supseteq E_j \ni x$, т. е. $\text{Ann } E_j \supseteq \text{Ann } E_i \ni \xi$ и, значит, $\xi(x) = 0$.

Покажем теперь, что любой элемент $u \in O(E)$, удовлетворяющий условиям (5), содержится в $O(\mathcal{F})$. Для этого воспользуемся линейностью условий (5) и тем обстоятельством, что любой элемент $u \in O(E)$ можно представить в виде линейной комбинации одночленов (4) без всяких ограничений на показатели α_{ij} . Действительно, отличные от 1 элементы x_{ij} составляют базис пространства E .

Нам нужно установить, что если для одночлена u выполнены условия (5), то $\alpha_{ij} < p^{i+1}$. Пусть это доказано для всех $i < l$, и предположим, что $\alpha_{ls} \geq p^{l+1}$ для какого-то индекса s . Выберем элемент $\xi \in \text{Ann } E_{l+1}$, для которого $\xi(x_{ls}) = 1$ и $\xi(x_{lj}) = 0$ при $j \neq s$. Тогда

$$\partial_{\xi}^{p^{l+1}}(u) = x_{ls}^{(\alpha_{ls} - p^{l+1})} \prod_{(i,j) \neq (l,s)} x_{ij}^{(\alpha_{ij})} \neq 0,$$

вопреки (5).

Основным результатом этого параграфа является

ТЕОРЕМА 2. Любая градуированная конечномерная подалгебра

$$A = \sum_{s=0}^{\infty} A_s \quad (A_s = 0 \text{ при } s > s_0)$$

алгебры $O(E)$, инвариантная относительно всех дифференцируемых ∂_ξ , $\xi \in E^*$, совпадает с одной из алгебр $O(\mathcal{F})$.

Доказательство. По условию $\partial_\xi A \subset A$, для всех $\xi \in E^*$. Нам надо доказать существование такого флага $\mathcal{F}$, что

$$A_s = O(\mathcal{F})_s \quad (6)$$

для всех s . При $s = 1$, очевидно, достаточно взять флаг $\mathcal{F} : A_1 = E_0 \supset E_1 = 0$ (легко видеть, что $A_0 \cong k$). Докажем равенство (6) индукцией по s , считая, что это уже сделано для значений $s < m$, т. е. что найден флаг

$$\mathcal{F}' : E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_k \supset E'_{k+1} = 0,$$

для которого (6) выполнено при всех $s < m$. В соответствии с определением флага мы можем считать, что $p^k < m$.

Убедимся сначала в том, что всегда

$$A_m \supseteq O(\mathcal{F}')_m.$$

Для этого представим элемент $v \in O(\mathcal{F}')_m$ в виде $v = \prod x_i^{(p^i)}$, $x_i \in E_i$, и напомним, это все $p^i < m$. Другими словами, $v = \prod v_s$, $v_s \in O(\mathcal{F}')_s$, $s < m$, а так как по индуктивному предположению $O(\mathcal{F}')_s = A_s$, то $v_s \in A$ и, значит, $v \in A$.

Далее рассмотрим два случая.

1) $m \neq p^l$. Докажем, что $A_m \subseteq O(\mathcal{F}')_m$. Пусть $u \in A_m$, η — любой элемент из E^* . Тогда $\partial_\eta u \in A_{m-1}$, ввиду инвариантности алгебры A . Поэтому, по индуктивному предположению и согласно теореме 1, $\partial_\xi^i \partial_\eta u = 0$ для $\xi \in \text{Ann } E_i$. Отсюда следует, что $\partial_\eta \partial_\xi^{p^i} u = 0$, а так как $\deg \partial_\xi^{p^i} u = m - p^i \neq 0$ и η — произвольный элемент из E^* , то $\partial_\xi^{p^i} u = 0$. Это и означает, что $u \in O(\mathcal{F}')_m$.

2) $m = p^l$. Рассуждение из п. 1) показывает, что $\partial_\xi^{p^i} u = 0$ для $u \in A_m$ и всех $\xi \in \text{Ann } E_i$, $i < l$. Представив элемент $u \in A_m$ в виде линейной комбинации одночленов (4), мы видим, как и при доказательстве теоремы 1, что отсюда вытекает условие на показатели: $\alpha_{ij} < p^{i+1}$ при $i < l$. Таким образом, A_m содержится в пространстве S , порожденном одночленами степени m , в которых $\alpha_{ij} < p^{i+1}$ при $i < l$. Одночлены, входящие в S , но не в $O(\mathcal{F}')_m$, — это $x_{l-1,j}^{(p^l)}$. Поэтому $S/O(\mathcal{F}')_m \cong E_k$, $k = l - 1$. При этом изоморфизме подпространству A_m соответствует некоторое подпространство в E_k , которое мы обозначим через E_{k+1} . Очевидно, что флаг

$$\mathcal{F} : E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_k \supseteq E_{k+1} \supset E_{k+2} = 0$$

удовлетворяет условию (6) при $s \leq m$.

Замечание. Более инвариантное задание подпространства E_{k+1} можно получить так. Для $u \in A_m$, $m = p^l$ и $\xi \in E^*$ будет, очевидно, $\partial_\xi^{p^l} u \in k$, так что формула

$$(\xi, u) = \partial_\xi^{p^l} u \quad (7)$$

определяет скалярное произведение между элементами пространств E^* и A_m . Обозначим через B подпространство в A_m , являющееся пересечением ядер $\ker \partial_\xi^{p^i}$, $\xi \in \text{Ann } E_i$, $i < l$. Тогда $B \supset O(\mathcal{F})_m$ и скалярное произведение (7) равно нулю для $\xi \in \text{Ann } E_k$ и $u \in O(\mathcal{F})_m$. Поэтому оно определяет спаривание пространств $E^*/\text{Ann } E_k$ и $S/O(\mathcal{F})_m$, а тем самым — пространств $E^*/\text{Ann } E_k$ и $B/O(\mathcal{F})_m$. Теорема 1 показывает, что это спаривание не вырождено по компоненте $B/O(\mathcal{F})_m$ и, значит, определяет вложение

$$B/O(\mathcal{F})_m \rightarrow (E^*/\text{Ann } E_k)^* = E_k.$$

Образ этого вложения и есть E_{k+1} .

§3. Алгебры Ли, соответствующие флагам

1. Алгебры картановского типа. Далее мы будем рассматривать только флаги, в которых $E_0 = E$. Пусть $\mathcal{F}$ — такой флаг. Заметим, что $x^{(h)} \in O(\mathcal{F})$ для произвольных $x \in E_i$ и $h < p^{i+1}$. В соответствии с п. 2 §1, дифференцирование $\mathcal{D}$ алгебры $O(\mathcal{F})$ будем называть специальным, если

$$\mathcal{D}(x^{(h)}) = x^{(h-1)}\mathcal{D}(x)$$

для всех $h < p^{i+1}$ и $x \in E_i$. Как и в §1, легко проверить, что множество всех специальных дифференцирований алгебры $O(\mathcal{F})$ образует алгебру Ли, которая является свободным $O(\mathcal{F})$ -модулем ранга $n = \dim E$. Эта алгебра называется общей алгеброй, соответствующей флагу $\mathcal{F}$, и обозначается через $W(\mathcal{F})$. Как свободный $O(\mathcal{F})$ -модуль

$$W(\mathcal{F}) = \sum_{i=1}^n O(\mathcal{F})\partial_i, \quad (1)$$

где ∂_i характеризуются тем, что $\partial_i(x) = \xi_i(x)$ для $x \in E$, а $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — базис в E^* , который можно считать согласованным с флагом $\mathcal{F}$. Последнее означает, что $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ — базис, дуальный к базису $\{x_{ij}\}$ в E (см. (4), §2).

Из разложения (1) и формулы (3) §2 следует, что

$$\dim_k W(\mathcal{F}) = np^{n_0 + \dots + n_k}, \quad (2)$$

где $n_i = \dim E_i$.

ТЕОРЕМА 1. Алгебра $W(\mathcal{F})$ совпадает с подалгеброй U алгебры $W(E)$, состоящей из дифференцирований, которые оставляют инвариантной алгебру $O(\mathcal{F})$. Как подалгебра алгебры $W(E)$, алгебра $W(\mathcal{F})$ характеризуется условиями:

$$(\operatorname{ad} \partial_\xi)^{p^i} \mathcal{D} = 0, \quad \xi \in \operatorname{Ann} E_i \subset E^*, \quad \mathcal{D} \in W(E).$$

Доказательство. Очевидно, что любое специальное дифференцирование из $W(E)$, оставляющее инвариантным кольцо $O(\mathcal{F})$, определяет специальное дифференцирование этого кольца. Поэтому мы имеем гомоморфизм ограничения

$$U \rightarrow W(\mathcal{F}).$$

Этот гомоморфизм не имеет ядра, поскольку любое специальное дифференцирование однозначно определяется своим действием на E , а по нашему соглашению $E_0 = E$. Наконец, ограничение является эпиморфизмом, что видно из существования разложения (1) и аналогичного разложения для $W(E)$.

Пусть $\mathcal{D} \in W(E)$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \sum_{j=1}^n f_j \partial_j.$$

Для любого $\xi \in E^*$ имеем:

$$(\operatorname{ad} \partial_\xi) \mathcal{D} = \sum_{j=1}^n \partial_\xi(f_j) \partial_j$$

и

$$(\operatorname{ad} \partial_\xi)^{p^i} \mathcal{D} = \sum_{j=1}^n \partial_\xi^{p^i}(f_j) \partial_j,$$

поэтому утверждение нашей теоремы сразу же вытекает из теоремы 1 §2. Теорема доказана.

Рассмотрим алгебры

$$S(E) \cap W(\mathcal{F}) = \tilde{S}(\mathcal{F}),$$

$$H(E) \cap W(\mathcal{F}) = \tilde{H}(\mathcal{F}),$$

$$K(E) \cap W(\mathcal{F}) = \tilde{K}(\mathcal{F}),$$

где S , H , K — бесконечномерные алгебры, определенные в п. 4 §1. Второй коммутант $\mathcal{L} = [[\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}], [\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}]]$ алгебр $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{S}$, $\tilde{H}$, $\tilde{K}$ обозначим, соответственно, через $S(\mathcal{F})$, $H(\mathcal{F})$, $K(\mathcal{F})$ и назовем специальной, гамильтоновой и контактной алгеброй флага $\mathcal{F}$. Алгебры $W(\mathcal{F})$, $S(\mathcal{F})$, $H(\mathcal{F})$ и $K(\mathcal{F})$ будем называть также алгебрами картановского типа.

Введем в $L = W(\mathcal{F})$ градуировку

$$W(\mathcal{F}) = \bigoplus_{i \geq -1} L_i,$$

полагая

$$L_i = \sum_{j=1}^n O(\mathcal{F})_{i+1} \partial_j = O(\mathcal{F})_{i+1} \cdot V,$$

где V есть пространство всех ∂_ξ , $\xi \in E^*$.

Легко видеть, что $W(\mathcal{F})$ — градуированная алгебра, т. е.

$$[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}.$$

Мы будем иногда рассматривать ее также как фильтрованную алгебру с фильтрацией $\{\mathcal{L}_i\}$:

$$\mathcal{L}_i = \sum_{j \geq i} L_j.$$

Эта фильтрация определяет фильтрации в каждой из подалгебр $\tilde{S}$, S , $\tilde{H}$, H , $\tilde{K}$, K . Задание в явном виде алгебр $\tilde{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{L}$ и их фильтраций будет дано в следующих параграфах.

2. Многообразие алгебр, соответствующих флагам. Сейчас мы выясним, как много неизоморфных алгебр данной размерности можно получить описанной выше конструкцией. Основной результат формулируется так:

ТЕОРЕМА 2. *С точностью до изоморфизма, существует лишь конечное число алгебр Ли картановского типа данной размерности над k .*

Доказательство, приводимое ниже, содержит дополнительную информацию о множестве классов изоморфизма рассматриваемых алгебр.

Определение каждой из алгебр $W(\mathcal{F})$, $\tilde{S}(\mathcal{F})$, $\tilde{H}(\mathcal{F})$ и $\tilde{K}(\mathcal{F})$ зависит от дифференциальной формы ω и флага $\mathcal{F}$. Легко видеть, что

автоморфизм пространства E , переводящий форму ω в пропорциональную, а флаг $\mathcal{F}$ — в $\mathcal{F}_1$, индуцирует изоморфизм алгебр, определенных формой ω и флагами $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_1$ соответственно. Поэтому нам достаточно изучить множество орбит, на которые распадается многообразие флагов относительно группы линейных автоморфизмов $\text{Aut } \omega$ формы ω .

Нам будет удобнее рассмотреть действие всей группы $GL(E)$ как на форму ω , так и на флаг $\mathcal{F}$. Выясним, в какие формы может при этом перейти ω .

В случае алгебры $\tilde{S}$, очевидно $\Psi\omega = (\det \Psi)\omega$, где $\Psi \in GL(E)$. В случае алгебры $\tilde{H}$ форма $\Psi\omega$ имеет вид $\sum \alpha_{ij} dx_i \wedge dx_j$, где (α_{ij}) — произвольная невырожденная кососимметрическая матрица. Поэтому, как однородное пространство над $GL(E)$, получающееся множество изоморфно множеству невырожденных кососимметрических матриц.

В случае алгебры $\tilde{K}$ ответ немного сложнее. Используя теорему, доказанную еще С. Ли и Фробениусом (см. Клейн [20], §55), можно показать, что под действием элементов $GL(E)$ мы получаем из ω множество форм вида

$$\sum_{i=1}^n \beta_i dx_i + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i dx_j,$$

где (α_{ij}) — кососимметрическая матрица ранга $n - 1$ и

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} & \beta_n \\ -\beta_1 & \dots & -\beta_n & 0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3)$$

Если интерпретировать (α_{ij}) как матрицу кососимметрической формы α в E , а $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ — как коэффициенты линейной формы β , то условие (3) равносильно тому, что

$$\text{rang } \alpha = n - 1; \quad \beta \neq 0 \quad \text{на} \quad \text{Ann}_\alpha E. \quad (4)$$

Таким образом, как однородное пространство над $GL(E)$, получающееся множество форм изоморфно множеству пар (α, β) , удовлетворяющих условиям (4).

Мы видим в итоге, что совокупность классов изоморфизма алгебр картановского типа является сюръективным образом множества орбит относительно $GL(E)$ следующих множеств:

- 1) В случае W — всех флагов.
- 2) В случае $\tilde{S}$ — всех флагов.
- 3) В случае $\tilde{H}$ — пар $(\alpha, \mathcal{F})$, где α — невырожденная кососимметрическая форма на E , а $\mathcal{F}$ — флаг.
- 4) В случае $\tilde{K}$ — пар $(\tau, \mathcal{F})$, где τ , в свою очередь, — пара (α, β) , удовлетворяющая условиям (4), а $\mathcal{F}$ — флаг.

Сохранив в последовательности $(n_0, \dots, n_k)$, $n_i = \dim E_i \neq 0$, лишь попарно различные целые числа, мы получим последовательность $(t_0, t_1, \dots, t_l)$, $t_0 > t_1 > \dots > t_l$, $0 \leq l \leq k$, которую будем называть типом флага.

Ясно, что флаги эквивалентны относительно $GL(E)$ тогда и только тогда, когда их типы совпадают. Поэтому интересующие нас множества в случаях 1) — 4) можно описать так:

1. Совокупность различных типов флагов.
2. Совокупность различных типов флагов.
3. Для каждого типа флагов множество орбит невырожденных кососимметрических форм относительно группы автоморфизмов какого-либо флага этого типа.
4. То же, что и в 3, с заменой кососимметрических форм парами (α, β) , удовлетворяющими условиям (4).

Покажем, что во всех этих случаях мы получаем конечные множества. В случаях 1 и 2 это очевидно. В случае 3 речь идет о классификации невырожденных кососимметрических форм относительно группы автоморфизмов фиксированного флага $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ имеет тип $(t_0, t_1, \dots, t_l)$, то его группа автоморфизмов является обобщенной треугольной группой матриц, у которых по диагонали стоят квадратики порядков $t_{i+1} - t_i$. Ясно, что группа будет минимальной, если $(t_0, \dots, t_l) = (n, n-1, \dots, 2, 1)$. Поэтому мы можем ограничиться только этим случаем. Но здесь ответ дает теорема 1 из §3 гл. IX книги [22]², согласно которой имеется всего

$$k = \frac{n!}{2^{n/2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)!}$$

орбит. Именно, в качестве представителей орбит можно взять кососимметрические формы

$$\alpha_\pi = \sum_{i=1}^n \alpha_{i, \pi i} x_i y_{\pi i}, \quad \alpha_{\pi i, i} = -\alpha_{i, \pi i}, \quad (5)$$

² Авторы пользуются случаем выразить благодарность А. Г. Элашвили, уклавшему им на эту теорему.

где π пробегает инволюции симметрической группы S_n , действующей на множестве $M = \{1, 2, \dots, n\}$, $\pi i \neq i$, $i \in M$, $n = 2n'$.

Наконец, случай 4 сводится, по существу, к случаю 3, если заметить, что линейную форму $\beta = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$ из пары (α, β) с $\alpha = \alpha_\pi$ (без ограничения общности считаем $\alpha_{i,n} = \alpha_{n,i} = 0$, $1 \leq i \leq n = 2n' + 1$) автоморфизмом

$$\Psi : \begin{cases} x_i \rightarrow \gamma_i x_i + \delta_i x_{\pi i} \\ x_{\pi i} \rightarrow \gamma_i^{-1} x_{\pi i} \\ x_n \rightarrow \gamma x_n \end{cases}$$

можно привести к форме β' с коэффициентами $\beta'_n = 1$, $\beta'_i = 0$ или 1; $\beta'_i \beta'_{\pi i} = 0$, $i < n$.

“Треугольный” автоморфизм Ψ пространства E , очевидно, сохраняет форму (5). Теорема 2 доказана.

Замечание. Перечисление различных типов форм очень напоминает разложение Брюа. Поэтому возможно, что существует более инвариантная классификация алгебр картановского типа.

§4. Общая алгебра $W(\mathcal{F})$

1. Простота алгебры $W(\mathcal{F})$. Удобно выбрать в E базис, согласованный с флагом $\mathcal{F}$. В отличие от (4) §2, мы освободимся от двойных индексов, исключая из последовательности (1) §2 подпространств E_i повторения. Таким образом, $E = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, и базис алгебры $O(\mathcal{F})$ состоит из одночленов

$$x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)}, \quad 0 \leq h_i < p^{m_i}, \quad 1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n. \quad (1)$$

Число m_i будем иногда называть высотой элемента x_i , а $m_n = \max m_i$ — также и высотой флага $\mathcal{F}$. Если $m_i = m_{i+1} = \dots = m_{i+l_s}$, то $\{x_1, \dots, x_{i+l_s}\}$ — прообраз базиса некоторого факторпространства E_s/E_{s+1} размерности l_s . По определению,

$$\dim O(\mathcal{F}) = p^m, \quad m = m_1 + \dots + m_n \geq n, \quad \dim W(\mathcal{F}) = np^m. \quad (2)$$

Другим способом эти размерности записаны в (3) §2 и в (2) §3. Специальные дифференцирования

$$\partial_i : O(\mathcal{F}) \rightarrow O(\mathcal{F})$$

определяются соответствием

$$x_j^{(h)} \rightarrow \delta_{ij} x_j^{(h-1)}, \quad h > 0.$$

Если $\mathcal{D}_1 = \sum f_i \partial_i$, $\mathcal{D}_2 = \sum g_i \partial_i$, то $[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \sum u_i \partial_i$, где

$$u_i = \mathcal{D}_1 g_i - \mathcal{D}_2 f_i = \sum_{j=1}^n \{f_j (\partial_j g_i) - g_j (\partial_j f_i)\}. \quad (3)$$

Как уже отмечалось в §3,

$$W(\mathcal{F}) = L_{-1} + L_0 + \dots + L_r$$

— градуированная алгебра, причем, очевидно,

$$r+1 = \sum_{i=1}^n (p^{m_i} - 1). \quad (4)$$

Представление

$$\Gamma : L_0 \rightarrow \text{End } L_{-1}$$

совпадает со стандартным представлением полной матричной алгебры $gl(n, k) \cong L_0$.

Предложение 1. *Общая алгебра $W(\mathcal{F})$ — простая, за исключением случая $p = 2$, $m = 1$. Она является p -алгеброй Ли тогда и только тогда, когда $m = n$.*

Доказательство. Для любого многочлена $f \in O(\mathcal{F})$ степени > 0 будет $\partial_j f \neq 0$ по крайней мере при одном j , $1 \leq j \leq n$. Так как $(\text{ad } \partial_j) \sum f_i \partial_i = \sum (\partial_j f_i) \partial_i$, то для всякого $0 \neq \mathcal{D} \in L_k$, $k \geq 0$, найдется элемент $v \in V = L_{-1}$ такой, что $[v, \mathcal{D}] \neq 0$. Пусть

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{-1} + \mathcal{D}_0 + \dots + \mathcal{D}_k, \quad \mathcal{D}_k \neq 0 \quad (\mathcal{D}_i \in L_i),$$

— элемент идеала N общей алгебры $W(\mathcal{F})$. Следя лишь за “старшим” элементом $\mathcal{D}_k$, мы после $k+1$ коммутирований с надлежащим образом выбранными элементами из V получим отличный от нуля элемент $\mathcal{D}'_{-1} \in N \cap V$. Представление Γ — неприводимое, поэтому L_0 -подмодуль в V , содержащий $\mathcal{D}'_{-1}$, совпадает с V , т. е. $V \subset N$. Далее,

$$[V, L_k] = L_{k-1}, \quad 0 \leq k \leq r. \quad (5)$$

Действительно, если $h_j < p^{m_j} - 1$ хотя бы для одного j и $\sum h_s = k$, то

$$[\partial_j, x_1^{(h_1)} \dots x_j^{(h_j+1)} \dots x_n^{(h_n)} \partial_i] = x_1^{(h_1)} \dots x_n^{(h_n)} \partial_i \in L_{k-1},$$

Что и дает утверждение (5). Таким образом,

$$N \supset L_{-1} + L_0 + \dots + L_{r-1}.$$

Согласно (4), $r \geq 1$, если $p \neq 2$ или $m > 1$, т. е. $L_1 \neq 0$ и $L_0 \subset N$. Значит, $L_r = [L_r, L_0] \subset N$, как это нетрудно проверить. Простота алгебры $W(\mathcal{F})$ доказана.

При $m = n$ мы имеем флаг $\mathcal{F}$ единичной высоты, и алгебра $O(\mathcal{F})$, очевидно, изоморфна с алгеброй срезанных многочленов $k[y_1, \dots, y_n]$, $y_1^p = \dots = y_n^p = 0$, а алгебра Ли $W(\mathcal{F})$ — с алгеброй всех дифференцирований алгебры $k[y_1, \dots, y_n]$. Поэтому $W(\mathcal{F})$ — p -алгебра Ли.

Пусть теперь $m > n$, так что x_n имеет высоту $m_n > 1$. Если бы $W(\mathcal{F})$ в этом случае была p -алгеброй, то мы имели бы

$$\partial_n^{[p]} = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i, \quad a_i \in O(\mathcal{F}).$$

Но тогда

$$\partial_n = (\text{ad } \partial_n)^p \cdot x_n^{(p)} \partial_n = [\partial_n^{[p]}, x_n^{(p)} \partial_n] = \sum_{i=1}^n [a_i \partial_i, x_n^{(p)} \partial_n] \in \mathcal{L}_{p-2}$$

— противоречие, доказывающее предложение 1.

Для флага $\mathcal{F} : E = E_0 \supset E_1 = 0$, т. е. при $m = n$, будем, следуя обозначениям из [21], писать просто W_n вместо $W(\mathcal{F})$. Мы отождествляем W_n с алгеброй всех дифференцирований кольца $O = k[y_1, \dots, y_n]$, $y_1^p = \dots = y_n^p = 0$.

Отметим, что алгебра W_n впервые была исследована Джекобсоном [11]. Алгебра W_1 — это первый пример неклассической простой алгебры Ли, найденный Виттом [6]. Можно показать, что при $n = 1$ и произвольном m алгебра $W(\mathcal{F})$ совпадает с алгеброй Цассенхауза (см., например, [16]).

2. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в W_n . Далее предполагаем, что $\text{char } k = p > 2$.

Предложение 2. В алгебре W_n имеет место включение

$$\mathcal{L}_{\frac{p-1}{2}} \supset \mathfrak{C} \supseteq \mathcal{L}_{\frac{p+1}{2}}.$$

Для элемента $C \in L_{(p-1)/2}$ следующие два утверждения эквивалентны:

а) $C = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{C};$

б) $\operatorname{div} C = 0.$

Здесь $\operatorname{div} C$ обозначает дивергенцию оператора C :

$$\operatorname{div} C = \sum_{i=1}^n \frac{\partial c_i}{\partial x_i}.$$

Доказательство будет опираться на две леммы. Первая из них формулируется в несколько большей общности, что необходимо для рассуждений в §5.

ЛЕММА 1. Пусть $C = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in W_n$. Тогда условия

$$c_i c_j = 0, \quad \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_k = 0, \quad \sum_i \frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq n, \quad (6)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы $(\operatorname{ad} C)^2 = 0$. Условия (6) при $n > 2$ вытекают из более слабого требования

$$(\operatorname{ad} C|_{S_{n-1}})^2 = 0,$$

где S_{n-1} — определенная в §3 специальная алгебра (см. также §5).

Доказательство. Пусть $U = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — произвольный элемент из W_n и

$$V = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = [[U, C], C].$$

Как показывают прямые вычисления,

$$\begin{aligned} v_k = \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} c_i c_j + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} c_j - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial c_k}{\partial x_i} c_j + u_i \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 c_k}{\partial x_i \partial x_j} c_j \right) \right\}. \end{aligned}$$

Дифференцируя и складывая тождества второй группы в (6), легко убедиться, что они влекут за собой равенства $v_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, т. е. $(\text{ad } C)^2 = 0$. Потребуем теперь, чтобы $v_k = 0$ при $k = 1, \dots, n$ и при любом выборе $\mathcal{U}$ с указанным в лемме ограничением. Легко видеть, и в следующем параграфе это особо отмечается, что S_{n-1} состоит из операторов $\mathcal{U}$ с $\text{div } \mathcal{U} = 0$ и с одним дополнительным ограничением на однородные компоненты степени $\geq (n-1)p$. В рассматриваемых ниже частных случаях оно автоматически выполняется.

Положив $u_i = 1$ и $u_j = 0$ для всех $j \neq i$, получим:

$$\sum_i \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 c_k}{\partial x_i \partial x_j} c_j \right) = 0, \quad (7)$$

или, что то же самое,

$$\sum_j \frac{\partial c_k}{\partial x_j} \frac{\partial c_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_j} c_j \right), \quad 1 \leq i, k \leq n. \quad (8)$$

Если $\mathcal{U} = x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ (при $n > 2$ считаем $i \neq j$), то, с учетом (8),

$$v_k = -2 \frac{\partial c_k}{\partial x_j} c_i = 0, \quad k \neq j, \quad (9)$$

$$v_j = 2 \frac{\partial c_j}{\partial x_j} c_i - \sum_s \frac{\partial c_i}{\partial x_s} c_s = 0. \quad (10)$$

Полагая $\mathcal{U} = x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_k}$ (снова $k \neq i, j$ при $n > 2$), будем иметь:

$$v_k = 2c_i c_j + x_i \left(\sum_s \frac{\partial c_j}{\partial x_s} c_s - 2 \frac{\partial c_k}{\partial x_k} c_j \right) + x_j \left(\sum_s \frac{\partial c_i}{\partial x_s} c_s - 2 \frac{\partial c_k}{\partial x_k} c_i \right) = 0,$$

откуда, в соответствии с (10),

$$c_i c_j = 0, \quad (11)$$

где индексы i, j при любом n можно считать произвольными. В случае $n \leq 2$ набор соотношений (7), (9) и (11) совпадает с условиями (6). В случае же $n > 2$ следует добавить результат дифференцирования соотношения (11). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $f(x_1, \dots, x_n)$ — форма степени $m = (p+1)/2$ и $f^2 = 0$ в кольце O , то $f = l^m$, где l — линейная форма.

Доказательство. Путем линейного преобразования можно добиться, чтобы форма f содержала член с x_1^m и не содержала члена с множителем x_1^{m-1} . Предположим, что

$$f = x_1^m + x_1^k f_{m-k} + \dots + f_m, \quad k \leq m-2,$$

где формы $f_{m-k}, \dots, f_m$ не зависят от x_1 . Тогда условие $f^2 = 0$ дает:

$$x_1^{m+k} f_{m-k} = 0,$$

что возможно лишь при $f_{m-k} = 0$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству предложения 2. Включение $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{L}_{(p-1)/2}$ следует из условий $c_i^2 = 0$ леммы 1, которые показывают, что $c_i \in (x_1, \dots, x_n)^{(p+1)/2}$. Для доказательства включения $\mathfrak{L}_{(p+1)/2} \subseteq \mathfrak{C}$ рассмотрим элемент

$$C = l^{(p+3)/2} f \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где l — произвольная линейная форма, а f — произвольный многочлен. Для такого элемента условия (6) выполнены и, значит, $C \in \mathfrak{C}$. С другой стороны, любой элемент из $\mathfrak{L}_{(p+1)/2}$ может быть представлен в виде линейной комбинации операторов указанного вида. Нам остается только доказать эквивалентность утверждений а) и б). Заметим, прежде всего, что если, в обозначениях леммы 1, многочлен c_i имеет форму d_i младшей степени и $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n d_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, то из $(\text{ad } C)^2 = 0$ следует, что $(\text{ad } \mathcal{D})^2 = 0$. Это вытекает из билинейности соответствующих соотношений. Поэтому мы вправе ограничиться рассмотрением элементов C , в которых c_i — формы степени $m = (p+1)/2$.

Непосредственная проверка показывает, что для элементов вида

$$U = l^m \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \alpha_i \in k, \quad (12)$$

где l — линейная форма, утверждения а) и б) эквивалентны. Именно, для каждого такого элемента первые два соотношения (6) выполняются автоматически, а последнее равносильно условию б).

Пусть элемент C удовлетворяет условию б). Тогда, как легко убедиться, его можно представить в виде линейной комбинации элементов типа (12), также удовлетворяющих условию б). Это и доказывает, что из условия б) следует условие а).

Пусть теперь C удовлетворяет условию а). Из первого соотношения (6) при $i = j$ следует, что $c_i^2 = 0$, а согласно лемме 2, это возможно лишь при $c_i = l_i^m$. Соотношения $c_i c_j = 0$ при $i \neq j$ показывают, что все формы l_i пропорциональны, а значит, элемент C имеет вид (12). Предложение доказано.

Предложение 3. Нормализатор $N_{W_n}(\mathfrak{C})$ подалгебры $\mathfrak{C} \subset W_n$ совпадает с $\mathfrak{L}_0$.

Доказательство. То, что $\mathfrak{L}_0 \subseteq N_{W_n}(\mathfrak{C})$, является следствием включения $[\mathfrak{L}_{(p+1)/2}, \mathfrak{L}_0] \subseteq \mathfrak{L}_{(p+1)/2}$ и легко проверяемого тождества:

$$\operatorname{div}[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \mathcal{D}_1(\operatorname{div} \mathcal{D}_2) - \mathcal{D}_2(\operatorname{div} \mathcal{D}_1). \quad (13)$$

Предположим, что $\mathcal{D} \notin \mathfrak{L}_0$ и $\mathcal{D} \in N_{W_n}(\mathfrak{C})$. Тогда можно найти элемент $\mathcal{D}$ с теми же свойствами, но содержащийся в L_{-1} . Как мы уже отмечали, алгебра W_n является градуированной. Воспользуемся тем, что представление Γ алгебры L_0 в пространстве L_{-1} неприводимо. Так как $L_0 \subset N_{W_n}(\mathfrak{C})$, то из этого следует, что $N_{W_n}(\mathfrak{C}) = W_n$, т. е. $\mathfrak{C}$ — идеал в W_n . Последнее, однако, противоречит простоте алгебры W_n .

§5. Специальная алгебра $S(\mathcal{F})$

Описание алгебры $\tilde{S}(\mathcal{F})$. В п. 2 §3 отмечалось, что алгебра $\tilde{S}(\mathcal{F})$ полностью определяется типом флага $\mathcal{F}$. Мы выбираем в $O(\mathcal{F})$ базис, состоящий из одночленов вида (1) §4. По условию,

$$\mathcal{D}\omega = \left(\sum_{i=1}^n \partial_i f_i \right) \omega = 0,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n \partial_i f_i = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \mathcal{D} = 0$$

— необходимое и достаточное условие принадлежности элемента $\mathcal{D} = \sum f_i \partial_i \in W(\mathcal{F})$ к $\tilde{S}(\mathcal{F})$. Замкнутость относительно коммутирования операторов с равной нулю дивергенцией вытекает также из тождества (13) §4, верного в общей алгебре $W(\mathcal{F})$. Имеет место

Предложение 1. При $n > 2$ и любой характеристике $p > 0$ основного поля k специальная алгебра $S(\mathcal{F})$ — простая. Как векторное пространство над k алгебра $S(\mathcal{F})$ натянута на дифференцирования

$$\mathcal{D}_{i,j}\{u\} = (\partial_j u)\partial_i - (\partial_i u)\partial_j, \quad u \in O(\mathcal{F}), \quad (1)$$

и имеет размерность

$$\dim_k S(\mathcal{F}) = (n-1)(p^m - 1), \quad 2 < n \leq m,$$

где $m = m_1 + \dots + m_n$ (m_i — высота элемента x_i).

Алгебра $S(\mathcal{F})$ является ограниченной (p -алгеброй Ли) тогда и только тогда, когда $m = n$. Прообразами базисных элементов факторпространства $\tilde{S}(\mathcal{F})/S(\mathcal{F})$ служат дифференцирования

$$\mathcal{D}_i = \prod_{j \neq i} x_j^{(p^{m_j}-1)} \cdot \partial_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2)$$

Доказательство можно опустить, поскольку при $m = n$ оно содержится в работах М. Франк [8] и Блока [2], а общий случай рассматривается аналогично. Утверждение о том, что при $m > n$ алгебра $S(\mathcal{F})$ не является ограниченной, доказывается в точности так же, как и соответствующий факт в предложении 1 §4 (заменить оператор $x_n^{(p)}\partial_n$ на $\mathcal{D}_{n,1}\{x_1^{(1)}x_n^{(p)}\}$, см. (1)).

Градуировка в $L = S(\mathcal{F})$:

$$L = L_{-1} + L_0 + \dots + L_r,$$

индуцированная градуировкой общей алгебры $W(\mathcal{F})$, очевидно, характеризуется тем, что

$$L_k = \langle \mathcal{D}_{i,j}\{u\}; \quad u \in O(\mathcal{F})_{k+2} \rangle.$$

В частности, $L_{-1} = \langle \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$, а подалгебра

$$L_0 \cong [gl(n, k), gl(n, k)] = \tilde{A}_{n-1}$$

и при $n \neq 0$ (p) изоморфна A_{n-1} ; L_0 действует на L_{-1} неприводимым образом. Заметим, что длина r фильтрации $\{\mathcal{L}_i\}$ здесь на единицу меньше, чем у $W(\mathcal{F})$ (см. (4) §4).

При $m = n$ p -алгебру $S(\mathcal{F})$ будем обозначать символом S_{n-1} .

2. Подалгебра $\mathcal{C}$ в S_n .

Предложение 2. Подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры S_n совпадает с членом $\mathfrak{L}_{(p-1)/2}$ фильтрации $\{\mathfrak{L}_i\}$ в S_n .

Доказательство. Согласно лемме 1 §4, подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры S_{n-1} задается теми же условиями (6) §4. Предложение 2 поэтому вытекает из предложения 2 §4.

Предложение 3. Нормализатор $N_{S_n}(\mathfrak{C})$ подалгебры $\mathfrak{C} \subset S_n$ совпадает с $\mathfrak{L}_0$.

Доказательство то же, что и для предложения 3 §4.

§6. Гамильтонова алгебра $H(\mathcal{F})$

1. Описание алгебры $\tilde{H}(\mathcal{F})$, $\text{char } k = p > 2$. В соответствии с п. 2 §3, при фиксированном флаге $\mathcal{F}$ в определение алгебры $\tilde{H}(\mathcal{F})$ следовало бы включить еще кососимметрическую форму ω . Мы будем писать иногда $\tilde{H}(\mathcal{F}, \omega)$, где

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i,j=1}^n \omega_{i,j} dx_i \wedge dx_j, & n &= 2n', \\ M &= (\omega_{i,j})_1^n, & M^* &= -M, & \det M &\neq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Положим также

$$M^{-1} = (\bar{\omega}_{i,j})_1^n. \quad (2)$$

Дифференцирование $\mathcal{D} = \sum f_i \partial_i \in W(\mathcal{F})$ является элементом алгебры $\tilde{H}(\mathcal{F}, \omega)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}\omega = 0$, т. е.

$$\partial_s \tilde{f}_t = \partial_t \tilde{f}_s, \quad s, t = 1, \dots, n, \quad (3)$$

где

$$\tilde{f}_t = \sum_{i=1}^n \omega_{i,t} f_i.$$

Решение системы (3) записывается, очевидно, в виде

$$\tilde{f}_t = \partial_t u + \alpha_t x_t^{(p^{m_t}-1)}, \quad \alpha_t \in k,$$

где m_t — высота переменной x_t , u — произвольный элемент из $O(\mathcal{F})$. Таким образом, всякое дифференцирование $\mathcal{D} \in \tilde{H}(\mathcal{F}, \omega)$ представляется в виде линейной комбинации

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_u + \sum_{j=1}^n \alpha_j Q_j, \quad u \in O(\mathcal{F}), \quad \alpha_j \in k,$$

где

$$\mathcal{D}_u = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i, \quad \sum_{i=1}^n \omega_{ij} f_i = \partial_j u, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$(f_i = \sum_j \bar{\omega}_{j,i} \partial_j u);$$

$$Q_j = \sum_i a_i \partial_i, \quad \sum_i \omega_{ik} a_i = \delta_{j,k} x_j^{(p^{m_j}-1)}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Когда поле k имеет характеристику 0 (или же $O(\mathcal{F}) = O(E)$), то операторов Q_j нет и выражение $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u$ давно известно (см., например, [14]).

Пусть $\mathcal{D}_v = \sum_i g_i \partial_i$, $\sum_i \omega_{ij} g_i = \partial_j v$. Ввиду кососимметричности матрицы M (см. (1)),

$$\sum_i (\partial_j g_i) (\partial_i u) = - \sum_i f_i (\partial_j \partial_i v),$$

$$\sum_i (\partial_j f_i) (\partial_i v) = - \sum_i g_i (\partial_j \partial_i u).$$

Поэтому

$$[\mathcal{D}_u, \mathcal{D}_v] = \sum_i h_i \partial_i, \quad \sum_i \omega_{ij} h_i = \partial_j w,$$

где

$$w = \sum_i f_i \partial_i v = - \sum_i g_i \partial_i u,$$

или, в обозначениях (2),

$$[\mathcal{D}_u, \mathcal{D}_v] = \mathcal{D}_w, \quad w = \sum_{i,j} \bar{\omega}_{ij} (\partial_i u) (\partial_j v). \quad (4)$$

В частности, когда

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n'} \\ I_{n'} & 0 \end{pmatrix},$$

мы получаем закон коммутирования, выражаемый обычной скобкой Пуассона $\{ \quad , \quad \}$:

$$w = \{u, v\} = \sum_{i=1}^{n'} (\partial_i u \partial_{n'+i} v - \partial_{n'+i} u \partial_i v). \quad (4')$$

Так как $Q_j = \mathcal{D}_{x_j^{(p^m)}}$ в алгебре $H(E)$, то

$$[Q_i, Q_j] = \bar{\omega}_{i,j} \mathcal{D}_{x_i^{(p^{m_i}-1)} x_j^{(p^{m_j}-1)}}; \quad (5)$$

$$[\mathcal{D}_u, Q_j] = \mathcal{D}_w, \quad w = \sum_i \bar{\omega}_{i,j} (\partial_i u) x_j^{(p^{m_j}-1)}. \quad (6)$$

Проведенные выкладки резюмирует

Предложение 1. Как векторное пространство над k алгебра $\tilde{H}(\mathcal{F}, \omega)$ натянута на дифференцирования $\mathcal{D}_u$, $u \in O(\mathcal{F})$, и Q_j , $1 \leq j \leq n$; $\dim \tilde{H}(\mathcal{F}, \omega) = p^m + n - 1$. Умножение в $\tilde{H}(\mathcal{F}, \omega)$ задается формулами (4) — (6). Если $n > 2$ и одночлен $\prod_i x_i^{(p^{m_i}-1)}$ входит в u с ненулевым коэффициентом, то $\mathcal{D}_u \notin [\tilde{H}, \tilde{H}]$.

Последнее утверждение неверно при $n = 2$, как это видно из формулы (5), а при $n > 2$ одночлен $\prod_i x_i^{(p^{m_i}-1)}$ мог бы получиться лишь в формуле (4), когда

$$u = \prod_i x_i^{(\alpha_i)}, \quad v = \prod_i x_i^{(\beta_i)}, \quad \alpha_i + \beta_i = p^{m_i} - 1$$

для $i \neq s, t$, $\alpha_s + \beta_s = p^{m_s}$, $\alpha_t + \beta_t = p^{m_t}$. Но тогда все равно $w = \gamma \cdot \prod_i x_i^{(p^{m_i}-1)}$, где

$$\gamma = \prod_{i \neq s, t} \binom{p^{m_i}-1}{\alpha_i} \cdot \left\{ \binom{p^{m_s}-1}{\alpha_s-1} \binom{p^{m_t}-1}{\alpha_t} - \binom{p^{m_s}-1}{\alpha_s} \binom{p^{m_t}-1}{\alpha_t-1} \right\} \bar{\omega}_{s,t} = 0.$$

2. Алгебра $H(\mathcal{F}, \omega)$. По определению, $H(\mathcal{F}, \omega) = [[\tilde{H}, \tilde{H}], [\tilde{H}, \tilde{H}]]$, но из предложения 1 непосредственно вытекает, что $H = [\tilde{H}, \tilde{H}]$ при $n > 2$. Имеет место

Предложение 2. Гамильтонова алгебра $H(\mathcal{F}, \omega)$ изоморфна алгебре $O'(\mathcal{F})/k$ с законом умножения

$$(u, v) \rightarrow \{u, v\}_\omega = \sum_{i,j} \bar{\omega}_{i,j} (\partial_i u) (\partial_j v). \quad (7)$$

Здесь $O'(\mathcal{F})$ состоит из всех функций $u \in O(\mathcal{F})$, не содержащих члена $\prod_i x_i^{(p^{m_i}-1)}$, k — ее подалгебра констант; $\dim H(\mathcal{F}, \omega) = p^m - 2$, $m = m_1 + \dots + m_n$. Алгебра $H(\mathcal{F}, \omega)$ — простая при любом $n = 2n' \geq 2$, $\text{char } k = p > 2$, и является ограниченной тогда и только тогда, когда $m = n$. В этом случае за $\{ \quad, \quad \}_\omega$ можно взять обычную скобку Пуассона (4').

Первая часть предложения 2, по сути дела, уже доказана. При $m = n$, когда все невырожденные кососимметрические формы эквивалентны, получается простая p -алгебра Ли $H_{n'}$, рассмотренная ранее Албертом — Франк [1] и Блоком [2]. Как в этом, так и в общем случае доказательство простоты легко получается, если заметить, что алгебра $L = H(\mathcal{F}, \omega)$ градуирована: $L = L_{-1} + L_0 + \dots + L_r$, $r = \sum_i (p^{m_i} - 1) - 2$; $L_i = O(\mathcal{F})_{i+2}$. Далее, $L_0 \cong C_{n'}$, а $\Gamma : L_0 \rightarrow \text{Hom}(L_{-1}, L_{-1})$ — n -мерное неприводимое представление симплектической алгебры $C_{n'}$.

Если $m > n$, то пусть, например, $x_n^{(p+1)} \in H(\mathcal{F}, \omega)$ (для простоты мы отождествляем $H(\mathcal{F}, \omega)$ с $O'(\mathcal{F})/k$). Ввиду невырожденности матрицы M , $\bar{\omega}_{j,n} \neq 0$ для какого-то индекса j . Предположим, что $(x_j^{(1)})^{[p]} = u \in H(\mathcal{F}, \omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}_{j,n})^p x_n &= (\text{ad } x_j^{(1)})^p x_n^{(p+1)} = \{u, x_n^{(p+1)}\}_\omega = \\ &= \sum_i \bar{\omega}_{i,n} (\partial_i u) x_n^{(p)} \in \mathcal{L}_{p-2} = \sum_{s \geq p-2} L_s, \end{aligned}$$

хотя на самом деле $x_n \notin \mathcal{L}_0$. Это и показывает, что $H(\mathcal{F}, \omega)$ не является p -алгеброй Ли.

3. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в $H_{n'}$.

Предложение 3. Подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры $H_{n'}$ совпадает с членом $\mathcal{L}_{(p-1)/2}$ фильтрации $\{\mathcal{L}_i\}$ в $H_{n'}$.

Для доказательства нам понадобится одна лемма. Обозначим через $\mathfrak{C}'$ образ алгебры $\mathfrak{C}$ в алгебре O' (флаг $\mathcal{F} : E = E_0 \supset E_1 = 0$, соответствующий алгебре срезанных многочленов, мы опускаем). Он натянут, очевидно, на элементы $c \in O'$, для которых $\{\{O', c\}, c\} \in k$.

ЛЕММА. Если $c \in \mathfrak{C}'$, то $\frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_j} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$, в O' .

Доказательство. Рассмотрим фиксированный элемент $c \in \mathfrak{C}'$, $(\text{ad } c)^2 = 0$. Для дальнейшего удобно ввести символ ε_i , равный 1 при $i \leq n'$ и -1 при $i > n'$. Положим также $\pi i = i + \varepsilon_i n'$. Заметим, что π — перестановка порядка два на множестве $1, 2, \dots, n$. Очевидно, $\{x_i, c\} = \varepsilon_i \frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}}$, и поэтому соотношение $\{\{x_i, c\}, c\} = 0$ в O'/k означает, что

$$a_i = \varepsilon_i \left\{ \frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}}, c \right\} \in k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ясно, что отображение $u \rightarrow \{u, v\}$ при фиксированном v (а также $v \rightarrow \{u, v\}$ при фиксированном u) является дифференцированием кольца O' . Поэтому

$$\begin{aligned} \{\{x_i x_j, c\}, c\} &= \left\{ \varepsilon_j x_i \frac{\partial c}{\partial x_{\pi j}} + \varepsilon_i x_j \frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}}, c \right\} = \\ &= 2\varepsilon_i \varepsilon_j \frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}} \frac{\partial c}{\partial x_{\pi j}} + a_i x_j + a_j x_i = b_{ij} \in k. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь при $i \neq j$ тождество

$$\left(\frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}} \right)^2 \left(\frac{\partial c}{\partial x_{\pi j}} \right)^2 = \left(\frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_{\pi j}} \right)^2,$$

которое, ввиду (8), дает:

$$(b_{ii} - 2a_i x_i)(b_{jj} - 2a_j x_j) = (b_{ij} - a_i x_j - a_j x_i)^2.$$

Так как в правой части соотношения есть член $a_i^2 x_j^2$, а в левой части такого члена нет, то

$$a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Воспользуемся теперь тем, что $\{\{(x_i x_j)^2, c\}, c\} = 0$ в O'/k . Как уже отмечалось, $u \rightarrow \{u, v\}$ — дифференцирование, поэтому

$$\{\{(x_i x_j)^2, c\}, c\} = 2x_i x_j \{\{x_i x_j, c\}, c\} + 2\{x_i x_j, c\}^2,$$

что, ввиду (8), равно

$$2x_i x_j b_{ij} + 2 \left(\varepsilon_j x_i \frac{\partial c}{\partial x_{\pi j}} + \varepsilon_i x_j \frac{\partial c}{\partial x_{\pi i}} \right)^2,$$

или, с учетом (9),

$$4x_i x_j b_{ij} + x_i^2 b_{jj} + x_j^2 b_{ii}.$$

По условию этот элемент должен принадлежать k , откуда и следует, что $b_{ij} = 0$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 3. Запишем $c \in \mathfrak{C}'$ с условием $(\text{ad } c)^2 = 0$ в виде $c = c_s + c_{s+1} + \dots$, где c_i — однородные многочлены степени i и $s > 0$. Ввиду леммы, $\left(\frac{\partial c}{\partial x_i}\right)^2 = 0$, откуда вытекает, что $s \geq (p+3)/2$.

Пусть, наоборот, $c = c_s + c_{s+1} + \dots$, $s \geq (p+3)/2$. Докажем, что $c \in \mathfrak{C}'$. Достаточно установить это для однородных элементов c_i при $i \geq (p+3)/2$. Каждый такой элемент есть линейная комбинация функций вида $l^m v$, $m = (p+3)/2$, где $v = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i \geq 0$, а l — линейная функция. Применяя еще раз замечание, сделанное в начале доказательства леммы, мы увидим прежде всего, что

$$\{u, l^m v\} = l^{m-1} w, \quad w \in O',$$

при любом $u \in O$, а затем, что

$$\{l^{m-1} w, l^m v\} = l^{2m-3} y, \quad y \in O.$$

Так как $l^p = 0$, а $2m-3 \geq p$, то это выражение равно нулю. Остается заметить, что функциям из O' вида $c_s + c_{s+1} + \dots$, $s \geq (p+3)/2$, в алгебре $H_{n'}$ соответствует подалгебра $\mathfrak{L}_{(p-1)/2}$.

Предложение 4. Нормализатор $N_{H_{n'}}(\mathfrak{C})$ подалгебры $\mathfrak{C}$ в $H_{n'}$ совпадает с $\mathfrak{L}_0$.

Доказательство — то же, что и для предложения 3 §5.

§7. Контактная алгебра $K(\mathcal{F})$.

1. Описание алгебры $\tilde{K}(\mathcal{F})$. В дальнейшем результаты этого параграфа нам не понадобятся, но мы остановимся несколько подробнее на описании структуры алгебры $K(\mathcal{F})$, поскольку в случае конечной характеристики этого не было до сих пор сделано даже при $\mathcal{F} : E = E_0 \supset E_1 = 0$, когда $K(\mathcal{F}) = K_{n'+1}$ — p -алгебра Ли. Было бы крайне удивительно, если бы $K_{n'+1}$ как классическая контактная алгебра, распространенная на характеристику p , оказалась не изоморфной с p -алгеброй, изученной пять лет назад М. Франк [9].

Авторы признаются, что они поверили в их изоморфность лишь на основе некоторых косвенных соображений.

Итак, пусть $n = 2n' + 1$, $p > 2$,

$$\omega = \sum_{i=1}^n \beta_i dx_i + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,\pi_i} x_i dx_{\pi_i},$$

$$\beta_n = 1, \quad \beta_i \beta_{\pi_i} = 0, \quad i < n; \quad \alpha_{i,\pi_i} = -\alpha_{\pi_i,i}.$$

Как было известно еще Ли [14] (конечно, в случае нулевой характеристики, когда $\beta_i = 0$ для всех $i < n$), коэффициенты f_i дифференциального оператора $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, удовлетворяющего условию $\mathcal{D}\omega = u\omega$, $u \in O(\mathcal{F})$, могут быть выражены через одну функцию

$$f = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i f_i + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,\pi_i} x_i f_{\pi_i} \right\} \in O(\mathcal{F}),$$

$$f_i = (x_i + \alpha_{i,\pi_i} \beta_{\pi_i}) \partial_n f - \alpha_{i,\pi_i} \partial_{\pi_i} f, \quad i < n,$$

$$f_n = \Delta f,$$

где

$$\Delta f = 2f - \sum_{j=1}^{n-1} (x_j + \alpha_{j,\pi_j} \beta_{\pi_j}) \partial_j f. \quad (1)$$

Оператор $\mathcal{D}$, соответствующий функции f , обозначим через $\mathcal{D}_f$. Таким образом, алгебра $\tilde{K}(\mathcal{F})$, определенная в п. 1 §3, или, точнее, алгебра $\tilde{K}(\mathcal{F}, \omega)$ состоит из всех дифференцирований $\mathcal{D}_f$, $f \in O(\mathcal{F})$.

Ясно, что $\dim \tilde{K}(\mathcal{F}) = p^m$, $m = m_1 + \dots + m_n$. Операция коммутирования $[\cdot, \cdot]$ выражается непосредственно в терминах функций:

$$[\mathcal{D}_u, \mathcal{D}_v] = \mathcal{D}_w,$$

$$w = \Delta u \cdot \partial_n v - \Delta v \cdot \partial_n u + \{u, v\}'_\omega, \quad (2)$$

где

$$\{u, v\}'_\omega = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,\pi_i} (\partial_i u)(\partial_{\pi_i} v)$$

— скобка Пуассона, только по переменным x_i , $i < n$; Δu и Δv вычисляются по формуле (1). При $m = n$ мы, как всегда, отождествляем

$O(\mathcal{F})$ с алгеброй срезанных многочленов и форму ω приводим к виду

$$\omega = dx_n + \sum_{i=1}^{n'} (x_{n'+i} dx_i - x_i dx_{n'+i}),$$

так что операция коммутирования выражается формулой

$$\left. \begin{aligned} [\mathcal{D}_u, \mathcal{D}_v] &= \mathcal{D}_w, \\ w &= \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta v - \frac{\partial v}{\partial x_n} \Delta u + \{u, v\}', \\ \Delta u &= 2u - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Скобка Пуассона $\{u, v\}'$ принимает вид (4') из §6.

Предложение 1. Если $n + 3 \not\equiv 0 \pmod{p}$, то $K(\mathcal{F}) = \tilde{K}(\mathcal{F})$ — простая алгебра Ли размерности p^m , $m = m_1 + \dots + m_n$ (m_i — высота переменной x_i). Если $n + 3 \equiv 0 \pmod{p}$, то коммутант $K(\mathcal{F})$ алгебры $\tilde{K}(\mathcal{F})$ является простой алгеброй размерности $p^m - 1$, которая состоит из всех операторов $\mathcal{D}_f$ с функциями $f \in O(\mathcal{F})$, не содержащими члена $\prod_i x_i^{(p^{m_i}-1)}$. При $m = n$, и только в этом случае, $K(\mathcal{F}) = K_{n'+1}$ — p -алгебра Ли.

Доказательство разбивается на две части.

1. Покажем сначала, что при $n + 3 \equiv 0 \pmod{p}$ множество операторов $\mathcal{D}_f$, $\deg f < \sum_{i=1}^n (p^{m_i} - 1)$, образуют подалгебру и даже идеал (а именно — производную алгебру) в $\tilde{K}(\mathcal{F})$. Для этого, ввиду билинейности выражения (2), достаточно проверить, что для любых одночленов

$$\begin{aligned} u &= x^{(s)}, & (s) &= (s_1, \dots, s_n), \\ v &= x^{(t)}, & (t) &= (t_1, \dots, t_n) \end{aligned}$$

функция $w = w_1 + w_2 + w_3$,

$$\begin{aligned} w_1 &= \left\{ (2 + s_n - |s|) \binom{s+t-\varepsilon_n}{s} - (2 + t_n - |t|) \binom{s+t-\varepsilon_n}{t} \right\} x^{(s+t-\varepsilon_n)}, \\ w_2 &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{j,\pi j} \beta_{\pi j} \left\{ \binom{s+t-\varepsilon_j-\varepsilon_n}{s-\varepsilon_n} - \binom{s+t-\varepsilon_j-\varepsilon_n}{t-\varepsilon_n} \right\} x^{(s+t-\varepsilon_j-\varepsilon_n)}, \\ w_3 &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,\pi i} \binom{s+t-\varepsilon_i-\varepsilon_{\pi i}}{s-\varepsilon_i} x^{(s+t-\varepsilon_i-\varepsilon_{\pi i})}, \end{aligned} \quad (3)$$

соответствующая оператору $[\mathcal{D}_u, \mathcal{D}_v]$, не содержит одночлена $e = \prod_i x_i^{(\overline{m}_i)}$. Здесь мы положили:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_i &= \left(0, \dots, \frac{1}{i}, \dots, 0 \right), \quad |s| = s_1 + \dots + s_n, \\ \overline{m} &= (\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n), \quad \overline{m}_i = p^{m_i} - 1, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \binom{s}{t} &= \prod_{i=1}^n \binom{s_i}{t_i}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Действительно, многочлен e мог бы войти лишь в одну из функций w_1, w_2, w_3 (см. (3)). Если $(s+t-\varepsilon_n) = (\overline{m})$, то коэффициентом при e в w_1 , а следовательно, и в w будет

$$(-1)^{|s|} \{ (2 + s_n - |s|) + (2 + t_n - |t|) \} = (-1)^{|s|} (n+3) = 0.$$

Легко убедиться также, что при любом n коэффициенты при e в w_2 и в w_3 равны нулю. Это и доказывает нужное нам утверждение.

2. Как и в формулировке предложения 1, обозначим через $K(\mathcal{F})$ алгебру $\tilde{K}(\mathcal{F})$ или же, при $n+3 \equiv 0 \pmod{p}$, идеал коразмерности 1 в $\tilde{K}(\mathcal{F})$, не содержащий элемента $\mathcal{D}_e$. Пусть N — идеал алгебры $K(\mathcal{F})$ и $0 \neq \mathcal{D}_f \in N$. Тогда также

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_f] = 2\mathcal{D}_{\partial_n f} \in N. \quad (5)$$

Повторяя несколько раз эту операцию, мы придем к такому элементу $f \neq 0$, что $\mathcal{D}_f \in N$ и $\partial_n f = 0$. Но тогда

$$[\mathcal{D}_{x_k}, \mathcal{D}_f] = \mathcal{D}_{\{x_k, f\}}' = \alpha_{k,\pi k} \mathcal{D}_{\partial_{\pi k} f} \in N \quad (6)$$

при любом $k < n$. После нескольких коммутирований такого рода мы убедимся в том, что $\mathcal{D}_1 \in N$. Если $u = u^{(s)}$ — произвольный одночлен и $(s) \neq (\overline{m})$ (см. (4)) при $n+3 \equiv 0 \pmod{p}$, то, как показывают формулы (5) и (6), $\mathcal{D}_{\partial, v} \in N$, $1 \leq i \leq n$. Таким образом, мы получили в N заведомо все операторы $\mathcal{D}_{x^{(s)}}$ с $|s| \leq |\overline{m}| - 1$ при $n+3 \not\equiv 0 \pmod{p}$ и $|s| \leq |\overline{m}| - 2$ при $n+3 \equiv 0 \pmod{p}$. Легко проверить, что линейные комбинации их и их попарных произведений дадут все элементы алгебры $K(\mathcal{F})$ (см. (3)). Следовательно, $N = K(\mathcal{F})$.

3. При $m > n$ контактная алгебра $K(\mathcal{F})$ не может быть p -алгеброй Ли. Действительно, если $m_n > 1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1^{[p]} &= \mathcal{D}_\alpha \in K(\mathcal{F}) \Rightarrow 2\mathcal{D}_1 = (\text{ad } \mathcal{D}_1)^p \mathcal{D}_{x_n^{(p)}} = \\ &= [\mathcal{D}_1^{[p]}, \mathcal{D}_{x_n^{(p)}}] = [\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{x_n^{(p)}}] = \mathcal{D}_w \end{aligned}$$

— противоречивое равенство, поскольку из формулы (2) непосредственно следует, что $w \in \mathfrak{m}^{(p-2)}$, коль скоро $v \in \mathfrak{m}^{(p)}$. Если же $m_j > 1$ для какого-то $j = \pi k < n$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{x_k}^{[p]} &= \mathcal{D}_\alpha \in K(\mathcal{F}) \Rightarrow \alpha_{k, \pi k} \mathcal{D}_1 = (\text{ad } \mathcal{D}_{x_k})^p \mathcal{D}_{x_{\pi k}^{(p)}} = \\ &= [\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_{x_{\pi k}^{(p)}}] = \mathcal{D}_w, \quad w \in \mathfrak{m}^{(p-2)}, \end{aligned}$$

— снова противоречивое равенство. Здесь мы использовали соотношения:

$$[\mathcal{D}_{x_k}, \mathcal{D}_{x_{\pi k}^{(s)}}] = \alpha_{k, \pi k} \mathcal{D}_{x_{\pi k}^{(s-1)}}$$

и

$$\alpha_{k, \pi k}^2 = 1.$$

Пусть, далее, $m = n$. Поскольку $\tilde{K}_{n'+1} = \tilde{K}(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} : E = E_0 \supset E_1 = 0$ — алгебра всех (а не только специальных, как при $m > n$) дифференцирований кольца $O(\mathcal{F})$, умножающих форму ω на функции из $O(\mathcal{F})$, очевидно, что $(\mathcal{D}_u)^{(p)} \in \tilde{K}_{n'+1}$, и, следовательно, $\tilde{K}_{n'+1}$ — p -алгебра Ли. При $n+3 \not\equiv 0 \pmod{p}$ $K_{n'+1}$ совпадает с $\tilde{K}_{n'+1}$ и является поэтому p -алгеброй Ли. Нам осталось доказать ограниченность алгебры $K_{n'+1}$ при $n+3 \equiv 0 \pmod{p}$. Иначе говоря, нужно проверить инвариантность подалгебры $K_{n'+1} \subset \tilde{K}_{n'+1}$ относительно отображения $\mathcal{D}_u \rightarrow \mathcal{D}_u^p$. Для этого вычислим $\mathcal{D}_u^p$ при $u = x^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Если $\alpha_n \geq 2$, то, очевидно, $\mathcal{D}_u^p = 0$. В случае же $\alpha_n = 0$ или 1 положим

$$\mathcal{D}_u^p = \mathcal{D}_v + \nu \mathcal{D}_{(x_1 \dots x_n)^{p-1}}, \quad \nu \in k,$$

где v содержит только члены степени $< n(p-1)$. Коммутируя это равенство с $\mathcal{D}_1$, мы получим, что

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_u^p] = -2\mathcal{D} \frac{\partial v}{\partial x_n} + 2\nu \mathcal{D}_{(x_1 \dots x_{n-1})^{p-1} x_n^{p-2}} \quad (7)$$

(применяется правило коммутирования $(2')!$). Если $\alpha_n = 0$, то выражение слева равно нулю, т. е., в частности, $\nu = 0$. Пусть $\alpha_n = 1$. Легко проверить по индукции, что если вообще $u = g x_n$, где g не зависит от x_n , то $(\text{ad } \mathcal{D}_u)^k \mathcal{D}_1 = \nu_k \mathcal{D}_{g^k}$. Поэтому равенство (7) снова дает $\nu = 0$. Таким образом, для любого одночлена v будет $\mathcal{D}_v^p \in K_{n'+1}$, а так как $K_{n'+1}$ — подалгебра p -алгебры $\tilde{K}_{n'+1}$, то она тоже является p -алгеброй Ли. Предложение 1 доказано.

2. Фильтрация в алгебре $K_{n'+1}$. Имеет место

ЛЕММА. Подалгебра $\mathcal{L}_i$ алгебры $K_{n'+1}$ состоит из операторов $\mathcal{D}_f$ с $f \in kx_n^{i+1} + \mathfrak{m}^{i+2}$, где $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$.

В самом деле, при $i = -1$ утверждение очевидно — оно означает, что $O = k + \mathfrak{m}$. Пусть оно доказано для i . Предположим, что $\mathcal{D}_f \in \mathcal{L}_{i+1}$. Тогда $\mathcal{D}_f \in \mathcal{L}_i$ и, значит, $f = \alpha x_n^{i+1} + g$, $g \in \mathfrak{m}^{i+2}$. Так как по условию $f_j \in \mathfrak{m}^{i+2}$, то формула, выражающая f через f_j , показывает, что $f \in \mathfrak{m}^{i+2}$, а из формул, выражающих f_j через f , следует, что $\frac{\partial f}{\partial x_k} \in \mathfrak{m}^{i+2}$, $k \neq n$, т. е. f имеет вид $\beta x_n^{i+2} + g'$, $g' \in \mathfrak{m}^{i+3}$.

В отличие от W_n, S_n, H_n , алгебра K_n , заданная в своей обычной фильтрации $\{\mathcal{L}_i\}$, не является градуированной, как показывает следующее

Предложение 2. Пусть $\tilde{L}$ — ассоциированная с $\tilde{K}_{n'+1}$ (в ее обычной фильтрации) градуированная алгебра Ли. Тогда имеет место естественный изоморфизм

$$\tilde{L} \cong O_1 \otimes H'_{n'} + W_1,$$

где $O_1 = k[x_n]/(x_n^p)$, а $H'_{n'} \cong O/k \cong H_{n'} + k(x_1 \dots x_{n-1})^{p-1}$ (см. п. 1 §6). При этом

$$\tilde{L}_i \cong \sum_{k+l=i} \langle x_n^k \rangle \otimes (H'_{n'})_l + (W_1)_i$$

$((W_1)_i = 0$ для $i \geq p-1$).

Далее, $O_1 \otimes H'_n$ — идеал в $\tilde{L}$: если $\mathcal{D}_{g_0} \in O_1 \otimes H'_n$ и $D_{x_n^{s+1}} \in (W_1)_s$, то

$$[\mathcal{D}_{x_n^{s+1}}, \mathcal{D}_{g_0}] = \mathcal{D}_{h_0},$$

$$h_0 = (s+1)x_n^s \cdot \Delta g_0 - 2x_n^{s+1} \frac{\partial g_0}{\partial x_n}$$

(g_0 — многочлен, не содержащий чистых степеней x_n).

Доказательство получается непосредственно из леммы и из определения алгебры $\tilde{K}_{n'+1}$. Очевидно, $\tilde{L}_i$ состоит из операторов $\mathcal{D}_f$, где $f = \alpha x_n^{i+1} + f_0$, f_0 — однородная форма степени $i+2$, не содержащая члена x_n^{i+2} . Пусть $g = \beta x_n^{j+1} + g_0$, $\deg g_0 = j+2$. Из формулы (2'), примененной к алгебре $\tilde{L}$, вытекает, что

$$[\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g] = \mathcal{D}_h, \quad h = 2\alpha\beta(i-j)x_n^{i+j+1} + h_0,$$

где

$$h_0 = (\{f_0, g_0\}')_0 + \alpha(i+1)x_n^i \Delta g_0 - \beta(j+1)x_n^j \Delta f_0 +$$

$$+ 2\beta x_n^{j+1} \frac{\partial f_0}{\partial x_n} - 2\alpha x_n^{i+1} \frac{\partial g_0}{\partial x_n}.$$

В частности,

$$[\mathcal{D}_{f_0}, \mathcal{D}_{g_0}] = \mathcal{D}_{\{f_0, g_0\}'}$$

— операция умножения в алгебре $O_1 \otimes H'_n$.

Замечание. Можно ввести в $K_{n'}$ градуировку

$$K_{n'+1} = L = L'_{-2} + L'_{-1} + L'_0 + \dots + L'_r,$$

$$[L'_s, L'_t] \subseteq L'_{s+t}, \quad (8)$$

полагая

$$L'_j = \langle \mathcal{D}_x^{(s)}; |s| + s_n = j+2 \rangle$$

(воспользоваться формулами (3) и обозначениями (4); сравнить с градуировкой алгебры H_n в п. 2 §6).

Очевидно, $L'_0 \cong C_{n'} \oplus k$ и $\Gamma: C_{n'} \rightarrow \text{End } L'_{-1}$ — стандартное представление. Если $\mathcal{L}'_i = \sum_{j \geq i} L'_j$, то $\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0$ — подалгебра, опре-

деляющая обычную фильтрацию. Все результаты этого пункта переносятся непосредственно на произвольную алгебру $K(\mathcal{F}, \omega)$, коль скоро коэффициенты β_i , $i < n$, в ω равны нулю.

3. Подалгебра $\mathfrak{C}$ в $K_{n'+1}$.

Предложение 3. Подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры $K_{n'+1}$ совпадает с алгеброй элементов вида $\mathcal{D}_f$, $f \in \mathfrak{m}^{(p+3)/2}$.

Доказательство. Пусть $[[\mathcal{D}_u, \mathcal{D}_c], \mathcal{D}_c] = \mathcal{D}_w$. Очевидно, что w принадлежит идеалу в O , порожденному $\frac{\partial c}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}$. Положим $c = l^{(p+3)/2} v$, где l — линейная форма. Из сказанного выше следует, что $(\text{ad } \mathcal{D}_c)^2 = 0$. Так как элементы вида $l^{(p+3)/2} v$ порождают $\mathfrak{m}^{(p+3)/2}$ как линейное пространство, то отсюда вытекает, что $\mathcal{D}_f \in \mathfrak{C}$, если $f \in \mathfrak{m}^{(p+3)/2}$.

Пусть, наоборот, $\mathcal{D}_c \in \mathfrak{C}$ и $c \notin \mathfrak{m}^{(p+3)/2}$. Тогда

$$c = c_s + c_{s+1} + \dots, \quad s \leq \frac{p+1}{2}, \quad c_i \in \mathfrak{m}^i.$$

Если u — однородный многочлен степени k , то, как нетрудно проверить, однородная компонента наименьшей степени в w будет $\{\{u, c_s\}', c_s\}'$ и степень этой компоненты равна $k + 2s - 4$. Поэтому в случае $w = 0$ должно выполняться соотношение

$$\{\{u, c_s\}', c_s\}' = 0.$$

Полагая $u = x_i$ и $u = x_i^2$, $1 \leq i < n$, можно прийти к соотношениям

$$\left(\frac{\partial c_s}{\partial x_i} \right)^2 = 0,$$

а так как $s \leq \frac{p+1}{2}$, то $\frac{\partial c_s}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \dots, n-1$. Отсюда следует, что $c_s = \alpha x_n^s$. Полагая теперь $u = x_n^t$, мы получим, что

$$(t-s)(t-1)x_n^{t+2s-2} = 0.$$

Если $s \geq 1$, то при $t = 0$ мы приходим к неравенству $s \geq (p+3)/2$. Противоречие. При $s = 0$ то же достигается подстановкой $t = 2$.

Предложение 4. Нормализатор $N_{K_{n'+1}}(\mathfrak{C})$ алгебры $\mathfrak{C}$ совпадает с подалгеброй $\mathcal{L}_0$ алгебры $K_{n'+1}$.

Докажем сначала, что $N_{K_{n'+1}}(\mathfrak{C}) \supseteq \mathcal{L}_0$. Согласно лемме, $\mathcal{L}_0 = \langle \mathcal{D}_g \rangle$, $g \in kx_n + \mathfrak{m}^2$. Если $f \in \mathfrak{m}^{(p+3)/2}$, $g \in \mathfrak{m}^2$ и $\mathcal{D}_h = [\mathcal{D}_f, \mathcal{D}_g]$, то $h \in \mathfrak{m}^{(p+3)/2}$, что видно непосредственно из формулы (2'). Если же $g = \alpha x_n$, то $\{f, x_n\}' = 0$, и формула (2') опять показывает, что $h \in \mathfrak{m}^{(p+3)/2}$.

С другой стороны, $N_{K_{n'+1}}(\mathfrak{C})$ не может быть больше алгебры $\mathcal{L}_0$, поскольку $\mathcal{L}_0$ максимальна в $K_{n'+1}$, а последняя, как мы установили в предложении 1, проста.

§8. Инвариантные подалгебры p -алгебр

ТЕОРЕМА. Все подалгебры $\mathcal{L}_i$ фильтрации p -алгебры $\mathcal{L}$ картановского типа инвариантны. Любая собственная инвариантная подалгебра содержится в $\mathcal{L}_0$.

Доказательство. Предложения 3 §4, 3 §5, 4 §6 и 4 §7 показывают, что в любой алгебре $\mathcal{L}$ картановского типа $\mathcal{L}_0 = N_{\mathcal{L}}(\mathcal{C})$. Так как подалгебра $\mathcal{C}$, согласно своему определению, инвариантна, то и ее нормализатор $\mathcal{L}_0$ инвариантен. Наконец, все члены фильтрации $\mathcal{L}_i$ определяются подалгеброй $\mathcal{L}_0$, и это определение показывает, что они инвариантны вместе с ней. Тем самым первое утверждение теоремы доказано. Из него, кстати, следует, что группа автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}$ индуцирует группы линейных преобразований всех пространств L_i .

Предположим, что $\mathcal{M}$ — инвариантная подалгебра алгебры $\mathcal{L}$, не содержащаяся в $\mathcal{L}_0$. Докажем сначала, что проекция $\mathcal{M}$ на $V = \mathcal{L}/\mathcal{L}_0$ совпадает со всем V . По условию, эта проекция отлична от 0, т. е. содержит элемент $e \in V$, $e \neq 0$, а следовательно, и все элементы вида e^φ , $\varphi \in \mathfrak{G}$, где $\mathfrak{G}$ — группа линейных преобразований, индуцированных группой автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}$ в V . Мы построим в явном виде некоторую подгруппу группы $\mathfrak{G}$. С этой целью заметим, что каждый автоморфизм φ алгебры $\mathcal{O}$ определяет автоморфизм (обозначаемый снова через φ) алгебры дифференцирований W_n алгебры $\mathcal{O}$:

$$\mathcal{D}^\varphi(f) = (\mathcal{D}(f^{\varphi^{-1}}))^\varphi, \quad f \in \mathcal{O}.$$

Аналогично, если Ω — алгебра внешних дифференциальных форм над $\mathcal{O}$, то φ определяет автоморфизм в Ω , задаваемый для одномерных форм условием

$$(\mathcal{D}, \omega^\varphi) = (\mathcal{D}^{\varphi^{-1}}, \omega)^\varphi.$$

Пусть, в частности, ω — дифференциальная форма, участвующая в определении алгебры $\mathcal{L}$ картановского типа (мы можем положить $\omega = 0$ для $\mathcal{L} = W_n$), а φ — такой автоморфизм алгебры $\mathcal{O}$, что $\omega^\varphi = a\omega$, $a \in k$. Тогда φ сохраняет $\mathcal{L} \subset W_n$ и определяет в $\mathcal{L}$ автоморфизм. Ограничимся линейными преобразованиями переменных $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющими условию $\omega^\varphi = a\omega$, $a \in k$. В случае алгебр W_n , S_{n-1} , H_n и $K_{n'+1}$ группа $\mathfrak{G}_0$, которую эти автоморфизмы индуцируют в V , совпадает соответственно с $GL(n, k)$, $GL(n, k)$, $CS_p(n, k) = S_p(n, k) \times k$ и G_n , где G_n — группа автоморфизмов пространства V , сохраняющих некоторую гиперплоскость $V_0 \subset V$.

Хорошо известно, что первые три группы действуют в V неприводимо. Поэтому при $e \neq 0$, $e \in V$, векторы e^φ , $\varphi \in \mathfrak{G}_0$, в этих случаях порождают все пространство V , а это значит, что проекция $\mathfrak{M}$ на V совпадает с V .

Пусть $\mathcal{L} = K_{n'+1}$. Тогда $V_0 = L'_{-1}$ (см. (8), §7) является единственным собственным инвариантным относительно $\mathfrak{G}_0$ подпространством пространства V [17]. Поэтому проекция $\mathfrak{M}$ на V совпадает или с V , или с V_0 . Если бы она совпадала с V_0 , то алгебра, порожденная $\mathfrak{M}$ и $\mathcal{L}_0$, также проектировалась бы на V_0 , в то время как известно, что $\mathcal{L}_0$ не содержится в большей подалгебре алгебры $K_{n'+1}$ (примитивность алгебры $K_{n'+1}$ в терминологии [18]). Таким образом, проекция $\mathfrak{M}$ на V в любом случае совпадает с V .

Положим $\mathfrak{M} \cap \mathcal{L}_i = \mathfrak{M}_i$ и обозначим через $\text{Gr } \mathfrak{M} = M$ градуированную алгебру, соответствующую этой фильтрации. Нам достаточно доказать, что $M = L$. Для этого мы должны привлечь другие автоморфизмы алгебры $\mathcal{L}$. Именно, пусть $\mathcal{L}_r$ — последний ненулевой член фильтрации. Тогда $(\text{ad } x)^2 = 0$ для $x \in \mathcal{L}_r$ и поэтому преобразование $\varphi_x = 1 + \text{ad } x$ определяет, как хорошо известно, автоморфизм алгебры $\mathcal{L}$, а значит, и алгебры L . Отсюда следует, что $[\mathfrak{M}, x] \subset \mathfrak{M}$ и поэтому $[M, L_r] \subset M$. Так как мы доказали, что $V \subset M$, то $[V, L_r] \subset M$. Аналогично, $[V, x] \subset M$, если x — образ любого элемента из $\mathfrak{C}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{L}$ — алгебра одной из первых трех серий, т. е. $\mathcal{L} \neq K_n$. Тогда, как мы знаем, $\mathcal{L}$ градуирована: $\mathcal{L} = L$. Если $x \in L_r$, $x \neq 0$, то идеал I_x , порожденный элементом x в L , совпадает с L . С другой стороны, I_x натягивается на элементы вида $[\dots[x, y_1] \dots, y_k]$, $y_i \in L_{s_i}$. Пользуясь многократно тождеством Якоби, можно выразить все элементы через такие, у которых $s_i = 0$ или -1 и даже (ввиду инвариантности L_{-1} и L_r относительно L_0) через произведения вида $[\dots[x', y_1] \dots, y_k]$, $x' \in L_r$, $y_i \in L_{-1}$. Таким образом, $L_i = [L_r, V^{r-i}]$, откуда вытекает включение $L_i \subset M$ при $i < r$. Но так как $[L_r, M] \subset M$, то и $L_r \subset M$, иначе подалгебра L_r была бы идеалом.

Обращаясь теперь к алгебре $K_{n'+1}$, заметим, что, как и в алгебрах первых трех серий, $[\mathfrak{M}, \mathfrak{C}] \subset \mathfrak{M}$ (следствие инвариантности подалгебры $\mathfrak{M}$). Так как $\mathcal{D}_{x_n^{p-1}x_1} \in \mathfrak{C}$ (см. предложение 3 §7), то, в частности,

$$[\mathcal{D}_{x_n^{p-1}x_1}, \mathcal{D}_{x_{n'+1}+u}] = \mathcal{D}_{x_n^{p-1}+f}^p \in \mathfrak{M},$$

$$\min \deg f \geq p \quad (\text{если } \deg u > 1, \mathcal{D}_{x_{n'+1}+u} \in \mathfrak{M}). \quad (1)$$

Далее, $\mathcal{L}_r \in \mathfrak{C}$, поэтому $[\mathfrak{M}, \mathcal{L}_r] \subset \mathfrak{M}$, откуда, ввиду $\pi_{-1}(\mathfrak{M}) = V$, следует $\pi_{r-1}(\mathfrak{M}) = L_{r-1}$ ($\pi_i(\mathfrak{M})$ — проекция $\mathfrak{M}$ на L_i). Так

как $L_i = \tilde{L}_i \cong (\mathcal{O}_1 \otimes H'_n)_i$, $i \geq p-1$ (см. предложение 2 §7), то $\pi_i([\mathcal{L}_r, \mathcal{M}^{r-i}]) = L_i$, $i \geq p-1$, что является отражением уже отмеченного ранее факта о гамильтоновых алгебрах. Стоит только заметить, что $(H'_n)_{-1} = \langle \mathcal{D}_{x_1}, \dots, \mathcal{D}_{x_{n-1}} \rangle = V_0 \subset V$. С другой стороны, $\pi_{p-2}([\mathcal{L}_r, \mathcal{M}^{r-(p-2)}]) \neq L_{p-2}$. Более точно,

$$\pi_{p-2}([\mathcal{L}_r, \mathcal{M}^{r-(p-2)}]) = \langle \mathcal{D}_{h_0}; \deg h_0 = p \rangle.$$

С учетом (1) получаем, однако, что $\pi_{p-2}(\mathcal{M}_{p-2}) = L_{p-2}$. Таким образом,

$$[\mathcal{M}_{p-2}, \mathcal{M}_{r-(p-2)}] \cong [L_{p-2}, L_{r-(p-2)}] = L_r = \mathcal{L}_r = \mathcal{M}_r,$$

или, переходя от градуированных алгебр к исходным, $\mathcal{M}_{p-2} = \mathcal{L}_{p-2}$. Доказательство завершается теперь формальными действиями уже в рамках самой алгебры $K_{n'+1}$.

Замечание. Вычисление подалгебры $\mathfrak{C}$ для алгебр картановского типа, не являющихся p -алгебрами, представляет заметно большие трудности. Однако мы предполагаем, что результаты этого параграфа верны и в общем случае.

§9. Неизоморфность p -алгебр картановского типа

ТЕОРЕМА. Две алгебры картановского типа не изоморфны, если они принадлежат разным сериям или же одной серии, но имеют в ней разные номера.

Доказательство. Легко проверить, что размерности двух различных алгебр картановского типа могут совпадать только в случае алгебры W_n , $n = p^s$, s четно, и $K_{m'+1}$, $m = p^s + s = 2m' + 1$. Неизоморфность этих алгебр следует из того, что фильтрации в них определены инвариантно. В то время как алгебра W_n относительно этой фильтрации градуирована, т. е. $\text{Gr } W_n \cong W_n$, для алгебры $K_{m'+1}$ это не так (см. предложение 2 §7).

Замечание. По-видимому, аналогичный результат верен для любых алгебр картановского типа. Доказательство этого упирается в вопрос, поставленный в конце предшествующего параграфа.

§10. Сильно транзитивные подалгебры

Имеются в виду подалгебры градуированных p -алгебр картановского типа, содержащие $L_{-1} + L_0$. Предварительно опишем структуру L_0 -модулей L_s , главным образом, при $s = 1$.

Начнем с алгебры W_n . Положим

$$L'_s = \langle \mathcal{D} \in L_s; \quad \operatorname{div} \mathcal{D} = 0 \rangle, \quad (1)$$

$$L''_s = \langle T_f; \quad T_f = fT_1, \quad T_1 = \sum_{k=1}^n x \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \deg f = s \rangle. \quad (2)$$

Очевидно, L'_s и L''_s — два собственных подпространства в L_s ($L'_s = 0$ при $n = 1$). Инвариантность L'_s относительно L_0 является прямым следствием тождества (13) §4. Поскольку алгебра L_0 натянута на операторы вида $x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, инвариантность L''_s вытекает из соотношений

$$\left[x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, T_f \right] = T u, \quad u = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (3)$$

При помощи (3) нетрудно также установить неприводимость L''_s . Хорошо известно, что в случае поля нулевой характеристики имеет место прямое разложение

$$L_s = L'_s \oplus L''_s.$$

То же верно и в общем случае, если только $s + n \not\equiv 0 \pmod{p}$. Но

$$\operatorname{div} T_f = (s + n)f, \quad s = \deg f,$$

и при $s + n \equiv 0 \pmod{p}$ мы получаем включение $L''_s \subset L'_s$.

1) Докажем, что L_0 -модуль L'_s неприводим при $s + n \not\equiv 0 \pmod{p}$, $s < p - 1$. Действительно, пусть N — подмодуль в L'_s и

$$0 \neq \mathcal{A} = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k} \in N.$$

Без ограничения общности можно считать $a_1 \neq 0$. Так как

$$\left[x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \mathcal{A} \right] = \sum_{k=1}^n g_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad g_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} x_i - \delta_{j,k} a_i, \quad (4)$$

то в случае $\frac{\partial a_1}{\partial x_j} \neq 0$, $j > 1$, после t -кратного, $t \leq s$, умножения на операторы типа $x_1 \frac{\partial}{\partial x_j}$, мы получим элемент

$$B = x_1^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^n b_k \frac{\partial}{\partial x_k} \in N. \quad (5)$$

Если $[B, x_i \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, $j \geq 2$, то, согласно (4), $\frac{\partial b_k}{\partial x_j} = 0$, $j \neq k$, поскольку $s < p - 1$. Таким образом,

$$b_k = \sum_{l=0}^{s+1} \beta_{k,l} x_1^l x_k^{s+1-l}.$$

Полагая теперь $i = j = k$, найдем, что $\beta_{k,l} = 0$ для всех $l \neq s$, т. е. $b_k = \beta_{k,s} x_1^s x_k$. Если же $j = k > 1$, $i = 1$, то получится равенство $\beta_{k,s} = 1$, т. е. $B = T_{x_1^s}$, что противоречит условию $\operatorname{div} B = 0$, $s + n \neq 0 \pmod{p}$. Итак,

$$0 \neq \left[B, x_{i_0} \frac{\partial}{\partial x_{j_0}} \right] = D \in N$$

для некоторой пары индексов $i_0 \geq 1$, $j_0 \geq 2$. Произведения D с $x_1 \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j \geq 2$, приведут нас к элементу $x_1^{s+1} \sum_{k=2}^n \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \neq 0$ (возможно, что D уже имел такой вид). Умножением на $x_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha_i \neq 0$, можно извлечь элементы

$$E_j = x_1^{s+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \in N, \quad j > 1.$$

Легко убедиться в том, что на дифференциальные операторы

$$\left[\dots \left[E_j, x_{k_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right], \dots, x_{k_t} \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \in N, \quad t \leq 2s + 2, \quad k_i > 1,$$

натягивается весь модуль L'_s .

2) Пусть $n = n_0 p - 1$. Тогда L_0 -модуль L'_1 содержит единственный подмодуль L''_1 (см. (1) и (2)). В самом деле, рассмотрим подмодуль $N \subset L'_1$, не совпадающий с L''_1 . Как и ранее, мы найдем в N оператор $B \neq 0$ вида (5). Отсюда будет вытекать равенство $N = L'_1$, кроме случая $B \in L''_1$, когда получается лишь включение $N \subset L''_1$. Таким образом, нужно рассмотреть ситуацию, при которой

$$A \in N - N''_1, \quad \text{но} \quad \left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_j}, A \right] = T_{f_j} \quad \text{для всех} \quad j > 1. \quad (6)$$

Условие (6) эквивалентно системе соотношений

$$f_j x_k = \frac{\partial a_k}{\partial x_j} x_1 - \delta_{j,k} a_1, \quad k \geq 1, \quad j > 1,$$

откуда

$$a_1 = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) x_1, \quad a_k = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right) x_k + \alpha'_k x_1^2, \quad k > 1,$$

так что

$$\mathcal{A} = x_1^2 \sum_{k=2}^n \alpha'_k \frac{\partial}{\partial x_k} + T_{\sum \alpha_i x_i}.$$

По предположению, $\alpha'_{k_0} \neq 0$ для какого-то $k_0 > 1$ и $T_{\sum \alpha_i x_i} \in L'_1 \subset N$. Следовательно,

$$0 \neq \mathcal{D} = x_1^2 \sum_{k=2}^n \alpha'_k \frac{\partial}{\partial x_k} \in N \quad \text{и} \quad N = L'_1.$$

3) Докажем, что $L_1 \supset L'_1 \supset L''_1 \supset 0$ — единственный композиционный ряд модуля L_1 при $n = n_0 p - 1$. Опять-таки, исходя из элемента $\mathcal{A} \neq 0$ в подмодуле N , не содержащемся в L'_1 , мы найдем оператор $\mathcal{B} \neq 0$ вида (5). Пусть сначала $\operatorname{div} \mathcal{B} = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \neq 0$. Анализ условий типа (6) показывает, что они не могут выполняться ни для какого оператора с отличной от нуля дивергенцией. В частности, $\left[x_1 \frac{\partial}{\partial x_j}, \mathcal{B} \right] = \mathcal{D} = \sum_{i=2}^n d_i \frac{\partial}{\partial x_i} \neq 0$ при некотором $j > 1$. Так же, как и в 1), из $\mathcal{D}$ можно получить ненулевой оператор $x_1^2 \sum_{k=2}^n \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} \in N \cap L'_1$. В соответствии с 2), приходим к заключению, что $N \supset L'_1$, а тогда

$$\mathcal{B} - \left(\sum_{i \neq j} \beta_i x_i + \frac{\beta_j}{2} x_j \right) x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in L'_1 \subset N$$

и, следовательно,

$$\left(\sum_{i \neq j} \beta_i x_i + \frac{\beta_j}{2} x_j \right) x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in N \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, n.$$

Если, например, $\beta_1 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} & \beta_1 x_1 x_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \\ & = \left[x_k \frac{\partial}{\partial x_1}, \left(\sum_{i=2}^n \beta_i x_i + \frac{\beta_1}{2} x_1 \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] - \left(\sum_{i=2}^n \beta_i x_i \right) x_k \frac{\partial}{\partial x_1} \in N \end{aligned}$$

для $k = 2, \dots, n$, поскольку $\operatorname{div} \left\{ \left(\sum_{i=2}^n \beta_i x_i \right) x_k \frac{\partial}{\partial x_1} \right\} = 0$. А в таком случае и

$$\frac{\beta_1}{2} x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_1} = \left(\sum_{i=2}^n \beta_i x_i + \frac{\beta_1}{2} x_1 \right) x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - \sum_{i=2}^n \beta_i \left(x_i x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \in N.$$

Но $\dim L_1/L'_1 = n$, поэтому $N = L_1$. Пусть теперь $\operatorname{div} B = 0$. В силу сделанного ранее замечания, $B \notin L'_1$, следовательно, мы снова приходим к включению $N \supset L'_1$, а затем при помощи исходного элемента A получаем весь модуль L_1 .

Обратимся к алгебре $L = S_{n-1}$. По определению, $L_k = (S_{n-1})_k$ при $k \geq 1$ совпадает с модулем L'_k алгебры W_n (см. (1)), а кроме того, $(S_{n-1})_k$ ведет себя над $(S_{n-1})_0$ так же, как над $(W_n)_0$. В силу сказанного выше, модуль $(S_{n-1})_1$ неприводим при $n+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ и содержит единственный собственный подмодуль L'_1 при $n+1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Наконец, рассмотрим алгебру $H_{n'}$, $n = 2n'$, которую, согласно §6, мы можем интерпретировать как факторкольцо O'/k с законом умножения (4') §7. Модуль L_s натянут на однородные многочлены степени $s+2$. При $s \leq p-3$ неприводимость L_s над $L_0 \cong C_{n'}$ доказывается совсем просто. Если $\frac{\partial u}{\partial x_{n'+i}} \neq 0$, то, ввиду условия $s \leq p-3$, $\frac{\partial u}{\partial x_{n'+i}} x_i \neq 0$ и, следовательно, $0 \neq 2 \frac{\partial u}{\partial x_{n'+i}} x_i = \{x_i^2, u\} \in N$. На этом пути можно получить отличный от нуля элемент $v \in N$ с условием $\frac{\partial v}{\partial x_{n'+i}} = 0$, $i = 1, \dots, n'$. Очевидно, $\{v, x_1 x_{n'+i}\} = \frac{\partial v}{\partial x_i} x_1$, и мы легко убеждаемся в том, что $x_1^{s+2} \in N$. Так как любой одночлен $x_1^{s_1} \dots x_{n'}^{s_{n'}}$, $\sum s_i = s+2$, записывается в виде

$$2^{-\mu} \{ \dots \{ \{ \dots \{ x_1^{s+2}, x_{i_1} x_{n'+1} \}, \dots, x_{i_\nu} x_{n'+1} \}, x_{n'+j_1}^2 \}, \dots, x_{n'+j_\mu}^2 \} \in N$$

с $1 \leq i_k, j_k \leq n'$, то N совпадает с L_s , и неприводимость L_s доказана.

Теперь мы можем доказать следующее

Предложение. Пусть $L = L_{-1} + L_0 + \dots + L_r$ — простая r -алгебра Ли типа W_n , S_{n-1} или $H_{n'}$, и пусть M — ее подалгебра (не обязательно градуированная), содержащая $L_{-1} + L_0$. Тогда возможны лишь следующие случаи:

- 1) $M = L_{-1} + L_0$;
- 2) $M = L$;
- 3) $L = W_n$, $M = L_{-1} + L_0 + L'_1$ ($\cong A_n$ при $n+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$), где $L'_1 = \langle T_f; \deg f = 1 \rangle$ (см. (16));

4) $L = W_n$, $M = L_{-1} + L_0 + L'_1 + \dots + L'_{r-1} \supset S_{n-1}$ (см. (1) для определения L'_s), $M/S_{n-1} \cong L_0/[L_0, L_0]$;

5) $L = S_{n-1}$, $n+1 \equiv 0 \pmod{p}$, $M = L_{-1} + L_0 + L''_1 \cong A_n$.

Доказательство. Пусть M содержит подалгебру $L_{-1} + L_0$ собственным образом. Если

$$a = a_{-1} + a_0 + \dots + a_k \in M, \quad k > 0, \quad a_k \neq 0,$$

то $b_1 = [\dots[a_k, u_1], \dots, u_{k-1}] \neq 0$ при некоторых $u_i \in L_{-1}$, и мы получаем элемент $b_1 \in L_1 \cap M$. Таким образом, $L_1 \cap M \neq 0$ при наших предположениях. Как и ранее (см. доказательство теоремы в §8), рассмотрим идеал I_c , порожденный в L любым отличным от нуля элементом $c \in L_r$ (r — длина фильтрации алгебры L). Конечно, I_c совпадает с L , но, с другой стороны, I_c натянут на элементы вида

$$[\dots[[\dots[c, x_1], \dots, x_k], u_1], \dots, u_l], \quad x_i \in L_0, \quad u_j \in L_{-1}.$$

Отсюда вытекает, между прочим, неприводимость L_0 -модуля L_r в любой градуированной простой алгебре Ли L . Допустим на один момент, что $L_r \cap M \neq 0$. Тогда для $c \in L_1 \cap M$ получаем:

$$M = I_c = L.$$

Таким образом, случай 2) предложения имеет место всякий раз, когда $M \cap L_r \neq 0$.

Наиболее просто дело обстоит с гамильтоновой алгеброй $H_{n'}$. Ввиду установленной нами неприводимости L_1 , $M \supset L_1$. В частности, $x_1^3 \in M$. Если $x_1^i \in M$, то и $\{x_1^i, x_1^{2n'+1}\} = ix_1^{i+1} \in M$. Пусть мы уже знаем, что $w = (x_1 \dots x_k)^{p-1} x_{k+1}^i \in M$. Тогда

$$M \ni wx_{k+1} = \begin{cases} \{x_1 x_{k+1} x_{n'+1}, w\} & \text{при } k+1 \leq n', \\ \frac{1}{2+i} \{x_{k+1-n'} x_{k+1}^2, w\} & \text{при } k+1 > n', i < p-2 \\ \{x_{k+2-n'} x_{k+1} x_{k+2}, w\} & \text{при } k+1 < n, i = p-2. \end{cases}$$

Следовательно, мы можем получить одночлен $(x_1 \dots x_{n-1})^{p-1} x_n^{p-2} \in L_r \cap M$, и совпадение M с $L = H_{n'}$ доказано.

Переходим к специальной алгебре S_{n-1} . Предположим сначала, что $L_1 \subset M$. Мы не будем находить в явном виде элемент из $L_r \cap M$, но существование его вытекает из следующих простых соображений. Пусть мы знаем, что $0 \neq \mathcal{A} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in L_k \cap M$. Без

ограничения общности полагаем $a_1 \neq 0$. Кроме того, преобразованиями $\mathcal{A} \rightarrow \left[\mathcal{A}, x_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \right]$, $j > 1$, добьемся того, чтобы $\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} \neq 0$, а если $k > p - 3$, то и $\frac{\partial^{p-1} a_1}{\partial x_1^{p-1}} \neq 0$. Поскольку $\operatorname{div} \mathcal{A} = 0$, должно выполняться также неравенство $\frac{\partial a_1}{\partial x_1} \neq 0$ (соответственно, $\frac{\partial^{p-2} a_1}{\partial x_1^{p-2}} \neq 0$) для некоторого $l > 1$. Если $\left[\mathcal{A}, x_s x_t \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \neq 0$, $s, t \neq 1$, то мы получим элемент в $L_{k+1} \cap M$, с которым поступаем аналогичным образом. Если же $\left[\mathcal{A}, x_s x_t \frac{\partial}{\partial x_1} \right] = 0$ для всех $s > 1$ и $t > 1$, то, в частности, $\frac{\partial a_1}{\partial x_1} x_s x_t = 0$, что при нашем выборе $\mathcal{A}$ возможно лишь при $k = r = n(p-1) - 2$. Итак, $L_r \cap M \neq 0$ и $M = S_{n-1}$.

Как мы знаем, $L \cap M \neq L_1$ возможно лишь при $n+1 \equiv 0 \pmod{p}$, причем в этом случае $L_1 \cap M = L_1''$ (см. (2) и 2)). Легко проверяется, что $[L_1'', L_1''] = 0$, следовательно, $M = L_{-1} + L_0 + L_1''$ — подалгебра в $S_{n_0 p - 2}$, $\dim M = 2n + (n^2 - 1) = (n_0 p)^2 - 2$. Подалгебра Картана H_0 алгебры L_0 остается такой же подалгеброй Картана в M , а корневая система увеличивается на $2n$ корней $\pm \omega_1, \dots, \pm \omega_n$. Соответствующие корневые векторы e_{ω_i} лежат в L_{-1} , а $e_{-\omega_i}$ — в L_1'' . Изоморфизм M с профакторизованной по одноименному центру алгеброй всех матриц со следом нуль и порядка $n_0 p$ устанавливается либо непосредственно, либо при помощи теорем А и 1 из работы [22].

Предположим теперь, что в M есть элемент $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_k$, $\mathcal{A}_k \neq 0$, не содержащийся в $L_{-1} + L_0 + L_1''$. Если $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$, то, в соответствии с 2), L_0 -модуль, порожденный L_1'' и $\mathcal{A}_1$, совпадает с L_1 . Если же $k > 2$, то после $k-2$ умножений $\mathcal{A}$ на элементы из L_{-1} мы приходим к $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'_1 + \mathcal{A}'_2 \in M$, $\mathcal{A}'_2 \neq 0$. Так как $n+2 \not\equiv 0 \pmod{p}$, то, согласно 1), на образы компоненты $\mathcal{A}'_2$ относительно операторов из L_0 можно натянуть весь модуль L_2 . Остается воспользоваться замечанием, что $[L_2, L_{-1}] = L_1$. Итак, подалгебра $M \subset S_{n-1}$, содержащая $L_{-1} + L_0 + L_1''$ собственным образом, должна совпадать с S_{n-1} .

Из самого определения общей алгебры W_n вытекает, что $M = W_n$, если $M \supset L_1$. Далее, из сказанного выше о подалгебрах в S_n следует, что $M \supset S_{n-1} + \langle x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle$ в случае $M \cap L_1 = L_1'$. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_k \in M$, $\mathcal{A}_k \in L_k$, $\operatorname{div} \mathcal{A}_k \neq 0$. При $k = 1$ замечаем (см. начало этого параграфа и 3)), что L_0 -модуль, порожденный L_1' и $\mathcal{A}$, совпадает с L_1 , так что $M = W_n$. При $k > 1$, пользуясь условием

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \left(\dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (\operatorname{div} \mathcal{A}_k) \right) \dots \right) \neq 0$$

(для какой-то последовательности индексов $i_1, \dots, i_{k-1}$), получим элемент $B_1 = \left[\dots \left[A_k, \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right], \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \right] \in M \cap L_1$ с $\operatorname{div} B_1 \neq 0$. Снова $M = L$. Пусть, наконец, $M \cap L_1 = L_1''$. В дополнение к сказанному выше, нужно заметить, что $[L_k'', L_{-1}] \not\subseteq L_{k-1}''$, поскольку

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, T_f \right] = T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}} + f \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Поэтому в случае $n+1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ любой элемент $A \in M$, не содержащийся в $L_{-1} + L_0 + L_1''$, при действии на него операторов из L_{-1} приведет нас к $B_1 = B_1' + B_1'' \in M$ с $0 \neq B_1' \in L_1'$. Из-за неприводимости L_1' получим $M \cap L_1 = L_1$, вопреки предположению. В случае $n+1 \equiv 0 \pmod{p}$ поступаем аналогично. Здесь, ввиду включения $L_1' \supset L_1''$, возможен результат $M \cap L_1 = L_1'$, опять-таки противоречащий нашему допущению. Предложение доказано.

ГЛАВА II. ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРЫ L_0

§1. Формулировка результатов

Мы рассматриваем градуированную конечномерную алгебру Ли L над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 7$. Пусть

$$L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \dots + L_r$$

— ее градуировка, $L_{-1} = V$ и $\Gamma: L_0 \rightarrow \operatorname{End} V$ — представление, определенное умножением в L . Из определения градуированной алгебры следует, что Γ — точное представление.

Основным результатом этой главы является

ТЕОРЕМА. При условиях:

- $L_2 \neq 0$,
- $\dim V < p - 1$,
- L_0 — p -алгебра Ли,
- Γ — неприводимое p -представление

допустимы лишь следующие возможности:

- $L_0 \cong A_n$, Γ — стандартное представление;
- $L_0 \cong A_n \oplus k$, $\Gamma|_{A_n}$ — стандартное представление;
- $L_0 \cong C_n$, Γ — стандартное представление;
- $L_0 \cong C_n \oplus k$, $\Gamma|_{C_n}$ — стандартное представление.

Доказательство теоремы распадается на части, соответствующие предложениям 1 — 3 и леммам 1 — 15.

Предложение 1. В условиях теоремы алгебра L_0 полупроста и является прямой суммой простых классических алгебр с невырожденной формой следа и, быть может, одномерного центра. Ограничение представления Γ на каждое из слагаемых алгебры L_0 является p -представлением.

Доказательство. Из условий б) и г) теоремы следует, что алгебра L_0 — редуктивная с центром $\mathfrak{z}(L_0)$, $\dim \mathfrak{z}(L_0) \leq 1$, так как в этом случае применимы обычные рассуждения (см. гл. II книги [19]). Поэтому можно применить теорему работы [23], которая утверждает, что

$$L_0 = M_1 \oplus \dots \oplus M_k \oplus \mathfrak{z}(L_0),$$

где M_i — классическая простая алгебра.

Без ограничения $\dim L_{-1} < p$ представление $\Gamma|_{M_i}$ может и не быть p -представлением. Существует соответствующий пример при $p = 3$. Но в нашем случае для любой трехмерной простой подалгебры $A_1 \subseteq M_i$ ограничение $\Gamma|_{A_1}$ является p -представлением [12]. Отсюда, очевидно, вытекает, что и $\Gamma|_{M_i}$ — p -представление. Предложение доказано.

Для исследования представления алгебры L_0 в V мы можем применить теорию неприводимых p -представлений простых классических алгебр (см. [7]). Действительно, ввиду предложения 1, представление Γ является, как известно, тензорным произведением некоторых неприводимых представлений простых слагаемых алгебры L_0 . Согласно [7], неприводимые p -представления задаются их старшими весами.

Предложение 2. Разность любых двух весов представления Γ равна разности некоторых двух корней алгебры L_0 .

Предложение 3. С точностью до одномерного центра, алгебра L_0 — простая. В выражении

$$\varphi = \sum_{i=1}^l s_i \lambda_i$$

старшего веса φ представления Γ через фундаментальные веса λ_i коэффициенты s_i равны 0, 1 или 2, причем $s_i = 2$ не более чем для одного значения i . Исключение может составить пара $L_0 = G_2 \oplus k$, $\varphi = 3\lambda_2$. Аналогичное утверждение верно для коэффициентов t_i выражения

$$\psi = - \sum_{i=1}^l t_i \lambda_i$$

младшего веса ψ представления Γ .

§2. Доказательство предложения 2

Зафиксируем картановскую подалгебру H алгебры L_0 . Мы будем пользоваться понятием весов представления алгебры L_0 , подразумевая под этим веса представления, ограниченного на H . Представление Γ осуществляет вложение алгебры L_0 в $V \otimes V^*$, где V^* — пространство, дуальное к V . Точно так же каждый L_0 -модуль L_i мы рассматриваем как инвариантное относительно L_0 подпространство в $V \otimes S^{i+1}(V^*)$. Если $V = \sum_i V_{\mu_i}$ и $V^* = \sum_i V_{-\mu_i}^*$ — разложения V и V^* на весовые пространства, то имеется соответствующее разложение пространства $V \otimes S^{i+1}(V^*)$, а значит и его L_0 -инвариантного подпространства L_i на весовые подпространства с весами вида $\mu_{k_0} - \mu_{k_1} - \dots - \mu_{k_{i+1}}$. Обозначим через Λ_i множество весов представления Γ_i алгебры L_0 в L_i . В частности, Λ_0 — множество корней алгебры L_0 . Нам понадобится следующая

ЛЕММА 1. Если $\mu \in \Lambda_{-1}$ и $\alpha \in \Lambda_0$ таковы, что $\mu + \alpha \in \Lambda_{-1}$ и e_α — корневой вектор, то существует такой весовой вектор v_μ , соответствующий μ , что $\Gamma(e_\alpha)v_\mu = [v_\mu, e_\alpha] \neq 0$.

Доказательство смотрите в [19], стр 126. Необходимые рассуждения опираются на полную приводимость ограничений представления Γ на простые трехмерные подалгебры, что в нашем случае обеспечивается условием $\dim V < p$.

Воспользуемся дальше тремя простыми леммами из работы [17]. Для удобства читателя их доказательство, никак не зависящие от характеристики, будут здесь приведены.

ЛЕММА 2. Имеет место включение $[L_1, V] \supset [L_0, L_0]$ (лемма 5.1 из [17]).

Доказательство. Если это не так, то существует такое разложение алгебры $L_0 = L'_0 \oplus L''_0$, что $\dim L'_0 > 1$ и $[L_1, V] \subset L'_0$. Соответственно, $V = V' \otimes V''$ и $\Gamma = \Gamma' \otimes \Gamma''$. Но тогда

$$\Gamma([x, v])(v' \otimes v'') = \Gamma'([x, v])v' \otimes v'' \quad (1)$$

при любых $x \in L_1, v \in V$. Обратим теперь внимание на соотношение

$$[[x, v_1], v_2] = [[x, v_2], v_1].$$

Вычислим обе его части отдельно, положив $v_1 = v'_1 \otimes v''_1, v_2 = v'_2 \otimes v''_2$ и используя условие (1). Если взять v'_1 и v'_2 непропорциональными (по предположению $\dim V'' > 1$), то мы получим, что $\Gamma'([x, v_1]) = 0$ для всех x и v_1 , а это значит, что $[L_1, V] = 0$, т. е. $L_1 = 0$ — противоречие.

ЛЕММА 3. Для каждого корня $\alpha \in \Lambda_0$ существует такой вес $\xi \in \Lambda_1$, что если $\mu + \alpha$ — вес при некотором $\mu \in \Lambda_{-1}$, то $\mu + \xi$ — корень (лемма 5.3 из [17]).

Доказательство. Согласно лемме 2, корневой вектор e_α , соответствующий α , имеет вид

$$e_\alpha = \sum_i [u_\xi^i, v_\nu^i], \quad \xi + \nu = \alpha, \quad \xi \in \Lambda_1, \quad \nu \in \Lambda_{-1},$$

и, ввиду одномерности корневого подпространства,

$$e_\alpha = [u_\xi, v_\nu].$$

Из условия $\mu + \alpha \in \Lambda_{-1}$ вытекает, согласно лемме 1, существование весового вектора v_μ , для которого $[v_\mu, e_\alpha] \neq 0$. Таким образом,

$$0 \neq [v_\mu, e_\alpha] = -[[u_\xi, v_\nu], v_\mu] = -[[u_\xi, v_\mu], v_\nu],$$

откуда $[u_\xi, v_\mu] \neq 0$ и, значит, $\mu + \xi$ — корень.

ЛЕММА 4. Если $\mu, \nu \in \Lambda_{-1}$, $\alpha \in \Lambda_0$ и $\mu + \alpha, \nu + \alpha \in \Lambda_{-1}$ то $\mu - \nu$ — разность двух корней (лемма 5.5 из [17]).

Действительно, по предыдущей лемме, найдется вес $\xi \in \Lambda_1$, для которого $\mu + \xi$ и $\nu + \xi$ — корни. Равенство $\mu - \nu = (\mu + \xi) - (\nu + \xi)$ дает нужное представление.

Перейдем к доказательству предложения 2.

Пусть $\mu, \nu \in \Lambda_{-1}$. Если существует такой корень α , что $\mu + \alpha, \nu + \alpha \in \Lambda_{-1}$, то утверждение следует из леммы 4. Рассмотрим теперь случай, когда при любом $\alpha \in \Lambda_0$ либо $\mu + \alpha \notin \Lambda_{-1}$, либо $\nu + \alpha \notin \Lambda_{-1}$. Обозначим через v_μ и v_ν произвольные весовые векторы для μ и ν . По условию $L_2 \neq 0$. Докажем, что $[[L_2, v_\mu], v_\nu] \neq 0$.

Предварительно заметим, что каков бы ни был весовой вектор $v_\lambda, \lambda \in \Lambda_{-1}$, пространство V натягивается на векторы вида

$$[[\dots [v_\lambda, e_{\beta_1}], \dots], e_{\beta_k}],$$

где e_{β_i} — корневые векторы, для которых $\lambda + \beta_i \in \Lambda_{-1}$ (другими словами, $[v_\lambda, e_{\beta_i}] \neq 0$). Это следует из того, что пространство V , ввиду неприводимости Γ , натягивается на произведения $[v_\lambda e_{\beta_1} \dots e_{\beta_k}]$ с произвольными корнями β_i , а если $[v_\lambda, e_{\beta_j}] = 0$ для некоторого $j \leq k$, то

$$[v_\lambda e_{\beta_1} \dots e_{\beta_j}] = [v_\lambda e_{\beta_1} \dots [e_{\beta_{j-1}}, e_{\beta_j}]] + \dots + [v_\lambda [e_{\beta_1}, e_{\beta_j}], \dots, e_{\beta_{j-1}}],$$

и наше произведение может быть выражено через ненулевые коммутаторы меньшей длины.

Применим это замечание к случаю, когда $\lambda = \mu$. Будем брать только такие корни β_i , что $\mu + \beta_i \in \Lambda_{-1}$, а значит, ввиду предположения относительно μ и ν , $\nu + \beta_i \notin \Lambda_{-1}$, т. е. $[v_\nu, e_{\beta_i}] = 0$. Если $[[L_2, v_\mu], v_\nu] = 0$, то

$$\begin{aligned} & [[L_2, [v_\mu, e_{\beta_1}]], v_\nu] = \\ & = [[[L_2, e_{\beta_1}]v_\mu], v_\nu] + [[L_2, [v_\mu, e_{\beta_1}]], v_\nu] + [[L_2, v_\mu], [v_\nu, e_{\beta_1}]] = \\ & = [[[L_2, v_\mu], v_\nu], e_{\beta_1}] = 0, \end{aligned}$$

поскольку $[L_2, e_{\beta_1}] \subseteq L_2$ и $[v_\nu, e_{\beta_1}] = 0$. Последовательно применяя преобразования такого рода, мы получим, что

$$[[L_2, [v_\mu e_{\beta_1} \dots e_{\beta_k}]], v_\nu] = 0.$$

Ввиду сделанного выше замечания будет выполняться равенство $[[L_2, V], v_\nu] = 0$ или, что то же самое, $[[L_2, v_\nu], V] = 0$. Мы приходим к заключению, что $[L_2, v_\nu] = 0$. Последнее равенство, однако, невозможно: коммутируя его с произвольными элементами $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_s}$, мы получим соотношения вида

$$[L_2, [v_\nu e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_s}]] = 0,$$

из которых следует, что $[L_2, V] = 0$, т. е. $L_2 = 0$.

Итак, $[[L_2, v_\mu], v_\nu] \neq 0$. Найдется, следовательно, такой весовой вектор $w_\eta \in L_2$, $\eta \in \Lambda_2$, что $0 \neq [[w_\eta, v_\mu], v_\nu] = a \in L_0$, $a = e_\beta$, $\beta \in \Lambda_0$, или же $a = h \in H$. Представление Γ — точное, поэтому $[a, v_\lambda] \neq 0$ при каком-то v_λ , $\lambda \in \Lambda_{-1}$, так что

$$[w_\eta v_\lambda v_\mu v_\nu] = [w_\eta v_\lambda v_\nu v_\mu] = [w_\eta v_\mu v_\nu v_\lambda] \neq 0.$$

Таким образом, $[w_\eta v_\lambda v_\mu] \neq 0$ и $[w_\eta v_\lambda v_\nu] \neq 0$, т. е.

$$\eta + \lambda + \mu = \alpha_1 \in \Lambda_0,$$

$$\eta + \lambda + \nu = \alpha_2 \in \Lambda_0$$

и, значит, $\mu - \nu = \alpha_1 - \alpha_2$. Предложение доказано.

§3. Доказательство предложения 3

В соответствии с предложением 1,

$$L_0 = M_1 \oplus \dots \oplus M_k \oplus \mathfrak{z}, \quad (2)$$

где M_i — классические простые алгебры с инвариантной формой следа, а $\mathfrak{z}$ — центр размерности, не большей 1. Под L_0 можно понимать, вообще говоря, любую абстрактную алгебру с разложением (2). Достаточно предполагать, что существует точное неприводимое представление $\Gamma : L_0 \rightarrow \text{End } V$, удовлетворяющее условиям предложения 2.

ЛЕММА 5. В разложении (2) число слагаемых $k \leq 2$.

Доказательство. Как известно, $\Gamma = \Gamma_0 \otimes \Gamma_1 \otimes \dots \otimes \Gamma_k$, где Γ_i , $i > 0$ — неприводимое представление алгебры M_i , а Γ_0 — одномерное представление центра $\mathfrak{z}$. Рассмотрим старший вес φ представления Γ и старшие веса φ_i представлений Γ_i . Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_k$. По определению старшего веса, существуют такие простые корни α_i , $i = 1, \dots, k$, что $\varphi_i - \alpha_i$ — веса представлений Γ_i . Тогда и $\mu = \varphi_0 + (\varphi_1 - \alpha_1) + \dots + (\varphi_k - \alpha_k)$ будет весом представления Γ . В соответствии с предложением 2, разность $\varphi - \mu = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ должна быть разностью каких-то двух корней алгебры L_0 . Поскольку α_i являются корнями разных простых алгебр, это возможно лишь при $k \leq 2$.

ЛЕММА 6. Если в предложении (2) число простых слагаемых $k = 2$, то разности $\mu_i - \nu_i$ между любыми весами представления Γ_i ($i = 1, 2$) являются корнями алгебры M_i .

Доказательство. Если $\mu_i = \nu_i$, то утверждение очевидно. Пусть $\mu_i \neq \nu_i$. Рассмотрим любые два разных веса μ_j и ν_j представления Γ_j ($j \neq i$) и два веса

$$\mu = \mu_0 + \mu_i + \mu_j \quad \nu = \mu_0 + \nu_i + \nu_j$$

представления Γ . Согласно предложению 2,

$$\mu - \nu = (\mu_i - \nu_i) + (\mu_j - \nu_j) = \beta_1 + \beta_2,$$

где β_1 и β_2 — корни алгебры L_0 . Каждый из них является корнем алгебры M_1 или M_2 . Если они корни одной и той же алгебры (например, M_i), то $\mu_j = \nu_j$, что противоречит выбору весов μ_j, ν_j . Поэтому мы можем считать, что β_1 — корень алгебры M_i , а β_2 — корень алгебры M_j и

$$\mu_i - \nu_i = \beta_1, \quad \mu_j - \nu_j = \beta_2$$

ЛЕММА 7. В разложении (2) число слагаемых $k = 1$ (либо $k = 0$, когда $L_0 = \mathfrak{z}$ — одномерная алгебра).

Доказательство. В самом деле, если $k = 2$, то из предыдущей леммы почти непосредственно вытекает, что старшие веса φ_1 и φ_2 представлений Γ_1 и Γ_2 совпадают с некоторыми базисными весами. Пусть, например, $\varphi_1 = s_1\lambda_1 + \dots + s_m\lambda_m$, где $s_1 \neq 0$ и $s_2 \neq 0$. Тогда $\varphi_1 - \alpha_1 \in \Lambda_{-1}$ и $\varphi_1 - \alpha_2 \in \Lambda_{-1}$ (α_i — простые корни). Но их разность $(\varphi_1 - \alpha_1) - (\varphi_1 - \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ должна быть корнем, что невозможно, поскольку разность простых корней корнем не является. Если, далее, $\varphi_1 = s_{i_1}\lambda_{i_1}$, $s_{i_1} \neq 0, 1$, то $\varphi_1 - \alpha_{i_1}$, $\varphi_1 - 2\alpha_{i_1} \in \Lambda_{-1}$ и (снова по лемме 6) $\varphi_1 - (\varphi_1 - 2\alpha_{i_1}) = 2\alpha_{i_1}$ — корень, что исключается, поскольку $2\alpha_{i_1}$ никогда не является корнем. Те же рассуждения применимы и к младшим весам ψ_1, ψ_2 . Если $\psi_1 = -\lambda_{j_1}$, то $\varphi_1 - \psi_1 = \lambda_{i_1} + \lambda_{j_1} = \theta_1$ — корень, причем нетрудно видеть, что θ_1 совпадает со старшим корнем алгебры M_1 . Вид θ_1 для простых алгебр показывает (см., например, [13], стр. 699, 700), что $\theta_1 = \lambda_{i_1} + \lambda_{j_1}$ лишь в случае $M_1 \cong A_n$ или $M_1 \cong C_n$. Соответствующее представление Γ_1 — стандартное или же дуальное к нему. Без ограничения общности можно считать (см. [13], предложение 4.2) Γ_1 стандартным представлением. То же относится и к паре (M_2, Γ_2) . Таким образом, остаются, при надлежащем отождествлении, три возможности: 1) $L_0 = A_n \oplus A_m \oplus \mathfrak{z}$, 2) $L_0 = A_n \oplus C_m \oplus \mathfrak{z}$, 3) $L_0 = C_n \oplus C_m \oplus \mathfrak{z}$. В том, что ни одна из них не пригодна при нашем условии $L_2 \neq 0$, можно убедиться, вычисляя полные продолжения (в смысле Картана) $L_0^{(i)}$ пары (L_0, Γ) . Так как $(A_n \oplus A_m \oplus \mathfrak{z})^{(2)} = 0$ (см. [17], стр. 99, 100), а $L_2 \subseteq L_0^{(2)}$, то случай 1) отпадает. Далее, очевидно, имеет место естественное вложение $(A_n \oplus C_m \oplus \mathfrak{z})^{(i)} \subset (A_n \oplus A_{2m-1} \oplus \mathfrak{z})^{(i)}$, так что $L_0^{(2)} = 0$ в случае 2) и, по той же причине, в случае 3). Лемма доказана.

Начиная с этого места, мы будем считать, что

$$L_0 = M \oplus \mathfrak{z}$$

и

$$\varphi = \sum_{i=1}^l s_i \lambda_i, \quad \psi = - \sum_{i=1}^l t_i \lambda_i \quad (3)$$

— выражение старшего и младшего весов представления Γ простой алгебры M через фундаментальные веса. Если α_i — простой корень, соответствующий весу λ_i :

$$\frac{2(\lambda_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{i,j},$$

то s_i -длина α_i -серии φ , $\varphi - \alpha_i, \dots, \varphi - s_i \alpha_i$ — веса φ , чем мы воспользовались при доказательстве леммы 7. Заметим, что в этом утверждении s_i выступает как элемент простого поля k (в формуле (3)) и как натуральное число (длина серии). Так как $\dim V < p$, то они друг друга однозначно определяют.

Для завершения доказательства предложения 3 нам осталось посмотреть на возможные значения коэффициентов s_i в выражении (3). Если $s_i \geq 3$ для некоторого i , то $\varphi, \varphi - \alpha_i, \varphi - 2\alpha_i, \varphi - 3\alpha_i \in \Lambda_{-1}$ и, ввиду предложения 2, $\varphi - (\varphi - 3\alpha_i) = 3\alpha_i = \beta - \gamma$; $\beta, \gamma \in \Lambda_0$. Непосредственно из таблиц, выражающих все корни произвольной классической алгебры Ли через фундаментальные веса λ_j , легко усмотреть, что такое соотношение возможно только при $M = G_2$, $\varphi = s_1 \lambda_1 + 3\lambda_2$, когда $3\alpha_2 = (\alpha_1 + 3\alpha_2) - \alpha_1$. Если $s_1 \neq 0$, то $\varphi - \alpha_1 \in \Lambda_{-1}$ и $\varphi - 3\alpha_2 \in \Lambda_{-1}$, откуда $(\varphi - \alpha_1) - (\varphi - 3\alpha_2) = 3\alpha_2 - \alpha_1 = \beta - \gamma$; $\beta, \gamma \in \Lambda_0$. Таких корней β, γ у алгебры G_2 нет. Поэтому $s_1 = 0$ и $\varphi = 3\lambda_2$.

Предположим теперь, что $s_i = s_j = 2$ при $i \neq j$. Тогда $\varphi - 2\alpha_i \in \Lambda_{-1}$ и $\varphi - 2\alpha_j \in \Lambda_{-1}$, так, что $(\varphi - 2\alpha_i) - (\varphi - 2\alpha_j) = 2\alpha_j - 2\alpha_i = \beta - \gamma$; $\beta, \gamma \in \Lambda_0$, причем мы можем считать, что β и γ — положительные корни. Из таблиц, выражающих корни через фундаментальные веса, опять можно усмотреть, что таких корней ни у одной классической простой алгебры не существует. Утверждение о младшем весе ψ доказывается аналогично.

Заметим, что о коэффициентах s_i можно плучить более точные утверждения, но нам они не понадобятся.

§4. Таблица

Всюду ниже l — ранг простой компоненты M алгебры L_0 , θ — ее старший корень, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — система простых корней. Хорошо известно, что в выражении

$$\theta = \sum_{i=1}^l m_i \alpha_i$$

все коэффициенты m_i отличны от нуля. Кроме того, $(\alpha, \alpha) \neq 0$ в k для любого корня $\alpha \neq 0$, поэтому из формулы

$$(\varphi, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l s_i m_i (\alpha_i, \alpha_i)$$

в случае характеристики нуль сразу вытекает неравенство $(\varphi, \theta) \neq 0$. То же верно и в нашем случае, в чем легко убедиться простой

проверкой. Удобнее выписывать выражение для $\nabla = 2(\varphi, \theta)/(\theta, \theta)$. Результаты выглядят следующим образом:

$$A_l : \nabla = s_1 + \dots + s_l, \quad l + 1;$$

$$B_l : \nabla = s_1 + 2(s_2 + \dots + s_{l-1}) + s_l, \quad l > 2, \quad 2l$$

$$(\nabla = 2(s_1 + s_2), \quad l = 2);$$

$$C_l : \nabla = s_1 + \dots + s_l, \quad l + 1;$$

$$D_l : \nabla = s_1 + 2(s_2 + \dots + s_{l-2}) + s_{l-1} + s_l, \quad 2l - 1;$$

$$G_2 : \nabla = 2s_1 + s_2, \quad 5;$$

$$F_4 : \nabla = 2s_1 + 3s_2 + 8s_3 + 4s_4, \quad 25;$$

$$E_6 : \nabla = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 2s_4 + s_5 + 2s_6, \quad 14;$$

$$E_7 : \nabla = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + 3s_5 + 2s_6 + 2s_7, \quad 21;$$

$$E_8 : \nabla = 2s_1 + 3s_2 + 4s_3 + 5s_4 + 6s_5 + 4s_6 + 2s_7 + 3s_8, \quad 35;$$

Справа выписано максимальное значение, которое может принимать ∇ с учетом предложения 3. В случае алгебр A_l , B_l , C_l , D_l легко проверить, что приведенные в таблице максимальные значения для ∇ не превышают $\dim V_0$, где V_0 — модуль стандартного представления, а так как $\dim V_0 \leq \dim V < p$ (см. [19]), то $\nabla \neq 0$. Для исключительных алгебр из таблицы следует, что $\nabla \neq 0$ при $p > 31$. Более подробные рассуждения, которые мы опускаем, показывают, что это верно и для $p > 7$. Следовательно, $(\varphi, \theta) \neq 0$. Неравенство $(\varphi, \theta) \neq 0$ означает, во всяком случае, что $\varphi - \theta \in \Lambda_{-1}$ — факт, необходимый для доказательства следующего утверждения.

ЛЕММА 8. Существует неотрицательный корень $\alpha \in \Lambda_0$, связанный с φ , ψ , и θ соотношением

$$\varphi - \psi = \theta + \alpha.$$

Доказательство буквально опирается на те же рассуждения, что и доказательство лемм 7.1, 7.2 в работе [13]. Необходимо заметить только, что выбор максимального веса $\xi \in \Lambda_1$ в лемме 7.1, ввиду неопределенности самого понятия максимальной в нашем случае, нужно заменить условием максимальной корня $\beta = \varphi + \xi$. Доказательство равенства $\beta = \theta$ проходит без изменений.

Замечание. Весьма остроумные, но верные только для характеристики нуль, построения в работе [13] показывают, что утверждение леммы 8 можно заменить на более сильное : $\varphi - \psi = \theta$.

Отсюда и из предложения 3 теорема следовала бы немедленно. Действительно, условие $s_i, t_i = 0, 1, 2$ на коэффициенты в выражениях (3) и известные выражения θ через фундаментальные веса остаются для (M, Γ) лишь 4 возможности, упомянутые в теореме (см. доказательство леммы 7).

Мы можем опираться только на лемму 8 и предложение 3, т. е. на тот факт, что

$$\theta + \alpha = \varphi - \psi = \sum_{i=1}^l (s_i + t_i) \lambda_i, \quad s_i, t_i = 0, 1, 2, \quad \alpha \geq 0. \quad (4)$$

К счастью, неотрицательных корней α , удовлетворяющих условию (4), не так много. Результаты, получающиеся прямой проверкой систем корней, сведены в следующую таблицу:

M	θ	2θ	$\theta + \alpha, 0 < \alpha < \theta$
A_1	$\lambda_1 + \lambda_l$	$2\lambda_1 + 2\lambda_l$	$\lambda_2 + \lambda_{l-1}, \lambda_2 + 2\lambda_l, 2\lambda_1 + \lambda_{l-1}$
B_1	λ_2	$2\lambda_2$	$2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_3, \lambda_4$
C_1	$2\lambda_1$	$4\lambda_1$	$2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2$
$D_1, l > 4$	λ_2	$2\lambda_2$	$2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_4$
D_4	λ_2	$2\lambda_2$	$2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_3, 2\lambda_4, \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4$
G_2	λ_1	$2\lambda_1$	$2\lambda_2, 3\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2$
F_4	λ_1	$2\lambda_1$	$2\lambda_4, \lambda_1 + \lambda_4, \lambda_2, \lambda_3$
E_6	λ_6	$2\lambda_6$	$\lambda_1 + \lambda_5, \lambda_3$
E_7	λ_6	$2\lambda_6$	λ_2, λ_5
E_8	λ_1	$2\lambda_1$	λ_2, λ_7

§5. Окончание доказательства теоремы

Мы переберем все представления, встречающиеся в приведенной выше таблице, и докажем, что для них, как правило, $L_0^{(2)} = 0$. Сделаем несколько замечаний, сокращающих перебор.

Роли старшего и младшего весов совершенно равноправны. Последнее означает, что нет необходимости рассматривать представления Γ , скажем, с весами $\varphi = \lambda_2, \psi = -\lambda_{l-1}$ и $\varphi = \lambda_{l-1}, \psi =$

$-\lambda_2$. Достаточно взять первое из них. Далее, младший (старший) вес однозначно восстанавливается по старшему (соответственно, по младшему), и мы этим будем пользоваться. Но большей частью к цели приводят совсем тривиальные соображения. Например, равенство $\varphi - \psi = \theta + \alpha = \lambda_i$ невозможно, поскольку $\varphi \neq 0$ и $\psi \neq 0$.

Если представление Γ алгебры L_0 оставляет инвариантной (или оставляет инвариантной с точностью до множителя) невырожденную билинейную симметрическую форму, то $L_0^{(1)} = 0$ (или $L_0^{(2)} = 0$) (см. [18]). В частности, это относится к присоединенному представлению. Это отмечает комбинацию $\varphi = \theta$, $\psi = -\theta$.

Наконец, если $L_0 = M \oplus k$ и $L_0^{(2)} = 0$ для некоторого представления, то и $M^{(2)} = 0$ для ограничения этого представления на M . Поэтому мы дальше будем разбирать только случай $L_0 = M \oplus k$.

Сделанные только что замечания показывают, что критических линейных комбинаций $\theta + \alpha$, нуждающихся в дополнительном анализе, в таблице остается совсем немного. Рассмотрим алгебры всех типов в отдельности.

1. Алгебра $A_l \oplus k$. Сочетание $\varphi = \lambda_1$, $\psi = -\lambda_l$ соответствует стандартному представлению алгебры A_l (первые два случая теоремы). Если $\theta + \alpha = \lambda_2 + 2\lambda_l$, то возможные старшие веса $\varphi = \lambda_2$, $\varphi = \lambda_l$ исключаются, потому, что им соответствовали бы младшие веса $\psi = -\lambda_{l-1}$ и $\psi = -\lambda_1$, а не $-2\lambda_l$ и $-(\lambda_2 + \lambda_l)$, как этого требует равенство $\varphi - \psi = \theta + \alpha$. По той же причине отпадает линейная комбинация $\theta + \alpha = 2\lambda_1 + \lambda_{l-1}$, а из возможных разбиений 2θ в принципе подходит (с точностью до симметрии между φ и ψ) лишь $\varphi = 2\lambda_1$, $\psi = -2\lambda_l$. Приводимые ниже леммы 9 и 10 показывают, однако, что в этом случае, а также в случае представления Γ с $\varphi = \lambda_2$, $\psi = -\lambda_{l-1}$ условие $L_2 \neq 0$ находится в противоречии с равенством $L_0^{(2)} = 0$. По чисто техническим причинам заменим l на $n - 1$.

ЛЕММА 9. Если $L_0 = gl(n, k)$ и Γ имеет старший вес $\varphi = 2\lambda_1$, то $L_0^{(2)} = 0$.

Доказательство. Пусть $L_0 = \text{End } V$. Тогда Γ является естественным представлением алгебры L_0 в $S^2(V)$. Зафиксировав в V какой-нибудь базис и отождествив $S^2(V)$ с пространством M_n^+ симметрических матриц порядка n , мы можем считать представление Γ заданным формулой

$$\Gamma(A)S = AS + SA^*,$$

где $A \in L_0$, $S \in M_n^+$, A^* — транспонированная матрица. Найдем первое продолжение $L_0^{(1)}$ пары (L_0, Γ) . По определению, линейное

отображение f принадлежит $L_0^{(1)} \subset \text{Hom}(M_n^+, L_0)$, если

$$f(S)T + Tf(S)^* = f(T)S + Sf(T)^* \quad (5)$$

для любых матриц $S, T \in M_n^+$. Заметим, что если A — произвольная симметрическая матрица, то функция $f_A : S \rightarrow SA$ удовлетворяет условию (5) и при этом $f_A(E) = A$.

Докажем, что $f(E)$ — симметрическая матрица для любого $f \in L_0^{(1)}$. С этой целью положим в (5) $T = E$. Получающееся соотношение можно записать в виде

$$(f(S) - f(E)S) + (f(S) - f(E)S)^* = 0,$$

так что матрица

$$g(S) = f(S) - f(E)S$$

кососимметрична. Подставляя в (5) выражение

$$f(S) = f(E)S + g(S) \quad (6)$$

и пользуясь кососимметричностью $g(S)$, мы получим, что

$$f(E)[S, T] - [S, T]f(E)^* = [g(T), S] - [g(S), T],$$

каковы бы ни были $S, T \in M_n^+$. Отсюда:

$$\text{tr}(f(E)[S, T] - [S, T]f(E)^*) = 0,$$

или

$$\text{tr } f(E)[S, T] = 0,$$

поскольку всегда $\text{tr } XY = \text{tr } Y^*X^*$. Любая матрица B из пространства M_n^- кососимметрических матриц может быть представлена в виде линейной комбинации матриц $[S, T]$, где $S, T \in M_n^+$. Поэтому $\text{tr } f(E)B = 0$ для всех $B \in M_n^-$. Отсюда непосредственно вытекает, что $f(E) \in M_n^+$.

Положим

$$f(E) = A, \quad A \in M_n^+$$

и

$$f(S) = SA + h(S).$$

Из симметричности матриц S и T и кососимметричности $g(S)$ в (6) следует, что матрица $h(S)$ кососимметрична. В соответствии с

замечанием, сделанным в начале доказательства, $h(S)$ удовлетворяет соотношению (5), которое, ввиду условия $h(S) \in M_n^-$, можно переписать в виде

$$[h(S), T] = [h(T), S]. \quad (7)$$

Соотношение (7) выражает, очевидно, принадлежность функции h к первому продолжению алгебры $(M_n^-; [,])$, представленной в пространстве M_n^+ по закону

$$U(S) = [U, S], \quad U \in (M_n^-; [,]).$$

Это представление оставляет инвариантной невырожденную симметрическую форму $\text{tr } ST$ и поэтому его первое продолжение равно нулю. Таким образом, $h(S) = 0$ и

$$f(S) = f_A(S) = SA, \quad A^* = A.$$

Докажем теперь, что второе продолжение равно нулю. Так как $L_0^{(1)} \cong S^2(V)$, то $L_0^{(2)} \subset \text{Hom}(S^2(V), S^2(V))$ и состоит из таких линейных функций $S \rightarrow \Phi(S)$, $S^* = S$, что

$$\Phi(S)^* = \Phi(S), \quad S\Phi(T) = T\Phi(S). \quad (8)$$

Положив $T = E$, мы получаем:

$$\Phi(S) = S\Phi(E),$$

а подставляя это опять в соотношение (8), видим:

$$[S, T]\Phi(E) = 0,$$

где $S, T \in M_n^+$. Отсюда легко вытекает, что $\Phi(E) = 0$ и, следовательно, $\Phi(S) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Если $L_0 = \mathfrak{gl}(n, k)$ и Γ имеет старший вес $\varphi = \lambda_2$, то $L_0^{(2)} = 0$.

Доказательство. Пусть, как и в предыдущей лемме, $L_0 = \text{End } V$. Пространство $V \wedge V$ естественного представления Γ отождествляется с пространством M_n^- кососимметрических матриц порядка n : $\Gamma(A)T = AT + TA^*$, $T \in M_n^-$. К сожалению, в M_n^- нет хорошего эквивалента матрицы $E \in M_n^+$ и инвариантные рассуждения для первой, наиболее существенной половины доказательства этой леммы не были найдены. Выберем в M_n^- стандартный базис

$e_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$, $i < j$. Обозначим через f_{ij}^{st} элементы матрицы $f_{ij} = f(e_{ij}) \in L_0$. Соотношение типа (5) переписывается в виде:

$$f_{ij}e_{kl} + e_{kl}f_{ij}^* = f_{kl}e_{ij} + e_{ij}f_{kl}^*, \quad i < j, \quad k < l. \quad (9)$$

Считаем в дальнейшем $n \geq 5$; при наименьшем возможном значении $n = 4$ рассуждения аналогичны. Если индексы i, j, k, l попарно различны, то, очевидно, $f_{ij}^{st} = 0$, $f_{ij}^{si} = 0$, $f_{ij}^{sj} = 0$. Кроме того, $f_{ij}^{kk} + f_{ij}^{ll} = 0$, $k < l$, $k \neq i, j$, $l \neq i, j$. Придавая k и l различные значения (здесь используется условие $n \geq 5$), получим $f_{ij}^{ss} = 0$, $s \neq i, j$. Итак, $f_{ij}^{st} = 0$ для всех $s \neq i, j$, т. е. у матрицы $f_{i,j}$ отличны от нуля лишь i -я и j -я строки. Учитывая это обстоятельство, выпишем нужные нам соотношения, вытекающие из (9).

$i < j, k < l$ индексы попарно различны	$k \neq i < j = l$	$k = i < j \neq l$	$i < j = k < l$
1) $f_{ij}^{il} + f_{kl}^{kj} = 0$	4) $f_{ij}^{ij} + f_{kj}^{kj} = 0$	7) $f_{ij}^{ji} + f_{il}^{li} = 0$	9) $f_{ij}^{ij} - f_{jl}^{lj} = 0$
2) $f_{ij}^{jl} - f_{kl}^{ki} = 0$	5) $f_{ij}^{jj} - f_{kj}^{ki} = 0$	8) $f_{ij}^{ii} - f_{il}^{li} = 0$	10) $f_{ij}^{il} + f_{jl}^{jj} = 0$
3) $f_{ij}^{jk} + f_{kl}^{li} = 0$	6) $f_{ij}^{ik} - f_{kj}^{jj} = 0$		11) $f_{ij}^{jj} + f_{jl}^{li} = 0$

При фиксированном $j > 3$ обозначим $f_{ij}^{ij} = g_i$. Ввиду 4), $g_1 + g_k = 0$, $g_1 + g_i = 0$, $g_i + g_k = 0$, откуда $g_i = 0$. Если же $j = 2$ или 3 , то 9) $\Rightarrow f_{jl}^{lj} = f_{ij}^{ij} = f_{jm}^{mj}$, $m > l > j$ (снова используется условие $n \geq 5$), а 7) (заменить i, j, l на j, m, l) $\Rightarrow f_{jl}^{lj} + f_{jm}^{mj} = 0$, так что $f_{jl}^{lj} = 0$ и, следовательно, $f_{ij}^{ij} = 0$. Теперь 9) (при $i = 1$) $\Rightarrow f_{jl}^{lj} = 0$ для всех $j > 1$. Положив $h_l = f_{1l}^{1l}$, получим из 7) (при $i = 1$): $h_2 + h_l = h_3 + h_l = h_2 + h_3 = 0 \Rightarrow h_l = 0$. При $j > 2$ имеем: 8) $\Rightarrow f_{ij}^{ii} = f_{il}^{lj}$; 2) ($j \leftrightarrow l$) $\Rightarrow f_{il}^{lj} = f_{kj}^{ki}$; 5) $\Rightarrow f_{kj}^{ki} = f_{ij}^{jj}$, т. е. $f_{ij}^{ii} = f_{ij}^{jj}$. Наконец, 11) $\Rightarrow f_{12}^{22} = -f_{2n}^{n1}$, 3) $\Rightarrow f_{2n}^{n1} = -f_{1l}^{l2}$; 5) $\Rightarrow f_{1l}^{l2} = f_{12}^{11}$.

Выпишем полученные соотношения:

$$f_{ij}^{ij} = 0 = f_{ij}^{ji}, \quad f_{ij}^{ii} = f_{ij}^{jj}, \quad i < j,$$

не делая на них в дальнейшем прямых ссылок.

Пусть $1 < i < j$. При $s \neq 1, i$ из 1) следует $f_{ij}^{is} = -f_{1s}^{1j}$. Далее, $f_{ij}^{ii} = f_{ij}^{jj} = f_{1j}^{1i}$ (см. 5)) и 6) $\Rightarrow f_{ij}^{i1} = f_{1j}^{jj} = f_{1j}^{11}$. Таким образом, $f_{ij}^{is} = \varepsilon f_{1u}^{1v}$. Точно так же получаем $f_{ij}^{js} = \varepsilon f_{1u}^{1v}$. Элементы f_{1u}^{1v} не

являются независимыми. Действительно, если $v > u > 1$, то 10) и 5) $\Rightarrow f_{1u}^{1v} = -f_{uv}^{uu} = -f_{uv}^{vv} = -f_{1v}^{1u}$. С учетом равенства $f_{1u}^{1u} = 0$ находим, что все элементы f_{ij}^{st} линейно выражаются через f_{1u}^{1v} , где $n \geq u > v \geq 1$.

Таким образом, $\dim L_0^{(1)} \leq \binom{n}{2}$. Несколько изменяя рассуждения, легко показать, что эта оценка остается верной и при $n = 4$. Но $\binom{n}{2}$ независимых решений уравнения (9) мы можем указать сразу. Именно, ими являются функции f_A (A — любая кососимметрическая матрица), значения которых $f_A(X) = XA$.

Теперь легко доказать, что второе продолжение равно нулю. Так как $L_0^{(1)} \cong M_n^-$, то $L_0^{(2)} \subset \text{Hom}(M_n^-, M_n^-)$ и состоит из линейных функций $X \rightarrow \Phi(X)$, $X^* = -X$ таких, что

$$\Phi(X)^* = -\Phi(X), \quad Y\Phi(X) = X\Phi(Y). \quad (10)$$

Переходя к транспонированным матрицам, мы из (10) получаем соотношение

$$\Phi(X)Y = \Phi(Y)X.$$

Умножив его слева на произвольную кососимметрическую матрицу Z и воспользовавшись еще раз соотношением (10), находим, что

$$X\Phi(Z)Y = Y\Phi(Z)X.$$

В частности

$$\text{tr}[X, Y]\Phi(Z) = 0.$$

Отсюда без труда вытекает, что $\Phi(Z) = 0$ для любой матрицы $Z \in M_n^-$. Лемма доказана.

2. Алгебра $B_l \oplus k$. Из таблицы в конце §4 и из сделанных в начале этого параграфа замечаний следует, что в соотношении $\theta + \alpha = \varphi - \psi$ достаточно рассмотреть комбинации $\varphi = \lambda_1$, $\psi = -\lambda_1$, $-\lambda_2$, $-\lambda_3$. Но $\psi \neq -\lambda_2$ или $-\lambda_3$, поскольку старшему весу $\varphi = \lambda_1$ отвечает стандартное представление Γ алгебры B_l с младшим весом $\psi = -\lambda_1$.

Представление Γ алгебры $L_0 \cong B_l \oplus k$ умножает невырожденную симметрическую билинейную форму, входящую в определение алгебры B_l , на постоянный множитель. Отсюда следует, что $L_0^{(2)} = 0$ и, значит, $L_2 = 0$.

3. Алгебра $C_l \oplus k$. Сочетание $\varphi = \lambda_1$, $\psi = -\lambda_1$ соответствует стандартному представлению алгебры C_l (последние два случая теоремы). Для $\theta + \alpha = 4\lambda_1$ и $\theta + \alpha = 2\lambda_1 + \lambda_2$ нет подходящих сочетаний φ и ψ , поскольку присоединенное представление с $\varphi = 2\lambda_1$ отпадает, а старшему весу $\varphi = \lambda_2$ отвечает младший вес $\psi = -\lambda_2$. Последняя комбинация служит разбиением для $\theta + \alpha = 2\lambda_2$. Ответ на поставленный вопрос в этом случае дает

ЛЕММА 11. Если $L_0 \cong C_l \oplus k$ и Γ имеет старший вес $\varphi = \lambda_2$, то $L_0^{(2)} = 0$.

Доказательство. В самом деле, по определению, C_l — алгебра Ли всех эндоморфизмов пространства U , оставляющих инвариантной невырожденную билинейную форму f . Известно, что $\Gamma(C_l)$ действует естественным образом на $\Lambda^2(U)$: $\Gamma(A)(u \wedge v) = Au \wedge v + u \wedge Av$. Но при этом $\Gamma(A)$, $A \in C_l$, оставляет инвариантной внешнюю степень f^2 формы f :

$$f^2(x \wedge y, u \wedge v) = f(x, u)f(y, v) - f(x, v)f(y, u).$$

Форма f^2 — невырожденная, симметрическая, поэтому $L_0^{(2)} = 0$. Лемма доказана.

4. Алгебра $D_l \oplus k$, $l > 4$. В этом случае возможны только три представления, соответствующие $\theta + \alpha = 2\lambda_2, 2\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_3$. Из них первый случай соответствует присоединенному представлению, второй — стандартному и оба, следовательно, оставляют инвариантной симметрическую форму. Наконец, третий случай отпадает, так как представление со старшим весом $\varphi = \lambda_1$ имеет младший вес $-\lambda_1$, а не $-\lambda_3$.

5. Алгебра $D_4 \oplus k$. К рассмотренным в п. 4 случаям добавляются еще два восьмимерных неприводимых представления Γ_1, Γ_2 с весами $\varphi = \lambda_3, \psi = -\lambda_3$ и $\varphi = \lambda_4, \psi = -\lambda_4$ соответственно. Линейная комбинация $\theta + \alpha = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4$, следовательно, не может быть представлена в виде $\varphi - \psi$. Известно (см., например, [19], гл. VII), что оба представления Γ_1, Γ_2 реализуются в пространстве четных элементов алгебры Клиффорда. Более точно, пусть U — векторное пространство размерности 8 над k , $(\ , \)$ — невырожденная симметрическая форма над $U \times U$; $U = U_1 + U_2$, $U_1 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$, $U_2 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$; $(U_i, U_i) = 0$, $i = 1, 2$; $(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$. В алгебре Клиффорда $C = C(U, (\ , \))$ четные элементы $e_i e_j, f_i f_j$, $i < j$; $e_k f_l - \delta_{k,l}$, $1 \leq k, l \leq 4$, образуют алгебру Ли, изоморфную D_4 , с обычным законом умножения $[u, v] = uv - vu$ (заметим что $e_i f_j + f_j e_i = 2\delta_{i,j}$). В C рассматривается подалгебра $C(U_1, (\ , \))$, отождествляемая с внешней алгеброй (размерности 16) подпространства U_1 . Положим

$$F = f_1 f_2 f_3 f_4, \quad \mathfrak{S} = F \cdot C(U_1, (\ , \)),$$

$$\mathfrak{S}^+ = \langle F; F e_i e_j, \quad i < j; \quad F e_1 e_2 e_3 e_4 \rangle,$$

$$\mathfrak{S}^- = \langle F e_i; F e_1 \dots \hat{e}_i \dots e_4, i = 1, 2, 3, 4 \rangle.$$

Тогда $\mathfrak{S}^+ L_0 \subseteq \mathfrak{S}^+$, $\mathfrak{S}^- L_0 \subseteq \mathfrak{S}^-$, и L_0 -модули $\mathfrak{S}^+, \mathfrak{S}^-$ приводят как раз к упоминавшимся выше неприводимым представлениям Γ_i алгебры D_4 .

ЛЕММА 12. Пусть Γ — неприводимое представление алгебры D_4 , соответствующее одному из модулей $\mathfrak{S}^+$ или $\mathfrak{S}^-$, $L_0 \cong D_4 \oplus k$. Тогда $L_0^{(2)} = 0$.

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения, как и в случае леммы 10, к сожалению, неинвариантны.

1) $V = \mathfrak{S}^+$. Пусть g — произвольный элемент из $L_0^{(1)} \subset \text{Hom}(\mathfrak{S}^+, L_0)$ со значениями

$$\begin{aligned} g(F) &= \sum \alpha_{st}^0 e_s e_t + \sum \beta_{st}^0 f_s f_t + \sum \gamma_{st}^0 (e_s f_t - \delta_{st}) + \lambda_0, \\ g(F e_1 e_2 e_3 e_4) &= \sum \alpha_{st}^1 e_s e_t + \sum \beta_{st}^1 f_s f_t + \sum \gamma_{st}^1 (e_s f_t - \delta_{st}) + \lambda_1, \\ g(F e_i e_j) &= \sum \alpha_{st}^{ij} e_s e_t + \sum \beta_{st}^{ij} f_s f_t + \sum \gamma_{st}^{ij} (e_s f_t - \delta_{st}) + \lambda_{ij}. \end{aligned}$$

Всюду предполагается, что $s < t$ для коэффициентов α_{st} , β_{st} и $1 \leq s, t \leq 4$ для γ_{st} . По условию,

$$ug(v) = vg(u) \quad (11)$$

для любых элементов $u, v \in \mathfrak{S}^+$.

Непосредственные, довольно кропотливые вычисления показывают, что используя соотношения (11), можно выразить все коэффициенты α , β , γ через λ_0 , λ_1 и λ_{ij} . Именно, отличными от 0 могут быть только выписанные ниже коэффициенты:

$$\begin{aligned} \beta_{st}^0 &= -\frac{\lambda_{st}}{4}, & \gamma_{ss}^0 &= \frac{\lambda_0}{4}, \\ \alpha_{st}^1 &= (-1)^{s+t+1} \frac{\lambda_{s't'}}{4}, & \gamma_{ss}^1 &= -\frac{\lambda_1}{4}, \\ \alpha_{st}^{st} &= \lambda_0, & \beta_{s't'}^{st} &= (-1)^{s+t} \frac{\lambda_1}{2}, \\ \gamma_{ss}^{ij} &= \frac{\lambda_{ij}}{4}, & s \neq i, j, & \gamma_{ii}^{ij} = \gamma_{jj}^{ij} = -\frac{\lambda_{ij}}{4}, \\ \gamma_{it}^{ij} &= \frac{\lambda_{jt}}{2}, & j < t, & \gamma_{it}^{ij} = -\frac{\lambda_{tj}}{2}, & t < j \\ \gamma_{jt}^{ij} &= -\frac{\lambda_{it}}{2}, & i < t, & \gamma_{jt}^{ij} = \frac{\lambda_{ti}}{2}, & t < i. \end{aligned}$$

Здесь для пары i, j ($1 \leq i < j \leq 4$) через i' , j' обозначена дополнительная пара до $\{1, 2, 3, 4\}$, причем $i' < j'$.

После этого не составляет никакого труда показать, что $L_0^{(2)} = 0$.

2) Случай $V = \mathfrak{S}^-$ рассматривается аналогично.

6. Алгебра $G_2 \oplus k$. Хорошо известно, что семимерному неприводимому представлению Γ алгебры G_2 со старшим весом $\varphi = \lambda_2$ отвечает инъективное отображение $G_2 \rightarrow B_3$, где B_3 — ортогональная алгебра, заданная своим стандартным представлением. Поскольку $(B_3 \oplus k)^{(2)} = 0$, то и $(G_2 \oplus k)^{(2)} = 0$. Заметим, что младшим весом при этом будет $\psi = -\lambda_2$, так что остающиеся сочетания $\varphi - \psi = 3\lambda_2$ и $\varphi - \psi = \lambda_1 + \lambda_2$ не могут реализоваться.

7. Алгебра $F_4 \oplus k$. Нужно рассмотреть лишь представление Γ с $\varphi = \lambda_4$, $\psi = -\lambda_4$, действующее на 26-мерном пространстве $J' \subset J$ элементов со следом нуль 27-мерной исключительной йордановой алгебры J с операцией $\cdot$ над k . Элементы из $\Gamma(F_4)$ суть дифференцирования алгебры J , оставляющие инвариантной невырожденную при $p > 3$ симметрическую форму $(a, b) = \text{tr}(a \cdot b)$ (по определению, элементы a, b из J являются эрмитовыми 3×3 -матрицами Кэли [19]), следовательно, $L_0^{(2)} = 0$.

8. Алгебра $E_6 \oplus k$. Нужно рассмотреть лишь представление Γ с $\varphi = \lambda_1$, $\psi = -\lambda_5$, действующее на исключительной йордановой алгебре J . Сначала рассмотрим ограничение Γ_0 этого представления на алгебру E_6 . Оказывается возможным, не вычисляя $E_6^{(1)}$, решить вопрос о втором продолжении $E_6^{(2)}$. Именно, $\Gamma_0(E_6)$ оставляет инвариантной симметрическую трилинейную форму Фрейденшталя:

$$(x, y, z) \equiv (x \cdot y, z) - (\text{tr } x)(y, z) - (\text{tr } y)(x, z) - (\text{tr } z)(x, y) + \\ + 2(\text{tr } x)(\text{tr } y)(\text{tr } z).$$

Здесь $(x, y) = \text{tr}(x \cdot y)$ (см. [10]). Форма $(,,)$ такова, что при фиксированном $a \neq 0$ билинейная форма $f_a : f_a(y, z) = (a, y, z)$ не вырождена. Общий ответ дает

ЛЕММА 13. Пусть L_0 — алгебра Ли линейных преобразований, действующих на векторном пространстве V над полем k характеристики $p > 3$ и оставляющих инвариантной невырожденную симметрическую трилинейную форму $(,,)$:

$$(xA, y, z) + (x, yA, z) + (x, y, zA) = 0; \quad x, y, z \in V, \quad A \in L_0.$$

Тогда $L_0^{(2)} = 0$.

Доказательство. Инвариантность формы $(,,)$ относительно L_0 выражается коротко в виде

$$(xA, x, x) = 0 \tag{12}$$

Возьмем произвольный элемент $\Phi \in L_0^{(2)}$. По определению, Φ — симметрическая функция на $V \times V$ со значениями в L_0 , причем

$$x\Phi(u, v) = u\Phi(x, v), \quad x, u, v \in V.$$

В частности,

$$\sum_{\pi \in S_3} x_{\pi 1} \Phi(x_{\pi 2}, x_{\pi 3}) = 6x_1 \Phi(x_2, x_3) \quad (13)$$

(S_3 — симметрическая группа на трех символах)

Полагая в (12) $A = \Phi(u, v)$ и пользуясь инвариантностью и симметричностью формы $(,,)$, находим, что

$$\begin{aligned} 0 &= (x\Phi(u, v), x, x) = (u\Phi(x, v), x, x) = \\ &= -2(u(x\Phi(x, v), x) = -2(u, v\Phi(x, x), x). \end{aligned}$$

Аналогично, $(v, u\Phi(x, x), x) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} &(u, v, x\Phi(x, x)) = \\ &= -(u, v\Phi(x, x), x) - (u\Phi(x, x), v, x) = 0. \end{aligned}$$

Поляризация этого соотношения с учетом (13) дает окончательно:

$$(u, v, w\Phi(x, y)) = 0.$$

Здесь u, v, w, x, y , — произвольные элементы из V . Невырожденность формы означает, что $w\Phi(x, y) = 0$, т. е. $\Phi = 0$. Лемма доказана.

Для интересующего нас представления Γ_0 алгебры E_6 можно доказать, что даже $E_6^{(1)} = 0$. Это вытекает из леммы 14.

ЛЕММА 14. Пусть неприводимый p -модуль L_{-1} над классической простой алгеброй Ли L_0 удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $L_0^{(2)} = 0$;
- 2) $\dim L_{-1} < \min(p-1, \dim L_0)$

Тогда $L_0^{(1)} = 0$.

Доказательство. Пусть $L_0^{(1)} \neq 0$. Рассмотрим в L_0 -модуле $L_0^{(1)}$ минимальный подмодуль L_1 . Ввиду условия $L_0^{(2)} = 0$, пространство

$$L = L_{-1} + L_0 + L_1$$

образует градуированную алгебру Ли. Докажем, что L — простая p -алгебра.

Пусть N — идеал в L , $N \neq 0$. Тогда $N \cap L_{-1} \neq 0$, откуда $N \supset N_{-1}$, ввиду неприводимости L_{-1} . Легко видеть, что $[L_{-1}, L_1] = L_0$ из-за простоты алгебры L_0 и поэтому $N \supset L_0$.

Наконец, $[L_0, L_1] \neq 0$ — иначе L_1 было бы одномерным и так как $L_0 = [L_{-1}, L_1]$, то $\dim L_0 \leq \dim L_{-1}$, вопреки предположению 2). Из неприводимости L_1 следует, что $L_1 \subset N$. Таким образом, $N = L$.

Структуру p -алгебры, имеющуюся по предположению в L_0 , мы продолжим на L , положив $x_{-1}^{[p]} = x_1^{[p]} = 0$. Возможность такого продолжения следует из теоремы 11 гл. 5 [19], а также из того, что L_{-1} и L_1 являются p -модулями над L_0 и $(\operatorname{ad} x)^3 = 0$ для $x \in L_{-1}$ или L_1 . Из леммы 2 §4 гл. III следует, что L — классическая простая алгебра.

Теперь легко закончить доказательство леммы 14. Прежде всего заметим, что $\dim L_1 = \dim L_{-1}$. Действительно, L_{-1} есть сумма одномерных корневых подпространств (корни соответствуют весам $\varphi_i \in \Lambda_{-1}$). Так как L — классическая простая алгебра, то вместе с каждым корнем φ_i содержится и $-\varphi_i$, а соответствующий элемент $e_{-\varphi_i}$ входит в L_1 . Таким образом, $L_1 \supseteq L_{-1}^*$, а так как L_1 по выбору неприводимо, то $L_1 = L_{-1}^*$. Отсюда и из условия $\dim L_{-1} < p - 1$ следует, что

$$\dim L \leq (p-2) + ((p-2)^2 - 1) + (p-2) < p^2 - 2.$$

Поэтому L не может быть алгеброй $A_{k,p-1}$. Это нам нужно для того, чтобы можно было утверждать существование представления L с невырожденной формой (см. [3]), откуда, в свою очередь, следует, что всякое дифференцирование L — внутреннее.

Рассмотрев дифференцирование

$$d : x_{-1} + x_0 + x_1 \rightarrow -x_{-1} + x_1,$$

мы приходим к такому элементу e , что $d = \operatorname{ad} e$. Этот элемент должен содержаться в алгебре L_0 и лежать в ее центре. Это противоречит тому, что L_0 — простая алгебра. Лемма 14 доказана.

Вернемся теперь к нашему 27-мерному модулю L_{-1} над алгеброй $L_0 = E_6 \oplus k$. Известно [13], что алгебра E_7 может быть представлена в виде

$$E_7 = L_{-1} + (E_6 \oplus k) + L_1,$$

где L_{-1} — наше представление, а $L_1 = L_{-1}^*$.

Нужное нам утверждение $(E_6 \oplus k)^{(2)} = 0$ вытекает из следующего общего факта.

ЛЕММА 15. Если алгебра L обладает невырожденной формой Киллинга $(,)$ и

$$\begin{aligned} L &= L_{-1} + L_0 + L_1, \\ L_0 &= L'_0 \oplus \langle e \rangle, \end{aligned}$$

причем представление Γ алгебры L_0 в L_{-1} неприводимо и его ограничение Γ' на L'_0 таково, что $(L'_0)^{(1)} = 0$, то $L_0^{(2)} = 0$.

Доказательство состоит из двух частей. Докажем сначала, что $L_0^{(1)} = L_1$. Легко видеть, что форма $(,)$ устанавливает двойственность между L_{-1} и L_1 . При этом элемент e можно так нормировать, что

$$[x_i, e] = ix_i, \quad i = -1, 0, 1; \quad x_i \in L_i.$$

Пусть $f \in L_0^{(1)}$, в частности, $f \in \text{Hom}(L_{-1}, L_0)$. Тогда $(f(\quad), e) \in L_{-1}^*$ и соответствует элементу $y \in L_1$, для которого

$$(f(x), e) = (x, y), \quad x \in L_{-1}.$$

Так как $y = [-y, e]$, а форма Киллинга инвариантна, то

$$(x, y) = ([x, -y], e)$$

и, значит,

$$(f(x) - [y, x], e) = 0,$$

т. е.

$$g(x) \equiv f(x) - [y, x] \in L'_0.$$

Таким образом,

$$g = f - [y, \quad] \in (L'_0)^{(1)}$$

и согласно условию $g = 0$. Это значит, что $f \in L_1$.

Осталось доказать, что $L_0^{(2)} = 0$, т. е. что $L_1^{(1)} = 0$. Пусть $\Phi \in L_1^{(1)}$, в частности, $\Phi \in \text{Hom}(L_{-1}, L_1)$. Для любого элемента h картановской подалгебры алгебры L_0 и любых корневых векторов $e_\varphi, e_\psi \in L_{-1}$, $\varphi, \psi \in \Lambda_{-1}$,

$$([\Phi(e_\varphi), e_\psi], h) = (\Phi(e_\varphi), [e_\psi, h]) = \psi(h)(\Phi(e_\varphi), e_\psi).$$

Так как $\Phi \in L_1^{(1)}$, то отсюда вытекает:

$$\psi(h)(\Phi(e_\varphi), e_\psi) = \varphi(h)(\Phi(e_\psi), e_\varphi).$$

Предполагая, что $\varphi \neq \psi$, выберем h так, что $\psi(h) \neq 0, \varphi(h) = 0$. Мы получаем, что

$$(\Phi(e_\varphi), e_\psi) = 0 \quad \text{для} \quad \varphi \neq \psi.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi(e_\varphi) = c_\varphi e_{-\varphi} \in L_1, \quad c_\varphi \in k.$$

Подставив эти значения в формулы, выражающие то, что $\Phi \in L_1^{(1)}$, находим:

$$c_\varphi [e_\varphi, e_{-\psi}] = c_\psi [e_\psi, e_{-\varphi}]; \quad \varphi, \psi \in \Lambda_{-1}. \quad (14)$$

Если в (14) некоторое $c_\varphi \neq 0$, то для нашего веса φ и любого веса ψ ; $\psi \neq \varphi$, $\psi \in \Lambda_{-1}$, разность $\varphi - \psi$ не является корнем. Иначе в левой и правой частях (14) стояли бы корневые векторы, принадлежащие противоположным корням. Но все веса модуля L_{-1} можно получить из одного из них последовательным прибавлением простых корней. Поэтому существует вес $\psi = \varphi \pm \alpha$, где α — простой корень. Лемма 15 доказана.

9. Алгебры $E_7 \oplus k$ и $E_8 \oplus k$. Равенство нулю второго продолжения непосредственно вытекает здесь из замечаний, сделанных в начале §5. Этим закончено доказательство теоремы гл. II.

ГЛАВА III. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРИВОДИМЫХ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ

§1. Формулировка результатов

В этой главе будут перечислены все неприводимые градуированные алгебры Ли конечной размерности над k , для которых: 1) $L_2 \neq 0$; 2) L_0 — p -алгебра Ли с точным неприводимым представлением Γ на L_{-1} , 3) $\dim L_{-1} < p - 1$. Предполагается также, что $\text{char } k = p > 7$. Напомним сначала, возвращаясь к определениям и результатам главы I, что алгебры $\tilde{S}(\mathcal{F})$ и $\tilde{H}(\mathcal{F})$ как векторные пространства над k имеют вид

$$\tilde{S}(\mathcal{F}) = S(\mathcal{F}) + S_0,$$

$$\tilde{H}(\mathcal{F}) = H(\mathcal{F}) + H_0,$$

где $\mathcal{F}$ — флаг, S_0 и H_0 — однородные (относительно заданной стандартной градуировки) подпространства:

$$S_0 = \left\langle \prod_{j \neq i} x_j^{(p^{m_j}-1)} \partial_i; \quad i = 1, \dots, n \right\rangle,$$

$$H_0 = \left\langle \mathcal{D}_e, \quad e = \prod_{i=1}^n x_i^{(p^{m_i}-1)}; \quad Q_j, 1 \leq j \leq n \right\rangle,$$

Определение Q_i см. в §6 гл. I. Рассмотрение дифференцирований $\mathcal{D}$ таких, что $\mathcal{D}\omega = \alpha\omega$, где $\alpha \in k$, $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ или $\sum \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$, приводит к алгебрам $S^*(E)$, $H^*(E)$ и, соответственно, к алгебрам

$$S^*(\mathcal{F}) = S^*(E) \cap W(\mathcal{F}), \quad H^*(\mathcal{F}) = H^*(E) \cap W(\mathcal{F}).$$

Они отличаются от $\tilde{S}(\mathcal{F})$ и $\tilde{H}(\mathcal{F})$ лишь в нулевой однородной компоненте:

$$\tilde{S}(\mathcal{F})_0 \cong \tilde{A}_{n-1}, \quad n > 2; \quad \tilde{H}(\mathcal{F})_0 \cong C_l, \quad 2l = n,$$

в то время как

$$S^*(\mathcal{F})_0 \cong \mathfrak{gl}(n, k); \quad h^*(\mathcal{F})_0 \cong C_l \oplus \mathfrak{z}.$$

где $\mathfrak{z} = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \partial_i \right\rangle$ — одномерный центр.

Определение $\tilde{A}_{n-1}$ см. во Введении.

Вначале будет доказана

ТЕОРЕМА 1. *Всякая градуированная алгебра Ли L изоморфна градуированной транзитивной подалгебре M некоторой алгебры $W(E)$.*

Как обычно, транзитивность определяется условием $M \supset W(E)_{-1}$.

Большую часть главы III занимает доказательство следующего утверждения, представляющего независимый интерес.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть L — конечномерная градуированная транзитивная подалгебра алгебры $W(E)$ над полем k , $\text{char } k = p > 3$, такая, что $L_2 \neq 0$, а Γ — стандартное представление алгебры $L_0 \cong \mathfrak{gl}(n, k)$, $\tilde{A}_{n-1}$, C_l или $C_l \oplus k$. Тогда найдется флаг $\mathcal{F}$, относительно которого возможно лишь одно из следующих утверждений:*

- 1) $L = W(\mathcal{F})$;
- 2) $S(\mathcal{F}) \subseteq L \subseteq S^*(\mathcal{F})$;
- 3) $H(\mathcal{F}) \subseteq L \subseteq H^*(\mathcal{F})$.

Согласно предложению §10 гл. I, в условиях теоремы 2 существуют только следующие 5 возможностей для L_0 и L_1 :

	L_0	L_1
1)	$\mathfrak{gl}(n, k)$	$W(E)_1$
2)	$\mathfrak{sl}(n, k)$	$S(E)_1$
3)	$\mathfrak{gl}(n, k)$	$S(E)_1$
4)	$Sp(n, k)$	$H(E)_1$
5)	$Sp(n, k) \oplus k$	$H(E)_1$

Сформулируем теперь основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 3. Пусть L — конечномерная градуированная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 7$, удовлетворяющая условиям:

- а) $\dim L_{-1} < p - 1$;
- б) $\Gamma : L_0 \rightarrow \text{End } L_{-1}$ — неприводимое (точное) p -представление p -алгебры Ли L_0 ;
- в) $L_2 \neq 0$.

Тогда L изоморфна одной из алгебр, перечисленных в утверждении теоремы 2. В частности, число таких алгебр данной размерности конечно*.

§2. Доказательство теоремы 1

Пусть L — произвольная градуированная алгебра Ли:

$$L = \bigoplus_{i \geq -1} L_i, \quad \dim_k L < \infty.$$

*См. примечание в конце статьи

Напомним, что по определению, $[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}$, причем $[L_{-1}, x] \neq 0$ для любого $0 \neq x \in L_i$, $i \geq 0$.

Построим на пространстве $E = L_{-1}^*$ алгебру разделенных степеней $O(E)$ и соответствующую алгебру Ли $W(E)$ (см. главу I). Мы будем дальше отождествлять подпространства L_{-1} и $V = W(E)_{-1}$.

Подалгебра $L_0 \subset L$ вкладывается в $\text{End } V$, и так как $W(E)_0 = \text{End } V$, то существует изоморфное вложение

$$\varphi_0 : L_0 \rightarrow W(E)_0.$$

Продолжим φ_0 до вложения

$$\varphi = \sum_{i \geq -1} \varphi_i, \quad \varphi_{-1} = \text{id},$$

градуированной алгебры L в $W(E)$. Отображения φ_i мы построим так, чтобы для $x \in L_i$ и $v \in L_{-1}$ выполнялись соотношения

$$[\varphi_i(x), \varphi_{-1}(v)] = \varphi_{i-1}([x, v]), \quad (1)$$

и потом проверим, что φ определяет изоморфное вложение L в $W(E)$.

Предположим, что мы уже доказали существование $\varphi_{-1}, \dots, \varphi_{m-1}$, причем φ_k определяет вложение L_k в $W(E)_k$ при $k \leq m-1$ и

$$[\varphi_j(x_j), \varphi_k(x_k)] = \varphi_{j+k}([x_j, x_k]), \quad j+k \leq m-1. \quad (2)$$

Для любого $x \in L_m$ положим

$$\psi_x(v) = \varphi_{m-1}([x, v]),$$

определив тем самым элемент $\psi_x \in \text{Hom}(V, W(E)_{m-1})$ (напомним, что мы отождествили L_{-1} и V). Докажем, что на самом деле $\psi_x \in W(E)_{m-1}^{(1)}$ и, значит, соответствует некоторому элементу из $W(E)_m$. Для этого нам нужно проверить справедливость соотношения

$$\psi_x(u)(v) = \psi_x(v)(u)$$

или, что то же самое, — соотношения

$$[\varphi_{m-1}([x, u]), v] = [\varphi_{m-1}([x, v]), u]. \quad (3)$$

Но ввиду индуктивного предположения (2),

$$\begin{aligned} [\varphi_{m-1}([x, u]), v] &= \varphi_{m-2}([[x, u], v]), \\ [\varphi_{m-1}([x, v]), u] &= \varphi_{m-2}([[x, v], u]), \end{aligned}$$

и теперь (3) вытекает из тождества Якоби в L . Таким образом, доказано существование отображения $\varphi_m : x \rightarrow \psi_x$, $x \in L_m$, удовлетворяющего соотношению (1) при всех $v \in V$ и $i = m$.

Линейность и инъективность φ_m очевидны. Остается проверить, что соотношение (2) имеет место уже при $j + k = m$:

$$[\varphi_j(x_j), \varphi_k(x_k)] = \varphi_m([x_j, x_k]).$$

Для этого достаточно доказать, что

$$[[\varphi_j(x_j), \varphi_k(x_k)], v] = [\varphi_m([x_j, x_k]), v]$$

при всех $v \in V$. А это прямо вытекает из индуктивного предположения и тождества Якоби в $W(E)$ и L :

$$\begin{aligned} [[\varphi_j(x_j), \varphi_k(x_k)], v] &= \\ &= [[\varphi_j(x_j), v], \varphi_k(x_k)] + [\varphi_j(x_j), [\varphi_k(x_k), v]] = \\ &= [\varphi_{j-1}([x_j, v]), \varphi_k(x_k)] + [\varphi_j(x_j), \varphi_{k-1}([x_k, v])] = \\ &= [\varphi_{j+k-1}([[x_j, v], x_k] + [x_j, [x_k, v]])] = \varphi_{m-1}([[x_j, x_k], v]) = \\ &= [\varphi_m([x_j, x_k]), v] \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

§3. Доказательство теоремы 2

Существенную роль при доказательстве будет играть следующее

Предложение 1. Пусть $L(\mathcal{F})$ — одна из простых алгебр Ли $W(\mathcal{F})$, $S(\mathcal{F})$ или $H(\mathcal{F})$ над k , $\text{char } k \neq p > 2$, соответствующая флагу

$$\mathcal{F} : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{q-1} \supset E_q = 0.$$

Положим

$$\overline{L}(\mathcal{F})_l = \sum_{i=1}^{l-1} [L(\mathcal{F})_i, L(\mathcal{F})_{l-i}], \quad l > 1; \quad L_{-1} = V.$$

Тогда имеют место равенства

$$\overline{L}(\mathcal{F})_l = L(\mathcal{F})_l, \quad l \neq p^t - 1,$$

кроме случая $l = p^t - 2$ и $L = H(\mathcal{F})$, когда

$$0) H(\mathcal{F})_l / \overline{H}(\mathcal{F})_l \cong \langle \mathcal{D}_{x_j^{(p^t)}}; \quad x_j \in E_t \rangle \cong E_t.$$

Если $l = p^t - 1$, то

$$L(\mathcal{F})_l / \overline{L}(\mathcal{F})_l \cong E_t \otimes V,$$

или, в явной форме:

- 1) $W(\mathcal{F})_l / \overline{W}(\mathcal{F})_l \cong \langle x_j^{(p^t)} \partial_i; \quad x_j \in E_t, \quad 1 \leq i \leq n \rangle,$
- 2) $S(\mathcal{F})_l / \overline{S}(\mathcal{F})_l \cong \langle \mathcal{D}_{i,k} \{ x_j^{(p^t)} x_i^{(1)} \}; \quad x_j \in E_t, \quad 1 \leq i, k \leq n \rangle,$
- 3) $H(\mathcal{F})_l / \overline{H}(\mathcal{F})_l \cong \langle \mathcal{D}_{x_j^{(p^t)} x_k^{(1)}}; \quad x_j \in E_t, \quad 1 \leq k \leq n \rangle.$

Следствие. В обозначениях предложения 1, $\overline{L}(\mathcal{F})_l = L(\mathcal{F})_l$ для всех $l \geq p^q$. В частности, p -алгебра Ли L каждого из трех типов порождается своими однородными компонентами L_{-1} , L_0 , L_1 .

Доказательство. Выберем в E базис $\{x_1, \dots, x_n\}$, согласованный с флагом $\mathcal{F}$. Любое дифференцирование запишется тогда в виде линейной комбинации "одночленов" $x_1^{(h_1)}, \dots, x_n^{(h_n)} \partial_i$, где $h_i < p^{s+1}$, если $x_i \in E_s$, $x_i \notin E_{s-1}$.

I) Алгебра $W(\mathcal{F})$. Заметим сначала, что подфлагу $\mathcal{F}' : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} \supset E'_t = 0$ флага $\mathcal{F}$ соответствуют подалгебры $O(\mathcal{F}') \subset O(\mathcal{F})$ и $W(\mathcal{F}') \subset W(\mathcal{F})$, так что, действительно, $\overline{W}(\mathcal{F})_{p^t-1} \subset W(\mathcal{F}')$ и

$$\langle x_j^{(p^t)} \partial_i; \quad x_j \in E_t, \quad 1 \leq i \leq n \rangle \subseteq W(\mathcal{F})_{p^t-1} / \overline{W}(\mathcal{F})_{p^t-1}.$$

Ниже будет получено обратное включение.

Пусть $w_0 = \prod_{j \neq i} x_j^{(h_j)}$, $\mathcal{D} = w_0 x_i^{(h_i)} \partial_i \in W(\mathcal{F})_l$. Очевидно,

$$\mathcal{D} = [w_0 \partial_i, x_i^{(h_i+1)} \partial_i] \in \overline{W}(\mathcal{F})_l,$$

кроме случаев а) $\deg w_0 \leq 1$, б) $h_i = p^{s+1} - 1$, $x_i \in E_s / E_{s+1}$, в) $h_i = 0$. Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) Если $w_0 = x_j^{(h_j)}$, $h_j \leq 1$, то

$$[x_j^{(h_j)} x_i^{(\alpha)} \partial_i, x_i^{(l+2-h_j-\alpha)} \partial_i] = \gamma \mathcal{D},$$

$$\gamma = \binom{l+1-h_j}{\alpha} - \binom{l+1-h_j}{\alpha-1},$$

$\alpha = 2 - h_j, \dots, l - h_j$. Коэффициент γ равен нулю лишь при $l+1-h_j = p^t$. Значение $h_j = 0$ и, следовательно, $l = p^t - 1$ соответствует утверждению 1) предложения. Если $h_j = 1$, то $\mathcal{D} \in \overline{W}(\mathcal{F})_l$, поскольку

$$\mathcal{D} - x_j^{(2)} x_i^{(l-1)} \partial_j = [x_i^{(l)} \partial_j, x_j^{(2)} \partial_i] \in \overline{W}(\mathcal{F})_l,$$

$$x_j^{(2)} x_i^{(l-1)} \partial_j = [x_i^{(l-1)} \partial_j, x_j^{(3)} \partial_j] \in \overline{W}(\mathcal{F})_l.$$

б) Следует воспользоваться соотношением

$$2\mathcal{D} = [x_i^{(2)} \partial_i, w_0 x_i^{(p^{t+1}-2)} \partial_i] \in \overline{W}(\mathcal{F})_l.$$

в) Так как

$$\left(\prod_{j \neq i} \binom{h_j}{\alpha_j} \right) \mathcal{D} =$$

$$\left[\left(\prod_{j \neq i} x_j^{(\alpha_j)} \right) \partial_i, \left(\prod_{j \neq i} x_i^{(h_j-\alpha_j)} \right) x_i^{(1)} \partial_i \right] \in \overline{W}(\mathcal{F})_l,$$

$2 \leq \sum_{j \neq i} \alpha_j \leq l+1$, а коэффициент слева тождественно равен ну-

лю лишь при $\mathcal{D} = x_j^{(l+1)} \partial_i$, $l+1 = p^t$, то мы опять приходим к утверждению 1).

II) Алгебра $S(\mathcal{F})$. По причинам, изложенным в п. I),

$$\langle \mathcal{D}_{i,k} \{x_j^{(p^t)} x_i^{(1)}\}; \quad x_j \in E_t, \quad 1 \leq i, k \leq n \rangle \subseteq S(\mathcal{F})_{p^t-1} / \overline{S}(\mathcal{F})_{p^t-1}.$$

Согласно предложению 1 §5 гл. I, $S(\mathcal{F})$ натянута на дифференцирования $\mathcal{D}_{i,j} \{u\}$, $u \in O(\mathcal{F})$. Отметим полезные в дальнейшем соотношения:

$$[\mathcal{D}_{i,j} \{u\}, \mathcal{D}_{i,j} \{v\}] = \mathcal{D}_{i,j} \{ \partial_j(u) \partial_i(v) - \partial_i(u) \partial_j(v) \}, \quad (1)$$

$$[\mathcal{D}_{i,j} \{u\}, \mathcal{D}_{j,k} \{v\}] = \mathcal{D}_{j,i} \{ \partial_j(u) \partial_k(v) \} +$$

$$+ \mathcal{D}_{k,j} \{ \partial_i(u) \partial_j(v) \} + \mathcal{D}_{i,k} \{ \partial_j(u) \partial_j(v) \}, \quad k \neq i. \quad (2)$$

Положим $w_0 = \prod_{s \neq i, j} x_s^{(h_s)}$, $w = w_0 x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j)}$, i, j — произвольная, но фиксированная в дальнейшем пара индексов, $\deg w_0 + h_i + h_j = l + 2 \geq 4$.

Пусть сначала $\deg w_0 \geq 2$ и $h_i + h_j \geq 2$. Тогда, взяв $u = w_0 x_i^{(1)}$, $v = x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j+1)}$ или же $u = w_0 x_j^{(1)}$, $v = x_i^{(h_i+1)} x_j^{(h_j)}$, мы при помощи формулы (1) получим нужное включение $\mathcal{D}_{i,j}\{w\} \in \overline{S}(\mathcal{F})_l$, если $h_i < p^{m_i} - 1$, или, соответственно, $h_j < p^{m_j} - 1$ (m_i — высота переменной x_i). Если же $h_i = p^{m_i} - 1$, $h_j = p^{m_j} - 1$, то нужно воспользоваться формулой (2), взяв, например, $u = w_0 x_j^{(1)}$, $v = x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j)} x_k^{(1)}$, $k \neq i, j$. При этом, правда, возникнет дополнительный элемент

$$\mathcal{D}_{i,k}\{w_0 x_k^{(1)} x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j-1)}\}.$$

Но он либо равен нулю, либо, согласно предыдущему (заменить пару i, j на i, k), принадлежит $\overline{S}(\mathcal{F})_l$, кроме случая $h_k = p^{m_k} - 2$.

Итак, нас интересует элемент $\mathcal{D}_{i,j}\{w\}$, где w — одночлен с показателями $h_i = p^{m_i} - 1$, $h_j = p^{m_j} - 1$, $h_k = p^{m_k} - 2$. Здесь нужно положить

$$w_0 = w'_0 x_k^{(h_k)}, \quad u = w'_0 x_j^{(\alpha_j+1)} x_k^{(\alpha_k)}, \quad v = x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j-\alpha_j)} x_k^{(h_k+1-\alpha_k)}$$

и рассмотреть линейную систему

$$[\mathcal{D}_{i,j}\{u\}, \mathcal{D}_{j,k}\{v\}] \equiv 0 \pmod{\overline{S}(\mathcal{F})_l}.$$

при $\alpha_j = 0$, $\alpha_k = h_k$ и $\alpha_j = 1$, $\alpha_k = h_k$ с определителем 1.

Нам осталось рассмотреть те случаи, когда одно из условий $\deg w_0 \geq 2$, $h_i + h_j \geq 2$ не выполняется

а) $h_i + h_j = 0$. Тогда $w = w_0$ и $\mathcal{D}_{i,j}\{w\} = 0$.

б) $h_i + h_j = 1$, скажем, $h_i = 1$, $h_j = 0$; $\deg w_0 > 2$.

Снова взяв $w_0 = w'_0 x_k^{(h_k)}$, $u = w'_0 x_j^{(1)} x_k^{(\alpha)}$, $v = x_i^{(2)} x_k^{(h_k-\alpha)}$, по формуле (1) получим:

$$\binom{h_k}{\alpha} \mathcal{D}_{i,j}\{w\} \in \overline{S}(\mathcal{F})_l.$$

Здесь $\alpha = 0$ при $h_k = 1$ и $\alpha = 1$ при $h_k = 2$. При $h_k > 2$ можно брать $\alpha = 2, 3, \dots, h_k - 1$, и $\binom{h_k}{\alpha} = 0$ лишь в случае $h_k = p^t$. Если $w = x_k^{(p^t)} x_i^{(1)}$, то $\mathcal{D}_{i,j}\{w\} = -x_k^{(p^t)} \partial_j$ — один из элементов, о которых

говорится в утверждении (2) нашего предложения. Если же $w = w_0'' x_a^{(p^t)} x_b^{(p^t)} x_i^{(1)}$, то включение $\mathcal{D}_{i,j}\{w\} \in \overline{S}(\mathcal{F})_l$ снова получается по формуле (1), где нужно взять $u = w_0'' x_a^{(p^t)} x_j^{(1)}$, $v = x_i^{(2)} x_b^{(p^t)}$.

в₁) $w = x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j)} x_k^{(1)}$. Если $h_i \geq 2$ и $h_j \geq 1$, то полагаем $u = x_j^{(1)} x_i^{(h_i)}$, $v = x_j^{(h_j)} x_k^{(2)}$ и используем формулу (2):

$$-\mathcal{D}_{i,j}\{w\} + h_j \mathcal{D}_{k,j}\{x_i^{(h_i-1)} x_j^{(h_j)} x_k^{(2)}\} + \mathcal{D}_{i,k}\{x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j-1)} x_k^{(2)}\} = \\ = [\mathcal{D}_{i,j}\{u\}, \mathcal{D}_{j,k}\{v\}] \in \overline{S}(\mathcal{F})_l.$$

Ввиду предшествующих рассуждений, члены $\mathcal{D}_{k,j}\{*\}$ и $\mathcal{D}_{i,k}\{*\}$ содержатся в $\overline{S}(\mathcal{F})_l$, так что нужное включение найдено. То же самое верно и при $h_i \geq 1$, $h_j \geq 2$. Если же $w = x_i^{(h_i)} x_k^{(1)}$, то нужно воспользоваться равенством

$$\mathcal{D}_{i,j}\{w\} = \mathcal{D}_{k,j}\{x_i^{(h_i-1)} x_k^{(2)}\},$$

сводящим задачу к уже рассмотренному случаю $\deg w_0 = h_i - 1 \geq 2$, $h_k + h_j = 2$.

в₂) $w = x_i^{(h_i)} x_j^{(h_j)}$. Когда $h_i \geq 2$, $h_j \geq 2$, применяем формулу (2) с $u = x_i^{(h_i)} x_j^{(1)}$, $v = x_j^{(h_j)} x_k^{(1)}$, что дает редукцию к в₁). В формуле (1) полагаем $u = x_i^{(1)} x_j^{(2)}$, $v = x_i^{(h_i)}$, когда $p^t \neq h_i \geq 3$, $h_j = 1$. Одночлен $w = x_i^{(p^t)} x_j^{(1)}$ дает предусмотренный в утверждении (2) элемент ($h_i = 1$, $h_j \geq 3$ не дают ничего нового). Осталось рассмотреть случай $w = x_i^{(h_i)}$. Формула (1) с $u = x_i^{(\alpha)} x_j^{(1)}$, $v = x_i^{(h_i+1-\alpha)}$, $\alpha = 2, 3, \dots, h_i - 2$, приводит к включению $\mathcal{D}_{i,j}\{w\} \in \overline{S}(\mathcal{F})_l$, кроме случая $h_i = p^t + 1$ (элемент из утверждения 2)) и $h_i = p^t$. Но

$$\mathcal{D}_{i,j}\{x_j^{(p^t)}\} = \mathcal{D}_{i,k}\{x_j^{(p^t-1)} x_k^{(1)}\} = \\ = [\mathcal{D}_{i,k}\{x_j^{(1)} x_i^{(1)} x_k^{(1)}\}, \mathcal{D}_{i,k}\{x_j^{(p^t-2)} x_k^{(1)}\}] \in \overline{S}(\mathcal{F})_l.$$

III) Алгебра $H(\mathcal{F})$. Мы используем изоморфизм $H(\mathcal{F})$ с алгеброй $O'(\mathcal{F})/k$, наделенной законом композиции (7) §6 гл. I. Как отмечалось в п. 2 §3 гл. I., форму ω можно считать приведенной к каноническому виду, соответствующему мономиальной матрице

$M : M^{-1} = (\bar{w}_{ij}), \bar{w}_{i,j} = \pm 1, 0$. Пусть $\bar{w}_{i,j} \neq 0$ для какой-то пары индексов i, j . Положим

$$w = \prod_k x_k^{(h_k)}, \quad w_0 = \prod_{k \neq i,j} x_k^{(h_k)}, \quad \sum h_k = l + 2 \geq 4.$$

Ввиду кососимметричности M , считаем выполненным неравенство $h_i \geq h_j$. С $u = x_i^{(\alpha_i)} x_j^{(\alpha_j)}$, $v = w_0 x_i^{(h_i+1-\alpha_i)} x_j^{(h_j+1-\alpha_j)}$ получим:

$$\{u, v\}_\omega = \bar{w}_{i,j} \cdot \gamma \cdot w,$$

где

$$\gamma = \binom{h_i}{\alpha_i - 1} \binom{h_j}{\alpha_j} - \binom{h_i}{\alpha_i} \binom{h_j}{\alpha_j - 1}.$$

Элементы, не принадлежащие к $\overline{H}(\mathcal{F})_l$, нужно искать лишь среди тех w , для которых $\gamma = 0$ при любых допустимых α_i, α_j .

а) $h_i \geq 2, h_j \geq 2$. Полагаем $\alpha_i = 0, \alpha_j = h_j + 1$ или же $\alpha_i = h_i + 1, \alpha_j = 0$. Это невозможно лишь при $h_i = p^{m_i} - 1, h_j = p^{m_j} - 1$ — значения, которым при $n = 2$ отвечает элемент w , не содержащийся в $O'(\mathcal{F})$ и, следовательно, в $H(\mathcal{F})$. При $n > 2$ по той же причине должна найтись пара индексов i', j' с $\bar{w}_{i',j'} \neq 0, h_{i'} < p^{m_{i'}} - 1$. В случае $h_{j'} = p^{m_{j'}} - 1$ заменяем в наших рассуждениях i, j на i', j' и получаем нужный результат. В случае $h_{j'} < p^{m_{j'}} - 1$ полагаем

$$w'_0 = \prod_{k \neq i,i',j,j'} x_k^{(h_k)}, \quad u = x_k^{(p^{m_i}-1)} x_{i'}^{(h_{i'}+1)}, \quad v = x_j^{(p^{m_j}-1)} x_{j'}^{(h_{j'}+1)} w'_0.$$

Тогда

$$\{u, v\}_\omega = \bar{w}_{i',j'} w + \bar{w}_{i,j} x_i^{(p^{m_i}-2)} x_j^{(p^{m_j}-2)} w''_0.$$

По уже доказанному элемент с коэффициентом $\bar{w}_{i,j}$ содержится в $\overline{H}(\mathcal{F})_l$. Поэтому и $w \in \overline{H}(\mathcal{F})_l$.

б₁) $h_i = 2, h_j = 1, \deg w_0 \geq 1$. Значения $\alpha_i = 3, \alpha_j = 0$ дают $\gamma \neq 0$.

б₂) $h_i \geq 3, h_j = 1$. Очевидно, $\alpha_j = 0, \gamma = 0 \Rightarrow \binom{h_i}{\alpha_i-1} = 0$ при $\alpha_i = 3, 4, \dots, h_i$, т. е. $h_i = p^t$. Если $n = 2$, то w — элемент из утверждения 3). При $n > 2$ и $\deg w_0 \geq 1$ (если $\deg w_0 = 0$, то w — нужный элемент) выбираем опять пару i', j' , с $\bar{w}_{i,j} \neq 0, h_{j'} \geq 1$, полагаем

$$u = x_k^{(p^t)} x_{i'}^{(h_{i'}+1)}, \quad v = x_j^{(1)} x_{j'}^{(h_{j'}+1)} w'_0$$

и получаем

$$\{u, v\}_\omega = \bar{\omega}_{i',j'} x_i^{(p^t-1)} x_j^{(0)} w_0''.$$

Отсюда $w \in \bar{H}(\mathcal{F})_l$, поскольку это верно для элемента с коэффициентом $\bar{\omega}_{i,j}$ (взять $\alpha_i = 3, \alpha_j = 0$). Наше рассуждение не проходит лишь при $h_{i'} + 1 = p^{m_{i'}}$ или $h_{j'} + 1 = p^{m_{j'}}$. Но тогда $\deg w_0 > 1$ и $\gamma \neq 0$, если положить $u = x_i^{(p^t+1)}, v = x_j^{(2)} w_0$.

в₁) $2 \leq h_i < p^{m_i} - 1, h_j = 0, \deg w_0 \geq 2$. Положить $u = x_i^{(h_i+1)}, v = w_0 x_j^{(1)}$.

в₂) $h_i = p^{m_i} - 1, h_j = 0, \deg w_0 \geq 2$. Положить $u = x_i^{(h_i)}, v = w_0 x_i^{(1)} x_j^{(1)}$.

в₃) $h_i \geq 3, h_j = 0, w_0 = x_k^{(1)}$. Положив

$$u = x_i^{(\alpha)}, \quad v = x_k^{(1)} x_i^{(h_i+1-\alpha)} x_j^{(1)}, \quad \alpha = 3, \dots, h_i,$$

мы увидим, что $\gamma = 0 \Rightarrow h_i = p^t$ и $w = x_i^{(p^t)} x_k^{(1)}$ — желаемый элемент.

в₄) $w = x_i^{(h_i)}, h_i \geq 4$. Если $u = x_i^{(\alpha)}, v = x_i^{(h_i+1-\alpha)} x_j^{(1)}, \alpha = 3, \dots, h_i - 1$, то $\gamma = \binom{h_i}{\alpha-1} = 0 \Rightarrow h_i = p^t + 1$ или $h_i = p^t$ — значения, предусмотренные в утверждениях 3) и 0).

г) $h_s \leq 1$ для всех s , что возможно, конечно, лишь при $n > 2$. Пусть

$$\bar{\omega}_{i,j} \neq 0, \quad w = x_i^{(1)} x_j^{(h_j)} x_k^{(1)} w_0', \quad \deg w_0' \geq 2 - h_j.$$

Если взять $u = x_i^{(2)} x_k^{(1)}, v = x_j^{(h_j+1)} w_0'$, то $\{u, v\} = \bar{\omega}_{i,j} w + x_i^{(2)} *$. По доказанному ранее, $x_i^{(2)} * \in \bar{H}(\mathcal{F})_l$. Следовательно, и $w \in \bar{H}(\mathcal{F})_l$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. В обозначениях предложения 1

1) $\tilde{L}(\mathcal{F})_{l-1}^{(1)} = \tilde{L}(\mathcal{F})_l$ при $l \neq p^t - 1$.

2) $\tilde{L}(\mathcal{F})_{l-1}^{(1)} = \tilde{L}(\mathcal{F}^0)_l$ при $l = p^t - 1$, где флаг $\mathcal{F}^0$ имеет вид $\mathcal{F}^0 : E = E_0^0 \supseteq E_1^0 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1}^0 = E_t^0 \supset E_{t+1}^0 = 0$ и $E_i^0 = E_i = 0$ при $i = 0, 1, \dots, t-1$.

В частности, $L(\mathcal{F})_{l-1}^{(1)} = L(\mathcal{F})_l$ при $l \geq p^q$.

Доказательство.

I. Алгебра $W(\mathcal{F})$. Докажем сначала 1). Пусть $\mathcal{D} = \sum u_i \partial_i$, $u_i \in O(E)_{l+1}$. По определению,

$$\mathcal{D} \in W(\mathcal{F})_{l-1}^{(1)} \Leftrightarrow \partial_\xi(u_i) \in O(\mathcal{F})_l \quad \forall \xi \in E_0^*, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Следовательно,

$$u_i \notin O(\mathcal{F}) \Rightarrow u_i = \sum \alpha_s x_s^{(p^t)} + v_i, \quad v_i \in O(\mathcal{F}), \quad (*)$$

что противоречит условию $l \neq p^t - 1$.

Пусть теперь $l = p^t - 1$. В этом случае из $\mathcal{D} \in W(\mathcal{F})_{l-1}^{(1)}$ опять следует (*), где $x_s \in E_{t-1}$. Элементы вида $x_s^{(p^t)}$ не содержатся в $W(\mathcal{F})$, но содержатся в $W(\mathcal{F}^0)$, и мы получаем 2).

II. Алгебра $\tilde{S}(\mathcal{F})$. Из случая I вытекает, что если $\mathcal{D} \in \tilde{S}(\mathcal{F})_{l-1}^{(1)}$, то $\mathcal{D} \in W(\mathcal{F})_l$ при $l \neq p^t - 1$ и $W(\mathcal{F}^0)_l$ при $l = p^t - 1$. Нам остается проверить, что $\operatorname{div} \mathcal{D} = 0$ или, что то же самое, $\mathcal{D}\omega = 0$. Но это следует из того, что $[\partial_\xi, \mathcal{D}] \in \tilde{S}(\mathcal{F})$. Действительно,

$$0 = [\partial_\xi, \mathcal{D}]\omega \Rightarrow \partial_\xi \cdot \mathcal{D}\omega = 0 \Rightarrow \mathcal{D}\omega = 0$$

($\partial_\xi \omega = 0$, так как ω имеет постоянные коэффициенты).

III. Алгебра $\tilde{H}(\mathcal{F})$. Рассматривается аналогично.

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 2, рассмотрев в отдельности случаи, указанные после ее формулировки.

1) $L_0 = \mathfrak{gl}(n, k)$, $L_1 = W(E)_1$. Докажем, что в этом случае $L = W(\mathcal{F})$, т. е. что найдется флаг $\mathcal{F}$, относительно которого

$$L_i = W(\mathcal{F})_i \quad (3)$$

при всех i . Для $i = -1, 0, 1$ равенство (3) нам дано, и мы можем доказывать его дальше по индукции. Пусть оно верно для всех $i < l$. Точнее говоря,

$$L_i = W(\mathcal{F}')_i, \quad i < l, \quad (3')$$

где

$$\mathcal{F}' : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} \supset E'_t = 0$$

— некий подфлаг строящегося флага $\mathcal{F}$. Можно всегда выбрать флаг $\mathcal{F}'$, удовлетворяющий условиям (3') так, что $l \geq p^{t-1}$. Иначе мы могли бы выбрать флаг высоты t_1 (где t_1 — наибольшее значение t с условием $l \geq p^{t-1}$), у которого все E_k с $0 \leq k \leq t_1 - 1$ — те же, что и у флага $\mathcal{F}'$. Поэтому мы дальше будем всегда предполагать, что $l \geq p^t - 1$. Если, далее, $l + 1 \neq p^s$, то, согласно предложениям 1 и 2 и в соответствии с равенством (3'),

$$\begin{aligned} L_l \supseteq \bar{L}_l &= \sum_{i=1}^{l-1} [L_i, L_{l-i}] = \bar{W}(\mathcal{F}')_l = \\ &= W(\mathcal{F}')_l = W(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} = L_{l-1}^{(1)}. \end{aligned}$$

А так как, конечно, всегда $L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)}$, то в данном случае $L_l = L_{l-1}^{(1)} = W(\mathcal{F}')_l$. Из тех же предложений 1 и 2 вытекает, что аналогично дело обстоит и при $l + 1 = p^s$, $s > t$. Пусть теперь $l + 1 = p^t$. Введем, как и в предложении 2, флаг

$$\mathcal{F}^0 : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} = E_t^0 \supset E_{t+1}^0 = 0.$$

Очевидно, что (снова используется индуктивное равенство (3')):

$$\bar{W}(\mathcal{F}^0)_l = \bar{W}(\mathcal{F}')_l = \bar{L}_l \subseteq L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)} = W(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} = W(\mathcal{F}^0)_l,$$

причем, согласно предложению 1,

$$W(\mathcal{F}^0)_l / \bar{W}(\mathcal{F}^0)_l \cong E_t^0 \otimes V \quad (4)$$

и все три интересующие нас пространства

$$\bar{W}(\mathcal{F}^0)_l, \quad L_l, \quad W(\mathcal{F}^0)_l$$

инвариантны относительно L_0 . Изоморфизм (4) наделяет $E_t^0 \otimes V$ структурой L_0 -модуля:

$$\mathcal{D} : e \otimes v \rightarrow \mathcal{D}(e) \otimes v + e \otimes \mathcal{D}(v), \quad \mathcal{D} \in L_0,$$

изоморфного, как легко видеть, тензорному произведению стандартного L_0 -модуля V и тривиального (т. е. с нулевым действием) модуля E_t^0 . Действительно, это прямо вытекает из действия $\mathcal{D} \in L_0$ на прообразы $x_j^{(p^t)} \partial_i$ базисных элементов факторпространства $W_l / \bar{W}_l$:

$$x_j^{(p^t)} \partial_i \rightarrow [\mathcal{D}, x_j^{(p^t)} \partial_i] = \mathcal{D}(x_j^{(p^t)}) \partial_i + x_j^{(p^t)} [\mathcal{D}, \partial_i].$$

Очевидно, $\mathcal{D}(x_j^{(p^t)}) \in O(\mathcal{F}')$ и дифференцирование $\mathcal{D}(x_j^{(p^t)})\partial_i$ переходит при отображении $W(\mathcal{F}^0)_l \rightarrow W(\mathcal{F}^0)_l/\overline{W}(\mathcal{F}^0)_l$ в нуль, а $\partial_j \rightarrow [\mathcal{D}, \partial_j]$ совпадает как раз со стандартным действием $\mathcal{D}$ в V .

Согласно свойствам полупростых модулей, любое инвариантное относительно L_0 подпространство в $E^0 \otimes V$ имеет вид $E_t \otimes V$, где E_t — однозначно определенное подпространство в E_t^0 . Таковым является и факторпространство

$$L_l/\overline{L}_l \subseteq W(\mathcal{F}^0)_l/\overline{W}(\mathcal{F}^0)_l.$$

Мы пришли, следовательно, к флагу

$$\mathcal{F}'' : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} \supseteq E_t \supseteq E_{t+1}'' = 0$$

(не исключено, что $E_t = E_{t+1}'' = 0$, и тогда наше доказательство автоматически заканчивается; возможен также и случай $\mathcal{F}'' = \mathcal{F}^0$).

Мы утверждаем, что

$$L_i = W(\mathcal{F}'')_i, \quad i < l+1 = p^t \quad (5)$$

Действительно, добавление подпространства E_t не меняет компонент $W(\mathcal{F}')_i$ с $i < l$, когда (5) совпадает с (3'), а в размерности l были добавлены как раз элементы, не входившие в $W(\mathcal{F}')_l$.

Доказательство индуктивного шага на этом заканчивается.

2) $L_0 = sl(n, k)$, $L_1 = S(E)_1$. Действуя так же, как и в случае 1), предположим, что мы уже доказали нужные нам включения

$$S(\mathcal{F}')_i \subseteq L_i \subseteq \tilde{S}(\mathcal{F}')_i, \quad i < l, \quad (6)$$

где $l > 1$, а

$$\mathcal{F}' : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} \supseteq E_t' = 0$$

— какой-то флаг высоты t . Требуется вложить $\mathcal{F}'$ в новый флаг $\mathcal{F}''$, относительно которого включение (6) имело бы место и при $i = l$.

Из предложения 1 §5 гл. I вытекает, что алгебра $\tilde{S}(\mathcal{F}')$ получается из специальной алгебры $S(\mathcal{F}')$ добавлением n дифференцирований

$$\mathcal{D}_i = \left(\prod_{j \neq i} x_j^{(p^{m_j}-1)} \right) \partial_i$$

(m_j — высота переменной x_j в базисе, согласованном с флагом $\mathcal{F}'$), причем $[\tilde{S}, \tilde{S}] = S$. Более того, как легко проверить, $[\mathcal{D}_i, \mathcal{D}_j] = 0$ и

$$\overline{\tilde{S}}(\mathcal{F}')_l = \sum_{i=1}^{l-1} [\tilde{S}_i, \tilde{S}_{l-i}] = \overline{S}(\mathcal{F}')_l \quad (7)$$

для всех $l > 1$. Достаточно просто посмотреть на форму элементов из $S_l/\overline{S}_l$ в утверждении 2) предложения 1, приняв во внимание условие $n > 2$.

Пусть сначала $l \neq p^t - 1$. Тогда из предложений 1 и 2 и из индуктивных включений (6) следует, что

$$L_l \supseteq \overline{L}_l = \overline{S}(\mathcal{F}')_l = S(\mathcal{F}')_l.$$

Кроме того,

$$L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)} \subseteq \tilde{S}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} = \tilde{S}(\mathcal{F}')_l.$$

Пусть теперь $l = p^t - 1$. Заметим, что

$$\mathcal{D}_i \in \tilde{S}(\mathcal{F}')_{q_i}, \quad q_i + 1 = \sum_{j \neq i} (p^{m_j} - 1) = (p-1)p' \neq p^t = l + 1,$$

поэтому

$$\tilde{S}(\mathcal{F})_l = S(\mathcal{F})_l,$$

каков бы ни был флаг $\mathcal{F}$. Как и ранее, введем флаг $\mathcal{F}^0$, полагая $E_i^0 = E_{i-1}$. Тогда, ввиду сделанного замечания и в силу индуктивных включений (6),

$$\overline{S}(\mathcal{F}^0)_l = \overline{S}(\mathcal{F}')_l = \overline{L}_l \subseteq L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)} \subseteq \tilde{S}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} = \tilde{S}(\mathcal{F}^0)_l = S(\mathcal{F}^0)_l,$$

так что, согласно предложению 1,

$$L_l/\overline{L}_l \subseteq S(\mathcal{F}^0)_l/\overline{S}(\mathcal{F}^0)_l \cong E_t^0 \otimes V.$$

Все предыдущие рассуждения проходят дословно, и мы приходим к равенству

$$L_l = S(\mathcal{F}'')_l$$

или, с учетом (6),

$$S(\mathcal{F}'')_i \subseteq L_i \subseteq \tilde{S}(\mathcal{F}'')_i, \quad i < l + 1,$$

где

$$\mathcal{F}'' : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} \supseteq E_t \supseteq E_{t+1}'' = 0$$

— флаг, получающийся из $\mathcal{F}^0$ заменой E_t^0 , некоторым подпространством E_t . Это соответствует выбору подмодуля в L_0 -модуле $E_t^0 \otimes V$. Доказательство п. 2) закончено.

Обратим внимание на то обстоятельство, что добавление к $\mathcal{F}'$ ненулевого подпространства E_t переведет часть элементов $\mathcal{D}_i \in \tilde{S}(\mathcal{F}')$ (может быть, после линейной замены переменных) в разряд элементов из $S(\mathcal{F}'')$. Вместе с тем в однородных компонентах более высокой степени возникнут новые элементы типа $\mathcal{D}_i$. Кстати, возможно равенство $L = S(\mathcal{F})$, хотя бы в ходе доказательства и встречались строгие включения $S(\mathcal{F}')_i \subset L_i$.

3) $L_0 = \mathfrak{gl}(n, k)$, $L_1 = S(E)_1$. Так как L_0 -подмодули в $E_t \otimes V$ совпадают с $sl(n, k)$ -подмодулями, то все рассуждения из п. 2) сохраняют силу (заменить $\tilde{S}$ на S^* !).

4) $L_0 = Sp(n, k)$, $L_1 = H(E)_1$. Почти нет никаких отличий от рассуждений п. 2), но поскольку в предложении 1 $H(\mathcal{F})$ занимает все же особое место, мы набросаем ход доказательства.

Как обычно, мы имеем включения

$$\overline{H}(\mathcal{F}')_l \subseteq \overline{L}_l \subseteq L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)} \subseteq \tilde{H}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)}.$$

Если $l \geq p^t$, то из предложений 1 и 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} \overline{H}(\mathcal{F}')_l &= H(\mathcal{F}')_l, \\ \tilde{H}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} &= \tilde{H}(\mathcal{F}')_l, \end{aligned}$$

что и дает доказательство теоремы в этом случае.

Пусть теперь $l < p^t$. Исходя из индуктивных предположений

$$H(\mathcal{F}')_i \subseteq L_i \subseteq \tilde{H}(\mathcal{F}')_i, \quad i < l, \quad (8)$$

мы замечаем, что

$$\overline{H}(\mathcal{F}')_l \subseteq \overline{L}_l \subseteq \overline{\tilde{H}}(\mathcal{F}')_l.$$

Имеют место равенства

$$\overline{H}(\mathcal{F}')_l = \overline{L}_l = \overline{\tilde{H}}(\mathcal{F}')_l. \quad (9)$$

Чтобы доказать (9), нужно воспользоваться формулами (5), (6) §6 гл. I, из которых следует, что $\overline{H}(\mathcal{F}')_l = \widetilde{H}(\mathcal{F}')_l$. Исключение может составить только случай $n = 2$, когда при $e = x_1^{(p^{m_1}-1)} x_2^{(p^{m_2}-1)}$ элемент $\mathcal{D}_e$, не содержащийся в $H(\mathcal{F}')$, принадлежит тем не менее $\widetilde{H}(\mathcal{F}')$ (см. §6 гл. I). Но это невозможно в нашем случае из соображений размерности: $\mathcal{D}_e \in \widetilde{H}(\mathcal{F}')_k$, где $k = p^{m_1} + p^{m_2} - 4$, $m_1 \geq 1$, $m_2 = t$ и $k > l$, поскольку у нас $l < p^t$, так что $\mathcal{D}_e \notin \widetilde{H}(\mathcal{F}')_l$.

Дальше, как обычно, рассмотрим два случая.

Если $l \neq p^t - 1$, то

$$\overline{H}(\mathcal{F}')_l = H(\mathcal{F}')_l. \quad (10)$$

Это прямо вытекает из предложения 1, если заметить, что при $l = p^t - 2$ утверждение 0) сводится к равенству $H(\mathcal{F}')_l / \overline{H}(\mathcal{F}')_l \cong E'_l = 0$. Объединяя теперь равенства (9), (10) с очевидной цепочкой включений $\overline{L}_l \subseteq L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)} \subseteq \widetilde{H}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)}$ (индукция!) и с равенством $\widetilde{H}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} = \widetilde{H}(\mathcal{F}')_l$ из предложения 2, мы получаем (8) при $i = l$.

Пусть, наконец, $l = p^t - 1$. Перейдем от $\mathcal{F}'$ к флагу $\mathcal{F}^0$, как мы делали это раньше. Очевидно, $\overline{H}(\mathcal{F}^0)_l = \overline{H}(\mathcal{F}')_l$, поэтому, с учетом (9), находим, что

$$\overline{H}(\mathcal{F}^0)_l = \overline{L}_l \subseteq L_l \subseteq L_{l-1}^{(1)} \subseteq \widetilde{H}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)}.$$

Далее из предложения 2 вытекает, что

$$\widetilde{H}(\mathcal{F}')_{l-1}^{(1)} = \widetilde{H}(\mathcal{F}^0)_l$$

и, в свою очередь,

$$\widetilde{H}(\mathcal{F}^0)_l = H(\mathcal{F}^0)_l,$$

поскольку $\widetilde{H}(\mathcal{F}^0)_k$ отличается от $H(\mathcal{F}^0)_k$ лишь в однородных компонентах степеней $p^s - 2$, $\sum (p^{m_i} - 1) - 2$, которые не могут совпадать с l .

Итак,

$$\overline{H}(\mathcal{F}^0)_l = \overline{L}_l \subseteq L_l \subseteq H(\mathcal{F}^0)_l,$$

откуда

$$L_l / \overline{L}_l \subseteq H(\mathcal{F}^0)_l / \overline{H}(\mathcal{F}^0)_l,$$

или

$$L_l/\bar{L}_l \cong E_l \otimes V \subseteq E_l^0 \otimes V,$$

если принять во внимание предложение 1. Из построения флага $\mathcal{F}'' : E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots \supseteq E_{t-1} \supseteq E_t \supseteq E_{t+1}'' = 0$ теперь ясно, что включения (8) верны с заменой $\mathcal{F}'$ на $\mathcal{F}''$, при всех $i < l + 1$.

5) $L_0 = Sp(n, k) \oplus k$, $L_1 = H(E_1)$. Полное повторение рассуждений из п. 4). Теорема 2 доказана.

§4. Доказательство теоремы 3. Пример

1. Доказательство теоремы 3. Из условий а) — в) теоремы 3 и из теоремы главы II следует, что L_0 изоморфна одной из алгебр A_n , $A_n \otimes k$, C_l , $C_l \otimes k$, а Γ является стандартным представлением. Ввиду этого теорема 3 вытекает из теоремы 2.

2. Пример. Приведем пример, который показывает, что условие а) теоремы 3 нельзя устранить. Именно, существуют градуированные алгебры с $\dim L_{-1} = p - 1$, не изоморфные (как градуированные алгебры) ни одной из алгебр, перечисленных в теореме 2. При этом, однако, мы получим алгебру, которая без учета градуировки изоморфна одной из алгебр теоремы 2 — именно алгебре H_1 . Таким образом, речь идет просто о другой градуировке алгебры H_1 .

Напомним, что алгебра H_1 может быть задана как O'/k :

$$O' \subset k[x, y]/(x^p, y^p)$$

и состоит из многочленов, не содержащих члена $(xy)^{p-1}$. Коммутирование определено формулой

$$[f, g] = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}.$$

Обозначим через L'_k образ в O'/k совокупности многочленов, имеющих степень $k + 1$ по x . Очевидно, что $\{L'_k\}$ определяют градуировку длины $p - 2$ алгебры H_1 . При этом $\dim L'_{-1} = p - 1$. Алгебра L'_0 состоит из многочленов вида $xf(y)$ и сопоставление $xf(y) \rightarrow f(y) \frac{d}{dy}$ определяет ее изоморфизм с алгеброй W_1 . Поэтому градуированная алгебра $H_1 = \bigoplus L'_k$ не изоморфна ни одной из алгебр, перечисленных в теореме 2.

§5. Применение к p -алгебрам

Начнем с двух общих лемм о p -алгебрах.

ЛЕММА 1. Структуры градуированной алгебры и p -алгебры Ли без центра связаны соотношением

$$L_i^{[p]} \subset L_{ip}.$$

Доказательство. Пусть $x \in L_i$ и

$$x^{[p]} = \sum_{k \geq -1} x_k. \quad (1)$$

Докажем прежде всего, что $x_{-1} = 0$. Если, наоборот, $x_{-1} \neq 0$, то, ввиду отсутствия центра, существует такой однородный элемент $y_s \in L_s$, что $[x_{-1}, y_s] \neq 0$. Из (1) мы получаем, что

$$[x^{[p]}, y_s] = [x_{-1}, y_s] + \dots$$

Левая часть содержится в L_{pi+s} , а правая имеет ненулевую компоненту, содержащуюся в L_{s-1} . Мы приходим к противоречию: $pi + s = s - 1$, $pi = -1$.

Для любого $x_k \neq 0$ в (1) $k \neq -1$ и поэтому существует такой элемент $y_{-1} \in L_{-1}$, что $[x_k, y_{-1}] \neq 0$. Из (1) следует, что

$$[x^{[p]}, y_{-1}] = \sum [x_k, y_{-1}].$$

Левая часть содержится в L_{pi+1} , а правая содержит ненулевую компоненту в L_{k-1} . Поэтому $k = pi$. Лемма доказана.

Замечание. Из леммы следует, что при сделанных там предположениях L_0 является p -алгеброй, а $\Gamma : L_0 \rightarrow \text{End } L_{-1}$ — ее p -представлением.

ЛЕММА 2. Пусть

$$L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$$

— градуированная простая p -алгебра Ли, в которой L_0 — прямая сумма классических простых алгебр и, быть может, одномерного

центра $\mathfrak{z}(L_0)$. Тогда L изоморфна классической простой алгебре Ли.

Доказательство. Обозначим через H_0 подалгебру Картана в L_0 . Очевидно, что

$$N_L(H_0) = C_L(H_0) = L'_{-1,0} \oplus H_0 \oplus L'_{1,0} = H,$$

где $N_L(H_0)$ — нормализатор H_0 в L , C — централизатор, $L'_{-1,0} = C_{L_{-1}}(H_0)$ и $L'_{1,0} = C_{L_1}(H_0)$. Докажем, что $L'_{i,0}$ — подпространства в L_{-1} и L_1 соответственно, отвечающие нулевому весу (если таковые имеются).

Действительно, в H_0 есть базис, состоящий из элементов h , для которых $h[p] - h = \lambda e$, $e \in \mathfrak{z}(L_0)$. Если $L_{-1,0}$ — пространство, отвечающее нулевому весу в L_{-1} , и $u \in L_{-1,0}$, то $(\operatorname{ad} h)^p u = (\varphi(\lambda)E + \operatorname{ad} h)u = 0$, откуда легко следует, что $[h, u] = 0$, т. е. $L'_{-1,0} = L_{-1,0}$.

Из определения следует, что H_0 лежит в центре H и $[L_{-1,0}, L_{1,0}] \subseteq H_0$, так что H — нильпотентная подалгебра класса ≤ 2 .

Если $a = a_{-1} + a_0 + a_1 \in N_L(H)$, $a_i \in L_i$, то, в частности, $[H_0, a] \subseteq H$, откуда $[H_0, a_{-1}] \subseteq L_{-1,0}$, $[H_0, a_0] \subseteq H_0$, $[H_0, a_1] \subseteq L_{1,0}$. Записывая a_i в виде линейной комбинации элементов из различных весовых (или корневых при $i = 0$) подпространств относительно H_0 , мы легко убеждаемся в том, что $a \in H$. Таким образом, $N_L(H) \subseteq H$ и H — подалгебра Картана в L . Так как $\operatorname{cl}(H) \leq 2$, а $(\operatorname{ad} x)^3 = 0$ для всех $x \in L_i$, $i = \pm 1$, то в картановском разложении

$$L = H + \sum_{\alpha \neq 0} L^{(\alpha)}$$

корни $\alpha \neq 0$ — линейные функции на H и каждое $L^{(\alpha)}$ — весовое подпространство относительно H_0 . Для любого элемента $a \neq 0$ из $H \cap L_{-1}$ или из $L^{(\alpha)} \cap L_{-1}$ выполняется условие $(\operatorname{ad} a)^{p-1} = 0$ теоремы 1 работы [22]. В силу этой теоремы, L — алгебра классического типа, коль скоро она не содержит элемента $c \neq 0$, обладающего свойством $(\operatorname{ad} c)^2 = 0$. Если бы в L нашелся такой элемент, то без ограничения общности (см. теорему А той же работы [22]) можно было считать, что

$$\operatorname{ad} c(\operatorname{ad} x_1 \dots \operatorname{ad} x_k) \operatorname{ad} c = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-4, \quad (2)$$

для любых элементов $x_1, \dots, x_k \in L$.

У нас $c = c_{-1} + c_0 + c_1$. Очевидно, всегда можно найти элементы $a_1, \dots, a_s \in L_{\pm 1}$, $s \leq 3$, для которых

$$[ca_1 \dots a_s] = c'_0 \in L_0, \quad c'_0 \neq 0.$$

При этом

$$(\text{ad } c_0)^2 = \sum \dots \text{ad } c (\text{ad } a_{i_1} \dots \text{ad } a_{i_k}) \text{ad } c \dots = 0,$$

что прямо вытекает из соотношений (2) и неравенств $k \leq 2s \leq 6 < p - 4$. Поскольку элемент $e \in \mathfrak{z}(L_0)$ действует как скаляр, мы приходим к заключению, что $c'_0 \in [L_0, L_0]$. Однако в полупростой алгебре $[L_0, L_0]$ классического типа элемент $c'_0 \neq 0$ с $(\text{ad } c'_0)^2 = 0$ содержаться не может. Полученное противоречие доказывает лемму.

Замечание. Доказательство леммы не опиралось ни на какие свойства представления $\Gamma : L_0 \rightarrow \text{End } L_{-1}$.

ТЕОРЕМА. Градуированная простая p -алгебра Ли ($p > 7$) с $\dim L_{-1} < p - 1$ является или классической или алгеброй картановского типа (отличной от контактной).

Доказательство. Пусть

$$L = L_{-1} + L_0 + L_1^* + \dots + L_r.$$

Докажем, что L_0 -модуль L_{-1} неприводим. Действительно, ввиду простоты алгебры L , она совпадает с идеалом I_x , порожденным любым элементом $x \neq 0$ из L_{-1} . С другой стороны, легко проверить, что I_x есть сумма линейных пространств

$$[xL_0^{i_0} L_1^{i_1} \dots L_r^{i_r}] \subseteq L_{-1+i_1+2i_2+\dots+ri_r}.$$

Очевидно поэтому, что

$$L_{-1} \cap I_x = \sum_i [xL_0^i],$$

а это не может совпадать с L_{-1} , если x содержится в собственном инвариантном подпространстве.

Очевидно, что $L_1 \neq 0$ — иначе L_{-1} было бы идеалом в L . Случай $L_2 = 0$ рассмотрен в лемме 2. Пусть $L_2 \neq 0$. Тогда по теореме 3 наша алгебра L или совпадает с $W(\mathcal{F})$, или

$$S(\mathcal{F}) \subseteq L \subseteq S^*(\mathcal{F}),$$

или

$$H(\mathcal{F}) \subseteq L \subseteq H^*(\mathcal{F}),$$

где флаг $\mathcal{F}$ имеет вид $E \neq E_0 \supset E_1 = 0$.

В последних двух случаях, ввиду простоты алгебры L и того, что $S(\mathcal{F})$ и $H(\mathcal{F})$ — идеалы в $S^*(\mathcal{F})$ и, соответственно, в $H^*(\mathcal{F})$, мы приходим к заключению, что L совпадает с $S(\mathcal{F})$ или $H(\mathcal{F})$. Теорема доказана.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Albert A.A., Frank M.S., *Simple Lie algebras of characteristic p*, Rend. Torino, **14** (1954/55), 117–139.
2. Block R., *New simple Lie algebras of prime characteristic*, Trans. Amer. Math. Soc., **89** (1958), 421–449.
3. Block R., *Trace forms of Lie algebras*, Can. J. Math., **14** (1962), 553–564.
4. Cartan E., *Les groupes de transformations continués, infinis, simples*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **26** (1909), 93–161.
5. Cartier P., *Seminaire "Sophus Lie" (2-e année: 1955/56)*, 3–07.
6. Chang H.J., *Über Wittsche Lie-Ringe*, Hamb. Abh., **14** (1914), 151–184.
7. Curtis C., *Representations of Lie algebras of classical type with application to linear groups*, J. Math. and Mech., **9** (1960), 307–326.
8. Frank M.S., *A new class of simple Lie algebras*, Proc. Nat. Acad. Sci., **40** (1954), 713–719.
9. Frank M.S., *Two new classes of simple Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **112** (1964), 456–482.
10. Freudenthal H., *Oktaven, Ausnahmegruppen, Oktavengeometrie*, Utrecht, Rijks-universiteit Utrecht, 1951.

*Примечание при корректуре. Недавно М. Ю. Целоусовым был установлен изоморфизм между алгебрами из [9] и K_n (см. начало §7 гл. I). В. А. Крекнин доказал теорему из §8 гл. I в случае произвольного флага $\mathcal{F}$ (вопрос о совпадении $\mathcal{L}_0$ с $N_{\mathcal{L}}(\mathbb{C})$, однако, остается открытым). Наконец, проведенный В. А. Жеребцовым анализ доказательства результатов [22] и [23] показал, что, как и предполагалось, условия ограниченности алгебр и их представлений являются излишними. Тем самым в формулировках основных утверждений настоящей статьи (см. Введение и начало гл. III) можно опустить предположения об ограниченности L_0 и Γ .

11. Jacobson N., *Classes of restricted Lie algebras of characteristic p , II*, Duke Math. J., **10** (1943), 107–121.
12. Jacobson N., *A note on three-dimensional simple Lie algebras*, J. Math. and Mech., **7** (1958), 823–831.
13. Kobajachi Sh., Nagano T., *On filtered Lie algebras and geometric structures*, I, J. Math. and Mech., **13**, (1964), 875–908, I, J. Math. and Mech., **14** (1965), 679–706.
14. Lie S., *Gesammelte Abhandlungen*, Band VI Oslo, Leipzig (1927), 300–365.
15. Ochiai Takushiro, *Classification of the finite nonlinear primitive Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **124** 2 (1966), 313–322.
16. Ree R., *On generalized Witt algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **83** (1956), 510–546.
17. Singer I.M., Sternberg Sh., *The infinite groups of Lie and Cartan*, I, J. d'analyse Math., **15**, 1 (1965), 4–114.
18. Гийемин В., Штернберг Ш., *Алгебраическая модель транзитивной дифференциальной геометрии*, Сб. "Математика" **10:4** (1966), 3–31.
19. Джекобсон Н., *Алгебры Ли*, М., "Мир", 1964.
20. Клейн Ф., *Высшая геометрия*, М., ГОНТИ, 1939.
21. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р., *Псевдогруппы Картана и p -алгебры Ли*, Докл. АН СССР **168**, 4 (1966), 740–742.
22. Кострикин А.И., *Квадраты присоединенных эндоморфизмов в простых p -алгебрах Ли*, Изв. АН СССР, сер. матем. **31** (1967), 445–487.
23. Кострикин А.И., *Теорема о полупростых p -алгебрах Ли*, Матем. заметки, **2**, 5 (1967), 465–474.
24. Ходж В., Пидо Д., *Методы алгебраической геометрии, т. I*, М., ИЛ, 1954.
25. Шевалле К., *О некоторых простых группах*, сб. "Математика", **2**, 1 (1958), 3–53.

О ФАКТОРАХ ОДНОГО УБЫВАЮЩЕГО ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДА

МАТ. ЗАМЕТКИ, Т. 45, N 3 (1989)

Поводом для настоящей заметки послужил следующий вопрос, связанный с одним утверждением моей работы [1]. Пусть S — свободная группа с d образующими, p — произвольное простое число, $N^{(c)}$ и N_c — ее убывающий центральный и p -центральный ряд (они определяются индуктивно: $N^{(1)} = N_1 = S$; $N^{(c+1)} = (N^{(c)}, S)$, $N_{c+1} = (N_c, S)N_c^p$). Речь идет о структуре группы N_c/N_{c+1} . В [1] я утверждал, со ссылкой на [2], что эта группа изоморфна пространству всех многочленов Ли степени $\leq c$ от d переменных над простым конечным полем F_p (см. [1], с. 288). Еще в конце 50-х годов Х.Кох обратил мое внимание на то, что результаты [2] получены лишь в предположении $p \neq 2$, хотя заключение, нужное для [1], верно независимо от этого предположения. Это можно пояснить разными способами, например, так. Уплотним ряд N_c до ряда

$$\dots N_c = N_c^{(1)} \supset N_c^{(2)} \supset \dots \supset N_{c+1} \supset \dots,$$

положив $N_c^{(k)} = (N_c \cap N^{(k)})N_{c+1}$. Рассуждения, применяемые в [2], показывают, что для любого p

$$N_c^{(k)}/N_c^{(k+1)} \simeq \Lambda_k, \tag{1}$$

где Λ_k — пространство однородных многочленов Ли степени k от d переменных над полем F_p (см. лемму 1 ниже). В работе [1] можно пользоваться уплотненным центральным рядом $N_c^{(k)}$ вместо N_c и применить соотношение (1) — фактически это и делается там на с. 291. (Воспользовавшись этим случаем, отмечу, что формула $(xy)^{l^c} \equiv x^{l^c} y^{l^c} (n_{c+1})$ в конце с. 289 [1] также верна лишь при $l \neq 2$ — на это мое внимание обратил Ж.П.Серр. Она применяется, однако, лишь для доказательства того, что отображение $x \rightarrow x^{l^c}$ определяет изоморфизм $S/N^{(2)} \simeq N_c/N_c^{(2)}$, т.е. в ней надо заменить N_{c+1} на

$N_{c+1}N^{(2)}$, после чего она становится очевидной, так как речь идет об абелевых группах).

Вопрос о строении групп N_c/N_{c+1} при $p = 2$ может, однако, представлять самостоятельный интерес, и мы его здесь рассмотрим. Группы $N_c^{(k)}$ определяют фильтрацию групп N_c/N_{c+1} и

$$\dim_{F_p} N_c/N_{c+1} = \sum_{k=1}^c \dim_{F_p} N_c^{(k)}/N_c^{(k+1)}, \quad (2)$$

а так как $pN_c/N_{c+1} = 0$, то ввиду соотношения (1)

$$N_c/N_{c+1} \simeq \bigoplus_1^c \Lambda_k, \quad (3)$$

так что утверждение, приведенное в работе [1], формально говоря, верно. Однако, изоморфизм (3) не каноничен — он зависит от выбора системы образующих в S (этого, кстати, тоже вполне достаточно для целей [1], где мы имеем дело с группами с фиксированной системой образующих). Далее нас будет интересовать каноническое представление группы N_c/N_{c+1} , т.е. ее структура как модуля над группой $\text{Aut}(S)$, которая действует на N_c/N_{c+1} как $\text{GL}(d, F_p)$. При $p \neq 2$ построен канонический изоморфизм (3) (см. [2] и лемму 2 ниже).

ТЕОРЕМА. При $p = 2$ имеет место канонический изоморфизм

$$N_c/N_{c+1} \simeq S_2 \oplus (\bigoplus_{k=3}^c \Lambda_k),$$

где Λ_k — пространство над полем F_2 многочленов Ли степени k от d переменных, а S_2 — пространство симметрических матриц порядка d над тем же полем. Группа $\text{GL}(d, F_2)$ действует на Λ_k и S_2 стандартным образом (для $X \in S_2$, $X \rightarrow C^*XC$, где $C \rightarrow C^*$ — транспонирование).

Доказательство основывается на построенном Магнусом вложении $\varphi : S \subset R = \mathbb{Z} \langle t_1, \dots, t_d \rangle$, где R — целочисленное кольцо формальных степенных рядов от переменных t_i ($i = 1, \dots, d$), соответствующих образующим s_i группы S . Оно определяется условием $\varphi(s_i) = 1 + t_i$. Как показал Магнус, $x \in N^{(m)}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = 1 + f_m + f_{m+1} + \dots$, где f_k — однородные многочлены степени k от переменных t_i . При этом f_m есть многочлен Ли и для любого целочисленного многочлена Ли f_m существует $x \in S$ с таким свойством.

ЛЕММА 1. При любом p имеет место канонический изоморфизм (1).

Положим $M = (p, t_1, \dots, t_d)$. Исходя из определения групп N_c индуктивно проверяется, что $\varphi(x) \equiv 1(M^c)$ для $x \in N_c$. Пусть

$$\varphi(x) \equiv 1 + \sum p^{c-i} \psi_i(M^{c+1}), \quad (4)$$

где ψ_i — многочлены степени i . Если $x \in N^{(k)}$, то $\psi_i = 0$ при $i < k$, а если $x \in N_{c+1}$, то все $\psi_i \equiv 0(p)$, т.е. для $x \in N_c^{(k)}$, $\varphi(x) \equiv 1 + \sum_{i=k}^c p^{c-i} \psi_i(M^{c+1})$. Согласно теории Магнуса $\psi_k \in \Lambda_k$. Сопоставление $\gamma_k(x) \equiv \psi_k(\text{mod } p)$ и является гомоморфизмом (1). Его эпиморфность следует из того, что для любого $\psi_k \in \Lambda_k$ существует, согласно теории Магнуса, такое $y \in N^{(k)}$, что $\varphi(y) = 1 + \psi_k + \dots$. Тогда $y^{p^{c-k}} \in N_c^{(k)}$ и $\gamma_k(y^{p^{c-k}}) \equiv \psi_k(p)$. Проверим мономорфность γ_k . Если $\gamma_k(x) = 0$ для $x \in N_c^{(k)}$, то $\varphi(x) = 1 + p^{c-k+1} \psi_k + \dots$. Опять существует $y \in N^{(k)}$ с $\varphi(y) = 1 + \psi_k + \dots$. Тогда

$$y^{p^{c-k+1}} \in N_{c+1}, \quad z = xy^{-p^{c-k+1}} \in N^{(k+1)} \cap N_c$$

и, значит, $x \in N_c^{(k+1)}$, что доказывает лемму.

Для исследования модуля N_c/N_{c+1} заметим, что сопоставление

$$\xi(x) = (\dots \psi_i \dots),$$

где ψ_i взяты из (4), является гомоморфизмом $N_c/N_{c+1} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^c T_i$, где T_i — модуль однородных некоммутативных многочленов степени i . При этом фильтрации $N_c^{(k)}$ и $\Phi_c^{(k)} = \bigoplus_{i=k}^c T_i$ согласованы. Ввиду леммы 1 факторы этих фильтраций отображаются мономорфно, поэтому ξ — вложение. Мы исследуем его образ.

ЛЕММА 2. Гомоморфизм γ_k имеет сечение $\Lambda_k \subset \text{Im } \xi$ при $k \geq 2$, а для $p \neq 2$ — и при $k \geq 1$.

Действительно, если $\eta \in \Lambda_k$ и $\varphi(x) = 1 + l_k + \dots$, $l_k \equiv \eta(p)$, то $\varphi(x^{p^{c-k}}) \equiv 1 + p^{c-k} l_k(M^{c+1})$ при $k \geq 2$ ($k \geq 1$ при $p \neq 2$). Это проверяется индукцией по $c - k$ на основании формулы

$$(1 + u)^p \equiv 1 + pu(M^{i+2}), \quad (5)$$

если $u \in M^i$ при $i \geq 2$ ($i \geq 1$ при $p \neq 2$). Тогда $\eta \rightarrow p^{c-k} l_k$ является искомым сечением.

При $p \neq 2$ из лемм 1 и 2 следует, что

$$N_c/N_{c+1} \simeq \oplus \Lambda_k,$$

т.е. результат [2]. Пусть теперь $p = 2$. Если $x \in N^{(1)}$ $\varphi(x) \equiv 1 + \psi_1(M^2)$, ψ_1 — линейный многочлен, то $\varphi(x^{2^{c-1}}) \equiv 1 + 2^{c-1}\psi_1 + 2^{c-1}\psi_1^2(M^{c+1})$. Это доказывается индукцией по c . Ввиду (5), если $y \in N^{(2)}$, $\varphi(y) \equiv 1 + \psi_2(M^3)$, то $\varphi(y^{2^{c-2}}) \equiv 1 + 2^{c-2}\psi_2(M^{c+1})$. Поэтому в $\text{Im} \xi$ содержится подмодуль Σ , состоящий из элементов $(\psi_1, \psi_1^2 + \psi_2, 0 \dots)$. Или, иначе говоря, таких элементов $(\psi_1, \psi_2, 0 \dots)$, что $\psi_1^2 + \psi_2 \in \Lambda_2$. Отсюда следует: $\psi_2 = \sum a_{ij} t_i t_j$, $a_{ji} = a_{ij}$, и для любого ψ_2 этого вида существует такое ψ_1 , что $\psi_1^2 + \psi_2 \in \Lambda_2$. ($\sum a_{ij} t_i t_j \in \Lambda_2$ означает, что все $a_{ii} = 0$). Следовательно, $(\psi_1, \psi_2) \rightarrow \psi_2$ дает изоморфизм $\Sigma \simeq S_2$. Из того, что $\Sigma \cap (\oplus_{k=3}^c \Lambda_k) = 0$, и сравнения размерностей следует, что

$$\text{Im} \xi = \sum \oplus (\oplus_{k=3}^c \Lambda_k).$$

Вместе с леммой 2 это доказывает теорему.

Заметим, что модуль S_2 приводим (при $p = 2$) — он содержит подмодуль S'_2 симметрических матриц, представимых в виде $B + B^*$, т.е. имеющих нулевую диагональ. В нашем изоморфизме S'_2 соответствует $N_c^{(2)}/N_c^{(3)}$, а $S_2/S'_2 = H^i(\mathbf{Z}/2, M_d)$ (при любом i), где M_d — модуль квадратных матриц порядка d , и $\mathbf{Z}/2$ действует как $X \rightarrow X^*$.

Если $d > 2$, то S'_2 — единственный подмодуль в S_2 , инвариантный относительно $\text{GL}(d, \mathbf{F}_2)$, так что S_2 неразложим. Но при $d = 2$ (если $t_1 t_2 + t_2 t_1 = z$) $t_1^2 + z$ и $t_2^2 + z$ порождают инвариантный подмодуль S''_2 и $S_2 = S'_2 + S''_2$ ($S'_2 = F_2 \cdot z$). Разумеется, S''_2 уже не инвариантен относительно $\text{GL}(2, \mathbf{k})$, если $\mathbf{k}$ — любое поле характеристики 2, отличное от $\mathbf{F}_2$.

Автор выражает благодарность Ж.П.Серру, переписка с которым стимулировала постановку вопроса, обсуждаемого в заметке.

Поступило 07.09.1988

Литература

- [1] Шафаревич И.Р., *О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^a* , Изв. АН СССР, Сер. мат. **18** (1954), 261–296.
- [2] Скопин А.И., *Факторгруппы одного верхнего центрального ряда*, ДАН СССР **74** (1950), 425–428.

**ДЕФОРМАЦИИ КОММУТАТИВНЫХ
АЛГЕБР КЛАССА 2**
АЛГЕБРА И АНАЛИЗ, Т. 2, ВЫП. 6 (1990)

Рассматривается многообразие коммутативных ассоциативных алгебр класса нильпотентности 2 и размерности n . Изучаются неприводимые компоненты. Исследуется вопрос о сохранении класса нильпотентности при деформациях.

Введение

О нильпотентных (или вообще неполупростых) алгебрах известно очень мало. Основное свойство, резко отличающее их от полупростых алгебр, заключается в том, что в заданной размерности их может быть бесконечное число неизоморфных, и их структура с точностью до изоморфизма зависит от параметров. Например, алгебра N размерности 6 с базисом $e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2$ и таблицей умножения

$$e_i e_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad e_i^2 = \lambda_i f_1 + \mu_i f_2, \quad e_i f_k = f_k f_i = 0$$

коммутативна, нильпотентна и имеет класс 2 (т. е. $N^3 = 0$). Ангармоническое отношение четырех точек $(\lambda_i : \mu_i)$, $j = 1, 2, 3, 4$ на проективной прямой является, как легко видеть, инвариантом алгебры с точностью до изоморфизма.

Ввиду этого обстоятельства естественно рассматривать многообразия, образуемые этими алгебрами (вернее, коэффициентами их таблиц умножения). Эта точка зрения широко применяется. Здесь мы рассмотрим простейшую ситуацию коммутативных алгебр класса 2 (т. е. таких, что $xyz = 0$ для любых элементов x, y, z алгебры). Вопрос, который нас интересует, — насколько это свойство “устойчиво”, т. е. когда любую алгебру такого типа можно деформировать в алгебру большего класса. Точнее этот вопрос ставится так. Мы исследуем многообразие $\mathcal{A}_n$ всех коммутативных алгебр

N класса 2 размерности n . Оно содержится в многообразии C_n всех коммутативных ассоциативных алгебр той же размерности. Вообще говоря, многообразие A_n приводимо, и мы перечисляем его неприводимые компоненты, находим их размерности и особые точки (см. теорему 1). Компонента $A_{n,r}$ определяется числом $r = \dim N^2$. Здесь может представиться два случая — эта компонента является компонентой и многообразия C_n (т. е. некоторая окрестность общей алгебры этого типа состоит только из алгебр класса 2) или она является собственным подмногообразием некоторой компоненты многообразия C_n (т. е. любая алгебра этого типа может быть деформирована в алгебру, не являющуюся алгеброй класса 2). Какой случай имеет место, зависит только от чисел r и n .

Например, пусть таблица умножения алгебры N в базисе $e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_r$, ($r + d = n$) имеет вид $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $e_i^2 = \sum_{s=1}^r \lambda_i^s f_s$, $e_i f_s = f_s f_i = 0$. Тогда алгебра с таблицей умножения $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $e_i^2 = \alpha e_i + \sum_{s=1}^r \lambda_i^s f_s$, $e_i f_s = f_s f_i = 0$ ассоциативна, но в ней $e_i^3 = \alpha e_i^2 \neq 0$. Поэтому в любой окрестности алгебры N имеются алгебры класса большего, чем 2. Любая коммутативная алгебра класса 2 имеет базис с таблицей умножения, задаваемой формулами (2) ниже. При $r = 1$ мы имеем одну симметрическую матрицу (a_{ij}^1) и замена базиса $e_1, \dots, e_d$ приводит к обычному преобразованию этой матрицы. Приведя ее к диагональному виду, мы получим таблицу умножения, в которой $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$. То же верно и при $r = 2$, так как общую пару симметрических матриц можно привести к диагональному виду. Таким образом, при $r = 1$ или 2 мы имеем второй случай описанной выше дихотомии. В случае $r = 3$ и $d = 4$ (т. е. $n = 7$) в работе Ярробино и Энсалема [1] впервые было показано, что имеет место первый случай. В настоящей работе вопрос решается в более общей ситуации, хотя и не в общем случае. А именно, доказано, что первый случай имеет место при $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6} + 2$, кроме, может быть, случая $d = 5$, $r = 4$ (здесь $d = n - r = \dim N/N^2$), а второй случай — при $r \geq \frac{d^2-1}{3}$. Надо иметь в виду, что всегда $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Рассматривая асимптотику при $d \rightarrow \infty$ (т. е. обращая внимание лишь на коэффициент при d^2), мы можем сказать, что делим интервал $2 < r \leq \frac{d(d+1)}{2}$ на три равные части, причем в левом интервале имеет место первый случай, в правом — второй, а средний интервал остается неисследованным.

Технически легче исследовать не нильпотентные алгебры N , а локальные алгебры $A = K \cdot 1 + N$, получающиеся присоединением единицы. Так, A_n и $A_{n,r}$, которые мы для простоты называли мно-

гообращениями, на самом деле являются схемами, и $\mathcal{A}_{n,r}$ как подсхема в $\mathcal{C}_n$ не приведена, в то время как аналогичные схемы для локальных алгебр приведены (см. замечание 1 в конце работы). Поэтому результаты формулируются для локальных алгебр (см. теорему 2).

Основное поле K , над которым определены все рассматриваемые нами алгебры, мы будем считать алгебраически замкнутым и имеющим характеристику 0.

Когда речь будет идти об "общей точке" алгебраического многообразия X , то, в духе старых геометров, будет подразумеваться точка некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset X$, которое всегда легко уточнить из рассуждения.

§ 1. Коммутативные алгебры класса 2

Для любого целого числа $n > 0$ рассмотрим коммутативные, ассоциативные алгебры N размерности n и такие, что $N^3 = 0$, т. е. $xyz = 0$ для любых $x, y, z \in N$. Если фиксировать в такой алгебре базис $e_1, \dots, e_n$ или, что то же самое, отождествить ее пространство с некоторым стандартным n -мерным пространством E , то задание умножения сводится к заданию билинейного отображения $c: E \otimes E \rightarrow E$, удовлетворяющего соотношениям $c(x, y) = c(y, x)$ и $c(c(x, y), z) = 0$, которые определяют замкнутую подсхему $\mathcal{A}_n$ в множестве всех билинейных отображений. Если пользоваться базисом $e_1, \dots, e_n$, то умножение задается структурными константами

$c_{ij}^k: e_i e_j = \sum_1^n c_{ij}^k e_k$, а уравнения схемы $\mathcal{A}_n$ принимают вид

$$c_{ij}^k = c_{ji}^k, \quad \sum_{k,m=1}^n c_{ij}^k c_{kl}^m = 0, \quad i, j, l = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Схема $\mathcal{A}_n$ является классифицирующим пространством (или многообразием модулей) для таких объектов — алгебр указанного типа с выделенным базисом (аналогично тому, как в [2], т. II, с. 124).

Для каждой алгебры N обозначим через N^2 подалгебру, порожденную элементами xy , $x, y \in N$, а через N_0 — аннулятор алгебры N , т. е. множество тех $x \in N$, для которых $xy = 0$ для всех $y \in N$. Условие $N^3 = 0$, очевидно, эквивалентно тому, что $N^2 \subset N_0$. Обозначим через $\mathcal{A}_{n,r}$ подсхему, определенную условиями $\dim N^2 \leq r$, $\dim N_0 \geq r$. Она задается условиями $\text{rg} \{c_{ij}^k, i, j = 1, \dots, n\} \leq r$ и $\text{rg} \{x | x e_i = 0, i = 1, \dots, n\} \geq r$, т. е. обращением в 0 некоторых миноров. Поэтому $\mathcal{A}_{n,r}$ — замкнутая подсхема в $\mathcal{A}_n$. Положим $d = n - r$. В алгебре, соответствующей точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$, можно выбрать часть базиса (обозначим его $f_1, \dots, f_k$, $k = \dim N^2$),

лежащую в N^2 , и дополнить до r векторов базиса $f_1, \dots, f_r$, лежащих в N_0 . Наконец, оставшиеся векторы базиса обозначим через $e_1, \dots, e_d$. Тогда таблица умножения примет вид

$$e_i e_j = \sum_{s=1}^r a_{ij}^s f_s, \quad e_i f_k = f_k f_l = 0, \quad (2)$$

$$i, j = 1, \dots, d; \quad k, l = 1, \dots, r,$$

где $A^s = (a_{ij}^s)$ — симметрические матрицы. Наоборот, любая такая таблица умножения определяет алгебру, соответствующую точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$. Через $U_{n,r} \subset \mathcal{A}_{n,r}$ обозначим подсхему, выделенную условиями $\operatorname{rg} N^2 = r$, $\operatorname{rg} N_0 = r$. Первое условие означает, что система $\frac{d(d+1)}{2}$ векторов $\xi_{ij} = \{a_{ij}^s, s = 1, \dots, r\}$ в r -мерном пространстве имеет ранг r . Для этого необходимо, чтобы было $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Поэтому при $r > \frac{d(d+1)}{2}$ $U_{n,r}$ пусто. Если же $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$, то первое условие равносильно тому, что симметрические матрицы $A^s = (a_{ij}^s)$ линейно независимы. Второе же условие равносильно тому, что уравнения $A^s x = 0$, $s = 1, \dots, r$ не имеют ненулевого решения, т. е. ядра линейных преобразований A^s , $s = 1, \dots, r$ пересекаются только по 0.

Теорема 1. Неприводимые компоненты схемы $\mathcal{A}_n$ совпадают с $\mathcal{A}_{n,r}$ при $1 \leq r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Они приведены, и подсхемы $U_{n,r}$ в них открыты, гладки и совпадают с множеством их простых точек. Их размерность равна $\frac{d(d+3)}{2} \cdot r$.

Очевидно, что если $\xi \in \mathcal{A}_n$, то $\xi \in \mathcal{A}_{n,r}$, где $r = \dim N^2$, а N — алгебра, соответствующая ξ . В записи (2) тогда векторы $\xi_{ij} = \{a_{ij}^s, s = 1, \dots, r\}$ линейно независимы, а отсюда, как мы видели, $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Кроме того, $\mathcal{A}_{n,0}$ соответствует $a_{ij}^s = 0$ и, значит, $\mathcal{A}_{n,0} \subset \mathcal{A}_{n,r}$ при всех $r \geq 1$. Поэтому

$$\mathcal{A}_n = \bigcup_r \mathcal{A}_{n,r} \quad \text{для} \quad 1 \leq r \leq \frac{d(d+1)}{2}. \quad (3)$$

Обозначим через $S_{n,r}$ множество таблиц умножения вида (2). Тогда $\mathcal{A}_{n,r} = G \cdot S_{n,r}$, где $G = \operatorname{GL}(n)$ действует на $\mathcal{A}_n$ через действие на векторы $e_1, \dots, e_n$. Поэтому $\mathcal{A}_{n,r}$ неприводимо.

Очевидно, что при общих a_{ij}^s в формулах (2) и при $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$ система векторов $\xi_{ij} = \{a_{ij}^s, s = 1, \dots, r\}$ в r -мерном пространстве имеет ранг r , и, значит, $\operatorname{rg} N^2 = r$. Точно так же при $r \geq 1$ общая

матрица A^s невырождена и, значит, $\operatorname{rg} N_0 = r$. Таким образом, $U_{n,r}$ открыто в $\mathcal{A}_{n,r}$ при $1 \leq r \leq \frac{d(d+1)}{2}$. Но очевидно, что $U_{n,r}$ и $U_{n,r'}$ не пересекаются при $r \neq r'$, и, значит, (3) есть разложение $\mathcal{A}_n$ на неприводимые компоненты.

Из (2) видно, что $\dim S_{n,r} = \frac{d(d+1)}{2} \cdot r$. Рассматривая отображение $G \times S_{n,r} \rightarrow G \cdot S_{n,r} = \mathcal{A}_{n,r}$, $(g, \xi) \rightarrow g(\xi)$, мы получаем, что

$$\dim \mathcal{A}_{n,r} = \dim G + \dim S_{n,r} - \dim F, \quad (4)$$

где F — общий слой этого отображения.

Очевидно, что слой над точкой $\xi_0 \in S_{n,r}$ состоит из пар (g, ξ) , где $g(\xi) = \xi_0$, т. е. $g^{-1}(\xi_0) \in S_{n,r}$. Отсюда следует, что $g^{-1}(e_1), \dots, g^{-1}(e_d), g^{-1}(f_1), \dots, g^{-1}(f_r)$ имеют таблицу умножения вида (2), и, значит, если $\xi_0 \in U_{n,r}$, то $g^{-1}(f_1) \in N^2 = \{f_1, \dots, f_r\}$. Т. е. g принадлежат параболической подгруппе, состоящей из преобразований, сохраняющих подпространство $\{f_1, \dots, f_r\}$, размерность которой равна $d^2 + rd + r^2$. Подставляя в (4), получаем, ввиду $\dim G = (d+r)^2$, что

$$\dim \mathcal{A}_{n,r} = \frac{d(d+3)}{2} \cdot r.$$

Наконец, чтобы доказать приведенность схемы $\mathcal{A}_{n,r}$, нам надо вычислить размерность касательного пространства в ее общей точке $\xi \in \mathcal{A}_{n,r}$. Пусть ей соответствует алгебра N . Дифференцируя соотношения (1), мы получаем (например, аналогично [2], т. 1, с. 115), что оно изоморфно пространству билинейных форм $c(x, y)$ на пространстве алгебры N , удовлетворяющих соотношениям

$$c(x, y) = c(y, x), \quad c(x, y)z + c(xy, z) = 0, \quad x, y, z \in N. \quad (5)$$

Пространство решений уравнений (5) обозначим через $V^1(N, N)$.

Из (5) следует, что $c(N, N_0) \subset N_0$, поэтому c определяет линейное отображение $c: S^2(N/N_0) \rightarrow N/N_0$, где S^2 обозначает симметрический квадрат. Докажем, что оно дополняется до коммутативного треугольника

$$\begin{array}{ccc} S^2(N/N_0) & \xrightarrow{c} & N/N_0 \\ & \searrow m \psi_0 & \nearrow \\ & N^2 & \end{array},$$

где m обозначает умножение в N , а ψ_0 — некоторое линейное преобразование. Для этого достаточно доказать, что c обращается в 0

на ядре m , т. е. что из $\sum x_i y_i = 0$ следует, что $\sum c(x_i, y_i) \in N_0$. Это очевидно, так как

$$\left(\sum c(x_i, y_i)\right)z = -\sum c(x_i y_i, z) = -c\left(\sum x_i y_i, z\right) = 0.$$

Положим $c(x, y) - \psi(xy) = \xi(x, y)$, где ψ — подъем ψ_0 до отображения в N . Тогда $\xi(x, y) \in N_0$, а из (5) следует, что $\xi(N, N^2) = 0$.

Таким образом, все решения уравнений (5) представляются в виде $c(x, y) = \xi(x, y) + \psi(x, y)$, где $\xi \in \text{Hom}(S^2(N/N^2), N_0)$, $\psi \in \text{Hom}(N^2, N)$.

При этом пересечение пространств билинейных форм $\xi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, $\psi \in \text{Hom}(N^2, N)$ состоит из $\psi \in \text{Hom}(N^2, N_0)$. Поэтому размерность касательного пространства в точке ξ равна

$$(\dim S^2(N/N^2)) \cdot \dim N_0 + \dim N^2 \cdot \dim N - \dim N^2 \dim N_0. \quad (6)$$

Если $\dim N/N^2 = d$, $\dim N^2 = r$, $\dim N_0 = r'$, то $\dim S^2(N/N^2) = \frac{d(d+1)}{2}$, и выражение (6) приобретает вид $\frac{d(d+1)}{2}r' + nr - rr' = \left(\frac{d(d+1)}{2} - r\right)r' + nr$. Так как $r \leq r'$ и $r \leq \frac{d(d+1)}{2}$, то оно принимает максимальное значение в точности при $r' = r$, и тогда это значение равно $\frac{d(d+3)}{2} \cdot r$.

Этим доказаны все утверждения теоремы.

Замечание. Из теоремы следует, что число неприводимых компонент $\mathcal{A}_{n,r}$ многообразия $\mathcal{A}_n$ равно $[n + 3/2 - \sqrt{2n + 9/4}]$. Размерности многообразий $\mathcal{A}_{n,r}$ сначала монотонно растут с ростом r , а потом, достигнув некоторого максимума, монотонно убывают. Например, при $n = 9$ для $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ эти размерности равны 44, 70, 81, 80, 70, 54.

§ 2. Тангенциальные когомологии алгебр класса 2

Перейдем к рассмотрению произвольных коммутативных алгебр. Мы введем аналогично предыдущему классифицирующее пространство для множества алгебр с отмеченным базисом, причем рассмотрим два случая — совершенно произвольных коммутативных ассоциативных алгебр и алгебр с единицей. В первом случае мы получим для алгебр размерности n схему с уравнениями

$$c_{ij}^k = c_{ji}^k, \quad \sum_{k,m=1}^n c_{ij}^k c_{kl}^m = \sum_{k,m=1}^n c_{ik}^m c_{jl}^k; \quad i, j, l = 1, \dots, n, \quad (7)$$

которую обозначим $\mathcal{C}_n$. Во втором случае мы будем рассматривать алгебры размерности $n + 1$ с базисом $e_0 = 1, e_1, \dots, e_n$. В качестве классифицирующего пространства получим схему, определенную уравнениями (7), где теперь $i, j, k, l, m = 0, \dots, n$ и $c_{0j}^k = \delta_j^k$. Мы обозначим ее через $\tilde{\mathcal{C}}_n$.

Касательное пространство к схеме $\mathcal{C}_n$ в точке, соответствующей алгебре A , состоит из билинейных функций на A , $\varphi(x, y) \in A$, $x, y \in A$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi(y, x) = \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y)z + \varphi(xy, z) = x\varphi(y, z) + \varphi(x, yz). \quad (8)$$

В случае схемы $\tilde{\mathcal{C}}_n$ добавляются условия $\varphi(1, x) = 0$.

Напомним стандартные обозначения. Если M — модуль над алгеброй A , то билинейная функция $\varphi(x, y) \in M$, $x, y \in A$, называется коциклом, если она удовлетворяет соотношениям (8). Пространство коциклов обозначается через $Z^1(A, M)$. Если алгебра A обладает единицей, то пространство коциклов с условием $\varphi(1, x) = 0$, $x \in A$, обозначается $\tilde{Z}^1(A, M)$. Таким образом, касательное пространство к схеме $\mathcal{C}_n$ в точке, соответствующей алгебре A , совпадает с $Z^1(A, A)$, а к схеме $\tilde{\mathcal{C}}_n$ — $\tilde{Z}^1(A, A)$. Если ψ — любое линейное отображение $A \rightarrow M$, то коциклом является $\varphi(x, y) = \psi(xy) - x\psi(y) - y\psi(x)$. Пространство таких коциклов обозначается $B^1(A, M)$. В случае алгебр с единицей дополнительно налагается условие $\psi(1) = 0$. Пространство $T^1(A, M) = Z^1(A, M)/B^1(A, M)$ называется первым пространством тангенциальных когомологий (или вторым пространством когомологий Харрисона). Легко видеть, что $\tilde{Z}^1(A, M)/\tilde{B}^1(A, M) = T^1(A, M)$. Известно, что если $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ — точная последовательность A -модулей, то точна последовательность

$$0 \rightarrow \text{Der}(A, M_1) \rightarrow \text{Der}(A, M_2) \rightarrow \text{Der}(A, M_3) \rightarrow T^1(A, M_1) \rightarrow \\ \rightarrow T^1(A, M_2) \rightarrow T^1(A, M_3),$$

где $\text{Der}(A, M)$ — пространство K -дифференцирований A в M (см. [3] или [4]).

В качестве вспомогательного результата нам нужно будет вычислить пространство $T^1(N, K)$, где K — основное поле, на которое N действует нулевым образом. Пространство $T^1(N, K)$ равно, следовательно, фактор-пространству пространства билинейных форм $\lambda(x, y) \in K$, $x, y \in N$, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(y, x) = \lambda(x, y), \quad \lambda(xy, z) = \lambda(x, yz) \\ x, y, z \in N$$

по пространству форм вида $\lambda(x, y) = \mu(xy)$, где $\mu : N \rightarrow K$ — любая линейная форма.

Мы будем называть коцикл $\lambda(x, y)$ стандартным, если $\lambda(N, N^2) = 0$.

Для изучения пространства $T^1(N, K)$ полезно воспользоваться другой его интерпретацией. Обозначим через $\mathfrak{D}_d$ кольцо формальных степенных рядов от переменных $t_1, \dots, t_d$, $d = \dim N/N^2$, а через M — максимальный идеал кольца $\mathfrak{D}_d$. Представим алгебру N в виде $N = M/I$, где $I \subset M$ — идеал, причем даже $I \subset M^2$, что, очевидно, возможно. Надо только отобразить e_i в t_i при $i = 1, \dots, d$. Согласно лемме Накаямы, $e_1, \dots, e_d$ являются образующими алгебры N , и мы получим нужное представление $N = M/I$. Иначе говоря, мы имеем точную последовательность I -модулей $0 \rightarrow I \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$, из которой вытекает точность последовательности $\text{Der}_M(M, K) \xrightarrow{\alpha} \text{Der}_M(I, K) \rightarrow T^1(N, K) \rightarrow 0$, где Der_M означает M -дифференцирования, а M действует на K нулевым образом. В нашем случае, очевидно, $\text{Der}_M(I, K) \cong \text{Hom}_K(I/IM, K)$, а $\alpha(\text{Der}_M(M, K)) = 0$. Поэтому $T_M^1(N, K) \cong \text{Hom}_K(I/IM, K)$ (см., например, [4]). Это сопоставление легко явно задать. Если $\xi \in \text{Hom}_K(I/IM, K)$, а $\sigma : N \rightarrow M$ — некоторое сечение гомоморфизма $M \rightarrow N$, то $\lambda(x, y) = \xi(\sigma(x)\sigma(y) - \sigma(xy))$ определяет коцикл, лежащий в классе когомологий пространства $T^1(N, K)$, соответствующем линейной форме ξ .

Выясним, когда все циклы являются стандартными. Если $x \in N$, $y \in N^2$, то $xy = 0$ и стандартность означает, что $\xi(\sigma(x)\sigma(y)) = 0$. Если стандартны коциклы, соответствующие всем линейным формам ξ , то $\sigma(x)\sigma(y) \in IM$ для всех $x \in N$, $y \in N^2$, т. е. $\sigma(N)\sigma(N^2) \subset IM$. Обозначим через $I^{(k)}$ и $M^{(k)}$ однородные составляющие степени k идеалов I и M .

Мы можем выбрать σ так, что $\sigma(e_i) \in M^{(1)}$, $\sigma(N^2) \subset M^{(2)}$. Тогда $M^{(1)} = I^{(1)}$, $M^{(2)} = I^{(2)} + \sigma(N^2)$ и $M^{(3)} = M^{(1)}M^{(2)} = I^{(2)}M^{(1)} + \sigma(N^2)M^{(1)}$. Поэтому наше условие $\sigma(N)\sigma(N^2) \subset IM$ дает $M^{(3)} = I^{(2)}M^{(1)}$. Очевидно, и наоборот, если $M^{(3)} = I^{(2)}M^{(1)}$, то $\sigma(e_i)\sigma(N^2) \subset M^{(3)} = I^{(2)}M^{(1)}$, и тогда $\sigma(N)\sigma(N^2) \subset IM$. Пространство $I^{(2)}$ состоит из $\frac{d(d+1)}{2} - r = \rho$ квадратичных форм $F_1, \dots, F_\rho$, и мы видим, что для алгебры N все циклы являются стандартными тогда и только тогда, когда для форм $F_1, \dots, F_\rho$, порождающих пространство I^2 , формы $x_i F_j$, $i = 1, \dots, d$; $j = 1, \dots, \rho$ порождают пространство $M^{(3)}$. Тогда, конечно, формы $F_1, \dots, F_\rho$ порождают и весь идеал I . Иными словами, алгебра N является “квадратичной” — она определена квадратичными соотношениями $F_1, \dots, F_\rho$. (Напомним, что для произвольной алгебры N с $N^3 = 0$

верно лишь соотношение $I = (F_1, \dots, F_\rho, M^3)$.

Из этих соображений очевидно, что при $\rho < \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ на алгебре N обязательно существуют нестандартные коциклы. Действительно, число форм $x_i F_j$ тогда равно $d\rho < \frac{d(d+1)(d+2)}{6}$, и они не могут порождать все пространство $M^{(3)}$. Пусть в этих условиях $\lambda(x, y)$ — нестандартный коцикл. Так как $\lambda(N^2, N^2) = 0$, то он устанавливает спаривание пространств N/N^2 и N^2 со значениями в K . Так как $r = \frac{d(d+1)}{2} - \rho > \frac{d^2-1}{3}$, то $r > d$ при $d \geq 2$, и поэтому существует такое $f_0 \in N^2$, $f_0 \neq 0$, что $\lambda(N, f_0) = 0$. В этом случае мы можем включить алгебру N в неприводимое семейство алгебр, общая алгебра которого уже не удовлетворяет условию $N^3 = 0$. Достаточно ввести в алгебре N новое умножение

$$x \circ y = xy + t\lambda(x, y)f_0.$$

Тогда $(x \circ y) \circ z = xyz + t\lambda(xy, z)f_0 = t\lambda(xy, z)f_0$, и ассоциативность следует из того, что $\lambda \in T^1(N, K)$.

Таким образом, нами доказано

Предложение. Если $r > \frac{d^2-1}{3}$, то компонента $\mathcal{A}_{n,r}$ не составляет компоненты в схеме $\mathcal{C}_n$ (является собственной подсхемой некоторой компоненты).

Дальше нам понадобится обращение этого результата — утверждение, что все циклы $\lambda \in T^1(N, K)$ стандартны для алгебры, соответствующей общей точке компоненты $\mathcal{A}_{n,r}$, если $r \leq \frac{d^2-1}{3}$, т. е. $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$. Это, ввиду сказанного выше, вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. Если $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ и $F_1, \dots, F_\rho$ — общие квадратичные формы от d переменных, то формы $x_i F_j$, $i = 1, \dots, d$; $j = 1, \dots, \rho$ порождают все кубические формы.

Обозначим пространство линейных форм от d переменных через E . Тогда квадратичные формы составляют пространство $S^2 E$, а кубические — $S^3 E$. В двукратно проективном пространстве $\mathbb{P}(E^\rho) \times \mathbb{P}((S^2 E)^\rho)$ рассмотрим многообразие Γ , заданное уравнениями $l_1 F_1 + \dots + l_\rho F_\rho = 0$, где $(l_1, \dots, l_\rho) \in E^\rho$, $(F_1, \dots, F_\rho) \in (S^2(E))^\rho$. Множество тех точек из Γ , для которых ранг системы форм $l_1, \dots, l_\rho$ равен p , обозначим через Γ_p . Тогда $\Gamma = \bigcup \bar{\Gamma}_p$, где $p = 1, \dots, d$, а $\bar{\Gamma}_p$ обозначает замыкание Γ_p . Вычислим $\dim \bar{\Gamma}_p$. При проекции $p_1 : \Gamma_p \rightarrow \mathbb{P}(E^\rho)$ слой $p_1^{-1}(L)$, $L = (l_1, \dots, l_\rho) \in E^\rho$ состоит из тех $F_1, \dots, F_\rho$, для которых $l_1 F_1 + \dots + l_\rho F_\rho = 0$. Пусть сначала $\rho = p$,

т. е. $l_1, \dots, l_p$ линейно независимы. Тогда мы можем считать их независимыми переменными $x_1, \dots, x_p$. Комплекс Кошуля (см. [5], гл. VIII, § 4) даст точную последовательность

$$0 \leftarrow \Phi \xleftarrow{\alpha} E^{\frac{p(p-1)}{2}} \xleftarrow{\beta} K^{\frac{p(p-1)(p-2)}{6}} \leftarrow 0, \quad (9)$$

где Φ состоит из $(F_1, \dots, F_p)$, для которых $\sum_1^p x_i F_i = 0$, $E^{\frac{p(p-1)}{2}}$ состоит из $\{l_{ij}\}$, $-l_{ji} = l_{ij}$, $i, j = 1, \dots, p$, $l_{ij} \in E$ и $\alpha(\{l_{ij}\}) = (F_1, \dots, F_p)$, $F_i = \sum_{j=1}^p l_{ij} x_j$. Наконец, $K^{\frac{p(p-1)(p-2)}{6}} = \{c_{ijk} | c_{ijk} \in K \text{ и кососимметричны}\}$, а $\beta(\{c_{ijk}\}) = \{l_{ij}\}$, $l_{ij} = \sum_{k=1}^p c_{ijk} x_k$. Из точной последовательности (9) следует, что

$$\dim \Phi = \frac{p(p-1)}{2} d - \frac{p(p-1)(p-2)}{6} = \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6}. \quad (10)$$

Пусть теперь $p \leq \rho$ любое и $l_1, \dots, l_p$ линейно независимы, а $l_{p+j} = \sum_{i=1}^p \gamma_{ij} l_i$, $j = 1, \dots, \rho - p$. Соотношение $\sum_1^p l_i F_i = 0$ переписывается как $\sum_{i=1}^p l_i (F_i + \sum_j \gamma_{ij} F_{p+j}) = 0$. Если $F_i + \sum_{j=1}^{\rho-p} \gamma_{ij} F_{p+j} = G_i$, $i = 1, \dots, p$, то $\sum_{i=1}^p l_i G_i = 0$, так что размерность пространства таких наборов $(G_1, \dots, G_p)$ задается формулой (10), а $F_i = G_i - \sum_{j=1}^{\rho-p} \gamma_{ij} F_{p+j}$, где F_{p+j} , $j = 1, \dots, \rho - p$ произвольные. Поэтому размерность пространства решений уравнений $\sum_1^p l_i F_i = 0$ равна $\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho - p) \frac{d(d+1)}{2}$, и, значит,

$$\dim p_1^{-1}(\xi) = \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho - p) \frac{d(d+1)}{2} - 1.$$

Так как множество систем $\xi = (l_1, \dots, l_\rho)$, $\xi \in p_1(\Gamma_p)$ имеет размерность $p(d + \rho - p) - 1$, то

$$\dim \Gamma_p = \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho - p) \frac{d(d+1)}{2} + p(d + \rho - p) - 2. \quad (11)$$

Из неприводимости $p_1(\Gamma_p)$ следует, что и Γ_p неприводимо.

Рассмотрим теперь отображение $(l_1, \dots, l_p) \rightarrow \sum_1^p l_i F_i$ для некоторых общих форм $(F_1, \dots, F_p) = F$. Оно определяет морфизм

$$\varphi_F : \mathbb{P}(E^\rho) \setminus p_1 p_2^{-1}(F) \rightarrow \mathbb{P}(S^3(E)).$$

Нам надо доказать, что при общих F_i и при $p \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$ этот морфизм эпиморфен. Если это не так, то для точки $\eta \in \mathbb{P}(S^3(E))$, принадлежащей образу φ_F ,

$$\dim \varphi_F^{-1}(\eta) > \dim \mathbb{P}(E^\rho) - \dim \mathbb{P}(S^3(E)) = d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6}. \quad (12)$$

Но для всех точек образа морфизма φ_F размерность $\varphi_F^{-1}(\eta)$ одна и та же и равна $\dim p_2^{-1}(F) + 1$ при проекции $p_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}((S^2(E))^\rho)$. Поэтому (12) равносильно тому, что

$$\dim p_2^{-1}(F) > d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} - 1$$

для общего F . Но тогда

$$\dim \Gamma > d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2}\rho - 2.$$

Нам надо доказать, следовательно, что

$$\dim \Gamma \leq d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2}\rho - 2.$$

Т. е. ввиду (11) (и так как $\Gamma = \bigcup \bar{\Gamma}_p$), то

$$\begin{aligned} \frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (p-p)\frac{d(d+1)}{2} + p(d+p-p) &\leq \\ &\leq d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2}\rho \end{aligned}$$

для всех $p \leq d$ при $\rho \geq \frac{(d+1)(d+2)}{6}$.

Сокращая в обеих частях член $\rho \frac{d(d+1)}{2}$, мы получаем неравенство

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} - p\frac{d(d+1)}{2} + p(d-p) + (p-d)\rho + \frac{d(d+1)(d+2)}{6} \leq 0.$$

Так как $p \leq d$, то мы можем заменить ρ на $\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ и, значит, нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} - p\frac{d(d+1)}{2} + p(d-p) + p\frac{(d+1)(d+2)}{6} \leq 0.$$

Левая часть его равна, как легко видеть, $\frac{1}{6}p(d-p)(p-2d+3)$ и поэтому неположительна.

Дальше нам понадобится утверждение, аналогичное лемме 1, также и для кососимметрических форм.

Лемма 2. Пусть $\alpha_i \in \Lambda^2 E$, $i = 1, \dots, \rho$ — общие бивекторы в d -мерном пространстве E . Соотношение $\alpha_1 \wedge l_1 + \dots + \alpha_\rho \wedge l_\rho = 0$, где $l_i \in E$, тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда $\rho > \frac{(d-1)(d-2)}{6}$ или $d = 5$, $\rho > 1$.

Одна часть утверждения очевидна: если $\rho > \frac{(d-1)(d-2)}{6}$, то уравнение $\sum \alpha_i \wedge l_i = 0$ равносильно $\frac{d(d-1)(d-2)}{6}$ линейным уравнениям (приравнивание нулю координат тривектора), а число неизвестных равно $d\rho$ и в нашем случае больше числа уравнений.

Пусть $\rho \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6}$. В пространстве $\mathbb{P}(E^\rho) \times \mathbb{P}((\Lambda^2 E)^\rho)$ рассмотрим многообразие Γ , состоящее из таких $(l_1, \dots, l_\rho; \alpha_1, \dots, \alpha_\rho)$, что $\sum \alpha_i \wedge l_i = 0$, и многообразия Γ_p , для которых $\text{rg}(l_1, \dots, l_\rho) = p$, $p \leq \rho$. Пусть $p = \rho$ и $l_1, \dots, l_\rho$ фиксированы и линейно независимы. Рассмотрим комплекс Кошуля (см. [6], с. 133)

$$0 \leftarrow \Phi \xleftarrow{\alpha} E^{\frac{p(p+1)}{2}} \xleftarrow{\beta} K^{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}} \leftarrow 0, \quad (13)$$

где Φ состоит из $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, для которых $\sum \alpha_i \wedge l_i = 0$, $E^{\frac{p(p+1)}{2}}$ состоит из векторов $\varphi_{ij} \in E$, $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}$ и $\alpha(\{\varphi_{ij}\}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\alpha_i = \sum \varphi_{ij} \wedge l_j$, а $K^{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}}$ — из констант $c_{ijk} \in K$, c_{ijk} симметричны по i, j, k и $\beta(\{c_{ijk}\}) = \{\varphi_{ij}\}$, $\varphi_{ij} = \sum c_{ijk} l_k$.

Из точности последовательности (13) следует, что

$$\dim \Phi = \frac{p(p+1)}{2} d - \frac{p(p+1)(p+2)}{6} = \frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6}.$$

Пусть $p \leq \rho$ любое и $l_1, \dots, l_p$ независимы.

Рассуждая как и в лемме 1, получим, что множество $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$ решений уравнения $\sum \alpha_i \wedge l_i = 0$ имеет размерность

$$\frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d-1)}{2}.$$

Рассмотрим проекцию $p_1 : \Gamma_p \rightarrow \mathbb{P}(E^\rho)$. Так как $p_1(\Gamma_p)$ неприводимо и имеет размерность $p(d+\rho-p)-1$, то Γ_p неприводимо и

$$\dim \Gamma_p = \frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p) \frac{d(d-1)}{2} + p(d+\rho-p) - 2. \quad (14)$$

Докажем, что $\dim \Gamma < \dim \mathbb{P}((\Lambda^2 E)^\rho)$ — это и даст утверждение леммы 2. Ввиду (14) наше неравенство равносильно тому, что для всех $p \leq d$

$$\frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p)\frac{d(d-1)}{2} + p(d+\rho-p) \leq \rho\frac{d(d-1)}{2}.$$

Сокращая обе части на $\rho\frac{d(d-1)}{2}$ и деля на p , получим неравенство

$$\frac{(p+1)(3d-p-2)}{6} - \frac{d(d-1)}{2} + \rho + d - p \leq 0.$$

Так как $\rho \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6}$, то достаточно доказать неравенство

$$\frac{(p+1)(3d-p-2)}{6} - \frac{d(d-1)}{2} + \frac{(d-1)(d-2)}{6} + d - p \leq 0.$$

Левая часть его равна, как легко проверить,

$$\frac{1}{6}(d-p)(p-2d+9). \quad (15)$$

Так как $p \leq d$, то выражение (15) может быть положительным лишь при $d \leq 8$ и $p < d$. Но условие $p \leq \rho \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6}$ показывает, что оно неположительно во всех оставшихся случаях $d = 8, 7, \dots, 3$, кроме $d = 5$ (относительно случая $\rho = p = 1$ при $d = 4$ см. замечание 3 в конце работы).

Проверим, что в случае $d = 5$ мы действительно имеем исключение, т. е. уравнение $\alpha \wedge x + \beta \wedge y = 0$, где $\alpha, \beta \in \Lambda^2 E$, $x, y \in E$, $\dim E = 5$, всегда имеет ненулевое решение для общих α и β . Ввиду того, что 5 — нечетное число, бивектор β вырожден, т. е. его можно записать в некотором базисе $e_1, \dots, e_5$ в виде $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Положим $\alpha = \alpha_0 + u \wedge e_5$, где $u \in E_0 = Ke_1 + \dots + Ke_4$, $\alpha_0 \in \Lambda^2 E_0$. Положив $x = u$, мы получим, что $\alpha_0 \wedge u + \beta \wedge y = 0$. Будем искать y как вектор из E_0 . Отображение $\varphi_\beta : E_0 \rightarrow \Lambda^3 E_0$, $z \rightarrow z \wedge \beta$ невырождено и поэтому мы можем положить $y = -\varphi_\beta^{-1} \varphi_\alpha(u)$.

§ 3. Деформации алгебр класса 2

Для любой нильпотентной алгебры N алгебра $A = K \cdot 1 + N$ является локальной, а для любой локальной конечномерной алгебры A ее радикал N нильпотентен и $A = K \cdot 1 + N$. Таким образом,

существует взаимно-однозначное соответствие между нильпотентными алгебрами размерности n и локальными алгебрами размерности $n + 1$, рассматриваемыми с точностью до изоморфизма. Однако нас будут интересовать алгебры с фиксированным базисом, и здесь ситуация требует отдельного рассмотрения.

Пусть A — локальная конечномерная алгебра и N — ее радикал. Из точной последовательности A -модулей $0 \rightarrow N \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} K \rightarrow 0$ вытекает точная последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \operatorname{Der}(A, N) \rightarrow \operatorname{Der}(A, A) \rightarrow \operatorname{Der}(A, K) \xrightarrow{\delta_1} \\ \xrightarrow{\delta_1} T^1(A, N) \xrightarrow{T^1(\alpha)} T^1(A, A) \xrightarrow{T^1(\beta)} T^1(A, K). \end{aligned} \quad (16)$$

Лемма 3. Если $N^3 = 0$, $r = \dim N^2 > 2$, то для общей алгебры $A = K \cdot 1 + N$ гомоморфизм $T^1(\beta)$ нулевой.

Ввиду изоморфизмов $T^1(A, M) \simeq \tilde{T}^1(A, M) = T^1(N, M)$ мы можем заменить $T^1(A, M)$ на $T^1(N, M)$.

Запишем коцикл Φ из $T^1(N, A)$ в виде $\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + \lambda(x, y)$, где $\lambda(x, y) \in T^1(N, K)$, $\varphi \in N$. Условие коцикла имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda(x, y)z + \varphi(x, y)z + \lambda(xy, z) + \varphi(xy, z) = \\ = x\lambda(y, z) + x\varphi(y, z) + \lambda(xy, z) + \varphi(x, yz). \end{aligned} \quad (17)$$

Если $y \in N^2$, то отсюда $\lambda(x, y)z \equiv x\lambda(y, z) \pmod{N^2}$, и выбирая z непропорциональным x , получаем $\lambda(N, N^2) = 0$. Теперь соотношение (17) дает $\varphi(x, y)z = x\varphi(y, z)$ при $y \in N^2$. Фиксируем y и положим $\varphi(x, y) = \psi(x)$. Докажем, что при сделанных об алгебре N предположениях отображение $\psi \in \operatorname{End}(N/N^2)$, обладающее свойством $\psi(x)z = x\psi(z)$, имеет вид $\psi(x) \equiv \alpha x \pmod{N^2}$.

Введем в алгебре N базис с таблицей умножения (2) и предположим, что матрицы A^1 и A^2 имеют простой спектр, т. е. форма $\det(t_1 A^1 + t_2 A^2)$ не имеет кратных множителей. Тогда заменой базиса $e_1, \dots, e_d$ мы можем сделать матрицы A^1 и A^2 диагональными, а A^1 — единичной. Положим $\psi(e_i) \equiv \sum \xi_i^k e_k \pmod{N^2}$. Соотношение $\psi(e_i)e_j = e_i\psi(e_j)$ даст, если мы приравняем коэффициенты при f_1 , что $\xi_i^j = \xi_j^i$. Пусть на диагонали матрицы A^2 стоят $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Приравнивая коэффициенты при f_2 , получаем $\lambda_i \xi_i^j = \lambda_j \xi_j^i$, а ввиду того, что $\xi_j^j = \xi_i^j$, $(\lambda_i - \lambda_j)\xi_i^j = 0$. Поэтому $\xi_i^j = 0$ при $i \neq j$, и мы можем записать ψ в виде $\psi(e_i) \equiv \xi_i e_i \pmod{N^2}$. Наше соотношение $\psi(e_i)e_j = e_i\psi(e_j)$ даст теперь $\xi_i e_i e_j = \xi_j e_i e_j$.

Так как алгебра N — общая для $r \geq 3$, то мы можем предполагать, что $e_i e_j \neq 0$ при всех i, j . Отсюда $\xi_i = \xi_j$.

Возвращаясь к $\varphi(x, y)$, мы можем теперь положить $\varphi(x, y) \equiv \xi(y)x \pmod{N^2}$ при $y \in N^2$. Тогда соотношение (17) дает (ввиду $\lambda(n, N^2) = 0$) $(\lambda(x, y) + \xi(xy))z = x(\lambda(y, z) + \xi(yz))$. Выбирая z непропорциональным x , получаем, что $\lambda(x, y) = -\xi(x, y)$, т. е. λ — нулевой класс в $T^1(N, K)$.

Заметим, что в последовательности (16)

$$\text{Der}(A, K) = \text{Der}(N, K) = \text{Hom}(N/N^2, K) = (N/N^2)^*,$$

так как N действует на K нулевым образом. Если $l \in (N/N^2)^*$, то $-(\delta_1 l)(x, y) = l(x)y + l(y)x$. Из леммы 3 мы получаем

$$T^1(A, A) \simeq T^1(N, N)/\delta_1(N/N^2)^* \quad (18)$$

(при условиях, наложенных на N в лемме 3).

Лемма 4. Пусть N — алгебра, соответствующая общей точке многообразия $\mathcal{A}_{n,r}$, причем $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6} + 2$ и $d \neq 5$. Тогда отображение $V^1(N, N) \rightarrow T^1(A, A)$ имеет своим образом все пространство $T^1(A, A)$.

Доказательство. Как мы видели, $T^1(A, A) \cong T^1(N, A)$, и ввиду (18) нам достаточно доказать, что образ отображения $V^1(N, N) \rightarrow T^1(N, N)$ порождает все пространство $T^1(N, N)$.

Пусть $\varphi \in Z^1(N, N)$. Рассматривая его образ $\tilde{\varphi}$ в $N/N^2 \cong K^r$, мы получаем, что $\tilde{\varphi} \in Z^1(N, K^r)$, где $N \cdot K = 0$, и из леммы 1 получаем, что $\tilde{\varphi}(N, N^2) = 0$, т. е. $\varphi(N, N^2) \subset N^2$.

Воспользовавшись тем, что алгебра N — общая, мы предположим, что в связке матриц $\alpha_1 A^1 + \dots + \alpha_r A^r$ имеются две линейно-независимые матрицы с простым спектром. Тогда мы можем взять их за A^1 и A^2 и при помощи линейного преобразования в пространстве N/N^2 привести к виду $A^1 = E$, A^2 — диагональная матрица с элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ на диагонали.

Запишем теперь φ в явном виде

$$\begin{aligned} \varphi(e_i, e_j) &\equiv \sum_{m=1}^d \alpha_{ijm} e_m \pmod{N^2}, & i, j = 1, \dots, d, \\ \varphi(e_i, f_s) &= \sum_{t=1}^r \beta_{is}^t f_t, & i = 1, \dots, d; \quad s = 1, \dots, r. \end{aligned} \quad (19)$$

Если $\varphi \in B^1(N, N)$, то $\varphi(e, f) = -e\psi(f)$ для $e \in N$, $f \in N^2$, $\psi \in \text{End } N$.

Обозначим через $C_i(f)$ коэффициент при f_i в разложении элемента $f \in N^2$ по базису $f_1, \dots, f_r$. Ввиду сделанного выбора мы имеем $C_1(e_i e_j) = \delta_{ij}$, $C_2(e_i e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$.

В частности, линейные формы $\xi_i(x) = C_1(e_i x)$ образуют взаимный базис к базису $e_1, \dots, e_d$. Поэтому в виде $C_1(e_i \psi(f))$ можно получить любые d линейных форм на пространстве N^2 , подбирая соответствующее отображение $\psi \in \text{Hom}(N^2, N/N^2)$.

В частности, за счет выбора ψ мы можем добиться того, что $C_1(\varphi(e_i, f)) = 0$, т. е. $\beta_{is}^1 = 0$, $i = 1, \dots, d$; $s = 1, \dots, r$.

Кроме того, воспользуемся существованием коциклов

$$\varphi \in \delta_1((N/N^2)^*).$$

Если $l \in (N/N^2)^*$, то $(\delta l)(e, f) = -l(e)f$. Из точности последовательности (16) следует, что эти коциклы являются кограницами в $T^1(N, A)$ (хотя и не в $T^1(N, N)$). Поэтому можно изменить φ на такой коцикл, не меняя его образа в $T^1(N, A)$. В частности, положим $\psi(f_s) = 0$ при $s > 1$, $\psi(f_1) \equiv \sum \alpha_i e_i \pmod{N^2}$, $l(e_i) = \alpha_i$. Тогда $C_1(l(e_i)f_s - e_i\psi(f_s)) = 0$, а $C_2(l(e_i)f_2 - e_i\psi(f_2)) = \alpha_i$. В результате мы можем добиться того, что $\beta_{is}^1 = 0$, $\beta_{i2}^2 = 0$.

Рассмотрим теперь соотношение (17) для $x = e_i$, $y = e_j$, $z = e_k$. Пусть сначала $i \neq j \neq k \neq i$.

Приравнивая коэффициенты при f_1 , мы получаем $\alpha_{ijk} = \alpha_{ikj}$, т. е. (ввиду $\alpha_{ijl} = \alpha_{jil}$) симметричность α_{ijk} , при $i \neq j \neq k \neq i$. Приравнивая коэффициенты при f_2 , получим

$$\alpha_{ijk}\lambda_k + \sum_{s \geq 3} a_{ij}^s \beta_{ks}^2 = \alpha_{jki}\lambda_i + \sum_{s \geq 3} a_{jk}^s \beta_{is}^2$$

(суммирование по $s \geq 3$ ввиду условия $\beta_{k2}^2 = 0$). Отсюда ввиду симметрии α_{ijk} имеем

$$\alpha_{ijk} = \frac{\sum_{s \geq 3} (a_{ij}^s \beta_{ks}^2 - a_{jk}^s \beta_{is}^2)}{\lambda_k - \lambda_i} \quad (20)$$

при $i \neq j \neq k \neq i$. Симметрия α_{ijk} по i и j дает

$$\sum_{s \geq 3} (a_{ij}^s (\lambda_i - \lambda_j) \beta_{ks}^2 + a_{jk}^s (\lambda_j - \lambda_k) \beta_{is}^2 + a_{ki}^s (\lambda_k - \lambda_i) \beta_{js}^2) = 0. \quad (21)$$

Матрицы $\Gamma^s = (a_{ij}^s(\lambda_i - \lambda_j))$ при $s \geq 3$ кососимметричны. Это коммутаторы $[A^s, A^2]$, где A^2 — диагональная матрица, имеющая $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ по диагонали. Более того, при надлежащем выборе матриц A^s , $s = 3, \dots, r$, мы получим так любые $r-2$ кососимметрические матрицы — уравнения $a_{ij}(\lambda_i - \lambda_j) = b_{ij}$ разрешимы для любых b_{ij} , $b_{ji} = -b_{ij}$ в виде $a_{ij} = \frac{b_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}$.

Введем бивекторы ω^s с матрицами Γ^s и векторы x_s с координатами β_{ks}^2 . Тогда равенство (21) переписывается в виде $\sum_{s \geq 3} \omega^s \wedge x_s = 0$.

Так как бивекторы ω_s мы можем считать общими, то, согласно лемме 2, отсюда следует, что $x_s = 0$, т. е. $\beta_{ks}^2 = 0$ при $s \geq 3$. Так как по условию также и $\beta_{k2}^2 = 0$, то среди чисел β_{ks}^2 остаются еще не определенными только β_{k1}^2 . Мы положим $\beta_{k1}^2 = \beta_k$. Из того, что $\beta_{ks}^2 = 0$ при $s \geq 3$, и из (20) следует, что $\alpha_{ijk} = 0$ при $i \neq j \neq k \neq i$.

Положим теперь в соотношении (17) $x = y = e_i$, $z = e_j$, $i \neq j$. Приравнявая коэффициенты при f_1 в обеих частях равенства, получаем, что $\alpha_{ij} = \alpha_{iji}$.

Из рассмотрения коэффициентов при f_2 имеем $\alpha_{ij}\lambda_j + \beta_j = \alpha_{iji}\lambda_i$, откуда ввиду найденной симметрии $\alpha_{ij} = \frac{\beta_j}{\lambda_i - \lambda_j}$, т. е.

$$\varphi(e_i, e_j) \equiv \frac{\beta_j e_i - \beta_i e_j}{\lambda_i - \lambda_j} \pmod{N^2} \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Рассмотрим теперь аналогично коэффициент при f_s , $s > 2$. Полагая $i \neq j \neq k \neq i$, получаем

$$\frac{\beta_j a_{ik}^s - \beta_i a_{jk}^s}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{t \geq 3} a_{ij}^t \beta_{kt}^s = \frac{\beta_k a_{ji}^s - \beta_j a_{ki}^s}{\lambda_j - \lambda_k} + \sum_{t \geq 3} a_{jk}^t \beta_{it}^s.$$

Это соотношение переписывается в виде

$$\begin{aligned} a_{ik}^s(\lambda_i - \lambda_k)\beta_j + a_{kj}^s(\lambda_k - \lambda_j)\beta_i + a_{ji}^s(\lambda_j - \lambda_i)\beta_k = \\ = (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_j) \sum_{t \geq 3} (a_{ij}^t \beta_{kt}^s - a_{jk}^t \beta_{it}^s). \end{aligned}$$

Слева стоит компонента с индексами i, j, k тривектора $\omega^s \wedge \beta$, где β — вектор с координатами β_k . Она кососимметрична по i, j и k . Кососимметричность правой части по i и j дает соотношение, которое можно записать в виде

$$\sum_{t \geq 3} \omega^t \wedge b_t^s = 0,$$

где b_t^s — вектор с координатами β_{kt}^s . Из леммы 2 мы получаем, что $\beta_t^s = 0$, т. е. $\beta_{kt}^s = 0$ при $t \geq 3$. Отсюда следует, что $\omega^s \wedge \beta = 0$ и, значит, $\beta = 0$, т. е. $\beta_{k1}^2 = 0$, а значит, $\alpha_{iij} = 0$ при $i \neq j$.

Теперь остаются еще не найденными только $\alpha_{iii} = \xi_i$, $\beta_{k1}^s = \xi_k^s$ при $s \geq 3$ и $\beta_{k2}^s = \eta_k^s$ при $s \geq 3$. Мы имеем

$$\begin{aligned}\varphi(e_i, e_i) &\equiv \xi_i e_i \pmod{N^2}, & \varphi(x, f_s) &= 0 \quad \text{при } s \geq 3, \\ \varphi(e_i, f_i) &= \sum_{s \geq 3} \xi_i^s f_s, & \varphi(e_i, f_2) &= \sum_{s \geq 3} \eta_i^s f_s, \\ \varphi(e_i, e_j) &\in N^2 \quad \text{при } i \neq j.\end{aligned}$$

В соотношении (17) при $x = y = e_i$, $z = e_j$ рассмотрение коэффициента при f_s дает

$$\xi_i a_{ij}^s + \xi_j^s + \lambda_i \eta_j^s = 0. \quad (22)$$

Вычитая два уравнения этого типа (с одним и тем же s), мы получим, что $\eta_j^s = \frac{\xi_k a_{ij}^s - \xi_i a_{kj}^s}{\lambda_i - \lambda_k}$. Эта формула должна быть верна при всех k . Заменяя k на l и приравнивая результаты, получим уравнение

$$\xi_k a_{kj}(\lambda_i - \lambda_l) + \xi_i a_{ij}(\lambda_l - \lambda_k) + \xi_l a_{lj}(\lambda_k - \lambda_i) = 0. \quad (23)$$

Для четверки (i, j, k, l) мы получим четыре таких уравнения. Определитель полученной системы, как легко проверить, равен пфаффиану матрицы $(a_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta))$, $\alpha, \beta = i, j, k, l$. Если не все $\xi_\alpha = 0$, $\alpha = 1, \dots, d$, то среди ξ_α , $\alpha = i, j, k, l$, тоже есть отличное от 0 — если хотя бы два $\xi_\alpha = \xi_\beta = 0$, то из (23) следует, что $\xi_j^s = \eta_j^s = \xi_i = 0$. Поэтому в кососимметрической матрице $(a_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha - \lambda_\beta))$ все диагональные миноры порядка 4 равны 0, а это противоречит тому, что матрицы A^s общие и $d \geq 4$.

Каждой алгебре N с $N^3 = 0$ размерности n сопоставим алгебру A размерности $n+1$, получающуюся из нее присоединением единицы — $A = K \cdot 1 + N$.

В схеме $\tilde{\mathcal{C}}_n$ точки, соответствующие таким алгебрам, образуют подсхему $\tilde{\mathcal{A}}_n$.

Ее можно задать уравнениями $(x - \frac{1}{n+1} \text{Sp}(x))^3 = 0$ для всех $x \in A$, где $\text{Sp}(x)$ — след матрицы, соответствующей элементу x в регулярном представлении.

В схеме $\tilde{\mathcal{A}}_n$ содержатся замкнутые подсхемы $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$, соответствующие схемам $\mathcal{A}_{n,r}$, введенным в начале работы.

Теорема 2. При $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{6} + 2$ схема $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ является неприводимой компонентой схемы $\tilde{\mathcal{C}}_n$. Она приведена и имеет размерность $\frac{d(d+3)}{2}r + n$. При $r > \frac{d^2-1}{3}$ эта схема является собственной подсхемой некоторой неприводимой компоненты.

Последнее утверждение доказано в предложении. Рассмотрим теперь случай $2 < r \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 2$. Найдем сначала размерность схемы $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$. В базисе $e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_r$ алгебра N имеет таблицу умножения (2) и множество $\tilde{S} \subset \tilde{\mathcal{C}}_n$ точек, соответствующих таким алгебрам, имеет размерность $\frac{d(d+1)}{2}r$.

Вся редуцированная подсхема схемы $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ имеет вид $G\tilde{S}$, где $G \subset \text{GL}(n+1)$ состоит из преобразований g с $g(1) = 1$. Как и в доказательстве теоремы 1,

$$\dim G\tilde{S} = \dim \tilde{S} + \dim G - \dim F_{s_0},$$

где F_{s_0} состоит из тех $g \in G$, для которых $g(s_0) \in \tilde{S}$. Это значит, что $1, g(e_1), \dots, g(e_d), g(f_1), \dots, g(f_r)$ имеет таблицу умножения такого же вида, как и базис $1, e_1, \dots, e_d, f_1, \dots, f_r$ алгебры A , соответствующей точке s_0 .

Иными словами, $g(e_1), \dots, g(e_d), g(f_1), \dots, g(f_r)$ порождают подалгебру коразмерности 1, не содержащую 1. Отсюда следует, что они образуют базис в N . Кроме того,

$$g(e_i)g(e_j) \in \{g(f_1), \dots, g(f_r)\}, \quad g(e_i)g(f_s) = g(f_s)g(f_t) = 0,$$

откуда $g(f_i) \in N^2$, т. е. $g(N) = N$, $g(N^2) = N^2$ и g имеет матрицу вида

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} d \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} r$$

Мы получаем, что $\dim G = n(n+1)$, $\dim F_s = d^2 + dr + r^2$ и $\dim G\tilde{S} = \frac{d(d+1)}{2}r + n^2 + n - d^2 - dr - r^2 = \frac{d(d+3)}{2} \cdot r + n$, так как $n = d + r$.

Найдем теперь касательное пространство в некоторой общей точке многообразия $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ к схеме $\tilde{\mathcal{C}}_n$. Оно изоморфно $\tilde{Z}^1(A, A)$, если A

— алгебра, соответствующая этой точке. Ввиду леммы 4 пространство $\tilde{T}^1(A, A)$ порождается коциклами из пространства $V^1(N, N)$. Для них $\varphi(N, N) \subset N^2$ и $\varphi(N, N^2) = 0$, так что такой коцикл имеет вид (19) с $\alpha_{ijk} = \beta_{ij}^i = 0$, откуда $\dim V^1(N, N) = \frac{d(d+1)}{2}r$. Согласно лемме 4, $\tilde{Z}^1(A, A) = V^1(N, N) + \tilde{B}^1(A, A)$. Коцикл из $\tilde{B}^1(A, A)$ определяется отображением $\psi : A \rightarrow A$, для которого $\psi(1) = 0$. Пространство таких отображений обозначим через $\mathcal{L}$, а пространство тех из них, для которых соответствующий коцикл $\varphi(x, y) = \psi(xy) - x\psi(y) - y\psi(x)$, $\varphi \in V^1(N, N)$, обозначим $\mathcal{L}_0$. Очевидно,

$$\dim \tilde{Z}^1(A, A) = \dim V^1(N, N) + \dim \mathcal{L} - \dim \mathcal{L}_0. \quad (24)$$

Если $\psi \in \mathcal{L}_0$, то $\psi(xy) - x\psi(y) - y\psi(x) \in N^2$ при $x, y \in N$. Отсюда $\psi(N^2) \subset N^2$. Положим $\psi(x) = l(x) \cdot 1 + \psi_0(x)$, где $l(x) \in K$, $\psi_0(x) \in N$. Тогда $l(N^2) = 0$, $l(x)y + l(y)x \in N^2$. Беря $y \notin Kx + N^2$, получаем $l = 0$. Мы видим, что $\psi(N) \subset N$, $\psi(N^2) \subset N^2$, $\psi(1) = 0$, откуда, как и в первой части рассуждения, получаем, что $\dim \mathcal{L}_0 = d^2 + dr + r^2$. Очевидно, что $\dim \mathcal{L} = n(n+1)$, и так как $\dim V^1(N, N) = \frac{d(d+1)}{2}r$, то формула (24) показывает, что $\dim \tilde{Z}^1(A, A) = \frac{d(d+3)}{2}r + n$.

Мы видим, что касательное пространство к схеме $\tilde{\mathcal{C}}_n$ в общей точке схемы $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ совпадает с размерностью схемы $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$. Отсюда следует, что в окрестности этой точки схемы $\tilde{\mathcal{C}}_n$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ совпадают, приведены и гладки. Это и утверждалось теоремой.

Замечания. 1. Рассмотренный случай показывает, что изучение локальных колец $A = K \cdot 1 + N$ естественнее, чем соответствующих нильпотентных алгебр. Действительно, те же рассуждения показывают, что в условиях теоремы 2 схема $\mathcal{A}_{n,r}$, соответствующая нильпотентным алгебрам, совпадает с максимальной приведенной компонентой схемы $\mathcal{C}_n$, но компонента эта не приведена. Это связано с наличием коциклов $\delta_1((N/N^2)^*)$ в (18). Легко видеть, что гомоморфизм δ_1 является вложением — это следует из того, что в характеристике 0 $\text{Der}(A, A) = \text{Lie Aut}(A)$, $\text{Der}(N, N) = \text{Lie Aut}(N)$, где Lie обозначает алгебру Ли соответствующей группы. Но $\text{Aut}(A) = \text{Aut}(N)$, так как автоморфизм сохраняет радикал, откуда и следует наше утверждение. Соответствующие коциклы $\varphi(x, y) = l(x) + yl(x)$, $l \in (N/N^2)^*$ представляют собой инфинитезимальные автоморфизмы $x \rightarrow x + l(x) \cdot \varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$, которые радикал не сохраняют. Легко проверить, что для общей алгебры деформация $x \circ y = xy + (l(x)y + l(y)x)\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$, не может быть уже продолжена до деформации по модулю ε^3 .

Такая разница в свойствах компоненты $\mathcal{A}_{n,r}$ и $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ кажется удивительной: описываемые ими алгебры N и $K \cdot 1 + N$ с точностью до изоморфизма находятся во взаимно-однозначном соответствии. Схема $\mathcal{A}_{n,r}$ получается из $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$ пересечением с подпространством, определенным условиями $c_{ij}^0 = 0$, $i > 0$, $j > 0$, наложенными на таблицу умножения (если в базисе $1, e_1, \dots, e_n$ положить $e_0 = 1$). Это подпространство касается подмногообразия $\tilde{\mathcal{A}}_{n,r}$. Такой эффект можно видеть уже в случае $n = 1$. Если алгебра, соответствующая точке многообразия $\tilde{\mathcal{C}}_n$, имеет базис $1, e$ с таблицей умножения $e^2 = \alpha + \beta e$, то для элемента $x = u + ve$, $\text{Sp}(x) = 2u + v\beta$, $(x - \frac{1}{2}\text{Sp}(x))^2 = v^2(\alpha - \frac{\beta^2}{4})$. Поэтому компонента $\tilde{\mathcal{A}}$ в этом случае является параболой $\alpha - \frac{\beta^2}{4} = 0$, а $\mathcal{A}$ получается из нее пересечением с прямой $\alpha = 0$.

2. Реальные трудности содержатся в доказательстве леммы 4. В ней решающую роль играют вычисления во внешней алгебре $\Lambda(N/N^2)$, хотя не ясно, какое отношение эта алгебра имеет к изучаемой алгебре N и ее пространству $T^1(N, N)$. Выяснение внутренней (а не чисто формульной) роли внешней алгебры, вероятно, сделало бы доказательство более прозрачным.

3. Ключевое соотношение $\sum_{s \geq 3} \omega^s \wedge x_s = 0$ в доказательстве леммы 4 в случае $s = 3$ приобретает вид $\omega \wedge x = 0$, где ω — бивектор с матрицей $\Gamma = [A^3, A^2]$. Его разрешимость с $x \neq 0$ равносильна тому, что $\text{rg } \Gamma \leq 2$. В таком виде оно встречалось в работе В. Барта [7] в связи с описанием двумерных векторных расслоений на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ (рассматриваются стабильные расслоения с первым классом Черна, равным 0). Если попытаться интерпретировать его в духе настоящей работы, то надо сопоставить пучку F на $\mathbb{P}$ локальную алгебру $A = \bigoplus_{p=0}^2 H^p(\mathbb{P}^2, \Lambda^p F(-2p))$. При этом $\Lambda^2 F = 0$. Умножение

$$H^1(\Lambda^1 F(-2)) \otimes H^1(\Lambda^1 F(-2)) \rightarrow H^2(\mathcal{O}(-4))$$

коммутативно. При этом $\dim H^2(\mathcal{O}(-4)) = 3$.

(Поступило 5 июня 1990 г.)

Литература

- [1] Jarrobin A., Emsalem J., *Some zero-dimensional generic singularities; finite algebras having small tangent space*, *Compositio Mathematica* **36**, N 2 (1978), 145–188.

- [2] Шафаревич И. Р., *Основы алгебраической геометрии, т. I, II*, М.: Наука, 1988.
- [3] Harrison D. K., *Commutative algebras and cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 191–204.
- [4] Quillen D., *On the (co-)homology of commutative rings*, Proceedings of Simposia in Pure Mathematics **XVII** (1970), 65–87.
- [5] Картан А., Эйленберг С., *Гомологическая алгебра*, М.: ИЛ, 1960.
- [6] Гельфанд С. И., Манин Ю. И., *Методы гомологической алгебры, т.1*, М.: Наука, 1988.
- [7] Barth W., *Moduli of Vector Bundles on the Projective Plane*, Invent. Math. **42** (1977), 63–93.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ГЛАВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЕННЫЕ НАД ПОЛЕМ ФУНКЦИЙ

ТР. МАТ. ИНСТ. ИМ. В. А. СТЕКЛОВА N 64 (1961)

Работа посвящена изучению главных однородных пространств над абелевыми многообразиями. Немного упрощая, можно сказать, что речь идет об алгебраических многообразиях, определенных над некоторым полем k , которые над алгебраическим замыканием k бигекулярно эквивалентны абелевым многообразиям. В частном случае алгебраических кривых вопрос сводится к теории эллиптических кривых, т. е. кривых рода 1.

В работе исследуется случай, когда k является полем алгебраических функций одной переменной над алгебраически замкнутым полем k_0 . (В последнем пункте работы разбирается случай более общего поля k .)

В различных частных случаях этот вопрос давно рассматривался в связи с теорией алгебраических поверхностей. Именно, если предположить, что главное однородное пространство одномерно, то его можно интерпретировать как алгебраическую поверхность над полем k_0 , содержащую пучок эллиптических кривых. Исследованию таких поверхностей (точнее, содержащихся в них пучков) посвящен ряд работ. Впервые их изучал, по-видимому, Пенлеве [13], затем Энриквес [3]. Обзор дальнейших работ, главным образом Энриквеса и Севери, содержится в книге [4].

Метод рассмотрения, примененный в этой работе, является обычным методом теории чисел — переходом от локального рассмотрения к глобальному. Сначала рассматривается локальная сторона вопроса, т. е. за основное поле берется наполнение поля k по его простому дивизору. Инварианты, которыми задаются в этом случае главные однородные пространства, описаны в теореме 1. Переходя к случаю, когда основное поле является полем алгебраических функций, мы сталкиваемся с двумя основными вопросами:

- 1) какие системы локальных инвариантов могут реализоваться и
- 2) каковы те пространства, для которых все локальные инварианты исчезают.

Исследованию этих вопросов посвящен § 2.

Мы будем пользоваться следующими понятиями, обозначениями и известными результатами.

Для любой абелевой группы A через A_n будем обозначать подгруппу элементов периода n , а через $A^{(n)}$ — группу A/nA , $[G]$ будет обозначать порядок конечной группы G .

Через A будет обозначаться абелево многообразие, определенное над полем k . Размерность A будет обозначаться через d . Все общие факты из теории абелевых многообразий, которыми мы будем пользоваться, можно найти в книге Ланга [9].

Говорят, что A действует на алгебраическом многообразии V как группа регулярных отображений, если определено регулярное отображение $(a, v) \rightarrow av$ над полем k многообразия $A \times V$ в V , обладающее свойствами: $e \cdot v = v$ (e — единица A) и $a_1(a_2v) = (a_1a_2)v$.

Главным однородным пространством над A называется, согласно Вейлю [18], алгебраическое многообразие V , на котором A действует как группа регулярных отображений, причем выполняются следующие условия:

- 1) Для любых v и $v' \in V$ уравнение

$$av = v' \quad (1)$$

имеет единственное решение $a \in A$.

- 2) Отображение, ставящее в соответствие паре v и v' решение a уравнения (1), является регулярным отображением $V \times V$ в A .

Изоморфизм двух главных однородных пространств V и V' над A определяется как бирегулярное отображение $V \rightarrow V'$, коммутирующее с действием элементов $a \in A$.

Всякое главное однородное пространство, имеющее рациональную точку v_0 над основным полем, изоморфно A (изоморфизм определяется отображением $a \rightarrow av_0$), и любое главное однородное пространство имеет точку в некотором конечном сепарабельном расширении основного поля. На основании этого можно дать следующее описание множества всех главных однородных пространств (см. [11] и [20]):

Главные однородные пространства над A находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами одномерной группы когомологий $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$. Здесь $\mathfrak{G}$ означает группу Галуа максимального

расширения $\mathfrak{K}$ поля k , а $\mathfrak{A}$ — группу точек многообразия A , рациональных над $\mathfrak{K}$. Группа $\mathfrak{G}$ топологизируется обычным образом, а группа $\mathfrak{A}$ считается дискретной. Группа $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ состоит из непрерывных в этом смысле коцепей.

Этот результат дает возможность перенести групповую операцию из группы $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ в множество главных однородных пространств. Оно становится таким образом группой, которую мы обозначим через $\mathfrak{H}(A, k)$. Из общих свойств групп когомологий следует, что группа $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$ периодична.

Предположим, что n не делится на характеристику поля k (и любое, если эта характеристика равна 0). Тогда существует точная последовательность:

$$0 \rightarrow \alpha^{(n)} \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \xrightarrow{\iota} H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n \rightarrow 0, \quad (2)$$

в которой α означает группу точек A , рациональных над полем k , когоморфизм ι определяется вложением $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{A}$, а гомоморфизм δ определяется так: пусть $a \in \alpha$; найдем такое $b \in \mathfrak{A}$, что $nb = a$ (оно всегда существует) и положим

$$f(\sigma) = b - \sigma b \quad (3)$$

для $\sigma \in \mathfrak{G}$. Легко видеть, что $f(\sigma)$ определяет коцикл, содержащийся в $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})$, который мы и возьмем за δa .

§ 1. Дискретно нормированное поле констант

1. Строение группы рациональных точек. Далее мы будем пользоваться некоторыми фактами, подробное доказательство которых будет дано в другом месте. Речь идет о структуре группы рациональных точек абелева многообразия над дискретно нормированным полем.

Пусть k — дискретно нормированное поле с полем классов вычетов k_0 и A — абелево многообразие размерности d над k . Известно (см. [22] и [23]), что группа α — топологическая и что она содержит открытые подгруппы γ_i , изоморфные прямой сумме d экземпляров кольца O целых элементов поля k . Подгруппы γ_i образуют полную систему окрестностей единицы группы α , и α естественным образом изоморфна проективному пределу группы α/γ_i :

$$\alpha = \varprojlim \alpha/\gamma_i. \quad (4)$$

Имеют место следующие факты:

А. Во все группы α/γ_i можно таким образом ввести структуру алгебраической (точнее, квазиалгебраической) группы, что если для некоторых i и j $\gamma_i \supset \gamma_j$, то естественный гомоморфизм $\alpha/\gamma_i \rightarrow \alpha/\gamma_j$ является гомоморфизмом алгебраических групп. Иными словами, представление (4) определяет в α структуру проалгебраической группы в смысле Серра ([15]).

В. Если α_0 — связанная компонента единицы группы α , то группа $\pi_0(\alpha) = \alpha/\alpha^0$ (нульмерная гомотопическая группа группы α в терминологии Серра) конечна. Отсюда следует, что если поле k_0 алгебраически замкнуто, то

$$\alpha \cong \pi_0(\alpha) \times \alpha^0, \quad (5)$$

причем α^0 состоит из всех элементов группы α , делящихся на все числа, взаимно простые с характеристикой p поля k .

С. Группа α содержит максимальную проалгебраическую подгруппу γ со следующими свойствами: γ унипотентна (т. е. является проективным пределом алгебраических групп, все факторы композиционных рядов которых изоморфны аддитивной группе поля k_0) и фактор-группа $\alpha/\gamma = \Gamma$ является алгебраической группой размерности $\leq \alpha$. Группа Γ тогда и только тогда является абелевым многообразием размерности d , когда A допускает невырожденную редукцию по модулю простого дивизора поля k .

2. Вычисление группы $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$. Дальше мы будем всегда предполагать, что поле классов вычетов k_0 алгебраически замкнуто. Ввиду этого группа $\mathfrak{G}$ имеет следующее строение: $\mathfrak{G}$ содержит нормальный делитель $\mathfrak{N}$, являющийся топологической p -группой; фактор-группа $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ является проективным пределом циклических групп, порядки которых не делятся на p :

$$\mathfrak{T} = \varprojlim Z_m, \quad (m, p) = 1. \quad (6)$$

при естественной системе гомоморфизмов Z_m на $Z_{m'}$, если m делится на m' . Иначе говоря, $\mathfrak{T}$ является пополнением бесконечной циклической группы Z в топологии, в которой систему окрестностей 0 образуют подгруппы mZ для всех m , не делящихся на p . Образующий элемент группы Z обозначим через σ . Он является также топологической образующей группы $\mathfrak{T}$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_n^n$ подгруппу группы $\mathfrak{A}_n$, инвариантную относительно автоморфизмов $\mathfrak{N}$. Это те точки периода n на многообразии A , координаты которых содержатся в расширениях без высшего ветвления поля k (в отличие от простейшего случая, рассмотренного Игуза [7], вообще говоря, не все точки из $\mathfrak{A}_n$ обладают этим свойством, как показывают простые примеры). Группа $\mathfrak{A}_n^n$ является $\mathfrak{T}$ -модулем.

Лемма 1. Группа $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$ изоморфна группе

$$\frac{\mathfrak{A}_n^n}{(1 - \sigma)\mathfrak{A}_n^n}.$$

При доказательстве этой леммы мы воспользуемся следующим простым фактом:

Лемма 2. Если X — модуль относительно группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{N}$ — такой нормальный делитель $\mathfrak{G}$, что $H^1(\mathfrak{N}, X) = 0$ и $\mathfrak{T} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$, то $H^1(\mathfrak{G}, X) \cong H^1(\mathfrak{T}, X^{\mathfrak{N}})$, где $X^{\mathfrak{N}}$ обозначает подмодуль X , состоящий из $\mathfrak{N}$ -инвариантных элементов.

Для доказательства леммы 2 рассмотрим гомоморфизм подъема

$$\lambda : H^1(\mathfrak{T}, X^{\mathfrak{N}}) \rightarrow H^1(\mathfrak{G}, X),$$

при котором каждый коцикл на $\mathfrak{T}$ рассматривается как коцикл на $\mathfrak{G}$, постоянный на классах смежности по $\mathfrak{N}$. Проверим, что в предположениях леммы 2 λ является изоморфизмом.

Действительно, если $\varphi \in H^1(\mathfrak{T}, X^{\mathfrak{N}})$ и $\lambda\varphi = 0$, то существует такое $x \in X$, что для всех $g \in \mathfrak{G}$

$$(\lambda\varphi)(g) = x - gx. \quad (7)$$

Но так как для $h \in \mathfrak{N}$

$$(\lambda\varphi)(e_{\mathfrak{T}}) = \varphi(h) = \varphi(e_{\mathfrak{N}}) = 0,$$

где $e_{\mathfrak{T}}$ — единица группы $\mathfrak{T}$, то $x = hx$ и $x \in X^{\mathfrak{N}}$. Если теперь $\bar{g}$ означает образ элемента $g \in \mathfrak{G}$ в $\mathfrak{T}$, то мы можем записать (7) в виде:

$$\varphi(\bar{g}) = x - \bar{g}x,$$

а это и значит, что $\varphi = 0$. Таким образом, ядро λ равно 0. Докажем, что образ λ совпадает со всей группой $H^1(\mathfrak{G}, X)$. Пусть $\psi \in H^1(\mathfrak{G}, X)$. Ввиду предположения, сделанного в формулировке леммы, ψ , будучи ограничен на $\mathfrak{N}$, распадается. Это значит, что существует такой элемент $x \in X$, что

$$\psi(h) = x - hx$$

для всех $h \in \mathfrak{N}$. Положим

$$\psi_1(g) = \psi(g) - x + gx.$$

Очевидно, что $\psi_1(h) = 0$ для $h \in \mathfrak{N}$. Отсюда следует, что

$$\psi_1(gh) = \psi_1(g) + g\psi_1(h) = \psi_1(g),$$

т. е. ψ_1 постоянен на классах смежности $\mathfrak{G}$ по $\mathfrak{N}$ и определяет функцию φ на $\mathfrak{T}$. Так как

$$\psi_1(hg) = \psi_1(h) + h\psi_1(g) = h\psi_1(g),$$

а

$$\psi_1(hg) = \psi_1(g),$$

то значения ψ_1 , а следовательно, и ψ , принадлежат $X^{\mathfrak{N}}$ и $\varphi \in H^1(\mathfrak{T}, X^{\mathfrak{N}})$. Очевидно, что $\lambda\varphi = \psi$. Тем самым доказано, что λ является изоморфизмом. Заметим, что это утверждение вытекает также из рассмотрения точной последовательности, получающейся из спектральной последовательности Хохшилла — Серра [6].

Теперь уже легко доказать лемму 1. Так как группа $\mathfrak{N}$ является топологической p -группой, а по предположению $(n, p) = 1$, то условия леммы 2 выполняются и

$$H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) = H^1(\mathfrak{T}, \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}).$$

Воспользуемся представлением (6) группы $\mathfrak{T}$ и обозначим через σ_m образ элемента σ в группе z_m . Тогда

$$H^1(z_m, \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}) = \frac{\text{Ker}(1 + \sigma_m + \dots + \sigma_m^{m-1})}{\text{Jm}(1 - \sigma_m)},$$

где Ker и Jm обозначают ядро и образ соответствующих гомоморфизмов в $\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}$.

Так как группа $\mathfrak{A}_n$ конечна, то в $\mathfrak{T}$ существует подгруппа конечного индекса $\mathfrak{T}_0$, элементы которой действуют в $\mathfrak{A}_n$ тривиально. Пусть

$$(\mathfrak{T} : \mathfrak{T}_0) = r.$$

Очевидно, что $(r, p) = 1$. Докажем, что если $m \equiv 0 \pmod{rn}$, то

$$\text{Jm}(1 - \sigma_m) = (1 - \sigma)\mathfrak{A}_n, \quad (8)$$

$$\text{Ker}(1 + \sigma_m + \dots + \sigma_m^{m-1}) = \mathfrak{A}_n. \quad (9)$$

Равенство (8) очевидно, так как ядро гомоморфизма $\mathfrak{T}$ на z_m , ввиду того, что $r|m$, содержит $\mathfrak{T}_0$ и σ совпадает с σ_m на $\mathfrak{A}_n$. Ввиду того же условия $r|m$, $\sigma_m^r = 1$ на $\mathfrak{A}_n$, поэтому

$$1 + \sigma_m + \dots + \sigma_m^{m-1} = (1 + \sigma_m + \dots + \sigma_m^{r-1}) \frac{m}{r}.$$

Этот гомоморфизм переводит всю группу $\mathfrak{A}_n$ в 0, так как $n \mid \frac{m}{r}$. Очевидно, что

$$\mathfrak{T} = \varprojlim Z_m, \quad m \equiv 0 \pmod{(n, r)}, \quad (m, p) = 1$$

и

$$H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) = H^1(\mathfrak{T}, \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}) = \varprojlim (Z_m, \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}) = \frac{\mathfrak{A}_n}{(1 - \sigma)\mathfrak{A}_n}.$$

Лемма 2 доказана.

Следствие. Порядок группы $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$ равен порядку группы α_n .

Действительно, из леммы 2 и точной последовательности

$$0 \rightarrow \alpha_n \xrightarrow{1 - \sigma} \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}} \rightarrow (1 - \sigma)\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}} \rightarrow 0$$

мы видим, что

$$\begin{aligned} [H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}})] &= \frac{[\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}]}{[(1 - \sigma)\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}]}, \\ [(1 - \sigma)\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}] &= \frac{[\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}]}{[\alpha_n]}. \end{aligned}$$

Подставляя одну формулу в другую, получаем, что

$$[H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)] = [\alpha_n].$$

3. Умножение в группах когомологий. Дальше мы будем пользоваться произведением Вейля. Это произведение является функцией $e_n(x, \xi)$, которая определена для $x \in \mathfrak{A}_n$, $\xi \in \hat{\mathfrak{A}}_n$ ($\hat{\mathfrak{A}}$ обозначает группу точек дуального абелева многообразия $\hat{A}$) и принимает значения в группе $\mathfrak{z}_n$ корней степени n из 1.

Функция e_n обладает свойствами билинейности:

$$\begin{aligned} e_n(x + x', \xi) &= e_n(x, \xi)e_n(x', \xi), \\ e_n(x, \xi + \xi') &= e_n(x, \xi)e_n(x, \xi') \end{aligned}$$

и невырожденности

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad \text{если} \quad e_n(x_0, \xi) = 1 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \hat{\mathfrak{A}}_n, \\ \xi_0 = 0, \quad \text{если} \quad e_n(x, \xi_0) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{A}_n \end{aligned}$$

(см. Ланг [9], стр. 189).

Как известно (Картан — Эйленберг [2], стр. 296), произведение, определенное на двух $\mathfrak{G}$ -модулях A и B со значениями в модуле C , дает возможность определить умножение элементов групп когомологий $\hat{H}^r(\mathfrak{G}, A)$ и $\hat{H}^s(\mathfrak{G}, B)$ (r и s — любые целые числа) со значениями в $\hat{H}^{r+s}(\mathfrak{G}, C)$, обладающее свойствами билинейности. В частности, произведение Вейля определяет умножение:

$$\hat{H}^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \otimes \hat{H}^s(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \rightarrow \hat{H}^{r+s}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n).$$

Это произведение мы используем в случае $r + s = 1$, так как в этом случае группа $\hat{H}^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$ имеет простую интерпретацию. Она изоморфна группе k^*/k^{*n} , где k^* обозначает мультипликативную группу поля k . Доказательство получается из рассмотрения точной последовательности

$$1 \rightarrow \mathfrak{A}_n \rightarrow \mathfrak{K}^* \xrightarrow{n} \mathfrak{K}^* \rightarrow 1,$$

в которой $\mathfrak{K}$ обозначает сепарабельное алгебраическое замыкание поля k , а гомоморфизм $\xrightarrow{n}$ состоит в возведении всех элементов в степень n . Рассмотрим отрезок соответствующей точной последовательности групп когомологий:

$$H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}^*) \xrightarrow{n} H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}^*) \xrightarrow{\delta} H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \rightarrow H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}^*).$$

Очевидно, что

$$H^0(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}^*) = k^*$$

и

$$H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{K}^*) = 1$$

ввиду теоремы Гильберта—Шпейзера. Отсюда следует, что

$$H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \cong k^*/k^{*n}.$$

Таким образом, определено умножение групп когомологий

$$\hat{H}^r(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \otimes \hat{H}^{1-r}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \rightarrow k^*/k^{*n}.$$

До сих пор мы не пользовались никакими свойствами поля k . Воспользуемся теперь тем, что k является дискретно нормированным полем и что n взаимно просто с характеристикой поля k_0 . Тогда

$$k^* = \{\pi\} \times U,$$

где π — простой элемент поля k , а U — группа единиц. Ввиду алгебраической замкнутости поля k_0 и того, что его характеристика не делит n , как известно, $U = U^n$.

Таким образом,

$$k^*/k^{*n} = \{\pi\}/\{\pi^n\} = Z_n,$$

и мы имеем изоморфизм s :

$$H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{z}_n) \rightarrow Z_n.$$

Мы видим, что определено умножение

$$\hat{H}^r(\mathcal{G}, \mathfrak{A}_n) \otimes \hat{H}^{1-r}(\mathcal{G}, \hat{\mathfrak{A}}_n) \rightarrow Z_n.$$

Рассмотрим случай $r = 1$. Тогда

$$\hat{H}^{1-r}(\mathcal{G}, \hat{\mathfrak{A}}_n) = \hat{H}^0(\mathcal{G}, \hat{\mathfrak{A}}_n) = \hat{\alpha}_n$$

Действительно, если $\mathfrak{K} = \cup K_i$, где конечные расширения K_i содержат все точки $\hat{\mathfrak{A}}_n$, то группа $\mathcal{G}$ может быть представлена как проективный предел конечных групп:

$$\mathcal{G} = \varprojlim \mathfrak{g}_i,$$

причем

$$\hat{H}^0(\mathcal{G}, \hat{\mathfrak{A}}_n) = \varprojlim \hat{H}^0(\mathfrak{g}, \hat{\mathfrak{A}}_n)$$

и

$$\hat{H}^0(\mathfrak{g}_i, \hat{\mathfrak{A}}_n) = \hat{\alpha}_n / N_i \hat{\mathfrak{A}}_n,$$

где

$$N_i = \sum_{\sigma \in \mathfrak{g}_i} \sigma.$$

Рассуждая, как и в доказательстве леммы 1, мы увидим, что группы $\mathfrak{g}_i$ можно выбрать так, чтобы рассмотренная там группа Z_{nr} была их фактор-группой. Тогда $N_i \hat{\mathfrak{A}}_n = 0$, как следует из формулы (9), и $\hat{H}^0(\mathfrak{g}_i, \hat{\mathfrak{A}}_n) = \hat{\alpha}_n$.

Окончательно мы определили произведение

$$H^1(\mathcal{G}, \mathfrak{A}_n) \otimes \hat{\alpha}_n \rightarrow Z_n,$$

которое мы будем обозначать тем же самым символом e_n , что и произведение Вейля.

Лемма 3. $e_n(x, \xi) = 1$, если $x \in \alpha\delta$, $\xi \in \hat{\alpha}_n^0$. Здесь δ обозначает гомоморфизм в точной последовательности (2).

Согласно (3), если $x = \delta a$, $a \in \alpha$, то

$$x(\sigma) = b - \sigma b,$$

где $nb = a$. Воспользуемся выражением (5) для группы α . Если $a \in \alpha^0$, то, согласно предложению В п. 1, мы можем выбрать b из α^0 и поэтому $u(\sigma) = 0$. Если $a \in \pi_0(\alpha)$ и его порядок является степенью характеристики p поля k_0 , то $e_n(\delta a, \xi) = 0$, так как тогда порядок δa и $e_n(\delta a, \xi)$ является степенью p , а $e_n(\delta a, \xi) \in Z_n$ и $(n, p) = 1$. Нам остается рассмотреть случай, когда $a \in \pi_0(\alpha)$ и его порядок m не делится на p . Очевидно, что тогда $mnb = 0$.

Воспользуемся теперь тем, что точка $\xi \in \hat{\alpha}_n^0$ делится в $\hat{\alpha}^0$ на любое число, взаимно простое с характеристикой поля k_0 (п. 1, предложение В), и положим $\xi = m\eta$, $\eta \in \hat{\alpha}_{mn}^0$.

Тогда

$$e_n(x, \xi) = e_n(b - \sigma b, \xi) = e_n(b - \sigma b, m\eta). \quad (10)$$

Ввиду известного свойства функции e_n (см. Ланг[9], стр. 190),

$$e_n(b - \sigma b, m\eta) = e_{mn}(b - \sigma b, \eta). \quad (11)$$

Отсюда мы получаем:

$$e_{mn}(b - \sigma b, \eta) = e_{mn}(b, \eta)e_{mn}(\sigma b, \eta)^{-1}, \quad (12)$$

причем

$$e_{mn}(\sigma b, \eta) = e_{mn}(\sigma b, \sigma\eta), \quad (13)$$

так как $\eta \in \hat{\alpha}$.

Из определения функции e следует, что

$$e_{mn}(\sigma b, \sigma\eta) = e_{mn}(b, \eta)^{\sigma^{-1}}; \quad (14)$$

так как поле k_0 алгебраически замкнуто, то корни степени mn из 1 в нем содержатся, а следовательно, ввиду леммы Гензеля, они содержатся и в k . Таким образом, $e_{mn}(b, \eta)^{\sigma^{-1}} = e_{mn}(b, \eta)$. Вместе с формулами (10)–(14) это показывает, что

$$e_n(\delta a, \xi) = e_n(x, \xi) = 1$$

и доказывает лемму.

Точная последовательность (2) в сочетании с леммой 3 дает возможность определить произведение

$$H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n \otimes \hat{\alpha}_n^0 \rightarrow Z_n ,$$

которое мы обозначим через $\varepsilon_n(u, v)$, $u \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$, $v \in \hat{\alpha}_n^0$. Таким образом, по определению,

$$\varepsilon_n(u, v) = se_n(\iota^{-1}u, v) ,$$

причем лемма 3 гарантирует независимость этого выражения от выбора прообраза $\iota^{-1}u$ элемента $u \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$ в $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$. Очевидно, что произведение ε_n билинейно.

4. Теорема двойственности.

Теорема 1. Произведение $\varepsilon_n(u, v)$ обладает свойством невырожденности. Таким образом, оно делает группы $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$ и $\hat{\alpha}_n^0$ группами характеров друг для друга.

Доказательство. Нам надо доказать два утверждения:

$$v_0 = 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon_n(u, v) = 1 \quad \text{для всех} \quad u \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n , \quad (15)$$

$$u_0 = 0, \quad \text{если} \quad \varepsilon_n(u_0, v) = 1 \quad \text{для всех} \quad v \in \hat{\alpha}_n^0 . \quad (16)$$

Докажем утверждение (15). Положим $f = \iota^{-1}u$. Тогда $e_0(f, v_0) = 1$ для всех $f \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$. Равенство $e_n(f, v_0) = 1$ означает, что коцикл

$$\psi(\sigma) = e_n(f(\sigma), v_0)$$

когомологичен 0 в $\mathfrak{z}_n$. Как мы видели при доказательстве леммы 3, $\mathfrak{z}_n \subset \mathfrak{k}$, значит $\mathfrak{G}$ действует на $\mathfrak{z}_n$ тривиально и когомологичность нулю коцикла $\psi(\sigma)$ означает просто, что

$$e_n(f(\sigma), v_0) = 1 .$$

Мы покажем, что все элементы группы $\mathfrak{A}_n$ представимы в виде суммы элементов $f(\sigma)$, $f \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$, $\sigma \in \mathfrak{G}$. Отсюда, ввиду невырожденности функции e_n , будет следовать, что $v_0 = 0$.

Очевидно, что любой элемент вида $x - \sigma x$, $x \in \mathfrak{A}_n$, $\sigma \in \mathfrak{G}$ имеет вид $f(\sigma)$ (надо положить $f(\sigma) = x - \sigma x$). С другой стороны, любой элемент $y \in \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{M}}$ имеет также вид $f(\sigma)$. Для этого надо положить

$q(\sigma) = y$ в обозначениях леммы 1. Мы получим элемент g группы $H^1(\mathfrak{I}, \mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}})$ и положим $f = \lambda g$.

Докажем, что любой элемент группы $\mathfrak{A}_n$ может быть представлен в виде суммы элементов вида $x - \sigma x$ и элементов y из $\mathfrak{A}_n^{\mathfrak{N}}$.

Ввиду конечности группы $\mathfrak{A}_n$, на ней эффективно действует конечная фактор-группа Π группы $\mathfrak{N}$, порядок которой конечно взаимно прост с n , и наше утверждение вытекает теперь из следующего простого теоретико-группового замечания:

Лемма 4. Если в Π -модуле X возможно деление на порядок P группы Π , то любой элемент из X является суммой элементов вида $a - ha$, $h \in \Pi$ и Π -инвариантного элемента.

Действительно, так как

$$1 = \frac{1}{P} \sum_{h \in \Pi, h \neq 1} (1 - h) + \frac{1}{P} \sum_{h \in \Pi} h,$$

то для любого $x \in X$

$$x = \sum_{h \in \Pi, h \neq 1} \left(\frac{x}{P} - h \frac{x}{P} \right) + \sum_{h \in \Pi} h \frac{x}{P},$$

причем второе слагаемое очевидно Π -инвариантно.

Мы доказали свойство (15). Иначе говоря, мы доказали, что группа $\hat{\alpha}_n^0$ изоморфно вкладывается в группу характеров группы $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$. Докажем, что эти группы изоморфны — откуда будет следовать свойство (16). Достаточно доказать, что у них одинаковые порядки.

Из точной последовательности (2) можно заключить, что

$$\frac{[H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)]}{[\alpha^{(n)}]} = [H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n].$$

Вместе со следствием леммы 1 это дает:

$$[H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n] = \frac{[\alpha_n]}{[\alpha^{(n)}]}. \quad (17)$$

Если воспользоваться представлением (5) группы α и свойством неограниченной делимости элементов из α^0 , то мы получим, что

$$\alpha^{(n)} = \pi_0(\alpha)^{(n)}. \quad (18)$$

Так как

$$\alpha_n = \pi_0(\alpha)_n \times \alpha_n^0$$

и

$$\pi_0(\alpha)_n = \pi_0(\alpha)^{(n)}$$

(ввиду конечности группы $\pi_0(\alpha)$), то формулы (17) и (18) дают:

$$[H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n] = [\alpha_n^0].$$

Нам остается доказать равенство порядков групп α_n^0 и $\hat{\alpha}_n^0$. Для этого заметим, что

$$\alpha_n^0 = \Gamma_n^0,$$

где Γ^0 — алгебраическая группа, определенная в предложении С п. 1.; таким образом, нам достаточно доказать, что

$$[\Gamma_n^0] = [\hat{\Gamma}_n^0], \quad (19)$$

где $\hat{\Gamma}$ — группа, соответствующая многообразию $\hat{A}$. Как известно (Ланг [9], стр. 117), многообразия A и $\hat{A}$ изогенны. Отсюда следует, что и группы Γ и $\hat{\Gamma}$ изогенны. Из общих теорем о структуре коммутативных алгебраических групп (см. Серр [14], стр. 50) вытекает, что у изогенных связных групп группы точек периода n изоморфны. Отсюда следует (19), а значит, и (16).

Теорема доказана.

Из общих теорем о строении коммутативных алгебраических групп следует, что группа Γ^0 имеет подгруппу, изоморфную прямому произведению d' экземпляров мультипликативной группы поля k^0 , фактор-группа по которой изоморфна абелеву многообразию размерности d'' , причем $d' + d'' \leq d$.

Следствие. Группа $H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$ изоморфна прямой сумме $d' + 2d''$ экземпляров группы Z_n .

Заметим, что теореме 1 можно, очевидно, дать другую формулировку. Именно, если условиться обозначать через ${}_p A$ произведение l -компонент группы A для всех простых чисел $l \neq p$ (как для периодической дискретной, так и для бикompактной нульмерной группы A), то теорема 1 эквивалентна следующему утверждению:

Группа ${}_p \mathfrak{H}(A, k)$ дуальна группе ${}_p \pi_1(\alpha)$. Здесь $\pi_1(\alpha)$ обозначает фундаментальную группу в смысле Серра [15] проалгебраической группы α .

Было бы очень интересно выяснить, не являются ли аналогичным образом дуальными и все группы $\mathfrak{H}(A, k)$ и $\pi_1(\alpha)$ хотя бы для случая, когда характеристика поля равна 0.

5. Показатель главного однородного пространства. Показателем $m(V)$ главного однородного пространства $V \in \mathfrak{H}(A, k)$ называется наибольший общий делитель степеней таких сепарабельных расширений K/k , что V имеет рациональную точку в K . Известно, что $m(V)$ делится на порядок n элемента V группы $\mathfrak{H}(A, k)$, а также что для произвольного поля k эти числа не совпадают (см., например, [11]). Мы покажем, что $m(V)$ может не совпадать с n уже для дискретно нормированного поля k .

Для этого рассмотрим элемент $V \in \mathfrak{H}(A, k)$. Согласно теореме 1, V можно рассматривать как элемент группы характеров $\text{Char } \hat{\alpha}_n^0$ группы $\hat{\alpha}_n^0$. Пусть K/k — конечное сепарабельное расширение, соответствующее подгруппе $\mathfrak{G}_0$ конечного индекса группы $\mathfrak{G}$. Рассматривая V как элемент группы $\mathfrak{H}(A, k)$, мы сопоставляем ему элемент группы $\text{Char } \hat{\beta}_n^0$, где $\hat{\beta}$ означает группу точек многообразия $\hat{A}$, рациональных над полем K . Таким образом определяется гомоморфизм:

$$\text{Char } \hat{\alpha}_n^0 \rightarrow \text{Char } \hat{\beta}_n^0. \quad (20)$$

Обозначим через N гомоморфизм нормы

$$N : \hat{\beta} \rightarrow \hat{\alpha},$$

естественным образом определенный в группе β . Ограничение N на $\hat{\beta}^0$ и $\hat{\beta}_n^0$ мы будем обозначать той же буквой.

Лемма 5. Гомоморфизм (20) сопряжен гомоморфизму N .

Доказательство. Рассмотрим коцикл $\psi \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$, соответствующий пространству V . Из способа сопоставления коциклов главным однородным пространствам следует, что тому же пространству, рассмотренному над полем K , соответствует коцикл $\rho\psi \in H^1(\mathfrak{G}_0, \mathfrak{A})$, где ρ означает оператор ограничения с $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}_0$. Лемма 5 утверждает, таким образом, что для $x \in H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n$

$$\varepsilon_n(\rho x, \xi) = \varepsilon_n(x, N\xi).$$

Это тождество легко проверяется исходя из определения функции ε_n .

Выберем произвольное простое число $l \neq p$ и положим $n = l^\nu$. Если для $V \in \mathfrak{H}(A, k)_n$ $m(V) = n$, то существует расширение K_1/k , степень которого делится на l точно в степени ν и в котором V имеет рациональную точку. Из известной нам структуры группы $\mathfrak{G}$ легко вывести, что нормальное поле, содержащее K_1 , обладает

тем же свойством. Таким образом, мы можем считать само K_1 нормальным. Поле K_1 содержит подполе K степени l^ν над k , так что $[K_1 : K] \neq 0$ (l). Из леммы 2 легко следует, что тогда V имеет рациональную точку уже в K . С другой стороны, поле K однозначно определяется своей степенью: $K = k(\sqrt[l^\nu]{\pi})$. Таким образом, равенство $m(V) = n$ равносильно тому, что V имеет рациональную точку в фиксированном поле K . Мы докажем существование пространства V , для которого это не так. Если для некоторого A все $V \in \mathfrak{H}(A, k)_n$ имели бы рациональную точку в поле K , то, согласно лемме 5, имело бы место равенство

$$N\beta_n^0 = 0.$$

Приведем пример многообразия A , для которого это не так. Для этого рассмотрим эллиптическую кривую Ω над k , прямое произведение Ω^n n экземпляров кривой Ω на себя и некоторое n -мерное многообразие A над k , которое над K изоморфно Ω^n . Согласно теории спуска основного поля (см., например, Серр [14], гл. 5, § 4, 108), A задается гомоморфизмом φ группы Галуа G поля K в группу автоморфизмов Ω^n (которые мы будем считать определенными над k). Напомним, что при этом точки многообразия A характеризуются тем, что они инвариантны относительно преобразований $\sigma \times \varphi(\sigma)$, $\sigma \in G$, многообразия Ω^n . Таким образом, применение автоморфизма σ к координатам точки из A равносильно применению автоморфизма $\varphi^{-1}(\sigma)$ абелева многообразия Ω^n .

Возьмем за φ регулярное представление G перестановками сомножителей Ω^n . Очевидно, что ввиду сделанного только что замечания, гомоморфизм N сводится к сложению компонент точек Ω^n , рациональных над K . Этот гомоморфизм не равен, конечно, нулю на α_n^0 , если мы выберем кривую Ω так, что $\omega_n^0 \neq 0$ (ω обозначает группу точек на Ω , рациональных на k).

Построенный нами пример относится к любому числу n вида l^ν . Исходя из него, легко сконструировать аналогичный пример для любого $n \neq 0$ (p).

Заметим, что многообразие A , которое мы построили, обладает, как легко видеть, следующим свойством: группа α точек A , рациональных над k , изоморфна группе точек Ω , рациональных над K . То, что для любого многообразия X над полем k и конечного расширения K/k совокупность точек X , рациональных над K , можно естественно отождествить с совокупностью рациональных над k точек некоторого другого многообразия $\bar{X}$, было сообщено автору Ю. И. Маниным. Независимо от него на это обратил внимание А. Вейль [19].

Построенные нами примеры несовпадения чисел $m(V)$ и n относятся к абелевым многообразиям размерности, большей, чем 1. Для многообразий размерности 1, т. е. для эллиптических кривых, $m(V) = n$. Иначе говоря, показатель эллиптической кривой V совпадает с порядком элементов V в группе $\mathfrak{H}(A, k)$. Это можно проверить следующим образом (предположив для простоты, что $p \neq 2$).

Запишем V в вейерштрассовой нормальной форме:

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad \Delta = 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

Элементы a и b поля k можно считать целыми и не делящимися одновременно на 4-ю и 6-ю степень простого элемента π поля k . Группа α может быть легко исследована методами работы Люти [12]. Мы приведем только окончательные результаты. Нам надо рассмотреть три случая:

I. $\Delta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. В этом случае группа Γ связана и является эллиптической кривой над полем k_0 . Все точки группы $\mathfrak{A}_n$ рациональны согласно лемме Гензеля. Поэтому $N = n \cdot 1$ и

$$N\beta_n^0 = n \cdot \beta_n^0 = 0$$

для любого поля K степени n .

II. $\Delta \equiv 0 \pmod{\pi}$, но a и b не делятся одновременно на π . В этом случае, как легко видеть, группа Γ может не быть связной. Ее связная компонента Γ^0 изоморфна мультипликативной группе поля k_0 , так что $\alpha_n^0 = Z_n$. То же верно для любого конечного расширения K/k поля k . Поэтому опять точки группы β_n^0 рациональны и

$$N \cdot \beta_n^0 = 0.$$

III. $a \equiv b \equiv 0 \pmod{\pi}$. В этом случае, как легко видеть, группа Γ^0 равна 0, так что $\alpha_n^0 = 0$, а значит всегда

$$N \cdot \beta_n^0 = 0.$$

Таким образом, во всех случаях оператор N переводит β_n^0 в 0 для любого поля K/k степени n (правда, это поле единственное). Таким образом, любая кривая V , имеющая порядок n как элемент группы $\mathfrak{H}(A, k)$, имеет рациональную точку в K .

§ 2. Функциональное поле констант

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда поле констант k является полем алгебраических функций одной переменной над алгебраически замкнутым полем k_0 .

1. Предварительные замечания. В случае, когда k_0 совпадает с полем комплексных чисел (или, более обще, является полем характеристики 0), группа Галуа $\mathfrak{G}$ алгебраического замыкания поля k хорошо известна. Этот факт и является основой всех дальнейших рассуждений. В случае отличной от 0 характеристики поля k_0 аналогичный результат получен Гротендиком [5]. Он ограничился, однако, расширениями поля k без высшего ветвления. В связи с этим и мы вынуждены ввести следующее ограничение на те абелевы многообразия A над полем k характеристики p , которые мы будем рассматривать.

Все точки порядка n , $n \neq 0 (p)$, на многообразии A рациональны над расширением поля k , не имеющим высшего ветвления.

Это условие будет предполагаться выполненным для всех абелевых многообразий, которые будут рассматриваться в этом параграфе. Оно, по-видимому, выполняется довольно часто. Например, как обстоит дело в случае, рассмотренном Игуза [7], не говоря уже о случае, когда характеристика поля k_0 равна 0.

Обозначим через χ максимальное расширение поля k , не имеющее высшего ветвления, через $\mathfrak{g}$ — его группу Галуа над k и через α группу точек на A , рациональных над χ .

Легко видеть, что

$$\mathfrak{H}(A, k)_n \cong H^1(\mathfrak{g}, \alpha)_n. \quad (21)$$

Это доказывается так же, как и изоморфизм

$$\mathfrak{H}(A, k)_n \cong H^1(\mathfrak{G}, \mathfrak{A})_n.$$

Надо только проверить, что любое главное однородное пространство $V \in \mathfrak{H}(A, k)_n$ имеет точку, рациональную над полем χ . Это вытекает из факта, установленного в работе [21]: V имеет точку, рациональную над полем K , следующего типа: $K \supset k(\mathfrak{A}_n)$ ($k(\mathfrak{A}_n)$ получается присоединением к k координат точек группы $\mathfrak{A}_n$), $K/k(\mathfrak{A}_n)$ нормально и имеет группу Галуа, изоморфную $\mathfrak{A}_n$. Очевидно, что K/k не имеет высшего ветвления: для $k(\mathfrak{A}_n)$ это и есть то предположение, которое мы сделали, а для $K/k(\mathfrak{A}_n)$ следует из того, что $(n, p) = 1$.

Заметим также, что последовательность

$$0 \rightarrow \alpha^{(n)} \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \alpha_n) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}, \alpha)_n \rightarrow 0, \quad (22)$$

аналогичная последовательности (2), точна. Доказательство почти совпадает с доказательством точности последовательности (2). Несколько иного доказательства требует только тот факт, что гомоморфизм умножения на n $\alpha \xrightarrow{n} \alpha$ является эпиморфизмом. Иначе говоря, надо проверить, что если $x \in \alpha$ и $ny = x$, то и $y \in \alpha$. Это следует из того, что поле $\chi(y)/\chi$ нормально и группа его изоморфна подгруппе α_n . Отсюда следует, что $\chi(y)$ не имеет высшего ветвления, а значит $y \in \alpha$.

Дальше нам будут нужны соотношения, аналогичные (21) и (22) и в некотором смысле их аппроксимирующие. Обозначим через S конечное множество простых дивизоров поля k , содержащее все простые дивизоры, по модулю которых A не имеет невырожденной редукции. Число таких дивизоров конечно (см. Шимура [16]). Легко видеть, что S содержит все точки ветвления поля $k(\alpha_n)/k$. Обозначим через χ^S максимальное подполе поля χ , в котором разветвляются только $\mathfrak{p} \in S$, через $\mathfrak{g}^S$ — группу Галуа χ^S/k , через α^S — группу точек на A с координатами из χ^S и через $\mathfrak{H}(A, k)^S$ — группу таких $V \in \mathfrak{H}(A, k)$, которые имеют рациональную точку в любом поле k^q , $q \notin S$.

Наконец, через $k^{\mathfrak{p}}$ мы будем обозначать пополнение поля k по его простому дивизору $\mathfrak{p}$, через $\mathfrak{G}^{\mathfrak{p}}$ — группу Галуа алгебраического замыкания этого поля, а через $\alpha_{\mathfrak{p}}$ — группу точек на A , рациональных над $k^{\mathfrak{p}}$.

Лемма 6.

$$\mathfrak{H}(\alpha, k)_n^S \cong H^1(\mathfrak{g}^S, \alpha^S)_n.$$

Последовательность

$$0 \rightarrow \alpha^{(n)} \rightarrow H^1(\mathfrak{g}^S, \alpha_n) \rightarrow H^1(\mathfrak{g}^S, \alpha^S)_n \rightarrow 0 \quad (23)$$

точна.

Для доказательства первого утверждения нам надо доказать, что любое $V \in \mathfrak{H}(A, k)_n^S$ имеет рациональную точку в χ^S . Мы можем присоединить координаты точек из α_n к основному полю. Согласно выбору множества S $k(\alpha_n) \subset \chi^S$, так что мы можем принять $k(\alpha_n)$ за основное поле и таким образом свести все рассмотрение к случаю, когда $k(\alpha_n) = k$. В этом случае V соответствует элемент f группы $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \alpha_n)$, причем V имеет точку в поле K , принадлежащем к подгруппе $\text{Ker } f$ группы $\mathfrak{G}$. То, что V имеет рациональную точку в поле k^q , означает, что $f = 0$ на $\mathfrak{g}^q$, где $\mathfrak{g}^q$ — группа разложения какого-либо простого делителя $\mathfrak{g}$. Но это и значит, что $\mathfrak{g}^q \subset \text{Ker } f$ для $\mathfrak{g} \notin S$, а это, в свою очередь, показывает, что $K \subset \chi^S$.

Для доказательства точности последовательности (23) достаточно проверить, что в группе α^S возможно деление на n . Пусть $x \in \alpha^S$, $ny = x$, $y \in \alpha$. Нам надо доказать, что $y \in \alpha^S$. Но это чисто локальный факт, который легко следует из того, что в группе α_q возможно деление на n , если многообразие A имеет невырожденную редукцию по модулю q .

2. Соотношения между локальными инвариантами. Мы можем теперь перейти к основному вопросу этого параграфа. Рассмотрим главное однородное пространство $V \in \mathfrak{H}(A, k)$ над различными полями k^p , получающимися пополнением поля k по его простым дивизорам p . Мы получим, очевидно, гомоморфизм

$$\varphi_p : \mathfrak{H}(A, k) \rightarrow \mathfrak{H}(A, k^p).$$

Объединяя гомоморфизмы φ_p для всех p , получим гомоморфизм

$$\varphi : \mathfrak{H}(A, k) \rightarrow \prod_p \mathfrak{H}(A, k^p).$$

Нашей задачей является исследование образа гомоморфизма φ .

Лемма 7. При заданном $V \in \mathfrak{H}(A, k)$ $\varphi_p(V) = 0$ для всех простых дивизоров, кроме конечного числа.

Утверждение леммы равносильно тому, что многообразие V имеет рациональную точку над всеми полями k^p , кроме конечного числа. Если V обладает невырожденной редукцией по модулю p , то, согласно лемме Гензеля, V содержит рациональную над k^p точку. Наше утверждение следует теперь из уже цитированной теоремы Шимура [16], согласно которой любое многообразие над k обладает невырожденной редукцией по модулю p , для всех p , кроме конечного числа.

Таким образом, гомоморфизм φ отображает $\mathfrak{H}(A, k)$ в прямую сумму групп $\mathfrak{H}(A, k^p)$. Соответствующий гомоморфизм мы будем обозначать той же буквой:

$$\varphi : \mathfrak{H}(A, k) \rightarrow \sum_p \mathfrak{H}(A, k^p).$$

Рассмотрим гомоморфизм φ , ограниченный на элементах периода n :

$$\varphi_n : \mathfrak{H}(A, k)_n \rightarrow \sum_p (A, k^p)_n.$$

Согласно теореме 1,

$$\mathfrak{H}(A, k^p)_n = \text{Char}(\hat{\alpha}_p^0)_n, \quad (24)$$

где через $\hat{\alpha}_p^0$ обозначена группа точек дуального многообразия $\hat{A}$, рациональных над k^p . Таким образом, мы имеем гомоморфизм

$$\varphi_n : \mathfrak{H}(A, k)_n \rightarrow \sum_p \text{Char}(\hat{\alpha}_p^0)_n = \text{Char} \prod_p (\hat{\alpha}_p^0)_n. \quad (25)$$

При этом группа характеров и произведение $\prod$ понимаются в смысле теории топологических групп.

Теперь мы видели во всех группах $(\hat{\alpha}_p^0)_n$ общую подгруппу, на которой мы сможем рассмотреть вместе все их характеры. Для этого рассмотрим все элементы группы $\hat{\alpha}$ конечного взаимно простого с p порядка, которые при вложении $\hat{\alpha} \rightarrow \hat{\alpha}_p$, соответствующем модулю p , отображаются в $\hat{\alpha}_p^0$. Группу всех таких точек обозначим через t .

Очевидно, что мы имеем для всех p вложение

$$\psi_n^p : t_n \rightarrow (\hat{\alpha}_p^0)_n$$

и, значит, единое вложение

$$\psi_n : t_n \rightarrow \prod_p (\hat{\alpha}_p^0)_n$$

и сопряженный гомоморфизм на группу $\text{Char } t$:

$$\psi_n^* : \text{Char} \prod_p (\hat{\alpha}_p^0)_n \rightarrow \text{Char } t. \quad (26)$$

Объединим формулы (24), (25), (26). Мы получим последовательность гомоморфизмов:

$$\mathfrak{H}(A, k)_n \xrightarrow{\varphi_n} \sum_p \mathfrak{H}(A, k^p)_n \xrightarrow{\psi_n^*} \text{Char } t \rightarrow 0. \quad (27)$$

Лемма 8. $\psi_n^* \varphi_n = 0$.

Доказательство. Пусть $V \in \mathfrak{H}(A, k)_n$. Рассмотрим элемент $f = \iota^{-1}V$ в группе $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_n)$. Выберем для любого $\mathfrak{p}$ его продолжение $\mathfrak{P}$ на поле χ , обозначим через $\mathfrak{g}^{\mathfrak{P}}$ группу разложения $\mathfrak{P}$ и через $\rho_{\mathfrak{P}}$ — гомоморфизм ограничения с $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^{\mathfrak{P}}$. Тогда гомоморфизм φ_n можно интерпретировать как сумму всех гомоморфизмов $\rho_{\mathfrak{P}}$. Утверждение леммы сводится, таким образом, к проверке тождества

$$\sum_{\mathfrak{p}} \varepsilon_n(\rho_{\mathfrak{P}} f, t) \equiv 0 \quad (n) \quad (28)$$

для любого $f \in H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_n)$ и $t \in \mathfrak{t}_n$.

Для осуществления этой проверки мы должны записать в явном виде $\varepsilon_n(\rho_{\mathfrak{P}} f, t)$. Обозначим через ζ некоторый фиксированный первообразный корень степени n из 1 и через $\sigma_{\mathfrak{P}}$ — такую образующую группы $\mathfrak{g}_{\mathfrak{P}}$, что

$$\sqrt[n]{\pi}^{\sigma_{\mathfrak{P}} - 1} = \zeta \quad (29)$$

для простого в точке $\mathfrak{P}$ элемента π . Интерпретация гомоморфизма δ в точной последовательности (2) показывает, что

$$\varepsilon_n(\rho_{\mathfrak{P}} f, t) \equiv a \pmod{n}$$

тогда и только тогда, когда

$$e_n(\rho_{\mathfrak{P}} f, t)(\sigma_{\mathfrak{P}}) = \zeta^a.$$

Тождество (28) равносильно, таким образом, соотношению

$$\prod_{\mathfrak{p}} e_n(\rho_{\mathfrak{P}} f, t) \sigma_{\mathfrak{P}} = 1. \quad (30)$$

Для его доказательства заметим, что $e_n(f, t)$ можно рассматривать как элемент f_t группы

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}_n) = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}_n),$$

так как $t \in \alpha$. Ввиду этого тождество (30) можно переписать в виде

$$\prod_{\mathfrak{p}} f_t(\sigma_{\mathfrak{P}}) = 1$$

или

$$f_t\left(\prod_p \sigma_p\right) = 1. \quad (31)$$

Для доказательства сопоставим гомоморфизму $f_t = \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}_n)$ такой элемент $\mu \in k$, что

$$f_t(\sigma) = \sqrt[n]{\mu^{\sigma-1}}.$$

Соотношение (31) следует тогда из определения (29) автоморфизмов σ_p и из того, что степень главного дивизора (μ) равна 0.

Теорема 2. Последовательность (27) точна.

Очевидно, что доказательства требует только точность последовательности (27) в члене $\sum \mathfrak{H}(A, k^p)_n$.

Мы имеем последовательность

$$\mathfrak{H}(A, k)_n^S \xrightarrow{\varphi_n^S} \sum_{p \in S} \mathfrak{H}(A, k^p)_n \xrightarrow{(\psi_n^S)^*} \text{Char } \mathfrak{t}_n \rightarrow 0, \quad (32)$$

причем точность последовательности (27) будет доказана, если мы докажем, что последовательности (32) точны для всех достаточно больших S . В частности, можно считать S выбранным так, что образ $(\psi_n^S)^*$ совпадает со всей группой $\text{Char } \mathfrak{t}_n$ и что соображения п.1 применимы.

Очевидно, что ввиду леммы 8 $(\psi_n^S)^* \varphi_n^S = 0$, так что

$$\text{Im } \varphi_n^S \subset \text{Ker } (\psi_n^S)^*.$$

Иначе говоря, группа $\text{Char } \mathfrak{t}$ является гомоморфным образом группы $\text{Coker } \varphi_n^S$. Нам нужно доказать, что этот гомоморфизм является изоморфизмом, а для этого достаточно доказать равенство индексов:

$$[\text{Coker } \varphi_n^S] = [\text{Char } \mathfrak{t}_n]. \quad (33)$$

Мы переходим к доказательству этого равенства. На основании леммы 6 мы получаем, что

$$[\text{Coker } \varphi_n^S] = \left[\sum H^1(\mathfrak{G}^p, \mathfrak{A}_n) / \varphi_n^S H^1(\mathfrak{G}^S, \mathfrak{A}_n) + \sum_{\mathfrak{G} \in S} \delta \alpha_p^{(n)} \right].$$

Используем теперь то, что нам известна структура групп $\mathfrak{g}^p$ и $\mathfrak{g}^S$, а также и их одномерных групп когомологий. Группа $H^1(\mathfrak{g}^p, \mathfrak{a}_n)$

определена в лемме 1. Группа g^S может быть определена на основании теоремы Гротендика [5]. Именно, можно так выбрать образующие σ_i в группах разложения дивизоров $g_i \in S$, $i = 1, \dots, n$, что группа g^S будет порождаться образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ и $\tau_1, \dots, \tau_{2g}$ (g — ряд поля k), связанными единственным соотношением

$$\sigma_1 \dots \sigma_m (\tau_1, \tau_2) (\tau_3, \tau_4) \dots (\tau_{2g-1}, \tau_{2g}) = 1.$$

Здесь (τ_i, τ_j) обозначает коммутатор $\tau_i \tau_j \tau_i^{-1} \tau_j^{-1}$.

Элемент $f \in H^1(g^S, a_n)$ однозначно определяется элементами $a_i = f(\sigma_i)$ ($i = 1, \dots, m$) и $c_j = f(\tau_j)$ ($j = 1, \dots, 2g$), которые должны быть связаны соотношением

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sigma_1 \dots \sigma_{k-1} a_k + \sigma_1 \dots \sigma_m \sum_{k=1}^g (\tau_1, \tau_2) \dots (\tau_{2k-3}, \tau_{2k-2}) \times \\ \times ((1 - \tau_{2k-1} \tau_{2k} \tau_{2k-1}^{-1}) c_{2k-1} + \tau_{2k-1} (1 - \tau_{2k} \tau_{2k-1}^{-1} \tau_{2k}) c_{2k}) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Переходя к представлению со стандартными корнями, мы можем сказать, что

$$[\text{Coker } \varphi_n^S] = [\text{Map}(S, a_n) / \overline{\text{Map}(S, a_n)}],$$

где $\text{Map}(S, a_n)$ означает группу отображений f множества S в a_n , а $\overline{\text{Map}(S, a_n)}$ — подгруппу, порожденную отображениями следующих трех типов:

$$\begin{aligned} f_0^p(q) &= \begin{cases} (1 - \sigma_q)x & \text{при } q = p \text{ с некоторым } x \in a_n, \\ 0 & \text{при } q \neq p, \end{cases} \\ f_1(q) &= (\delta a)(\sigma_q), \quad \text{где } a \in \alpha^{(n)}, \\ f_2(q_i) &= a_i, \end{aligned}$$

где $a_i \in a_n$ и удовлетворяют соотношению (34) при некоторых c_j .

Подгруппы, порожденные функциями такого типа, обозначим через b_0, b_1, b_2 . Таким образом,

$$\overline{\text{Map}(S, a_n)} = b_0 + b_1 + b_2.$$

Рассмотрим отображение $\text{Map}(S, a_n)$ на a_n :

$$\gamma : f \rightarrow f(p_1) + \sigma_1 f(p_2) + \dots + \sigma_1 \dots \sigma_{m-1} f(p_m).$$

Очевидно, что $\overline{\text{Map}(S, a_n)} \supset \text{Ker } \gamma$, так как $\text{Ker } \gamma$ состоит из функций типа f_2 , причем специального типа ($c_j = 0$). Таким образом,

$$[\text{Coker } \varphi_n^S] = [\text{Map}(S, a_n) / \overline{\text{Map}(S, a_n)}] = [a_n / \overline{a_n}],$$

где $\overline{a_n}$ обозначает образ $\overline{\text{Map}(S, a_n)}$ при отображении γ .

Нам остается вычислить индекс $(a_n : \overline{a_n})$. Для этого рассмотрим группу $\hat{a}_n$ точек периода n на дуальном многообразии $\hat{A}$ и умножение Вейля $e_n(x, \xi)$ для $x \in a_n$, $\xi \in \hat{a}_n$. Очевидно, что индекс $(a_n : \hat{a}_n)$ равен порядку аннулятора a'_n группы $\overline{a_n}$ в $\hat{a}_n$. Вычислим этот аннулятор. Группа $\overline{a_n}$ является суммой групп b_0, b_1, b_2 , где

$$b_i = \gamma b_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Таким образом, a_n есть пересечение подгруппы $b'_n \subset \hat{a}_n$ ($i = 0, 1, 2$), являющихся аннуляторами $\overline{b}_i$. Определим аннуляторы группы $\overline{b}_0$. Для этого рассмотрим сначала функции типа $f_0^{p_1}$. Для них

$$\gamma f_0^{p_1} = (1 - \sigma)x_2$$

и $\xi \in \hat{a}_n$ тогда и только тогда ортогонально всем им, когда $\xi^{\sigma_1} = \xi$. Это условие мы будем считать дальше выполненным.

Перейдем к рассмотрению функций типа $f_0^{p_2}$. Для них

$$\gamma f_0^{p_2} = \sigma_1(1 - \sigma_2)x.$$

Так как $\xi^{\sigma_1} = \xi$, то условие ортогональности ξ к $\gamma f_0^{p_2}$ равносильно тому, что $\xi^{\sigma_2} = \xi$. Продолжая это рассуждение, мы увидим, что ξ должно быть инвариантным относительно всех σ_i .

Выясним теперь условия ортогональности ξ функциям типа f_2 . Очевидно, что образами функций типа f_2 при отображении γ являются все элементы вида

$$(\sigma_1 \dots \sigma_m) \sum_{k=1}^q (\tau_1, \tau_2) \dots (\tau_{2k-2}, \tau_{2k-1}) ((1 - \tau_{2k-1} \tau_{2k}^{-1} \tau_{2k-1}^{-1}) c_{2k-1} + \\ + \tau_{2k-1} (1 - \tau_{2k} \tau_{2k-1}^{-1} \tau_{2k}) c_{2k}) \quad (35)$$

при любых $c_1, \dots, c_{2g} \in a_n$. Положим $c_2 = \dots = c_{2g} = 0$. Так как $\xi^{\sigma_i} = \xi$ ($i = 1, \dots, m$), то ортогональность ξ такому элементу равносильна ортогональности элементу $(1 - \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}) c_1$, т. е. равенству $\xi^{\rho_2} = \xi$, $\rho_2 = \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1}$.

Положим теперь в (35)

$$c_1 = c_3 = c_4 = \dots = c_{2g} = 0.$$

Мы получим элемент

$$(\tau_1 - \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1}) c_2 = (1 - \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1^{-1}) \tau_1 c_2 = (1 - \rho_1) c'_2,$$

где $\rho = \tau_1 \tau_2 \tau_1^{-1} \tau_2^{-1} \tau_1^{-1}$, а c'_2 — произвольный элемент a_n . Ортогональность ξ такому элементу равносильна условию

$$\xi^{\rho_1} = \xi.$$

Таким образом, $\xi^{\rho_1} = \xi^{\rho_2} = \xi$. Так как

$$\tau_1 = \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2, \tau_2 = \rho_2^{-1} \rho_1 \rho_2 \rho_1^{-1} \rho_2,$$

то $\xi^{\tau_1} = \xi^{\tau_2} = \xi$. Продолжая этот процесс, мы получим, что $\xi^{\tau_i} = \xi$ для всех τ_i . Таким образом, ξ инвариантно относительно всех образующих группы q^S , а значит, рационально над k , т. е. $\xi \in \hat{a}_n$.

Остается выяснить условия ортогональности ξ элементам вида γf_1 . Мы видели в § 1, что это условие для любого p равносильно тому, что ξ содержится в связной компоненте $\hat{a}_p^0$ группы $\hat{a}_p$. Таким образом, ортогональность ξ элементам всех трех групп $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \bar{b}_2$ равносильна условию $\xi \in t_n$. Это показывает, что аннулятор $\bar{a}_n$ совпадает с t_n , что и доказывает равенство (33). Теорема 2 доказана.

3. Локально тривиальные однородные пространства. Доказанная нами теорема дает возможность кое-что сказать и о ядре гомоморфизма φ . Это ядро, которое мы обозначим через $\mathfrak{h}$, состоит из группы главных однородных пространств, имеющих рациональную точку в любом поле k^p . Такие пространства мы будем называть локально тривиальными. Структура группы $\mathfrak{h}$ существенно зависит от структуры группы t . Интерпретацию этой последней группы мы дадим несколько позже, а сейчас посмотрим, что можно сказать, если предположить, что $t = 0$.

Теорема 3. Если $t = 0$, то группа $\mathfrak{h}$ неограниченно делима. Имеет место изоморфизм

$$\mathfrak{h} \cong {}_p Z^e,$$

где ${}_p Z$ есть группа всех корней из 1 порядков, взаимно простых с p

$${}_p Z^e = \overbrace{{}_p Z + \dots + {}_p Z}^{e \text{ раз}}, \quad e = 2d(m + 2g - 2) - \sum e_p - r,$$

e_p означает ранг группы $\pi_1(\alpha_p)$ для простых дивизоров p , по модулю которых A не имеет невырожденной редукции, m — число таких простых дивизоров и r — ранг многообразия A над полем k .

Доказательство. Мы имеем точные последовательности

$$0 \rightarrow \mathfrak{h}_n \rightarrow \mathfrak{H}(A, k)_n \rightarrow \sum \mathfrak{H}(A, x^p)_n \rightarrow 0$$

и

$$0 \rightarrow \mathfrak{h}_n \rightarrow \mathfrak{H}(A, k)_n^S \rightarrow \sum_{p \in S} \mathfrak{H}(A, k^p)_n \rightarrow 0, \quad (36)$$

причем в последней за S можно взять множество всех простых дивизоров поля k , по модулю которых A не имеет невырожденной редукции.

Очевидно, что теорема равносильна равенству

$$[\mathfrak{h}_n] = n^e \quad (37)$$

для любого $n \neq 0$ (p). Так как, согласно теореме 1, мы знаем, что

$$\begin{aligned} [\mathfrak{H}(A, k^p)_n] &= n^{e_p}, \\ \left[\sum_{p \in S} \mathfrak{H}(A, k^p)_n \right] &= n^{\sum e_p}, \end{aligned}$$

и нам остается вычислить порядок $\mathfrak{H}(A, k)_n^S$. Для этого воспользуемся леммой 6.

Мы видим, что

$$[\mathfrak{H}(A, k)_n^S] / \alpha^{(n)} = [H^1(\mathfrak{g}^S, \mathfrak{a}_n^S)]. \quad (38)$$

Вычислим порядок группы $H^1(\mathfrak{g}^S, \mathfrak{a}_n)$. Для этого мы воспользуемся рассуждениями и обозначениями, встречавшимися при доказательстве теоремы 2. Очевидно, что коцикл $f \in Z^1(\mathfrak{g}^S, \mathfrak{a}_n)$ задается $m + 2g$ элементами $a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_{2g}$, связанными соотношением (34). Очевидно, что мы можем по произволу задать, например, $a_2, \dots, a_m, c_1, \dots, c_{2g}$, определив a_1 однозначно из (34). Отсюда следует, что

$$Z^1(\mathfrak{g}^S, \mathfrak{a}_n) \cong \mathfrak{a}_n^{m+2g-1}.$$

Рассмотрим кограницы, т. е. элементы из $B^1(\mathfrak{g}^S, \mathfrak{a}_n)$. Они задаются элементами $a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_{2g}$, представимыми в виде

$$\begin{aligned} a_i &= (1 - \sigma_i)x, \\ c_j &= (1 - \tau_j)x \end{aligned} \quad (39)$$

при некотором $x \in a_n$. Формулы (39) можно интерпретировать как отображение

$$\psi : a_n \rightarrow a_n^{m+2g}.$$

Образ ψ совпадает с $B^1(g^S, a_n)$. Ядро же ψ состоит из элементов $x \in a_n$, для которых

$$(1 - \sigma_i)x = (1 - \tau_j)x = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, 2g.$$

Это значит, что $\text{Ker } \psi = \alpha_n$, и мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \alpha_n \rightarrow a_n \rightarrow B^1(g^S, a_n) \rightarrow 0,$$

из которой мы видим, что

$$[B^1(g^S, a_n)] = [a_n]/[\alpha_n].$$

В результате мы получаем:

$$[H^1(g^S, a_n)] = \frac{[Z^1(g^S, a_n)]}{[B^1(g^S, a_n)]} = [a_n]^{m+2g-2}[\alpha_n]. \quad (40)$$

Если применить теорему о ранге абелева многообразия (см. [10]), то мы получим, что

$$[\alpha^{(n)}] = n^r[\alpha_n], \quad (41)$$

где r — ранг многообразия A над k . Остается подставить (40) и (41) в формулу (38). Мы видим, что

$$[\mathfrak{H}(A, k)_n^S] = [a_n]^{m+2g-2} n^{-r} = n^{2d(m+2g-2)-r}.$$

Из точной последовательности (23) мы получим теперь нужный нам результат (37).

4. Неразветвленный след абелева многообразия. Теперь мы рассмотрим подробнее группу $\mathfrak{t}$ и, в частности, попытаемся выяснить, когда она равна нулю. Для этого введем следующее определение.

Абелево многообразие называется неразветвленным, если оно имеет невырожденную редукцию по модулю любого простого делителя поля k .

Абелево подмногообразие A_0 многообразия A называется неразветвленным следом A , если оно является максимальным неразветвленным подмногообразием A .

Существование неразветвленного следа доказывается повторением того же рассуждения, которым доказывается существование k/k_0 -следа (см. [9], стр. 212). Очевидно, что если A^* является k/k_0 -следом, то $A_0 \supset A^*$.

Теорема 4. Группа t изоморфна группе рациональных точек конечного не делящегося на p порядка на многообразии A_0 .¹

Доказательство. Очевидно, что рациональные точки конечного не делящегося на p порядка на многообразии A содержатся в группе t . Нам надо доказать обратное включение.

Обозначим через L максимальное неразветвленное расширение поля k .

Согласно определению точек t они неограниченно делимы в любом поле k^p , а следовательно, и в поле L .

Мы имеем, таким образом, абелево многообразие A , определенное над k , и группу его точек конечного порядка t , неограниченно делимых в L . Обозначим через θ группу точек A конечного порядка, неограниченно делимых над L , и докажем, что θ содержится в некотором абелевом подмногообразии A_0 , совпадая с группой всех его точек конечного порядка (не делящегося на p).

Для этого рассмотрим многообразие A над полем L . Группа θ будет тогда состоять из точек, рациональных над L .

Рассмотрим l -адическое представление φ группы Галуа $\mathfrak{G}$ алгебраического замыкания поля L для любого простого числа $l \neq p$ (см. [9], 182). Если $\dim A = d$, то в $2d$ -мерном модуле над кольцом целых l -адических чисел группе θ соответствует подмодуль, ранг которого обозначим через ν . Если перейти к представлению над полем l -адических чисел, то мы увидим, что соответствующее φ представление будет содержать ровно ν раз единичное представление. Отсюда следует, что в кольце эндоморфизмов абелева многообразия A существует эндоморфизм, отображающий A на абелево подмногообразие A_0 с нужными нам свойствами. В частности, мы видим, что ν должно быть четным числом: $\nu = 2d_0$.

Докажем, что многообразие A_0 определено не только над L , но и над k . Для этого рассмотрим автоморфизм g поля L/k . Абелево подмногообразие A_0^g имеет размерность $2d_0$ и опять содержит всю группу θ . Таким образом, A_0 и A_0^g имеют одни и те же точки любого конечного порядка, не делящегося на p , а значит, совпадают. Отсюда следует, что A_0 определено над k .

Все точки конечного порядка, не делящегося на p в многообразии A_0 , рациональны над полем L . Отсюда следует, что они рациональны над любым пополнением k^p поля k по простому дивизору $\mathfrak{p}$ поля k . Таким образом, для любого g и любого $n \not\equiv 0 \pmod{p}$ группа $(\alpha_p)_n$ со-

¹ Доказательство теоремы содержит ошибку и не ясно, верна ли она. Теорема может быть проверена в случае эллиптических кривых, когда группа Z равна 0. В следующей части работы теорема не используется. (Примечание автора к настоящему изданию.)

стоит из n^{2d_0} точек. Это значит, что в обозначениях п. 1 § 1 группа Γ является абелевым многообразием размерности d_0 над полем k_0 , а значит, согласно предложению С п. 1 § 1, имеет невырожденную редукцию по модулю p . Иначе говоря, A_0 неразветвлено.

Заметим, что из теорем о ранге (см. [10]) следует, что группа рациональных над k точек многообразия A/A^* имеет конечное число образующих. Тем более это верно для A_0/A^* .

Обозначим через ${}_p(\alpha_0)$, ${}_p(\alpha^*)$ и ${}_p(\bar{\alpha})$ группы тех рациональных над k точек на многообразиях A_0 , A^* и $\bar{A} = A_0/A^*$, которые имеют конечный не делящийся на p порядок. Они связаны соотношением

$${}_p(\alpha_0) \cong {}_p(\alpha^*) \times {}_p(\bar{\alpha}),$$

которое легко следует из того, что группа ${}_p(\alpha^*)$ неограниченно делима. Таким образом, мы имеем:

Следствие. $t = 0$ тогда и только тогда, когда неразветвленный след многообразия A не имеет рациональных над k точек конечного не делящегося на p порядка. Группа t , а следовательно, и h , неограниченно делима, когда подгруппа кручения группы рациональных над k точек многообразия является p -группой A_0/A^* .

5. Замечания о неразветвленных многообразиях.

Теорема 5. Если k является полем рациональных функций $k = k_0(t)$, то любое неразветвленное над k абелево многообразие определено над k_0 .²

Доказательство. Обозначим через $A^* k/k_0$ — след многообразия A . Нам надо доказать, что $A = A^*$. Если $A = A^*$, то, согласно теореме о ранге, группа рациональных над k точек многообразия A/A^* имеет конечное число образующих и, в частности, группу кручения конечного порядка t . Если обозначить через d^* размерность многообразия A^* и взять за n целое число, взаимно простое с p и t , то мы получим, что

$$[\alpha_n] = n^{2d^*}. \quad (42)$$

С другой стороны, для любого простого дивизора p поля k многообразие A имеет, согласно условию теоремы, невырожденную редукцию. Отсюда следует, что все точки группы $\mathcal{A}_n$ рациональны над k_p . Иначе говоря, наименьшее (над k) поле определения

²Доказательство не точно. Незначительное изменение рассуждения дает верный ответ: в условиях теоремы многообразие получается из постоянного при помощи чисто несепарабельной изогении. См. A. Grothendieck, Invent. Math., 2, 1966, 59–78. (Примечание автора к настоящему изданию.)

этих точек не разветвлено над k . Так как над полем рациональных функций не существует неразветвленных расширений, то все точки группы $\mathcal{A}_n$ рациональны над k . Это значит, что

$$[\alpha_n] = n^{2d}, \quad (43)$$

где d есть размерность многообразия A . Сравнивая (42) и (43), мы получаем, что $d = d^*$, т. е. $A = A^*$.

Следствие. Для абелева многообразия, определенного над полем рациональных функций, группа p -й локальных тривиальных главных однородных пространств, порядка которых не делятся на p , неограниченно делима.

В случае, когда поле k не является полем рациональных функций над k_0 , положение более сложное. Мы опишем сейчас конструкцию одного класса абелевых многообразий над k , которые имеют невырожденную редукцию по модулю любого простого дивизора p поля k , но не могут быть определены над k_0 .

Рассмотрим конечное нормальное неразветвленное расширение $\bar{k}/k$ с группой Галуа G . Если интерпретировать поля k и $\bar{k}$ как поля функций на неособых полных кривых X и $\bar{X}$, то вложение k в $\bar{k}$ задает отображение

$$\pi: \bar{X} \rightarrow X,$$

которое в нашем случае является неразветвленным накрытием с группой Галуа G . Мы можем рассматривать $\bar{X}$ как главное расслоенное пространство над X со структурной группой G . Предположим, что G изоморфно группе автоморфизмов некоторого абелева многообразия A^* , определенного над полем k_0 . Мы можем рассмотреть тогда присоединенное расслоенное пространство A над X со слоем A^* . Иначе говоря, A определяется как фактор-пространство пространства $\bar{X} \times A^*$ по группе G , действующей согласно правилу:

$$(\bar{x}, a)g = (g\bar{x}, ag^{-1}), \quad (\bar{x}, a) \in \bar{X} \times A^*, \quad g \in G.$$

Легко видеть, что A является абелевым многообразием, определенным над полем k и имеющим невырожденную редукцию по модулю любого простого дивизора p поля k . Эта редукция для любого p совпадает с A^* . С точки зрения теории вариации структур Кодаиры-Спенсера [8] A представляет собой расслоенное пространство с базой X , в то время как произвольное неразветвленное абелево многообразие над полем k определяет семейство структур. Мы будем говорить, что абелево многообразие A , полученное изложенной выше конструкцией, имеет тип расслоенного пространства.

Теорема 6. Любое неразветвленное одномерное абелево многообразие имеет тип расслоенного пространства. Для любой размерности $d > 1$ существуют неразветвленные абелевы многообразия, не имеющие типа расслоенного пространства.

Доказательство. Рассмотрим неразветвленную эллиптическую кривую A над полем алгебраических функций k . Запишем A в вейерштрассовой нормальной форме:

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in k.$$

Абсолютный инвариант j , определяемый формулой

$$j = \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2},$$

есть элемент поля k . Так как A имеет невырожденную редукцию по модулю любого простого дивизора $\mathfrak{p}$ поля k , то значение $j(\mathfrak{p})$ конечно для любого $\mathfrak{p}$. Таким образом, функция j не имеет полюсов и, значит, является константой: $j \in k_0$. Отсюда следует, что над некоторым конечным расширением K поля k эллиптическая кривая A эквивалентна кривой A^* , определенной над полем k_0 . Мы можем считать K нормальным над k .

Докажем, что A эквивалентна A^* уже над некоторым подполем $\bar{k}$ поля K таким, что $\bar{k}/k$ не разветвлено. Для этого применим теорию спуска основного поля. Согласно этой теории, A определяется представлением φ группы Галуа G поля k/k в группе автоморфизмов абелева многообразия A^* . Мы докажем, что для любого автоморфизма σ группы G , принадлежащего к группе инерции некоторого простого дивизора поля K , $\varphi(\sigma) = 1$. Отсюда будет следовать, что к ядру H представления φ принадлежит такое неразветвленное над k подполе $\bar{k}$ поля K , что многообразие A эквивалентно A^* уже над $\bar{k}$, что нам и нужно доказать.

Пусть σ принадлежит к группе инерции $\mathfrak{I}$ простого дивизора $\mathfrak{P}$ поля K . Обозначим через $\alpha_{\mathfrak{p}}$ группу точек A , рациональных над $k_{\mathfrak{p}}$, а через $\alpha_{\mathfrak{P}}$ — группу точек A^* , рациональных над $K_{\mathfrak{P}}$. Легко проверить, что $\alpha_{\mathfrak{p}}$ совпадает с подгруппой тех элементов группы $\alpha_{\mathfrak{P}}$, которые инвариантны относительно автоморфизмов $\sigma \cdot \varphi(\sigma)$ для всех $\sigma \in \mathfrak{I}$. Пусть $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ и $\Gamma_{\mathfrak{P}}$ будут алгебраические группы, соответствующие проалгебраическим группам $\alpha_{\mathfrak{p}}$ и $\alpha_{\mathfrak{P}}$ (см. предложение п. 1 § 1). Согласно условию, A имеет невырожденную редукцию по модулю $\mathfrak{p}$, и эта редукция совпадает с A^* . Поэтому $\Gamma_{\mathfrak{p}} = \Gamma_{\mathfrak{P}} = A^*$ и $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ совпадает с подгруппой группы $\Gamma_{\mathfrak{P}}$, инвариантной относительно

автоморфизмов $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{T}$. Это возможно только при $\varphi(\sigma) = 1$ для всех $\sigma \in \mathfrak{T}$, что и требовалось доказать.

Нами доказано утверждение теоремы 6, относящееся к многообразиям размерности 1. Заметим, что предположение $d = 1$ использовалось только в самом начале доказательства в связи с использованием инварианта j . Смысл этого рассуждения заключается в следующем: многообразие модулей M^1 эллиптических кривых над полем k_0 совпадает с аффинной прямой k_0^1 (с координатой j); всякая неразветвленная кривая A над полем k , соответствующим полной кривой X , определяет регулярное отображение $X \rightarrow M^1 = k_0^1$, которое может быть только отображением в одну точку. Существенным здесь является не явный вид многообразия модулей M^1 , а то, что в него нельзя нетривиально отобразить полную кривую. Это обстоятельство уже не имеет места при $d > 1$, что и приведет нас к доказательству существования неразветвленного абелева многообразия, не имеющего типа расслоенного пространства.

Рассмотрим случай, когда k^0 является полем комплексных чисел, и рассмотрим d -мерные абелевы многообразия, соответствующие единичной главной матрице. Известно [1], что для них многообразие модулей M^d является открытым подмножеством в нормальном проективном многообразии $\overline{M}$ размерности $\frac{d(d+1)}{2}$, причем $\overline{M} - M^d$ является алгебраическим подмногообразием в $\overline{M}$ размерности $\frac{d(d-1)}{2}$. Отсюда следует, что при $d > 1$ $M - M^d$ имеет в $\overline{M}$ коразмерность, большую, чем 1, и, следовательно, в M^d можно найти полную неособую алгебраическую кривую X . Рассмотрим отображение вложения

$$i: X \rightarrow M^d.$$

Обратный образ относительно i семейства абелевых многообразий над M^d определит такое же семейство над X , т. е. абелево многообразие A над $k_0(X) = k$, которое, очевидно, будет иметь невырожденную редукцию по модулю любого простого дивизора $\mathfrak{p}$ поля k , но не может быть определено над k_0 , так как для разных $\mathfrak{p}$ редуцированные многообразия не эквивалентны. Теорема доказана.

Заметим, что, аналогично вопросу о неразветвленных абелевых многообразиях, можно поставить вопрос о существовании неразветвленных кривых рода g , не имеющих типа расслоенного пространства. Ответ на этот вопрос, по-видимому, неизвестен.

Вопрос связан со строением многообразия модулей кривых рода g и, в частности, с вопросом о том, является ли это многообразие аффинным. Для $g = 2$ легко показать, что всякая неразветвленная кривая имеет тип расслоенного пространства.

6. Постоянные абелевы многообразия. Изложенные выше рассуждения, касающиеся группы $\mathfrak{H}(A, k)$ главных однородных пространств, сильно упрощаются и уточняются, если мы предположим, что абелево многообразие A определено над полем констант k_0 . Такие абелевы многообразия мы будем называть постоянными. Очень легко проследить, какую форму принимают результаты этого параграфа в случае, если многообразие A постоянно. Мы не будем этого делать, так как в этом случае вся теория может быть проведена в более общих предположениях о поле k . Именно, мы предположим, что k совпадает с полем $k_0(X)$ рациональных функций на неособом многообразии X произвольной размерности, определенном над полем k_0 .

Понятие главного однородного пространства связано в этом случае с понятием главного расслоенного пространства, определенного над k_0 и имеющего A структурной группой [17]. Именно, каждое главное расслоенное пространство P над X , определенное над k_0 и имеющее A структурной группой, определяет главное однородное пространство V над A , определенное над k . При этом V является слоем P над общей точкой X . Обратное неверно — не любое главное однородное пространство над A , определенное над k , может быть получено из некоторого главного расслоенного пространства со структурной группой A .

В работе Серра [17] рассматривается свойство главного расслоенного пространства P иметь формальное сечение над каждой точкой многообразия X ([17], стр. 12). Легко видеть, что это свойство равносильно тому, что соответствующее главное однородное пространство V имеет рациональную точку в поле отношений k^p полного локального кольца любой точки p многообразия X . Мы будем по-прежнему говорить, что V локально тривиально и обозначать группу локально тривиальных главных однородных пространств через $\mathfrak{h}$.

Выпишем точную последовательность (2) для случая поля k и поля k^p . Заметим, что так как многообразие A постоянно, то все точки из $\mathcal{A}_n$ рациональны над k_0 , а тем более над k . Поэтому

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{G}, \mathcal{A}_n) &= \text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathcal{A}_n), \\ H^1(\mathfrak{G}^p, \mathcal{A}_n) &= \text{Hom}(\mathfrak{G}^p, \mathcal{A}_n). \end{aligned}$$

Из соображений, аналогичных тем, которые были применены в § 1, легко следует, что группа α_p в нашем случае неограниченно делима. Поэтому точная последовательность (2) приобретает для случая поля k^p вид:

$$\mathfrak{h}(A, k^p) = \text{Hom}(\mathfrak{G}^p, \mathcal{A}_n).$$

Рассмотрим точную последовательность (2) для поля k :

$$0 \rightarrow \alpha^{(n)} \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n) \xrightarrow{\iota} \mathfrak{H}(A, k)_n \rightarrow 0. \quad (44)$$

Согласно теории куммеровых расширений, любой элемент $f \in \text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$ определяет абелево расширение $K_f/k = k(\sqrt[n]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n]{\alpha_m})$, группа Галуа которого изоморфна подгруппе группы $\mathfrak{A}_n$. Предположим, что $f \in \iota^{-1}\mathfrak{h}$. Тогда функции $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ должны быть n -ми степенями в любом поле k^p , а это значит, что K_f/k определяет неразветвленное накрытие X . Точнее говоря, нормализация X_f многообразия X в поле K_f является неразветвленным накрытием X . Очевидно, что главное расслоенное пространство становится тривиальным над X_f . Это совпадает с определением изотривиального расслоенного пространства в [7]. Мы пришли к следующему результату:

Если главное расслоенное пространство с неособой базой X и структурной группой A имеет формальное сечение в любой точке X , то оно изотривиально.

Это дает ответ на вопрос, поставленный в работе [17] (стр. 12), правда, в самом простом случае, когда структурная группа является абелевым многообразием.

Вернемся к исследованию группы $\mathfrak{h}$. Мы показали, что в (2) можно заменить $\mathfrak{G}$ группой Галуа максимального неразветвленного накрытия многообразия X и даже максимального абелева, так как нас интересует только группа $\text{Hom}(\mathfrak{G}, \mathfrak{A}_n)$.

Предположим, что группа Нерона—Севери многообразия X не имеет кручения. Известно, что в этом случае абелевы неразветвленные накрытия многообразия X соответствуют изогениям его многообразия Альбанезе, которое мы обозначим через B . Поэтому точная последовательность (44) дает:

$$0 \rightarrow \alpha^{(n)} \xrightarrow{\delta} \text{Hom}(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{A}_n) \rightarrow \mathfrak{h}_n \rightarrow 0, \quad (45)$$

где $\mathfrak{B}_n$ обозначает группу точек периода n на B .

Остается выяснить смысл группы $\alpha^{(n)}$. Это очень легко сделать. Элементами α являются точки многообразия A с координатами в поле $k_0(X)$, т. е. рациональные отображения X в A . Известно, что они задаются элементами группы $\text{Hom}(B, A)$, сложенными со сдвигами многообразия A — это определение многообразия Альбанезе ([9], стр. 41). Так как группа точек A , рациональных над k_0 , неограниченно делима, то

$$\alpha^{(n)} = \text{Hom}(B, A)^{(n)}.$$

Стандартная интерпретация гомоморфизма δ в (45) приводит нас теперь к окончательному результату:

$$\mathfrak{h}_n \cong (\mathfrak{B}_n, \mathfrak{A}_n) / S_n \operatorname{Hom}(B, A). \quad (46)$$

Здесь ρ_n обозначает ограничение гомоморфизмов из $\operatorname{Hom}(B, A)$ на группе $\mathfrak{B}_n$.

Укажем, в заключение, на одно простое применение формулы (46): из нее вытекает выражение для группы ${}_p\operatorname{Ext}(B, A)$ в категории абелевых многообразий над полем k_0 . Для этого заметим, что, как следует из доказательства теоремы Пуанкаре ([9], стр. 28), каждому элементу $C \in \operatorname{Ext}(B, A)$ соответствует главное однородное пространство V_C над группой A , определенное над полем $k_0(B)$. Отображение $C \rightarrow V_C$ определяет мономорфизм φ группы $\operatorname{Ext}(B, A)$ в группу $\mathfrak{H}(A, k_0(B))$. В частности, группа $\operatorname{Ext}(B, A)$ периодична. Образом этого мономорфизма является группа $\mathfrak{h}(A, k_0(B))$ — это следует из теоремы Пуанкаре или же из результатов [17] (стр. 12 и 28). Применяя теперь формулу (46), мы получаем, что для любого $n \neq 0$ (p)

$$\operatorname{Ext}(B, A)_n \cong \frac{\operatorname{Hom}(\mathfrak{B}_n, \mathfrak{A}_n)}{\rho_n \operatorname{Hom}(B, A)}.$$

Поступило в редакцию 18 февраля 1946 г.

Литература

1. H. Cartan, *Sur la compactification de Satake*, Séminaire H. Cartan. Ecole Normale Supérieure **Exp. 12 bis** (1957/1958), 14–23.
2. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра*, ИЛ, Москва, 1960.
3. F. Enriques, *Sur les problèmes que rapportent a la résolution des équations algebriques renferment plusieurs inconnues*, Math. Ann. **51** (1899), 134–153.
4. F. Enriques, *Le superficie algebriche*, Bologna, 1949.
5. A. Grothendieck, *Géometrie formelle et géometrie algébrique*, Séminaire Bourbaki. **182** (Mai 1959), 1–28.
6. G. Hochschild, J. P. Serre, *Cohomology of group extansions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), no. 1, 357–377.
7. I. Igusa, *Abstract vanishing cycle theory*, Proc. of the Japan Academy **34** (1958), no. 9, 589–594.
8. K. Kodaira, D. Spencer, *On the deformation of complex analitic structures*, I. Ann. of Math. **67** (1958), no. 2, 328–401.
9. S. Lang, *Abelian varieties*, Interscience Publishers, New York, 1959.
10. S. Lang, A. Néron, *Rational points of Abelian varieties in funktion fields*, Amer. J. of Math. **81** (1959), no. 1, 95–118.
11. S. Lang, J. Tate, *Principal homogeneous spaces over Abelian varieties*, Amer. J. of Math. **80** (1958), no. 3, 659–684.

12. E. Lutz, *Sur L'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p -adiques*, Journ. für Math. **177** (1937), no. 4, 238–347.
13. P. Painlevé, *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*, Stockholm, 1895.
14. J. P. Serre, *Groupes algébriques et corps des classes*, Actual. Scient. et Industr. (1959), no. 1264, Paris, 238–347.
15. J. P. Serre, *Groupes proalgébriques*, Institut des Hautes Etudes Scient. Publications Mathématiques (1960), no. 7, 1–66.
16. G. Shimura, *Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field*, Amer. J. of Math. **77** (1955), no. 1, 134–176.
17. J. P. Serre, *Espaces fibrés algébriques*, Séminaire C. Chevalley. Ecole Normale Supérieure Exp. 1 (1958), 1–37.
18. A. Weil, *Algebraic groups and homogeneous spaces*, Amer. J. of Math. **77** (1955), no. 3, 493–512.
19. A. Weil, *Adèles et groupes algébriques*, Séminaire Bourbaki N 186 (Mai 1959), 1–9.
20. И. Р. Шафаревич, *Бирациональная эквивалентность эллиптических кривых*, Доклады АН СССР **114** (1957), no. 2, 267–270.
21. И. Р. Шафаревич, *Группа главных однородных алгебраических многообразий*, Доклады АН СССР **124** (1959), no. 1, 42–43.
22. A. Mattuck, *Abelian varieties over p -adic ground fields*, Ann. of Math. **62** (1955), no. I, 92–119.
23. I. Igusa, *Analitic groups over complete fields*, Proc. Nat. Acad. Sc. Wash. **42** (1956), no. 8, 540–541.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

ТРУДЫ МАТ. ИНСТ. ИМ. В.А.СТЕКЛОВА, 75, 3-6, 1965

Предисловие

Основные факты теории алгебраических поверхностей были найдены во второй половине прошлого и в начале этого века М.Нетером, Пикаром, Пуанкаре и в особенности классиками итальянской школы алгебраической геометрии — Кастельнуово, Энриквесом и Севери. Полученные ими результаты были отправным пунктом следующего этапа развития алгебраической геометрии, который основывался на применении топологических, аналитических и алгебраических методов.

При этом выяснилось, что результаты, составляющие “классическую” теорию алгебраических поверхностей, распадаются на две принципиально различные группы.

Некоторые из них оказались частными случаями общих теорем об алгебраических многообразиях (или схемах) произвольной размерности. Наиболее яркие примеры дают теория многообразий Пикара и абелевых многообразий или теорема Римана–Роха. Интересно заметить, что почти все результаты, содержащиеся в классическом обзоре Зариского [16], относятся именно к этому кругу вопросов. Сейчас имеется большое количество прекрасных изложений относящихся сюда теорий.

Результаты другой группы оказались специфичными именно для случая алгебраических поверхностей. К ним относятся такие основные факты этой теории, как критерий рациональности и линейчатости алгебраической поверхности, решение проблемы Люрота, теория минимальных моделей и большой комплекс результатов, которые итальянские алгебраические геометры объединяли названием “классификация алгебраических поверхностей”.

По-видимому, все эти результаты не переносятся на многообразия высших измерений без очень существенных изменений и самый характер этих изменений в настоящее время совершенно неясен. Имеется немного работ, посвященных тому, чтобы снабдить эти

результаты доказательствами, строгими с современной точки зрения и основывающимися на современной технике, и по возможности их дополнить. Первые (и основные) работы в этом направлении — это предложенное Кодайрой [48] доказательство критерия рациональности, а также статьи и книга Зариского [19] по проблеме минимальных моделей. Цель настоящей книги — дать связное изложение всего этого круга вопросов. Ниже приводим краткое описание содержания книги.

Вся теория основывается на связи рациональных отображений многообразия в проективное пространство с классами дивизоров на этом многообразии (см., например, [30]). Как известно, в случае алгебраических кривых “почти всегда” (для негиперэллиптических кривых) отображение, соответствующее каноническому классу, является бирациональным и определяет так называемую каноническую модель кривой однозначно, с точностью до проективного преобразования. Таким образом, задача бирациональной классификации сводится к вопросам проективной классификации пространственных кривых.

Отображение, соответствующее удвоенному или утроенному каноническому классу, играет ту же роль для всех кривых, кроме рациональных и эллиптических. Для этих же кривых отображение, соответствующее любой кратности канонического класса, не является бирациональным. Этот метод непригоден вообще для их описания, которое, впрочем, получается легко из других соображений.

Речь идет о том, чтобы получить аналогичную картину для алгебраических поверхностей. Сначала выделяется класс тех поверхностей, для которых некоторая кратность канонического класса дает бирациональное отображение. Доказывается, что всегда достаточно взять канонический класс с кратностью, не больше девяти (но кратность 3, которая играет роль в теории кривых, может быть недостаточна, как показывают примеры). Поверхности этого типа могут быть характеризованы простым способом — это те нерациональные поверхности, для которых индекс самопересечения канонического класса положителен.

Дальнейшая цель заключается в описании остальных поверхностей, для которых никакая кратность канонического класса не определяет бирационального отображения. Эти поверхности аналогичны, с этой точки зрения, рациональным и эллиптическим кривым. Их конструктивное описание также в значительной степени аналогично описанию этих кривых. Именно, поверхности, о которых идет речь, распадаются на следующие пять групп: 1) рациональные поверхности; 2) двумерные абелевы многообразия; 3) линей-

чатые поверхности, т.е. поверхности, расслоенные на семейства рациональных кривых; 4) поверхности, расслоенные на семейство эллиптических кривых, и 5) еще один тип поверхностей, которые близки к абелевым многообразиям в том смысле, что их канонический класс равен нулю, но у которых, в отличие от абелевых многообразий, одномерное число Бетти равно нулю.

Чтобы разобраться во всем множестве этих типов поверхностей, их делят на четыре группы в зависимости от значения важного инварианта, который обозначается через κ . Через κ обозначается максимальная размерность образа поверхности при рациональных отображениях, соответствующих всевозможным кратностям канонического класса. Очевидно, что всегда $\kappa \leq 2$. Если линейные системы, соответствующие всем кратностям канонического класса, пусты, то мы полагаем $\kappa = -1$. Таким образом, κ может принимать четыре значения: $-1, 0, 1$ и 2 . Окончательная цель классификации — дать характеристику поверхностей с заданным значением κ при помощи так называемых численных инвариантов (индекса самопересечения канонического класса, кратных родов, определяемых формулой (11), и иррегулярности, определяемой формулой (12)) и указать их конструктивное описание. Результаты классификации сведены в таблице в конце введения.

В книге имеется также ряд результатов, выходящих за рамки описанной выше теории, хотя с ней и связанных.

Скажем подробнее о некоторых: теории бирациональных преобразований поверхностей, теории минимальных моделей, теореме М.Нетера.

Теория бирациональных преобразований поверхностей основывается на понятии σ -процесса. Это бирациональное преобразование

$$f: V \rightarrow V'$$

неособых поверхностей V и V' , которое бирегулярно всюду, кроме точки $P \in V$ и кривой $C \subset V'$, причем f^{-1} регулярно и $f^{-1}(C) = P$. Основные результаты:

1) если φ — такое бирациональное отображение

$$\varphi: V \rightarrow V'$$

неособых поверхностей, что φ^{-1} регулярно отображает V' на V , то φ является произведением конечного числа σ -процессов;

2) любое бирациональное преобразование неособой поверхности в неособую является произведением конечного числа σ -процессов и конечного числа преобразований, обратных σ -процессам.

Теория минимальных моделей изучает такие поверхности V (называемые минимальными), что любое регулярное бирациональное

преобразование $f: V \rightarrow V'$ является бирегулярным. Всякая поверхность бирационально эквивалентна минимальной, из которой она получается, следовательно, конечным числом σ -процессов. Основная теорема заключается в том, что в классе бирационально эквивалентных друг другу поверхностей имеется только одна минимальная, если эти поверхности не являются линейчатыми.

Минимальные модели линейчатых (в частности, рациональных) поверхностей все описаны.

Наконец, теорема М.Нетера касается структуры группы всех бирациональных преобразований проективной плоскости (или, что то же самое, группы автоморфизмов поля рациональных функций $k(x, y)$ от двух переменных). Она утверждает, что эта группа порождается так называемыми квадратичными преобразованиями:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}, \quad y' = \frac{a_3x + b_3y + c_3}{a_4x + b_4y + c_4}.$$

Классические результаты, излагаемые в этой книге, собраны почти все в обзоре Энриквеса [59]. Настоящая работа чрезвычайно многим обязана книге Энриквеса. Доказательства большей части теорем основаны на идеях Энриквеса. В то же время в проведении деталей доказательств следовать Энриквесу вряд ли возможно — например, по обычаям того времени и той школы он часто ограничивается рассмотрением “общего” случая, не разбирая наиболее неприятные случаи, которые могут представиться. С другой стороны, в некоторых вопросах мы могли дополнить классические результаты новыми. Это относится, например, к некоторым результатам, изложенным в главах V, VII и IX. Наконец, в очень редких местах имеются расхождения с утверждениями Энриквеса.

Мы не стремились к максимально возможной общности в условиях, накладываемых на основное поле. Все результаты верны, если это поле совпадает с полем комплексных чисел. Однако большинство рассуждений сохраняет свою силу, если основное поле алгебраически замкнуто и имеет характеристику 0, а некоторые — для произвольного алгебраически замкнутого поля. Более подробно об этом сказано в каждой из глав.

. Настоящая книга написана на основе докладов на семинаре по теории алгебраических поверхностей, который работал в 1961–1962 и 1962–1963 г.г. под руководством И.Р.Шафаревича. Тексты докладов были затем переработаны, а некоторые части написаны заново. Отдельные главы написаны следующими авторами: гл. I, II и III — А.Б.Жиженко, гл. IV и VII — И.Р.Шафаревичем, гл. V §1 и 2 — Ю.И.Маниным, §§3–6 — Ю.Б.Вайнбергом и Ю.И.Маниным, §7 — А.Н.Тюриным, гл. VI — Б.Г.Мойшезоном, гл. VIII и X — Б.Г.Авербухом, гл. IX — Г.Н.Тюриной.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

ТРУДЫ МАТ. ИНСТ. ИМ.

В.А.СТЕКЛОВА N 75, 48-75, 1965

Глава IV ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

В этой главе будут исследованы линейчатые поверхности и будет доказано, в частности, что они характеризуются условием $P_{12} = 0$. Если они нерациональные, то $q > 0$. Будет доказано, что если $q > 1$, то уже условие $p = 0$ достаточно для того, чтобы поверхность была линейчатой. При $q = 1$ этого условия недостаточно. Все поверхности с $p = 0, q = 1$ будут найдены и будет проверено, что те среди них, у которых $P_{12} = 0$, линейчатые. Таким образом, в этой главе будет дана классификация поверхностей более общего вида, чем линейчатые нерациональные поверхности — всех поверхностей с $p = 0, q > 0$. Мы будем предполагать, что основное поле k является полем комплексных чисел. Тем не менее все рассуждения проходят в случае, когда k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Мы специально отмечаем те места, в которых предположение $k = C$ существенно.

Простейшие свойства

Определение. Поверхность V называется линейчатой, если она бирационально эквивалентна прямому произведению алгебраической кривой на проективную прямую.

Теорема 1. Если поверхность линейчатая:

$$V = B \times P^1,$$

где B — алгебраическая кривая, то $P_n(V) = 0, n \geq 1$ и иррегулярность q поверхности V совпадает с (геометрическим) родом кривой B .

Доказательство. Ввиду бирациональной инвариантности чисел P_n и q мы можем предполагать, что

$$V = B \times P^1, \quad (1)$$

где B — неособая кривая. Пусть вообще $X = B \times C$, где B и C — неособые кривые, а α и β — одномерные дифференциальные формы на B и C соответственно, (α) и (β) — их дивизоры. Если π_1 и π_2 — проекции V на B и C , то форма

$$\omega = \pi_1^*(\alpha)\pi_2^*(\beta)$$

является двумерной дифференциальной формой на V . Очевидно, что

$$(\pi_1^*(\alpha)) = \pi_1^{-1}((\alpha)) = (\alpha) \times C,$$

$$(\pi_2^*(\beta)) = \pi_2^{-1}((\beta)) = B \times (\beta),$$

$$K(B \times C) = K(B) \times C + B \times (C), \quad (2)$$

$$(\omega) = (\alpha) \times C + B \times (\beta). \quad (3)$$

Отсюда следует, что если $V = B \times P^1$, то

$$K \cdot (b \times P^1) = -2((B \times a)(b \times P^1)) = -2 < 0, \quad b \in B, \quad a \in P^1$$

и, следовательно, $(nK \cdot (b \times P^1)) < 0$ для любого $n > 0$. Если бы хоть для одного $n > 0$ мы имели $P_n > 0$, то существовал бы дивизор D , $D > 0$, $D \sim nK$. Тогда должно было бы быть $(D \cdot (b \times P^1)) < 0$. Но это невозможно: если $D = \sum n_i c_i + \sum m_j (b_j \times P^1)$, то $(D \cdot (b \times P^1)) = \sum n_i (C_i \cdot (b \times P^1)) \geq 0$.

Для доказательства утверждения, касающегося иррегулярности, воспользуемся тем, что для любых многообразий B и C многообразие Альбанезе обладает свойством

$$A(B \times C) = A(B) \times A(C).$$

В частности, из (1) мы получаем

$$A(V) = a(B) \times A(P^1) = A(B),$$

а так как

$$q = \dim A(V), \quad g = \dim A(B),$$

где g — род кривой B , то это и доказывает наше утверждение.

Основная задача этой главы заключается в доказательстве обратного утверждения в его более точной форме: поверхность является линейчатой, если $P_{12} = 0$. При этом мы будем исходить из теоремы Нетера (гл.1, §3). Переформулируем эту теорему геометрически: вложению $K_1 = k(B) \rightarrow K = k(V)$ соответствует рациональное отображение

$$\pi : V \rightarrow B,$$

причем, если ξ — общая точка кривой B , то поле K/K_1 является полем функций на кривой $\pi^{-1}(\xi)$. Таким образом, теореме Нетера можно придать следующую формулировку:

Теорема 2. Если существует такое рациональное отображение

$$\pi : V \rightarrow B$$

поверхности V на кривую B , что прообраз $\pi^{-1}(\xi)$ общей точки ξ кривой B является неприводимой кривой рода 0, то V — линейчатая поверхность.

Мы будем пользоваться этой теоремой в частном случае, когда π — регулярное отображение. Тогда оно определяет расслоение V на непересекающиеся слои $F_b = \pi^{-1}(b)$, $b \in B$. Мы будем часто называть π расслоением, а F_b — его слоями. Способ конструкции такого расслоения основывается на рассмотрении отображения Альбанезе.

§2. Отображение Альбанезе при $p = 0, q > 0$

Теорема 3. Если $\alpha_V : V \rightarrow A(V)$ — отображение Альбанезе поверхности X , для которой $p = 0, q > 0$, то 1) $\alpha_V(V)$ является алгебраической кривой, 2) кривая $\alpha_V(V)$ — неособая и 3) род кривой $\alpha_V(V)$ равен q .

Доказательство 1). Так как многообразие $\alpha_V(V)$ порождает все $A(V)$, а $\dim A(V) = q > 0$, то и $\dim \alpha_V(V) > 0$, т.е. $\dim \alpha_V(V) = 1$ или 2.

Докажем, что $\dim \alpha_V(V) \neq 2$. Предположим, что $\dim \alpha_V(V) = 2$, и пусть a — неособая точка поверхности. Так как отображение α_X определено с точностью до сдвига многообразия $A(V)$, то мы можем считать, что $a = 0$. Пусть σ — бивектор, соответствующий в касательном пространстве к $A(V)$ в точке 0 плоскости, касательной к $\alpha_V(V)$ в этой точке, а s — такой двумерный элемент грассмановой алгебры, что $(s, \sigma) \neq 0$. Инвариантную дифференциальную форму, соответствующую s , обозначим через ω . Очевидно, что ω — дифференциал 1-го рода на $A(V)$. Из условия $(s, \sigma) \neq 0$ следует,

что ω не равен тождественно нулю в точке 0. Отсюда следует, что дифференциал 1-го рода $\alpha_X^*(\omega)$ на V не обращается тождественно в 0, а это противоречит условию $p = 0$.

Доказательство 2). Положим $\alpha_V(V) = B$. Пусть B_H — нормализация B и $N: B_H \rightarrow B$ — каноническое отображение. Так как N является бирациональной эквивалентностью, то существует рациональное отображение $\nu: B \rightarrow B_H$, $\nu = N^{-1}$. Пусть $\varphi = \nu \cdot \alpha$, $\varphi: V \rightarrow B_H$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A(V) & \xrightarrow{\alpha(\varphi)} & A(B_H) \\ \psi_2 \uparrow & & \uparrow \psi_1 \\ B & \xleftarrow{N} & B_H. \end{array} \quad (4)$$

Здесь ψ_2 — вложение B в $A(V)$. Так как (геометрический) род кривой B , а значит и B_H отличен от 0 (см. [31], гл. II), то каноническое отображение ψ_1 кривой B_H в $A(B_H)$ тоже является вложением, которое мы можем считать единичным отображением. Отображение $\alpha(\varphi)$ регулярно, а следовательно, регулярно и отображение $N': B \rightarrow B_H$; $N' = (\alpha(\varphi)|_B) \cdot \psi_2$. Из диаграммы (4) следует, что $NN' = 1$, $N'N = 1$, т.е. N — бирегулярная эквивалентность B и B_H , и значит $B = B_H$ не имеет особых точек.

Доказательство 3). Так как $B = B_H$, то (4) сводится к схеме

$$\begin{array}{ccc} A(V) & \xrightarrow{\alpha(\varphi)} & A(B) \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ & B & \end{array}$$

Согласно свойству универсальности многообразия Альбанезе существует отображение $\eta: A(B) \rightarrow A(V)$, делающее коммутативной схему

$$\begin{array}{ccc} A(V) & \xleftarrow{\eta} & A(B) \\ \psi_2 \swarrow & & \searrow \psi_1 \\ & B & \end{array}$$

Отсюда следует, что $\psi_2 = \eta\psi_1$ и $\psi_1 = \alpha(\varphi)\psi_2$, т.е.

$$\psi_1 = \alpha(\varphi)\eta\psi_1, \quad \psi_2 = \eta\alpha(\varphi)\psi_2.$$

Так как $\text{Im}\psi_1$ и $\text{Im}\psi_2$ порождают $A(B)$ и $A(V)$, то отсюда следует, что $\alpha(\varphi)\eta = 1$, $\eta\alpha(\varphi) = 1$, т.е. что $A(V)$ изоморфно $A(B)$. Это доказывает 3) и теорему 3).

Мы обозначим α_V через π и получим регулярное отображение (или расслоение)

$$\pi : V \rightarrow B$$

на неособую кривую B рода q .

Теорема 4. *Общий слой расслоения π неприводим.*

Доказательство. Мы видели, что утверждение теоремы 4 равносильно тому, что поле $k(b)$ алгебраически замкнуто в поле $k(V)$. Если это не так, то пусть K' — алгебраическое замыкание $k(B)$ в $k(V)$ и B' — неособая модель поля K' . Вложение $k(B') = K' \subset k(V)$ определяет рациональное отображение и значит эпиморфизм $A(V) \rightarrow A(B')$.

Отсюда следует, что род g кривой B' не меньше, чем q . Но B' является накрытием B (так как $k(B) \subset k(B')$) и, следовательно, $g \geq q$. Мы видим, что $g = q$. Согласно формуле Гурвица для рода накрытия, равенство $g = q$ возможно только при $g = q = 1$. Таким образом, $A(V) = B$, $A(B') = B'$ и мы имеем отображения

$$A(V) \xrightarrow{\varphi} B', \quad B' \xrightarrow{\psi} B, \quad \psi\varphi = \alpha_V.$$

Согласно свойству универсальности многообразия Альбанезе существует отображение $\chi : B \rightarrow B'$, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & A(B) \\ & \searrow \varphi & \swarrow \chi \\ & B & \end{array}$$

Отсюда, как при доказательстве теоремы 3, легко получается, что χ и ψ являются изоморфизмами, т.е. что $B' = B$ и $K' = k(B)$. Теорема доказана.

§3. Случай $q > 1$

Мы будем все время предполагать в этом параграфе, что для поверхности V

$$p = 0, \quad q > 1. \quad (5)$$

Лемма 1. Для поверхности, удовлетворяющей условиям (5),

$$(K^2) < 0.$$

Действительно, согласно формуле (4) введения

$$\frac{(K^2) + \chi}{12} = 1 - q + p = 1 - q,$$

так что

$$(K^2) = -\chi + 12(1 - q).$$

Так как $\chi = 2 - 4q + b_2$, то

$$(K^2) = -2 + 4q - b_2 + 12(1 - q),$$

$$(K^2) = 8(1 - q) + 2 - b_2.$$

Так как $q \geq 2$, $b_2 \geq 1$, то отсюда следует, что $(K^2) \leq -7$.

Следствие. Если E — гиперплоское сечение, то $l(E + mK) = 0$ при достаточно больших m . Если $l(E + nK) > 0$, $l(E + mK) = 0$, при $m > n$, то

$$E + nK \sim D > 0, \quad D \neq 0 \text{ и } p_a(C) \leq q \quad (6)$$

для любого цикла C , для которого $0 < C < D$.

Все утверждения, кроме того, что $D \neq 0$, следует из леммы 3 (§1, гл. III). То, что $D \neq 0$ следует из того, что иначе было бы $E \sim -nK$, в то время, как $(E^2) > 0$, $(K^2) < 0$.

Лемма 2. Если C неприводимая кривая на X , π — расслоение, введенное в предшествующем параграфе, и F_b — его слой, то или $C = F_b$ или

$$p_a(C) \geq (C \cdot F)(q - 1) + 1. \quad (7)$$

Доказательство. Если $C \neq F_b$, то отображение $f = \pi/C$ определяет C как накрытие B . Степень этого накрытия равна $C \cdot F$. Действительно, по определению эта степень равна степени дивизора $f^{-1}(b)$. Рассматривая π на V локально как функцию и пользуясь равенством

$$\deg(\pi/C)_0 = ((\pi_0) \cdot C)$$

$((\pi)_0$ и $(\pi/C)_0$ — дивизоры нулей функций π и π/C на V и C соответственно), мы получим, что $\deg f^{-1}(b) = (F_b \cdot C)$. Применяя теперь формулу Гурвица для рода накрытия, мы получим для геометрического рода кривой γ неравенство $\gamma \geq (F \cdot C)(q - 1) + 1$, а так как $p_a(C) \geq \gamma$, то отсюда следует (7).

Лемма 3. Если род g общего слоя F расслоения π отличен от 0, то $(F \cdot K) \geq 0$.

Действительно, по условию

$$\frac{F \cdot (F + K)}{2} + 1 \geq 1,$$

а так как $(F^2) = 0$, то $(F \cdot K) \geq 0$.

Следствие. В тех же предположениях для дивизора D в (6) $(D \cdot F) \geq 3$.

Так как $D \sim E + nK$, то $(D \cdot F) = (E \cdot F) + n(K \cdot F) \geq (E \cdot F)$. Очевидно, что $(E \cdot F)$ — это степень кривой F . Если бы эта кривая имела степень 1 или 2, то она была бы рациональной, что противоречит условию $g > 0$.

Теорема 5. Алгебраическая поверхность V с инвариантами $p = 0$ и $q > 1$ является линейчатой.

При доказательстве мы можем предполагать, что V является относительно минимальной моделью и, следовательно, не содержит исключительных кривых 1-го рода.

Рассмотрим отображение $\pi : V \rightarrow B$, построенное в предшествующем параграфе. Оно удовлетворяет всем предположениям теоремы 2 за исключением того, что мы еще не знаем, что род g общего слоя равен 0. Если мы это докажем, то теорема 5 будет следовать из теоремы 2.

Предположим, что $g \geq 1$. Пусть дивизор D , существование которого доказано в следствии леммы 1, имеет вид $D = \sum_1^m n_i C_i$, где C_i — различные неприводимые кривые. Согласно следствию леммы 3, $(D \cdot F) \geq 3$.

Рассмотрим отдельно три случая, которые вместе покрывают все возможности:

- 1) хотя бы для одного из C_i , например, при $i = 1$, $(C_i F) \geq 2$,
- 2) для всех C_i $(C_i F) \leq 1$, но $m \geq 2$,
- 3) $D = nC$, $(C \cdot F) = 1$, $n \geq 3$.

В случае 1) мы можем вычислить $p_a(C_1)$ разными способами на основании леммы 2 и формулы (6). Мы получаем противоречие:

$$p_a(C_1) \leq q, \quad p_a(C_1) \geq 2(q - 1) + 1 = 2q - 1.$$

В случае 2) хотя бы для одного из C_i , например, при $i = 1$, $(C_i F) = 1$, так как $(D \cdot F) > 0$. По условию существует еще кривая C_2 . Применим формулу (6) к $C = C_1 + C_2$:

$$p_a(C_1 + C_2) \leq q.$$

Так как $p_a(C) = \frac{(C \cdot (C+K))}{2} + 1$, то

$$p_a(C_1 + C_2) = p_a(C_1) + p_a(C_2) + (C_1 C_2) - 1.$$

Согласно лемме 2,

$$p_a(C_1) \geq q,$$

так что

$$p_a(C) \geq q + p_a(C_2) + (C_1 C_2) - 1.$$

Если и $(C_2 F) = 1$, то $p_a(C_2) \geq q$, и так как $(C_1 C_2) \geq 0$, мы получаем противоречие с (6):

$$p_a(C) \geq 2q - 1.$$

Если же $(C_2 \cdot F) = 0$, то $C_2 = F_b$, ($b \in B$), $p_a(C_2) \geq 1$ и $(C_1 C_2) = (C_1 \cdot F) = 1$, так что мы опять получаем противоречие с (6):

$$p_a(C) \geq q + 1.$$

В случае 3) мы рассуждаем совершенно аналогично, применяя (6) и лемму 2 к кривой $2C$. Получается, что

$$p_a(2C) \leq q, \quad p_a(2C) \geq 2q + (C^2) - 1.$$

Мы получим противоречие, если докажем, что $(C^2) \geq 0$. Но $(C^2) < 0$ дает $(C \cdot D) < 0$, т.е. $(C \cdot (E + nK)) < 0$, а значит $(C \cdot K) < 0$, так как $(C \cdot E) > 0$. Поэтому $(C^2) + (CK) = 2p_a(C) - 2 < 0$, что возможно, только если $(C^2) = -1$, $p_a(C) = 0$, т.е. если C является исключительной кривой 1-го рода. Так как мы предположили, что таких кривых на V нет, то тем самым теорема доказана.

§4. Регулярные отображения алгебраических поверхностей на кривые

Рассмотрим произвольное регулярное отображение $\pi : V \rightarrow B$ алгебраической поверхности V на неособую алгебраическую кривую B с неприводимым общим слоем F . Пусть q и g — роды B и F . Мы будем предполагать известными следующие свойства таких расслоений (см., например, [25]).

Слой $F_b = \pi^{-1}(b)$ связан для всех $b \in B$. Для всех точек $b \in B$, кроме, быть может, конечного числа, F_b является неприводимой

неособой алгебраической кривой рода g . Множество точек $\{b_1, \dots, b_s\}$, для которых это не имеет места, обозначим через S , а соответствующие слои F_b , будем называть вырожденными или особыми.

Расслоение π , ограниченное на $V - \pi^{-1}(S)$:

$$\pi : V - \pi^{-1}(S) \rightarrow B - S$$

является (если $k = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел) локально тривиальным дифференцируемым расслоением.

Через $\chi(L)$ мы будем обозначать эйлерову характеристику топологического пространства L . В частности, если

$$L = F_b = \sum_1^m n_i C_i, \quad n_i > 0, \quad \text{то } \chi(F_b) = \chi(F'), \quad F' = \sum_1^m C_i.$$

Теорема 6. В случае $k = \mathbb{C}$

$$\chi(V) = \chi(F)\chi(B) + \sum_1^s (\chi(F_{b_i}) - \chi(F)). \quad (8)$$

Доказательство (Предложено А.Б. Жижченко). . Положим $\tilde{V} = V - \pi^{-1}(S)$. Из точной последовательности когомологий, определенной пространством, замкнутым подпространством и его дополнением, следует, что

$$\chi(V) = \chi(\tilde{V}) + \chi(\pi^{-1}(S)). \quad (9)$$

Очевидно, что

$$\chi(\pi^{-1}(S)) = \sum_1^s \chi(F_{b_i}). \quad (10)$$

Так как $V \rightarrow B - S$ является локально тривиальным расслоением (как расслоение дифференцируемых многообразий), то из спектральной последовательности Лере для этого расслоения вытекает, что

$$\chi(\tilde{V}) = \chi(F)\chi(B - S). \quad (11)$$

Наконец,

$$\chi(B) = \chi(B - S) + s \quad (12)$$

(s — число точек в S), как, например, следует из точной последовательности, аналогично рассмотренной при выводе (9). Сопоставляя (9), (10), (11) и (12), получаем (8).

Лемма 4. Если C — связная кривая (быть может, приводимая) на поверхности V , то

$$\chi(C) \geq -(C \cdot (C + K)), \quad (13)$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда C является неприводимой неособой кривой.

Доказательство. Пусть $C = \sum C_i$, $\bar{C}$ — нормализация C , т.е. несвязная сумма нормализаций $\bar{C}_i$ кривых C_i , и

$$\varphi: \bar{C} \rightarrow C$$

— каноническое регулярное отображение. Во всех точках, кроме конечного числа, φ является бирегулярной эквивалентностью. Поэтому обычный способ вычисления эйлеровой характеристики дает

$$\chi(C) = \chi(\bar{C}) - \delta,$$

где

$$\delta = \sum_{c \in C} (\deg(\varphi^{-1}(c)) - 1). \quad (14)$$

Если род кривой $\bar{C}_i$ равен g_i , то

$$\begin{aligned} \chi(\bar{C}) &= \sum \chi(\bar{C}_i) = 2 \sum (1 - g_i), \\ g_i &= p_a(C_i) - \delta_i \end{aligned}$$

(ввиду формулы (5) введения).

Таким образом,

$$\begin{aligned} \chi(C) &= 2 \sum (1 - p_a(C_i)) + 2 \sum \delta_i - \delta = \\ &= - \sum (C_i \cdot (C_i + K)) + 2 \sum \delta_i - \delta. \end{aligned}$$

Пусть в точку $s \in C$ при отображении φ переходит n_i точек кривой C_i . Тогда соответствующее слагаемое в формуле (14) равно

$$\left(\sum_1^m n_i \right) - 1 = \sum_1^l (n_i - 1) + l - 1,$$

если $n_i > 1$ для $i = 1, \dots, l$ и $n_i = 1$ для $i = l + 1, \dots, m$. При этом слагаемое, соответствующее точке s в выражении для δ_i не меньше, чем $n_i - 1$, а число $l - 1$ — не меньше, чем кратность точки s в дивизоре $\sum_{i < j} (C_i C_j)$. Отсюда вытекает, что

$$\delta \leq \sum_i \delta_i + \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j). \quad (15)$$

Тем более

$$2\delta_i - \delta \geq -2 \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j), \quad (16)$$

так что

$$\begin{aligned} \chi(C) &\geq -\sum (C_i(C_i + K)) - 2 \sum_{i < j} (C_i \cdot C_j) = \\ &= -\left(\left(\sum C_i\right) \cdot \left(\sum C_i + K\right)\right) = -(C \cdot (C + K)). \end{aligned}$$

Ввиду (16) в (13) имеет место знак равенства, только если все $\delta_i = 0$ и $(C_i \cdot C_j) = 0$, при $i \neq j$. Первое означает, что кривые не особые, а второе — что они друг с другом не пересекаются. Так как мы предполагаем кривую связной, то это значит, что она состоит из одной компоненты. Лемма доказана.

Лемма 5. Если слой F_b отображения π имеет вид $\sum n_i C_i$, то для $C = \sum m_i C_i$, $m_i \geq 0$, $(C^2) \leq 0$.

Воспользуемся равенством

$$(C \cdot F) = 0, \quad (17)$$

которое очевидно, если взять слой F , отличный от F_b .

Если бы мы имели $(C^2) > 0$, то для гиперплоского сечения E и достаточно большого n

$$l(nC - E) > 0,$$

как непосредственно следует из неравенства Римана–Роха.

Пусть $nC - E \sim D > 0$, т.е.

$$nC \sim E + D.$$

Так как $(D \cdot F) \geq 0$, а $(E \cdot F) > 0$, то отсюда мы получаем, что $(C \cdot F) > 0$ в противоречии с (17).

Теорема 7 (полунепрерывность эйлеровой характеристики). Если F — неособый, а F_0 — особый слой расслоения π и поверхность V является относительно минимальной моделью, то

$$\chi(F_0) \geq \chi(F), \quad (18)$$

причем равенство имеет место только в том случае, когда род F равен 1, а F_0 является неособой кривой рода 1, взятой с некоторой кратностью.

Доказательство. Очевидно, что

$$\chi(F) = 2 - 2g = -(F \cdot (F + K)) = -(F \cdot K),$$

так как $(F^2) = 0$.

Пусть $F_0 = \sum n_i C_i$, $n_i \geq 1$; положим $F' = \sum C_i$.

Из леммы 4 следует, что

$$\chi(F_0) - \chi(F) = \chi(F') - \chi(F) \geq -(F'^2) + ((F - F') \cdot K).$$

Согласно лемме 5, $(F'^2) \leq 0$. Нам остается доказать, что $(F - F')K \geq 0$.

Если бы для некоторого C_i было $(C_i \cdot K) < 0$, мы имели бы

$$(C_i(C_i + K)) < (C_i^2),$$

а значит

$$2p_a(C_i) - 2 < (C_i^2).$$

Так как $(C_i^2) \leq 0$ по лемме 5, то $p_a(C_i) - 1 < 0$, т.е. $p_a(C_i) = 0$, а $-2 < (C_i^2) \leq 0$. Для C_i^2 имеется, следовательно, два значения: -1 и 0. Первый случай обозначал бы, что C_i — исключительная кривая 1-го рода, что противоречит тому, что V — относительно минимальная модель. Пусть $(C_i^2) = 0$. Из условия мы получаем:

$$n_i(C_i^2) = - \sum_{j \neq i} n_j(C_i C_j) = 0.$$

Так как $(C_i C_j) \geq 0$ при $i \neq j$, то отсюда следует, что $(C_i C_j) = 0$ для всех $i \neq j$, а это противоречит связности слоя F_b , если существует кривая $C_j \neq C_i$. Значит, $F_0 = n C_i$. Неравенство $p_a(F) \geq 0$ дает нам вместе с формулой для p_a :

$$0 \leq p_a(F) = p_a(nC_i) = np_a(C_i) + (n^2 - n)(C_i^2) + 1 - n = 1 - n,$$

т.е. $0 \leq 1 - n$, что возможно только при $n = 1$. Таким образом, все $n_i = 1$. Но в этом случае $F_0 = F'$ и $((F - F') \cdot K) = ((F_0 - F') \cdot K) = 0$. Неравенство (18) доказано.

Выясним теперь, когда в нем может иметь место знак равенства. Тогда все встречавшиеся по дороге неравенства должны быть равенствами. В частности, это относится к неравенству $\chi(F') \geq -(F' \cdot (F' + K))$, которое, согласно лемме 4, является равенством только, если $F_0 = nC$, где C — неприводимая неособая кривая, $n \geq 2$. Точно так же равенством должно быть и неравенство

$$-(F')^2 + ((F - F') \cdot K) \geq 0,$$

которое мы доказали. Так как при этом выяснилось, что слева каждый член неотрицателен, то $((F - F') \cdot K) = (n - 1)(C \cdot K) = 0$ и значит $(C \cdot K) = 0$ и $(F \cdot K) = 0$. Из того, что $(F^2) = 0$, следует, ввиду $F_0 = nC$, что $(C^2) = 0$. Значит

$$p_a(F) = \frac{(F^2) + (F \cdot K)}{2} + 1 = 1,$$

$$p_a(C) = \frac{(C^2) + (C \cdot K)}{2} + 1 = 1,$$

что и утверждалось.

§5. Случай $q = 1$

Лемма 6. Для поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ имеет место неравенство $(K^2) \leq 0$.

Действительно, в этом случае $p_a(V) = 1 - q + p = 0$.

Из формулы (4) введения следует, что $(K^2) + \chi = 12p_a(V) = 0$, т.е.

$$(K^2) = -\chi.$$

Рассмотрим расслоение $\pi : V \rightarrow B$, определенное отображением Альбанезе. Из теорем 6 и 7 мы получаем (так как $\chi(B) = 0$), что $\chi \geq 0$, а значит $(K^2) \leq 0$.

Замечание. Другое доказательство можно получить, исходя из формулы (4) введения, которая в нашем случае дает

$$(K^2) = 2 - b_2.$$

Нам достаточно доказать, что $b_2 \geq 2$, и для этого указать на V два независимых класса гомологий. Такими классами являются, например, классы, определенные циклами E (гиперплоское сечение) и F (один из слоев расслоения π). Они независимы, так как $(E^2) > 0$, $(F^2) = 0$. Мы разберем дальше отдельно случаи $(K^2) < 0$ и $(K^2) = 0$.

§6. Случай $(K^2) < 0$

Теорема 8. Поверхность с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, $(K^2) < 0$ является линейчатой.

Доказательство. Рассмотрим все то же расслоение $\pi : V \rightarrow B$, которое теперь совпадает с отображением Альбанезе. Если род g общего слоя F равен 0, то поверхность V линейчатая. Если $g = 1$, то X обладает расслоением на эллиптические кривые. В гл. VII (теорема 3) будет доказано, что у такой поверхности $(K^2) = 0$, что противоречит предположению $(K^2) < 0$. Остается рассмотреть случай $g > 1$.

План доказательства теоремы 8 таков. Для некоторого неразветвленного накрытия C кривой B с проекцией $\varphi : C \rightarrow B$ мы рассмотрим обратный образ $V' = V \times_B C$ расслоения π на C , т.е. подмножество $C \times V$, состоящее из точек (c, v) , для которых $\varphi(c) = \pi(v)$. Проекция $C \times V \rightarrow C$ определяет на V проекцию $\pi' : V' \rightarrow C$ и расслоение, слои которого изоморфны слоям π . Сама поверхность V' является неразветвленным накрытием V . Мы покажем, предположив, что $g > 1$, что для надлежащим образом выбранного накрытия C поверхность V' будет прямым произведением $C \times F$. Отсюда следует (на основании формулы (2)), что на $V' K' \sim C \times K(F)$, где K' и $K(F)$ — канонические классы X' и V . Поэтому $(K'^2) = 0$. Но если $f : V' \rightarrow V$ — неразветвленное накрытие степени n , то, как легко проверить, $K' = f^*(K)$, и поэтому

$$K' \cdot K' = f^*(K)f^*(K) = f^*(K \cdot K)$$

(мы рассматриваем здесь $K' \cdot K'$ и $K \cdot K$ как циклы, а не как числа). Поэтому $(K'^2) = n(K^2)$ и значит $(K^2) = 0$ в противоречии с условием теоремы. Это и доказывает теорему 8.

Применяя следствие леммы 1 (в котором, очевидно, можно заменить E на $E + F_b - F_0$), мы получим, что для любой точки $b \in B$ существует такое $n > 0$ и такой дивизор $D_b > 0$, что

$$E + F_b - F_0 + nK \sim D_b, \quad D_b \neq 0, \quad p_a(C) \leq 1 \quad (19)$$

для любого цикла C , для которого $0 < C < D_b$. Отсюда следует, что цикл D_b не может содержать в качестве компонента слой F , так как для него $p_a(F_b) = g > 1$. Поэтому любая неприводимая компонента C цикла D_b отображается проекцией π на B и, следовательно, не является рациональной кривой. Значит, для нее $p_a(C) = 1$, она не имеет особых точек и имеет род 1.

Пусть β — общая точка кривой B . Обозначим через C_β некоторую неприводимую (над $k(\beta)$) компоненту цикла D_β . Для любого $b \in B$ мы будем подразумевать под C_b специализацию кривой C_β . Точнее говоря, обозначим через ξ_β общую точку кривой C_β и рассмотрим в $B \times V$ неприводимое подмногообразие Γ с общей точкой (β, ξ_β) . Мы положим

$$C_b = \text{pr}_V((b \times V) \cdot \Gamma).$$

Цикл C_b состоит из компонент размерности 1. Иначе его носитель совпадал бы с V , т.е. Γ содержал бы компоненту $b \times V$, что противоречит его неприводимости. Пусть $C_\beta = \sum C_\beta^{(i)}$ — разложение на абсолютно неприводимые компоненты. Мы определим совершенно аналогично их специализации $C_b^{(i)}$. Мы выберем за C_β компоненту цикла D_β , не определенную над k (иными словами, кривая C_b не остается постоянной при изменении $b \in B$). Чтобы доказать, что такая компонента существует, достаточно доказать, что поле определения цикла D_β трансцендентно над k . Для этого обозначим через β' другую общую точку кривой B , независимую от β , и докажем, что $D_\beta \neq D_{\beta'}$. Равенство $D_\beta = D_{\beta'}$ влекло бы за собой соотношение $F_\beta \sim F_{\beta'}$. Пусть $(f) = F_\beta - F_{\beta'}$. Функция f является образом некоторой функции g на B : $f = \pi^*(g)$. Действительно, для любой постоянной c мы имеем $((f - c)_0 \cdot F) = 0$. Отсюда следует, что $(f - c)_0$ состоит из слоев расслоения π , т.е. f постоянна по слоям. Это и значит, что $f = \pi^*(g)$. Но тогда, очевидно, $(g) = \beta - \beta'$, а этого не может быть, так как род кривой B равен 1. Поле, определенное кривой $C_\beta^{(i)}$, также трансцендентно над k . Мы обозначим через U неособую модель этого поля. Соответственно кривые $C_b^{(i)}$ мы будем обозначать через $\mathcal{L}_u$, $u \in U$. Они образуют одномерное семейство эллиптических кривых на V .

Пусть $\mathcal{L}$ — кривая $\mathcal{L}_u$ для некоторого фиксированного $u \in U$, причем $\mathcal{L}$ неприводима, не имеет особых точек и $(\mathcal{L} \cdot F) = n$ ($n > 0$, так как $\mathcal{L} \neq F$). Отображение π определяет на кривой $\mathcal{L}$ структуру накрытия кривой B . Так как обе кривые эллиптические, то это накрытие является неразветвленным. Как известно, не существует непрерывных систем неразветвленных накрытий (см. [32]). Если $k = \mathbb{C}$, то это следует из конечности числа накрытий заданной степени). Поэтому на общей кривой $\mathcal{L}_\xi$ (ξ — общая точка U) мы имеем накрытие, изоморфное тому, которое определено на $\mathcal{L}$. Это означает, что существует такой изоморфизм $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_\xi$, что для $x \in \mathcal{L}$

$$\varphi(x) = \pi(\varphi(x)).$$

Рассмотрим теперь обратный образ $\mathcal{L} \times_B V$ расслоения π на накрытии $\mathcal{L}$, т.е. подмногообразие $V' \subset \mathcal{L} \times V$, состоящее из пар (y, v) , $y \in \mathcal{L}$, $v \in V$, для которых $\pi(y) = \pi(v)$. Проекция $\mathcal{L} \times V \rightarrow \mathcal{L}$ определяет на V' расслоение $\pi': V' \rightarrow \mathcal{L}$ с базой $\mathcal{L}$, слои которого изоморфны слоям π . Обозначим через $\mathcal{L}'_\xi$ кривую на V' , состоящую из точек (y, v) , $v \in \mathcal{L}_\xi$, $x = \varphi(y)$, $y \in \mathcal{L}$, $v \in V$.

Заметим, что отображение φ , возможно, определено над большим полем, $k(\xi)$. То же относится к кривой $\mathcal{L}'_\xi$. Обозначим через W неособую кривую, поле функций на которой совпадает с полем определения кривой $\mathcal{L}'_\xi$. Кривую, соответствующую общей точке кривой η кривой W , мы будем обозначать через $\mathcal{L}'_\eta$, а ее специализацию для любой точки $w \in W$ через $\mathcal{L}'_w$. Легко проверить, что $(\mathcal{L}'_w \cdot F) = 1$, где F — любой слой расслоения π' .

Для любого неособого слоя F_y , $y \in \mathcal{L}$ расслоения π' отображение

$$\psi(w) = \mathcal{L}'_w \cdot F_y$$

определяет кривую W как накрытие кривой F_y или, иначе говоря, $k(F_y)$ как подполе поля $k(W)$. Как известно, не существует непрерывных систем подполей рода $g > 1$ (см., например, [15]). Отсюда следует, что отношение эквивалентности, определенное на W условием: $w \sim w'$, если $\mathcal{L}'_w \cdot F_y = \mathcal{L}'_{w'} \cdot F_y$, не зависит от выбора слоя F_y . Иначе говоря, если кривые $\mathcal{L}'_w$ и $\mathcal{L}'_{w'}$ пересекаются в одной точке (лежащей на слое F_{y_0}), то они должны иметь бесконечное число точек пересечения (лежащих на всех слоях F_y), т.е. совпадать. Так как W параметризует семейство кривых $\mathcal{L}'_w$, то мы получаем, что $\mathcal{L}'_w$ и $\mathcal{L}_{w'}$ не пересекаются, если $w' \neq w$.

Поэтому отображение $W \times \mathcal{L} \rightarrow V'$, определенное формулой

$$(w, y) \rightarrow \mathcal{L}'_w \cdot F_y, \quad w \in W, \quad y \in \mathcal{L},$$

будет изоморфизмом между $W \times \mathcal{L}$ и V' . Очевидно, что при этом F' изоморфно отображается на W . Таким образом, V' изоморфно $F \times \mathcal{L}$. Как мы говорили в начале доказательства, из этого уже следует утверждение теоремы 8.

§7. Случай $(K^2) = 0$

Поверхности с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, $(K^2) = 0$ — это единственные поверхности (среди тех, для которых $p = 0$, $q > 0$), которые могут не быть линейчатыми. Ниже будет дана их полная классификация. Основным средством исследования будет отображение Альбанезе $\pi : V \rightarrow B$. Если род общего слоя расслоения π равен 0, то поверхность является линейчатой. Далее мы будем рассматривать случай $g > 0$.

Заметим, что для поверхностей рассматриваемого типа $p_a(X) = 1 - q + p = 0$, а так как $(K^2) = 0$, то и $\chi(V) = 0$. Основной результат, который мы получим (теорема 9), будет верен для любых поверхностей, для которых $p_a(V) = \chi(V) = 0$.

Теорема 9. Пусть V — такая алгебраическая поверхность, что $p_a(V) = \chi(V) = 0$, а $\pi : V \rightarrow B$ — регулярное отображение V на неособую эллиптическую кривую. Если род g невырожденного слоя F расслоения π больше 1, то существует такое неразветвленное накрытие $\bar{V} \rightarrow B$, что обратный образ $\bar{V} = V \times_B \bar{B}$ расслоения π на $\bar{B}$ является прямым произведением: $\bar{V} \simeq \bar{B} \times F$.

Прежде, чем приступить к доказательству теоремы 9, докажем несколько вспомогательных предложений о расслоениях поверхностей над кривыми.

Лемма 7. Если $\pi : V \rightarrow B$ — регулярное отображение поверхности V на эллиптическую кривую, общий слой которого неприводим, и если $\chi(V) = 0$, то все слои расслоения π — неособые или, если род общего слоя равен 1, кратные неособой кривой рода 1.

Лемма непосредственно следует из теорем 6 и 7, так как в (8) $\chi(V) = \chi(B) = 0$ и, значит, $\chi(F_{b_i}) = \chi(F)$.

Приведем несколько полезных понятий, относящихся к расслоениям $\pi : V \rightarrow B$ без вырожденных слоев.

Если f — функция на V , принадлежащая локальному кольцу $\mathfrak{D}_{F_b}$ некоторого слоя F_b , то ее ограничение на слое F_b дает регулярную функцию на F_b . Таким образом, определен гомоморфизм

$$\rho_b : \mathfrak{D}_{F_b} \rightarrow k(F_b).$$

Аналогичным образом любому дивизору D на поверхности можно сопоставить дивизор $D \cdot F_b$ на кривой F_b .

Пересечение $D \cdot F_b$ определено, если дивизор D не содержит F_b в качестве компоненты. Мы доопределим его для всех дивизоров, положив $F_b \cdot F_b = 0$ (не только как число, но и как дивизор). Таким образом, мы получим гомоморфизм группы дивизоров на V на группу дивизоров на F_b . Мы обозначим его также через ρ_b .

Определим, наконец, понятие дифференциала на V над B . Под этим мы будем подразумевать дифференциалы в поле $k(V)/k(B)$. Это поле имеет степень трансцендентности 1, поэтому все его дифференциалы имеют вид gDf , $g, f \in k(V)$, где через Df обозначается полный дифференциал функции f в поле $k(V)/k(B)$. Все дифференциалы на V над B образуют модуль $D_{k(B)}(k(V))$ над $k(V)$. Дивизор дифференциала gDf определяется обычным образом: для любого дивизора C , не совпадающего со слоем расслоения π , мы выбираем такую функцию $T \in k(V)$, что $\nu_C(T) = 1$, записываем gDf в виде $gDf = hDT$ и полагаем $\nu_C(h) = m_C$,

$$(gDf) = \sum m_C C.$$

Слой F_b по определению в дивизор (gDf) не входят.

Этим определениям можно придать более геометрический характер, рассмотрев одномерное векторное расслоение Θ на V , слоем которого в точке v является подпространство касательного пространства к точке v , состоящее из векторов, касающихся слоя $F_{\pi(v)}$, который проходит через точку v . Обозначим через θ расслоение, дуальное к Θ . Тогда дифференциалы — это рациональные сечения этого одномерного расслоения, а дивизор дифференциала — это дивизор рационального сечения.

Дифференциал на V над B называется регулярным в слое F_b , если он может быть записан в виде gDf , $g, f \in \mathfrak{D}_{F_b}$. Все такие дифференциалы образуют модуль $D_{\mathfrak{D}_b}(\mathfrak{D}_{F_b})$ над кольцом $\mathfrak{D}_{F_b}$. Гомоморфизм ρ_b продолжается до гомоморфизма модулей

$$D_{\mathfrak{D}_b}(\mathfrak{D}_{F_b}) \rightarrow D_k(k(F_b)),$$

который мы также будем обозначать через ρ .

Все введенные гомоморфизмы обладают следующими свойствами коммутативности:

$$\rho_b(f) = (\rho_b \cdot f), \quad f \in \mathfrak{D}_{F_b}, \quad (20)$$

$$\rho_b \cdot (gDf) = (\rho_b \cdot g d\rho_b f), \quad d, f \in D_{\mathfrak{D}_b} \mathfrak{D}_{F_b}. \quad (21)$$

Доказательство этих соотношений получается непосредственной проверкой.

Пусть β — общая точка B . Тогда отображение ρ_β является эпиморфизмом и имеет в качестве ядра группу, состоящую из линейных комбинаций слоев.

Эпиморфный характер отображения ρ_β следует из того, что все главные дивизоры поля $k(F_\beta)/k(\beta)$ содержатся в $\text{Im } \rho_\beta$, что о.н.д. $(\rho_\beta(C), \rho_\beta(C')) = \rho_\beta(\text{о.н.д. } (C, C'))$ и что все дивизоры могут быть получены как общие наибольшие делители главных.

Так как взаимно простые и не содержащие слоев эффективные дивизоры на V пересекаются с общим слоем во взаимно простых дивизорах, то мы получаем и утверждение о ядре отображения ρ_β .

Из этих общих утверждений следует: если $CF_\beta \sim DF_\beta$ на F_β , то $C \sim D + \sum m_i F_{b_i}$ на V , где F_{b_i} — некоторые слои.

Мы переходим теперь к формулировке результата, который лежит в основе доказательства теоремы 9.

Определение. Дивизор $D = \sum n_i C_i$ (C_i — различные между собой неприводимые кривые) называется неразветвленным, если различные кривые C_i не пересекаются и для каждой из них проекция $\pi : C_i \rightarrow B$ определяет C_i как неразветвленное накрытие базы B .

Лемма 8. Пусть $\pi : V \rightarrow B$ — регулярное отображение поверхности V на кривую B , не имеющее вырожденных слоев. Если существует функция $f \in k(V)$, дивизор которой является суммой ненулевого неразветвленного дивизора и некоторой линейной комбинации слоев, то для некоторого неразветвленного накрытия базы $\bar{V} \rightarrow B$ расслоение $\bar{V} = V \times_B \bar{B}$ является прямым произведением $\bar{V} \simeq \bar{B} \times F$.

Доказательство. Пусть

$$(f) = \sum n_i C_i - \sum n'_j C'_j + \sum m_k F_{b_k},$$

где $n_i > 0$, $n'_j > 0$ и $\sum n_i C_i - \sum n'_j C'_j$ — неразветвленный дивизор. Рассмотрим расслоение L над B , слой которого является аффинной прямой и которое соответствует дивизору $\sum m_k b_k$ на B . Дополним каждый слой L бесконечно удаленной точкой, мы будем рассматривать L как расслоение, слой которого является проективной прямой.

Покажем, что поверхность V можно рассматривать как разветвленную накрывающую поверхности L . Для этого представим себе B покрытым такими множествами W_i , что $b_i \in W_i$, $b_j \notin W_i$ при $i \neq j$ и существуют такие функции τ_i , что $\tau_i(b_i) = 0$ и $\tau_i - \tau_j(b)$ является локальным параметром в любой точке $b \in W_i$, причем $\tau_i(b) \neq 0$

для $b \in W_i$, $b \neq b_i$. Тогда L можно задать как объединение открытых множеств U_i , причем $U_i \simeq W_i \times P^1$, где P^1 — проективная прямая, и точки U_i и U_j отождествляются по правилу:

$$b \times z \sim b' \times z' \quad (b \in W_i, b' \in W_j, z, z' \in P^1),$$

если

$$b = b' \in W_i \cap W_j; \quad z' = z \cdot \frac{\tau_i^{m_i}}{\tau_j^{m_j}}(b). \quad (22)$$

Определим отображение $\varphi_i : \pi^{-1}(W_i) \rightarrow U_i$, положив

$$\varphi_i(v) = (\pi(v) \times \rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})(v)), \quad v \in \pi^{-1}(W_i).$$

Заметим, что $f\pi^*(\tau_i)^{-m_i} \in O_{F_v}$, для $v \in \pi^{-1}(W_i)$ согласно выбору τ_i , и поэтому функция $\rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})$ определена. Очевидно, что φ_i являются регулярными отображениями.

Докажем, что $\varphi_i = \varphi_j$ на $\pi^{-1}(W_i) \cap \pi^{-1}(W_j)$, и, таким образом, совокупность отображений φ_i определяет единое регулярное отображение φ поверхности V на L . Действительно, если $x \in \pi^{-1}(W_i \cap \pi^{-1}(W_j))$, то

$$\varphi_j(v) = (\pi(v) \times (\rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_j)^{-m_j}))(v))$$

и

$$\rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_j)^{-m_j})(v) = \rho_{\pi(v)}(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})(v) \cdot \frac{\tau_i^{m_i}}{\tau_j^{m_j}}(\pi(v))$$

в согласии с формулами (22).

Таким образом, при отображении φ каждый слой F_b отображается на проективную прямую, являющуюся слоем L , причем для $b \in W_i$ отображение осуществляется функцией $\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})$. Заметим, что при этом ни один из слоев F_b не отображается в точку. Другими словами, функция $\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})$ непостоянна на F_b . Это следует из того, что мы можем указать даже ее дивизор — он равен $\sum n_i C_i \cdot F_b - \sum n'_j C'_j \cdot F_b$ и не равен 0, так как по условию кривые C_i и C'_j не пересекаются. Следовательно, отображение φ определяет на каждом слое отображение накрытия проективной прямой, причем степень этого накрытия для всех слоев одна и та же — она равна $\sum n_i (C_i \cdot F) = \sum n'_j (C'_j \cdot F)$.

Обозначим через W_b дивизор ветвления того накрытия, которое отображение φ определяет на слое F_b . Так как

$$(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})) = \sum n_i \rho_b C_i - \sum n'_j \rho_b C'_j,$$

то

$$W_b = (d\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0 + \sum (n'_j - 1) \rho_b C'_j,$$

где $(\omega)_0$ означает дивизор нулей дифференциала ω . Согласно (21)

$$(d\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})) = \rho_b(Df),$$

и поэтому $W_b = \rho_b W$, где W — дивизор на V ,

$$W = (Df)_0 + \sum (n'_j - 1) C'_j.$$

Из определения дивизора (Df) следует, что

$$W = \sum (n_i - 1) C_i + \sum (n'_j - 1) C'_j + \overline{W}, \overline{W} > 0.$$

Основой доказательства леммы 8 является то, что, как мы сейчас покажем, дивизор $\overline{W}$ не пересекается с кривыми C_i и C'_j . Действительно, так как $(f_0) = \sum n_i C_i + \sum l_s F_s$, то ввиду (20)

$$(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0 = \sum n_i \rho_b C_i = \sum n_i C_i \cdot F_b.$$

По условию теоремы накрытие $\pi : C_i \rightarrow B$ неразветвлено; поэтому, если $(C_i \cdot F) = m_i$, то

$$C_i \cdot F_b = Q_{b,i}^{(1)} + \dots + Q_{b,i}^{(m_i)}, \quad Q_{b,i}^{(r)} \neq Q_{b,i}^{(s)} \text{ при } r \neq s.$$

Отсюда следует, что

$$(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0 = \sum n_i (Q_{b,i}^{(1)} + \dots + Q_{b,i}^{(m_i)})$$

и, значит, каждая из точек $Q_{b,i}^{(r)}$ входит в дивизор $(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i}))_0$ с кратностью n_i . Поэтому эта точка входит в дивизор $(d(\rho_b(f\pi^*(\tau_i)^{-m_i})))$ с кратностью $n_i - 1$. Но с той же кратностью она входит и в дивизор $(n_i - 1) \rho_b C_i$. Отсюда следует, что в дивизор $\rho_b \overline{W}$ ни одна из этих точек уже не входит. Это значит, что дивизоры $\overline{W}$ и C_i не имеют общих точек ни на одном слое F_b и, значит, вообще не пересекаются. Аналогично рассматриваются и дивизоры C'_j .

При отображении φ дивизоры $\sum n_i C_i$ и $\sum n'_j C'_j$ являются прообразами нулевого и бесконечного сечений расслоения L :

$$\sum n_i C_i = \varphi^*(S_0), \quad \sum n'_j C'_j = \varphi^*(S_\infty).$$

Дивизор V является прообразом некоторого дивизора S на $L : V \rightarrow \varphi^*(S)$. Из того, что только что доказано, следует, что S не пересекается ни с S_0 , ни с S_∞ .

Исходя из этого, мы сейчас покажем, что для некоторого неразветвленного накрытия $B' \rightarrow B$ прообраз L тривиален: $L' = L \times_B B' \simeq B' \times P^1$ и в L' прообраз S' дивизора S "постоянен": $S' = B' \times \Delta$, где Δ — эффективный дивизор на P^1 . Для этого обозначим через C любую неприводимую компоненту $\bar{W}$. Проекция, определенная в L , $L \rightarrow B$, определяет C как накрытие B . Рассмотрим расслоение $M = C \times_B L$. В нем точки (c, c) , $c \in C$ образуют сечение, не пересекающее ни нулевого, ни бесконечного сечения. Одномерное векторное расслоение, обладающее таким сечением, обязано быть тривиальным. Это значит, что L становится тривиальным на некотором накрытии $C \rightarrow B$. Для дивизора $\sum m_k b_k$, соответствующего L , это означает, что он становится главным на накрытии C . Такой дивизор определяет класс дивизоров конечного порядка и тогда, как известно, становится главным на некотором неразветвленном накрытии $B' \rightarrow B$. Таким образом, $L' = L \times_B B' \simeq B' \times P^1$. Для прообраза S' дивизора S условие, что S' не пересекает нулевого сечения, означает, что $(S' \cdot (B' \times 0)) = 0$, а так как дивизор S' эффективен, то отсюда следует, что $S' = B' \times \Delta$.

Рассмотрим прообраз V' расслоения π на $B' : V' = V \times_B B'$. Мы имеем отображение $\varphi' : V' \rightarrow L'$, которое на каждом слое F_b определяет отображение накрытия над P^1 , разветвленного в точках фиксированного (не зависящего от b') дивизора Δ . Отсюда уже следует, что накрытие $V' \rightarrow L'$ является фактором накрытия $V'' \rightarrow L'$, где $V'' = \bar{B} \times H$, причем $\bar{B}$ — неразветвленное накрытие B' , а H — накрытие P^1 , которое разветвлено только в точках дивизора Δ . Этот результат вытекает из теоремы о неразветвленных накрытиях прямого произведения и одного замечания Абианкара (см.[1]).

Замечание Абианкара заключается в том, что можно найти такое накрытие $H_1 \rightarrow P^1$, разветвленное только в точках Δ , что любое накрытие $F_b \times_{P^1} H_1 \rightarrow H_1$ будет уже неразветвленным. Для этого достаточно взять H_1 таким, чтобы его показатели ветвления в точках Δ делились на соответствующие показатели ветвления накрытий $F_b \rightarrow P^1$ (для этого придется, быть может, увеличить Δ на одну точку). К накрытию $V : X \times_{L'} (B' \times H_1) \rightarrow B' \times H_1$ можно уже применить теорему о неразветвленных накрытиях прямого произведения (при $k = \mathbb{C}$ она следует из равенства $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$). Мы получаем, что оно является фактором накры-

тия $V'' = \bar{B} \times H \rightarrow B' \times H_1$, где $\bar{B}$ и H — неразветвленные накрытия кривых B' и H_1 . Так как X' в свою очередь является фактором накрытия $V \times_{L'} (B' \times H_1) \rightarrow B' \times H_1$, то V' является и фактором накрытия V'' .

Обозначим через $\bar{V}$ поверхность $V' \times_{B'} \bar{B}$, имеющую расслоение $\bar{\pi} : \bar{V} \rightarrow \bar{B}$, и докажем, что $\bar{V} \simeq \bar{B} \times F_0$, где F_0 — любой из слоев расслоения $\bar{\pi}$. Из сказанного выше следует, что $\bar{V}$ является фактором V'' , причем, как легко проверить, отображение $u : V'' \rightarrow \bar{V}$ коммутирует с проекциями обеих поверхностей на $\bar{B}$.

Перейдя, если нужно, от H к большему накрытию, мы можем считать H нормальным накрытием P^1 с группой Галуа G . Из построения следует, что мы имеем последовательность накрытий

$$\bar{B} \times H \xrightarrow{u} \bar{V} \xrightarrow{v} \bar{B} \times P^1,$$

причем отображения u и v коммутируют с проекциями всех членов этой последовательности на $\bar{B}$. Накрытие $\bar{V} \rightarrow \bar{B} \times P^1$ принадлежит к некоторой подгруппе G_1 группы Галуа G накрытия $\bar{B} \times H \rightarrow \bar{B} \times P^1$. Так как автоморфизмы $g \in G$ действуют по закону

$$g(\bar{b} \times h) = \bar{b} \times g(h),$$

то так же действуют и автоморфизмы $g_1 \in G_1$. Ввиду этого $\bar{V} \simeq (\bar{B} \times H)/G_1 \simeq \bar{B} \times H/G_1$. Лемма 8 доказана.

Чтобы применить лемму 8 к доказательству теоремы 9, нам надо построить на поверхности V , удовлетворяющей условиям этой теоремы, функцию, дивизор которой состоит из неразветвленного дивизора и линейной комбинации слоев. Построению такой функции посвящены следующие леммы.

Мы будем обозначать дальше знаком $C \approx D$ алгебраическую, а знаком $C \approx\approx D$ — численную эквивалентность дивизоров на поверхности (если $k = \mathbb{C}$, речь идет о гомологичности и соответственно слабой гомологичности).

Лемма 9. Пусть V — алгебраическая поверхность с $(K^2) = 0$, $p_a(X) = 0$ и $\pi : V \rightarrow B$ — ее отображение на кривую B , причем все слои этого отображения не вырождены и имеют род $g > 1$. При достаточно большом n (например, $n \geq 3$) для любого дивизора D , для которого имеет место соотношение $D \approx\approx nK$, существует такой дивизор C , что $C > 0$, $C \approx D$.

Доказательство. Нам достаточно найти такой дивизор C , что $C \approx D$, $l(C) > 0$. Будем искать C в виде $D + F_b - F_0$, $b \in B$. Мы

докажем, что для некоторого $b \in B$ $l(D + F_b - F_0) > 0$ — это и есть то, что нам нужно.

Пусть $l(D + F_b - F_0) = 0$ для всех $b \in B$. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(D + F_b - F_0) \rightarrow \mathcal{F}(D + F_b) \rightarrow \mathcal{F}_{F_0}((D + F_b)F_0) \rightarrow 0$$

вытекает точность последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(D + F_b - F_0) \rightarrow \mathcal{L}(D + F_b) \rightarrow \mathcal{L}_{F_0}((D + F_b) \cdot F_0). \quad (23)$$

Из сделанного предположения следует, что гомоморфизм ограничения

$$\rho_0 : \mathcal{L}(D + F_b) \rightarrow \mathcal{L}_{F_0}((D + F_b) \cdot F_0) \quad (24)$$

является вложением для любого $b \in B$.

Вычислим размерности обоих подпространств в (24). Так как

$$((D + F_b) \cdot F_0) = ((nK + F_b - F_0) \cdot F_0) = 2n(g - 1),$$

то число $l((D + F_b) \cdot F_0)$ может быть найдено по теореме Римана-Роха, примененной к кривой F_0 :

$$l((D + F_b)F_0) = (2n - 1)(g - 1). \quad (25)$$

С другой стороны, теорема Римана-Роха на V дает:

$$\begin{aligned} l(D + F_b) &\geq \frac{((D + F_b) \cdot (D + F_b - K))}{2} = \\ &= \frac{(2n - 1)(K \cdot F_b)}{2} = (2n - 1)(g - 1). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25), (26) и того, что ρ_0 в (24) является вложением, следует, что оба пространства в (24) имеют одинаковую размерность и, значит, ρ_0 является изоморфизмом для любого $b \in B$.

Таким образом, для любого эффективного дивизора Δ , содержащегося в полной линейной системе $| (D + F_b)F_0 |$ на F_0 , существует ровно один такой эффективный дивизор $C_b \in |D + F_b|$, что $C_b \cdot F_0 = \Delta$.

Докажем, что через каждую точку $v \in V$ проходит хотя бы одна кривая C_b . Для этого рассмотрим в $V \times B$ подмножество Γ , состоящее из точек (v, b) , для которых $v \in C_b$. Очевидно, что Γ —

алгебраическое подмногообразие в $V \times B$. При отображении $\Gamma \rightarrow B$, индуцированном проекцией $V \times B \rightarrow B$, каждая точка $b \in B$ имеет прообразом кривую C_b , откуда следует, что $\dim \Gamma = 2$. Утверждение, которое мы хотим доказать, заключается в том, что $\text{pr}_V \Gamma = V$. Ввиду полноты всех рассматриваемых многообразий, $\text{pr}_V \Gamma$ является алгебраическим подмногообразием V и, следовательно, совпадает с V , если $\dim \text{pr}_V \Gamma = 2$. Если же $\text{pr}_V \Gamma = U$, $\dim U = 1$, то $\Gamma = U \times B$, а это в свою очередь означает, что $C_b = U$ для всех $b \in B$. Этого не может быть, так как $C_b \neq C_{b'}$ для $b \neq b'$. Действительно, из равенства $C_b = C_{b'}$ следовало бы, что $F_b \sim F_{b'}$. Мы видели при доказательстве теоремы 8, что это приводит к противоречию: если $(f) = F_b - F_{b'}$, то $f = \pi^*(g)$, $g \in k(B)$, $(g) = (b) - (b')$, т.е. $b \sim b'$, а это противоречит тому, что род кривой B равен 1.

Возьмем за точку v , в частности, произвольную точку кривой F_0 , не входящую в дивизор Δ . По условию найдется такая точка $b \in B$, что $C_b \ni v$. Но тогда C_b пересекается с F_0 более, чем в $(C_b \cdot F_0)$ точках, а это возможно только тогда, когда C_b содержит F_0 в качестве компоненты. Если $C_b = H + F_0$, $H > 0$, то $D + F_b \sim H + F_0$, т.е. $D + F_b = F_0 \sim H > 0$, что противоречит предположению $l(D + F_b - F_0) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 10. Если V — поверхность, удовлетворяющая условиям леммы 9, то дивизор C , существование которого установлено в этой лемме, отличен от 0 и неразветвлен.

Действительно, пусть $C \approx nK$, $C > 0$. Так как $(K \cdot F) > 0$, то $nK \not\approx 0$ и, значит, $C \neq 0$. Положим

$$C = \sum n_i C_i, \quad C_i \neq C_j \text{ при } i \neq j, \quad n_i > 0,$$

где C_i — неприводимые кривые.

Так как всякая неприводимая кривая, лежащая на поверхности V или является накрывающей базы B , или совпадает со слоем F , причем род B равен 1, а род F больше 1, то на V не может лежать неприводимая рациональная кривая. Поэтому

$$(C_i^2) + (C_i K) \geq 0. \quad (27)$$

Покажем, что $(C_i K) \geq 0$. Действительно, из $(C_i K) < 0$ следовало бы, ввиду (27), что $(C_i^2) > 0$. Так как $C \approx nK$, то $(C_i K) < 0$ давало бы

$$(C_i \cdot \sum n_j C_j) = n_i (C_i^2) + \sum_{j \neq i} n_j (C_i C_j) = 0,$$

что невозможно, так как $(C_i C_j) \geq 0$ при $i \neq j$, а $(C_i^2) > 0$.

Равенство $(K^2) = 0$ может, ввиду того, что $C \approx nK$, быть переписано как

$$\sum n_i (C_i K) = 0 \quad (28)$$

или

$$\left(\sum n_i C_i \right)^2 = \sum n_i^2 (C_i^2) + \sum_{i \neq j} n_i n_j (C_i C_j) = 0. \quad (29)$$

Из (28) следует теперь, что $(C_i K) = 0$, а из (27) и (29) — что $(C_i^2) = 0$ и $(C_i C_j) = 0$ при $i \neq j$. Поэтому

$$p_a(C_i) = \frac{(C_i^2) + (C_i K)}{2} + 1 = 1,$$

а так как C_i — нерациональная кривая, то она — неособая кривая рода 1. Она не может совпадать со слоем, так как род слоя больше 1 и, значит, является накрывающей базой. Так как род обеих кривых — и C_i и B — равен 1, то это покрытие неразветвленное. Наконец, уже доказанное нами соотношение $(C_i C_j) = 0$ при $i \neq j$ завершает проверку того, что дивизор C — неразветвленный.

Лемма 11. Пусть $\pi : V \rightarrow B$ — расслоение без вырожденных слоев, β — общая точка кривой B и F_β — общий слой. Всякий класс дивизоров конечного порядка на кривой F_β определен над некоторым неразветвленным расширением поля $k(\beta)$.

Доказательство. Пусть J_β — якобиево многообразие кривой F_β . Оно определено над полем $k(\beta)$ и при любом $b \in B$ имеет в качестве специализации якобиево многообразие J_b кривой F_b . Обозначим через $a_n(\beta)$ цикл, состоящий из точек порядка n на J_β . Как известно, этот цикл состоит из n^{2g} точек с кратностью единица. При специализации β в b цикл $a_n(\beta)$ специализируется в цикл $a_n(b)$, состоящий из точек порядка n на J_b . Так как слой J_b невырожден, то цикл $a_n(b)$ состоит из n^{2g} различных точек. Из обобщенной леммы Гензеля (см. [34]) следует тогда, что цикл $a_n(\beta)$ рационален над полным локальным кольцом точки b . Так как это верно для любой точки b , то отсюда следует, что поле определения цикла $a_n(\beta)$ не разветвлено над полем $k(\beta)$. Лемма доказана.

Замечание. Этому рассуждению можно придать следующую геометрическую форму. Обозначим через J_b якобиево многообразие слоя F_b . В множество всех многообразий J_b , $b \in B$ можно ввести

структуру алгебраического многообразия J , снабженного проекцией $\varphi: J \rightarrow B$. Для каждого $b \in B$ многообразии J_b содержит n^{2g} точек порядка n . Совокупность всех этих точек для всех $b \in B$ образует, как нетрудно доказать, одномерный эффективный дивизор $a_n \subset J$. Проекция φ определяет на a_n структуру накрытия B . Так как для любого $b \in B$ цикл $a_n \cdot J_b$ состоит из n^{2g} различных точек, то это накрытие — неразветвленное. Это и есть утверждение леммы.

Лемма 12. Пусть $K = k(B)$ — поле функций над алгебраической кривой B , U — алгебраическая кривая над K и C — класс дивизоров на U , которому соответствует рациональная над K точка якобиева многообразия кривой U , причем $l(C) > 0$. Тогда в C существует эффективный дивизор, определенный над K .

Это утверждение по существу совпадает с так называемым критерием рациональности Картье.

Пусть L/K — нормальное расширение поля K , над которым класс C уже определен, G — группа Галуа L/K , а $\mathfrak{C}_L, \mathfrak{D}_L, P_L$ — группы классов дивизоров, дивизоров и главных дивизоров на U над L . Все эти группы являются G -модулями. По условию $C^\sigma = C$ для $\sigma \in G$, т.е. $C \in H^0(G, \mathfrak{C}_L)$. Докажем, что существует $D' \in \mathfrak{D}_K$, $D' \in C$. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$H^0(G, \mathfrak{D}_L) \rightarrow H^0(G, \mathfrak{C}_L) \rightarrow H^1(G, P_L),$$

которая выводится из точной последовательности

$$(1) \rightarrow P_L \rightarrow \mathfrak{D}_L \rightarrow \mathfrak{C}_L \rightarrow (1).$$

Очевидно, наше утверждение будет доказано, если мы докажем, что $H^1(G, P_L) = (1)$. Для этого рассмотрим точную последовательность

$$(1) \rightarrow L^* \rightarrow L(U)^* \rightarrow P_L \rightarrow (1),$$

где L^* и $L(U)^*$ — мультипликативные группы полей L и $L(U)$, и точную последовательность

$$H^1(G, L(U)^*) \rightarrow H^1(G, P_L) \rightarrow H^2(G, L^*).$$

Так как G является группой Галуа $L(U)/K(U)$, то $H^1(G, L(U)^*) = (1)$ ввиду известного алгебраического факта. С другой стороны, $H^2(G, L^*) = 0$ ввиду теоремы Тзена, так как $K = k(B)$ и поле k алгебраически замкнуто. Отсюда следует, что $H^1(G, P_L) = (1)$.

Остается доказать, что существует эффективный дивизор D , определенный над K и эквивалентный дивизору D' . Но это следует из того, что $l(C) > 0$ и что размерность дивизора не меняется при сепарабельном расширении поля констант (см., например, [58, гл.V, §6, следствие 1 теоремы 4]).

Доказательство теоремы 9. Возьмем пока произвольное число m и рассмотрим на кривой F_β класс дивизоров $\mathcal{E}$, порядок которого равен m . Согласно лемме 11, этот класс определен над некоторым неразветвленным расширением поля $k(B)$. Если $\bar{B}$ — неособая модель этого неразветвленного расширения, то мы имеем неразветвленное накрытие $\varphi: \bar{B} \rightarrow B$, и на поверхности $\bar{V} = V \times_B \bar{B}$ класс дивизоров $\mathcal{E}$ кривой F_β определен уже над полем $k(\bar{B})$. Согласно лемме 12, существует эффективный дивизор $\mathfrak{D}$ кривой $F_{\bar{\beta}}$, принадлежащий классу $K(F_{\bar{\beta}}) + \mathcal{E}$ и тоже определенный над $k(\bar{B})$. Этому дивизору соответствует такой эффективный дивизор D на $\bar{V}$, что

$$D \cdot F_{\bar{\beta}} = \mathfrak{D} \in (F_\beta) + \mathcal{E}.$$

Тогда

$$(D + (n-1)K) \cdot F_{\bar{\beta}} \in nK(F_{\bar{\beta}}) + \mathcal{E}, \quad (30)$$

$$m(D + (n-1)K) \cdot F_{\bar{\beta}} \in mnK(F_{\bar{\beta}}),$$

и, значит, на $F_{\bar{\beta}}$

$$m(D + (n-1)K) \cdot F_{\bar{\beta}} \sim mnK \cdot F_{\bar{\beta}}. \quad (31)$$

Отсюда следует, что на V

$$m(D + (n-1)K) \sim mnK + \sum m_i F_{b_i},$$

а так как

$$\sum m_i F_{b_i} \approx lF_b,$$

где $l = \sum m_i$, а b — любая точка на B , то

$$m(D + (n-1)K) \approx mnK + lF_b. \quad (31a)$$

Докажем, что при надлежащем выборе m обязательно l делится на m . Для этого достаточно рассмотреть индексы пересечения отдельных частей (31a) с K . Мы получим

$$m(D \cdot K) = 2l(g - 1),$$

и если m взаимно просто с $2(g - 1)$, то оно делит l . До сих пор m было произвольным. Поэтому мы можем выбрать его взаимно простым с $2(g - 1)$ и положить тогда $l = l'm$. Тогда

$$m(D + (n - 1)K - l'F_b) \approx mnK,$$

и, значит,

$$D + (n - 1)K - l'F_b$$

$\approx nK$.

Мы можем применить к дивизору $D + (n - 1)K - l'F_b$ лемму 9. Мы получим дивизор $C' > 0$, такой, что

$$C' \sim D + (n - 1)K - l'F_b + F_{b_1} - F_{b_0}.$$

С другой стороны, по той же лемме 9 существует такой дивизор $C > 0$, что

$$C \sim nK + F_{b_2} - F_{b_0}.$$

Отсюда мы получаем, ввиду (31), что

$$mC' \sim mC + \sum s_i F_{b_i},$$

т.е. существует функция f на X , для которой

$$(f) = -mC' + mC + \sum s_i F_{b_i}.$$

По лемме 10 дивизор $-mC' + mC$ не разветвлен. Он не равен 0, так как $C' \neq C$. Действительно, ввиду (30), даже

$$C' \cdot F_{\bar{\beta}} \not\sim C \cdot F_{\beta}.$$

Применяя лемму 8, мы получаем утверждение теоремы 9.

Рассмотрим теперь случай, когда род g общего слоя отображения Альбанезе равен 1. Как мы дальше увидим, в этом случае точный аналог теоремы 9 не имеет места. Однако из леммы 7 и следствия 3 теоремы 7 гл. VII вытекает следующее, более слабое утверждение.

Теорема 10. Если $\pi : V \rightarrow B$ — регулярное отображение, общий слой которого — эллиптическая кривая, а $\chi(V) = 0$, то существует такое (быть может разветвленное) накрытие $C \rightarrow B$, что обратный образ π на C является прямым произведением:

$$V \times_B C \simeq C \times F.$$

§8. Поверхности $p = 0$, $q > 0$ (классификации и теорема Энрикеса)

В предшествующих параграфах доказано, что поверхность с инвариантами $p = 0$, $q > 0$ является линейчатой, кроме, быть может, случая $q = 1$, $(K^2) = 0$ (теоремы 5 и 8). Основой исследования этого последнего случая является теорема 9. Исходя из этой теоремы, мы сейчас приведем полную классификацию таких поверхностей и проверим, что те из них, которые удовлетворяют условию $P_{12} = 0$, являются линейчатыми (теорема Энрикеса).

Мы рассмотрим отдельно случаи, когда род g общего слоя расслоения π больше 1 и равен 1. Начнем со случая $g > 1$.

Согласно теореме 9, в этом случае поверхность V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, $(K^2) = 0$ имеет в качестве неразветвленной накрывающей поверхность $\bar{V} = \bar{B} \times F$. Посмотрим, как можно получить поверхность V из $\bar{V}$.

Теорема 9 показывает, что $\bar{V} = V \times_B \bar{B}$, где B — многообразие Альбанезе поверхности V (в данном случае — эллиптическая кривая), а $\bar{B} \rightarrow B$ — неразветвленное накрытие. Мы можем считать, не нарушая общности, что $\bar{B} \rightarrow B$ — нормальное накрытие. Обозначим его группу Галуа через G . Очевидно, что $X = \bar{X}/G$. При изоморфизме

$$\bar{V} \simeq \bar{B} \times F \quad (32)$$

автоморфизму $\sigma \in G$ накрытия $\bar{B} \rightarrow B$ соответствует автоморфизм

$$\sigma(\bar{b}, f) = (\sigma\bar{b}, f\sigma^{-1}), \quad (33)$$

где $f \rightarrow f\sigma^{-1}$ — некоторый автоморфизм кривой F . Это следует из того, что как действие автоморфизма $\sigma \in G$ на $\bar{V}$, так и изоморфизма (32) перестановочны с проекцией $\bar{V} \rightarrow \bar{B}$.

Таким образом, мы имеем гомоморфизм

$$\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(F)$$

группы G в группу автоморфизмов кривой F . Наоборот, задание такого представления группы G (которая сама задана как группа Галуа накрытия $\bar{B} \rightarrow B$) определяет ее действие в качестве группы автоморфизмов поверхности $\bar{V}$:

$$\sigma(\bar{b}, f) = (\sigma\bar{b}, f\varphi(\sigma)^{-1}).$$

Непосредственно ясно, что при этом мы получаем группу, действующую $\bar{V}$ на без неподвижных точек, и поверхность $V = \bar{V}/G$ не

имеет особых точек. Мы видим, что таким образом мы можем получить все интересующие нас поверхности, но, может быть, и многие другие. Нам надо, следовательно, выяснить, каким условиям должны быть подчинены накрытие $\bar{B} \rightarrow B$, кривая F и представление φ , чтобы поверхность V имела инварианты $p = 0, q = 1$. Чтобы сформулировать результат, обозначим через L кривую $F/\varphi(G)$.

Лемма 13. Для поверхности $v = \bar{V}/G$

$$q = 1 + \gamma, \quad (34)$$

$$p = \gamma. \quad (35)$$

где γ — род кривой L .

Доказательство. Проекция $\psi: \bar{V} \rightarrow V$ определяет отображение

$$\psi_i^*: \Omega^i(V) \rightarrow \Omega^i(\bar{V})$$

i -мерных дифференциальных форм 1-го рода. Очевидно, что ψ_i^* — вложение и $\psi_i^*(\Omega^i(V)) = \Omega^i(\bar{V})^G$. Поэтому нам надо сначала найти дифференциальные формы 1-го рода на $\bar{V}$, а потом отобрать среди них те, которые инвариантны относительно действия автоморфизмов из G .

Начнем с одномерных форм. Очевидно, что

$$\Omega'(\bar{V}) = p_1^*(\Omega'(\bar{B})) \oplus p_2^*(\Omega'(F)), \quad (36)$$

где p_1 и p_2 — проекции $\bar{V}$ на $\bar{B}$ и F . Выясним, как действует автоморфизм $\sigma \in G$ на формы из $\Omega'(V)$. По определению (33) действия σ на $\bar{V}$ пространства $p_1^*\Omega'(B)$ и $p_2^*\Omega'(F)$ остаются инвариантными при действии σ и преобразуются так же, как пространство $\Omega'(B)$ под действием σ и пространство $\Omega'(F)$ под действием $\varphi(\sigma)^{-1}$. Заметим теперь, что σ действует на $\Omega'(\bar{B})$ тривиально, так что $\Omega'(\bar{B})^G = \Omega'(\bar{B})$. С другой стороны, как нетрудно видеть, $\Omega'(F)^{\varphi(G)} \simeq \Omega'(L)$.

Отсюда следует, что

$$\Omega'(V)^G \simeq \Omega'(\bar{B}) \oplus \Omega'(L),$$

что и дает (34).

Рассмотрим теперь формы второй степени. Согласно (2),

$$K(\bar{V}) = K(\bar{B}) \times F + \bar{B} \times K(F),$$

а так как $K(\bar{B}) = 0$, то

$$K(\bar{V}) = \bar{B} \times K(F). \quad (37)$$

Поэтому

$$\Omega^2(\bar{V}) \simeq \Omega'(\bar{B}) \otimes \Omega'(F) \simeq \Omega'(F) \quad (38)$$

и

$$\Omega^2(\bar{V})^G \simeq \Omega'(F)^{\varphi(G)} \simeq \Omega'(L), \quad (39)$$

откуда следует (35).

Следствие. Поверхность $V = \bar{V}/G$ тогда и только тогда имеет инварианты $q = 1, p = 0$, когда $g = 0$, т.е. кривая $F/\varphi(G)$ рациональна.

Перейдем теперь к конструкции поверхностей с инвариантами $p = 0, q = 1$ (опять предполагая, что $g > 1$, т.е. что эти поверхности описываются теоремой 9). Заметим прежде всего, что накрытие $\bar{B} \rightarrow B$, как неразветвленное накрытие эллиптической кривой, имеет абелеву группу Галуа с одной или двумя образующими:

$$G = \{\sigma_1\} \times \{\sigma_2\}, \quad \sigma_1^{m_1} = 1, \quad \sigma_2^{m_2} = 1.$$

Поле $k(F)/k(L)$ имеет в качестве группы Галуа группу $\varphi(G)$. Следовательно, эта группа Галуа имеет две образующие: $\varphi(\sigma_1)$ и $\varphi(\sigma_2)$, порядки которых являются делителями чисел m_1 и m_2 .

Так как кривая L должна быть рациональна, то поле $k(L)$ изоморфно полю рациональных функций $k(L) = k(x)$, а поле $k(F)/k(L)$ может быть, как легко следует из теории Галуа, получено в виде $k(x) \left(\sqrt[m_1]{P_1(x)}, \sqrt[m_2]{P_2(x)} \right)$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — любые многочлены от x . Наоборот, в поле $k \left(x, \sqrt[m_1]{P_1(x)}, \sqrt[m_2]{P_2(x)} \right)$ можно определить автоморфизмы s_1 и s_2 , положив

$$s_1 \left(\sqrt[m_1]{P_1(x)} \right) = \epsilon_1 \sqrt[m_1]{P_1(x)},$$

$$s_1 \left(\sqrt[m_2]{P_2(x)} \right) = \epsilon_1 \sqrt[m_2]{P_2(x)},$$

$$s_2 \left(\sqrt[m_2]{P_2(x)} \right) = \epsilon_2 \sqrt[m_2]{P_2(x)},$$

где ϵ_1 и ϵ_2 — первообразные корни из 1, степени которых равны степеням полей $k \left(x, \sqrt[m_1]{P_1} \right) / k(x)$ и $k \left(x, \sqrt[m_1]{P_1}, \sqrt[m_2]{P_2} \right) / k \left(x, \sqrt[m_1]{P_1} \right)$.

Взяв за F неособую модель поля $k(x, \sqrt[p]{P_1}, \sqrt[q]{P_2})$, мы можем определить гомоморфизм φ группы G в группу $\text{Aut } F$, положив $\varphi(\sigma_1) = s_1$, $\varphi(\sigma_2) = s_2$, и на поверхности $\bar{V} = \bar{B} \times F$ задать действие G формулами (33). Так как кривая $F/\varphi(G) = L$ рациональна, то поверхность $V = \bar{V}/G$ будет иметь инварианты $p = 0, q = 1$. Мы доказали, таким образом, следующее утверждение.

Теорема 11. Все поверхности V с инвариантами $p = 0, q = 1$ в случае $g > 1$ могут быть получены в виде $V = \bar{V}/G$, $\bar{V} = \bar{B} \times F$, $\bar{B} \rightarrow B$ — неразветвленное накрытие эллиптической кривой, F — неособая модель поля $k(x, \sqrt[p]{P_1}, \sqrt[q]{P_2})$, G — изоморфна группе Галуа накрытия $\bar{B} \rightarrow B$ и действует на $\bar{X}$ по правилу $\sigma(\bar{b}, f) = \sigma\bar{b}, f\varphi(\sigma)^{-1}$, а $\varphi(\sigma)$ — гомоморфизм группы Галуа накрытия $\bar{B} \rightarrow B$ на группу Галуа поля $k(x, \sqrt[p]{P_1}, \sqrt[q]{P_2})/k(x)$.

Рассмотрим теперь случай, когда род общего слоя расслоения π равен 1.

Согласно теореме 10, существует такое накрытие $C \rightarrow B$ базы, что

$$C \times_B V \simeq C \times F,$$

где F — неособая кривая рода 1. Мы можем, конечно, предполагать C нормальным накрытием с группой Галуа G . Очевидно, что на $C \times F$ группа G действует по правилу

$$\sigma(c \times f) = \sigma(c) \times f\varphi(\sigma)^{-1}, \sigma \in G, \quad (40)$$

где

$$\varphi : G \rightarrow \text{Aut } F$$

— гомоморфизм G в группу бирегулярных автоморфизмов кривой F . Очевидно, что

$$V = (C \times_B V)/G = (C \times F)/G.$$

При этом можно ограничиться рассмотрением случая, когда φ — мономорфизм. Действительно, если N — ядро φ , $G_1 = G/N$, $C_1 = C/N$, то, как легко видеть,

$$V \times_B C_1 \simeq C_1 \times F, \quad V = (C_1 \times F)/G_1.$$

Выясним, какие неподвижные точки имеют автоморфизмы $\sigma \in G$.

Очевидно, что точка $\sigma = (c \times f)$ является неподвижной для автоморфизма σ тогда и только тогда, когда $\sigma c = c$, $f\varphi(\sigma) = f$. Так как при $\sigma \neq 1$ и $\varphi\sigma \neq 1$, то и σ и $\varphi(\sigma)$ имеют конечное число неподвижных точек на C и F соответственно, а следовательно, σ имеет только конечное число неподвижных точек на $C \times F$. Таким образом, накрытие $C \times F \rightarrow V$ может иметь только изолированные точки ветвления. Отсюда и из того, что ни $C \times F$, ни V не имеют особых точек, следует, что это накрытие вообще не имеет точек ветвления. Это вытекает, например, из теоремы Зариского о многообразии ветвления [17], согласно которой многообразие ветвления любого накрытия неособого многообразия неособым имеет коразмерность 1. Можно это проверить и непосредственно, рассмотрев подкольцо $\mathfrak{D}_x^H$, состоящее из H -инвариантных элементов локального кольца $\mathfrak{D}_x$ точки $x \in C \times F$, где H — стационарная подгруппа точки x , и показав, что это кольцо нерегулярно (кольцо $\mathfrak{D}_x^H$ изоморфно, как легко видеть, локальному кольцу образа точки x на V).

Возьмем теперь наоборот, нормальное накрытие $C \rightarrow B$ с группой Галуа G и мономорфизм $\varphi : G \rightarrow \text{Aut} E$ группы G в группу автоморфизмов кривой F рода 1. Определим действие G на $C \times F$ формулой (40) и выясним, когда G действует на $C \times F$ без неподвижных точек и когда $(C \times F)/G$ имеет инварианты $p = 0, q = 1$.

Группа $\varphi(G)$ является группой автоморфизмов неособой кривой F рода 1. Введем в F структуру одномерного абелева многообразия. Тогда, как известно, конечная группа бирегулярных преобразований F является полупрямым произведением

$$\varphi(G) = H \cdot \mathcal{U}, \quad (41)$$

где $\mathcal{U}$ состоит из сдвигов, а H — из автоморфизмов абелева многообразия F , причем $\mathcal{U}$ имеет одну или две образующие, а H является циклической группой порядка 1, 2, 3, 4 или 6. При этом, естественно, $\mathcal{U}$ является H -операторной группой.

Легко проверить, что элементы из $\mathcal{U}$, и только они, не имеют неподвижных точек на F . Следовательно, для того, чтобы группа G , действующая на $C \times F$ по закону (33), не имела неподвижных точек, необходимо и достаточно, чтобы в группе G автоморфизмов накрытия $C \rightarrow B$ только автоморфизмы вида $\varphi^{-1}(a)$, $a \in \mathcal{U}$ имели неподвижные точки. Это в свою очередь означает, что накрытие $C_1 \rightarrow B$, принадлежащее согласно теории Галуа к подгруппе $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$, является неразветвленным.

Положим $F/\varphi(G) = L$ и обозначим род кривой L через γ . Из формулы (36) следует, что если $\bar{V} = C \times F$, $V = (C \times F)/G$, то

$$\Omega'(V) \simeq \Omega'(\bar{V})^G \simeq \Omega'(C)^G \oplus \Omega'(F)^G \simeq \Omega'(B) \oplus \Omega'(L),$$

и поэтому для V

$$q = 1 + \gamma,$$

так что $q = 1$ тогда и только тогда, когда кривая L рациональна. Это в свою очередь эквивалентно тому, что в (41) $H \neq 1$.

Из формулы (38) следует, что

$$\Omega^2(\bar{V}) \simeq \Omega'(C) \otimes \Omega'(F).$$

Для того, чтобы вычислить $\Omega^2(\bar{V})^G$, определим сначала $\Omega^2(\bar{V})^{\mathfrak{U}}$. Так как элементы $a \in \mathfrak{U}$ являются сдвигами абелева многообразия F , то $\Omega'(F)^{\mathfrak{U}} = \Omega'(F)$ и

$$\Omega^2(\bar{V})^{\mathfrak{U}} \simeq \Omega'(C)^{\mathfrak{U}} \otimes \Omega'(F) \simeq \Omega'(C_1) \otimes \Omega'(F),$$

где C_1 — накрытие $C_1 \rightarrow B$, принадлежащее подгруппе $\varphi^{-1}(\mathfrak{U})$ группы Галуа накрытия $C \rightarrow B$. Накрытие $C_1 \rightarrow B$ по условию неразветвлено, и мы можем применить к нему формулу (39). Поэтому

$$\Omega^2(\bar{V})^G = (\Omega^2(\bar{V})^{\mathfrak{U}})^H \simeq \Omega'(L),$$

и, следовательно, $p = 0$ тогда и только тогда, когда кривая L рациональна и, значит, $H \neq 1$. Мы доказали следующий результат.

Теорема 12. Все поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ в случае $g = 1$ могут быть получены в виде $v = \bar{V}/G$, $\bar{V} = C \times F$, $c \rightarrow B$ — накрытие эллиптической кривой B с группой Галуа G типа (41) с $H \neq 1$, причем G изоморфно группе бирегулярных преобразований кривой F рода 1 и в этом изоморфизме элементы $\mathfrak{U}$ соответствуют сдвигам, а H — автоморфизмам одномерного абелева многообразия F . При этом накрытие $C_1 \rightarrow B$, принадлежащее в смысле теории Галуа подгруппе $\mathfrak{U}$ группы Галуа G накрытия $C \rightarrow B$, должно быть неразветвленным.

Можно было бы дать явную конструкцию расширений поля $k(B)$, имеющих группы Галуа типа (41) и удовлетворяющих всем условиям теоремы 12, и тем самым дать явную конструкцию для поверхностей с инвариантами $p = 0$, $q = 1$ также и в случае $g = 1$. Однако более красивая классификация таких поверхностей будет получена в рамках теории поверхностей с пучком эллиптических кривых (см. теорему 12, гл. VII).

Теорема 13. (Критерий Энриквеса). Поверхность X является линейчатой тогда и только тогда, когда для нее $P_{12} = 0$.

Доказательство. Прежде всего проверим, что для линейчатой поверхности $P_{12} = 0$. Ввиду бирациональной инвариантности числа P_{12} достаточно установить равенство $P_{12} = 0$ для поверхности $V = B \times P^1$, где P^1 — проективная прямая. Для этой поверхности $P_n = 0$ для всех $n > 0$. Действительно, из (2) следует, что на V

$$(K \cdot (b \times P^1)) = -2 < 0.$$

Поэтому, если бы $P_n(V)$ было положительно при некотором $n > 0$, мы имели бы $nK \sim D > 0$,

$$(D \cdot (b \times P')) = (nK \cdot (b \times P')) = -2n < 0,$$

что невозможно.

Докажем, что из равенства $P_{12} = 0$ следует, что поверхность V линейчатая. Прежде всего заметим, что ввиду этого условия $P = 0$ и $P_2 = 0$. Поэтому, если $q = 0$, то поверхность V рациональна ввиду критерия Кастельнуово и тем более является линейчатой. Точно так же, если $q > 1$, то поверхность является линейчатой согласно теореме 5. Нам остается рассмотреть случай $q = 1$.

В этом случае мы можем воспользоваться теоремами 11 и 12 и представить V в виде $\bar{V}/G$, где $\bar{V} = C \times F$, $C \rightarrow B$ — накрытие, быть может, разветвленное, а группа G определена в теоремах 11 и 12 и действует на $\bar{V}$ без неподвижных точек. Нам надо определить $P_n(X)$, т.е. размерность пространства дифференциалов степени n и 1-го рода на X .

Если x и y — две функции, алгебраически независимые на X , то они будут независимыми и на $\bar{X}$, и любой дифференциал n -й степени на $\bar{X}$ может быть записан в виде $f(dx \wedge dy)^n$, $f \in k(\bar{X})$. Инвариантность этого дифференциала относительно действия автоморфизмов из G равносильна инвариантности функции f , а это в свою очередь означает, что $f \in k(X)$, а значит, и сам дифференциал является образом дифференциала на X при отображении дифференциалов, которое индуцируется отображением $\pi: \bar{X} \rightarrow X$.

Мы доказали, таким образом, что дифференциалы n -й степени на $\bar{X}$, инвариантные относительно автоморфизмов из G , совпадают с дифференциалами вида $\pi^*(\omega)$, где ω — дифференциал на X .

Заметим теперь, что ввиду неразветвленности накрытия $\bar{X} \rightarrow X$ дифференциал ω тогда и только тогда 1-го рода на X , когда $\pi^*(\omega)$ — 1-го рода на $\bar{X}$. Таким образом,

$$\Omega_n(X) \simeq \Omega_n(\overline{X})^G,$$

где $\Omega_n(X)$ и $\Omega_n(\overline{X})$ — пространства дифференциалов n -й степени и 1-го рода на X и соответственно на $\overline{X}$. Очевидно, что

$$\Omega_n(\overline{V})^G \supset \Omega_n(C)^G \otimes \Omega_n(F)^G \supset \Omega_n(B) \otimes \Omega_n(F)^G.$$

Так как B — эллиптическая кривая, то $\Omega_n(B) \simeq k$. Ввиду того, что мы доказали раньше, отсюда следует, что

$$P_n(V) \geq \dim_k \Omega_n(F)^{\varphi(G)}.$$

Остается найти размерность пространства $\Omega_n(F)^{\varphi(G)}$. Для этого вспомним, что $\varphi(G)$ является группой Галуа расширения $k(F)/k(L)$ и что L является рациональной кривой. Так как дифференциалы n -й степени, инвариантные относительно автоморфизмов из $\varphi(G)$, как мы видели, имеют вид $\psi^*(\omega)$, где ψ — накрытие $F \rightarrow L$, а ω — дифференциалы на L , то пространство $\Omega_n(F)^{\varphi(G)}$ совпадает с пространством тех дифференциалов n -й степени на L , для которых $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода.

Поверхность V обладает регулярным отображением $V \rightarrow B$, слои которого изоморфны F (это отображение индуцируется отображением $\overline{V} \rightarrow \overline{B}$). Поэтому, если мы покажем, что род кривой F равен 0, то тем самым будет доказано, что поверхность V — линейчатая.

Мы видим, что утверждение теоремы 11 свелось к следующей лемме об алгебраических кривых.

Лемма 14. Пусть $\psi : F \rightarrow L$ — нормальное накрытие рациональной кривой. Если любой дифференциал ω 12-й степени на L такой, что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F равен 0, то F — рациональная кривая.

Доказательство. Выберем координату t на проективной прямой L так, чтобы все точки ветвления накрытия ψ были конечными. Пусть $\omega = f(dt)^n$ — дифференциал n -й степени на L . Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция f , чтобы дифференциал $\psi^*(\omega)$ был 1-го рода.

Пусть точка $P_i \in F$, $\psi(P_i) = Q_i \neq \infty$ и P_i является точкой ветвления кратности e_i для накрытия ψ . Тогда $t = \tau_i^{e_i}$ и на F , где τ_i — локальный параметр в точке P_i , а $\nu_{P_i}(u) = 0$ и

$$\psi^*(\omega) = \psi^*(f)(\tau_i^{e_i-1}v)^n, \quad \nu_{P_i}(v) = 0.$$

Отсюда следует, что ω регулярен в P_i тогда и только тогда, когда

$$\nu_{P_i}(\psi^*(f)) \geq n(e_i - 1),$$

а так как $\nu_{P_i}(\psi^*(f)) = e_i \nu_{Q_i}(f)$, то то же условие можно записать в виде

$$\nu_{Q_i}(f) \geq -n \left(1 - \frac{1}{e_i} \right),$$

или

$$\nu_{Q_i}(f) \geq -n \left[\left(1 - \frac{1}{e_i} \right) \right].$$

Аналогичное рассмотрение в бесконечно удаленной точке (∞) дает условие

$$\nu_{\infty}(f) \leq -2n.$$

Мы видим, таким образом, что дифференциал $\psi^*(\omega)$ тогда и только тогда будет дифференциалом 1-го рода, когда

$$f \in \mathcal{L}(D), \quad D = \sum [n(1 - 1/e_i)] Q_i - 2n(\infty).$$

Нам нужно выяснить, когда существует такой дифференциал $\omega \neq 0$, что $\psi^*(\omega)$ 1-го рода на F . Иначе говоря, мы должны выяснить, когда

$$l(D) > 0.$$

Так как на кривой рода 0 размерность $l(D) > 0$ тогда и только тогда, когда $\deg D \geq 0$, то интересующее нас условие принимает вид

$$\sum [n(1 - 1/e_i)] \geq 2n. \quad (42)$$

Предположим теперь, что род кривой F отличен от 0, и докажем, что соотношение (42) можно удовлетворить при $n = 2, 3, 4$ или 6. Это и дает нам существование такого дифференциала ω степени $n = 2, 3, 4$ или 6, что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F . Дифференциал $\omega^{12/n}$ будет тогда удовлетворять всем требованиям леммы.

Пусть накрытие $\psi : F \rightarrow L$ имеет степень m . Тогда над каждой из точек Q_i лежит m/e_i точек ветвления кратности e_i (ввиду нормальности накрытия). Так как род g кривой F по условию ≥ 1 , то

$$\frac{1}{2} \sum (e_i - 1) \frac{m}{e_i} - m + 1 \geq 0,$$

т.е.

$$\sum (1 - 1/e_i) \geq 2. \quad (43)$$

Пусть $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_k$. Так как $e_i \geq 2$, то, если $k \geq 4$, условие (42) выполнено уже с $n = 2$:

$$2(1 - 1/e_i) = 2 - 2/e_i \geq 1,$$

$$\sum_1^3 [2(1 - 1/e_i)] \geq k \geq 4.$$

Если $3 \leq e_1 \leq e_2 \leq e_3$, то соотношение (42) выполняется с $n = 3$:

$$3(1 - 1/e_i) \geq 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\sum_1^3 [3(1 - 1/e_i)] \geq 6.$$

Если $e_1 = 2$, $4 \leq e_2 \leq e_3$, то (42) выполняется с $n = 4$:

Если $e_1 = 2, e_2 = 3, e_3 \geq 6$, то (42) выполняется с $n = 6$:

$$[6(1 - 1/2)] + [6(1 - 1/3)] + [6(1 - 1/e_3)] \geq 3 + 4 + 5 = 12.$$

Таким образом, остались неразобранными случаи $e_1 = 2, e_2 = 3, e_3 = 3, 4$ или 5 . В этих случаях (соответствующих группам правильных многогранников) не выполняется соотношение (43):

$$1 - 1/2 + 1 - 1/3 + 1 - 1/e_3 \leq 1 \frac{29}{30} < 2 \text{ при } e_3 \leq 5.$$

Лемма 14, а следовательно, и теорема Энриквеса, доказана.

Замечание. Если род кривой F больше 1, то при достаточно большом n размерность пространства таких дифференциалов ω n -й степени на L , что $\psi^*(\omega)$ — 1-го рода на F , принимает сколь угодно большие значения. Иначе говоря, если $V = (F \times B)/G$, то $\max P_n(V) = \infty$.

Действительно, в этом случае вместо (43) мы имеем неравенство

$$\theta = \sum (1 - 1/e_i) - 2 > 0,$$

и если $n \equiv 0 \pmod{e_i}$ для всех e_i , то

$$\deg D = \sum [n(1 - 1/e_i)] - 2n = n\theta$$

и, значит, $l(D)$ сколь угодно велико вместе с n .

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ

ПОВЕРХНОСТИ

ГЛАВА 8

ПОВЕРХНОСТИ С ПУЧКОМ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

ТРУДЫ МАТ.ИНСТ.ИМ.В.А.СТЕКЛОВА 75 (1965) 138-154

В этой главе исследуются поверхности с пучком эллиптических кривых. Описываются связи этого класса поверхностей с другими классами алгебраических поверхностей (поверхности с $(K^2)=0$, поверхности с $\kappa = 1$). Наконец, излагается классификация поверхностей с пучком эллиптических кривых, точнее, самих пучков. По этому последнему вопросу имеются работы [25, 42, 57] и [40]. Результаты этих работ мы излагаем без доказательств, доказывая только те утверждения, которые непосредственно в этих работах не содержатся.

Основное поле k предполагается полем комплексных чисел. Большинство рассуждений сохраняет силу для случая, когда k — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 (или с еще более слабыми ограничениями на характеристику). Мы специально отмечаем места, в которых предположение $k = \mathbb{C}$ существенно для наших рассуждений.

§ 1 Основные понятия

Определение. Поверхностью с пучком эллиптических кривых называется такая тройка (V, B, π) , состоящая из неособой поверхности V , неособой кривой B и регулярного отображения $\pi: V \rightarrow B$, что общий слой расслоения π является неособой кривой рода 1.

Две поверхности с пучком эллиптических кривых (V, B, π) и (V', B, π') называются бирегулярно (соответственно бирационально) эквивалентными, если существует такое бирегулярное (соответственно бирациональное) отображение $f: V \rightarrow V'$, что $\pi'f = \pi$.

Поверхность с эллиптическим пучком (V, B, π) называется минимальной моделью, если слои расслоения π не содержат исключительных кривых 1-го рода, то есть (согласно теореме Кастельнуово, гл.2, § 4) неособых рациональных кривых C с $(C^2) = -1$.

Всякая поверхность с эллиптическим пучком бирационально эквивалентна минимальной модели — преобразование, сжимающее исключительную кривую 1-го рода, содержащуюся в слое, в точку, очевидно, коммутирует с проекцией.

Замечание. Поверхность (V, B, π) с пучком эллиптических кривых может быть минимальной моделью в смысле определения этого параграфа, в то время как поверхность V не является минимальной моделью в смысле главы 2. В качестве примера рассмотрим две плоские неособые кубические кривые $G = 0$ и $H = 0$, имеющие 9 различных точек пересечения: $P_1, \dots, P_9$. Обозначим через V поверхность, которая получается применением σ -процесса к точкам $P_1, \dots, P_9$ плоскости. Полные прообразы на V плоских кривых $\lambda G + \mu H = 0$ определяют на V пучок эллиптических кривых. Полученная поверхность с пучком является минимальной моделью в смысле определения этого параграфа. Это легко непосредственно проверить, если предположить, что никакие три точки из P_i не лежат на одной прямой и никакие шесть — на одной кривой 2-го порядка или без всяких ограничений вывести из данного в § 6 описания возможных типов вырожденных слоев. Однако V , конечно, не является минимальной моделью в смысле определения главы 2.

Введенное понятие минимальной модели поверхности с эллиптическим пучком аналогично понятию относительно минимальной модели произвольной поверхности. Однако оно также играет роль в абсолютно минимальной модели, как показывает следующий результат.

Теорема 1. Если (V, B, π) и (V', B, π') — две поверхности с пучком эллиптических кривых, $f: V' \rightarrow V$ — бирациональное отображение V' на V и если V является минимальной моделью, то отображение f регуляро.

Доказательство. Пусть F_β и F'_β — общие слои расслоений π и π' . Обозначим через ξ и ξ' общие точки кривых F_β и F'_β , а через σ_ξ , $\sigma_{\xi'}$, $\mathcal{O}_\xi$, $\mathcal{O}_{\xi'}$ — их локальные кольца на кривых F_β и F'_β и на поверхностях V и V' соответственно. Очевидно, что отображение f индуцирует бирегулярный изоморфизм между F_β и F'_β . Поэтому

$$f(\xi') \in \sigma_\xi, \quad f(\sigma') \in \sigma_\xi \otimes k(\beta).$$

Отсюда легко следует, что исключительные кривые отображений f и f^{-1} содержатся в слоях расслоений π и π' . Если бы отображение f не было регулярным, то на V существовали бы исключительные кривые 1-го или 2-го рода. Исключительных кривых 1-го рода на V не существует по определению минимальной модели. Докажем, что не существует и исключительных кривых 2-го рода.

Для этого заметим, что если существует исключительная кривая 2-го рода, то существует и неприводимая исключительная кривая 2-го рода. Действительно, доказательство этого факта, данное в главе 2 (теорема 1, § 5), дословно сохраняется в нашем случае (мы не можем непосредственно применить теорему 1, гл. 2, § 5 ввиду разного смысла термина "минимальная модель").

Если бы на V была неприводимая исключительная кривая 2-го рода C , содержащаяся в слое F_0 , то, согласно теореме 1, гл. 2, § 1, мы имели бы

$$(C^2) \geq 0.$$

Пусть

$$F_0 = nC + \sum n_i C_i, \quad n > 0.$$

Очевидно, что $(F_0 \cdot C) = 0$, так как при вычислении $(F_0 \cdot C)$ мы можем заменить F_0 на любой другой слой. Поэтому

$$(C^2) = -\frac{1}{n} \sum n_i (C_i \cdot C) \leq 0.$$

Следовательно, должно быть $(C^2) = 0$, что возможно только если все $(C_i \cdot C) = 0$. Это значит, что C совпадает со связной компонентой F_0 , что ввиду связности F_0 возможно только при $F_0 = nC$. Но тогда мы получаем, что $p_a(C) = 1$, в то время как согласно теореме 1 (§ 1, гл. 2) $p_a(C) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. Две бирационально эквивалентные минимальные модели бирегулярно эквивалентны. Бирациональный автоморфизм минимальной модели бирегулярен.

Рассмотрим один пример применения теоремы 1. Пусть (V, B, π) — поверхность с пучком, описанная в замечании. Очевидно, что $B = P^1$ (точка на B задается отношением $(\lambda : \mu)$). Прямые $L_i = \sigma(P_i)$, $i = 1, \dots, 9$, отображаются проекцией π бирегулярно на B . Поэтому можно определить такие бирегулярные отображения $s_i : B \rightarrow L_i$, что $\pi s_i = 1$. Взяв точку $F_\beta \cdot L_1$ за 0, мы можем определить на общем слое F_β структуру одномерного абелева многообразия. Отображения φ_i , $i = 1, \dots, 9$:

$$\varphi_i(v) = v + s_i \pi(v)$$

являются бирегулярными преобразованиями, если $v \in F_\beta$ — сдвигами на точки $s_i(\beta)$. Поэтому они являются бирациональными, а ввиду следствия — и бирегулярными автоморфизмами V . Образованная этими автоморфизмами группа является, как легко показать, свободной абелевой группой с 8-ю образующими $\varphi_2, \dots, \varphi_9$. Мы получаем, таким образом, пример поверхности, которая имеет бесконечную группу автоморфизмов, но не имеет, как легко проверить, алгебраической группы (или, при $k = \mathbb{C}$, группы Ли) автоморфизмов.

С другой стороны, на V есть кривые с отрицательными квадратами (например, L_i). При помощи построенных автоморфизмов мы можем получить бесконечное число таких кривых. Таким образом, мы получаем пример поверхности, содержащей бесконечное число кривых с отрицательным квадратом (и даже исключительных кривых 1-го рода).

§ 2 Строение слоев

Лемма 1. Пусть V — поверхность, π — ее регулярное отображение на кривую B , F_0 — один из слоев расслоения π и $F_0 = \sum n_i C_i$, где C_i — неприводимые кривые. Если $D = \sum m_i C_i$, то $(D^2) \leq 0$.

Доказательство. Предположим, что $(D^2) > 0$. Тогда из теоремы Римана–Роха следует, что при любом E при достаточно большом n , $l(nD - E) > 0$. Возьмем за E гиперплоское сечение поверхности V и положим

$$nD - E \sim D_1 > 0.$$

Тогда, если F — любой слой расслоения π , то

$$n(D \cdot F) = (E \cdot F) + (D_1 \cdot F). \quad (1)$$

Так как все компоненты цикла D содержатся в F_0 , то $(D \cdot F) = 0$. С другой стороны, $(E \cdot F) > 0$, а $(D_1 \cdot F) \geq 0$, так как мы можем взять за F , в частности, неприводимый слой. Таким образом, (1) приводит нас к противоречию. Лемма доказана.

Утверждение леммы 1 можно выразить иначе. Для этого рассмотрим пространство X (над полем рациональных чисел), базисом которого являются неприводимые компоненты $C_1, \dots, C_k$ слоя F_0 . Индекс пересечения $(C \cdot D)$ определяет в X скалярное произведение и квадратичную форму

$$\varphi(C) = (C^2). \quad (2)$$

Лемма утверждает, что эта форма неположительна.

Теорема 2 (см. Зарисский [22]). Если в обозначениях леммы 1 слой F_0 связан и $(D^2) = 0$, то $D = rF_0$, где r — рациональное число.

Так как $(F_0 \cdot C_i) = 0$ для всех $C_1, \dots, C_k$, то квадратичная форма φ , определенная (2), имеет ранг $\leq k - 1$. Утверждение теоремы 2 равносильно тому, что этот ранг в точности равен $k - 1$. Пусть ранг φ равен $l \leq k - 2$. В пространстве X обозначим через Y подпространство, состоящее из всех D , для которых $(D \cdot C) = 0$ для всех $C \in X$. Очевидно, что в факторпространстве X/Y форма φ отрицательно определена. Мы можем выбрать $C_1 \dots C_l$ так, чтобы они образовывали базис в X/Y , и тогда

$$(x_1 C_1 + \dots + x_l C_l)^2 < 0 \quad (3)$$

для всех $x_1, \dots, x_l$, не равных одновременно 0.

Положим

$$C_{l+1} = L + D,$$

где $D \in Y$, а L является линейной комбинацией $C_1 \dots C_l$. Пусть

$$L = L_1 + L_2,$$

где $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ и L_1 и L_2 не имеют общих компонент. Тогда, с одной стороны, $(C_{l+1} \cdot L_1) \geq 0$, так как C_{l+1} и L_1 не имеют общих компонент, а, с другой,

$$(C_{l+1} \cdot L_1) = (L_1^2) - (L_1 \cdot L_2) \leq 0.$$

Это значит, что $(L_1^2) = 0$ и $(L_1 \cdot L_2) = 0$. Но ввиду (3) отсюда следует, что $L_1 = 0$,

$$C_{l+1} + L_2 \in Y$$

и, в частности, $((C_{l+1} + L_2) \cdot C_i) = 0$. Это значит, что циклы C_i , являющиеся компонентами $C_{l+1} + L_2$, не пересекаются с другими циклами, а это, в свою очередь, означает, что одни и другие циклы составляют две связанные компоненты слоя F_0 , что противоречит условию.

§ 3 Канонический класс

Лемма 2. На поверхности с пучком эллиптических кривых канонический класс содержит дивизор, состоящий из компонент слоев.

Действительно, пусть F_β — общий слой расслоения $\pi : V \rightarrow B$. Так как канонический класс кривой F_β равен 0, то $K \cdot F_\beta \sim 0$. Если

$D \in K$, $D \cdot F_\beta = (f)$, то $\bar{D} = D - (f) \in K$ и $(\bar{D} \cdot F_\beta) = 0$. Как мы видели в § 7, гл. 4, отсюда следует, что D состоит из компонент слоев.

Замечание. Из доказательства леммы следует, что любой эффективный дивизор канонического класса состоит из компонент слоев.

Теорема 3. На минимальной модели поверхности с пучком эллиптических кривых $(K^2) = 0$.

Нам надо доказать, что невозможно

а) $(K^2) > 0$, б) $(K^2) < 0$.

а) Из теоремы Римана–Роха следует, что при любом E и при некотором $n > 0$, $l(nK - E) > 0$. Возьмем за E гиперплоское сечение поверхности V и пусть

$$nK - E \sim D > 0.$$

Так как слой F является эллиптической кривой и $(F^2) = 0$, то $(K \cdot F) = 0$. Поэтому

$$0 = n(K \cdot F) = (E \cdot F) + (D \cdot F).$$

Но $(E \cdot F) > 0$, а $(D \cdot F) \geq 0$, что приводит к противоречию.

б) Согласно лемме 2 в каноническом классе имеется представитель K вида

$$K = \sum_0^m K_i,$$

где K_i состоит из компонент слоя F_i .

Так как $K_i \cdot K_j = 0$ при $i \neq j$, то

$$(K^2) = \sum (K_i^2)$$

и нам достаточно доказать, что все $(K_i^2) \geq 0$.

Пусть $(K_0^2) < 0$ и C_0 — неприводимая компонента слоя F_0 , входящая в K_0 . Если $F_0 = nC_0$, то $(C_0^2) = 0$ и, значит, $(K_0^2) = 0$. Если F_0 содержит еще другие компоненты $F_0 = nC_0 + \sum_1^k n_i C_i$, то

$$0 = (F_0 \cdot C_0) = n(C_0^2) + \sum n_i (C_i \cdot C_0).$$

При этом $(C_i \cdot C_0) \geq 0$ и хоть для одного i , $(C_i \cdot C_0) > 0$, иначе C_0 было бы связной компонентой слоя F_0 , что противоречит его

связности. Поэтому $(C_0^2) < 0$. Хотя для одной компоненты C_0 цикла F_0 мы имеем $(C_0 \cdot K_0) < 0$. Действительно, если $(C_i \cdot K_0) \geq 0$ для $i = 0, \dots, k$, то $(C_i \cdot K_0) = 0$ для всех i — иначе для некоторого C_j было бы $(C_j \cdot K_0) > 0$, а так как для всех j , $(C_j \cdot K_0) \geq 0$, то $(F_0 \cdot K_0) > 0$, в то время как $(F_0 \cdot K_0) = 0$. Этим доказано, что если для всех i , $(C_i \cdot K_0) \geq 0$, то $(C_i \cdot K_0) = 0$. Но тогда $(K_0^2) = 0$, что противоречит предположению.

Мы доказали существование неприводимой компоненты C_0 дивизора K_0 , для которой $(C_0 \cdot K_0) < 0$. Но тогда установленные нами неравенства

$$(C_0 \cdot K) = (C_0 \cdot K_0) < 0, \quad (C_0^2) < 0$$

показывают, что

$$p_a(C_0) = \frac{(C_0 \cdot K) + (C_0^2)}{2} + 1 \leq 0,$$

что возможно только при $p_a(C_0) = 0$ и $(C_0^2) = -1$. Это означает, что C_0 — исключительная кривая 1-го рода, являющаяся компонентой слоя, а это противоречит минимальности V .

Теорема 4. На минимальной модели поверхности с пучком эллиптических кривых канонический класс содержит дивизор, являющийся рациональной комбинацией слоев.

Доказательство. Пусть K — дивизор канонического класса, состоящий из компонент слоев $K = \sum K_i$. Так как согласно теореме 3 $(K_i^2) = 0$, то из теоремы 1 следует, что $K_i = r_i F_i$, где r_i — некоторое рациональное число. Это и есть утверждение теоремы.

Замечание. Из замечания к лемме 2 следует, что любой эффективный дивизор канонического класса является рациональной комбинацией слоев.

Определение. Слой F_0 называется кратным, если

$$F_0 = \sum n_i C_i, \quad n_i > 1.$$

Следствие теоремы 4. Если расслоение $\pi : V \rightarrow B$ не содержит кратных слоев, то канонический класс содержит дивизор, который является целочисленной линейной комбинацией слоев.

§ 4 Поверхности с эллиптическим пучком и поверхности с $(K_0^2) = 0$

Теорема 5. Предположим, что поверхность V не является рациональной или линейчатой поверхностью, является минимальной моделью и для нее $(K_0^2) = 0$. Тогда или $12K = 0$ или существует такое m , что для всех достаточно больших n линейная система $|mnpK|$ не имеет неподвижных кривых и базисных точек и составлена из пучка эллиптических кривых. Указанным свойством этот пучок однозначно определяется.

Доказательство. Рассмотрим два случая: А) Все $P_n \leq 1$ и В) некоторое $P_n \geq 2$.

А) Рассмотрим отдельно случаи $p = 0$ и $q = 0$. Если $p = 0$ и $q = 0$, то при $P_2 = 0$, согласно теореме Кастельнуово (гл. 3, § 2), поверхность является рациональной, а при $P_2 = 1$, согласно замечанию в конце § 1, гл. 8, мы имеем дело с поверхностью Энриквеса, для которой $2K = 0$, и, значит, тем более $12K = 0$. Если $p = 0$ и $q > 1$, то согласно теореме 5 (§ 3, гл. 4) V является линейчатой поверхностью. Наконец, при $p = 0$, $q = 1$, согласно теоремам 11 и 12 (§ 8, гл. 4), V представляется в виде $(B \times C)/G$, где B — эллиптическая кривая, C — кривая произвольного рода, а G — конечная группа автоморфизмов без неподвижных точек поверхности $B \times C$. Если $g = 0$, то поверхность V линейчатая. Если $g > 1$, то согласно замечанию к лемме 14 (гл. 4) $P_n(V)$ принимает сколь угодно большие значения и мы имеем дело со случаем В). Остается рассмотреть случай, когда $g = 1$, то есть когда и B и C — эллиптические кривые.

Согласно теореме Энриквеса (теорема 13, гл. 4), если V — не линейчатая поверхность, то $P_{12}(V) > 0$, то есть $12K \sim D > 0$. Докажем, что $D = 0$. Действительно, если $f: B \times C \rightarrow V$ — проекция, то канонический класс $\bar{K}$ поверхности $B \times C$ имеет вид $f^*(K)$. Поэтому если $D > 0$, $D \neq 0$, то

$$12\bar{K} = f^*(12K) = f^*(D)$$

и, очевидно, что $f^*(D) > 0$, $f^*(D) \neq 0$. Это, однако, противоречит тому, что $B \times C$ — абелево многообразие, так что $\bar{K} = 0$ и $12\bar{K} = 0$.

Рассмотрим теперь случай $p = 1$ и значит $P_2 = 1$. Тогда

$$p_a(V) = 1 - q + p = 2 - q = \frac{\chi}{12} = \frac{2 - 4q + 2p + h^{1,1}}{12} = \frac{4 - 4q + h^{1,1}}{12}.$$

Так как $h^{1,1} > 0$, то отсюда следует, что $q \leq 2$. Если $q = 0$, то по теореме Римана–Роха

$$l(-K) + l(2K) \geq 2,$$

то есть $l(-K) \geq 1$. Так как $l(K) \geq 1$, то отсюда следует, что $K = 0$.

Случай $q = 1$ невозможен согласно теореме 1 (гл. 8). Наконец, при $q = 2$, V является абелевым многообразием согласно теореме 3 (гл. 8) и, значит, опять $K = 0$.

В) Пусть $P_\nu \geq 2$ при некотором ν , то есть $l(\nu K) \geq 2$.

Согласно теореме Бертини система $|\nu K|$ составлена из пучка C_ν . Если D — неподвижная часть этой системы, то

$$\nu K \sim D + \sum C_i, \quad (4)$$

где C_i — кривые пучка C_ν и $(C_\nu^2) \geq 0$. С другой стороны, $(C_i \cdot K) \geq 0$ и $(D \cdot K) \geq 0$ — иначе, согласно лемме гл. 2, § 4, поверхность V была бы линейчатой или не была бы минимальной моделью. Так как $(K^2) = 0$, то из (4) следует, путем умножения обеих частей на K , что $(C_i \cdot K) = 0$. Умножая теперь обе части (4) на C_i , мы получаем отсюда (и из того, что $(C_i^2) \geq 0$), что $(C_i^2) = 0$ и $(C_i \cdot C_j) = 0$. Таким образом, $p_a(C_i) = 1$ и различные кривые C_i не пересекаются. Из теоремы Бертини следует, что C_λ является пучком эллиптических кривых, причем ввиду $(C_\lambda^2) = 0$ он не имеет фундаментальных точек. Он определяет регулярное отображение V на некоторую кривую B .

Остается доказать утверждение о неподвижных компонентах системы $|nK|$. Согласно замечанию к теореме 4 дивизор $D + \sum C_i$ является рациональной линейной комбинацией слоев. Пусть ν — общий знаменатель коэффициентов этой комбинации. Положим $m = \nu \cdot \nu'$. Тогда $|mK|$ содержит целочисленную линейную комбинацию слоев:

$$mK \sim \sum n_i F_{b_i}, \quad n_i > 0.$$

Так как при достаточно большом n класс $n(\sum n_i b_i)$ на кривой B не содержит неподвижных компонент, то класс mnK на V тоже не содержит неподвижных компонент.

Следствие. Если поверхность V является минимальной моделью и не линейчатая, то для нее $\kappa = 1$ тогда и только тогда, когда $(K^2) = 0$, $12K \neq 0$.

§ 5 Якобиево расслоение

В этом и следующих параграфах мы изложим результаты работ [25, 42, 40] и [57] по классификации поверхностей с пучком эллиптических кривых. Мы не будем приводить доказательств большинства излагаемых результатов. Читатель может найти их в указанных работах.

Пусть $\pi : V \rightarrow B$ — расслоение, слои которого определяют пучок эллиптических кривых на поверхности V . Если β — общая точка кривой B , то слой F_β — кривая рода 1, определенная над полем $k(B)$. Таким образом, к изучению поверхностей V можно применить теорию кривых рода 1. Такова точка зрения работ [42, 56] и [57].

На кривой F_β , вообще говоря, нельзя ввести структуру одномерного абелева многообразия над полем $k(B)$; для этого необходимо, чтобы она имела рациональную точку над этим полем. Задание рациональной точки на кривой F_β над полем $k(B)$ равносильно заданию рационального (а значит, и регулярного) отображения $\sigma : B \rightarrow V$, такого, что $\pi\sigma = 1$. Образ $\sigma B = C$ характеризуется тем, что это неприводимая кривая на V и $(C \cdot F) = 1$, где F — любой слой расслоения π . Мы будем называть такую кривую C сечением расслоения π . С каждым расслоением π можно связать другое расслоение, имеющее ту же базу и уже обладающее сечением. Для этого нужно рассмотреть якобиеву кривую A_β кривой F_β . Кривая A_β обладает тем свойством, что существует бирациональное отображение φ кривой F_β на A_β , определенное над некоторым конечным расширением поля $k(B)$, которое устанавливает изоморфизм между группой классов дивизоров нулевой степени кривой F_β , определенных над любым полем $K \supset k(B)$, и группой точек на кривой A_β , определенных над тем же полем. Дальше будет удобно считать кривые F_β (и соответствующие поверхности V с пучком эллиптических кривых) различными, если отображения φ различны — не отличаются на автоморфизм одномерного абелева многообразия A_β . Общая точка кривой A_β определяет некоторую алгебраическую поверхность, которая ввиду включения $k(B) \in k(A_\beta)$ снабжена пучком эллиптических кривых с базой B .

Обозначим через J неособую минимальную модель этой поверхности с пучком эллиптических кривых. Мы будем называть J якобиевым расслоением расслоения $\pi : V \rightarrow B$. Так как кривая A_β имеет рациональную точку над полем $k(B)$ — нулевую точку, то расслоение J имеет сечение σ , которое мы будем называть нулевым сечением. Для каждого расслоения $\pi : V \rightarrow B$ существует такое накрытие $C \rightarrow B$, что расслоение $V \times_B C$ над C имеет сечение. Всякое расслоение, имеющее сечение, изоморфно своему якобиеву расслоению.

Принцип дальнейшей классификации заключается в том, что сначала классифицируются расслоения, имеющие сечение, а потом — все расслоения, имеющие заданное якобиево расслоение. Произвольное расслоение следующим образом связано со своим якобиевым расслоением. Пусть $C \rightarrow B$ — некоторое нормальное на-

крытие с группой Галуа G и $\tilde{J}_C$ — неособая минимальная модель расслоения $J \times_B C$ над C . Группа G , естественно, действует на $\tilde{J}_C$. Сечения $\sigma : C \rightarrow \tilde{J}_C$ образуют группу, которая является, очевидно, G -операторной группой. Обозначим эту группу через $\mathcal{A}_J(C)$. Тогда все расслоения $\pi : V \rightarrow B$, для которых расслоение $V \times_B C$ над C имеет сечение, находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $H^1(G, \mathcal{A}_J(C))$.

Групповую структуру можно перенести при помощи этого соответствия на множество всех расслоений V , имеющих J якобиевым расслоением, для которых $V \times_B C$ имеет сечение. Для любых двух других расслоений V_1 и V_2 над B с общим якобиевым расслоением можно найти такое накрытие $C \rightarrow B$, что $V_1 \times_B C$ и $V_2 \times_B C$ имеют сечение. Пользуясь этим, можно ввести групповую операцию во все множество расслоений на эллиптические кривые $\pi : V \rightarrow B$, имеющих заданное якобиево расслоение J . Получаемая группа обозначается через $\mathfrak{H}(B, J)$. Она является периодической группой.

Пусть $\pi : V \rightarrow B$ — расслоение на эллиптические кривые, имеющие якобиево расслоение J . Пусть $C \rightarrow B$ — такое накрытие, что $V \times_B C$ имеет сечение над C и $u \in H^1(G, \mathcal{A}_J(C))$ — элемент, соответствующий V . Таким образом, u является одномерным коциклом, то есть имеет вид $u_g \in \mathcal{A}_J(C)$, $g \in G$. Так как u_g является сечением $\tilde{J}_C$ над C , то преобразование $x \rightarrow g(x) + u_g(\pi(x))$ является (ввиду того, что $\tilde{J}_C$ — минимальная модель) бигулярным автоморфизмом $\tilde{J}_C$. Таким образом, мы имеем отображение $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(\tilde{J}_C)$, которое является мономорфизмом. Теперь можно указать, как определяется V по $\tilde{J}_C$ и u_g :

$$V \simeq \tilde{J}_C / \varphi(G). \quad (5)$$

§ 6 Слои якобиевого расслоения

В работах [25] и [40] описаны все типы вырожденных слоев, которые могут встретиться в якобиевых расслоениях. Для того, чтобы изложить это описание, напомним, что общий слой F_β бирационально эквивалентен над $k(B)$ — кривой, заданной уравнением

$$y^2 = x^3 + p \cdot x + q, \quad p, q \in k(B).$$

Пусть $b \in B$, t — локальный параметр в точке b и $\nu(f)$ — показатель функции $f' \in k(B)$ в точке b . Можно предполагать, что в (6) $\nu(p) \geq 0$, $\nu(q) \geq 0$ и $\min(\nu(p) - 4, \nu(q) - 6) < 0$. Положим

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2.$$

Слой F_b является вырожденным тогда и только тогда, когда $\nu(\Delta) > 0$. Рассмотрим два случая:

А) при $k = 0$ или 1 имеет место представление

$$p = t^{2k}a, \quad q = t^{3k}b, \quad \nu(a) = \nu(b) = 0, \quad n = \nu(4a^3 + 27b^2) > 0.$$

В) такое представление не имеет места.

Случай А при $k = 0$ мы будем обозначать в зависимости от значения n через A'_n , а при $k = 1$ — через A''_n . Число n может принимать любые целые положительные значения.

В случае В число $\nu(\Delta)$ может принимать только значения 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10. Мы будем обозначать эти случаи через B_n , $n = 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10$.

Описание вырожденных слоев во всех этих случаях дается ниже. При этом Θ_i — рациональные кривые без особых точек, кроме случая A'_1 , когда Θ имеет одну двойную точку с разделенными касательными, и случая B_2 , когда Θ имеет одну двойную точку с двойной касательной. Пересечения кривых Θ_i указаны на чертежах. Все кривые в точках пересечения трансверсальны, кроме случая B_3 , когда Θ_1 и Θ_2 имеют касание первого порядка.

Слои имеют следующее строение (рис. 1–4 на вкладке, следующей в настоящем издании за этой страницей):

$$A'_1 : F_b = \Theta,$$

$$A'_n, n > 1 : F_b = \Theta_1 + \dots + \Theta_n,$$

$$A''_n : F_b = \Theta_0 + \Theta_1 + 2\Theta_2 + \dots + 2\Theta_{n+2} + \Theta_{n+3} + \Theta_{n+4},$$

$$B_2 : F_b = \Theta,$$

$$B_3 : F_b = \Theta_1 + \Theta_2,$$

$$B_4 : F_b = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3,$$

$$B_6 : F_b = 2\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + \Theta_4,$$

$$B_8 : F_b = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 + 2\Theta_4 + 2\Theta_5 + 2\Theta_6 + 3\Theta_7,$$

$$B_9 : F_b = \Theta_1 + \Theta_2 + 2\Theta_3 + 2\Theta_4 + 2\Theta_5 + 3\Theta_6 + 7\Theta_7 + 4\Theta_8,$$

$$B_{10} : F_b = \Theta_1 + 2\Theta_2 + 2\Theta_3 + 3\Theta_4 + 3\Theta_5 + 4\Theta_6 + 4\Theta_7 + 5\Theta_8 + 6\Theta_9.$$

Из рассмотрения отдельных случаев видно, что всегда $\nu(\Delta) = \chi(F_b)$.

Более тонкие свойства вырожденных слоев связаны с рассмотрением групповой структуры на них. Групповая операция на общем слое F_β расслоения J определяет регулярное отображение $F_\beta \times F_\beta \rightarrow$

F_β . Это отображение можно рассматривать как рациональное отображение $J \times_B J \rightarrow J$. Оказывается, что если J — минимальная модель, то это отображение регулярно и определяет структуру алгебраической группы на множестве неособых точек каждого слоя F_b . Обозначим эту группу через A_b . В частности, та компонента, которая пересекает нулевое сечение, образует подгруппу A_b^0 , связную компоненту единицы группы A_b . Группа $A_b = A_b^0$ является эллиптической кривой, если слой F_b неособый, является мультипликативной группой в случае A'_n и аддитивной группой во всех остальных случаях. Группа A_b/A_b^0 указана на рис. 1-4.

Наконец, укажем, каковы якобиевы расслоения, вообще не имеющие вырожденных слоев.

Определение. Пусть A — эллиптическая кривая (с фиксированной групповой структурой) над полем k , B — произвольная кривая, $B \rightarrow B$ — нормальное неразветвленное накрытие, группа Галуа G которого изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов кривой A (как абелева многообразия) и $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } A$ — соответствующий изоморфизм. Определим действие G на $\bar{B} \times A$ по правилу

$$\sigma(\bar{b} \times a) = \sigma\bar{b} \times a\varphi(\sigma)^{-1}.$$

Расслоение $(B \times A)/G \rightarrow B$ не имеет вырожденных слоев. Такие расслоения называются косыми произведениями. Имеет место

Теорема 6. *Всякое якобиево расслоение без вырожденных слоев является косым произведением.*

Следствие. *Если B — рациональная кривая, то якобиево расслоение без вырожденных слоев над B имеет вид $B \times F$, где F — эллиптическая кривая.*

§ 7 Локальная классификация

Для того, чтобы расслоение V над B на эллиптические кривые было изоморфно своему якобиеву расслоению, необходимо и достаточно, чтобы оно имело сечение.

Всякое сечение s над B дает локальное сечение в любой точке $b \in B$. Под этим подразумевается отображение $s_b : B \rightarrow V$, задаваемое формальными степенными рядами по степеням локального параметра t в точке b , и такое, что $\pi s_b = 1$. Иными словами, локальное сечение — это рациональная точка на кривой F_β над полем степенных рядов $k\{t\}$. Важным необходимым условием для существования сечения является существование локального сечения в

любой точке $b \in B$. В связи с этим мы введем также понятие локального изоморфизма расслоений — это изоморфизм, задаваемый формальными степенными рядами по степеням локального параметра t в точке b . Иными словами, расслоения $\pi : V \rightarrow B$ и $\pi' : V' \rightarrow B$ локально изоморфны в точке $b \in B$, если кривые F_β и F'_β изоморфны над полем степенных рядов $k\{t\}$.

Мы изложим сейчас классификацию расслоения с точностью до локального изоморфизма в заданной точке $b \in B$. Для любого расслоения $V \rightarrow B$ существует такое накрытие $C \rightarrow B$, имеющее одну точку ветвления над точкой $b \in B$, что $V \times_B C$ формально изоморфно $J \times_B C$, где J — якобиево расслоение.

Обозначим через $\tilde{V} \rightarrow C$ минимальную неособую модель расслоения $V \times_B C$. Тогда расслоения $\tilde{V} \rightarrow C$ и $\tilde{J} \rightarrow C$ — изоморфны. Так как, кроме того, имеется естественная проекция $\tilde{J} \rightarrow J$, то мы получаем отображение $\tilde{V} \rightarrow J$. Пусть U_b и $\tilde{F}_c$ — слои расслоений $\tilde{J}$ и $\tilde{V}$, лежащие над точкой b и ее прообразом $c \in C$ соответственно. Отображение $\tilde{V} \rightarrow J$ определяет отображение $\tilde{F}_c \rightarrow V_b$, которое, как легко видеть, является неразветвленным циклическим накрытием. Группа Галуа H этого накрытия, естественно, изоморфна подгруппе группы Галуа G накрытия $C \rightarrow B$ в точке b . У группы G имеется некоторый выделенный характер ψ_0 . Действительно, соответствующее расширение получается присоединением элемента $\sqrt[3]{t}$ к $k\{t\}$. Характер ψ_0 определен тем, что $\psi_0(\sigma) = \sqrt[3]{t}^{1-\sigma}$. Ограничение характера ψ_0 определяет некоторый характер на группе Галуа H накрытия $\tilde{F}_c \rightarrow V_b$. Таким образом, мы имеем некоторое неразветвленное накрытие $\tilde{F}_c \rightarrow V_b$ и некоторый характер группы Галуа H этого накрытия. Так как группа H (в случае $k = \mathbb{C}$) является факторгруппой группы $H_1(U_b)$, то мы тем самым имеем некоторый характер ψ группы $H_1(U_b)$:

$$\psi \in \text{Char} H_1(U_b),$$

где Char обозначает группу периодических характеров, а $H_1(U_b)$ — одномерная группа Бетти с целочисленными коэффициентами.

Характер ψ является основным инвариантом расслоения с точки зрения формального изоморфизма. Его, однако, удобно заменить другим инвариантом. Для этого рассмотрим открытое множество $A_b^0 \subset U_b$ и естественное отображение $j : H_1(U_b) \rightarrow \bar{H}_1(A_b^0)$, где $\bar{H}_1$ — группа гомологий с произвольными носителями (если слой U_b особый, то A_b^0 некомпактно).

Для всех типов слоев легко проверить, что j является изоморфизмом и, следовательно, определяет изоморфизм j^* групп $\text{Char} H_1(U_b)$ и $\text{Char} \bar{H}_1(A_b^0)$.

Так как A_b^0 является многообразием, то группа $\text{Char } \bar{H}_1(A_b^0)$ изоморфна $H_1(A_b^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел. В результате мы имеем изоморфизм групп $\text{Char } H_1(U_b)$ и $H_1(A_b^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Элемент группы $H_1(A_b^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, соответствующий при этом изоморфизме характеру ψ , который мы сопоставили расслоению V , мы обозначим через $h_b(V)$.

Основной результат локальной классификации следующий:

Теорема 7. При $k = \mathbb{C}$ расслоения $\pi : V \rightarrow B$ и $\pi' : V' \rightarrow B$ тогда и только тогда локально изоморфны в точке $b \in B$, когда $h_b(V) = h_b(V')$.

Для несколько более общего класса полей k аналогичный результат получен в работах [42] и [57].

Следствие 1. Инвариант $h_b(V)$ может быть отличен от 0, только если слой V_b неособый или имеет тип A'_n .

Действительно, в остальных случаях A_b^0 — аддитивная группа, которая односвязна.

Следствие 2. Для произвольного расслоения $\pi : V \rightarrow B$ особый слой F_b или изоморфен соответствующему слою V_b якобиева расслоения или же (в случае, когда V_b — неособый или типа A'_n) является кратным и получается из V_b умножением на некоторое целое число.

Если слой V_b — особый, но не типа A'_n , утверждение следует из следствия 1. В оставшихся случаях проверка легко получается непосредственной конструкцией слоя F_b по формуле (5).

Следствие 3. Если расслоение $V \rightarrow B$ не имеет других вырожденных слоев кроме кратных неособых слоев, то существует такое накрытие $C \rightarrow B$, что расслоение $V \times_B C$ над C изоморфно $C \times F$, где F — эллиптическая кривая.

Для доказательства достаточно выбрать C таким, что $V \times_B C \simeq J \times_B C$, и применить следствие 2 и теорему 6.

Следствие 4. Расслоение $V \rightarrow B$ тогда и только тогда имеет локальное сечение в точке $b \in B$, когда слой F_b — не кратный.

Доказательство очевидно.

Следствие 5. Расслоение $V \rightarrow B$ тогда и только тогда имеет локальное сечение в точке $b \in B$, когда оно имеет дифференцируемое сечение в некоторой окрестности этой точки.

Действительно, если V не имеет локального сечения, то слой F_b имеет вид mD , $m > 1$. Если бы расслоение имело дифференцируемое сечение s , то мы имели бы $(s \cdot F_b) = 1$, в то время как $(s \cdot F) = m(s \cdot D) > 1$.

§ 8 Классификация расслоений

Для расслоения $\pi : V \rightarrow B$ и любой точки $b \in B$ определен инвариант $h_b(V) \in H_1(A_b^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Легко видеть, что $h_b(V) = 0$, если F_b является невырожденным слоем расслоения π . Таким образом, для заданного V , $h_b(V) \neq 0$ только для конечного числа точек $b \in B$. Поэтому сопоставление

$$V \rightarrow h_b(V), b \in B$$

определяет гомоморфизм

$$\psi : \mathfrak{H}(B, J) \rightarrow \sum_{b \in B} H_1(A_b^0, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

Нашей ближайшей целью является описание ядра и коядра гомоморфизма ψ . Начнем с описания коядра.

Теорема 8. Если J не является прямым произведением $B \times A$, где A — эллиптическая кривая, то гомоморфизм ψ эпиморфен. Если $J \simeq B \times A$, то коядро гомоморфизма ψ изоморфно группе точек конечного порядка многообразия A .

Ядро гомоморфизма ψ состоит из тех расслоений, которые, согласно теореме 7, имеют локальное сечение в любой точке $b \in B$. Иначе говоря, они локально изоморфны J в любой точке базы. Мы будем называть такие расслоения локально тривиальными, а группу, состоящую из таких расслоений, обозначать через $\mathfrak{h}(B, J)$.

Теперь предположим, что $k = \mathbb{C}$. Исследование группы $\mathfrak{h}(B, J)$ может быть проведено по классическому образцу исследования одномерных векторных расслоений. А именно, оно основано на сравнении алгебраической и дифференциальной структуры расслоений $V \in \mathfrak{h}(B, J)$.

Обозначим через $\mathfrak{h}_0(B, J)$ подгруппу группы $\mathfrak{h}(B, J)$, состоящую из тех расслоений, которые, как дифференцируемые расслоения, изоморфны J . Иначе эти расслоения характеризуются тем, что они обладают дифференцируемым сечением.

Теорема 9. Группа $\mathfrak{D}(B, J) = \mathfrak{h}(B, J)/\mathfrak{h}_0(B, J)$ конечна.

Мы опишем сначала группу $\mathfrak{h}_0$, а потом группу $\mathfrak{D}$ и покажем, что $\mathfrak{h}$ является их прямой суммой.

Пусть $V \in \mathfrak{h}_0(B, J)$ и задается коциклом $u_\sigma \in H^1(G, \mathfrak{A}_J(C))$. Из условия $v \in \mathfrak{h}_0(B, J)$ легко следует, что

$$u_\sigma = s - \sigma s, \quad \sigma \in G,$$

где $s : C \rightarrow \tilde{J}$ — дифференцируемое сечение расслоения $\tilde{J}$, а сечение σs определяется формулой

$$(\sigma s)(c) = s(\sigma^{-1}c). \quad (6)$$

Как u_σ , так и s и σs являются двумерными циклами многообразия $\tilde{J}$. Через $\widehat{u}_\sigma$, $\widehat{s}$ и $\widehat{\sigma s}$ мы обозначим соответствующие им двумерные коциклы — элементы группы $H^2(\tilde{J}, \mathbf{Z})$. Пусть $P^{2,0}$ — оператор сопоставления элементу из $H^2(\tilde{J}, \mathbf{Z})$ его составляющей типа $(2,0)$. Так как u_σ является алгебраическим циклом, то по теореме Лефшетца $P^{2,0}\widehat{u}_\sigma = 0$. Поэтому из (6) мы получаем, что

$$P^{2,0}\widehat{s} = \sigma P^{2,0}\widehat{\sigma s}. \quad (7)$$

Отображение $f : \tilde{J} \rightarrow J$ определяет вложение

$$f^* : H^2(J, \mathbf{C}) \rightarrow H^2(\tilde{J}, \mathbf{C}).$$

Как известно (и легко проверяется), при этом элементы из $H^{2,0}(J, \mathbf{C})$ отображаются в точности в элементы из $H^{2,0}(\tilde{J}, \mathbf{C})$, инвариантные относительно действия группы G . Равенство (7) показывает тогда, что существует такой элемент $x \in H^{2,0}(J, \mathbf{C})$, что

$$f^*x = P^{2,0}\widehat{s}.$$

Непосредственная проверка показывает, что элемент x определяется заданием расслоения V однозначно с точностью до слагаемого типа $P^{2,0}y$, $y \in H^2(J, \mathbf{Z})$.

Класс смежности в группе $H^{2,0}(J, \mathbf{C})/P^{2,0}H^2(J, \mathbf{Z})$, определенный элементом x , обозначим через $\gamma(V)$.

Теорема 10. Отображение

$$\gamma : \mathfrak{h}_0(B, J) \rightarrow H^{2,0}(J, \mathbf{C})/P^{2,0}H^2(J, \mathbf{Z})$$

определяет изоморфизм группы $\mathfrak{h}_0(B, J)$ и периодической части группы $H^2(J, \mathbf{C})/P^{2,0}H^2(J, \mathbf{Z})$.

Гомоморфизм

$$P^{2,0} : H^2(J, \mathbf{Z}) \rightarrow H^{2,0}(J, \mathbf{C})$$

имеет, согласно теореме Лефшетца, в качестве ядра группу $H_a^2(J)$, состоящую из алгебраических циклов. Фактор-группа

$$H_t^2(J) = H^2(J, \mathbf{Z})/H_a^2(J)$$

называется группой трансцендентных циклов. Эта группа вкладывается при помощи гомоморфизма $P^{2,0}$ в группу $H^{2,0}(J, \mathbf{C})$. С другой стороны, если Y — подгруппа неограниченно делимой группы X , то периодическая часть группы X/Y изоморфна, как легко видеть, группе $Y \otimes \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. В соединении с теоремой 9 это дает нам следующий результат.

Теорема 11. Группа $\mathfrak{h}_0(B, J)$ изоморфна $H_t^2(J) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Нам остается выяснить структуру группы $\mathfrak{D}(B, J)$.

Теорема 12. Если расслоение J имеет хотя бы один вырожденный слой, или если оно имеет вид $B \times A$, где A — эллиптическая кривая, то $\mathfrak{D}(B, J) = 0$. Если J не имеет вырожденных слоев, но $J \not\cong B \times A$, то группа $\mathfrak{D}(B, J)$ изоморфна, в зависимости от типа группы автоморфизмов слоя, группе порядка 1, 2, 3 или 4 (в последнем случае $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$).

Доказательство основывается на результатах работы [57]. Предположим, что J имеет хотя бы один вырожденный слой. Из предшествующего следует, что группа $\mathfrak{D}(B, J)$ изоморфна факторгруппе группы $\mathfrak{h}(B, J)$ по подгруппе неограниченно делимых элементов. Согласно работе [57] эта факторгруппа изоморфна группе тех сечений s расслоения J , которые имеют конечный порядок в группе $\mathfrak{A}_J(B)$ всех сечений и для любого $b \in B$ пересекают слой F_b в некоторой точке, принадлежащей подмножеству A_b^0 . Нам надо доказать, что такое сечение s равно нулевому сечению o .

Прежде всего заметим, что если $s \neq o$, то s не пересекается с нулевым сечением. Действительно, в терминологии работы [57] s определяет для любого $b \in B$ отличную от 0 точку конечного порядка на кривой F_b , рациональную над полем $k\{t\}$ степенных рядов по степеням локального параметра t точки b . При этом эта точка принадлежит связной компоненте α_b^0 группы всех точек α_b кривой F_b , рациональных над $k\{t\}$. С другой стороны, при специализации $\beta \rightarrow b$ точки конечного порядка в группе α_b^0 изоморфно отображаются на точки конечного порядка группы A_b^0 . Это значит, что $s \cdot A_b^0 \neq 0$, а так как это верно для любого $b \in B$, то отсюда следует, что s не пересекается с нулевым сечением.

Пусть $ms = o$. Тогда дивизор $ms \cdot F_\beta - mo \cdot F_\beta$ эквивалентен 0 на F_β и, следовательно, определяет некоторую функцию f на F_β и, значит, на J . К этой функции мы хотим применить лемму 8 главы 4. Это невозможно сделать непосредственно, поскольку лемма относится к расслоениям без вырожденных слоев, в то время как J имеет вырожденные слои. Чтобы все же применить результат леммы 8, выбросим из J в каждом вырожденном слое F_b все компоненты, отличные от A_b^0 . Оставшееся открытое множество обозначим через J^0 . Легко проверить, что доказательство леммы 8 сохраняет смысл без всяких изменений для поверхности J^0 , если рассматривать в формулировке леммы только такие дивизоры C_i на J , которые пересекаются с особыми слоями F_b только в точках множеств A_b^0 . Такими дивизорами являются s и o . Дивизор

$ms - mo$, как мы видели, не разветвлен, и мы можем теперь применить лемму 8. Она дает нам, в частности, что все слои расслоения J_0 изоморфны, что возможно только, если расслоение J не имеет вырожденных слоев. Таким образом, если J имеет вырожденный слой, то $s = o$.

Случай $j = B \times A$ разбирается на основании того описания группы $\mathfrak{D}(B, J)$, которое дано в работе [25]. В этом случае $\mathfrak{D}(B, J)$ является периодической подгруппой группы $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, следовательно, равно 0.

Пусть теперь J не имеет вырожденных слоев, и следовательно, является косым произведением, но не является прямым произведением. Тогда J имеет вид $(C \times A)/G$, где $f : C \rightarrow B$ — неразветвленное накрытие с группой Галуа G , A — эллиптическая кривая, задан неединичный гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } A$ и G действует на $C \times A$ по правилу

$$\sigma(c \times a) = \sigma(c) \times a\varphi(\sigma)^{-1}. \quad (8)$$

Согласно работе [57], группа $\mathfrak{D}(B, J)$ изоморфна группе сечений конечного порядка расслоения J . Выясним, какими могут быть такие сечения. Пусть $s : B \rightarrow J$ — периодическое сечение. Оно определяет сечение

$$s^* : C \rightarrow J \times_B C, \quad s^*(c) = (sf)(c) \times c.$$

Сечение s^* обладает свойством

$$\sigma s^*(c) = s^*(\sigma c),$$

где σ действует на $J \times_B C$ по правилу

$$\sigma(x \times c) = x \times \sigma(c). \quad (9)$$

В нашем случае $J \times_B C \simeq A \times C$, и при этом изоморфизме действие (8) автоморфизма σ переходит в (9).

Ввиду этого s^* может быть записано в виде

$$s^*(c) = u(c) \times c, \quad (10)$$

где $u : C \rightarrow A$ — регулярное отображение. Правило (10) дает

$$u(\sigma(c)) = u(c)\varphi(\sigma)^{-1}. \quad (11)$$

Так как s — сечение конечного порядка, то для некоторого $m > 1$

$$ms^*(c) = 0, \quad m\mathfrak{u}(c) = 0.$$

Таким образом, $\mathfrak{u}(c)$ — элемент периода m в A . Число таких элементов конечно, а тогда из регулярности отображения $\mathfrak{u}$ следует, что это отображение постоянно

$$\mathfrak{u}(c) = u_0 \in A.$$

Условие (11) показывает, что

$$\varphi(\sigma)u_0 = u_0. \quad (12)$$

Как известно, σ может быть автоморфизмом порядка 2, 3, 4 или 6. Легко проверить, что решения уравнения (12) образуют в этих случаях группы соответственно порядков 4 (изоморфна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$), 3, 2 и 1.

§ 9 Один частный случай

Применим полученную классификацию расслоений на эллиптические кривые к исследованию одного типа поверхностей, который встречался нам уже раньше (§ 7, гл. 4). Именно, рассмотрим поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, для которых отображение Альбанезе $\pi : V \rightarrow B$ имеет в качестве слоев эллиптические кривые. Мы видели в § 7, гл. 4, что в этом случае слои могут быть только неособые или кратностями неособых кривых. Из следствия 2 теоремы 7 следует, что якобиево расслоение J расслоения V не имеет вырожденных слоев и является, следовательно, косым произведением

$$J \simeq (C \times A)/G.$$

Прежде всего установим, что V тогда и только тогда имеет нужные нам инварианты, когда J не является прямым произведением (то есть $\varphi(G) \neq 1$). Для этого нам надо провести рассуждения, весьма близкие тем, которые содержатся в § 8, гл. 4. Заметим, что согласно формуле (5) § 5 расслоение V является фактором расслоения $\tilde{J} \simeq J \times_{\overline{B}} \tilde{C}$ для некоторого накрытия $\tilde{C} \rightarrow B$ с группой Галуа $\tilde{G}$. Мы можем выбрать $\tilde{C}$ так, чтобы накрытие $C \rightarrow B$ было его фактором. Тем самым задан гомоморфизм $\psi : \tilde{G} \rightarrow G$. Тогда, как легко видеть, $\tilde{J} \simeq \tilde{C} \times A$. Нетрудно интерпретировать действие группы $\tilde{G}$ на $\tilde{J}$. Простое вычисление показывает, что

$$\bar{\sigma}(\bar{c} \times a) = \bar{\sigma}(\bar{c}) \times a \cdot \mathfrak{u}(\bar{\sigma})^{-1},$$

где $u(\bar{\sigma})$ — автоморфизм кривой A (но не соответствующего абелева многообразия), а $u : \bar{G} \rightarrow \text{Aut } A$ — гомоморфизм группы $\bar{G}$ в группу автоморфизмов кривой A . При этом $u(\bar{\sigma})$ является комбинацией автоморфизма и сдвига абелева многообразия A

$$u(\bar{\sigma})(a) = \varphi\psi(\bar{\sigma})(a) + v(\bar{\sigma}),$$

где $v(\bar{\sigma})$ — точка A .

Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве леммы 13, § 8, гл. 4, мы видим, что

$$\Omega^i(V) \simeq \Omega^i(\bar{C} \times A)^{\bar{G}}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega^1(V) \simeq \Omega^1(B) \oplus \Omega^1(A)^{\varphi(G)}$$

и, значит, $q = 1$ тогда и только тогда, когда $\varphi(G) \neq 1$, то есть, когда J — не прямое произведение.

Аналогично

$$\Omega^2(V) \simeq (\Omega^1(\bar{C}) \oplus \Omega^1(A))^{\bar{G}}$$

Пусть H — ядро гомоморфизма $\psi : \bar{G} \rightarrow G$. Так как

$$(\Omega^1(\bar{C}) \otimes \Omega^1(A))^{\bar{G}} = ((\Omega^1(\bar{C}) \otimes \Omega^1(A))^H)^G,$$

$$\Omega^1(\bar{C})^H \simeq \Omega^1(C), \quad \Omega^1(A)^H = \Omega^1(A), \quad \Omega^1(C)^G \simeq \Omega^1(B),$$

то

$$\Omega^2(V) \simeq \Omega^1(B) \otimes \Omega^1(A)^{\varphi(G)},$$

откуда следует, что $p = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(G) \neq 1$.

Применяя теперь развитую в предшествующих параграфах классификацию, мы приходим к следующему результату.

Теорема 13. Поверхности V с инвариантами $p = 0$, $q = 1$, для которых слои расслоения Альбанезе $\pi : V \rightarrow B$ имеют род 1, классифицируются следующим образом. Якобиево расслоение расслоения V имеет вид

$$J \simeq (C \times A)/G,$$

где $f : C \rightarrow B$ — нетождественное неразветвленное накрытие с группой G , A — эллиптическая кривая, $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } A$ — вложение

G в группу автоморфизмов A (как абелева многообразия) и G действует на $C \times A$ по правилу $\sigma(c \times a) = \sigma(c) \times a\varphi(\sigma)^{-1}$. Структура группы $\mathfrak{H}(B, J)$ всех расслоений V с заданным якобиевым расслоением определяется из точной последовательности (F_b — слой J над точкой $b \in B$):

$$0 \rightarrow \mathfrak{h}(B, J) \rightarrow \mathfrak{H}(B, J) \rightarrow \sum_{b \in B} H^1(F_b, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

и соотношения

$$\mathfrak{h}(B, J) = \mathfrak{D}(B, J), \quad (13)$$

причем $\mathfrak{D}(B, J)$ имеет порядок 1, 2, 3 или 4 в зависимости от того, имеет ли группа $\varphi(G)$ порядок 6, 4, 3 или 2.

Проверки здесь требует только соотношение (13). Оно следует из того, что $\mathfrak{D}(B, J) = \mathfrak{h}(B, J)/\mathfrak{h}_0(B, J)$ и того, что $\mathfrak{h}_0(B, J) = 0$. Последнее утверждение вытекает из того, что $H_t^2(J) = 0$. Действительно, из того, что $\chi = 0$, $q = 1$, следует, что $b_2 = 2$. С другой стороны, мы имеем заведомо два негомологичных алгебраических цикла в J — например, слой и сечение. Значит, ранг группы $H_a^2(J)$ также равен двум. Так как, согласно критерию Лефшетца, группа $H_t^2(J) = H^2(J, \mathbf{Z})/H_a^2(J)$ не имеет кручения, то она должна быть равна 0.

Замечание. При рассмотрении нашего класса поверхностей Энриквеса [59, гл. 10, § 11] утверждает, что V имеет пучок эллиптических кривых, трансверсальных слоям расслоения $\pi: V \rightarrow B$. Легко видеть, однако, что на V имеется эллиптическая кривая, отличная от слоев расслоения π , только если V не имеет кратных слоев. Действительно, пусть L такая кривая. По условию $(L \cdot F_b) = r > 0$. Так как база B является, как и L , эллиптической кривой, то проекция π определяет на L структуру неразветвленного накрытия B . Это значит, что $L \cdot F_b$ состоит для любого $b \in B$ из r различных точек. Но если F_b — кратный слой: $F_b = m \cdot U$, $m > 1$, то, очевидно, что $L \cdot F_b$ состоит из m раз взятых точек $L \cdot U$.

Таким образом, классификация Энриквеса охватывает, по-видимому, только те расслоения, которые не имеют кратных слоев. Как мы видели, это локально всюду тривиальные расслоения. Они образуют конечную подгруппу $\mathfrak{D}(B, J) = \mathfrak{h}(B, J)$ группы $\mathfrak{H}(B, J)$. Расслоения, соответствующие элементам бесконечной факторгруппы $\sum H_1(F_b, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ этой группы, в классификации Энриквеса, по-видимому, пропущены.

ТЕОРИЯ ГАЛУА ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ РАСШИРЕНИЙ И УНИФОРМИЗАЦИЯ

(С И.И.ПЯТЕЦКИМ-ШАПИРО)

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР СЕР.

МАТЕМ. Т.30 (1966) 671-704

В работе строится алгебраический аналог теории униформизации алгебраических многообразий автоморфными функциями. Построенная теория применима к определенному классу алгебраических многообразий над произвольным полем. В частности, над полем комплексных чисел она применима к многообразиям, униформизируемым арифметическими группами. В этом случае она эквивалентна теории операторов Гекке.

Введение

Классическая теория униформизации алгебраических многообразий при помощи автоморфных функций от одного или нескольких комплексных переменных не является алгебраической теорией.

В настоящей работе сделана попытка построения алгебраической теории, которая применима к алгебраическим многообразиям, определенным над произвольным полем, и в то же время аналогична классической теории униформизации алгебраических многообразий. С другой стороны, эту теорию можно рассматривать как алгебраический аналог теории операторов Гекке.

Униформизируемость комплексного многообразия X означает, что у X имеется накрытие $\tilde{X} \rightarrow X$, которое неразветвлено (или разветвлено только над подмногообразием меньшего числа изменений в X) и является однородным комплексным аналитическим многообразием. Для алгебраического многообразия X , определенного над произвольным полем, естественно рассматривать алгебраические накрытия многообразия X , т.е. проективные пределы его конечных накрытий. Можно поставить вопрос о тех алгебраических многообразиях X , которые имеют накрытие $\tilde{X}$ (в алгебраи-

ческом смысле), неразветвленное или разветвленное над подмногообразием меньшего числа изменений в X , являющееся однородным. Однако такие многообразия являются очень редким исключением, например, ни у одной кривой, род которой больше единицы, таких однородных накрытий (в алгебраическом смысле) нет.

Наблюдение, положенное в основу этой работы, заключается в том, что для одного класса алгебраических многообразий существуют неразветвленные накрытия (в алгебраическом смысле) $\tilde{X}$, которые хотя и не однородны, но квазиоднородны, т.е. орбита каждой их точки относительно полной группы автоморфизмов всюду плотна в топологии Зарисского. Такими являются, например, многообразия X , унифицируемые арифметическими группами с компактной фундаментальной областью.

Алгебраические многообразия X , унифицируемые арифметическими группами с некомпактной фундаментальной областью, обладают квазиоднородными покрытиями, которые разветвлены над подмногообразием в X меньшей размерности.

Типичный пример, играющий фундаментальную роль в настоящей работе, следующий.

Пусть H — верхняя полуплоскость $\text{Im } z > 0$, Γ — обычная модулярная группа и Δ — подгруппа конечного индекса группы Γ . Обозначим через K_Δ поле функций, автоморфных относительно группы Δ , и через K — поле, являющееся объединением всех полей K_Δ , когда Δ пробегает все подгруппы группы Γ конечного индекса. Пусть X_Δ — неособая алгебраическая кривая, поле функций на которой совпадает с K_Δ . Очевидно, что если $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то $K_{\Delta_2} \subset K_{\Delta_1}$ и, значит, существует морфизм X_{Δ_1} в X_{Δ_2} . Обозначим через X проективный предел алгебраических многообразий X_Δ . Очевидно, X представляет собой накрытие в алгебраическом смысле кривой X_Δ , разветвленное лишь в конечном числе точек. Покажем, что накрытие X квазиоднородно, т.е. что орбита почти всякой точки X (не принадлежащей некоторому подмногообразию меньшей размерности) всюду плотна в X . Положим $Y_\Delta = \Delta \backslash H$. Очевидно, что $Y_\Delta \subset X_\Delta$ и что $X_\Delta - Y_\Delta$ состоит из конечного числа точек. Пусть Y — проективный предел Y_Δ . Ясно, что $Y \subset X$ и что $X - Y$ — подмногообразие в X размерности нуль. Элементарное рассуждение показывает, что орбита любой точки Y всюду плотна в Y .

Аналогичное утверждение имеет место в общем случае. А именно, пусть D — симметрическая область, Γ — арифметическая группа аналитических автоморфизмов области D . Пусть X — алгебраическое многообразие, униформируемое функциями, автоморфными относительно группы Γ . Всегда существует квазиоднородное накрытие $\tilde{X}$ многообразия X , разветвленное лишь на подмно-

гообразии меньшей размерности. Это квазиоднородное накрытие можно построить так же, как и выше, в виде проективного предела алгебраических многообразий, унифицируемых подгруппами конечного индекса группы Γ (см. § 7).

Отметим еще, что можно получить квазиоднородные накрытия, используя не все подгруппы конечного индекса, а лишь их часть. Например, можно ограничиться конгруэнцподгруппами или даже конгруэнцподгруппами по модулю p^m , где p — заданное простое число, а m — любое.

Построенные в настоящей работе примеры квазиоднородных проалгебраических многообразий определены над полем комплексных чисел. Аналогичные примеры можно сконструировать и над полем положительной характеристики. В неявной форме один такой пример содержится в работе Игузы [15] по теории эллиптических кривых. Более общие примеры можно построить, основываясь на работе Мамфорда [16].

Возвратимся теперь к случаю, когда основное поле есть поле комплексных чисел. Нам неизвестны примеры квазиоднородных алгебраических многообразий общего типа, отличных от получающихся из арифметических групп. В связи с этим нам кажется правдоподобным и весьма интересным предположение, что все квазиоднородные проалгебраические многообразия общего типа связаны с арифметическими группами, действующими в симметрической области. Иными словами, это означает, что если конечномерное алгебраическое многообразие, определенное над полем комплексных чисел, обладает квазиоднородным проалгебраическим накрытием общего типа, то X униформизируется арифметической группой, действующей в некоторой симметрической области D .

В работе исследуется также строение группы автоморфизмов поля $k(\tilde{X})$ всех рациональных функций на данном квазиоднородном многообразии $\tilde{X}$. Поле $k(\tilde{X})$ является полем конечной степени трансцендентности, но не порождается, как правило, присоединением конечного числа элементов. Среди таких полей $k(\tilde{X})$ особенно важную роль играют поля, у которых есть конечное множество F образующих (множество F называется множеством образующих, если любое подполе K' поля K , инвариантное относительно всех автоморфизмов поля $k(\tilde{X})$ и содержащее F , совпадает с $k(\tilde{X})$ (см. § 3)).

Во всех рассмотренных нами примерах группы автоморфизмов таких полей оказались или p -адическими группами Ли или их произведениями такого типа, какие рассматриваются в теории аделей. Нам кажется весьма интересным выяснить, всегда ли это так.

§ 1. Поля автоморфных функций

Пусть D — ограниченная симметрическая область в n -мерном комплексном пространстве, Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов области D . На протяжении этого параграфа предполагается, что или фактор-пространство D/Γ компактно, или группа Γ является арифметической группой, или D — единичный круг $|z| < 1$ и D/Γ имеет конечный объем. В каждом из этих случаев поле K_Γ функций, автоморфных относительно группы Γ , представляет собой поле алгебраических функций от n неизвестных, где n — комплексная размерность области D (см. [1, 2, 3, 12]).

Обозначим через $K(\Gamma)$ объединение всех полей K_Δ , когда Δ пробегает все подгруппы конечного индекса группы Γ . Поля $K(\Gamma)$ и некоторые их подполя представляют собой основной объект настоящей работы.

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о строении группы $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов поля $K(\Gamma)$. Хорошо известен следующий способ введения топологии в группу $\mathfrak{G}$.

Пусть K — некоторое подполе поля $K(\Gamma)$, порожденное над $\mathbb{C}$ конечным числом элементов. Обозначим через $\mathfrak{G}(K)$ совокупность всех автоморфизмов поля $K(\Gamma)$, оставляющих на месте каждый элемент поля K . Введем теперь в $\mathfrak{G}$ топологию, взяв множества $\mathfrak{G}(K)$ за базис окрестностей единицы. Легко проверить, что все аксиомы топологической группы выполнены. $\mathfrak{G}$ является локально компактной нульмерной группой.

Введем следующее определение. Назовем аналитический автоморфизм $z \rightarrow gz$ области D Γ -рациональным, если группа $\Gamma \cap g^{-1}\Gamma g$ имеет в Γ конечный индекс. Можно показать (см. [3]), что Γ -рациональные элементы образуют группу Γ' и что множество Γ -рациональных элементов для группы Γ не меняется при замене группы Γ на соизмеримую подгруппу.

Каждому $g \in \Gamma'$ можно сопоставить следующий автоморфизм поля $K(\Gamma)$:

$$f(z) \rightarrow f^g(z) = f(gz). \quad (1)$$

Для доказательства того, что отображение (1) задает автоморфизм поля $K(\Gamma)$, нужно лишь проверить, что оно переводит поле $K(\Gamma)$ в себя. Пусть $f \in K(\Gamma)$; тогда существует подгруппа конечного индекса Δ группы Γ такая, что $f \in K_\Delta$. Положим

$$\Delta_1 = \Delta \cap g^{-1}\Delta g.$$

Из того, что g — Γ -рациональный элемент, вытекает, что Δ_1 — подгруппа конечного индекса в Γ . Непосредственно проверяется, что если $f \in K_\Delta$, то $f^g \in K_{\Delta_1}$.

Отметим также следующее легко проверяемое утверждение. Если отображение $f(z) \rightarrow f(gz)$, где g — произвольный автоморфизм области D , является автоморфизмом поля $K(\Gamma)$, то g является Γ -рациональным элементом группы аналитических автоморфизмов области D .

Покажем, что автоморфизм поля $K(\Gamma)$, соответствующий любому $\gamma \in \Gamma' (\gamma \neq 1)$, всегда нетривиален. В самом деле, пусть $f(\gamma z) = f(z)$ для любой $f \in K(\Gamma)$, тогда $\gamma \in \cap \Delta$, где Δ пробегает множество всех подгрупп конечного индекса группы Γ . Следовательно, остается показать, что пересечение всех подгрупп конечного индекса группы Γ тривиально. Хорошо известно, что это имеет место для случая, когда D — единичный круг. Поэтому мы должны здесь рассматривать только случай, когда $\dim D > 1$ и фактор-пространство D/Γ компактно или Γ — арифметическая группа.

Если $\dim D > 1$ и D/Γ компактно, то D можно разложить в прямое произведение областей $D = D_0 \times D_1 \times \dots \times D_r$ и найти такие дискретные группы $\Gamma_0, \dots, \Gamma_r$ в $D_0, \dots, D_r$, что

$$\dim D_1 = \dots = \dim D_r = 1, \quad \dim D_0 > 1,$$

Γ соизмерима с $\Gamma_0 \times \dots \times \Gamma_r$ и Γ_0 конечно порождена и имеет представление матрицами с элементами из некоторого поля алгебраических чисел. Это вытекает из результатов работ [4] и [17]. Очевидно, нам достаточно доказать, что пересечение подгрупп конечного индекса группы Γ_0 равно 1.

Таким образом, доказательство сводится к случаю, когда группа Γ конечно порождена и имеет представление матрицами с элементами в некотором поле алгебраических чисел — эти свойства выполнены и для арифметических групп.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ — образующие группы Γ . Рассмотрим простой идеал $\mathfrak{B}$ поля k , не содержащийся в знаменателях матричных элементов $\gamma_1, \dots, \gamma_t$.

Обозначим через Γ_n подгруппу группы Γ , состоящую из всех γ , сравнимых с единичной матрицей по модулю $\mathfrak{B}^n$. Нетрудно видеть, что подгруппа Γ_n имеет конечный индекс и что пересечение всех подгрупп Γ_n тривиально.

Введем в группу Γ' топологию, в которой базис окрестностей единицы образуют все подгруппы конечного индекса группы Γ . Обозначим через $\mathfrak{G}'$ фактор-группу пополнения группы Γ' относительно этой топологии по нормальному делителю Δ , являющемуся пересечением всех подгрупп конечного индекса группы Γ . Отметим, что, как мы показали выше, в случае, если область D симметрическая, группа Δ тривиальна.

Каждому элементу g группы $\mathfrak{G}'$ соответствует автоморфизм $f \rightarrow f^g$ поля $K(\Gamma)$, определяемый следующим образом:

$$f^g(z) = f(\gamma z), \quad (2)$$

где γ означает достаточно близкий к g элемент группы Γ' . Нетрудно видеть, что это определение корректно, т.е. для любой функции $f \in K(\Gamma)$ существует такая окрестность U единицы группы $\mathfrak{G}'$, что если $\gamma \in Ug$, то функция $f(\gamma z)$ не зависит от γ . В качестве U можно взять замыкание в $\mathfrak{G}'$ подгруппы Δ , состоящей из всех $\gamma \in \Gamma$, оставляющих f на месте.

Всякому элементу группы $\mathfrak{G}'$ соответствует нетривиальный автоморфизм поля $K(\Gamma)$. Поэтому группу $\mathfrak{G}'$ можно вложить в группу $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов поля $K(\Gamma)$. Легко проверяется, что топология в $\mathfrak{G}'$, индуцированная вложением, совпадает с заданной в $\mathfrak{G}$ топологией.

Отметим еще следующее, полезное для дальнейшего, обстоятельство. Пусть Δ — некоторая подгруппа конечного индекса группы Γ . Тогда поле $K(\Gamma)$ является нормальным алгебраическим расширением поля K_Δ , группа Галуа которого есть замыкание $\bar{\Delta}$ группы Δ в $\mathfrak{G}$.

Имеет место следующее

Предложение 1. Пусть Γ — дискретная подгруппа аналитических автоморфизмов ограниченной области D . Группа $\mathfrak{G}$ всех автоморфизмов поля $K(\Gamma)$ совпадает с пополнением $\mathfrak{G}'$ группы Γ' по топологии, индуцированной подгруппами группы Γ конечного индекса, если выполняется одно из следующих трех предположений: 1) фактор-пространство D/Γ компактно; 2) D — единичный круг и фактор-пространство D/Γ имеет конечный объем; 3) D — симметрическая область, Γ — арифметическая группа, для которой выполняется условие А) (см. § 8, стр. 47).¹

Доказательство. Чтобы показать, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, достаточно проверить, что группа Γ' всюду плотна в $\mathfrak{G}$.

Пусть σ — произвольный автоморфизм поля $K(\Gamma)$. Покажем, что для любой окрестности единицы $U \subset \mathfrak{G}$ существует такое $\gamma \in \Gamma'$, что $\sigma\gamma^{-1} \in U$. Из определения топологии в $\mathfrak{G}$ ясно, что без ограничения общности можно предполагать, что U совпадает с замыканием $\bar{\Delta}$ некоторой подгруппы Δ конечного индекса группы Γ .

¹ Доказательство утверждения, сформулированного в работе [13], не было опубликовано, и утверждение не верно, как показал Игуза. Поэтому приведенное доказательство предложения 4 неверно. Позже его доказал Т. Miyake, Ann. Math. 95(1972), 243-252. (Примечание автора к настоящему изданию.)

Заменяв в случае необходимости Δ подгруппой конечного индекса, мы можем считать, что Δ действует без неподвижных точек.

Рассмотрим поле $K_{\Delta}^{\sigma^{-1}}$. Пусть Δ_1 — совокупность $g \in \Delta$, не меняющих функций поля $K_{\Delta}^{\sigma^{-1}}$. Группа Δ_1 , очевидно, имеет конечный индекс в Δ . Из $K_{\Delta}^{\sigma^{-1}} \subset K_{\Delta_1}$ следует, что $K_{\Delta} \subset K_{\Delta_1}^{\sigma}$. Как мы уже отмечали выше, поле $K(\Gamma)$ является нормальным алгебраическим расширением поля K_{Δ} с группой Галуа $\bar{\Delta}$. Поэтому каждому подполю поля $K(\Gamma)$, содержащему K_{Δ} , соответствует некоторая подгруппа группы $\bar{\Delta}$. Обозначим через h подгруппу, соответствующую $K_{\Delta_1}^{\sigma}$, и пусть $\Delta_2 = h \cap \Delta$. Из того, что σ — автоморфизм поля $K(\Gamma)$, следует, что $K_{\Delta_1}^{\sigma}$ — конечное расширение поля K_{Δ} . Поэтому индекс h в $\bar{\Delta}$ конечен. Как нетрудно проверить, он равен индексу Δ_2 в Δ , следовательно,

$$K_{\Delta_1}^{\sigma} = K_{\Delta_2}.$$

Остается показать, что существует аналитический автоморфизм g области D , обладающий следующими свойствами:

- 1) $\Delta_2 = g^{-1}\Delta_1g$;
- 2) автоморфизм $f(z) \rightarrow f(gz)$ для $f \in K_{\Delta_1}$ совпадает с заданным нам автоморфизмом σ .

Действительно, из 1) следует, что $g \in \Gamma'$, а из 2) — что $\sigma g^{-1} \in \bar{\Delta} \subset U$. Рассмотрим сначала случай, когда D — ограниченная область, а фактор-пространство D/Γ компактно. Как было показано в [5], в этом случае фактор-пространство D/Γ представляет собой абсолютно минимальную модель поля K_{Γ} . То же самое относится к фактор-пространствам D/Δ_1 и D/Δ_2 . Из этого вытекает, что всякий изоморфизм поля K_{Δ_1} на K_{Δ_2} индуцирует аналитическое отображение φ D/Δ_1 на D/Δ_2 , которое в свою очередь индуцирует аналитическое отображение универсальной накрывающей многообразия D/Δ_1 на универсальную накрывающую многообразия D/Δ_2 (D/Δ_1 и D/Δ_2 — многообразия, так как мы предположили, что Δ действует в D без неподвижных точек). Поскольку у многообразий D/Δ_1 и D/Δ_2 одна и та же универсальная накрывающая, а именно D , отображение φ индуцирует некоторый аналитический автоморфизм g области D на себя, обладающий тем свойством, что $\Delta_2 = g^{-1}\Delta_1g$, причем автоморфизм $f(z) \rightarrow f(gz)$, где $g \in K_{\Delta_1}$, совпадает с заданным нам автоморфизмом σ .

Таким образом, в случае, когда D — ограниченная область и фактор-пространство D/Γ компактно, наше предложение доказано.

Остается рассмотреть случай, когда фактор-пространство D/Γ некомпактно, но имеет конечный объем. В этом случае, согласно

нашему предположению, либо 1) D — единичный круг, либо 2) D — симметрическая область, а Γ — арифметическая группа, удовлетворяющая условию А). Оба эти случая будут рассмотрены в § 8. Там будет показано, что любой автоморфизм σ поля $K(\Gamma)$, переводящий поле K_{Δ_1} в поле K_{Δ_2} , индуцирует взаимно однозначное аналитическое отображение D/Δ_1 на D/Δ_2 . Из этого, очевидно, уже следует, что он индуцируется некоторым аналитическим отображением g области D , причем это отображение, очевидно, обладает всеми требуемыми свойствами.

Доказательство закончено.

В заключение настоящего параграфа мы укажем обобщение конструкции поля $K(\Gamma)$. Это обобщение связано уже с рассмотрением не всех подгрупп конечного индекса, а лишь их части.

Рассмотрим систему $\mathcal{M}$ подгрупп конечного индекса группы Γ , приняв которые за базис окрестностей единицы, можно задать в Γ хаусдорфову топологию. Условия на систему подгрупп $\mathcal{M}$, обеспечивающие возможность задания с ее помощью хаусдорфовой топологии в Γ , состоят в следующем:

- 1) $\bigcap_{\Delta \in \mathcal{M}} \Delta = 1$;
- 2) если $\Delta \in \mathcal{M}$ и $\gamma \in \Gamma$, то всегда существует такое Δ_1 , что $\Delta_1 \subset \gamma\Delta\gamma^{-1}$;
- 3) для любого конечного множества подгрупп Δ_k , $k = 1, \dots, N$, при надлежащих $\mathcal{M}$ в $\mathcal{M}$ есть подгруппа Δ такая, что $\Delta \subset \Delta_k$, $k = 1, \dots, N$.

Обозначим через $K(\mathcal{M}, \Gamma)$ объединение всех полей K_{Δ} , где $\Delta \in \mathcal{M}$.

Мы укажем сейчас конструкцию группы $\mathfrak{G}(\mathcal{M})$ всех автоморфизмов поля $K(\mathcal{M}, \Gamma)$. Пусть $\Gamma'(\mathcal{M})$ — совокупность всех $\gamma \in \Gamma$, обладающих следующим свойством: для любой подгруппы $\Delta \in \mathcal{M}$ существует такая подгруппа $\Delta_0 = \Delta_0(\Delta, \gamma) \in \mathcal{M}$, что $\Delta_0 \subset \gamma\Delta\gamma^{-1}$. Легко проверить, что преобразование $\gamma \in \Gamma$ тогда и только тогда индуцирует автоморфизм поля $K(\mathcal{M}, \Gamma)$, когда $\gamma \in \Gamma'(\mathcal{M})$.

Введем в группу $\Gamma'(\mathcal{M})$ топологию, приняв все подгруппы системы $\mathcal{M}$ за базис окрестностей единицы. Обозначим через $\mathfrak{G}'(\mathcal{M})$ пополнение группы $\Gamma'(\mathcal{M})$ по введенной топологии. Имеет место следующее

Предложение 2. Пусть выполняются условия предложения 1. Тогда группа $\mathfrak{G}'(\mathcal{M})$ изоморфна группе всех автоморфизмов* поля $K(\mathcal{M}, \Gamma)$.

*Мы предполагаем, что в группу всех автоморфизмов поля $K(\mathcal{M}, \Gamma)$ введена топология только что описанным способом.

Доказательство вполне аналогично доказательству предложения 1, поэтому мы его опускаем.

В следующем параграфе нам понадобится рассмотреть более общую ситуацию, когда группа Γ действует в комплексном пространстве которое, быть может, является не областью, а несвязным объединением конечного числа экземпляров некоторой области. Ясно, что все результаты этого параграфа переносятся без всяких изменений на этот более общий случай.

§ 2. Арифметические группы

Пусть G — полупростая алгебраическая линейная группа, определенная над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Условимся, как обычно, через G_k , где k — некоторое кольцо, обозначать совокупность всех матриц с элементами из k , удовлетворяющих уравнениям группы, определитель которых представляет собой единицу кольца k . В частности, $G_{\mathbb{Z}}$ означает совокупность целочисленных матриц с определителем ± 1 , а $G_{\mathbb{R}}$ — совокупность всех вещественных матриц. Напомним, что, как было показано в известной работе А. Бореля и Хариш-Чандра [6], фактор-пространство $G_{\mathbb{R}}/G_{\mathbb{Z}}$ всегда имеет конечный объем. Обозначим через U максимальную компактную подгруппу группы $G_{\mathbb{R}}$, а через U^0 и $G_{\mathbb{R}}^0$ — связные компоненты этих групп. Как известно, $G_{\mathbb{R}}^0/U^0$ представляет собой симметрическое пространство. При некоторых дополнительных условиях $G_{\mathbb{R}}^0/U^0$ может быть реализовано в виде ограниченной однородной области D^0 в C^n . В дальнейшем мы ограничимся этим случаем. Тогда $D = G_{\mathbb{R}}/U^0$ является несвязным объединением конечного числа экземпляров области D^0 . Мы будем D также называть областью. Группа $G_{\mathbb{Z}}$, реализованная как группа аналитических автоморфизмов области D , называется арифметической группой. То же название относится к любой группе, соизмеримой с группой $G_{\mathbb{Z}}$.

Обозначим через $K(G)$ объединение всех полей K_{Γ} , когда Γ пробегает все подгруппы конечного индекса группы $G_{\mathbb{Z}}$. Таким образом, $K(G) = K(G_{\mathbb{Z}})$ в обозначениях § 1.

В настоящем параграфе будет исследована структура группы автоморфизмов $\mathfrak{G}$ поля $K(G)$. На протяжении всего параграфа мы будем предполагать, что выполнены условия предложения 1 § 1, которые гарантируют, что группа $\mathfrak{G}$ автоморфизмов поля $K(G)$ совпадает с пополнением $\mathfrak{G}'$ группы Γ' рациональных элементов группы $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ по топологии, индуцированной подгруппами группы Γ конечного индекса.

Как показано в [3], группа Γ всех рациональных элементов группы $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ совпадает с группой всех определенных над $\mathbb{Q}$ автоморфизмов алгебры Ли группы G . Поэтому мы в дальнейшем будем

предполагать, что группа G совпадает с группой всех автоморфизмов ее алгебры Ли. Как нетрудно проверить, это предположение не уменьшает класса рассматриваемых арифметических групп. При этом предположении группа G_Q будет совпадать с группой всех рациональных элементов группы G_Z , а значит, любой соизмеримой с G_Z группы Γ .

Обозначим через $G_p = G_{Q_p}$ совокупность всех p -адических точек группы G , а через $U_p = G_{Z_p}$ — совокупность всех целочисленных p -адических точек группы G .

Условимся через G_a обозначать прямое произведение групп G_p (p пробегает только неархимедовы нормирования) с отмеченными подгруппами U_p , т.е. совокупность последовательностей $\{g_p\}$, $g_p \in G_p$, в каждой из которых только конечное число g_p не принадлежит U_p . Топология в G_a вводится, как обычно, в группе идеалей.

Рассмотрим диагональный мономорфизм $\varphi: G_Q \rightarrow G_a$, при котором любому элементу $g \in G_Q$ сопоставляется последовательность $\{g_p\}$, где $g_p = g$ для всех p . В § 1 мы доказали, что $G_Q \subset \mathfrak{G}$, причем G_Q всюду плотна в $\mathfrak{G}$, а топология, индуцированная в G_Q естественной топологией из $\mathfrak{G}$, совпадает с той, которая определяется всеми подгруппами конечного индекса группы G_Z .

Пусть $\Gamma = G_Z$, m — некоторое целое число. Обозначим через $\Gamma(m)$ подгруппу группы Γ , состоящую из всех $\gamma \in \Gamma$, которые сравнимы с единичной матрицей по модулю m . Любая подгруппа группы Γ , содержащая группу $\Gamma(m)$ при некотором m , называется конгруэнцподгруппой. Очевидно, что индекс в Γ всякой конгруэнцподгруппы конечен. В наших обозначениях конгруэнцподгруппы имеют вид $\varphi^{-1}(\varphi(G_Z) \cap U)$, где U — некоторая открытая подгруппа группы $\prod_p U_p$. Проверим, что мономорфизм φ непрерывен в то-

пологии, заданной всеми подгруппами конечного индекса группы G_Z . Отсюда будет следовать, что его можно продолжить до гомоморфизма $\bar{\varphi}: \mathfrak{G} \rightarrow G_a$. Непрерывность φ сразу следует из того, что если U — достаточно малая открытая подгруппа в G_a , то $\varphi(G_Q) \cap U = \varphi(G_Z) \cap U$ является конгруэнцподгруппой в $\varphi(G_Z)$ и тем более подгруппой конечного индекса.

Дальше мы будем отождествлять элементы G_Q и соответствующие им при отображении φ элементы G_a .

Лемма 1. Ядро гомоморфизма $\bar{\varphi}: \mathfrak{G} \rightarrow G_a$ совпадает с пересечением замыканий в $\mathfrak{G}$ всех конгруэнцподгрупп группы G_Q .

Как мы только что видели, существует такой базис U_K окрестностей единицы в G_a , что $\varphi(U_K) \cap \varphi(G_Q)$ содержит некоторую конгруэнцподгруппу $\Gamma(K)$. Ввиду того, что выбранные открытые подмножества U_K компактны, $\bar{\varphi}(\bar{\Gamma}(K)) \subset U_K$. Если элемент γ из $\mathfrak{G}$

содержится в пересечении всех $\bar{\Gamma}(K)$, когда $\bar{\Gamma}(K)$ пробегает все конгруэнцподгруппы, то $\bar{\varphi}(\gamma) \in U_K$ для всех U_K и, значит, $\bar{\varphi}(\gamma) = 1$, т.е. γ принадлежит ядру.

Пусть, наоборот, $\bar{\varphi}(\gamma) = 1$. Пусть Γ — некоторая конгруэнцподгруппа, а U — такая открытая подгруппа в G_a , что

$$\varphi^{-1}(U \cap \varphi(G_Z)) = \Gamma.$$

Выберем любую открытую подгруппу $V \subset \bar{\varphi}^{-1}(U)$ и такой элемент $g \in G_Q$, что $\gamma g^{-1} \in V$. Тогда $\bar{\varphi}(g) \in U$, т.е. $g \in \Gamma$. Следовательно, для любой окрестности единицы V существует такой элемент $g \in \Gamma$, что $\gamma g^{-1} \in V$. Это и значит, что $\gamma \in \bar{\Gamma}$. Лемма доказана.

Следствие. Гомоморфизм $\bar{\varphi}$ является собственным.

Это вытекает из того, что его ядро компактно.

Мы можем определить теперь образ гомоморфизма $\bar{\varphi}$. Так как этот гомоморфизм собственный, а группы $\mathfrak{G}$ и G_a локально компактны, то гомоморфизм $\bar{\varphi}$ замкнут. Следовательно, $\bar{\varphi}(\bar{G}_a) = \overline{\varphi(G_Q)}$. Таким образом, нами доказано следующее

Предложение 1. Существует гомоморфизм группы Галуа $\mathfrak{G}$ поля $K(G)$ в группу G_a . Образ этого гомоморфизма совпадает с группой $\bar{G}_Q$ (замыканием группы G_Q в G_a).

Пусть G — произвольная полупростая алгебраическая группа определенная над полем рациональных чисел. Мы исследуем сейчас структуру замыкания группы G_Q в группе G_a . Для этого нам надо будет рассмотреть универсальную накрывающую (в смысле теории алгебраических групп) группы G . Обозначим ее через $\tilde{G}$, а ее центр — через $\mathfrak{Z}$. Так как, по условию, группа G задана присоединенным представлением, то ее центр тривиален и, значит, мы имеем точную последовательность:

$$(1) \rightarrow \mathfrak{Z} \rightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\varphi} G \rightarrow (1). \quad (1)$$

Пусть k — произвольное поле, k' — его сепарабельное алгебраическое замыкание. Через $H^i(k, G)$, $i = 0, 1$, обозначаются множества $H^i(\mathfrak{G}, G_{k'})$, где $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(k'/k)$ — группа Галуа поля k' над k . Из (1) следует, что последовательность

$$(1) \rightarrow \mathfrak{Z}_{k'} \rightarrow \tilde{G}_{k'} \xrightarrow{\varphi_{k'}} G_{k'} \rightarrow (1)$$

также точна, и мы имеем точную последовательность

$$(1) \rightarrow \mathfrak{Z}_k \rightarrow \tilde{G}_k \xrightarrow{\varphi_k} G_k \rightarrow H^1(k, \mathfrak{Z}) \rightarrow H^1(k, \tilde{G}). \quad (2)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = Q_p$ — поле p -адических чисел. Как доказал Кнезер [7], $H^i(Q_p, \tilde{G}) = 1$ для односвязной группы $\tilde{G}$. Поэтому

$$G_{Q_p}/\varphi(\tilde{G}_p) \simeq H^1(Q_p, \mathbb{Z}). \quad (3)$$

Наряду с последовательностью (1) рассмотрим последовательность

$$(1) \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathfrak{D}_p} \rightarrow \tilde{G}_{\mathfrak{D}_p} \rightarrow G_{\mathfrak{D}_p} \rightarrow (1), \quad (4)$$

где $\mathfrak{D}_p$ — кольцо целых элементов в максимальном неразветвленном расширении k_1 поля k . Точность последовательности (4) для почти всех p следует из стандартных соображений. По аналогии с (2) мы имеем точную последовательность

$$(1) \rightarrow \mathbb{Z}_{\mathfrak{D}_p} \rightarrow \tilde{G}_{Z_p} \rightarrow \tilde{G}_{Z_p} \rightarrow H^1(Z_p, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(Z_p, \tilde{G}),$$

где через $H^1(Z_p, G)$ обозначается множество

$$H^1(\mathfrak{O}_1, G_{\mathfrak{D}_p}), \quad \mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}(k_1/k).$$

Из теоремы Ленга [8] и стандартных рассуждений следует, что в этом случае опять $H^1(Z_p, G) = 1$ для любой связной группы G и почти всех p . Для таких p мы имеем равенство, аналогичное (3):

$$G_{Z_p}/\varphi_{Z_p}(\tilde{G}_{Z_p}) \simeq H^1(Z_p, \mathbb{Z}). \quad (5)$$

Рассмотрим теперь действие гомоморфизма $\varphi_a: \tilde{G} \rightarrow G_a$. Соединяя (3) и (5), мы получаем:

$$G_a/\varphi_a(\tilde{G}_a) = J(\mathbb{Z}).$$

Здесь $J(\mathbb{Z})$ обозначает группу идеалов модуля $\mathbb{Z}$, которая определяется как ограниченное прямое произведение $\prod H^1(Q_p, \mathbb{Z})$, когда в каждой группе $H^1(Q_p, \mathbb{Z})$ отмечена подгруппа $H^1(Z_p, \mathbb{Z})$ (см. [9, стр.290]).

Как известно (см. [9], стр.290), группа $H^1(Q, \mathbb{Z})$ отображается путем локализаций в $J(\mathbb{Z})$, т.е. существует гомоморфизм

$$\alpha: H^1(Q, \mathbb{Z}) \rightarrow J(\mathbb{Z}).$$

Подгруппа $P(\mathbb{Z}) = \alpha H^1(Q, \mathbb{Z})$ группы $J(\mathbb{Z})$ называется группой главных идеалов, а

$$\text{Coker } \alpha = J(\mathbb{Z})/P(\mathbb{Z}) = \mathfrak{A}(\mathbb{Z})$$

называется группой классов идеалов модуля $\mathfrak{Z}$.

Таким образом, существует гомоморфизм

$$\delta: G_a \rightarrow \mathfrak{A}(\mathfrak{Z}),$$

который мы будем называть определителем. Например, если $G = PL(2, Q)$, то $\tilde{G} = SL(2, Q)$ и $\mathfrak{Z}$ — группа второго порядка. В этом случае если

$$g \in G_a, \quad g = \{g_p\}, \quad g_p \in PL(2, Q_p),$$

то определители $\{\det g_p\}$ определяют элемент группы J/J^2 , где J — обычная группа идеалов. Элемент $\delta(g)$ совпадает с образом полученного элемента $\{\det g_p\}$ в группе $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$, где $\mathfrak{A}$ — группа классов идеалов поля Q .

После этих предварительных замечаний мы можем перейти к вычислению подгруппы $\tilde{G}_Q$ группы G_a .

Согласно сильной аппроксимационной теореме Кнезера [7], $\tilde{G}_Q = \tilde{G}_a$. Отсюда следует, что $\tilde{G}_Q \supset \varphi_a(\tilde{G}_a)$, и нам достаточно определить образ группы $\tilde{G}_Q$ в $J(\mathfrak{Z})$. Для этого напомним последовательность (2) для $k = Q$ и путем локализаций рассмотрим отображения всех ее членов в соответствующие члены аналогичной последовательности для G_a . Мы получим коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G}_a & \xleftarrow{\tilde{\alpha}} & \tilde{G}_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_a & \xleftarrow{\alpha} & G_Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ J(\mathfrak{Z}) & \xleftarrow{\quad} & H^1(Q, \mathfrak{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (1) & & (1) \end{array}$$

Из коммутативности этой диаграммы следует, что образ $\tilde{G}_Q$ в $J(\mathfrak{Z})$ совпадает с замыканием $\alpha_3 \overline{H^1(Q, \mathfrak{Z})}$ образа группы $H^1(Q, \mathfrak{Z})$. Однако группа $\alpha_3 H^1(Q, \mathfrak{Z})$, как хорошо известно (см. [9, стр. 290]), дискретна в $J(\mathfrak{Z})$. Таким образом, нами доказано следующее

Предложение 2. Группа $\tilde{G}_Q$ совпадает с подгруппой группы G_a , состоящей из элементов с единичным определителем.

Эту подгруппу мы будем дальше обозначать через G_a^0 . Путем перебора всех типов простых групп и их универсальных накрывающих можно доказать, что если группа G абсолютно проста*, то модуль $\mathbb{Z}$ операторно изоморфен группе всех корней степени n из 1, где n зависит от группы G .

Исключения составляют группы типа D_{2n} , для которых модуль $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ с тривиальным действием на него группы Галуа алгебраического замыкания.

Следовательно, для всех групп, за исключением D_{2n} , группа $J(\mathbb{Z})$ совпадает с группой J_Q/J_Q^n , где J_Q — группа идеалов поля Q , а группа $\mathfrak{A}(\mathbb{Z})$ совпадает с группой $\mathfrak{A}(Q)/\mathfrak{A}(Q)^n$, где $\mathfrak{A}(Q)$ — группа классов идеалов поля Q . Для групп типа D_{2n} мы имеем:

$$J(\mathbb{Z}) = J_Q/J_Q^2 + J_Q/J_Q^2$$

и

$$\mathfrak{A}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{A}(Q)/\mathfrak{A}(Q)^2 + \mathfrak{A}(Q)/\mathfrak{A}(Q)^2.$$

Аналогично показывается, что если группа G Q -проста, но не абсолютно проста, и k — минимальное поле, над которым группа G распадается в произведение абсолютно простых групп, то

$$J(\mathbb{Z}) = J_k/J_k^n, \mathfrak{A}(\mathbb{Z}) = \mathfrak{A}(k)/\mathfrak{A}(k)^n$$

с естественными изменениями для групп типа D_{2n} .

Предложение 3. Группа Галуа $\mathfrak{G}$ поля $K(G)$ тогда и только тогда изоморфна группе G_a^0 , когда каждая подгруппа конечного индекса группы $G_{\mathbb{Z}}$ содержит некоторую конгруэнцподгруппу.

Доказательство легко получить, используя указанную в ходе доказательства предложения 1 этого параграфа явную конструкцию гомоморфизма $\mathfrak{G}$ в G_a . Подробное проведение доказательства мы предоставляем читателю.

Перейдем сейчас к изучению подполей поля $K(G)$, которые представляют собой объединение полей K_{Δ} , где Δ пробегает некоторое множество $\mathfrak{M}$ подгрупп конечного индекса группы $G_{\mathbb{Z}}$. Предполагается, что $\mathfrak{M}$ обладает следующим свойством: если принять принадлежащие ему подгруппы за базис окрестностей в Γ то в Γ вводится хаусдорфова топология (см. [1, стр.677]).

Для арифметических групп существует специфический способ конструкции таких множеств. Этот способ основан на понятии

*и является формой группы Шевалле, соответствующей коциклу со значениями в группе внутренних автоморфизмов

конгруэнцподгруппы. Он состоит в следующем. Пусть S — произвольное, безразлично конечное или бесконечное множество простых чисел. Условимся через $\mathfrak{M}(S, G)$ обозначать множество всех конгруэнцподгрупп $\Gamma(m)$ группы $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ таких, что все простые делители m принадлежат S .

Обозначим через $K(S) = K(S, G)$ поле, являющееся объединением всех полей K_{Δ} , где Δ пробегает множество всех подгрупп, принадлежащих $\mathfrak{M}(S, G)$. Наша задача состоит в том, чтобы описать группу Галуа $\mathfrak{G}(S)$ поля $K(S, G)$.

Обозначим через G_S ограниченное прямое произведение групп G_p ($p \in S$) с отмеченными подгруппами U_p . В частном случае, когда S конечно, G_S — совпадает, очевидно, с ΠG_p . В случае, когда S — множество всех простых чисел, группа G_S совпадает с группой G_a . Очевидно, что $G_a = G_S \times G_{\bar{S}}$, где $\bar{S}$ обозначает дополнительное множество.

Аналогично, можно ввести группу $J_S(3)$ как ограниченное прямое произведение групп $H^1(Q_p, 3)$ с отмеченными подгруппами $H^1(Z_p, 3)$, где p пробегает S . Обозначим через $K_S(3)$ прямое произведение $\prod_{p \in S} H^1(Z_p, 3)$ и через $H_{\bar{S}}^1(Q, 3)$ — подгруппу группы $H^1(Q, 3)$,

образ которой при естественном гомоморфизме

$$\alpha: H^1(Q, 3) \rightarrow J(3)$$

содержится в $J_S(3) \times K_{\bar{S}}(3)$, где $\bar{S}$ обозначает дополнительное к S множество простых чисел.

Пусть α_S — естественный гомоморфизм

$$H^1(Q, 3) \rightarrow J_S(3).$$

Тогда мы можем определить группу G_S^0 как подгруппу группы G_S , образ которой при гомоморфизме

$$G_S \rightarrow J_S(3)$$

совпадает с $\alpha_S(H_{\bar{S}}^1(Q, 3))$.

Имеет место следующее

Предложение 4. Группа Галуа $\mathfrak{G}(S)$ поля $K(S, G)$ содержит группу G_S^0 в качестве подгруппы конечного индекса.

Доказательство. Как было показано в предложении 2 § 1, группу $\mathfrak{G}(S)$ можно найти следующим образом. Обозначим через $G_Q(S)$

совокупность всех $\gamma \in G_Q$, которые трансформируют систему подгрупп $\mathcal{M}(S, G)$ в ей эквивалентную, т.е. задающую ту же топологию. Группа $\mathfrak{G}(S)$ оказывается изоморфной пополнению группы $G_Q(S)$ по топологии, в которой подгруппы, принадлежащие $\mathcal{M}(S, G)$, образуют базис окрестностей.

Таким образом, чтобы найти $\mathfrak{G}(S)$, мы в первую очередь должны описать подгруппу $G_Q(S)$. Обозначим через V пересечение всех подгрупп вида $\bar{\Delta}$, где $\Delta \subset \mathcal{M}(S, G)$, а черта означает замыкание в группе G_a .

Пусть $\gamma \in G_Q$. Нетрудно видеть, что $\gamma \in G_Q(S)$ тогда и только тогда, когда γ принадлежит нормализатору группы V . Из того, что $G_a = G_S \times G_{\bar{S}}$ следует, что нормализатор группы V равен $G_S \times N$, где N обозначает нормализатор группы V в $G_{\bar{S}}$. Покажем, что подгруппа N компактна. Поскольку централизатор в $G_{\bar{S}}$ группы V тривиален, достаточно доказать, что группа всех ее автоморфизмов компактна.

Ниже будет доказана лемма, утверждающая, что группа автоморфизмов нульмерной компактной топологической группы с конечным числом образующих компактна. Из этой леммы вытекает, что группа N компактна.

Группа $G_Q(S)$ представляет собой, очевидно, пресечение G_Q и $G_S \times N$. Легко показать, что замыкание $\bar{G}_Q(S)$ содержит $G_S^0 \times V$ и содержится в $G_S^0 \times N$.

Из определения группы $\mathfrak{G}(S)$ нетрудно видеть, что она изоморфна фактор-группе $\bar{G}_Q(S)$ по V . Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что группа N/V компактна.

Докажем теперь лемму.

Лемма 2. *Группа автоморфизмов Φ нульмерной компактной топологии группы K с конечным числом топологических образующих компактна.*

Доказательство. Рассмотрим все подгруппы конечного индекса m группы K . Как нетрудно видеть, таких подгрупп конечное число. Их пересечение представляет собой вполне характеристическую подгруппу K_m группы K . Следовательно, каждый автоморфизм группы K индуцирует автоморфизм конечной группы $\Delta_m = K/K_m$. Обозначим через Φ_m группу автоморфизмов группы Δ_m , индуцированных автоморфизмами группы K . Тогда группа автоморфизмов Φ будет проективным пределом конечных групп Φ_m ; значит, она компактна. Лемма 2 доказана.

§ 3. Поля с конечным числом образующих

Пусть K — некоторое расширение конечной степени трансцендентности поля k . $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(K/k)$ — группа всех автоморфизмов поля K , оставляющих каждый элемент поля k на месте. Условимся говорить, что поле K имеет конечное число образующих над k , если в K существует такое конечное множество элементов F , что любое подполе поля K , содержащее k , F и инвариантное относительно всех автоморфизмов поля K , оставляющих k на месте, совпадает с K .

Настоящий параграф посвящен, в основном, выяснению вопросов, какие из полей, рассмотренных в § 2 являются полями с конечным числом образующих. Предварительно сделаем некоторые замечания.

Пусть K — алгебраическое расширение поля k . Нетрудно проверить, что поле K имеет над k конечное число образующих тогда и только тогда, когда оно является конечным расширением. Иными словами, алгебраическое расширение имеет конечное число образующих лишь в том случае, когда является расширением конечного типа, т.е. получаемого присоединением к основному полю конечного числа элементов. Для трансцендентных расширений, как мы покажем ниже, ситуация другая: они могут иметь конечное число образующих, не будучи полями конечного типа.

Пусть U — некоторая подгруппа группы $\mathfrak{G}(K/k)$. Условимся через K_U обозначать подполе, принадлежащее группе U , т.е. подполе, состоящее из всех элементов, остающихся на месте под действием группы U .

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$; тогда поле K является алгебраическим нормальным расширением поля $K_{\mathfrak{A}}$, причем группа Галуа этого расширения изоморфна группе $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Сначала проверим, что поле K является алгебраическим расширением поля $K_{\mathfrak{A}}$. Пусть $\varphi \in K$, и пусть U_{φ} — совокупность всех $g \in \mathfrak{G}$, оставляющих φ на месте. Подгруппа U_{φ} открыта по определению топологии в $\mathfrak{G}$. Следовательно,

$$\mathfrak{A}_{\varphi} = \mathfrak{A} \cap U_{\varphi}$$

является подгруппой конечного индекса в $\mathfrak{A}$. Пусть $\tilde{\mathfrak{A}}_{\varphi}$ — нормальный делитель конечного индекса группы $\mathfrak{A}$, содержащийся в $\mathfrak{A}_{\varphi}$, и $\Gamma = \mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{A}}_{\varphi}$. Рассмотрим поле $\tilde{K} = K_{\tilde{\mathfrak{A}}_{\varphi}}$. Поле K инвариантно относительно группы Γ . Очевидно, что если $\varphi \in \tilde{K}$ остается на месте

под действием группы Γ , то $\varphi \in K_{\mathfrak{A}}$. Из этого вытекает, что $\tilde{K}$ — конечное алгебраическое нормальное расширение поля $K_{\mathfrak{A}}$, причем его группа Галуа изоморфна $\Gamma = \mathfrak{A}/\mathfrak{A}_{\varphi}$. Одновременно мы показали, что поле K представляет собой объединение конечных нормальных алгебраических расширений поля $K_{\mathfrak{A}}$ и, значит, само является нормальным алгебраическим расширением поля $K_{\mathfrak{A}}$. Нетрудно проверить, далее, что его группа Галуа изоморфна $\Gamma = \mathfrak{A}/\tilde{\mathfrak{A}}_{\varphi}$.

Введем теперь одно определение. Условимся называть поле K *нормальным* над k , если в $\mathfrak{G}$ существует такая открытая компактная подгруппа U , что поле K_U конечного типа над k .

Легко показать, что если поле K нормально, то для любой открытой компактной подгруппы U поле K_U конечного типа.

Отметим, что все поля, рассмотренные в предыдущем параграфе, являются нормальными полями в смысле указанного выше определения.

Лемма 2. *Нормальное поле K тогда и только тогда имеет конечное число образующих над k , когда в достаточно малой окрестности единицы группы $\mathfrak{G}(K/k)$ нет нетривиальных нормальных делителей.*

Доказательство. В самом деле, пусть U — окрестность единицы группы $\mathfrak{G}$, обладающая требуемым свойством. Поле K нормально, поэтому поле K_U порождается конечным множеством Φ элементов поля K . Покажем, что множество Φ является множеством образующих поля K . Для этого достаточно проверить, что K представляет собой объединение полей $K_U(\Phi^g)$, $g \in \mathfrak{G}$, где Φ^g означает результат применения автоморфизма g к элементам Φ . Поле K над K_U нормально. Поэтому каждому подполю поля K , содержащему K_U , соответствует некоторая подгруппа группы U . В частности, полю $K_U(\Phi^g)$ соответствует $U \cap g^{-1}Ug$. Объединению полей $K_U(\Phi^g)$ соответствует $\bigcap g^{-1}Ug$, которое, по предположению, тривиально. Таким образом, мы показали, что в K есть конечное множество образующих над k , если в достаточно малой окрестности единицы группы $\mathfrak{G}$ нет нетривиальных нормальных делителей.

Покажем обратное, т.е. что если в любой окрестности единицы группы $\mathfrak{G}$ есть нетривиальные нормальные делители, то поле K не имеет конечного множества образующих. Действительно, пусть Φ — конечное множество образующий поля K . Обозначим через U подгруппу, состоящую из всех автоморфизмов поля K , оставляющих Φ на месте. Подгруппа U , очевидно, открыта. Из того, что Φ — множество образующих, вытекает, что $\bigcap g^{-1}Ug = 1$ и, значит, в U нет нормальных делителей.

Лемма доказана.

Предложение 1. Поле $K(S, G)$ имеет конечное число образующих тогда и только тогда, когда для всех $p \in S$ любая простая компонента группы G_p некомпактна.

Доказательство. Мы будем пользоваться обозначениями предложения 4 § 2. Покажем сначала, что условие, сформулированное в теореме, необходимо. В самом деле, пусть при некотором $p \in S$ группа G_p компактна; тогда, как легко видеть, группа $G'_p = \mathfrak{G}(S) \cap G_p$ является компактным нормальным делителем группы $\mathfrak{G}(S)$. Более того, если A - любой нормальный делитель группы G_p , то $A' = \mathfrak{G}(S) \cap A$ также является нормальным делителем группы $\mathfrak{G}(S)$. Из этого вытекает, что если при некотором $p \in S$ группа G_p компактна, то в группе $\mathfrak{G}(S)$ есть сколь угодно малые нормальные делители и, значит, согласно лемме 2, поле $K(S, G)$ не имеет конечного числа образующих. Докажем теперь, что условие, сформулированное в предложении, достаточно. Рассмотрим сначала случай, когда S состоит из одного простого числа p . Покажем, что у группы G_p^0 нет компактных нормальных делителей. В самом деле, пусть это не так, и пусть $\mathfrak{A}$ есть ее компактный нормальный делитель. Так как подгруппа $\mathfrak{A}$ замкнута, то $\mathfrak{A}$ также является p -адической группой Ли. Алгебра Ли группы $\mathfrak{A}$ поэтому есть нормальный делитель алгебры Ли группы G_p^0 .

Если группа G_p^0 простая, то из сказанного выше следует, что алгебры Ли группы $\mathfrak{A}$ должны совпадать с алгеброй Ли группы G_p^0 . Следовательно, $\mathfrak{A}$ является открытым нормальным делителем группы G_p^0 . Воспользуемся теперь тем, что группа G задана своим присоединенным представлением. Из того, что алгебра Ли группы $\mathfrak{A}$ простая, следует, что централизатор группы $\mathfrak{A}$ в G_p^0 тривиален. Значит, гомоморфизм группы G_p^0 в группу автоморфизмов группы $\mathfrak{A}$ является мономорфизмом. Но это невозможно, так как группа автоморфизмов компактной проконечной группы с конечным числом образующих компактна, согласно лемме § 2. Аналогично рассматриваются случаи, когда группа G_p не простая и когда S содержит не одно простое число.

§ 4. Конечномерные проалгебраические многообразия

В настоящем параграфе описан класс схем, являющихся моделями* полей конечной степени трансцендентности над некоторым полем k , но, как правило, не порожденных конечным числом элементов. Такие поля, очевидно, представляют собой бесконечные или

*Моделью поля P называется схема X , поле рациональных функций на которой совпадает с P .

конечные алгебраические расширения поля рациональных функций от конечного числа переменных.

Определение 1. Аффиным конечномерным проалгебраическим многообразием называется спектр X алгебры A над полем k , все элемент которой целые над некоторой подалгеброй конечного типа над k .

Дальше мы всегда будем предполагать, что в A нет нильпотентных элементов и A сепарабельно над некоторой подалгеброй конечного типа.

Алгебру A , обладающую указанным свойством, очевидно, всегда можно представить как объединение направленного семейства подалгебр $A^{(\alpha)}$ конечного типа, причем если $A^{(\alpha)} \subset A^{(\beta)}$, то все элементы $A^{(\beta)}$ — целые над $A^{(\alpha)}$. Иными словами, если $X^{(\alpha)} = \text{спес } A^{(\alpha)}$, то

$$X = \varprojlim X^{(\alpha)},$$

причем $X^{(\alpha)}$ — конечномерные аффинные многообразия над k и морфизмы $X^{(\beta)} \rightarrow X^{(\alpha)}$ являются целыми.

Определение 2. Конечномерным проалгебраическим многообразием над полем k называется схема (X, O) над k (редуцированная), представляющая собой объединение конечного числа открытых множеств U_i , каждое из которых изоморфно аффинному конечномерному проалгебраическому многообразию над k .

Легко видеть, что если X бикompактно, то достаточно потребовать, чтобы у каждой точки X была окрестность, изоморфная конечномерному аффинному проалгебраическому многообразию.

Определение 3. Проективным конечномерным проалгебраическим многообразием называется проективный спектр градуированной алгебры $A = \sum_n A^n$, все элементы которой целые над некоторой однородной подалгеброй конечного типа.

Из этого определения, очевидно, следует, что проективное конечномерное проалгебраическое многообразие представляет собой конечномерное проалгебраическое многообразие в смысле определения 2.

Конечномерные проалгебраические многообразия будут дальше предполагаться неприводимыми и нормальными, тогда кольцо рациональных функций $K = k(X)$ является полем. Это поле имеет конечную степень трансцендентности. Можно показать, что для

каждого поля K , имеющего над k конечную степень трансцендентности, существует некоторая его модель в виде конечномерного проалгебраического многообразия. Можно даже построить модель в виде проективного конечномерного проалгебраического многообразия

Свойства модели мы будем называть бирегулярными инвариантами, а свойства поля K — бирациональными инвариантами.

Предложение 1. *Схема X тогда и только тогда является конечномерным проалгебраическим многообразием, когда она целая над некоторым алгебраическим многообразием².*

Если схема X целая над алгебраическим многообразием X^0 , то, по определению, существует морфизм

$$f: X \rightarrow X^0$$

и такое конечное покрытие $X^0 = \cup U_i^0$ аффинными открытыми множествами, что множества $U_i = f^{-1}(U_i^0)$ также аффинны и целы над U_i^0 . Это показывает, что U_i — аффинные конечномерные проалгебраические многообразия, а X — конечномерное проалгебраическое многообразие.

Пусть, наоборот, X — конечномерное проалгебраическое многообразие и $X = \cup U_i$ — его конечное аффинное покрытие. Для каждого открытого множества U_i существует, по условию, аффинное многообразие V_i (конечномерное) и целый морфизм $f_i: U_i \rightarrow V_i$. Очевидно, мы можем считать, что $F(U_i) = V_i$. Обозначим через K кольцо рациональных функций на X (оно не обязано быть полем, так как X может быть приводимым), через L_i — кольцо рациональных функций на V_i и через L — композит кольца L_i в K . Координатные кольца аффинных схем U_i и V_i обозначим через A_i и B_i . Тогда

$$B_i \subset A_i \subset K, \quad B_i \subset L_i \subset L \subset K.$$

Каждое из колец L_i является произведением конечного числа полей конечного типа над k . Так как K не имеет нильпотентных элементов, то такую же структуру имеет и кольцо L . Мы построим алгебраическое многообразие X^0 , кольцо рациональных функций на котором будет содержаться в L и целый морфизм $f: X \rightarrow X^0$. Для этого установим отношение эквивалентности между точками

²Все проалгебраические многообразия предполагаются неприводимыми и нормальными. (Примечание автора к настоящему изданию.)

$x \in X$, положив $x_1 \sim x_2$, если $\mathfrak{O}_{x_1} \cap L = \mathfrak{O}_{x_2} \cap L$, где $\mathfrak{O}_x$ — локальное кольцо точки x . Класс эквивалентных точек обозначим через x_0 . Ему соответствует локальное кольцо $\mathfrak{O}_{x_0} = \mathfrak{O}_x \cap L$, где $x \in x_0$. Таким образом, фактор X_0 множества X по введенному отношению эквивалентности снабжен пучком локальных колец.

Докажем, что X_0 является алгебраическим многообразием с кольцом рациональных функций L . Для этого построим покрытие X_0 афишными открытыми множествами. Обозначим через A'_i пересечение $A_i \cap L$. Очевидно, что A'_i являются алгеброй конечного типа над k . Действительно, A'_i цело над B_i и, значит, содержится в целом замыкании $\bar{B}_i$ кольца B_i в L . Как известно, $\bar{B}_i$ имеет конечный базис над B_i , а значит, это верно и для A'_i .

Покажем, что аффинные схемы $U'_i = \text{спес } A'_i$ образуют покрытие X_0 . Они открыты в X_0 по определению топологии факторпространства. Любая точка $x_0 \in X_0$, происходит из локального кольца $\mathfrak{O}_x$, $x \in X$. Точка x содержится в некотором аффинном множестве U_i и соответствует максимальному идеалу $\mathfrak{B}$ из кольца A_i , тогда x_0 соответствует максимальному идеалу $q = B'_i \cap \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{O}_{x_0} = \mathfrak{O}$. Наконец, отображение $x \rightarrow x_0$, определенное тем, что

$$\mathfrak{O}_x \cap L = \mathfrak{O}_{x_0},$$

является регулярным и целым отображением X на X_0 . Отсюда следует, что X_0 является схемой и, значит, алгебраическим многообразием.

Предложение 2. *Схема X тогда и только тогда является конечномерным проалгебраическим многообразием, когда она может быть представлена в виде проективного предела $X = \varprojlim X_\alpha$ множества алгебраических многообразий X_α , причем морфизмы $f_{\alpha,\beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ — целые.*

Мы будем пользоваться обозначениями, введенными при доказательстве предложения 1. Если имеет место представление $X = \varprojlim X_\alpha$, то естественное отображение $X \rightarrow X_\alpha$ удовлетворяет условию предложения 1 и, значит, X является конечномерным проалгебраическим многообразием. Докажем обратное. Пусть X — конечномерное проалгебраическое многообразие. Рассмотрим алгебру $L \subset K$ и всевозможные подалгебры L_α , $L \subset L_\alpha \subset K$, имеющие конечный базис над L . Как и при доказательстве предложения 1, для каждой такой алгебры L_α можно построить алгебраическое многообразие X_α , причем L_α будет кольцом рациональных функций на X_α , и если $L_\alpha \subset L_\beta$, то будет существовать целый морфизм $f_{\alpha,\beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ и X будет целым над всеми X_α .

С другой стороны, $X = \varprojlim X_\alpha$ является в наших условиях схемой целой над X_0 . Мы имеет естественный морфизм $X \rightarrow \bar{X}$, который коммутирует с целыми морфизмами $X \rightarrow X_0$ и $\bar{X} \rightarrow X_0$. Чтобы проверить, что U — изоморфизм, достаточно проверить, что U определяет изоморфизм прообразов произвольного аффинного открытого множества $U_0 \subset X_0$ в X и $\bar{X}$. Таким образом, проверка сводится к аффинному случаю, где она очевидна.

Пусть X — неприводимое проалгебраическое многообразие. Обозначим через $\mathfrak{O}_x$ локальное кольцо точки $x \in X$, а через m_x — максимальный идеал точки x . Предположим, что поле k совершенно и существует такое представление $X = \varprojlim X_\alpha$, что P не делит $[k(X_\alpha) : k(X_\beta)]$ для $\alpha > \beta$ где P характеристика поля k .

Определение 4. Точка $x \in X$ называется внутренней, если идеал m_x имеет конечное число образующих и граничной, если он не имеет конечного числа образующих. Условимся также точку $x_\alpha \in X_\alpha$ называть внутренней, если лежащая над ней точка $x \in X$ — внутренняя, и граничной, если точка x — граничная.

В рассмотренных в § 7 примерах проалгебраических многообразий, которые связаны с автоморфными функциями, точки, лежащие над внутренними точками области существования, являются внутренними в смысле указанного выше определения, а точки, лежащие над граничными точками области существования, являются граничными в смысле указанного выше определения. Отметим еще, что если X — проалгебраическое многообразие, соответствующее полю всех алгебраических функций от данного числа неизвестных, то все точки граничные.

Предложение 3. Пусть $X = \varprojlim X_\alpha$ — представление, удовлетворяющее условиям предложения 2. Точка $x \in X$ тогда и только тогда будет внутренней, когда существует такое γ , что все морфизмы $X_\alpha \rightarrow X_\gamma$ неразветвлены в точке x_γ (x_γ — проекция точки x на X_γ).

Доказательство. Пусть существует X_γ с указанными выше свойствами; тогда максимальный идеал кольца $\mathfrak{O}_{x_\alpha}$ ($\alpha > \gamma$) порождается идеалом m_{x_γ} , т.е.

$$m_{x_\alpha} = \mathfrak{O}_{x_\alpha} m_{x_\gamma}.$$

Следовательно,

$$m_x = \mathfrak{O}_x m_{x_\gamma},$$

откуда и вытекает, что m_x имеет конечный базис.

Наоборот, пусть m_x имеет конечный базис. Идеал m_x представляет собой объединение всех m_{x_α} поэтому его базис содержится в некотором m_{x_γ} . Это означает, что

$$m_{x_\alpha} = \mathfrak{O}_{x_\alpha} m_{x_\gamma}$$

для любого $\alpha > \gamma$, т.е. что морфизм $X_\alpha \rightarrow X_\gamma$ неразветвлен в точке γ . Предложение доказано. Конечномерное проалгебраическое многообразие называется правильным, если оно обладает таким представлением $X = \varprojlim X_\alpha$, что точки X_α под которыми покрытия X_β ($\beta > \alpha$) разветвлены, образуют подмногообразие меньшего числа измерений.

§ 5. Алгебра дифференциалов

Пусть K — поле конечной степени трансцендентности n над полем констант k . Выражение вида

$$\omega = f_0(df_1 \wedge \cdots \wedge df_n)^m, \quad (1)$$

где $f_0, f_1, \dots, f_n$ — некоторые функции из K , называется регулярным дифференциалом m -ой степени, если он является регулярным дифференциалом в некотором подполе конечного типа поля K . Отметим, что это подполе, вообще говоря, больше, чем подполе, порожденное функциями $f_0, f_1, \dots, f_n$.

Обозначим через $D^m = D^m(K)$ совокупность всех регулярных дифференциалов m -ой степени поля K . Очевидно, что D^m — векторное пространство над k и что $D^m D^s \subset D^{m+s}$. Обозначим через $D = \sum D^m$ градуированную алгебру дифференциалов.

Определение 1. Пусть алгебра D удовлетворяет условиям определения § 4 и, значит, ее проективный спектр является проективным проалгебраическим многообразием. Обозначим его через X , а поле рациональных функций на нем — через $K(X)$. Очевидно, что всегда $K(X) \subset K$. Поле K называется полем общего типа, если $K = K(X)$.

Например, поле всех алгебраических функций данной степени трансцендентности является полем общего типа.³

Примеры полей не общего типа легко получить, рассматривая поля рациональных функций и поля абелевых функций. Поля, рассмотренные в §§ 1, 2, по-видимому, всегда являются полями общего типа, однако нам это не удалось доказать.

³Эту фразу следует опустить. (Примечание автора к настоящему изданию.)

Пусть K' — некоторое подполе поля K конечного типа и максимальной степени трансцендентности над k . Обозначим через $D_{K'}^m$ совокупность дифференциалов $\omega \in D_K^m$, для которых есть представление вида (1) с функциями $f_0, f_1, \dots, f_n \in K'$. Очевидно, что $D_{K'}^m$ — векторное пространство над k . Всякий регулярный дифференциал ω поля K' содержится в $D_{K'}^m$, но обратное, вообще говоря, неверно. Например если K — поле всех алгебраических функций над k данной степени трансцендентности n , то любой дифференциал ω вида (1) является регулярным в некотором расширении поля K' и, значит, $D_{K'}^m$ в этом случае бесконечномерно.

Введем теперь следующее определение.

Определение 2. Поле K называется локально конечным, если для любого его подполя конечного типа K' , имеющего максимальную степень трансцендентности, и любого $m > 0$ пространство $D_{K'}^m$ является конечномерным векторным пространством над k .

Например, пусть X_0 — полное неособое алгебраическое многообразие. X — некоторое проалгебраическое многообразие, являющееся его неразветвленным накрытием, разумеется, не обязательно конечным. Поле $K = K(X)$ всех рациональных функций на X локально конечно. В самом деле, пусть K' некоторое подполе конечного типа поля K , имеющее максимальную степень трансцендентности. Без ограничения общности можно считать, что поле K_0 рациональных функций на X_0 содержится в K' . Тогда X является неразветвленным покрытием X_1 некоторой неособой модели поля K_1 .

В этом случае любой дифференциал $\omega \in D_{K'}^m$ является регулярным дифференциалом в K' и, значит,

$$\dim D_{K'}^m < \infty.$$

Теорема 1. Пусть k — поле характеристики 0. X — правильное проалгебраическое многообразие размерности 1. Поле $k(X)$ локально конечно тогда и только тогда, когда множество Y граничных точек многообразия X нульмерно.

Доказательство. Предположим, что Y нульмерно. Пусть $K(X) = \bigcup K_\alpha$, где $K_\alpha = K(X_\alpha)$ и X_α являются неособыми полными алгебраическими кривыми. По условию мы можем считать, что все X_α являются накрытиями кривой X_0 , разветвленными только в точках конечного множества $S \subset X_0$. Для любого подполя K_0 конечного типа существует такое γ , что $K_0 \subset K_\gamma$. Следовательно, достаточно доказать конечность размерности пространства $D_\gamma^m = D_{K_\gamma}^m$ дифференциалов вида $\omega = f(dg)^m$, где $f, g \in K_\gamma$, для каждого из которых

существует такое α , что ω на X_α регулярен. Без ограничения общности можно считать, что X_γ выбрано так, что морфизм $X_\alpha \rightarrow X_\gamma$ не разветвлен во всех внутренних точках X_γ .

Найдем теперь условия на дифференциал ω , заданные на X_γ , при которых этот дифференциал становится регулярным на X_α , при каком-нибудь $\alpha > \gamma$. Во внутренних точках X_γ такой дифференциал ω должен быть регулярным. Пусть ξ — граничная точка X_γ и t — локальная координата в этой точке. Если порядок ветвления X_α в точке ξ равен k и τ — локальная координата в точке $\eta \in X_\alpha$, лежащей над ξ , то на X_γ

$$\nu_\xi(\omega) = \nu_\xi \left(\frac{\omega}{(dt)^m} \right),$$

а на X_α

$$\begin{aligned} \nu_\eta(\omega) &= \nu_\eta \left(\frac{\omega}{(d\tau)^m} \right) = \nu_\eta \left(\frac{\omega}{(dt)^m} \right) + \nu_\eta \left(\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^m \right) \\ &= \nu_\xi(\omega) \cdot k + m(k-1). \end{aligned} \quad (2)$$

Условие $\nu_\eta(\omega) > 0$ дает:

$$\nu_\xi(\omega) > - \left(1 - \frac{1}{k} \right) m > -m.$$

Множество дифференциалов ω , удовлетворяющих этим условиям в конечном числе точек ξ , конечномерно, т.е. поле $K(X)$ локально конечно.

Пусть $K(X)$ локально конечно. Мы хотим доказать, что множество точек $S \subset X_0$, над которыми накрытия $X_\alpha \rightarrow X_0$ ветвятся неограниченно, конечно. Предположим, что это не так, и пусть $S' \subset S$ — конечное подмножество. Обозначим через $B^m(S')$ множество дифференциалов ω степени m на X_0 , регулярных во всех точках не входящих в множество S' , и имеющих в точках $\xi \in S'$ полюса порядка не выше, чем $m-1$. Здесь n — любое целое число больше 1.

Любой дифференциал $\omega \in B^m(S')$ регулярен на X , т.е. на некотором X_α . Действительно, мы можем найти такое X_α , что порядок ветвления в любой точке $\eta \in X_\alpha$, лежащей над точкой $\xi \in S'$, больше наперед заданного числа k . Из (2) и из того, что по условию $\nu_\xi(\omega) \geq 1 - m$, следует:

$$\nu_\eta(\omega) \geq (1 - m)k + m(k - 1) = k - m,$$

и значит, $\nu_\eta(\omega) \geq 0$ при $k \geq m$.

Из теоремы Римана–Роха следует, что $\dim B^m(S') \rightarrow \infty$, когда число точек множества S' неограниченно возрастает. Поэтому, если S бесконечно, то поле $K(X)$ не может быть локально конечным.

§ 6. Квазиоднородные проалгебраические многообразия

Пусть X — некоторое неприводимое конечномерное проалгебраическое многообразие над полем k и $K(X)$ — поле функций на X .

Многообразие X называется квазиоднородным, если:

- 1) множество Y граничных точек многообразия X отлично от X и замкнуто;
- 2) орбита любой внутренней точки относительно группы $G(X)$ всех автоморфизмов X всюду плотна в X .

Предложение 1. Если X — квазиоднородное многообразие, то каждый элемент поля $K(X)$, инвариантный относительно всех автоморфизмов группы $G(X)$, алгебраичен над k .

В частности, если k алгебраически замкнуто в $K(X)$, то других инвариантных элементов, кроме элементов из k , нет.

Доказательство. Предположим, что элемент $u \in K(X)$ инвариантен относительно $G(X)$ и не алгебраичен над k . Представим X в виде

$$X = \varprojlim X_\alpha,$$

где X_α — алгебраические многообразия, найдем такое X_γ , что $u \in K(X_\gamma)$. Тогда u можно рассматривать, как функцию на всех X_α , $\alpha > \gamma$.

Ввиду условия 1) в определении квазиоднородного многообразия, мы можем найти точку $x_0 \in X_\gamma$, в которую не проектируется точка границы и в которой функция u регулярна. Пусть $u(x_0) = \alpha_0$. Тогда все точки подмногообразия $Y \subset X$, в которых $u(x) = \alpha_0$, составляют инвариантное относительно $G(X)$ замкнутое подмножество, отличное от X и содержащее внутренние точки. Но это противоречит условию 2) определения квазиоднородного многообразия.

Условимся внутреннюю точку x n -мерного проалгебраического многообразия X называть простой, если идеал m_x ее локального кольца $\mathfrak{O}_x$ может быть порожден n элементами. Как легко видеть, это условие равносильно следующему: в представлении $X = \varprojlim X_\alpha$ существует такое X_γ , что для всех $\alpha > \gamma$ точка $x_\alpha \in X_\alpha$, соответствующая x на X_α , проста на X_α . В этом случае пространство m_x/m_x^2 имеет размерность n над k . Дуальное пространство называется касательным пространством к X в точке x .

Докажем несколько свойств квазиоднородных конечномерных проалгебраических многообразий, которые аналогичны известным свойствам конечномерных многообразий (см.[10]).

Предложение 2. Все внутренние точки квазиоднородного многообразия просты.

Действительно, пусть $U \subset X$ — множество внутренних точек квазиоднородного многообразия и $S \subset U$ — множество особых точек. По определению множество S инвариантно относительно группы $G(X)$, замкнуто и отлично от U . Это противоречит условию 2) в определении квазиоднородного многообразия.

Рассмотрим, наконец, вопрос о бирациональной эквивалентности двух квазиоднородных многообразий. Очевидно, что если X — квазиоднородное многообразие, то его группа автоморфизмов $G(X)$ является подгруппой группы всех автоморфизмов поля $k(X)$. Пусть Y — другое квазиоднородное многообразие. Изоморфизм расширения поля k

$$\varphi: K(X) \rightarrow K(Y)$$

называется бирациональным изоморфизмом квазиоднородных многообразий X и Y , если он перестановочен с действием групп $G(X)$ и $G(Y)$ в полях $K(X)$ и $K(Y)$.

Предложение 3. Любой бирациональный изоморфизм квазиоднородных многообразий X и Y определяет бирегулярный изоморфизм множеств их внутренних точек.

Доказательство. Пусть φ — бирациональный изоморфизм квазиоднородных многообразий X и Y , $X = \varprojlim X_\alpha$, $Y = \varprojlim Y_\alpha$ — представления X и Y в виде проективных пределов неприводимых алгебраических многообразий. Очевидно, что бирациональный изоморфизм φ определяет семейство рациональных отображений $\varphi_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_{\varphi(\lambda)}$, перестановочных с проекциями

$$f_{\lambda_1, \lambda_2}: X_{\lambda_1} \rightarrow X_{\lambda_2} \text{ и } g_{\mu_1, \mu_2}: Y_{\mu_1} \rightarrow Y_{\mu_2} \quad (\lambda_1 > \lambda_2, \mu_1 > \mu_2).$$

Множество точек, где φ_λ не регулярно, является алгебраическим подмногообразием $W_\lambda \subset X_\lambda$ коразмерности не меньше 1. Очевидно, что если $\lambda_1 > \lambda_2$, то $f_{\lambda_1, \lambda_2} W_{\lambda_1} \subset W_{\lambda_2}$ и, значит, все W_λ определяют замкнутое подмножество W конечномерного проалгебраического многообразия X , имеющее в X коразмерность, не меньшую единицы. Так как, по условию, изоморфизм φ коммутирует с действием групп $G(X)$ и $G(Y)$, то множество W инвариантно относительно $G(X)$. Если бы W содержало хотя бы одну внутреннюю

точку, то мы получили бы, что оно всюду плотно в X , что противоречит доказанному соотношению. Это показывает, что φ регулярно во всех внутренних точках многообразия X . Отсюда следует, что φ переводит внутренние точки X во внутренние точки Y . Повторяя теперь те же рассуждения для изоморфизма φ^{-1} , мы получим что φ определяет бирегулярный изоморфизм множеств внутренних точек квазиоднородных многообразий X и Y .

Предложение 3 доказано. Оно показывает, что множество внутренних точек квазиоднородного многообразия X бирационально инвариантно, т.е. определяется только полем функций $K(X)$ и действием на нем группы $G(X)$.

Обозначим через $\mathfrak{G}$ группу всех автоморфизмов поля K . Вообще говоря, нельзя построить модель X поля K на которой бы регулярно действовали бы все автоморфизмы поля K . Это невозможно, например, если K — чисто трансцендентное расширение поля k степени n . Более того, если поле K обладает квазиоднородной моделью X , то ниоткуда не следует, что группы $G(X)$ и $\mathfrak{G}$ совпадают.

Из предложения 3 вытекает только, что нормализатор группы $G(X)$ в $\mathfrak{G}$ совпадает с $G(X)$.

Однако существует важный тип полей — так называемые поля общего типа — для которых такая модель существует. В самом деле, алгебра дифференциалов, очевидно, есть бирациональный инвариант. Поэтому ее проективный спектр является многообразием на котором бирегулярно действуют все автоморфизмы поля K .

§ 7. Модели полей автоморфных функций

В настоящем параграфе дано явное описание проалгебраических многообразий, являющихся моделями полей, описанных в §§ 1, 2 настоящей работы. Мы выясняем также условия, при которых эти многообразия являются квазиоднородными проалгебраическими многообразиями.

Рассмотрим вначале конструкцию.

Пусть D — некоторая ограниченная область в C^n , Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов области D с компактным фактор-пространством. Мы будем пользоваться обозначениями § 1. Обозначим через $\mathcal{K}$ замыкание группы Γ в группе $\mathfrak{G}'$. Прямое произведение $H = \mathcal{K} \times D$ состоит из пар

$$(k, z), \text{ где } k \in \mathcal{K}, z \in D. \quad (1)$$

Определим в H действие группы Γ следующим образом:

$$\gamma: (k, z) \rightarrow (k\gamma, \gamma^{-1}(z)).$$

Нетрудно видеть, что группа Γ действует в H дискретно.

Предложение 1. Фактор-пространство $X(\Gamma) = H/\Gamma$ представляет собой модель поля $K(\Gamma)$ в виде проалгебраического многообразия.

Доказательство. Положим $X_\Delta = D/\Delta$, где Δ — любая подгруппа Γ конечного индекса. Ясно, что многообразие X_Δ алгебраическое и, более того, даже проективное. Вложение $\Delta_1 \subset \Delta_2$ индуцирует целое отображение $X_{\Delta_1} \rightarrow X_{\Delta_2}$. Нетрудно видеть, что X — проективный предел алгебраических многообразий X_Δ и, значит, проалгебраическое многообразие. Поле K рациональных функций на X есть, по определению, объединение полей $K_\Delta = K(X_\Delta)$ и, следовательно, совпадает с полем $K(\Gamma)$. Наше предложение доказано.

Аналогично доказывается

Предложение 2. Пусть $\mathcal{M}$ — система подгрупп группы Γ , удовлетворяющая условиям 1), 2) и 3) § 1 [стр. 255]; тогда модель поля $K(\mathcal{M}, \Gamma)$ представляет собой фактор-пространство $X(\mathcal{M}, \Gamma) = H(\mathcal{M})/\Gamma$, где $H(\mathcal{M}) = \mathcal{K}(\mathcal{M}) \times D$, а $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ — замыкание группы Γ в группе $\mathfrak{G}'(\mathcal{M})$.

Нетрудно показать также, что все точки $X(\mathcal{M})$ являются внутренними в смысле определения 4 § 4.

В предложениях 1 и 2 речь шла о случае, когда фактор-пространство D/Γ компактно. Рассмотрим теперь, как обстоит дело, когда фактор-пространство D/Γ некомпактно. В этом случае, если $\dim D > 1$, то мы будем предполагать, что группа Γ является арифметической, если же $\dim D = 1$, то будем предполагать только то, что фактор-пространство D/Γ имеет конечную площадь. Напомним, что теорема о том, что поле K представляет собой поле алгебраических функций, доказана лишь для перечисленных выше случаев. Рассмотрим так же, как и в случае когда D/Γ компактно, фактор-пространство $X = H/\Gamma$, где H определенно так же, как и выше. X , очевидно, не компактно, так как X_Δ не компактно. Однако, как известно (см.[2],[3]), каждое X_Δ представляет собой открытое в смысле топологии Зарисского подмножество некоторого проективного алгебраического многообразия. X представляет собой проективный предел алгебраических многообразий X_Δ . Как не трудно проверить, морфизмы $X_{\Delta_1} \rightarrow X_{\Delta_2}$ целые, поэтому X является проалгебраическим многообразием. Все точки X , очевидно, являются внутренними.

Покажем, что существует проективное проалгебраическое многообразие Y , множество внутренних точек которого совпадает с X .

С этой целью напомним конструкцию (см.[1],[2] и [3]) компактификации фактор-пространства D/Γ . Как известно, эта конструк-

ция состоит в следующем. Некоторые точки границы области D называются Γ -рациональными. В частном случае, когда D — единичный круг, рациональные точки — это параболические точки. Общее определение рациональных точек границы следующее. Пусть z_0 — точка границы области D , $G(z_0)$ — стационарная группа, $N(z_0)$ — максимальный унитарный нормальный делитель группы $G(z_0)$. Группа $N(z_0)$ всегда не тривиальна.

Точка z_0 называется Γ -рациональной точкой, если фактор-пространство $N(z_0)/\Gamma \cap N(z_0)$ компактно. Нетрудно видеть, что множество рациональных точек границы одно и то же для всех соизмеримых между собой арифметических групп. Обозначим через $\tilde{D}$ объединение D и всех рациональных точек границы.

В работах [2] и [3] показано, что в фактор-пространство $\tilde{D}/\Gamma$ можно ввести комплексную структуру и топологию, при которой оно становится компактным аналитическим нормальным пространством, более того, — проективным алгебраическим многообразием. Показано также, что D/Γ представляет собой открытое в смысле топологии Зарисского алгебраическое многообразие. Обозначим через $Y(\Gamma)$ проективный предел многообразий $\tilde{D}/\Delta$, где Δ пробегает множество всех подгрупп конечного индекса группы Γ . Тогда, очевидно, $Y(\Gamma)$ будет проективным проалгебраическим многообразием. Очевидно так же, что $X(\Gamma)$ можно вложить в $Y(\Gamma)$ в виде открытого в топологии Зарисского подмножества. Покажем, что $Y(\Gamma) - X(\Gamma)$ состоит из граничных точек. Пусть $y_0 \in Y_\Delta - X_\Delta$, где Δ — некоторая подгруппа группы Γ конечного индекса. Нам нужно показать, что существует такая подгруппа $\Delta_1 \subset \Delta$, что накрытие $Y_{\Delta_1} \rightarrow Y_\Delta$ разветвлено в точке $y_0 \in Y_\Delta$. С этой целью достаточно выбрать Δ_1 так, чтобы индекс подгруппы $N(z_0) \cap \Delta_1$ в группе $N(z_0) \cap \Delta$ был больше 1, где z_0 означает любой прообраз в $\tilde{D}$ точки y_0 , а подгруппа $N(z_0)$ была определена выше. Существование такой подгруппы Δ_1 , очевидно, вытекает из того, что пересечение всех подгрупп конечного индекса группы Γ равно 1.

Таким образом, нами доказано следующее

Предложение 3. Пусть D — ограниченная симметрическая область, Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов области D . Тогда существует проективное проалгебраическое многообразие $Y = Y(\Gamma)$, являющееся моделью поля $K(\Gamma)$ со следующими свойствами:

- 1) если фактор-пространство D/Γ компактно, то все точки Y внутренние в смысле определения 4 § 4;
- 2) если D — единичный круг и D/Γ некомпактно, но имеет конечную площадь, или D — любая симметрическая область,

а Γ — арифметическая группа, то все точки Y , лежащие над внутренними точками области D , являются внутренними, а точки Y , лежащие над граничными точками области D являются граничными точками и в смысле определения 4 § 4.

Аналогичное утверждение имеет место для поля $K(\mathcal{M}, \Gamma)$, где $\mathcal{M}$ — некоторая система подгрупп группы Γ , удовлетворяющая условиям § 1.

Предложение 4. Пусть Γ — арифметическая группа, действующая в симметрической области D ; тогда $Y = Y(\Gamma)$ квазиоднородно.

Доказательство. Как было показано выше, множество X внутренних точек модели Y представляет собой фактор-пространство H/Γ , где H — прямое произведение $\mathcal{K}$ и D . Каждому элементу $g \in G_Q$ соответствует преобразование в H , определенное следующим образом:

$$g: (k, z) \rightarrow (gk\gamma^{-1}g^{-1}, g\gamma(z)), \quad (2)$$

где γ подбирается по k и g так, чтобы $gk\gamma^{-1}g^{-1} \in \mathcal{K}$. Очевидно, такой подбор γ всегда возможен.

В H есть естественная хаусдорфова топология, вытекающая из представления H в виде прямого произведения. Поскольку группа Γ действует в H дискретно, то эту топологию можно перенести на фактор-пространство $X = H/\Gamma$. Нетрудно видеть, что она сильнее, чем топология Зарисского. Поэтому достаточно показать, что полный прообраз в H орбиты любой наперед заданной точки X всюду плотен в H . Легко видеть, что это множество имеет вид:

$$(gk_0\alpha^{-1}g^{-1}\beta^{-1}, \beta g\alpha(z_0)), \quad (3)$$

где k_0 и z_0 фиксированы, g пробегает G_Q , α и $\beta \in \Gamma$, причем $g_0k_0\alpha^{-1}\beta^{-1}g_0 \in \mathcal{K}$. Положим $r = \alpha^{-1}g^{-1}\beta^{-1}$; тогда (3) можно переписать так:

$$(\beta^{-1}r^{-1}\alpha^{-1}k_0r, r^{-1}(z)), \quad (4)$$

где $r \in G_Q$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ и должно выполняться условие:

$$\beta^{-1}r^{-1}\alpha^{-1}k_0r \in \mathcal{K}.$$

Пользуясь тем, что группа G_Q , согласно теореме Кнезера [7], всюду плотна в группе G_∞ всех аналитических автоморфизмов области D , нетрудно показать, что множество (3) всюду плотно в H . Доказательство закончено. Аналогично доказывается следующее предложение.

Предложение 5. Пусть S — некоторое множество простых чисел. Обозначим через $Y = Y(S, G)$ проективный предел Y_Δ , где Δ пробегает множество всех конгруэнцподгрупп $\Gamma(m)$ группы $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$, для которых все простые делители m принадлежат S . Если хотя бы для одного $p \in S$ группа G_p некомпактна, то $Y(S, G)$ — квазиоднородное проалгебраическое многообразие.

§ 8. Алгебра автоморфных форм

Пусть Γ — дискретная группа аналитических автоморфизмов ограниченной симметрической области $D \subset C^n$ такая, что факторпространство D/Γ компактно. Пусть Δ — подгруппа конечного индекса группы Γ . Обозначим через A_Δ^m совокупность всех автоморфных форм веса m относительно группы Δ .

Пусть $A^m(\Gamma)$ — объединение всех пространств A_Δ^m , где Δ пробегает множество всех подгрупп конечного индекса группы Γ . Обозначим через

$$A(\Gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} A^m(\Gamma)$$

градуированную алгебру автоморфных форм и через

$$D(\Gamma) = \sum D^m(\Gamma)$$

градуированную алгебру регулярных дифференциалов (см. § 5) поля $K(\Gamma)$.

Предложение 1. Алгебры $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ изоморфны. Проективный спектр алгебры $D(\Gamma)$ совпадает с $X(\Gamma)$ (см. § 7, предложение 1).

Доказательство. Прежде всего установим взаимно однозначное соответствие между $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$. Пусть $h(z) \in A_\Delta^m$; тогда выражение

$$\omega = h(z)(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)^m \quad (1)$$

инвариантно при преобразованиях $z \rightarrow \delta z$, $\delta \in \Delta$. Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ — любые n аналитически независимых функций из K_Δ . Ясно, что функция

$$\omega(z) = \frac{\omega}{(df_1 \wedge \dots \wedge df_n)^m} \quad (2)$$

инвариантна относительно преобразований $z \rightarrow \delta z$, где $\delta \in \Delta$ и, значит, принадлежит K_Δ . Следовательно, ω является дифференциалом m -степени поля K_Δ . Остается проверить, что ω является

регулярным дифференциалом. Без ограничения общности можно считать, что в Δ нет преобразований, имеющих неподвижные точки, за исключением единичного преобразования (см.[4]). В этом случае очевидно, что ω является регулярным дифференциалом поля K_Δ . Таким образом, мы показали, что каждой автоморфной форме веса m соответствует некоторый регулярный дифференциал веса m . Очевидно, что это соответствие есть гомоморфизм алгебры $A(\Gamma)$ в алгебру $D(\Gamma)$ с тривиальным ядром. Чтобы доказать, что алгебры $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ изоморфны, достаточно проверить, что указанное выше отображение $A(\Gamma)$ в $D(\Gamma)$ есть эпиморфизм. Иными словами, нужно доказать, что любой регулярный дифференциал поля $K(\Gamma)$ представим в виде (1). Пусть

$$\omega = f_0(df_1 \wedge \dots \wedge df_n)^m$$

— регулярный дифференциал поля $K(\Gamma)$. Тогда существует такая подгруппа Δ конечного индекса в Γ , что ω является регулярным дифференциалом в K_Δ , причем $f_0, f_1, \dots, f_n \in K_\Delta$.

Положим

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_n = j(z)dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n. \quad (3)$$

Тогда

$$\omega = f_0(z)(j(z))^m(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)^m. \quad (4)$$

Из того, что ω является регулярным дифференциалом поля K_Δ , вытекает, что функция $h(z) = f_0(z)j^m(z)$ регулярна в D . Из того, что ω — дифференциал поля K_Δ , вытекает, что $h(z)$ — автоморфная форма веса m .

Таким образом, мы показали что алгебры $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ изоморфны. Покажем теперь, что спектр алгебры $A(\Gamma)$ совпадает с $X(\Gamma)$. Очевидно, что спектр алгебры $A(\Gamma)$ совпадает с проективным пределом спектров алгебр $A_\Delta = \sum A_\Delta^m$. Хорошо известно, что спектр алгебры A_Δ есть $X_\Delta = D/\Delta$. Остается учесть, что проективный предел X_Δ есть $X(\Gamma)$. Доказательство закончено.

Пусть $\mathcal{M}$ — система подгрупп группы Γ , удовлетворяющая условиям 1), 2) и 3) § 1 (стр. 255). Аналогично предыдущему, можно определить алгебру автоморфных форм и алгебру дифференциалов:

$$A(\mathcal{M}, \Gamma) = \sum_{\Delta \in \mathcal{M}} A_\Delta, \quad D(\mathcal{M}, \Gamma) = \sum_{\Delta \in \mathcal{M}} D_\Delta.$$

Так же, как и предложение 1, доказывается следующее

Предложение 2. Алгебры $A(\mathfrak{M}, \Gamma)$ и $D(\mathfrak{M}, \Gamma)$ изоморфны. Проективный спектр алгебры $A(\mathfrak{M}, \Gamma)$ совпадает с $X(\mathfrak{M}, \Gamma)$ (см. § 7).

Перейдем теперь к рассмотрению дискретных групп Γ , для которых фактор-пространство D/Γ некомпактно, но имеет конечный объем. Сначала рассмотрим случай, когда D — единичный круг $|z| < 1$. Обозначим через A_Δ^m совокупность всех автоморфных форм $h(z)$ веса m , для которых

$$(h, h) = \int_{D/\Delta} |h(z)|^2 (1 - |z|^2)^{2m-2} dx dy < \infty. \quad (5)$$

Хорошо известно, что $h \in A_\Delta^m$, тогда и только тогда, когда $h(z)(1 - |z|^2)^m$ ограничена в единичном круге. Поэтому $A_\Delta^{m_1} A_\Delta^{m_2} \subset A_\Delta^{m_1+m_2}$. Следовательно, $A_\Delta = \sum A_\Delta^m$ представляет собой градуированную алгебру. Аналогичное утверждение верно для $A(\Gamma) = \sum_\Delta A_\Delta$.

Предложение 3. Алгебры $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ изоморфны. Проективный спектр $Y(\Gamma)$ алгебры $A(\Gamma)$ совпадает с множеством всех точек поля $K(\Gamma)$.

Доказательство. Соответствие между алгебрами $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ устанавливается так же, как и при доказательстве предложения 1. При этом нужно только проверить, что если $h(z) \in A_\Delta^m$, то $\omega = h(z)(dz)^m$ является регулярным дифференциалом поля $K(\Gamma)$, т.е. существует такое $\Delta_1 \subset \Delta$, что ω является регулярным дифференциалом поля K_{Δ_1} . Как известно, множество всех точек поля K_{Δ_1} получается присоединением к D/Δ_1 всех неэквивалентных параболических вершин. Без ограничения общности можно предполагать, что в группе Δ_1 нет эллиптических элементов. В этом случае для любой $\Delta_1 \subset \Delta$ дифференциал ω будет регулярен в любой точке из D/Δ . Поэтому остается рассмотреть параболические точки. Пусть z_0 — параболическая вершина группы Δ . Отобразим единичный круг D на верхнюю полуплоскость $H \text{ Im } z > 0$ так, чтобы точка z_0 перешла в бесконечно удаленную точку, а параболическая подгруппа группы Δ — в совокупность преобразований вида $z \rightarrow z + n$, где n — любое целое. Из того, что $h(z) \in A_\Delta^m$, вытекает, что $h(z)$ имеет вид:

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{2\pi k z i}, \quad (6)$$

откуда получаем:

$$\omega = h(z)(dz)^m \sim t^{1-m}(dt)^m,$$

где $t = e^{2\pi zi}$. Следовательно, ω имеет в точке $t = 0$ полюс порядка не выше $m - 1$. Пусть ν — порядок ветвления в рассматриваемой точке для накрытия, связанного с группой Δ_1 . Тогда $t = \tau^\nu$, где τ — локальный параметр на накрытии. Мы имеем:

$$\omega \sim \lambda \tau^{(1-m)\nu + m(\nu-1)}(d\tau)^m, \quad (7)$$

где λ — некоторая константа. Таким образом, при достаточно большом ν ω будет регулярным дифференциалом в поле K_{Δ_1} .

Аналогичными выкладками проверяется и обратное утверждение, а именно: если ω является регулярным дифференциалом поля $K(\Gamma)$, то ω можно представить в виде

$$h(z)(dz)^m, \quad (8)$$

где $h(z) \in A_\Delta^m$.

Утверждение о строении проективного спектра алгебры $A(\Gamma)$ вытекает из того, что этот спектр есть проективный предел спектров алгебр $A_\Delta = \sum A_\Delta^m$. Как известно, спектр алгебры A_Δ совпадает с множеством точек поля K_Δ . Предложение 3 доказано.

Перейдем теперь к случаю когда D — любая симметрическая область, а Γ — арифметическая группа, действующая в D . Пусть G — линейная алгебраическая группа, определенная над $\mathbb{Q}$, из которой происходит данная арифметическая группа Γ . Мы будем предполагать, что размерность максимального тора группы G , расщепимого над $\mathbb{Q}$, совпадает с размерностью максимального тора группы G , расщепимого над $\mathbb{R}$. Условимся говорить, что арифметическая группа Γ удовлетворяет условию А), если она происходит из алгебраической группы G , для которой имеет место указанное выше соотношение.

Пусть D — некоторая симметрическая область в C^n , а Γ — арифметическая группа аналитических автоморфизмов, действующих в D . Элемент инвариантного объема всегда можно записать в виде

$$dv = \rho dz \wedge d\bar{z}, \quad (9)$$

где $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$.

Обозначим через A_Γ^m совокупность всех Γ -автоморфных форм веса m , для которых

$$\int_{D/\Gamma} |f|^2 \rho^{-m} dv < \infty. \quad (10)$$

Известно, (см. [11]), что $f \in A_\Gamma^m$ тогда и только тогда, когда функция $f\rho^{-\frac{m}{2}}$ ограничена в D . Следовательно, $A_\Gamma^{m_1} A_\Gamma^{m_2} \subset A_\Gamma^{m_1+m_2}$ и, значит, в $A_\Gamma = \sum_m A_\Gamma^m$ естественно вводится строение градуированной алгебры. Положим

$$A^m(\Gamma) = \sum A_\Delta^m,$$

где Δ пробегает множество всех подгрупп конечного индекса группы Γ , и обозначим через

$$A(\Gamma) = \sum A_\Gamma^m$$

алгебру автоморфных форм.

Предложение 4. Пусть Γ — арифметическая группа, удовлетворяющая условию А). Тогда алгебры $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ изоморфны. Проективный спектр алгебры $A(\Gamma)$ представляет собой квазиоднородное проалгебраическое многообразие $W(\Gamma)$, множество внутренних точек которого совпадает с $X(\Gamma)$ — проективным пределом фактор-пространств $X_\Delta = D/\Delta$, где Δ пробегает множество всех подгрупп конечного индекса группы Γ .

Замечание. Аналогичное утверждение справедливо, если рассматривать не все подгруппы конечного индекса, а лишь некоторое множество $\mathfrak{M}$ подгруппы конечного индекса, удовлетворяющее условиям § 1 (стр. 255).

Доказательство предложения 4. Покажем сначала, что алгебры $A(\Gamma)$ и $D(\Gamma)$ изоморфны. Изоморфизм устанавливается тем же способом, что и при доказательстве предложений 1, 2 и 3. Нужно лишь проверить, что если $h(z) \in A_\Delta^m$, то

$$\omega = h(z)(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n)^m \quad (11)$$

— регулярный дифференциал поля K_{Δ_1} , где Δ_1 — некоторая подгруппа конечного индекса группы Γ , и что любой регулярный дифференциал ω поля $K(\Gamma)$ представим в виде (11) с некоторой формой $h \in A_\Delta^m$. Мы воспользуемся для этого процессом десингуляризации, описанным в работах [3], [13] и [14]. Этот процесс позволяет для любой группы Γ , удовлетворяющей условию А) и не имеющей эллиптических элементов, построить неособую модель W_Γ поля K_Γ . При этом оказывается, что W_Γ обладает следующими свойствами:

- 1) существует регулярное отображение $\pi: W_\Gamma \rightarrow Y_\Gamma$, где Y_Γ , определенная в § 7, — нормальная модель поля K_Γ , причем на $X_\Gamma = D/\Gamma$ это отображение взаимно однозначно;

- 2) пусть Δ — подгруппа конечного индекса группы Γ , тогда естественное отображение $f_{\Delta, \Gamma}: W_{\Delta} \rightarrow W_{\Gamma}$ неразветвлено в точках $\pi^{-1}(X_{\Gamma})$ и разветвлено в $V_{\Gamma} = W_{\Gamma} - \pi^{-1}(X_{\Gamma})$; при этом в каждой паре точек $v' = V_{\Delta}$, $v = f_{\Delta, \Gamma}(v') \in V_{\Gamma}$ существуют системы координат (t', u') и (t, u) , где $t', t \in C^1$; $u', u \in C^{n-1}$, такие, что отображение $f_{\Delta, \Gamma}$ имеет вид:

$$f_{\Delta, \Gamma}(t', u') = (t'^n, u'),$$

т.е. оно разветвлено только при $t = 0$.

Отметим также, что порядок ветвления n зависит только от подгруппы Δ и может быть сделан сколь угодно большим с помощью подходящего выбора подгруппы. Пользуясь этими фактами, нетрудно проверить при помощи выкладок, аналогичных выкладкам предложения 3, что дифференциал ω степени m поля $K(\Gamma)$ тогда и только тогда является регулярным дифференциалом поля $K(\Gamma)$, когда ω регулярно в каждой точке X_{Γ} и имеет в каждой точке V_{Γ} полюс по t порядка не выше, чем $m-1$. Пользуясь явным описанием процесса десингуляризации, легко вывести, что условие равенства нулю свободного члена в разложении в так называемый ряд Фурье-Якоби автоморфной формы $h(z)$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы дифференциал $\omega = h(z)(dz)^m$ был регулярным дифференциалом поля $K(\Gamma)$.

Остается заметить, что, как было показано в [11], нулевой коэффициент разложения автоморфной формы $h(z)$ в ряд Фурье-Якоби тогда и только тогда равен нулю, когда $h(z) \in A_{\Delta}^m$.

Предложение 4 доказано.

Многообразие $W(\Gamma)$ есть проективный спектр алгебры дифференциалов, поэтому любой автоморфизм поля $K(\Gamma)$ переводит многообразие $W(\Gamma)$ в себя. Множество $X(\Gamma)$ внутренних точек многообразия $W(\Gamma)$ переводится автоморфизмом g в себя. Из этого непосредственно вытекает следующее утверждение, которое было нами использовано в § 1.

Любой автоморфизм g поля $K(\Gamma)$, переводящий поле K_{Δ_1} в K_{Δ_2} , переводит X_{Δ_1} в X_{Δ_2} .

Аналогичное утверждение имеет место для случая, когда D — единичный круг $|z| < 1$.

Приложение

Пусть Γ — модулярная группа, $K = C(j)$, где j — модулярный инвариант.

Обозначим через S некоторое множество простых чисел, и пусть $P(S)$ — объединение полей модулярных функций относительно всех конгруэнцподгрупп $\Gamma(m)$, где m содержит простые делители только из S .

Известно (см. § 2 настоящей статьи), что группа Галуа поля $P(S)$ описывается следующим образом. Рассмотрим последовательности $(g_{p_1}, g_{p_2}, \dots)$, где $p_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$, все g_{p_i} , кроме конечного числа, целые и $\det g_{p_i} = \rho$, где ρ — рациональное число, все простые делители числителя и знаменателя которого принадлежат S . Такие последовательности образуют группу $G(S)$. Фактор-группа группы $G(S)$ по центру и есть группа Галуа $\mathfrak{G}$ поля $P(S)$.

Теорема. Любое подполе поля $P(S)$ инвариантное относительно $\mathfrak{G}$, совпадает с $P(S)$.

Доказательство. Обозначим через T_m следующий оператор:

$$T_m f = f(mz) + \sum_{a=0}^{m-1} f\left(\frac{z+a}{m}\right).$$

Пусть P' — некоторое подполе поля $P(S)$, инвариантное относительно группы $\mathfrak{G}$. Положим $P = K \cap P'$. Тогда

$$T_m P \subseteq P,$$

если все простые делители m принадлежат S . Действительно, $T_m P' \subseteq P'$, $T_m K \subseteq K$.

Далее, легко видеть, что поле P не пусто, т.е. больше, чем $\mathbb{C}$.

Поле P , как подполе рациональных функций, само является полем рациональных функций от некоторого $f_0 \in P$:

$$P = \mathbb{C}(f_0),$$

причем можно считать, что f_0 в ∞ имеет полюс.

Утверждение теоремы сводится к тому, что

$$P = K.$$

Предположим, что это не так. Обозначим через n_0 порядок полюса f_0 в ∞ и рассмотрим сначала случай, когда $n_0 = 1$. В этом случае функция f_0 обязательно имеет полюса в конечных точках. Обозначим эти точки через $z_1, z_2, \dots, z_\nu$, а их кратности — через $n_1, n_2, \dots, n_\nu$. Рассмотрим функцию $f_m = T_m f_0$. Нетрудно видеть,

что она имеет в ∞ полюс порядка m . Остальные ее полюса находятся в точках

$$mz_i, \quad \frac{z_i + a}{m}, \quad a = 0, 1, \dots, m-1,$$

с кратностями n_i .

Из того, что f_m имеет полюс в ∞ порядка m и является рациональной функцией от f_0 , следует, что в точках $z_1, z_2, \dots$ она должна иметь полюса порядков не меньше, чем $mn_1, mn_2, \dots$ соответственно. Но это невозможно, так как при достаточно большом m точки

$$mz_1, \dots, mz_\nu, \quad \frac{z_1 + a}{m}, \dots, \frac{z_\nu + a}{m}, \quad |a| \leq \lambda\sqrt{m},$$

где λ — достаточно маленькая константа, неэквивалентны точкам $z_1, \dots, z_\nu$ (во время всего рассуждения предполагалось, что $z_1, \dots, z_\nu$ — точки из фундаментальной области).

Рассмотрим теперь случай, когда $n_0 > 1$. Покажем сначала, что f_0 имеет вид

$$f_0(z) = e^{-2\pi n_0 z i} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{2\pi k z i}. \quad (1)$$

Пусть это не так. Обозначим через n_1 порядок полюса в ∞ функции $f_0 - e^{-2\pi n_0 z i}$, иными словами предположим, что f_0 имеет вид

$$f_0(z) = e^{-2\pi n_0 z i} + a_1 e^{-2\pi n_1 z i} + \dots \quad (2)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi = T_m f_0 - f_0^m.$$

Эта функция имеет в ∞ порядок полюса, равный $(m-1)n_0 + n_1$, т.е. не делящийся на n_0 . Это противоречит тому, что φ — рациональная функция от f_0 . Итак, мы показали, что f_0 имеет вид (1).

Покажем теперь, что если $a_k \neq 0$ в (1), то $k \equiv 0 \pmod{n_0}$. Обозначим через p_1 наименьшее по абсолютной величине натуральное число, не делящееся на n_0 , такое, что $a_{n_0} \neq 0$.

Положим $r = [\frac{p_1}{n_0}] + 1$. Рассмотрим функции

$$\varphi = T_m f_0 - \sum_{k=0}^r \lambda_r f_0^{m-k}.$$

Нетрудно видеть, что при достаточно большом m и подходящем подборе коэффициентов λ_k функция φ будет иметь в ∞ полюс порядка

$$(m-1)n_0 - n_1,$$

но это невозможно, так как φ — рациональная функция от f_0 и, значит, порядок ее полюса кратен n_0 . Таким образом, мы показали, что номера всех отличных от нуля коэффициентов функции f_0 кратны n_0 .

Докажем, что в K нет функции, все отличные от нуля коэффициенты которой делятся на некоторое $n_0 > 1$. Действительно, пусть такая функция есть. Обозначим ее через f_0 . Тогда f_0 инвариантна относительно модулярной группы и преобразования $z \rightarrow z + \frac{1}{n_0}$. Нетрудно видеть, что группа, порожденная такими преобразованиями, всюду плотна. Следовательно, такая функция f_0 должна быть константой. Мы доказали, что если $P = C(f_0)$, то f_0 имеет единственный полюс в ∞ первого порядка. Из этого, очевидно, следует, что модулярный инвариант j является рациональной функцией от f_0 . Нами показано, что

$$P = C(j) = K.$$

Весьма вероятно, что аналогичное предложение справедливо для любых арифметических групп, однако нам не удалось это доказать.

Литература

1. Зигель К.Л., *Автоморфные функции от нескольких комплексных переменных*, М.—Л., 1954.
2. Baily W.L., Borel A., *On the compactification of arithmetically defined quotients of bounded symmetric domains*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1964), 588–593.
3. Пятецкий-Шапиро И.И., *Арифметические группы в комплексных областях*, Успехи матем. наук, XIX **6(120)** (1964), 95–121.
4. Вейль А., *О дискретных подгруппах групп Ли*, II, "Математика", Сб. переводов 7:1, 1963, pp. 17–40.
5. Shioda T., *On algebraic variety uniformizable by bounded domain*, Proc. Japan Acad., **39** (1963), no. 9, 617–619.
6. Borel A., Harish-Chandra, *Arithmetic subgroups of algebraic groups*, Ann. Math. **75** (1962), 485–535.
7. Kneser M., *Strong approximation*, Summer Institute., University of Colorado, 1965.
8. Lang S., *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555–563.
9. Tate I., *Duality theorems in Galois cohomology over number fields*, Proc. Internat. Congr. Math., Stockholm, 1962.
10. Lang S., *Abelian varieties*, New York, 1959.
11. Пятецкий-Шапиро И.И., *Геометрия классических областей и теория автоморфных функций*, М., 1961.

12. Baily W., L., *On the compactification of orbit spaces of arithmetic discontinuous groups acting on bounded symmetric domains*, Summer Institute, University of Colorado boulder, 1965.
13. Гиндикин С.Г., Пятацкий-Шапиро И.И., *Об алгебраической структуре поля модулярных функций Зигеля*, Докл. АН СССР **162** (1965), no. 6, 1226-1229.
14. Igusa J.I., *On the desingularization of Satake compactifications*, Summer Institute, Colorado, 1965.
15. Igusa J.I., *Fibre systems of Jacobian varieties*, III, Amer. J. Math. **81** (1959), no. 2, 453-477.
16. Mumford D., *Projective invariants of projective structures and applications*, Proc. Internat., Congr. Math., Stockholm, 1962.
17. Сельберг А., *О дискретных группах в многомерных симметрических пространствах*, "Математика", Сб. переводов, 6:3, 1962, pp. 3-16.

⁴ Доказательство утверждения, сформулированного в работе [13], не было опубликовано, и утверждение не верно, как показал Игуза. Поэтому приведенное доказательство предложения 4 неверно. Позже его доказал Т. Miyake, Ann. Math. 95(1972), 243-252. (Примечание автора к настоящему изданию.)

О НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУППАХ*

RENDICONTI DI MATEMATICA (1-2) VOL 25, PP.208-212

Резюме. Различные вопросы алгебраической геометрии приводят к рассмотрению групп, имеющих многие свойства алгебраических групп, но не являющихся конечномерными алгебраическими многообразиями. В этом докладе дано определение такого объекта и рассмотрены простейшие примеры.

1. Бесконечномерные алгебраические группы и их алгебры Ли

Пусть X — множество с заданной последовательностью подмножеств X_n , каждое из которых имеет структуру конечномерного алгебраического многообразия. Мы называем X бесконечномерным алгебраическим многообразием, если выполнены следующие условия:

- 1) $X = \bigcup X_n$,
- 2) $X_n \subset X_{n+1}$ — замкнутое вложение алгебраических многообразий.

Морфизмом бесконечномерных алгебраических многообразий $X = \bigcup X_n$ и $Y = \bigcup Y_n$ называется такое отображение $f: X \rightarrow Y$, что для любого n $f(X_n) \subset Y_m$ для некоторого $m = m(n)$, и отображение $f: X_n \rightarrow Y_m$ является морфизмом конечномерных многообразий.

Бесконечномерное алгебраическое многообразие $X = \bigcup X_n$ называется аффинным, если все многообразия X_n аффинны. В этом случае топологическое кольцо

$$k[X] = \varprojlim k[X_n]$$

называется кольцом регулярных функций на X .

*Работа впервые опубликована по-английски. Здесь публикуется русский оригинал.

Бесконечномерная алгебраическая группа — это группа в категории бесконечномерных алгебраических многообразий. Группа называется аффинной, если соответствующее ей многообразие аффинно.

Пример. Группа $\text{Aut}(A^n)$ автоморфизмов n -мерного аффинного пространства A^n над полем k характеристики 0 может быть снабжена структурой бесконечномерной аффинной алгебраической группы.¹

Действительно, доказано, что отображение

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad f_i \in k[x_1, \dots, x_n] \quad (1)$$

тогда и только тогда является автоморфизмом пространства A^n , когда его якобиан

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

равен ненулевой константе. Возьмем за X_m совокупность наборов $(f_1, \dots, f_n)$, $\deg f_i < m$, определенных условием

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \in k^*.$$

Очевидно, что X_m определяют в $\text{Aut}(A^n)$ структуру бесконечномерной аффинной группы*.

Группа $\text{Aut}(A^n)$ не конечномерна, за исключением случая $n = 1$. Можно доказать, что эта группа связна.

Как указал мне А.Бяленицкий-Бирюля, можно ввести структуру бесконечномерной алгебраической группы (в некотором смысле — универсальной) в любую группу $\text{Aut} X$, где X — произвольное конечномерное аффинное многообразие.

Определим локальное кольцо O_x точки x на бесконечномерном алгебраическом многообразии $X = \cup X_n$ как проективный предел локальных колец $O_x(X_n)$ для всех $X_n \ni x$. Точка x называется простой, если O_x — регулярное топологическое локальное кольцо.

¹Здесь я использовал так называемую “гипотезу о якобиане”. Когда писалась работа, я не знал, что опубликованные ее доказательства ошибочны. Однако, для целей настоящей работы это несущественно, см. работу 23 настоящего издания. (Примечание автора к настоящему изданию.)

*Можно ввести структуру бесконечномерной группы в $\text{Aut}(A^n)$, не используя эту теорему, более прямым и элементарным способом, причем для произвольного поля k .

Объединение касательных пространств к многообразиям X_n в точке x называется касательным пространством к X в точке x . До конца параграфа мы будем предполагать, что характеристика поля k равна 0.

Теорема 1. *Все точки бесконечномерной алгебраической группы — простые.*

Локальное кольцо точки e (единичного элемента) группы G имеет естественную структуру алгебры Хопфа. Касательное пространство T_e к G в точке e может быть отождествлено с множеством примитивных элементов этой алгебры Хопфа. Это превращает пространство T_e в алгебру Ли, называемую алгеброй Ли группы G и обозначаемую $L(G)$.

Верен следующий слабый аналог теоремы Ли:

Теорема 2. *Для каждой замкнутой подгруппы H бесконечномерной алгебраической группы G алгебра $L(H)$ является подалгеброй Ли в $L(G)$. Если $L(H) = L(G)$ и G связна, то $H = G$.*

Пусть бесконечномерная группа G регулярно действует на конечномерном аффинном многообразии X . Это действие определяет вложение алгебры $L(G)$ в алгебру $D[X]$ всех дифференцирований алгебры $k[X]$.

Теорема 3. *Если $G = \text{Aut}(A^n)$, то образ $L(G)$ в $D[A^n]$ состоит из операторов вида*

$$D = \sum_1^n F_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad F_i \in k[x_1, \dots, x_n]$$

со свойством

$$\sum_1^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \in k.$$

Применяя теоремы 2 и 3, можно получить некоторую информацию о строении группы $G = \text{Aut}(A^n)$. Пусть B — группа автоморфизмов пространства A , имеющих вид

$$x'_i = a_i x_i + f_i(x_1, \dots, x_{i-1}), \quad f_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$$

и C — группа линейных (не обязательно однородных) автоморфизмов.

Теорема 4. *Группы B и C порождают группу G как алгебраическую группу.*

Теорема 5. *Группа G имеет нормальный делитель G_0 , состоящий из автоморфизмов вида (1) со свойством*

$$\det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) = 1.$$

Группа G_0 проста как бесконечномерная алгебраическая группа.

2. Группа автоморфизмов аффинной плоскости

Структуру группы $\text{Aut}(A^n)$ можно исследовать детально в случае $n = 2$. Мы предполагаем, что основное поле алгебраически замкнуто и имеет произвольную характеристику.

Теорема 6. *Группа $G = \text{Aut}(A^2)$ порождается подгруппами B и C как алгебраическая группа.*

Доказательство основывается на возможности разложить произвольный бирациональный изоморфизм проективных плоскостей в произведение σ -процессов и обратных к ним преобразований [1].

Для случая основного поля характеристики 0 теорема 6 доказана Энгелем [2].

Теорема 7. *Пусть $C_0 = B \cap C$. Группа G изоморфна свободному произведению групп B и C с алгебраической подгруппой C_0 .*

Теорема 8. *Каждая конечномерная подгруппа группы G сопряжена подгруппе групп B или C .*

Следствие 1. *Каждое действие мультипликативной группы на плоскости сопряжено диагональному.*

Это следствие другим способом доказала Гутвирт [3].

Следствие 2. *Каждое действие аддитивной группы на плоскости сопряжено действию*

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + t f(x), \quad f(x) \in k[x]. \end{aligned}$$

Это следствие другим способом доказал Эби [4].

Пусть k — не обязательно алгебраическое замкнутое поле, K — конечное расширение Галуа с группой Галуа g и G — группа точек группы G с координатами в K . То же рассуждение, которое используется при доказательстве теоремы 8, показывает, что из теоремы 7 вытекает: $H^1(g, G) = (1)$. Это можно интерпретировать следующим образом. Многообразие X называется формой многообразия Y (X и Y определены над k), если X и Y становятся изоморфными над некоторым сепарабельным расширением K поля k .

Теорема 9. *Аффинная плоскость не имеет форм, кроме нее самой.*

Другая формулировка: если A — такая алгебра конечного типа над k , что $A \otimes K = K[X, Y]$, то $A = k[X, Y]$.

3. Некоторые вопросы

Изложенные выше результаты приводят к интересным вопросам.

Можно ли ввести универсальную структуру бесконечномерной алгебраической группы в группу всех автоморфизмов (или в группу всех бирациональных автоморфизмов) произвольного алгебраического многообразия?

Можно ли обобщить теоремы 8 и 9 для произвольных $n > 2$?

Из теоремы 8 следует, что группа G , упомянутая в теореме 5, для $n = 2$ является группой ранга 1. Каковы все бесконечномерные простые группы ранга 1, действующие на конечномерных многообразиях?

Очевидны обобщения этих вопросов. Они явно связаны с теорией псевдогрупп Картана.

На каких аффинных поверхностях примитивно и транзитивно действуют алгебраические группы?

Литература

- [1] И. Р. Шафаревич (ред.), *Алгебраические поверхности*, Труды Математического Института им. Стеклова **75** (1965), Москва.
- [2] W. Engel, *Ganze Cremona-Transformationen von Primzahlgrad in der Ebene*, Math Ann. **136** (1958), 319–325.
- [3] A. Gutwirth, *The Action of the algebraic torus on an affine plane*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), no. 3, 407–404.
- [4] W. Ebey, *The operation of the fundamental domain on a plane*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), no. 5, 722–726.

ТЕОРЕМА ТОРЕЛЛИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА $K3^1$

ACTES CONGRES INTERN. MATH., NICE 1970

Доклад является изложением совместной работы с И. И. Пятецким-Шапиро. Мы исследуем алгебраические поверхности над полем комплексных чисел, канонический класс которых равен нулю. Это условие равносильно тому, что первый класс Черна равен 0, или же тому, что структурная группа касательного расслоения редуцируется к специальной линейной группе.

Известно, что существуют два типа таких поверхностей. Один из них совпадает с двумерными абелевыми многообразиями. Поверхности другого типа односвязны. Они называются поверхностями типа $K3$.

Абелево многообразие однозначно определяется периодами своих одномерных голоморфных дифференциальных форм. Отсюда легко вывести, что оно однозначно определяется и периодами его единственной (с точностью до постоянного множителя) двумерной голоморфной формы. На поверхности типа $K3$ нет одномерных голоморфных форм, но зато существует единственная с точностью до постоянного множителя двумерная голоморфная форма. Мы исследуем, в какой мере периоды этой формы определяют поверхность. Вопрос имеет естественную постановку для поляризованных поверхностей, т. е. снабженных двумерным классом гомологий, соответствующим некоторому гиперплоскому сечению. Чтобы сформулировать основные результаты, нужно ввести несколько понятий.

Как известно (см., например, [1], гл. IX) для поверхности X типа $K3$ группа $H_2(X, \mathbb{Z})$ является свободным $\mathbb{Z}$ -модулем ранга 22 и индекс пересечения определяет в нем структуру унимодулярной евклидовой решетки сигнатуры $(3, 19)$. Известно, что все евклидовы решетки с этими свойствами изоморфны. Зафиксируем одну из них — L и некоторый вектор $l \in L$. Отмеченной поверхностью типа $K3$

¹ Работа впервые опубликована по-французски. Здесь публикуется русский оригинал.

называется тройка $(X, \xi, \varphi) = \tilde{X}$, где X — поверхность типа КЗ, $\xi \in H_2(X, \mathbb{Z})$ — класс гиперплоского сечения при некотором проективном вложении и $\varphi : H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L$ такой изоморфизм евклидовых решеток, что $\varphi(\xi) = l$.

Положим $\tilde{\Omega} = \text{Hom}(L, \mathbb{C})$ и определим в этом пространстве билинейное скалярное произведение, продолжающее то, которое определено в L . Обозначим через Ω область в квадрике проективного пространства размерности 21, соответствующего $\tilde{\Omega}$, точки которой соответствуют таким векторам $\omega \in \Omega$, что

$$\begin{aligned}\omega^2 &= 0 \\ \omega \cdot \bar{\omega} &> 0\end{aligned}$$

и через $\Omega(l)$ образ множества тех $\omega \in \Omega$, для которых $\omega \cdot l = 0$. Множество $\Omega(l)$ является несвязным объединением двух связанных комплексных многообразий, каждое из которых изоморфно симметрической ограниченной области типа IV по классификации Э. Картана.

Как доказано в [1] гл. IX, каждой отмеченной поверхности $\tilde{X}$ можно сопоставить точку $\tau(\tilde{X}) \in \Omega(l)$. Для этого рассмотрим голоморфную дифференциальную форму ω на X и для $\gamma \in H_2(X, \mathbb{Z})$ положим

$$f(\gamma) = \int_{\gamma} \omega.$$

Очевидно, что $f \in \text{Hom}(H(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$ и что φ переводит f в $g \in \{\text{Hom}(L, \mathbb{C}) = \tilde{\Omega}\}$. Так как форма ω определена однозначно с точностью до постоянного множителя, мы получаем однозначно определенную точку в проективном пространстве, причем легко доказать, что она принадлежит $\Omega(l)$. Эта точка обозначается через $\tau(\tilde{X})$. Она называется периодом поверхности $\tilde{X}$, а τ называется отображением периодов.

Основной результат (теорема Торелли для поверхностей типа КЗ) утверждает, что отмеченная поверхность $\tilde{X}$ однозначно с точностью до изоморфизма определяется своим периодом $\tau(\tilde{X})$.

Вот схема доказательства этой теоремы. Мы основываемся на “локальной” теореме Торелли для поверхностей типа КЗ, доказанной Г. Н. Тюриной в [1] гл. IX. Строится аналитическое семейство $\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow S$ поверхностей, все слои которого — отмеченные поверхности типа КЗ и любая такая поверхность там встречается; это семейство эффективно параметризуется базой S размерности 19. Его конструкция использует систему Гильберта поверхностей

типа КЗ, вложенных в некоторое проективное пространство при помощи перехода к фактору по действию проективной группы. Из основного результата [1] гл. IX следует, что отображение периодов $\tau : S \rightarrow \Omega(I)$ является локальным голоморфным изоморфизмом для базы нашего семейства в $\Omega(I)$.

Мы укажем дальше всюду плотное множество $Z \subset \Omega(I)$, над которым отображение τ , биективно. Наша теорема вытекает тогда из следующего простого утверждения:

Пусть $f : U \rightarrow V$ локально изоморфное отображение аналитических многообразий. Предположим, что существует такое всюду плотное множество $Z \subset V$, что $f^{-1}(z)$ состоит из одной точки для любой точки $z \in Z$. Тогда a является открытым вложением.

Остается описать конструкцию множества $Z \subset \Omega(I)$, для которого мы доказываем теорему Торелли. Оно основывается на введении одного специального типа поверхностей типа КЗ.

Рассмотрим двумерное абелево многообразие A и его автоморфизм θ , $\theta(x) = -x$. Обозначим через g группу, состоящую из 1 и g . Фактор $A \setminus g$ является нормальным комплексным пространством. Оно имеет 16 простейших двойных точек, соответствующих точкам второго порядка многообразия A . Каждую из этих особых точек можно разрешить при помощи комплексного преобразования. Полученная таким образом поверхность является поверхностью типа КЗ и называется куммеровой поверхностью.

Если абелево многообразие A приводимо, т. е. содержит эллиптическую кривую, то соответствующая куммерова поверхность называется специальной.

Оказывается, можно дать признак того, что поверхность типа КЗ является специальной куммеровой поверхностью в терминах решетки $H_2(X, \mathbb{Z})$ и отображения периодов.

Точнее говоря, структура алгебраической поверхности выделяет в группе $H_2(X, \mathbb{Z})$ подгруппу алгебраических циклов, которую мы обозначим через S . Теорема Лефшетца характеризует подгруппу S в терминах отображения периодов τ : если $\tilde{X} = (X, \varphi, \xi)$ — отмеченная поверхность, то $\pi = \tau(\tilde{X})$ является линейной формой на L , однозначно определенной с точностью до постоянного множителя, и $S = \text{Ker } \varphi^*(\pi)$. Таким образом, решетка S определена периодом поверхности.

Если A — приводимое абелево многообразие и C — эллиптическая кривая, содержащаяся в A , то гомоморфизм $A \rightarrow A \setminus C$ определяет расслоение на эллиптические кривые. Это расслоение определяет пучок эллиптических кривых на соответствующей специальной куммеровой поверхности. Класс слоя такого расслоения может быть описан в терминах решетки S . Это дает критерий того, что

X является специальной куммеровой поверхностью.

Теорема Торелли легко доказывается для специальных куммеровых поверхностей. Во множестве периодов этих поверхностей содержится всюду плотное множество, которое нам необходимо.

Укажем некоторые применения теоремы Торелли. Прежде всего, она дает возможность построить “грубое многообразие модулей” поверхностей типа КЗ. Назовем классом такой поверхности минимум чисел $1 \setminus 2D^2$, где D — эффективный дивизор поверхности и $D^2 > 0$. Многообразие модулей M_k поверхностей класса k имеет вид $F - F_0$. Здесь F — стандартная компактификация пространства $\Omega(l) \setminus \Gamma$ — фактора симметрической однородной области $\Omega(l)$ по подгруппе Γ группы автоморфизмов решетки L , оставляющих инвариантным некоторый вектор l длины $2k$. Подмногообразие $F_0 \subset F$ состоит из границы компактификации и подмножеств, определенных условиями $\omega a = 0$, $al = 0$, $a^2 = -2$.

При $k = 2$ мы имеем дело с поверхностями 4-ой степени в $\mathfrak{P}^3$. Возможно, что так же дело обстоит и в общем случае.

Многообразие M_k имеет модель, определенную над полем Ω причем такую, что для точки $m \in M$ поле $\Omega(m)$ совпадает с “полем модулей” в смысле Шимуры [2] соответствующей поверхности X . В частности, если поверхность X не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного, поле $\Omega(m)$ совпадает с полем определения этой поверхности.

Другие примечания связаны со структурой группы автоморфизмов поверхности типа КЗ. Пусть S — группа классов дивизоров этой поверхности, рассматриваемая как евклидова решетка. Каждый вектор $a \in S$ с $a^2 = -2$ определяет автоморфизм решетки S :

$$x \rightarrow x + (x, a)a,$$

являющийся отражением в гиперплоскости, ортогональной вектору a . Обозначим через H подгруппу, которую все они порождают в группе всех автоморфизмов решетки S . Очевидно, H является нормальным делителем. Из теоремы Торелли легко вытекает, что группа $(\text{Aut } S) \setminus H$ “с точностью до конечных групп” изоморфна группе автоморфизмов поверхности. Здесь две группы G и G' называются изоморфными с точностью до конечных групп, если существуют такие подгруппы конечного индекса $G_1 \subset G$ и $G'_1 \subset G'$, конечные нормальные делители $G_0 \subset G_1$ и $G'_0 \subset G'_1$, что $G_1 \setminus G_0 \simeq G'_1 \setminus G'_0$.

Например, если решетка S имеет ранг 2, она задается целочисленной неопределенной бинарной квадратичной формой $F(x, y)$. Группа автоморфизмов поверхности бесконечна тогда и только тогда, когда форма не представляет ни 0, ни -2. Для каждой четной

неопределенной бинарной квадратичной формы существует соответствующая поверхность. В работе [2] Севери рассмотрел случай поверхности 4 степени, содержащей кривую степени 6 и рода 2. Для такой поверхности форма F имеет вид

$$4x^2 + 12xy + 2y^2$$

и, в соответствии с нашими результатами, группа автоморфизмов бесконечна. В качестве другого приложения рассмотрим поверхности, для которых ранг группы S принимает максимально возможное значение 20. Мы называем их сингулярными. Ортогональное дополнение T решетки S в $H_2(X, 3)$ является четной бинарной положительно определенной формой. Из теоремы Торелли легко вывести, что поверхность однозначно определяется соответствующей решеткой T , каждой четной решетке соответствует некоторая поверхность. Сингулярная поверхность куммерова тогда и только тогда, когда $t^2 \equiv 0 \pmod{4}$ для всех $t \in T$.

Укажем на некоторые вопросы, к которым приводит теорема Торелли. Если сравнить ситуацию с той, которая имеет место для абелевых многообразий, мы увидим, что отсутствует понятие, аналогичное изогении. Его легко определить, исходя из теории периодов. В ограниченной области $\Omega(l)$ действует дискретная группа Γ , элементы которой соответствуют различным изоморфизмам $H_2(X, 3) \rightarrow L$ переводящим ξ в l . Эквивалентные точки соответствуют одной и той же поверхности. Группа состоит из целых точек некоторой алгебраической группы $G: \Gamma = G(3)$. Естественно называть изогенными поверхности, соответствующие точкам, эквивалентным относительно группы $G(\Omega)$.

Возникает вопрос об алгебраическом описании этого понятия. Точнее говоря, пусть $g \in G(\Omega)$, $x, y \in \Omega(l)$, $y = gx$, а $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ — такие отмеченные поверхности, что $\tau(\tilde{X}) = x$. Преобразование g определяет гомоморфизм $H_2(X, 3) \rightarrow H_2(Y, 3)$. Задается ли этот гомоморфизм некоторым алгебраическим соответствием между X и Y ? Отрицательный ответ привел бы к опровержению гипотезы Ходжа. Положительный ответ давал бы мероморфность и функциональное уравнение для ζ — функции сингулярных поверхностей (и других интересных классов). Очень интересно исследование поверхностей типа КЗ над конечными полями. Каково минимально возможное значение ранга решетки S для таких поверхностей? Если принять гипотезу Тейта, то оно ≥ 2 . Мы не знаем, достигается ли это минимальное значение. Каковы поверхности, для которых этот ранг имеет максимальное значение 22? Являются ли они все куммеровыми поверхностями?

В заключение отметим исключительно интересную проблему обобщения этих результатов на многообразия произвольной размерности с каноническим классом 0.

Литература

- [1] , *Алгебраические поверхности*, Труды Математического Института им. Стеклова **75** (1965), Москва.
- [2] G.Shimura, *Number fields and zeta functions associated with discontinuous groups and algebraic varieties*, Труды Международного Математического Конгресса (1966), Москва, 290–299.
- [3] F. Severi, *Complementi alla teoria della base per la totalita delle curve di una superficie algebrica*, Rendiconti per Circolo Matematico di Palermo **30**, 265–288.

ТЕОРЕМА ТОРЕЛЛИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА $K3$

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР

СЕР. МАТЕМ.

35(1971), 530–572

(с И.И.Пятецким-Шапиро)

Памяти Галины Николаевны Тюриной

В работе доказано, что алгебраическая поверхность типа $K3$ однозначно определяется заданием интегралов своей голоморфной дифференциальной формы по базисным циклам двумерной группы гомотопий, если выделен класс гомотопий гиперплоских сечений.

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена алгебраическим поверхностям с нулевым каноническим классом. Мы рассматриваем только поверхности, определенные над полем комплексных чисел. Для них это условие равносильно тому, что первый класс Черна равен 0, или тому, что структурная группа касательного расслоения может быть редуцирована к специальной линейной группе.

Как известно, существуют два класса таких поверхностей. Один из них — это двумерные абелевы многообразия. Поверхности другого класса односвязны. Они называются поверхностями типа $K3$.

Абелево многообразие однозначно определено периодами своих одномерных голоморфных дифференциальных форм. Отсюда легко вывести, что оно определяется и периодами двумерной голоморфной дифференциальной формы. На поверхности типа $K3$ нет одномерных голоморфных дифференциальных форм, но зато, как и на двумерном абелевом многообразии, существует единственная с точностью до постоянного множителя двумерная голоморфная форма. Вопрос о том, определяют ли периоды этой дифференциальной

формы поверхность, носит название теоремы Торелли. Естественно ставить его для поляризованных поверхностей, т.е. фиксировать в двумерной группе гомологий класс гиперплоских сечений поверхности. Обсуждение этого вопроса и аналогичных вопросов для других типов алгебраических многообразий можно найти в обзоре Гриффитса [7].

В этой статье мы даем положительный ответ на сформулированный выше вопрос. Доказательство опирается на “локальную теорему Торелли”, которая для поверхностей типа $K3$ доказана Г.Н.Тюриной [1, гл.IX]. Мысль о том, что глобальная теорема Торелли может быть выведена из локальной, высказал нам А.Н.Тюрин.

§ 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основной объект, который исследуется в этой статье, — поверхности типа $K3$. Так называется двумерное компактное комплексное келерово многообразие X , канонический класс которого тривиален и одномерное число Бетти равно нулю. Все основные результаты работы относятся к случаю, когда X — алгебраическая поверхность, определенная над полем комплексных чисел.

Как показано в работе [1], стр. 179, для любой поверхности X типа $K3$ группа $H_2(X, \mathbf{Z})$ не имеет кручения. Индекс пересечения определяет в ней целозначное скалярное произведение.

Мы будем называть эвклидовой решеткой свободный модуль конечного ранга над $\mathbf{Z}$, в котором определено скалярное произведение со значениями в $\mathbf{Z}$. Очевидно, как определяется изоморфизм эвклидовых решеток. Мы будем называть эвклидову решетку E четной, если $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$ для всех $x \in E$; положительно определенной, если $x^2 > 0$ для $0 \neq x \in E$, и унимодулярной, если ее определитель Грама равен ± 1 . Если X — поверхность типа $K3$, то группа $H_2(X, \mathbf{Z})$ является четной унимодулярной решеткой. Мы будем обозначать ее через H_X или H . Сигнатура эвклидова пространства $H_X \otimes \mathbf{R}$ равна $(3, 19)$ [1, стр.181].

Чтобы сформулировать основные результаты работы, мы введем новое понятие, аналогичное поверхности Тайхмюллера в теории римановых поверхностей. Рассмотрим эвклидову решетку L , которая четна, унимодулярна и для которой пространство $L \otimes \mathbf{R}$ имеет сигнатуру $(3, 19)$.

Как известно, [16, стр.93], все такие решетки изоморфны. Фиксируем одну из них и в ней вектор $l \in L$.

Определение. Отмеченной поверхностью типа $K3$ называется тройка (X, φ, ξ) , где X — поверхность типа $K3$, $\varphi : H_X \rightarrow L$ — изо-

морфизм евклидовых решеток, $\xi \in H_X$ — класс, соответствующий очень обильному дивизору на X и такой, что $\varphi(\xi) = l$.

Изоморфизмом отмеченных поверхностей (X, φ, ξ) и (X', φ', ξ') называется изоморфизм $f: X \rightarrow X'$ поверхностей, переводящий φ в φ' и ξ — в ξ' .

Таким образом, понятие отмеченной поверхности зависит от выбора вектора l (точнее было бы говорить об отмеченной поверхности “типа l ”). Так как этот выбор будет фиксирован на протяжении всей работы, то мы не отмечаем этой зависимости.

Настоящая работа посвящена изучению множества отмеченных поверхностей с точностью до их изоморфизма. Результаты основаны на сопоставлении таким поверхностям точек некоторого симметрического пространства (“периодов поверхности”), к определению которого мы сейчас перейдем.

Пусть $\tilde{\Omega}$ — пространство всех комплексных линейных функционалов на L . Определим на $\tilde{\Omega}$ обычным образом скалярное произведение, а именно, вначале распространим имеющееся в L скалярное произведение на $L \otimes \mathbb{C}$, а затем воспользуемся естественным изоморфизмом между $\tilde{\Omega}$ и $L \otimes \mathbb{C}$.

Обозначим теперь через Ω совокупность всех прямых $\omega \in \tilde{\Omega}$, проходящих через начало координат и таких, что

$$\omega_0^2 = 0 \quad (1)$$

$$\omega_0 \cdot \bar{\omega}_0 > 0 \quad (2)$$

для $\omega_0 \in \omega$.

Нетрудно показать, что Ω представляет собой комплексное многообразие. Обозначим, далее, через $\Omega(l)$ совокупность всех $\omega \in \Omega$, ортогональных вектору l . $\Omega(l)$ представляет собой несвязное объединение двух одинаковых комплексных многообразий, каждое из которых является симметричной областью в S_{19} типа IV по классификации Э.Картана. Для доказательства этого утверждения рассмотрим совокупность G_l всех вещественных преобразований пространства $\tilde{\Omega}$, сохраняющих скалярное произведение и переводящих гиперплоскость $\omega \cdot l = 0$ в себя. Нетрудно видеть, что G_l изоморфна группе преобразований, сохраняющих квадратичную форму с двумя положительными квадратами и 19 отрицательными квадратами. Из определения G_l и $\Omega(l)$ очевидно, что G_l переводит $\Omega(l)$ в себя. Легко проверяется, что G_l действует транзитивно в $\Omega(l)$. С помощью несложных вычислений проверяются все наши утверждения об $\Omega(l)$. (Подробно см. [11, стр. 126.])

Покажем, как сопоставить каждой отмеченной поверхности точку в $\Omega(I)$. Пусть $\tilde{X} = (X, \varphi, \xi)$ — такая поверхность. Как известно, на любой поверхности X типа КЗ существует единственная с точностью до умножения на константу форма ω типа $(2,0)$. Отображение

$$\gamma \rightarrow \int_{\gamma} \omega,$$

где $\gamma \in H_X$, определяет комплексный линейный функционал на H_X ; с помощью изоморфизма φ между H_X и L мы определим линейный функционал на L . Поскольку форма ω определена с точностью до умножения на константу, то этот линейный функционал тоже определен с точностью до умножения на константу. Как показано в [1, стр. 170], для построенного таким образом линейного функционала выполняются (1) и (2).

Так как ξ — алгебраический класс гомологий, то $\int_{\xi} \omega = 0$. Поэтому построенная точка из Ω содержится в $\Omega(I)$.

Полученную точку в $\Omega(I)$ мы обозначим через $\tau(\tilde{X})$ и будем называть периодом отмеченной поверхности $\tilde{X}$, а отображение τ — отображением периодов. Основной результат работы таков:

Теорема Торелли для поверхностей типа КЗ. *Отмеченная поверхность типа КЗ однозначно определяется своими периодами.*

Изложим схему доказательства этой теоремы. Мы строим аналитическое семейство поверхностей типа КЗ: $X \rightarrow S$, все слои которого являются отмеченными поверхностями, среди слоев содержатся все (с точностью до изоморфизма) отмеченные поверхности, причем семейство эффективно параметризовано и размерность его базы равна 19. Конструкция такого семейства основана на построении схемы Гильберта поверхностей типа КЗ, вложенных в проективное пространство, и факторизации по проективной группе. Она изложена в § 2. Из основного результата гл. IX работы [1] следует, что отображение периодов $\tau: S \rightarrow \Omega(I)$ является голоморфным, локально изоморфным отображением базы нашего семейства в $\Omega(I)$.

В § 7 показано, что существует всюду плотное множество $Z \subset \Omega(I)$, на котором отображение τ взаимнооднозначно. После этого наша теорема следует из следующей простой леммы.

Лемма 1. Пусть $f: U \rightarrow V$ — локально изоморфное отображение аналитических многообразий. Предположим, что существует такое множество $Z \subset V$, всюду плотное в V , что $f^{-1}(z)$ состоит ровно из одной точки для всех точек $z \in Z$. Тогда f является вложением.

Доказательство. Предположим, что у некоторой точки $v \in V$ существует два разных прообраза: u_1 и u_2 . По условию существуют окрестность и $U_1 \ni u_1$ и $U_2 \ni u_2$, которые f изоморфно отображает на окрестность V' точки v . Окрестности U_1 и U_2 можно выбрать непересекающимися. Тогда любая точка $v' \in V'$ имеет по крайней мере два прообраза. Но по условию в V' должна содержаться точка $z \in Z$, что приводит к противоречию.

Остается описать построение множества $Z \subset \Omega(I)$, для которого сначала доказывается теорема Торелли. Это построение основано на рассмотрении некоторых специальных типов поверхностей типа КЗ.

Рассмотрим двумерное абелево многообразие A и его автоморфизм $\theta : \theta(x) = -x, x \in A$. Обозначим через g группу, состоящую из 1 и θ . Факторпространство A/g является нормальным комплексным пространством. Оно имеет 16 двойных точек, соответствующих точкам второго порядка на A , каждая из которых может быть разрешена одним σ -процессором. Полученное таким образом многообразие является поверхностью типа КЗ. Оно называется куммеровой поверхностью.

Если абелево многообразие A приводимо, т.е. содержит эллиптическую кривую, то соответствующая куммерова поверхность называется специальной.

Оказывается, можно дать признак того, что поверхность X типа КЗ является специальной куммеровой, сформулированный в терминах эвклидовой решетки H_X и отображения периодов.

Именно, структура алгебраической поверхности на X выделяет в группе гомологий H_X подрешетку алгебраических циклов, которую мы будем обозначать через S_X или S . Ее ортогональное дополнение в H_X — эвклидова решетка “трансцендентных циклов” — будет обозначаться через T_X или T . Известно, что $S \cap T = 0$, и, значит, $S \oplus T$ — подгруппа конечного индекса в H . Теорема Лефшетца дает характеристику решетки S в терминах H и отображения периодов τ : если $\tilde{X} = (X, \varphi, \xi)$ — отмеченная поверхность и $\pi = \tau(\tilde{X})$ — комплексная линейная форма на L , определенная с точностью до пропорциональности, то $S = \text{Ker } \varphi^*(\pi)$. Таким образом, решетки S и T определяются периодами отмеченной поверхности $\tilde{X}$.

Если A — приводимое абелево многообразие и C — содержащаяся в нем эллиптическая кривая, то гомоморфизм $A \rightarrow A/C$ определяет расслоение на эллиптические кривые. Это расслоение определяет пучок эллиптических кривых на соответствующей специальной куммеровой поверхности X . Классы a общего слоя такого пучка могут быть описаны их свойствами в решетке S_X . Это и дает критерий того, что X являются специальной куммеровой поверхностью.

Исследованию пучков эллиптических кривых на поверхностях типа $K3$ посвящен § 3, доказательству критерия — § 4.

В § 5 теорема Торелли доказывается для специальных куммеровых поверхностей. Среди периодов таких поверхностей находится нужное нам всюду плотное множество $Z \subset \Omega(l)$ — это доказывается в § 6, что и завершает доказательство теоремы Торелли.

Последние параграфы посвящены приложениям теоремы Торелли. Этой теореме можно придать другую, иногда более удобную форму. Будем называть классы $u \in H_X$, которые алгебраичны и соответствуют эффективным циклам, эффективными. Сверх того, интегрирование регулярной двумерной формы определяет линейную функцию $\pi_X \in \text{Hom}(H_X, \mathbb{C})$. Вторая форма теоремы Торелли такова:

Любой изоморфизм решеток $H_X \rightarrow H_{X'}$, переводящий эффективные классы в эффективные, а форму $\pi_X \in \text{Hom}(H_X, \mathbb{C})$ в форму, пропорциональную $\pi_{X'} \in \text{Hom}(H_{X'}, \mathbb{C})$, индуцируется единственным изоморфизмом поверхностей $X \rightarrow X'$.

Условие, относящееся к формам π , эквивалентно сохранению естественной биградуировки в $H^2(x, \mathbb{C})$.

Эта форма теоремы Торелли дает возможность исследовать в § 7 группу автоморфизмов поверхности типа $K3$. При этом мы пользуемся следующими понятиями. Если E — евклидова решетка и $e \in E$ — такой вектор, что $(e^2) = -2$, то отражение относительно гиперплоскости, ортогональной e , записывается в виде $s_e(x) = x + (x \cdot e)e$ и является автоморфизмом E . Группу, порожденную всеми такими автоморфизмами, мы обозначим через $\Gamma(E)$ и будем коротко называть группой, порожденной отражениями. Она является нормальным делителем группы всех автоморфизмов решетки E , которую мы обозначаем через $G(E)$. В § 7 доказано, что группа автоморфизмов поверхности X типа K “с точностью до конечных групп” изоморфна факторгруппе $G(S_X)/\Gamma(S_X)$. Этот результат дает возможность во многих случаях ответить на вопрос о конечности группы автоморфизмов поверхности.

Последний § 8 посвящен поверхностям X , для которых $\text{rg } S_X = 20$. Это — максимально возможное значение $\text{rg } S_X$ для поверхности X типа $K3$. Такие поверхности мы называем сингулярными. Их классификация очень проста: они однозначно определяются евклидовой решеткой T_X , которая в этом случае является четной, положительно определенной решеткой. Наоборот, каждая такая решетка соответствует некоторой сингулярной поверхности X . Поверхность X тогда и только тогда куммерова, когда $t^2 \equiv 0(4)$ для всех $t \in T_X$. В качестве примера мы находим решетку T_X для поверх-

ности X , заданной уравнением $\sum_{i=0}^3 x^4_i = 0$ в $\mathbb{P}^3$, и доказываем, что эта поверхность куммерова.

Методы этой работы неприменимы к поверхностям типа $K3$ над произвольным полем. Было бы интересно выяснить, не переносятся ли на этот случай результаты § 7 о строении группы автоморфизмов таких поверхностей. С другой стороны, наши методы не применимы и к неалгебраическим поверхностям типа $K3$. Нам кажется правдоподобным, что для них тем не менее сохраняет силу вторая форма теоремы Торелли, формулировка которой по крайней мере не предполагает алгебраичности.

Наконец, для удобства читателя мы приведем сводку основных обозначений и тех свойств поверхностей типа $K3$, которые считаются известными и используются дальше без ссылок.

Для евклидовой решетки E : $G(E)$ — группа автоморфизмов; $\Gamma(E)$ — подгруппа, порожденная отражениями; для $a \in E$, $a^2 = 0$, $E(a) = E'/\mathbb{Z}a$, где E' — подрешетка, натянутая на все векторы $b \in E$, $ab = 0$, $b^2 = -2$; $E(a)$ имеет естественную структуру евклидовой решетки.

Для алгебраической поверхности X : $H_X = H_2(X, \mathbb{Z})$ со структурой евклидовой решетки; S_X — подрешетка алгебраических классов; T_X — ортогональное дополнение к S_X в H_X .

Для поверхности X типа $K3$ неравенство Римана — Роха приобретает вид

$$l(D) + l(-D) \geq \frac{D^2}{2} + 2, \quad (4)$$

а формула для рода неприводимой кривой $C \in X$:

$$p_a(C) = \frac{C^2}{2} + 1, \quad (5)$$

где

$$p_a(C) = g + \delta,$$

g — род нормализации кривой C , а δ — сумма положительных слагаемых, соответствующих особым точкам кривой C . В частности, $\delta = 0$ тогда и только тогда, когда C — гладкая.

Из этих формул следует

Лемма 2. На поверхности X типа $K3$:

1. Для неприводимой кривой $C \in X$ ($C^2 \geq 0$ или $(C^2) = -2$; в последнем случае кривая C — рациональная и гладкая.
2. Если $D \in S_X$, $D^2 = -2$, то или D , или $-D$ эквивалентен эффективному дивизору (может быть, приводимому).
3. Если $D \in S_X$, $D^2 = 0$, то или D , или $-D$ эквивалентен эффективному дивизору. В последнем случае $l(D) \geq 2$.

§ 2. СЕМЕЙСТВА ОТМЕЧЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА $K3$

Цель этого параграфа — построить некоторые достаточно всеобъемлющие аналитические семейства отмеченных поверхностей типа $K3$. Нас будут интересовать семейства $f: \mathcal{X} \rightarrow S$, в которых $\mathcal{X}$ и база S — гладкие аналитические многообразия, отображение f нигде не вырождено, а все слои являются поверхностями типа $K3$.

Семейство $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ называется семейством отмеченных поверхностей, если все его слои $X_s = f^{-1}(s)$, $s \in S$, имеют структуру отмеченной поверхности типа $K3$, $\tilde{X}_s = (X_s, \varphi_s, \xi_s)$, причем для достаточно близких точек s и s' базы естественный гомеоморфизм слоев X_s и $X_{s'}$ переводит φ_s в $\varphi_{s'}$, а ξ_s в $\xi_{s'}$.

Наша цель — построить такое семейство, что любая отмеченная поверхность изоморфна одному из его слоев, семейство эффективно параметризовано и размерность базы равна 19 (согласно [1] это максимальное возможное значение). Существование его устанавливает теорема 1. Идея доказательства очень проста. Сначала мы строим семейство $\mathcal{X}' \rightarrow S'$, состоящее из поверхностей $K3$, вложенных в некоторое проективное пространство $\mathbf{P}^n$, где S' — подмножество соответствующей схемы Гильберта. Потом строим новое семейство $\mathcal{X}'' \rightarrow S''$, в котором слои получаются из слоев $\mathcal{X}'$ за счет введения в них всех возможных структур отмеченной поверхности. Его база S'' является неразветвленным накрытием базы S' . Наконец, искомого семейства $\mathcal{X} \rightarrow S$ получается факторизацией $\mathcal{X}''$ и S'' по группе $PGL(n, \mathbb{C})$ автоморфизмов проективного пространства $\mathbf{P}^n$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных предложений. Пусть X — поверхность типа $K3$, $\mathcal{F}$ — очень обильный пучок и $X \subset \mathbf{P}^n$ — соответствующее ему вложение в проективное пространство. Обозначим через C соответствующий ему класс дивизоров, т.е. класс гиперплоских сечений. Тогда

$$l(C) = n + 1. \quad (1)$$

Согласно критерию Кодайры [13 теорема 2.4], $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ и теорема Римана – Роха показывает, что

$$C^2 = 2n - 2. \quad (2)$$

Наконец, согласно формуле (5) § 1

$$g(C) = n, \quad (3)$$

где $g(C)$ — род кривой C . Из (2) и (3) следует, что C — каноническая кривая.

Множество таких поверхностей X образует семейство над открытым множеством M схемы Гильберта. Напомним, что касательное пространство $\Theta_{M,m}$ в точке $m \in M$ соответствующей поверхности X изоморфно $H^0(X, \check{N}_{P^n/X})$ и точка m является простой, если $H^1(X, \check{N}_{P^n/X}) = 0$. Здесь $N_{P^n/X}$ обозначает нормальное расслоение к X в P^n , а $\check{E}$ — пучок ростков сечений расслоения E (см. [9 стр. 23].

Как всегда, наше семейство определяет характеристический гомоморфизм $\Theta_{M,m} \rightarrow H^1(X, \check{\Theta}_X)$, где Θ_X — касательное расслоение к X . В нашем случае гомоморфизм

$$\chi : H^0(X, \check{N}_{P^n/X}) \rightarrow H^1(X, \check{\Theta}_X)$$

является дифференциалом в точной последовательности когомологий, соответствующей точной последовательности расслоений

$$0 \rightarrow \Theta_X \rightarrow \Theta_{P^n}|_X \rightarrow N_{P^n/X} \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $\Theta_{P^n}|_X$ — ограничение касательного расслоения к P^n на X .

Действие проективной группы $PGL(n)$ на P^n определяет гомоморфизм векторного пространства ее алгебры Ли $\psi : sl(n+1) \rightarrow \Theta_{M,m}$, который можно описать следующим образом. Очевидно, что

$$sl(n+1) = H^0(P^n, \check{\Theta}_{P^n}).$$

Ограничение определяет гомоморфизм

$$\rho : H^0(P^n, \check{\Theta}_{P^n}) \rightarrow H^0(X, (\check{\Theta}_{P^n}|_X)),$$

а точная последовательность (4) — гомоморфизм

$$\tau : H^0(X, (\check{\Theta}_{P^n}|_X)) \rightarrow H^0(X, \check{N}_{P^n/X}).$$

Их композиция и дает искомый гомоморфизм $\psi = \tau \rho$.

Предложение 1. *Схема M является гладкой. Последовательность*

$$0 \rightarrow sl(n+1) \xrightarrow{\psi} \Theta_{M,m} \xrightarrow{\chi} H^1(X, \check{\Theta}_X) \quad (5)$$

точна. Коядро гомоморфизма χ одномерно.

Первое утверждение будет проверено, если мы докажем, что

$$H^1(X, \check{N}_{P^n/X}) = 0.$$

Так как $H^0(X, \check{\Theta}_X) = H^2(X, \check{\Theta}_X) = 0$ (см. [1, стр. 181]), то последовательность (4) приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow H^0(X, (\Theta_{\mathbf{P}^n}|_X)) \rightarrow H^0(X, \check{N}_{\mathbf{P}^n}/X) \rightarrow H^1(\check{\Theta}_X) \rightarrow \rightarrow H^1(X, (\check{\Theta}_{\mathbf{P}^n}/X)) \rightarrow H^1(X, \check{N}_{\mathbf{P}^n}/X) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Воспользуемся стандартной точной последовательностью

$$0 \rightarrow O_X \rightarrow O_X(1)^{n+1} \rightarrow \check{\Theta}_{\mathbf{P}^n}/X \rightarrow 0$$

и соответствующей точной последовательностью когомологий. Так как $H^1(X, O_X) = 0$, $H^1(X, O_X(1)) = 0$ (по критерию Кодаиры) и $H^2(X, O_X(1)) = 0$ (по теореме двойственности), то мы получаем две точные последовательности:

$$0 \rightarrow H^0(X; O_X) \rightarrow H^0(X, O_X(1)^{n+1}) \rightarrow H^0(X, (\check{\Theta}_{\mathbf{P}^n}|_X)) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow H^1(X, (\Theta_{\mathbf{P}^n}|_X)) \rightarrow H^2(X, O) \rightarrow 0.$$

Аналогичная последовательность существует на всем пространстве $\mathbf{P}^n$. Ограничение на X приводит к коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}^n, O_{\mathbf{P}^n}) & \rightarrow & H^0(\mathbf{P}^n, O_{\mathbf{P}^n}(1)^{n+1}) & \rightarrow & H^0(\mathbf{P}^n, \check{\Theta}_{\mathbf{P}^n}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow H^0(X, O_X) & \rightarrow & H^0(X, O_X(1)^{n+1}) & \rightarrow & H^0(X, (\Theta_{\mathbf{P}^n}|_X)) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Так как два первых (считая слева) вертикальных гомоморфизма являются изоморфными, то и третий гомоморфизм является изоморфизмом. Это можно выразить в равенстве

$$H^0(X, (\Theta_{\mathbf{P}^n}|_X)) = sl(n+1).$$

Окончательно последовательность (6) приобретает вид:

$$0 \rightarrow sl(n+1) \xrightarrow{\psi} H^0(X, \check{N}_{\mathbf{P}^n}/X) \xrightarrow{\chi} H^1(X, \check{\Theta}_X) \xrightarrow{\varphi} H^2(X, O_X) \rightarrow \rightarrow H^1(X, \check{N}_{\mathbf{P}^n}/X) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Левая часть точной последовательности (7) совпадает с последовательностью (5).

Как показано в [1, гл. IX], поляризация поверхности X задает в пространстве $H^1(X, \check{\Theta}_X)$ (которое изоморфно касательному пространству к локальному многообразию модулей) гиперплоскость, в которой содержится $\chi H^0(X, \check{N}_{\mathbf{P}^n}/X)$. Поэтому гомоморфизм φ ненулевой, а так как пространство $H^2(X, O_X)$ одномерно, то он эпиморфен. Отсюда следует, что $H^1(X, \check{N}_{\mathbf{P}^n}/X) = 0$ и коядро χ одномерно. Предложение доказано.

Предложение 2. Автоморфизм поверхности X типа $K3$, который тривиально действует на группе $H^2(X, \mathbb{Z})$, является единичным.

Аutomорфизмы, тривиально действующие на $H^2(X, \mathbb{Z})$, в частности сохраняют поляризацию поверхности X и, значит, индуцируются проективными преобразованиями при соответствующем вложении X в проективное пространство. Поэтому они образуют алгебраическую группу. Алгебра Ли этой группы совпадает с $H^0(X, \Theta_X)$ и, следовательно, нулевая. Таким образом, интересующие нас автоморфизмы образуют конечную группу и, в частности, каждый такой автоморфизм имеет конечный порядок. Мы можем ограничиться рассмотрением автоморфизма простого порядка p .

Пусть g — такой автоморфизм поверхности X и $g^p = 1$, $g \neq 1$. Из того, что g имеет конечный порядок, следует, что для любой его неподвижной точки $x \in X$ автоморфизм $d_x g$ касательного пространства $\Theta_{X,x}$ отличен от 1. Это легко проверить, рассмотрев действие g на кольцо степенных рядов от локальных параметров в окрестности неподвижной точки. Так как g тривиально действует на $H^2(X, \mathbb{Z})$ то, в частности, он не меняет периодов дифференциальной формы $\omega \in H^0(X, \Omega^2)$; а поэтому и саму форму. Ввиду этого, для любой неподвижной точки $x \in X$ автоморфизма g в касательном пространстве $\Theta_{X,x}$ автоморфизм $d_x g$ имеет определитель 1. В частности, отсюда следует, что g имеет только изолированные неподвижные точки: кривая неподвижных точек определила бы одномерное подпространство в $\Theta_{X,x}$, инвариантное относительно $d_x g$ для любой точки x такой кривой. Так как $\det d_x g = 1$ и $d_x g$ приводится к диагональному виду, то отсюда вытекало бы, что $d_x g = 1$, а это, как мы видели, невозможно.

Из того, что собственные значения $d_x g$ отличны от 1, следует, что индекс каждой неподвижной точки равен 1. Так как g тривиально действует на $H^2(X, \mathbb{Z})$, то, по теореме Лефшетца, число неподвижных точек равно эйлеровой характеристике поверхности X , т.е. 24.

Обозначим через G циклическую группу, порожденную автоморфизмом g , и положим $Y = X/G$. Так как g сохраняет регулярную на x дифференциальную форму ω , то ω можно рассматривать как рациональную форму на Y . Она будет регулярна во всех особых точках этой поверхности. Поверхность Y имеет 24 особые точки. Выясним их строение. В окрестности каждой особой точки автоморфизм g может быть задан линейным преобразованием с матрицей $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon^p = 1$, $\varepsilon \neq 1$. Если x и y — локальные параметры неподвижной точки, то множество инвариантов порождено функциями $u = x^p$, $v = y^p$ и $w = xy$. Поэтому окрестность особой

точки на X/G локально задается уравнением $u \cdot v = w^p$. Эта особенность обозначается в теории особых точек поверхностей через A_{p+1} . Она является двойной рациональной особой точкой.

Обозначим через $f : X' \rightarrow Y$ минимальное разрешение особых точек поверхности Y . Из непосредственного их разрешения σ -процессами или из основного свойства двойных рациональных точек следует, что форма ω регулярна на X' и нигде не обращается в 0. Отсюда следует, что канонический класс поверхности X' равен 0. Она, как легко видеть, односвязна и поэтому является поверхностью типа КЗ. Из разрешения 24-х особых точек поверхности Y на X' происходят 24 алгебраических цикла, которые попарно не пересекаются и поэтому линейно независимы в $H^2(X', \mathbb{Z})$. Но это противоречит тому, что ранг группы $S_{X'}$ не больше 20. Это противоречие доказывает предложение.

При доказательстве нижеследующей теоремы 1 будет использована следующая простая конструкция. Пусть $f : \mathcal{X}' \rightarrow S'$ — произвольное семейство поверхностей типа КЗ и в нем выделен класс гомологий ξ , который на каждом слое X'_s индуцирует алгебраический очень обильный класс $\xi_{S'} \in H_{X'_s}$, определяющий вложение в $\mathbb{P}^n$.

Рассмотрим множество S'_0 тех точек $s' \in S'$, для которых существует изоморфизм решеток $H_{X'_{s'}}$ и L , переводящий класс $\xi_{S'}$ в l . Как будет доказано в Приложении к § 5, для этого достаточно, чтобы общий наибольший делитель координат был одинаковым у $\xi_{S'}$ и l и чтобы $\xi_{S'}^2 = l^2$. Поэтому S'_0 — связная компонента базы S' . Мы можем построить семейство $\mathcal{X}'' \rightarrow S''$. Его база S'' является неразветвленным накрытием $\nu : S'' \rightarrow S'_0$, причем слой $\nu^{-1}(s')$ отождествляется с множеством изоморфизмов евклидовых решеток $H_{X'_{s'}}$ и L , переводящих класс $\xi_{S'}$ в l . Это накрытие является главным накрытием со структурной группой $\mathfrak{G}$ — группой автоморфизмов решетки L , сохраняющих вектор l . Накрытие ν определяется действием $\pi_1(S'_0)$ на $H_{X_{S'}}$ и, следовательно, на множество изоморфизмов $H_{X'_{s'}}$ в L . Семейство $\mathcal{X}'' \rightarrow S''$ является обратным образом семейства $\mathcal{X}' \rightarrow S'$ на накрытии $\nu : S'' \rightarrow S'_0$.

Теорема 1. Для любого натурального числа n существует семейство отмеченных поверхностей $\mathcal{X} \rightarrow S$, которое обладает следующими свойствами: а) оно эффективно параметризовано; б) для любой отмеченной поверхности X типа КЗ, для которой класс ξ определяет вложение в проективное пространство $\mathbb{P}^n$, существует изоморфный ей (как отмеченной поверхности) слой X_s семейства $\mathcal{X}$; в) база имеет размерность 19.

Рассмотрим семейство $f' : \mathcal{X}' \rightarrow S'$, где S' — схема Гильбер-

та тех поверхностей типа $K3$, $X \subset \mathbb{P}^n$, для которых гиперплоские сечения образуют полную линейную систему. В его слоях отмечен класс когомологий $\xi_{s'} \in H^2_{X'}$, соответствующий гиперплоскому сечению. Пусть $f'' : \mathcal{X}'' \rightarrow S''$ — соответствующее семейство отмеченных поверхностей, конструкция которого описана непосредственно перед формулировкой теоремы. Проективная группа $G = PL(n, \mathbb{C})$ через ее действие в $\mathbb{P}^n$ действует в $\mathcal{X}'$ и S'_0 , а значит, и в $\mathcal{X}''$ и S'' , причем это действие перестановочно с f' и f'' . Мы определим $\mathcal{X}$ и S как факторы $\mathcal{X}''/G$ и S''/G , а для этого должны прежде всего доказать существование этих факторов.

Если произвольная комплексная группа Ли G действует на аналитическом многообразии M , то, как показал Пэли [20], фактор M/G существует в категории комплексных пространств, если отображение

$$\begin{aligned} \psi : G \times M &\rightarrow M \times M, \\ \psi(g, m) &= (gm, m) \end{aligned} \quad (8)$$

является собственным.

Этот признак мы и проверим для наших семейств. То, что отображение (8) является собственным для многообразий $\mathcal{X}''$ и S'' (и группы $G = PL(n)$), — очевидное формальное следствие аналогичного факта для многообразий $\mathcal{X}'$ и S' . В этом случае мы имеем дело с алгебраическими многообразиями и алгебраическим действием группы $PL(n)$. Поэтому ψ является морфизмом в категории алгебраических многообразий. Чтобы доказать, что ψ — собственный морфизм, можно воспользоваться следующим признаком, связанным с поведением дискретно-нормированных колец ([8, гл. II, § 7]). Пусть $f : X \rightarrow Y$ — морфизм алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем k , $U = \text{Spec } O$, O — дискретно-нормированное кольцо с полем классов вычетов k , $g : U \rightarrow X$ — рациональный морфизм и $h : U \rightarrow Y$ — морфизм, причем $fg = h$. Если для всех таких g и h существует морфизм $g' : U \rightarrow X$, совпадающий с g в общей точке U , то морфизм f является собственным.

То, что этот признак выполняется в нашей ситуации, фактически устанавливает теорема 2 работы [15] Мацусаки и Мамфорда. Она утверждает, что если V и W — гладкие поляризованные многообразия над $\text{Spec } O$, не являющиеся линейчатыми, и их специализации V_0, W_0 над замкнутой точкой $\text{Spec } O$ — тоже гладкие поляризованные многообразия, то специализация любого изоморфизма $\varphi : V \rightarrow W$ является изоморфизмом $\varphi_0 : V_0 \rightarrow W_0$.

Легко видеть, что задание морфизма

$$h : \text{Spec } O \rightarrow S' \times S'$$

и рационального морфизма

$$g: \operatorname{Spec} O \rightarrow G \times S', \quad G = PL(n),$$

удовлетворяющих сформулированному выше критерию, определяют многообразия V и W над $\operatorname{Spec} O$ и их изоморфизм φ , к которому применима теорема Мацусаки–Мамфорда. С другой стороны, g задает рациональный морфизм $\operatorname{Spec} O$ в G и, значит, его морфизм g' в проективное замыкание группы G . По теореме Мацусаки–Мамфорда, специализация φ есть изоморфизм, т.е. g' переводит замкнутую точку $\operatorname{Spec} O$ в точку G . Это означает, что g' — морфизм $\operatorname{Spec} O$ в G , т.е. признак собственности морфизма φ выполнен. Аналогично обстоит дело с морфизмом $G \times X' \rightarrow X'$.

Таким образом, доказано, что факторы $\mathcal{X}''/G = \mathcal{X}$ и $S''/G = S$ существуют как комплексные пространства. Очевидно, что они определяют семейство $f: \mathcal{X} \rightarrow S$ отмеченных поверхностей. Согласно предложению 2, G действует на S'' и $\mathcal{X}'$ без неподвижных точек. Поэтому $\mathcal{X}$ и S' являются многообразиями.

Докажем, что семейство f эффективно параметризовано. Это означает, что для любой точки $s \in S$ естественное отображение $\Theta_{S,s} \rightarrow H^1(X_S, \Theta_{X_S})$ является вложением. Очевидно, что

$$\Theta_{S,s} = \Theta_{S',s'}/sl(n+1),$$

и поэтому наше утверждение следует из предложения 1. Утверждение б) теоремы 1 выполнено по самому определению семейств $\mathcal{X}'$, $\mathcal{X}''$ и $\mathcal{X}$.

Наконец, пространство $\Theta_{S,s}$ имеет размерность 19 согласно последнему утверждению предложения 1, так как размерность $H^1(X, \Theta_X)$ равна 20 [1, стр. 181]. Теорема доказана.

Как говорилось в § 1, сопоставление поверхности X_s у периодов, т.е. точки $z \in \Omega(I)$, определяет отображение $\tau: S \rightarrow \Omega(I)$.

Следствие теоремы 1. Отображение τ голоморфно и является локальным изоморфизмом аналитических многообразий S и $\Omega(I)$.

Так как семейство $\mathcal{X}$ эффективно параметризовано, то теорема 2 из [1, гл. IX], гарантирует, что отображение τ голоморфно и является локальным вложением. Так как размерности многообразий S и $\Omega(I)$ совпадают (равны 19), то τ является локальным изоморфизмом.

§ 3. Пучки эллиптических кривых на поверхностях типа $K3$

Этот и следующий параграф относятся к поверхностям типа $K3$ над произвольным алгебраическим замкнутым полем, характеристику которого мы будем предполагать отличной от 2 и 3. В этом

случае мы определим поверхности типа $K3$ условием обращения в 0 канонического класса и группы $H^1(X, O)$. При таком определении сохраняются формулы (4) и (5) § 1 и лемма 2 § 1. Группу S_X определим как группу классов дивизоров относительно алгебраической эквивалентности. Для поверхностей типа $K3$ $S_X = \text{Pic } X$. Согласно теореме Нерона–Севери эта группа имеет конечное число образующих. В случае поверхностей типа $K3$ она не имеет кручения — это доказывается дословно так же, как в [1, стр. 179], доказано, что группа $H^2(X, \mathbb{Z})$ не имеет кручения для поверхности X типа $K3$, определенной над $\mathbb{C}$. Таким образом, S_X — эвклидова решетка (относительно индекса пересечения).

Под эллиптической кривой мы будем понимать гладкую кривую рода 1, под пучком эллиптических кривых — такой морфизм $f: X \rightarrow B$ на гладкую кривую B , что слой $f^{-1}(b)$ — эллиптическая кривая для почти всех точек $b \in B$.

Лемма 1. Если C — эллиптическая кривая на поверхности типа $K3$, то $C^2 = 0$ и $l(C) = 2$.

Первое утверждение следует из формулы (5) § 1. Докажем второе. Пусть $\mathcal{F}_C$ — пучок, соответствующий кривой C . В точной последовательности

$$0 \rightarrow O \rightarrow \mathcal{F}_C \rightarrow \mathcal{F}_C|_C \rightarrow 0 \quad (1)$$

$\mathcal{F}_C|_C = O_C$, так как $C^2 = 0$. Точная последовательность когомологий, соответствующая точной последовательности (1), принимает вид

$$0 \rightarrow k \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}_C) \rightarrow k \rightarrow 0$$

по определению поверхностей типа $K3$. Отсюда следует, что $l(C) = 2$.

Теорема 1. Если эффективный дивизор $D > 0$ на поверхности X типа $K3$ удовлетворяет условиям

$$D^2 = 0, \quad DE > 0$$

для любого эффективного дивизора $E > 0$, то в линейной системе $|D|$ содержится дивизор вида mC , где $m \geq 0$, а C — эллиптическая кривая.

Доказательство. Докажем, что в системе $|D|$ имеется дивизор, у которого только одна компонента. Пусть

$$D' = \sum_{i=1}^r k_i C_i, \quad k_i > 0, \quad r \geq 2, \quad (2)$$

где кривые C_i попарно различны и неприводимы. Так как $DC_i \geq 0$, а $D^2 = 0$, то $DC_i = 0$, а так как $C_i C_j \geq 0$ при $i \neq j$, то $C_i^2 \leq 0$. Докажем, что хоть для одного дивизора $D' \in |D|$ и для одной кривой C_i в (2) $C_i^2 = 0$. Для этого фиксируем некоторое проективное погружение поверхности X и обозначим через H соответствующее гиперплоское сечение. Тогда

$$D \cdot H = \sum k_i C_i \cdot H$$

и поэтому числа k_i и $C_i \cdot H$ ограничены сверху для всех разложений (2) дивизоров $D' \in |D|$. Число $C_i \cdot H$ равно степени кривой C_i в рассматриваемом проективном погружении. Кривых $C_i \subset X$ заданной степени с $C_i^2 < 0$ существует только конечное число. Поэтому дивизоров (2), в которых все $C_i^2 < 0$, существует тоже только конечное число. Система же $|D|$ бесконечна согласно лемме 2 § 1.

Мы видим, что существуют такие дивизоры $D' \in |D|$, что

$$D' = mC + \sum k_i C_i = mC + D_0$$

$$C^2 = 0. \quad (3)$$

Заметим, что тогда $D_0^2 = 0$. Действительно, так как $D^2 = 0$, $D \cdot D_0 \geq 0$, то

$$2mC \cdot D_0 + D_0^2 = 0, \quad mC \cdot D_0 + D_0^2 \geq 0,$$

а так как C и D_0 не имеют общих компонент, то и $C \cdot D_0 \geq 0$. Отсюда следует, что $C \cdot D_0 = 0$, а значит, и $D_0^2 = 0$. Из всех дивизоров D' , обладающих разложением (3), выберем тот, для которого число $D_0 \cdot H$ наименьшее. Докажем, что для него $D_0 = 0$.

Действительно, если $D_0 \neq 0$, то $l(D_0) \geq 2$. Поэтому в системе $|D_0|$ содержится дивизор D'_0 , пересекающийся с кривой C . Он должен содержать ее в качестве компоненты:

$$D_0 \sim D'_0 = l \cdot C + \bar{D}_0.$$

$$D' \sim D'' = (m+l)C + \bar{D}_0$$

и

$$H \cdot \bar{D}_0 = H \cdot D'_0 - l \cdot C \cdot H < H \cdot D'_0.$$

Мы доказали, следовательно, что существует дивизор $mC \in D$, где C — неприводимая кривая.

По-прежнему $C^2 = 0$ и, значит, $l(C) \geq 2$. Если характеристика основного поля равна 0, то теорема Бертини гарантирует, что в линейной системе $|C|$ содержится гладкие кривые. Если характеристика отлична от 0, то это может быть не так, но из формулы Тэйта [18] следует, что в нашем случае такая патология возможна только при характеристике 2 или 3. Во всех остальных случаях мы нашли гладкую неприводимую кривую $C \in X$ с $C^2 = 0$. Согласно формуле (5) § 1 это — эллиптическая кривая.

Следствие 1. Если C — эллиптическая кривая, то класс $c \in S_X$, содержащий C , примитивен (т.е. $c \neq mc'$, $c' \in S_X$, $m \neq \pm 1$).

Действительно, пусть $c = mc'$, причем можно считать, что $m > 0$. Тогда c' удовлетворяет условиям теоремы 1. Значит, существует такая эллиптическая кривая C' что $C \sim mm'C'$. По лемме 1 $l(C) = l(C') = 2$. Поэтому если $mm' > 1$, то все кривые пучка $|C|$ должны быть кратными. Это однако не так для самой C .

Следствие 2. Пучок эллиптических кривых на поверхности типа $K3$ не имеет кратных компонент.

Это следствие очевидным образом вытекает из следствия 1.

Заметим, хотя дальше это нам и не понадобится, что критерий теоремы 1 может быть сформулирован только в терминах эвклидовой решетки S_X . Именно, из следствия теоремы 1, которое будет доказано в § 6, вытекает

Следствие 3. На поверхности X типа $K3$ тогда и только тогда существует пучок эллиптических кривых, когда существует элемент $x \in S_X$, $x \neq 0$, для которого $x^2 = 0$.

Согласно теореме 1 из § 6, существует такой автоморфизм $\varphi \in \Gamma(S_X)$, что $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям предложения. Поэтому класс $\varphi(x)$ содержит дивизор mC , где C — эллиптическая кривая. Согласно лемме 1, $l(C) = 2$ и, значит, система $|C|$ определяет рациональное отображение $f: X \rightarrow \mathbf{P}^n$. Оно будет морфизмом, так как $C^2 = 0$ и поэтому система не имеет базисных точек. Морфизм f и определяет пучок эллиптических кривых, содержащих C .

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КУММЕРОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Дальше мы будем пользоваться следующими обозначениями. В четырехмерной решетке E с базисом u_1, u_2, u_3, u_4 , $u_i u_j = \delta_{ij}$, рассмотрим подрешетку E' , состоящую из векторов $\sum_{i=1}^4 x_i u_i$, $x_i \in \mathbf{Z}$, для которых $\sum_{i=1}^4 x_i \equiv 0 \pmod{2}$. Легко проверить, что эта решетка

является четной. Решетку, в которой скалярное произведение знаком отличается от произведения в E' , мы будем обозначить через G_4 .

В этом параграфе мы будем, как и в предыдущем, предполагать, что основное поле k алгебраически замкнуто и имеет произвольную характеристику, отличную от 2 и 3.

Теорема 1. Поверхность X типа $K3$ тогда и только тогда является специальной куммеровой поверхностью, когда в S_X содержится такой элемент $z = 0$, что $z^2 = 0$, класс z содержит неприводимый дивизор и

$$S_X(z) = G_4^4 \quad (1)$$

— прямая сумма четырех эвклидовых решеток G_4 .

(Определение решетки $S_X(z)$ см. в конце § 1.)

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, укажем на простую интерпретацию группы $S_X(z)$ в нашем случае. Пусть класс дивизоров $z \in S_X, z \neq 0$, содержит эллиптическую кривую C , которая является одним из слоев пучка $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. Если $y \in S_X, z \cdot y = 0, y^2 = -2$, то, заменив в случае необходимости y на $-y$, мы можем найти в классе y эффективный дивизор $D, C \cdot D = 0, D^2 = -2$. Если бы дивизор D не содержался в слоях пучка f , то он имел бы изолированные точки пересечения с некоторым его слоем, что противоречит условию $C \cdot D = 0$. Таким образом, D есть линейная комбинация компонент слоев пучка f . Наоборот, если слой D пучка f имеет более одной компоненты,

$$D = \sum_{i=1}^r n_i L_i, \quad r \geq 2,$$

то $D \cdot L_i = 0$ (можно заменить D другим эквивалентным ему слоем, не пересекающимся с L_i). Из теоремы связности Зарисского следует, что слой D связан. Поэтому $L_i \cdot L_j > 0$ хотя для одного $j \neq i$. Из этого следует, что $L_i^2 < 0$ и, значит, $L_i^2 = -2$.

Таким образом, в случае, когда класс z соответствует пучку эллиптических кривых f , эвклидова решетка $S_X(z)$ совпадает с фактором решетки, порожденной компонентами слоев пучка f по циклической подрешетке, порожденной слоем.

Докажем необходимость условия теоремы. Пусть A — приводимое двумерное абелево многообразие; $\varphi : A \rightarrow B$ — его гомоморфизм на эллиптическую кривую B , g — группа автоморфизмов A , состоящая из единичного автоморфизма и отражения $x \rightarrow -x$, X — куммерова поверхность, которая получается минимальным разрешением особенностей поверхности A/g . Слои $C_b = \varphi^{-1}(b)$ являются эллиптическими кривыми.

Группу автоморфизмов B , которая также состоит из единицы и отражения, мы также будем обозначать через g .

Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A/g & \longleftarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow f \\ B & \longrightarrow & B/g & \equiv & \mathbf{P}^1 \end{array}$$

Обозначим через a общий слой пучка $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ и докажем, что для него выполнено соотношение (1). Согласно соображениям, изложенным после формулировки теоремы, для этого надо определить вырожденные слои пучка f .

Все слои C_b отображения φ являются эллиптическими кривыми. Если $b \in B$, $2b \neq 0$, то C_b отображается изоморфно в A/g и его образ не проходит через особые точки. Поэтому и его образ в X является невырожденным слоем пучка f . Если же $2b = 0$, то C_b инвариантно относительно g и $C_b/g \cong \mathbf{P}^1$, а отображение $C_b \rightarrow C_b/g$ двулистно. Образ C_b в A/g имеет вид $2L$, где L — неприводимый дивизор Вейля. Дивизор L проходит через 4 особые точки поверхности A/g . Если L_1, L_2, L_3, L_4 — их прообразы в X , то слой $f^{-1}(b)$ имеет, как легко проверить, вид $2L + L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. При этом L, L_1, L_2, L_3, L_4 изоморфны $\mathbf{P}^1$, L пересекается трансверсально с L_1, L_2, L_3, L_4 , а они друг с другом не пересекаются. Если мы обозначим классы дивизоров L, L_1, L_2, L_3, L_4 через f, e_1, e_2, e_3, e_4 , то в S_X

$$(f^2) = (e_i^2) = -2, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$(e_i e_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_i \cdot f = 1,$$

$$a = 2f + e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

Факторгруппа этой решетки по $\mathbf{Z} \cdot a$ изоморфна решетке G_4 . Изоморфизм задается формулами:

$$f \rightarrow -u_1 - u_3,$$

$$e_1 \rightarrow u_1 + u_2,$$

$$e_2 \rightarrow u_1 - u_2,$$

$$e_3 \rightarrow u_3 + u_4,$$

$$e_4 \rightarrow u_3 - u_4.$$

Так как пучок f имеет 4 вырожденных слоя, соответствующих четырем точкам $b \in B$, $2b = 0$, то решетка $S_X(a)$ изоморфна G_4^4 .

Докажем достаточность условий теоремы 1. Ввиду теоремы 1 § 3 класс z , который удовлетворяет условиям теоремы 1, содержит эллиптическую кривую C , являющуюся слоем пучка $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$.

Наша ближайшая цель — определить вырожденные слои пучка f . Обозначим эти слои через $D_1, \dots, D_r$. Согласно теореме, доказанной Зарисским (см. [1, гл. VII]), неприводимые компоненты C_{ij} слоя

$$D_i = \sum_j n_{ij} C_{ij}$$

связаны в группе $S_X/\mathbb{Z} \cdot z$ единственным соотношением

$$D_i = \sum_j n_{ij} C_{ij} = 0.$$

Компоненты разных слоев ортогональны друг другу. Как мы видели, группа $S_X(z)$ совпадает с группой, порожденной в S_X элементами C_{ij} факторизованной по группе $\mathbb{Z} \cdot z$. Поэтому

$$S_X(z) = H_1 \oplus \dots \oplus H_r,$$

где H_i получается из эвклидовой решетки, порожденной компонентами C_{ij} слоя D_i факторизацией по $\mathbb{Z} \cdot D_i$. Если число компонент слоя D_i равно n_i , то ранг H_i есть $n_i - 1$. Условие теоремы 1 означает, что

$$H_1 \oplus \dots \oplus H_r = G_4 \oplus G_4 \oplus G_4 \oplus G_4 \quad (2)$$

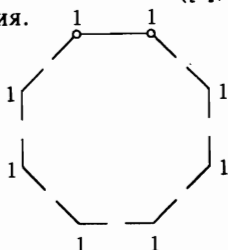
и, в частности, $\sum_1^r (n_i - 1) = 16$.

Как доказал Эйхлер (более простое доказательство см. в [14]), положительно определенная решетка однозначно разлагается на неразложимые ортогональные слагаемые. Очевидно, что то же верно и для отрицательно определенных решеток. Решетка G_4 неразложима. Действительно, она четна и имеет определитель 4, а четных решеток определителя 1 или 2 рангов 2 и 3 не существует. Таким образом, из (2) следует, что решетки H_i , соответствующие приводимым слоям, являются суммами решеток G_4 . В частности, $n_i = 5, 9$ или 17 .

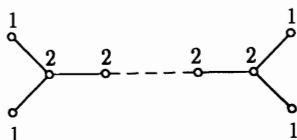
Теперь надо напомнить классификацию приводимых слоев, полученную Кодайрой (см. [12] с точностью до обозначений). При этом

мы опустим те слои, для которых $n_i < 5$. У остальных компоненты изоморфны $\mathbf{P}^1$ и пересекаются трансверсально. Слои изображаются схемами, в которых точки изображают компоненты, а если компоненты пересекаются, то соответствующие точки соединены отрезком. Числа показывают кратности, с которыми соответствующие компоненты входят в слой.

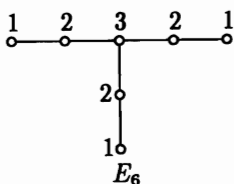
Все получающиеся схемы являются так называемыми расширенными схемами Дынкина ([4], стр. 199), откуда и заимствованы их обозначения.



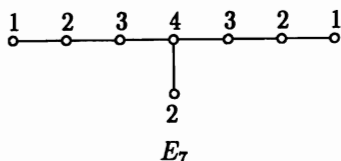
A_l ; число вершин $(l+1)$



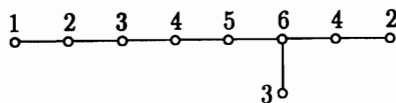
D_l ; число вершин $(l+1)$



E_6



E_7



E_8

Из этой классификации легко вывести, что существует единственный слой, соответствующая которому решетка H изоморфна прямой сумме не более чем четырех решеток G_4 — это слой D_4 . Если число n компонент слоя равно 5, то слой имеет вид A_4 или D_4 . Но решетка H , соответствующая слою A_4 , имеет, как легко проверить, определитель 5 и поэтому не изоморфна G_4 . Если $n = 9$, то слой имеет вид A_8 , D_8 или E_8 . Ни для одного из них решетка H не изоморфна $G_4 \oplus G_4$. Это легко вывести из подсчета числа векторов длины -2 . В G_4 их число

равно 24, а в $G_4 \oplus G_4$ — 48. С другой стороны, если в схеме, соот-

ветствующей $\bigcirc - \bigcirc \dots \bigcirc - \bigcirc$ слою, содержится цепочка $\bigcirc - \bigcirc \dots \bigcirc - \bigcirc$ с компонентами $C_1, \dots, C_k$, то циклы $\pm(C_i + C_{i+1} + \dots + C_{i+j})$ имеют квадрат -2 . Их число равно $k(k+1)/2$. Отсюда легко вывести, что в решетках, соответствующих слоям A_8, D_8 и E_8 , число векторов с квадратом -2 больше, чем 48. Аналогично рассматривается случай $n = 17$.

Мы видим, что пучок f имеет ровно 4 приводимых слоя типа G_4 . Докажем, что он не имеет других вырожденных слоев. Для этого мы воспользуемся формулой ([10])

$$\chi = \sum_{i=1}^r \chi_i, \quad (3)$$

где χ — эйлерова характеристика поверхности X , а χ_i — вырожденного слоя D_i . Из теоремы Римана–Роха

$$\frac{K^2 + \chi}{12} = p_a(X)$$

следует, ввиду $K = 0$, $p_0(X) = 2$, что $\chi = 24$. Слой D_4 имеет эйлерову характеристику 6, а так как таких слоев существует 4, то из формулы (3) вытекает, что для остальных слоев $\chi_i = 0$. Это возможно только для кратного эллиптического слоя. Мы показали, что такого слоя нет.

Таким образом, мы построили на X пучок f с базой $\mathbf{P}^1$, имеющий 4 вырожденных слоя типа D_4 и не имеющий других вырожденных слоев. Из анализа типов вырожденных слоев ([1, стр. 146]) следует, что слой D_4 (в [1] он обозначен через B_6) соответствует потенциально хорошей редукции. Точнее, если $\pi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ — любое двулистное накрытие, разветвленное в точке x , над которой лежит этот слой, то нормализация поверхности $X \times_{\mathbf{P}^1} C$ имеет над точкой $\pi^{-1}(x)$ невырожденный слой.

Пусть u_1, u_2, u_3, u_4 — точки на $\mathbf{P}^1$, над которыми лежат вырожденные слои, $\pi : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ — двулистное накрытие, разветвленное в этих точках. Тогда C — эллиптическая кривая и можно так ввести в C групповой закон, что π совпадает с факторизацией C по группе второго порядка, порожденной автоморфизмом $s \rightarrow -s$. Согласно сказанному выше, поверхность A — гладкая минимальная модель расслоения $X \times_{\mathbf{P}^1} C \rightarrow C$ — определяет пучок эллиптических кривых $\psi : A \rightarrow C$ без вырожденных слоев. Автоморфизм θ двулистного накрытия $C \rightarrow \mathbf{P}^1$ продолжается на A . Порожденную им группу обозначим через g . Очевидно, что X бирационально изоморфно A/g . Регулярная двумерная дифференциальная форма на

X дает на A регулярную форму, отличную от 0, так как характеристика поля $\neq 2$.

Таким образом, теорема 1 сведена к следующему утверждению.

Лемма. Пусть C — эллиптическая кривая, A — гладкая поверхность, для которой $p_g(A) \neq 0$, и $\psi : A \rightarrow C$ — морфизм, все слои которого — эллиптические кривые. Тогда A — абелево многообразие.

Пусть, сверх того, на A действует такой автоморфизм второго порядка θ , что $\psi\theta = -\psi$ и для многообразия $X' = A/g$, $g = (1, \theta)$, $p_g(X') \neq 0$. Тогда на A можно так ввести групповой закон, что θ примет вид $\theta x = -x$.

Как доказано в [19] (стр. 342), пучок ψ становится тривиальным после подъема на некоторое неразветвленное накрытие $h : C' \rightarrow C$, которое, конечно, является гомоморфизмом эллиптических кривых. Поэтому

$$A = (B \times C')/\Gamma,$$

где Γ — конечная группа автоморфизмов абелева многообразия $B \times C'$, причем все автоморфизмы $\gamma \in \Gamma$ имеют вид

$$\gamma(b, c') = (\varphi_\gamma(b), c' + e_\gamma),$$

где φ_γ — автоморфизм кривой B (быть может, не сохраняющий структуру группы), $e_\gamma \in \text{Ker } h$. Автоморфизм φ_γ имеет вид

$$\varphi_\gamma(b) = \alpha_\gamma(b) - f_\gamma,$$

где α_γ — автоморфизм B как абелева многообразия, а $f_\gamma \in B$. Если $\alpha_\gamma \neq 1$, то $\varphi_\gamma^*(\omega') = \lambda\omega'$, $\lambda \neq 1$, для регулярной формы ω' на B . Поэтому если ω — двумерная регулярная дифференциальная форма на $B \times C'$, то

$$\gamma^*\omega = \lambda\omega \neq \omega.$$

Так как $H^0(A, \Omega^2) = H^0(B \times C', \Omega^2)^\Gamma$, то при $\alpha_\gamma \neq 1$ $p_g(A) = 0$ в противоречии с условием леммы. Поэтому $\alpha_\gamma = 1$, $\varphi_\gamma(b) = b + f_\gamma$ и a есть факторгруппа абелева многообразия $B \times C'$ по конечной подгруппе, и, значит, — тоже абелево многообразие.

Нам остается выяснить, как действует на A автоморфизм второго порядка θ . Мы знаем, что он согласован с гомоморфизмом $A \rightarrow C$ и индуцирует на C автоморфизм $c \rightarrow -c$. На изогенном A абелевом многообразии $B \times C'$ ему соответствует аналогичный автоморфизм θ' , который имеет вид

$$\theta'(b, c') = (\alpha(b) + \xi(c') + b_0, -c'),$$

где α — автоморфизм группы b , ξ — гомоморфизм C' в B , $b_0 \in B$. Так как $(\theta')^2 = 1$, то

$$\alpha^2 = 1, \quad (1 - \alpha)\xi = 0.$$

Из того, что на A/g существует регулярная двумерная дифференциальная форма, следует, что θ' не меняет регулярной двумерной формы на $B \times C'$. Это возможно только при $\alpha = -1$. Тогда $2\xi = 0$, т.е. $\xi = 0$. Наконец, за счет другого выбора нулевого элемента в B можно добиться того, что $b_0 = 0$. Мы получаем, что $\theta' = -1$, а значит, и $\theta = -1$. Лемма, а следовательно, и теорема 1 доказаны.

Заметим, что критерий теоремы 1 может быть сформулирован только в терминах решетки S_X : можно не требовать, чтобы класс z содержал неприводимую кривую. Это вытекает из следствия 3 § 3.

§ 5. ТЕОРЕМА ТОРЕЛЛИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ КУММЕРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В этом параграфе мы докажем теорему Торелли для специальных куммеровых поверхностей. Такая поверхность X получается из абелева многообразия A , в котором задано расслоение на эллиптические кривые $A \rightarrow C$, где C — эллиптическая кривая. Тем самым на X , как мы видели в § 4, тоже определяется пучок эллиптических кривых. Такой пучок мы будем называть куммеровым, а класс $a \in S_X$, определяемый его слоями, — куммеровым вектором.

Лемма 1. Пусть X — специальная куммерова поверхность, $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — куммеров пучок и $a \in S_X$ — куммеров вектор. Тогда любой эффективный цикл z такой, что 1) $z^2 = -2$, 2) $z \cdot a = 0$, 3) z нельзя представить в виде суммы эффективных циклов со свойствами 1) и 2), является неприводимой компонентой какого-нибудь вырожденного слоя пучка f . Обратно, неприводимые компоненты вырожденных слоев обладают свойствами 1), 2) и 3).

Доказательство. Обозначим через $\tilde{S}_X(a)$ подрешетку в S_X , порожденную всеми векторами со свойствами 1) и 2). Как показано при доказательстве теоремы 1 § 4, $\tilde{S}_X(a)$ порождено неприводимыми компонентами слоев. Таким образом, любой вектор $z \in \tilde{S}_X(a)$ можно представить в виде суммы векторов, каждый из которых является линейной комбинацией компонент одного особого слоя. Из того, что компоненты разных особых слоев ортогональны, и из того, что $x^2 \equiv 0(2)$ для любого $x \in S_X$ вытекает, что если z удовлетворяет 1) и 2), то $z = z' + \lambda a$, где z' есть линейная комбинация неприводимых компонент одного вырожденного слоя. Напомним, что как

было показано в ходе доказательства теоремы 1 § 4, вырожденный слой состоит из 5 компонент f, e_1, e_2, e_3, e_4 , между которыми имеют место соотношения:

$$\left. \begin{aligned} f^2 = e_i^2 = -2, \quad f e_i = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ e_i \cdot e_j = 0, \quad i \neq j, \\ a = 2f + e_1 + e_2 + e_3 + e_4. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Любой вектор $z, z^2 = -2$, являющийся целочисленной комбинацией векторов f, e_1, e_2, e_3, e_4 , имеет вид

$$\pm(k_0 f + k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + k_4 e_4), \quad (2)$$

где все $k \geq 0$ (как легко проверить, всякий вектор $z, z^2 = -2$, имеет вид $e_i + \lambda a, f + \lambda a, f + e_i + e_j + \lambda a, \lambda \in \mathbb{Z}$). Из (2) вытекает утверждение леммы.

Для дальнейшего нам нужны некоторые факты о строении группы гомологий куммеровых поверхностей. Пусть A — двумерное абелево многообразие, θ — автоморфизм $A, \theta(x) = -x, \mathcal{F} = A/g, g = (1, \theta), X$ — поверхность, получаемая из $\mathcal{F}$ с помощью разрешенных особенностей. Таким образом, мы имеем рациональное отображение

$$\pi: A \rightarrow X, \quad (3)$$

которое регулярно и однозначно на $A-N$, где N — множество точек второго порядка на A . Определим отображение

$$\pi': H_2(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H_X = H_2(X, \mathbb{Z}), \quad \pi' = \pi_* \sigma_*^{-1}, \quad (4)$$

где σ — вложение $A-N \rightarrow A$. Очевидно, что это отображенное вложение и что

$$\pi' \gamma_1 \cdot \pi' \gamma_2 = 2 \gamma_1 \cdot \gamma_2. \quad (5)$$

Обозначим, далее, через Π_X подмодуль S_X , порожденный 16 классами гомологий e_i , появляющимися при разрешении особенностей в $\mathcal{F}$.

Лемма 2. Ортогональное дополнение к Π_X в H_X совпадает с $\pi' H_2(A, \mathbb{Z})$.

Лемма 3. Автоморфизм решетки H_X , осуществляющий перестановку векторов $e_i, i = 1, \dots, 16$, оставляющий на месте один из векторов e_i и тождественный на ортогональном дополнении к Π_X , является тождественным на всем H_X .

Доказательство обеих лемм содержится в Приложении.

Лемма 4. Пусть A_1 и A_2 — двумерные комплексные торы. Изоморфизм $\psi_1 : H_2(A_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(A_2, \mathbb{Z})$, сохраняющий скалярное произведение и периоды, всегда индуцируется изоморфизмом $\varphi_1 : A_1 \rightarrow A_2$. Если торы A_1 и A_2 снабжены групповой структурой, то можно выбрать φ_1 так, чтобы он индуцировал групповой изоморфизм¹.

Доказательство. Утверждение леммы легко вытекает из того, что матрица ранга 2 и размера 2×4 однозначно с точностью до умножения на невырожденную матрицу второго порядка определяется своими минорами второго порядка, заданными с точностью до умножения на произвольное число.

Теорема 1. Пусть X и X' — две поверхности типа $K3$, причем X — специальная куммерова поверхность. Если существует изоморфизм ψ между решетками H_X и $H_{X'}$, сохраняющий периоды и переводящий эффективные циклы в эффективные, то 1) X' — тоже специальная куммерова поверхность; 2) существует изоморфизм $\varphi : X \rightarrow X'$, индуцирующий изоморфизм ψ .

Доказательство. Рассмотрим на X куммеров пучок. Пусть a — соответствующий куммеров вектор. Тогда $a \cdot c \geq 0$ для любого эффективного дивизора c . Отсюда ввиду свойств изоморфизма ψ мы имеем: $\psi(a)^2 = 0$, $\psi(a) \cdot c \geq 0$ для любого эффективного дивизора c на X' . Следовательно, по лемме 1 § 3 в классе $\psi(a)$ содержится неприводимая эллиптическая кривая и, значит, $\psi(a)$ определяет пучок эллиптических кривых. Из теоремы 1 § 4 следует, что этот куммеров пучок и, значит, X' является специальной куммеровой поверхностью. Таким образом, первое утверждение нашей теоремы доказано. Перейдем к доказательству второго утверждения. Пусть f' — куммеров пучок на X' , класс гомологий общего слоя которого есть $\psi(a)$. Из леммы 1 вытекает, что ψ переводит классы гомологий, содержащие неприводимые компоненты вырожденных слоев, в классы гомологий, содержащие неприводимые компоненты вырожденных слоев f' . Классы L_i характеризуются тем, что они входят с коэффициентом 1 в класс гомологий a . Следовательно,

$$\psi(\Pi_X) = \Pi_{X'} . \quad (6)$$

Обозначим через A' абелево многообразие, из которого получено X' , и через π' — рациональное отображение $A' \rightarrow X'$. Из (6)

¹ В такой формулировке Лемма 4 не верна. К счастью, изоморфизмы, возникающие из куммеровых поверхностей, обладают свойством, сформулированным в Лемме. См. В.В.Никулин, Изв. Акад. Наук ССР, Сер. Матем., 39, 1975, 261–275. (Примечание автора к настоящему изданию.)

и леммы 2 следует, что ψ индуцирует изоморфизм: $\psi : H_2(A, \mathbb{Z})$ на $H_2(A', \mathbb{Z})$, который, очевидно, также как и ψ , сохраняет периоды. Следовательно, по лемме 4 он индуцируется изоморфизмом $\varphi : A \rightarrow A'$. Обозначим теперь через l класс гомологий в S_X , возникший при разрешении особенности в точке $0 \in A$, и условимся в A' выбрать точку 0 так, чтобы возникший из нее цикл совпадал с $\psi(l)$. Изоморфизм φ_1 согласно лемме 4 можно выбрать так, чтобы он индуцировал групповой изоморфизм. Обозначим через φ соответствующий изоморфизм поверхностей X и X' , определенный так, чтобы диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi_1} & A' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X' \end{array}$$

была коммутативна. Обозначим теперь через φ_* соответствующий изоморфизм в гомологиях. Тогда ясно, что $\varphi_*^{-1}\psi$ удовлетворяет условию леммы 3 и, значит, тождественно. Таким образом, мы доказали теорему Торелли для специальных куммеровых поверхностей.

Мы докажем теперь, что две формы теоремы Торелли, упомянутые в § 1, эквивалентны и, значит, теорема Торелли в первой форме также справедлива для специальных куммеровых поверхностей.

Назовем вектор $\xi \in S_X$ почти обильным, если $\xi^2 \geq 0$, $\xi \cdot \alpha \geq 0$, для любого класса α , содержащего эффективный дивизор.

Лемма 5. Пусть X и X' — две поверхности типа КЗ. Если φ — изоморфизм между эвклидовыми решетками S_X и $S_{X'}$, причем для некоторого очень обильного класса дивизоров ξ $\varphi(\xi)$ является почти обильным классом дивизоров, то φ переводит эффективный класс дивизоров снова в эффективный.

Доказательство. Достаточно доказать, что если x — класс гомологий неприводимой кривой, то $\varphi(x)$ является эффективным классом. Из формулы присоединения следует, что $x^2 \geq -2$. Следовательно, $\varphi(x)^2 \geq -2$. Отсюда по неравенству Римана–Роха, $l(\varphi(x)) + l(-\varphi(x)) > 0$ и, значит, либо $\varphi(x)$, либо $-\varphi(x)$ эффективен. Мы имеем: $\varphi(\xi) \cdot \varphi(x) = \xi \cdot x > 0$, так как ξ — обильный класс. Ввиду того, что класс $\varphi(\xi)$ почти обильен, это исключает случай, когда эффективен класс $-\varphi(x)$. Следовательно, $\varphi(x)$ — эффективный класс.

Из леммы 5 сразу следует, что из второй формы теоремы Торелли вытекает первая форма. Обратное утверждение очевидно.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТОПОЛОГИИ КУММЕРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ*

Рассмотрим куммерову поверхность X , получающуюся из комплексного тора T . Таким образом, существует рациональное отображение

$$\psi : T \rightarrow X, \quad (1)$$

которое регулярно всюду вне точек второго порядка в T . Множество точек второго порядка на T изоморфно $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$. Выберем раз и навсегда этот изоморфизм, и пусть $e_x, x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$, означает класс гомологий цикла, возникшего из разрешения особенности в соответствующей точке $t_x \in T$.

Обозначим далее через Π совокупность всех целочисленных классов гомологий, выражающихся рационально через $e_x, x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$.

Определение. Две комплексные структуры в $\mathbf{R}^{2n}$ назовем одинаково ориентированными, если $J_2 = A^{-1}J_1A, \det A > 0$, где J_2 и J_1 — операторы умножения на $\sqrt{-1}$, соответствующие заданным структурам.

Лемма 1. Пусть в $\mathbf{R}^{2n}$ даны две одинаково ориентированные комплексные структуры, S — шар: $\sum_1^{2n} x_i^2 \leq 1$. Существует диффеоморфизм шара S на себя, который: 1) внутри меньшего шара совпадает с линейным преобразованием, переводящим одну из комплексных структур в другую; 2) на границе шара S совпадает с единичным преобразованием; 3) перестановочен с отображением $\theta : x \rightarrow -x$.

Доказательство. Следует из связности группы $SO(2n)$.

Лемма 2. Пусть T_1 и T_2 — комплексные торы; X_1 и X_2 , соответствующие куммеровой поверхности, $\alpha : H_2(T_1, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(T_2, \mathbf{Z})$ — изоморфизм эвклидовых решеток. Существуют такие диффеоморфизмы $\varphi_1 : T_1 \rightarrow T_2$ и $\varphi_2 : X_1 \rightarrow X_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & T_2 \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ X_1 & \xrightarrow{\varphi_2} & X_2 \end{array} \quad (2)$$

*Описание модуля Π , на котором основаны результаты этого приложения, было получено Д.Б.Фуксом. Авторы сердечно благодарят Д.Б.Фукса также и за то, что он просмотрел текст настоящего приложения и сделал ряд полезных замечаний.

коммутативна (т.е. $\varphi_2 \circ \psi_1$ и $\psi_2 \circ \varphi_1$ определены в одних и тех же точках и $\varphi_2 \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi_1$), индуцированный гомоморфизм φ_{1*} в гомологиях совпадает с α , $\varphi_2(\Pi_1) = \Pi_2$.

Доказательство. Представим T_1 и T_2 в виде $\mathbb{C}^2/\Gamma_1$, $\mathbb{C}^2/\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — решетки в $\mathbb{C}^2$. Выберем в этих решетках одинаково ориентированные базисы, т.е. такие, что вещественно линейное преобразование, переводящее один базис в другой (конечно, с сохранением нумерации векторов), имеет положительный определитель. Это преобразование задает изоморфизм $\beta : T_1 \rightarrow T_2$ (как групп, но не как комплексных многообразий), причем две комплексные структуры в касательном пространстве к любой точке T_2 — естественная и перенесенная с T_1 — имеют одинаковую ориентацию. Канонический гомоморфизм $SL(4, \mathbb{Z})$ в $G(\mathbb{Z}) = \text{Aut } H_2(T, \mathbb{Z})$ эпиморфен. Действительно, отображение $SL(4, \mathbb{R}) \rightarrow G(\mathbb{R})$ эпиморфно ввиду связности обеих групп. Пусть Γ — полный прообраз группы $G(\mathbb{Z})$; тогда Γ — дискретная подгруппа $SL(4, \mathbb{R})$, содержащая $SL(4, \mathbb{Z})$. Как известно [3], группа $SL(4, \mathbb{Z})$ является максимальной дискретной подгруппой в $SL(4, \mathbb{R})$ и, значит, $\Gamma = SL(4, \mathbb{Z})$. Поэтому β можно выбрать всегда так, чтобы индуцированное отображение $\beta_* : H_2(T_1, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(T_2, \mathbb{Z})$ совпадало бы с α . Из того, что β является групповым изоморфизмом, вытекает, что точки второго порядка на T_1 оно переводит в точки второго порядка на T_2 . Из леммы 1 вытекает возможность подправления нашего диффеоморфизма β вблизи точек второго порядка так, чтобы он давал вблизи них изоморфизм комплексных структур. Обозначим через φ_1 этот диффеоморфизм. Согласно лемме 1 при этом можно обеспечить, чтобы отображение φ_1 оставалось перестановочным с отображением $x \rightarrow -x$, но уже, конечно, перестало бы быть изоморфизмом групп. Поскольку подправление происходило в маленькой области, то действие φ_1 на гомологии остается прежним, т.е. $\varphi_{1*} = \alpha$. Из перестановочности φ_1 с отображением $x \rightarrow -x$ вытекает, что φ_1 индуцирует отображение $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_i = T_i/(1, \theta)$, а из того, что это отображение является комплексным изоморфизмом вблизи особых точек $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, вытекает, что оно продолжается до диффеоморфизма $\varphi_2 : X_1 \rightarrow X_2$, очевидно, обладающего всеми нужными свойствами.

Перейдем теперь к построению некоторой специальной системы классов гомологий на куммеровых поверхностях.

Лемма 3. Пусть T — тор, X — соответствующая ему куммерова поверхность, Π — подрешетка в $H_2(X, \mathbb{Z})$, определенная выше. Каждой плоскости $v \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ можно сопоставить класс гомологий

$f_v \in H_2(X, \mathbb{Z})$ таким образом, что

$$f_v \cdot e_x = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in v, \\ 0 & \text{при } x \notin v, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_v \cdot f_{v'} = \begin{cases} -2 & \text{при } v = v', \\ -1 & \text{при } |v \cap v'| = 2, \\ 0 & \text{при } |v \cap v'| < 2, \end{cases} \quad (4)$$

где $|A|$ означает число элементов в множестве A .

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что достаточно доказать существование классов гомологий f_v для одной куммеровой поверхности X и фиксированного отображения $\psi: T \rightarrow X$. В качестве T мы возьмем $\mathbb{C}^2/D$, где D — решетка, состоящая из всех векторов, координаты которых — числа вида $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. В торе T есть 24 двумерных (вещественно) подтора, инвариантных относительно $\theta: x \rightarrow -x$. Между этими подторами и плоскостями в $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$, очевидно, существует взаимнооднозначное соответствие, при котором плоскости v соответствует подтор T_v , содержащий все точки t_v второго порядка с $x \in v$. Обозначим через F_v фундаментальную область в T_v относительно отображения θ . Рассмотрим вначале те v , для которых T_v — комплексный подтор тора T . Таких, как легко видеть, 8. Для таких v $\psi(F_v)$ представляет собой комплексную проективную прямую в X . Обозначим ее класс гомологий через f_v . Для определения остальных f_v разобьем оставшееся множество плоскостей v на два подмножества, каждое из которых состоит из плоскостей, которые либо попарно параллельны, либо пересекаются по точке. Пусть V — одно из этих подмножеств. Очевидно, на T существует комплексная структура одинаковой ориентации с первоначальной, в которой все $T_v, v \in V$, являются комплексными многообразиями. Пусть T^V — тор, снабженный этой комплексной структурой, и φ_1^V — диффеоморфизм тора T^V на T , тождественный вне достаточно малых окрестностей точек второго порядка и являющийся комплексным изоморфизмом вблизи этих точек. Существование такого φ_1^V , перестановочного с θ , обеспечивается леммой 2. Определим, как и выше, классы гомологий f_v^V на X^V , и пусть $f_v = \varphi_{2*}^V(f_v^V)$, где φ_2^V — соответствующий φ_1^V диффеоморфизм между X^V и X . Таким образом, классы f_v определены. Нам осталось доказать соотношения (3) и (4). Положим $a_v = 2f_v + \sum_{x \in v} e_x$.

Обозначим, далее, через $\tilde{T}_v$ какой-нибудь подтор в T , параллельный T_v и находящийся в общем положении, т.е. не содержащий точек

второго порядка тора T , тогда ясно, что класс гомологий цикла $\psi(\tilde{T}_v)$ равен a_v . Следовательно, имеют место соотношения:

$$a_v \cdot a_{v'} = \begin{cases} 2 & \text{при } |v \cap v'| = 1, \\ 0 & \text{при } |v \cap v'| \neq 1 \end{cases} \quad (5)$$

и a_v гомологично $a_{v'}$, если v и v' параллельны. Так как $\tilde{T}_v$ не содержит точек второго порядка, то

$$a_v \cdot e_x = 0 \quad (6)$$

при любом v и любом $x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$. Из (5), (6) и очевидных соотношений между индексами перечисления e_x :

$$e_x \cdot e_y = \begin{cases} -2 & \text{при } x = y, \\ 0 & \text{при } x \neq y \end{cases} \quad (7)$$

следуют (3) и (4).

Следствие. Для любого трехмерного подпространства $\omega \subset (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$

$$g_\omega = \frac{1}{2} \sum_{x \in \omega} e_x \in \Pi \quad (8)$$

и, следовательно, дискриминант $D(\Pi) \leq 2^6$.

Доказательство. Пусть $\omega = v_1 \cup v_2$ где v_1 и v_2 — параллельные плоскости; тогда ясно, что

$$g_\omega = a_{v_1} - f_{v_1} - f_{v_2}. \quad (9)$$

Из (9) ясно, что $g_\omega \in H_2(X, \mathbf{Z})$, а значит, по определению Π справедливо (8). Число трехмерных линейных подпространств в $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$ равно 31. Из этого и из (7) следует неравенство $D(\Pi) \leq 2^6$.

Лемма 4. 1) Ортогональные дополнения к Π совпадают с $\psi \cdot H_2(T, \mathbf{Z})$. 2) Вся группа $H_2(X, \mathbf{Z})$ порождена классами f_v и e_x . 3) $D(\Pi) = D(\psi \cdot H_2(T, \mathbf{Z})) = 2^6$. 4) Π порождено e_x и g_ω (см. (8)).

Доказательство. Обозначим через E решетку в $H_2(X, \mathbf{Z})$, порожденную Π и всеми f_v , а через $\tilde{E}$ — решетку, порожденную Π и всеми a_v . Если v_1 и v_2 параллельны, то $f_{v_1} - f_{v_2} \in \Pi$, так как $a_{v_1} = a_{v_2}$ и $2f_v = a_v - \sum_{x \in v} e_x \in \tilde{E}$. Следовательно, $(E : \tilde{E}) \leq 2^6$. Пусть

$f = \sum \lambda_v f_v \in \tilde{E}$, где суммирование распространено по какой-либо системе из 6 плоскостей, никакие 2 из которых не параллельны. Если $f \in \tilde{E}$, то $f = \sum \mu_v a_v + p$, где v пробегает то же множество, что и выше, $p \in \Pi$. Мы получаем, умножая f на $a_{v'}$, $|v \cap v'| = 1$, что $\lambda_v = 2\mu_v$. Следовательно, $(E : \tilde{E}) = 2^6$, откуда

$$D(E) = 2^{-12} D(\tilde{E}). \quad (10)$$

из определения $\tilde{E}$ вытекает, что $D(\tilde{E}) = 2^6 D(\Pi)$. Следовательно,

$$D(E) = 2^{-6} D(\Pi). \quad (11)$$

Отсюда и из неравенства, доказанного в следствии, вытекает:

$$D(\Pi) = 2^6, \quad D(E) = 1. \quad (12)$$

Из первого из этих неравенств следует, что Π порождено e_x и g_ω (см. (8)), т.е. четвертое утверждение леммы. Отсюда и из $D(E) = 1$ следует второе утверждение. Ортогональное дополнение к Π , очевидно, порождено a_v и, значит, совпадает с $\psi \cdot H_2(T, \mathbf{Z})$, причем его дискриминант равен 2^6 . Таким образом, лемма 4 доказана.

Лемма 5. Автоморфизм $\varphi : H_2(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H_2(X, \mathbf{Z})$ со следующими свойствами:

- 1) $\varphi(e_0) = e_0$;
- 2) $\varphi(e_x) = e_{x'}$, $x, x' \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$, и, следовательно, φ переводит Π в себя;
- 3) на ортогональном дополнении G к Π $\varphi(g) = g$ для всех $g \in G$ является единичным преобразованием в $H_2(X, \mathbf{Z})$.

Доказательство. Напомним, что

$$a_v = 2f_v + \sum_{x \in v} e_x \in G. \quad (13)$$

Следовательно,

$$a_v = 2\varphi(f_v) + \sum_{x \in \varphi(v)} e_x.$$

Положим

$$U(x) = \{v \cup \varphi(v)\} - \{v \cap \varphi(v)\}. \quad (14)$$

Из (13) и (14) следует, что

$$\frac{1}{2} \sum_{x \in U(v)} e_x \in \Pi. \quad (15)$$

Если плоскость v содержит точку o , то из условия 1) вытекает, что $|U(v)| \leq 7$. Отсюда и из четвертого утверждения леммы 4 следует, что $U(v) = \emptyset$, и, значит, $\varphi(v) = v$ для любой плоскости v , проходящей через точку o . Пусть $x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$, $x \neq o$, и v_1, v_2 — две плоскости, пересечение которых есть $\{0, x\}$; тогда $\varphi(x) \in \varphi(v_1) \cap \varphi(v_2) = v_1 \cap v_2$ и, значит, $\varphi(x) = x$, т.е. $\varphi(e_x) = e_x$ для любого $x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$; следовательно, $\varphi(f_v) = f_v$ и поэтому $\varphi(l) = l$ для любого $l \in H_2(X, \mathbf{Z})$.

В заключение приведем некоторые факты о строении решетки Π . Поскольку эти факты не используются в основном тексте работы, мы приведем их без доказательства. Восстановление доказательств не требует принципиально новых соображений.

А) Группа автоморфизмов решетки Π порождена автоморфизмами следующих видов:

- 1) отражениями $S_x(p) = p + (p \cdot e_x)e_x$,
- 2) $\tilde{\varphi}(e_x) = e_{\varphi(x)}$, где φ — произвольное аффинное преобразование в $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$, не обязательно $\varphi(o) = o$.

Б) Всякий автоморфизм решетки Π продолжается до автоморфизма всего $H_2(X, \mathbf{Z})$.

В) В решетке L существуют примитивные подрешетки, изоморфные, но не изометричные решетке Π (см. определение изоморфизма и изометричности решеток в приложении к § 6).

Г) Две примитивные подрешетки Π_1 и Π_2 в L , изоморфные друг другу, для которых существуют системы классов гомологий f_v , удовлетворяющие условиям леммы 3, изометричны.

Последнее утверждение в соединении с теоремой Торелли (см. §§ 1 и 7) дает следующее необходимое и достаточное условие куммеровости поверхности X типа $K3$: X куммерова тогда и только тогда, когда в S_x существует примитивная подрешетка, изоморфная Π , а в $H_2(X, \mathbf{Z})$ — система классов гомологий f_v , удовлетворяющая условиям леммы 3.

§ 6. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ ТОРЕЛЛИ

Цель этого параграфа — построить всюду плотное множество $Z \subset \Omega(l)$, на котором справедлива теорема Торелли. Как было объяснено в § 1, из существования такого множества вытекает справедливость теоремы Торелли для всех $\omega \in \Omega(l)$. Как было доказано

в § 5, для специальных куммеровых поверхностей теорема Торелли справедлива. Поэтому достаточно проверить, что множество точек $\omega \in \Omega(I)$, соответствующих специальным куммеровым поверхностям, всюду плотно. Мы покажем в этом параграфе даже несколько больше, а именно, что всюду плотно в $\Omega(I)$ множество специальных куммеровых поверхностей с максимальным числом алгебраических циклов. Напомним, что такие поверхности мы называем сингулярными.

Нам понадобятся некоторые общие факты о поверхностях типа $K3$ и автоморфизмах решеток S_X , которые мы сначала изложим. Пусть X — некоторая поверхность типа $K3$. Обозначим через $U \subset S_X$ совокупность всех классов эффективных дивизоров, через $V \subset S_X$ — совокупность всех таких классов дивизоров $a \in S_X$, что $a^2 \geq 0$, $au \geq 0$, для всех $u \in U$. Обозначим через P_X совокупность всех $h \in U$, $p^2 = -2$. Каждому $p \in P_X$ можно сопоставить линейное преобразование (отражение) в H_X :

$$s_p(x) = x + (x \cdot p)p. \quad (1)$$

Пусть $\Gamma(X)$ — группа, порожденная отражениями s_p . Обозначим, далее, через $\mathfrak{G}$ группу всех автоморфизмов решетки H_X , сохраняющих периоды, а через $\mathfrak{G}^V$ — ее подгруппу, переводящую V в себя. Обозначим через δ преобразование $x \rightarrow -x$ и через D — подгруппу $(1, \delta)$.

Теорема 1. 1) группа $\Gamma(X)$ является нормальным делителем в $\mathfrak{G}$; 2) $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^V \cdot \Gamma(X) \cdot D$; 3) для любого $x \in S_X$, для которого $x^2 = 0$, существует такое $\gamma \in \Gamma(X) \cdot D$, что $\gamma x \in V$.

Доказательство. Пусть $a \in S_X$, $a^2 = -2$. Тогда из неравенства Римана–Роха следует, что либо a , либо $-a$ эффективен и, значит, $s_a \in \Gamma(X)$. Чтобы доказать 1), заметим, что $\Gamma(X) \subset \mathfrak{G}$, так как s_p действует единичным образом на ортогональном дополнении в H_X к S_X и, следовательно, сохраняет периоды. Так как $\Gamma(X)$, очевидно, является нормальным делителем в группе $G = \text{Aut } S_X$ и $\mathfrak{G} \subset G$, то отсюда следует 1). Докажем 2). Обозначим через $\tilde{V}$ выпуклую оболочку V в $R = S_X \otimes \mathbf{R}$. Из общей теории групп, порожденных отражениями (см. [5], [6]), вытекает, что $\tilde{V}$ является фундаментальной областью для группы $\Gamma(X)$, т.е. что сдвиги $\tilde{V}$ под действием группы $\Gamma(X)$ заполняют одну полу конуса $x^2 > 0$ в R , причем пересечение $\gamma_1 \tilde{V}$ и $\gamma_2 \tilde{V}$ возможно лишь по грани. Пусть h — какой-либо элемент общего положения в $\tilde{V}$, т.е. такой, что $h \cdot p > 0$ для любого $p \in P$ и $h^2 > 0$. Пусть $g \in \mathfrak{G}$. Из того,

что $\tilde{V}$ — фундаментальная область, следует, что существует такое $\gamma \in \Gamma(X) \cdot D$, что $h_1 = \gamma g h \in \tilde{V}$. Покажем, что тогда $g_1 = \gamma g \in \mathfrak{O}^V$. Ясно, что достаточно проверить, что $g_1^{-1}P = P$. Пусть $p \in P$. Очевидно, что либо $g_1^{-1}p \in P$, либо $-g_1^{-1}p \in P$. Для $h \in U$ имеем:

$$(g_1^{-1}p) \cdot h = p \cdot (g_1 h) = p \cdot h_1 > 0, \quad h_1 \in U. \quad (2)$$

Следовательно, $g_1^{-1}p \in P$.

Остается доказать 3). Пусть h — элемент общего положения в V . Тогда $h \cdot x \in \mathbb{Z}$ и $h \cdot x \neq 0$. Предположим, что $h \cdot x > 0$, и покажем, что существует такое $\gamma \in \Gamma(X)$, что $\gamma x \in V$. Если $x \notin V$, то существует такое p , что $p \cdot x < 0$. Положим $x_1 = s_p(x)$; тогда $x_1 \cdot h = x \cdot h + (p \cdot x)(p \cdot h) < x \cdot h$. Из того, что $x_1 \cdot h \in \mathbb{Z}$ и $x \cdot h > 0$, так как отражение s_p переводит полу конуса $x^2 > 0$ в себя, вытекает, что через конечное число шагов мы получим $x \in V$. Доказательство закончено.

Заметим, что то же рассуждение доказывает разложение $G = G^V \Gamma D$, где G — группа автоморфизмов решетки S_X , а G^V состоит из автоморфизмов, сохраняющих эффективные циклы.

Следствие. Если в группе S_X существует такой элемент $x \neq 0$, что $x^2 = 0$, то на X существует пучок эллиптических кривых, класс гомологий слоев которого имеет вид γx , где $\gamma \in \Gamma(X)D$.

В самом деле, из 3) вытекает, что существует такое $\gamma \in \Gamma(X)D$, что $\gamma x \in V$, а тогда, согласно § 3, γx является классом гомологий общего слоя некоторого пучка эллиптических кривых.

Теперь выясним, когда сингулярная поверхность типа $K3$ является куммеровой поверхностью. Тогда она, конечно, является специальной куммеровой поверхностью.

Предложение 1. Пусть B — положительно определенная четная решетка ранга 2. Существует приводимое двумерное абелево многообразие A , для которого

$$T_A \simeq B.$$

Определение решетки T_X дано в § 1 для поверхностей типа $K3$. Мы переносим его здесь без изменения на абелевы многообразия.

Доказательство. Рассмотрим решетку E ранга 6, в которой существует такой базис $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$, что

$$e_i e_j = \begin{cases} 1 & \text{при } |i - j| = 3, \\ 0 & \text{при } |i - j| \neq 3. \end{cases}$$

Эта решетка изоморфна решетке E_3 в обозначениях Приложения. Пусть $\tilde{E}$ — пространство всех комплексных линейных функционалов на E , снабженное скалярным произведением, перенесенным обычным образом с E . Как хорошо известно, существует взаимно-однозначное соответствие между комплексными линейными функционалами на E , рассматриваемыми с точностью до умножения на константу, удовлетворяющими условиям

$$\omega^2 = 0, \quad \omega \cdot \bar{\omega} > 0, \quad (3)$$

и двумерными комплексными торами.

Согласно теореме 1 Приложения, существует подрешетка решетки E , изоморфная B . Мы будем считать, что $B \subset E$. Обозначим через B' ортогональное дополнение к B в E . Мы построим функционал ω , исходя из условия

$$\omega(B') = 0,$$

тогда ω будет определяться своими значениями на B . Предложение следует теперь из такого результата.

Лемма 1. Для любой положительно определенной двумерной решетки B существует комплекснозначный функционал ω , удовлетворяющий условиям (3).

Этими свойствами функционал определен однозначно с точностью до умножения на комплексное число и замены ω на $\bar{\omega}$.

Существует такая положительно определенная форма $F(x_1, x_2)$, что $F(x_1, x_2) = (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2$, $B = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$. Тогда

$$F(x_1, x_2) = |x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2|^2,$$

где $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что

$$\pi(x) = x_1 \mu_1 + x_2 \mu_2, \quad x \in B,$$

является изометричным вложением B в $\mathbb{C}$.

Простая проверка показывает, что $\pi(x) = \alpha \cdot x$, где $\alpha = (-\mu_2, \mu_1) \in B \otimes \mathbb{C}$, а $\alpha \cdot x$ обозначает скалярное произведение в $B \otimes \mathbb{C}$, продолженное с B . Отсюда $\alpha^2 = 0$ и $\alpha \cdot \bar{\alpha} > 0$. Если $\pi_1(x) = \alpha_1 \cdot x$ — другое представление, то и $\alpha_1^2 = 0$, откуда легко следует, что вектор α_1 пропорционален α или $\bar{\alpha}$.

Предложение 2. Пусть B — такая положительно определенная решетка ранга 2, что $b^2 \equiv 0(4)$ для любого $b \in B$. Тогда существует единственная сингулярная поверхность X типа КЗ, для которой

$$T_X \simeq B.$$

Эта поверхность X является специальной куммеровой.

Обозначим через B' ту же группу B , в которой произведение двух векторов определено как половина их произведения в B . Пусть A — абелево многообразие, связанное с решеткой B , существование которого установлено в предложении 1. Возьмем за X куммерову поверхность, связанную с A . Легко видеть, что для нее $T_X \simeq B'$. Это доказывает существование поверхности X .

Пусть X и Y — две сингулярные поверхности типа КЗ, причем $T_X \simeq T_Y \simeq B$ и X является специальной куммеровой поверхностью. Докажем, что X и Y изоморфны. Согласно теореме 1 приложения существует изоморфизм $\varphi' : H_X \rightarrow H_Y$, индуцирующий заданный нам изоморфизм $T_X \simeq T_Y$. Очевидно, что он переводит S_X в S_Y . Ввиду теоремы 1 можно умножить φ' на такой автоморфизм γ модуля H_Y , $\gamma \in \Gamma(Y) \cdot D$, что $\varphi = \gamma\varphi'$ будет переводить эффективные циклы в эффективные. Так как γ переводит S_Y в себя и тождественно на T_Y , то φ переводит отображение периодов π_X в π_Y . Остается применить теорему Торелли для специальных куммеровых поверхностей.

Для линейного функционала $\omega \in \Omega(l)$ обозначим через L_ω ортогональное дополнение ядра ω в L . Следующая теорема представляет собой основное утверждение этого параграфа.

Теорема 2. Совокупность всех $\omega \in \Omega(l)$, для которых:

- 1) $rg L_\omega = 2$ (значит, решетка L_ω положительно определена),
- 2) для $a \in L_\omega$ $a^2 \equiv 0(4)$,

всюду плотна в $\Omega(l)$.

Прежде всего заметим, что точки ω , удовлетворяющие условиям теоремы, существуют. Для этого рассмотрим любую решетку B , удовлетворяющую условиям предложения 2. В ортогональном дополнении к решетке $\mathbf{Z}l$ в L содержится, согласно теореме 1 приложения, подмодуль, изоморфный B . Мы применим к нему рассуждения, использованные в доказательстве предложения 1, т.е. определим ω тем, что $\omega(x) = 0$ для $x \in L$, $x \cdot B = 0$, а на B удовлетворяет условиям леммы 1. Тем самым мы получим искомую точку $\omega \in \Omega(l)$.

Пусть φ — некоторое преобразование $L \otimes \mathbf{C}$; обозначим через $\tilde{\varphi}$ сопряженное преобразование в $\tilde{\Omega}$.

Обозначим, далее, через Γ совокупность всех преобразований $L \otimes \mathbf{Q}$, которые 1) переводят заданный вектор l в пропорциональный с положительным коэффициентом пропорциональности; 2) скалярное произведение умножают на положительный множитель; 3) как сами, так и обратные к ним могут быть записаны в некотором базисе L так, чтобы знаменатели матричных элементов были взаимно просты с 2. Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ индуцированную группу автоморфизмов $\Omega(l)$. Группу преобразований эвклидова пространства $L \otimes \mathbf{R}$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), обозначим через G , соответствующую группу автоморфизмов $\Omega(l)$ — через $\tilde{G}$. Группа $\tilde{\Gamma}$ действует в $\Omega(l)$ всюду плотно. В самом деле, группа $\tilde{G}$ действует в $\Omega(l)$ транзитивно, а группа $\tilde{\Gamma}$, как хорошо известно из теории алгебраических групп, всюду плотна в группе $\tilde{G}$, рассматриваемой как группа преобразований $\Omega(l)$.

Для завершения доказательства леммы достаточно убедиться в том, что если ω удовлетворяет условиям теоремы и $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$, то $\tilde{\gamma} \cdot \omega$ удовлетворяет тем же условиям. Это легко вытекает из следующей леммы.

Лемма 2. Пусть ψ — линейное преобразование $L \otimes \mathbf{Q}$, сохраняющее с точностью до умножения на константу скалярное произведение и такое что $\psi L \subset L$; тогда

$$L_{\tilde{\psi}\omega} \subset \psi^{-1} L_{\omega} .$$

Доказательство. Так как $\psi L_{\tilde{\psi}\omega} \subset L$, то достаточно доказать, что если $u \in L_{\tilde{\psi}\omega}$ и $a \in L_{\omega}$, то

$$(\psi u) \cdot a = 0 ,$$

что, очевидно, следует из того, что

$$L_{\tilde{\varphi}\omega} \otimes \mathbf{Q} = \psi(L_{\omega} \otimes \mathbf{Q}) .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ*

О ЧЕТНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ РЕШЕТКАХ

Мы будем рассматривать здесь только четные унимодулярные евклидовы решетки. Простейшим примером является решетка E_k ранга $2k$, имеющая такой базис $e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_k$, что

$$e_i e_j = 0, \quad e'_i e'_j = 0, \quad e_i e'_j = \delta_{ij}. \quad (1)$$

Две подрешетки F_1 и F_2 , которые переводятся друг в друга автоморфизмами решетки E , мы будем называть изометричными. Очевидно, изометричные решетки изоморфны, но обратное, вообще говоря, неверно.

Лемма 1. Решетка E_k выделяется ортогональным прямым слагаемым в любой содержащей ее решетке.

Применение индукции по k сводит утверждение к случаю $k = 1$. Пусть $E_1 \subset E$, e, e' — стандартный базис в E_1 и F — ортогональное дополнение к E_1 в E . Тогда для $x \in E$

$$x = (xe)e' + (x \cdot e')e + f, \quad f \in F,$$

что и доказывает лемму.

Определение. Пусть $E = E_1 \oplus F$ — ортогональное разложение решетки E , e, e' — стандартный базис в E_1 и $f_0 \in F$. Преобразование

$$\left. \begin{aligned} e &\rightarrow e, \\ e' &\rightarrow e' + f_0 - \frac{1}{2}(f_0^2)e, \\ f &\rightarrow f - (f \cdot f_0)e, \quad f \in F, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

называется элементарным преобразованием, определенным e, e' и f_0 .

Лемма 2. Пусть $e = E_1 \oplus F$. Любой вектор $x \in E$ вида $x = \alpha e + e' + f$, $f \in E$, изометричен вектору вида $\beta e + e'$.

Для доказательства достаточно применить элементарное преобразование, соответствующее e, e' и $-f$.

*Все факты, содержащиеся в этом приложении, известны специалистам. Оно написано для удобства читателя, так как в других изложениях аналогичные конструкции проводятся обычно в более сложной ситуации. Мы благодарны Л.Н.Васерштейну, который написал по нашей просьбе это приложение.

Лемма 3. Любой примитивный вектор $f \in E_2$ изометричен вектору вида $\alpha e_1 + e'_1$.

Пусть $f = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 e'_2$. Хорошо известно, что существуют две такие унимодулярные целочисленные матрицы A, B второго порядка, что

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_4$. Автоморфизм

$$\begin{pmatrix} e_1 & -e_2 \\ e'_2 & e'_1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} \begin{pmatrix} e_1 & -e_2 \\ e'_2 & e'_1 \end{pmatrix} A^{-1} \quad (3)$$

переводит f в $\alpha e_1 + e'_1$.

Теорема 1. Если решетка E содержит подрешетку, изоморфную E_k , то 1) для любой четной, но не обязательно унимодулярной решетки ранга $\leq k$ существует изоморфная ей примитивная подрешетка в E и 2) любые примитивные изоморфные подрешетки одинакового ранга $l \leq k - 1$ изометричны².

Напомним, что подрешетка $F \subset E$ называется примитивной, если группа E/F не имеет кручения.

При доказательстве первого утверждения мы можем считать, что $E = E_k$. Пусть $e_1, \dots, e_k, e'_1, \dots, e'_k$ — базис, удовлетворяющий условиям (1) и $y_1, \dots, y_l$ — базис решетки, $F, l \leq k$. Рассмотрим векторы

$$x_i = e_i + \sum_{j=1}^i a_{ij} e'_j, \quad i = \cdot, l, \quad (4)$$

где $a_{ii} = \frac{1}{2} y_i^2$, $a_{ij} = y_i y_j$ при $i \neq j$, и обозначим через F' натянутую на них решетку. Из того, что e_i входят в эти формулы с коэффициентом 1, следует, что решетка F' примитивна в E . Подстановка показывает, что отображение $y_i \rightarrow x_i$ является изоморфизмом решеток F и F' ,

Докажем теперь второе утверждение, пользуясь индукцией по l . Пусть сначала $l = 1$. Нам нужно доказать, что в решетке $E = E_2 \oplus V$ любые два изоморфных примитивных вектора изометричны. Пусть $x \in E$

$$x = u + f, \quad u \in E_2, \quad f \in V,$$

²Эту теорему доказал D.G.James: Pacific J. of Math., 26, 1975, 261–275. Доказательство вполне элементарно. (Примечание автора к настоящему изданию.)

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e'_1 + \alpha_3 e_2 + \alpha_4 e'_2. \quad (5)$$

Так как решетки E и E_2 унимодулярны, то это же верно и для V . Поэтому существуют такие вектора $u' \in E_2$, $f' \in V$, что

$$x(u' + f') = u \cdot u' + f \cdot f' = 1.$$

С помощью элементарного преобразования можно добиться того, чтобы $\alpha_1 \neq 0$. Затем с помощью другого элементарного преобразования, соответствующего $e'_1 e_1$ и некоторому $f_0 \in V$, можно добиться того, что вектор u в (5) станет примитивным. Теперь ввиду леммы 3 мы можем заменить его вектором $\alpha e + e'$, так, что x изометричен вектору $\alpha e + e' + f$. Ввиду леммы 2 вектор x изометричен вектору $\beta e + e'$, причем $\beta = \frac{1}{2}x^2$.

Пусть теперь теорема доказана для значения l и $y_1, \dots, y_{l+1}$ — базис некоторой примитивной подрешетки $F \subset E$. Базис $x_1, \dots, x_{l+1} \in E_k \subset E$, задаваемый формулами (4), определяет подрешетку $F' \subset E_k$. Нам нужно доказать, что существует автоморфизм решетки E , переводящий один базис в другой. Для $y_1, \dots, y_l$ и $x_1, \dots, x_l$ мы можем предполагать это по индукции. Поэтому будем считать, что $y_i = x_i \in E_i, i = 1, \dots, l, E_k = E_l \oplus E_{k-l}, E = E_l \oplus E_{k-l} \oplus V, k-l \geq 2$, и

$$y_{l+1} = u_1 + u_2 + v, \quad (6)$$

где $u_1 \in E_l, u_2 \in E_{k-l}, v \in V$.

Мы хотим теперь элементарными преобразованиями, сохраняющими вектора $x_i = y_i, i \leq l$, перевести y_{l+1} в x_{l+1} . Обозначим через H ортогональное дополнение к векторам $x_i, i \leq l$, в E (оно выглядит как $H' \oplus E_{k-l} \oplus V$, где H' — примитивная подрешетка,

порожденная векторами $z_i = e_i - \sum_{j=i}^l a_{ij} e'_j, i = 1, \dots, l$. В силу примитивности F и унимодулярности E в H существует такой вектор y , что $y \cdot y_{l+1} = 1$.

Сделав элементарное преобразование (2), соответствующее e_{l+1}, e'_{l+1} и некоторому $y \in H$, ортогональному к e_{l+1}, e'_{l+1} , можно сделать коэффициент при e_{l+1} в u_1 ненулевым. Затем, сделав элементарное преобразование, соответствующее e'_{l+1}, e_{l+1} и некоторому $y \in H$, ортогональному к e'_{l+1}, e_{l+1} можно сделать коэффициенты при e_{l+1} и e'_{l+1} в u_2 взаимно простыми, а значит вектор $u_2 + v$ примитивным. Тогда по доказанному выше элементарным преобразованиями пространства $E_{k-l} \oplus V$ его можно привести к виду $e_{l+1} + \alpha e'_{l+1}$. Итак, мы привели вектор y_{l+1} к виду

$$y_{l+1} = e_{l+1} + \alpha e'_{l+1} + \xi, \quad \xi \in E_l. \quad (7)$$

Из того, что $y_{i+1}y_i = x_{i+1}y_i$ при $i = 1, \dots, l$, следует, что $\xi y_i = 0$. Поэтому элементарное преобразование, соответствующее векторам e_{i+1}, e'_{i+1}, ξ , не изменит векторов $y_1, \dots, y_l$. Проверка показывает, что оно уничтожает слагаемое ξ в (7). Наконец из того, что $y_{l+1}^2 = x_{l+1}^2$, следует, что $\alpha = 0$, т.е. $y_{l+1} = x_{l+1}$. Теорема доказана.

§ 7. АВТОМОРФИЗМЫ

Теорема Торелли дает возможность исследовать строение группы автоморфизмов поверхности типа $K3$. Следующее описание является непосредственным следствием теоремы Торелли.

Предложение. Группа автоморфизмов поверхности X типа $K3$ совпадает с группой тех автоморфизмов эвклидовой решетки H_X , которые сохраняют множество эффективных циклов и умножают на комплексное число линейную форму π на H_X , определяющую периоды.

Теперь мы дадим другое описание группы автоморфизмов. Она, правда, дает ответ “с точностью до конечных групп”, но зато этот ответ формулируется в терминах чисто алгебраического инварианта — эвклидовой решетки S_X .

Мы будем говорить, что две группы $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ изоморфны с точностью до конечных групп, если существуют такие подгруппы конечного индекса $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'_1 \subset \mathfrak{G}'$ и такие конечные нормальные делители $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}'_0 \subset \mathfrak{G}'_1$, что группы $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_0$ изоморфны.

Теорема 1. Группа автоморфизмов поверхности X типа $K3$ с точностью до конечных групп изоморфна группе $G(S_X)/\Gamma(S_X)$.

Определение групп $G(S_X)$ и $\Gamma(S_X)$ см. в конце § 1.

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа автоморфизмов поверхности X . За $\mathfrak{G}_0$ мы возьмем ядро естественного гомоморфизма $\mathfrak{G} \rightarrow G(S)$. Автоморфизм $g_0 \in \mathfrak{G}_0$, в частности, сохраняет поляризацию поверхности X и поэтому индуцируется проективным преобразованием. Таким образом, $\mathfrak{G}_0$ — алгебраическая группа. Ее алгебра Ли изоморфна $H^0(X, \Theta_X)$. Как мы видели в § 2, это пространство равно 0. Поэтому группа $\mathfrak{G}_0$ конечна.

Рассмотрим теперь в решетке H подрешетку T — ортогональное дополнение к S . Решетка

$$H' = S \oplus T$$

имеет в H конечный индекс. Поэтому ее группа автоморфизмов содержит подгруппу конечного индекса, состоящую из автоморфизмов, продолжаемых до автоморфизмов решетки H . В частности,

в группе $G(S)$ существует такая подгруппа конечного индекса G_1 , что для $g_1 \in G_1$ автоморфизм $(g_1, 1_T)$ индуцируется автоморфизмом решетки H .

Каждое отражение $\gamma \in \Gamma(S)$ можно доопределить как отражение относительно того же вектора во всей решетке H . При этом вектора из T переходят в себя. Поэтому $\Gamma(S) \subset G_1$.

Обозначим через $\overline{\mathfrak{G}}_1$ группу тех автоморфизмов из G_1 , которые индуцируются автоморфизмами поверхности X , а через $\mathfrak{G}_1$ — группу соответствующих автоморфизмов поверхности X . Тогда $\mathfrak{G}_1$ имеет конечный индекс в $\overline{\mathfrak{G}}_1$:

$$\overline{\mathfrak{G}}_1 \subset G_1, \quad \overline{\mathfrak{G}}_1 \simeq \mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_0.$$

С другой стороны, согласно основной теореме о группах, порожденных отражениями (теорема 1, § 6), группа $G(S)$ является полупрямым произведением $\Gamma(S) \cdot D \cdot G^V$, где G — группа, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих множество эффективных циклов, а $D = \{1, -1\}$. Отсюда следует, что группа G_1 является полупрямым произведением нормального делителя $\Gamma(S)$ и подгруппы $\overline{\mathfrak{G}}_1$, состоящей из тех автоморфизмов $g_1 \in G_1$, которые сохраняют эффективные циклы. В частности,

$$\tilde{\mathfrak{G}}_1 \simeq G_1/\Gamma(S).$$

Докажем, что $\tilde{\mathfrak{G}}_1 = \overline{\mathfrak{G}}_1$, откуда и будет следовать теорема. По построению, $\tilde{\mathfrak{G}}_1 \subset \overline{\mathfrak{G}}_1$. Чтобы проверить обратное включение, заметим, что автоморфизм $\tilde{g} \in \tilde{\mathfrak{G}}_1$ по определению можно продолжить до автоморфизма $g \in G(H)$, индуцирующего 1 на T , и что такое продолжение единственно. Мы проверим, что для g выполняются условия предложения, — это и докажет теорему. Первое условие — сохранение множества эффективных циклов — выполнено по определению. Второе условие следует из того, что форма π равна 0 на S и задается своим ограничением на T , а g не меняет элементов T . Теорема доказана.

Следствие. Группа автоморфизмов поверхности X типа $K3$ тогда и только тогда конечна, когда конечна группа $G(S_X)/\Gamma(S_X)$.

Пример. Рассмотрим простейший нетривиальный случай — поверхность X , для которой $\text{rg } S_X = 2$. В этом случае S_X — двумерный модуль, соответствующий неопределенной квадратичной форме. Такая форма тогда и только тогда имеет бесконечную группу

автоморфизмов, когда она не представляет 0. Если группа автоморфизмов бесконечна, то она порождается одним элементом второго порядка s и одним элементом бесконечного порядка a , причем $s^{-1}as = a^{-1}$.

Если форма не представляет ни 0, ни -2 , то группа $G(S)$ бесконечна, а $\Gamma(S) = 1$, и, по следствию, группа автоморфизмов поверхности бесконечна. Если же форма представляет -2 , то в $\Gamma(S)$ содержится хотя бы один элемент порядка 2. Такой элемент имеет вид sa^k и сопряженные ему элементы порождают, как легко видеть, подгруппу конечного индекса в $G(S)$. Поэтому группа автоморфизмов поверхности X конечна.

Мы видим, что группа автоморфизмов поверхности X бесконечна тогда и только тогда, когда в модуле S_X нет векторов длины 0 и -2 .

В работе [17] Севери рассмотрел простейший тип таких поверхностей — поверхности четвертой степени, содержащие кривую рода 2 и степени 6. В этом случае форма, соответствующая модулю S_X , имеет вид $2\lambda^2 + 12\lambda\mu + 4\mu^2$. Она не представляет ни 0, ни -2 , так что группа $G(S)$ бесконечна.

Как следует из теоремы Приложения к § 6, существуют поверхности X рассматриваемого типа, для которых модуль S_X определяется любой наперед заданной четной неопределенной формой.

Приведем еще два примера, которые нам любезно сообщил Э.Б. Винберг.

1. Для формы $-2x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2xy + 4yz$ сигнатуры (1,2) группа автоморфизмов изоморфна $PGL(2, \mathbf{Z})$. Отсюда следует, что если для поверхности X типа $K3$ решетка S_X соответствует такой форме, то X имеет конечную группу автоморфизмов.

2. Рассмотрим четную унимодулярную форму от 18 переменных сигнатуры (1, 17). Этими свойствами форма определяется однозначно ([16], стр. 93). В ее группе автоморфизмов отражения порождают подгруппу конечного индекса. Поэтому поверхность X типа $K3$, для которой решетка S_X соответствует такой форме, тоже имеет конечную группу автоморфизмов.

Из результатов Приложения к § 6 легко вытекает, что обе формы соответствуют некоторым поверхностям типа $K3$.

§ 8. Сингулярные поверхности

Напомним, что так мы называем поверхности X , для которых $\text{rg } S_X$ принимает максимально возможное значение 20.

Предложение. Для случая сингулярной поверхности X отображение периодов $\pi : H_X \rightarrow \mathbf{C}$ однозначно определяется структурой

эвклидовой решетки в H_X и заданием подмодуля $S_X \subset H_X$.

Так как периоды алгебраических циклов равны 0, то форма π определяется своими значениями на группе $T^* = H/S$. Эту группу мы снабдим скалярным произведением. Для этого продолжим произведение, определенное в H на $H \otimes \mathbf{R}$, и вложим T^* в ортогональное дополнение к $S \otimes \mathbf{R}$. Это вложение индуцирует искомое скалярное произведение.

Ввиду леммы 1 § 6 вложение $\pi : T^* \rightarrow \mathbf{C}$ является подобием, если метрика в $\mathbf{C}$ определена как $|z|^2$. Ясно, что этим свойством π определяется однозначно с точностью до множителя.

Замечание. Эвклидова решетка T^* и ортогональное дополнение T к S в H взаимны друг другу.

Действительно, если $t \in T, t^* \in T^*$, то существует такое $s^* \in S \otimes \mathbf{R}$, что $s^* + t^* = h \in H$. Тогда $h \cdot t \in \mathbf{Z}$, а так как $s^* \cdot t = 0$, то и $t^* \cdot t \in \mathbf{Z}$. Если $\varphi : T^* \rightarrow \mathbf{Z}$ — гомоморфизм, то он продолжается до гомоморфизма $\varphi' : H \rightarrow \mathbf{Z}$, равного 0 на S . Так как решетка H унимодулярна, то существует такой вектор $h_0 \in H$, что $\varphi'(h) = h \cdot h_0$. Из того, что $\varphi'(S) = 0$, следует, что $h_0 \in T$ и, значит, $\varphi(t^*) = t \cdot t^*$. Ввиду того, что решетки T и T^* двумерны, они подобны друг другу.

Теорема. Сингулярная поверхность X однозначно определяется двумерной эвклидовой решеткой T_X .

Нам надо повторить рассуждения, использованные при доказательстве предложения 2 § 6. Пусть даны две поверхности X и Y , для которых решетки T_X и T_Y изоморфны.

Согласно приложению к § 6, изоморфизм $T_X \rightarrow T_Y$ можно продолжить до изоморфизма $\varphi' : H_X \rightarrow H_Y$. Очевидно, что он переводит S_X в S_Y . Ввиду теоремы 1 § 6 можно умножить φ' на такой автоморфизм σ модуля H_Y , $\sigma \in \Gamma(H_Y)$, что $\varphi = \sigma\varphi'$ будет переводить эффективные дивизоры из H_X в эффективные на H_Y . Так как элементы из $\Gamma(H_X)$ переводят S_Y в себя и тождественны на T_Y , то φ переводит отображение периодов π_X в π_Y . Остается применить теорему Торелли.

Таким образом, сингулярная поверхность X с точностью до изоморфизма определяется классом двойничной квадратичной формы $F(x_1, x)$ — той, которой задает квадрат в T_X . Эта форма положительно определена и четна. Как показано в Приложении к § 6, любая решетка, задаваемая такой формой, изоморфна подрешетке решетки L и поэтому соответствует некоторой поверхности X .

Форму F можно представить в виде $m \cdot F'$, где $m \in \mathbf{Z}$, а F' — примитивная четная форма. Следовательно, сингулярная поверхность

имеет два инварианта — число m и форму F' . Как показано в § 6, поверхность X тогда и только тогда куммерова, когда $m \equiv 0(2)$. Форма F — это примитивная форма, соответствующая решетке T , а тем самым и решетке T^* . Иначе говоря, поверхность X определяется числом m и решеткой $T^* \subset C$, рассматриваемой с точностью до подобия.

Вместо решетки T^* в качестве инварианта поверхности можно рассматривать эллиптическую кривую $C = C/T^*$. Эта кривая, очевидно, обладает комплексным умножением.

Сопоставление поверхности X эллиптической кривой C можно описать следующим образом. Пусть X — произвольное келерово многообразие. Классическая точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow Z \rightarrow O \xrightarrow{\exp} O^* \rightarrow 0 \quad (1)$$

приводит к точной последовательности групп когомологий, которая, как показал Кодaira, дает основные конструкции теории дивизоров, если ограничиться группами когомологий размерности 1 и 2. В произвольной размерности p мы аналогично получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow H^{0,p}(C)/\Pi^{0,p}H^p(X, Z) \rightarrow H^p(O^*) \rightarrow H^{p+1}(Z),$$

где $\Pi^{0,p}$ — проектирование $H^p(C)$ на подпространство $H^{0,p}(X)$ элементов типа $(0, p)$.

Отличие от случая $p = 1$ заключается в том, что группа $H^{0,p}(C)/\Pi^{0,p}H^p(Z)$ не имеет естественной комплексной структуры — как правило, подгруппа $\Pi^{0,p}H^p(X, Z)$ не дискретна в $H^{0,p}(X, C)$. Поэтому факторгруппа по ней и не может иметь естественного смысла. Действительно, например, в связи с группой Бауэра возникает лишь ее периодическая подгруппа. Однако может случиться, что подгруппа $\Pi^{0,p}H^p(X, Z)$ дискретна в $H^{0,p}(X, C)$. Это будет тогда и только тогда, когда все пространство $\bigoplus_{i=1}^{p-1} H^{p-i,i}(X, C)$ порождает

содержащимися в нем целочисленными циклами. В этом случае группа $H^{0,p}(X, C)/\Pi^{0,p}H^p(X, C)$ является комплексным тором. В некоторых случаях она связана с обобщенными якобианами Вейля, однако далеко не всегда это так — например, такой связи заведомо нет, если p четно.

Приведенное выше условие дискретности группы $\Pi^{0,p}H^p(X, Z)$ в $H^{0,p}(X, C)$ при $p = 2$ означает, что все циклы типа $(1, 1)$ порождаются целочисленными, т.е. алгебраическими циклами. В частности, оно выполнено для сингулярных поверхностей типа $K3$. Легко видеть, что тор $H^{0,2}(X, C)/\Pi^{0,2}H^2(X, Z)$ совпадает с кривой C .

Куга заметил, что этот критерий выполняется для многообразий Сато, являющихся семействами абелевых многообразий.

В заключение мы рассмотрим одну специальную сингулярную поверхность X . Она задается уравнением

$$x_0^4 - x_1^4 = x_2^4 - x_3^4 \quad (2)$$

в $\mathbb{P}^3$. Сингулярность ее легко установить из различных соображений. Она будет следовать и из дальнейших рассуждений. Кривая C для нее находится очень просто. Дело в том, что поверхность X имеет автоморфизмы, например,

$$\sigma(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (ix_0 : x_1 : x_2 : x_3), \quad i^2 = -1,$$

которые умножают ее регулярную дифференциальную форму на i . Поэтому они должны вызвать в решетке T^* автоморфизм 4-го порядка, а этим решетка определяется с точностью до подобия однозначно: она квадратная. Кривая C имеет вид $y^2 = x^3 - x$.

Труднее найти множитель m . Вычисления, которые мы приведем, показывают только что $m = 2$ или 4 . Однако уже этого достаточно, чтобы получить удивительный (по крайней мере для авторов) результат: поверхность X куммерова!

Поверхность X имеет очевидный пучок эллиптических кривых, зависящих от параметра t и задаваемых уравнениями:

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 &= t(x_2^2 - x_3^2), \\ t(x_0^2 - x_1^2) &= x_2^2 + x_3^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим его вырожденные слои. Заведомо вырожденные слои соответствуют значениям $t = 0, \infty, 1, -1, i, -i$. Эти слои имеют тип A_3 и их компонентами являются прямые. Сумма их эйлеровых характеристик равна 24, т.е. эйлеровой характеристике всей поверхности. Поэтому других вырожденных слоев нет. Обозначим через Λ_X подгруппу группы S_X , порожденную компонентами слоев, а через Λ'_X — максимальную примитивную подрешетку в S_X , содержащую Λ_X . Квадратичная форма, определенная на Λ_X , имеет простой вид. Именно, если из каждого вырожденного слоя выбирать любые 3 компоненты и дополнить эту систему векторов слоем a , то мы получим разложение

$$\Lambda_X = M_1 \oplus M_2 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus M_4 \oplus M_5 \oplus M_6 \oplus \mathbb{Z}a, \quad (4)$$

причем $\operatorname{rg} M_i = 3$, $a^2 = a \cdot M_i = 0$ и в базисе, состоящем из трех компонент слоев, матрица квадратичной формы, соответствующей модулю M_i , имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Вычислим степень 2, на которую делится индекс $(\Lambda'_X : \Lambda_X)$. Для этого надо интерпретировать пучок (3) как эллиптическую кривую $\mathcal{X}$ над полем $k(t)$. Очевидно, что группа Λ'_X / Λ_X есть группа классов дивизоров конечного порядка на $\mathcal{X}$. Группа классов дивизоров нулевой степени на эллиптической кривой изоморфна группе рациональных точек ее якобиевой кривой. Якобиева кривая для эллиптической кривой

$$\begin{aligned} z^2 &= au^2 + bv^2, \\ w^2 &= cu^2 + dv^2 \end{aligned}$$

известна [2]. Она изоморфна кривой

$$\mu^2 = \lambda(a + c\lambda)(b + d\lambda).$$

Отсюда, после простых преобразований, мы находим, что якобиева кривая $\mathcal{A}$ кривой $\mathcal{X}$ задается уравнением

$$y^2 = x(x+1)(x+c^2), \quad c = \frac{t^2-1}{t^2+1}. \quad (6)$$

Нам надо найти точки порядка 2^k на $\mathcal{A}$. Напомним, что кривая $y^2 = (x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$ имеет точки второго порядка $(e_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$, а точка (x, y) тогда и только тогда делится на 2, когда $x - e_i \in k(t)^{*2}$.

Отсюда мы видим, что на $\mathcal{A}$ есть 3 точки порядка 2: $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = (-1, 0)$, $E_3 = (-c^2, 0)$. Простое вычисление показывает, что все они делятся на 2 и дают следующие точки:

$$\begin{aligned} \text{при делении } E_1 : & (c, \pm c(c+1)), (-c, \pm c(c-1)), \\ \text{при делении } E_2 : & (-d-1, \pm id(d+1)), (d-1, \pm id(d-1)), \\ \text{при делении } E_3 : & (c(id-c), \pm cd(id-c)), (-c(id+c), \pm cd(id+c)). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $d = \frac{2t}{t^2+1}$, так что $c^2 + d^2 = 1$.

Пользуясь приведенным выше признаком делимости точки на 2, легко усмотреть, что ни одна из точек (7) на 2 не делится. Таким образом, мы видим, что 2-компонентна группы рациональных над $k(t)$ точек кривой $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ и имеет порядок 16. Тем самым

$$(\Lambda'_X : \Lambda_X) = 16k, \quad k \equiv 1 \pmod{2}.$$

Определим теперь группу S_X . Как известно, группа S_X/Λ_X изоморфна группе классов дивизоров на кривой $\mathcal{X}$. Строение же этой группы следующее. Обозначим через l общий наибольший делитель степеней дивизоров на $\mathcal{X}$. В терминах поверхности X это общий наибольший делитель чисел $u \cdot a$, $u \in S^*$; где a — слой рассеяния, определенного кривой (6). Пусть u — такая кривая, что $u \cdot a = l$. Тогда

$$S_X = \mathbb{Z} \cdot u + S_X^0,$$

где S_X^0 состоит из классов $v \in S_X$, для которых $va = 0$. Тогда S_X^0/Λ_X — это группа классов дивизоров степени 0 на $\mathcal{X}$. Последняя группа изоморфна группе рациональных над $k(t)$ точек на кривой $\mathfrak{A}$.

Для определения этой группы надо применить рассуждения, которыми мы уже пользовались, к минимальной неособой модели поверхности (6). Она имеет те же вырожденные слои, что кривая (3). Как и раньше,

$$S_Y = \mathbb{Z}u' + S_Y^0,$$

а S_Y^0/Λ_Y — это группа точек на $\mathfrak{A}$, рациональных над $k(t)$. Поэтому $\text{rg } S_Y = \text{rg } S_Y^0 + 1$. Но $S_Y^0 \supset \Lambda_X$, а $\text{rg } \Lambda_Y = 19$. Так как $\text{rg } S_Y \leq 20$, то $\text{rg } S_Y^0 = 19$ и индекс $(S_Y^0 : \Lambda_Y)$ конечен. Иначе говоря, группа рациональных точек на $\mathfrak{A}$ конечна. Отсюда следует, что изоморфная ей группа S_X^0/Λ_X конечна, а значит,

$$S_X^0 = \Lambda'_X.$$

В результате мы видим, что

$$S_X = \mathbb{Z} \cdot u + \Lambda'_X.$$

Положим $\mathcal{A} = \mathbb{Z}u + \Lambda_X$. Тогда

$$(S_X : \mathcal{A}) = (\Lambda'_X : \Lambda_X) = 16 \cdot k,$$

$$D(S_X) = D(\mathcal{A})/2^8 k^2,$$

где $D(E)$ — дискриминант решетки E . Наконец, $D(A)$ легко вычисляется. Объединим базисы модулей M_i , в которых была записана матрица (5), и присоединим к ним вектор u . Мы получим базис, в котором матрица Грамма приобретает вид

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} A & & & & & & & * \\ & A & & & & & & \cdot \\ & & A & & 0 & & & \cdot \\ & & & A & & & & \cdot \\ & 0 & & & A & & & \cdot \\ & & & & & A & & * \\ & & & & & & 0 & l \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & l & 0 \end{array} \right\}.$$

Мы получаем, что

$$D(A) = |A|^6 l^2 = 2^{12} l^2.$$

Поэтому

$$D(S_X) = 2^4 (l/k)^2.$$

Между прочим, отсюда само собой получается, что $k = 1$, т.е. что группа точек на кривой (6) изоморфна $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z} + \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$. Действительно, $l = 1$ или 2 , так как заведомо существует элемент $v \in S_X$ с $v \cdot a = 2$ — это прямая $x_0 = x_1, x_2 = x_3$. Из того, что $D(S_X)$ — целое, а k — нечетное число, следует, что $k = 1$. Равно ли l единице или двум, зависит от того, имеет ли кривая (3) рациональную точку над полем $k(l)$. Как любезно сообщил нам В.А.Демьяненко, он доказал, что кривая (3) не имеет рациональных точек, и, значит, $l = 2$.

В результате всех этих рассуждений мы видим, что

$$D(S_X) = 16l^2, \quad (8)$$

т.е. равно 64 ввиду упомянутого результата В.А.Демьяненко.

Воспользуемся теперь тем, что в унимодулярной эвклидовой решетке дискриминанты примитивной подрешетки и ее ортогонального дополнения совпадают. Элементарную проверку этого утверждения мы оставляем читателю. Из него и из формулы (8) следует, что и

$$D(T_X) = 16l^2 = 64. \quad (9)$$

Мы видели, что двойничная форма F , соответствующая решетке T_X , имеет вид $F = m \cdot F'$, где F' — примитивная четная форма, соответствующая квадратной решетке, т.е.

$$F'(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2.$$

Поэтому $D(T_X) = D(F) = 4m^2$ и, сравнивая с (9), получаем, что

$$m = 2l.$$

Так как m четно, то поверхность X куммерова. Из результата В.А.Демьяненко следует, что $m = 4$. Поэтому соответствующая форма F имеет вид

$$F(x_1, x_2) = 8x_1^2 + 8x_2^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. , *Алгебраические поверхности*, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР **75** (1965).
2. М.И.Башмаков и Д.К.Фаддеев, *Об одновременном представлении нуля парой квадратичных форм*, Вестн. Ленингр. ун-та **19**, вып. 4 (1959), 43–46.
3. A.Borel, *Density and maximality of arithmetic subgroups*, J. reine und angew. Math. **224** (1966), no. 1, 78–89.
4. N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Paris, 1968.
5. H.F.M.Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, Ann. Math. **35** (1934), no. 3, 588–621.
6. Э.Б.Винберг, *Геометрические представления групп Кокстера*, Успехи матем. наук **25** N 2 (1970), 267–268.
7. Ф.А.Гриффитс, *Доклад о вариациях структур Ходжа*, Успехи матем. наук **25** (1970), no. 3, 175–234.
8. A.Grothendieck, *Elements de géométrie algébrique*, Publ. Math. IHES (1961), no. 8.
9. A.Grothendieck, *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV.*, Les chémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki **13** (1960/61), no. 221.
10. И.В.Долгачев и А.Н.Паршин, *Дифференциал и дискриминант регулярных отображений*, Матем. заметки **4** (1968), no. 5, 519–524.
11. К.Л.Зигель, *Автоморфные функции нескольких комплексных переменных*, ИЛ, М., 1954.
12. К.Кодаира, *О компактных аналитических поверхностях*, Сб. "Математика" **6** (1962), no. 6, 3–17.
13. К.Кодаира, *О компактных комплексных аналитических поверхностях. I*, Сб. "Математика" **6** (1962), no. 6, 19–56.
14. M.Kneser, *Zur Theorie der Kristallgitter*, Math. Ann. **127** (1954), no. 1, 105–106.
15. T.Matsusaka, and D.Mumford, *Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties*, Amer. J. Math. **86** (1964), no. 3, 668–684.
16. J.P.Serre, *Cours d'Arithmétique*, Paris, 1970.
17. F.Severi, *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo **30** (1910), 265–288.
18. J.Tate, *Genus change in inseparable extensions of function fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), no. 3, 400–406.
19. И.Р.Шафаревич, *Главные однородные пространства, определенные над полем функций*, Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР **64** (1961), 316–346.
20. R.Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. Math. **73** (1961), 295–323.

АРИФМЕТИКА ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА КЗ

(С И.И. ПЯТЕЦКИМ-ШАПИРО)

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ
КОНФЕРЕНЦИИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ
МОСКВА, 14-18 СЕНТЯБРЯ 1971

§ 1. Основные результаты

Полная алгебраическая поверхность X называется поверхностью типа КЗ, если $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и канонический класс K_X этой поверхности равен 0.

Как известно [1, гл. VIII], условию $K_X = 0$ удовлетворяют, кроме поверхностей типа КЗ, еще двумерные абелевы многообразия. Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ двумерное абелево многообразие однозначно определено периодами своих голоморфных одномерных дифференциальных форм. Отсюда вытекает, что оно определяется и периодами двумерной голоморфной дифференциальной формы. На поверхности типа КЗ нет одномерных голоморфных форм, но есть двумерная голоморфная форма — единственная с точностью до постоянного множителя. Возникает вопрос: в какой мере ее периоды определяют поверхность? Для ответа на него надо ввести некоторые понятия.

Видно, что для всех поверхностей X типа КЗ группы гомологий $H_2(X, \mathbb{Z})$ вместе со скалярным произведением, определенным индексом пересечения, изоморфны. Фиксируем одну такую евклидову решетку L и вектор $l \in L$. Отмеченной поверхностью типа КЗ назовем тройку $\tilde{X} \approx (X, \xi, \varphi)$, где X — поверхность типа КЗ, $\xi \in H_2(X, \mathbb{Z})$ — класс гомологий гиперплоского сечения при некотором ее проективном вложении и $\varphi: H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow L$ — такой изоморфизм евклидовых решеток, что $\varphi(\xi) = l$.

В пространстве $\Omega = \text{Hom}(L, \mathbb{C})$ определим билинейное скалярное произведение, продолжающее то, которое задано в L . Условия

$$\omega^2 = 0, \quad \omega \bar{\omega} > 0$$

определяют область Ω в проективном пространстве, соответствующем векторному пространству $\tilde{\Omega}$. Через $\Omega(l)$ обозначим ее связную компоненту сечения, определенную условием $\omega l = 0$. Это однородная симметрическая область, на которой действует группа $G(R)$, где G — подгруппа ортогональной группы решетки L , не меняющая вектор l . Для формы $\Gamma(X, \Omega_X^2)$ и $\gamma \in H_2(X, \mathbb{Z})$ положим

$$f(\gamma) = \int_{\gamma} \eta.$$

Очевидно, $f \in \text{Hom}(H_2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$, и видно, что φf определяет точку в $\Omega(l)$. Эту точку мы обозначим через $\tau(\tilde{X})$.

Теорема 1 (теорема Торелли для поверхностей типа КЗ).
Отмеченная поверхность $\tilde{X}$ типа КЗ однозначно определяется точкой $\tau(\tilde{X}) \in \Omega(l)$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [2]. Здесь мы изложим некоторые ее применения. Нас будут интересовать в основном арифметические применения, но ввиду того, что метод использует аналитически-геометрическую теорему 1, их нельзя рассмотреть изолированно от некоторых геометрических результатов.

Поверхности типа КЗ обладают целозначным инвариантом, который аналогичен роду кривых, — это наименьшее значение числа $1/2(D^2)$, где D — неприводимая кривая на поверхности и $(D^2) > 0$. Мы назовем его классом поверхности. Как доказано в [1, гл. VIII], дивизор $2D$ всегда очень обилен. Поэтому все поверхности одного класса определяют открытое множество S' в некоторой схеме Гильберта.

В [2] доказано, что схема S' — гладкая. На ней определено универсальное семейство $X' \rightarrow S'$ поверхностей типа КЗ заданного класса. В [2] построено семейство $X'' \rightarrow S''$ отмеченных поверхностей типа КЗ заданного класса. Его база S'' является комплексным многообразием, неразветвленно накрывающим S' , причем группа Галуа накрытия $f: S'' \rightarrow S'$ изоморфна дискретной группе $G(\mathbb{Z})$, точка слоя $f^{-1}(S')$ соответствует всем способам введения структуры отмеченной поверхности на поляризованной поверхности типа КЗ $X'_{s'}$. Отображение периодов определяет голоморфное отображение $\tau: S'' \rightarrow \Omega(l)$. В [2] показано, что группа $Pl(n)$ проективных преобразований того проективного пространства $\mathbb{P}^n$, в которое вложены поверхности $X'_{s'}$, $s' \in S'$, естественно действует на S' и на S'' , причем τ пропускается через проекцию

$$p: S'' \rightarrow S'/PL(n), \quad \tau = hp,$$

а теорема 1 как раз и следует из того, что $h: S''/PL(n) \rightarrow \Omega(l)$ является открытым вложением.

Теорема 2. Многообразие S'' связно.

Рассмотрим нормальный делитель $\Gamma \subset G(\mathbf{Z})$, являющийся конгруэнц-подгруппой и не содержащий отличных от единицы элементов конечного порядка. Многообразие $S = S''/\Gamma$ является конечнолистным накрытием многообразия S' с группой Галуа $G(\mathbf{Z})/\Gamma$ и согласно общей теореме — алгебраическим многообразием. Отображение периодов определяет голоморфное отображение $\pi: S \rightarrow \Omega(l)/\Gamma$. Так как Γ действует в $\Omega(l)$ без неподвижных точек, то к π применима теорема, доказанная независимо Борелем и Кобаяши [3], которая показывает, что π является морфизмом алгебраических многообразий. Вместе с теоремой 1 это дает, что $\Omega(l) - \tau(S'')$ содержится в собственном комплексном подмногообразии и, значит, $\tau(S'')$ связно. Отсюда следует, что гомеоморфное ему многообразие $S''/PL(n)$ связно, а, значит, связно и S'' .

Этот результат имеет два применения.

Следствие 1. Многообразие S' всех поверхностей типа $K3$ заданного класса связно.

Это очевидно, так как оно является образом S'' .¹

Следствие 2. Образ фундаментальной группы $\pi(S', s'_0)$ в $\text{Aut } H^2(X'_{s'_0}, \mathbf{Z})$, который определяется действием на когомологии слоя, совпадает с $G(\mathbf{Z})$.²

Действительно, если $H \subset G(\mathbf{Z})$ — это образ $\pi(S', s'_0)$, s''_0 — точка, лежащая над s'_0 , то, накрывая все отображения отрезка $f: I \rightarrow S'$, $f(0) = s'_0$, мы получим для накрывающих отображений g $g(0) = s''_0$ в качестве $g(1)$ точки некоторой компоненты многообразия S'' , в которой будут содержаться лишь точки $H \cdot s''_0$ из числа точек,

¹Это, очевидно, неверно: область $\Omega(l)$ состоит из двух компонент. Но доказательство верно, оно доказывает, что и S имеет две компоненты. То же относится к Следствиям 1 и 2. В частности, образ монодромии в группе автоморфизмов примитивных циклов имеет индекс 2: это автоморфизмы с единичной спинорной нормой. Отсюда легко вывести, что в группе автоморфизмов всей решетки когомологий все элементы со спинорной нормой 1 индуцируются диффеоморфизмами поверхности. Недавно S.K. Donaldson доказал, что остальные автоморфизмы диффеоморфизмами не индуцируются: Proceedings of the Georgia Topology Conference, 1985, препринт. (Примечание автора к настоящему изданию.)

²Здесь имеется в виду не вся группа когомологий, а лишь подгруппа примитивных циклов. (Примечание автора к настоящему изданию.)

лежащих над s'_0 . Так как слой над s'_0 имеет вид $G(\mathbf{Z})s'_0$, а S'' связно, то $G(\mathbf{Z}) = H$.

Например, деформируя любым способом неособую поверхность 4-й степени в $\mathbf{P}^3(\mathbf{C})$, мы можем получить в качестве автоморфизма ее когомологий любой автоморфизм соответствующей целочисленной квадратичной формы сигнатуры (2, 19).

Перейдем к формулировке арифметических приложений.

Теорема 3. Для поверхности типа КЗ над конечным полем верна гипотеза Римана.

Метод, основанный на применении теоремы 1, использует подъем поверхности X , определенной над конечным полем, в поверхность, определенную над полем характеристики 0. Это значит, что X вкладывается как замкнутый слой в схему $Y \rightarrow B$, структурный морфизм которой гладкий, а общий слой — поверхность типа КЗ над полем характеристики 0. Мы будем предполагать существование такого поднятия, хотя из определения поверхности типа КЗ следует, что для нее $H^2(X, \Theta) = 0$ и, значит, все препятствия к подъему обращаются в 0. Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbf{C}$. Обозначим через X^n произведение его на себя n раз. Группой Ходжа многообразия X мы будем называть алгебраическую подгруппу группы всех автоморфизмов $H^*(X, \mathbf{Q})$, выделенную условием тривиального действия на все подпространства $H^{p,p} \cap H^{2p}(X^n, \mathbf{Q})$ (n, p — любые). Для абелевых многообразий группа Ходжа была введена и исследована в [4]. Мы будем называть гладкое проективное многообразие X многообразием CM -типа, если его группа Ходжа коммутативна.

Гипотеза. Любое многообразие CM -типа определено над полем алгебраических чисел, и его дзета-функция выражается через L -функции одномерных характеров конечного расширения поля определения многообразия.

Прекрасная книга Шимуры и Таниямы [5] содержит доказательство этой гипотезы для абелевых многообразий. В настоящей статье это доказывается для поверхностей КЗ.

Теорема 4. Поверхность КЗ CM -типа определена над числовым полем, и ее дзета-функция выражается через L -функции одномерных характеров конечного расширения поля определения.

Теорема 3 была независимо доказана П. Делинем, который любезно прислал нам свою рукопись. Так как наше доказательство несколько отличается от доказательства Делиня (использование теоремы Торелли вносит заметное упрощение), то мы решили воспроизвести его здесь.

§. 2. Когомологии слоев как модули Галуа

Пусть X и S — неприводимые алгебраические многообразия, определенные над полем k -конечным расширением поля рациональных чисел $\mathbf{Q}$, $f: X \rightarrow S'$ — собственный гладкий морфизм над k . Группа Галуа $\text{Gal}(\overline{k(S)}/k(S))$ алгебраического замыкания $\overline{k(S)}$ поля $k(S)$ действует на l -адических этальных когомологиях $H^*(F, \mathbf{Q}_l)$ общего слоя расслоения $f: X \rightarrow S$ и тем определяется гомоморфизм

$$\text{Gal}(\overline{k(S)}/k(S)) \rightarrow \text{Aut } H^*(F, \mathbf{Q}_l)$$

в группу автоморфизмов алгебры когомологий. Обозначим через $k(S)_l$ подполе поля $\overline{k(S)}$, принадлежащее ядру этого гомоморфизма. Если надо подчеркнуть его зависимость от расслоения f , мы будем обозначать его $k(S)_{f,l}$. Пусть k' — расширение k , получающееся присоединением к k всех корней степени l^n из 1. Из существования умножения Вердье в когомологиях следует, что $k(S)_l$ содержит подполе, над которым k' имеет конечную степень.

Расслоение $f: X \rightarrow S$ называется строго непостоянным, если алгебраическое замыкание k в $k(S)_l$ имеет конечную степень над его пересечением с k' . Тогда конечным расширением поля k можно добиться того, чтобы k' было алгебраически замкнутым в $(k(S))_l$.

Лемма 1. Расслоения $f: X \rightarrow S$ тогда и только тогда строго непостоянно, когда группа $\text{Gal}(K(S)_l/K'(S))$ имеет конечный индекс в $\text{Gal}(k(S)_l/k'(S))$ для любого расширения K поля k .

Аналогично полю $k(S)_l$ рассмотрим поля $k(S)_{l,n}$, для которых группы $\text{Gal}(k(S)_{l,n}/k(S))$ вкладываются в $\text{Aut } H^*(F, \mathbf{Z}/l^n \mathbf{Z})$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(K'(S)_{l,n}/K'(S)) & \xrightarrow{\varphi_n} & \text{Gal}(k'(s)_{l,n}/k'(s)) \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Aut } H^*(F, \mathbf{Z}/l^n \mathbf{Z}) & \end{array}$$

в которой косые стрелки являются вложениями, а поэтому вложением будет и гомоморфизм φ_n . Его ядру соответствует подполе $k'(s)_{l,n} \cdot K'(S)$, и, значит,

$$K'(S)_{l,n} = k'(s)_{l,n} \cdot K' \quad (1)$$

Пусть расслоение $f: X \rightarrow S$ строго непостоянно и k' алгебраически замкнуто в $k'(s)_l$. Тогда $k'(s)_{l,n}$ — регулярное расширение поля k' . Поэтому ввиду известных свойств регулярных расширений

$$[k'(s)_{l,n} \cdot K' : K'(S)] = [k'(s)_{l,n} : k'(s)].$$

Вместе с (1) это доказывает, что φ_n , а значит, и φ — изоморфизм. Обратное утверждение получается обращением этих рассуждений.

В приложениях, которые нам встретятся, поле K будет полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Рассмотрим вложение поля k , над которым определены S , X и f в $\mathbb{C}$, и будем считать, что $k \subset \mathbb{C}$. Обозначим через $S_{\mathbb{C}}$ многообразие комплексных точек S . Фундаментальная группа $\pi(S_{\mathbb{C}}, s_0)$ действует на комплексные когомологии $H^*(F_{s_0}, \mathbb{Z})$ слоя расслоения. При этом, конечно, образ элементов из $\pi(S_{\mathbb{C}}, s_0)$ содержится в группе $\text{Aut } H^*(F_{s_0}, \mathbb{Z})$.

§. 3. Многообразия Куга–Сатаке

Конструкция абелевых многообразий, соответствующих поверхностям КЗ, указана М. Куга и И. Сатаке. Эта конструкция состоит в следующем. Пусть X — поверхности типа КЗ и $l \in H^2(X, \mathbb{Z})$ — класс когомологий, соответствующий гиперплоскому сечению.

Обозначим через $H^2(X, \mathbb{Z})^l = V \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ ортогональное дополнение к l . Сигнатура формы-индекса пересечения на V равна (2, 19).

Пусть $C^+ = C^+(V)$ будет четная клиффордова алгебра, ассоциированная с V . Мы определим сейчас в $\text{End}(C^+ \otimes \mathbb{R})$ оператор комплексной структуры j .

Пусть $V_+ = (H^{2,0} + H^{0,2}) \cap V \otimes \mathbb{R}$, e_1, e_2 — любой ортонормированный базис в V . Положим $e_+ := e_1 e_2$ и определим в V комплексную структуру

$$jx = e_+ x, \quad x \in C^+. \quad (2)$$

Как показано в [6], на $C^+ \otimes \mathbb{R}$ существует кососимметрическая форма $\alpha(x, y)$, целочисленная на C^+ и такая, что форма $\alpha(jx, y)$ симметрична и положительно определена. Следовательно, $(C^+ \otimes \mathbb{R})/C^+$ представляет собой абелево многообразие. Оно будет обозначаться J_X . В работе [4] дана конструкция ходжевых семейств абелевых многообразий. Из результатов работ [4, 7] вытекает, что на $\Omega(l)/\Gamma$, где Γ — любая конгруэнцподгруппа спинорной группы, есть ходжево семейство абелевых многообразий, соответствующее спинорной группе. Канонический гомоморфизм $\pi_1(\Omega(l)/\Gamma)$ в $\text{Aut } H^1(J_X, \mathbb{Z})$ совпадает с естественным вложением Γ в спинорную группу. Известно [4], что $\Omega(l)/\Gamma$ определено над конечным расширением поля $\mathbb{Q}$, причем рациональные функции на $\Omega(l)/\Gamma$ обладают следующим свойством: во всех точках, соответствующих абелевым многообразиям CM -типа, их значения принадлежат $\overline{\mathbb{Q}}$.

Лемма 2. Семейство абелевых многообразий, соответствующее $\Omega(l)/\Gamma$, строго непостоянно.

Доказательство. В работе [8] показано, что для любого абелева многообразия A подгруппа конечного индекса в образе группы Галуа в $\text{Aut } H^1(A, \mathbb{Q})$ содержится в группе Ходжа абелева многообразия. Для определенного нами семейства группа Ходжа совпадает со спинорной группой. С другой стороны, по конструкции семейства фундаментальная группа базы его есть конгруэнцподгруппа спинорной группы.

Лемма 3. Если группа Ходжа поверхности X коммутативна, то соответствующее абелево многообразие J_X — типа CM .

Доказательство. Из конструкции J_X вытекает существование вложения

$$V = H^2(X, \mathbb{Q})^I \rightarrow H^2(J_X, \mathbb{Q}) \quad (3)$$

с сохранением структуры Ходжа. Из определения группы Ходжа следует для любого абелева многообразия A , что эта группа переводит в себя любое подпространство $V \subset H^k(A, \mathbb{Q})$ со следующим свойством:

$$V \otimes \mathbb{C} = \sum_{p+q=k} (V \otimes \mathbb{C}) \cap H^{p,q}. \quad (4)$$

Отсюда и из (3) вытекает существование гомоморфизма

$$\tilde{\rho}: \text{Hg}(J_X) \rightarrow \text{Aut } H^2(X, \mathbb{Q})^I. \quad (5)$$

В общей точке этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом спинорной группы в ортогональную группу. Следовательно, его ядро — группа второго порядка. Это же имеет место для любого X . Пусть теперь группа Ходжа X коммутативна. Следовательно, группа Ходжа J_X — расширение коммутативной группы с помощью группы второго порядка. Известно, что группа Ходжа любого абелева многообразия редуктивна, из чего и следует, что она должна быть коммутативна, если ее фактор по подгруппе второго порядка коммутативен. Как известно [4], коммутативность группы Ходжа абелева многообразия эквивалентна тому, что это многообразие является многообразием CM -типа.

Следствие. Если X — сингулярная поверхность $K3$, то абелево многообразие J_X — CM -типа.

Достаточно проверить, что группа Ходжа X коммутативна. Это следует из того, что $\text{Hg } X$ должна тривиально действовать на $H^{1,1}(X, \mathbb{Q}) = S_X$. Следовательно, она переводит в себя T_X — ортогональное дополнение к S_X , причем индекс пересечения сохраняет форму. Остается учесть, что группа автоморфизмов двумерного модуля, снабженного скалярным произведением, коммутативна. Мы приведем сейчас пример поверхности $K3$ CM -типа.

Предварительно мы докажем следующее свойство группы Ходжа.

Лемма 4. Пусть X — любое гладкое проективное многообразие. Алгебра $\mathcal{A}_X$ всех эндоморфизмов $H^*(X, \mathbb{Q})$, сохраняющих биградуировку Ходжа, перестановочна с $\text{Hg } X$.

Доказательство. Все такие эндоморфизмы можно стандартным образом интерпретировать как рациональные классы когомологий типа (n, n) на $X \times X$, где n — размерность X . По определению, группа Ходжа сохраняет такие классы, что и дает утверждение леммы.

Следствие. Пусть X — поверхность КЗ. Если алгебра эндоморфизмов $H^2(X, \mathbb{Q})$, сохраняющих биградуировку Ходжа, имеет размерность 22, то X — поверхность CM -типа.

Приведем пример поверхностей КЗ CM -типа. Пусть K — поле CM -типа, т. е. поле вида $F(\sqrt{-\delta})$, где F — тотально вещественное поле, δ — тотально положительно, т. е. положительно при любом вложении $F \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим теперь тройку (K, φ_1, λ) , где φ_1 — вложение $F \rightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in F$, $\varphi_1(\lambda) > 0$, для остальных вложений $\varphi(\lambda) < 0$. Определим для $\alpha, \beta \in K$ следующим образом скалярное произведение

$$(\alpha, \beta) = \text{tr}(\alpha\lambda\beta^\sigma),$$

где σ — автоморфизм комплексного сопряжения. Покажем, что $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ и квадратичная форма на (α, α) имеет сигнатуру $(2, 2n-2)$, где $2n = [K : \mathbb{Q}]$. Мы имеем $\text{tr } x = \text{tr } x^\sigma$ для любого $x \in k$. Следовательно, $(\alpha, \beta) = \text{tr } \alpha\lambda\beta^\sigma = \text{tr } \beta\lambda\alpha^\sigma = (\beta, \alpha)$ ($\lambda \in F$ и, значит, $\lambda^\sigma = \lambda$).

Для вычисления сигнатуры введем в $K \otimes \mathbb{R}$ удобные координаты. Обозначим через $\psi_1, \dots, \psi_{2n}$ полную систему вложений $K \rightarrow \mathbb{C}$, занумерованную так, чтобы ψ_{2i-1}, ψ_{2i} были сопряжены. Положим $x_{2i-1} = 1/2(\psi_{2i-1}(\alpha) + \psi_{2i}(\alpha))$, $x_{2i} = 1/2i(\psi_{2i-1}(\alpha) - \psi_{2i}(\alpha))$. Мы, очевидно, имеем

$$(\alpha, \alpha) = 2 \sum \lambda_k (x_{2k-1}^2 + x_{2k}^2),$$

где $\lambda_k = \psi_{2k-1}(\lambda) = \psi_{2k}(\lambda)$. Остается достичь того, чтобы форма была представима стандартной формой — индексом пересечения на $H^2(X, \mathbb{Q})$. Согласно теореме Хассе [7] это, во всяком случае, возможно, если $2n \leq 16$, так как размерность стандартного модуля 22.

§ 4. Дзета-функции поверхностей типа КЗ

Наш метод исследования основывается на построении двух расслоений над одной и той же базой, которые будут удовлетворять условиям леммы 6. Одно из них — это универсальное расслоение $f: X \rightarrow S$ для поверхностей типа КЗ заданного класса. Его база была определена ранее. Другое будет построено, исходя из расслоения на абелевы многообразия над базой $\Omega(l)/\Gamma$, введенного в предшествующем параграфе. Применение леммы 6 позволит перенести классические результаты об абелевых многообразиях на поверхности типа КЗ.

На многообразии $S = S''/\Gamma$, введенном в § 1, рассмотрим семейство $f': X' \rightarrow S'$ — обратный образ семейства $S \rightarrow S'$ относительно накрытия $S \rightarrow S'$. По критерию Вейля семейство S определено над конечным расширением поля $\mathbf{Q}$.

Лемма 5. *Расслоение $f: X \rightarrow S$ строго непостоянно.*

Рассмотрим гомоморфизм $\varphi: \pi(S_{\mathbf{C}}, s_0) \rightarrow \text{Aut } H^2(F_{s_0}, \mathbf{Z})$, который задается действием группы $\pi(S_{\mathbf{C}}, s_0)$ на когомологии слоя. Основой доказательства является соотношение

$$\varphi \cdot \pi(S_{\mathbf{C}}, s_0) = \Gamma,$$

сразу же вытекающее из следствия 2 в § 1.

Заметим, что $H^*(F, \mathbf{Z}) = H^0(F, \mathbf{Z}) \oplus H^2(F, \mathbf{Z}) \oplus H^4(F, \mathbf{Z})$, и поэтому группа $\text{Aut } H^*(F, \mathbf{Z})$ содержит $G(\mathbf{Z})$, где G — ортогональная группа квадратичной формы, определенной умножением когомологий в решетке $H^2(F, \mathbf{Z})^1$. Обозначим через G_l пополнение группы $\varphi\pi(S_{\mathbf{C}}, s_0)$ в топологии, определенной конгруэнцподгруппами по модулям l^n в группе $\text{Aut } H^*(F_{s_0}, \mathbf{Z}) \supset G(\mathbf{Z})$. Ввиду того, что для $G(\mathbf{Z})$ верна теорема аппроксимации, пополнение группы $G(\mathbf{Z})$ совпадает с $G(\mathbf{Z}_l)$, а G_l является замыканием Γ в $G(\mathbf{Z}_l)$. По условию $(G(\mathbf{Z}_l) : G_l) < \infty$.

Согласно теореме сравнения для этальных когомологий кольца $H^*(F_{S_0}, \mathbf{Z}_l)$ и $H^*(F, \mathbf{Z}_l)$ изоморфны, а группа G_l совпадает с образом группы $\text{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$. Так как, очевидно, образ группы $\text{Gal}(k(S)_l/k(S))$ содержится в $G(\mathbf{Z}_l)$, а уже образ $\text{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$ имеет в $G(\mathbf{Z}_l)$ конечный индекс, то и

$$(\text{Gal}(k(S)_l/k(S)) : \text{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))) < \infty$$

Таким образом, условие, необходимое для того, чтобы f было строго непостоянным расслоением, выполнено при $K = \mathbf{C}$. Так как $\mathbf{C}$

можно принять за универсальную область в смысле А. Вейля, то это условие выполнено для любого K .

Рассмотрим теперь два расслоения $f: X \rightarrow S$ и $f': X' \rightarrow S$ над одной и той же базой. Рассмотрев их над $\mathbf{C}$, мы свяжем с каждым из них "систему локальных коэффициентов" $H^*(F_S, \mathbf{Q})$, или, что то же самое, пучок $R^*f_*\mathbf{Q}$ на S . Пусть задан локально-тривиальный подпучок A пучка $\text{Aut } R^*f_*\mathbf{Q}$ и гомоморфизм

$$\rho: A \rightarrow \text{Aut } R^*f'_*\mathbf{Q}$$

этих пучков, т. е. система гомоморфизмов

$$\rho_s: A_s \rightarrow \text{Aut } H^*(F'_s, \mathbf{Q}),$$

согласованная с действием фундаментальной группы $\pi(S_{\mathbf{C}})$. Тем самым, как мы уже видели, определяем гомоморфизм групп

$$\rho_{et}: A_{\xi} \rightarrow \text{Aut } H^*(F', \mathbf{Q}_l),$$

где ξ — общая точка базы S , а F' — общий слой расслоения f' .

Лемма 6. Если F и F' — строго непостоянные расслоения, то гомоморфизм ρ_{et} перестановочен с действием подгрупп конечного индекса в группах $\text{Gal}(k(S)_{f,l}/k'(S))$ и $\text{Gal}(k(S)_{f',l}/k'(S))$.

Действительно, по построению ρ_{et} перестановочен с действием группы G_l , т. е. группы $\text{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$ (эта группа зависит только от базы и, значит, одна и та же для расслоений f и f'). Так как оба расслоения строго непостоянны, то группа $\text{Gal}(\mathbf{C}(S)_l/\mathbf{C}(S))$ содержится, как подгруппа конечного индекса в группах $\text{Gal}(k(S)_{f,l}/k'(S))$ и $\text{Gal}(k(S)_{f',l}/k'(S))$. Отсюда следует утверждение леммы.

Для построения второго расслоения мы воспользуемся отображением периодов. Легко видеть, что оно определяет голоморфное отображение $\pi: S \rightarrow \Omega/\Gamma$. С другой стороны, напомним, что S и Ω/Γ имеет структуру алгебраического многообразия, определенно над конечным расширением поля рациональных чисел.

Лемма 7. Голоморфное отображение π совпадает с морфизмом алгебраических многообразий, определенным над конечным расширением поля рациональных чисел.

То, что π представляет собой морфизм многообразий, верно для любого голоморфного отображения алгебраического многообразия S в Ω/Γ . Это является содержанием теоремы Бореля и Кобаяши [3].

Нам остается доказать, что π определено над конечным расширением поля рациональных чисел $\overline{\mathbb{Q}}$, или, что то же самое, над $\overline{\mathbb{Q}}$. Для этого напомним, что на S действует группа G проективных преобразований того пространства, в которое вложены все слои семейства f . Рассмотрим такое открытое множество $U \subset S$, что фактор U/G существует. Нам достаточно доказать, что над $\overline{\mathbb{Q}}$ определен морфизм $\pi: U \rightarrow \Omega/G$, а он представляется в виде $\pi = h \cdot p$, где $p: U \rightarrow U/G$ — естественная проекция, а $h: U/G \rightarrow \Omega/G$ — некоторый морфизм. Нам достаточно доказать, что h определен над $\overline{\mathbb{Q}}$.

Согласно теореме Торелли, доказанной в работе [2], h является открытым вложением. Докажем, что для функции $r \in \overline{\mathbb{Q}}(\Omega/G)$ $h^*(r) \in \overline{\mathbb{Q}}(U/G)$. Для этого мы воспользуемся тем, что имеется много точек $x \in \Omega/G$, про которые известно, что $r(x) \in \overline{\mathbb{Q}}$ для всех $r \in \overline{\mathbb{Q}}(\Omega/G)$. Такими являются точки, соответствующие сингулярным поверхностям типа CM (см., следствие леммы 4, § 3). В частности, таковы точки, соответствующие сингулярным поверхностям типа $K3$. Точка $h^{-1}(x)$ определена над $\overline{\mathbb{Q}}$, если точка x соответствует сингулярной поверхности типа $K3$. Это будет доказано в лемме. Таким образом, точки $h^{-1}(x)$, соответствующие сингулярным поверхностям, образуют всюду плотное множество в U/G и для $r \in \overline{\mathbb{Q}}(\Omega/G)$, функция $h^*(r)$ принимает в них алгебраические значения. Тогда $h^*(r) \in \overline{\mathbb{Q}}(U/G)$ по лемме 9.

Лемма 8. Если точки $x \in D/G$ соответствуют сингулярной поверхности типа $K3$, то точка $h^{-1}(x) \in U/G$ определена над конечным расширением поля $\overline{\mathbb{Q}}$.

Нам достаточно доказать, что точка $h^{-1}(x)$ инвариантна относительно подгруппы конечного индекса группы всех автоморфизмов поля $\mathbb{C}$. Так как $h^{-1}(x)$ есть образ G -орбиты на U , то наше утверждение будет доказано, если проверить, что эта орбита сохраняется подгруппой конечного индекса группы $\text{Aut } \mathbb{C}$. Это утверждение равносильно тому, что если X — поляризованная поверхность типа $K3$, соответствующая точке x (т. е. сингулярная), то среди поляризованных поверхностей X^σ , $\sigma \in \text{Aut } \mathbb{C}$ имеется лишь конечное число неизоморфных.

Последнее утверждение вытекает из классификации сингулярных поверхностей, полученной в работе [2]. Действительно, решетки Нерона — Севери S_X и S_{X^σ} поверхностей X и X^σ изоморфны. Поэтому ортогональные дополнения T_X и T_{X^σ} этих решеток в группе гомологий имеют одинаковые дискриминанты, равные дискриминанту S_X . Но существует только конечное число неизоморфных

решеток с заданным дискриминантом, а решетка T_X , как доказано в [2] (теорема в § 8), однозначно определяет поверхность X с точностью до изоморфизма.

Лемма 9. Пусть M — неприводимое алгебраическое многообразие, определенное над конечным расширением k поля $\mathbb{Q}$. Если $f \in \mathbb{C}(M)$ такова, что для некоторого всюду плотного множества $Z \subset M_{\overline{\mathbb{Q}}}$ значения f принадлежат $\overline{\mathbb{Q}}$, то $f \in \overline{\mathbb{Q}}(M)$.

Доказательство. Из того, что M определено над некоторым конечным расширением k поля $\mathbb{Q}$, следует, что в $k(M)$ существуют такие функции $f_0, f_1, \dots, f_n, n = \dim M$ и такое $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$, что любая $f \in \mathbb{C}(M)$ может быть однозначно представлена в виде

$$f = 1/q \sum_{k=0}^m p_k(f_1, \dots, f_n) f_0^m, \quad \text{где}$$

$p_k(f_1, \dots, f_n), k = 0, \dots, m, q(f_1, \dots, f_n)$ — полиномы с комплексными коэффициентами от $f_1, \dots, f_n$; $(p_0, \dots, p_m, q) = 1$.

Очевидно, что если $f = 0$ на всюду плотном множестве точек, то $f \equiv 0$. По условию, бесконечная система линейных уравнений относительно коэффициентов полиномов $q, p_k, k = 0, \dots, m$ вида

$$q(f_1(x), \dots, f_n(x)) f(x) = \sum p_k(f_1(x), \dots, f_n(x)) f_0^k(x), \quad x \in M$$

имеет ненулевое решение. Эта система линейна, и, значит, если она имеет ненулевое решение в $\mathbb{C}$, то она должна иметь ненулевое решение в поле, порожденном коэффициентами. Отсюда вытекает, что она должна иметь решение в некотором конечном расширении поля $\mathbb{Q}$. Таким образом, существует такая функция

$$\tilde{f} = \frac{1}{\tilde{q}} \sum \tilde{p}_k(f_1, \dots, f_n) f_0^k, \quad \text{что}$$

$\tilde{q}, \tilde{p}_k \in \overline{\mathbb{Q}}[T_1, \dots, T_n]$ и $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in Z$. Тогда $\tilde{f} = f$, что и дает утверждение нашей леммы.

Рассмотрим теперь семейство абелевых многообразий A , определенное над $\Omega(I)/\Gamma$ и введенное в предшествующем параграфе. Обозначим через X его обратный образ относительно морфизма $f: S \rightarrow \Omega(I)/\Gamma$. Из доказанного ранее следует, что X' определено над конечным расширением поля $\mathbb{Q}$ и что оно строго непостоянно. Гомоморфизм $\tilde{\rho}$, введенный в предшествующем параграфе, определяет гомоморфизм $\bar{\rho}: \text{Hg}(A_\xi)(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut } H^*(F_\xi, \mathbb{Q})$, где A_ξ и F_ξ — слои расслоений A и F .

Проверим, что ρ удовлетворяет условиям леммы 2, т. е. перестановочен с действием группы $\pi(S_{\mathbf{C}}, s_0)$. Морфизм $S \rightarrow \Omega(I)/\Gamma$ определяет эпиморфизм $\pi(S, s_0) \rightarrow \Gamma$, и группа $\pi(S, s_0)$ действует на когомологии слоев расслоения X через этот гомоморфизм. Для расслоения X' это верно по определению. Перестановочность гомоморфизма ρ с действием группы Γ очевидна из инвариантного характера его определения.

Таким образом, проверено, что построенные расслоения X и X' удовлетворяют условиям леммы 2, и мы можем применить эту лемму. Мы получаем подгруппу конечного индекса G в $\text{Gal}(k(S)_I/k'(S))$ действия которой на $\text{Aut } H^*(F, \mathbf{Q}_I)$ и $\text{Hg}(A_S)(\mathbf{Q}_I)$ связаны гомоморфизмом ρ .

Докажем, что в группе $\text{Gal}(k(S)_I/k'(S))$ есть подгруппа конечного индекса G , обладающая тем же свойством.

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Hg}(A_s, \mathbf{Q}_I) \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \rho \\ \text{Gal}(k(s)_I/k(s)) & & \\ & \searrow \psi & \\ & & \text{Aut } H^*(F_S, \mathbf{Q}_I) \end{array} ,$$

где s — общая точка многообразия S , коммутативна при ограничении на подгруппу Γ . С другой стороны, переходя к детерминантам, мы получим аналогичную коммутативную диаграмму для группы $\text{Gal}(k'(s)/k(s))$. Отсюда следует, что элементы $\Psi(g)^{-1}(\rho\varphi)(g)$ коммутируют с $\Psi(G)$. Так как по условию $\Psi(G)$ имеет конечный индекс в группе унимодулярных автоморфизмов алгебры $H^*(F_S, \mathbf{Q}_I)$, а центр последней группы конечен, то функции $\Psi(g)^{-1}(\rho\varphi)(g)$ равны 1 на некоторой окрестности 1, т. е. группе $\tilde{G}$.

Пусть $s_0 \in S$ — точка, определенная над конечным расширением поля $\mathbf{Q}$. В любом конечном расширении Галуа $k(s_I) \supset L \supset k'(S)$, $[L : k'(S)] < \infty$, рассмотрим нормализацию S_L многообразия S . Прообразы точки s_0 в S_L переставляются группой Галуа $L/k'(s)$ и определяют группу разложения и поле классов вычетов. Рассматривая объединение всех таких полей J' , мы получим поле классов вычетов $k(s_0)_I$ и группу Галуа, изоморфную группе разложения

$$\text{Gal}(k(s_0)_I/k'(s_0)) \subset \text{Gal}(k(s)_I/k'(s)) . \quad (6)$$

Из функториального характера групп когомологий и из включе-

ния (6) следует существование коммутативного треугольника

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathrm{Hg}(A_{s_0})(Q_l) \\
 & \nearrow & \downarrow \rho \\
 \mathrm{Gal}(k(s_0)_l/k'(s_0)) & & \mathrm{Aut} H^*(F_{s_0}, Q_l)
 \end{array}$$

В нашем случае

$$H_g(A_{s_0})(Q_l) \subset \mathrm{Aut} \Lambda^2 H^1(F'_{s_0}, Q_l)$$

и ρ сохраняет собственные значения автоморфизма Фробениуса.

Так как A_{s_0} — абелево многообразие, то отсюда вытекает теорема 3 ввиду известных результатов Вейля.

Если F_{S_0} — поверхность CM -типа, то, согласно лемме 3, A_{S_0} — абелево многообразие CM -типа. Отсюда вытекает теорема 4 ввиду результатов Шимуры–Таниямы [5].

Список литературы

1. , *Алгебраические поверхности*, Труды МИАН СССР **75** (1965).
2. И.И. Пятецкий-Шапиро, И.Р. Шафаревич, *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа КЗ*, Изв. АН СССР, серия матем. **35**, № 3, 530.
3. S. Kobayashi, *Preprint*.
4. D. Mumford, *A note on Shimura's paper "Discontinuous groups and Abelian varieties"*, Math. Ann. **181** (1969), № 4, 345.
5. G. Shimura, Y. Taniyama, *Complex multiplication of Abelian varieties and its applications to number theory*, Tokyo, 1961.
6. Kuga, Satake, *Abelian varieties attached to polarized K3-surfaces*, Math. Ann. **169** (1967), 239.
7. З.И. Борович, И.Р. Шафаревич, *Теория чисел*, М., 1964.
8. И.И. Пятецкий-Шапиро, *Взаимоотношения между гипотезами Тейта и Ходжа для абелевых многообразий*, Матем. сб. **85** (1971), № 4, 610.

НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЕ МОРФИЗМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(С А.Н. РУДАКОВЫМ)

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР СЕР.

МАТЕМ. ТОМ 40 no.6 (1976)

В работе рассматриваются алгебраические многообразия над алгебраически замкнутым полем k конечной характеристики p и их конечные несепабельные морфизмы степени p . Такие морфизмы многообразия X соответствуют рациональным векторным полям D на X , удовлетворяющим условию $D^p = fD$, где f — рациональная функция (мы называем такие поля p -замкнутыми). Эти морфизмы могут быть описаны как морфизмы факторизации по p -замкнутому векторному полю.

В § 1 доказывается, что если многообразие гладко, а векторное p -замкнутое поле имеет только дивизориальные особенности, то фактор тоже является гладким многообразием (теорема 1). В этом случае морфизм факторизации локально описывается как извлечение корня степени p из некоторого локального параметра.

В § 2 выводится формула, связывающая канонический класс многообразия, дивизор p -замкнутого векторного поля и канонический класс фактора по этому полю. Используя ее, для алгебраических поверхностей доказывается обращение теоремы 1: если фактор гладкой поверхности по p -замкнутому векторному полю гладкий, то поле имеет только дивизориальные особенности (теорема 4). Если на проективной поверхности есть ненулевое регулярное векторное поле, то существует и p -замкнутое поле. Из приведенных результатов нетрудно доказать, что фактор поверхности типа КЗ по p -замкнутому полю должен быть рациональной поверхностью (теорема 5). Отсюда следует, что если на поверхности типа КЗ существует ненулевое регулярное векторное поле, то она унирациональна и имеет пучок эллиптических или квазиэллиптических кривых.

Далее исследуются регулярные векторные поля на поверхностях, расслоенных на кривые. В частности, дается полный список всех

эллиптических поверхностей без кратных слоев, на которых существуют регулярные векторные поля (с одним дополнительным ограничением при $p = 2$) (теорема 6). В сочетании с результатами § 2 отсюда выводится, что на поверхности типа КЗ не существует регулярных векторных полей. Из этого, конечно, следует, что для таких поверхностей существует формальное многообразие модулей, имеющее, как и в случае полей характеристики 0, размерность 20.

Авторы благодарят И.В. Долгачева, обратившего их внимание на работы [8] и [9], и В. Данилова, М. Рида и А.Н. Тюринна за полезное обсуждение.

§ 1. Несепарабельные морфизмы и векторные поля

Если K/L – несепарабельное расширение степени p (равной характеристике), то модуль дифференцирований K/L одномерен, т.е. существует такое дифференцирование D поля K , что $L = K^D = \{\alpha \in K; D(\alpha) = 0\}$ и D определено однозначно с точностью до ненулевого множителя из K . Кроме того, $D^p = \alpha D, \alpha \in K$. Дифференцирование, обладающее этим свойством, мы будем называть p -замкнутым. Наоборот, любое p -замкнутое дифференцирование определяет подполе $K = K^D$, над которым K является несепарабельным расширением степени p .

Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие, определенное над алгебраически замкнутым полем K , и D – рациональное векторное поле на X , т.е. дифференцирование поля $k(X)/k$. Обычная конструкция определяет многообразие X^D и морфизм $\pi_D: X \rightarrow X^D$ (если $X = \cup U_i$, где $U_i = \text{спес } A_i$ – аффинные множества, то $X^D = \cup \text{спес}(A_i^D)$). Следующие свойства хорошо известны:

- 1) π_D -конечный, чисто несепарабельный морфизм.
- 2) Если X нормально, то и X^D нормально.
- 3) Если D p -замкнуто, то $\deg \pi_D = p$.

Наоборот, если $\pi: X \rightarrow Y$ – конечный несепарабельный морфизм степени p , а X и Y нормальны, то существует такое рациональное p -замкнутое векторное поле D , что $\pi = \pi_D, Y = X^D$ и D определено однозначно с точностью до ненулевого множителя из $k(X)$. Действительно, D определяется из условия $k(Y) = k(X)^D$. Из этого вытекает существование конечного бирационального морфизма $\varphi: X^D \rightarrow Y$, который, ввиду нормальности Y , должен быть изоморфизмом.

Дальше мы обычно будем обозначать векторное поле на многообразии X через D , если оно интерпретируется как дифференцирование поля $k(X)$, и через θ , если оно рассматривается как сечение

касательного расслоения. Вектор, соответствующий точке $x \in X$, будет в первом случае обозначаться D_x , а во втором — $\theta(x)$.

Существование p -замкнутых векторных полей иногда можно вывести из следующего замечания:

Лемма 1. Если X — полное многообразие, на котором существует ненулевое регулярное векторное поле, то на X существует и p -замкнутое регулярное векторное поле.

Действительно, в этом случае пространство $H^0(X, \Theta_X)$, где Θ_X — касательное расслоение, является конечномерной p -алгеброй Ли над полем k . Для любого $\theta \in H^0(X, \Theta_X)$, $\theta \neq 0$, элементы θ^{p^i} , $i = 1, 2, \dots$, порождают конечномерную абелеву p -подалгебру A . В A возведение в степень p определяет p -линейное преобразование, которое, как известно, приводится к диагональному виду. Поэтому существует такое $D \in H^0(X, \Theta_X)$, $D \neq 0$, что $D^p = \lambda D$, $\lambda \in k$.

Следствие. Если на полном алгебраическом многообразии существует ненулевое регулярное векторное поле, то существует и такое ненулевое регулярное векторное поле D , что $D^p = 0$ или $D^p = D$.

Действительно, согласно доказательству леммы существует поле $\overline{D}$, для которого $\overline{D}^p = \lambda \overline{D}$, $\lambda \in k$. Если $\lambda \neq 0$, то для $D = \lambda^{1/(1-p)} \overline{D}$ будем иметь $D^p = D$.

Те векторные поля D , для которых $D^p = 0$, мы будем называть полями аддитивного типа, а те, для которых $D^p = D$, — полями мультипликативного типа.

Лемма 2. На проективной прямой всякое ненулевое регулярное векторное поле записывается в некоторой системе координат или в виде $\frac{d}{dx}$, или в виде $\alpha x \frac{d}{dx}$, $\alpha \in k^*$. В первом случае поле имеет одну особую точку и является полем аддитивного типа, а во втором — имеет две особые точки и пропорционально полю мультипликативного типа.

Действительно, так как степень антиканонического класса проективной прямой равна 2, то ненулевое регулярное векторное поле имеет одну или две особые точки. Если регулярное векторное поле D имеет единственную особую точку в бесконечности, то $D = f(x) \frac{\partial}{\partial x}$, где f — многочлен, не имеющий корней. Поэтому $D = \alpha \frac{d}{dx}$ и преобразованием $x \rightarrow \alpha x$ переводится в $\frac{d}{dx}$. Если же D

имеет две особые точки 0 и ∞ , то $D = \alpha x \frac{d}{dx}$. Остальные утверждения леммы очевидны.

Если X — гладкое, то любое рациональное векторное поле в локальных координатах в точке $x \in X$ записывается в виде

$$D = \sum_1^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in k(X).$$

Существует такая функция $h_x \in k(X)$, что

$$f_i = h_x \bar{f}_i, \quad \bar{f}_i \in \mathcal{O}_x, \quad \text{н.о.д. } ((\bar{f}_1), \dots, (\bar{f}_n)) = (1).$$

Функции h_x определяют дивизор на X , который называется дивизором поля D и обозначается (D) . Если $D' = fD$, $f \in k(X)$, $f \neq 0$, то поля D' и D будут называться эквивалентными; это будет записываться как $D' \sim D$. В этом случае $(D') \sim (D)$.

Если h — локальное уравнение дивизора D в некотором открытом множестве U , то $h^{-1}D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $f_i \in \mathcal{O}(U)$, и идеал $(f_1, \dots, f_n)$ определяет в U подмногообразие коразмерности > 1 . Когда это подмногообразие пусто при любом выборе открытого множества U , мы будем говорить, что поле D обладает только дивизориальными особенностями.

Несепарабельный конечный морфизм $\pi : X \rightarrow Y$ степени p устанавливает некоторые связи между подмногообразиями многообразий X и Y . Пусть D — векторное поле X , регулярное в общей точке v простого дивизора $V \subset X$. Обозначим через D' векторное поле, эквивалентное D , регулярное и не обращающееся в 0 в точке v . Мы будем называть V интегральным подмногообразием для D , если вектор D'_v касателен к V . В этом случае D определяет векторное поле на V , причем, очевидно, многообразие V^D будет подмногообразием в X^D .

Предложение 1. Пусть X и Y — многообразия, неособые в коразмерности 1, $\pi : X \rightarrow Y$ — конечный несепарабельный морфизм степени p , D — соответствующее ему p -замкнутое векторное поле, C — неприводимый дивизор на X и C' — его образ на Y . Если C — интегральное подмногообразие для D , то $\pi_* C = pC'$ и $\pi^* C' = C$; если же C — не интегральное подмногообразие, то $\pi_* C = C'$, $\pi^* C' = pC$.

Доказательство. Заменяя D на эквивалентное векторное поле, мы можем считать, что C не входит в дивизор D . Пусть u — локальное уравнение C в некотором открытом множестве. Очевидная

проверка показывает, что C тогда и только тогда является интегральным подмногообразием для D , когда $D(u) = 0$ на C . Обозначим через $\mathcal{O}$ локальное кольцо дивизора C . Оно является одномерным регулярным локальным кольцом, причем условие $D(u) = 0$ на C равносильно тому, что $D(u) \equiv 0(u)$ в $\mathcal{O}$.

Кольцо $\mathcal{O}^D$ тоже одномерно и регулярно, причем $\mathcal{O}$ имеет ранг p над $\mathcal{O}^D$. Пусть u и v – простые элементы в $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^D$. Как известно, возможны два случая. Либо u можно выбрать так, что $u = v \in \mathcal{O}^D$, причем $[\mathcal{O}/u : \mathcal{O}^D/u] = p$, $\pi_* C = pC'$, $\pi^* C' = C$, либо $v = u^p \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathcal{O}^*$, $\mathcal{O}/u = \mathcal{O}^D/u$, $\pi_* C = C'$, $\pi^* C' = pC$. В первом случае $u \in \mathcal{O}^D$, $D(u) = 0$ и, значит, C – интегральное подмногообразие для D . Наоборот, если C – интегральное подмногообразие, то D определяет дифференцирование в $\mathcal{O}/u$, причем $[\mathcal{O}/u : (\mathcal{O}/u)^D] = p$. Так как $[\mathcal{O}/u : \mathcal{O}^D/v] \leq p$, то из включений $\mathcal{O}^D/v \subset (\mathcal{O}/u)^D \subset \mathcal{O}/u$ следует, что мы имеем первый случай. Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть X – гладкое многообразие и D – p - замкнутое векторное поле на X , имеющее в окрестности точки $x \in X$ только дивизориальные особенности. Тогда в пополнении $\mathcal{O}_x$ локального кольца точки x существуют такие локальные параметры $x_1, \dots, x_n$, что $D \sim \frac{\partial}{\partial x_n}$.

Доказательство. Выберем некоторую систему локальных параметров $y_1, \dots, y_n$ в точке x . Тогда $\hat{\mathcal{O}}_x \approx k[[y_1, \dots, y_n]]$ и $D = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Заменяя поле D на эквивалентное, мы можем далее считать D регулярным и предполагать, что одна из функций f_i не обращается в 0 в точке x , например $f_n \in \hat{\mathcal{O}}_x^*$. Заменяя D на $f^{-1}D$, мы получаем, что

$$D = \sum_{i=1}^{n-1} g_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad g_i \in \hat{\mathcal{O}}_x.$$

Докажем, что если все $g_i \in \mathfrak{m}_x^k$, то существуют новые локальные параметры $\{y'_i\}$ в $\hat{\mathcal{O}}_x$ такие, что

$$D = \sum_{i=1}^{n-1} g'_i \frac{\partial}{\partial y'_i} + \frac{\partial}{\partial y'_n}, \quad g'_i \in \mathfrak{m}_x^{k+1},$$

и $y'_i - y_i \in \mathfrak{m}_x^{k+1}$ для всех i .

Доказательство этого утверждения для всех k заканчивает доказательство теоремы.

Сначала рассмотрим случай $k = 0$. Положим

$$y'_i = y_i - y_i(x) \cdot y_n, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ y'_n = y_n.$$

Легко проверить, что это есть искомые параметры. Пусть $k > 0$. Положим

$$y'_i = y_i - z_i, \quad z_i \in \mathfrak{m}_x^{k+1}, \quad y'_n = y_n.$$

Коэффициенты g'_i дифференцирования D в новых координатах таковы, что

$$g'_i \equiv g_i - \frac{\partial z_i}{\partial y_n} (\text{mod } \mathfrak{m}_x^{k+1}),$$

т.е. для нахождения нужных поправок z_i нам надо решить $n-1$ уравнение вида

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_n} = \bar{g}_i,$$

где $\bar{g}_i$ — начальная форма степени k ряда g_i . Это уравнение решемо в кольце $\mathbf{k}[[y_1 \dots y_n]]$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{p-1} \bar{g}_i = 0, \quad (1)$$

т.е.

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{p-1} g_i \in \mathfrak{m}_x^{k-p+2}. \quad (2)$$

Если $0 < k < p-1$, то соотношение (1) выполнено автоматически. В случае $k \geq p-1$ нам остается доказать утверждение:

Лемма. Если $D = \sum_{i=0}^{k-1} g_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_n}$, D p -замкнуто и $g_i \in \mathfrak{m}_x^k$, где $k \geq p-1$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{p-1} g_i \in \mathfrak{m}_x^{k-p+2} \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n-1. \quad (2)$$

Доказательство леммы. Обозначим $a = \sum_{i=1}^{n-1} g_i \frac{\partial}{\partial y_i}$ и $b = \frac{\partial}{\partial y_n}$, тогда $D = a + b$ и

$$D^p = (a + b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a, b).$$

При этом $is_i(a, b)$ есть коэффициент при λ^{i-1} в выражении $(\text{ad}(\lambda a + b))^{p-1}a$ (см. [6], стр. 207).

Напомним, что алгебра Ли дифференциальных операторов над $\hat{\mathcal{O}}_x$ обладает фильтрацией $\mathcal{L}_{-1} \supset \mathcal{L}_0 \supset \dots$, где $\mathcal{L}_k = \oplus m^{k+1} \frac{\partial}{\partial y_i}$, причем

$$[\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_s] \subset \mathcal{L}_{r+s}, \quad \mathcal{L}_r^p \subset \mathcal{L}_{pr}.$$

Отсюда следует, что

$$s_i(a, b) \in \mathcal{L}_{ik-p}, \quad a^p \in \mathcal{L}_{kp-p}.$$

Ввиду того, что $b^p = 0$,

$$D^p \equiv s_1(a, b) \equiv (\text{ad } b)^{p-1}a \quad (\mathcal{L}_{2k-p}).$$

Так как

$$(\text{ad } b)^{p-1}a = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{p-1} g_i \right) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

то в это выражение не входит член с $\frac{\partial}{\partial y_n}$. С другой стороны, нам дано, что $D^p = fD$. Поэтому $f \equiv 0 \pmod{m_x^{2k-(p-1)}}$ и $(\text{ad } b)^{p-1} \in \mathcal{L}_{2k-p}$, откуда следует (2). Лемма, а тем самым и теорема 1, доказаны.

Следствие. В условиях теоремы 1 многообразие $Y = X^D$ неособо в точке $\pi(x)$ и можно выбрать такие системы локальных параметров $x_1, \dots, x_n$ в $\hat{\mathcal{O}}_x$, что $x_i = \pi^* y_i$, $i < n$, $x_n = (\pi^* y_n)^{1/p}$.

Следующий результат понадобится нам в § 4.

Теорема 2. Пусть X – гладкое многообразие, D – векторное поле мультипликативного типа на X . Если поле D обращается в 0 в точке $x \in X$, то существует система локальных параметров $x_1, \dots, x_n$ в $\mathcal{O}_x$, для которых $D = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где $\alpha_i \in \mathbb{F}_p$.

Доказательство. Из условия $D^p = D$ следует, что $D \in \mathcal{L}_0$, $D \notin \mathcal{L}_1$ и поэтому для некоторых локальных параметров $y_1, \dots, y_n$

$$D = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad P_i \in m_x^2, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}_p.$$

Проведем индукцию. Предположим, что

$$D = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{и} \quad P_i \in \mathfrak{m}_x^l.$$

Рассмотрим замену локальных параметров

$$x'_i = x_i + \xi_i.$$

Нам нужно, чтобы было:

$$D(x_i + \xi_i) \equiv \alpha_i(x_i + \xi_i) \quad (\mathfrak{m}_x^{l+1}) \quad (3)$$

Введем дополнительные обозначения:

$$D_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D_1 = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда равенства (3) означают, что

$$\alpha_i x_i + P_i + D_0 \xi_i \equiv \alpha_i(x_i + \xi_i) \quad (\mathfrak{m}_x^{l+1}),$$

т.е. для построения ξ_i нам надо решить сравнения

$$\alpha_i \xi_i - D_0 \xi_i \equiv P_i \quad (\mathfrak{m}_x^{l+1}).$$

С другой стороны, мы имеем, как и в доказательстве теоремы 1:

$$D^p = (D_1 + D_0)^p = D_1^p + D_0^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_0) = D_1 + D_0.$$

Из этого следует, что

$$(\text{ad } D_0)^{p-1} D_1 \equiv D_1 \quad (\mathcal{L}_{l-1}). \quad (4)$$

Легко видеть, что

$$(\text{ad } D_0) \left(\sum_{i=1}^n Q_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^n (D_0 - \alpha_i E) Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

(где буквой E обозначено тождественное отображение). Следовательно, равенство (4) означает, что

$$(D_0 - \alpha_i E)^{p-1} P_i \equiv P_i \quad (\mathfrak{m}_x^{l+1}) .$$

Тем самым для построения новых локальных параметров нам достаточно положить

$$x'_i = x_i + \xi_i = x_i - (D_0 - \alpha_i E)^{p-2} P_i ,$$

что и завершает доказательство предложения.

В заключении этого параграфа приведем одну формулу для числа особых точек векторного поля мультипликативного типа на алгебраической поверхности. Эта формула обобщает известное соотношение

$$\sum w(x_i) = e(C) , \quad (5)$$

где $e(C)$ – эйлерова характеристика гладкой полной алгебраической кривой C , а $w(x_i)$ – кратности особых точек векторного поля на C . Именно, пусть D – регулярное векторное поле мультипликативного типа на полной алгебраической поверхности X и $M = \cup C_i$ – приводимая кривая на X с компонентами C_i , которые или являются интегральными кривыми для D , или входят в дивизор нулей поля D . Обозначим через $w(M)$ число изолированных особых точек ограничения D на M , а через $U(M)$ – ту часть дивизора нулей U векторного поля D , носитель которой содержится в E .

Предположим, что во всех особых точках кривая M имеет только линейные ветви с трансверсальными пересечениями.

Теорема 3. Для векторного поля D мультипликативного типа на поверхности X и приводимой кривой $M \subset X$, удовлетворяющей указанным выше ограничениям, выполнено соотношение

$$w(M) - U(M)^2 - U(M) \cdot K = e(M) ,$$

где K – канонический класс поверхности X .

Прежде всего обратим внимание на то, что в силу теоремы 2 все изолированные особые точки векторного поля D на M имеют кратность 1, все компоненты дивизора нулей поля D на X также имеют кратность 1, являются гладкими кривыми и попарно не пересекаются.

Наряду с числом $e(M)$ введем число

$$p(M) = w(M) + 2\chi(\mathcal{O}_{U(M)}) .$$

Теорема 3 утверждает, что $p(M) = e(M)$ ("характеристика Эйлера" равна "характеристике Пуанкаре").

Рассмотрим нормализацию M^ν кривой M :

$$M^\nu = \cup C_i^\nu,$$

причем $C_i^\nu \cap C_j^\nu = \emptyset$ при $i \neq j$.

Обозначим через r_k кратности (число различных ветвей) особых точек кривой M . Тогда очевидно, что

$$e(M) = \sum e(C_i^\nu) - \sum (r_k - 1).$$

Докажем аналогичную форму и для $p(M)$:

$$p(M) = \sum p(C_i^\nu) - \sum (r_k - 1). \quad (6)$$

Так как дивизор $U(M)$ состоит из гладких непересекающихся кривых, то $\chi(\mathcal{O}_{U(M)}) = \sum \chi(\mathcal{O}_{C_i^\nu})$ для тех C_i , которые являются компонентами $U(M)$. Поэтому формула (6) принимает вид

$$w(M) = \sum w(C_j^\nu) - \sum (r_k - 1), \quad (7)$$

где первая сумма распространена на те компоненты C_j , которые не являются компонентами $U(M)$.

Пусть x — некоторая точка кривой M . Возможны два случая: через x проходят только те кривые C_i , которые не являются компонентами $U(M)$, или через x проходит несколько таких кривых и ровно одна компонента $U(M)$ (в частности, x может быть особой точкой на M). Обозначим число ветвей в точке x через r . Прообраз точки x на M состоит тогда из r точек.

В первом случае либо точка x не является особой точкой векторного поля D на M , тогда $r = 1$ и вклад этой точки в обе части равенства (7) равен 0, либо вклад в левую часть (7) равен 1, а r прообразов x на C_i^ν являются особыми точками кратности 1, так что вклад x в правую часть равен $r - (r - 1) = 1$. Во втором случае x не является изолированной особой точкой на M и ее вклад в $w(M)$ равен 0. Среди прообразов точки x одна точка лежит на компоненте, где D равно 0, а остальные $r - 1$ — изолированные особые точки D . Поэтому вклад x в правую часть равенства (7) есть $(r - 1) - (r - 1) = 0$. Это доказывает формулу (7).

Для доказательства соотношения $p(M) = e(M)$ остается проверить, что $p(C^\nu) = e(C^\nu)$ для гладкой кривой C^ν . Если D не обращается в 0 на C^ν , то это следует из формулы (5), а если $D = 0$ на C^ν , то из определения $p(C)$ и того, что $e(C) = -2\chi(\mathcal{O}_C)$ для гладкой кривой C . Теорема доказана.

§ 2. Ветвление несепарабельного морфизма

Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ – конечный несепарабельный морфизм степени p гладких многообразий и $k(X) = k(Y)(\alpha^{1/p})$, $\alpha \in k(Y)$. Функция α определена с точностью до замены

$$\alpha' = \sum_0^{p-1} c_i^p \alpha^i, \quad c_i \in k(Y). \quad (1)$$

Следовательно, дифференциальные формы $d\alpha'$ и $d\alpha$ связаны соотношением

$$d\alpha' = \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} \right) d\alpha,$$

где

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \sum_0^{p-1} i c_i^p \alpha^{i-1}.$$

Поэтому дивизоры этих форм эквивалентны: $(d\alpha') \sim (d\alpha)$ (дивизор дифференциальной формы $\sum f_i dx_i$ определяется аналогично дивизору векторного поля). Класс дивизора $(d\alpha)$, инвариантно связанный с морфизмом π , называется *ветвлением* этого морфизма.

Предложение 2. Если $\pi: X \rightarrow Y$ – конечный несепарабельный морфизм степени p гладких многообразий, то канонические классы этих многообразий связаны соотношением

$$K_X = \pi^* K_Y - \frac{p-1}{p} \pi^*(V), \quad (2)$$

где V – ветвление π .

Для любого α такого, что $k(X) = k(Y)(\alpha^{1/p})$, определим операцию $\varphi_\alpha: \Omega_Y^n \rightarrow \Omega_X^n$. Именно, так как $d\alpha \neq 0$, то любую форму $\omega \in \Omega_Y^n$ можно записать в виде

$$\omega = \eta \wedge d\alpha, \quad \eta \in \Omega_Y^{n-1}.$$

Мы положим

$$\varphi_\alpha(\omega) = \pi^*(\eta) \wedge d\beta, \quad \text{где } \beta^p = \alpha. \quad (3)$$

Это определение корректно, так как если $\eta \wedge d\alpha = 0$, то $\eta = \xi \wedge d\alpha$ и $\pi^*(\eta) = \pi^*(\xi) \wedge \pi^*(d\alpha) = 0$.

Зависимость от выбора α выражается простой формулой:

$$\varphi_{\alpha'}(\omega) = \varphi_{\alpha}(\omega) \pi^* \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} \right)^{\left(\frac{1}{p}-1\right)}. \quad (4)$$

Действительно,

$$\varphi_{\alpha'}(\omega) = \pi^* \left(\eta \frac{d\alpha}{d\alpha'} \right) \wedge d\beta' = \pi^* \eta \left(\pi^* \frac{d\alpha'}{d\alpha} \right)^{-1} \wedge d\beta',$$

где при записи (1)

$$d\beta' = \sum i\pi^* c_i \beta^{i-1} d\beta + \sum d(\pi^*(c_i)) \cdot \beta^i = \\ \left(\pi^* \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} \right) \right)^{\frac{1}{p}} d\beta + \sum d(\pi^* c_i) \beta^i.$$

Так как $\pi^* \Omega_Y^n = 0$, то $\pi^* \eta \wedge d\pi^* c_i = 0$, откуда и следует (4).

Переходя к доказательству формулы (2), введем такое p -замкнутое векторное поле D на X , что $Y = X^D$. Так как (2) есть равенство дивизоров, то его достаточно проверить на открытом множестве, пополнение которого имеет коразмерность > 1 . Поэтому выбрасывая из X недивизорные особенности поля D , а из Y — их образ, мы редуцируем доказательство к случаю, когда D имеет только дивизориальные особенности.

Равенство (2) достаточно проверить в пополнении $\hat{\mathcal{O}}_x$ локального кольца любой точки $x \in X$. Применим следствие теоремы 1 и применим введенные там обозначения. Пусть $\omega = f dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$. Тогда $(\omega) = (f)$. Согласно (3) и (4)

$$\varphi_{\alpha}(\omega) = \left(\pi^* \left(\frac{d\alpha}{dy_n} \right) \right)^{\frac{1}{p}-1} \varphi_{y_n}(\omega) \\ = \left(\pi^* \left(\frac{d\alpha}{dy_n} \right) \right)^{\frac{1}{p}-1} (\pi^* f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Так как $d\alpha = \frac{d\alpha}{dy_n} dy_n$, то $\left(\frac{d\alpha}{dy_n} \right) = (d\alpha) = V$ и мы получаем (2).

Замечания. 1. Формула (2) не нова: она следует из результатов работ [8] или [9]. В работе [9] поведение канонического класса описывается в терминах дифференты морфизма, а в [8] — для проективных многообразий, исходя из глобальных соображений. Мы предпочли привести доказательство, которое кажется нам более прямым.

2. Для доказательства предложения 2 нет необходимости использовать теорему 1. Поскольку речь идет о сравнении дивизоров, достаточно доказать, что любой неприводимый дивизор C на X входит с одинаковым коэффициентом в обе части равенства (2). Для этого можно сохранить предшествующее доказательство, налагая, однако, на функции $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ следующие более слабые условия, чем те, которые гарантирует теорема 1:

$$x_i = \pi^* y_i, \quad i < n, \quad x_n^p = \pi^* y_n,$$

$$\nu_C(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \nu_{\pi C}(dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n) = \nu_{\pi C}(dy_n) = 0,$$

где ν_C — показатель, определяемый дивизором C .

Чтобы построить такую систему функций, надо рассмотреть два случая.

- (1) $\pi_* C = \pi C$, так что π есть бирациональный изоморфизм $C \rightarrow \pi C$. За x_n надо взять локальное уравнение C , за y_n — функцию x_n^p , а за $y_1, \dots, y_{n-1}$ — такие функции, что их ограничения $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1}$ на C определяют сепарирующий базис, т.е. $d\bar{y}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{y}_{n-1} \neq 0$ на C .
- (2) $\pi_* C = p\pi C$, так что π определяет морфизм степени p : $C \rightarrow \pi C$. Тогда на C и πC существуют такие функции $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-1}$ и $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$, что $\bar{u}_i = \pi^* \bar{v}_i$, $\gamma < n-1$, $\bar{u}_{n-1}^p = \pi^* \bar{v}_{n-1}$. За $y_1, \dots, y_{n-2}$ мы должны взять функции, ограничения которых на πC дают $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-2}$, за y_{n-1} — локальное уравнение πC , за x_n — функцию, ограничение которой на C дает $\bar{u}_{n-1}$, а за y_n — функцию x_n^p .

Предложение 3. Если $\pi : X \rightarrow Y = X^D$ — морфизм гладких многообразий, определяемый p -замкнутым векторным полем, то дивизор U поля D и ветвление V морфизма π связаны соотношением

$$U \approx -\frac{1}{p} \pi^*(V). \quad (5)$$

Как и при доказательстве предложения 2, мы можем считать, что поле D имеет только дивизориальные особенности, и применять теорему 1. Пусть $k(X) = k(Y)(\beta)$, $\beta^p = \alpha \in k(Y)$. Соотношение (5) следует из равенства

$$(D) + \frac{1}{p} \pi^*((d\alpha)) = (D(\beta)). \quad (6)$$

Это равенство достаточно проверить в кольце $\hat{\mathcal{O}}_X$ для любого $x \in X$. Пусть, согласно теореме 1, $D = f \frac{\partial}{\partial x_n}$. Тогда $D(\beta) = f \frac{\partial \beta}{\partial x_n} = f \left(\pi^* \frac{d\alpha}{dy_n} \right)^{1/p}$. Так как $(d\alpha) = \left(\frac{d\alpha}{dy_n} \right)$, то

$$(D(\beta)) = (f) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_n} \right) = (D) + \frac{1}{p} \pi^* (d(\alpha)) .$$

Как и при доказательстве предложения 2, можно легко избежать применения теоремы 1.

Замечание. Формула (5) показывает, что $-\frac{1}{p} \pi^*(V)$ можно интерпретировать как дивизор, соответствующий одномерному расслоению – ядру отображения $d\pi$ касательного расслоения Θ_X в Θ_Y .

Следствие 1. При тех же предположениях, что и в предложении 3,

$$K_X = \pi^* K_Y + (p-1)U . \quad (7)$$

Если векторное поле D регулярно на X , то $U \geq 0$ и соотношение (7) указывает на некоторую “монотонность” канонического класса. Ее можно конкретизировать, например, таким образом:

Следствие 2. Если D – регулярное p -замкнутое векторное поле на полном многообразии X , неособом в коразмерности 1, $Y = X^D$ и Y допускает разрешение особенностей (например, $\dim Y = 2$), то для кратных родов выполнены неравенства

$$P_n(Y) \leq P_n(X) , \quad n \geq 1 .$$

Напомним, что кратным родом $P_n(Y)$ называется $\dim H^0(Y_1, nK_{Y_1})$, где Y_1 – произвольная полная гладкая модель для Y , а K_{Y_1} – ее канонический класс.

Доказательство. Пусть Y_1 – гладкое полное многообразие, доминирующее Y , и $\varphi : Y_1 \rightarrow Y$ – соответствующий морфизм. Мы можем выбросить из X такое замкнутое подмногообразие коразмерности, большей 1, что дополнение гладко и D имеет на нем только дивизориальные особенности. Пусть $\tilde{X}$ – это дополнение, $\tilde{Y} = \pi_D(\tilde{X})$, $\tilde{Y}_1 = \varphi^{-1}(\tilde{Y})$. Тогда $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}$ изоморфны. Кроме того,

$$H^0(Y_1, nK_{Y_1}) \subset H^0(\tilde{Y}_1, nK_{\tilde{Y}_1}) \approx H^0(\tilde{Y}, nK_{\tilde{Y}}) . \quad (8)$$

С другой стороны, вложение полей $\pi_D^*: k(Y) \rightarrow k(X)$ определяет вложение

$$\pi_D^*: H^0(\tilde{Y}, nK_{\tilde{Y}}) \hookrightarrow H^0(\tilde{X}, \pi^* nK_{\tilde{Y}}) \subset H^0(\tilde{X}, \pi^* nK_{\tilde{Y}} + n(p-1)U). \quad (9)$$

К $\tilde{X}$ можно применить формулу (7), так что

$$H^0(\tilde{X}, \pi^* nK_{\tilde{Y}} + n(p-1)U) = H^0(\tilde{X}, nK_{\tilde{X}}). \quad (10)$$

Наконец, $H^0(\tilde{X}, nK_{\tilde{X}}) = H^0(X, nK_X)$, так как $X \setminus \tilde{X}$ имеет коразмерность, большую 1, а nK_X является одномерным локально свободным пучком. Ввиду этого, включения (8), (9) и (10) доказывают следствие.

Дальше нам будет важно знать, каков запас тех морфизмов гладких многообразий $X \rightarrow Y$, к которым применима конструкция, описанная в теореме 1, т.е. какие морфизмы представляются как морфизмы факторизации по векторному полю, имеющему лишь дивизориальные особенности. Мы докажем, что в размерности 2 такими являются все конечные несепарабельные морфизмы степени p .

Теорема 4. Любой конечный несепарабельный морфизм степени p гладких поверхностей $\pi: X \rightarrow Y$ является морфизмом факторизации по p - замкнутому векторному полю без изолированных особенностей.

В доказательстве будут использованы два простых результата:

Лемма 1. Если φ и ψ – бирациональные морфизмы поверхностей $\varphi: Z \rightarrow X$, $\psi: Z \rightarrow Y$, поверхности Z и Y гладкие, а X – нормальная и φ стягивает все те кривые, которые стягивает ψ , то рациональное отображение $\varphi\psi^{-1}$ является морфизмом.

Из условия леммы следует, что отображение $\varphi\psi^{-1}$ не стягивает ни одной кривой на X . То, что в этих условиях обратное отображение $\varphi\psi^{-1}$ является морфизмом, доказано в [18] (лемма в § 3, гл. IV. ч. I. В формулировке леммы, правда, предполагается, что поверхность X – гладкая, но это не используется в доказательстве).

Лемма 2. Если поверхность X – гладкая, а Y – нормальная и бирациональный морфизм $f: X \rightarrow Y$ не стягивает ни одной кривой, то f – изоморфизм.

Действительно, в предположениях леммы любая точка $x \in X$ изолирована в слое $f^{-1}(f(x))$. Поэтому пополненное локальное кольцо $\hat{\mathcal{O}}_x$ является модулем конечного типа над $\hat{\mathcal{O}}_{f(x)}$ [см. [7],

II, 6.25, p. 116]. Так как Y нормальна, то $\hat{\mathcal{O}}_{f(x)}$ целозамкнуто, а значит, $\hat{\mathcal{O}}_x = \hat{\mathcal{O}}_{f(x)}$. Поэтому $f(x)$ – простая точка, а тогда утверждение леммы следует из известных свойств бирациональных морфизмов.

Переходим к доказательству теоремы. Мы знаем, что на X существует такое p -замкнутое векторное поле D , что $Y = X^D$. Надо доказать, что D не имеет изолированных особых точек. Этот вопрос является локальным и поэтому мы можем заменять X и Y спектрами локальных колец, являющихся по условию регулярными. Так как тогда $\text{Pic } X = \text{Pic } Y = 0$, то можно считать, что дивизор векторного поля D равен 0, оно регулярно на X и имеет в единственной замкнутой точке $x \in X$ изолированную особую точку.

План доказательства таков. Рассмотрим σ -процесс $X' \rightarrow X$ с центром в x . Векторное поле D определит и на X' некоторое векторное поле. Предположим, что теорема не верна и D обращалось в 0 в x . Из этого следует, что D на X' регулярно. Действительно, в локальных координатах можно задать σ -процесс формулами $x'_1 = x_1$, $x'_2 = \frac{x_2}{x_1}$. Тогда $D(x'_1) = x_1$, $D(x'_2) = x_1^{-1}(D(x_2) - x'_2 D(x_1))$. Так как по условию $D(x_1)(x) = D(x_2)(\tau) = 0$, то отсюда следует, что $x_1^{-1}D(x_1) \in \mathcal{O}_{x'}$, $x_1^{-1}D(x_2) \in \mathcal{O}_{x'}$.

Рассмотрим многообразие $Y' = (X')^D$. Очевидная проверка показывает существование морфизма τ в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\pi'} & Y' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \tau \\ X & \xrightarrow{\pi} & Y \end{array}$$

Векторное поле D может иметь нули на X' , в том числе и изолированные, так что Y' а priori может иметь особые точки. Пусть $L = \sigma^{-1}(x)$, $M = \pi'^{-1}L$. Мы докажем, что Y' гладко и $(\pi')^*M = L$. Из этих двух утверждений вытекает теорема. Действительно, тогда τ есть σ -процесс и $M^2 = -1$, так же как и $L^2 = -1$. Но это противоречит общей формуле $((\pi')^*M)^2 = (\deg \pi') M^2$ и тому, что $\deg \pi' = p$. Противоречие и доказывает теорему.

Чтобы доказать, что Y' гладкое, выбросим из X' изолированные особые точки поля D и оставшуюся схему обозначим через $\tilde{X}$. Пусть $\tilde{Y} = \pi'(\tilde{X})$, $\tilde{L} = \tilde{X} \cap L$, $\tilde{M} = Y \cap M$. Тогда $\tilde{Y}$ гладко и формула (7) дает:

$$K_{\tilde{X}} = (\pi')^*K_{\tilde{Y}} + (p-1)\tilde{U}. \quad (11)$$

Здесь очевидно $K_{\tilde{X}} = \tilde{L}$ (так как $K_X = 0$), $\tilde{U} = m\tilde{L}$, $m \geq 0$. Заметим, что $(\pi')^* K_{\tilde{Y}} > 0$. Действительно, если $\bar{Y}$ — разрешение особенностей Y' , то $\tilde{Y}$ изоморфно его открытому подмножеству: $\tilde{Y} \subset \bar{Y}$. Но композиция морфизмов $\bar{Y} \rightarrow Y'$ и $\tau: Y' \rightarrow Y$ дает бирациональный морфизм гладких схем $\bar{Y} \rightarrow Y$, который является произведением σ -процессов. Так как $K_Y = 0$, то $K_{\bar{Y}}$ состоит из кривых, возникающих при σ -процессах с положительными кратностями, и, значит $K_{\bar{Y}} > 0$. Ограничение на $\tilde{Y}$ показывает, что и $K_{\tilde{Y}} > 0$. При этом $K_{\tilde{Y}} \neq 0$, так как τ стягивает $\tilde{M}$ в точку и $\tilde{M}$ должно входить в $K_{\tilde{Y}}$ с ненулевым коэффициентом.

Так как $\text{Pic } \tilde{X} = \text{Pic } X = \mathbf{Z} \cdot L$, то $(\pi')^* K_{\tilde{Y}} = nL$, $n > 0$. Из (11) мы получаем, что $\tilde{L} = n\tilde{L} + (p-1)m\tilde{L}$, $n > 0$, $m \geq 0$. Отсюда $n = 1$, $m = 0$, т.е.

$$K_{\tilde{Y}} = \tilde{M}, \quad \tilde{L} = (\pi')^* \tilde{M}, \quad U = 0. \quad (12)$$

Вернемся теперь еще раз к схеме $\bar{Y}$, которая дает разрешение особых точек на Y' . Морфизм $\bar{Y} \rightarrow Y$ может быть разложен в произведение σ -процессов: $\sigma_1: Y_1 \rightarrow Y$, $\sigma_2: Y_2 \rightarrow Y_1$ и т.д. Мы имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} Y' & \longleftarrow & \bar{Y} \\ \downarrow & \nearrow \cdot & \cdot \\ & Y_2 & \\ & \nearrow & \\ & Y_1 & \\ & \nearrow & \\ & Y & \end{array}$$

Как мы видели, $\tilde{Y} \subset \bar{Y}$ и из (12) следует, что собственный прообраз M входит в канонический класс $\bar{Y}$ с коэффициентом 1:

$$K_{\bar{Y}} = M + \sum r_i C_i, \quad C_i \neq M. \quad (13)$$

С другой стороны, единственной точкой нерегулярности рационального отображения $Y \rightarrow \bar{Y}$ является точка $y = \pi(x)$. Поэтому $\bar{Y}$ получается последовательностью σ -процессов в точках, лежащих над этой единственной точкой. Из формулы для поведения канонического класса при σ -процессе вытекает теперь, что в канонический класс $\bar{Y}$ с коэффициентом 1 входит единственная кривая F_1 — та,

которая стягивается при первом морфизме $Y_1 \rightarrow Y$:

$$K_{\bar{Y}} = F_1 + \sum_{i \geq 2} k_i F_i, \quad k_i \geq 2. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), мы видим, что $M = F_1$ (точнее говоря, совпадают их собственные прообразы в $\bar{Y}$). Лемма 1 дает нам теперь, что рациональное отображение $Y_1 \rightarrow Y'$ является морфизмом, а лемма 2, что это – изоморфизм. Так как схема Y_1 – гладкая, то и Y' – гладкая. Из этого вместе с (12), как мы видели, уже вытекает теорема.

Следствие. Если $\mathcal{O}$ – двумерное регулярное полное локальное кольцо характеристики $p > 0$ с алгебраически замкнутым полем вычетов $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ – регулярное локальное кольцо с тем же полем вычетов $\mathcal{O}'/\mathfrak{m}' = k$, $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$, $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}^p$ и ранг $\mathcal{O}$ как $\mathcal{O}'$ -модуля равен p , то $\mathcal{O} = \mathcal{O}'[x^{1/p}]$, где $x \in \mathfrak{m}$, $x \notin (\mathfrak{m}')^2$.

Это есть комбинация теоремы 4 и следствия теоремы 1.

Замечание. Конечно, возникает вопрос, не имеет ли этот алгебраический факт алгебраического доказательства. Более того: не верен ли аналогичный результат для полных (или м.б. и не обязательно полных) локальных колец произвольной размерности? Это так при $p = 2$. Действительно, модуль $\mathcal{O}$ над кольцом $\mathcal{O}'$ свободен ([10], III, р. 88). Поэтому при $p = 2$ $\mathcal{O} = \mathcal{O}'[\alpha]$ и определяются уравнением $\alpha^2 = x \in \mathcal{O}'$, причем можно считать, что $x \in \mathfrak{m}$. По критерию Якоби $\mathcal{O}$ регулярно тогда и только тогда, когда $dx \neq 0$, т.е. $x \notin (\mathfrak{m})^2$.

Ответ (положительный) на поставленный выше вопрос вытекал бы из результатов работы [8] (теорема 5). Однако, как нам представляется, доказательство этой теоремы содержит ошибку: неверна лемма 5, на которую существенно опирается доказательство.

В качестве иллюстрации развитых выше соображений применим их к исследованию векторных полей на поверхностях типа КЗ. Согласно лемме 1 в § 1, если $H^0(X, \Theta_X) \neq 0$, то на X существует ненулевое регулярное p -замкнутое поле D .

Теорема 5. Если X – поверхность типа КЗ и D – ненулевое p -замкнутое регулярное векторное поле на ней, то X^D – рациональная поверхность.

Пусть $\pi: X \rightarrow Y = X^D$ – морфизм, соответствующий D , $\bar{Y} \rightarrow Y$ – разрешение особенностей и E – система стягиваемых при этом

кривых. Найдем кодаировскую размерность κ поверхности $\bar{Y}$. Согласно следствию 2 предложения 3 для кратных родов $P_m(\bar{Y})$ выполнено соотношение $P_m(\bar{Y}) \leq 1$, т.е. $\kappa(\bar{Y}) = -1$ или 0. Если $\kappa(\bar{Y}) = -1$, то $\bar{Y}$ рациональна или является линейчатой [[3], ч. IV]. Она не может быть линейчатой рода > 0 , так как тогда X отображалась бы на кривую рода > 0 , что невозможно, так как $b_1(X) = 0$. Таким образом, для доказательства теоремы нам достаточно исключить случай $\kappa(\bar{Y}) = 0$.

В этом случае для минимальной модели Y' поверхности $\bar{Y}$ $mK_{Y'} = 0$, $m|12$ [см. [2], стр. 2]. Обозначим через F систему кривых, стягиваемых морфизмом $\bar{Y} \rightarrow Y'$. Тогда $mK_{\bar{Y}} \geq 0$, $\text{supp } mK_{\bar{Y}} = F$, а так как $mK_{\bar{Y}} = 0$, то $F \subset E$. Иными словами, мы можем применить лемму 1 из доказательства теоремы 4 к морфизмам в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & \bar{Y} & \\ \varphi \swarrow & & \downarrow \\ Y & & Y' \\ \xi \swarrow & & \\ & & \end{array}$$

и получим, что $\xi = \varphi\psi^{-1}: Y' \rightarrow Y$ является морфизмом. Таким образом, Y получается стягиванием некоторых кривых уже на минимальной модели Y' .

Для эйлеровской характеристики в этальных когомологиях мы имеем:

$$e(Y') = e(Y) + \sum (e(F_i) - 1), \quad (15)$$

где F_i – приводимые связные кривые, стягивающиеся в различные особые точки на Y . Покажем, что F_i – дерево, компоненты которого являются гладкими рациональными кривыми. Для этого рассмотрим рациональное отображение $\xi^{-1}\pi: X \rightarrow Y'$, где $\xi: Y' \rightarrow Y$ – бирациональный изоморфизм. Пусть $\eta: X' \rightarrow X$ – такой бирациональный морфизм, что $\rho = \xi^{-1}\pi\eta: X' \rightarrow Y'$ является морфизмом (разрешение точек неопределенности отображения $\xi^{-1}\pi$). Очевидно, η есть стягивание некоторой системы связных непересекающихся деревьев Φ_i , состоящих из рациональных кривых, и $F_i = \rho\Phi_i$. Обозначим через $\nu: Y'' \rightarrow Y'$ нормализацию Y' в поле $k(X')$. Тогда ν является несепарабельным морфизмом степени p , а $X' \rightarrow Y''$ – бирациональным морфизмом и состоит из стягивания нескольких компонентов деревьев Φ_i . Поэтому и F_i являются деревьями, состоящими из гладких рациональных кривых.

Обозначим через n , число компонентов в F_i . Тогда $e(F_i) = n_i + 1$

и формула (15) принимает вид

$$e(Y') = e(Y) + \sum n_i. \quad (16)$$

С другой стороны, так как π является радикальным морфизмом, то этальная топология на X и Y изоморфны и $e(Y) = e(X) = 24$. Формула (16) показывает, что $e(Y') \geq 24$, а $e(Y') = 24$ только, если все $n_i = 0$, т.е. Y уже является гладкой поверхностью. Наконец из перечисления всех типов поверхностей с $\kappa = 0$ [[2], стр. 5] следует, что для них $e(Y') \leq 24$. Таким образом, мы имеем неравенства

$$24 = e(Y) \leq e(Y') \leq 24,$$

т.е. $e(Y) = e(Y')$. Следовательно Y – гладкая поверхность, откуда, согласно теореме 2, вытекает, что D не имеет изолированных особых точек. Из формулы (7) после умножения на m вытекает, что $U = 0$, т.е. D вообще не имеет особых точек. Но такое векторное поле не может существовать на поверхности X типа КЗ, так как $e(X) \neq 0$.

Следствие 1. Если на поверхности типа КЗ существует ненулевое регулярное векторное поле, то она унирациональна¹.

Согласно теореме 3 поле $k(X)$ является несепарабельным расширением степени p поля рациональных функций. Иными словами, $k(X) = k(u, v, w)$, $w^p = f(u, v)$. Но тогда $k(X) \approx k(U^p, V^p, f^{1/p}(U, V)) \subset k(U, V)$, где $f^{1/p}$ получается из f извлечением корня степени p из всех коэффициентов.

Следствие 2. Если на поверхности X типа КЗ имеется ненулевое регулярное векторное поле, то X является эллиптической или квазиэллиптической поверхностью.

Согласно следствию 1, X унирациональна. Мы можем считать, что существует морфизм $f : Y \rightarrow X$, где Y – рациональная поверхность. Так как на Y все двумерные циклы алгебраичны, то из формулы $f_* f^* x = (\deg f)x$ следует, что и на X все циклы алгебраичны. Поэтому для X $\rho = b_2 = 22$. Таким образом, $\text{rg Pic } X = 22$ и индекс пересечения определяет в $\text{Pic } X$ неопределенную квадратичную форму ранга 22. Такая форма обязана представлять 0, т.е. на X существует дивизор $D \neq 0$ с $D^2 = 0$. Отсюда, как показано в работе [14] [см. [14], стр. 543], следует существование на X эллиптического или квазиэллиптического пучка (в указанной работе доказательство существования эллиптического пучка проведено при $p > 3$, но при $p = 2$ или 3 то же доказательство дает существование эллиптического или квазиэллиптического пучка).

¹Этот результат был анонсирован без доказательства М. Артиным [1]

§ 3. Векторные поля на расслоенных поверхностях

Гладкая поверхность X называется расслоенной над кривой B , если задан морфизм

$$f: X \rightarrow B, \quad (1)$$

все слои которого, быть может за конечным числом исключений, неприводимы. Сам морфизм называется расслоением.

Точная последовательность пучков

$$0 \rightarrow f^* \Omega_B^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_{X/B}^1 \rightarrow 0$$

в случаях гладкого морфизма f соответствует точной последовательности векторных расслоений и определяет двойственную точную последовательность расслоений:

$$0 \rightarrow \Theta_{X/B} \rightarrow \Theta_X \rightarrow N_{X/B} \rightarrow 0, \quad (2)$$

где ограничение $N_{X/B}$ на каждый слой совпадает с нормальным расслоением этого слоя. По определению существует изоморфизм

$$N_{X/B} \xrightarrow{\sim} f^* \Theta_B. \quad (3)$$

Если $\theta \in H^0(X, \Theta)$, то образ θ в $H^0(X, N_{X/B})$ будет обозначаться через θ_N и называться нормальной компонентой векторного поля θ .

Предложение 4. Если морфизм (1) – гладкий и собственный, то для любого векторного поля θ на X существует такое векторное поле $\tau \in H^0(X, B)$, что $\theta_N = f^* \tau$.

Доказательство. Ввиду изоморфизма (3) мы можем считать, что $\theta_N \in H^0(X, f^* \Theta_B)$. Если в покрытии U_i кривой B расслоение Θ_B задается функциями перехода u_j^i , то $f^* \Theta_B$ в покрытии $f^{-1}(U_i)$ задается функциями $f^*(u_j^i)$. Пусть $(\theta_N)^i$ – компоненты сечения θ_N в этом покрытии. Тогда

$$(\theta_N)^i = f^*(u_j^i)(\theta_N)^j.$$

Ввиду того, что морфизм f – собственный, $f \cdot \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_B$, т.е. существуют такие функции $\tau^i \in H^0(U_i, \mathcal{O}_B)$, что $(\theta_N)^i = f^* \tau^i$. Тогда $\tau^i = u_j^i \tau^j$, т.е. τ^i – компоненты сечения $\tau \in H^0(B, \Theta_B)$ и $\theta_N = f^* \tau$.

Предложение 5. Если морфизм (1) – гладкий и для векторного поля $\theta \in H^0(X, \Theta_X)$ существует такое векторное поле $\tau \in H^0(B, \Theta_B)$, что $\theta_N = f^*(\tau)$, то для любой регулярной на B функции и выполнено соотношение

$$f^*(\tau(u)) = \theta(f^*(u)) . \quad (4)$$

Доказательство. Ввиду определения расслоения $N_{X/B}$ в точной последовательности (2) для $\theta \in H^0(X, \Theta_X)$, $\theta_N = \text{res } \theta$, где res – ограничение линейной формы θ , заданной на слоях Ω_X^1 на подрасслоение $f^*\Omega_B^1$, т.е.

$$\langle \theta, f^*\omega \rangle = \langle \theta_N, f^*\omega \rangle$$

для $\omega \in f^*\Omega_B^1$. Полагая $\theta_N = f^*\tau$ и пользуясь тем, что $\langle f^*\tau, f^*\omega \rangle = f^*\langle \tau, \omega \rangle$, получаем, что $\langle \theta, f^*\omega \rangle = f^*\langle \tau, \omega \rangle$. В частности, если $\omega = du$, то

$$f^*(\tau(u)) = \theta(f^*(u)) .$$

Предположим теперь, что расслоение X собственно, но не обязательно гладко, и обозначим через B открытое множество в B , над которым $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{B}$, $\tilde{X} = f^{-1}(B)$ гладко. Пусть $\theta \in H^0(X, \Theta)$. Согласно предложению 4 на открытом множестве $\tilde{X}$ $\theta_N = f^*(\tau)$, где $\tau \in H^0(\tilde{B}, \Theta_{\tilde{B}})$. Если $\tilde{B}$ не пусто, то можно рассматривать τ как рациональное векторное поле на B . Далее мы будем так же называть τ нормальной компонентой векторного поля θ .

Предложение 6. Если не все слои морфизма f вырождены, то векторное поле τ регулярно на B и $\tau(b_0) = 0$, если слой $f^{-1}(b_0)$ вырожденный. Если же все слои вырождены, то $\theta \in H^0(X, \Theta_{X/B})$.

Второй случай, конечно, не может возникнуть, если характеристика основного поля равна 0.

Предположим сначала, что $\tilde{B}$ не пусто. Формула (4), доказанная для точек открытого множества $\tilde{X}$, верна тем самым и на всем X . Так как θ – регулярное векторное поле, то отсюда следует, что для функции u , регулярной в точке $b \in B$, $f^*(\tau(u))$ регулярна в точках $f^{-1}(b)$, а значит, и функция $\tau(u)$ регулярна в точке b . Это доказывает регулярность поля τ .

Пусть теперь слой $f(b_0)$ вырожденный, и пусть x_0 – его особая точка, а t – локальный параметр в точке b_0 . Тогда $f^*(t) \in \mathfrak{m}_{x_0}^2$, т.е. $f^*(t) = \sum u_i v_i$, $u_i, v_i \in \mathfrak{m}_{x_0}$. Отсюда

$$\theta(f^*(t)) = \sum \theta(u_i) v_i + \sum u_i \theta(v_i) \in \mathfrak{m}_{x_0} .$$

Поэтому $\theta(f^*(t))(x_0) = 0$, а значит, и $\tau(b_0) = 0$.

Переходя к случаю, когда все слои вырождены, рассмотрим один вырожденный неприводимый слой $C = f^{-1}(b_0)$. Наше утверждение равносильно тому, что в неособых точках кривой C $\theta_N = 0$, т.е. $\theta \in H^0(C, \Theta_C)$.

Пусть $\tilde{C}$ — нормализация кривой C и $\psi : \tilde{C} \rightarrow X$ — композиция нормализации $\tilde{C} \rightarrow C$ и вложения $C \hookrightarrow X$. Положим $\psi^* \Theta_X = E$ и $\xi = d\psi : \Theta_{\tilde{C}} \rightarrow E$. Докажем, что

$$\deg E / \xi(\Theta_{\tilde{C}}) < 0. \quad (5)$$

Действительно, $\deg E = -\deg \xi^* K_X = -C \cdot K$. Но по формуле присоединения

$$CK = 2g(\tilde{C}) - 2 + 2\delta - C^2,$$

где $g(\tilde{C})$ — род кривой $\tilde{C}$, а δ — “мера кратностей” особых точек кривой C . Так как $\deg \Theta_{\tilde{C}} = 2 - 2g(\tilde{C})$, то

$$\deg E / \xi(\Theta_{\tilde{C}}) = C^2 - 2\delta.$$

Так как $C^2 = 0$, то $C^2 - 2\delta \leq 0$ и равенство имеет место лишь, когда $\delta = 0$. А это означает, что кривая C — гладкая. Это противоречит тому, что слой F_{b_0} — вырожденный. Тем самым (5) доказано.

Из неравенства (5) следует, что $H^0(\tilde{C}, E / \xi(\Theta_{\tilde{C}})) = 0$. Поэтому в точной последовательности

$$H^0(\tilde{C}, \Theta_{\tilde{C}}) \rightarrow H^0(\tilde{C}, E) \rightarrow H^0(\tilde{C}, E / \xi(\Theta_{\tilde{C}}))$$

последний член равен 0 и, значит, $\psi^*(\theta) \in H^0(\tilde{C}, \Theta_{\tilde{C}})$, а это и означает, что в неособых точках кривой C поле θ касательно к ней.

§ 4. Вспомогательные леммы

Предложение 6 дает возможность исследовать расслоения, на которых существуют ненулевые регулярные векторные поля. Мы доведем это исследование до полного перечня всех возможных типов для эллиптических (с одним дополнительным ограничением в характеристике 2) приведенных расслоений. Напомним, что расслоение $f : X \rightarrow B$ называется эллиптическим, если почти все его слои являются эллиптическими кривыми, и приведенным, если оно не имеет кратных слоев. В этом случае X называется эллиптической приведенной поверхностью.

Мы докажем в этом параграфе несколько вспомогательных предложений, которые понадобятся при изучении векторных полей на приведенных эллиптических поверхностях.

Лемма 1. Регулярное векторное поле θ_0 на поверхности X_0 с нормальной особой точкой x_0 только тогда определяет регулярное поле на доминирующей X_0 гладкой поверхности X , когда $\theta_0(x_0) = 0$.

Доказательство леммы мы приведем в той специфической ситуации, которая нам только и понадобится: когда в результате разрешения особой точки x_0 в X вклеиваются гладкие кривые. (Именно так обстоит дело, когда в результате разрешения возникают компоненты вырожденного слоя эллиптического расслоения. Общий же случай легко исследовать, используя те же соображения, что и в доказательстве предложения 6.) Пусть θ_0 определяет регулярное векторное поле θ на X , $\pi : X \rightarrow X_0$ – естественное отображение, E – одна из кривых, лежащих в $\pi^{-1}(x_0)$, и $x \in E$. Как известно, $(E^2) < 0$ и, значит, нормальное расслоение к E не имеет сечений. Поэтому нормальная составляющая вдоль E поля θ равна 0 и, значит, θ касательно к E . Так как для любой регулярной в точке x_0 функции f функция $\pi^*(f)$ постоянна на E , θ касательно к E , то $\theta(\pi^*(f)) = 0$ на E ; значит, $\theta(f)(x_0) = \theta(\pi^*(f))(x) = 0$.

Для формулировки следующей леммы напомним одно понятие. Пусть $f : X \rightarrow B$ – приведенное эллиптическое расслоение, базу которого, ввиду локального характера вопроса, можно считать спектром одномерного регулярного локального кольца $\mathcal{O}$. С таким расслоением связан инвариант $\varepsilon(X)$, который можно определить двумя эквивалентными способами (см. [12] и [5]): (1) $\varepsilon(X)$ – это сумма эйлеровой характеристики замкнутого слоя и инварианта высшего ветвления δ ; (2) $\varepsilon(X)$ – эта та степень локального параметра, на которую делится дискриминант вейерштрассовой модели общего слоя. Если F_b – замкнутый слой расслоения X , то $\varepsilon(X)$ мы будем так же обозначать $\varepsilon(F_b)$. Рассмотрим такие расслоения, общий слой которых есть суперсингулярная кривая и инвариант $\varepsilon(X)$ принимает заданное значение n . Через $r(n)$ обозначим такое максимальное число r , что для любого регулярного векторного поля на подобном расслоении его нормальная компонента имеет в замкнутой точке базы нуль порядка $\geq r$.

Лемма 2. Если характеристика основного поля p равна 2, то $\varepsilon(X)$ делится на 4, а если $p = 3$, то – на 3. При $p = 2$ $r(n) \geq \frac{n}{4} - 3$, а при $p = 3$ $r(n) \geq \frac{n}{3} - 4$.

Доказательство является непосредственной вычислительной проверкой, опирающейся на явный вид минимальной модели Нерона для X (см. [11]). Оно приводится отдельно для $p = 2$ и $p = 3$. Мы будем пользоваться обозначениями работы [11] и, в частности,

записывать уравнение вейерштрассовой модели X в виде

$$y^2 + \lambda xy + \mu y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad (1)$$

Случай $p = 2$. Условие суперсингулярности имеет вид $\lambda = 0$, а дискриминант модели (6) равен μ^4 [см. [17], стр. 62]. Отсюда следует, что $\varepsilon(X) = 4d$, где $d = \nu(\mu)$, а ν — показатель в локальном кольце $\mathcal{O}$. Векторное поле, регулярное на аффинной части модели (1), должно, как легко видеть, записываться в виде

$$D = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial t},$$

где $f, g \in \mathcal{O}$, а t является локальным параметром на базе. В такой записи нормальная компонента поля D имеет вид $g \frac{\partial}{\partial t}$.

Из (1) вытекает, что

$$\mu D(y) = (x^2 + \beta)f + (\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma' + \mu y)g,$$

откуда легко следует соотношения:

$$f + \alpha'g \equiv o(t^d), \quad (2)$$

$$\beta'g \equiv o(t^d), \quad (3)$$

$$\beta f + \gamma'g \equiv o(t^d) \quad (4)$$

(соотношение $\mu'g \equiv o(t^d)$ выполняется автоматически, если замкнутый слой — вырожденный).

Рассмотрим все типы вырожденных слоев, описанные в работе [1].

(b_m). Этот слой невозможен у суперсингулярной кривой, так как для такого слоя $\nu(\lambda) = 0$ [[1], стр. 124], а суперсингулярность дает $\lambda = 0$.

(c1). Из (2) следует, что при $\nu(g) \leq d$ $\nu(f) \geq \nu(g)$, а так как для этого слоя $\nu(\gamma) = 1$ [[1], стр. 124], то из (4) следует: $\nu(\beta f + \gamma'g) = \nu(\gamma'g) \geq d$. Поэтому $\nu(g) \geq d = \frac{\varepsilon(X)}{4}$.

(c2). Из (3) и того, что для этого слоя $\nu(\beta) = 1$ [[11], стр.124], следует, что $\nu(g) \geq d = \frac{\varepsilon(X)}{4}$.

(c3). Из условия на слой $\nu(\bar{\gamma}) = 2$ [[11], стр. 124] следует $d = 1$, и соотношения леммы выполнены автоматически.

- (с4). Из условий в [[11], стр. 124], следует, что $\nu(\gamma + \alpha\beta) = 3$. Из (2), (3) и (4) вытекает, что $(\gamma + \alpha\beta)'g \equiv 0(t^d)$ и значит, $\nu(g) \geq d - 2 = \frac{\varepsilon(X)}{4} - 2$.
- (с5_m). В этом случае рассмотрение вейерштрассовой модели не дает никаких новых ограничений на векторное поле и необходимо привлечь модель Нерона. В работе [11] описано ее покрытие картами, которые занумерованы $A_1, \dots, A_{m+2}$.
- (а) $m = 2n - 1$. В этом случае из условий в [[11], стр. 125], следует, что $d = n + 1$. Карта A_{m+2} связана с моделью (1) бирациональным преобразованием $u = \frac{x}{t^{n+1}}$, $v = \frac{y}{t^{n+1}}$. Так как

$$D(u) = D\left(\frac{x}{t^{n+1}}\right) = \frac{D(x)}{t^{n+1}} + (n+1)\frac{x}{t^{n+1}}\frac{D(t)}{t} = \frac{f}{t^{n+1}} + (n+1)u\frac{g}{t},$$

то регулярность поля D дает: $f \equiv 0(t^{n+1})$. Ввиду условия $\nu(\alpha) = 1$ [см. [11], стр. 125], мы получаем из (2), что и $g \equiv 0(t^{n+1})$, т.е. $\nu(g) \geq d = \frac{\varepsilon(X)}{4}$.

(б) $m = 2n$. Рассуждение аналогично. Надо использовать соотношение $\nu(\beta) = n + 2$ [[11], стр. 125] и регулярность поля D на карте A_{m+1} (применить к функции $v = \frac{y}{t^{n+1}}$). Мы получим, что $\nu(g) \geq d - 1 = \frac{\varepsilon(X)}{4} - 1$.

- (с6). Из соотношения $\nu(\bar{\gamma}) = 4$ в [11], стр. 125, следует, что $d = 2$ и соотношения леммы всегда выполняются.
- (с7). Условие $\nu(\beta) = 3$ в [[11], стр. 125], приводит ввиду (3), к соотношению $\nu(g) \geq d - 2 = \frac{\varepsilon(X)}{4} - 2$.
- (с8). Надо использовать регулярность поля D на карте A_3 , задаваемой соотношениями $u = \frac{x}{t^2}$, $v = \frac{y}{t^2}$. Регулярность функции $D(v)$ на этой карте дает соотношение

$$\beta f + \gamma' g \equiv 0(t^{d+2}).$$

Как и в случае слоя (с4), из (2) и условия $\nu(\beta) \geq 4$ в [[11], стр. 125], вытекает, что $\nu(\beta f + \gamma' g) = \nu(\gamma' g)$. А так как $\nu(\gamma) = 5$, опять согласно [[11], стр. 125], то $\nu(g) = d - 2 = \frac{\varepsilon(X)}{4} - 2$.

Случай $p = 3$. Произведя преобразование $y = z + \lambda x$, чтобы уничтожить член с xy , мы получим соотношение

$$z^2 + a_3 z = x^3 + a_4 x + a_6, \quad (5)$$

где

$$a_3 = \mu, \quad a_4 = \beta - \lambda\mu, \quad a_6 = \gamma, \quad (6)$$

а член с x^2 справа отсутствует ввиду суперсингулярности [[1], стр. 62] что записывается в виде

$$-\alpha = \lambda^2. \quad (7)$$

При этом дискриминант равен $-a_4^3$ [[17], стр. 62]. Положив $\nu(a_4) = d$ мы будем иметь $\varepsilon(X) = 3d$.

Векторное поле, регулярное на аффинной части модели (5), должно иметь вид

$$D = f \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial}{\partial t}, \quad f, g \in \mathcal{O}.$$

Соотношение (5) дает:

$$a_4 D(X) = (2z + a_3)f + (a'_3 z - a'_4 x - a'_6)g,$$

откуда

$$a_3 f - a'_6 g \equiv 0(t^d), \quad -f + a'_3 g \equiv 0(t^d).$$

Отсюда, исключая f , получим

$$(\mu^2 + \gamma)'g \equiv 0(t^d). \quad (8)$$

Ввиду условий $\nu(\gamma) = 1$, $\nu(\mu) \geq 1$ [[11], стр. 124] мы получаем из (8), что $\nu(g) \geq d$.

(с2). Условия $\nu(\beta) = 1$, $\nu(\lambda) \geq 1$, $\nu(\mu) \geq 1$ [[11], стр. 124] показывают, что $\nu(a_4) = 1$, т.е. $d = 1$ и соотношения леммы выполняются автоматически.

(с3). Соотношение $\nu(\mu^2 + \gamma) = 2$ [[11], стр. 124] дают вместе с (8), что $\nu(g) \geq d - 1$.

(с4). Условия $\nu(\Delta) = 6$, $\nu(\beta) \geq 2$, $\nu(\gamma) \geq 3$, $\nu(\lambda) \geq 1$ [[11], стр. 124] вместе с (7) показывают, что $\nu(\beta) = 2$, а ввиду того, что $\nu(\mu) \geq 2$ [[11], стр. 124], $\nu(a_4) = d = 2$ и условия леммы выполняются автоматически.

(с5). Этот случай невозможен, так как условие $\nu(\alpha) = 1$ [[11], стр. 125] противоречит (7).

(с6). Условие $\nu(\mu^2 + \gamma) = 4$ [[11], стр. 125] вместе с (8) дает $\nu(g) \geq d - 3$.

(с7). Условия $\nu(\beta) = 3$, $\nu(\mu) \geq 3$, $\nu(\lambda) \geq 1$ показывают, что $d = \nu(a_4) = 3$ и условия леммы выполняются автоматически.

(с8). Условия $\nu(\gamma) = 5$, $\nu(\mu) \geq 3$ [[11], стр. 125] показывают, что $\nu(\mu^2 + \gamma) = 5$, и из (8) следует, что $\nu(g) \geq d - 4$.

Следующие леммы имеет целью разобрать те типы слоев эллиптического расслоения X , которые не удовлетворяют условиям теоремы 3. Таких типов, как известно, два: (с1) и (с2) в обозначениях работы [11]. Слой (с1) есть рациональная кривая с острием, а (с2) – две гладкие рациональные кривые, имеющие в одной точке простое касание.

Лемма 3. Теорема 3 верна и для слоя типа (с2).

Доказательство. Векторное поле D не может обращаться в 0 на обеих компонентах слоя: так как векторное поле D – мультипликативного типа, то компоненты его дивизора не пересекаются. Оно не может обращаться в 0 и на одной компоненте, так как тогда на другой оно имело бы особую точку кратности 2, что противоречит лемме 2 § 1. Ввиду той же леммы D имеет по 2 особые точки на каждой компоненте. Если одна из этих точек совпадает с точкой пересечения компонент, то их число равно 3 и совпадает с $e(F)$, где F – рассматриваемый слой. Таким образом, нам остается доказать, что точка пересечения компонент является особой точкой поля.

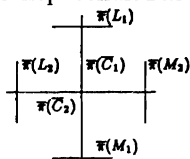
Пусть C_1 и C_2 – компоненты слоя F , x_0 – их точка касания, и предположим, что x_0 – не особая точка поля D . Тогда отображение $\pi: X \rightarrow X^D$ определяет морфизм окрестности точки x_0 на гладкую поверхность. Положим $C'_i = \pi C_i$, $i = 1, 2$. Так как C_1 и C_2 – интегральные кривые для D , то согласно предложению 1, $C_i = \pi^* C'_i$. Отсюда

$$(C_1, C_2)_{x_0} = p(C'_1, C'_2)_{\pi(x_0)},$$

что сразу приводит к противоречию при $p \neq 2$, так как $(C_1 C_2)_{x_0} = 2$.

Пусть $p = 2$. Обозначим через x_1 и y_1 особые точки поля D , лежащие по предположению на кривой C_1 , а через x_2 и y_2 – особые точки на C_2 . Очевидная проверка показывает, что, сделав в любой из этих точек σ -процесс, мы получим поверхность, для которой векторное поле D не имеет особых точек на вклеиваемой прямой. Обозначим через $\bar{X}$ поверхность, получаемую σ -процессами во всех четырех точках. На ней слой будет состоять из шести рациональных кривых: $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ (прообразах C_1 и C_2), L_1 и M_1 (прообразах x_1 и y_1), L_2 и M_2 (прообразах x_2 и y_2). Кривые $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ касаются в одной точке, L_1 и M_1 трансверсально пересекают $\bar{C}_1$ в двух разных точках, а L_2 и M_2 также пересекают $\bar{C}_2$. Поле D не имеет уже особых точек на всем слое. При отображении $\bar{\pi}: \bar{X} \rightarrow \bar{X}^D$ эллиптический пучок на $\bar{X}$ перейдет в эллиптический пучок на $\bar{X}^D$, а слой

пучка на $\overline{X}$ – в слой пучка на $\overline{X}^D$, состоящий из шести кривых, которые трансверсально пересекаются следующим образом:



Кривые $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ являются интегральными кривыми поля D на $\overline{X}$, а L_1, M_1, L_2, M_2 – нет. Поэтому предложение 1 дает:

$$(\overline{\pi}(\overline{C}_i))^2 = \frac{1}{2}(\overline{C}_i)^2 = -2, \quad i = 1, 2,$$

$$(\overline{\pi}(L_i))^2 = 2L_i^2 = -2, \quad (\overline{\pi}(M_i))^2 = -2, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, слой, изображенный на рисунке, не содержит исключительных кривых и должен быть слоем минимальной модели. Однако в списке возможных слоев такой тип не встречается. Это доказывает лемму.

Лемма 4. При $p \neq 2$ в окрестности слоя типа (c1) не может существовать регулярное векторное поле с нормальной компонентой, не равной тождественно нулю.

Так как утверждение носит локальный характер, то мы можем предполагать, что расслоение имеет сечение. Предположим, что вейерштрассова форма расслоения имеет вид

$$y^2 + \lambda xy + \mu y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad (9)$$

Сделав преобразование $\overline{y} = y + \frac{1}{2}(\lambda x + \mu)$, мы приведем его к виду

$$\overline{y}^2 = x^3 + \overline{\alpha}x^2 + \overline{\beta}x + \overline{\gamma}, \quad \overline{\gamma} = \gamma + \frac{1}{4}\mu^2. \quad (10)$$

Регулярное векторное поле D на модели (10) задается, как легко видеть, формулой

$$D = f\overline{y} \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial t},$$

где g и f – функции от локального параметра t на базе. Из (10) следует, что

$$2\overline{y}D(\overline{y}) = (3x^2 + 2\overline{\alpha}x + \overline{\beta})D(x) + (\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma')D(t).$$

Так как $D(x) \equiv 0(\bar{y})$, то отсюда следует, что

$$(\alpha' x^2 + \bar{\beta}' x + \bar{\gamma}')g \equiv 0(\bar{y}) ,$$

т.е. $\bar{\alpha}'g = \bar{\beta}'g = \bar{\gamma}'g = 0$. По условию $g \neq 0$ и, значит, $\bar{\gamma}' = 0$. Отсюда

$$\gamma' + \frac{1}{2}\mu\mu' = 0 .$$

Для минимальной вейерштрассовой модели типа (c1) все коэффициенты уравнения и, в частности, μ обращаются в 0 в точке, над которой расположен слой. Поэтому $\nu(\mu) > 0$ и, значит, $\nu(\gamma') > 0$, т.е. $\nu(\gamma) > 1$. Но слой (c1) характеризуется как раз условием $\nu(\gamma) = 1$ [[11], стр. 124]. Это противоречие доказывает лемму.

Последние две леммы уточняют структуру расслоений с некоторыми специальными слоями, которые встретятся при доказательстве теоремы 6.

Лемма 5. При $p = 2$ в окрестности слоя, соответствующего расширенной корневой системе D_n , не существует регулярного векторного поля D мультипликативного типа.

Доказательство. Слой D_n содержит компоненту $\bar{C}$, пересекающуюся с тремя компонентами C_1, C_2 и C_3 из которых C_1 и C_2 ни с какой другой компонентой не пересекаются (все компоненты — гладкие рациональные кривые). Из свойств векторного поля мультипликативного типа и из леммы 2 § 1 следует, что D должно иметь нуль кратности 1 на $\bar{C}$ и иметь ровно по одной особой точке x_1 и x_2 на C_1 и C_2 . Обозначим, как и при доказательстве леммы 3, через $\tilde{X}$ поверхность, получающуюся из исходной поверхности X σ -процессами в точке x_1 . Морфизм $\pi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}^D$ отображает окрестность кривой C_1 на гладкую поверхность. Обозначим через $\tilde{C}_1$ прообраз кривой C_1 на $\tilde{X}$. Тогда, как и при доказательстве леммы 3, $\tilde{C}_1^2 \equiv 0(2)$, что невозможно, так как $C_1^2 = -2$, и, значит, $\tilde{C}_1^2 = -3$.

Чтобы сформулировать следующую лемму, напомним, что для эллиптического расслоения над $\mathbf{A}^1$, имеющего сечение, можно найти модель типа (9), которая будет являться минимальной вейерштрассовой моделью для любой точки $a \in \mathbf{A}^1$. Иными словами, в уравнении (9) коэффициенты $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ и γ будут полиномами и будут удовлетворять условиям для минимальной вейерштрассовой модели в каждой точке $a \in \mathbf{A}^1$. Это следует из рассуждений

при доказательстве предложения 4 гл. III работы [11], где устанавливается существование минимальной вейерштрассовой модели (см. также замечание автора в конце п. 16, стр. 123). Этими условиями, в частности, коэффициент λ определяется однозначно с точностью до умножения на отличную от 0 константу. Легко видеть, что λ совпадает с инвариантом Хассе кривой, заданной уравнением (9).

Лемма 6. При $p = 2$ для приведенного эллиптического расслоения инвариант $\varepsilon(X)$ (см. его определение перед формулировкой леммы 2) для любого слоя нестабильного типа удовлетворяет условию $\varepsilon \geq 4$. Если $X \rightarrow \mathbf{A}^1$ — эллиптическое расслоение, имеющее сечение и единственный вырожденный слой, который принадлежит нестабильному типу и для которого $\varepsilon = 4$, то для этого расслоения инвариант Хассе λ имеет вид $\lambda = tu^2$, где t — координата на $\mathbf{A}^1$.

Первое утверждение следует из явной формулы для дискриминанта кривой (9) [[11], стр. 94]

$$\Delta = \mu^4 + \lambda^3 \mu^3 + \lambda^4 \beta^2 + \lambda^4 \mu^2 \alpha + \lambda^5 \mu \beta + \lambda^6 \gamma. \quad (11)$$

Так как для слоев нестабильного типа (т.е. относящихся к типу (с) в терминологии работы [11]) все коэффициенты уравнения (11) обращаются в 0 в точке a над которой лежит слой, то $\varepsilon = \nu_a(\Delta) \geq 4$.

Для доказательства второго утверждения леммы предположим, что вырожденный слой расслоения X расположен над точкой базы с координатой $t = 0$. Мы можем считать, что уравнение (11) определяет вейерштрассову модель, являющуюся минимальной на всем $\mathbf{A}^1$. Поэтому дискриминант Δ может обращаться в 0 только при $t = 0$, а ввиду условия $\varepsilon = 4$ можно считать (в случае необходимости умножив t на константу), что

$$\Delta = t^4. \quad (12)$$

Ввиду того, что слой над точкой $t = 0$ принадлежит к нестабильному типу, все коэффициенты уравнения (11) обращаются в 0 при $t = 0$. Положим

$$\lambda = \lambda_1 t, \quad \mu = \mu_1 t, \quad \alpha = \alpha_1 t, \quad \beta = \beta_1 t, \quad \gamma = \gamma_1 t.$$

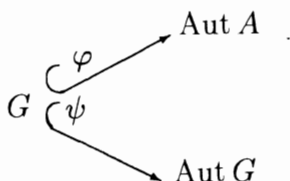
Подставляя эти значения в (11) и используя (12), мы получим после простых преобразований:

$$\lambda_1^3 t^3 (\mu_1^3 + \lambda_1 \beta_1^2 + \lambda_1 \mu_1 \alpha_1 t^2 + \lambda_1^2 \mu_1 \beta_1 t^2 + \lambda_1^3 \gamma_1 t^2) = (1 + \mu_1)^4. \quad (13)$$

Отсюда следует, что λ_1 и μ_1 взаимно просты. Поэтому λ_1 взаимно просто с последней скобкой в левой части (13) и, значит, любой множитель должен входить в λ_1 в четной степени, т.е. $\lambda_1 = u^2$.

§ 5. Векторные поля на эллиптических поверхностях

Теорема 6. Пусть X — приведенная эллиптическая поверхность, при $p = 2$ удовлетворяющая условию $\chi(\mathcal{O}_x) \equiv 0 \pmod{2}$. Если на X существует регулярное ненулевое векторное поле, то X задается следующей конструкцией: X является минимальной гладкой поверхностью, доминирующей поверхностью $(A \times C)/G$, где A — эллиптическая кривая, C — гладкая кривая, G — группа, действующая на $A \times C$ при помощи двух изоморфных вложений:



(под $\text{Aut } A$ подразумевается группа всех автоморфизмов кривой A , не обязательно сохраняющих некоторый групповой закон). При этом возможны три случая:

- а) $g(C) > 1$, $\psi(G)$ действуют свободно, а дифференциалы всех преобразований из $\varphi(G)$ равны 1.
- б) $g(C) = 1$, $\psi(G)$ действует свободно, X является абелевым многообразием (если $\varphi(G)$ действует свободно) или гиперэллиптической поверхностью.
- в) $g(C) = 0$, $X \approx A \times \mathbb{P}^1$ или является рациональной поверхностью.²

Заметим, что все построенные поверхности действительно обладают эллиптическим расслоением, задаваемым естественной проекцией $(A \times C)/G \rightarrow C/\psi(G)$, почти все слои которого равны A . Более подробное описание векторных полей на этих поверхностях будет дано после доказательства теоремы.

Мы начнем с перечисления тех эллиптических приведенных расслоений $f: X \rightarrow B$, на которых существует регулярное векторное поле θ , нормальная составляющая которого θ_N отлична от 0. Согласно предложению 6, в этом случае на B существует ненулевое регулярное векторное поле τ , обращающееся в 0 в точках вырождения морфизма f . Поэтому $g(B) = 1$ или 0; в случае, когда $g(B) = 1$, расслоение f не имеет вырожденных слоев, а в случае,

²См. работу 18 настоящего издания. (Примечание автора к настоящему изданию.)

когда $g(B) = 0$, вырожденные слои расположены над нулями поля τ (число их, следовательно равно 0, 1 или 2).

Начнем с нескольких замечаний, относящихся к случаю, когда все слои имеют потенциально хорошую редукцию. Ввиду этого абсолютный инвариант j общего слоя является рациональной функцией на базе, не обращающейся нигде в ∞ . Так как база – полная кривая, то такая функция постоянна: $j = \alpha \in k$. Если A – эллиптическая кривая над k с абсолютным инвариантом α , то общий слой расслоения $X \rightarrow B$ изоморфен A после некоторого сепарабельного расширения поля $k(B)$. Поэтому существует такое накрытие Галуа $C \rightarrow B$, что

$$X_B \times C \sim A \times C,$$

где $\sim$ означает бирациональный изоморфизм, согласованный с проекцией на C . Если G – группа Галуа накрытия $C \rightarrow B$, то отсюда следует:

$$X \sim (A \times C)/G, \quad (1)$$

причем G действует на C как группа Галуа (это дает вложение $\psi: G \rightarrow \text{Aut } C$), а его действие на A определяется гомоморфизмом $\varphi: G \rightarrow \text{Aut } A$. Если бы φ не был мономорфизмом, то мы могли бы заменить C меньшим накрытием, соответствующим ядру φ , поэтому можно считать и φ вложением.

Накрытие $C \rightarrow B$ разветвлено только в точках, над которыми лежат вырожденные слои расслоения $X \rightarrow B$. Действительно, так как это расслоение – приведенное, то схема

$$X \times_B \hat{\mathcal{O}}_b,$$

где $\hat{\mathcal{O}}_b$ – пополненное локальное кольцо некоторой точки $b \in B$, изоморфна своему якобиеву расслоению. Пусть $c \in C$, $c \rightarrow b$ и c имеет стационарную подгруппу $G_c \subset G$. Тогда это якобиево расслоение определяется действием G_c на A при помощи автоморфизмов A , сохраняющих закон сложения, поэтому можно считать, что $\varphi(G_c) \subset \text{Aut}(A, 0)$, где $0 \in A$ – нулевой элемент. Если $\varphi(G_c) \neq 1$, то G_c нетривиально действует на A и, значит, на одномерных l -адических когомологиях A , что противоречит, согласно признаку Серра – Тэйта [16], тому, что слой $f^{-1}(b)$ невырожденный. Поэтому $\varphi(G_c) = 1$. Так как φ является вложением, то и $G_c = 1$, если слой $f(b)$ невырожденный.

Теперь можно изложить план доказательства теоремы. Мы рассмотрим два случая: I – когда род базы равен 1, и II – когда ее род равен 0. В случае I все слои являются невырожденными, так что мы имеем представление (1). Мы докажем, что род кривой C тоже

равен 1, и этот случай приводит к случаю б) теоремы. В случае II рассмотрение зависит от того, имеется ли хоть один слой, в котором редукция не является потенциально хорошей, или редукция во всех слоях потенциально хорошая. Мы покажем, что первый случай вообще невозможен. Во втором случае опять представление (1) приводит к утверждению теоремы.

Основные трудности возникают при рассмотрении случая II, причем последовательно рассматриваются следующие типы (1) – (6), вместе охватывающие все эллиптические расслоения, на которых есть регулярное векторное поле.

Если все инварианты высшего ветвления равны 0, то мы имеем типы (1) и (2). Это самая простая часть доказательства. Оставшаяся часть относится, следовательно, лишь к случаю характеристик 2 и 3. Дальше предполагается, что векторное поле D принадлежит к аддитивному или мультипликативному типу (такое векторное поле всегда существует ввиду следствия леммы 1 § 1). Нормальная компонента поля D принадлежит к тому же типу, что и само поле. Поэтому ввиду леммы 2 § 1 в первом случае мы имеем один вырожденный слой, а во втором – два. Случай поля аддитивного типа распадается на типы (3), (4) и (5). Если единственный вырожденный слой не принадлежит к типу потенциально хорошей редукции, то мы имеем тип (3). Тогда существует такое накрытие базы $B' \rightarrow B$, что в $X' = X \times_B B'$ вырожденный слой стабилен. Доказательство в этом случае основывается на том, что регулярное векторное поле на X определяет регулярное же векторное поле на минимальной гладкой модели расслоения X' , что дает возможность применить результаты случаев (1) и (2). Если же вырожденный слой относится к типу потенциально хорошей редукции (тип (4)), то мы опять имеем представление (1).

Если A суперсингулярна (тип (5)), то из леммы 2 § 4 легко получить, что поверхность X рациональна. Наконец, тип (6) соответствует векторному полю мультипликативного типа. Если вырожденные слои отличны от (c1) и (c2), то из теоремы 3 легко вывести, что все инварианты высшего ветвления равны 0, так что мы приходим к типам (1) и (2). Случай, когда есть слои типа (c1) и (c2), разбирается на основании специальных рассмотрений при помощи лемм 3, 4, 5 и 6 § 4.

Мы переходим к изложению доказательства.

I. Род базы B равен 1. В этом случае вырожденных слоев нет, C является неразветвленным накрытием эллиптической кривой B , $\psi(G)$ действует на B свободно и бирациональный изоморфизм (1) является изоморфизмом. Если и $\varphi(G)$ действует свободно, то X

является абелевым многообразием. В противном случае – это гиперэллиптическая поверхность, и мы приходим к случаю б) в формулировке теоремы.

II. Род базы B равен 0.

(1). Все слои стабильны, т.е. или невырождены или соответствуют расширенной корневой системе A_m (тип (b_m) в классификации Нерона). Если вырожденных слоев нет, то в (1) C должна быть неразветвленным накрытием $\mathbf{P}^1$ т.е. $C = \mathbf{P}^1$ и $X = A \times \mathbf{P}^1$. Этот тип включается в случай в) теоремы. При наличии вырожденных слоев мы будем основываться на формуле для эйлеровой характеристики $e(X)$ поверхности X [см. [4] и [15]]. При наличии вырожденных слоев $b_1 = 0$ (b_i – i -мерное число Бетти) и формула приобретает вид:

$$e(X) = 2 + b_2 = \sum (e(F_i) + \delta_i) = \sum (m_i + \varepsilon_i + \delta_i), \quad (2)$$

где сумма распространена на все вырожденные слои, m_i – число компонент слоя, $\varepsilon_i = 0$, если слой имеет тип A_m и 1, если он односвязен, а δ_i – инвариант высшего ветвления.

В рассматриваемом нами случае $\delta_i = 0$ [см. [15]] и $\varepsilon_i = 0$. Если слой один, то (2) дает:

$$2 + b_2 = m_1. \quad (3)$$

Но компоненты слоя вместе с любым трансверсальным слоем циклом составляют независимую систему элементов в двумерной группе когомологий, поэтому $m_1 + 1 \leq b_2$, что противоречит (3).

Если же вырожденных слоев два, то (2) дает:

$$2 + b_2 = m_1 + m_2. \quad (4)$$

Но компоненты двух разных слоев связаны в двумерной группе когомологий единственным соотношением, так что вместе с трансверсальным слоем циклом они дают систему из $m_1 + m_2$ независимых элементов. Поэтому $m_1 + m_2 \leq b_2$, что противоречит (4).

(2). Высшее ветвление отсутствует. В этом случае для каждого слоя существует такое накрытие базы, не имеющее высшего ветвления, после подъема на который слой становится стабильным. Так как точек ветвления не больше 2, то существует такое глобальное накрытие $C \rightarrow \mathbf{P}^1$, $C \simeq \mathbf{P}^1$, что после подъема на него оба слоя становятся стабильными (это накрытие имеет просто вид

$t \rightarrow t^m$). Используя то, что доказано в случае (1), мы получаем, что $X \times_C \mathbb{P}^1 \sim A \times \mathbb{P}^1$ и

$$X \sim (A + \mathbb{P}^1)/G.$$

Каждое преобразование $\psi(\sigma)$, $\sigma \in G$, $\sigma \neq 1$, имеет неподвижную точку $c \in \mathbb{P}^1$. Если $\varphi(\sigma)$ не имеет неподвижных точек, т.е. является сдвигом на A , то слой на X , соответствующий точке c , будет кратным, что противоречит приведенности расслоения X . Если же $\varphi(\sigma)$ имеет неподвижные точки, то $A/\varphi(G)$ является рациональной кривой. Рациональное отображение $X \rightarrow A/\varphi(G)$ имеет слоем $\mathbb{P}^1$. Отсюда следует, что поверхность X рациональна: этот случай включается в тип в) в формулировке теоремы.

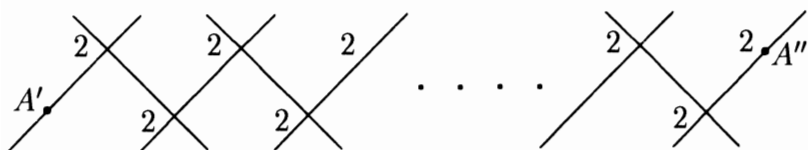
Типы (3), (4) и (5) соответствуют тому, что векторное поле D относится к аддитивному типу. В этом случае имеется единственный вырожденный слой.

(3). Единственный вырожденный слой F_b таков, что соответствующий ему стабильный слой не является гладким, и, значит, соответствует расширенной корневой системе A_m . Мы можем считать, что слой не стабилен, иначе мы имели бы дело с типом (1). Поэтому существует такое расширение степени 2 $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}$ локального кольца соответствующей точки базы, что $X \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}'$ имеет над точкой b' , соответствующей точке b , уже стабильный слой, а именно соответствующий расширенной корневой системе A_m . Число $m = -\nu_b(j)$, где j — абсолютный инвариант общего слоя расслоения X . Так как $\nu_{b'}(j) = 2\nu_b(j)$, то m четно. Положим $G = \text{Gal}(\mathcal{O}'/\mathcal{O})$, $G = \{g\}$, тогда на группе точек гладкости расслоения $X \otimes \mathcal{O}'$ $g(a) = -a$ [[12], стр. 5].

Мы можем предполагать, что $p = 2$, иначе опять высшее ветвление отсутствовало бы и мы вернулись бы к типу (2). Поэтому существует сепарабельное накрытие степени 2 $B' \rightarrow B$, разветвленное только в одной точке b и такое, что $B' \otimes \mathcal{O} \approx \mathcal{O}'$. Действительно, так как $B \approx \mathbb{P}^1$, то мы можем считать, что на B выбрана координата T , относительно которой b является бесконечно удаленной точкой. Если $\mathcal{O}'$ определяется над $\mathcal{O}$ уравнением $Z^2 + Z = f$ и $f_0(T^{-1})$ — главная часть функции (являющаяся многочленом от T^{-1}), то B' задается уравнением $Z^2 + Z = f_0(T^{-1})$.

Обозначим через $\tilde{X}$ минимальную неособую модель расслоения $X \otimes_{\mathcal{O}} B'$. Наша ближайшая цель — доказать, что векторное поле D , регулярное на X , определяет и на $\tilde{X}$ регулярное поле. Для этого рассмотрим рациональный изоморфизм $\tilde{X} \sim \tilde{X}/G$, где $G =$

$\text{Gal}(B'/B)$ (в нашем случае $|G| = 2$). Так как G имеет, вообще говоря, на $\tilde{X}$ неподвижные точки, то $\tilde{X}/G$ имеет особые точки. Обозначим через $\bar{X}$ поверхность, получающуюся минимальным разрешением особенностей $\tilde{X}/G$. Тогда X есть минимальное эллиптическое расслоение, соответствующее $\bar{X}$ (т.е. получается стягиванием на $\bar{X}$ исключительных кривых I рода, содержащихся в слоях). Мы докажем, что $X = \bar{X}$, а для этого достаточно убедиться, что ни одна из компонент образа на $\bar{X}$ слоя $\tilde{X}$ не является исключительной кривой I рода. Действительно, при факторизации слоя по группе, порожденной автоморфизмом $a \rightarrow -a$, пары компонент склеиваются друг с другом за исключением двух – соответствующих единичному элементу и элементу второго порядка в факторгруппе группы неособых точек слоя по связной компоненте единицы. Таким образом, слой F_b'/G состоит из $m/2$ компонент, образующих цикл:



Все компоненты этого дивизора имеют кратность 2 и на первой и последней компоненте имеются по одной точке A' и A'' , которые могут быть особыми на $\bar{X}/G$. При этом локально эти точки изоморфны, так что они одновременно либо особы, либо нет. Если бы они были неособы, то весь слой гладкой поверхности $\tilde{X}/G$ стягивался бы в точку, что невозможно. Если же обе особы, то после их разрешения в дивизоре, изображенном на чертеже, не будет ни одной исключительной кривой с квадратом -1 .

Обозначим через Y поверхность, получающуюся из X выбрасыванием всех циклов, возникающих при разрешении точек A' и A'' , а через $\tilde{Y}$ – поверхность, полученную выбрасыванием из $\tilde{X}$ двух неподвижных точек неединичного автоморфизма из G . Тогда ограничение накрытия $\tilde{Y} \rightarrow Y$ будет этальным и регулярное векторное поле θ , определенное на X , порождает и на $\tilde{Y}$ регулярное поле. Но так как $\tilde{Y}$ получается из $\tilde{X}$ выбрасыванием двух точек, то поле, регулярное на $\tilde{Y}$, регулярно и на $\tilde{X}$.

Таким образом, ненулевое регулярное поле на X давало бы ненулевое регулярное поле на $\tilde{X}$, которое относится к случаю (2) с одним вырожденным слоем, что и приводит нас к противоречию. Таким образом, этот случай вообще встретиться не может.

(4). Единственный вырожденный слой относится к типу потенциально хорошей редукции. В этом случае существует такое накрытие базы $C \rightarrow B$, что имеет место представление (1). Предположим сверх того, что кривая A несуперсингулярна. Мы можем ограничиться случаем $p = 2$ или 3 , так как иначе выполняется условие предшествующего случая (2). Как известно, при $p = 2$ или 3 не суперсингулярная кривая имеет только два автоморфизма (такие кривые характеризуются условием $j = 0$). Поэтому за C можно взять накрытие второй степени. Отсюда следует, что при $p = 3$ высшее ветвление отсутствует и мы можем ограничиться рассмотрением случая $p = 2$.

Исследуем подробнее строение бирационального изоморфизма $X \sim (A \times C)/G$, где $G = \{g\} = \text{Aut } A$. Пусть $\bar{X}$ — поверхность, полученная минимальным разрешением особых точек поверхности $(A \times C)/G$. На $(A \times C)/G$ есть двукратный вырожденный слой $S = A/G$, соответствующий точке ветвления C/B , и на нем две точки x_1, x_2 , которые только и могут быть особыми, — образы точек второго порядка на A , причем формальные окрестности этих точек изоморфны. Точки x_1 и x_2 действительно особые — иначе гладкая поверхность $(A \times C)/G$ имела бы двукратный слой $2S$. После разрешения в особые точки x_1 и x_2 вклеиваются одинаковые циклы. Вырожденный слой на $\bar{X}$ будет иметь вид $2S + T_1 + T_2$, где T_i — дивизор, носитель которого пересекает S в точке, являющейся образом точки x_i . Если $(ST_i) > 1$, то $S^2 < -1$ и кривая S не стягивается. Пусть $(ST_i) = 1$, тогда $T_i = L_i + M_i$, где L_i — неприводимая кривая, $(L_i S) = 1$, а носитель дивизора M_i не пересекает S . Стягивая S , мы получаем слой, состоящий из двух кривых L_i , пересекающихся в одной точке, и дивизоров M_i , через эту точку не проходящих, причем $(L_i M_i) > 0$, $(L_i M_j) = 0$ при $i \neq j$ и $(M_i M_j) = 0$. Отсюда следует, что $(L_i^2) < -1$, кроме случая, когда $M_i = 0$. В последнем случае, стянув одну из L_i , мы получили бы слой, которого в известном списке слоев нет. Если же расслоение, полученное стягиванием S , минимально, то его слой содержит две трансверсально пересекающиеся кривые, входящие в слой с кратностью 1. Такого слоя в известном списке тоже нет. Таким образом, кривая S не стягиваема, а поверхность $\bar{X}$ минимальна, т.е. $\bar{X} = X$.

Обозначим через Y поверхность, полученную из $A \times C$ выбрасыванием неподвижных точек автоморфизма g . Морфизм $Y \rightarrow X$ этален и поэтому регулярное векторное поле на X дает регулярное векторное поле $\tilde{\theta}$ на Y . Наконец, так как $A \times C$ отличается от Y только конечным множеством точек, то поле $\tilde{\theta}$ регулярно на всем $A \times C$.

Очевидно, что нормальная компонента поля $\tilde{\theta}$ тоже отлична от

0. Поэтому мы можем применить к $\tilde{X}$ рассуждения, содержащиеся в самом начале доказательства, и заключить, в частности, что род C равен 1 или 0. Если $C = \mathbf{P}^1$, то поверхность $\tilde{X}$, как мы заметили при разборе случая (2), – рациональна. Если C – эллиптическая кривая, то векторные поля на такой поверхности определены нами при разборе типа I – они происходят из инвариантных векторных полей на абелевом многообразии $A \times C'$, где C' – кривая, изогенная C . Согласно лемме 1 § 4, поле θ , регулярное на X , определяет поле, обращающееся в 0 в особых точках поверхности $\tilde{X}/G$, и, значит, поле $\tilde{\theta}$ на $\tilde{X}$, обращающееся в 0 в неподвижных точках группы G . Но векторные поля на $\tilde{X}$ таковы, что каждое из них равно 0, если оно обращается в 0 хоть в одной точке. Поэтому G должны действовать на $\tilde{X}$ свободно, а также и группа $\text{Gal}(C/B)$ действует на C свободно. Это противоречит тому, что род B равен 0.

(5). Те же предположения, что и в (4), с той разницей, что кривая A суперсингулярна. Ввиду того, что случай (2) уже разобран, мы можем предполагать, что $p = 2$ или 3 и применить лемму 2 § 4. В нашем случае нормальная компонента векторного поля имеет в точке, соответствующей вырожденному слою, нуль кратности 2. Поэтому мы получаем из леммы 2 § 4:

$$2 \geq \frac{n}{4} - 3, \quad n \leq 20 \quad \text{при } p = 2,$$

$$2 \geq \frac{n}{3} - 4, \quad n \leq 18 \quad \text{при } p = 3.$$

В случае, когда вырожденный слой – единственный, формула (2) показывает, что $n = e(X) = e(X)$, и, значит, в обоих случаях $e(X) \leq 20$. Так как по теореме Римана – Роха $e(X) \equiv 0 \pmod{12}$ (в случае, когда $K^2 = 0$), то $e(X) \leq 12$, а так как вырожденный слой есть, то $e(X) > 0$. Поэтому $e(X) = 12$, $\chi(X) = 1$ и из формулы для канонического класса [3] стр. 26] следует, что канонический класс поверхности X отрицателен, т.е. X рациональна.

(6). Наконец, предположим, что векторное поле относится к мультипликативному типу, так что расслоение X имеет два вырожденных слоя.

Мы воспользуемся формулой для числа неподвижных точек регулярного векторного поля на полной поверхности

$$w - U^2 - UK = e(X), \quad (5)$$

где U – дивизор поля, а w – сумма кратностей изолированных особых точек.

В случае эллиптической поверхности дивизор нулей векторного поля состоит из компонент слоев – иначе поле обращалось бы в 0 хоть в одной точке каждого слоя и его нормальная компонента была бы тождественно равна 0. Отсюда $UK = 0$. Поэтому формула (5) принимает вид $w - U^2 = e(X)$. Разбивая оба слагаемые на отдельные члены, соответствующие вырожденным слоям, мы получим, в обозначениях теоремы 3, что

$$\sum p(F_b) = e(X) . \quad (6)$$

Рассмотрим сначала случай, когда ни один из слоев не принадлежит к типу (c1) или (c2). Согласно теореме 3 в этом случае $p(F_b) = e(F_b)$. Формула (2) вместе с формулой (6) показывает, что $\delta_b = 0$, т.е. мы возвращаемся к случаю (2). Слой типа (c2) не может встретиться согласно лемме 3 § 4, а слой типа (c1) при $p \neq 2$ – согласно лемме 4 § 4. Таким образом, мы можем ограничиться случаем, когда $p = 2$ и имеется два вырожденных слоя F_1 и F_2 , причем слой F_1 имеет тип (c1).

Рассмотрим подробнее ограничение векторного поля на слой F_1 типа (c1). Обозначим через Ω пополненное локальное кольцо единственной особой точки слоя, а через Ω^ν – его нормализацию. Мы можем считать, что $\Omega^\nu = k[[t]]$, а Ω состоит из таких $f \in \Omega^\nu$, что $f \equiv \alpha(t^2)$, $\alpha \in k$. Простая проверка показывает, что любое дифференцирование кольца Ω распространяется до дифференцирования кольца Ω^ν в его поле частных, имеющего вид $D = \frac{f}{t^2} \frac{d}{dt}$, $f \in \Omega$ (здесь используется то, что $p = 2$). Поэтому регулярное векторное поле D на слое F_1 определяет на его нормализации F_1^ν поле D' , которое или регулярно или имеет полюс порядка 2 в точке, соответствующей особой точке слоя. Так как F_1^ν – гладкая рациональная кривая, то в первом случае D' имеет 2 нуля на F_1^ν , а во втором – 4. Во втором случае $D(t^2)(0) \neq 0$, откуда следует, что особая точка слоя не является особой точкой поля. Поэтому в первом случае на слое не более 3-х особых точек поля (на самом деле их число равно 2, так как особая точка слоя также не является особой для поля), а во втором их 4. Иными словами, мы имеем неравенство

$$p(F_1) \leq 4 . \quad (7)$$

Если бы второй вырожденный слой имел тип (c1), то из формулы (6) мы получили бы, что $e(X) \leq 8$. Так как $e(X) \equiv 0 \pmod{12}$, то, значит, $e(X) = 0$, а из формулы (2) тогда следует, что X вообще не имеет вырожденных слоев. Таким образом, мы можем применить к слою F_2 теорему 3. Применив формулы (2) и (6), мы получим:

$$p(F_1) + e(F_2) = 2 + \delta(F_1) + e(F_2) + \delta(F_2) .$$

или, ввиду (7),

$$\delta(F_1) + \delta(F_2) \leq 2 .$$

Но вклад слоя F_1 в дискриминант расслоения равен $\varepsilon(F_1) = 2 + \delta(F_1)$, а согласно утверждению леммы 5 §4 он ≥ 4 . Поэтому $\delta(F_1) = 2$, $\varepsilon(F_1) = 4$, $\delta(F_2) = 0$. Таким образом, формула (2) приобретает вид

$$4 + e(F_2) = e(X) . \quad (8)$$

Если слой F_2 имеет тип, отличный от A_n или D_n , то $e(F_2) \leq 10$. Согласно (8) тогда $e(X) \leq 14$, т.е. $e(X) = 12$ и поверхность X рациональна. Слой D_n не может встретиться ввиду леммы 5 § 4. Нам остается рассмотреть, таким образом, случай, когда F_1 имеет тип (c1) с $\varepsilon(F_1) = 4$, а слой F_2 имеет тип A_n .

Мы докажем, что такое эллиптическое расслоение возможно (при $p = 2$) только если $\chi(\mathcal{O}_X) \equiv 1 \pmod{2}$, независимо от существования на нем векторного поля. При этом можно предполагать, что X имеет сечение, перейдя иначе к якобиеву расслоению.

Предположим, что над $\mathbf{A}^1$ расслоение задано уравнением (9) § 4, которое определяет минимальную вейерштрассову модель для любой точки $a \in \mathbf{A}^1$. Пусть слой F_1 соответствует точке $t = 0$, а $F_2 - t = \infty$. Определим $e(F_2)$. Для этого заметим, что для слоя F_2 типа A_m

$$e(F_2) = m = -\nu_\infty(j) .$$

Воспользуемся формулой для j в характеристике 2:

$$j = \frac{\lambda^{12}}{\Delta}$$

[11, стр. 94] и леммой 6 § 4. Как и в лемме 6 § 4, мы имеем $\Delta = t^4$, $\lambda = tu^2$. Поэтому $j = t^8 u^{24}$ и $e(F_2) = 8 + 24k$, где $k = \deg u$.

Формула (2) дает:

$$e(X) = 12 + 24k ,$$

откуда $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + 2k$. (Можно было разобрать случай расслоения со слоями типа (c1) и A_m , не используя лемму 6 § 4, но предполагая существование векторного поля, основываясь на морфизме факторизации по векторному полю, сравнения $e(X)$ и $e(X_D)$.)

Этим заканчивается рассмотрение векторных полей, имеющих ненулевую нормальную составляющую. Нам остается рассмотреть векторные поля, касательные к слою морфизма $f: X \rightarrow B$, т.е. сечения относительного касательного расслоения $\Theta_{X/B}$.

Предположим сначала, что расслоение f имеет сечение $s: B \rightarrow X$. В этом случае множество X^0 точек гладкости морфизма f образует групповую схему над B . Так как общий слой этой схемы — эллиптическая кривая, то векторное поле $\theta \in H^0(\Theta_{X/B})$ инвариантно относительно действия X^0/B и чтобы задать его на X , достаточно определить его ограничение на $s(B)$. Но нормальное расслоение к $s(B)$ имеет степень $(s(B))^2 = -\chi(\mathcal{O}_X) = -\frac{e(X)}{12}$. С другой стороны, согласно формуле (2), $e(X) \geq 0$ и $e(X) = 0$ только, когда f не имеет вырожденных слоев. Поэтому, за исключением этого последнего случая, нормальное расслоение к $s(B)$ не имеет сечений, отличных от 0, и θ должно быть касательным к $s(B)$. Так как оно в то же время касательно к слою, то $\theta = 0$. Если же f не имеет вырожденных слоев, то, как мы уже видели, существует такое неразветвленное накрытие Галуа $C \rightarrow B$ с группой Галуа G , такая эллиптическая кривая A и вложение $g \hookrightarrow \text{Aut } A$, что $X = (A \times C)/G$ и $H^0(\Theta_{X/B})$ совпадает с G -инвариантными векторными полями на A . При $g(B) = 0$ этот случай невозможен, при $g(B) = 1$ он приводит к случаю б), а при $g(B) > 1$ — к случаю а) теоремы.

Пусть теперь расслоение f не имеет сечения и $\tilde{f}: J \rightarrow B$ — соответствующее якобиево расслоение. Обозначим через X^0 и J^0 множество точек гладкости морфизмов f и $\tilde{f}$. Очевидная проверка показывает, что для любого гладкого морфизма $\bar{f}: V \rightarrow B$ и конечного накрытия Галуа $C \rightarrow B$ с группой Галуа G касательные к слоям морфизма $\bar{f}$ регулярные векторные поля на V взаимно однозначно соответствуют G -инвариантным регулярным векторным полям на $V \times C$, касательным к слоям проекции на C (G действуют через множитель C). Рассмотрим теперь такое накрытие $C \rightarrow B$, что $X \times_B C$ и $J \times_B C$ изоморфны. Изоморфизм

$$\varphi: X \times_B C \xrightarrow{\sim} J \times_B C$$

переводит действие G на $X \times_B C$, которое осуществляется через действие на множителе C , в действие на $J \times_B C$

$$\sigma(x, c) = (x + \varphi_\sigma(c), \sigma(c)), \quad \sigma \in G,$$

где $\varphi_\sigma \in H^1(G, \text{Hom}_B(C, J))$. Ввиду инвариантности поля θ относительно сдвигов, его инвариантность относительно этого действия равносильна инвариантности относительно тривиального действия на $J \times C$ через множитель C . Поэтому векторное поле на X , касательное к слоям, давало бы такое же векторное поле на J^0 , что,

как мы видели, возможно только в случае, когда $J = (A \times C)/G$ с неразветвленным накрытием $C \rightarrow B$ с группой Галуа G . Мы уже сталкивались с тем, что в этом случае и $X = (A \times C)/G$, хотя, может быть, и с другими C и G . В зависимости от того, будет ли $g(B) = 1$ или > 1 , мы приходим к случаям б) и а) теоремы. Это заканчивает доказательство теоремы 6.

Замечания. 1) Нам не известно, является ли условие $\chi(\mathcal{O}_X) \equiv 0$ (2) при $p = 2$ действительно необходимым для справедливости теоремы 6.

2) Поверхности X , $X = (A \times C)/G$, описанные в теореме 6, в случаях а) и б) действительно имеют ненулевые голоморфные векторные поля. В случае а) – это единственное с точностью до пропорциональности векторное поле θ_A на $A \times C$, касательное к A и нулевое на C . Оно будет G -инвариантным тогда и только тогда, когда дифференциал всех автоморфизмов из $\varphi(G)$ равен 1, т.е. когда $\varphi(G)$ является p -группой, где p – характеристика (очевидно, что это возможно лишь при $p = 2$ или 3).

В случае б), т.е. когда $g(C) = g(A) = 1$, векторное поле θ на $A \times C$, касательное к C и нулевое на A , всегда является инвариантным. Кроме того, если дифференциал всех автоморфизмов из $\varphi(G)$ равен 1, то G -инвариантным является векторное поле θ_A , как и в случае A . Список всех возможных групп $G \subset \text{Aut}(A \times C)$, удовлетворяющих нужным нам условиям, приведен в работе [2] (в нашем случае надо исключить лишь неприведенные группы G). Приведем его:

	Группа G	Действие G на $A \times C$	Условие на A	Характеристика
a1)	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$	$(a, c) \rightarrow (-a, c + \gamma), 2\gamma = 0$	любое	любая
a2)	$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$	$(a, c) \rightarrow (-a, c + \gamma), (a + \alpha, c + \beta),$ $2\alpha = 2\beta = 2\gamma = 0$	любое	$\neq 2$
b1)	$\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$	$(a, c) \rightarrow (\omega a, c + \gamma), 3\gamma = 0,$ $\omega^3 = 1, \omega \in \text{Aut } A$	$j(A) = 0$	любая
b2)	$(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})^2$	$(a, c) \rightarrow (\omega a, c + \gamma), (a + \alpha, c + \beta),$ $3\alpha = 3\beta = 0; \gamma, \omega$ – как в b1)	$j(A) = 0$	$\neq 3$
c1)	$\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$(a, c) \rightarrow (ia, c + \gamma), 4\gamma = 0,$ $i^4 = 1, i \in \text{Aut } A$	$j(A) = 12^3$	любая
c2)	$\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$	$(a, c) \rightarrow (ia, c + \gamma), (a + \alpha, c + \beta),$ $2\alpha = 2\beta = 0; \gamma, i$ – как в c1)	$j(A) = 12^3$	$\neq 2$
d)	$\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$	$(a, c) \rightarrow (-\omega a, c + \gamma), 6\gamma = 0,$ $\omega^3 = 1, \omega \in \text{Aut } A$	$j(A) = 0$	любая

Мы не составляем в случае в) полного списка рациональных поверхностей, обладающих векторными полями. Вероятно, это нетрудно сделать, начиная с минимальных моделей и следя за влиянием σ -процессов на размерность пространства векторных полей.

3. Интересной задачей теории алгебраических поверхностей является вопрос о том, когда схема автоморфизмов гладкой полной поверхности X оказывается приведенной. Очевидно, это будет тогда и только тогда, когда $\dim H^0(X, \Theta_X) = \dim \operatorname{Aut} X$, где $\operatorname{Aut} X$ означает приведенную группу автоморфизмов (или ее связную компоненту). Выписанный в замечании 1 список всех возможных случаев позволяет легко указать, какие из них соответствуют неприведенным схемам автоморфизмов.

В случае а) если $\varphi(G)$ не состоит из одних сдвигов ($\varphi(G) \not\subset A$), то как мы видели, существует единственное с точностью до пропорциональности векторное поле, так что

$$\dim H^0(X, \Theta_X) = 1 .$$

Однако алгебраической группы автоморфизмов, соответствующей этому векторному полю, не существует. Эта группа была бы эллиптической кривой и действовала бы на X послойно. Но тогда X было бы главным однородным пространством для схемы групп $A \times B$. Отсюда легко получить, что соответствующий коцикл содержится в $\operatorname{Hom}(G, A_n)$, ($A_n = \{a \in A; na = 0\}$), т.е. состоит из сдвигов в противоречии со сделанным предложением. Таким образом, в этом случае

$$\dim \operatorname{Aut} X = 0 .$$

В случае б) векторному полю θ_C всегда соответствует группа сдвигов на точки кривой C , которая коммутирует с автоморфизмами из G и переносится на X . В случаях а1) ($p \neq 2$), а2) ($p \neq 3$), б2), с1) ($p \neq 2$), с2) и с3) других векторных полей и нет. Поэтому тут

$$\dim H^0(X, \Theta_X) = \dim \operatorname{Aut} X = 1 .$$

Но в случаях а1) ($p = 2$), б1) ($p = 3$) и с1) ($p = 2$) векторное поле θ_A G -инвариантно и совершенно аналогично случаю а) соответствующая ему группа автоморфизмов не существует. Поэтому в этих случаях

$$\dim H^0(X, \Theta_X) = 2 , \quad \dim \operatorname{Aut} X = 1$$

и схема автоморфизмов не является приведенной.

4. Представляется интересным распространить теорему 6 на случай эллиптических расслоений с кратными слоями. Здесь встречаются новые типы поверхностей с неприведенной схемой автоморфизмов. Например, $X = (A \times \mathbf{P}^1)/G$, где A — эллиптическая кривая, $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и действие (при выборе координаты x на $\mathbf{P}^1$) задается как $(a, x) \rightarrow (a + \alpha, x + 1)$, $2\alpha = 0$. Тогда, кроме G -инвариантных полей θ_A и $\frac{d}{dx}$, которым соответствует группа $(a, x) \rightarrow (a + a', x + c)$, при $p = 2$ существует G -инвариантное поле $(x^2 + x)\frac{d}{dx}$, которому не соответствует никакая группа автоморфизмов. Поэтому для этого примера $\dim H^0(X, \Theta_X) = 3$, $\dim \text{Aut } X = 2$.

§6. Поверхности типа К3

Приведем одно приложение теоремы 6.

Теорема 7. На поверхности типа К3 не существует отличных от 0 регулярных векторных полей.

Согласно следствию 2 теоремы 5, на такой поверхности существует эллиптический или квазиэллиптический пучок $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Рассмотрим сначала случай эллиптического пучка. Из общих свойств поверхностей типа К3 следует, что эллиптический пучок является приведенным [[14], стр. 544]. Так как для поверхности типа К3 $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$, то условие $\chi(\mathcal{O}_X) \equiv 0 \pmod{2}$ при $p = 2$ выполнено. Мы можем, следовательно, применить теорему 6. Но в случаях а) и б) поверхность отображается на кривую рода > 0 , что невозможно для поверхности типа К3, а в случае в) она рациональна или имеет вид $A \times \mathbf{P}^1$, $g(A) = 1$, т.е. опять не может быть поверхностью типа К3.

Остается рассмотреть случай квазиэллиптического пучка $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$.³ Из предложения 4 следует, что векторное поле на X должно быть касательно к слоям в их неособых точках. Мы приведем доказательство того, что такие поля равны 0, применимое как к квазиэллиптическим, так и к эллиптическим поверхностям типа К3.

Так как на поверхности типа К3 касательное расслоение двойственно себе самому (спаривание задается формулой $x, y \rightarrow x \wedge y$), то $H^0(X, \Theta_X)$ и $H^0(X, \Omega_X^1)$ изоморфны. Выясним, какие дифференциальные формы соответствуют векторным полям, касательным к слоям расслоения $f : X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Форма $\eta \in H^0(X, \Omega_X^1)$ соответствует полю $\theta \in H^0(X, \Theta_X)$, если для любой формы $\xi \in H^0(U, \Omega_X^1)$ на

³ Дальнейшие рассуждения следует заменить ссылкой на работу 19 настоящего издания. (Примечание автора к настоящему изданию.)

любом открытом множестве

$$\xi \wedge \eta = \langle \theta, \xi \rangle \omega ,$$

где ω – некоторая фиксированная форма из $H^0(X, \Omega_X^2)$. По определению θ касательно к слоям расслоения f , если $\langle \theta, \xi \rangle = 0$ для $\xi = f^* \xi_1$, $\xi_1 \in H^0(f(U), \Omega_{\mathbb{P}^1}^1)$. Следовательно, $\eta \wedge f^* \xi = 0$, а это значит, что $\eta = h \cdot f^* \eta_1$, где $h \in k(X)$, а η_1 – некоторая рациональная дифференциальная форма на $\mathbb{P}^1$. Так как $K_{\mathbb{P}^1} < 0$, то форма такого типа не может быть регулярной.

Замечания. 1. Теорема 6 показывает, что гладкие проективные эллиптические поверхности, схема автоморфизмов которых является неприведенной, оказываются весьма редкими исключениями. Согласно теореме 7 схема автоморфизмов поверхности типа КЗ так же приведена. Нам кажется правдоподобным, что для поверхностей общего типа схема автоморфизмов всегда является приведенной. Иными словами, для поверхности общего типа $H^0(X, \Theta_X) = 0$.

2. Основной (хотя технически и самой простой) частью доказательства теоремы 6 является рассмотрение расслоений типа (1). Кажется правдоподобным, что аналогичное предложение верно и для расслоений на кривые произвольного рода, а именно:

Не существует расслоений $X \rightarrow B$, не имеющих вырожденных слоев, если $g(B) = 1$, и имеющих не более двух стабильных вырожденных слоев, если $g(B) = 0$.

Над полем комплексных чисел это утверждение верно – оно следует из того, что многообразие Тайхмюллера кривых рода > 1 является ограниченной областью, а универсальная накрывающая для B , если $g(B) = 1$ или для $\mathbb{P}^1 \setminus S$, $|S| = 1, 2$, не может быть отображена в ограниченную область. В общем случае этот вопрос связан с так называемыми “гипотезами конечности” [см. [13], стр. 1211]. Если бы это предложение было верно в общем случае, то это было бы существенным шагом в направлении доказательства того, что $H^0(X, \Theta_X) = 0$ для поверхностей общего типа, обладающих морфизмом на алгебраическую кривую, а это в свою очередь являлось бы еще одним подтверждением гипотезы, высказанной в замечании 1.

Литература

1. М. Artin, *Supersingular K3 surfaces*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. **7** (1974), № 4, 543–567.
2. Е. Bombieri and D. Mumford, *Enriques Classification in Char p. II*, (препринт).
3. Е. Bombieri and D. Hasemoller, *Classification and imbeddings of surfaces*, Algebraic Geometry, Arcata, Proc. Symposia in pure mathematics **29** (1974), 329–420.
4. И.В. Долгачев, *Эйлерова характеристика алгебраических многообразий*, Матем. сб. **89** (1972), № 2, 297–312.
5. И.В. Долгачев и А.Н. Паршин, *Дифференциалы и дискриминанты регулярных отображений*, Матем. заметки **4** (1968), № 5, 519–523.
6. Н. Джекобсон, *Алгебры Ли*, Мир, М., 1964.
7. А. Grothendieck and J. Dieudonne, *Elements de Geometrie Algebrique. II*, Publ. Math. IHES (1961), № 8,
8. R. Kiehl and E. Kunz, *Vollständige Durchschnitte and p-Basen*, Arch. der Math. **XVI** (1965), № 4/5, 348–362.
9. E. Kunz, *Über die kanonische Klasse einer vollständigen Modells eines algebraischen Funktionenkörper Bd. 209* (1962), № 1–2, 17–28.
10. N. Nagata, *Local Rings*, Interscience Publ, New York, 1962.
11. A. Neron, *Modeles minimaux des varietes abeliennes*, Publication Math. IHES (1964), № 21, 1–128.
12. A. Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. Jour. of Math. **89** (1967), № 1, 1–21.
13. А.Н. Паршин, *Алгебраические кривые над функциональными полями*, Изв. АН СССР, Сер. матем **32** (1968), 1191–1219.
14. И.И. Пятецкий-Шапиро и И.Р. Шафаревич, *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа K3*, Изв. АН СССР, Сер. матем. **35** (1971), 530–572.
15. M. Raynand, *Caracteristique d'Euler – Poincare d'un faisceau et cohomologie des varietes abeliennes. Dix expose sur la cohomologie des chemas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, 12–31.
16. J.-P. Serre and J. Tale, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. Math. **88** (1968), № 2, 492–517.
17. J. Tate et P. Delique, *Courbes elliptiques: formulaire Modular functions of one variable*, IV. Lecture Notes in Math., № 476, 53–73.
18. И.Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, Наука, М., 1972.

ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ “НЕСЕПАРАБЕЛЬНЫЕ МОРФИЗМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ”

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР, СЕР. МАТЕМ., 41, N 2 (1977)

(С А. Н. РУДАКОВЫМ)

Мы заметили, что в нашей работе “Несепарабельные морфизмы алгебраических поверхностей” (Изв. АН СССР. Серия матем., 40, N 6 (1976), 1269–1307) содержится неточность. В формулировке теоремы 6 на стр. 1295 следует оговорить, что группа G может быть, вообще говоря, неприведенной групповой схемой, а кривая C – неприведенной схемой такой, что $C/\psi(G) = B$.

Это связано со следующими изменениями в доказательстве теоремы. Рассуждение на стр. 1926, строка 6 и след., верно лишь тогда, когда X является абелевой схемой над B . Поэтому имеет место представление $J(X) \times_B C = A \times C$, где $J(X)$ – якобиево расслоение.

Ввиду этого $X \times_B C$ соответствует элементу группы $H^1(C, A)$ или $H^1(C, A_m)$ (имеются в виду плоские гомологии). Полученный элемент $a \in H^1(C, A_m)$ определяет не обязательно приведенную схему $\bar{C}$, для которой имеет место представление (1).

На стр. 1297 при рассмотрении случая I надо воспользоваться тем, что для одномерного числа Бетти поверхности X возможны два значения: $b_1 = 2$ или 4. Применяя классификацию поверхностей, изложенную в работе [2], мы получаем, что X – абелево многообразие или гиперэллиптическая поверхность. В случае II, если X не имеет вырожденных слоев над $\mathbf{P}^1$, то опять ссылка на классификацию поверхностей показывает, что X – линейчатая, откуда вытекает, что $X = A \times \mathbf{P}^1$. Наконец, на стр. 1304, строка 9 сверху, после слов “с другими C и G ” надо прибавить: может быть, не приведенными.

Следующая дальше часть работы (в частности, доказательство теоремы 7) вообще не использует представления (1) из §5. Поэтому внесенные изменения на ней не отражаются.

Поступило 27.XII.1976

КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ТИПА $K3$

УСПЕХИ МАТ. НАУК, Т. 33, N 1, 1978

(с А. Н. Рудаковым)

Будем предполагать, что основное поле k алгебраически замкнуто.

ТЕОРЕМА. Если на гладкой поверхности X типа $K3$ существует квазиэллиптический пучок, то на ней существует и эллиптический пучок.

Как показано в работе [3], на поверхности типа $K3$ тогда и только тогда существует эллиптический или квазиэллиптический пучок, когда на ней существует неэквивалентный нулю алгебраический цикл с квадратом нуля. Таким образом, имеет место критерий:

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы на поверхности типа $K3$ существовал эллиптический пучок, необходимо и достаточно, чтобы на ней существовал алгебраический цикл D , $D \neq 0$, для которого $(D)^2 = 0$.

Отметим, что этот результат позволяет упростить доказательство теоремы 7 работы [4] об отсутствии на гладкой поверхности типа $K3$ регулярных векторных полей — случай квазиэллиптического пучка отдельно рассматривать не нужно.

Доказательство. Пусть σ — кривая, образованная остриями слоев квазиэллиптического расслоения. Докажем, что это гладкая кривая. В окрестности невырожденного слоя это доказано в работе [1]. Напомним, что в окрестности некоторого слоя множество X_0 особых точек слоев можно снабдить структурой семейства групп и определить послойное действие X_0 на X , продолжающее групповую структуру на X_0 . Кривая σ инвариантна относительно этого действия, поэтому она пересекает вырожденный слой в особой точке.

С другой стороны, как показано в работе [1],

(а) $(\sigma, F) = p = \text{char } k$, где F — слой.

В нашем случае $p = 2$ или 3 , однако индекс пересечения двух кривых, имеющих в точке пересечения особую точку, не меньше 4 , поэтому кривая σ должна быть гладкой. Так как σ бирационально изоморфна базе, то она рациональна и $(\sigma)^2 = -2$.

Рассматривая систему неособых рациональных кривых на X , мы будем сопоставлять такой системе граф обычным образом. Действие группы неособых точек вырожденного слоя на всем слое индуцирует ее действие на соответствующем графе, что определяет группу Γ автоморфизмов графа, транзитивную на множестве вершин, соответствующих компонентам кратности один. Присоединим к системе компонент слоя кривую σ .

(б) Автоморфизмы из группы Γ продолжаются до автоморфизмов графа этой расширенной системы, оставляющих вершину σ на месте.

Напомним, что из формулы для характеристики Эйлера — Пуанкаре (см., например, [2]) следует, что для квазиэллиптического пучка

(в) $\sum (m_i - 1) = 20$, где m_i — число компонент i -го вырожденного слоя.

Рассуждая от противного, предположим, что на поверхности X не существует эллиптического пучка. Мы будем исключать последовательно возможные типы вырожденных слоев на X .

Пусть $p = 2$. Слой типа A_n не может встретиться в квазиэллиптическом расслоении, так как множество точек базы, в слоях над которыми особая точка имеет разделенные касательные, должно быть открытым. Из условий (а) и (б) следует, что слои D_{2n+1} , E_6 и (с3) тоже не могут иметь место, а слой D_{2n} кривая σ пересекает в средней компоненте. Если есть слой E_7 , то в системе компонент слоя и σ можно выделить подсистему E_6 (рис. 1). Взяв кривые этой подсистемы с соответствующими кратностями, мы получим эффективный дивизор с квадратом нуль. По теореме Римана — Роха он будет слоем эллиптического или квазиэллиптического пучка, что невозможно. Аналогично слой D_{2n} при $n > 3$ приводит к системе E_7 . Из условия (а) следует, что для графа системы компонент слоя E_8 и σ есть две возможности (рис. 2). Очевидно, что в первом случае имеется подсистема E_7 , а во втором — D_8 .

Из формулы (в) вытекает, что слой D_6 не может быть единственным. Добавляя к системе кривых этого слоя σ и одну компоненту еще какого-нибудь вырожденного слоя, мы получим систему, содержащую E_6 . Два слоя D_4 приводят к системе D_6 (рис. 3). Слой D_4 и два слоя (с2) дают D_5 (рис. 4). Ввиду формулы (в) единственная

остающаяся возможность — это 20 слоев (c_2). Однако четыре слоя (c_2) приводят к D_4 , если взять σ и по одной компоненте из каждого слоя.

Пусть $p = 3$. Аналогично слой A_n не может быть вырожденным слоем. Учитывая (а) и (б), мы видим, что слоев (c_2), D_n и E_7 быть не может. Слой E_6 приводит к D_4 . При слое E_8 есть три возможности для положения σ , однако первая приводит к подсистеме E_6 , а вторая — к D_7 (рис. 5). В системе компонент двух слоев E_8 и σ легко выделить подсистему D_{14} . Остающиеся возможности, ввиду (в), это слой E_8 и 6 слоев (c_3) или 10 слоев (c_3). Но четыре слоя (c_3) и σ дают D_4 . Тем самым теорема доказана.

Поступило 12.V.1977

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques Classification of Surfaces in Char. p.* III, *Inventiones Math.* **35** (1976), 197–232.
2. И. В. Долгачев, *Эйлерова характеристика алгебраических многообразий*, Матем. сб. **89:2** (1972), 297–312.
3. И. И. Пятешкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$* , Изв. АН СССР, сер. матем. **35** (1971), 530–572.
4. А. Н. Рудаков, И. Р. Шафаревич, *Несeparабельные морфизмы алгебраических поверхностей*, Изв. АН СССР, сер. матем. **40** (1976), 1269–1307.

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

УСПЕХИ МАТ. НАУК, Т. 33, N 6, 1978

(с А. Н. Рудаковым)

В работе [1] нами была поставлена и в значительной степени исследована задача описания регулярных векторных полей на эллиптических поверхностях. Здесь мы сообщим окончательное решение этой задачи.

Пусть $f : X \rightarrow B$ — минимальная приведенная эллиптическая поверхность с базой B , определенная над алгебраически замкнутым полем k характеристики $p > 0$. В [1] мы показали, что, за исключением нескольких не рассмотренных нами случаев, на X может существовать ненулевое регулярное векторное поле, только если X — рациональная поверхность, абелево многообразие, гиперэллиптическая поверхность или все слои изоморфны друг другу, а векторное поле касательно к слоям. Не рассмотренные в [1] особые случаи таковы: $p = 2$ или 3 , B — рациональная кривая, f имеет два невырожденных слоя и сверх того:

а) При $p = 2$ один слой имеет тип A_n , а другой является рациональной кривой с острием, причем для него показатель высшего ветвления имеет наименьшее возможное (при $p = 2$) значение $\delta = 2$.

б) При $p = 3$ один слой имеет тип A_n или D_n , а другой является рациональной кривой с острием, причем для него показатель высшего ветвления имеет наименьшее возможное (при $p = 3$) значение $\delta = 1$.

(Случай $p = 3$ необходимо рассматривать, так как неверна лемма 4 §4 работы [1] — приведенная там форма векторного поля не охватывает все возможные случаи. Поэтому в случае $p = 3$ надо дословно повторить рассуждения, приведенные при $p = 2$ на стр.

1301–1302 [1].) Нахождение векторных полей на произвольных приведенных эллиптических поверхностях сводится к случаю, когда поверхность имеет сечение.

ТЕОРЕМА. Все эллиптические поверхности, имеющие сечение и удовлетворяющие условиям а) – б), задаются уравнениями:

$$\text{при } p = 2: \quad \text{а)} \quad y^2 + xy = x^3 + c\tau^2x^2 + \tau^{2 \cdot 4^n}, \quad c \in k, \quad n > 0, \quad (1)$$

$$\text{при } p = 3: \quad \text{б}_1) \quad y^2 = x^3 + x^2 - \tau^{9^n}, \quad (2)$$

$$\text{или } \text{б}_2) \quad y^2 = x^3 + \tau x^2 - \tau^{3(9^n - 1)}, \quad n > 0. \quad (3)$$

Уравнения (1), (2) и (3) задают вейерштрассовы минимальные модели открытых множеств этих поверхностей, получающихся выкидыванием вырожденного слоя, имеющего острие. Регулярные векторные поля на минимальных моделях Нерона этих поверхностей действительно существуют. Они имеют вид $\alpha\tau\frac{\partial}{\partial\tau}$ в случаях а) и б₁) и $\alpha\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right)$ в случае б₂). Здесь $\alpha \in k$. Других регулярных векторных полей нет.

Регулярность этих полей в картах, описываемых уравнениями (1), (2) и (3) (на соответствующих минимальных моделях Нерона), проверяется очень просто. Для проверки их регулярности в окрестности остающегося вырожденного слоя надо положить $\tau = t^{-1}$. Таким образом, мы приходим, однако, к неминимальным моделям. Уравнения соответствующих минимальных моделей имеют вид

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & y^2 + t^{(2 \cdot 4^n + 1)/3}xy + \mu y = \\ & = x^3 + (ct^{(4^{n+1} - 4)/3} + \alpha)x^2 + x + \gamma, \quad c \in k, \quad (4) \\ \mu = & t \left(\sum_{i=n}^1 t^{2(4^n - 4^i)/3} \right), \quad \deg \alpha < (4^{n+1} - 4)/3, \end{aligned}$$

в остальном α и γ однозначно определяются из соотношения $\Delta = t^4$, которое имеет место в случае а),

$$\text{б)} \quad y^2 = x^3 + t^{(3^{m+1})/2}x^2 + \beta x + \gamma, \quad (5)$$

$m = 2n - 1$ в случае б₁) и $2n$ в случае б₂),

$$\beta = t \left(-1 + \sum_{i=m-1}^1 t^{(3^{m-1} - 3^i)/2} \right),$$

γ определяется из соотношения $\Delta = t^3$, выполненного в случае б) (Δ – в обоих случаях – дискриминант кривых (4) и (5)). После перехода к этой модели регулярность векторного поля проверяется просто.

Доказательство теоремы основывается на исследовании той модели, в которой слой A_n или D_n оказывается бесконечно удаленным (т. е. той, для которой в результате выводятся уравнения (4) и (5)). Условия а) и б) выражаются уравнениями $\Delta = t^4$ и $\Delta = t^3$ соответственно, которые и решаются. Основой для этого решения является тот факт, что в случае а) коэффициент при xy , а в случае б) коэффициент при x^2 , является степенью t . Так как в обоих случаях именно этот коэффициент является инвариантом Хассе, то интерпретация этого соотношения заключается в том, что инвариант Хассе обращается в 0 только в вырожденных слоях, а все невырожденные слои несуперсингулярны.

Если известно, что соответствующий коэффициент имеет вид t^k , то уравнения $\Delta = t^4$ и $\Delta = t^3$ можно решить индуктивно, выражая решение, соответствующее значению k , через решение, соответствующее значению $k - 1$, откуда и получаются формулы (4) и (5), а затем (1), (2) и (3). Это указывает, по-видимому, на то, что между поверхностями, задаваемыми уравнениями (4) или (5) при разных значениях n , имеются интересные соответствия.

Поступило 24.IV.1978

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Рудаков, И. Р. Шафаревич, *Несeparабельные морфизмы алгебраических поверхностей*, Изв. АН СССР, сер. матем. 40:6 (1976), 1269–1307.

СУПЕРСИНГУЛЯРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ТИПА КЗ НАД ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2

(С А.Н. РУДАКОВЫМ)

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР СЕР.

МАТЕМ. ТОМ 42 no.4 (1978)

Введение

Алгебраическая поверхность типа КЗ называется суперсингулярной, если все ее циклы алгебраичны, иными словами, ранг группы Пикара равен 22. Работа посвящена исследованию суперсингулярных поверхностей типа КЗ над полями характеристики 2. Мы доказываем, что каждая такая поверхность содержит квазиэллиптический пучок, откуда легко следует унирациональность этих поверхностей.

В работе [1] Артин ввел важный инвариант суперсингулярной поверхности КЗ: дискриминант квадратичной формы, определенной индексом пересечения в группе Пикара. Для поверхности, определенной над полем характеристики p , этот дискриминант имеет вид $p^{2\sigma}$, где σ может принимать значения $1, 2, \dots, 10$. Как показал Артин в той же работе, в версальном семействе деформаций некоторой поверхности точки, соответствующие поверхностям с заданным значением σ , определяют подсхему базы размерности $\geq \sigma - 1$. Мы доказываем неприводимость "многообразия модулей" поверхностей с заданным значением σ и доказываем, что "число модулей" поверхностей с заданным значением инварианта σ равно $\sigma - 1$. Точный смысл этого утверждения таков. Для любого значения σ , $1 \leq \sigma \leq 10$, мы строим неприводимое семейство $\pi: \mathcal{X} \rightarrow S$, слои которого $\pi^{-1}(s)$, $s \in S$, являются поверхностями типа КЗ с заданным значением инварианта σ . Это семейство обладает следующим свойством: на его базе S действует алгебраическая группа G , причем стабилизатор общей точки нульмерен, слои $\pi^{-1}(s_1)$ и $\pi^{-1}(s_2)$ над эквивалентными относительно группы G точками s_1 и s_2 изоморфны и $\dim S - \dim G = \sigma - 1$. Так как Артин показал [1],

что в версальном семействе деформаций поверхности с заданным значением инварианта σ точки базы, соответствующие поверхностям с тем же значением σ , образуют подсхему размерности $\geq \sigma - 1$, то отсюда следует, что число модулей точно равно $\sigma - 1$.

Перечисленные результаты получаются путем комбинирования геометрических соображений с детальным исследованием целочисленной квадратичной формы, определяемой в группе Пикара индексом пересечения. Последний вопрос относится к теории целочисленных квадратичных форм. В качестве применения полученных здесь результатов мы предлагаем значительно более простое, чем в нашей работе [11], доказательство того, что на поверхности типа $K3$ не существует ненулевых регулярных векторных полей.

В работе играет большую роль рассмотрение приводимых слоев эллиптических и квазиэллиптических расслоений и их связь с простыми корневыми системами. Мы решили отказаться от предлагавшихся раньше обозначений приводимых слоев (раньше предлагались две системы обозначений: Кодаирой [6] и Нероном [8]) и обозначать приводимый слой тем же знаком, что и соответствующую корневую систему: например, слой, граф которого совпадает с расширенной схемой Дынкина A_n , мы будем называть слоем типа A_n . Это не вызывает двусмысленности для слоев типов A_n , $n > 2$, D_n , E_6 , E_7 и E_8 . Необходимо только уточнение для слоя, состоящего из двух касающихся компонент, граф которого совпадает со схемой Дынкина A_1 , и для слоя, состоящего из трех компонент, пересекающихся в одной точке, граф которого совпадает со схемой Дынкина A_2 . Мы будем называть эти слои слоями типа $*A_1$ и $*A_2$. Для двух оставшихся неприводимых вырожденных слоев мы будем использовать обозначения: A_0 для слоя с особой точкой с разделенными касательными и $*A_0$ для слоя с острием.

§ 1. Унирациональность

Пусть в n -мерном пространстве над полем рациональных чисел определено билинейное скалярное произведение $Q^n \otimes Q^n \rightarrow Q$, которое мы будем обозначать через (x, y) . Подмодуль N ранга n над Z , $N \subset Q^n$, будет называться эвклидовой решеткой. Через N^* обозначим двойственную решетку:

$$N^* = \{ \alpha \in Q^n \mid (\alpha, N) \in Z \} .$$

Мы будем дальше предполагать, что N целочисленна, т.е. $N \subset N^*$. Решетку ранга 1, $N = Ze$ с условием $e^2 = 1$ (или -1) мы будем обозначать $I_{(+)}$ (или $I_{(-)}$), прямую сумму m экземпляров решетки N — через $N^{(m)}$. Решетку, векторы которой те же, что и у N , а

скалярное произведение определено как $k \cdot (x, y)$, будем обозначать через $N(k)$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

- а) $n \equiv 6 \pmod{8}$.
- б) *Квадратичная форма, определенная в $N \otimes \mathbf{R}$, имеет положительный индекс инерции 1 и отрицательный $n - 1$.*
- в) N четна, т.е. $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$ для всех $x \in N$.
- г) $N \supset 2N^*$.

При этих условиях произведение (x, y) определяет на пространстве $N/2N^*$ невырожденное произведение со значениями в поле $\mathbf{F}_2$ из двух элементов, для которого $x^2 = 0$. Поэтому наше произведение можно считать одновременно и кососимметрическим, так что $\text{rg}_{\mathbf{F}_2} N/2N^* = 0 \pmod{2}$. Мы положим

$$\text{rg}_{\mathbf{F}_2} N/2N^* = 2\tau.$$

Тогда $n = 2\tau + 2\sigma$, где

$$2\sigma = \text{rg}_{\mathbf{F}_2} N^*/N.$$

Так как $|d(N)| = |N^*/N|$, то $d(N) = -2^{2\sigma}$, где $d(N)$ — дискриминант N .

Заметим для дальнейшего, что условие г) “наследственно” в том смысле, что если $N \supset M$ и оно выполнено для M , то оно верно и для N . Действительно, $M^* \supset N^*$ и если $N \supset M \supset 2M^*$, то $N \supset M \supset 2M^* \supset 2N^*$.

Лемма 1. *При условиях а), б) и г) $N \supset S$, где*

$$S = I_{(+)} \oplus I_{(-)}^{(n-1)}.$$

Доказательство. Если $|d(N)| \geq 4$, то существует решетка $N' \supset N$, $(N' : N) = 2$, обладающая теми же свойствами, что и N . Приведем доказательство этого свойства, принадлежащее М. Кнезеру ([6], стр. 247). Произведение (x, y) определяет на N^*/N произведение $\langle x, y \rangle$ со значениями в $\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} = \mathbf{F}_2$. Так как форма $\langle x, y \rangle$ билинейна, то $u(x) = \langle x, x \rangle$ — линейна. Так как согласно сделанному предположению $\dim_{\mathbf{F}_2} N^*/N > 1$, то она имеет ненулевое ядро. Пусть $\bar{e} \neq 0$, $u(\bar{e}) = 0$ и $\bar{e}$ — образ вектора $e \in N^*$. Тогда решетка $N' = \{e, N\}$, как сразу проверяется, обладает всеми нужными свойствами.

Очевидно, что $d(N') = \frac{1}{4}d(N)$. Продолжая тот же процесс, мы придем, в конце концов, к решетке $S \supset N$, $|d(S)| = 1$. Согласно общим свойствам унимодулярных решеток (см. [13], стр. 92 – 93) и ввиду условия б), если S четна, то $S \simeq U_2 \oplus E_8^{(k)}$, где U_2 — решетка ранга 2, соответствующая квадратичной форме $2x_1, x_2$, а E_8 — отрицательно определенная четная решетка ранга 8. Если же S нечетна, то $S \simeq I_{(+)} \oplus I_{(-)}^{(n-1)}$. Ввиду условия а), $n \not\equiv 2 \pmod{8}$, поэтому первый случай невозможен. Второй случай приводит к утверждению леммы.

Лемма 2. При условиях а) – г) $N \supset M$, $M \simeq S(2)$, где S — такая же, как в лемме 1.

Доказательство. Согласно лемме 1, $S \supset N$, откуда

$$N^* \supset S^* = S \supset N \supset 2N^*.$$

Так как $|d(N)| = 2^{2\sigma}$, то $\text{rg}_{\mathbb{F}_2} S/N = \sigma$, а по условию $\text{rg}_{\mathbb{F}_2} N/2N^* = 2\tau$. В $N/2N^*$ определено, как мы видели, кососимметрическое билинейное произведение со значениями в $\mathbb{F}_2$. Выберем некоторое его максимальное изотропное подпространство размерности τ и обозначим его прообраз в N через M . Тогда

$$S \supset N \supset M \supset 2N^*.$$

$\text{rg}_{(\mathbb{F}_2)} N/M = \tau$, а значит, $\text{rg}_{(\mathbb{F}_2)} S/M = \sigma + \tau = \frac{n}{2}$, т.е. $|d(M)| = 2^n$. По условию $(x, y) \in 2\mathbb{Z}$ при $x, y \in M$ т.е. $M \simeq M_1(2)$ при некоторой целочисленной решетке M_1 и $d(M) = 2^n d(M_1)$. Отсюда следует, что M_1 унимодулярна, а тогда, как мы видели, $M_1 \simeq S$.

Перейдем к приложениям к поверхностям типа КЗ. Если для целочисленной решетки N $f \in N$, $f^2 = 0$, то положим

$$N(f) = f^\perp / \mathbb{Z}f,$$

где $f^\perp \subset N$ — ортогональный к f подмодуль. Очевидно, что при условии б) (x, y) определяет в $N(f)$ невырожденное и отрицательно определенное произведение, которое мы будем обозначать также (x, y) . Систему корней решетки $N(f)$, т.е. множество векторов $x \in N(f)$, $(x, x) = -2$, обозначим через $R(f)$. Порожденную ею подрешетку обозначим через $H(f)$. Если $R(f) = \oplus R_i(f)$ — разложение корневой системы $R(f)$ на неприводимые, то $H(f) = \oplus H_i(f)$, где $H_i(f)$ порождены системами $R_i(f)$.

Пусть теперь X — поверхность типа КЗ, определенная над алгебраически замкнутым полем k , $N = \text{Pic } X$, $f \in N$, $f^2 = 0$ и f

соответствует слою эллиптического или квазиэллиптического расслоения $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Корень системы $R(f)$ определяет такой класс $D \in \text{Pic } X$, что $D^2 = -2$, $DF = 0$. Из условия $D^2 = -2$ согласно теореме Римана — Роха вытекает, что $D > 0$ или $-D > 0$, а условие $D \cdot F = 0$ показывает, что D состоит из компонент слоев расслоения φ . Отсюда следует, что $R(f) = Q/\mathbf{Z}f$, где Q — множество дивизоров, состоящих из компонент слоев и имеющих квадрат -2 . Если φ имеет вырожденные слои F_i , то $R(f) = \bigoplus R_i(f)$, $R_i(f) = Q_i/\mathbf{Z}f$, где Q_i — множество дивизоров с квадратом -2 , состоящих из компонент слоя F_i . Отсюда, в частности, видно, что задание модуля N и элемента f , соответствующего расслоения φ , определяет типы приводимых вырожденных слоев этого расслоения.

Очевидно, что $H(f) = V(f)/\mathbf{Z}f$, где $V(f)$ — подгруппа, порожденная компонентами слоев, а $H_i(f) = V_i(f)/\mathbf{Z}f$, где $V_i(f)$ порождена компонентами слоя F_i .

Теорема 1. На суперсингулярной поверхности типа КЗ над полем характеристики 2 существует квазиэллиптический пучок.

Доказательство. Пусть X — такая поверхность. Как доказал Артин [1], для $N = \text{Pic } X$ выполнено условие г) (при любой характеристике p $N \supset pN^*$). Условия а), б) и в) хорошо известны, причем $n = 22$. Поэтому мы можем применить к N лемму 2. Согласно этой лемме $N \supset M$, $M = \bigoplus_{i=-1}^{20} f_i \mathbf{Z}$, $f_{-1}^2 = 2$, $f_i^2 = -2$, $i \geq 0$, $f_i f_j = 0$ при $i \neq j$. Положим $f = f_{-1} + f_0$. Тогда $f^2 = 0$ и согласно [10] мы можем считать, что f соответствует эллиптическому или квазиэллиптическому пучку φ (в случае необходимости совершив некоторый автоморфизм решетки N). Наша цель — доказать, что пучок φ не может быть эллиптическим и, значит, является квазиэллиптическим. Будем предполагать дальше, что φ — эллиптический пучок.

По построению $f_i \in f^\perp$, $i = 1, \dots, 20$, и (отождествляя их с образами mod $\mathbf{Z}f$) мы имеем: $M(f) = \bigoplus_{i=1}^{20} \mathbf{Z}f_i$, $f_i^2 = -2$. Очевидно, что $N(f) \supset H(f) \supset M(f)$ (т.к. f_i — корни). Так как $M(f) \supset 2M(f)^*$, то $H(f) \supset 2H(f)^*$ и, значит, $H_i(f) \supset 2H(f)^*$ для всех вырожденных слоев пучка φ . Кроме того, $\sum \text{rg } H_i(f) \leq 20$, так как беря из каждого слоя все компоненты, кроме одной, и присоединяя к ним слой и любой дивизор $D \notin f^\perp$, мы получим независимую систему элементов в N . В нашем же случае мы имеем 20 элементов f_i , содержащихся в $H(f)$, и поэтому $\sum \text{rg } H_i(f) = 20$. Теорема 1 будет поэтому доказана, если мы установим следующий результат, справедливый для полей характеристики $p = 2$ или 3.

Предположение. Пучок со слоем F арифметического рода 1 на поверхности типа КЗ тогда и только тогда является квазиэллиптическим, когда удовлетворяются условия:

- 1) $H_i(f) \supset p H_i(f)^*$ для каждого приводимого слоя F_i ,
- 2) $\sum \operatorname{rg} H_i(f) = 20$.

Пусть пучок со слоем F квазиэллиптический. Для любого вырожденного слоя группа $H_i^*(f)/H_i(f)$ изоморфна группе компонент кратности 1 этого слоя — это легко увидеть, рассмотрев возможные типы вырожденных слоев; вероятно, это следует и из общих свойств схем Дынкина. Но в случае квазиэллиптического расслоения группа всех сечений расслоения $X \times_{\widehat{O}} \widehat{O}$, где $\widehat{O}$ — пополненное локальное кольцо точки базы, имеет период p (характеристику основного поля), т.к. вкладывается в аддитивную группу. Поэтому в нашем случае $p \cdot H^*(f)/H(f) = 0$, т.е. выполнено условие 1). Для доказательства соотношения 2) заметим, что группа $N(f)/H(f)$ изоморфна группе рациональных точек общего слоя якобиева расслоения пучка φ . Так как, по тем же соображениям, что и выше, эта группа имеет период p и конечнопорождена, то она конечна. С другой стороны, $\operatorname{rg} N(f) = \operatorname{rg} N - 2 = 20$. Поэтому $\operatorname{rg} H(f) = 20$, откуда и следует 2).

Пусть теперь выполнены соотношения 1) и 2). Тогда и соотношение между эйлеровыми характеристиками слоев дает:

$$\sum (e(F_i) + \delta_i) \leq 24, \quad (1)$$

где сумма распространена на приводимые слои, $e(F_i)$ — эйлерова характеристика слоя, а δ_i — показатель высшего ветвления ([11], стр. 1297). Если число компонент слоя F_i есть $n_i + 1$ (так что $n_i = \operatorname{rg} R_i(f)$), то $e(F_i) = n_i + 2 - \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = 0$ за единственным исключением слоев типа A_n , когда $\varepsilon_i = 1$. Поэтому (1) записывается в виде:

$$\sum (n_i + 2 + \delta_i - \varepsilon_i) \leq 24. \quad (2)$$

Условие 2) переписывается в виде

$$\sum n_i = 20. \quad (3)$$

Вычитая (3) из (2) получаем:

$$\sum (2 + \delta_i - \varepsilon_i) \leq 4. \quad (4)$$

Рассмотрим сначала случай $p = 3$. Условию 1) удовлетворяют неприводимые корневые системы A_2 , E_6 и E_8 . Поэтому приводимые вырожденные слои могут быть только типов A_2 , A_2^* , E_6 и E_8 . Очевидно, что если для таких слоев выполнено соотношение (4), то сумма в левой части соотношения (3) всегда меньше, чем 20.

Пусть теперь $p = 0$. Условию 1) удовлетворяют неприводимые корневые системы A_1 , D_{2n} , E_7 и E_8 . Поэтому приводимые вырожденные слои могут быть только типов A_1 , A_1^* , D_{2n} , E_7 и E_8 . Кроме того, из формул, описывающих все типы вырожденных слоев ([8], стр. 124 – 125), вытекает, что для слоя, отличного от A_n , $\delta_i \geq 1$ и поэтому $2 + \delta_i - \varepsilon_i \geq 3$, а для слоя D_{2n} $\delta_i \geq 2$. Отсюда следует, что соотношения (3) и (4) могут удовлетворяться только, когда пучок φ имеет единственный вырожденный слой типа D_{20} с $\delta = 2$. Докажем, что такого эллиптического пучка не существует.

Обозначим через j абсолютный инвариант расслоения. Рассмотрим сначала случай, когда j не постоянен.

Пусть единственный вырожденный слой находится над точкой $\infty \in \mathbf{P}^1$. Тогда $j(\alpha) \neq \infty$ при $\alpha \neq \infty$ и, значит, $j(\infty) = \infty$. Отсюда следует, что соответствующий стабильный слой имеет тип A_n и вырожденный слой приобретает такой тип после квадратичного накрытия базы, разветвленного только в ∞ и с $\delta = 1$ (см., например, [9], стр. 5). Такое накрытие прямой $\mathbf{P}^1$ рационально. После накрытия мы получаем пучок $\varphi': X' \rightarrow \mathbf{P}^1$ с единственным вырожденным слоем, имеющим тип A_n . Такой пучок невозможен — см [11], стр. 1297. (Как показал П. Делинь, эллиптический пучок с базой $\mathbf{P}^1$ и единственным вырожденным слоем всегда имеет постоянный абсолютный инвариант.)

Если j постоянен и $j = 0$, то общий слой пучка φ суперсингулярен. В этом случае уравнение общего слоя имеет вид $y^2 + \mu y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ и для дискриминанта имеет место простая формула $D = \mu^4$ ([14], стр. 62). Наличие в ∞ слоя D_{20} дает условие $\nu_\infty(\mu) \geq 10$ ([8], стр. 125), что противоречит условию $\nu_\infty(D) = 24$.

Наконец, в случае $j \neq 0$ общий слой является не суперсингулярной кривой C . Можно предполагать, что пучок имеет сечение, перейдя к его якобиеву расслоению. Так как в этом случае $|\text{Aut } C| = 2$, то X бирационально изоморфно $(C \times B)/G$, где $|G| = 2$, а B является двулиственным накрытием базы $\mathbf{P}^1$, разветвленным в ∞ с инвариантом высшего ветвления $\delta = 1$ (так как $\delta = 2$ для пучка φ). Поэтому B опять рациональна, а тогда $(C \times B)/G$ имеет проекцию на рациональную кривую C/G с рациональным слоем B и поэтому сама рациональна. Это противоречит бирациональному изоморфизму $(C \times B)/G$ и X .

Следствие. Суперсингулярная поверхность типа КЗ над полем

характеристики 2 унирациональна.

Пусть $X \rightarrow B$ — квазиэллиптический пучок на суперсингулярной поверхности типа КЗ и σ — кривая, образованная остриями слоев. Как следует из результатов работы [2], отображение $\sigma \rightarrow B$ чисто несепарабельно и, значит, кривая σ рациональна. Положим $X' = X \times_B \sigma$. На X' мы имеем пучок, общий слой которого — рациональная кривая. Поэтому X' рациональна, а значит, X унирациональна.

§ 2. Классификация решеток

Мы изложим здесь полную классификацию решеток, удовлетворяющую условиям а) — г) § 1.

Определение. Четные решетки N , для которых $(x, x) \in 4\mathbb{Z}$ при $x \in 2N^*$, называются решетками I типа, в противном случае — II типа.

Легко видеть, что решетка N тогда и только тогда относится к I типу, когда произведение $\langle x, y \rangle$ на N^*/N со значениями в $\mathbb{F}_2$, определенное в § 1, кососимметрично, т.е. $\langle x, x \rangle = 0$.

Теорема 2. Решетка, удовлетворяющая условиям а) — г) § 1, однозначно определяется рангом n , инвариантом σ и типом, причем $0 \leq \sigma \leq \frac{n}{2}$. При $\sigma = 0$ таких решеток нет, при $\sigma = 1$ существует только решетка I типа, а при $\sigma = \frac{n}{2}$ — II типа.

При остальных значениях σ существуют как решетки I, так и решетки II типа.

Доказательство основывается на том, что для решеток рассматриваемого типа класс и род совпадают. Как известно, род совпадает со спинорным родом для неопределенных решеток ранга ≥ 3 ([7], стр. 319). Так как $n \equiv 6 \pmod{8}$, то $n > 3$. Совпадение спинорного рода с классом — это чисто локальное условие. Оно выполнено, если для любого простого числа p $N \otimes \mathbb{Z}_p$ содержит в качестве прямого слагаемого решетку вида $M(k)$, где M — унимодулярная решетка ранга ≥ 2 при $p \neq 2$ и ранга ≥ 3 при $p = 2$ ([7], стр. 304). В нашем случае решетка $N \otimes \mathbb{Z}_p$ унимодулярна при $p \neq 2$ и нужное условие выполнено. При $p = 2$ рассмотрим произвольный базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{2\tau}$ пространства $N/2N^*$ и любые прообразы e_i векторов $\bar{e}_i$ в N . Положим $N_0 = \bigoplus \mathbb{Z}e_i$. Так как скалярное произведение в $N/2N^*$ невырождено (по определению N^*), то решетка N_0 унимодулярна. Поэтому она выделяется прямым слагаемым:

$$N \otimes \mathbb{Z}_2 = N_0 \oplus N_1.$$

Так как $\text{rg}_{\mathbf{F}_2} N/2N^* = 2\tau$, $N_0 = N_0^*$ и $\text{rg}_{\mathbf{F}_2} N_0/2N_0^* = 2\tau$, то $N_1 = 2N_1^*$. Это означает, что $N_1 = M_1(2)$, где M_1 — целочисленная решетка над $\mathbf{Z}_2$. Наконец, $\text{rg } M_1 = 2\sigma$ и $\nu_2(d(N_1)) = \nu_2(d(N)) = 2\sigma$, откуда следует, что M_1 унимодулярна. Так как $2\sigma + 2\tau = n \geq 6$, то или $2\sigma \geq 4$, или $2\tau \geq 4$ и нужное условие выполнено.

Таким образом, изоморфизм двух решеток N рассматриваемого типа сводится к изоморфизму решеток $N \otimes \mathbf{Z}_p$ для всех p . Но решетки $N \otimes \mathbf{Z}_p$ при $p \neq 2$ унимодулярны и их дискриминант определяется заданием σ : $d(N) = -2^{2\sigma}$, поэтому они изоморфны. Следовательно, решетки N рассматриваемого типа однозначно определяются заданием решетки $N \otimes \mathbf{Z}_2$. Заметим, что, ввиду леммы 1, $N \subset S$, где S — фиксированная решетка, описанная в формулировке леммы. Поэтому $N \otimes \mathbf{Q} = S \otimes \mathbf{Q}$ и, значит, $N \otimes \mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Q}_2 = S \otimes \mathbf{Q}_2$. Мы опишем сейчас все четные решетки $\bar{N}$ над $\mathbf{Z}_2$ ранга n и такие, что

$$\bar{N} = N_0 \oplus M_1(2),$$

где N_0 и M_1 унимодулярны, а $\bar{N} \otimes \mathbf{Q}_2 = S \otimes \mathbf{Q}_2$.

А. Пусть решетка M_1 четна. Как легко видеть, четная унимодулярная решетка имеет вид $U_2^{(k)}$, где U_2 — решетка, соответствующая форме $2x_1x_2$ или вид $U_2^{(k-1)} \oplus V_2$, где V_2 — единственная двумерная четная унимодулярная решетка над $\mathbf{Z}$, не представляющая 0 (она соответствует форме $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$). Таким образом, в нашем случае возможны 4 случая:

1. $N_0 = U_2^{(\tau)}$, $M_1 = U_2^{(\sigma)}$.
2. $N_0 = U_2^{(\tau-1)} \oplus V_2$, $M_1 = U_2^{(\sigma)}$.
3. $N_0 = U_2^\tau$, $M_1 = U_2^{(\sigma-1)} \oplus V_2$.
4. $N_0 = U_2^{(\tau-1)} \oplus V_2$, $M_1 = U_2^{(\sigma-1)} \oplus V_2$.

Выясним, какие из них согласуются с условием $\bar{N} \otimes \mathbf{Q}_2 = S \otimes \mathbf{Q}_2$.

В случаях 2 и 3 $d(\bar{N}) = (-1)^{\sigma+\tau-1} \cdot 3 \cdot 2^{2\sigma} = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 3 \cdot 2^{2\sigma} = 3 \cdot 2^{2\sigma}$ (ввиду того, что $n \equiv 6 \pmod{8}$). Поэтому здесь не выполнено условие $d(\bar{N}) = d(S) \cdot c^2$, $c \in (\mathbf{Q}_2^*)^2$.

В случае 1 надо вычислить символ Хааса $\varepsilon(\bar{N})$ (см. [13], стр. 64). Очевидно, $\varepsilon(S) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = 1$. Заметим, что $U_2(2) \otimes \mathbf{Q}_2 \simeq U_2 \otimes \mathbf{Q}_2$, поэтому в случае 1 $\bar{N} \otimes \mathbf{Q}_2 \simeq U(\frac{n}{2}) \otimes \mathbf{Q}_2$. Отсюда

$$\varepsilon(\bar{N}) = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} (\frac{n}{2}-1)} = -1.$$

Этот случай тоже невозможен.

Таким образом, для типа А остается одна возможность:

$$\overline{N} \simeq U_2^{(\tau-1)} \oplus V_2 \oplus U_2^{(\sigma-1)}(2) \oplus V_2(2). \quad (5)$$

В. Пусть решетка M_1 нечетна. Если $N_0 = U_2^{(\tau-1)} \oplus V_2$, то для $y \in V_2$, $y \notin 2V_2$, $y^2 \not\equiv 0(4)$, т.е. $y^2 \equiv 2(4)$. Прибавляя к вектору y из V_2 такой вектор $x \in M_1(2)$, что $x^2 \notin 4\mathbf{Z}_2$, мы получим вектор y_1 с $y_1^2 \equiv 0 \pmod{4}$ и, значит, новое разложение с $N_0 = U_2^{(\tau)}$.

Если $\text{rg } M_1 > 4$, то в ней содержатся векторы e_1, e_2 , $e_1^2 = 1$, $e_2^2 = -1$, $e_1 e_2 = 0$. Действительно, так как $\text{rg } M_1 \geq 4$, то M_1 представляет все числа из $\mathbf{Z}_2^*$. В частности, существует $e_1 \in M_1$, $e_1^2 = 1$. Решетка $e_1^\perp$ унимодулярна. Если она нечетна, то аналогично находим в ней вектор e_2 . Если $e_1^\perp$ четна, то в ней выделяется прямым слагаемым решетка $U_2 = \mathbf{Z}_2 a \oplus \mathbf{Z}_2 b$, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = 1$. И для $e'_1 = e_1 + a$, $e'_2 = -e_1 + b \in (e'_1)^\perp$ $(e'_1)^2 = 1$ и $(e'_1)^2 = 1$, поэтому теперь $(e'_1)^\perp$ уже нечетна.

Применяя этот процесс несколько раз, получим векторы $e_i \in M$, $i = 1, \dots, 2\sigma - 4$, $e_i^2 = 1$ при $i \equiv 1 \pmod{2}$, $e_i^2 = -1$ при $i \equiv 0 \pmod{2}$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$. Тогда $M_1 = \bigoplus_{i=1}^{2\sigma-4} \mathbf{Z} e_i \oplus M'_1$, $\text{rg } M'_1 = 4$ и M'_1 — нечетна. Повторяя те же рассуждения, найдем в M'_1 базис $e_{2\sigma-3}, e_{2\sigma-2}, e_{2\sigma-1}, e_{2\sigma}$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $e_{2\sigma-i}^2 = \varepsilon_i \in \mathbf{Z}_2^*$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Воспользовавшись условием $d(N) = -2^{2\sigma}$, мы получим, что

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = 1.$$

Используем, наконец, то, что $\varepsilon(\overline{N}) = \varepsilon(S) = 1$. Рассуждая, как и при разборе типа А, мы получим, что $\varepsilon(M') = 1$. Легко видеть, что эти условия на M' определяют $M' \simeq I_+^{(4)}$. Отсюда

$$\overline{N} \simeq U_2^{(\tau)} \oplus I_{(+)}(2)^{(\sigma+2)} \oplus I_{(-)}(2)^{(\sigma-2)}. \quad (6)$$

Таким образом, мы нашли два возможных значения для $\overline{N}$, задаваемых формулами (5) и (6). Легко проверить, что формула (5) дает решетку I типа, а (6) — II типа. Очевидно, что в обоих типах $\sigma > 0$, в I типе $\tau > 0$, а во II — $\sigma > 1$.

Остается доказать, что все эти решетки действительно реализуются как решетки над $\mathbf{Z}$, удовлетворяющие условиям а) — г) § 1.

Рассмотрим три случая:

- а) $\sigma = \frac{n}{2}$. Здесь существует только решетка II типа, за которую можно взять решетку $S(2) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z} e_i$, $e_1^2 = 2$, $e_i^2 = -2$ при $i > 1$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$.

б) $\sigma = \frac{n}{2} - 1$. Решеткой I типа будет $N = \{S(2), f\}$, $f = \frac{1}{2} \sum_1^n e_i$.

Она четна, так как $n \equiv 2 \pmod{4}$, $2N^* = \left\{ \sum x_i e_i, \sum x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}$, откуда следует, что она принадлежит к I типу.

Решеткой II типа будет $U_2 \oplus I_{(-)}(2)^{(n-2)}$.

в) $\sigma \leq \frac{n}{2} - 2$. Мы используем две конструкции:

А. $N = U_2 \oplus N'$, $N' \subset I_{(-)}^{(n-2)}$, $I_{(-)}^{(n-2)} = \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbf{Z} e_i$, $e_i^2 = -1$ и

N' состоит из элементов вида $\sum_{i=1}^{n-2} x_i e_i$, где

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_{k_1} &\equiv x_{k_1+1} + \dots + x_{k_1+k_2} \equiv \dots \equiv \\ x_{k_1+\dots+k_{r-1}+1} + \dots + x_{k_1+\dots+k_r} &\equiv 0 \pmod{2} . \end{aligned} \quad (7)$$

Четность решетки N' , (а значит, и N) равносильно условию

$$k_1 + \dots + k_r = n - 2 . \quad (8)$$

Легко проверить, что

$$2(N')^* = \{f_1, \dots, f_r, 2N'\} ,$$

$$f_i = e_{k_i+k_{i-1}+1} + \dots + e_{k_i+\dots+k_i} ,$$

и соотношение $N' \supset 2(N')^*$ равносильно условию

$$k_i \equiv 0 \pmod{2} , \quad i = 1, \dots, r .$$

Решетка принадлежит I типу тогда и только тогда, когда $f_i^2 \equiv 0 \pmod{4}$, т.е. $k_i \equiv 0 \pmod{4}$, $i = 1, \dots, r$. Наконец, $(S : N) = 2^r$, так что $\sigma = r$.

Полагая $k_1 = k_2 = \dots = k_{r-1} = 2$, $k_r = n - 2 - 2(r-1)$, мы получим при $0 \leq r \leq \frac{n}{2} - 2$ решетки II типа со всеми возможными значениями σ .

Полагая $k_1 = k_2 = \dots = k_{r-1} = 4$, $k_r = n - 2 - 4(r-1)$, мы получаем, ввиду условия $k_r \geq 4$, решетки I типа со значениями $1 \leq \sigma \leq \frac{n-2}{4}$.

В. Положим

$$N = U_2 \oplus N' , \quad N' = \{I_{(-)}(2)^{(n-2)}, f_1, \dots, f_r\} ,$$

где

$$I_{(-)}(2)^{(n-2)} = \oplus \mathbf{Z} e_i, \quad e_i^2 = -2, \quad e_i e_j = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

$$f_s = \frac{1}{2}(e_{k_1+\dots+k_{s-1}+1} + \dots + e_{k_1+\dots+k_s}).$$

Целочисленность и четность решетки N' (а значит, и N) обеспечивается условиями $k_s \equiv 0 \pmod{4}$, $s = 1, \dots, r$. Соотношение $N' \supset 2(N')^*$ выполнено всегда, так как $N' \supset I_{(-)}(2)^{(n-2)}$. Простое вычисление показывает, что $2(N')^*$ состоит из элементов $\sum x_i e_i \in I_{(-)}(2)^{(n-2)}$, удовлетворяющих условиям (7). Поэтому N' I типа тогда и только тогда, когда выполнены условия (8). Наконец, $(N': I_{(-)}(2)^{(n-2)}) = 2^r$ и поэтому $\sigma = \frac{n}{2} - r - 1$. Полагая $k_1 = \dots = k_{r-1} = 4$, $k_r = n - 2 - 4(r-1)$, мы, как и раньше, получаем решетки I типа со значениями $\frac{n-2}{4} \leq \sigma \leq \frac{n}{2} - 2$.

Замечание. Полученные результаты не связаны с простым числом 2. Назовем решетку N p -элементарной, если $N \supset pN^*$ при некотором простом p . Положим $n = \text{rg } N$, $\text{rg}_{\mathbf{F}_p} N^*/N = s$ и предположим, что выполнены условия:

- а) $n \equiv 6 \pmod{8}$;
- б) *квадратичная форма, определенная в $N \otimes \mathbf{R}$, имеет положительный индекс инерции 1 и отрицательный $n-1$;*
- в) N четна,
- г) N , p -элементарна, $p \neq 2$;
- д) $s \equiv 0(2)$, $s = 2\sigma$.

Тогда имеет место даже более простой результат, чем в случае $p = 2$:

Теорема 2'. Решетка, удовлетворяющая условиям а) — д), однозначно определяется рангом и инвариантом σ . Всегда $0 < \sigma < \frac{n}{2}$ и для любых значений σ существует решетка с этим инвариантом.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Как и там, мы видим, что род совпадает с классом. Из условий а), б), г) и д) вытекает, что $d(N) = -p^{2\sigma}$. Если q — простое число, отличное от 2 и p , то $N \otimes \mathbf{Z}_q$ — унимодулярная решетка и поэтому изоморфна $U_2^{(\frac{n}{2})}$ или $U_2^{(\frac{n}{2}-1)} \oplus V_2$, где V_2 — унимодулярная анизотропная решетка ранга 2 над $\mathbf{Z}_q$. Сравнение дискриминантов показывает, что второй случай невозможен и, значит,

$$N \otimes \mathbf{Z}_q = U_2^{(\frac{n}{2})}, \quad q \neq 2, p.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$N \otimes \mathbf{Z}_2 = U_2^{(\frac{n}{2})}.$$

Для формы $N \otimes \mathbf{Z}_p$ существует 4 возможности:

- 1) $U_2^{(\frac{n}{2}-\sigma)} \oplus U_2(p)^{(\sigma)}$;
- 2) $U_2^{(\frac{n}{2}-\sigma-1)} \oplus V_2 \oplus U_2(p)^{(\sigma)}$;
- 3) $U_2^{(\frac{n}{2}-\sigma)} \oplus U_2(p^{(\sigma-1)}) \oplus V_2(p)$;
- 4) $U_2^{(\frac{n}{2}-\sigma-1)} \oplus V_2 \oplus U_2(p^{(\sigma-1)}) \oplus V_2(p)$,

где V_2 — опять унимодулярная анизотропная решетка ранга 2 над $\mathbf{Z}_p$. Нужный дискриминант соответствует только случаям 1) и 4). Чтобы сделать выбор между ними, вычислим инвариант ε_q для имеющих у нас кандидатов на место решетки $N \otimes \mathbf{Z}_q$ (определение ε_q см. в [13], стр. 64). Простое вычисление показывает, что

$$\varepsilon_q(U_2^{(\frac{n}{2})}) = 1 \text{ при } q \neq 2, p; \quad \varepsilon_2(U_2^{(\frac{n}{2})}) = -1,$$

$$\varepsilon_p(U_2^{(\frac{n}{2}-\sigma)} \oplus U_2(p)^{(\sigma)}) = 1.$$

Поэтому этот набор решеток не может быть получен в виде $N \otimes \mathbf{Z}_q$ из некоторой целочисленной решетки N : он не удовлетворяет соотношению

$$\prod_q \varepsilon_q(N \otimes \mathbf{Z}_q) = 1$$

(см. [13], стр. 78). Таким образом, решетка $N \otimes \mathbf{Z}_p$ должна относиться к случаю 4). Тем самым решетка $N \otimes \mathbf{Z}_q$ однозначно определена для всех простых чисел q и, значит, решетка N тоже однозначно определена.

Инвариант σ не может принимать значения 0 и $\frac{n}{2}$ (см. [1]). Действительно, в первом случае решетка N была бы четной и унимодулярной, а ее ранг удовлетворял бы условию $n \equiv 2 \pmod{8}$. С другой стороны, σ не может быть равным $\frac{n}{2}$, так как тогда решетка N имела бы вид $M(p)$ и решетка M была бы четной унимодулярной, что невозможно по той же причине.

Остается предъявить решетку N для заданного значения σ . Мы используем следующие вспомогательные решетки над $\mathbf{Z}$. H_p — четная решетка ранга 4 дискриминанта $-p^2$ (ее можно реализовать как максимальный порядок в кватернионной алгебре, разветвленной только в p и в ∞ с произведением $\text{tr}(xy^*)$, где tr — приведенный след, а $*$ обозначает инволюцию). Пусть $E = \oplus \mathbf{Z}e_i$, $(e_i e_j) = 0$ при

$i \neq j$, $e_i^2 = a_i$, $a_i \equiv 1 \pmod{2}$. Через E_* обозначим решетку $E_0 + \varepsilon \mathbb{Z}$, где $E_0 \subset E$ и состоит из всех векторов $\sum x_i e_i$, $\sum x_i \equiv 0 \pmod{2}$, а $\varepsilon = \frac{1}{2} \sum e_i$. E_* будет целочисленной четной решеткой, если выполнено условие

$$\sum a_i \equiv 0 \pmod{8}.$$

(Эта конструкция — элементарный частный случай операции “четнизации” нечетной решетки, введенной Б.Б. Венковым.)

Пусть $n = 8m + 6$. Если $\bar{\sigma}$ нечетно, $\sigma = 2\bar{\sigma} + 1$, то положим

$$N_\sigma = U_2 \oplus H_p \oplus (I(p)^{(4\bar{\sigma})} \oplus I^{(8m-4\bar{\sigma})})_*.$$

Если σ четно, $\sigma = 2\bar{\sigma} + 2$, то положим

$$N_\sigma = U_2(p) \oplus H_p \oplus (I(p)^{(4\bar{\sigma})} \oplus I^{(8m-4\bar{\sigma})})_*.$$

Легко проверить, что условие $\sum a_i \equiv 0 \pmod{8}$ выполнено для таких решеток E , к которым мы применяем операцию E_* , что N_σ имеет нужное значение σ и что удовлетворяются все условия теоремы 2'.

Геометрическое приложение. Приведем более простое доказательство результата работы [11] — на поверхности типа КЗ не существует ненулевого регулярного векторного поля. В работе [11] доказано (достаточно просто), что на поверхности X , обладающей ненулевым векторным полем θ , имеется пучок $\varepsilon: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ арифметического рода 1.

Предположим, что пучок ε — эллиптический. Поле θ или касательно к слоям пучка (этот случай легко приводится к противоречию) или имеет ненулевую “нормальную компоненту” θ_N — регулярное векторное поле на $\mathbb{P}^1$, причем θ_N обращается в 0 в тех точках, над которыми лежат вырожденные слои. Поэтому число вырожденных слоев не больше двух и если бы мы построили на поверхности X эллиптический пучок с тремя вырожденными слоями, то теорема была бы доказана. Но даже и в случае двух вырожденных слоев поле θ принадлежит к “мультипликативному типу” и в [11] доказано (тоже довольно просто), что если оба вырожденных слоя пучка ε приводимы, то высшее ветвление отсутствует. Для случая, когда высшего ветвления нет, теорема опять следует легко, как показано в [11]. Ввиду этого мы можем ограничиться случаем $p = 2, 3$. Таким образом, нам достаточно построить на поверхности X эллиптический пучок, имеющий по крайней мере два приводимых слоя. Пучок арифметического рода 1 соответствует элементу $f \in N$, $f^2 = 0$, а его приводимые слои соответствуют неразложимым компонентам корневой системы решетки N . Наконец,

случай квазиэллиптического пучка отличается от случая эллиптического пучка при помощи предложения из § 1. Как доказано в [11], поверхность X , на которой существует ненулевое векторное поле, унирациональна и, значит, суперсингулярна, так что к ней применимы полученные выше результаты.

В частности, ввиду теорем 2 и 2' нам достаточно для $p = 2$ и $p = 3$ и каждого значения σ , $0 < \sigma < 11$, построить любую решетку N , удовлетворяющую условиям этих теорем и такую, что в ней существует элемент f , $f^2 = 0$, и система корней $R(f)$ решетки $N(f)$ разлагается по крайней мере на две неприводимых составляющих, но не удовлетворяющую условиям 1) и 2) Предложения. Мы зададим N в виде $U_2 \oplus N'$ или $U_2(p) \oplus N'$, причем $f \in U_2$ или $f \in U_2(p)$.

Случай $p = 3$. Обозначим через V_2 отрицательно определенную четную решетку ранга 2 с дискриминантом 3. Как легко видеть, $H_3 = V_2 \oplus V_2$, а корневая система V_2 имеет тип A_2 . Поэтому для $p = 3$ решетка N_σ , построенная выше для произвольного p , удовлетворяет нужным условиям (что для нее не выполняются условия 1) и 2) Предложения, проверяется очень просто).

Случай $p = 2$. Пусть $E_{16} = \oplus \mathbf{Z} e_i$, e_i ортонормированы, $E'_{16} \subset E_{16}$ состоит из векторов $\sum x_i e_i$, $\sum x_i \equiv 0 \pmod{4}$, $F_{16} = E'_{16} + \varepsilon \mathbf{Z}$, $\varepsilon = \frac{1}{4} \sum e_i$, F_{16} — нечетная унимодулярная решетка. Для любой нечетной решетки S мы будем обозначать через $S\mathfrak{c}$ подрешетку ее элементов с четным квадратом. Выпишем нужные нам решетки.

σ	N	$R(f), f \in U_2, U_2(2)$
1	$U_2 \oplus (F_{16} \oplus I^{(4)})_{\mathfrak{c}}$	$D_5 \oplus A_{15}$
2	$U_2(2) \oplus (F_{16} \oplus I^{(4)})_{\mathfrak{c}}$	$D_5 \oplus A_{15}$
3	$U_2 \oplus D_4(2) \oplus E_8^{(2)}$	$E_8^{(2)}$
4	$U_2(2) \oplus D_4(2) \oplus E_8^{(2)}$	$E_8^{(2)}$
5	$U_2 \oplus D_4 \oplus E_8 \oplus E_8(2)$	$D_4 \oplus E_8$
6	$U_2(2) \oplus D_4 \oplus E_8 \oplus E_8(2)$	$D_4 \oplus E_8$
7	$U_2 \oplus D_4^{(3)} \oplus E_8(2)$	$D_4^{(3)}$
8	$U_2(2) \oplus D_4^{(3)} \oplus E_8(2)$	$D_4^{(3)}$
9	$U_2 \oplus M_{12} \oplus E_8(2)$	$A_1^{(12)}$
10	$U_2(2) \oplus M_{12} \oplus E_8(2)$	$A_1^{(12)}$

где $M_{12} = \left(\bigoplus_{i=1}^{12} \mathbb{Z} e_i, e_i^2 = -2, e_i e_j = 0 \right) + \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{2} e_i$.

§ 3. Классификация поверхностей

Теорема 3. Решетка $N = \text{Pic } X$ для суперсингулярной поверхности X типа КЗ над полем характеристики 2 принадлежит I типу.

Доказательство. Так как $\text{rg } N = 22$, то согласно теореме 2, инвариант σ может принимать лишь значения от 1 до 11. Рассмотрим три случая.

- а) Пусть $\sigma = 11$. В этом случае, согласно теореме 2, существует лишь решетка типа II и она изоморфна $S(2) = \bigoplus \mathbb{Z} e_i$, $e_i^2 = 2$, $e_i^2 = -2$, $2 \leq i \leq 22$. Если бы N была изоморфна этой решетке, то элемент $f = e_1 + e_2$ соответствовал бы эллиптическому или квазиэллиптическому расслоению, а так как $N(f)$ порождается образами элементов e_i , $i = 2, \dots, 22$, то, согласно признаку, сформулированному в § 1, соответствующее расслоение должно иметь 20 слоев типа $^*A_1$, а согласно лемме 3 оно должно быть квазиэллиптическим. В каждом квазиэллиптическом расслоении определена кривая ξ , образованная остриями слоев, и $\xi \cdot F = 2$ (см. [2], где эта кривая обозначена через σ). Отсюда вытекает, что если вырожденный слой имеет компоненты C_i и C'_i , то $(\xi, C_i) = (\xi, C'_i) = 1$. Это, однако, противоречит тому, что в решетке $N \simeq S(2)$ произведение любых двух элементов четно. Поэтому этот случай невозможен.
- б) Пусть $\sigma = 10$. Предположим, что решетка N принадлежит II типу. Как мы видели при доказательстве теоремы 2, такой решеткой является $U_2 \oplus I_{(-)}(2)^{(20)}$. Поэтому, согласно теореме 2, мы имели бы в этом случае изоморфизм $N \simeq U_2 \oplus I_{(-)}(2)^{(20)}$. Если $U_2 = \{f, g\}$, $f^2 = g^2 = 0$, $fg = 1$, то f соответствует, как и в случае а), квазиэллиптическому расслоению с 20 вырожденными слоями F_i типа $^*A_1$, причем расслоение имеет сечение, так как существует дивизор g с $fg = 1$. Пусть s — это сечение, а ξ — кривая, образованная остриями слоев, и $F_i = C_i + C'_i$. Мы можем считать, что $sC_i = 1$ и поэтому $sC'_i = 0$. Так как f, s и C_i , $i = 1, \dots, 20$, являются базисом решетки N , то

$$\xi = 2s + \sum k_i C_i + lf, \quad k_i, l \in \mathbb{Z}.$$

Рассматривая пересечение с C_i , получаем, что

$$1 = 2 - 2k_i.$$

Это противоречие и доказывает, что N не может принадлежать ко II типу.

- в) Пусть $\sigma < 10$. В этом случае, как мы видели при доказательстве теоремы 2, решетка N имеет вид $U_2 \oplus N'$, где N' содержит $n - 2$ независимых элемента с квадратом -2 .

Пусть $U_2 = \{f, g\}$, $f^2 = g^2 = 0$, $fg = 1$. Так как U_2 унимодулярна, то

$$N \simeq U_2 \oplus N(f)$$

и, как и при разборе случая б), мы можем считать, что f соответствует квазиэллиптическому пучку, имеющему сечение s .

Положим $N'' = U_2 \oplus H(f)$, $N' = (N'', \xi)$; мы докажем, что решетка N' принадлежит к I типу. Так как модуль $(N')^*/N'$ "больше" модуля N^*/N , то свойство скалярного произведения $\langle x, x \rangle = 0$ переносится с первого на второй, откуда и будет следовать теорема.

Мы имеем включение

$$(N')^*/N'' \subset (N'')^*/N'' ,$$

в котором, очевидно, $(N')^*/N'' = \xi^\perp$, где ξ рассматривается как элемент группы $(N'')^*/N''$. Нам надо доказать, что для $x \in \xi^\perp$ $\langle x, x \rangle = 0$. Положим $\langle x, x \rangle = u(x)$ для $x \in (N'')^*/N''$. Очевидно u — линейная функция и требуется доказать, что

$$\xi^\perp \in \text{Ker } u . \quad (9)$$

Так как решетка U_2 унимодулярна, то

$$(N'')^*/N'' = H(f)^*/H(f),$$

и если $H(f) = \oplus H_i(f)$, то достаточно проверить включение (9) для всех групп $H_i^*(f)/H_i(f)$. Эту проверку надо осуществить для всех вырожденных слоев типов E_8 , E_7 , A_1 и D_{2n} . При этом решетка E_8 унимодулярна и поэтому $E_8^* = E_8$, так что для нее наше утверждение тривиально. Для остальных типов действие ξ как линейной формы на $H(f)$ определяется исходя из того, что она инвариантна относительно действия группы $H_i^*(f)/H_i(f)$ на расширенной схеме Дынкина, соответствующей этому слою (см. [12]). При этом ξ является элементом базиса, взаимного к базису, состоящему из простых корней, причем этот базисный элемент соответствует

некоторому "симметричному" простому корню. Иными словами, ξ — это один из "базисных весов" в терминологии [3]. Так как для всех простых корневых систем "базисные веса" ω_i выписаны в [3], что мы получаем явное представление для ξ . В частности, для слоев типа $*A_1$ и E_7 H_i^*/H_i одномерно и $\xi \neq 0$, поэтому $\xi^\perp = 0$ и (9) очевидно. Для слоя пользуясь формулами из [3], стр. 256–257, мы получаем, что $\xi = \bar{\omega}_n$ и $\xi(x) = u(x)$, что тоже доказывает (9). Это заканчивает доказательство теоремы 3.

§ 4. Построение универсальных семейств

Построение семейств, которое мы сейчас изложим, несколько напоминает построение решеток над $\mathbb{Z}$ I типа в конце доказательства теоремы 2: в обоих случаях множество возможных значений σ разбивается на две части, для каждой из которых предлагается своя конструкция.

а) *Случай.* $10 \geq \sigma \geq 6$.

1) $\sigma = 10$. Решетка $\text{Pic } X$ в этом случае изоморфна решетке, полученной присоединением к решетке с базисом $C_0, \dots, C_{22}$, где C_i ортогональны, $C_0^2 = 2$, $C_i^2 = -2$ при $i > 0$, элемента $\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{22} C_i$. Элемент $F = C_0 - C_1$ имеет квадрат 0 и мы можем считать, что он реализуется как слой пучка, общая кривая которого имеет арифметический род 1. Классы $C_2, \dots, C_{22}$ ортогональны F и мы можем считать, что они реализуются компонентами слоев. Получаем 20 слоев типа $*A_1$. Пучек будет квазиэллиптический. Компоненты слоя — это кривые C_i и $F - C_i$, $i \geq 2$. Класс C_1 имеет квадрат -2, поэтому в этом классе содержится единственный эффективный дивизор s , для которого $(s, F) = 2$. Так как $(\varepsilon, F) = 2$ и (C_i, F) четно, то пересечение со слоем пучка любого цикла четно. Покажем, что дивизор s неприводим. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3. Пусть F — слой пучка кривых арифметического рода 1 на поверхности типа КЗ и s — эффективный дивизор, удовлетворяющий условиям: $s^2 = -2$, $(s, C_i) \geq 0$ для всех компонент C_i слоев пучка и $0 < (s, F) \leq (D, F)$ для любого дивизора D , для которого $(D, F) > 0$. Тогда s — неприводимая кривая.

Если бы s был приводим, то единственно возможное разложение — это

$$s = \bar{s} + x,$$

где $\bar{s}$ — кратное сечение, а x — дивизор, составленный из компонент слоев. Имеем:

$$\bar{s}^2 = s^2 - 2sx + x^2.$$

При этом $(x)^2 \leq 0$, так как форма пересечения неположительно определена на подрешетке, порожденной компонентами слоев, а $(s, x) \geq 0$, так как $(s, C_i) \geq 0$. Следовательно,

$$\bar{s}^2 \leq s^2 = -2.$$

Так как $\bar{s}$ — неприводимая кривая, то $\bar{s}^2 = -2$ и $x = 0$. Легко проверить, используя стандартные точные последовательности, что при $m \geq r$ $H^1(rs + mF) = 0$. Отсюда, по теории Римана — Роха,

$$l(rs + mF) = -r^2 + 2rm + 2 \text{ при } m \geq r.$$

Действуя по аналогии с построением вейерштрассовой нормальной формы эллиптической кривой, мы можем выбрать функции $x \in \mathcal{L}(s + F)$, $x \notin \mathcal{L}(F)$ и $y \in \mathcal{L}(2s + 3F)$, y линейно независима с 1, x , x^2 , t , t^2 , t^3 , xt , xt^2 , x^2t , где t — функция на базе, $t \in \mathcal{L}(F)$. Тогда принадлежащие пространству $L\mathcal{C}al(4s + 6s)$ одночлены вида $x^i y^j t^k$ линейно зависимы. Это приводит к соотношению

$$y^2 + (b_1 x^2 + b_2 x + b_3)y = a_2 x^4 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6, \quad (*)$$

где a_i и b_i — многочлены от t степени i . Докажем, что в нашем случае $b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Положим $\varphi(x) = b_1 x^2 + b_2 x + b_3$, $f(x) = a_2 x^4 + a_3 x^3 + \dots + a_6$ и рассмотрим случаи, когда степень φ равна 2, 1 и 0. Пусть $\deg \varphi = 2$. Тогда $\varphi'_x = 0$. Действительно, если φ неприводим и $\varphi'_x \neq 0$, то, вычисляя особые точки кривой (*), мы получим, что оба корня φ дают две разные ее особые точки, а это противоречит тому, что арифметический род кривой равен 1. Если же φ имеет два корня в поле $k(t)$, то те же вычисления показывают, что один из этих корней дает особую точку кривой (*), рациональную над $k(t)$, откуда следовала бы рациональность поверхности X . Уравнение для особой точки поверхности принимают теперь вид

$$f'_x = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi'_i y = f'_i, \quad y^2 + \varphi y = f.$$

Записав f в виде $g(x^2) + f'_x \cdot x$, мы приводим последнее уравнение к виду $y^2 = g(x^2)$. Подставляя $y = f'_i / \varphi'_i$, мы получаем уравнение, зависящее только от x^2 . Значение для x^2 определяется из условия $\varphi = 0$ (так как $\deg \varphi = 2$, $\varphi'_x = 0$). Мы получаем соотношение

на коэффициенты уравнения (*), которое, как показывают вычисления, имеет степень 12 относительно t . Так как значения t , соответствующие особым точкам поверхности, должны обращать в 0 это выражение, то это противоречит тому, что наш пучок имеет 20 вырожденных слоев.

Если $\deg \varphi = 1$, то те же соображения показывают, что особая точка кривой (*) рациональна над $k(t)$, что приводит к рациональности поверхности X . Наконец, в случае $\deg \varphi = 0$, $\varphi \neq 0$, мы имеем эллиптический пучок.

Таким образом, наше соотношение приводится к виду

$$y^2 = a_2(t)x^4 + a_3(t)x^3 + a_4(t)x^2 + a_5(t)x + a_6(t).$$

В общем случае такое уравнение определяет квазиэллиптическую поверхность типа КЗ с 20 слоями $*A_1$.

Допустимые преобразования $y \rightarrow y + b_1x^2 + b_2x$ показывают, что точка базы S этого семейства задается многочленами a'_2, a_3, a'_4, a_5 и a'_6 . Общее число входящих в них параметров равно 16. Преобразования $x \rightarrow \alpha x + c_1$, $\deg c_1 \leq 1$, $y \rightarrow \beta y$ и преобразования $\varphi \in \text{SL}(2, k)$ параметра t определяют группу G автоморфизмов базы семейства. Очевидно, $\dim G = 7$, так что $\dim S - \dim G = 9 = \sigma - 1$. Проверим, что стабилизатор общей точки базы конечен. Легко видеть, что $a_3 \rightarrow \frac{\alpha^3}{\beta^2} a_3^\varphi$, где $a_i^\varphi(t) = a_i\left(\frac{at+b}{ct+d}\right)(ct+d)^i$. Если корни многочлена a_3 различны, то отсюда следует, что преобразования φ , сохраняющие a_3 , образуют конечную группу. Условие неизменности коэффициентов a_2 и a_4 легко дает, что при $\varphi = 1$, $\alpha = \beta = 1$ $c_1 = 0$.

2) $\sigma = 9$. Решетка $\text{Pic } X$ в этом случае получается присоединением к решетке с базисом $C_0, \dots, C_{22}$, где C_i — ортогональны, $C_0^2 = 2$, $C_i^2 = -2$ при $i \geq 1$, элементов $\frac{1}{2}(C_0 + C_1)$ и $\epsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{22} C_i$. Рассмотрим элементы $F = \frac{1}{2}(C_0 - C_1)$ и C_1 . Тогда $(F)^2 = 0$, $(C_1)^2 = -2$ и $(F, C_1) = 1$. Кривые класса F образуют пучок кривых арифметического рода 1. В классе C_1 содержится единственная эффективная кривая s .

Согласно лемме 3, для доказательства неприводимости s достаточно проверить неотрицательность пересечений с компонентами слоев. В нашем случае, как легко видеть, имеется 20 слоев типа $*A_1$, следовательно, пучок квазиэллиптический и их компоненты это C_i и $F - C_i$ для $i \geq 2$. Имеем: $(s, C_i) = 0$, $s \cdot (F - C_i) = 1$, и, значит, кривая s неприводима.

Как и в предыдущем случае, легко показать, что $H^1(rs + mF) = 0$ при $m \geq 2r$, и найти $l(rs + mF)$ по теореме Римана — Роха. Выберем $x \in \mathcal{L}(2s + 4F)$, $x \notin \mathcal{L}(s + 4F)$ и $y \in \mathcal{L}(3s + 6F)$, y линейно

независимо от $1, x, t, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6, tx, t^2x$. Получим, что между элементами вида $x^i y^j t^k$, принадлежащими $\mathcal{L}(6s + 12F)$, существует соотношение, которое можно привести к виду

$$y^2 = x^3 + a_4(t)x^2 + a_8(t)x + a_{12}(t). \quad (10)$$

Как и в случае 1), точка базы S этого семейства определяется многочленами a'_4, a_8 и a'_{12} , так что $\dim S = 17$. Преобразования $x \rightarrow \lambda^2 x + c_4, y \rightarrow \lambda^3 y$ и $\varphi \in \text{SL}(2, k)$ определяют группу автоморфизмов G , причем $\dim G = 9$, так что $\dim S - \dim G = 8 = \sigma - 1$. Для доказательства конечности стабилизатора общей точки достаточно рассмотреть преобразование коэффициента a_8 : $a_8 \rightarrow (a_8^\varphi + c_4^2)\lambda^{-4}$, откуда $a'_8 \rightarrow (a'_8)^\varphi \cdot \lambda^{-4}$. Так как $a'_8 = u_3^2$, где $\deg u_3 = 3$, то, как и в случае 1), мы заключаем, что φ принадлежит конечной группе и $\lambda = 1$. Рассмотрение коэффициента a_4 дает $c_4 = 0$.

3) $\sigma = 8$. Решетка $\text{Pic } X$ при $\sigma = 8$ может быть получена из решетки с базисом $s, F, C_1, \dots, C_{20}$, где $s^2 = -2, F^2 = 0, s \cdot F = 1, C_i$ ортогональны и $C_i^2 = -2$, добавлением элементов $D_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 C_i$,

$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=9}^{20} C_i$. Можно считать, что класс F состоит из кривых пучка кривых арифметического рода 1. Тогда легко проверить, что компоненты слоев — это C_i и $F - C_i$. Таким образом, мы получим 20 слоев типа $*A_1$ и, следовательно, пучок квазиэллиптический. Класс s содержит неприводимую кривую, сечение пучка, которую мы будем обозначать тоже через s .

Мы можем выбрать уравнение поверхности в виде (10) так, чтобы сечение s было бесконечно удаленным. Рассмотрим теперь класс $s' = s - D_1 + 2F$. Тогда $(s')^2 = -2, s' \cdot F = 1$ и пересечения s' с компонентами слоев неотрицательны. По лемме 4 этот класс содержит неприводимую кривую, которую мы обозначим тоже через s' . Так как $ss' = 0$, то сечение s' задается уравнениями $x = u(t), y = v(t)$, где u и v будут многочленами от t . При этом

$$\deg u \leq (s', (x)_\infty) = (s' 2s + 4F) = 4.$$

Произведя замену $x \rightarrow x + u(t), y \rightarrow y + v(t)$, мы приведем уравнение поверхности к виду

$$y^2 = x(x^2 + a_4(t)x + a_8(t)). \quad (11)$$

Точка базы S определяется многочленами a'_4 и $a_8, \dim S = 11$.

Допустимые преобразования имеют вид $x \rightarrow \lambda^2 x$, $y \rightarrow \lambda^3 y$ и $\varphi \in \text{SL}(2, k)$, так что $\dim G = 4$, $\dim S - \dim G = 7 = \sigma - 1$. Конечность стабилизатора общей точки очевидно следует из соображения, примененного в случаях 1) и 2).

4) $\sigma = 7$. Решетку $\text{Pic } X$ мы получим, добавляя к решетке, рассмотренной в предыдущем случае, элемент

$$D_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 C_i + \frac{1}{2} \sum_{i=9}^{12} C_i .$$

Снова мы имеем квазиэллиптический пучок с 20 слоями $*A_1$, компоненты которых C_i и $F - C_i$. Повторяя рассуждения из предыдущего случая, мы получим, что уравнение поверхности имеет вид (11) и сечение $s' = s - D_1 + 2F$ задается уравнениями $x = 0$, $y = 0$. Рассмотрим сечение $s'' = s - D_2 + 2F$. Так как $s'' \cdot s = 0$, то это сечение задается уравнениями $x = \bar{u}(t)$, $y = \bar{v}(t)$ и аналогично, $\deg \bar{u}(t) \leq 4$ и $\deg \bar{v}(t) \leq 6$.

Пусть t_1, t_2, t_3, t_4 — значения t , соответствующие слоям, содержащим C_1, C_2, C_3, C_4 соответственно. Эти значения различны и мы можем считать их конечными. Заметим, что

$$(s'; C_i) = (s''; C_i) = 1 \quad \text{при } i = 1, 2, 3, 4 .$$

Так как $s \cdot C_i = 0$, то сечение s не проходит через компоненты C_i и вейерштрассова модель поверхности X получается из минимальной модели стягивания кривых C_i в особые точки поверхности и соответствующих слоев. Таким образом, сечения s' и s'' на вейерштрассовой модели имеют четыре общие точки — особые точки слоев $t = t_i$ при $i = 1, 2, 3, 4$. Значит, $\bar{u}(t_i) = 0$, $\bar{v}(t_i) = 0$ при $i = 1, 2, 3, 4$. Отсюда следует, что $\deg \bar{u} = 4$ и $\bar{v}$ делится на $\bar{u}$. Положим $\bar{v} = \omega \cdot \bar{u}$ и сделаем замену переменной $y \rightarrow y + \omega x$; тогда уравнение поверхности примет вид

$$y^2 = x(x + a_4(t))(x + b_4(t)) , \quad (12)$$

где $a_4 = \bar{u}_4$.

Точка базы S определяется многочленами a_4 и b_4 , $\dim S = 10$. Группа G задается теми же преобразованиями, что и в предшествующем случае, так что $\dim S - \dim G = 6 = \sigma - 1$.

Конечность стабилизатора общей точки проверяется тем же способом.

5) $\sigma = 6$. Для получения решетки Рис X добавим к построенным в предыдущих случаях элементам $F, s, C_1, \dots, C_{20}, D_1, \varepsilon, D_2$ еще элемент

$$D_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 C_i + \frac{1}{2} \sum_{i=13}^{16} C_i .$$

Класс F дает нам пучок кривых арифметического рода 1. Легко проверить, что его слои — 16 слоев $*A_1$ с компонентами C_i и $F - C_i$, $i = 1, \dots, 16$, слой типа D_4 с компонентами

$$\varepsilon - D_3 - D_2 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \frac{1}{2} \sum_{i=17}^{20} C_i ,$$

$$F - C_{20} , \quad (-C_{19}) , \quad (-C_{18}) , \quad (-C_{17}) ,$$

первая из которых является двукратной. Такой пучок — квазиэллиптический. Снова рассмотрим сечения

$$s' = s - D_1 + 2F ,$$

$$s'' = s - D_2 + 2F ,$$

$$s''' = s - D_3 + 2F .$$

Нетрудно проверить, что это неприводимые рациональные кривые и $(s')^2 = (s'')^2 = (s''')^2 = -2$. При этом элементы s, s', s'', s''' попарно ортогональны. Используя предыдущие рассуждения, мы можем считать, что уравнение поверхности имеет вид (12) и сечение s — бесконечно удаленное, s' задается уравнениями $x = 0, y = 0$, s'' — уравнениями $x = \bar{u}, y = \bar{v}$, s''' — уравнениями $x = \bar{\bar{u}}, y = \bar{\bar{v}}$. Степени $\bar{u}$ и $\bar{\bar{u}}$ равны 4 и степени $\bar{v}$ и $\bar{\bar{v}}$ равны 6. Если слоям с компонентами C_1, C_2, C_3, C_4 соответствуют значения t , равные t_1, t_2, t_3, t_4 , то, применяя те же рассуждения, что и в случае 4), к s'' и к s''' , мы получим, что

$$\bar{u}(t_i) = \bar{\bar{u}}(t_i) = 0 .$$

Тогда $\bar{\bar{u}} = \alpha \bar{u}$. Напомним, что $a_4 = \bar{u}$ и уравнение поверхности можно записать в виде

$$y^2 = x(x + \bar{u})(x + b_4) .$$

Подставив в него $x = \alpha \bar{u}, y = \bar{\bar{v}}$, получим:

$$\bar{\bar{v}}^2 = \alpha \bar{u}(\alpha + 1) \bar{u}(\alpha \bar{u} + b_4) .$$

Производная левой части равна 0, поэтому $\alpha \bar{u}' + b'_4 = 0$, т.е. $\alpha a'_4 + b'_4 = 0$ — производные a'_4 и b'_4 пропорциональны.

Таким образом, нормальная форма имеет тот же вид (12), что и в случае 4):

$$y^2 = x(x + a_4(t))(x + b_4(t)),$$

но с дополнительным условием: a'_4 и b'_4 пропорциональны. Так как a'_4 и b'_4 — квадраты линейных многочленов, то это — одно условие и $\dim S - \dim G = 5 = \sigma - 1$.

б) *Случай*. $5 \geq \sigma \geq 1$.

Мы знаем, что каждая суперсингулярная поверхность содержит квазиэллиптический пучок $X \rightarrow \mathbf{P}^1$. Как мы видели при доказательстве теоремы 3, при $\sigma \neq 10$ мы можем считать, что этот пучок имеет сечение. Уравнение пучка в этом случае может быть записано в виде

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in k(\mathbf{P}^1),$$

и, как было доказано при рассмотрении случая 2), если $k(\mathbf{P}^1) = k(t)$, то $\deg a \leq 8$, $\deg b \leq 12$.

Точки, над которыми расположены невырожденные слои, определяются уравнением $D = 0$, где $D = (a')^2 a + (b')^2$.

Рассматривая все возможные типы слоев и соответствующие нормальные формы минимальных моделей ([8], стр. 124–125), нетрудно проверить, что для вырожденного слоя из $n + 1$ компонент над точкой $t = \alpha$ $\nu_\alpha(D) = n$. Вероятно, можно получить доказательство этого факта, не связанное с перебором отдельных типов слоев из соображений работы [4].

Особенно простой случай — когда $a \in (k(t)^*)^2$, т.е. $a' = 0$. Тогда $D = (b')^2$, откуда, в частности, следует, что все числа $n_i = \text{rg } H_i(f)$ должны быть четными.

Наоборот, если все n_i четны, то $D = \Delta^2$, $\Delta \in k(t)$, и при $a' \neq 0$ мы получили бы, что $a = ((b' + \Delta)/a')^2$, т.е. опять $a' = 0$. Таким образом, $a' = 0$ тогда и только тогда, когда все n_i четны.

Этот случай имеет место при $1 \leq \sigma \leq 5$, причем даже все $n_i = 0 \bmod 4$, так что $D = \Delta_1^4$. Действительно, мы можем указать решетки

$$N = U_2 \oplus N(f), \quad f \in U_2, \quad f^2 = 0,$$

принадлежащие I типу и имеющие нужное значение σ :

σ	$N(f)$
5	$D_4^{(5)}$
4	$D_4^{(3)} \oplus D_8$
3	$D_4 \oplus D_8^{(2)}$
2	$D_4 \oplus D_8 \oplus E_8$
1	$D_4 \oplus E_8^{(2)}$

Так как $\deg a \leq 8$, то $a = a_1^2$, $\deg a_1 \leq 4$. При этом a_1 и b определены с точностью до прибавления произвольных квадратов ([14], стр. 57). Поэтому мы можем считать, что $a_1 = \lambda t + \mu t^3$, а $b = t\Delta_1^2$.

Нам нужно еще научиться различать вырожденные слои типа E_8 и D_8 с $n = 8$. Пусть такой слой находится над точкой $t = 0$ и уравнение поверхности имеет вид

$$y^2 = x^3 + (\lambda t + \mu t^3)^2 x + t^5 \cdot c, \quad c(0) = \nu \neq 0.$$

Нетрудно убедиться, что слой над $t = 0$ имеет тип E_8 тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. При $\lambda = 0$ мы получаем непосредственно нормальную форму слоя E_8 ([8] стр. 125). При $\lambda \neq 0$ надо сделать преобразование $x \rightarrow x + r$, $r = \lambda t + (\lambda^1 \nu)^{\frac{1}{2}} t^2$, чтобы уничтожить член с t^2 в коэффициенте при x и член с t^5 в свободном члене и получить нормальную форму слоя типа D_8 ([9], стр. 125).

Теперь мы можем легко выписать уравнение универсальных семейств

6) $\sigma = 5$. Уравнение:

$$y^2 = x^3 + (\lambda t + \mu t^3)^2 x + t^3(t+1)^2(t+\alpha)^2(t+\beta)^2.$$

Вырожденные слои типа D_4 в точках ∞ , 0, 1, α и β . "Модули"— α , β , λ и μ .

7) $\sigma = 4$. Уравнение:

$$y^2 = x^3 + (\lambda t + \mu t^3)^2 x + t^3(t+1)^2(t+\alpha)^4.$$

Вырожденные слои типа D_4 в ∞ , 0, и 1 и D_8 — в α , λ и μ .

8) $\sigma = 3$. Уравнение:

$$y^2 = x^3 + (\lambda t + \mu t^3)^2 x + t^5(t+1)^4.$$

Вырожденные слои типов D_4 в ∞ и D_8 — в 0 и 1. “Модули” — λ и μ .

9) $\sigma = 2$. Уравнение:

$$y^2 = x^3 + \mu t^6 \cdot x + t^5(t+1)^4.$$

Вырожденные слои типа D_4 в ∞ , E_8 — в 0 и D_8 — в 1. “Модуль” — μ .

10) $\sigma = 1$. Уравнение:

$$y^2 = x^3 + t^5(t+1)^4.$$

Вырожденные слои типов D_4 в ∞ и E_8 — в 0 и 1. “Модулей” нет.

(Поступило в редакцию 25 октября 1977 г.)

Литература

1. M. Artin, *Supersingular K3 surfaces*, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. **7** (1974), № 4, 543–568.
2. E. Bombieri and D. Mumford, *Enriques's classification of surfaces in char. p.* III, Invent. math. **35** (1976), 197–232.
3. N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4, 5 et 6, Paris, 1968.
4. И.В. Долгачев, А.Н. Паршин, *Дифференциалы и дискриминанты регулярных отображений*, Матем. заметки **4** (1968), № 5, 519–523.
5. M. Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratischer Formen*, Arch. der Math. **VIII** (1957), № 4, 241–249.
6. K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces. I*, Ann. Math. **71** (1960), 111–152.
7. O'Meara, *The arithmetic theory of quadratic forms*, New York, 1950.
8. A. Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux*, Publ. Math., IHES, № 2, 1–125.
9. A. Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, Amer. J. Math. **89** (1967), № 1, 530–572.
10. И.И. Пятенский–Шапиро, И.Р. Шафаревич, *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа КЗ*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **35** (1971), 530–572.
11. А.Н. Рудаков, И.Р. Шафаревич, *Несепарабельные морфизмы алгебраических поверхностей*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **40** (1976), 1269–1307.
12. А.Н. Рудаков, И.Р. Шафаревич, *О квазиэллиптических поверхностях типа КЗ*, Успехи матем. наук **33** (1978), № 1, 227–228.
13. J.-P. Serre, *Cours d'Arithmétique*, Paris, 1970.
14. J. Tate, *Courbes elliptiques: formulaire. Modular functions of one variable.* IV, Lecture Notes in Math., 476.

**О ВЫРОЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ТИПА КЗ
НАД ПОЛЯМИ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ**
ИЗВ. АКАД. НАУК СССР, СЕР. МАТЕМ., Т. 45 no.3 (1981)
(С А.Н.РУДАКОВЫМ)

Отправной точкой этой работы является вопрос о том, в какой мере суперсингулярная поверхность типа КЗ определяется своими периодами (определение отображения периодов для суперсингулярных поверхностей типа КЗ см. в [7]). Этот вопрос сводится, как известно, к вопросу о возможных вырождениях подобных поверхностей. Мы решаем вопрос в предположении, что поверхность является сильно эллиптической, т.е. содержит эллиптический пучок с сечением. Как известно, это накладывает одно соотношение на модули поверхности. В этих предположениях мы можем решить и гораздо более общую задачу - описать все вырождения тех поверхностей, для которых инвариант Хассе равен 0, иными словами, введенная Артином [1] высота $h > 1$ (для суперсингулярной поверхности $h = \infty$).

Авторы выражают благодарность П.Делиню, В.С.Куликову и Т.Цинку за полезные обсуждения результатов этой работы.

**§1. Инвариант Хассе эллиптической
поверхности типа КЗ.**

Мы будем дальше рассматривать алгебраические поверхности типа КЗ над алгебраически замкнутым полем k конечной характеристики p , отличной от 2 и 3. Для такой поверхности X пространство $H_2(X, \mathcal{O})$ одномерно, поэтому действие морфизма Фробениуса задается в нем (при выборе базиса) одним элементом $\lambda(X) \in k$, который называется инвариантом Хассе поверхности X . Если ω — дифференциальная форма, образующая дуальный базис пространства $H^0(X, \Omega^2)$, то инвариант Хассе может быть определен при помощи операции Картье C : если $C\omega = \alpha\omega$, то $\lambda(X) = \alpha^p$.

Предположим теперь, что поверхность X сильно эллиптическая, т.е. обладает таким морфизмом $f: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, что его общий слой

— эллиптическая кривая и соответствующий пучок имеет сечение $s: \mathbf{P}^1 \rightarrow X$. В этом случае пучок f может быть задан в вейерштрассовой нормальной форме:

$$y^2 = x^3 + a(t)x + b(t), \quad (1)$$

где t — координата на $\mathbf{P}^1$, а $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены степени 8 и 12. Более точный смысл этого утверждения следующий. Рассмотрим $a(t)$ и $b(t)$ как сечения расслоений $\mathcal{O}(8)$ и $\mathcal{O}(12)$ над $\mathbf{P}^1$. Пусть E — расслоение $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(6)$ и в проективизированном расслоении $\mathbf{P}(E)$ подмногообразие X^* задается уравнением

$$y^2 z = x^3 + a(t)xz^2 + b(t)z^3,$$

где x, y и z — сечения расслоений $\mathcal{O}(4), \mathcal{O}(6)$ и $\mathcal{O}$. Если дискриминант $4a^3 + 27b^2$ не равен тождественно 0 и не существует точки $\xi \in \mathbf{P}^1$, в которой a и b имеют нули кратностей ≥ 4 и ≥ 6 соответственно, то X^* имеет лишь двойные рациональные особые точки и минимальное их разрешение приводит к гладкой поверхности X типа $K3$.

В нормальной форме (1) инвариант Хассе поверхности X вычисляется следующим образом. Форма, являющаяся базисом пространства $H^0(X, \Omega^2)$, может быть взята в виде $\omega = y^{-1} dx \wedge dt$ (ее регулярность очевидна при $t \neq \infty$, а при $t = \infty$ становится очевидной после стандартной замены $t = \tau^{-1}$). Так как

$$\omega = \frac{y^{p-1}}{y^p} dx \wedge dt = \frac{(x^3 + a(t)x + b(t))^{\frac{p-1}{2}}}{y^p} dx \wedge dt,$$

то для вычисления $C\omega$ нам надо представить многочлен $(x^3 + a(t)x + b(t))^{(p-1)/2}$ в виде $\sum 0 \leq i, i \leq p-1 A_{ij} x^i t^j$. Тогда

$$C\omega = \frac{(A_{p-1,p-1})^{1/p}}{y} dx \wedge dt$$

и $\lambda(X) = A_{p-1,p-1}$. Из подсчета степеней очевидно, что в $(x^3 + a(t)x + b(t))^{(p-1)/2}$ входит только один член вида $\Lambda(t)x^{kp-1}$, именно при $k = 1$. Коэффициент $\Lambda(t)$ при x^{p-1} по определению является инвариантом Хассе общего слоя эллиптического пучка f , т.е. кривой (1) над полем $k(t)$. Напомним, что если мы придадим a и b вес 4 и 6, то инвариант Хассе $\Lambda(a, b)$ кривой $y^2 = x^3 + ax + b$ будет изобарным веса $p-1$ (это следует из того, что $\Lambda(a, b)$ есть коэффициент при x^{p-1} в $(x^3 + ax + b)^{(p-1)/2}$, а многочлен $x^3 + ax + b$ изобарен веса 6, если придать x вес 2). В частности

$$\Lambda(c^4 a, c^6 b) = c^{p-1} \Lambda(a, b), \quad (2)$$

Если a и b — многочлены от t степеней 8 и 12, то из доказанного следует, что $\Lambda(a(t), b(t))$ имеет степень $2p - 2$. Поэтому в него входит только один член λt^{kp-1} , именно при $k = 1$. Отсюда мы видим, что для поверхности X , заданной уравнением (1), $\lambda(X) = \lambda$, т.е. инвариант Хассе эллиптической поверхности $K3$ равен среднему коэффициенту (при t^{p-1}) в инварианте Хассе общего слоя эллиптического расслоения. (Легко проверить, что в многочлене степени $\leq 2p - 2$ коэффициент при $t^p - 1$ при дробно-линейном преобразовании φ умножается на $(\det \varphi)^{p-1}$.)

§2. Умеренные вырождения.

Эллиптическое расслоение типа $K3$, заданное уравнением (1), определяется коэффициентами многочленов a и b . При этом коэффициентам многочлена a естественно приписывать вес 4, а b — 6. Поэтому мы будем изображать это расслоение точкой в взвешенно-проективном пространстве $\mathfrak{B}$ типа $(4^9, 6^{13})$. Мы будем рассматривать и те точки пространства $\mathfrak{B}$, которые не соответствуют поверхностям типа $K3$. Соответствующие им уравнения (1) определяют поверхности, которые мы будем называть *вырождениями поверхностей типа $K3$* .

Группа дробно-линейных преобразований проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с координатой t определяет некоторую группу автоморфизмов взвешенно-проективного пространства $\mathfrak{B}$. Относительно этой группы можно ввести понятие стабильных и полустабильных точек в смысле теории инвариантов [6]. Чтобы выяснить, какие точки являются стабильными или полустабильными, можно применить критерий Гильберта ([6], теорема 2.1). Так как при этом задача решается отдельно для коэффициента a и коэффициента b в уравнении, то задача решается совершенно так же, как в случае действия группы $SL(2)$ на $S^n(\mathbb{P}^1)$, т.е. в теории бинарных форм ([6], приложение 4.1). Мы приведем ответ:

Точка пространства $\mathfrak{B}$, определенная уравнением (1), не стабильна, если существует точка $\xi \in \mathbb{P}^1$, в которой a и b имеют нули кратностей ≥ 4 и ≥ 6 . Эта точка не полустабильна, если в некоторой точке $\xi \in \mathbb{P}^1$ a и b имеют нули кратности > 4 и > 6 .

Нас будут дальше интересовать только полустабильные точки и соответствующие им поверхности.

Как было сказано в п.1, поверхность, задаваемая уравнением (1), может не быть поверхностью типа $K3$ в двух случаях.

1. Дискриминант правой части уравнения тождественно равен 0. В этом случае правая часть имеет кратный корень $c(t) \in k[t]$ и поэтому

$$a = -3c^2, b = 2c^3, \deg c = 4.$$

Мы будем называть вырождение *умеренным*, если многочлен $c(t)$ не имеет кратных корней. Заметим, что из условия полустабильности следует, что c не имеет корней кратности > 2 .

2. Дискриминант правой части уравнения (1) не равен тождественно 0, но a и b имеют в некоторой точке $\xi \in \mathbb{P}^1$ нули кратностей ≥ 4 и ≥ 6 . Очевидно, что такая точка может быть одна или их может быть две. Условие означает, что в окрестности такой точки ξ уравнение (1) определяет не минимальную модель Вейерштрасса. Поэтому слой над точкой ξ мы будем называть в этом случае не минимальным. Если $t(\xi) = t_0$, то минимальная в окрестности точки ξ модель задается уравнением:

$$y_1^2 = x_1^3 + a_1 x_1 + b_1, \quad a_1 = \frac{a}{(t-t_0)^4}, b_1 = \frac{b}{(t-t_0)^6},$$

$$x_1 = x(t-t_0)^2, y_1 = y(t-t_0)^3. \quad (3)$$

Минимальность модели (3) в окрестности точки ξ следует из условия полустабильности.

В этом случае мы будем называть вырождение *умеренным*, если для каждого не минимального слоя соответствующий слой минимальной модели (3) — гладкий. Заметим, что из условия полустабильности следует, что $a_1(t)$ и $b_1(t)$ в уравнении (3) не обращаются одновременно в 0 в точке ξ . Поэтому в полустабильном случае мы имеем либо умеренное вырождение, либо слой над точкой 0 должен иметь мультипликативный тип.

Более инвариантный смысл этих условий в обоих случаях следующий. В случае 1 поверхность не нормальна: она имеет кривую особенностей $x = c(t), y = 0$. После нормализации прообразом кривой особенностей будет кривая $s^2 = 3c(t)$. Наше условие заключается в том, что ее род равен 1. В случае 2 поверхность имеет изолированную особую точку $t = t_0, x = 0, y = 0$. Уравнение (3) определяет минимальное разрешение этой особой точки (т.е. разрешение и стягивание всех исключительных кривых первого рода). Прообразом этой точки будет слой $t = t_0$. Наше условие заключается в том, что его род равен 1. Таким образом, в обоих случаях мы имеем дело с “эллиптическими особенностями” — при их разрешении возникают кривые арифметического рода 1. Условие умеренности заключается в том, что геометрический род этой кривой

также равен 1, т.е. что мы имеем "невыврожденную эллиптическую особенность".

Перед формулировкой следующей теоремы заметим, что инвариант Хассе поверхности с уравнением (1) определяется полиномиальными формулами, содержащими коэффициенты многочленов $a(t)$ и $b(t)$. Поэтому он определен и для вырожденных поверхностей. Таким же образом мы будем понимать и инвариант Хассе вырожденных кривых рода 1, записанных в форме Вейерштрасса.

Лемма. *Инвариант Хассе вырожденной эллиптической кривой мультипликативного типа отличен от 0.*

Открытое множество неособых точек кривой в этом случае может быть изоморфно отображено на мультипликативную группу G_m , причем регулярной дифференциальной форме при этом соответствует инвариантная форма $\omega = t^{-1}dt$ на G_m . Равенство $C\omega = \omega$ проверяется для нее непосредственно.

Можно доказать лемму иначе, записав кривую в виде $y^2 = x^2(x - \alpha)$, причем $\alpha \neq 0$ ввиду того, что кривая имеет мультипликативный тип. Инвариант Хассе равен коэффициенту при x^{p-1} в $(x^2(x - \alpha))^{(p-1)/2} = x^{p-1}(x - \alpha)^{(p-1)/2}$, т.е. равен $(-\alpha)^{(p-1)/2}$.

Теорема 1. *Полустабильное вырождение сильно эллиптической поверхности типа K3 с инвариантом Хассе 0 является умеренным*

Рассмотрим отдельно вырождения типа 1 и 2.

1. Как уже было сказано, ввиду полустабильности вырождения, многочлен $c(t)$ не может иметь корня кратности > 2 . Если бы вырождение не было умеренным, то c имел бы двукратный корень. Этот корень можно принять за 0, так что $c = t^2d$. Тогда, ввиду (2),

$$\Lambda(a, b) = t^{p-1} d^{\frac{p-1}{2}} \Lambda(-3, 2).$$

Так как кривая $y^2 = (x - 1)^2(x + 2)$ имеет мультипликативный тип, то $\Lambda(-3, 2) \neq 0$. Поэтому равенство 0 инварианта Хассе означает, что $d(0) = 0$, т.е. что c имеет трехкратный корень.

2. В этом случае расслоение (1) имеет один или два не минимальных слоя. Пусть один из них расположен над точкой $t = 0$, т.е. $a = t^4 a_1, b = t^6 b_1$. Тогда $\Lambda(a, b) = t^{p-1} \Lambda(a_1, b_1)$ и по определению $\lambda(X) = \Lambda(a_1, b_1)(0)$, т.е. равняется инварианту Хассе соответствующего слоя минимальной модели (3). По условию $\Lambda(a_1, b_1)(0) = 0$. Отсюда следует, что если в модели (3) слой над точкой 0 вырожден, то его инвариант Хассе равен 0. По лемме он имеет тогда аддитивный тип. Но это возможно только при $a_1(0) = b_1(0)$, откуда

следует, что a и b имеют корни кратности > 4 и > 6 в точке $t = 0$, что противоречит полустабильности вырождения.

§3. Вырождения семейств.

Теперь мы рассмотрим семейства сильно эллиптических поверхностей типа $K3$ над базой $S = \text{Спец } k[[\varepsilon]]$ с общей точкой η и замкнутой точкой s . Мы будем предполагать, что общий слой X_η семейства является поверхностью типа $K3$ и записан в виде (1), а прообраз замкнутой точки X_s может вырождаться. Перестройкой семейства $\mathcal{X} \rightarrow S$ называется семейство $\mathcal{X}' \rightarrow S$, общий слой которого изоморфен общему слою исходного семейства. Мы будем говорить, что вырождение семейства $\mathcal{X} \rightarrow S$ имеет тип цепочки, если

прообраз замкнутой точки $X_s = \sum_{i=0}^n X_i$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $|i - j| > 1$,

X_0 и X_n — рациональные поверхности, X_i ($0 < i < n$) — гладкие линейные расслоения над эллиптической кривой C , $X_i \cap X_{i+1}$ есть сечение этого расслоения на X_i при $0 < i < n$ и на X_{i+1} при $0 \leq i < n - 1$. Кроме того, трехмерная схема $\mathcal{X}$ гладка в точках кривой $X_i \cap X_{i+1}$, X_i и X_{i+1} пересекаются трансверсально и единственные допустимые особые точки на слоях (общем и замкнутом) — двойные рациональные (на поверхностях X_0 и X_n).

Теорема 2. Любое семейство сильно эллиптических поверхностей типа $K3$, имеющее умеренное вырождение, может быть перестроено, после некоторого подъема базы, в семейство, которое или не вырождается или имеет вырождение типа цепочки.

Мы опять разберем отдельно два возможных типа вырождений эллиптической поверхности типа $K3$.

Вырождение 1 типа.

Лемма. Пусть $f, g \in k[[\varepsilon]][t]$, $f \not\equiv 0(\varepsilon)$ и $f^3 - g^2$ делится точно на ε^{2k} , $k > 0$ (откуда, конечно, следует существование такого многочлена $h_0 \in k[t]$, что $f \equiv h_0^2(\varepsilon)$, $g \equiv h_0^3(\varepsilon)$). Предположим, что h_0 не имеет кратных корней. Тогда возможно представление

$$f \equiv h^2 + \varepsilon^k U(\varepsilon^{2k}), g \equiv h^3 + \frac{3}{2} \varepsilon^k U h(\varepsilon^{2k}).$$

Предположим, что $f \equiv h^2(\varepsilon^r)$, $g \equiv h^3(\varepsilon^r)$, $r < 2k$. Записывая $f = h^2 + \varepsilon^r U + \varepsilon^{2r} V$, $g = h^3 + \varepsilon^r U_1 + \varepsilon^{2r} W$, мы получим сначала из соотношения $f^3 \equiv g^2(\varepsilon^{2r})$, приравнявая члены с ε^r , что $U_1 = \frac{3}{2} U h$ а из соотношения $f^3 \equiv g^2(\varepsilon^{2r+1})$, приравнявая члены с ε^{2r} , что $U \equiv 0(h_0, \varepsilon)$ (здесь используется, что h_0 не имеет кратных корней). Отсюда индукцией вытекает утверждение леммы.

Следствие. Пусть $a, b \in k[[\varepsilon]][t]$. Предположим, что дискриминант многочлена $X^3 + aX + b$ делится точно на ε^{2k} , $k > 0$, откуда вытекает представление $X^3 + aX + b \equiv (X - c_0)^2(X + 2c_0)(\varepsilon)$. Предположим, что в нем $c_0(t)$ не имеет кратных корней. Тогда при помощи сдвига по X можно преобразовать многочлен $X^3 + aX + b$ в $X^3 + CX^2 + \varepsilon^k AX + \varepsilon^{2k} B$, причем $A^2 - 4BC \not\equiv 0(\varepsilon)$.

Так как $4a^3 + 27b^2 \equiv 0(\varepsilon^{2k})$, то согласно лемме (надо положить $a = -3f, b = 2g$) возможно представление $a \equiv -3h^2 - 3U\varepsilon^k(\varepsilon^{2k}), b \equiv 2h^3 + 3Uh\varepsilon^k(\varepsilon^{2k})$ или $a \equiv -3h^2 + A\varepsilon^k, b \equiv 2h^3 - Ah\varepsilon^k + B\varepsilon^{2k}$, где $A = -3U$. Отсюда

$$X^3 + aX + b = (X - h)^2(X + 2h) + \varepsilon^k AX - \varepsilon^k hA + \varepsilon^{2k} B.$$

Полагая $3h = C$, после подстановки $X - h \rightarrow X$ получаем нужное представление. Подставляя выражения $a = -3h^2 + A\varepsilon^k$ и $b = 2h^3 - Ah\varepsilon^k + B\varepsilon^{2k}$ в формулу для дискриминанта D , мы получим, что $D \equiv C^2(4BC - A^2)\varepsilon^{2k}(\varepsilon^{2k+1})$, где $C = 3h$. Из предположения о дискриминанте теперь вытекает последнее утверждение следствия.

Теперь мы можем перейти собственно к исследованию вырождений 1 типа. Мы будем предполагать семейство $\mathcal{X}$ заданным уравнением

$$y^2 = x^3 + a(t, \varepsilon)x + b(t, \varepsilon),$$

$$a(t, \varepsilon), b(t, \varepsilon) \in k[[\varepsilon]][t], \quad (4)$$

в $\mathbf{P}(\varepsilon)$, где $E = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(6)$ — расслоение над $\mathbf{P}_S^1, S = \operatorname{Spec} k[[\varepsilon]]$. Перейдя в случае необходимости к накрытию базы S , можно считать, что дискриминант левой части уравнения (4) делится на четную степень ε , и, если эта степень равна $2k$, записать уравнение на основании леммы в виде

$$y^2 = x^3 + C(t)x^2 + \varepsilon^k A(t, \varepsilon)x + \varepsilon^{2k} B(t, \varepsilon),$$

$$A(t, \varepsilon), B(t, \varepsilon), C(t, \varepsilon) \in k[[\varepsilon]][t], \deg C = 4, \deg A = 8, \deg B = 12,$$

$$A^2 - 4BC \not\equiv (\varepsilon), \quad (5)$$

Нужная нам перестройка семейства (4) будет получена при помощи σ -процесса в многообразии $\mathbf{P}(E)$ вдоль кривой, определенной уравнениями $x = 0, y = 0, \varepsilon = 0$. Эта кривая целиком лежит в конечной (по x и y) части многообразия $\mathbf{P}(E)$, в которой $\mathcal{X}$ задано уравнением (4). Нам надо рассмотреть две карты, являющиеся прообразами

множеств $t \neq \infty$ и $t \neq 0$ на P_s^1 . Так как их рассмотрение производится совершенно одинаково, то мы ограничимся первой из них. Обозначим через $\mathcal{X}_1$ собственный прообраз многообразия $\mathcal{X}$ при σ -процессе. $\mathcal{X}_1$ покрывается тремя картами:

$$(1) \quad y = ux, \quad \varepsilon = \eta x,$$

$$u^2 = x + C(t, \eta x) + \eta^k A(t, \eta x) x^{k-1} + \eta^{2k} B(t, \eta x) x^{2k-2}.$$

Прообраз замкнутой точки X_s задается уравнением $\varepsilon = 0$ и приводим:

$$X_s = X_0 \cup X_1,$$

$$X_0 : \quad \eta = 0, \quad u^2 = x + C(t, 0),$$

$$X_1 : \quad x = 0, \quad u^2 = C(t, 0), \quad \text{при } k > 1,$$

$$x = 0, \quad u^2 = C(t, 0) + \eta A(t, 0) + \eta^2 B(t, 0), \quad \text{при } k = 1$$

$$(2) \quad x = vy, \quad \varepsilon = \theta y,$$

$$1 = v^3 y + C(t, \theta y) v^2 + \theta^k y^{k-1} A(t, \theta y) v + \theta^{2k} y^{2k-2} B(t, \theta y),$$

$$X_s = X_0 \cup X_1, \quad X_0 : \theta = 0, \quad 1 = v^2(vy + C(t, 0)),$$

$$X_1 : \quad y = 0, \quad 1 = C(t, 0) v^2 \quad \text{при } k > 1,$$

$$y = 0, \quad 1 = C(t, 0) v^2 + A(t, 0) v \theta + B(t, 0) \theta^2 \quad \text{при } k = 1.$$

$$(3) \quad x = x_1 \varepsilon, \quad y = y_1 \varepsilon,$$

$$y_1^2 = x_1^3 \varepsilon + C(t, \varepsilon) x_1^2 + \varepsilon^{k-1} A(t, \varepsilon) x_1 + \varepsilon^{2k-2} B(t, \varepsilon).$$

Прообраз замкнутой точки неприводим:

$$X_s = X_1 : \quad \varepsilon = 0, \quad y_1^2 = C(t, 0) x_1^2 \quad \text{при } k > 1,$$

$$\varepsilon = 0, \quad y_1^2 = C(t, 0) x_1^2 + A(t, 0) x_1 + B(t, 0) \quad \text{при } k = 1.$$

Поверхности X_1 во всех трех картах склеиваются в единую поверхность X_1 . Поверхности X_0 в картах (1) и (2) склеиваются в поверхность X_0 . $X_0 \cap X_1$ есть эллиптическая кривая Y_0 с уравнениями (в карте (1)) $x = 0, \eta = 0, u^2 = C(t, 0)$. По условию наше вырождение является умеренным и поэтому эта кривая гладкая. Легко видеть, что в ее точках многообразие $\mathcal{X}_1$ гладко.

Поверхность X_0 рациональна и гладка. При $k > 1$ поверхность X_1 имеет в карте (3) двойную кривую $Y_1: y_1 = x_1 = 0$. Нормализация поверхности X_1 является линейчатой поверхностью с эллиптической базой. Кривые Y_0 и Y_1 не пересекаются.

Если $k > 1$, то мы должны совершить σ -процесс вдоль кривой Y_1 . При этом компонента X_0 отображается изоморфно, прообраз компоненты X_1 , как легко проверить, совпадает с ее нормализацией и является гладкой эллиптической поверхностью и, кроме того, в вырожденном слое возникает еще одна компонента X_2 , которая при $k > 2$ является эллиптической линейчатой поверхностью с двойной кривой Y_2 . Этот процесс продолжается k шагов. После σ -процесса с номером, меньшим k , мы будем прибавлять к нашей цепочке еще одну эллиптическую поверхность. Последняя поверхность будет после k -го σ -процесса иметь в карте (3) уравнение

$$y_k^2 = C(t, 0)x_k^2 + A(t, 0)x_k + B(t, 0). \quad (6)$$

Так как согласно лемме $A(t, 0)^2 - 4B(t, 0)C(t, 0) \neq 0$, то эта поверхность будет содержать пучок рациональных кривых, следовательно, она рациональна.

Нам осталось исследовать особые точки последней поверхности (6). Положим $A(t, 0) = a(t)$, $B(t, 0) = b(t)$, $C(t, 0) = c(t)$ и запишем (6) в виде

$$y^2 = cx^2 + ax + b. \quad (7)$$

Особые точки соответствуют тем значениям t_0 , для которых $(a^2 - 4bc)(t_0) = 0$. Можно считать, что $t_0 = 0$. Если $c(0) \neq 0$, то, положив $c^{1/2}x = x_1$ и сделав сдвиг по x_1 , мы приведем (7) к виду $y_1^2 = x_1^2 + t^n u(t)$. Эта особенность типа A_{n-1} . Так как наше вырождение умеренное, то остающаяся возможность — $c(0) = 0$, $c'(0) \neq 0$. Тогда и $a(0) = 0$ и аналогичным преобразованием (7) приводится к виду $y_1^2 = tx_1^2 + t^n$. Это особенность типа D_{n+1} . Тем самым теорема 2 в случае вырождения 1 типа доказана.

Вырождение 2 типа. Мы рассмотрим несколько более общую ситуацию: семейство $\mathcal{X}$ эллиптических поверхностей, заданное уравнением

$$\begin{aligned} y^2 &= x^3 + a(t, \varepsilon)x + b(t, \varepsilon), \\ a(t, \varepsilon), b(t, \varepsilon) &\in k[[\varepsilon]][t], \\ a(t, \varepsilon) &\in (t, \varepsilon)^4, \quad b(t, \varepsilon) \in (t, \varepsilon)^6 \end{aligned} \quad (8)$$

Нас будут интересовать степени по t не $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$, но $a(t, 0)$ и $b(t, 0)$ и мы предположим, что

$$\deg a(t, 0) \leq 4r, \quad \deg b(t, 0) \leq 6r. \quad (9)$$

В этом случае прообраз замкнутой точки X_s задается уравнением

$$y^2 = x^3 + t^4 \alpha(t) x_1 + t^6 \beta(t),$$

т.е. является не минимальным. Мы определим “элементарную перестройку”, цель которой — заменить этот слой соответствующим минимальным (при $t = 0$) слоем

$$y^2 = x_1^3 + \alpha(t) x_1 + \beta(t).$$

Это можно сделать, положив $x = t^2 x_1$, $y = t^3 y_1$. Однако во всем трехмерном семействе $\mathcal{X}$ такой перестройки можно добиться только за счет прибавления к замкнутому слою еще одной компоненты.

Это новое семейство $\mathcal{X}_1$ определено над базой Σ , получающейся из P_S^1 , σ -процессом в точке $t = 0$, $\varepsilon = 0$. Напомним, что Σ обладает морфизмом $\sigma: \Sigma \rightarrow \mathbf{P}_s^1$, и, если $\mathbf{P}_s^1 = V_1 \cup V_0$, где $V_1 = \{t \neq \infty\}$, а $V_0 = \{t \neq 0\}$, то $\sigma^{-1} V_0 \rightarrow V_0$ есть изоморфизм, а $\sigma^{-1}(V_1) = U_1 \cup U_2$, причем

$$U_1 = \text{Spec } k[[\varepsilon]][t, \varepsilon_1]/(t\varepsilon_1 - \varepsilon),$$

$$U_2 = \text{Spec } k[[\varepsilon]][t_2, \varepsilon]/(t_2\varepsilon - t),$$

и множества $U_{12} \subset U_1$ и $U_{21} \subset U_2$ определены условиями $\varepsilon_1 \neq 0$ и $t_2 \neq 0$ и изоморфно отображаются друг на друга благодаря соотношению $\varepsilon_1 t_2 = 1$.

Семейство $\mathcal{X}_1$ определено над U_1 уравнением

$$y_1^2 = x_1^3 + a_1 x_1 + b_1,$$

$$a_1 = a(t, t\varepsilon_1)/t^4, \quad b_1 = b(t, t\varepsilon_1)/t^6,$$

а над U_2 — уравнением

$$y_2^2 = x_2^3 + a_2 x_2 + b_2,$$

$$a_2 = a(t_2\varepsilon, \varepsilon)/\varepsilon^4, \quad b_2 = b(t_2\varepsilon, \varepsilon)/\varepsilon^6,$$

Над $U_{12} \simeq U_{21}$ эти семейства склеиваются по формулам:

$$x_1 = x_2 \varepsilon_1^2, \quad y_1 = y_2 \varepsilon_1^3 \quad \text{на } U_{12},$$

$$x_2 = x_1 t_2^2, \quad y_2 = y_1 t_2^3 \quad \text{на } U_{21},$$

Над U_1 при $t \neq 0$ формулы $x_1 = x/t^2$, $y_1 = y/t^3$ дают изоморфизм открытых множеств семейств $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$. Над U_2 при $\varepsilon \neq 0$ такой же изоморфизм дается формулами $x_2 = x/\varepsilon^2$, $y_2 = y/\varepsilon^3$. Таким образом, $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_2$ изоморфны на V_1 вне прообраза точки $(t = 0, \varepsilon = 0)$. Благодаря этому построенное над V_1 семейство $\mathcal{X}_1$ склеивается с прообразом $\mathcal{X}$ над множеством V_0 и дает единое семейство $\mathcal{X}_1$ над Σ , называемое элементарной перестройкой семейства $\mathcal{X}$ в слое $t = 0$.

В $\mathcal{X}_1$ прообраз точки X_s распадается на две компоненты: $X_s = X_0 \cup X_1$, причем X_0 определяется над U_1 уравнением, т.е. . Теперь $\varepsilon_1 = 0$, $y_1^2 = x_1^3 + a_1(t, 0)x_1 + b_1(t, 0)$, т.е. $y_1^2 = x_1^3 + \alpha(t)x_1 + \beta(t)$. С прообразом U_2 эта компонента не пересекается. Чтобы исследовать компоненту X_1 , положим

$$a(t, \varepsilon) = \sum_{i+j \geq 4} \alpha_{ij} t^i \varepsilon^j, \quad b(t, \varepsilon) = \sum_{i+j \geq 6} \beta_{ij} t^i \varepsilon^j.$$

Тогда X_1 задается над U_1 уравнениями

$$t = 0, \quad y_1^2 = x_1^3 + \left(\sum_{i+j=4} \alpha_{ij} \varepsilon_1^j \right) x_1 + \sum_{i+j=6} \beta_{ij} \varepsilon_1^j,$$

а над U_2 — уравнениями

$$\varepsilon = 0, \quad y_2^2 = x_2^3 + \left(\sum_{i+j=4} \alpha_{ij} t_2^i \right) x_2 + \sum_{i+j=6} \beta_{ij} t_2^i, \quad (10)$$

Кривая $Y_0 = X_0 \cap X_1$ задается уравнениями $\varepsilon_1 = 0$, $t = 0$, $y_1^2 = x_1^3 + a_1(0, 0)x_1 + b_1(0, 0)$ или же $y_1^2 = x_1^3 + \alpha(0)x_1 + \beta(0)$. Если эта кривая гладкая, то, как легко проверить, семейство $\mathcal{X}_1$ в любой точке кривой Y_0 — гладкое, X_0 и X_1 тоже гладки в этой точке и пересекаются трансверсально вдоль Y_0 .

Теперь переходим к описанию последовательности элементарных перестроек, которые в результате дадут ту перестройку, существование которой утверждает теорема. Мы начинаем с семейства $\mathcal{X}$ поверхностей типа $K3$, имеющих при $\varepsilon = 0$ умеренное вырождение 2 типа. Пусть в нем прообраз замкнутой точки X_s имеет неминимальный слой при $t = 0$, т.е. для него имеют место формулы (8) с $r = 2$. Тогда, совершив в этом слое элементарную перестройку, мы получим семейство $\mathcal{X}^{(1)}$, в котором прообраз замкнутой точки состоит из двух компонент: $X_s^{(1)} = X_0^{(1)} \cup X_1^{(1)}$, $X_0^{(1)} \cap X_1^{(1)} = Y_0$ — гладкая эллиптическая кривая, компонента $X_0^{(1)}$ бирационально

изоморфна X_0 , но имеет при $t = 0$ минимальный слой, а компонента $X_1^{(1)}$ задается уравнением (10) с $r = 1$ и поэтому или является рациональной поверхностью (если все ее слои минимальные) или имеет еще один не минимальный слой и тогда ее минимальная модель изоморфна $\mathbf{P}^1 \times Y_0$. Заметим, что в этом последнем случае дискриминант эллиптического пучка (10) не равен нулю при $t_2 = 0$, значит не равен нулю тождественно. То же верно и для компоненты $X_0^{(1)}$ — она или рациональна или имеет еще один неминимальный слой Y_1 и тогда ее минимальная модель изоморфна $\mathbf{P}^1 \times Y_1$, откуда $Y_1 \simeq Y_0$. Если обе компоненты $X_0^{(1)}$ и $X_1^{(1)}$ — рациональные поверхности, то наш процесс обрывается и теорема доказана. Если это не так, то одна из них или обе имеют не минимальный слой, не пересекающийся с Y_0 , вдоль которого (или вдоль которых) мы опять производим элементарную перестройку. В результате каждой перестройки та компонента, в не минимальном слое которой мы эту перестройку совершали, заменяется компонентой $X_i^{(2)} \simeq \mathbf{P}^1 \times Y_0$ ($i = 0$ или 1), а в соответствующем минимальном слое эту компоненту пересекает новая компонента $X_j^{(2)}$, являющаяся опять рациональной поверхностью (если она минимальна) или не минимальной моделью поверхности $\mathbf{P}^1 \times Y_0$, если она имеет не минимальный слой. Компоненту, пересекающуюся с $X_1^{(2)}$, мы обозначим $X_2^{(2)}$ (если она возникнет), а компоненту, пересекающуюся с $X_0^{(2)}$ — $X_{-1}^{(2)}$ (если она возникнет). Через несколько шагов мы получим семейство, вырожденный слой которого является цепочкой $\bigcup_{i=-r}^q X_i$, $X_i \cap X_{i+1} \simeq Y_0$, X_i ($-r < i < q$) изоморфны $\mathbf{P}_0^1 \times Y_0$, а

X_{-r} и X_q являются минимальными рациональными эллиптическими поверхностями или же имеют один не минимальный слой. В первом случае наш процесс закончен и теорема доказана, а во втором случае мы должны его продолжать, совершая элементарные перестройки в не минимальных слоях. Нам остается, таким образом, доказать, что рано или поздно наш процесс оборвется. Это доказательство совершенно аналогично для обоих концов цепочки ($i > 0$ и $i < 0$), так что мы изложим его для одного конца ($i > 0$).

Предположим, что процесс построения семейств $\mathcal{X}^{(i)}$ продолжается до бесконечности: мы приводим это предположение к противоречию с тем, что общий слой является поверхностью типа $K3$, точнее говоря, с тем, что вейерштрассова модель минимальна. По построению мы начинаем со случая, когда вырожденный слой имеет не минимальный слой над точкой $t = 0$. Может оказаться, что

после нескольких элементарных перестроек эта ситуация будет сохраняться. Докажем, однако, что так не может быть при всех элементарных перестройках, т.е. что рано или поздно мы придем к цепочке $X_0 \cup \dots \cup X_q$, у которой поверхность X_q есть эллиптическое расслоение с не минимальным слоем над точкой $t = \lambda \neq 0$. Действительно, если бы при всех элементарных перестройках не минимальный слой находился бы над точкой $t = 0$, то последовательность s перестроек задавалась бы формулами $t = t_s \varepsilon^s$ и полученное расслоение в вейерштрассовой форме имело бы уравнение (8) с коэффициентами

$$a_s(t_s, \varepsilon) = a(t_s \varepsilon^s, \varepsilon) / \varepsilon^{4s}, \quad b_s(t_s, \varepsilon) = b(t_s \varepsilon^s, \varepsilon) / \varepsilon^{6s}, \quad (11)$$

Но общий слой семейства имеет над $t = 0$ минимальный слой и поэтому или $a \not\equiv 0(t^4)$ или $b \not\equiv 0(t^6)$. Например, в первом случае в $a = \sum \alpha_{ij} t^i \varepsilon^j$ существует член $\alpha_{ij} t^i \varepsilon^j$ с $\alpha_{ij} \neq 0$, $0 \leq i < 4$. После подъема базы $\varepsilon = \varepsilon_1^k$ и преобразования по формулам (11) он даст член $\alpha_{ij} t^i \varepsilon_1^{kj + (i-4)s}$. Мы можем подобрать s так, что $kj + (i-4)s = 0$ (так как $i > 4$), т.е. положим

$$s = \frac{kj}{4-i} \quad (12)$$

(за счет выбора k мы добьемся того, что это число целое). В результате мы получим в $a_s(t_s, \varepsilon)$ член $\alpha_{ij} t^i$ с $\alpha_{ij} \neq 0$, а это показывает, что теперь $a_s(t_s, 0) \not\equiv 0(t^4)$, т.е. новое расслоение имеет над $t = 0$ минимальный слой.

Таким образом, на некотором, например, s -м шаге не минимальный слой в расслоении окажется над точкой $t = \lambda \neq 0$. Докажем, что тогда при первых s перестройках нам не нужен был подъем базы. Действительно, наше предположение означает, что

$$a_s(t_s, 0) = \alpha(t_s - \lambda)^4, \quad b_s(t_s, 0) = \beta(t_s - \lambda)^6,$$

причем или $\alpha \neq 0$ или $\beta \neq 0$. Если, например, $\alpha \neq 0$, то в $a_s(t_s, 0)$ входит член γt_s^3 с $\gamma \neq 0$. Предположим, что в процессе мы сделали подъем базы $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^k$ и что член γt_s^3 получился из члена $\delta t^3 \varepsilon^j$ в $a(t, \varepsilon)$. Согласно формуле (12) тогда $s = kj$, т.е. $s \equiv 0(k)$ и наше преобразование $t = t_s \varepsilon_1^s$ записывается в виде $t = t_s \varepsilon^{s/k}$ без подъема базы.

Следовательно, если наш процесс перестроек продолжается бесконечно, то в нем (согласно первому замечанию) бесконечное число раз должно происходить изменение той точки, над которой находится не минимальный слой, а поэтому (согласно второму замечанию)

весь процесс протекает без подъема базы. Если на первых s шагах не минимальный слой находился над точкой $t = 0$, а на $s + 1$ -м он находится над точкой $t = \lambda \neq 0$, то

$$a_s(t_s, \varepsilon) \equiv \alpha(t_s - \lambda)^4(\varepsilon), \quad b_s(t_s, \varepsilon) \equiv \beta(t_s - \lambda)^6(\varepsilon).$$

Из того, что $t = t_s \varepsilon^s$ и формул (11) мы получаем, что

$$a(t_s \varepsilon^s, \varepsilon) \equiv \alpha \varepsilon^{4s} (t_s - \lambda)^4 (\varepsilon^{4s+1}),$$

$$b(t_s \varepsilon^s, \varepsilon) \equiv \beta \varepsilon^{6s} (t_s - \lambda)^6 (\varepsilon^{6s+1}),$$

т.е.

$$a(t, \varepsilon) \equiv \alpha(t - \lambda \varepsilon^s)^4 (\varepsilon^{4s+1}), \quad b(t, \varepsilon) \equiv \beta(t - \lambda \varepsilon^s)^6 (\varepsilon^{6s+1}).$$

Положим $t - \lambda \varepsilon^s = t_1$, мы получим, что

$$a(t_1, \varepsilon) \in (t_1^4, \varepsilon^{4s+1}), \quad b(t_1, \varepsilon) \in (t_1^6, \varepsilon^{6s+1}).$$

Продолжая такие подстановки, мы найдем степенной ряд $\varphi(\varepsilon) = \lambda \varepsilon^s + \lambda_1 \varepsilon^{s_1} + \lambda_2 \varepsilon^{s_2} + \dots$, $s < s_1 < s_2 \dots$, обладающий тем свойством, что для $\tau = t - \varphi(\varepsilon)$ $a(\tau, \varepsilon) \equiv 0(\tau^4)$, $b(\tau, \varepsilon) \equiv 0(\tau^6)$. Это означает, что общий слой имеет при $t = \varphi(\varepsilon)$ не минимальный слой, т.е. не является поверхностью типа $K3$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечания.

1. Последнее рассуждение в доказательстве теоремы можно пояснить следующей иллюстрацией. Сопоставим каждому члену $\alpha_{ij} t^i \varepsilon^j$ с $\alpha_{ij} \neq 0$ в разложении $a(t, \varepsilon) = \sum \alpha_{ij} t^i \varepsilon^j$ точку на плоскости с координатами $(3i, 3j)$, а члену $\beta_{ij} t^i \varepsilon^j$ с $\beta_{ij} \neq 0$ в разложении $b(t, \varepsilon) = \sum \beta_{ij} t^i \varepsilon^j$ точку с координатами $(2i, 2j)$. Мы получим множество точек $\mathcal{M}$ на плоскости, причем $\mathcal{M}$ содержится в "полуполосе" $y \geq 0$, $0 \leq x \leq 24$, отрезок оси x с $0 \leq x < 12$ не содержит точек из $\mathcal{M}$ и точка $(12, 0)$ в $\mathcal{M}$ содержится. Элементарная перестройка эквивалентна замене координат:

$$x' = x,$$

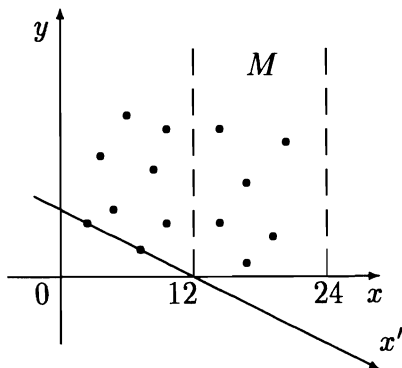
$$y' = y + x - 12,$$

при которой ось y не меняется, а ось x поворачивается вокруг точки $(12, 0)$. Последовательность l преобразований такого вида вместе с заменой базы $\varepsilon = \varepsilon_1^k$ равносильна замене системы координат

$$x' = x$$

$$y' = y + \gamma(x - 4)$$

с произвольным рациональным $\gamma = l/k > 0$. В результате такого преобразования мы можем взять за ось x "опорную прямую" множества $\mathcal{M}$ (см. рисунок).



Тогда на новой оси x' будут лежать по крайней мере 2 точки множества $\mathcal{M}$. Это означает, что не минимальный слой соответствующей компоненты расположен над точкой $t = \lambda \neq 0$. Как было доказано, в этом случае угловой коэффициент γ должен быть целым числом. Сдвиг $t_1 = t - \lambda$ равносителен некоторой перестройке множества $\mathcal{M}$, при которой все точки этого множества, кроме точки $(12,0)$, лежат уже строго выше новой оси x . Если этот процесс продолжается до бесконечности, то ось x , вращаясь вокруг точки $(12,0)$, подымается неограниченно высоко и в пределе мы получаем такое уравнение семейства $\mathcal{K}$, что для него множество $\mathcal{M}$ не содержит точек в полосе $0 \leq x < 12$. Это означает, что $a(t, \varepsilon) \equiv 0(t^4)$ и $b(t, \varepsilon) \equiv 0(t^6)$, т.е. общий слой семейства не является поверхностью типа $K3$.

2. Если вырождение не является умеренным, то тот же процесс приводит к некоторой его перестройке, в которой прообраз замкнутой точки тоже имеет вид цепочки, однако ее компоненты уже имеют несколько более сложные особенности. Кажется правдоподобным, что дальнейшие перестройки этой цепочки могут привести к семействам с вырождениями того же типа, как найденные в характеристике 0 В. С.Куликовым [5].

3. Интересно было бы попробовать применить аналогичные рассуждения к исследованию поверхностей типа $K3$, являющихся двойными плоскостями. Полезные соображения в этом направлении содержатся в работе Хорикавы [4].

4. Приведем один пример к теореме 2. Пусть A_ε — невырождающееся при $\varepsilon = 0$ семейство эллиптических кривых, а B_ε — такое семейство, что B_0 имеет мультипликативный тип. Возьмем за X_ε куммерову поверхность $(A_\varepsilon \times B_\varepsilon)/G$, $g = \{1, \sigma\}$, $\sigma(x, y) = (-x, -y)$. Проекции $A_\varepsilon \times B_\varepsilon \rightarrow A_\varepsilon$ и $A_\varepsilon \times B_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon$ определяют пучки $X_\varepsilon \rightarrow A_\varepsilon/G$ и $X_\varepsilon \rightarrow B_\varepsilon/G$ которые задают на X_ε две структуры сильно эллиптической поверхности. Если A_ε и B_ε задаются уравнениями:

$$A_\varepsilon: y^2 = x^3 + a(\varepsilon)x + b(\varepsilon),$$

$$B_\varepsilon: v^2 = u^3 + \alpha(\varepsilon)u + \beta(\varepsilon),$$

то соответствующие уравнения для X_ε имеют вид:

$$v^2 = u^3 + \alpha(\varepsilon)(t^3 + a(\varepsilon)t + b(\varepsilon))^2 u + \beta(\varepsilon)(t^3 + a(\varepsilon)t + b(\varepsilon))^3,$$

$$y^2 = x^3 + a(\varepsilon)(t^3 + \alpha(\varepsilon)t + \beta(\varepsilon))^2 x + b(\varepsilon)(t^3 + \alpha(\varepsilon)t + \beta(\varepsilon))^3,$$

Вырождения имеют соответственно 1 и 2 тип. Если минимальная модель семейства B_ε имеет вырожденный слой C типа A_n , то вырожденный слой семейства X_ε может быть взят в виде $(A_0 \times C)/(1, \sigma)$, где σ — автоморфизм порядка 2 на A_0 и C . Если $C = \sum_{0 \leq i \leq n} C_i$ является связной компонентой единицы, то

$$C/G = C_0/G + C_{\frac{n+1}{2}}/G + \sum_{0 < i < \frac{n+1}{2}} C_i$$

(за счет подъема базы можно считать $n+1$ четным). Тогда $A_0 \times G/G$ имеет вид цепочки $X_0 \cup \dots \cup X_{\frac{n+1}{2}}$, в которой $X_0 = (A_0 \times C_0)/G$, $X_{\frac{n+1}{2}} = (A_0 \times C_{\frac{n+1}{2}})/G$ — рациональные поверхности и $X_i = A_0 \times C_i$ при $0 < i < \frac{n+1}{2}$.

Мы возвращаемся к исследованию эллиптических поверхностей типа $K3$ над полем конечной характеристики.

Теорема 3. Любое семейство сильно эллиптических поверхностей типа $K3$, инвариант Хассе общего слоя которого равен 0, может быть перестроено, после некоторого подъема базы, в семейство, которое или не вырождается или имеет вырождение типа цепочки с гладкими компонентами вырожденного слоя.

Пусть задано семейство $\mathcal{X} \rightarrow S$, для которого выполнено условие $\lambda(X_\eta) = 0$. Прежде всего построим перестройку $\bar{\mathcal{X}}$, имеющую

полустабильное вырождение. Для этого заметим, что задание семейства $\mathcal{X}$ равносильно заданию морфизма $\varphi: S \rightarrow \mathfrak{B}$ базы этого семейства во взвешенно-проективное пространство $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{B}_{ss} \subset \mathfrak{B}$ открытое множество, состоящее из полустабильных точек пространства $\mathfrak{B}$ относительно действия группы $G = PGL(2)$. Как известно, фактор $\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_{ss}/G$ существует и является проективным многообразием. Точка $\varphi(\eta)$ соответствует некоторой поверхности типа $K3$ и поэтому полустабильна. Поэтому мы имеем рациональное отображение $f: S \rightsquigarrow \bar{\mathfrak{B}}$, $f = \psi\varphi$, где ψ — проекция $\mathfrak{B}_{ss} \rightarrow \bar{\mathfrak{B}}$. Ввиду полноты многообразия $\bar{\mathfrak{B}}$, f может быть расширено до морфизма $f: S \rightarrow \bar{\mathfrak{B}}$. На некотором накрытии $\bar{S} \rightarrow S$ этот морфизм может быть поднят до морфизма $\bar{f}: \bar{S} \rightarrow \mathfrak{B}_{ss}$, так что будет коммутативной диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{S} & & & & \\
 \searrow \bar{f} & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 S & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{B} & \xleftarrow{\quad} & \mathfrak{B}_{ss} \\
 & \searrow f & & & \downarrow \psi \\
 & & & & \bar{\mathfrak{B}}
 \end{array}$$

Обратный образ определенного над $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_{ss}$ семейства расслоений дает над $\bar{S}$ нужное нам семейство $\bar{\mathcal{X}}$.

Теперь применим к $\bar{\mathcal{X}}$ теорему 1: она гарантирует, что вырождение семейства $\bar{\mathcal{X}}$ является умеренным. Таким образом, согласно теореме 2, существует перестройка $\bar{\mathcal{X}}'$ этого семейства, которая или не вырождается или имеет вырождение типа цепочки.

Пусть в построенной нами перестройке вырождение имеет вид цепочки: $X_s = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_m$, причем $X_1, \dots, X_{m-1}$ изоморфны $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — эллиптическая кривая, а X_0 и X_m — рациональные поверхности с пучком эллиптических кривых, все слои которого минимальны. Единственное, что отличает нашу ситуацию от того, что нам нужно доказать, — это возможное наличие особых точек на поверхностях X_0 и X_m . Но минимальные модели эллиптических поверхностей имеют только двойные рациональные особые точки. Поэтому здесь применима теорема, доказанная Г.Н.Тюриной [8] и Брискорном [3] над полями характеристики 0 и перенесенная Артиным [2] на поля конечной характеристики. Согласно этой теореме двойные рациональные особые точки могут быть разрешены в семействе за счет некоторого накрытия базы $S' \rightarrow S$. Нам остается проследить, что происходит с другими поверхностями нашей цепочки при этом накрытии. Если степень накрытия n , то локально

$\mathcal{X} \times_S S'$ задается уравнением $xy = t^n$. Это уравнение совпадает с уравнением, определяющим особенность A_{n-1} . Поэтому при помощи тех же σ -процессов, что и при разрешении особенности A_{n-1} , мы разрешим нашу особенность, а в результате между X_i и X_{i+1} вклеится еще $n-1$ поверхность, изоморфная $\mathbf{P}^1 \times C$. В результате мы получим такое вырождение, существование которого утверждалось теоремой.

Теорема 4. Семейство сильно эллиптических поверхностей типа $K3$ с нулевым инвариантом Хассе тогда и только тогда может быть перестроено (после подъема базы) в невырождающееся семейство, когда его монодромия, действующая на группе $H^2(X_\eta)$, конечна.

Ввиду теоремы 3 нам достаточно показать, что если семейство имеет вырождение типа цепочки, то его монодромия бесконечна. Для многообразий над полем комплексных чисел теория смешанных структур Ходжа устанавливает связь между монодрией семейства и геометрией вырожденного слоя. Это делается при помощи точной последовательности Клеменса-Шмида или спектральной последовательности Стинбринга — результаты в полезной для нас форме приведены в первом параграфе работы Куликова [5]. Недавно Рапопорт и Цинк [9] показали, что эти результаты имеют место и над полями конечной характеристики. В частности, устанавливается необходимое и достаточное условие конечности монодромии, доказанное ранее только над полем комплексных чисел. Нам будет достаточно следующее его следствие: *пусть семейство $\mathcal{X} \rightarrow S$ регулярно, вырожденный слой X_s распадается на гладкие поверхности X_i , имеющие нормальное пересечение, тогда монодромия бесконечна, если гомоморфизм ограничения*

$$\oplus_i H^1(X_i) \longrightarrow \oplus_{i < j} H^1(X_i \cap X_j) \quad (*)$$

не эпиморфен.

Нам остается применить этот критерий к вырождению типа цепочки: $X_s = X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_m$. Положим $X_i \cap X_{i+1} = Y_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Так как Y_i — эллиптические кривые, то $\text{rg} H^1(Y_i) = 2$ и $\text{rg}(\oplus H^1(X_i \cap X_j)) = 2n$. Среди поверхностей X_i X_0 и X_n — рациональные и поэтому $H^1(X_0) = H^1(X_n) = 0$, а $X_1, \dots, X_{n-1}$ — эллиптические линейчатые, так что $\text{rg} H^1(X_i) = 2$ при $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому $\text{rg}(\oplus H^1(X_i)) = 2(n-1)$, так что гомоморфизм (*) не может быть эпиморфным.

Теорема 5. Суперсингулярные сильно эллиптические поверх-

ности типа $K3$ не вырождаются¹.

Иными словами, всякое семейство $\mathcal{X} \rightarrow S$, состоящее из таких поверхностей, может быть перестроено в гладкое семейство. Действительно, для суперсингулярной поверхности X

$$H^2(X, \mathbb{Q}_l) = (\text{Pic } X) \otimes \mathbb{Q}_l,$$

а так как $\text{Pic } X_\eta$ определен над конечным накрытием базы, то монодромия конечна. С другой стороны, одномерная формальная группа, сопоставляемая поверхности типа $K3$ [1], для суперсингулярной поверхности является аддитивной, поэтому инвариант Хассе такой поверхности равен 0 (касательное пространство к этой группе совпадает с $H^2(X, \mathcal{O})$, так что инвариант Хассе отличен от 0 тогда и только тогда, когда эта формальная группа изоморфна G_m). Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.

Как известно, из доказанного утверждения следует аналог теоремы Торелли для сильно эллиптических суперсингулярных поверхностей типа $K3$ и для отображения периодов, определенного Огасом [7]. Отсюда же следует и то, что отображение периодов в этом случае является эпитоморфным.

(Поступило в редакцию 20 января 1981 г.)

Литература

- [1] M. Artin, *Supersingular K3 Surfaces*, Ann. Sci. l'Ecole Normale Supérieure 4 ser., v.7, fasc.4 (1974), 543–567.
- [2] M. Artin, *Algebraic Construction of Brieskorn's Resolutions*, J. of Algebra 29 (1974), 330–348.
- [3] E. Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice, 2 (1970), 279–290.
- [4] E. Horikawa, *Surjectivity of the Period Map of K3 Surfaces of Degree 2*, Math. Ann. 228, H.2 (1977), 113–146.
- [5] В.С. Куликов, *Вырождения K3 поверхностей*, Изв.АН СССР, Серия матем. 41, N5 (1977), 1008–1042.
- [6] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Berlin, 1965.
- [7] A. Ogus, *Supersingular K3 crystals*, Paris: Asterisque 64 (1979), 3–86.
- [8] Г.Н. Тюрин, *Разрешение особенностей гладких деформаций изолированных рациональных двойных точек*, Функци. анализ и его прилож. 4, вып.1 (1970), 77–83.
- [9] B. Rapoport und T. Zink, *Über die lokalen Faktoren der ξ -Funktion einiger Shimura-mannigfaltigkeiten*, Preprint, 1980.

¹ Недавно авторы доказали теорему 5 без предположения о сильной эллипичности.

О НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУППАХ. II

ИЗВ. АКАД. НАУК СССР СЕР.

МАТЕМ. ТОМ 45 no.1 (1981)

Настоящая работа примыкает к моему докладу [9], представленному 15 лет назад на конференцию, посвященную 100-летию со дня рождения Кастельнуово. Непосредственным стимулом к ее появлению послужила недавняя рецензия на этот доклад [7].

В докладе [9] я хотел обратить внимание на то, что некоторые естественно появляющиеся группы (среди них, например, группа автоморфизмов кольца многочленов от нескольких переменных) могут быть естественно рассматриваемы как бесконечномерные аналоги алгебраических групп. Для них можно ввести понятие алгебры Ли, и некоторые известные трудные гипотезы оказываются вполне проверяемыми на уровне алгебр Ли. Отсюда можно доказать и для самих групп некоторые ослабленные формы этих гипотез.

Я надеялся, что намеки, содержащиеся в докладе [9], будут достаточны для того, чтобы квалифицированный математик мог восстановить ход рассуждений. Однако из рецензии профессора Камбаяши [7] видно, что он столкнулся с трудностями при попытках восстановить доказательства. Поэтому здесь предлагается подробное изложение материала, входившего в доклад [9]. Некоторые незначительные изменения в формулировках внесены для упрощения изложения.

§ 1

Определения. Бесконечномерным алгебраическим многообразием над полем k назовем индуктивный предел X направленной системы (X_i, f_{ij}) алгебраических многообразий над полем k , причем морфизмы $f_{ij}: X_i \rightarrow X_j (i < j)$ являются замкнутыми вложениями.

Дальше мы будем рассматривать только тот случай, когда множество индексов есть множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ или имеет такое конфинальное подмножество. Поле k мы будем всегда предполагать алгебраически замкнутым.

Каждое из X_i будет рассматриваться в его топологии Зарисского, а X мы снабдим топологией индуктивного предела, в которой множество $Z \subset X$ тогда и только тогда замкнуто, когда его прообраз в каждом из X_i замкнут. В частности, каждое X_i замкнуто в X .

Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ двух бесконечномерных алгебраических многообразий назовем морфизмом, если для любого X_i из системы (X_i) , определяющей X , найдется такое Y_j в системе (Y_j) , определяющей Y , что $f(X_i) \subset Y_j$ и ограничение $f: X_i \rightarrow Y_j$ является морфизмом алгебраических многообразий (конечномерных).

Неприводимость и связность бесконечномерного алгебраического многообразия определяется как неприводимость или связность соответствующего топологического пространства.

Предложение 1. Бесконечномерное алгебраическое многообразие $X = \varinjlim X_i$ тогда и только тогда неприводимо, когда множество неприводимых компонент многообразий X_i , упорядоченное по включению, является направленным.

Доказательство. Назовем неприводимые компоненты X_i^λ и X_j^μ многообразий X_i и X_j сравнимыми, если существует такая неприводимая компонента X_k^ν многообразия X_k , что $X_i^\lambda \subset X_k^\nu$, $X_j^\mu \subset X_k^\nu$. Условие направленности означает, что любые компоненты X_i^λ и X_j^μ сравнимы. Пусть это условие выполнено, а X приводимо: $X = X' \cup X''$, X' и X'' замкнуты, $X' \neq X$, $X'' \neq X$. Пусть $a' \notin X'$, $a'' \notin X''$. При некотором i $a', a'' \in X_i$. Пусть $a' \in X_i^\lambda$, $a'' \in X_i^\mu$, где X_i^λ и X_i^μ — неприводимые компоненты X_i . По условию сравнимости существует такая неприводимая компонента X_j^ν некоторого X_j , что $X_i^\lambda \subset X_j^\nu$, $X_i^\mu \subset X_j^\nu$. Тогда X_j^ν содержится или в X' или в X'' . Если, например, $X_j^\nu \subset X'$, то $a'' \in X_i^\mu \subset X_j^\nu \subset X'$, что противоречит предположению.

Предположим, что X неприводимо, а X_i^λ и X_j^μ — две несравнимые компоненты многообразий X_i и X_j . Обозначим через S' множество таких неприводимых компонент X_k^ν , что $X_k^\nu \not\supset X_i^\lambda$, через S'' — множество компонент X_l^σ , для которых $X_l^\sigma \not\supset X_j^\mu$, через X' — объединение всех компонент, входящих в S' , а через X'' — объединение компонент, входящих в S'' . Если X_k^ν — компонента, входящая в S' ,

а X_n^ρ — такая компонента многообразия X_n , что $X_k^\nu \supset X_n^\rho$, то и X_n^ρ содержится в S' . Поэтому S' (аналогично и S'') — замкнутое множество, $X' \cup X'' = X$, ввиду несравнимости X_i^λ и X_j^μ , $X' \neq X$, так как X_i^λ не содержится в S' и по аналогичной причине $X'' \neq X$. Поэтому X приводимо.

Аналогичная характеристика существует и для связных многообразий. Две компоненты X_i^λ и X_j^μ многообразий X_i и X_j назовем связанными, если у некоторого многообразия X_k существуют такие компоненты $X_k^1, \dots, X_k^r$, что $X_i^\lambda \subset X_k^1$, $X_j^\mu \subset X_k^r$, $X_k^\nu \cap X_k^{\nu+1} \neq \emptyset$.

Предложение 2. Бесконечномерное алгебраическое многообразие X тогда и только тогда связно, когда любые две компоненты X_i^λ и X_j^μ любых многообразий X_i и X_j связаны.

Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 1. Единственное изменение относится к доказательству того, что если компоненты X_i^λ и X_j^μ не связаны, то X не связно. Здесь в качестве множества S' надо взять множество всех компонент, связанных с X_i^λ , а в качестве S'' — множество не связанных с X_i^λ компонент.

Мы опускаем очевидное определение произведения бесконечномерных алгебраических многообразий.

Множество G , являющееся группой и бесконечномерным алгебраическим многообразием, назовем бесконечномерной алгебраической группой, если отображения обращения $G \rightarrow G$ и умножения $G \times G \rightarrow G$ являются морфизмами.

Предложение 3. Связная бесконечномерная алгебраическая группа неприводима.

Пусть G — связная бесконечномерная алгебраическая группа, $G = \varinjlim X_i$. Пусть X_i^λ и X_j^μ — некоторые неприводимые компоненты многообразий X_i и X_j . Ввиду связности многообразия G согласно предложению 2 существует многообразие X_k и такие компоненты $X_k^1, \dots, X_k^r$, что $X_i^\lambda \subset X_k^1$, $X_j^\mu \subset X_k^r$, $X_k^\nu \cap X_k^{\nu+1} \neq \emptyset$. Пусть $X_k^\nu \cap X_k^{\nu+1} \ni g_\nu$. Множество $X_k^1 g_1^{-1} X_k^2 g_2^{-1} \dots X_k^{r-1} g_{r-1}^{-1} X_k^r$ содержится (по определению алгебраической группы) в некотором многообразии X_l . Это множество является неприводимым конечномерным многообразием, так как оно — образ неприводимого многообразия $X_k^1 \times X_k^2 \times \dots \times X_k^r$ при естественном морфизме. Поэтому оно содержится в некоторой неприводимой компоненте X_l^ρ многообразия X_l . Тогда

$$X_i^\lambda = X_i^\lambda g_1^{-1} g_1 g_2^{-1} g_2 \dots g_{r-1}^{-1} g_{r-1} \subset X_l^\rho,$$

$$X_j^\mu = g_1 g_1^{-1} \dots g_{r-1} g_{r-1}^{-1} X_j^\mu \subset X_l^\rho.$$

Поэтому X_i^λ и X_j^μ сравнимы, а отсюда, согласно предложению 1, вытекает неприводимость X .

Если все X_i являются аффинными многообразиями, то X будет называться аффинным бесконечномерным многообразием. Если $k[X_i]$ — кольцо регулярных функций на X_i , то $k[X] = \varprojlim k[X_i]$ назовем кольцом регулярных функций на X . Топология проективного предела превращает $k[X]$ в топологическое кольцо. Морфизм $f: X \rightarrow Y$ определяет непрерывный гомоморфизм $f^*: k[Y] \rightarrow k[X]$.

Если $x \in X$, то соответствие $f \rightarrow f(x)$ является непрерывным гомоморфизмом кольца $k[X]$ в поле k . Таким образом устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками бесконечномерного аффинного многообразия X и непрерывными гомоморфизмами топологического кольца $k[X]$ в поле k .

Пусть X и Y — два бесконечномерных аффинных многообразия. Морфизм $f: Y \rightarrow X$ называется замкнутым вложением, если соответствующий непрерывный гомоморфизм колец $f^*: k[X] \rightarrow k[Y]$ является строгим эпиморфизмом, т.е. f^* — эпиморфизм и естественный гомоморфизм $k[X]/\text{Ker } f^* \rightarrow k[Y]$ является изоморфизмом топологических колец. Отождествляя точки с соответствующими непрерывными гомоморфизмами в k , мы получаем, таким образом, вложение Y в X , причем Y является замкнутым подмножеством в X . Мы будем называть в этом случае Y замкнутым подмногообразием.

Исходя из этих определений, очевидным образом определяется аффинная бесконечномерная группа и ее замкнутая подгруппа (являющаяся по определению замкнутым многообразием).

Дальше мы ограничимся рассмотрением аффинных бесконечномерных алгебраических групп, так как автору не известны нетривиальные примеры иного типа (примеры будут рассмотрены в § 2).

Если x — точка бесконечномерного аффинного многообразия X , то функции $f \in k[X]$, для которых $f(x) = 0$, образуют замкнутый максимальный идеал $\mathfrak{m}_x$ кольца $k[X]$. Замыкание n -й степени идеала $\mathfrak{m}_x$ в $k[X]$ обозначим $\mathfrak{m}_x^{(n)}$. Если $\mathfrak{m}_{x,i}$ — максимальный идеал точки x в кольце $k[X_i]$ для $X_i \ni x$, то $\mathfrak{m}_x^{(n)} = \varprojlim \mathfrak{m}_{x,i}^{(n)}$ и $\mathfrak{m}_x^{(n)}/\mathfrak{m}_x^{(l)} = \varprojlim \mathfrak{m}_{x,i}^{(n)}/\mathfrak{m}_{x,i}^{(l)}$ при $n < l$. Топологическое векторное пространство $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}$ (с топологией проективного предела) называется кокасательным пространством к X в точке x , а двойственное пространство $T_{x,X} = \text{Hom}_C(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}, k)$ (гомоморфизмы — непрерывные) — касательным. Замкнутое вложение $f: Y \rightarrow X$ определяет

гомоморфизм $(df)_y: T_{y,Y} \rightarrow T_{f(y),X}$.

Нашей целью является доказательство следующего результата.

Теорема 1. Пусть G — связная аффинная бесконечномерная алгебраическая группа, определенная над полем k характеристики 0, H — ее замкнутая подгруппа и $f: H \rightarrow G$ — вложение. Если $(df)_e: T_{e,H} \rightarrow T_{e,G}$ является изоморфизмом, то f — изоморфизм (т.е. $H = G$).

Прежде чем переходить к доказательству, введем еще одно определение. Обозначим через $\hat{S}^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)})$ пополненное n -е симметрическое произведение (см. [3], стр. 75) топологического векторного пространства $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}$. По непрерывности определен гомоморфизм

$$\varphi_n: \hat{S}^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)}) \rightarrow \mathfrak{m}_x^{(n)}/\mathfrak{m}_x^{(n+1)},$$

являющийся эпиморфизмом как проективный предел эпиморфизмов

$$S^n(\mathfrak{m}_{x,X_i}/\mathfrak{m}_{x,X_i}^2) \rightarrow \mathfrak{m}_{x,X_i}^{(n)}/\mathfrak{m}_{x,X_i}^{(n+1)}$$

и ввиду линейной компактности пространства $\hat{S}^n(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{(2)})$. Многообразие X называется гладким в точке x (а точка x — простой на X), если все гомоморфизмы φ_n являются изоморфизмами. В противном случае точка x называется особой.

Теорема 1 является следствием двух других результатов.

Теорема 2. Если $f: Y \rightarrow X$ — замкнутое вложение бесконечномерных аффинных многообразий, X неприводимо, Y гладко в точке $y \in Y$ и гомоморфизм $(df)_y: T_{y,Y} \rightarrow T_{f(y),X}$ является изоморфизмом, то f тоже является изоморфизмом.

Теорема 3. Бесконечномерная алгебраическая группа, определенная над полем характеристики 0, является гладким многообразием.

Докажем теорему 2. Нам достаточно доказать, что гомоморфизм f^* является мономорфизмом; тогда из определения замкнутого вложения будет следовать, что f — изоморфизм топологических колец $k[Y]$ и $k[X]$, а отсюда вытекает, что $Y = X$.

Пусть $u \in k[X]$, $f^*(u) = 0$. Обозначим через Ω_y топологическое векторное пространство $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^{(2)}$. По условию $\Omega_y \simeq \Omega_{f(y)}$. Мы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \hat{S}^n(\Omega_{f(y)}) & \simeq & \hat{S}^n(\Omega_y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{m}_{f(y)}^{(n)}/\mathfrak{m}_{f(y)}^{(n+1)} & \rightarrow & \mathfrak{m}_y^{(n)}/\mathfrak{m}_y^{(n+1)} \end{array}$$

в которой вертикальные гомоморфизмы эпиморфны, а верхний горизонтальный и правый вертикальный являются по условию изоморфизмами. Отсюда вытекает, что нижний горизонтальный гомоморфизм является мономорфизмом. Таким образом, если $u \in m_{f(y)}^{(n)}$ и $f^*(u) = 0$, то $u \in m_{f(y)}^{(n+1)}$, а значит, $u \in m_{f(y)}^{(n+1)}$. Пусть X_i^λ — некоторая неприводимая компонента многообразия X_i , проходящая через точку $f(y)$. Обозначим через u_i^λ ограничение u на X_i^λ , а через $\tilde{m}$ — максимальный идеал точки $f(y)$ в $k[X_i^\lambda]$. Из доказанного выше соотношения вытекает, что $u_i^\lambda \in \cap \tilde{m}^n$, т.е. $u_i^\lambda = 0$. Пусть X_i^μ — другая компонента многообразия X_i . Как мы видели при доказательстве предложения 1, эти компоненты сравнимы, т.е. содержатся в некоторой неприводимой компоненте X_j^ν какого-то многообразия X_j . Рассуждая как выше, мы получим, что $u = 0$ на X_j^ν , а значит, $u = 0$ на X_i^μ . Таким образом, $u = 0$ на X_i и раз это верно для всех i , то $u = 0$.

Теорема 3 в случае конечномерных алгебраических групп хорошо известна. Обычно доказательство соответствующего факта основывают на том, что многообразие G однородно, а множество его простых точек открыто и непусто. К бесконечномерным многообразиям такое рассуждение не применимо, так как такое многообразие вполне может не иметь ни одной простой точки. Например, если C — конечномерное алгебраическое многообразие с особой точкой c_0 , $X_i = C^i$, вложение $X_i \rightarrow X_{i+1}$ определяется как $(c_1, c_2, \dots, c_i) \rightarrow (c_0, c_1, \dots, c_i)$ и $X = \cup X_i$, то ни одна точка многообразия X не является простой. Однако в случае основного поля характеристики 0 применимо другое доказательство гладкости группового многообразия, принадлежащее Картэ. Его мы и изложим, опуская некоторые подробности, совершенно аналогичные конечномерному случаю (см. [5] или [8], §§ 11,12).

Мы будем рассматривать только аффинные многообразия и пользоваться языком колец вместо двойственного геометрического языка. Если X и Y — аффинные бесконечномерные алгебраические многообразия, то, как легко видеть, $k[X \times Y] = k[X] \hat{\otimes} k[Y]$ (пополненное тензорное произведение). Пусть G — аффинная бесконечномерная алгебраическая группа, определенная над полем k , $A = k[G]$. Морфизм умножения $\mu: G \times G \rightarrow G$ определяет непрерывный гомоморфизм $\mu^*: A \rightarrow A \hat{\otimes} A$, а гомоморфизм “значение в единичном элементе e ” — непрерывный гомоморфизм $\varepsilon: A \rightarrow k$. Идеал $m_e = \text{Ker } \varepsilon$ обозначим через m . μ^* и ε связаны известными соотношениями:

$$(\mu^* \hat{\otimes} 1) \mu^* = (1 \hat{\otimes} \mu^*) \mu^* ,$$

$$(\varepsilon \hat{\otimes} 1) \mu^* = (1 \hat{\otimes} \varepsilon) \mu^* = \text{Id} .$$

Из этих соотношений следует, что для $a \in \mathfrak{m}$

$$\mu^* a = a \hat{\otimes} 1 + 1 \hat{\otimes} a + u, \quad u \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}.$$

Мы будем рассматривать, не оговаривая этого дальше, только непрерывные дифференцирования топологической k -алгебры A .

Дифференцирование D называется инвариантным, если $\mu^* D = (1 \hat{\otimes} D) \mu^*$. Умножив это равенство на $1 \hat{\otimes} \varepsilon$, получим $D = (1 \hat{\otimes} \varepsilon D) \mu^*$. Положим $\varepsilon D = f$. Это гомоморфизм $A \rightarrow k$, причем из того, что D — дифференцирование, следует, что $f(\mathfrak{m}^{(2)}) = 0$. Кроме того, $f(1) = 0$, так что f задается линейной формой, которую мы будем обозначать той же буквой: $f \in \text{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k)$. Наоборот, по форме $d \in \text{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k)$ строится инвариантное дифференцирование $D_f = (1 \hat{\otimes} f) \mu^*$, где мы рассматриваем f как гомоморфизм $\mathfrak{m}$, равный 0 на $\mathfrak{m}^{(2)}$ и распространяем на все A , полагая $f(1) = 0$. Здесь $1 \hat{\otimes} f$ рассматривается как гомоморфизм $A \hat{\otimes} A \rightarrow A \hat{\otimes} k = A$, при котором $a \hat{\otimes} b \rightarrow af(b)$. Инвариантность для D_f легко следует из диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\mu^*} & A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{1 \hat{\otimes} f} & A \\ \mu^* \downarrow & & \mu^* \otimes 1 \downarrow & & \mu^* \downarrow \\ A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{1 \hat{\otimes} \mu^*} & A \hat{\otimes} A \hat{\otimes} A & \xrightarrow{1 \hat{\otimes} (1 \hat{\otimes} f)} & A \hat{\otimes} A \end{array}$$

Проверка того, что D_f — дифференцирование, также элементарна. Достаточно проверить равенство $D_f(ab) = D_f(a)b + aD_f(b)$ для $a, b \in \mathfrak{m}$. Надо представить $\mu^* a$ и $\mu^* b$ в виде $\mu^* a = 1 \hat{\otimes} a + a \hat{\otimes} 1 + u$, $\mu^* b = 1 \hat{\otimes} b + b \hat{\otimes} 1 + v$, где $u, v \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}$, и подставить в наше равенство. После очевидных преобразований мы получим:

$$D_f(ab) = af(b) + bf(a) + (1 \hat{\otimes} f)((a \hat{\otimes} 1)v) + (1 \hat{\otimes} f)(u(b \hat{\otimes} 1)),$$

$$D_f(a)b + aD_f(b) = af(b) + bf(a) + a(1 \hat{\otimes} f)(v) + b(1 \hat{\otimes} f)(v).$$

Остается проверить, что $(1 \hat{\otimes} f)((x \hat{\otimes} 1)z) = x(1 \hat{\otimes} f)(z)$ для $z \in \mathfrak{m} \hat{\otimes} \mathfrak{m}$. Достаточно рассмотреть случай $z = z_1 \hat{\otimes} z_2$, $z_1, z_2 \in \mathfrak{m}$, когда это равенство очевидно.

Таким образом, устанавливается изоморфизм между пространством инвариантных дифференцирований кольца A и пространством $\text{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)}, k) \simeq T_e$. Так как пространство инвариантных дифференцирований является алгеброй Ли, то тем самым в

пространство T_e вводится структура алгебры Ли. Эта алгебра называется алгеброй Ли группы G и обозначается через $\mathcal{L}(G)$.

После этих приготовлений теорема 3 доказывается коротко. Положим $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{(2)} = \Omega$, и пусть $\varphi_k: \hat{S}^k(\Omega) \rightarrow \mathfrak{m}^{(k)}/\mathfrak{m}^{(k+1)}$ — введенные раньше гомоморфизмы (очевидно, сюръективные). Пусть для $k < n$ φ_k инъективно (φ_1 — изоморфизм тавтологически). Предположим, что для $x \in \hat{S}^n(\Omega)$ $\varphi_n(x) = 0$. Для любого $f \in \text{Hom}_C(\Omega, k)$ $D_f \mathfrak{m}^{(k)} \subset \mathfrak{m}^{(k-1)}$. Обозначим через $\overline{D}_f$ однозначно определенное дифференцирование в $\hat{S}(\Omega) = \oplus \hat{S}^k(\Omega)$, равное f на Ω . Тогда $D_f \varphi_n = \varphi_{n-1} \overline{D}_f$ и $\varphi_{n-1} \overline{D}_f(x) = 0$. Так как φ_{n-1} по предположению инъективно, то $\overline{D}_x = 0$ для любого $F \in \text{Hom}_C(\Omega, k)$. Остается заметить, что если для линейно компактного пространства Ω и для некоторого $x \in \hat{S}^n(\Omega)$ $\overline{D}_f(x) = 0$ для любого дифференцирования $\overline{D}_f$, то $x = 0$ (в предположении характеристики 0). Это можно вывести, например, из формулы Эйлера. Пространство Ω обладает по предположению счетным базисом $\{e_i\}$, $e_i \rightarrow 0$. Если f_i — дуальный базис в $\text{Hom}_C(\Omega, k)$, а $x \in \hat{S}^n(\Omega)$, то

$$nx = \sum \overline{D}_{f_i}(x) e_i.$$

Проверить это равенство достаточно для $x = e_i \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} e_{i_n}$, когда оно сводится к классическому тождеству Эйлера.

Таким образом установлено, что точка e является простой. Простота других точек следует из однородности группового многообразия.

Замечание. Вышеизложенным рассуждениям можно придать более локальный характер, рассматривая вместо кольца $k[G]$ локальное кольцо точки e . При этом надо сделать выбор между двумя вариантами определения локального кольца точки x бесконечномерного алгебраического многообразия $X = \cup X_i$. Можно определить это кольцо как проективный предел локальных колец $\mathcal{O}_{x, X_i}$ точки x на всех содержащих ее многообразиях X_i . Это кольцо полно относительно топологии проективного предела, однако оно не является слоем какого-либо естественного пучка. Другой вариант заключается в том, что рассматриваются функции, регулярные в какой-либо окрестности точки x . Это кольцо является слоем "структурного пучка $\mathcal{O}_X$ " многообразия X . Оба определения пригодны для доказательства теоремы 3.

§ 2

Пусть A^n — n -мерное аффинное пространство над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0. Через $G = \text{Aut}(A^n)$ мы

обозначим группу всех автоморфизмов A^n . Тем самым G — это группа автоморфизмов алгебры многочленов $k[A^n] = k[T_1, \dots, T_n]$. Эту алгебру мы будем обозначать дальше R . Выбрав в A^n систему координат x_i , мы зададим элемент $g \in G$ n элементами $(g(x_1), \dots, g(x_n)) \in R^n$. Мы будем задавать этот элемент набором из $2n$ элементов $(g(x_1), \dots, g(x_n); g^{-1}(x_1), \dots, g^{-1}(x_n)) \in R^{2n}$. Кольцо многочленов R можно рассматривать как бесконечномерное аффинное пространство, в котором координатами являются коэффициенты многочлена. Пространство R^n и $R^{2n} = R^n \times R^n$ также изоморфно бесконечномерному аффинному пространству и в таком качестве мы будем обозначать R^n через A' , другой экземпляр R^n — через A'' , а $R^{2n} = R^n \times R^n$ — через A . Таким образом, $G \subset A = A' \times A''$ и задается “уравнением” $g \circ h = e$, $g \in A'$, $h \in A''$. Это уравнение на самом деле есть тождество относительно $x_1, \dots, x_n$, из которого, приравнивая коэффициенты, мы получаем бесконечное число уравнений, определяющих G в A .

Структура бесконечномерного многообразия в A определяется подпространствами A_i , где A_i состоит из наборов $2n$ многочленов, степень каждого из которых $\leq i$. Индуцированная структура на G задает, как легко видеть, структуру аффинной бесконечномерной алгебраической группы на G . Наша цель заключается в том, чтобы определить алгебру Ли $\mathcal{L}(G)$ этой группы.

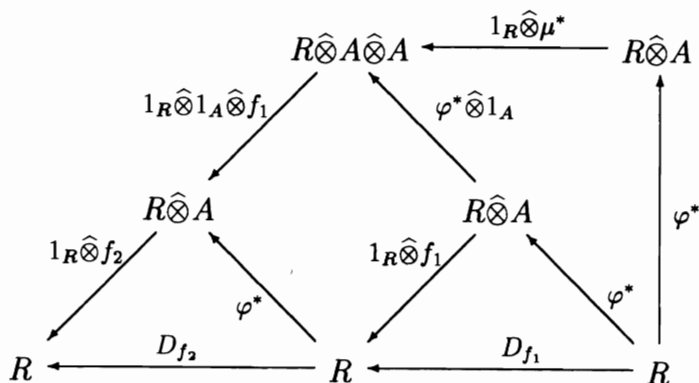
Касательное пространство $T_{e,A}$ бесконечномерного аффинного пространства A в точке e , соответствующей единичному элементу группы G , можно отождествить с самим этим пространством: $T_{e,A} \simeq A$. Таким образом, элемент $\xi \in T_{e,A}$ можно задать набором $(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n)$, $P_i, Q_i \in R$. Элементы из $T_{e,G} \subset T_{e,A} = A$ задаются так же. Если $\xi \in T_{e,G}$, то $Q_i = -P_i$. Действительно, для $f \in T_{e,G}$ и $u \in k[A]$ из $u|_G = 0$ следует, что $\langle f, u \rangle = 0$. Напомним, что $\langle f, uv \rangle = \langle f, u \rangle v(e) + u(e) \langle f, v \rangle$. Применим это соображение к “уравнению” $g \circ h = e$. Пусть $g(x_i) = \sum a_i^{(\nu)} x^{(\nu)}$, $h(x_j) = \sum b_j^{(\nu)} x^{(\nu)}$, где $a_i^{(\nu)}$ и $b_j^{(\nu)} \in k[A]$. Здесь $x^{(\nu)} = x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$, $\alpha_i^{(\nu)} = \alpha_i^{(\nu_1, \dots, \nu_n)}$ и т. д. Тогда $\langle f, g(x_i) \rangle = P_i$, $\langle f, h(x_j) \rangle = Q_j$. Если $\langle f, a_i^{(\nu)} \rangle = \alpha_i^{(\nu)} \in k$, $\langle f, b_j^{(\nu)} \rangle = \beta_j^{(\nu)}$, то наше “уравнение” принимает вид $\sum a_i^{(\nu)} h^{(\nu)} = x_i$, откуда $\langle f, \sum a_i^{(\nu)} h^{(\nu)} \rangle = 0$, где мы полагаем $h = (h(x_1), \dots, h(x_n))$.
Но

$$\begin{aligned} \langle f, \sum a_i^{(\nu)} h^{(\nu)} \rangle &= \left(\sum a_i^{(\nu)} h^{(\nu)} \right) \Big|_{h=e} \\ &+ \sum \left(\frac{\partial g(x_i)}{\partial x_j} (h) \langle f, h_j \rangle \right) \Big|_{g=h=e} = P_i + Q_i. \end{aligned}$$

Отсюда $Q_i = -P_i$. Поэтому дальше мы будем рассматривать $\mathcal{L}(G)$ как подпространство в $A' = R^n$, так как этой проекцией элемент из $\mathcal{L}(G)$ однозначно определяется.

Точно также мы будем рассматривать вложение $(F_1, \dots, F_n): G \rightarrow A'$ и, таким образом, $\mathcal{L}(G)$ состоит из таких наборов $(P_1, \dots, P_n)$, что $P_i = \langle f, F_i \rangle$ для некоторого $f \in T_{e,G} \subset T_{e,A'}$.

Мы зададим алгебру $\mathcal{L}(G)$ как подалгебру дифференцирований кольца R . Именно, если аффинная алгебраическая группа G действует на аффинном многообразии X (оба могут быть и бесконечномерными), то любой элемент $f \in T_{e,G}$ определяет дифференцирование D_f кольца $k[X]$. Если действие G на X задается морфизмом $\varphi: G \times X \rightarrow X$, которому соответствует непрерывный гомоморфизм $\varphi^*: k[X] \rightarrow k[X] \hat{\otimes} k[G]$, то $D_f = (1 \hat{\otimes} f)\varphi^*$. Произведение операторов $D_{f_2} \circ D_{f_1}$ не является, вообще говоря, дифференцированием. Это дифференциальный оператор D_f , определяемый той же формулой $D_f = (1 \hat{\otimes} f)\varphi^*$ при помощи свертки $f = f_1 * f_2$ отображений f_1 и f_2 . Именно, f_1 и f_2 мы рассматриваем как гомоморфизмы $k[G] \rightarrow k$, определяя их на m_e через композицию $m_e \rightarrow m_e/m_e^{(2)} \xrightarrow{f} k$ и доопределяя на $k[G]$ условием $f_i(1) = 0$, а f полагаем равным $(f_1 \hat{\otimes} f_2)\mu^*$. Равенство $D_{f_2} \circ D_{f_1} = D_f$ немедленно вытекает из рассмотрения коммутативной диаграммы, в которой мы положили $k[G] = A$, $k[X] = R$.



Полагая $X = G$ и $\varphi = \mu$, мы видим, что алгебра Ли $\mathcal{L}(G)$ изоморфна алгебре Ли $\text{Hom}_C(m/m^{(2)}, k)$ относительно свертки. Для

любого X мы имеем гомоморфизм последней алгебры в алгебру Ли дифференцирований $\text{Diff } k[X]$ алгебры $k[X]$. Отсюда следует, что, сопоставляя инвариантному дифференцированию на G дифференцирование кольца $k[X]$, соответствующее той же функции f , мы получаем гомоморфизм $\mathcal{L}(G)$ в алгебру $\text{Diff } k[X]$. В нашем случае $X = \mathbf{A}^n$, $G = \text{Aut } \mathbf{A}^n$ этот гомоморфизм очевидным образом является мономорфизмом. В качестве подалгебры Ли алгебры $\text{Diff } k[\mathbf{A}^n]$ мы и будем исследовать алгебру $\mathcal{L}(G)$.

Обозначим через $J_g(x)$ якобиан эндоморфизма g пространства $\mathbf{A}^n$. Из соотношения $J_{g_1 g_2}(x) = J_{g_1}(x) J_{g_2}(g_1(x))$ следует, что если g обладает обратным, то $J_g(x) = c$, что дает нам еще одно "уравнение" группы $G \subset \mathbf{A}'$, которое мы и исследуем. Если $f \in T_{e,G}$, g — эндоморфизм пространства $\mathbf{A}^n$, $g(x_i) = F_i(x_1, \dots, x_n)$, то

$$\begin{aligned} \langle f, J_g \rangle &= \left\langle f, J(F_1, \dots, F_n) \right\rangle = J \left(\langle f, F_1 \rangle, F_2, \dots, F_n \right) \Big|_{g=e} + \dots \\ &\dots + J \left(F_1, F_2, \dots, \langle f, F_n \rangle \right) \Big|_{g=e} . \end{aligned}$$

Отсюда

$$\langle f, J_g \rangle = \frac{\partial \langle f, F_1 \rangle}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \langle f, F_n \rangle}{\partial x_n} .$$

Таким образом, для $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{L}(G)$ $\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial x_n} = c \in k$.

Нами доказан следующий результат.

Лемма 1. Алгебра Ли $\mathcal{L}(G)$ бесконечномерной алгебраической группы $G = \text{Aut}(\mathbf{A}^n)$ содержится в алгебре $\Lambda \subset \text{Diff } k[\mathbf{A}^n]$, состоящей из дифференциальных операторов вида $D = \sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ $c \text{ Div } D = 0$. То, что Λ есть алгебра Ли, следует из легко проверяемого тождества

$$\text{Div}[D_1, D_2] = D_1(\text{Div } D_2) - D_2(\text{Div } D_1) .$$

Выделим в группе G две важные подгруппы. Одна из них есть $\text{Aff}(n)$ — группа аффинных преобразований, алгебра Ли ее состоит из дифференциальных операторов $\sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, в которых P_i линейны. Мы обозначим ее через Γ . Другая — $\mathcal{T}$ есть группа треугольных преобразований вида

$$g(x_i) = x_i + f_i(x_1, \dots, x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n .$$

Всякое преобразование такого вида есть автоморфизм и поэтому уравнения T в A' выписываются просто как обращения в 0 некоторых коэффициентов многочленов $g(x_i)$. Ввиду этого алгебра $\mathcal{L}(T)$ находится без труда: она состоит из дифференциальных операторов вида $\sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, где $P_i \in k[x_1, \dots, x_{i-1}]$. Ее мы обозначим через Δ .

Лемма 2. Алгебры Ли Γ и Δ порождают всю алгебру Ли Λ над полем k характеристики 0.

Доказательство основывается на тождестве

$$\left[\underbrace{y \frac{\partial}{\partial x}, \dots, y \frac{\partial}{\partial x}}_k, x^r \frac{\partial}{\partial y} \right] = -kr(r-1) \dots (r-k+2) y^{k-1} x^{r-k+1} \frac{\partial}{\partial x} + r(r-1) \dots (r-k+1) y^k x^{r-k} \frac{\partial}{\partial y},$$

которое легко проверяется индукцией по r .

Элемент $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_i}$ при $i < n$ представим в виде $C x_i^{\alpha_i} x_n^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_i}$, $C = x_1^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$. Ввиду указанного выше тождества, к алгебре, порожденной элементами $x_n \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $x_i^r \frac{\partial}{\partial x_n}$ принадлежит элемент вида

$$C x_i^{\alpha_i} x_n^{\alpha_n} \frac{\partial}{\partial x_i} + C \cdot F(x_i, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Отсюда следует, что для любых $P_1, \dots, P_{n-1}$ существует элемент вида $\eta = \sum_{i=1}^{n-1} P_i \frac{\partial}{\partial x_i} + Q \frac{\partial}{\partial x_n}$, принадлежащий алгебре, порожденной подалгебрами Γ и Λ . Пусть $\xi = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Lambda$. Построенный нами элемент η , конечно, также принадлежит Λ . Поэтому $\xi - \eta = (P_n - Q) \frac{\partial}{\partial x_n} \in \Lambda$. Это значит, что $\frac{\partial(P_n - Q)}{\partial x_n} = c$, т.е. $P_n - Q = c x_n + U$, $U \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Таким образом,

$$\xi = \eta + c x_n \frac{\partial}{\partial x_n} + U \frac{\partial}{\partial x_n},$$

т.е. принадлежит подалгебре, порожденной Γ и Δ .

Следствие. Алгебра Ли группы G совпадает с Λ .

Алгебра Λ заведомо не проста — в ней содержится идеал Λ_0 , состоящий из дифференциальных операторов D с $\text{Div } D = 0$.

Лемма 3. Алгебра Ли Λ_0 над полем характеристики 0 проста.

Действительно, если отличный от 0 элемент $\sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ принадлежит идеалу алгебры Λ_0 , то к тому же идеалу принадлежит и

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum P_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \sum \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Применяя эту операцию несколько раз, мы получим в нашем идеале ненулевой элемент с постоянными коэффициентами $\sum c_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $c \in k$.

За счет замены переменных можно считать, что это $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Тогда к тому же идеалу принадлежат и элементы

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] = \sum \frac{\partial X_i}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где $\eta = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ — произвольный элемент алгебры Λ_0 . Если нам

задан элемент $\xi = \sum Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ алгебры Λ_0 , то мы можем представить

его в таком виде, выбрав X_i из условия $\frac{\partial X_i}{\partial x_1} = Q_i$. Нужно только добиться того, чтобы элемент η принадлежит алгебре Λ_0 . Так как

$\text{Div } \xi = 0$, то $\frac{\partial}{\partial x_1} \text{Div } \eta = 0$, т.е. $\text{Div } \eta = F(x_2, \dots, x_n)$. Не нарушая

условия $\frac{\partial X_i}{\partial x_1} = Q_i$, мы можем заменить X_i на $X_i + \Phi_i(x_2, \dots, x_n)$.

Это меняет $\text{Div } \eta$ на $\sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}$ и остается выбрать Φ_i так, что $F +$

$$\sum \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = 0.$$

Чтобы вывести из этих утверждений об алгебрах Ли некоторые факты об алгебраических группах, нужен еще один простой результат.

Лемма 4. *Группа $G = \text{Aut } \mathbf{A}^n$ неприводима.*

Ввиду предложения 3 достаточно доказать связность группы G . Для этого годится прием, при помощи которого Александер доказал связность группы гомеоморфизмов шара [1]. Группа G как алгебраическое многообразие разлагается в прямое произведение двух подгрупп: группы аффинных преобразований $\text{Aff}(n)$ и группы H , преобразования которой задаются формулами

$$h(x_i) = x_i + f_i^{(2)}(x_1, \dots, x_n) + f_i^{(3)}(x_1, \dots, x_n) + \dots + f_i^{(k)}(x_1, \dots, x_n),$$

где $f_i^{(k)}$ — форма степени k . Поэтому достаточно доказать связность группы H . Обозначим через C_λ гомотетию $C_\lambda(x_i) = \lambda x_i$. Для $h \in H$, $h_\lambda = C_\lambda^{-1} h C_\lambda \in H$

$$h_\lambda(x_i) = x_i + \lambda f_i^{(2)} + \lambda^2 f_i^{(3)} + \dots + \lambda^{k-1} f_i^{(k)}.$$

Отсюда видно, что $C_\lambda^{-1} h C_\lambda$ — это алгебраическая кривая, соединяющая элемент h (при $\lambda = 1$) с единичным элементом (при $\lambda = 0$).

Из лемм 2 и 4 и теоремы 1 вытекает

Теорема 4. *Группа G порождается подгруппами $\text{Aff}(n)$ и T как алгебраическая группа, т.е. всякая замкнутая алгебраическая подгруппа $G' \subseteq G$, содержащая подгруппы $\text{Aff}(n)$ и T , совпадает с G .*

Так как для $g \in G$ $J_g(x) \in k^*$, то отображение $g \rightarrow J_g$ является гомоморфизмом $G \rightarrow G_m$. Его ядро есть подгруппа G_0 , алгебра Ли которой совпадает с алгеброй Λ_0 . Из леммы 4 точно так же следует

Теорема 5. *Группа G_0 является простой как алгебраическая группа.*

При $n = 2$ известно, что G порождается подгруппами $\text{Aff}(2)$ и T и как абстрактная буква. Конечно, теорема 4 является слабым приближением к этому результату. Однако для теоремы 5 подобное усиление невозможно: как показал В.И. Данилов, как абстрактная группа, группа G_0 не является простой [4] даже при $n = 2$.

Теоремы 1–4 покрывают содержание § 1 доклада [9]. В заключение сделаем некоторые библиографические замечания к § 2 доклада. Теорема 6 устанавливает уже упомянутое свойство: при $n = 2$ группа G порождается подгруппами $\text{Aff}(2)$ и T . Она не претендовала на новизну, но, как указано в [9], выводилась новым способом — путем вложения $\mathbf{A}^2$ в $\mathbf{P}^2$ и разложения каждого автоморфизма $g \in G$, как бирационального автоморфизма $\mathbf{P}^2$, в произведение

σ -процессов. Теорема 7 утверждает, что G является даже амальгамированным произведением этих подгрупп, а теорема 8 выводит из этого общий вид конечномерных алгебраических подгрупп группы G . В работе [2] эти результаты обобщены на очень широкий класс однородных (и квазиоднородных) алгебраических поверхностей. Наконец, теорема 9 утверждает, что аффинная плоскость A^2 не имеет форм. Это так же обобщено на тот же класс поверхностей в той же работе [2]. Но и мое прежнее, более элементарное доказательство также было опубликовано. По просьбе профессора Камбаяши я сообщил ему подробно ход доказательства теорем 8 и 9. Он взял на себя труд публикации этих рассуждений [6]: по-видимому, более общие результаты работы [2] ускользнули от его внимания.

(Поступило в редакцию 23 октября 1980 г.)

Литература

1. J.W. Alexander, *On the determination of an n -cell*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, (1923), № 9, 406.
2. М.Х. Гизатуллин, В.И. Данилов, *Аutomорфизмы аффинных поверхностей. I*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **39** (1975), № 3, 523–565.
3. A. Grothendieck, *Eléments de géometrie algebrique*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. (1940), № 4,
4. В.И. Данилов, *Непростота группы унимодулярных автоморфизмов аффинной плоскости*, Матем. Заметки **15** (1974), № 2, 289–293.
5. M. Demasure and A. Grothendieck, *Schémas en groupes I*, Exp. VII Lecture Notes in Math. **151**.
6. T. Kambayashi, *On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane*, J. Alg. **35** (1975), 449–456.
7. T. Kambayashi and I.R. Shafarevitch, *On some infinite-dimensional groups*, (реферат), Math. Rev. **58** (1979), № 5697,
8. D. Mumford, *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, 1970.
9. I.R. Shafarevich, *On some infinite-dimensional groups*, Simposio Internazionale di Geometria Algebrica, Roma, 1967, pp. 208–212.

ПОВЕРХНОСТИ ТИПА $K3$ НАД ПОЛЯМИ КОНЕЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХН. СЕР. СОВР.

ПРОБЛ. МАТ. no.18, 115-207, 1981

(с А.Н.Рудаковым)

Введение

Настоящая работа представляет собой обзор одного направления в геометрии алгебраических поверхностей над полями конечной характеристики. Речь идет о поверхностях типа $K3$, определяемых тем, что для них $K_X = 0$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Над полем комплексных чисел эти поверхности изучаются по идее, высказанной еще Севери, при помощи периодов двумерных дифференциальных форм. Именно, из определения следует, что на поверхности типа $K3$ существует единственная (с точностью до множителя) регулярная дифференциальная форма ω и что двумерное число Бетти этой поверхности равно 22. Интегралы формы по базисным циклам группы $H_2(X, \mathbb{Z})$, удовлетворяют соотношениям, аналогичным соотношениям Римана на алгебраической кривой: они выражают то, что $\omega \cup \omega = 0$, $\omega \cup \bar{\omega} > 0$ (где ω понимается как элемент из $H^2(X, \mathbb{C})$). Если же рассматривать поляризованные поверхности с поляризацией $l \in H_2(X, \mathbb{Z})$, то добавляется линейное соотношение на периоды: $\int_l \omega = 0$. Точка в $\mathbb{P}^{21}(\mathbb{C})$ с однородными координатами $\int_{c_i} \omega$, где $c_1, \dots, c_{22}$ — базис $H_2(X, \mathbb{C})$, принадлежит,

в силу этих соотношений, открытому 19-мерному многообразию Ω , которое оказывается симметрическим пространством. Доказано [6], что поверхности типа $K3$ над полем комплексных чисел однозначно определяются соответствующей точкой многообразия (аналог тео-

ремы Торелли) и что всякая точка этого многообразия соответствует некоторой поверхности [4].

Те работы, обзор которых предлагается, показывают, что есть надежда найти аналог этой теории хотя бы для некоторых поверхностей типа $K3$ над полями конечной характеристики. В настоящее время о такой надежде можно говорить для так называемых суперсингулярных поверхностей, т.е. таких, для которых все циклы в группе двумерных (эталльных) гомологий являются алгебраическими — существование таких поверхностей является феноменом, специфическим для геометрии над полями конечной характеристики. Для них можно определить “пространство периодов” Ω и “отображение периодов” из многообразия модулей в Ω и есть основания надеяться, что верен аналог теоремы Торелли. Однако доказан он до сих пор только в очень специальном случае (поля характеристики 2). Построение периодов для суперсингулярных поверхностей типа $K3$ было первоначально предложено Артиным [10], использовавшим плоские гомологии, однако позже Огас [33] показал, что теория естественнее строится в рамках кристаллических гомологий — этим подходом мы и воспользуемся. Другой метод, интенсивно здесь применяющийся, — это арифметика квадратичных форм (в нашем случае квадратичная форма определяется индексом пересечения на группе алгебраических циклов поверхности). Приложения того же метода к теории поверхностей типа $K3$ над полем комплексных чисел содержатся в предшествующей статье В.В. Никулина в этом сборнике. Можно сказать, что после стольких применений алгебраической геометрии к теории чисел, мы имеем, наконец, применение теории чисел к алгебраической геометрии...

С тем же кругом вопросов связаны другие результаты, которые мы излагаем: отсутствие векторных полей на поверхностях типа $K3$ и подъем поверхности типа $K3$, определенной над полем конечной характеристики, в характеристику 0.

Мы пытались написать этот обзор так, чтобы он давал связное представление о всей области. Привести полные доказательства было невозможно — это потребовало бы целой книги. В тех случаях, когда мы могли внести нечто новое в изложение, мы приводили все подробности, в остальных же случаях — только конспект доказательства, отсылая за деталями к литературе.

Доказательства некоторых интересовавших нас результатов в ряд других полезных замечаний были сообщены нам П. Делинем. Мы воспользовались так же советами В.В. Никулина, касающимися различных вопросов арифметики квадратичных форм. Обоим им мы рады выразить свою благодарность.

§1. Четные p -элементарные гиперболические решетки

Решеткой над целостным кольцом A называется A -модуль конечного ранга без кручения, на котором задана симметричная билинейная функция (a, b) со значениями в A , (a, b) называется произведением a и b , (a, a) дальше будет обозначаться через a^2 . Если K — поле частных A , то *двойственной* решеткой к решетке S называется подмодуль $S^* \subset S \otimes K$, состоящий из таких элементов x , что $(x, a) \in A$ для всех $a \in A$ (мы считаем, что произведение (a, b) распространено на $S \otimes K$ по линейности). Очевидно, что $S \subset S^*$.

Решетка над $\mathbf{Z}$ называется целочисленной. Целочисленная решетка называется гиперболической, если квадратичная форма x^2 на $S \otimes \mathbf{R}$ имеет индексы инерции $(1, n-1)$, где $n = \text{rg } S$, т.е. в некотором базисе записывается в виде $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$. Целочисленная решетка S называется *p -элементарной* для некоторого простого числа p , если $pS^* \subset S$. Таким образом, S^*/S — элементарная p -группа. Если $\text{rg } S = n$ и $|S^*/S| = p^s$, то для гиперболической решетки S $d(S) = (-1)^{n-1} \cdot p^s$, где $d(S) = \pm |S^*/S|$ — дискриминант решетки S .

Решетка S называется *четной*, если $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$ для всех $x \in S$.

Дальше мы будем пользоваться следующими обозначениями. Если S — решетка с произведением (x, y) , то новая решетка, определенная на том же множестве S с произведением $\langle x, y \rangle = n(x, y)$, будет обозначаться через $S(n)$. Через I обозначается одномерная решетка с базисным вектором e , для которого $e^2 = 1$.

Если S — 2-элементарная решетка и если $x^2 \equiv 0 \pmod{4}$ для $x \in S$, то S называется решеткой I типа, в противном случае — II типа. Это понятие можно пояснить следующим образом. Для любой p -элементарной решетки S произведение, распространенное на $S^* \subset S \otimes \mathbf{Q}$, имеет значение в $\frac{1}{p}\mathbf{Z}$ и определяет произведение в S^*/S со значениями в $\frac{1}{p}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$. При $p = 2$ решетка S тогда и только тогда принадлежит I типу, когда это произведение в S^*/S со значениями в $\frac{1}{2}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ кососимметрично, т.е. $x^2 = 0$ для всех $x \in S^*/S$.

Решетку, порожденную корневой системой типа A_n , D_n или E_n , мы будем обозначать $Q(A_n)$, $Q(D_n)$, $Q(E_n)$ (см. [17, р. 166]). При этом мы предполагаем, что эти решетки отрицательно определены, так что для корней имеет место равенство $x^2 = -2$. Легко видеть, что из этих решеток p -элементарны $Q(A_{p-1})$ для любого p ; $Q(A_2)$,

$Q(E_6)$, $Q(E_8)$ для $p = 3$; $Q(A_1)$, $Q(D_{2n})$, $Q(E_7)$, $Q(E_8)$ для $p = 2$. Решетки $Q(E_7)$, $Q(E_8)$ и $Q(D_{2n})$ при $n \equiv 0 \pmod{2}$ принадлежат к I типу, и $Q(A_1)$ и $Q(D_{2n})$ при $n \equiv 1 \pmod{2}$ — ко II типу. Прямая сумма m решеток, изоморфных N , обозначается N^m .

Как и раньше, мы определяем число s условием $d(S) = (-1)^{n-1} p^s$.

Для p -элементарной решетки всегда $s \leq n$, так как $(S^* : S) = p^s$, $S^* \supset S \supset pS^*$ и $(S^* : pS^*) = p^n$.

Теорема. Четная гиперболическая p -элементарная решетка ранга n при $p \neq 2$ и $n > 2$ однозначно определяется своим дискриминантом (т.е. числом s), а при $p = 2$ и $n > 4$ — дискриминантом и тем, принадлежит ли она к I или II типу.

При $p \neq 2$ решетка, соответствующая заданным значениям n и $s \leq n$, существует тогда и только тогда, когда удовлетворяются условия:

$$\begin{aligned} n &\equiv \dot{0} \pmod{2} \text{ и} \\ \text{при } s &\equiv 0 \pmod{2}, \quad n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \text{при } s &\equiv 1 \pmod{2}, \quad p \equiv (-1)^{n/2-1} \pmod{4} \\ \text{и, сверх того, } n &> s > 0, \text{ если } n \equiv 2 \pmod{8}. \end{aligned}$$

При $p = 2$ решетка I типа, соответствующая значениям n и s , существует только при $s \equiv 0 \pmod{2}$, $n \equiv 2 \pmod{4}$ и, сверх того, $n > s > 0$, если $n \not\equiv 2 \pmod{8}$. Решетка II типа существует только при $s > 0$ и $n \equiv s \pmod{2}$, причем при $s = 2$ должно быть, сверх того, $n \not\equiv 6 \pmod{8}$, а при $s = 1$, $n \equiv 1 \pmod{8}$ или $n \equiv 3 \pmod{8}$.

Теорема является частным случаем более общих результатов, полученных В.В. Никулиным [5]. Мы приведем более элементарное доказательство, следующее схеме, изложенной в [8], тем более, что при этом будет дана явная конструкция решеток с заданными инвариантами, которая понадобится нам позже.

Доказательство основывается на том, что для неопределенных решеток ранга $n \geq 3$ род совпадает со спинорным родом [34, р.319]. Совпадение спинорного рода с классом — чисто локальное условие, и оно выполняется, если для любого $p \nmid n$ $\oplus \mathbf{Z}_p$ содержит в качестве прямого слагаемого $\mathbf{Z}_p$ -решетку вида $M(k)$, где M — унимодулярная решетка ранга ≥ 2 при $p \neq 2$ и ≥ 3 при $p = 2$ [34, р.304]. Любая q -элементарная решетка T над $\mathbf{Z}_q$ представляется в виде:

$$T = M \oplus N(q), \quad \text{rg } N = s, \quad (1)$$

где M и N -унимодулярны. Доказательство легко получается, если взять за M такую унимодулярную подрешетку в T , что $M/qM =$

T/qT^* . Из разложения (1) сразу вытекает, что при условиях теоремы выполняется приведенный выше критерий совпадения спинорного рода и класса. Таким образом, в нашем случае класс и род совпадают, так что единственность решетки S с заданными инвариантами будет доказана, если мы докажем, что решетки $S \otimes \mathbf{Z}_q$ однозначно определяются для всех простых чисел q .

При $q \neq p$ решетка $S \otimes \mathbf{Z}_q$ унимодулярна, а при $q = 2$ еще и четна. Такая решетка однозначно определяется при $q \neq 2$ решеткой $S \otimes \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, а при $q = 2$ "квадратичной формой" $\frac{1}{2}x^2 \pmod{2}$ на $S \otimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Решетка над $F_q = \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ при $q \neq 2$ однозначно определяется своим дискриминантом, а значит, это верно и для решетки $S \otimes \mathbf{Z}_q$ при $q \neq p, q \neq 2$. Унимодулярная четная решетка над $\mathbf{Z}_2$ приводится к виду U_2^m или $U_2^{m-1} \oplus V_2$, где U_2 и V_2 — четные унимодулярные решетки ранга 2, характеризующиеся тем, что U_2 представляет 0, а V_2 — нет. В частности, ее ранг четен.

Рассмотрим сначала случай $p \neq 2$. Тогда $S \otimes \mathbf{Z}_2$ унимодулярна и четна, откуда следует, что $n \equiv 0 \pmod{2}$. Как мы видели, решетка $S \otimes \mathbf{Z}_q$ при $q = 2$ однозначно определяется заданием дискриминанта. Как сказано выше, $S \otimes \mathbf{Z}_2 = U_2^{n/2}$ или $U_2^{n/2-1} \otimes V_2$ и так как $d(U_2) = -1$, $d(V_2) = 3$, $d(S) = (-1)^{n-1}p^s$, то мы получаем, во-первых, что тип решетки определяется ее дискриминантом, а во-вторых, необходимые условия, приведенные в формулировке теоремы. Наконец, для $S \otimes \mathbf{Z}_p$ мы получаем, ввиду (1), 4 возможности, потому что, как для M , так и для N представляются 2 возможности, в зависимости от их дискриминантов: $M = I^{n-s}$ или $I^{n-s-1} \oplus I(\varepsilon)$, $N = I^s$ или $I^{s-1} \oplus I(\varepsilon)$, где $(\frac{\varepsilon}{p}) = -1$. Воспользуемся соотношением $\prod \varepsilon_q(S \otimes \mathbf{Z}_q) = 1$, где ε_q — инвариант Хассе [37, р.64]. Так как $\varepsilon_q(S \otimes \mathbf{Z}_q) = 1$ при $q \neq 2$, а $\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2)$ и $\varepsilon_\infty(S \otimes \mathbf{R})$ нам известны, то из него мы определяем $\varepsilon_p(S \otimes \mathbf{Z}_p)$, что задает $\mathbf{Q}_p$ -решетку $S \otimes \mathbf{Q}_p$ с точностью до изоморфизма. Остается проверить, что среди четырех имеющихся для $S \otimes \mathbf{Z}_p$ возможностей этим (т.е. типом $S \otimes \mathbf{Q}_p$) отбирается только одна, иными словами, что эти 4 решетки над $\mathbf{Z}_p$ остаются неизоморфными после умножения на $\mathbf{Q}_p$. Согласно тереме Витта, достаточно проверить, что 4 решетки $I \oplus I(p)$, $I(\varepsilon) \oplus I(p)$, $I \oplus I(\varepsilon p)$ и $I(\varepsilon) \oplus I(\varepsilon p)$ остаются неизоморфными после умножения на $\mathbf{Q}_p$. Это очевидным образом вытекает из рассмотрения их дискриминантов и инвариантов Хассе.

Пусть теперь $p = 2$. Опять решетка $S \otimes \mathbf{Z}_q$, $q \neq 2$, однозначно определяется своим дискриминантом. Для исследования решетки

$S \otimes \mathbf{Z}_2$ воспользуемся двумя тождествами

$$U_2 \oplus I(\varepsilon) \simeq I(\varepsilon)^2 \oplus I(-\varepsilon) \simeq I(\varepsilon) \oplus I \oplus I(-1), \quad (2)$$

$$V_2 \oplus I(2\varepsilon) \simeq U_2 \oplus I(-6\varepsilon), \quad (3)$$

где $\varepsilon \in \mathbf{Z}_2^*$.

Первое из них получается, если из базисов e, f в U_2 ($e^2 = f^2 = 0$, $(e, f) = 1$) и h в $I(\varepsilon)$ образовать векторы $a = h + e$, $b = h - \varepsilon f$, которые порождают подрешетку $I(\varepsilon)^2$. Будучи унимодулярной, она выделяется прямым слагаемым; остающееся слагаемое определяется дискриминантом. Тождество $I \oplus I(-1) \simeq I(\varepsilon) \oplus I(\varepsilon)$ вытекает из того, что форма $x^2 - y^2$ представляет любое $\varepsilon \in \mathbf{Z}_2^*$. Соотношение (3) подобным же образом следует из того, что решетка в левой части содержит подрешетку U_2 . Действительно, если e и f — базис в V_2 , а h — в $I(2\varepsilon)$, $e^2 = f^2 = 2$, $(e, f) = 1$, то $e + h$ и f порождают четную подрешетку W , причем $d(W) \equiv -1 \pmod{8}$, откуда следует, что $W \simeq U_2$.

Легко видеть, что решетка S относится к I или II типу, в зависимости от того, будет ли в разложении (1) $S \otimes \mathbf{Z}_q = V \oplus N(2)$ решетка N четной или нечетной.

I тип. Так как M унимодулярна и четна, то $n \equiv s \pmod{2}$, так как N четна и унимодулярна, то $n \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$. Мы опять имеем для каждой из решеток M и N по две возможности: U_2^k или $U_2^{k-1} \oplus V_2$, а в целом — 4 возможности. Условие $d(S) = (-1)^{n-1} 2^s$ оставляет две возможности: $M = U_2^{\frac{n-s}{2}}$, $N = U_2^{s/2}$ и $M = U_2^{\frac{n-s}{2}-1} \oplus V_2$, $N = U_2^{s/2-1} \oplus V_2$, которые подходят лишь при $\frac{n}{2} \equiv 1 \pmod{2}$, т.е. $n \equiv 2 \pmod{4}$, что и дает необходимое условие в формулировке теоремы. При этом условии нам остается проверить, как и при $p \neq 2$, что два остающиеся типа различаются значением инварианта Хассе $\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2)$. Опять для этого достаточно проверить, что $U_2 \oplus U_2(2)$ и $V_2 \oplus V_2(2)$ имеют разные инварианты Хассе. Так как над $\mathbf{Q}_2$, $U_2 \simeq I \oplus I(-1)$, $V_2 \simeq I(2) \oplus I(6)$, то такая проверка тривиальна.

II тип. Так как N нечетна, то из нее выделяется слагаемое $I(\varepsilon)$. Используя (3), мы видим, что две возможности для M можно свести к одной: $M = U_2^{\frac{n-s}{2}}$. Если N представляет 0, то существует вектор $e \in N$, $e \notin 2N$, $e^2 = 0$, и $f \in N$ с $(e, f) = 1$. Заменяя f на $f + \alpha e$, $\alpha \in \mathbf{Z}_2$, можно добиться того, что $f^2 = 0$ или 1. Если $f^2 = 1$, то e и f порождают $I \oplus I(-1)$, а если $f^2 = 0$, то U_2 . В последнем случае $N \equiv U_2 \oplus N'$, N' нечетна и значит содержит слагаемое $I(\varepsilon)$. Применяя (2), мы видим, что в любом случае N

содержит слагаемое $I \oplus I(-1)$, т.е. $N = I \oplus N'$, где N' еще нечетна. Повторяя этот процесс, мы приходим к представлению $N = I^{s-k} \oplus F$, F нечетна, $k = \text{rg } F = 4$, если $s \geq 4$ и $F = N$, если $s \leq 4$.

Рассуждая как и в случае $p \neq 2$, мы видим, что единственность решетки II типа с заданными инвариантами вытекает из следующего утверждения:

Лемма. Унимодулярная нечетная решетка F ранга $k \leq 4$ над $\mathbf{Z}_2$ однозначно определяется решеткой $F \otimes \mathbf{Q}_2$ над $\mathbf{Q}_2$. При $k \geq 3$ существует такая решетка с любыми значениями $d(F) \in \mathbf{Z}_2^*$ и $\varepsilon_2(F)$.

Доказательство леммы, состоящее из ряда элементарных проверок, мы опускаем.

Из леммы вытекает, что рассмотрение дискриминанта и инварианта Хассе $\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2)$ не может дать нам никаких ограничений на существование решеток при $s \geq 3$. Рассмотрим еще некоторые необходимые условия для существования нужных решеток, вытекающие из предшествующего рассуждения при $s < 2$, $s = 2$. Положим $n = 2k + 2$. $S \otimes \mathbf{Z}_2 = U_2^k \otimes N(2)$, $d(N) = (-1)^{k+1}$, так как $d(S) = -2^2$. Поэтому $N \simeq I(\eta) \oplus I((-1)^{k+1}\eta)$, $\eta \in \mathbf{Z}_2^*$. Так как $\varepsilon_\infty(S \otimes \mathbf{R}) = (-1)^k$, то и $\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2) = (-1)^k$.

Для вычисления ε_2 мы можем положить $U_2 \simeq I \oplus I(-1)$ над $\mathbf{Q}_2$, т.е.

$$S \otimes \mathbf{Q}_2 \simeq I^k \oplus I(-1)^k \oplus I(2\eta) \oplus I((-1)^{k+1}2\eta).$$

Тривиальное вычисление дает $\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2) = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2} + k \frac{\eta-1}{2}}$. Соотношение $\varepsilon_2 = (-1)^k$ записывается в виде

$$\frac{k(k+1)}{2} + k \frac{\eta-1}{2} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Условие разрешимости этого уравнения: $k \equiv 1 \pmod{2}$, т.е. $n \equiv 0 \pmod{4}$ или $k \equiv \frac{k(k+1)}{2} \equiv 0 \pmod{2}$, т.е. $k \equiv 0 \pmod{4}$, $n \equiv 0 \pmod{8}$. Они вместе равносильны условию $n \not\equiv 6 \pmod{8}$.

$s = 1$, $n = 2m + 1$. $S \otimes \mathbf{Z}_2 = U_2^m \oplus I(2\eta)$, $\eta \in \mathbf{Z}_2^*$, $d(S) = 2$: откуда $\eta = (-1)^m$. Так как $\varepsilon_\infty(S \otimes \mathbf{R}) = (-1)^m$, то $\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2) = (-1)^m$. Для вычисления ε_2 записываем опять U_2 как $I \oplus I(-1)$ над $\mathbf{Q}_2$:

$$S \otimes \mathbf{Q}_2 = I^m \oplus I(-1)^m \oplus I(2(-1)^m),$$

откуда

$$\varepsilon_2(S \otimes \mathbf{Z}_2) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}.$$

и равенство $\varepsilon_2 = (-1)^m$ дает $m \equiv 0$ или $1 \pmod{4}$, т.е. $n \equiv 1 \pmod{8}$ или $n \equiv 3 \pmod{8}$.

Этим доказано утверждение теоремы о единственности решетки с заданными инвариантами и выведены необходимые условия для ее существования. Остается, при выполнении этих необходимых условий, явно построить соответствующие решетки.

$p \neq 2$. Мы будем пользоваться следующей конструкцией, являющейся частным случаем операции "четнизации" нечетной решетки, предложенной Б.Б. Венковым [2]. В решетке $E = \oplus I(a_i)$ с базисом $\{e_i\}$, $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, $e^2 = a_i$, $a_i \equiv 1 \pmod{2}$, рассмотрим подрешетку $E_0 = \{\Sigma x_i, e_i; \Sigma x_i \equiv 0 \pmod{2}\}$ и положим $E_* = E_0 + \varepsilon \mathbb{Z}$, $\varepsilon = 1/2 \Sigma e_i$. E_* будет целочисленной четной решеткой, если выполнено условие $\Sigma a_i \equiv 0 \pmod{8}$.

Рассмотрим решетку S , являющуюся прямой суммой следующих двух или трех слагаемых: 1) U_2 или $U_2(p)$, 2) $(I(-p)^k \oplus I(-1)^l)_*$ при $kp + l \equiv 0 \pmod{8}$ и 3) может быть еще слагаемого $H_p(-1)$, где H_p — четная положительно определенная решетка ранга 4 и дискриминанта — p^2 : ее можно задать как максимальный порядок в кватернионной алгебре, разветвленной только в p и ∞ с произведением $(x, y) = \text{tr}(xy^*)$, где $x \rightarrow x^*$ — стандартная инволюция.

Решетка

$$U_2 \oplus (I(-p)^k \oplus I(-1)^l)_* \quad (4)$$

дает четную решетку с инвариантами n, s , если $k = s$, $k + l = n - 2$, $pk + l \equiv 0 \pmod{8}$, т.е. $(p-1)s + n - 2 \equiv 0 \pmod{8}$ или $\frac{p-1}{2}s + \frac{n}{2} \equiv 1 \pmod{4}$. Аналогично, решетка

$$U_2 \oplus H_p \oplus (I(-p)^k \oplus I(-1)^l)_*$$

дает нужный ответ при условии

$$\frac{p-1}{2}(s-2) + \frac{n}{2} \equiv 3 \pmod{4}.$$

Заменяя в (4) U_2 на $U_2(p)$, мы должны положить $k = s - 2$ вместо $k = s$ и поэтому мы можем, при помощи нашего запаса решеток получить нужную решетку, если удовлетворяется одно из сравнений:

$$\frac{p-1}{2}(s-2) + \frac{n}{2} \equiv 1, 3 \pmod{4},$$

т.е. сравнение

$$\frac{p-1}{2}(s-2) + \frac{n}{2} \equiv 1 \pmod{2}.$$

Если $s \equiv 0 \pmod{2}$, то оно равносильно условию $n \equiv 2 \pmod{4}$.
Если $s \equiv 1 \pmod{2}$, то сравнение принимает вид

$$\frac{p-1}{2} + \frac{n}{2} \equiv 1 \pmod{2},$$

а это, как легко видеть, равносильно тому, что $p \equiv (-1)^{\frac{n}{2}-1} \pmod{4}$.
Исключением здесь является случай $s = 1$, когда замена s на $s - 2$ недопустима. В этом случае надо построить решетку T с $s = 3$ указанным выше методом. Трехмерная над $\mathbb{F}_p$ решетка T^*/T обязана представлять 0. Если $T^* \supset S \supset T$ и S такова, что S/T дает одномерное изотропное подпространство в T^*/T , то, как легко видеть, S будет удовлетворять нужным условиям с $s = 1$.

$p = 2$. I тип: $n \equiv s \equiv 0 \pmod{2}$, $n = 4m + 2$. Здесь мы воспользуемся такой конструкцией: если E — 2-элементарная решетка, то положим $\tilde{E} = E^*(2)$. Это всегда целочисленная решетка. Если E была четной и I типа, то такой же будет и E^* . Очевидно, что $d(\tilde{E}) = 2^{\text{rg } E}/d(E)$. При $s \leq 2m$

$$S = U_2 \oplus \left(\bigoplus_1^{s/2} Q(D_{4n_i}) \right) \quad \text{при} \quad \sum_1^{s/2} n_i = m$$

дают нужные решетки. При $4m > s \geq 2m$ нужные решетки дают

$$S = U_2 \oplus \left(\bigoplus_1^{2m-s/2} \widetilde{Q(D_{4n_i})} \right) \quad \text{при} \quad \sum_1^{2m-s/2} n_i = m,$$

а при $s = 4m$

$$S = U_2(2) \oplus \widetilde{Q(D_{4m})}.$$

II тип: $n = s + 2m$. При $s > 2$ нужную решетку дает

$$S = U_2 \oplus I(2)^{s-2} + Q(D_{2m}).$$

При $s = 2$ эта формула дает решетку II типа только при $m \equiv 1 \pmod{2}$. Необходимое условие, сформулированное в теореме, дает $m \not\equiv 2 \pmod{4}$, т.е. из $m \equiv 0 \pmod{2}$ уже следует, что $m \equiv 0 \pmod{4}$. Если $m = 4k$, то нужную решетку дает

$$S = I(2) \oplus I(-2) \oplus Q(E_8)^k.$$

При $s = 1$, $n = 8k + 1$ нужная решетка — это

$$S = I(-2) \oplus Q(E_8)^k,$$

а при $n = 8k + 3$

$$S = U_2 \oplus I(-2) + Q(E_8)^k.$$

При $s = 0$, $n = 8k + 2$, нужная решетка:

$$S = U_2 \oplus I(-2) + Q(E_8)^k.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Разумеется, приведенные явные разложения — не единственные возможные. Например, мы можем при $m > 4$ всюду заменить $Q(D_{2m})$ на $Q(D_{2m-8}) \oplus Q(E_8)$. Дальше мы будем этим пользоваться.

2. Как указал нам В.В. Никулин, используя более точный критерий совпадения спинорного рода с родом, можно избавиться от условия $n > 4$ при $p = 2$.

В заключение приведем один критерий p -элементарности решеток.

Предложение. Пусть решетка T связана с унимодулярной решеткой S парой гомоморфизмов

$$T \begin{matrix} \xrightarrow{\varphi} \\ \xleftarrow{\psi} \end{matrix} S,$$

удовлетворяющих соотношениям

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = p(x, y), \quad x, y \in T, \quad (5)$$

$$(\varphi(x), u) = (x, \psi(u)); \quad x \in T, u \in S, \quad (6)$$

$$\psi\varphi = p1_T. \quad (7)$$

Тогда T p -элементарна.

Пусть сначала $U \subset S$ — любая подрешетка, полная в S , т.е. $(U \otimes \mathbf{Q}) \cap S = U$ и θ — ортогональное проектирование на подпространство $U \otimes \mathbf{R}$. Докажем, что $\theta(S) = U^*$, где U^* — двойственная к U решетка в подпространстве $U \otimes \mathbf{Q}$.

Действительно, для $x \in S$, $u \in U$, $(\theta x, u) = (x, u) \in \mathbf{Z}$ и поэтому $\theta(S) \subset U^*$. Равенство доказывается подсчетом индексов. Очевидно, $u \subset \theta(S) \subset U^*$ и $(U^* : U) = |d(U)|$. С другой стороны,

$$\theta(S)/U \simeq S/(U \otimes U^\perp).$$

Легко убедиться, что (ввиду унимодулярности S), $d(U^\perp) = d(U)$, поэтому $d(U \oplus U^\perp) = d(U)^2$ и, значит, $(\theta(S) : U) = |d(U)|$.

Заметим теперь, что ввиду (5) и (7), $\theta = \frac{1}{p}\varphi\psi$ является ортогональным проектированием S на $\varphi(T) \otimes \mathbf{R}$. Применяя только что сделанное замечание, получим, что $\theta(S) = (\overline{\varphi(T)})^*$, где $\overline{\varphi(T)} = (\varphi(T) \otimes \mathbf{Q}) \cap S$. С другой стороны, $p\theta = \varphi\psi$ и, значит, $p\theta(S) \subset \varphi(T)$. В результате мы видим, что

$$p(\overline{\varphi(T)})^* \subset \varphi(T). \quad (8)$$

Рассмотрим последовательность подрешеток

$$\varphi(T) \subset \overline{\varphi(T)} \subset (\overline{\varphi(T)})^* \subset \varphi(T)^*.$$

Из (8) следует, что

$$p\varphi(T)^* \subset \overline{\varphi(T)}. \quad (9)$$

Вместе (8) и (9) показывают, что

$$p^2\varphi(T)^* \subset \varphi(T). \quad (10)$$

Из определений сразу следует, что $\varphi(T^*) \subset p\varphi(T)^*$. Поэтому $p^2\varphi(T)^* \subset p\varphi(T^*)$ и (10) дает, что $\varphi(T) \supset p\varphi(T^*)$, откуда конечно следует, что $T \supset pT^*$.

§2. Кривые рода 0 и 1 на поверхностях типа K3

Основные численные соотношения теории алгебраических поверхностей принимают для поверхности X типа K3 более простой вид. Для неприводимой кривой $C \subset X$ формула Нетера принимает вид:

$$C^2 = 2p_a - 2, \quad (1)$$

где p_a — арифметический род кривой C , $p_a = g + \delta$, g — род нормализации C^ν кривой C , а δ — определяется особенностями этой кривой. Точнее, если $\nu : C^\nu \rightarrow C$ — морфизм нормализации, то

$$\delta = \sum_{x \in C} l(\tilde{\mathcal{O}}_x / \mathcal{O}_x), \quad \tilde{\mathcal{O}}_x = \bigcap_{\substack{y \in C^\nu \\ \nu(y)=x}} \mathcal{O}_y, \quad (2)$$

где сумма распространена на все точки x кривой C .

Из формулы (1) следует, что $D^2 \equiv 0 \pmod{2}$ для любого дивизора D на X , т.е. что квадратичная форма, определенная индексом пересечения на группе $Sx = \text{Pic } X$, является четной.

Теорема Римана-Роха для случая кривой $C \subset X$ превращается в соотношение

$$l(C) = \frac{C^2}{2} + 2. \quad (3)$$

Это следует из того, что $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, $H^2(X, \mathcal{O}) = 1$ по определению, $l(K - C) = l(-C) = 0$ и $H^1(X, \mathcal{L}(C)) = 0$ — последнее вытекает из рассмотрения точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(-C) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0,$$

которая дает $H^1(X, \mathcal{L}(-C)) = 0$, и из теоремы двойственности.

Кривые C арифметического рода 0 характеризуются, ввиду (1), условием $C^2 = -2$. Для них, очевидно, $q = \delta = 0$, т.е. они изоморфны $\mathbf{P}^1$. Из (3) для них получаем $l(C) = 1$, т.е. линейная система $|C|$ состоит из одной кривой.

Гораздо содержательнее теория кривых арифметического рода 1. Если C — такая кривая, то, согласно формуле (1), $C^2 = 0$. Из формулы (3) мы видим, что $l(C) = 2$, т.е. система $|C|$ одномерна, а так как $C^2 = 0$, то она не имеет базисных точек, т.е. определяет морфизм $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, слоями которого являются дивизоры этой системы. Мы будем дальше называть φ пучком кривых рода 1.

Формула $p_a = g + \delta$ допускает две возможности: а) $g = 1$, $\delta = 0$ и б) $g = 0$, $\delta = 1$. В случае а) кривая C является гладкой эллиптической кривой, а следовательно, таковы и все кривые системы $|C|$ кроме конечного их числа. В этом случае φ называется эллиптическим пучком. В случае б) применим формулу (2). Очевидно, что $\tilde{\mathcal{O}}_x \supset k + R_x \supset \mathcal{O}_x$, где R_x — радикал полулокального кольца $\tilde{\mathcal{O}}$, т.е.

$$R_x = \cap m_y, \quad y \in C^\nu, \quad \nu(y) = x$$

и m_y — максимальный идеал локального кольца точки y на C^ν . Поэтому представляются две возможности: б₁) $\mathcal{O}_x = k + R_x$ и б₂) $\tilde{\mathcal{O}}_x = k + R_x$. Мы рассмотрим их, следуя работе [9].

Разберем случай б₁). Так как $l(\tilde{\mathcal{O}}_x/k + R_x) = n - 1$, где n — число точек в множестве $\nu^{-1}(x)$, то в нашем случае $n = 2$, т.е. $\nu^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ и $m_x = m_{y_1} \cap m_{y_2}$. Очевидно, что $(m_x/m_x^2) = 2$ и гомоморфизмы $m_x/m_x^2 \rightarrow m_{y_i}/m_{y_i}^2$ определяют две непропорциональные линейные формы. Отсюда вытекает, что в касательном

пространстве T_x и точке x на X (или, что то же на C) образы касательных к точкам y_i стличны от 0 и различны между собой. Иначе говоря, локальный индекс пересечения кривой C и любой другой гладкой кривой E в точке x равен 2, если E не касается одной из этих двух прямых, и больше 2, если касательная к E совпадает с одной из них. Очевидно, это возможно, только если в некоторых локальных координатах u, v уравнение кривой C имеет вид $uv + f$, $f \in M_x^3$, где M_x — максимальный идеал точки x на поверхности X .

Особенность случая б₁) заключается в том, что он не устойчивый, т.е. может представиться только для конечного числа кривых пучка $|C|$. Действительно, пусть он имеет место для некоторой кривой C и t — локальный параметр точек $\varphi(C) \in \mathbb{P}_1$. Согласно предыдущему, в некоторой окрестности особой точки x кривой C и в некоторых локальных координатах $t = uv + f$. Особые точки соседних слоев задаются условиями $\frac{\partial t}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial t}{\partial u} = 0$. Так как $\frac{\partial t}{\partial u} = v + g$, $\frac{\partial t}{\partial v} = u + h$, $g, h \in M_x^2$, то эти функции взаимно просты в окрестности точки x и поэтому в достаточно малой окрестности других особых точек кривых пучка $|C|$ не будет.

Полученное нами свойство конечно следует в случае поля характеристики 0 из теоремы Бартини, согласно которой линейная система без неподвижных точек на гладкой поверхности имеет только конечное число особых кривых, а в контексте дифференциальной геометрии — согласуется с аналогичной ей леммой Сарда. Тем более интересно, что в случае б₂) и полей характеристики 2 и 3 мы приходим к другому результату. Дальше мы следуем изложению в работе [16].

В случае б₂), $\tilde{O}_x = k + R_x$ и поэтому $n = 1$, так что $\tilde{O}_x$ является локальным кольцом неособой точки $y \in C^\nu$, $\tilde{O}_x = O_{y, C^\nu}$. По условию $l(O_{y, C^\nu}/O_{x, C}) = 1$ т.е. $l(m_y/m_x) = 1$, где m_y максимальный идеал кольца O_{y, C^ν} . Так как точка y — простая, то $m_y = (\tau)$. Очевидно, $m_x \subseteq m_y^2$, иначе $m_x = m_y$. Но из условия $l(m_y/m_x) = 1$ следует, что тогда $m_x = m_y^2$ и, значит, $O_{x, C} = k + (\tau^2)$. Эпиморфизм $\rho: O_{x, X} \rightarrow O_{x, C}$ устанавливает изоморфизм $m_{x, X}/m_{x, X}^2 \xrightarrow{\sim} m_{x, C}/m_{x, C}^2$. Поэтому существуют такие функции $u, v \in m_{x, X}$, являющиеся локальными параметрами в точке x , что $\rho(u) = \tau^3$, $\rho(v) = \tau^2$. Отсюда $u^2 = v^3$ на C , т.е. локальное уравнение C в некоторой окрестности точки x может быть записано в виде $u^2 - v^3 = 0$, а отображения φ — в виде

$$t = \varepsilon(u^2 - v^3), \quad \varepsilon \in O_{x, X}^*.$$

Рассмотрим произвольную алгебраическую поверхность X и на

ней пучок $\varphi : X \rightarrow B$ кривых арифметического рода 1. Предположим, что множество особых точек этого пучка бесконечно. Тогда очевидно каждый слой должен иметь особую точку и при том только одну. Все эти особые точки образуют кривую ξ . В окрестности точки x на ξ $\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial v} = 0$. Если $p \neq 2$, то $\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}(u^2 - v^3) + 2\varepsilon u \notin m_{x,X}^2$. Поэтому уже $\frac{\partial t}{\partial u} = 0$ должно быть локальным уравнением кривой ξ . В частности, кривая ξ — гладкая. Если, сверх того, $p \neq 3$, то $\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}(u^2 - v^3) - 3\varepsilon v^2$ должно делиться на $\frac{\partial v}{\partial u}$, что невозможно, т.к. уже квадратичные члены $\frac{\partial t}{\partial v}$ не делятся на линейные члены $\frac{\partial t}{\partial u}$. Таким образом, при $p \neq 2$ и 3 множество особых кривых нашего пучка опять конечно. Пусть $p \neq 3$. Как мы видели, кривая ξ в этом случае — гладкая. Найдем индекс пересечения этой кривой со слоем C отображения φ . Так как $C \cap \xi = \{x\}$, то

$$(C, \xi) = (C, \xi)_x = l\left(\mathcal{O}_{x,X} / \left(t, \frac{\partial t}{\partial u}\right)\right) = l(\mathcal{O}_x / (u^2 - v^3, u)) = 3.$$

С другой стороны, так как ξ пересекается с каждым слоем в одной точке, то отображение φ , ограниченное на ξ , является чисто несепабельным морфизмом степени 3. Отсюда следует, что кривая ξ изоморфна B .

Остается рассмотреть случай $p = 2$. В этом случае

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial v}(u^2 - v^3) + \varepsilon v^2 \equiv (\alpha v + \beta v)^2(m_x^3), \quad \beta \neq 0.$$

Таким образом, мы имеем кривую ξ и функцию $h = \frac{\partial t}{\partial v}$, обращающуюся в 0 на ξ , причем в любой точке y некоторого открытого множества на ξ $h \equiv \lambda^2(m_y^3)$, $\lambda \in m_y$, $\lambda \notin m_y^2$. Легко видеть, что это возможно только в случае, когда в окрестности точки x $(h) = 2\xi$, т.е. $h = \eta\psi^2$, где $\eta \in \mathcal{O}_x^*$, а ψ является локальным уравнением кривой ξ . В частности, отсюда следует, что кривая ξ — гладкая. Для нахождения ее индекса пересечения со слоем пучка φ , заметим, что

$$(\xi, C) = (\xi, C)_x = \frac{1}{2}(h, C)_x = \frac{1}{2}(u^2 - v^3, v^2) = \frac{4}{2} = 2.$$

Как и в случае $p = 3$, мы убеждаемся, что кривая ξ изоморфна B , а отображение $\varphi : \xi \rightarrow B$ — чисто несепарабельный морфизм степени 2.

Пучки кривых арифметического рода 1, в которых все слои имеют особую точку, называются *квазиэллиптическими*. Приведенные рассуждения доказывают два утверждения.

Предложение 1. *Неприводимая кривая C на поверхности типа $K3$ имеет арифметический род 1 тогда и только тогда, когда $C^2 = 0$. Она определяет эллиптический или квазиэллиптический пучок.*

Теорема. *На алгебраической поверхности может существовать квазиэллиптический пучок, только если характеристика основного поля равна 2 или 3. Все кривые пучка, кроме конечного числа, имеют единственную особую точку, являющуюся острием. Эти особые точки располагаются на гладкой кривой, проекция которой на базу пучка является чисто несепарабельным морфизмом, степень которого равна характеристике.*

Вопрос о существовании квазиэллиптических пучков над полем характеристики 2 или 3 решается при помощи их явной конструкции. Положим $K = k(\mathbf{P}^1)$, тогда общий слой пучка $\varphi : X \rightarrow B$ является кривой C над полем K . Род ее (если пользоваться, например, определением рода, содержащимся в книге Шевалле [18]) равен 1. В случае, если пучок эллиптический, эта кривая гладкая, эллиптическая, а в случае, если он квазиэллиптический, она не гладкая, хотя и нормальная. Она называется тогда квазиэллиптической. Ее единственная особая точка определяется общей точкой s кривой ξ , причем $[K(s) : K] = p$. Если кривая рода 1 над произвольным полем имеет над этим полем рациональную точку, то теорема Римана-Роха дает для нее существование “Вейерштрассовой нормальной формы”:

$$Y^2 + \lambda XY + \mu Y = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma. \quad (4)$$

При $p \neq 2$ мы можем предполагать, что $\lambda = \mu = 0$. Особая точка соответствует тогда кратному корню правой части. При $p \neq 3$ этот корень всегда принадлежит K и кривая не нормальна. Это еще раз показывает, что квазиэллиптические пучки существуют только при $p = 2$ и 3. При $p = 3$ возможен случай

$$Y^2 = X^3 + \gamma, \quad (5)$$

который, если $\gamma \notin K^3$, дает нормальную кривую, имеющую особую точку $X = -\gamma^{\frac{1}{3}}$, $Y = 0$.

Если $p = 2$, то для особой точки $\lambda X + \mu = 0$, $\lambda Y = X^2 + \beta$ и, значит, эта точка рациональна, кроме случая $\lambda = 0$, $\mu = 0$. В последнем случае мы можем обычным преобразованием привести уравнение к виду

$$Y^2 = X^3 + aX + b,$$

и если $a \notin K^2$ или $b \notin K^2$, мы получаем нормальную кривую с особой точкой $X = a^{1/2}$, $Y = b^{1/2}$.

Если C — квазиэллиптическая кривая над полем K , обладающая рациональной точкой O , то на открытом множестве $C \setminus s$ (s — особая точка кривой C) можно определить групповой закон, превращающий $C \setminus s$ в алгебраическую группу, причем O будет нулевой точкой. Доказательство то же, что и в случае эллиптических кривых. Над расширением $K(s)$ кривая $C \setminus s$ изоморфна $\mathbf{P}^1 \setminus s \simeq \mathbf{A}^1$, так как единственный алгебраический групповой закон на $\mathbf{A}^1$ есть закон аддитивной группы G_a , то $G \setminus s$ является *формой* аддитивной группы. Все формы аддитивной группы классифицированы в работе Рассела [35]. Как он показал, они являются подгруппами группы $G_a \times G_a$ и задаются в ней уравнениями:

$$y^{p^n} = x + a_1 x^p + \dots + a_m x^{p^m}. \quad (6)$$

Легко показать, как приводятся к этому виду уравнения квазиэллиптических кривых. При $p = 3$, полагая в уравнении (5) $x = \frac{1}{Y}$, $y = \frac{X}{Y}$, мы приводим его к виду

$$y^3 = x - \gamma x^3.$$

При $p = 2$ надо записать уравнение (4) в виде $Y^2 = (X^2 + a)X + b$, возвести его в квадрат, разделить обе части на $(X^2 + a)^4$ и положить

$$\frac{1}{X^2 + a} = x, \quad \frac{Y}{X^2 + a} = y. \quad \text{Оно примет тогда вид}$$

$$y^4 = x + ax^2 + b^2 x^4.$$

В обоих случаях смысл этих преобразований заключается в том, что особая точка s переводится в бесконечность. Конечно, дополнительной (но не трудной) проверки требует то, что при этом закон сложения перейдет в аддитивный закон для x и y .

Квазиэллиптическая кривая, не имеющая рациональной точки над K , как и в случае эллиптических кривых, является главным однородным пространством над некоторой квазиэллиптической кривой, обладающей рациональной точкой. Однако здесь теории главных однородных пространств можно придать более явный вид: как

показал Рассел, все главные однородные пространства над группой (6) имеют вид

$$v^{p^n} = a + u + a_1 u^p + \dots + a_m u^{p^m},$$

причем действие точки (x, y) на точку (u, v) определяется как $(x + u, y + v)$. Группа главных однородных пространств изоморфна $G_a(K)/M$, где M — подгруппа, состоящая из элементов вида $v^{p^n} - u - a_1 u^p - \dots - a_m u^{p^m}$, $u, v \in K$.

Предложение 2. Если на поверхности X существует квазиэллиптический пучок $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, то поверхность унирациональна.

Пусть ξ — кривая, образованная острями слоев. Так как морфизм $\varphi : \xi \rightarrow \mathbf{P}^1$ чисто несепаабелен, то ξ — рациональная кривая. Положим $X' = X \times_{\mathbf{P}^1} \xi$. На X' мы имеем пучок, общий слой которого — рациональная кривая. Поэтому X' рациональна, а X — унирациональна.

Следствие. На поверхности X , обладающей квазиэллиптическим пучком $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$, все двумерные циклы алгебраические, т.е. $b_2(X) = \rho(X)$, где $\rho(x) = \text{rg } S(X)$ число Пикара.

Это следует из предложения 2 и очевидного замечания: на унирациональной поверхности все двумерные циклы алгебраические. Действительно, если $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ — морфизм рациональной поверхности, а $\alpha \in H^2(X)$, то $(\deg \pi)\alpha = \pi_* \pi^* \alpha$. На $\bar{X}$ все циклы алгебраические, в том числе $\pi^* \alpha$, откуда следует утверждение.

Вернемся, наконец, к случаю пучка кривых рода 1 $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ на поверхности типа $K3$. Этот пучок не содержит кратных слоев. Действительно, если C_0 — один из слоев и $C_0 = tE$, то $E^2 = 0$ и, значит, $l(E) \leq 2$. Отсюда следовало бы, что множество дивизоров tE' , $E' > 0$, $E' \sim E$, по крайней мере, одномерно, т.е. все слои пучка φ должны были бы быть кратными, в то время как общий слой неприводим. Поэтому если φ и не имеет сечения, то он имеет его локально в каждой точке (в этальной топологии). Если $\psi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — то расслоение с сечением (якобиево расслоение), над которым φ является главным однородным расслоением, то φ и ψ локально изоморфны (в этальной топологии). Канонический класс поверхности с пучком кривых рода 1 определяется локальными (в этальной топологии) свойствами вырожденных слоев (см. [15, p.354]. Поэтому X является поверхностью типа $K3$, только если Y — такая поверхность, и X является локально тривиальным главным однородным пространством.

§3. Корни и эллиптические пучки

Напомним некоторые нужные нам свойства корневых систем. Нами будут рассматриваться три типа корневых систем, которые мы будем называть: гиперболическими, параболическими и эллиптическими.

1. Пусть S — целочисленная гиперболическая решетка. Корнем решетки S называется такой элемент $r \in S$, что $r^2 = -2$. Совокупность $R(S)$ всех корней называется гиперболической корневой системой.

Рассмотрим конус K в пространстве $S \otimes \mathbf{R}$, состоящий из элементов x , для которых $x^2 > 0$. Этот конус распадается на две связные компоненты, называемые полами. Если уравнение конуса K в координатах имеет вид $x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 > 0$, то одна пола определяется дополнительным условием $x_1 > 0$, а другая — $x_1 < 0$. Из этого легко увидеть, что для двух точек x и y в одной поле $(x, y) > 0$. Выберем одну из двух пол и обозначим ее через K_+ . Множество точек $x \in K_+$, для которых $(x, r) \neq 0$ для всех $r \in R(S)$, распадается на связные компоненты, называемые камерами. Каждая камера является открытым выпуклым множеством. Так как камера есть пересечение K_+ и содержащих ее полупространств, определяемых гиперплоскостями $(x, r) = 0$, $r \in R(S)$, то каждая камера определяется выбором для любой пары корней $(r, -r)$ одного из них и задается условиями

$$x \in K_+, \quad (x, r) > 0$$

для выбранных корней r . Эти корни, определенные выбором камеры U , называются положительными. Совокупность положительных корней обозначается через $R_+(S)$. Очевидно, $R(S) = R_+(S) \cup (-R_+(S))$. Для положительности корня r достаточно уже неравенства $(h, r) > 0$, где h — любой элемент камеры U . Если L — одна из гиперплоскостей с уравнением $(x, r) = 0$, $r \in R(S)$, U содержится в полупространстве $(x, r) > 0$ и $L \cap U$ открыто в L , то L называется стенкой камеры U . Корни, соответствующие стенкам камеры U , называются простыми.

Отражением, соответствующим корню r , называется преобразование

$$s_r : x \rightarrow x + (x, r)r.$$

Оно переводит r в $-r$, а элементы гиперплоскости $(x, r) = 0$ — не меняет. Очевидно, что s_r — автоморфизм решетки (в частности, не меняет произведения).

Предложение 1. Каждая точка $x \in \overline{K}_+ \cap S$ при помощи конечного числа отражений, соответствующих простым корням, может быть переведена в точку из U .

Если $x \notin \overline{U}$, то $(x, r) < 0$ для некоторого простого корня r . Тогда для некоторого $h \in u$ и $x_1 = s_r(x)$, $(x_1, h) < (x, h)$. Так как x , x_1 и $h \in \overline{K}_+$, то $(x_1, h) > 0$. Ввиду того, что $(x_1, h) \in \mathbf{Z}$, мы должны через конечное число подобных преобразований прийти к точке из $\overline{U}$.

Замечание. 1. Можно доказать, что $\overline{U}$ — это фундаментальная область в $S \otimes \mathbf{R}$ для дискретной группы, порожденной отражениями s_r , где r — простые корни решетки S .

2. Пусть $f \in S$, $f \neq 0$, $f^2 = 0$. Корни решетки S , ортогональные f , образуют параболическую корневую систему.

3. Пусть $f^\perp$ — ортогональное дополнение к f . Очевидно, что произведение (x, y) , $x, y \in f^\perp$ не меняется от замен $x \rightarrow x + kf$, $y \rightarrow y + lf$ и, значит, определяет произведение в решетке $S_f = f^\perp / f\mathbf{Z}$. Решетка S_f отрицательно определена. Ее элементы с квадратом -2 называются корнями. Они образуют эллиптическую корневую систему, которую мы будем обозначать R_f . Она разлагается в прямую сумму попарно ортогональных и далее неразложимых корневых систем:

$$R_f = \oplus R_i,$$

называемых неприводимыми. Решетка, порожденная системой векторов R_i , называется решеткой корней и обозначается через $Q(R_i)$, а двойственная ей решетка называется решеткой весов и обозначается через $P(R_i)$. Для вычисления решетки $P(R_i)/Q(R_i)$ для неприводимой корневой системы R_i существует следующее правило. В решетке $Q(R_i)$ можно найти такой базис $r_1, \dots, r_m$, состоящий из корней, что любой корень выражается через него в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами одного знака. Существует максимальный корень $\rho = \sum_1^m k_j r_j$, обладающий тем свойством, что

для любого корня $r = \sum l_j r_j$, $k_1 \geq l_1, \dots, k_m \geq l_m$. Очевидно, решетка $Q(R_i)$ имеет базис $r_1, \dots, r_m$, а решетка $P(R_i)$ — взаимный базис $\omega_1, \dots, \omega_m$. Тогда элементы ω_j для таких j , что в представлении $\rho = \sum k_j r_j$, $k_j = 1$, являются представителями всех отличных от 0 классов смежности $P(R_i)$ по $Q(R_i)$ (см. [7, р.177]).

Теперь изложим применение этих понятий к теории поверхностей типа $K3$. Пусть X — такая поверхность. Мы положим $S = \text{Pic } X$. В конусе K , состоящем из элементов D с $D^2 > 0$, мы выберем за K_+ ту полу, в которой лежат обильные дивизоры. Тогда

все дивизоры из $K_+ \cap S$ эффективны, так как при $D^2 > 0$ либо D , либо $-D$ эффективен, а из того, что $D \in K_+$ следует, что $DH > 0$, где H — обилин и значит эффективен D , а не $-D$. Если C — дивизор с $C^2 = -2$, то либо C , либо $-C$ эффективен. Выбрав из пары $(C, -C)$ эффективный дивизор, мы получим камеру U , состоящую из дивизоров D , для которых $D^2 > 0$ и $DC > 0$ для любого $C > 0$, $C^2 = -2$. Тогда $DD_1 > 0$ для любого $D_1 > 0$. Действительно, если $D_1 = \sum_1^N m_i C_i$ — разложение на неприводимые компоненты,

причем для $i \leq n$, $C_i^2 = -2$, а для $i > n$, $C_i^2 \geq 0$, то $DC_i > 0$ при $i \leq n$ и $DC_i > 0$ при $i > n$, так как C_i имеет неотрицательный индекс пересечения с любой компонентой дивизора D . Таким образом, всегда $DD_1 \geq 0$. Более того, для компонент C_i , для которых $C_i^2 > 0$, $DC_i > 0$, так как D и C_i лежат в одной поле K_+ . Отсюда следует, что равенство $DD_1 = 0$ возможно, только если все $C_i^2 = 0$ и $DC_i = 0$. Но ортогональное дополнение к вектору D с $D^2 > 0$ является отрицательно определенной решеткой и поэтому из $C_i^2 = 0$, $DC_i = 0$ следует, что $C_i = 0$, а значит, и $D_1 = 0$. Таким образом, при $D_1 > 0$ и $DD_1 > 0$, дивизор D , содержащийся в камере U , является обильным. Так как при выводе этого свойства мы использовали только следствие $DC > 0$ для неприводимых кривых с $C^2 = -2$, то простые корни, соответствующие камере U , содержатся среди таких кривых. Наоборот, любая неприводимая кривая C с $C^2 = -2$ является простым корнем. Для доказательства надо показать существование дивизора $E > 0$, для которого $E^2 > 0$, $EC = 0$, и $EC' > 0$ для любой другой неприводимой кривой C' (C')² = -2. Воспользуемся тем, что кривую C можно стянуть в особую точку при помощи морфизма $\varphi: X \rightarrow X'$ на проективную поверхность X' . Если H — гиперплоское сечение X' , то $E = \varphi^*H$ удовлетворяет нужным условиям. Таким образом, простые корни в точности совпадают с гладкими рациональными кривыми на X .

Классы $D \in \bar{U}$ обладают свойством: $D^2 \geq 0$, $DC \geq 0$ для любой кривой C с $C^2 = -2$, а значит, и для любого эффективного дивизора C . Такие классы называются квазиобильными. Среди них нам будут особо интересны классы с $D^2 = 0$, ввиду следующего их свойства.

Предложение 2. Класс дивизоров D на поверхности типа $K3$ тогда и только тогда содержит неприводимую кривую арифметического рода 1, когда он квазиобилин, примитивен и $D^2 = 0$. При этом элемент x решетки S называется примитивным, если его нельзя представить в виде $x = tu$, $t \in \mathbb{Z}$, $u \in S$, $t > 1$.

Если класс D содержит неприводимую кривую C арифметичес-

кого рода 1, то $C^2 = 0$ и, значит, $D^2 = 0$, пучок $|C|$ не содержит кратных слоев и, значит, D примитивен. Наконец, условие $DE \geq 0$ достаточно проверить для неприводимой кривой E , а для нее оно очевидно, так как в пучке $|C|$ есть кривая C_1 , не пересекающаяся с E . Если E не компонента C_1 , то $EC_1 > 0$, а если компонента, то для другой кривой C_2 того же пучка $EC_2 = 0$.

Таким образом, доказательства требует только достаточность условия. Из теоремы Римана–Роха следует, что или $l(D) \geq 2$ или $l(-D) \geq 2$. Пусть H — некоторая поляризация поверхности, тогда по условию $DH \geq 0$, откуда следует, что класс $-D$ не может содержать эффективного дивизора, — отсюда следовало бы, что $DH < 0$. Таким образом, $l(D) \geq 2$ и в D содержатся эффективные дивизоры. Если $D = \sum k_i C_i$ — разложение одного из них на неприводимые компоненты, то $D^2 = 0$ и $DC_i \geq 0$ дают $DC_i = 0$, а так как $C_i C_j \geq 0$ при $i \neq j$, то $C_i^2 \leq 0$. Как мы видели, это возможно только при $C_i^2 = 0$ или $C_i^2 = -2$. Докажем, что хотя бы в одном эффективном дивизоре D нашего класса встречается хоть одна неприводимая компонента с $C_i^2 = 0$. Действительно, для всех кривых C_i , встречающихся в разложениях дивизоров D нашего класса $k_i C_i H \leq DH$, поэтому ограничены как k_i , так и $C_i H$. Классов C с заданным квадратом и заданным CH существует лишь конечное число. Это следует из того, что решетка $S = \text{Pic } X$ — гиперболическая. Поэтому мы можем представить в $S \otimes \mathbb{R}$ $C = \alpha H + Y$, а Y лежит в пространстве $H^\perp$ с отрицательно определенной формой. Условие $\alpha H^2 = CH$ дает ограничения на α , а $\alpha^2 H^2 + Y^2 = C^2$ — на Y^2 . Таким образом, C лежит в компактной области. Но в каждом классе с $C_i^2 = -2$ лежит лишь один эффективный дивизор и мы получили бы, что всего в классе D есть лишь конечное число эффективных дивизоров, что противоречит условию $l(D) \geq 2$.

Пусть C — компонента с $C^2 = 0$ и $L = mC + D_0$ — представление с $m > 0$, $D_0 > 0$. Заменяя в условии $DD = 0$ один из множителей D его разложением, мы получим $CD + D_0 D = 0$. Так как по условию квазиобильности $CD \geq 0$, $D_0 D \geq 0$, то $CD = 0$, $D_0 D = 0$. Подставляя сюда опять представление для D , мы получим $CD_0 = 0$, $D_0^2 = 0$.

Если бы D_0 и C были линейно независимы, то они порождали бы двумерное подпространство в конусе с уравнением $x^2 = 0$ в $S \otimes \mathbb{R}$. Такого подпространства существовать не может, так как на сфере, над которой построен конус, нет прямых. Поэтому C и D_0 должны быть пропорциональны, и так как класс C — примитивен, то $D_0 = m_0 C$, $m_0 \in \mathbb{Z}$. Отсюда $D = (m + m_0)C$, что возможно, ввиду примитивности D , только при $m + m_0 = 1$. Предложение доказано.

Предложение 1 теперь интерпретируется так:

Предложение 3. Любой эффективный класс D с $D^2 > 0$ может быть при помощи конечного числа отражений, соответствующих гладким рациональным кривым, преобразован в обильный. Любой эффективный примитивный класс f с $f^2 = 0$ может быть аналогичным образом преобразован в класс, определяющий пучок кривых арифметического рода 1.

В частности, имеет место следующий критерий.

Теорема. На поверхности X типа $K3$ тогда и только тогда существует пучок кривых арифметического рода 1, когда существует класс $D \in \text{Pic } X$, $D \neq 0$ с $D^2 = 0$.

Если f — класс, соответствующий пучку кривых арифметического рода 1, то корни, ортогональные f , являются линейными комбинациями компонент пучка $|f|$: действительно, если $C^2 = -2$ и $C > 0$, то $Cf = 0$ возможно только тогда, когда C — компонента f . В разложении корневой системы R_f на неприводимые: $R_f = \otimes R_{F_i}$ отдельные слагаемые соответствуют приводимым слоям F_i пучка f . Действительно, компоненты разных слоев не пересекаются и, значит, ортогональны в S , компоненты же одного слоя нельзя разбить на две группы, представители которых не пересекаются ввиду связности слоя.

Наконец выясним, как интерпретируются решетка $P(R_F)$ и группа $P(R_F)/Q(R_F)$. Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — наш пучок. Обозначим через $\mathcal{O}$ локальное кольцо той точки, над которой расположен слой F , соответствующий нашей неприводимой корневой системе, а через $\hat{\mathcal{O}}$ — его пополнение. Положим $\hat{X} = X \otimes_{\mathbf{P}^1} \hat{\mathcal{O}}$. Так как $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — локально тривиальное расслоение, то $\hat{X}$ имеет сечение и поэтому в разложении

$$F = \sum_0^m k_i C_i \quad (1)$$

замкнутого слоя на неприводимые компоненты хотя бы одна кратность равна 1 — та, для которой компонента C_i пересекается с сечением. Пусть это будет k_0 . Тогда представители $C_1, \dots, C_m$ в $\bar{F}/\mathbf{Z}F$ (которые мы будем обозначать теми же буквами) составляют базис корневой системы R_F . Действительно, если некоторый корень, т.е. дивизор с $D^2 = -2$ представляется в виде линейной комбинации кривых $C_1, \dots, C_m$ с коэффициентами разных знаков, то $D = D_1 - D_2$, $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, D_1 и D_2 взаимно просты. Отсюда

$$-2 = D^2 = D_1^2 - 2D_1D_2 + D_2^2,$$

что невозможно, так как $D_1^2 \leq -2$, $D_2^2 \leq -2$, $D_1 D_2 \geq 0$. Докажем, что $\rho = \sum_1^m k_i C_i$ является максимальным корнем. Если это не так, то максимальный корень $r = \sum_1^m l_i C_i$ представляется в виде $r = \rho + E$, $E = \sum_1^m h_i C_i > 0$, $E \neq 0$. Но $\rho \sim -C_0$, т.к. $D \sim 0$ на X . Поэтому мы получаем:

$$\begin{aligned} -2 = r^2 &= (-C_0 + E)^2 = (-C_0)^2 - 2C_0 E + E^2 = \\ &= -2 - 2C_0 E + E^2 = 0, \\ -2C_0 E + E^2 &= 0, \end{aligned}$$

в то время как $-C_0 E \leq 0$, $E^2 < 0$.

По приведенному в свое время критерию, ненулевые элементы группы $P(R_F)/Q(R_F)$ определяются теми элементами ω_i базиса, взаимного к базису C_i , $i \geq 1$, для которых $k_i = 1$, в разложении (1).

Рассмотрим группу $\text{Pic}(\hat{X})$ и ее отображение в $P(R_F) = Q(R_F)^*$, определенное индексом пересечения с компонентами C_i , $i = 1, \dots, m$. Образ $\Pi \subset P(R_F)$ есть "группа Пикара с точностью до численной эквивалентности". Очевидно, что $Q(R_F) \subset \Pi$. С другой стороны, ненулевые элементы $P(R_F)/Q(R_F)$ имеют в качестве представителей ω_i , для которых $k_i = 1$. Но как раз эти элементы задаются сечениями, пересекающими компоненты C_i , для которых $k_i = 1$. Поэтому $\Pi = P(R_F)$, а классы $P(R_F)/Q(R_F) = \Pi/Q(R_F)$ можно задавать сечениями, пересекающими компоненты кратности 1 слоя. Сечения s_1 и s_2 складываются в Π как дивизоры. Пусть $s_1 \oplus s_2$ — их сумма как сечений, т.е. для $x \in \mathbb{P}^1$, $(s_1 \oplus s_2)(x)$ есть сумма в слое F_x точек $s_1(x)$ и $s_2(x)$. Тогда на общем слое F_η , $(s_1 \oplus s_2)(\eta) \sim s_1(\eta) + s_2(\eta) - \mathcal{O}(\eta)$, где $\mathcal{O}$ — нулевое сечение. Из этого следует, что на $\hat{X}$, $s_1 \oplus s_2 \sim s_1 + s_2 - \mathcal{O} + D$, где D состоит из компонент замкнутого слоя. Поэтому $\Pi/Q(R_F)$ также изоморфно группе сечений по модулю $Q(R_F)$, складываемых по-слоино. Последняя группа очевидно изоморфна "группе компонент кратности 1", т.е. факторгруппе группы неособых точек слоя по ее связной компоненте единицы. Это дает интерпретацию группы $P(R_F)/Q(R_F)$.

Результаты нашего сопоставления сведем в таблицу.

Гиперболические решетки s	Поверхности X типа $K3$
Гиперболическая решетка S	$\text{Pic } X$
Камера U	Обильные классы дивизоров
Положительные корни	Эффективные дивизоры C с $C^2 = -2$
Простые корни	Гладкие рациональные кривые
Элементы $h \in U$ с $f^2 = 0$	Пучки кривых арифметического рода 1
Корни решетки $f^\perp$	Дивизоры C с $C^2 = -2$, состоящие из компонент пучка
Простые корни решетки $f^\perp$ корневой системы R_f	Неприводимые компоненты слоев
Неприводимые слагаемые R_F	Приводимые слои F_i пучка f
Выражение $f - C_0$ через неприводимые компоненты слоя F (C_0 — компонента слоя F кратности 1)	Максимальный корень корневой системы R_F , соответствующей слою F
Группа $P(R_F)/Q(R_F)$	"Группа компонент кратности 1" слоя, т.е. факторгруппа группы неособых точек слоя F по связной компоненте единицы

Последняя часть этой таблицы сохраняет силу для любой алгебраической поверхности X с пучком кривых арифметического рода 1, $\varphi: X \rightarrow B$. Если $f \in \text{Pic } X$ — слой пучка, то в группе $f^\perp$ корнями назовем элементы D с $D^2 = -2$; они точно так же являются линейными комбинациями компонент слоев пучка. Положительными корнями назовем корни D с $D > 0$, а простыми корнями — неприводимые компоненты слоев. Последние три строки таблицы сохраняются теперь и в общем случае.

Это сопоставление дает возможность применить к теории пучков арифметического рода 1 классификацию корневых систем (у которых все векторы одинаковой длины). Таким образом, приводимые слои можно классифицировать по известным сериям A_n , D_n , E_6 , E_7 и E_8 . Из известной классификации вырожденных слоев вытекает, что тип корневой системы однозначно определяет слой, за

исключением типов A_2 и A_1 , и, кроме этих двух случаев, мы будем говорить, что слой имеет тип $A_n, \dots, E_8$. В случае типа A_2 слой может состоять из трех прямых, попарно пересекающихся в одной точке. В первом случае мы будем говорить, что слой имеет тип A_2 , а во втором — $*A_2$. Точно так же слой, состоящий из двух прямых, трансверсально пересекающихся в двух точках, мы будем относить к типу A_1 , а из двух касающихся прямых — к типу $*A_1$. Наконец, неприводимый вырожденный слой мы будем обозначать A_0 , если он имеет особую точку с разделенными касательными, и $*A_0$, если эта точка является острием.

§4. Критерий квазиэллиптичности пучка

Пусть $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — расслоение гладкой поверхности на кривые арифметического рода 1. Мы будем предполагать его минимальным (т.е. без исключительных кривых 1 рода в слоях) и приведенным (т.е. без кратных слоев).

Напомним основные формулы, касающиеся таких пучков. Теорема Римана–Роха дает

$$e(X) = 12\chi(\mathcal{O}_X), \quad (1)$$

где $e(X)$ — эйлерова характеристика в этальных когомологиях. С другой стороны,

$$e(X) = \sum_F (e(F) - e(F_0)) + d(F) + e(\mathbf{P}^1)e(F_0), \quad (2)$$

где F_0 — общий слой расслоения φ , сумма распространена на все слои F этого расслоения (но слагаемые отличны от нуля только для вырожденных слоев), а $d(F)$ — инвариант дикого ветвления. По определению,

$$d(F) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{e_0} \dim_{\mathbf{F}_i} M/M^{G_i}, \quad (3)$$

где $M = \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}$ — общий слой расслоения, как эллиптическая кривая над полем $k(\mathbf{P}^1)$, а G_i — группы ветвления, соответствующие точке $x \in \mathbf{P}^1$, над которой лежит F и содержащиеся в группе Галуа поля $K(\mathcal{U}_i)/K$, где K — поле частных пополненного локального кольца точки базы, над которой лежит слой F . По поводу формулы (2) см. [3].

Так как $\dim_{\mathbf{F}_i} M = 2$, то $\dim_{\mathbf{F}_i} M^{G_i} = 2$, если G_i действует тривиально на M . Заметим, что случай $\dim_{\mathbf{F}_i} M^{G_i} = 1$ невозможен.

Действительно, тогда M имеет прямую, на которую G_i действует тривиально и, значит, действие G_i на M приводится к треугольному виду. Действие G на $\Lambda^2 M$, как известно, определяется действием на корни степени l из 1, а ввиду алгебраической замкнутости поля K отсюда следует, что элементы группы G_i определяют унимодулярные преобразования M . Ввиду этого, действие G_i приводится строго к треугольному виду:

$$T(k) = \begin{pmatrix} 1 & \chi(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $\chi \in \text{Hom}(G_i, \mathbf{Z}/l)$. Так как G_i при $i \geq 1$ — p -группа, а $l \neq p$, то $\chi = 0$ и $T_g = 1$. Таким образом, $\dim M/M^{G_i} = 0$, если $G_i = \{1\}$, и 2 в противном случае. Поэтому формулы (3) можно переписать в виде

$$d(F) = \frac{2}{e_0} \sum_{i=1}^m e_i, \quad (5)$$

где сумма распространена на все i , для которых $e_i > 1$. То же рассуждение показывает, что если слой F имеет мультипликативный тип, т.е. связная компонента группы его неособых точек изоморфна G_m , то $d(F) = 0$. Действительно, так как $(G_m)_l = \mathbf{Z}/l$, то в $\mathcal{A}_l$ имеется инвариантный относительно G вектор и действие G приводится к виду (3), откуда $|G| = 1$ или l (см. [31], стр.5).

Для расслоений на кривые любого рода известно, что $e(F) \geq e(F_0)$, причем равенство имеет место только для невырожденных слоев [1], стр.55.

Для случая эллиптического расслоения $e(F_0) = 0$, а для квазиэллиптического $e(F_0) = 2$, поэтому из (2) следует, что $e(X) \geq 0$ и, согласно (1), $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$. Условие $e(X) = \chi(\mathcal{O}_X) = 0$ показывает, что расслоение не имеет вырожденных слоев, а это, как известно, возможно только в случае $X = \mathbf{P}^1 \times F$, а условие $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, $e(X) = 12$ характеризует рациональные поверхности X . Мы будем дальше предполагать

$$\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2. \quad (6)$$

Известно, что $\mathcal{R}^1 \varphi_* \mathcal{O}_X$ есть одномерный пучок, соответствующий дивизору D , для которого $\deg D = -\chi(\mathcal{O}_X)$ ([15], р.354. Из $\chi(\mathcal{O}_X) > 0$ следует, что $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, а отсюда $b_1(X) = 0$. Канонический класс K_X равен некоторой кратности слоя пучка.

Строение корневых систем, соответствующих вырожденным слоям, дает возможность различать эллиптические и квазиэллиптические пучки. Мы по-прежнему будем предполагать, что пучок $\varphi: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ минимален, приведен и $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2$.

В дальнейшем мы упростим обозначения, используя для решеток, обозначавшихся раньше через $Q(R_F)$ и $D(R_F)$, символы $Q(F)$ и $P(F)$.

Теорема. Пучок $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ кривых арифметического рода 1 тогда и только тогда является квазиэллиптическим, когда удовлетворяются условия

- (1) $p = 2$ или 3 ,
- (2) для любого слоя F решетка $Q(F)$ p -элементарна;
- (3) $\sum_F n(F) = b_2(X) - 2$, где $n(F)$ — ранг корневой системы, соответствующей слою F (т.е. F состоит из $n(F) + 1$ компонент), а сумма распространена на все слои F пучка φ .

Утверждение очевидным образом достаточно доказать для якобиева расслоения пучка φ , так что мы можем дальше предполагать, что φ имеет сечение.

Мы уже видели, что квазиэллиптические пучки существуют только над полями характеристики 2 и 3. Для квазиэллиптического пучка группа сечений расслоения $X \times_{\hat{O}} \hat{O}$, где $\hat{O}$ — пополненное локальное кольцо точки базы, вкладывается в аддитивную группу и поэтому имеет период p . Но для любого слоя F группа $P(F)/Q(F)$, как мы видели, изоморфна группе компонент кратности этого слоя, т.е. некоторой факторгруппе группы $X \times_{\hat{O}} \hat{O}$. Поэтому она тоже имеет период p , т.е. выполнено условие 2). Наконец, группа $S_f/Q(R_f)$ изоморфна группе сечений расслоения φ . По тем же соображениям, что и выше, эта группа имеет период p . Так как она конечно порождена, то она конечна и $\text{rg } S_f = \text{rg } Q(R_f) = \sum \text{rg } Q(F) = \sum n(F)$. С другой стороны, ввиду следствия из предложения 2 §2, $\rho(X) = b_2(X)$, а $\text{rg } S_f = \rho - 2$. Отсюда вытекает условие 3).

Пусть теперь выполнены условия 1), 2) и 3). Мы предположим, что пучок φ — эллиптический, и придем к противоречию. В этом случае соотношение (2) можно переписать в виде

$$\sum (n(F) + 2 + d(F) - \varepsilon(F)) = b_2 + 2, \quad (7)$$

где сумма распространена на все слои, $\varepsilon(F) = b_1(F) = 1$ для слоев типа A_n и 0 в остальных случаях. (Заметим, что условие 3) для квазиэллиптического пучка следует из соотношения (2), так как в этом случае нет слоев типа A_n , потому что особая точка с разделенными касательными устойчива). Условие 3) и соотношение (7) дают

$$\sum (2 + d(F) - \varepsilon(F)) = 4. \quad (8)$$

Рассмотрим случай $p = 3$. Условию 2) удовлетворяют только корневые системы A_2 , E_6 и E_8 . Если число слоев типа A_2 и $*A_2$ равно k , а типа E_6 и $E_8 - l$, то (8) дает $k + 2l \leq 4$, а условие 3) $-b_2 - 2 \leq 2k + 8l$. Так как $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2$, то $e(X) \geq 24$ и $b_2 \geq 22$. Поэтому мы получаем: $k + 2l \leq 4$, $2k + 8l \geq 20$, что невозможно.

Пусть теперь $p = 2$. Очевидно, что здесь могут встретиться только корневые системы A_1 , D_{2n} , E_7 и E_8 . Для слоев типов D_{2n} , E_7 и E_8 $d(F) \geq 1$. Действительно, $d(F) = 0$ означало бы, что поле $K(\mathcal{U}_1)/K$ имеет нечетную степень, где K — поле частных пополненного локального кольца точки x , над которой лежит слой F . Но слои типа D_{2n} , E_7 и E_8 имеют компоненты четной кратности, которые не смогут стать однократными после накрытия базы нечетной степени. Следовательно, после накрытия базы, соответствующего расширению $K(\mathcal{U}_1)/K$, мы получим опять один из слоев этого типа. Но множество неособых точек этих слоев есть 2-группа и $\mathcal{U}_1$ должна редуцироваться в 0. Это противоречит тому, что, так как $l \neq 2$, она редуцируется мономорфно. Таким образом, каждый слой, имеющий тип, отличный от A_0 , $*A_0$, A_1 или $*A_1$, дает в сумме (8) слагаемое ≥ 3 . Поэтому такой слой может быть только один, а чтобы выполнялось условие 3) при $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2$, т.е. $b_2 > 22$, этот слой должен иметь тип D_{2n} . Таким образом, возможны только два случая: один слой типа D_{2n} с $d(F) = 2$ или один слой типа D_{2n} с $d(F) = 1$ и один слой типа A_0 .

Теорема будет выведена нами из следующего результата.

Лемма. Существует такое накрытие базы $B \rightarrow \mathbf{P}^1$, что расслоение $X \times_{\mathbf{P}^1} B \rightarrow B$ имеет только стабильные вырожденные слои (т.е. типа A_n), причем $\deg B/\mathbf{P}^1 = 2$, $B/\mathbf{P}^1$ разветвлено только в той точке, над которой расположен слой типа D_{2n} , и показатель такого ветвления в этой точке равен 1 (т.е. $G = G_1$, $G_2 = 1$).

Покажем, как из леммы вытекает теорема. Из формулы для рода накрытия вытекает, что род B равен 0, т.е. $B \simeq \mathbf{P}^1$. Расслоение $X \times_{\mathbf{P}^1} B \rightarrow B$ (точнее говоря, его гладкая минимальная модель) имеет не более 3-х слоев типа A_n . Докажем, что тогда их нет ни одного. Действительно, если вырожденные слои имеют вид A_{n_i} , $i = 1, \dots, r \leq 3$, то, согласно формуле (2), $\sum n_i + r = b_2 + 2$, а вместе с (8) это дает $r = 4$. Если же вырожденных слоев нет, то $X \times_{\mathbf{P}^1} B \simeq A \times B$, где A некоторая эллиптическая кривая. Тогда $p_g(X \times_{\mathbf{P}^1} B) = 0$, а значит, и $p_g(X) = 0$, т.е. $\chi(\mathcal{O}_X) \leq 1$.

Переходим к доказательству леммы. Заметим, что утверждение леммы носит локальный характер: если $\mathcal{O}$ — пополнение локального кольца той точки $P \in \mathbf{P}^1$, над которой лежит слой типа D_{2n} , а $\bar{X} = X \times_{\mathbf{P}^1} \mathcal{O}$, то достаточно доказать существование расширения

$\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ с нужными свойствами. Легко видеть, что существует накрытие B/P^1 , пополнение которого в точке, лежащей над P , совпадает с $\overline{\mathcal{O}}$. Оно удовлетворяет условиям леммы.

Возможны два случая: а) $j(P) = \infty$ и б) $j(P) \neq \infty$, где j — абсолютный инвариант расслоения X . Как известно, в случае а) стабильный слой, соответствующий слою F над точкой P , имеет тип A_m , а в случае б) он невырожден. Рассмотрим случай а). Кривая с $j(P) = \infty$ имеет над P или слой типа A_n , или приобретает такой слой над некоторым расширением $\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ степени 2. Действительно, в уравнении (4) § 2 $\lambda \neq 0$, так как при $\lambda = 0$ по формуле для j [28], стр. 303 мы получаем $j = 0$. Взяв $\lambda x + \mu$ за новую переменную u , мы приведем уравнение к виду

$$y^2 + uy = u^3 + au^2 + bu + c,$$

а сдвигом $u \rightarrow u + a$ сделаем $a = 0$. Преобразование $y \rightarrow y + \xi$ меняет b на $b + \xi^2 + \xi$. Поэтому мы можем добиться того, что $b = 0$, быть может, после расширения степени 2. В уравнении $y^2 + uy = u^3 + c$ $j = \frac{1}{c}$ (по формуле для j) и $j(P) = \infty$ означает, что $c(P) = 0$. Мы видим, что вырожденный слой F имеет двойную точку x с разделенными касательными, откуда легко следует, что определенный на $F \setminus x$ групповой закон дает группу, изоморфную G_m , а это соответствует слою типа A_n . Пусть $\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ — соответствующее расширение, а K и $\overline{K}$ — поля отношений колец $\mathcal{O}$ и $\overline{\mathcal{O}}$. Как мы уже видели, группа Галуа расширения $\overline{K}(\mathfrak{A}_l)/\overline{K}$ имеет порядок 1 или l . Кроме того, $[K(\mathfrak{A}_l) : K]$ четно, так как слой F имеет дикое ветвление. Отсюда следует, что $[K(\mathfrak{A}_l) : K] = 2$ или $2l$. Если эта степень равна 2, то $K = K(\mathfrak{A}_l)$, и из формулы (5) и того, что $d(F) = 1$ или 2, следует что $d(F) = 2$, $e_1 = 2$, $e_2 = 1$, так что лемма доказана. Если степень равна $2l$, то $K(\mathfrak{A}_l) \supset K$ и, значит, группа Галуа G расширения $K(\mathfrak{A}_l)/K$ имеет нормальный делитель H порядка l . Отсюда $G = H \times G_1$, где G_1 — группа ветвления и $|G_1| = 2$. Из формулы (5) и из предположения $d(F) = 1$ мы получаем, что

$$e_1 = \dots = e_r = 2, \quad e_{r+1} = 1, \quad \frac{1}{2l}(2r) = \frac{r}{l} = \frac{1}{2},$$

т.е. $r = \frac{l}{2}$. Так как l нечетно, то это противоречие. Аналогично из $d(f) = 2$ получаем, что $r = l$. Для поля $\overline{K}$ пусть $e_1 = \dots = e_s = 2$, $e_{s+1} = 1$. Нам надо найти связь между r и s . Простое

рассуждение показывает, что $r = ls$ (это можно получить непосредственно из определения или из подсчета дискриминанта поля $K(\mathfrak{A}_l) = L \otimes_K \overline{K} [L : K] = l$). Отсюда мы получаем, что $s = 1$, т.е. утверждение леммы в случае а).

В случае б) существует такое накрытие $\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, кривая $\overline{X}$ с невырожденным слоем над $\mathcal{O}$ и продолжение группы Галуа G накрытия $\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ на $\overline{X}$, что X бирационально изоморфно $\overline{X}/G$. Обозначим через A замкнутый слой $\overline{X}/\overline{\mathcal{O}}$. Группа G изоморфна подгруппе группы $\text{Aut } A$.

Случай б1): $\deg \overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O} = 2$. В частности, так обстоит дело, если кривая A не суперсингулярна, так как тогда $|\text{Aut } A| = 2$ (см. например, [28], стр. 304). Так как $|G| = 2$, то $e_0 = e_1 = 2$ и из формулы (5) следует, что $d(F) \geq 2$, а условие $d(F) = 2$ возможно только при $e_r = 1$, что и доказывает лемму в этом случае.

Случай б2): $\deg \overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O} > 2$. В частности, кривая A суперсингулярна. Тогда $|\text{Aut } A| = 24$ и [28], стр. 304 группа $\text{Aut } A$ является расширением группы кватернионов при помощи группы порядка 3. Мы докажем, что этот случай не может встретиться в ситуации, рассматриваемой в лемме. Предположим сначала, что $d(F) = 1$. Если бы $e_0 = e_1$, то уже первое слагаемое в формуле (5) было бы равно 2. Поэтому в нашей ситуации $e_0 \neq e_1$, а это возможно только при $\frac{e_0}{e_1} = 3$. В группе $\text{Aut } A$ существуют (с точностью до изоморфизма) только две подгруппы, порядок которых делится на 3 и четен: это вся группа $\text{Aut } A$ и абелева группа порядка 6. В последнем случае $e_0 = 6$, и если $e_1 = \dots = e_k = 2$, $e_{k+1} = 1$, то $d(F) = \frac{4k}{6} = \frac{2k}{3}$, что невозможно при $d(F) = 1$. Поэтому (при $d(F) = 1$) остается единственная возможность: $G \simeq \text{Aut } A$.

Таким образом, $[\overline{K} : K] = 24$, где $\overline{K}$ и K — поля частных колец $\overline{\mathcal{O}}$ и $\mathcal{O}$. При этом $K \supset L \supset L_0 \supset K$, $[L_0 : K] = 3$, $[L : L_0] = 4$ и $\text{Gal}(L/L_0) \simeq (\mathbf{Z}/2)^2$, а $[\overline{K} : K] = 2$. $L_0 = K(\tau)$, $\tau^3 = t$, где t — локальная униформизирующая в K , $L = L_0(u_1, u_2)$, $u_1^2 + u_1 = \alpha_1$, $u_2^2 + u_2 = \alpha_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in L$, $\overline{K} = L(\nu)$, $\nu^2 + \nu = \mu \in L$. Соотношение $d(F) = 1$ возможно только при

$$e_0 = 24, \quad e_1 = 8, \quad e_2 = e_3 = 2, \quad e_4 = 1.$$

Заметим, что тип вырожденного слоя в $\overline{X}/G$ зависит только от поля $\overline{K}/K$ и изоморфизма $\text{Gal}(\overline{K}/K) \simeq \text{Aut } A$. Действительно, в любой точке $x \in A$ мы можем взять за локальные параметры некоторый локальный параметр s точки x на A и униформизирующую

t из K , после чего действие стационарной подгруппы точки x в $k[[s, t]]$ уже будет определено. Пользуясь этим, мы ограничимся нахождением вырожденного слоя в $\bar{X}/G$ для случая $X = A \times \bar{\mathcal{O}}$. Для этого мы используем следующее глобальное рассуждение. Мы построим расширение $\mathcal{K}/k(\mathbf{P}^1)$, которое после пополнения в точке P совпадает с K и которое “минимально разветвлено”, т.е. имеет подполе $\Lambda_0 \supset k(\mathbf{P}^1)$, $[\Lambda_0:k(\mathbf{P}^1)] = 3$, разветвленное только в двух точках, причем $\bar{K}/\Lambda_0$ разветвлено в одной единственной точке — той, которая лежит над P . Выберем t как координату на $\mathbf{P}^1$, так что $k(\mathbf{P}^1) = k(t)$, и рассмотрим накрытие $B_0 \rightarrow \mathbf{P}^1$, $k(B_0) = \Lambda_0 = k(\tau)$, $\tau^3 = t$. Обозначим через $p(f)$ главную часть функции $f \in L$ в точке ∞ . Возьмем за a_1 и $a_2 \in \Lambda_0$ функции, регулярные вне ∞ , для которых $p(a_i) = p(\alpha_i)$ — они этим определяются однозначно. Положим $\Lambda = \Lambda_0(U_1, U_2)$, $U_i^2 + U_i = a_i$ и обозначим через B нормализацию B_0 в Λ . Тогда B разветвлено над B_0 только в точке $\tau = \infty$, а в ней полностью разветвлено, и мы обозначим через b прообраз этой точки. Пополнение Λ_0 в точке ∞ изоморфно L_0 , а Λ в $b - L$. Из известных нам значений чисел e_i для поля $\bar{K}$ легко получить, что для Λ/Λ_0 , $\bar{e}_0 = \bar{e}_1 = 4$, $\bar{e}_2 = 1$. Формула Гурвица для рода дает нам тогда, что род кривой B равен 0. Обозначим через π такую локальную униформизирующую в точке b , что $\Lambda = k(\pi)$, найдем $m \in \Lambda$, регулярное вне b и такое, что $p(m) = p(\mu)$, и положим $\mathcal{K} = \Lambda(V)$, $V^2 + V = m$. Поле $\mathcal{K}/\Lambda$ разветвлено только в точке b , а в ней полностью разветвлено. Нормализацию B в $\mathcal{K}$ обозначим через C , а прообраз точки b в G — через s . Очевидно, что пополнение $\mathcal{K}$ в точке s изоморфно $\bar{K}$. Отсюда следует, что $\mathcal{K}/k(t)$ является, как и $\bar{K}/K$, расширением Галуа и $\text{Gal}(\mathcal{K}/k(t)) = G \simeq \text{Aut } A$. Аналогично предыдущему, получим, что для поля $\mathcal{K}/\Lambda$ и точки b , $\bar{e}_0 = \bar{e}_1 = \bar{e}_2 = \bar{e}_3 = 2$, т.е. $m = \alpha_0\pi^3 + \alpha_1\pi^2 + \alpha_2\pi + \alpha_3$, $\alpha_i \in k$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ группу Галуа C/B и рассмотрим $C \times A/\mathfrak{G}$. Записав уравнение A в виде $y^2 + y = x^3$, а C — в виде $V^2 + V = \alpha_0\pi^3 + \alpha_1\pi^2 + \alpha_2\pi + \alpha_3$, мы можем представить действие образующей σ группы $\mathfrak{G}$ как $\sigma y = y + 1$, $\sigma V = V + 1$, $\sigma(x) = x$, $\sigma(\pi) = \pi$. Отсюда инварианты группы $\mathfrak{G}$ порождаются функциями x , π и $z = y + V$. Они связаны соотношением $z^2 + z = x^3 + \alpha_0\pi^3 + \alpha_1\pi^2 + \alpha_2\pi + \alpha_3$ третьей степени, откуда следует, что поверхность $C \times A/\mathfrak{G}$ рациональна. Тем более, поверхность $C \times A/G$ рациональна как образ рациональной поверхности при сепарабельном морфизме. Но тогда для вырожденного слоя F над точкой ∞ , $e(F) \leq 12$, что противоречит соотношению (1) с $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 2$. Этим закончен разбор случая $d(F) = 1$, $|G| > 2$.

Остается рассмотреть случай $d(F) = 2$. Тогда F является единственным вырожденным слоем и, как известно, X становится изоморфным $B \times A$ после подъема на некоторое минимальное накры-

тие $B \rightarrow \mathbf{P}^1$, за B можно взять нормализацию $\mathbf{P}^1$ в поле $K(\mathfrak{A}_3)$, $K = k(\mathbf{P}^1)$. Как мы видели, $\deg(B/\mathbf{P}^1) \mid 24$. Прежде всего, установим, что $\deg(B/\mathbf{P}^1)$ не делится на 3, т.е. является делителем 8. Действительно, в этом случае, накрытие $\overline{B}/\mathbf{P}^1$ должно было бы пропускаться через накрытие $\overline{B}/\mathbf{P}^1$ степени 3, которое имеет, по крайней мере, две точки ветвления, так что и $B/\mathbf{P}^1$ имеет по крайней мере 2 точки ветвления. Но каждая точка ветвления накрытия $B/\mathbf{P}^1$ дает вырожденный слой расслоения X . Действительно, если $H \subset \text{Gal}(B/\mathbf{P}^1)$ — стационарная подгруппа точки $b \in B$, то для простого числа $l \neq 2$ группа $\mathfrak{A}(\mathcal{O})_l = \mathfrak{A}(\overline{\mathcal{O}})_l^H$, где $\mathcal{O}$ — пополненное локальное кольцо точки b , а $\overline{\mathcal{O}}$ — соответствующей ей точки на $\mathbf{P}^1$. При этом $\mathfrak{A}(\mathcal{O})_l = A_l$, и если H нетривиально действует на A_l , то $|\mathfrak{A}(\mathcal{O})_l| < l^2$, а это и показывает, что слой вырожденный. Таким образом, мы приходим к противоречию с тем, что X имеет единственный вырожденный слой.

Наконец, последний случай — когда $\deg B/\mathbf{P}^1 = 8$ или 4, т.е. группа Галуа $B/\mathbf{P}^1$ есть группа кватернионов или $\mathbf{Z}/4$. Здесь $e_0 = e_1$, и первое же слагаемое в формуле (5) равно 2. Поэтому условие $d(F) = 2$ дает $e_2 = 1$. Это невозможно, так как $G/G_2 = G_1/G_2$ по общей теории имеет период 2. Лемма, а с нею и теорема доказаны.

Замечания. I. Теорема верна и для случая расслоения с базой рода $g > 0$, причем тривиальным образом. Достаточно только условия 3), так как соотношения, аналогичные 2) и 3), при $g > 1$ и приводят к противоречию, а при $g = 1$ показывают, что расслоение не имеет вырожденных слоев.

2. Теорема очевидно не верна для расслоения $\mathbf{P}^1 \times A$, когда все условия 1)–3) выполняются тавтологически. Она не верна и для рациональных поверхностей. Более того, в этом случае нельзя отличать квазиэллиптическое расслоение от эллиптического ни по корневой системе R_f , ни по решетке S_f . Например, эллиптическое расслоение, заданное уравнением $y^2 + y = x^3 + t$, и квазиэллиптическое с уравнением $y^2 = x^3 + t$ оба имеют единственный вырожденный слой при $t = \infty$ типа E_8 . Поэтому для обоих R_f есть E_8 , а $S_f = Q(E_8)$.

3. Хотелось бы “обобщить” Предложение на случай $p > 3$, т.е. доказать, что условия 2) и 3) не выполняются при $p > 3$. Однако это не так. Например, из того, что будет доказано дальше, вытекает существование следующих поверхностей типа $K3$: а) X над полем характеристики 11 и эллиптического пучка f на ней, для которого $S_f = A_{10}^2$ (имеется еще 2 слоя типа A_0 или 1 типа $*A_0$), б) X над полем характеристики 7 и пучка f с $S_{f_1} = E_8 \oplus A_6^2$. Можно показать, что это единственные типы поверхности типа $K3$, на которых есть

эллиптический пучок, удовлетворяющий условиям 2) и 3) теоремы. Не трудно перечислить типы вырожденных слоев, которые могут а priori встретиться на произвольной эллиптической поверхности с таким свойством, но мы не знаем, какие из них действительно реализуются.

В качестве иллюстрации теоремы докажем следующее утверждение, уточняющее теорему из § 3.

Предложение. Если на поверхности X типа $K3$ существует квазиэллиптический пучок, то на ней существует и эллиптический пучок.

Мы докажем предложение, построив на X такую систему -2 кривых R , что соответствующая диаграмма относится к одному из типов расширенных диаграмм $*A_1, *A_2, D_{2n}, E_6, E_7$ или E_8 и не удовлетворяет условию 2) теоремы. Тогда линейная комбинация кривых из R , соответствующая максимальному корню, обладает тем свойством, что $D > 0, DC_i = 0$ для всех $C_i \in R$, откуда $D^2 = 0$. Согласно предложению 2 § 3, D определяет пучок кривых арифметического рода 1, который, согласно теореме (необходимость условий 2), будет эллиптическим. Для конструкции системы R мы начнем с системы R_0 , соответствующей вырожденному слою (или слоям) заданного квазиэллиптического пучка, и присоединим к ней кривую ξ , состоящую из острий этого пучка. Согласно теореме § 2, ξ — гладкая рациональная кривая и, значит, $\xi^2 = -2$. Согласно той же теореме, $\xi D = p$. Кроме того, очевидно, что ξ инвариантна относительно сдвигов на локальные сечения в окрестности слоя. Поэтому ξ пересекает D по компоненте, инвариантной относительно действия группы $P(R_0)/Q(R_0)$, соответствующей корневой системе R_0 . Отсюда можно для всех слоев (кроме E_8 , когда группа $P(R_0)/Q(R_0)$ равна 1) однозначно определить, как ξ пересекает D : по “центральной компоненте”, входящей в D с кратностью p , причем пересечение трансверсально. Например, при $p = 2$, система $E_7 \cup \xi$ определяется графом.

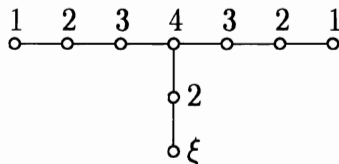


Рис. 1

В системе $R_0 \cup \xi$ мы выберем подсистему R_1 , которая опять определяет пучок кривых рода 1, если она тоже определяет квазиэллиптический пучок, перейдем от нее к системе R_2 и т.д. пока не придем к нужной системе R . Этот процесс мы будем записывать как $R_0 \Rightarrow R_1, R_1 \Rightarrow R_2$ и т.д.

Заметим, что в любой характеристике (2 или 3) для любых слоев

$$\sum_1^4 F_i \Rightarrow D_4 \quad (9)$$

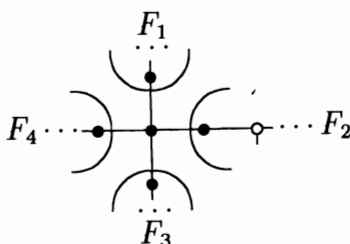


Рис. 2

$$\sum_1^3 F_i \Rightarrow E_6, \quad \text{если } F_i \neq {}^*A_1, {}^*A_2 \quad (10)$$

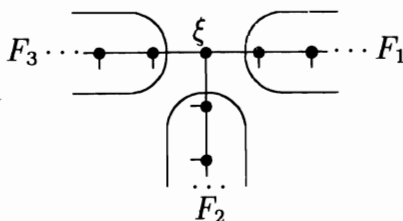


Рис. 3

Черными точками отмечается новая система R_1 .

Теперь рассмотрим отдельно случаи $p = 2$ и 3.

$p = 3$

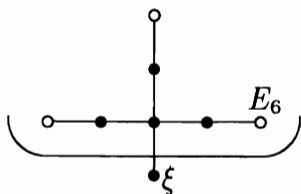


Рис. 4

$$R = {}^*A_2, E_6 \text{ или } E_8$$

$$E_6 \Rightarrow D_4$$

Число слоев не может быть < 3 , ввиду условия $\sum n_i = 20$, $n_i \leq 8$. Согласно (9), число слоев 3, а согласно (10), один из них есть ${}^*A_2$, иначе мы приходим к E_6 и к D_4 . Для оставшихся 2-х слоев $n_1 + n_2 = 18$, что невозможно, так как $n_i \leq 8$.

$$p = 2$$

$$R = {}^*A_1, D_{2n}, E_7 \text{ или } E_8$$

$$E_7 \Rightarrow E_6$$

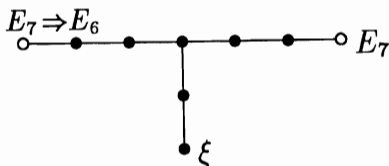


Рис. 5

Аналогично $D_{2n} \Rightarrow E_7$ при $n \geq 4$. Остается рассмотреть возможности $R = {}^*A_1, D_4, D_6, E_8$. Кроме слоя D_4 , должно быть еще, по крайней мере, 2 слоя (ввиду $\sum n_i = 20$, $n_i = 8$). Но $D_4 \oplus F_1 \oplus F_2 \Rightarrow D_5$,

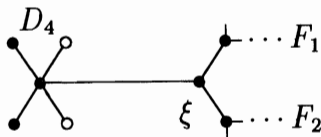


Рис. 6

поэтому и слой D_4 можно исключить. Тогда согласно (9), число слоев равно 3, а согласно (10), один из них должен иметь тип $*A_1$. Для оставшихся двух слоев $n_1 + n_2 = 19$, что невозможно, так как $n_i \leq 8$. Предложение доказано.

§5. Суперсингулярные и элементарные поверхности типа $K3$

Поверхность X типа $K3$ называется *суперсингулярной*, если $\text{rg Pic } X = 22$. Так как $b_2(X) = 22$, то равенство $\text{rg Pic } X = 22$ означает, что $S_X \otimes \mathbf{Q}_l = H_{\text{et}}^2(X, \mathbf{Q}_l)$, где $S_X = \text{Pic } X$, т.е. “все циклы являются алгебраическими”. Другой вариант определения понятия суперсингулярности будет обсужден в §9.

Очевидно, что над полем характеристики 0 не существует суперсингулярных поверхностей типа $K3$: в этом случае $\text{rg Pic } X \leq 20$. Во многих отношениях эти поверхности являются типичным феноменом геометрии над полями конечной характеристики.

Простейший пример суперсингулярной поверхности типа $K3$ — это куммерова поверхность X , соответствующая абелеву многообразию $A = C \times C$, где C — суперсингулярная эллиптическая кривая и характеристика $p \neq 2$. Действительно, $S_A = (C \times c)\mathbf{Z} \oplus (C \times c)\mathbf{Z} \oplus \text{End } C$, а так как в данном случае $\text{rg End } C = 4$, то $\text{rg } S_A = 6$. С другой стороны, $\text{rg } S_X = \text{rg } A + 16$ (вклеиваются 16 прямых, соответствующих неподвижным точкам автоморфизма $a \rightarrow -a$ на A).

Другой тип примеров (взаимоотношения между ними мы обсудим позже) — это унирациональные поверхности типа $K3$. Согласно замечанию, сделанному после Предложения 2 в §2, унирациональная поверхность суперсингулярна. Самый интересный пример унирациональной и не рациональной поверхности принадлежит Шиоде [39]. Это гладкая поверхность в $\mathbf{P}^3$ с уравнением

$$x_0^p x_1 + x_1^p x_0 = x_2^p x_3 + x_3^p x_2. \quad (1)$$

Преобразованием $x_0 = u_0 + u_1$, $x_1 = u_0 - u_1$, $x_2 = u_2 + u_3$, $x_3 = u_2 - u_3$ она приводится к “поверхности Ферма”

$$u_0^{p+1} - u_1^{p+1} = u_2^{p+1} - u_3^{p+1}. \quad (2)$$

Унирациональность поверхности (1) становится очевидной, если записать в неоднородной форме

$$x^p y + y^p x = z^p + z.$$

Очевидно, что над полем $k(y)$ этим определяется групповое многообразие G с законом

$$(x_1, z_1) + (x_2, z_2) = (x_1 + x_2, z_1 + z_2).$$

Так как отображение $(x, z) \rightarrow z$ определяет гомоморфизм $G \rightarrow G_a$, то G — форма аддитивной группы. Ввиду того, что сепарабельных форм у аддитивной группы нет, G становится изоморфной G_a над полем $k(y^{1/p^m})$ при некотором m . Таким образом,

$$k(x, y, z) \subset k(x, y^{1/p^m}, z) \simeq k(y^{1/p^m})(G_a).$$

Можно легко и в явном виде написать соответствующее преобразование. Положив $y = t^p$, запишем уравнение в виде

$$(xt - z)^p = z - xt^{p^2}.$$

Преобразование $xt - z = u$, $z - xt^{p^2} = v$ переводит это уравнение в $u^p = v$, так что $k(x, t, z) = k(u, t)$.

Уравнение (1), конечно, не всегда определяет поверхность типа $K3$ (лишь при $p = 3$). Но если $p \equiv 3 \pmod{4}$, то, полагая в (2) $u_i^{\frac{p+1}{4}} = v_i$, мы получаем гладкую поверхность 4-й степени, т.е. поверхность типа $K3$. Как показал Шиода [40], полученная поверхность 4-й степени совпадает с рассмотренной выше куммеровой поверхностью (при $p \equiv 3 \pmod{4}$). Он показал также, что и при $p \equiv 1 \pmod{4}$ суперсингулярная куммерова поверхность типа $K3$ унирациональна [41].

Эти и некоторые другие примеры делают интересным вопрос: не будет ли любая суперсингулярная поверхность типа $K3$ унирациональна? Позже мы докажем, что это так над полем характеристики 2.

Суперсингулярная поверхность X типа $K3$ над полем характеристики p называется *элементарной*, если ее решетка $S_X = \text{Pic } X$ является p -элементарной. В §8 мы увидим, что элементарность уже следует из суперсингулярности, так что это весьма временное определение.

Примером элементарной поверхности является такая унирациональная поверхность X типа $K3$, что существует рациональное отображение $\varphi: \mathbf{P}^2 \rightarrow X$, несепарабельное и степени p . Мы уже видели, что она суперсингулярна. То что решетка S_X p -элементарна, вытекает из предложения в §1. Действительно, пусть $\varphi: \mathbf{P}^2 \rightarrow X$ — рациональное отображение, существующее по условию. Пусть Y

— такая поверхность и $f: Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ — такой бирациональный морфизм, что $\pi: Y \rightarrow X$ является морфизмом. Так как f разлагается в композицию σ -процессов, то $T_Y = \text{Pic } Y$ является унимодулярной решеткой: более точно, $T_Y = I \oplus I(-1)^m$, если f разлагается на m σ -процессов. Операции прямого и обратного образа дают гомоморфизмы $\pi: S_X \rightarrow T_Y$ и $\pi: T_Y \rightarrow S_X$, удовлетворяющие условиям предложения.

К элементарным поверхностям типа $K3$ может быть применена классификация p -элементарных решеток из §1, которая показывает, что для таких поверхностей решетка S_X однозначно определяется при $p \neq 2$ инвариантом $s(d(S_X) = p^{-s})$, а при $p = 2$, сверх того, еще тем, принадлежит ли она к I или II типу. Сейчас мы покажем, как отсюда вытекают некоторые следствия о геометрии элементарных поверхностей типа $K3$ над полем характеристики 2.

Теорема. На всякой элементарной поверхности типа $K3$ над полем характеристики 2 существует квазиэллиптический пучок.

Нам достаточно построить такой элемент $f \in S = \text{Pic } X$, что $f^2 = 0$ и решетка S_f удовлетворяет условиям теоремы из §4. Так как, согласно теореме из §1, решетка S однозначно определяется тем, что она гиперболична, 2-элементарна, принадлежит к I или II типу и дискриминант ее равен $-2^{2\sigma}$, то достаточно для любого значения σ , $1 \leq \sigma \leq 10$ предъявить решетку с такими свойствами и с таким вектором f . Для решеток II типа можно положить $S = U_2 \oplus I(-2)^{2\sigma-2} \oplus Q(D_{22-2\sigma})$ (при $\sigma \leq 7$ можно заменить $Q(D_{22-2\sigma})$ на $Q(D_{14-2\sigma}) \oplus Q(E_8)$, а при $\sigma \leq 3$ — на $Q(D_{6-2\sigma}) \oplus Q(E_8^2)$). Вот соответствующий список для решеток I типа. Предполагается, что f содержится в слагаемом U^2 или $U^2(2)$ (мы берем те решетки, которые приведены при доказательстве теоремы из §1).

σ	1	2	3	4
S	$U_2 \oplus Q(D_{20})$	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus D_{16})$	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus D_8^2)$	$U_2 \oplus Q(D_4^3 \oplus D_8)$
R_f	D_{20}	$D_4 \oplus D_{16}$	$D_4 \oplus D_8^2$	$D_4^3 \oplus D_8$
σ	5	6	7	8
S	$U_2 \oplus Q(D_4^5)$	$U_2 \oplus Q(D_4^3 \oplus D_8)$	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus D_8^2)$	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus D_{16})$
R_f	D_4^5	$D_4^3 \oplus A_1^8$	$D_4 \oplus A_1^{16}$	$D_4 \oplus A_1^{16}$
σ	9	10		
S	$U_2 \oplus \widetilde{Q(D_{20})}$	$U_2(2) \oplus \widetilde{Q(D_{20})}$		
R_f	A_1^{20}	A_1^{20}		

Замечания. 1. Довольно сложные рассуждения в доказательстве теоремы из §4 не нужны, если мы хотим только проверить, что приведенные в этой таблице пучки f не являются эллиптическими: для них очевидным образом не выполняется уже соотношение (2) §4.

2. Можно предложить более простое доказательство (см. [8], стр. 851. На векторном пространстве $S/2S^*$ определена невырожденная билинейная форма со значениями в $\mathbb{F}_2$. Ввиду четности S , эта форма кососимметрическая и, значит, $S/2S^*$ содержит изотропное подпространство половинной размерности. Обозначим через M прообраз этого подпространства: $S \supset M \supset 2S$. По конструкции $M = N(2)$, где N — некоторая целочисленная решетка, и простой подсчет дискриминантов показывает, что N — унимодулярна. По общей теории унимодулярных решеток $N = I \oplus I(-1)^{10}$, т.е. $M = I(2) \oplus I(-2)^{19}$. Пусть базис, соответствующий этому разложению, есть $e_1, \dots, e_{20}$, $e_1 = 2$, $e_i^2 = -2$, $i > 1$. Вектор $f = e_1 + e_0$ определяет пучок кривых рода 1, для которого очень легко проверяются условия 2) и 3) Предложения. Таким образом, это — квазиэллиптический пучок. Однако такое доказательство требует ссылки на теорему из §4 во всей общности.

3. Ослабленный аналог этой теоремы имеет место и для характеристики 3: на всякой элементарной поверхности X типа $K3$ с $\sigma \leq 6$ при $p = 3$ существует квазиэллиптический пучок.

Мы сразу напомним соответствующие решетки.

σ	1	2	3
S	$U_2 \oplus Q(A_2^3 \oplus E_8^2)$	$U_2 \oplus Q(A_2^3 \oplus E_6 \oplus E_8)$	$U_2 \oplus Q(A_2^6 \oplus E_8^2)$
σ	4	5	6
S	$U_2 \oplus Q(A_2^7 \oplus E_6)$	$U_2 \oplus Q(A_2^{10})$	$U_2(3) \oplus Q(A_2^{10})$

Легко показать, что при $\sigma > 6$, $p = 3$ квазиэллиптического пучка не существует.

4. Как видно из приведенных таблиц, при $p = 2$, $\sigma < 10$ и при $p = 3$, $\sigma < 6$ существует квазиэллиптический пучок с сечением. Как легко доказать, в оставшихся случаях такого пучка не существует.

Следствие. Элементарная поверхность типа КЗ над полем характеристики 2 унирациональна.

Пусть $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — квазиэллиптический пучок, существование которого установлено предложением, и ξ — кривая, образованная остриями его слоев. Как доказано в §2, морфизм $\varphi : X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — несепарабелен и имеет степень 2. Положим $Y = X \times_{\mathbf{P}^1} \xi$. Проекция $Y \rightarrow X$ — тоже несепарабельное отображение степени 2. С другой стороны, на Y определен пучок $Y \rightarrow \xi$, у которого все слои рациональны, имеют особую точку и определяют сечение. Разрешив эту особую точку (например, на общем слое), мы получаем поверхность $\tilde{Y}$ с пучком гладких рациональных кривых, которая тем самым рациональна. Рациональный морфизм $\tilde{Y} \rightarrow X$ свидетельствует о том, что поверхность X унирациональна.

Предложение. Для элементарной поверхности X типа КЗ над полем характеристики 2 решетка принадлежит к I типу.

Предположим, что решетка S принадлежит ко II типу. Если $d(S) = -2^{2\sigma}$, то S изоморфна, согласно теореме из §1, решетке $U_2 \oplus I(-2)^{2\sigma-2} \oplus Q(D_{22-2\sigma})$ (согласно той же теореме, всегда $\sigma > 1$). Элемент $f \in U_2$ с $f^2 = 0$ определяет пучок кривых рода 1, который удовлетворяет условиям теоремы из §4 и поэтому должен быть квазиэллиптическим. Этот пучок имеет $2\sigma - 2$ приводимых слоев типа $*A_1$ и один слой типа $D_{22-2\sigma}$ (при $\sigma = 11$ — ни одного). Пусть ξ — кривая, образованная особыми точками слоев. Как мы знаем, $\xi \cdot f = 2$. Пусть, в соответствии с разложением решетки, $\xi = \xi_0 + \sum \xi_i + \bar{\xi}$, $\xi_0 \in U_2$, $\xi_i \in I(-2)$, $\bar{\xi} \in Q(D_{22-2\sigma})$. Если C, C' — компоненты i -го слоя $*A_1$, то $\xi C = \xi C' = 1$, а поэтому и $\xi_i C = 1$. Но в решетке $I(-2) = \mathbf{Z}C$, $C^2 = -2$ нет элемента с таким свойством. Это противоречие доказывает предложение.

§6. Векторные поля

Одним из центральных вопросов теории поверхностей типа $K3$ является изучение их деформаций и, в частности, вычисление “числа модулей”. Эта проблема связана с вычислением размерностей групп $H^1(X, \Theta)$ и $H^2(X, \Theta)$, где Θ — касательное расслоение поверхности X . Согласно теореме Римана–Роха, $\dim H^0(X, \Theta) - \dim H^1(X, \Theta) + \dim H^2(X, \Theta) = c_2(\Theta) = -20$ (c_2 — второй характеристический класс). С другой стороны, по двойственности, $\dim H^2(X, \Theta) = \dim H^0(X, \Theta)$ и, значит, вопрос сводится к вычислению размерности $H^0(X, \Theta)$, т.е. пространства векторных полей на поверхности X . В случае характеристики 0, $H^0(X, \Theta) = 0$ ([1], стр. 179). Мы докажем, что то же верно и для полей любой характеристики. Отсюда $\dim H^1(X, \Theta) = 20$, $\dim H^2(X, \Theta) = 0$, откуда следует, что существует гладкое формальное многообразие модулей размерности 20. Тем самым будут определены и числа $h^{i,j} = \dim H^j(X, \Omega^i)$. Для этого надо воспользоваться тем, что для поверхности типа $K3$, $\Theta \simeq \Omega$, а $H^1(X, \mathcal{O}) = k$, кроме того, очевидными соображениями двойственности и соотношением $\sum (-1)^{i+j} h^{i,j} = c_2 = 24$. В результате получаем следующую таблицу чисел $h^{i,j}$

j			
1	0	1	
0	20	0	
1	0	1	i

Основой доказательства соотношения $H^0(X, \Theta) = 0$ для поверхности X типа $K3$ является тот факт, что поверхность типа $K3$, на которой существует ненулевое регулярное векторное поле, является элементарной. Этот результат доказан в [7]. Мы приведем здесь набросок доказательства, излагая подробно только те рассуждения, которые в сравнении с изложением в [7] удалось упростить. Пропущенные подробности все содержатся в [7].

Основой является операция факторизации алгебраического многообразия X по рациональному векторному полю D . Векторное поле называется p -замкнутым, если $D^p = \alpha D$, где $\alpha \in k(X)$. На каждом открытом аффинном множестве $U \subset X$ рассматривается кольцо инвариантов $k[U]^D = \{g \in k[U], Dg = 0\}$ и аффинное многообразие $U^D = \text{Спец } k[U]^D$. Эти многообразия склеиваются в еди-

ное многообразие, которое обозначается X^D . Определен конечный несепарабельный морфизм $\pi_D : X \rightarrow X^D$ степени p . Наоборот, каждый такой морфизм $\varphi : X \rightarrow Y$ для нормального многообразия Y представим в виде $\varphi = \pi_D$, где D — некоторое p -замкнутое рациональное векторное поле на X .

Если X — полное многообразие, то p -алгебра Ли $H^0(X, \Theta)$ конечномерна и поэтому в ней существует одномерная p -подалгебра Ли, т.е. элемент $D \in H^0(X, \Theta)$, для которого $D^p = 0$ или $D^p = D$. В первом случае векторное поле называется полем *аддитивного* типа, во втором — *мультипликативного*. В обоих случаях оно p -замкнуто. Поэтому, изучая многообразия X с $H^0(X, \Theta) \neq 0$, мы можем всегда предполагать, что на них существует векторное поле аддитивного или мультипликативного типа, а тем самым p -замкнутое.

Если X — многообразие, гладкое в точке x , то определим росток дивизора $C_x = \text{н.о.д.}(D(f), f \in \mathcal{O}_x)$. Для разных простых точек эти ростки склеиваются в единый дивизор, который называется дивизором поля D и обозначается (D) . Если u — локальное уравнение (D) , то локально $D = uD_1$, где D_1 регулярно и обращается в 0 на подмножестве коразмерности ≥ 2 .

Если векторное поле D регулярно в точке x и не обращается в ней в 0 (т.е. $D\mathcal{O}_x \not\subset \mathfrak{m}_x$), то локально оно может быть представлено в очень простой форме [38], стр. 11. Именно, ввиду условия $D\mathcal{O}_x \not\subset \mathfrak{m}_x$, существует $u \in \mathfrak{m}_x$ с $D(u) \notin \mathfrak{m}_x$. Легко видеть, что $u \notin \mathfrak{m}_x^2$. Умножая в случае необходимости D на функцию $h \in \mathcal{O}_x^*$, можно считать, что $D(u) = 1$, откуда, конечно, следует, что $D^p = 0$. Положим $A = \mathcal{O}_x^D + \mathcal{O}_x^D u + \dots + \mathcal{O}_x^D u^{p-1}$. Для $g(T) \in \mathcal{O}_x^D[T]$, $D(g(u)) = g'(u)$. Отсюда легко следует, что $A = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{O}_x^D u^i$. Докажем, что $A = \mathcal{O}_x$. Пусть $v \in \mathcal{O}_x$. Так как $D^p = 0$, то существует минимальное $k \geq 0$, для которого $D^k v \in A$. Пусть $D^k v = g(u)$. Тогда $0 = D^{p-k}(g(u)) = g^{(p-k)}(u)$, откуда $g(T) = h^{(k)}(T)$, $h \in \mathcal{O}_x^D[T]$. Таким образом, $D^k v = D^k(h(u))$, т.е. $DD^{k-1}(v - h(u)) = 0$,

$$D^{k-1}(v - h(u)) = w \in \mathcal{O}_x^D, \quad D^{k-1}v = h^{(k-1)}(u) + w \in A,$$

в противоречии с минимальностью k . Выбрав теперь систему локальных параметров $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_x$ так что $u_1 = u$ и положив $u_i = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}u + \dots + a_{p-1}^{(i)}u^{p-1}$, $a_k^{(i)} \in \mathcal{O}_x^D$, мы получаем, что $u_i \equiv a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x)u(\mathfrak{m}_x^2)$, откуда следует, что $u, a_0^{(2)}, \dots, a_0^{(n)}$ образуют систему локальных параметров. Иными словами, найдена такая система локальных параметров $t_1, \dots, t_n$, что $D(t_1) = 1$, $D(t_i) = 0$

при $i > 1$. Если $\hat{\mathcal{O}}_x = k[[t_1, \dots, t_n]]$, то очевидно, что $D = \frac{\partial}{\partial t_1}$ и $\hat{\mathcal{O}}_x^D = k[[t_1^p, t_2, \dots, t_n]]$. В частности, получается доказательство следующего результата.

Лемма 1. Если векторное поле D регулярно и не обращается в 0 в простой точке $x \in X$, то точка $\pi_D(x) \in X^D$ тоже простая.

Как заметил Делинь, путем подобных же рассуждений можно доказать и обращение этого утверждения:

Лемма 2. Если точки $x \in X$ и $\pi_D(x) \in X^D$ — простые, то векторное поле D можно умножить на такую функцию, что оно будет регулярно и не обращаться в 0 в точке x .

Мы можем предполагать, что векторное поле D регулярно в точке x и не обращается в 0 вне некоторого подмножества Z ко-размерности ≥ 2 . По условию, $\mathcal{O}_x$ и $\mathcal{O}_x^D$ — регулярные локальные кольца. Отсюда следует [30], стр. 88, что $\mathcal{O}_x$ — свободный модуль над $\mathcal{O}_x^D$: $\mathcal{O}_x = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{O}_x^D a^i$. Тогда и для любой точки $y \in \text{Spec } \mathcal{O}_x$, $\mathcal{O}_y = \bigoplus \mathcal{O}_y^D a_i$. Для $y \notin Z$ нами построен другой такой базис при доказательстве леммы 1: $1, u, \dots, u^{p-1}$. Очевидно, что $\det(D^i(u^j)) \notin m_y$, так как матрица $D^i(u^j)$ — треугольная с ненулевыми постоянными элементами на диагонали. Отсюда легко следует, что это верно и для любого другого базиса, в частности, $\det(D^i(a_j)) \notin m_y$. Но элемент $\det(D^i(a_j))$, не обращающийся в 0 вне Z , $\text{codim } Z \geq 2$, не обращается в 0 и в x : иначе в матрице $(D^i(a_j)(x))$ была бы целая строка нулей.

Если векторное поле D в каждой точке может быть умножено на функцию так, что оно станет регулярным и не обращающимся в 0, то говорят, что у него дивизориальные особенности. В этом случае оно определяет линейное расслоение $L \subset \Theta$, соответствующее дивизору D . Как мы видели, многообразие X^D гладко. Мы имеем последовательность морфизмов

$$X \xrightarrow{\pi_D} X^D \rightarrow X^{(p)} \xrightarrow{\pi_D^{(p)}} (X^D)^{(p)},$$

где $X \rightarrow X^{(p)}$ — абсолютное отображение Фробениуса. Для каждой точки $x \in X$ мы получаем точную последовательность:

$$0 \rightarrow L_x \rightarrow \Theta_x \rightarrow \pi_D^* \Theta_{\pi(x)} \rightarrow L_{\pi(x)}^{(p)} \rightarrow 0,$$

откуда, переходом к детерминантам, получаем формулу:

$$K_X = \pi_D^* K_{X^D} + (p-1)(D). \quad (1)$$

Если векторное поле регулярно на X , то $(D) \geq 0$. Из (1) тогда легко следует, что если для X^D возможно разрешение особенностей (например, $\dim X = 2$), то

$$P_m(X^D) \leq P_m(X), \quad (2)$$

где $P_m(X)$ — кратные роды (см. [7], стр. 1280).

Если D обращается в 0 в точке $x \in X$, то точка $\pi_D(x) \in X^D$, вообще говоря, — особая. В случае поверхностей эти особые точки несколько напоминают “факториальные особенности” в характеристике 0, ввиду следующего результата.

Лемма 3. Если $\dim X = 2$ и X гладко в точке x , то особая точка $\pi_D(x) \in X^D$ разрешается в дерево рациональных, односвязных кривых.

(Доказательство см. в [7], на стр. 1284).

Предложение 1. Если X — поверхность типа $K3$ и D — регулярное векторное поле на X , то X^D — рациональная поверхность.

Доказательство использует следующее простое утверждение:

Лемма 4. Пусть Y — полная нормальная поверхность, S — множество ее особых точек. Если $K_{Y-S} = 0$ и кодаировская размерность κ поверхности Y равна 0, то минимальное разрешение особых точек S является минимальной поверхностью.

(Доказательство содержится в [7], стр. 1284).

Доказательство предложения 1. Пусть $Y \rightarrow X^D$ — минимальное разрешение особых точек поверхности X^D . Применим к Y классификацию поверхностей по их кодаировской размерности κ (см., например [15]). Из неравенств (2) следует, что $\kappa = -1$ или 0. Если $\kappa = -1$, то Y — рациональная или линейчатая поверхность. Она не может быть нерациональной линейчатой, так как для нее $q = \frac{1}{2}b_1 = 0$, ввиду того, что $b_1 = 0$ для X , а $\pi_D : X \rightarrow X^D$ является гомеоморфизмом этальных топологий. Таким образом, при $\kappa = -1$ теорема верна и нам остается проверить, что случай $\kappa = 0$ невозможен. Если $\kappa = 0$, то по лемме 4 Y является минимальной поверхностью. Согласно классификации [15], стр. 373, в этом случае

$$e(Y) \leq 24, \quad (3)$$

где e — характеристика Эйлера–Пуанкаре. С другой стороны, $e(Y) = e(X^D) + \sum (e(F_i) - 1)$, где F_i — циклы, стягиваемые морфизмом $\varphi : Y \rightarrow X^D$. Наконец, $e(X^D) = e(X) = 24$. Согласно

лемме 3, F_i — дерево, и если число его неприводимых компонент n_i , то $e(F_i) - 1 = n_i$. В результате,

$$e(Y) = 24 + \sum n_i,$$

откуда в сочетании с (3) мы получаем, что все $n_i = 0$, т.е. X^D — гладко. Согласно лемме 2, откуда вытекает, что D имеет только дивизориальные особенности. Формула (1) вместе с тем, что $K_X = 0$, $mK_Y = 0$ при некотором $m > 0$, дает $(D) = 0$, т.е. D вообще не имеет особенностей. Такое векторное поле не может существовать на X , так как $e(X) \neq 0$.

Следствие. Если на поверхности X типа $K3$ существует ненулевое регулярное векторное поле D , то X элементарна.

Из существования морфизмов

$$X \xrightarrow{\pi_D} X^D \rightarrow X^{(p)}$$

следует, что существует несепарабельный морфизм степени p :

$$(X^D)^{(p-1)} \rightarrow X,$$

где $(X^D)^{(p-1)}$ получается из X^D при помощи отображения, обратного абсолютному Фробениусу. Так как поверхность X^D рациональна, то это же верно и для $(X^D)^{(p-1)}$, а значит X , как мы видели в §5, элементарна.

Доказательству основного результата этого параграфа — соотношения $H^0(X, \Theta) = 0$ для поверхности X типа $K3$ — мы предположим несколько замечаний.

Все эти замечания основываются на том, что на суперсингулярной поверхности X типа $K3$ имеется много пучков арифметического рода 1. Действительно, согласно теореме в §3, такой пучок определяется элементом $x \in S_X$ с $x^2 = 0$. Так как $\text{rg } S_X = 22$ и решетка $S_X \otimes \mathbb{R}$ неопределенная, то по общей теории квадратичных форм, такой вектор обязательно существует. Теорема в §4 дает нам, кроме того, возможность выяснить, будет ли соответствующее расслоение эллиптическим или квазиэллиптическим.

1. Если $f: X \rightarrow B$ — гладкое расслоение на кривые любого рода, то имеет место точная последовательность векторных расслоений

$$0 \rightarrow \Theta_{X/B} \rightarrow \Theta_X \rightarrow f^*(\Theta_B) \rightarrow 0.$$

Для $D \in H^0(X, \Theta_X)$, его образ в $H^0(X, f^*(\Theta_B))$ всегда имеет вид $f^*(\Delta)$, где $\Delta \in H^0(B, \Theta_B)$, это легко следует из того, что f — собственный морфизм со связными слоями (см. [7], стр. 1286). Векторное поле Δ на B называется *нормальной компонентой* векторного поля D и обозначается D_N . Простая проверка показывает [7], стр. 1286, что D_N продолжается как регулярное векторное поле и на те точки $b \in B$, для которых слой $f^{-1}(b)$ вырожденный, в этом случае $D_N(b) = 0$. Это дает сильные ограничения: если $B = \mathbf{P}^1$, то ненулевое векторное поле на B может обращаться в 0 не более, чем в 2-х точках, поэтому если расслоение имеет 3 вырожденных слоя, то нормальная компонента регулярного векторного поля на X равна 0, т.е. поле касательно к слоям.

2. Пусть $f : X \rightarrow B$ — расслоение на эллиптические кривые (причем база B не обязательно полная), D — регулярное векторное поле на X и s_0 — некоторое сечение, которое определяет групповой закон на множестве неособых точек любого слоя F_b так, что $s_0(b)$ является нулем этой группы. Если s некоторое другое сечение, то сдвиг на s определяет автоморфизм t_s поверхности X . Тогда $t_s D = D$. Действительно, при ограничении на каждый невырожденный слой F , D определяет сечение $\bar{D}$ инвариантного относительно сдвигов расслоения $E = \Theta_X|_F$, а сдвиг t_s превращается в t_α на точку $\alpha \in F$. Очевидно, что сдвиг не меняет нормальной компоненты и поэтому $t_\alpha \bar{D} = \bar{D} + V(\alpha)$, где $V(\alpha)$ — касательно к слою F . Таким образом, мы определяем отображение $\alpha \rightarrow V(\alpha) \in H^0(\Theta_{X/B})$. Рассматривая формальную окрестность (или гензелизацию) слоя F , мы можем считать, что через каждую точку слоя проходит сечение и мы получаем морфизм $F \rightarrow H^0(\Theta_{X/B})$, который очевидно должен быть нулевым. Так как $t_s D$ и D совпадают при ограничении на любой невырожденный слой, то $t_s D = D$.

Это замечание имеет несколько полезных приложений. Прежде всего, пусть C — компонента вырожденного слоя F_b . Так как нормальная компонента D_N регулярного на X векторного поля D обращается в 0 в точке b , то D касательно к C . Если же $U \subset F_b$ — множество неособых точек слоя F_b , то рассуждая так же, как выше, мы получим, что $D|_U$ инвариантно относительно имеющейся на U групповой структуры.

Второе приложение заключается в том, что регулярное векторное поле D , определенное на эллиптическом расслоении $X \rightarrow B$, переносится на его якобиево расслоение. Это следует из того, что якобиево расслоение строится факторизацией при помощи сдвигов, относительно которых D , как мы видели, инвариантно. Если $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — эллиптический пучок на поверхности типа $K3$, то его якобиево

расслоение тоже определяет поверхность типа $K3$. Поэтому утверждение $H^0(X, \Theta_X) = 0$ для поверхностей типа $K3$ с эллиптическим пучком достаточно проверить для их якобиевых расслоений.

В частности, мы можем уже решить вопрос о векторных полях на поверхностях типа $K3$, имеющих эллиптический пучок $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ при условии, что нормальная компонента этого поля равна 0. Как мы видели, можно предполагать, что пучок имеет сечение s . Так как $s(\mathbf{P}^1) = C \simeq \mathbf{P}^1$, то $C^2 = -2$. Поэтому нормальное расслоение к C отрицательно и, значит, не имеет сечений. Поэтому ограничение D на C должно быть касательным к C . С другой стороны, так как $D_N = 0$, то D касательно к слоям F расслоения f . Поэтому D должно обращаться в 0 в точке пересечения C и F . Но векторное поле на эллиптической кривой F , равное 0 в одной точке $C \cdot F$, равно 0 всюду. Таким образом, $D = 0$. Тем самым, мы можем дальше ограничиться рассмотрением векторных полей D с $D_N \neq 0$.

3. Прямым вычислением в кольце формальных степенных рядов можно доказать [7], стр. 1274, что в некоторой системе координат поле мультипликативного типа, обращающееся в 0, может быть приведено к виду $\sum \alpha_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\alpha_i \in \mathbf{F}_p$. Отсюда вытекает важное следствие: *многообразие, на котором векторное поле мультипликативного типа обращается в 0, — гладкое.*

Если $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ — расслоение поверхности X , D — регулярное векторное поле на X , нормальная компонента которого D_N отлична от 0, причем D — аддитивного или мультипликативного типа, то D_N имеет тот же тип. С другой стороны, легко видеть, что векторное поле на $\mathbf{P}^1$ имеет аддитивный тип, если оно обращается в 0 в одной точке, и мультипликативной — если в двух. Ввиду предыдущего, мы получаем следующие “правила запрета” для существования на поверхности типа $K3$ с эллиптическим пучком $f: X \rightarrow \mathbf{P}^1$ регулярного векторного поля D аддитивного или мультипликативного типа с $D_N \neq 0$. *Векторного поля с $D_N \neq 0$ не может существовать, если пучок f имеет более 2-х вырожденных слоев. Если он имеет 2 вырожденных слоя, то это поле обязано иметь мультипликативный тип.*

Для полей мультипликативного типа существуют специальные “правила запрета”. Именно, для всех вырожденных слоев, кроме имеющих тип A_n , связная компонента группы неособых точек изоморфна G_a . Как мы видели, векторное поле должно касаться этой компоненты и быть инвариантным относительно G_a . Поэтому если поле мультипликативного типа, то оно на этой компоненте равно 0. Если две такие компоненты пересекаются, как это имеет место в слоях типа $*A_1$ и $*A_2$, то мы получаем противоречие со форму-

лированным выше свойством полей мультипликативного типа. С другой стороны, векторное поле касается каждой компоненты вырожденного слоя и поэтому обращается в 0 в точке пересечения двух компонент. Если одна компонента пересекает 3 другие, то на ней поле обращается в 0 в 3-х точках, поэтому равно 0 тождественно. Первое соображение применимо к компонентам кратности 1 слоя D_n , а второе — к пересекающей их компоненте. На рисунке выделены компоненты, на которых поле обращается в 0.

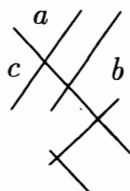


Рис. 7

Векторное поле равно 0 на компонентах a , b , и c . Это противоречит уже применявшемуся свойству полей мультипликативного типа. В результате получаем еще одно “правило запрета”.

Векторное поле D мультипликативного типа не может существовать, если пучок f имеет слой типа $*A_1$, $*A_2$ или D_n .

Объединяя вместе эти “правила запрета”, мы приходим к результату:

Предложение 2. *Если на поверхности X типа $K3$ существует эллиптический пучок с тремя вырожденными слоями или с двумя, один из которых имеет тип $*A_1$, $*A_2$ или D_n , то $H^0(X, \Theta) = 0$.*

Теперь легко получить доказательство основного результата.

Теорема. *На поверхности X типа $K3$ не существует регулярных векторных полей, кроме нулевого.*

Доказательство. Предположим, что $H^0(X, \Theta) \neq 0$. Согласно следствию предложения 1, поверхность X элементарна. Ввиду предложения 2, теорема будет доказана, если мы установим, что на любой элементарной поверхности типа $K3$ существует эллиптический пучок, имеющий по крайней мере 3 вырожденных слоя или 2 вырожденных слоя, из которых один имеет тип $*A_1$, $*A_2$ или D_n . В зависимости от значения p , доказательство распадается на три части.

1) $p > 3$. В этом случае высшее ветвление отсутствует и формула (2) из §4 приобретает вид:

$$\sum_F e(F) = 24.$$

Из нее легко следует, что всякий эллиптический пучок обладает нужным свойством. Иначе говоря, невозможен пучок, имеющий 1 вырожденный слой или 2, из которых ни один не имеет типа $*A_1$, $*A_2$, D_n . Действительно, в случае одного вырожденного слоя F , $e(F) = 24$. Если $\text{rg } F = n$, т.е. F состоит из $n + 1$ компоненты, то $e(F) = n + 2$ или $n + 1$ и $n \geq 22$. Но компоненты слоя и сечение независимы в $\text{Pic } X$ и поэтому $n + 2 \leq 22$, $n \leq 20$. В случае 2-х слоев F_1 и F_2 рангов n_1 и n_2 , аналогичное противоречие получается, если учесть, что ни один из слоев не имеет типа D_n , а так как $n_1 + n_2 \geq 20$, то один из слоев, например F_1 имеет тип A_{n_1} и для него $e(F_1) = n_1 + 1$. Вместе с условием $e(F_2) = n_2 + 1$ или $n_2 + 2$, мы получаем, что $n_1 + n_2 \geq 21$. Так как компоненты слоя F_1 , n_2 компонент слоя F_2 и сечение независимы в $\text{Pic } X$, то мы опять получаем противоречие: $n_1 + n_2 \leq 20$.

При $p = 3$ и 2 мы рассмотрим пучок, который очевидным образом существует, если воспользоваться тем видом решетки $S = \text{Pic } X$, который дается теоремой из §1. Именно, при $S = U_2 \oplus N$ или $S = U_2(p) \oplus N$ мы возьмем $f \in U_2$ или $f \in U_2(p)$. Тогда $S_f = N$.

2) $p = 3$. Как легко видеть, $H_3 = Q(A_2)^2$ (впрочем, мы могли бы при конструкции решеток в теореме §1 сразу использовать $Q(A_2)^2$ вместо H_3). Воспользуемся слагаемым $(I(-3))^k \oplus I(-1)^l$ — в нашем случае всегда $l \equiv 0 \pmod{4}$. Если $l > 0$, то элементы $x \in I(-1)^l = \oplus \mathbb{Z}e_i$, $e_i^2 = -1$ вида $e_i \pm e_j$ являются корнями, ортогональными двум уже построенным корневым системам и поэтому пучок, определяемый классом f , имеет, по крайней мере, 3 приводимых слоя. При $l = 0$ мы имеем лишь приводимые слои, соответствующие двум слагаемым $Q(A_2)$. Они имеют тип A_2 или $*A_2$. Если хоть один из них имеет тип $*A_2$, то теорема доказана. Если оба имеют тип A_2 , то так как для слоя типа A_n , $d(A_n) = 0$, то они дают вклад 4 в левую часть формулы (2) §4. Правая же часть равна 24 и, значит, должны существовать другие слагаемые, т.е. по крайней мере 3 вырожденных слоя. Наш пучок не является квазиэллиптическим, так как корневая система решетки $(I(-3))^k \oplus I(-1)^l$, как легко убедиться, имеет тип D_{16-k} . Поэтому она не 3-элементарна при $k < 16$, а при $k = 16$ ее ранг меньше ранга решетки.

3) $p = 2$. В этом случае s четно: $s = 2\sigma$. Мы будем исходить из доказательства теоремы 1 §5 и приведенного там списка квазиэллиптических пучков на суперсингулярных поверхностях. К ним мы применим предложение из §4, доказательство которого содержит метод построения эллиптических пучков по квазиэллиптическим. Именно, в доказательстве указывалось соотношение

$$D_4 \oplus F_1 \oplus F_2 \Rightarrow D_5, \quad (4)$$

которое по слоям D_4 , F_1 , F_2 квазиэллиптического пучка строит новый пучок со слоем D_5 . Можно усилить это соотношение, заметив, что если число компонент некоторого F_i больше 2-х, то сверх тех компонент, которые вместе с кривой ξ образуют слой D_5 , остаются еще компоненты, непересекающие их, и, значит, лежащие в другом слое. Поэтому (4) верно в более сильной форме $D_4 \oplus F_1 \oplus F_2 \Rightarrow D_5 \oplus F$, если $\operatorname{rg} F_1 > 1$ или $\operatorname{rg} F_2 > 1$. Пучок, имеющий слои D_5 и F , удовлетворяет всем нашим требованиям.

Слои D_4 и еще 2 слоя рангов, больших чем 1, находятся во всех решетках таблицы в теореме из §5, соответствующих значениям $\sigma = 1, \dots, 6$. Надо только пользуясь замечанием к теореме из §1, заменить всюду корневую систему D_n , $n > 8$ на $D_{n-8} \oplus E_8$, а D_m , $m > 16$ — на $D_{m-16} \oplus E_8^2$. Тогда мы получаем такие решетки

σ	1	2	3
S	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus E_8^2)$	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus D_8 \oplus E_8)$	$U_2 \oplus Q(D_4 \oplus D_8^2)$
σ	4	5	6
S	$U_2 \oplus Q(D_4^3 \oplus D_8)$	$U_2 \oplus Q(D_4^5)$	$U_2 \oplus Q(\widetilde{D_4^3 \oplus D_8})$

В случаях $\sigma = 7, 8, 9, 10$ легко непосредственно указать нужные нам решетки.

σ	7	8
S	$U_2 \oplus Q(D_4^3) \oplus Q(E_8)(2)$	$U_2(2) \oplus Q(D_4^3) \oplus Q(E_8)(2)$
$R(f)$	D_4^3	D_4^3
σ	9	10
S	$U_2 \oplus Q(\widetilde{D_{18}}) \oplus Q(E_2)(2)$	$U_2(2) \oplus Q(\widetilde{D_{12}}) \oplus Q(E_8)(2)$
$R(f)$	A_1^{12}	A_1^{12}

Во всех случаях мы имеем не меньше трех вырожденных слоев. Пучок f не является квазиэллиптическим, так как $\operatorname{rg} R(f) < 20$. Теорема доказана.

Замечание. Роль, которую в этом доказательстве играет наличие эллиптического пучка на поверхности X , подсказывает мысль

попробовать определить векторные поля на эллиптических поверхностях. Это сделано в работах [7] и [9]. Если характеристика поля $p > 3$, то ответ тот, которого можно было бы ожидать. Векторные поля могут существовать только в очень простой ситуации: либо все слои пучка изоморфны одной и той же эллиптической кривой A (а вырожденных слоев нет) и A действует послойно на X — тогда существование векторного поля очевидно, либо X является абелевым многообразием, либо гиперэллиптической поверхностью (фактором абелева многообразия по конечной группе), либо X рационально. Впрочем, уже из этих простых примеров можно вывести, что схема автоморфизмов алгебраической поверхности над полем конечной характеристики может быть не приведенной.

Действительно нетривиальные примеры эллиптических поверхностей, имеющих регулярные векторы поля, кроме нулевого, существуют только над полями характеристики $p = 2$ или 3 . Они все перечислены. Общий случай, как мы видели, сводится к случаю, когда расслоение имеет сечение. При этом предположении все возможные поверхности задаются уравнениями (t — параметр на базе $\mathbb{P}^1$):

$$\begin{aligned} p=3. \quad y^2 &= x^3 + x^2 - t^{3^{2n}}, \\ y^2 &= x^3 + tx^2 - t^{3^{2n}-3}, \quad n > 0, \\ p=2. \quad y^2 + xy &= x^3 + ct^2x^2 + t^{2^{2n+1}}, \quad c \in k, n > 0. \end{aligned}$$

Перечисление рациональных поверхностей, обладающих векторными полями, является, по-видимому, довольно запутанной задачей.

До сих пор неизвестно ни одного примера поверхности общего типа, на которой существует векторное поле, и было бы интересно выяснить, есть ли такие поверхности.

§7. Деформации

Доказанное в предшествующем параграфе соотношение $H^0(X, \Theta) = 0$ для поверхности X типа КЗ дает возможность исследовать деформации этих поверхностей. Вычисление значений чисел $h^{i,j}$, приведенное в §6, показывает, что $\dim_k H^1(X, \Theta) = 20$, $H^2(X, \Theta) = 0$. Благодаря этому, мы можем применить теорию формальных деформаций Шлезингера [36]. Из нее следует (ввиду приведенных значений для $\dim H^i(X, \Theta)$), пропредставимость функтора $\text{Def } X$, определенного на категории артиновых локальных

k -алгебр и сопоставляющего алгебре A множество классов (с точностью до изоморфизма) плоских деформаций поверхности X над A . Более того, универсальное семейство формально гладко и база имеет размерность 20, т.е. изоморфна $S = \operatorname{Spf} k[[T_1, \dots, T_{20}]]$. Тем самым имеется плоское семейство $\mathcal{X} \rightarrow S$, замкнутый слой которого изоморфен X и которое обладает универсальным свойством.

Слои семейства $\mathcal{X}$, лежащие над незамкнутыми точками, являются, вообще говоря, формальными схемами. С геометрической точки зрения интереснее, конечно, исследовать деформации, слои которых являются алгебраическими, или даже проективными, поверхностями типа $K3$. Для этого достаточно взять некоторый очень обильный обратимый пучок L на X и рассмотреть такую подсхему $\Sigma(L) \subset S$, что L распространяется на ограничение $\mathcal{X}$ на $\Sigma(L)$.

Лемма 1. Пусть S — спектр локального кольца, быть может, формальный, $\mathcal{X} \rightarrow S$ — формальное семейство поверхностей типа $K3$ и L — обратимый пучок на слое $X = \mathcal{X}_s$, над точкой $s \in S$. Существует такая замкнутая подсхема $T \subset S$, что L продолжается на $\mathcal{X}|_T = \mathcal{X}_T$, $\mathcal{X}_T \rightarrow T$ является универсальным семейством с этим свойством и T определяется в S одним уравнением.

Существование T доказывается таким же стандартным применением теории деформаций, как и существование универсальной деформации (проверку нужных условий можно прочесть в [19]). Проверим, что T определяется одним уравнением. Пусть $S = \operatorname{Spec} A$, $T = \operatorname{Spec} B$, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал A , $B = A/J$, $B' = A/J\mathfrak{m}$, $T' = \operatorname{Spec} B'$. Так как для любого идеала M с $M^2 = 0$, $(1 + M)^* \simeq M$, то мы имеем точную последовательность гомоморфизмов пучков на $\mathcal{X}$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T} \otimes J/J\mathfrak{m} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}'_T}^* \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}^* \rightarrow 0.$$

Из точной последовательности гомологий мы получаем последовательность гомоморфизмов

$$H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}'_T}^*) \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}^*) \rightarrow H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T} \otimes J/J\mathfrak{m}),$$

которая показывает, что препятствие к продолжению обратимого пучка $\mathcal{L}$ с $\mathcal{X}_T$ на $\mathcal{X}'_T$ лежит в $H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T} \otimes J/J\mathfrak{m})$. Так как мы имеем дело с семейством поверхностей типа $K3$, то

$$H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T} \otimes J/J\mathfrak{m}) \simeq H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T}) \otimes J/J\mathfrak{m} \simeq J/J\mathfrak{m}.$$

(мы выбираем некоторый базис в $H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_T})$ для установления этого изоморфизма). Пусть $f \in J$ — элемент из J , определяющий

это препятствие, и $B'' = B/(J\mathfrak{m} + (f))$, $T'' = \text{Спец } B''$. Тогда препятствие для продолжения пучка $\mathcal{L}$ на $\mathcal{X}_{T''}$ обращается в 0, т.е. $\mathcal{L}$ продолжается на $\mathcal{X}_{T''}$. Ввиду универсальности T , это возможно только при $T'' = T$, т.е. $J = J\mathfrak{m} + (f)$. По лемме Накаямы отсюда следует, что $J = (f)$.

Возвращаясь к универсальному семейству $\mathcal{X} \rightarrow S$, мы получаем для любого обратимого пучка L на X подсхему $\Sigma(L) \subset S$, размерность которой равна 19 или 20. Вопрос заключается в том, какая из этих двух возможностей в действительности имеет место. Как показал Делинь [19], — первая, если, конечно, пучок не тривиален. Мы приведем набросок доказательства в немного более частном случае, чтобы представить его рассуждения в наиболее простом виде.

Лемма 2. Пусть X — такая алгебраическая поверхность, что $H^1(X, \mathcal{O}) = H^0(X, \Omega^1) = 0$ и S — группа Нерона-Севери X . Тогда отображение, сопоставляющее обратимому пучку класс Черна, определяет вложение:

$$c_1 : S/pS \hookrightarrow H_{DR}^2(X).$$

По определению, $H_{DR}^2(X)$ — это гипергомологии двойного комплекса

$$\begin{array}{ccccc} C_2(\Omega^0) & \xrightarrow{d} & C_2(\Omega^1) & \xrightarrow{d} & C_2(\Omega^2) \\ \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow \\ C_1(\Omega^0) & \xrightarrow{d} & C_1(\Omega^1) & \xrightarrow{d} & C_1(\Omega^2), \\ \partial \uparrow & & \partial \uparrow & & \partial \uparrow \\ C_0(\Omega^0) & \xrightarrow{d} & C_0(\Omega^1) & \xrightarrow{d} & C_0(\Omega^2) \end{array}$$

где C_i — i -мерные цепи по Чеху, горизонтальные дифференциалы определяются через взятие дифференциала от дифференциальных форм, а вертикальные — по Чеху. Поэтому элемент из $H_{DR}^2(X)$ задается тройкой $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in C_2(\Omega^0) \oplus C_1(\Omega^1) \oplus C_0(\Omega^2)$ и класс Черна пучка L с функциями перехода $f_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ определяется как $(0, d \log f_{ij}, 0)$. Если этот цикл является кограницей цепи $(h_{ij}, \omega_i) \in C_1(\Omega^0) \oplus C_0(\Omega^1)$, то

$$f_{ij}^{-1} df_{ij} = \omega_i - \omega_j + dh_{ij}, \quad (1)$$

причем $d\omega_i = 0$, $dh_{ij} = 0$. Ввиду условия $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$, мы можем считать, что $h_{ij} = 0$ (изменяя, если нужно, ω_i в (1)). Применяя

к обеим частям равенства (1) оператор Картье, и вычитая из (1), мы получим (т.к. $Cd \log f = d \log f$), что $C\omega_i - C\omega_j = \omega_i - \omega_j$, т.е. $C\omega_i - \omega_i = C\omega_j - \omega_j$. Поэтому формы $C\omega_i - \omega_i$ определяют единую форму $\eta \in H^0(X, \Omega^1)$. По условию, $\eta = 0$. Таким образом, $C\omega_i = \omega_i$, а по известному свойству оператора Картье отсюда следует, что $\omega_i = d \log \varphi_i$, $\varphi_i \in \mathcal{O}(U_i)$, быть может, с меньшими множествами U_i . В результате, (1) переписывается в виде $d \log f_{ij} = d \log \varphi_i \varphi_j^{-1}$, т.е. $f_{ij} = \varphi_i \varphi_j \psi_{ij}^p$, а это и означает, что пучок делится на p в S .

Предложение 1. Если обратимый пучок L не делится на p в S_X , то схема $\Sigma(L)$ имеет размерность 19.

В противном случае, L можно было бы продолжить в качестве обратимого пучка $\mathcal{L}$ на все универсальное семейство $\mathcal{X}$. Это предположение и надо привести к противоречию. Доказательство основывается на применении стандартных свойств когомологий Де Рама семейства $\mathcal{X}/S$. Однако специфика нашей ситуации заключается в том, что теперь эти свойства нужно применять в "формальном" варианте. Впрочем, различие здесь несущественно: если пользоваться, например, предельно алгебраизованным изложением в начале работы [26], то доказательства сохраняются почти буквально. Мы приведем перечень тех свойств, которые нам нужны.

Когомологии Де Рама определяются при помощи комплекса формальных дифференциальных форм, где, по определению, $\Omega_{\mathcal{X}/S}^i$ есть проективный предел обычных дифференциальных форм $\Omega_{\mathcal{X}'}^i$, $\mathcal{X} = \mathcal{X} \times_S S'$, а S пробегает систему инфинитезимальных окрестностей точки s в S . По определению, для семейства $f : \mathcal{X} \rightarrow S$, $H_{DR}^i(\mathcal{X}/S) = R^i f_*(\Omega_{\mathcal{X}/S})$. Когомологии $H_{DR}^i(\mathcal{X}/S)$ являются модулями конечного типа над $\mathcal{O}_S$. Существует спектральная последовательность

$$E_1^{ij} = H^j(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i) \Rightarrow H_{DR}^*(\mathcal{X}/S). \quad (2)$$

Эта спектральная последовательность обычным образом порождает в $H_{DR}^i(\mathcal{X}/S)$ фильтрацию F . В нашем случае, аналогично тому, что мы показали в §6, спектральная последовательность (2) вырождается в члене E_1 . Простые соображения коммутативной алгебры показывают, что $\mathcal{O}_S$ -модули $H^j(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i)$ и $H_{DR}^i(\mathcal{X}/S)$ свободны и конечного типа, и ограничения $H^j(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i) \otimes k \rightarrow H^j(X, \Omega_{X/k}^i)$, $H_{DR}^i(\mathcal{X}/S) \otimes k \rightarrow H_{DR}^i(X/k)$ являются изоморфизмами. Отсюда, в частности, следует, что фильтрация F в $H_{DR}^2(\mathcal{X}/S)$ состоит

из свободных $\mathcal{O}_S$ -модулей и имеет вид

$$\begin{aligned} H_{DR}^2(\mathcal{X}/S) &= F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset F^3 = 0, \\ \operatorname{gr} F^0 &= 22, \quad \operatorname{gr} F^1 = 21, \quad \operatorname{gr} F^2 = 1. \end{aligned}$$

Дифференцирование классов когомологий Де Рама по параметру определяет операции ∇ , так называемые связности Гаусса–Манина:

$$\nabla : H_{DR}^i(\mathcal{X}/S) \rightarrow \Omega_{S/k}^1 \otimes H_{DR}^i(\mathcal{X}/S).$$

Элементы $x \in H_{DR}^2(\mathcal{X}/S)$ соответствующие обратимым пучкам, т.е. имеющие вид $c_1(\mathcal{L})$, горизонтальны, т.е.

$$\nabla x = 0. \quad (3)$$

Выполняются соотношения (называемые соотношениями трансверсальности Гриффитса):

$$\nabla F^i H_{DR}^2(\mathcal{X}/S) \subset \Omega_{S/k}^1 \otimes F^{i-1} H_{DR}^2(\mathcal{X}/S),$$

задающие отображения для градуированных компонент фильтрации F $\operatorname{gr}^i H_{DR}^2(\mathcal{X}/S) = H^{2-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i)$:

$$\operatorname{gr}^i \nabla : H^{2-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i) \rightarrow \Omega_{S/k}^1 \otimes H^{3-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^{i-1}), \quad (4)$$

которые, ввиду правила дифференцирования произведения для связности ∇ , являются $\mathcal{O}_S$ -гомоморфизмами. Эти отображения имеют следующую интерпретацию. По двойственности, гомоморфизмы $\operatorname{gr}^i \nabla$ определяют отображения

$$\nabla_i : \Theta_S \rightarrow \operatorname{Hom}(H^{2-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i), H^{3-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^{i-1})). \quad (5)$$

Пусть

$$\operatorname{Kod}(\mathcal{X}/S) : \Theta_S \rightarrow H^1(\mathcal{X}, \Theta_{\mathcal{X}/S})$$

— отображение Кодaira, соответствующее семейству $\mathcal{X}/S$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Kod}(\mathcal{X}/S) & H^1(\mathcal{X}, \Theta_{\mathcal{X}/S}) & \\ \Theta_S \swarrow & \downarrow \varphi_i & \\ \nabla_i & \operatorname{Hom}(H^{2-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^i), H^{3-i}(\mathcal{X}, \Omega_{\mathcal{X}/S}^{i-1})) & \end{array}, \quad (6)$$

где φ_i определяется умножением когомологий и спариванием $\Theta_{\mathcal{X}/S} \otimes \Omega_{\mathcal{X}/S}^i \rightarrow \Omega_{\mathcal{X}/S}^{i-1}$. После этих предварительных сведений, доказательства которых все точно повторяют рассуждения пунктов 1.1, 1.2 и 1.4 работы [26], можно перейти к доказательству предложения.

Предположим, что пучок L продолжается до пучка $\mathcal{L}$ на схеме $\mathcal{X}$. Тогда его класс Черна $c_1(\mathcal{L})$ есть элемент $x \in H_{DR}^2(\mathcal{X}/S)$, ограничение которого в точке $s \in S$ есть класс $c_1(L)$. Так как по условию L как элемент группы $S_{\mathcal{X}}$ не делится на p , то, согласно лемме, $c_1(L) \neq 0$. Отсюда тем более $x \neq 0$. По построению, $x \in F^1 H_{DR}^2(\mathcal{X}/S)$ а согласно (3), $\nabla x = 0$. Вот эти свойства и противоречат друг другу: отображение ∇ является мономорфизмом на $F^1 H_{DR}^2(\mathcal{X}/S)$. Для проверки нам достаточно убедиться, что мономорфны $\text{gr}^1 \nabla$ и $\text{gr}^2 \nabla$. Это будет доказано, если мы проверим, что ∇_1 и ∇_2 являются даже изоморфизмами. Воспользуемся интерпретацией, которую дает диаграмма (6). Отображение $\text{Kod}(\mathcal{X}/S)$ является изоморфизмом. Так как речь идет о гомоморфизме свободных модулей, то достаточно проверить, что он является изоморфизмом после тензорного умножения на k , т.е. что $\Theta_{S,s} \rightarrow H^1(X, \Theta_{X/k})$ — изоморфизм. Это сразу следует из того, что S — база универсального семейства. Таким образом, достаточно убедиться, что φ_1 и φ_2 — изоморфизмы. Таким же рассуждением мы убеждаемся, что для этого достаточно, чтобы $\varphi_i \otimes k$ были изоморфизмами. Это гомоморфизмы когомологий поверхности X :

$$\begin{aligned}\varphi_1 \otimes k : H^1(X, \Theta_X) \otimes H^1(X, \Omega^1) &\rightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X), \\ \varphi_2 \otimes k : H^1(X, \Theta_X) \otimes H^0(X, \Omega^2) &\rightarrow H^1(X, \Omega^1).\end{aligned}$$

То, что они изоморфизмы, следует из обычных теорем двойственности, если воспользоваться тем, что на поверхности типа $K3$, $\Theta_X \simeq \Omega_X^1$, $\mathcal{O}_X \simeq \Omega_X^2$.

Замечания. 1. Условие неделимости на p образа пучка в группе $S_{\mathcal{X}}$ нужно было нам, так как мы пользовались только когомологиями Де Рама. В работе [19] теорема доказана без этого предположения, но для этого необходимо вместо когомологий Де Рама использовать кристаллические когомологии.

2. Применим рассуждение, доказывавшее предложение, к базе $\Sigma(L)$ вместо S . Пусть $x = c_1(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ — пучок, продолжающий L на универсальное семейство над $\Sigma(L)$. Тогда $\text{gr}^1 x \in \text{Ker } \text{gr}^1 \nabla$ (см. (3)). Отсюда $(\nabla_1 \otimes \Theta_{\Sigma(L)})x = 0$. Так как φ_1 — изоморфизм (доказательство не использовало того, что S — база универсального

семейства), то $\langle \text{Kod } \Theta_{\Sigma(L)}, \text{gr}^1 x \rangle = 0$. Тем более,

$$\langle \text{Kod } \Theta_{\Sigma(L),s}, \text{gr}^1 x \rangle = 0. \quad (7)$$

С другой стороны, мы знаем, что $\dim \Sigma(L) = 19$. Поэтому если $\text{gr}^1 c_1(L) \neq 0$ (т.е. $c_1(L) \notin F^2 H_{DR}^2(X)$), то (7) дает уравнение для $\text{Kod } \Theta_{\Sigma(L),s}$ и тем самым показывает, что $\Sigma(L)$ — гладкое.

Пусть теперь U — некоторое множество обратимых пучков на X . Обозначим через $\Sigma(U)$ подсхему в S , на которую распространяются все пучки из U . Линейную оболочку множества T элементов векторного пространства мы будем обозначать $\langle T \rangle$.

Предложение 2. Пусть $c[U] = \langle \text{gr}^1 c_1(L), L \in U \rangle \subset H^1(X, \Omega^1)$. Тогда $\dim \Sigma(U) \leq 20 - \dim c[U]$.

Доказательство. Пусть $L \in U$ и образ L в S_X/pS_X не равен 0. Тогда $\Sigma(U) \subset \Sigma(L)$ и $\text{Kod } \Theta_{\Sigma(U),s} \subset \text{Kod } \Theta_{\Sigma(L),s}$. Отсюда, по формуле (7),

$$\langle \text{Kod } \Theta_{\Sigma(U),s}, \text{gr}^1 c_1(L) \rangle = 0. \quad (8)$$

В случае, если образ L в S_X/pS_X равен 0, формула (7) остается верной, так как $\text{gr}^1 c_1(L) = 0$. В итоге мы получаем, что

$$\langle \text{Kod } \Theta_{\Sigma(U),s}, c[U] \rangle = 0. \quad (9)$$

Это показывает, что

$$\dim \Sigma(U) \leq \dim \text{Kod } \Theta_{\Sigma(U),s} \leq 20 - \dim c[U].$$

Из предложения 1 вытекает одно важное следствие: возможность подъема поверхности типа $K3$, определенной над полем характеристики p , в характеристику 0.

Теорема 1. [19] Для любой поверхности типа $K3$ над полем k характеристик $p > 0$, существует кольцо нормирования V , являющееся конечным расширением кольца $W(k)$, и плоская гладкая собственная схема $\mathcal{X}/V$, для которой $\mathcal{X} \otimes_V k = X$.

Рассмотрим “более обширный” функтор деформаций $\text{Def } X$, определенный на категории артиновых локальных алгебр над W , с тем же самым определением множеств $\text{Def } X$, что и в начале этого параграфа. Как и в рассмотренном выше случае доказывается, что этот функтор пропредставим, что универсальное семейство имеет базу $\bar{\Sigma} = \text{spf } W[[T_1, \dots, T_{20}]]$ и что для любого пучка $L \in \text{Pic } X$

существует подсхема $\bar{\Sigma}(L)$, определяемая одним уравнением $f \in W[[T_1, \dots, T_{20}]]$ и классифицирующая те деформации, на которые продолжается пучок L . Те схемы S и $\Sigma(L)$, которые рассматривались в теореме, получаются из $\bar{\Sigma}$ и $\bar{\Sigma}(L)$ редукцией по модулю p . Так как, согласно предложению, $\Sigma(L) \neq S$, то $f \not\equiv 0 \pmod{p}$. Пусть $\bar{\Sigma}(L) = \text{Spf } \bar{R}$, тогда p не является делителем нуля в $\bar{R}$. Отсюда следует, что в $\bar{R}$ существует система параметров $p, x_1, \dots, x_{19}$ (т.е. система элементов, длина которой равна размерности кольца $\bar{R}$ и которая порождает примарный идеал, соответствующий максимальному идеалу). Тогда кольцо $R = \bar{R}/(x_1, \dots, x_{19})$ является модулем конечного типа над W . Для алгебры $R \otimes_W K$ (где K — поле частных W) существует гомоморфизм $R \otimes_W K \rightarrow K_1$, где K_1 — конечное расширение.

Пусть V — кольцо целых элементов в K_1 , мы получаем гомоморфизм $R \rightarrow V$. Композиция с $\bar{R} \rightarrow R$ дает гомоморфизм $\bar{R} \rightarrow V$ или морфизм $\text{Spf } V \rightarrow \bar{\Sigma}(L)$. Пусть $\mathcal{X} \rightarrow \bar{\Sigma}(L)$ — семейство, на которое, по предположению, продолжается пучок L . Тогда $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times_{\bar{R}} V$ дает семейство деформаций $\mathcal{Y} \rightarrow \text{Spf } V$, на которое продолжается пучок L . Выберем теперь L так, чтобы он был очень обильным и не делился на p в группе $S_{\mathcal{X}}$. Такой выбор возможен: если $L_{\perp}$ — обильный примитивный элемент S , то достаточно большая кратность $L = nL_{\perp}$ (в частности, с $(n, p) = 1$) удовлетворяет этим условиям. Теперь к формальной схеме $\mathcal{Y}/\text{Spf } V$ применима теорема алгебраизации Гротендика ([22], 5.4.5), откуда и вытекает утверждение теоремы.

Замечание. До сих пор еще неизвестно, любую ли поверхность можно поднять до гладкой и плоской схемы над W . Очень близкие к этому утверждения получены Огасом в работе [33].

§8. Кристаллические когомологии

Кристаллические когомологии определены для многообразий над полем конечной характеристики p и являются для них заменой l -адических этальных когомологий при $l = p$. Мы приведем здесь формулировки тех свойств кристаллических когомологий, которыми будем дальше пользоваться. Систематический обзор этой теории см. в [14], [13] и [24]. Мы будем рассматривать гладкое полное многообразие X над алгебраически замкнутым полем k характеристики p . Пусть $W(k)$ или просто W — кольцо векторов Витта над k . Кристаллические когомологии обозначаются через $H_{\text{cris}}^i(X)$ или $H^i(X/W)$. Это модуль над W , обладающий следующими свойствами.

1. Функториальность: $H^i(X/W)$ является функтором из категории полных гладких алгебраических многообразий в категорию W -модулей.

2. Конечность: $\operatorname{rg}_W H^i(X/W) < \infty$, $H^i(X/W) = 0$ при $i > 2 \dim X$.

3. Мультипликативные свойства: верна формула Кюннета, определено антикоммутативное умножение и имеет место двойственность Пуанкаре, если модули $H^1(X/W)$ — без кручения.

4. Определен “первый класс Черна”, т.е. гомоморфизм

$$c_1 : \operatorname{Pic} X \rightarrow H^2(X/W).$$

В случае алгебраических поверхностей индекс пересечения в $\operatorname{Pic} X$ и умножение, определенное двойственностью Пуанкаре: $H^2 \otimes H^2 \rightarrow W$, согласованы.

5. Если $H_{DR}^i(X)$ — когомологии Де Рама многообразия X , то

$$\dim_k H_{DR}^i(X) = \operatorname{rg}_W H^i(X/W) + \tau_i + \tau_{i+1},$$

где τ_i — число образующих кручения в $H^i(X/W)$.

В частности, если все модули $H^i(X/W)$ свободны, то

$$H_{DR}^i(X) = \operatorname{rg}_W H^i(X/W)_W \otimes k.$$

6. Теоремы сравнения:

$$\operatorname{gr}_W H^i(X/W) = b_i,$$

где b_i — числа Бети, определенные при помощи l -адических когомологий.

7. Операция абсолютного Фробениуса ($x \rightarrow x^p$) по функториальности определяет гомоморфизм $F : H^i(X/W) \rightarrow H^i(X/W)$, являющийся φ -линейным преобразованием, где φ — автоморфизм Фробениуса кольца W . Для n -мерного многообразия X гомоморфизм F действует на фундаментальный класс в когомологиях старшей размерности $H^{2n}(X/W)$ умножением на p^n .

Свойства 5 и 6 дают возможность указать условия, при которых теория когомологий особенно близка к тому, что имеет место для проективных многообразий над полем комплексных чисел. Положим $h^{p,q} = \dim_k H^q(X, \Omega^p)$, где Ω^p — пучок p -мерных дифференциальных форм. Предположим, что для $0 \leq m \leq 2 \dim X$,

$$\sum_{p+q=m} h^{p,q} = b_m. \quad (1)$$

С другой стороны, напомним, что для когомологий Де Рама существует спектральная последовательность

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p) \Rightarrow H_{DR}^{p,q}(X), \quad (2)$$

откуда $\dim_k H_{DR}^m(X) \leq \sum_{p+q=m} h^{p,q}$. В соединении со свойствами 5 и 6 это показывает, что $\sum_{p+q=m} h^{p,q} \geq b_i + \tau_i + \tau_{i+1}$, так что ввиду

(1) получаем, что $\tau_i = 0$, т.е. группа $H^i(X/W)$ — свободные W -модули, а также $\dim_k H_{DR}^m(X) = \sum_{p+q=m} h^{p,q}$, откуда следует, что спектральная последовательность вырождается в первом члене.

Как было сказано в начале §5, основная теорема этого параграфа дает возможность найти числа $h^{p,q}$ для поверхности типа $K3$. Приведенные там значения показывают, что соотношение (1) выполнено, а значит W -модуль $H^2(X/W)$ свободен (остальные группы когомологий не интересны):

$$b_0 = b_4 = 1, \quad b_1 = b_3 = 0.$$

Объект, возникающий в описанной ситуации, имеет самостоятельное название. *Кристаллом* называется свободный W -модуль H конечного ранга и φ -линейное преобразование $F : H \rightarrow H$. Такой кристалл обозначается символом (H, F) . Если $\mathcal{X} \rightarrow B$ — гладкое собственное семейство алгебраических многообразий, то их группы кристаллических когомологий образуют объект, называемый *кристаллом над базой B* . Мы не даем здесь его определения (отсылая читателя к работам [24], [27] или [32]), хотя и будем изредка им пользоваться.

Мы будем также постоянно иметь в виду структуру решетки на $H = H^2(X/W)$, заданную двойственностью Пуанкаре. Таким образом, в H задано скалярное произведение, согласованное со скалярным произведением в S_X на образе S_X при отображении c_1 и

$$(Fx, Fy) = p^2(x, y), \quad (3)$$

ввиду свойства 7. Отметим, что решетка H является унимодулярной.

В оставшейся части этого параграфа мы изложим некоторые непосредственные приложения перечисленных выше свойств кристаллических когомологий к теории суперсингулярных поверхностей типа $K3$. Дальше всюду под X будет подразумеваться такая поверхность. Кристалл $H^2(X/W)$ мы будем обозначать через H .

Предложение 1. Дискриминант решетки $S = \text{Pic } X$ имеет вид $-p^{2\sigma}$.

Очевидно, что дискриминант отрицателен, так как решетка гиперболическая и четного ранга 22. Покажем, что с точностью до знака, он является степенью p , т.е. не делится ни на какое простое число $l \neq p$. Для этого заметим, что l -компонента $\text{Br } X(l)$ группы Брауэра поверхности X равна 0. Это следует из того, что группа $B = \text{Br } X(l)$ имеет неограниченно делимую на l подгруппу B^0 , изоморфную $(\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z})^\tau$, где τ — “число трансцендентных циклов”, т.е. $b_2 - \rho$, $\rho = \text{rg } S$, а группа B/B^0 конечна и двойственна группе кручения S (см. [23], стр. 82 и 147). В нашем же случае $\rho = b_2 = 22$, и S не имеет кручения.

Теперь из точной последовательности Куммера: $0 \rightarrow \mu_l \rightarrow G_m \rightarrow G_m \rightarrow 0$ мы получаем, ввиду того, что $\text{Br } X(l) = H^2(X, G_m)(l) = 0$, изоморфизм $S/lS \simeq H^2(X, \mu_l)$. Этот изоморфизм перестановочен, очевидно, с умножением. Так как на $H^2(X, \mu_l)$ умножение, ввиду двойственности Пуанкаре в этальных когомологиях, невырождено, то оно невырождено и в S/lS , а значит, и в $S \otimes \mathbf{Z}_l$, т.е. решетка $S \otimes \mathbf{Z}_l$ унимодулярна.

Таким образом, $d(S) = -p^s$. Остается доказать, что s четно. Согласно свойству (4), мы имеем отображение $S \rightarrow H$, являющееся вложением ввиду того, что оно согласовано с умножением. Оно продолжается до вложения $\iota: S \otimes W \rightarrow H$. Так как оба W -модуля имеют одинаковый ранг 22, то модуль $H/\iota(S \otimes W)$ имеет конечную длину, т.е. изоморфен $\oplus W/p^{n_i}$. Если $\sum n_i = \sigma$, то $d(S \otimes W) = d(\iota(S \otimes W)) = d(H)p^{2\sigma}$. Но решетка H унимодулярна ввиду того, что произведение удовлетворяет теореме двойственности Пуанкаре. Поэтому $d(H) = (1)$ и мы получаем нужное утверждение. Поучительно сравнить это рассуждение с первым доказательством Артина, основанным на применении плоских когомологий. Вложение $S \otimes \mathbf{Z}_p \rightarrow H$ продолжается до гомоморфизма $S \otimes \mathbf{Z}_p \rightarrow H$, который тоже является вложением, так как сохраняет произведение.

Предложение 2. (см. [33]). Образ группы $S \otimes \mathbf{Z}_p$ в H совпадает с совокупностью тех элементов $x \in H$, для которых $Fx = px$.

По лемме 2 §7 гомоморфизм $S/pS \rightarrow H/pH = H_{DR}^2(X)$ является вложением, откуда следует, что $H/S \otimes \mathbf{Z}_p$ не имеет кручения. Очевидно, что элементы $x \in S \otimes \mathbf{Z}_p$, рассматриваемые как элементы H , обладают свойством $Fx = px$. Рассмотрим подмодуль $T \subset H$, состоящий из всех таких элементов. Ранг модуля T_p над $\mathbf{Z}_p$ не превосходит 22. Это следует из того, что его элементы, линейно независимые над $\mathbf{Z}_p$, будут линейно независимыми и над W .

Действительно, соотношение $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$, $\alpha_i \in W$, можно поделить на α_i , делящееся на наименьшую степень p и получить соотношение, в котором, скажем, $\alpha_1 = 1$. Применяя к нему F и вычитая из первоначального, мы получим соотношение между $x_2, \dots, x_n$ и так через конечное число шагов получим $x_n = 0$. С другой стороны, $T \supset S$ и поэтому $\text{rg}_{Z_p} T \geq 22$, т.е. $\text{rg}_{Z_p} T = 22$. Если бы $S \otimes Z_p \neq T$, то группа $T/S \otimes Z_p$ была конечной, т.е. имела бы кручение, в противоречии с тем, что $H/S \otimes Z_p$ не имеет кручения.

Лемма 1. Если в кристалле (U, Φ) ранга n над W существует система линейно независимых элементов $x_1, \dots, x_n$, для которых $\Phi x_i = x_i$, то имеется и базис, обладающий этим свойством.

Если C — матрица эндоморфизма Φ в некотором базисе U , а A — матрица, выражающая систему $x_1, \dots, x_n$ через этот базис, то $C = A^\varphi A^{-1}$. Поэтому $\det C \in W^*$, т.е. $C_0 = C \otimes k$ — невырожденная матрица над k . Отсюда следует, что C можно представить в виде $C = B^\varphi B^{-1}$, где B — такая матрица над W , что $\det B \in W^*$. Такое представление получается последовательно, по модулю растущих степеней p . По модулю p существование матрицы B_0 над полем k с условием $B_0^\varphi B_0^{-1} = C_0$ — это хорошо известный факт [25], стр. 213. Переход к большим степеням p еще более очевиден. Равенство $C = B^\varphi B^{-1}$ означает, что в U существует базис $y_1, \dots, y_n$, для которого $\Phi y_i = y_i$.

Лемма 2. Отображение, индуцированное отображением Фробениуса в $H \otimes k$:

$$F \otimes k : H \otimes k \rightarrow H \otimes k,$$

имеет ранг 1.

Согласно свойству (5), $H \otimes k \simeq H_{DR}^2(X)$, а $F \otimes k$ — это отображение $\bar{F}$, которое F индуцирует в когомологиях Де Рама. Воспользуемся фильтрацией, которую спектральная последовательность $E^{i,j} = H^j(X, \Omega^i) \Rightarrow H_{DR}^{i+j}(X)$ определяет в $H_{DR}^2(X)$. Действие отображения F на комплексе Де Рама переводит в 0 все дифференциальные формы и, значит, аннулирует уже первый член $F^1 H_{DR}^2(X)$ фильтрации. Так как $\text{gr}^0 H_{DR}^2(X) \simeq H^2(X, \mathcal{O})$, то ранг отображения $\bar{F}$ равен 1 или же $\bar{F} = 0$ и нам остается показать, что последний случай невозможен.

Предположение $\bar{F} = 0$ равносильно тому, что $FH \subset pH$, т.е. $F = p\Phi$, где Φ — p -линейный эндоморфизм модуля H . Применив к кристаллу (H, Φ) лемму 1, мы получим, что в H существует базис $x_1, \dots, x_{22}$, для которого $\Phi x_i = x_i$, т.е. $Fx_i = px_i$. Согласно предложению 2, это значит, что $S \otimes W = H$, а тогда $d(S \otimes W) =$

$d(S) \in W^*$. Ввиду предложения отсюда вытекает, что решетка S унимодулярна, а это невозможно, так как согласно общей теории [37], стр. 92 для унимодулярной четной гиперболической решетки ранга n , $n \equiv 2 \pmod{8}$.

Лемма 3. $F^n H \subset p^{n-1} H$.

Доказательство индукцией по n . Пусть утверждение для некоторого значения n доказано. Положим $\Psi = p^{-n+1} F$. Для тех независимых элементов $x_1, \dots, x_{22}$, для которых $Fx_i = px_i$, так же и $\Psi x_i = px_i$. Отсюда $\Psi^N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В частности, $\bar{\Psi} = \Psi \otimes k$ нильпотентно на $H \otimes k$. Кроме того, оно коммутирует с $\bar{F} = F \otimes k$, так как $\bar{F}$ имеет ранг 1, то отсюда легко следует, что $\bar{\Psi}\bar{F} = 0$. Это значит, что ΨF делится на p , т.е. утверждение леммы верно для $n+1$.

Теорема. Для суперсингулярной поверхности X типа $K3$, решетка $S = \text{Pic } X$, p -элементарна.

(Доказательство, основанное на плоских когомологиях, см. в [10]).

Заметим сначала, что подмодуль $S \otimes W$ в H характеризуется как совокупность тех элементов $x \in H$, для которых

$$F^n x \in p^n H \quad \text{для всех } n. \quad (4)$$

Так как для $x \in S$, $Fx = px$, то для $x \in S \otimes W$ условие (4) выполнено. Обозначим через K совокупность всех элементов $x \in H$, удовлетворяющих условию (4). Так как $H \supset K \supset S \otimes W$, то K — модуль ранга 22. По определению, $F|_K$ делится на p . Положим $\Phi = p^{-1} F$. Согласно лемме 1, K имеет базис $t_1, \dots, t_{22}$, для которых $\Phi t_i = t_i$. По предложению 2, $t_i \in S \otimes \mathbb{Z}_p$ и, значит, $K = S \otimes W$. Очевидно, что подмодуль K (т.е., как мы доказали, $S \otimes W$) — это максимальный подмодуль в H , на котором F делится на p , т.е. который инвариантен относительно $\Psi = p^{-1} F$.

Согласно лемме 3, элементы $x \in pH$ удовлетворяют условиям (4), т.е. $pH \subset S \otimes W$. Отсюда следует, что $S^* \otimes W \supset p^{-1} H$ (ввиду унимодулярности H) и, значит, $p(S^* \otimes W) \subset H$. Очевидно, что $p(S^* \otimes W)$ инвариантен относительно Ψ , и по сделанному выше замечанию $pS^* \otimes W \subset S \otimes W$. Отсюда следует, что $pS^* \subset S$.

Таким образом, мы видим, что в определении элементарной поверхности типа $K3$ требование p -элементарности решетки S было излишне. Термин “элементарная поверхность” на этом заканчивает свое существование.

Предложение 1 и теорема 1 вместе с результатом §1 показывают, что для суперсингулярной поверхности типа $K3$ ее решетка $S =$

$\text{Pic } X$ определяется единственным инвариантом — своим дискриминантом, причем всегда $d(S) = -p^{2\sigma}$. Число σ мы будем называть инвариантом Артина поверхности X и обозначать $\sigma(X)$ или $\sigma(S)$.

В качестве приложения полученных результатов докажем следующее утверждение.

Предложение 3. Автоморфизм ψ суперсингулярный поверхности X типа $K3$, тривиально действующий на группе S_X , равен тождественному.

(Доказательство несколько аналогично доказательству теоремы из §6).

Мы можем ограничиться случаем, когда ψ — автоморфизм конечного порядка. Действительно, автоморфизмы, тривиально действующие на группе S_X , образуют алгебраическую группу, а в каждой алгебраической группе над полем характеристики $p > 0$ существуют отличные от 1 элементы конечного порядка. Мы будем предполагать, что $\psi^l = 1$, где l — простое число.

Если f — класс кривой арифметического рода 1, то из условия $\psi^* f = f$ следует, что ψ сохраняет пучок $X \rightarrow \mathbf{P}^1$, слои которого принадлежат классу f , т.е. что существует автоморфизм $\psi_0 : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbf{P}^1. \end{array}$$

Пучок f мы будем выбирать в виде, который подсказывается теоремой из §1, т.е. считать, что $f \in U_2$ или $f \in U_2(p)$ в приведенном там представлении решетки S_X . Мы разделим все рассуждение на случаи: А. $\psi_0 \neq 1$ и В. $\psi_0 = 1$ и каждый из них на подслучаи 1. $l \neq p$ и 2. $l = p$.

А.1. Для любой приводимой кривой M положим $w(M) = \nu + \sum e(C_i)$, где ν — число неподвижных точек ψ на M , C_i — компоненты M , являющиеся неподвижными кривыми, а $e(C_i)$ — эйлерова характеристика. Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} w(M) &= e(M), \\ \sum w(F) &= 24, \end{aligned} \tag{5}$$

где сумма распространена на все слои пучка f , в которых лежат неподвижные точки или кривые. Очевидно, что эти слои расположены над двумя неподвижными точками ψ_0 на $\mathbf{P}^1$, так что в сумме

2 слагаемых. При $p = 2$ и при $p = 3$, $\sigma < 9$, рассматриваемые нами пучки имеют не менее 3-х приводимых слоев, а так как ψ переводит компоненты приводимых слоев в себя, то этот случай невозможен. При $p = 3$, $\sigma = 9, 10$, и при $p > 3$ мы имеем не более 2-х приводимых слоев F_i , $i = 1, \dots, r$. Если n_i — ранги этих слоев, то из вида решеток, приведенных в теореме §1 следует, что $\sum_1^r n_i < 20$.

Так как $e_i(F_i) \leq n_i + 2$, а $r \leq 2$, то $\sum e_i(F_i) < 24$ в противоречии с соотношениями (5).

А.2. По тем же соображениям мы должны иметь только один приводимый слой. Но при $p = 2, 3$, и при $p > 3$, $\sigma < 9$, имеется 2 приводимых слоя, так что нам остается рассмотреть случай $p > 3$, $\sigma = 9, 10$. Действие автоморфизма ψ переносится с расслоения $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ на его якобиево расслоение $J \rightarrow \mathbf{P}^1$. При $p > 3$, $\sigma = 9, 10$ оно (как и X) имеет приводимые слои, сумма рангов которых ≤ 4 (они соответствуют корневой системе решетки H_p). Так как группа сечений расслоения $J \rightarrow \mathbf{P}^1$ изоморфна S_f/R_f , в обозначениях §3, то ранг этой группы ≥ 16 . Если $\mathcal{A}$ — общий слой расслоения, то тем самым $\text{rg } \mathcal{U}(k(\mathbf{P}^1)) \geq 16$.

Записав уравнение кривой в виде $y^2 = x^3 + ax + b$ и выбрав координату t на $\mathbf{P}^1$ так, что $\psi_0^* t = t + 1$, мы получаем отсюда, что $a(t+1) = a(t)$, $b(t+1) = b(t)$, т.е. $a = a_1(t^p - t)$, $b = b_1(t^p - t)$ (что уже приводит к противоречию при больших p). Так как ψ действует тривиально на группе $\mathcal{U}(k(\mathbf{P}^1))$ (ψ переводит каждое сечение в себя), то $\mathcal{U}(k(t)) = \mathcal{U}_1(k(t))$, где $\mathcal{U}_1$ — кривая, определенная уравнением $y_1^2 = x_1^3 + a_1(\tau)x_1 + b_1(\tau)$. Поверхность, соответствующая этой кривой над полем $k(\tau)$, уже должна быть рациональна, так как $\deg a \leq 8$, $\deg b \leq 12$ и, значит, $\deg a_1 \leq 4$, $\deg b_1 \leq 6$. Поэтому $\text{rg } \mathcal{U}_1(k(\tau)) \leq 10$, а это противоречит тому, что $\text{rg } \mathcal{U}(k(t)) \geq 16$.

В. В этом случае ψ определяет автоморфизм общего слоя $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ и $J \rightarrow \mathbf{P}^1$ как эллиптической кривой над $k(\mathbf{P}^1)$. При $p = 2$ выбранный нами пучок квазиэллиптический, а квазиэллиптическая кривая, имеющая рациональную точку, обладает, как легко видеть, только тождественным автоморфизмом. Поэтому ψ действует на J тривиально. При $p = 3$, $\sigma = 1, 2$ $\text{Aut } J/k(\mathbf{P}^1) = \mathbf{Z}/2$ и группа точно представляется перестановками компонент слоев $*A_2$. Поэтому в нашем случае опять действие ψ на J тривиально. Наконец, при $p = 3$, $\sigma > 2$ и при $p > 3$ $\text{rg } J(k(\mathbf{P}^1)) > 0$, а из $\psi s = s$, где $s \in J(k(\mathbf{P}^1))$ следует, что $(\psi - 1)s = 0$, т.е. $n(\psi - 1)s = 0$, где n — норма эндоморфизма и $s \in \text{tors } J(k(\mathbf{P}^1))$. Поэтому во всех случаях действие ψ на J тривиально. Отсюда следует, что на X , $\psi = t_s$ — сдвиг на сечение s расслоения J . В главном однородном пространстве $X \rightarrow \mathbf{P}^1$ имеется p -кратное сечение θ и $t_s \theta = \theta$ в S_X , только

если $ps = 0$. Таким образом, случай В.1 невозможен. Наконец, при $p \neq 0$, $|\text{tors } J(k(\mathbf{P}^1))|$, будучи всегда степенью 2, не делится на p . Таким образом, остается разобрать случай $l = p = 2$.

При $p = 2$, $\sigma < 10$ выбранный нами пучок имеет сечение и поэтому $X = J$. Если $\sigma = 10$, то $\text{tors } J(k(\mathbf{P}^1)) = 2$ и эта группа состоит из двух элементов: нулевого сечения $\mathcal{O}$ и сечения s . Слои расслоения $X/\mathbf{P}^1$ и $J/\mathbf{P}^1$ имеют вид $*A_1$ и наша задача сводится к тому, чтобы выяснить, сохраняет ли их преобразование t_s или меняет местами, причем ответ будет одинаковым в $X/\mathbf{P}^1$ и $J/\mathbf{P}^1$. В последнем же расслоении наш вопрос равносильен такому: пересекает ли s и $\mathcal{O}$ одну и ту же компоненту вырожденного слоя, или разные. Ответ на него дается непосредственно из рассмотрения решетки S . В нашем случае $S = U_2 \oplus \widetilde{Q(D_{20})}$. Пусть $U_2 = f\mathbf{Z} + \mathcal{O}\mathbf{Z}$, $f^2 = 0$, $\mathcal{O}^2 = -2$, $f\mathcal{O} = 1$, $\widetilde{Q(D_{20})} = \bigoplus_1^{20} \mathbf{Z}e_i + \varepsilon\mathbf{Z}$, $e_i^2 = -2$, $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_1^{20} e_i$. Компоненты i -го вырожденного слоя соответствуют e_i и $f - e_i$. Очевидно, что $\mathcal{O}$ не пересекает e_i и пересекает $f - e_i$. Выражение для s получается однозначно из условий $sf = 1$, $se_i \geq 0$, $s(f - e_i) \geq 0$, $s^2 = -2$. Мы получаем, что $s = 5f + \mathcal{O} - \varepsilon$ и $se_i = 1$, $s(f - e_i) = 0$, т.е. s пересекает e_i и не пересекает $f - e_i$. Таким образом, $t_s \neq 1$ на S_X и, значит, $\psi = 1$.

Замечание. При $p > 2$ наше утверждение следует из более общего результата Огаса: автоморфизм любой поверхности X типа $K3$ равен 1, если он действует на группе $H^2(X/W)$ [33], стр. 15. Но дальше нам как раз нужен будет случай $p = 2$. Мы привели доказательство для любого p , так как оно использует более элементарные соображения, чем доказательство Огаса. Если желать ограничиться случаем $p = 2$, то некоторые его части можно опустить.

§9. Формальная группа Брауэра. Высота поверхности типа $K3$.

Еще один способ изучения деформаций поверхности X связан с понятием формальной группы Брауэра (см. [10], [12]). Пусть G — алгебраическая группа. Определим сначала функтор деформационных когомологий $\Phi^r(X, G)$ на категории артиновых локальных k -алгебр с полем вычетов k , полагая

$$\Phi^r(X, G)(A) = \ker(H^r(X \times A, G) \rightarrow H^r(X, G)). \quad (1)$$

Используя теорию Шлезингера [36] можно доказать представимость функтора $\Phi^2(X, G_m)$, если X — гладкая полная поверхность $K3$.

Это позволяет определить гладкую формальную группу $\widehat{\text{Br}}X$ таким образом, что есть изоморфизм функторов

$$(\widehat{\text{Br}}X)(A) \simeq \Phi^2(X, G_m)(A).$$

$\widehat{\text{Br}}X$ называется формальной группой Брауэра поверхности X .

Для дальнейшего нам удобно несколько переписать формулу (1). Если G — алгебраическая группа и A — артинова локальная k -алгебра, то мы можем определить пучок G_A на топологии X_{et} , полагая

$$G_A(U) = G(U \times A).$$

Тогда $H^r(X \times A, G) = H^r(X, G_A)$ и

$$\Phi^r(X, G)(A) = \ker(H^r(X, G_A) \rightarrow H^r(X, G)).$$

Естественная проекция $U \times A \rightarrow U$ дает нам гомоморфизм пучков

$$G_A \rightarrow G.$$

Обозначим через IG_A ядро этого гомоморфизма. Для коммутативной группы G легко проверить, что имеет место изоморфизм

$$G_A \simeq IG_A \times G.$$

Откуда получаем формулу

$$\Phi^r(X, G)(A) = H^r(X, IG_A).$$

В некоторых случаях пучок IG_A легко вычисляется. Например, если $A = k[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$, то IG_A не что иное, как касательное пространство к группе G в точке e .

$$IG_{k[\varepsilon]} = \ker(G_{k[\varepsilon]} \rightarrow G) \simeq TG.$$

В случае, когда функтор $\Phi^r(X, G)$ представляется формальной группой, мы можем также вычислить касательное пространство $T\Phi^r(X, G)$ к этой группе. Так как $\Phi^r(X, G)(k) = 0$, то

$$T\Phi^r(X, G) = \Phi^r(X, G)(k[\varepsilon]) = H^r(X, TG).$$

Для случая формальной группы Брауэра мы получаем

$$T\widehat{\text{Br}}X = H^2(X, G_a) = H^2(X, \mathcal{O}_X). \quad (2)$$

Таким образом, формальная группа Брауэра поверхности $K3$ одномерна.

Для одномерных формальных групп определена высота. Мы напомним определение. Пусть $[p](t)$ — формальный ряд, выражающий умножение на p в группе. Если он тождественно равен 0, то говорят, что высота группы равна ∞ . В этом случае группа изоморфна аддитивной группе. В противном случае всегда при некотором $h \geq 1$

$$[p](t) = a_h t^{p^h} + \sum_{k > p^h} c_k t^k, \quad a_h \neq 0. \quad (3)$$

Число h и называется высотой.

Известно, что над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$ одномерная формальная группа однозначно определяется своей высотой. В частности, группа высоты 1 — это мультипликативная группа. Она характеризуется также тем, что на ее касательном пространстве отображение Фробениуса (а на кокасательном — оператор Картье C) отличен от 0. Мы будем высоту группы $\widehat{\text{Br}}X$ называть также высотой поверхности X и обозначать $h(X)$.

Поверхность X типа $K3$ называется *обыкновенной*, если $h(X) = 1$. Ввиду (2) и сделанных выше замечаний, поверхность типа $K3$ тогда и только тогда является обыкновенной, когда $C\omega \neq 0$, где $\omega \in H^0(X, \Omega^2)$, $\omega \neq 0$, а C — оператор Картье.

Основой классификации коммутативных формальных групп является сопоставление каждой такой группе G некоторого W -модуля DG , называемого *модулем Дьедонне* и снабженного φ -линейным эндоморфизмом F . Для проверки тех свойств, которые дальше используются, удобнее определение при помощи “формальных кривых”.

Из функториальности определения группы $\widehat{\text{Br}}X$ легко вытекает, что

$$D\widehat{\text{Br}}X = H^2(X, DG_m). \quad (4)$$

Так как модуль Дьедонне группы G_m это кольцо векторов Витта, то

$$H^2(X, DG_m) = H^2(X, W(\mathcal{O}_X)). \quad (5)$$

Когомологии пучка векторов Витта рассматривались еще Серром. В нашем случае их можно вычислить через кристаллические когомологии X .

Предложение 1. Модуль $\widehat{D\Gamma}X \otimes \mathbf{Q}$ как модуль над W с оператором F изоморфен

$$H/H_1 \otimes \mathbf{Q},$$

где $H = H_{\text{crist}}^2(X/W)$, $H_1 = \{x \in H, F^{n+\text{rg}} H x \in p^n H \text{ для всех } n \geq 0\}$.

Доказательство проведено в работе [12].

Известно, что высоту одномерной формальной группы Z можно вычислить через ее модуль Дьедонне

$$\begin{aligned} h(Z) &= \dim DZ \otimes \mathbf{Q}, & \text{если } h(Z) < \infty, \\ h(Z) &= \infty \iff \dim DZ \otimes \mathbf{Q} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$h(X) = \infty \iff H/H_1 \text{ — конечной длины.}$$

Заметим, что подмодуль $c_1(S_X) \otimes W$ содержится в H_1 , значит, если $\text{rg } S_x = \text{rg } H$, то $h(X) = \infty$. Таким образом, мы получили предложение.

Предложение 2. Если поверхность X суперсингулярна, то $h(X) = \infty$.

До сих пор не доказано, хотя вероятно, что верно и обратное. Это установлено Артином для эллиптических поверхностей X [10].

Можно доказать следующее утверждение.

Предложение 3. Если $\mathcal{X} \rightarrow T$ — гладкое семейство поверхностей КЗ над неприводимой базой T , причем для любой точки $t \in T$ слой $\mathcal{X}_t$ имеет высоту ∞ , а для некоторой точки t_0 слой $\mathcal{X}_{t_0}$ — суперсингулярен, то для любой точки $t \in T$ $\mathcal{X}_t$ — суперсингулярная поверхность.

Достаточно доказать предложение, когда T — спектр локального кольца. Общий случай следует отсюда с помощью специализации. Рассмотрение случая, когда база — спектр локального кольца, основано на кристаллическом варианте теории препятствий к продолжению алгебраических циклов [33].

Понятие деформационных когомологий можно распространить, когда X задано над $\text{Spec } R$, где R — локальное кольцо. Сначала мы определяем функтор на категории локальных артиновых R -алгебр с полем вычетов k формулой

$$\Phi^r(X, G)(A) = \ker(H^r(X \times A, G) \rightarrow H^r(X \times k, G)).$$

Используя условие Шлезингера можно показать, что $\Phi^2(X, G_m)$ представим гладкой формальной группой, если X — поверхность типа $K3$. Эта группа $\widehat{\mathrm{Br}}X$ обладает тем свойством, что если $\mathrm{Spec} R_1 \hookrightarrow \mathrm{Spec} R$, то $(\widehat{\mathrm{Br}}X)_{\mathrm{Spec} R_1} = \widehat{\mathrm{Br}}(X|_{\mathrm{Spec} R_1})$. Очевидно, что $\widehat{\mathrm{Br}}X$ является одномерной формальной группой над кольцом R .

Если $\mathcal{X} \rightarrow T$ — семейство поверхностей $K3$ над локальной базой, то мы можем рассмотреть подсхемы T_i , определяемые тем условием, что $h(\widehat{\mathrm{Br}}X|_{T_i}) \geq i$. Ввиду формулы (3), подсхема T_i выделяется в T_{i-1} одним уравнением; повышение высоты одномерной формальной группы на 1 задается обращением в нуль одного коэффициента a_h .

Предложение 4. Для гладкой полной поверхности X типа $K3$ конечной высоты

$$\mathrm{rg} \mathrm{Pic} X \leq 22 - 2h(X).$$

Это частный случай неравенства Артина–Мазура

$$\mathrm{rg} \mathrm{Pic} X \leq b_2 - 2h(X),$$

доказанного в [12] для гораздо более широкого класса поверхностей. Для доказательства рассмотрим фильтрацию на модуле H :

$$H_0 = H,$$

$$H_i = \{x \in H, F^{n+\mathrm{rg} H} x \in p^{in} H \text{ при всех } n \geq 0\}.$$

Ясно, что подмодули H_i инвариантны относительно F . Обозначим для $N \subset H$ через $N^\perp$ множество $\{x \in H, \forall y \in N, (x, y) \in pW\}$. Тогда используя формулу (10) §8, легко показать, что $H_1 \subset H_2^\perp$, $H_3 \subset H_0^\perp = 0$. Более тонкий анализ строения кристалла H , основанный на понятии наклона [12], показывает, что $H_1 = H_2^\perp$. Тогда $\mathrm{rg} H_0/H_1 = \mathrm{rg} H_2 = h(X)$. С другой стороны $\mathrm{rg} S_X \leq \mathrm{rg} H_1/H_2$ и $\mathrm{rg} H = 22$. Откуда

$$22 \geq 2h(X) + \mathrm{rg} S_X.$$

Таким образом, если X — поверхность $K3$, то $h(X)$ может быть равно $1, \dots, 10, \infty$. Если $\mathcal{X} \rightarrow T$ — семейство алгебраических поверхностей типа $K3$, то фильтрация T обрывается на T_{10}

$$(T_{11})_{\mathrm{red}} = (T_\infty)_{\mathrm{red}}. \quad (6)$$

Теорема. Если $\mathcal{X} \rightarrow T$ — полное семейство формальных деформаций суперсингулярной поверхности X и задана некоторая p -элементарная подрешетка $N \hookrightarrow S_X$ ранга 22, дискриминанта $p^{-2\sigma}$, то схема $\Sigma(N)$, определенная в § 7, — гладкая подсхема размерности $\sigma - 1$.

Доказательство. С одной стороны, по формуле (9) § 7 для размерности касательного пространства $t = \dim T\Sigma(N)$ выполнено условие

$$t \leq 20 - \dim c[N].$$

Но $c[N]$ — линейная оболочка образов $\mathrm{gr}^1 c_1(u)$, $u \in N$, в $H^1(X, \Omega^1)$, поэтому

$$\begin{aligned} 20 - \dim c[N] &= \dim H^1(X, \Omega^1)/c[N] \leq \\ &\leq \dim(F^1 H_{DR}^2(X)/\langle c_1(N) \rangle) \leq \dim(H_{DR}^2(X)/\langle c_1(N) \rangle) - 1. \end{aligned}$$

Но для p -элементарной решетки $H_{DR}^2(X)/\langle c_1(N) \rangle_{\mathbf{k}} \simeq H^2(X/W)/\langle c_1(N) \rangle_w$, т.е. фактор унимодулярной решетки по подрешетке дискриминанта $p^{-2\sigma}$ и ясно, что

$$\dim_{\mathbf{k}} H^2(X/W)/\langle c_1(N) \rangle_w = \sigma.$$

Итак, мы доказали, что $\dim T\Sigma(N) \leq \sigma - 1$. С другой стороны, выделим $n_0 \in N$ такой, что образ $c_1(n_0)$ в $H_{DR}^2(X)$ не равен 0. Тогда $\dim \Sigma(n_0) = 19$. Такой элемент n_0 можно выбрать очень обильным. Тогда в семействе $\mathcal{X}_{(\Sigma n_0)} \rightarrow \Sigma(n_0)$ можно рассмотреть формальную группу Брауэра и построить в $\Sigma(n_0)$ фильтрацию по высоте. Имеем

$$\dim \Sigma(n_0)_{11} \geq \dim \Sigma(n_0) - 10 = 9, \quad (7)$$

причем такое неравенство имеет место для каждой неприводимой компоненты в $\Sigma(n_0)_{11}$, но $(\Sigma(n_0)_{11})_{\mathrm{red}} = (\Sigma(n_0)_{\infty})_{\mathrm{red}}$, ввиду (6).

Пусть U — неприводимая компонента $\Sigma(n_0)_{\infty}$ и η — общая точка в U . По предложению 3, $\mathrm{rg} \mathrm{Pic} \mathcal{X}_{\eta} = 22$ и переходя быть может к некоторому этальному накрытию, мы можем считать, что существует решетка M и изоморфизм

$$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic} \mathcal{X}_U \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic} \mathcal{X}_{\eta}.$$

Тогда M — p -элементарна и $U \subset \Sigma(M)$. По предыдущему

$$\dim U \leq \dim T\Sigma(M) \leq \sigma(M) - 1.$$

Сопоставляя это с (7), мы видим, что $\dim U = 9$ и U — гладкая подсхема в T .

Если U содержит некоторую общую точку $\Sigma(N)$, то $M \subset N$ и тогда легко видеть, что

$$\dim c[N] = \dim c[M] + \dim N/M.$$

Но так как

$$\dim U = \dim TU = \dim(H^1(X, \Omega^1)/c[M])$$

и условие продолжимости одного алгебраического класса задается одним уравнением, то

$$\dim \Sigma(N) = \dim(H^1(X, \Omega^1)/c[M]) - \dim N/M = \dim T\Sigma(N).$$

Теорема доказана.

Приведем в заключение один результат, касающийся кристаллических когомологий поверхностей типа $K3$, определенных над полем характеристики 2.

Алгебраическую поверхность мы будем называть сильно эллиптической, если на ней имеется пучок эллиптических кривых с сечением.

Предложение 5. Если X — сильно эллиптическая поверхность типа $K3$ над полем характеристики 2, то двойственность Пуанкаре превращает модуль $H^2(X/W)$ в четную решетку над W .

Таким образом, надо доказать, что для $x \in H^2(X/W)$, $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$. Это равносильно тому, что для $x \in H_{DR}^2(X)$, $x^2 = 0$. Идея доказательства заключается в том, что утверждение проверяется для одной конкретной сильно эллиптической поверхности типа $K3$, а потом “по непрерывности” переносится на все остальные. В доказательстве мы будем пользоваться свойствами обыкновенных кристаллов, изложенными подробно, например, в [20].

Докажем сначала, что утверждение верно для обыкновенной поверхности X типа $K3$, для которой $\operatorname{rg} S_X = 20$. Действительно, из общих свойств кристаллов вытекает (см. [20], 1.3.3), что для такой поверхности при любом p кристалл $H^2(X/W)$ разлагается в прямую сумму трех кристаллов:

$$H^2(X/W) = H_0^2(X/W) \oplus H_1^2(X/W) \oplus H_2^2(X/W),$$

где $\operatorname{rg} H_0^2 = \operatorname{rg} H_2^2 = 1$, $\operatorname{rg} H_1^2 = 20$, причем в $H_i^2(X/W)$ имеется базис, состоящий из элементов x , для которых $Fx = p^i x$. Пусть

T — множество $x \in H_1^2(X/W)$, для которых $Fx = px$. Очевидно, мы имеем вложение $S_X = S \subset T$, причем, согласно лемме 2 в §7, $S \otimes \mathbf{Z}_p$ выделяется прямым слагаемым в T , а значит, $S \otimes W$ — в $H_1^2(X/W)$. Если же $\operatorname{rg} S = \operatorname{rg} H_1^2 = 20$, то $S \otimes W = H_1^2(X/W)$. Из свойств произведения в $H^2(X/W)$ следует, что $H_1^2(X/W)$ ортогонально $H_0^2(X/W)$ и $H_2^2(X/W)$, а каждое из двух последних пространств изотропно. Таким образом, при $p = 2$ нам достаточно доказать, что $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$ для $x \in H_1^2(X/W)$. Но это очевидно, ввиду четности решетки S и того, что $H_1^2(X/W) = S \otimes W$.

В качестве примера такой поверхности мы можем взять куммерову поверхность, соответствующую абелеву многообразию $A \times A$, где A — несуперсингулярная эллиптическая кривая с комплексным умножением (например, задающаяся уравнением $y^2 + xy = x^3$). Для нее $\operatorname{rg} S_{A \times A} = 4$ и, значит, $\operatorname{rg} S_X = \operatorname{rg} S_{A \times A} + 16 = 20$. Поверхность X , ввиду признака, приведенного в этом параграфе, является обыкновенной, так как кривая A не суперсингулярна и для $\omega \in H^0(A \times A, \Omega)$, $C\omega \neq 0$, а ω переносится с $A \times A$ на X и дает там форму, для которой тоже $C\omega \neq 0$. Наконец, поверхность X сильно эллиптична, так как проекция $A \times A \rightarrow A$ (на второй множитель) после факторизации определяет эллиптический пучок $X \rightarrow \mathbf{P}^1$, в котором образ кривой $A \times 0$ является сечением.

Все сильно эллиптические поверхности типа $K3$ “образуют” квазипроективное многообразие: они задаются уравнением

$$y^2 + a_1(t)xy + a_3(t)y = x^3 + a_2(t)x^2 + a_4(t)x + a_6(t), \quad (8)$$

где $a_i(t)$ — многочлен степени $2i$ и поэтому определяется точкой взвешенно-проективного пространства M , в котором координатами служат коэффициенты многочленов $a_i(t)$, причем коэффициенты $a_i(t)$ имеют вес i . Точки, которым соответствуют поверхности не типа $K3$, образуют многообразие M_0 . В $M \setminus M_0$ любые две точки можно соединить неприводимой кривой. В частности, мы можем соединить кривой B' ту строго эллиптическую поверхность X , для которой мы уже доказали утверждение, с той поверхностью X_1 , для которой мы его хотим доказать. Над B' мы имеем семейство $\mathcal{X}' \rightarrow B'$, все слои которого являются строго эллиптическими поверхностями типа $K3$. Так как поверхности, записанные в вейерштрассовой форме (8), имеют только двойные рациональные точки, то, согласно результату работы [11], для семейства $\mathcal{X}' \rightarrow B'$ существует разрешение особенностей, т.е. такое семейство $\mathcal{X} \rightarrow B$ и

морфизмы $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}', g: B \rightarrow B'$, что квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$

коммутативен, база B — гладкая и полная, а для $g(b) = b', f: \mathcal{X}_b \rightarrow \mathcal{X}'_{b'}$, является разрешением особенностей слоя $\mathcal{X}'_{b'}$. Таким образом, гладкие поверхности X и X' включены в гладкое семейство $\mathcal{X} \rightarrow B$.

Нам остается доказать, что если $\mathcal{X} \rightarrow B$ — связное гладкое семейство поверхностей типа $K3$, один из слоев которого $X = \mathcal{X}_b$ является обыкновенной поверхностью и для $x \in H^2_{DR}(X)$, $x^2 = 0$, то это же верно и для всех слоев. Согласно идее, предложенной Делинем, это можно сделать следующим образом. Из общих свойств пучков на семействах многообразий легко получить, что, в случае поверхностей типа $K3$, пучок относительных когомологий Де Рама $H^2(X/B)$ является локально свободным. Поэтому нам достаточно доказать, что для некоторого аффинного открытого множества $U \subset B$, $U = \text{Spec } A$, модуль $H = \Gamma(U, H^2(X/B))$ является четной решеткой над A . Обычными редукциями это сводится к случаю, когда A есть локальное кольцо $\mathcal{O}_b$ и даже $A = \hat{\mathcal{O}}_b$ — его пополнение, т.е. $A \simeq k[[t]]$. Положим $A = W[[t]]$. Кристалл, соответствующий семейству $\mathcal{X}$, определяет свободный модуль $\bar{H}$ над $\bar{A}$, причем $H = \bar{H} \otimes_A A$ и $\bar{H}$ является решеткой над $\bar{A}$. Из

того, что поверхность X обыкновенная, следует существование в $\bar{H}$ фильтрации: $\bar{U}_0 \subset \bar{U}_1 \subset \bar{U}_2 = \bar{H}$, $\text{rg } \bar{U}_0 = 1$, $\text{rg } \bar{U}_1/\bar{U}_0 = 20$, $\text{rg } \bar{U}_2/\bar{U}_1 = 1$, $\bar{U}_1 = \bar{U}_0^\perp$. Кристалл $\bar{U}_1/\bar{U}_0$ является подкрученным единичным кристаллом, откуда $\bar{U}_1/\bar{U}_0 \simeq \mathbf{Z}_p^{20} \otimes \bar{A}$, где $\mathbf{Z}_p^{20}$ является решеткой ранга 20 над $\mathbf{Z}_p$. Тем самым в H возникает фильтрация $U_0 \subset U_1 \subset U_2 = H$ с аналогичными свойствами, в частности, $U_1/U_0 = (\mathbf{Z}/p)^{20} \otimes A$. Если $(\mathbf{Z}/p)^r \oplus \mathbf{Z}/pe_i$, то $(e_i, e_j) \in \mathbf{Z}/p$, а значит, при $p = 2$, $e_i^2 = 0$ раз это свойство верно в модуле $U_1/U_0 \otimes k$ (т.е. в точке b). Таким образом, решетка U_1/U_0 — четна, а значит, четна и решетка U_1 (так как $U_0 = U_1^\perp$). Из свойств общих кристаллов мы получаем, что $H = U_1 \oplus L$, где $L = H^0(U, R^0 f_* \Omega^2)$ — соответствует самому меньшему члену фильтрации Ходжа. Очевидно, что $(L, L) = 0$ (при любом p), откуда и следует четность решетки H .

Замечание. То же доказательство сохраняет силу для любой поверхности типа $K3$, которая находится в той же “связной компоненте” многообразия модулей, что и построенная выше поверхность

Х. Однако неизвестно, обладает ли этим свойством любая поверхность типа КЗ. Над полем комплексных чисел четность решетки $H^2(X, \mathbf{Z})$ для поверхности X типа КЗ выводится из теоремы Ву о связи между классами Штифеля и операцией Стинрода. Интересно было бы знать, верен ли аналог этой теоремы (при тех или иных ограничениях) для когомологий Де Рама или кристаллических когомологий по модулю кручения алгебраических многообразий над полем характеристики 2. Например, будет ли решетка $H^2(X/W)$ (по модулю кручения) четна тогда и только тогда, когда четен канонический класс поверхности X ? Интересно также исследовать этот вопрос для 2-адических этальных когомологий алгебраических многообразий, определенных над полем характеристики $p \neq 2$.

§10. Периоды суперсингулярных поверхностей

Изучим, следуя [27], более подробно структуры, возникающие на двумерных когомологиях поверхности типа КЗ. Напомним уже полученные сведения.

1. Модуль $H = H^2(X/W)$ — свободный модуль над кольцом W , с φ -линейным отображением F .

2. Умножение когомологий определяет в модуле H унимодулярное скалярное произведение со значениями в W , для которого $(Fx, Fy) = p^2(x, y)^\varphi$.

Обозначим $H \otimes_W k$ через $\overline{H}$ и $F \otimes_W k$ через $\overline{F}$.

3. Ранг отображения $\overline{F} : \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ равен 1.

Будем обозначать далее через $T = T(H)$ $\mathbf{Z}_p$ -подмодуль $\{x \in H, Fx = px\}$ в H , который называют модулем Тейта кристалла H . Отображение, сопоставляющее обратимому пучку его первый класс Черна, определяет вложение решетки S_X в H и мы будем далее отождествлять S_X с его образом в H .

4. Определены вложения решеток $S_X \subset T \subset H$, причем $S_X \otimes \mathbf{Z}_p = T$, $T \otimes W \subset H \subset T^* \otimes W$. Решетка T — p -элементарна, т.е. $\mathbf{Z}_p$ -модуль T^*/T аннулируется умножением на p .

Нам будет удобно фиксировать некоторую подрешетку $N \subset S_X$ полного ранга.

Определение. Вложение φ решетки $N \hookrightarrow S_X \hookrightarrow H$ будем называть N -структурой на поверхности X , если N — решетка полного ранга в S_X и

$$N^* \otimes W \supset N. \quad (1)$$

Решетка N обычно будет p -элементарной. N -структура на X будет иногда записываться как (X, φ) .

Назовем евклидовым $K3$ -кристаллом кристалл H со скалярным произведением, для которого выполнены свойства 2 и 3, N -структурой в евклидовом $K3$ -кристалле H будем называть вложение $N \hookrightarrow T(H) \subset H$, для которого $H \subset N^* \otimes W$.

Пусть решетка N — p -элементарная, и $\dim_k N^*/N = 2\sigma$. Пусть $D = (N^* \otimes W)/(N \otimes W) = N^*/N \otimes k$ — векторное пространство над полем k . Пользуясь представлением $D = N^*/N \otimes k$, определим в D оператор эндоморфизма Фробениуса $1 \otimes \varphi$, который будем обозначать просто φ . Как обычно, в N^*/N определено скалярное произведение, получающееся умножением на p скалярного произведения в N^* . Мы распространим его на все D и будем обозначать $[,]$. Так как $N \otimes W \subset H \subset N^* \otimes W$, то H соответствует подпространству $\tilde{H} \subset D$.

Предложение 1. Пусть $p > 2$. Сопоставим евклидову $K3$ -кристаллу H с N -структурой его образ $\tilde{H}$ в пространстве D . Таким образом, мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между евклидовыми $K3$ -кристаллами с N -структурой и подпространствами V в D со свойствами

- а) $\dim V = \sigma$,
- б) $\dim(V \cap \varphi V) = \sigma - 1$,
- в) V — изотропно относительно скалярного произведения $[,]$ в D .

Отметим, что скалярное произведение в N^*/N , а значит, и в D невырождено, поэтому условие а) означает, что V — максимальное изотропное подпространство.

Для рассмотрения случая $p = 2$ мы должны несколько дополнить все определения. Будем предполагать, что решетка N не только 2-элементарна, но и четна. Тогда квадратичная форма (x, x) принимает целые значения на N^* , четные на N и определяет квадратичную форму Q на N^*/N и, следовательно, на D , согласованную со скалярным произведением. Для $x, y \in D$

$$Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + [x, y].$$

Евклидов кристалл H мы будем называть четным, если скалярное произведение определяет в H четную решетку.

Предложение 1'. Пусть $p = 2$. Сопоставим четному евклидову $K3$ -кристаллу H с N -структурой его образ $\tilde{H}$ в D . Это устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством таких

кристаллов и множеством подпространств $V \subset D$ со свойствами а), б) и в') V — изотропно относительно квадратичной формы Q .

Мы будем доказывать оба предложения одновременно и при $p \neq 2$ будем обозначать через Q квадратичную форму $\frac{1}{2}[x, x]$ на D .

Пусть H — евклидов кристалл, удовлетворяющий условиям предложения. Решетка H содержит решетку $N \otimes W$, поэтому $d(N \otimes W) = d(H)p^{2l}$, где $l = \dim_k H/N \otimes W$. Тогда $k = \dim \bar{H}$ и из унимодулярности H следует, что $k = \sigma$. Решетка H определена на W , поэтому если элемент x из $N^* \otimes W$ принадлежит H , то $(x, x) \in W$, что равносильно тому, что для класса $\bar{x}$ в $N^*/N \otimes k$, $[x, x] = 0$. Это доказывает условие в) при $p > 2$. В случае $p = 2$, четность решетки H означает, что $(x, x) \in 2W$, а это равносильно тому, что $Q(\bar{x}) = 0$.

Рассмотрим теперь отображение F на $N^* \otimes W$. Оно совпадает с $p \otimes \varphi$. Рассмотрим $H_1 = \{x \in H, Fx \in pH\}$. Образ этого множества в $\bar{H}$ совпадает с $\text{Ker } \bar{F}$. Условие 3 означает, что $\dim_k H/H_1 = 1$. Так как $H_1 \supset N \otimes W$, то это равносильно тому, что образ H_1 в D имеет размерность $\sigma - 1$. Однако

$$(p \otimes \varphi)x \in pH \iff (1 \otimes \varphi)x \in H.$$

Поэтому образ H_1 в D совпадает с $\tilde{H} \cap \varphi \tilde{H}$, что доказывает условие б).

Если теперь V — подпространство в D со свойствами а), б), в), то рассмотрим полный прообраз H в $N^* \otimes W$ подпространства V . Это есть свободный W -подмодуль. Условие в) показывает, что значения скалярного произведения на H принадлежит W , а в') означает, что дополнительно $(x, x) \in 2W$. Так как $F = p \otimes \varphi$, то $F(N^* \otimes W) \subset N \otimes W$ и, следовательно, H F -инвариантно. Мы получили таким образом структуру КЗ-кристалла на H . Из а) следует унимодулярность решетки H , а из б) свойство 3. Легко видеть, что свойство 2 тоже выполнимо для H , и вложение $N \subset H$ задает N -структуру в H . Тем самым предложение доказано.

Пусть теперь D — векторное пространство размерности 2σ над полем k и на D задана невырожденная квадратичная форма Q и отображение Фробениуса φ . Назовем характеристическим подпространством в D подпространство V размерности σ , изотропное относительно формы Q и такое, что

$$\dim(V \cap \varphi V) = \sigma - 1. \quad (2)$$

Предложение 2. Если множество характеристических подпространств не пусто, то в грассмановом многообразии G подпространств размерности σ пространства D характеристические подпространства соответствуют точкам гладкого полного подмногообразия $P = P[Q]$ размерности $\sigma - 1$.

Известно, что максимальные изотропные подпространства невырожденной квадратичной формы параметризуются гладкой подсхемой в G . Обозначим ее R , $\dim R = \frac{\sigma(\sigma - 1)}{2}$. Рассмотрим теперь в $R \times R$ подсхему Π , состоящую из таких пар точек (v_1, v_2) , что для соответствующих подпространств (V_1, V_2) выполнено условие $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \sigma - 1$. Это условие равносильно также тому, что $\dim(V_1 + V_2) \leq \sigma + 1$. Далее мы будем использовать одно и то же обозначение для точки в G и соответствующего ей подпространства.

Ясно, что Π — замкнутая подсхема. Покажем, что она гладкая. Напомним, что подпространства размерности σ составляют два семейства, причем пересечение двух подпространств одного семейства имеет четную коразмерность в каждом из них, а пересечение подпространств разных семейств — нечетную. Если V_1 и V_2 из одного семейства и $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \sigma - 1$, то $V_1 = V_2$, если они из разных семейств, то $\dim(V_1 \cap V_2) = \sigma - 1$. Таким образом, подсхема Π состоит из объединения диагонали Δ в $R \times R$ и подсхемы Π' , состоящей из пар подпространств разных семейств, причем $\Delta \cap \Pi' = \emptyset$. Нам надо доказать гладкость Π' . Для этого достаточно доказать гладкость слоев проекции $\pi_2 : \Pi \rightarrow R$ на второй сомножитель. Напомним, что подпространства из некоторой окрестности в грассмановом многообразии G подпространства L представляются в виде

$$(E + A)L, \quad \text{где } A \in \text{Hom}(L, D).$$

При этом параметризация этой окрестности получается, если рассмотреть проекцию: $\tau : \text{Hom}(L, D) \rightarrow \text{Hom}(L, D/L)$. Подпространство $(E + A)L$ зависит только от образа τA и, выбирая некоторое сечение отображения τ , мы получим параметризацию аффинной окрестности точки L в G . Если L — характеристическое подпространство, то условие характеристичности $(E + A)L$ состоит в том, что для всех $l_1, l_2 \in L$

$$[l_1, Al_2] + [Al_1, l_2] = 0. \quad (3)$$

Если $(L_1, L_2) \in \Pi'$ и $((E + A)L_1, L_2) \in \Pi'$, то, кроме условия (3), должно быть выполнено условие

$$\dim(E + A)L_1 \cap L_2 = \sigma - 1. \quad (4)$$

Для удобства вычислений выберем в пространстве D базис. Выберем сначала базис $e_{\sigma+2}, \dots, e_{2\sigma}$ в $L_1 \cap L_2$, затем дополним его вектором $e_{\sigma+1}$ до базиса в L_1 и вектором e_1 до базиса в D , в котором матрица формы Q имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя этот базис, мы можем установить изоморфизм

$$D \simeq k^{2\sigma} \simeq k^{\sigma} \times k^{\sigma}.$$

Тогда $L_1 = \{(0, x), x \in k^{\sigma}\}$, а характеристическое подпространство из некоторой окрестности L_1 можно записать в виде $L = \{(xB, x), x \in k^{\sigma}\}$, где B — кососимметрическая квадратная матрица порядка σ . Заметим, что $L_2 = \{(y_1, 0, \dots, 0, y_2, \dots, y_{\sigma}), y_i \in k\}$ и поэтому условие (4) равносильно тому, что

$$(0, y_2, \dots, y_{\sigma})B \in \{(x, 0, \dots, 0), x \in k\}. \quad (5)$$

Это означает, что матрица B имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & b_1 & \dots & b_{\sigma-1} \\ -b_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{\sigma-1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем, что слой $\pi_2^{-1}(L_2)$ — гладкая подсхема размерности $\sigma - 1$. Следовательно, Π' — гладкое полное многообразие размерности $\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + (\sigma-1)$.

Рассмотрим теперь график Γ отображения Фробениуса на R . По определению, $P = \pi_1(\Gamma \cap \Pi')$. Однако отображение $\pi_i|_{\Gamma}$ устанавливает изоморфизм Γ и R' , поэтому $P \simeq \Gamma \cap \Pi'$. Полнота P сразу следует из полноты Γ и Π' . Покажем, что Γ и Π' пересекаются трансверсально в каждой точке. Представим касательное пространство и $R \times R$ как прямую сумму $\Theta_R \oplus \Theta_R$. Тогда $\Theta_{\Gamma} = \{(v, (d\varphi)v)\}$. Но $d\varphi = 0$, откуда сразу следует, что $\Theta_{\Gamma \cap \Pi'} = \text{Ker } d\pi_2$. Согласно доказанному выше, $\dim \text{Ker } d\pi_2 = \sigma - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \dim(\Theta_{\Gamma} + \Theta_{\Pi}) &= \dim \Theta_{\Gamma} + \dim \Theta_{\Pi} - \dim(\Theta_{\Gamma \cap \Pi}) = \\ &= \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \left(\frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \sigma - 1 \right) - (\sigma - 1) = \dim(R \times R). \end{aligned}$$

При трансверсальном пересечении двух гладких подмногообразий гладкого многообразия пересечение тоже гладко и его размерность совпадает с размерностью касательного пространства. Тем самым предложение доказано.

Отметим, что многообразие $\Pi' \subset R \times R$ состоит из пар характеристических подпространств, лежащих в разных семействах, значит, для того, чтобы многообразие $P[Q]$ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы отображение φ переставляло семейства характеристических подпространств квадратичной формы Q . В этом случае множество геометрических точек схемы P тоже состоит из двух компонент, переставляемых отображением φ . Можно снабдить схему P структурой схемы над $\mathbf{F}_p$ и она будет абсолютно неприводимой (см. [33]).

Предложение 3. Сохраним обозначения предложения 2. Если множество характеристических подпространств не пусто, то схема $P[Q]$ унитарна.

В векторном пространстве размерности 2σ над $\mathbf{F}_p$ есть два класса квадратичных форм, в качестве представителей которых можно взять

$$Q = x_1 x_{\sigma+1} + \dots + x_{\sigma} x_{2\sigma}, \quad (6)$$

$$Q = u(x_1, x_{\sigma+1}) + x_2 x_{\sigma+2} + \dots + x_{\sigma} x_{2\sigma}, \quad (7)$$

где $u(x_1, x_{\sigma+1})$ — бинарная квадратичная форма, не представляющая 0 над $\mathbf{F}_p$. В первом случае отображение φ сохраняет компоненты связности схемы R , поэтому характеристических подпространств нет и мы можем считать, что наша форма Q имеет в некоторой системе координат вид (7).

Будем считать, что такой вид форма Q имеет в базисе $e'_1, \dots, e'_{2\sigma}$ и придем к другому базису $e_1, \dots, e_{2\sigma}$, полагая: $e_1 = \alpha e'_1 + \beta e'_{\sigma+1}$, $e_{\sigma+1} = \alpha^{\varphi} e'_1 + \beta^{\varphi} e'_{\sigma+1}$, $e_i = e'_i$ для $i \neq 1, \sigma+1$, где $\alpha, \beta \in \mathbf{F}_{p^2}$ и таковы, что в этом базисе форма Q примет вид (6). Отображение φ задается тогда следующим образом:

$$\varphi e_1 = e_{\sigma+1}, \quad \varphi e_{\sigma+1} = e_1, \quad \varphi e_i = e_i \quad \text{при} \quad i \neq 1, \sigma+1.$$

Если мы положим $K_1 = \langle e_{\sigma+1}, \dots, e_{2\sigma} \rangle$, $K_2 = \langle e_1, e_{\sigma+2}, \dots, e_{2\sigma} \rangle$, то мы попадем в ситуацию, аналогичную рассмотренной в доказательстве предложения 2, причем $\varphi K_1 = K_2$, $\dim(K_1 + \varphi K_1) = \sigma + 1$. Снова мы будем записывать векторы из D через их координаты в

базисе $e_1, \dots, e_{2\sigma}$, разделяя эти координаты на две группы по σ координат в каждой. Пусть для $x, y \in k^{2\sigma}$ $\pi(x, y) = y$ и $l(x, y) = x_1$ — первый элемент строки x .

Пусть C — кососимметрическая матрица и $M_C = \{(xC, x)\}$. Вычислим более явно условие $\dim M_C \cap M_C^\varphi = \sigma - 1$. Заметим, что $\dim \pi(M_C) = \sigma$ и $\dim \pi(M_C^\varphi) = \sigma - 1$, значит, $\pi|_{M_C}$ — изоморфизм и $\dim(M_C \cap M_C^\varphi) = \sigma - 1$ тогда и только тогда, когда $M_C \cap M_C^\varphi = M_C \cap \pi^{-1}(\pi M_C^\varphi)$. Обозначим правое пересечение через T . Всегда имеет место включение $M_C \cap M_C^\varphi \subset T$. Для равенства необходимо и достаточно, чтобы $M_C^\varphi \supset T$. Выпишем базис T :

$$f_i = (\varepsilon_i C, \varepsilon_i) + c_{1i}^p(\varepsilon_1 C, \varepsilon_1) \quad \text{для } i > 1,$$

где $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0)$. Заметим, что $\pi(f_i) = \pi((\varepsilon_i C, \varepsilon_i)^\varphi)$, т.е. $f'_i = f_i - (\varepsilon_i C, \varepsilon_i)^\varphi \in \ker \pi$. С другой стороны, $(\ker \pi) \cap M_C^\varphi$ — одномерное пространство и l — нетривиальная линейная функция на нем. Элемент $(\varepsilon_1 C, \varepsilon_1)^\varphi$ можно считать базисным элементом в этом пространстве и $l((\varepsilon_1 C, \varepsilon_1)^\varphi) = 1$. Значит, для того чтобы f'_i принадлежало $(\ker \pi) \cap M_C^\varphi$, необходимо и достаточно выполнение равенства $f'_i = l(f'_i)(\varepsilon_1 C, \varepsilon_1)^\varphi$. Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$f_i - (\varepsilon_i C, \varepsilon_i)^\varphi = c_{1i}(\varepsilon_1 C, \varepsilon_1)^\varphi.$$

Или

$$(\varepsilon_i C, \varepsilon_i) + c_{1i}^p(\varepsilon_1 C, \varepsilon_1) = (\varepsilon_i C, \varepsilon_i)^\varphi + c_{1i}(\varepsilon_1 C, \varepsilon_1)^\varphi. \quad (8)$$

Положим $x_i = c_{1i}$, тогда систему (8) можно переписать в виде

$$c_{ji}^p - c_{ji} = x_i x_j^p - x_i^p x_j, \quad 2 \leq i < j \leq \sigma. \quad (9)$$

Теперь нам остается доказать лемму

Лемма 1. *Аффинное алгебраическое многообразие, заданное системой уравнений*

$$y_{ij}^p - y_{ij} = \varphi_{ij}(x_i, x_j), \quad i < j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

где φ_{ij} — p -многочлен по каждой из переменных, унирационально.

Доказательство леммы. Мы укажем способ последовательного построения унирациональной параметризации. Рассмотрим сначала одно уравнение $y_{in}^p - y_{in} = \varphi_{in}(x_i, x_n)$. Оно определяет одномерную подгруппу U_i в $G_a \times G_a$ над полем $k(x_n)$ — форму аддитивной

группы. Над некоторым расширением $k(x_n^{p-N})$ такая форма становится тривиальной. Это означает, что над $k(x_n^{p-N})$ определен изоморфизм $G_a \rightarrow U_i$. Он задается p -многочленами $y_{in} = \psi_i(z_i)$, $x_i = \varphi_i(z_i)$. Повторяя такое рассмотрение для всех $i = 1, \dots, n-1$, мы получим для достаточно большого N систему p -многочленов $\psi_i, \varphi_i, i = 1, \dots, n-1$ с коэффициентами из $k(x_n^{p-N})$. Полагая $t_n = x_n^{p-N}$, рассмотрим над полем $k(t_n)$ систему уравнений

$$y_{ij}^p - y_{ij} = \varphi_{ij}(\varphi_i(z_i), \varphi_j(z_j)), \quad i, j = 1, \dots, n-1, \quad i < j$$

Мы получим систему того же вида с меньшим числом индексов. Предполагая по индукции, что она определяет унирациональное многообразие, мы сразу получим унирациональность многообразия первоначальной системы. Лемма доказана

Вычисления, проведенные в доказательстве предложения 3, принимают особенно ясный вид при $\sigma = 3, p > 2$. Тогда квадрика $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$ в проективном пространстве $\mathbf{P}^5$ совпадает с грассманианом прямых в $\mathbf{P}^3$ в его каноническом вложении в $\mathbf{P}^5$. Два семейства изотропных подпространств реализуются как прямые, проходящие через точку $\mathbf{P}^3$, и как прямые, лежащие в одной плоскости. Отображение φ дает отображение $\mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^3$, которое нетрудно явно вычислить:

$$(\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3)^\varphi = (\alpha_1^p : -\alpha_0^p : -\alpha_3^p : \alpha_2^p).$$

Условие на размерность пересечения означает, что точка x принадлежит плоскости φx .

Таким образом, многообразие $P[Q]$ изоморфно над k поверхности $x_0x_1^p - x_1x_0^p + x_2x_3^p - x_3x_2^p = 0$ в $\mathbf{P}^3$, которая после замены координат превращается в поверхность Ферма $z_0^{p+1} + z_1^{p+1} + z_2^{p+1} + z_3^{p+1} = 0$. Унирациональность этой поверхности была показана в § 5. При $p = 2$ это рациональная поверхность, при $p = 3$ — поверхность типа $K3$, при $p > 3$ — поверхность общего типа.

Укажем еще, как на основании проведенных выше вычислений определить касательное пространство к многообразию $P = P[Q]$. Для этого рассмотрим $L \in P$ и кольцо $k[\varepsilon]$, $\varepsilon^2 = 0$. Касательное пространство составляют характеристические подпространства вида $(E + \varepsilon A)L$, где $A \in \text{Hom}(L, D)$, и такое подпространство зависит только от образа A при проекции $\tau : \text{Hom}(L, D) \rightarrow \text{Hom}(L, D/L)$. Заметим, что $\varphi(E + \varepsilon A)L = \varphi L$, так как $\varepsilon^p = 0$, поэтому условие (2) можно записать в виде

$$\dim((E + \varepsilon A)L \cap \varphi L) = \dim(L \cap \varphi L) = \sigma - 1.$$

Это означает, что

$$A(L \cap \varphi L) \subset \varphi L. \quad (10)$$

Однако образ τA при условии (10) однозначно определяется своим ограничением на $L \cap \varphi L$, которое уже может быть произвольным отображением в φL . Действительно, $(L \cap \varphi L)^\perp = L + \varphi L$, поэтому условие (3) не накладывает никаких ограничений на $A|_{L \cap \varphi L}$. Если l_0 — дополнительный вектор к $L \cap \varphi L$ в L , то значение $A l_0$ определяется условиями $[A l_0, l_0] = 0$, $[A l_0, l] = -[l_0, A l]$ при $l \in L \cap \varphi L$ с точностью до прибавления вектора из $l \in L \cap \varphi L$. Из этих рассуждений легко получить, что τA однозначно определяется образом $A|_{L \cap \varphi L}$ при проекции

$$\text{Hom}(L \cap \varphi L; \varphi L) \rightarrow \text{Hom}(L \cap \varphi L, \varphi L / (L \cap \varphi L)).$$

Таким образом, суммируя вышесказанное, мы получаем

$$\Theta_{P,L} \simeq \text{Hom}(L \cap \varphi L, \varphi L / (L \cap \varphi L)). \quad (11)$$

Рассмотрим четную, гиперболическую p -элементарную (при $p = 2$ — I типа) решетку N ранга 22 с $\sigma(N) = \sigma$. Из их перечисления, данного в теореме из §1, легко следует, что для них имеет место формула (7). Соответствующее пространство $P[Q]$ называется пространством периодов и обозначается $P[\sigma]$. Предложения 2 и 3 в этом случае объединяются в теорему:

Теорема 1. Многообразие периодов $P[\sigma]$ для $0 < \sigma < 11$ гладко, полно, имеет размерность $\sigma - 1$ и унирационально.

В предложении 1 было указано, как по кристаллу H над полем построить точку в многообразии периодов. Эту конструкцию можно обобщить на случай кристаллов над произвольной базой. Фиксируем некоторую решетку T с инвариантом Артина σ .

Предложение 4. Существует K3-кристалл $\mathcal{H}$ с T -структурой над $P[\sigma]$ со следующим универсальным свойством: любой K3-кристалл с T -структурой (при $p = 2$ любой четный K3-кристалл с T -структурой) над гладкой схемой R изоморфен обратному образу $f^*(\mathcal{H})$ для некоторого однозначно определенного морфизма $f: R \rightarrow P[\sigma]$. В случае $P = \text{Spec } k$ и кристалла H над R , точка $f(R)$ в $P[\sigma]$ определяется характеристическим подпространством $\varphi^{-1}[H]$.

Этот результат доказан Огасом [33] при $p > 2$; мы не будем приводить доказательство. Случай $p = 2$ рассматривается точно так же, благодаря дополнительному условию четности.

На основе этого предложения можно построить отображение периодов для суперсингулярных поверхностей $K3$. Пусть $\mathcal{X}/R$ — семейство суперсингулярных поверхностей $K3$ над гладкой базой R , снабженное T -структурой. При $p = 2$ нужно показать, что все слои строго эллиптические. Это так, если $\sigma < 10$ [32]. Тогда $R_{\pi}^2 \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ — суперсингулярный $K3$ -кристалл над R с T -структурой при $p = 2$ — четный, ввиду предложения 5 §9. Отображение $f : (R) \rightarrow P[\sigma]$, для которого $R_{\pi}^2 \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = f^*(\mathcal{H})$, однозначно определенное из предложения 4, называется отображением периодов для семейства $\mathcal{X}/R$.

Можно вычислить дифференциал отображения периодов. Если X — суперсингулярная поверхность $K3$ с T -структурой, то мы сопоставляем X подпространство $L = L(X)$, определяемое условием

$$\varphi L = \text{Im}(H \rightarrow T^*/T \otimes k), \quad (12)$$

где $H = H^2(X/W)$.

Воспользовавшись включением $T \otimes W \subset H \subset T^* \otimes W$ и изоморфизмом $(T^* \otimes W)/(T \otimes W) \cong D$, мы можем интерпретировать элемент $x \in L \cap \varphi L$ как образ в D элемента $x \in T^* \otimes W$, удовлетворяющего условиям $x \in H$, $\varphi x \in H$. Так как действие F на H и $\varphi = 1 \otimes \varphi$ на $T^* \otimes W$ связаны соотношением $F = p\varphi$, то отсюда $Fx \in pH$. Поэтому $Fx = 0$ в $H_{DR}^2(X)$. С другой стороны, из определения фильтрации в H_{DR}^2 , из действия F на $E_2^{i,j}$ и леммы 2 §8 следует, что $\text{Ker } F = F^1$. Поэтому $L \cap \varphi L = \text{Im } F^1 H$, откуда и ввиду (11)

$$\Theta_{P,L} \simeq \text{Hom}(L \cap \varphi L, \varphi L / (L \cap \varphi L)) \simeq \text{Hom}(\text{Im } F^1 H, \text{Im } H / \text{Im } F^1 H).$$

Заметим теперь, что $\text{Im } F^1 H$ в пространстве $D = T^*/T \otimes k$ совпадает с $\text{gr}^1 H/c[T]$ (в обозначениях §7), а $\text{Im } H / \text{Im } F^1 H$ — с $\text{gr}^0 H$. Таким образом, мы получаем, что

$$\Theta_{P,L(X)} \simeq \text{Hom}(\text{gr}^1 H/c[T], \text{gr}^0 H). \quad (13)$$

Существенным фактом однако является то, что изоморфизм формулы (13) не просто существует в каждой точке, но и обладает следующим свойством.

Предложение 5. Если $\mathcal{X} \rightarrow R$ — гладкое семейство суперсингулярных $K3$ поверхностей с T структурой и $\pi : R \rightarrow P$ — отображение периодов, то его дифференциал $d\pi$ в точке r , с учетом изоморфизма (13), превращается в отображение ∇^1 , задаваемое для

$H = H^2(X_r/W)$ связностью Гаусса–Манина. Иными словами, коммутативна следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 \Theta_{R,r} & \xrightarrow{\text{Kod}} & H^1(X_r, \Omega^1) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \text{Hom}(\text{gr}^1 H/c[T], \text{gr}^0 H) & \longrightarrow & \text{Hom}(\text{gr}^1 H, \text{gr}^0 H),
 \end{array} \quad (14)$$

где Kod — отображение Кодайры–Спенсера.

(Доказательство см. в работе Огаса [33]).

Учитывая рассмотрения §7, мы получаем как следствие локальную теорему Торелли.

Теорема 2. Если $\mathcal{X} \rightarrow \Sigma_T$ — универсальное семейство деформаций суперсингулярной поверхности КЗ X , с T -структурой, для которой $\sigma(T) < 10$ при $p = 2$, то:

- а) Σ_T — гладкая схема размерности $\sigma(T) - 1$.
- б) отображение периодов $\Sigma_T \rightarrow P$ — этально.

Доказательство. Мы можем считать, что $\Sigma_T = \text{Spec } R$, где R — полное локальное кольцо. Тогда ясно, что $\Sigma_T = \Sigma(T)$ — гладкая схема размерности $\sigma(T) - 1$ по теореме 1 §9, откуда следует а). Пункт б) следует из того, что ввиду а), семейство $\mathcal{X} \rightarrow \Sigma$ совпадает с семейством деформаций X , сохраняющих алгебраические циклы из T , $\mathcal{X} \rightarrow \Sigma(T)$. Ввиду предыдущего предложения и того факта, что Kod — мономорфизм, мы получаем, что df — мономорфизм, а равенство размерностей показывает, что это даже изоморфизм.

§11. Многообразие модулей

Выберем некоторую четную, p -элементарную гиперболическую решетку N ранга 22 (при $p = 2$ — I типа). Как мы знаем, при каждом σ , $1 \leq \sigma \leq 10$, такая решетка N , для которой $\sigma(N) = \sigma$, существует только одна.

Заметим, что любая суперсингулярная поверхность X типа КЗ, для которой $\sigma(X) \leq \sigma(N)$, имеет хотя бы одну N -структуру. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что решетка S_X имеет подрешетку, изоморфную N , или наоборот, что решетка N может быть вложена в решетку N_1 , изоморфную S_X . Вложения N в целочисленную решетку описываются изотропными подпространствами в пространстве N^*/N размерности 2σ над $\mathbf{F}_p$.

Так как любая квадратичная форма ранга 3 над F_p представляет 0, то $N^*/N \simeq U_2^{\sigma-1} \oplus V_2$ или $\simeq U_2^\sigma$, где V_2 — двумерное анизотропное пространство (можно показать, что имеет место первый случай). Отсюда следует, что имеется изотропное подпространство N_1/N любой размерности $\leq \sigma - 1$. Соответствующая решетка N_1 обладает всеми нужными свойствами и однозначно ими характеризуется, значит, $N_1 \simeq S_X$.

В случае семейства $f : X \rightarrow T$ N -структура уже не обязана существовать. Пусть T — спектр полного целостного локального кольца. Обозначим через L обратимый пучок на X , имеющий в общем слое положительный квадрат d , а через c такую константу, что в любой p -элементарной гиперболической решетке E ранга 22 для любого вектора $l \in E$, $l^2 = d$ векторы $x \in E(l)$ с $|x^2| < c$ порождают всю решетку $E(l)$. Существование такой константы легко следует из леммы Минковского. Рассмотрим элементы $x \in \text{Pic } X/T$, $(L, x) = 0$, $|x^2| < c$. Из общих свойств схемы Пикара вытекает, что эти элементы определяют приводимую схему, распадающуюся на конечное число экземпляров, изоморфных T . Таким образом, $\text{Pic } X/T \simeq N_1 \times T$ для некоторой решетки N_1 . Выбрав N -структуру в N_1 , мы получим N -структуру и в X . Тогда для любой точки $t \in T$ в слое над t тоже определяется N -структура.

Если X/T — семейство над произвольной неприводимой и локально неприводимой базой, то те же рассуждения показывают, что $\text{Pic } X/T$ определяет неразветвленное накрытие Галуа $T' \rightarrow T$ и группа Галуа Γ этого накрытия действует на $\text{Pic } X_{\bar{\eta}}$, где $\bar{\eta}$ — геометрическая общая точка базы T . Семейство $X' = X \times_T T'$ уже таково, что $\text{Pic } X'/T' = N_1 \times T'$ и поэтому оно имеет N -структуру. При этом поверхности X'_i , лежащие над точками t'_i , накрывающими одну и ту же точку t , все между собой изоморфны (они изоморфны X_i), но определяют на X_i разные N -структуры, переходящие друг в друга при помощи автоморфизмов группы Γ .

Лемма 1. Пусть (X, L) — деформация суперсингулярной поверхности X_0 типа $K3$ и обильного пучка L_0 , причем база T этой деформации является спектром полного регулярного локального кольца и L_0^2 не делится на p . Пусть $\bar{T}$ — подсхема суперсингулярных поверхностей в T и $\bar{T} = \cup \Sigma_i$ — разложение $\bar{T}$ на неприводимые компоненты. Пусть Θ — касательное пространство к T в замкнутой точке t_0 , T_i — касательные пространства к Σ_i , $T_i \subset T$. Обозначим через δ , δ_i отображения связности Гаусса–Манина $\text{gr}^1 \nabla$, возникающие в семействах над T и над Σ_i . Предположим, что δ отображает Θ на $\text{Hom}(\text{gr}^1 H/c_1(L_0), \text{gr}^0 H)$ эпиморфно, где $H = H^2(X_0/W)$, и что $\text{Ker } \delta = \text{Ker } \delta_i$ для всех i .

Тогда схемы Σ_i — гладкие одинаковой размерности, для каждого i определена естественная N -структура в кристалле H_{Σ_i} , где N — решетка, определяемая условием $\sigma(N) = 10$. Для различных i подрешетки $N \rightarrow \text{Pic } X/\Sigma_i \rightarrow S_{X_0}$ в S_{X_0} различны.

Доказательство. Обозначим через v размерность $\text{Ker } \delta = \text{Ker } \delta_i$. Тогда $\dim T = \dim \Theta = 19 + v$. Подсхема $\bar{T}$ определяется условием $h(X_{\bar{T}}) = \infty$, поэтому для каждой неприводимой компоненты Σ_i , $\dim \Sigma_i \geq 9 + v$.

С другой стороны, если η_i — общая точка Σ_i , то решетка $\text{Pic } X_{\eta_i}$ имеет ранг 22, поэтому проводя те же рассуждения что и в теореме 1 § 9 и пользуясь диаграммой (14), §10, мы получаем, что $\dim \Sigma_i \leq v + \sigma(\text{Pic } X_{\eta_i}) - 1$.

Отсюда мы сразу получаем, что $\sigma(\text{Pic } X_{\eta_i}) = 10$, $\dim \Theta_i = v + 9$ и, значит, Σ_i — гладкая подсхема. Более того Σ_i определяется как подсхема в T , на которую можно продолжить циклы из подрешетки $\text{Pic } X_{\eta_i} \hookrightarrow \text{Pic } X_0$, поэтому для разных i эти подрешетки различны. Полагая $N = \text{Pic } X_{\eta_i}$, мы получаем нужную N -структуру.

Выберем одну из камер U относительно гиперболической системы корней в N и рассмотрим все возможные вложения решетки N в p -элементарные решетки того же ранга $N \subset N_i$. Так как они соответствуют изотропным подпространствам пространства N^*/N над $\mathbb{F}_p$, то их только конечное число. В $N_i \otimes \mathbb{R}$ множество U уже может не быть камерой, но разобьется на конечное число камер. Ввиду конечности числа этих разбиений, найдется вектор $l \in U \cap N$, который будет лежать внутри своей камеры при любом вложении $N \rightarrow N_i$. Если $N_i = \text{Pic } X_i$, а камера, в которой лежит l , соответствует обильным классам, то l соответствует обильному классу. Умножая, в случае необходимости, l на $k > 2$, мы можем предполагать, что l соответствует очень обильному классу. Такой вектор $l \in N$ мы будем называть универсальной поляризацией. Из предшествующего легко следует, что всегда существует универсальная поляризация l с $l^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Дальше будет фиксирована некоторая универсальная поляризация $l \in N$ с $l^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Если N -структура (X, φ) такова, что $\varphi(l)$ — поляризация поверхности X , то мы будем говорить об универсальной поляризации N -структуры.

Очевидным образом определяется изоморфизм N -структур с универсальной поляризацией.

Очевидно, что всякая суперсингулярная поверхность типа $K3$ обладает N -структурой с универсальной поляризацией. Действительно, мы видели, что какая-то N -структура $\varphi_1 : N \rightarrow \text{Pic } X$ существует. По условию, вектор $\varphi_1(l)$ содержится внутри одной из камер U_i решетки $\text{Pic } X$. Существует такой составленный из отра-

жений автоморфизм σ этой решетки, что σU_i — камера обильных классов. Тогда класс $\sigma\varphi_1(l)$ — очень обилён (по построению) и $\varphi = \sigma\varphi_1$ определяет N -структуру с универсальной поляризацией.

Следующий результат использует одно утверждение, которое “наверняка” верно, но доказательства которого мы не могли найти в литературе. Утверждение это заключается в том, что гладкая поверхность X типа $K3$, вложенная в проективное пространство $\mathbb{P}^N$, определяет стабильную точку соответствующей схемы Гильберта относительно действия группы $\mathrm{PGL}(N)$. Утверждение это явно “легче” соответствующего результата Гизекера для поверхностей общего типа [21]. Мы надеемся, что доказательство вскоре будет опубликовано кем-либо из специалистов. Пока же следующую теорему надо рассматривать как условное утверждение.

Теорема. В любой положительной характеристике p существует семейство поверхностей типа $K3$ $f: \mathcal{X} \rightarrow M$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- (1) Семейство обладает N -структурой с универсальной поляризацией l .
- (2) Всякая суперсингулярная поверхность типа $K3$ изоморфна одному из слоев семейства.
- (3) Если два слоя $f^{-1}(m_1)$ и $f^{-1}(m_2)$ изоморфны вместе с их N -структурами и поляризациями, то $m_1 = m_2$.
- (4) M и f гладки.
- (5) Отображение периодов $\pi: M \rightarrow P$, соответствующее семейству f , этально.

Доказательство. Пусть N — решетка и $l \in N$ — вектор, которые были ранее фиксированы, и пусть $l^2 = c$. Рассмотрим схему Гильберта H_n поверхностей типа $K3$, вложенных в проективное пространство $\mathbb{P}^n$ при помощи обратимого пучка с квадратом c .

Пусть $\overline{H}_n \subset H_n$ — подсхема, точки которой соответствуют гладким суперсингулярным поверхностям и $\overline{H}_n = \bigcup \Sigma_i$ — ее разложение на неприводимые компоненты в формальной окрестности точки $s \in \overline{H}_n$.

Проверим, что к H_n , $\overline{H}_n$ и Σ_i применима лемма 1. В работе [6], стр. 537–538, из рассмотрения стандартных точных последовательностей выведено, что многообразие H_n (там оно обозначено через M) гладко и имеет место точная последовательность:

$$0 \rightarrow sl(n+1) \rightarrow T_{H_n, s} \rightarrow H^1(X_s, \Theta)^{L_0} \rightarrow 0,$$

где $sl(n+1)$ — алгебра Ли группы $G = \mathrm{PGL}(n)$, реализованная как подпространство касательного пространства $T_{H_n, s}$ в точке $s \in H_n$.

Отсюда следует, что $\text{Ker } \delta = sl(n+1)$ и отображение δ эпиморфно. Так как многообразие Σ_i инвариантно относительно G , то $sl(n+1) \subset T_i$, т.е. $\text{Ker } \delta = \text{Ker } \delta_i$, как и требуется в лемме 1. Мы можем применить эту лемму и видим, что каждая ветвь Σ_i многообразия $\overline{H}_n$ — гладкая.

Обозначим через V_α неприводимые компоненты многообразия $\overline{H}_n$. На каждой из них путем ограничения с H_n определяется семейство $\mathcal{Y}_\alpha \rightarrow V_\alpha$ суперсингулярных поверхностей типа КЗ. Группа G действует как на каждом из V_α , так и на семействе $\mathcal{Y}_\alpha$, причем эти действия согласованы.

Пусть V'_α — нормализация многообразия V_α . Согласно лемме 1, все V'_α — гладкие. Морфизм нормализации $V'_\alpha \rightarrow V_\alpha$ определяет на каждом из них семейство поверхностей $\overline{\mathcal{Y}}_\alpha \rightarrow V'_\alpha$, причем как на V'_α , так и на $\overline{\mathcal{Y}}_\alpha$ согласованно действует группа G . Пусть $V'_\alpha \rightarrow V_\alpha$ — минимальное неразветвленное накрытие такое, что $\mathcal{Y}'_\alpha/V'_\alpha$ имеет N -структуру (N, φ_α) . Существование такого накрытия было показано раньше. Отберем те семейства, для которых при некотором выборе изоморфизма φ_α элемент $l \in N$, будет соответствовать поляризации, определенной исходным вложением в $\mathbb{P}^n$: только за ними мы сохраним обозначения $\mathcal{Y}'_\alpha$.

Нашей дальнейшей целью является рассмотрение фактора V'_α/G и мы должны, прежде всего, убедиться, что он существует. Это вытекает из критерия, приведенного в книге Мамфорда [29], стр. 38. Так как все точки схемы H_n , а значит, и V_α стабильны (см. замечание перед формулировкой теоремы), то нужный нам результат вытекает из Предложения 1.18 книги [29], стр. 44.

Так как схема V'_α , а значит, и V'_α — гладкая, ввиду леммы 1, то нам достаточно доказать, что G действует на V'_α без неподвижных точек. Но на V'_α определено семейство поверхностей $\mathcal{Y}'_\alpha$, на которое продолжается действие G . Это действие согласовано с действием на группы Пикара поверхностей и с N -структурой, определенной на семействе $\mathcal{Y}'_\alpha/V'_\alpha$. Поэтому неподвижная точка определяла бы поверхность X и ее автоморфизм, тривиальный на $\text{Pic } X$. Ввиду Предложения из §8, такой автоморфизм является тривиальным.

Несвязное объединение схем $M_\alpha = V'_\alpha/G$ является базой того семейства, которое мы строим. Семейство $\mathcal{X}$ над базой M строится совершенно аналогично, исходя из семейства, определенного над базой H_n . Семейство $\mathcal{X}_\alpha$ определяется как фактор $\mathcal{Y}'_\alpha/G$. Существование фактора следует из [29], Предложения 2.18 (р. 65).

Проверим, что построенное семейство $\mathcal{X}/M$ обладает свойствами 1)–5), приведенными в теореме. Свойства 1) и 4) очевидны из построения. Свойство 2) также очевидно: ведь любая суперсингулярная поверхность типа КЗ обладает N -структурой, а элемент l по

его выбору определяет на ней поляризацию степени s . Так поляризованная поверхность X соответствует некоторой точке схемы H_n , а значит, хотя бы одной точке хоть одной схемы M_α .

Проверим свойство 3). Если слои X_{m_1} и X_{m_2} изоморфны как поляризованные поверхности, то им соответствуют G -эквивалентные точки схемы $\overline{H}_n$. Можно считать, что это вообще одна и та же точка $\overline{m} \in \overline{H}_n$. Согласно лемме 1, разные ветви Σ_i в этой точке различаются своими образами $\varphi_i(N)$ в $\text{Pic } X_{\overline{m}}$. Так как $\varphi_1(N) = \varphi_2(N)$, то точкам m_1 и m_2 соответствует одна и та же точка на некоторой схеме V'_α . Наконец, как было выяснено в начале параграфа, из того, что морфизмы φ_1 и $\varphi_2 : N \rightarrow \text{Pic } X_{\overline{m}}$ совпадают, следует, что точкам m_1 и m_2 соответствует одна и та же точка на V'_α .

Остается проверить, что отображение периодов этально на каждом M_α . Если $\Theta_x(V'_\alpha)$ — касательное пространство в точке $x \in V'_\alpha$, то действие группы G на V'_α определяет вложение $sl(n+1) \hookrightarrow \Theta_x(V'_\alpha)$ и $\Theta_y(M_\alpha) = \Theta_x(V'_\alpha)/sl(n+1)$, где $y \in M_\alpha$ — точка, соответствующая $x \in V'_\alpha$ при факторизации по G . С другой стороны, $\Theta_x(V'_\alpha) \simeq \Theta_x(V_\alpha)$, а последнее пространство изоморфно $\Theta_s(\Sigma_i)$ для $s \in H_n$ и некоторого i . Как доказано в лемме 1, $\text{Ker } \delta_i = sl(n+1)$, $\dim \text{Im } \delta_i = 9$. Из этого следует, что для отображения δ_α Кодaira–Спенсера, соответствующего семейству $\mathcal{Y}_\alpha/M_\alpha$, $\text{Ker } \delta_\alpha = 0$, $\dim \text{Im } \delta_\alpha = 9$. Ввиду предложения 4 в §10, отсюда следует этальность отображения периодов.

Доказанная теорема устанавливает такую тесную связь между многообразием модулей M и многообразием периодов P , что естественно возникает вопрос, в какой степени свойства одного переносятся на другое. Так как многообразие P полно, то прежде всего встает вопрос — полно ли M ? Утверждение его полноты равносильно следующему свойству семейств суперсингулярных поверхностей типа $K3$:

Для морфизма $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec } R$, где R — одномерное, регулярное полное локальное кольцо, общий слой которого — суперсингулярная поверхность типа $K3$, существует такое конечное накрытие R'/R и морфизм $\mathcal{X}' \rightarrow \text{Spec } R'$, что общий слой $\mathcal{X}'$ изоморфен общему слою $\mathcal{X} \otimes_R R'$, а замкнутый слой также является гладкой поверхностью типа $K3$.

Коротко это утверждение можно описать как то, что суперсингулярные поверхности типа $K3$ “не вырождаются”. Есть несколько аргументов в пользу справедливости такой гипотезы. Прежде всего — аналогия с абелевыми многообразиями, где имеет место аналогичный факт: “не вырождаются” абелевы многообразия, у которых p -алгебра Ли является унитарной. Это следует из теоремы о стабильной редукции Мамфорда–Гротендика, согласно ко-

торой для каждого семейства абелевых многообразий $\mathcal{X} \rightarrow \text{Спец } R$ существует семейство $\mathcal{X}' \rightarrow \text{Спец } R'$ с описанными выше свойствами, для которого замкнутый слой является расширением абелева многообразия при помощи произведения групп G_m . Еще более убедительно сопоставление с тем, что мы имеем в характеристике 0. Из результатов В.С. Куликова [4] следует, что над полем комплексных чисел желаемое семейство $\mathcal{X}'$ существует тогда и только тогда, когда монодромия исходного семейства $\mathcal{X}$ конечна. Если предположить, что такой же результат верен над полями произвольной характеристики, то отсюда вытекало бы сформулированное выше свойство, так как очевидно, что в семействе суперсингулярных поверхностей типа $K3$ монодромия конечна. Наконец, мы докажем в §12 это свойство над полями характеристики 2.

Предположим, что гипотеза о том, что суперсингулярные поверхности типа $K3$ “не вырождаются”, верна. Тогда мы имели бы этальный морфизм *полных* многообразий $M \rightarrow P$ и число прообразов каждой точки должно было бы быть одинаковым. Если существовала бы еще точка $x_0 \in P$, для которой можно было бы доказать, что она имеет единственный прообраз, то отсюда следовало бы, что отображение периодов является изоморфизмом. Иными словами, была бы верна глобальная теорема Торелли в следующей формулировке.

Если (X, φ) и (X', φ') — две суперсингулярные поверхности типа $K3$ с N -структурой, то всякий изоморфизм N -структур f

$$\begin{array}{ccc} & H^2(X/W) & \\ \varphi \nearrow & \downarrow f & \\ N & & \\ \varphi' \searrow & H^2(X'/W) & \end{array},$$

переводящий камеру эффективных дивизоров в $\text{Pic } X \hookrightarrow H^2(X/W)$ в камеру эффективных дивизоров в $\text{Pic } X'$, индуцируется единственным изоморфизмом поверхностей X и X' .

В частности, отсюда следует, что группа автоморфизмов суперсингулярной поверхности X типа $K3$ изоморфна факторгруппе $\text{Aut } S_X / G$, где G — нормальный делитель, порожденный отражениями относительно системы корней в S_X .

При $p > 2$ Огас нашел в [33] такую суперсингулярную поверхность X , что в соответствующей ей точке $\pi_0 \in P$ отображение периодов взаимно однозначно: это куммерова поверхность, соответствующая суперсингулярному абелеву многообразию.

В следующем параграфе мы покажем, что такая поверхность существует и при $p = 2$.

Пример. Рассмотрим гипотезу о том, что семейство поверхностей типа $K3$ с конечной монодромией не вырождается, на одном примере, на который наше внимание обратил Делинь.

Как показал Шиода [42], куммерова поверхность $A \times A/G$, $G = \{1, g\}$, $gx = -x$, где A — суперсингулярная эллиптическая кривая над полем характеристики 2, не является поверхностью типа $K3$, но рациональна. Рассмотрим семейство $A_\varepsilon^{(1)} \times A_\varepsilon^{(2)}/G$, определенное над $k[[\varepsilon]]$, причем в общей точке или $A_\varepsilon^{(1)}$ или $A_\varepsilon^{(2)}$ — несуперсингулярная эллиптическая кривая, а $A_0^{(1)} = A_0^{(2)} = A$. Согласно сказанному выше, это семейство вырождается. Если верна высказанная выше гипотеза, то должна существовать перестройка этого семейства, которая не вырождается. Покажем, что это действительно так.

Пусть R — кольцо характеристики 2, $\bar{R} = R[y_1, y_2]$, $y_i^2 + P_i y_i + Q_i = 0$, $P_i, Q_i \in R$, $i = 1, 2$, $g \in \text{Aut } \bar{R}/R$, $gy_i = y_i + P_i$, $G = \{1, g\}$. Легко видеть, что $\bar{R}^G = R[G]$, $z = P_2 y_1 + P_1 y_2$, $z^2 + P_1 P_2 z + P_1^2 Q_2 + P_2^2 Q_1 = 0$. При $u = z/P_1 P_2$, $u^2 + u = Q_1/P_1^2 + Q_2/P_2^2$. Положим $R = k[[\varepsilon]] [x_1, x_2]$, $P_i = \lambda_i x_i + \mu_i$, $Q_i = f_i(x_i) = x_i^3 + \alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i + \gamma_i$, $\lambda_i, \mu_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in k[[\varepsilon]]$. Тогда $\text{Spec } \bar{R}^G$ будет аффинным открытым множеством $A_\varepsilon^{(1)} \times A_\varepsilon^{(2)}/G$, где $A_\varepsilon^{(i)}$ задается уравнением $y_i^2 + (\lambda_i x_i + \mu_i) y_i = f_i(x_i)$. В частности, если $A_\varepsilon^{(1)} = A_\varepsilon^{(2)} = A$, причем A задается уравнением $y^2 + y = f(x)$, то уравнение $z^2 + z + f_1(x_2) = 0$ определяет кубическую, т.е. рациональную поверхность — это результат Шиоды.

В общем случае мы получаем для $A_\varepsilon^{(1)} \times A_\varepsilon^{(2)}/G$ уравнение $u^2 + u = \frac{f_1 x_1}{(\lambda_1 x_1 + \mu_1)^2} + \frac{f_2 x_2}{(\lambda_2 x_2 + \mu_2)^2}$. Условия $A_1^{(i)} = A$ можно записать в виде $\lambda_i(0) = 0$, $\mu_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\lambda_1 \mid \lambda_2$, $\lambda_2/\lambda_1 = \lambda$ и положим $\lambda_1 x_i = s_i$. После умножения на λ_1^3 мы получаем уравнение $\lambda_1^3(u^2 + u) = \frac{s_1^3 + \lambda_1 \varphi_1}{(s_1 + \mu_1)^2} + \frac{s_2^3 + \lambda_1 \varphi_2}{(\lambda s_2 + \mu_2)^2}$, где $\varphi_i = \alpha_i s_i^2 + \beta_i s_i \lambda_1 + \gamma_i \lambda_1^2$. Полагая $\lambda_1 = \nu^2$, $\nu \in k[[\varepsilon]]$, $\nu^3 u = v$, мы получаем при $\varepsilon = 0$ уравнение $v^2 = \frac{s_1^3}{(s_1 + m_1)^2} + \frac{s_2^3}{(l s_2 + m_2)^2}$, где $m_i = \mu_i(0)$, $l = \lambda(0)$. Если $v(s_1 + m_1)(s_2 + m_2) = w$, то $w^3 = s_1^3(l s_2 + m_2)^2 + s_2^3(s_1 + m_1)^2 = s_2^3(s_1 + m_1)^2 + l^2 s_1^3 s_2^2 + m_2^2 s_1^3$. Полагаем $s_1 = t$, $s_2(s_1 + m_1)^2 = \xi$, $w(s_1 + m_1)^2 = \eta$. Умножая уравнение на $(s_1 + m_1)^4$, получаем $\eta^2 = \xi^3 + l^2 t^3 \xi^2 + (m_1 + t)^4 m_2^2 t^3$. Это же уравнение приводится к виду $\eta^2 = \xi_1^3 + l^4 t^6 \xi_1 + (m_1 + t)^4 m_2^2 t^3$. Это квазиэллиптический пучок, в дискриминант которого входят

точки $t = 0$, $t = m_1$ и $t = \infty$ с кратностями 4, 8, 8, откуда следует, что мы получаем поверхность типа $K3$. Поверхности типа $K3$, в которые специализируются наши семейства, суперсингулярны, так как они обладают квазиэллиптическим пучком. Легко определить, какие именно поверхности таким образом получаются. При $l = 0$, если положить $t = \tau^{-1}$, то мы получим стандартную форму пучка со слоями D_4 , E_8 и E_8 , указанную в [8], стр. 868. При $l \neq 0$, применяя указанные в той же работе признаки, легко получить, что пучок имеет слой типа D_4 при $t = 0$ и слой типа D_8 при $t = m_1$ и $t = \infty$. Отсюда следует, что решетка S_X для этой поверхности X содержит подрешетку $U_2 \oplus Q(D_4) \oplus Q(D_8)^2$. Однако это не вся решетка S_X , так как пучок имеет ненулевое сечение $\xi = l^{-1}m_2(m_1 + t)^2$, $\eta = (l^{-1}m_2)^{3/2}(m_1 + t)^3$. Поэтому для решетки S_X $\sigma \leq 2$. Нетрудно убедиться, что при общем l , $\sigma = 2$ (м.б. всегда при $l \neq 0$?). Таким образом, пределами несуперсингулярных куммеровых поверхностей, когда само абелево многообразие становится суперсингулярным, являются при $p = 2$ суперсингулярные поверхности X с $\sigma(X) = 1, 2$. Иначе говоря, именно это поверхности являются при $p = 2$ естественными аналогами суперсингулярных куммеровых поверхностей, которые при $p > 2$ характеризуются тоже условием $\sigma(X) = 1, 2$.

§12. Отображение периодов над полем характеристики 2

Квазиэллиптические пучки. Как и в §2, мы будем говорить, что на поверхности X задан квазиэллиптический пучок, если задан морфизм поверхности X на $\mathbf{P}^1$, общий слой которого есть рациональная кривая арифметического рода 1 над полем $k(\mathbf{P}^1)$. Такие пучки могут существовать только при $p = 2$ или 3. Квазиэллиптический пучок с сечением может быть задан в вейерштрассовой нормальной форме. Аффинная часть поверхности в вейерштрассовой нормальной форме задается как подсхема в теле расслоения $\mathcal{O}(2n) \oplus \mathcal{O}(3n)$ над $\mathbf{P}^1$, определяемая

$$\begin{aligned} \text{при } p = 2 \text{ уравнением } y^2 = x^3 + ax + b, \quad a \in H^0(\mathcal{O}(4n)), \\ b \in H^0(\mathcal{O}(6n)), \quad (1) \\ \text{при } p = 3 \text{ уравнением } y^2 = x^3 + b, \quad b \in H^0(\mathcal{O}(6n)), \end{aligned}$$

x и y — координаты в первом и втором слагаемом. Морфизм, задающий пучок, индуцируется проекцией. Для получения полной поверхности нужно пополнить каждый слой "бесконечно удаленной точкой". Будем обозначать эту поверхность $X_{(a,b)}$ для $p = 2$ и $X_{(b)}$ для $p = 3$.

Прежде чем сформулировать некоторые свойства квазиэллиптических поверхностей, определим операцию дифференцирования сечений пучков $\mathcal{O}(px)$ на $\mathbf{P}^1$. Заметим, что если $(t_0 : t_1)$ — система координат на $\mathbf{P}^1$ и элемент $s \in H^0(\mathcal{O}(pk))$, представляется в этой системе формой $F(t_0, t_1)$, то $t_0 \frac{\partial F}{\partial t_0} + t_1 \frac{\partial F}{\partial t_1} = 0$. Значит, определена форма $\partial_{(t_0:t_1)} F$ степени $pk - 2$, такая, что $\frac{\partial F}{\partial t_1} = t_0 \cdot \partial_{(t_0:t_1)} F$.

Лемма. Если $(t_0, t_1) = (u_0, u_1)A$, то

$$\partial_{(t_0:t_1)} F = \partial_{(u_0:u_1)} F \cdot \det A^{-1}.$$

Это легко проверить прямым вычислением. Таким образом, с точностью до постоянного множителя, производная s' сечения s не зависит от системы координат.

Определим дискриминант вейерштрассовой нормальной формы квазиэллиптического пучка, полагая

$$D = (a')^2 a + (b')^2 \text{ при } p = 2 \text{ и } D = (b')^2 \text{ при } p = 3.$$

Дискриминант определен с точностью до постоянного множителя и принадлежит $H^0(\mathbf{P}^1, \mathcal{O}(12n - 4))$.

Предложение 1. 1) Пусть $p = 2$. Изоморфизм поверхностей $X_{(a,b)}$ и $X_{(a_1,b_1)}$, сохраняющий структуру квазиэллиптического пучка, существует тогда и только тогда, когда пару (a_1, b_1) можно получить из (a, b) последовательным применением преобразований

- (а) $a \rightarrow a + c^4$
 $b \rightarrow b + ac^2 + d^2$, где $c \in H^0(\mathcal{O}(n))$, $d \in H^0(\mathcal{O}(3n))$;
- (б) $a \rightarrow a^\sigma$
 $b \rightarrow b^\sigma$, где $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{P}^1)$;
- (в) $a \rightarrow \varepsilon^4 a$
 $b \rightarrow \varepsilon^6 b$, где $\varepsilon \in k$.

Все такие преобразования порождают группу G . Преобразования типа (а) составляют в G нормальную подгруппу H . Преобразования типов (б) и (в) коммутируют между собой и $G/H \simeq \text{PSL}(2, k) \times G_m$.

2) Пусть $p = 3$. Изоморфизм поверхностей $X_{(b)}$ и $X_{(b_1)}$, сохраняющий структуру квазиэллиптического пучка, существует тогда и только тогда, когда элемент b_1 можно получить из b последовательным применением преобразований

- (а) $b \rightarrow b + d^3$, где $d \in H^0(\mathcal{O}(2n))$;
- (б) $b \rightarrow b^\sigma$, где $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{P}^1)$;
- (в) $b \rightarrow \varepsilon^6 b$, где $\varepsilon \in k$.

Эти преобразования порождают группу G , а преобразования типа (а) составляют в ней нормальную подгруппу H и

$$G/H \simeq \text{PSL}(2, k) \times G_m$$

Доказательство легко вытекает из формул, приведенных в [28], стр. 301.

Отметим, что при $p = 3$ подгруппа H изоморфна аддитивной группе векторного пространства $H^0(\mathcal{O}(2n))$, а при $p = 2$ — группе матриц

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & c^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, c \in H^0(\mathcal{O}(n)), d \in H^0(\mathcal{O}(3n)) \right\}.$$

Предложение 2. При преобразованиях типа (а) дискриминант поверхности не меняется. Если дискриминант тождественно равен 0, то поверхность $X_{(a,b)}$ не нормальна и имеет кривую особых точек. Если $D \neq 0$, то поверхность $X_{(a,b)}$ имеет конечное число особых точек, расположенных в слоях, соответствующих нулям сечения D .

Это легко проверить стандартными вычислениями.

Пусть $a \in H^0(\mathcal{O}(4n))$, как и ранее, и $(t_0 : t_1)$ — некоторая система координат на $\mathbf{P}_1$. Обозначим через $Sa(t_0, t_1)$ форму от координат, полученную следующим образом

$$Sa(t_0, t_1) = a(t_0, t_1) - a(1, 0)t_0^{4n},$$

то есть мы вычитаем из a сечение, являющееся 4-й степенью, так что разность обращается в нуль в начале координат. Нам будет далее полезно следующее предложение.

Предложение 3. Пусть $p = 2$. Для поверхности $X = X_{(a,b)}$, заданной уравнением (1), $\chi(\mathcal{O}_X) = n$ тогда и только тогда, когда для любой системы координат $(t_0 : t_1)$ на $\mathbf{P}_1$ или $Sa(t_0, t_1)$ не делится на t_1^4 , или $D = (a')^2 a + (b')^2$ не делится на t_1^{12} .

Пусть $p = 3$. Для поверхности $X = X_b$ тогда и только тогда $\chi(\mathcal{O}_X) = n$, когда для любой системы координат $(t_0 : t_1)$ на $\mathbf{P}_1$ $D = (b')^2$ не делится на t_1^{12} .

Доказательство. Хорошо известно, что всегда $\chi(\mathcal{O}_X) \leq n$ и $\chi(\mathcal{O}_X) < n$ тогда и только тогда, когда преобразованиями типа (а) можно привести уравнения к виду

$$y^2 = x^3 + (u^4 a_1)x + u^6 b_1,$$

где $\deg u > 0$. Тогда можно сделать бирациональное преобразование $y_1 = yu^{-3}$, $x_1 = xu^{-2}$, устанавливая изоморфизм первоначальной поверхности и новой, с уравнением

$$y_1^2 = x_1^3 + a_1 x_1 + b_1,$$

в котором степени сечений a_1 и b_1 будут меньше. В таком случае $\chi(\mathcal{O}_X) < n$. Однако при нарушении условия предложения для некоторой системы координат $(t_0 : t_1)$ мы можем преобразовать уравнение преобразованиями типа (а), так что у a и b возникнут множители t_1^4 и t_1^6 . Это доказывает предложение в одну сторону. Обратное утверждение элементарно следует из вида преобразований типа (а).

Отметим, что в условиях предложения после разрешения особых точек слоев мы получаем относительно минимальную модель пучка, которая при $n > 1$ является гладкой минимальной моделью поверхности.

Семейство квазиэллиптических пучков. Конструкция поверхностей $X_{(a,b)}$ и $X_{(b)}$ дает нам возможность построить семейство квазиэллиптических пучков над базой T , где $T = H^0(\mathcal{O}(4n)) \times H^0(\mathcal{O}(6n))$ при $p = 2$ и $T = H^0(\mathcal{O}(6n))$ при $p = 3$. В обоих случаях T — аффинное пространство.

Изучим действие на T группы G изоморфизмов квазиэллиптических пучков. Сначала рассмотрим действие подгруппы H преобразований типа (а) и построим кольцо H -инвариантных функций на T .

Фиксируем некоторую систему координат $(t_0 : t_1)$ на $\mathbb{P}^1$. Запишем сечения a и b как формы от t_0, t_1

$$a = \sum_{i=0}^{4n} a_i t_0^{4n-i} t_1^i, \quad b = \sum_{i=0}^{6n} b_i t_0^{6n-i} t_1^i,$$

Коэффициенты a_i, b_i мы можем рассматривать как функции на пространстве T . При $p = 3$ функции $\{b_i, i \neq 0(3)\}$ инвариантны относительно действия H . При $p = 2$ функции $\{a_i, i \neq 0(4)\}$ тоже инвариантны. Кроме того, в этом случае мы рассмотрим многочлены от a_i, b_i , являющиеся коэффициентами дискриминанта D . Обозначим их через d_i . Они тоже будут инвариантны, так как дискриминант не меняется при действии H . При этом их выражения через a_i, b_i имеют вид

$$d_k = f_k(a_i, i \neq 0(4)) \text{ при } k \not\equiv 0 \pmod{4},$$

$$d_{4j} = b_{2j+1}^2 + f_{4j}(a_i).$$

Укажем точный вид нескольких функций

$$\begin{aligned}d_0 &= b_1^2 + a_1^2 a_0; & d_1 &= a_1^3; & d_2 &= a_1^2 a_2; \\d_3 &= a_1^2 a_3; & d_4 &= b_3^2 + a_3^2 a_0 + a_1^2 a_4.\end{aligned}$$

Предложение 4. Кольцо H -инвариантных функций на T есть кольцо многочленов. В качестве образующих этого кольца можно взять

$$\{a_i, d_j, i \not\equiv 0(4), j \equiv 0(4)\} \text{ при } p=2, \{b_i, i \not\equiv 0(3)\} \text{ при } p=3.$$

Доказательство. Случай $p=2$. Из явных формул для преобразований, принадлежащих H , следует, что любую геометрическую точку $t \in T$, преобразованием из H можно перевести в такую точку из $\bar{T}$, что $a_i(\bar{t}) = 0$ при $i \equiv 0 \pmod{4}$, $b_i(\bar{t}) = 0$ при $i \equiv 0 \pmod{2}$. Из этого следует, что $d_{4j}(\bar{t}) = b_{2j+1}^2(\bar{t})$. Тогда если f H -инвариантная функция на S , то

$$\begin{aligned}f(t) &= f(\bar{t}) = F(a_i, b_{2j+1}, i \not\equiv 0(4))(\bar{t}) = \\&= F(a_i, d_{4j}^{1/2}, i \not\equiv 0(4))(\bar{t}) = F(a_i, d_{4j}^{1/2})(\bar{t})\end{aligned}$$

для некоторого многочлена F . Однако, ограничивая функцию $F(a_i, d_{4j}^{1/2})$ на линейные многообразия точек из T вида $b=0$, a' — фиксировано, легко получить, что такая функция принадлежит кольцу регулярных функций на T , только если она выражается через a_i и d_{4j} в целых степенях.

Случай $p=3$. Здесь утверждение предложения очевидно.

Предложение 5. Обозначим через $\bar{T}$ спектр кольца H -инвариантных функций. Тогда схема $\bar{T}$ является геометрическим фактором для действия H на T .

Доказательство. Нам надо проверить четыре условия (см. [29], опр. 0.6). Условия (i) и (iv) непосредственно очевидны. Для доказательства условия (ii) надо проверить, что две геометрические точки t_1 и t_2 с одинаковыми значениями инвариантных функций лежат на одной орбите. Действительно, при $p=2$, используя преобразования из H , мы можем считать, что $a_i(t_1) = a_i(t_2)$ для всех i . Тогда $d_{4j}(t_1) = d_{4j}(t_2)$ влекут $b_{2j+1}(t_1) = b_{2j+1}(t_2)$, а используя очевидные преобразования из H , мы можем добиться того, чтобы $b_j(t_1) = b_j(t_2)$ для всех остальных j . При $p=3$ рассуждение еще более просто. Условие (iii) — это универсальная субмерсивность

морфизма $\varphi: T \rightarrow \bar{T}$. При $p = 3$ φ — это просто факторизация линейного пространства по подпространству, и универсальную субмерсивность такого морфизма легко проверить. При $p = 2$ φ можно представить в виде композиции чисто несепарабельного конечного морфизма аффинных пространств, изоморфизма и факторизации линейного пространства по подпространству, и из универсальной субмерсивности каждого сомножителя следует универсальная субмерсивность для $p = 2$.

Действие группы G на T определяет действие G/H на $\bar{T}$. Действие сомножителя G_m на $\bar{T}$ описывается очень просто. $\bar{T}$ — это линейное пространство и G_m действует по координатам. Геометрический фактор подсхемы $T \setminus \{0\}$ существует и является взвешенным проективным пространством P . При $p = 3$ это пространство типа (6^{3n}) , изоморфное просто проективному пространству. (Взвешенное проективное пространство имеет тип (a^n, b^m) , если n координат имеют вес a и m — вес b). При $p = 2$ оно имеет тип $(4^{3n}, 12^{3n})$ и изоморфно взвешенному проективному пространству типа $(1^{3n}, 3^{3n})$. Для установления изоморфизма мы определим степень координатных функций на T , полагая

$$\begin{aligned} \deg a_i &= 1, \quad \deg d_{4j} = 3 && \text{при } p = 2, \\ \deg b_i &= 1 && \text{при } p = 3. \end{aligned}$$

Заметим, что это определение степени согласовано с заменой координатных функций, возникающей при замене координат на $\mathbf{P}^1$. Нам остается рассмотреть действие группы $\mathrm{PSL}(2, k)$ на взвешенном проективном пространстве P . Это действие допускает линеаризацию L , при $p = 3$ положим $L = \mathcal{O}_p(1)$, а при $p = 2$ $L = \mathcal{O}_p(3)$ ($\mathcal{O}_p(n)$ обозначает пучок, определяемый рациональными функциями веса n).

Обозначим через P_* и P_{**} подмножества стабильных и полустабильных точек, соответственно, а через $\bar{T}_*$, $\bar{T}_{**}$ и T_* , T_{**} — их полные прообразы в $\bar{T}$ и T .

Предложение 6. Открытое подмножество таких точек $t \in T$, что для соответствующей поверхности $X = X_{(t)}$, $\chi(\mathcal{O}_X) = n$ содержится в T_* при всех $n \geq 2$, $T_* = T_{**}$ при $p = 3$ и при $p = 2$, $n \equiv 0 \pmod{2}$. При $n = 2$ подмножество $T_* = T_{**}$ в точности совпадает с подмножеством тех точек s , для которых $\chi(\mathcal{O}_X) = 2$ и, значит, тех, что поверхность X есть поверхность $K3$.

Доказательство. Применим критерий стабильности Гильберта–Мамфорда [29], теорема 2.1. Для этого мы должны вычислить

действие однопараметрических подгрупп группы $\text{PSL}(2, k)$ на сечениях линеаризации L . Однопараметрические подгруппы соответствуют системам координат на $\mathbf{P}^1$. Пусть $\lambda \in \text{PSL}(2, k)$ — некоторая подгруппа. Тогда существует такая система координат $(t_0 : t_1)$, что $\lambda(\alpha)t_0 = \alpha^{-1}t_0$, $\lambda(\alpha)t_1 = \alpha t_0$. Фиксируя эту систему координат, рассмотрим функции

$$\begin{aligned} a_i, \quad i \neq 0(4), \quad d_{4j} & \quad \text{при } p = 2, \\ b_i, \quad i \neq 0(3) & \quad \text{при } p = 3 \end{aligned}$$

на $\overline{T}$. Тогда при $p = 3$ они составляют базис сечений пучка, а при $p = 2$ такой базис получится, если взять всевозможные произведения по три функции a_i и функции d_{4j} . Действие подгруппы λ на эти функции определяется формулами

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha)a_i &= \alpha^{2i-4n}a_i, \\ \lambda(\alpha)d_i &= \alpha^{2i-12n+4}d_i, \\ \lambda(\alpha)b_i &= \alpha^{2i-6n}b_i. \end{aligned}$$

Таким образом, при $p = 2$ точка $x \in P$ не стабильна, если при некотором выборе системы координат

$$\begin{aligned} a_i(x) &= 0 \quad \text{при } 2i - 4n < 0, \quad i \neq 0(4), \\ d_{4j}(x) &= 0 \quad \text{при } 8j - 12n + 4 < 0, \end{aligned}$$

и не полустабильна, если то же верно для

$$\begin{aligned} 2i - 4n &\leq 0, \quad i \neq 0(4), \\ 8j - 12n + 4 &\leq 0. \end{aligned}$$

При четном n эти условия равносильны, так как $2i - 4n = 0$ влечет $i = 2n \equiv 0(4)$ и $8j - 12n + 4 = 0$ влечет $j = \frac{3n-1}{2} \notin \mathbf{Z}$. Тем самым показано, что $P_* = P_{**}$. Остальные утверждения получаются просто сравнением критерия стабильности и условия предложения 2. Случай $p = 3$ рассматривается аналогично. Условие неустойчивости в этом случае: для некоторой системы координат

$$b_i(x) = 0 \quad \text{при } 2i - 6n < 0, \quad i \neq 0(3),$$

А равенство $2i - 6n = 0$ влечет $i = 0(3)$ при всех n .

Таким образом, мы получаем, что для открытого подмножества $T_* \subset T$ существует геометрический фактор по действию G $T_*/G \simeq P_*/\mathrm{PSL}(2, k)$ и в случае, когда $T_* = T_{**}$, этот фактор — полное многообразие (см. [29], стр. 187).

Полнота базы универсального семейства. Напомним критерий полноты алгебраических многообразий. Напомним известный критерий полноты (мы уже ссылались на него в §11).

Пусть T — квазипроективное алгебраическое многообразие и R, R' — схемы, каждая из которых есть спектр одномерного полного регулярного локального кольца.

Если для любого рационального отображения $\varphi : R \dashrightarrow T$ существует регулярное отображение $\psi : R' \rightarrow T$ и конечный морфизм $\pi : R' \rightarrow R$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R' & & \\ \downarrow & \searrow & \\ R & \dashrightarrow & T \end{array}$$

коммутативна, то многообразие T — полно.

Рассмотрим теперь универсальное семейство $\mathcal{X} \rightarrow M$ суперсингулярных $K3$ поверхностей, инвариант Артина которых удовлетворяет неравенству

$$\sigma(X) \leq 9 \text{ при } p = 2,$$

$$\sigma(X) \leq 5 \text{ при } p = 3.$$

Теорема. База M указанного выше универсального семейства $\mathcal{X} \rightarrow M$ — полное многообразие.

Доказательство. Будем использовать сформулированный выше критерий полноты. Пусть R — снова спектр полного одномерного регулярного локального кольца. Задание рационального отображения $\varphi : R \dashrightarrow M$ равносильно заданию гладкого семейства суперсингулярных $K3$ поверхностей $V_r \rightarrow \{r\}$ над $\{r\} = R \setminus r_0$. Рассматривая некоторое накрытие $R' \rightarrow R$, мы можем считать, что семейство определено над $\{r'\}$ и имеет N -структуру, где $\sigma(N) = 9$ или 5, соответственно, если $p = 2$ или 3.

Согласно замечанию 4 к теореме из §5, в рассматриваемых случаях в общем слое нашего семейства существует квазиэллиптический пучок с сечением, так что мы можем воспользоваться предложением 6. Для доказательства теоремы нам достаточно показать,

что после, быть может, еще некоторого подъема базы $R'' \rightarrow R'$ семейство $V_{r''} \rightarrow \{r''\}$ может быть дополнено до гладкого семейства суперсингулярных $K3$ поверхностей $V_{R''} \rightarrow \{R''\}$.

Чтобы упростить обозначения, будем считать, что нам дано гладкое семейство $V_r \rightarrow \{r\}$ якобиевых квазиэллиптических поверхностей $K3$ над общей точкой схемы R . Ясно, что такое семейство может быть получено обратным образом построенного ранее семейства якобиевых квазиэллиптических поверхностей $U \rightarrow T$ (где $n = 2$) относительно некоторого морфизма $\sigma : \{r\} \rightarrow T_*$. Причем два разных морфизма σ и σ_1 , эквивалентные относительно действия группы G на T , дают одинаковые обратные образы семейства. В нашем случае, ввиду предложения 6, геометрический фактор T_*/G — полное многообразие, значит, полученное из σ отображение $\bar{\sigma} : \{r\} \rightarrow T_*/G$ может быть продолжено до морфизма $\bar{\sigma} : \{R\} \rightarrow T_*/G$. Для некоторого конечного накрытия $\pi' : R' \rightarrow R$ мы можем поднять отображение $\bar{\sigma}$ до отображения $\tau : R' \rightarrow T_*$, так что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\tau} & T_* \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & T_*/G \end{array}$$

коммутативна. По свойствам геометрического фактора, для некоторого конечного накрытия $\pi'' : R'' \rightarrow R'$ точки $\pi''\tau(r')$ и $\pi'' \cdot \pi'\sigma(r)$ эквивалентны относительно действия группы G , значит, обратные образы семейств $V_r \rightarrow \{r\}$ и $U \rightarrow T$ относительно морфизмов $\pi'' \cdot \pi' : \{r''\} \rightarrow \{r\}$ и $\pi''\tau : \{r''\} \rightarrow T$ изоморфны. Другими словами это означает, что поднятое семейство $V_{r''} \rightarrow \{r''\}$ дополняется до гладкого семейства квазиэллиптических якобиевых поверхностей $U_{R''} \rightarrow R''$. Так как образ замкнутой точки r''_0 принадлежит S_* , то семейство $U_{R''}$ — семейство поверхностей $K3$ и, конечно, значение инварианта Артина для замкнутого слоя подчиняется тому же неравенству, что и для общего. Таким образом, нужное нам гладкое семейство построено, теорема доказана.

Таким образом, мы имеем отображение полных, гладких многообразий $\pi : M \rightarrow P(9)$, где π — отображение периодов, а M — многообразие модулей. Докажем, что оно взаимно однозначно в некоторой точке $m \in M$. Именно, мы рассмотрим поверхность X с $\sigma(X) = 1$. Для нее можно взять (ввиду теоремы из §1) S_X в виде

$$S_X = U_2 \oplus Q(D_4 \oplus E_8^2). \quad (2)$$

Рассмотрев примитивный элемент $f \in U_2$ с $f^2 = 0$, соответствующий эффективному дивизору F на X , мы получим на X квазиэлли-

птический пучок с тремя вырожденными слоями. Легко видеть (см. [8], стр. 868), что этот пучок единственным образом (с точностью до автоморфизма X) приводится к виду

$$y^2 = x^3 + t^5(t+1)^4 \quad (3)$$

(вырожденный слой типа D_4 находится в ∞ , а типов E_8 — в 0 и 1).

Введем на поверхности X некоторую N -структуру с поляризацией $\varphi : N \rightarrow S_X$ и обозначим через m соответствующую точку на M . Если $m' \in M$ — другая точка с $\pi(m) = \pi(m')$, то m' тоже обязана соответствовать поверхности X' с $\sigma(X') = 1$ и поляризацией $\varphi' : N \rightarrow S_{X'}$. Из того, что $\pi(m) = \pi(m')$, вытекает коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} N & \begin{array}{c} \nearrow \varphi \\ \searrow \varphi' \end{array} & \begin{array}{c} S_X \\ \downarrow \psi \\ S_{X'} \end{array} & \begin{array}{c} \longrightarrow H^2(X/W) \\ \downarrow \psi \\ \longrightarrow H^2(X'/W) \end{array} \end{array}$$

при некотором изоморфизме $\psi : H^2(X/W) \rightarrow H^2(X'/W)$, который, как легко видеть определяет изоморфизм $\psi : S_X \rightarrow S_{X'}$. Положим $\psi(f) = f'$. Этот элемент должен определять пучок с такими же свойствами, как и f , который, в силу тех же причин, записывается в виде (3). Тем самым определяется изоморфизм $u : X \rightarrow X'$, порождающий ψ в когомологиях. Это и означает, что $m = m'$.

Ввиду замечаний, сделанных в конце следующего параграфа, отсюда вытекает глобальная теорема Торелли для поверхностей над полем характеристики 2 с $\sigma(X) < 10$.

Аналогичные рассуждения применимы и при $p = 3$, $\sigma(X) < 6$. Вместо решетки (2) надо взять только решетку

$$U_2 \oplus Q(E_6^2 \oplus E_8).$$

Нерешенные вопросы

1. Определить конечные групповые схемы, действующие на эллиптических поверхностях. (Их алгебры Ли определены в работах [31] и [31]).

2. На каких квазиэллиптических поверхностях существуют ненулевые регулярные векторные поля?

3. На каких поверхностях общего типа существуют ненулевые регулярные векторные поля?

4. Доказать стабильность гладкой поверхности типа $K3$.

5. (Артин). Доказать, что два определения суперсингулярности для поверхностей типа $K3$ совпадают, т.е. что из условия $h = \infty$ следует, что $\rho = 22$. Артин доказал это для эллиптических поверхностей типа $K3$.

6. (Артин, Шиода). Унирациональна ли суперсингулярная поверхность типа $K3$?

7. Для каждой ли суперсингулярной поверхности X типа $K3$ существует чисто несепарабельное рациональное отображение $f: \mathbf{P}^2 \dashrightarrow X$? Из положительного ответа следовал бы положительный ответ на вопрос 6. Более правдоподобно, однако, что ответ отрицательный.

8. Существует ли для двух любых суперсингулярных поверхностей X и Y типа $K3$ чисто несепарабельное рациональное отображение $f: X \dashrightarrow Y$? Ввиду того, что куммеровы поверхности унирациональны, из положительного ответа следовал бы положительный ответ на вопрос 6. Этот вопрос — частный случай общего вопроса об “изогениях” поверхности типа $K3$. Если ответ, вообще говоря, отрицательный, то интересно было бы выяснить, когда такое отображение существует, например, в терминах периодов поверхностей X и Y .

9. Верно ли, что суперсингулярные поверхности типа $K3$ не вырождаются (в смысле, указанном в §11)?*

10. Верно ли, что семейство поверхностей типа $K3$ с конечной монодромией не вырождается? Из положительного ответа следовал бы, конечно, положительный ответ на вопрос 9.

11. (Огас). Доказать глобальную теорему Торелли для суперсингулярных поверхностей типа $K3$.

12. Найти аналог формул У для кристаллических когомологий (или когомологий Де Рама) алгебраических многообразий над полем характеристики 2. Например, будет ли квадратичная форма в $H_{DR}^2(X)$ для поверхности X четной тогда и только тогда, когда канонический класс X четен? (Хотя бы в случае, когда когомологии Де Рама дают “истинные” числа Бетти). Для поверхностей типа $K3$ этот вопрос, как мы видели в §9, связан с тем, любая ли поверхность типа $K3$ “связана” с построенной в доказательстве предложения 5, §9, непрерывной кривой. Поэтому интересен вопрос о неприводимости “многообразия модулей” поверхностей типа $K3$, имеющих заданную наименьшую степень поляризации. Точнее говоря, можно ли любые две такие поверхности включить в неприводимое семейство? (Над полем любой характеристики $p > 0$. Над полем характеристики 0 это следует из глобальной теоремы Торелли).

*Как недавно выяснено авторами, ответ на этот вопрос положительный.

Цитированная литература

- [1] , *Алгебраические поверхности*, Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 1965.
- [2] Б.Б. Венков, *О классификации целочисленных четных унимодулярных 24-мерных квадратичных форм*, РЖ Мат, 1979, 1А417, Труды Матем. ин-та им В.А. Стеклова **148** (1978), 65–76.
- [3] И.В. Долгачев, *Эйлерова характеристика алгебраических многообразий*, РЖ Мат, 1973, 2А370, Мат. сб. **89** (1972), no. 2, 297–312.
- [4] В.С. Куликов, *Вырождения КЗ поверхностей*, РЖ Мат, 1978, 2А440, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **41** (1977), no. 5, 1008–1042.
- [5] В.В. Никулин, *Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые из геометрических применения*, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **43** (1979), no. 1, 111–177.
- [6] И.И. Пятацкий–Шапиро, И.Р. Шафаревич, *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа КЗ*, РЖ Мат, 1971, 9А388, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **35** (1971), 530–572.
- [7] А.Н. Рудаков, И.Р. Шафаревич, *Несeparабельные морфизмы алгебраических поверхностей*, РЖ Мат, 1977, 4А455, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **40** (1976), no. 6, 1269–1307.
- [8] А.Н. Рудаков, И.Р. Шафаревич, *Суперсингулярные поверхности типа КЗ над полями характеристики 2*, РЖ Мат, 1979, 2А327, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **42** (1978), no. 4, 848–869.
- [9] А.Н. Рудаков, И.Р. Шафаревич, *Векторные поля на эллиптических поверхностях*, Успехи мат. наук **33** (1978), no. 6, 231–232.
- [10] М. Artin, *Supersingular K3 surfaces*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4-e serie **7** (1974), no. 4, 543–567.
- [11] М. Artin, *Algebraic construction of Briskorn's resolution*, РЖ Мат, 1974, 11А531, Journ. of Algebra **29** (1974), 330–348.
- [12] М. Artin, B. Mazur, *Formal groups, arising from algebraic varieties*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4-e serie **10** (1977), 87–132.
- [13] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , РЖ Мат, 1975, 9А349, Lecture Notes in Math. (1974), 407.
- [14] P. Berthelot, A. Ogus, *Notes on cristalline cohomologie*, Princeton Univ. Press, 1978.
- [15] E. Bombieri, D. Husemoller, *The classification and embeddings of surfaces*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **29** (1974), 329–421.
- [16] E. Bombieri, D. Mumford, *Enriques' Classification of surfaces in Char. p. III*, Inventiones mathem. **35** (1976), 197–232.
- [17] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie. Chap. 4, 5 et 6*, Elements de Mathematique, Fasc. XXXIV, Paris, 1968, Перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М. 1972, гл. 4, 5, 6.
- [18] C. Chevalley, *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*, Baltimore, 1951, Перевод: Шевалле К. Введение в теорию алгебраических функций от одной переменной. М. 1959.
- [19] P. Deligne, *Relevements des surfaces K3 en caractéristique nulle (rédigé par L. Illusie)* (1979), Препринт.

- [20] P. Deligne (avec la collaboration de L. Illusie), *Cristaux ordinaires et coordonnées canoniques* (1979), Препринт.
- [21] D. Giescker, *Global moduli for surfaces of general type* (1979), Препринт.
- [22] A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie algébrique. III*, РЖ Мат, 1964, 2A293, Publications Mathématiques (1961), no. 11, 349-511.
- [23] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer, III*, РЖ Мат, 1969, 12A523, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Paris — Amsterdam, 1968, pp. 88-188.
- [24] L. Illusie, *Report on crystalline cohomology*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **29** (1974), 459-479.
- [25] N. Jacobson, *Lie Algebras*, New York-London, 1962, Перевод: Джекобсон Н. Алгебры Ли. М. 1964.
- [26] N. Katz, *Algebraic solution of differential equations, p-curvature and the Hodge-filtration*, РЖ Мат, 1973, 6A459, Inventiones mathem. **18** (1972), 1-118.
- [27] N. Katz, *Travaux de Dwork. Séminaire Bourbaki, exp. 409*, РЖ Мат, 1973, 9A408, Lecture Notes in Math. **317** (1973), 167-200.
- [28] S. Lang, *Elliptic functions. Reading, Math.*, Addison-Wesley, London, 1974.
- [29] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*, Springer, Berlin, 1965.
- [30] M. Nagata, *Local Rings*, Interscience, New York, 1962.
- [31] A. Ogg, *Elliptic curves and wild ramification*, РЖ Мат, 1968, 12A337, Amer. Journ. of Math. **LXXXIX** (1967), no. 1, 1-21.
- [32] A. Ogus, *F-crystals and Griffiths transversality*, Intern. Symp. on Alg. Geometry, Kyoto, 1977, pp. 15-44.
- [33] A. Ogus, *Supersingular K3-crystals*, РЖ Мат, 1980, 1A535, Astérisque **64** (1979), 3-86.
- [34] O'Meara, *The arithmetic theory of quadratic forms*, New York, 1950.
- [35] P. Russel, *Forms of the affine line and its additive group.*, РЖ Мат, 1970, 10A279, Pacific J. Math. **79** (1964), no. 3, 411-449.
- [36] M. Schlessinger, *Functors of Artin rings*, РЖ Мат, 1971, 5A453, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 205-222, Перевод: Шлезингер М. Функторы на категории артиновых колец. Математика, 1971 15:4, 115-129.
- [37] J.-P. Serre, *Cours d'Arithmétique*, Presses univ. de France, Paris, 1970, Перевод: Серр Ж.-П. Курс арифметики. М. 1972.
- [38] C.S. Seshadri, *L'opération de Cartier. Applications. Variétés de Picard.*, Séminaire C. Chevalley, Paris, 1960.
- [39] T. Shioda, *An example of unirational surfaces in characteristic p*, РЖ Мат, 1975, 5A457, Math. Ann. **211** (1974), 233-236.
- [40] T. Shioda, *Algebraic cycles on certain K3 surfaces in characteristic p*, Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related Topics in Topology (1975), Univ. of Tokio Press, 357-364.
- [41] T. Shioda, *Some results on unirationality of algebraic surfaces*, Math. Ann. **230** (1977), Univ. of Tokio Press, 153-168.
- [42] T. Shioda, *Kummer surfaces in characteristic 2*, РЖ Мат, 1976, 5A533, Proc. Japan. Acad. **50** (1974), no. 9, 718-722.

**ВЛИЯНИЕ ВЫСОТЫ НА
ВЫРОЖДЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА $K3$**
ИЗВ. АКАД. НАУК СССР Т.46, no.1, (1982)

(с А.Н.Рудаковым и Т.Цинком)

Введение

Для алгебраического многообразия X , определенного над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ конечной характеристики, его кристаллические когомологии $H_{\text{cris}}^i(X)$ содержат информацию о геометрии многообразия X , аналогичную той, которая над полем комплексных чисел может быть получена путем введения на X кэлевой структуры. Выявление этой информации в различных специальных случаях является увлекательной проблемой, очень мало исследованной. Группы H_{cris}^i — это модули над кольцом $W(\mathbf{k})$ векторов Витта с действующим на них эндоморфизмом Фробениуса. Подобные объекты (кристаллы) описываются не очень сложными инвариантами (по крайней мере после умножения на поле частных кольца $W(\mathbf{k})$) и речь идет о том, чтобы понять геометрический смысл этих инвариантов. Например, кристалл, соответствующий группе H_{cris}^2 для алгебраической поверхности с геометрическим родом 1, в качестве такого инварианта имеет целое число h , принимающее значения $1 \leq h \leq b_2/2$. Наиболее интересным примером является поверхность типа $K3$. В этом случае (и в ряде других случаев) геометрический смысл инварианта h выяснил Артин [1]. Он показал, что поверхности можно сопоставить формальную группу, $\widehat{\text{Br}}(X)$, так называемую формальную группу Брауера, в нашем случае эта группа одномерна и h совпадает с ее высотой ($h \geq 11$ в этом случае означает, что $h = \infty$, т.е. формальная группа унипотентна).

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на то, что возникающий таким образом инвариант — высота поверхности типа $K3$ — играет роль в интересном геометрическом вопросе о возможных вырождениях поверхностей типа $K3$. Пусть X/S — семейство поверхностей, база которого S является спектром одномерного регулярного локального кольца, а общий слой — поверхностью типа $K3$. Перестройкой этого семейства называется семейство X'/S' , если $S' \rightarrow S$ — конечный морфизм, а общие слои семейства $X \times_S S'$ и X' изоморфны. Задача заключается в нахождении для заданного семейства X/S перестройки X' с возможно более простым вырождением (т.е. замкнутым слоем). В частности, если семейство обладает перестройкой, для которой морфизм $X' \rightarrow S'$ — гладкий, то оно называется невырождающимся.

Основное наблюдение этой работы заключается в том, что в некоторых случаях можно построить такую перестройку X'/S' , что она или не вырождается или же ее замкнутый слой имеет высоту 1 или 2 (определение высоты в этом случае сохраняет силу и для вырожденного слоя). Мы доказываем это в двух случаях: а) для семейств, имеющих “стандартные вырождения” — такие, к которым согласно В.С.Куликову [7] можно свести любые семейства в характеристике 0, и б) для поверхностей степени 2, т.е. двойных плоскостей и эллиптических поверхностей (эти случаи не так уже далеки друг от друга, так как в случае б) существует перестройка, вырожденный слой которой отличается от типа а) только деревьями гладких рациональных компонент — [16]). Остается открытым вопрос, не верно ли такое же утверждение в общем случае.

В весьма широких предположениях группа $B\Gamma$ может быть определена для семейства X/S как формальная группа над S . (Мы приводим простое изложение этого вопроса в §1.) Тогда высота группы $\widehat{B\Gamma}$ может только подсказывать при специализации. В частности, в случаях а) и б) семейство не вырождается. Суперсингулярные поверхности (т.е. такие, у которых все двумерные циклы алгебраические) имеют $h = \infty$ и реализуются как поверхности степени 2, т.е. относятся к случаю б). Поэтому суперсингулярные поверхности не вырождаются, т.е. их многообразие модулей полно. Отсюда, как известно, следует, что отображение периодов, введенное Огасом [11] для таких поверхностей, эпиморфно и для него имеет место аналог теоремы Торелли.

В качестве другого приложения нашего результата мы показываем, что два определения суперсингулярных поверхностей типа $K3$ (“все циклы алгебраические” и $h = \infty$) совпадают для поверхностей степени 2.

§ 1. Специализация формальной группы Брауера

В работах [1] и [3] было введено понятие формальной группы Брауера алгебраического многообразия и указаны его применения к геометрии поверхностей типа $K3$ над полем конечной характеристики. Нас будут интересовать семейства X/S , общий слой которых X_η — поверхность типа $K3$, а база S — спектр одномерного регулярного локального кольца с общей точкой η . Тогда формальная группа Брауера общего слоя X_η определена и является одномерной формальной группой над полем $\mathbf{k}(\eta)$. Строение этой группы (над алгебраическим замыканием поля $\mathbf{k}(\eta)$) определяется одним натуральным числом — высотой [8]. Часто можно определить группу Брауера и для замкнутого слоя X_0 и доказать, что при специализации высота не убывает. Заведомо так обстоит дело, когда существует формальная группа Брауера схемы X/S как формальная группа над S . Условия, при которых такая ситуация имеет место, содержатся в работах Артина–Мазура [3] и Рейно [13]. Для удобства читателя мы приведем более элементарное изложение этого вопроса, следуя, с некоторыми упрощениями, идеям Шлизингера [17].

Пусть X — локально нетерова схема. Обозначим через $\text{Nil}\mathcal{O}_X$ категорию всех коммутативных квазипроективных $\mathcal{O}_X$ -алгебр N , для которых существует такое натуральное число m , что $N^m = 0$. Категорию пучков множеств над X обозначим через $\widetilde{\text{Ens}}X$. Мы будем рассматривать функторы $F : \text{Nil}\mathcal{O}_X \rightarrow \widetilde{\text{Ens}}X$, обладающие следующим свойством “локальности”:

(а) Если $j : U \rightarrow X$ — открытое вложение, то

$$j_*(F(N) \mid U) = F(j_*(N \mid U)) .$$

Каждому квазикогерентному $\mathcal{O}_X$ -модулю M можно сопоставить функтор h_M , обладающий свойством (а):

$$h_M(N) = \widetilde{\text{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(M, N) ,$$

где $\widetilde{\text{Hom}}$ — пучок гомоморфизмов.

Если M — квазикогерентный $\mathcal{O}_X$ -модуль, то, полагая $M^2 = 0$, мы получим $\mathcal{O}_X$ -алгебру и тем самым вложение $\text{Mod}\mathcal{O}_X \rightarrow \text{Nil}\mathcal{O}_X$ категории квазикогерентных $\mathcal{O}_X$ -модулей в категорию $\text{Nil}\mathcal{O}_X$. Ограничение функтора F на $\text{Mod}\mathcal{O}_X$ будет обозначаться t_F . Пучок $t_F(M)$ можно снабдить структурой $\mathcal{O}_X$ -модуля:

$$\begin{aligned} t_F(M) \oplus t_F(M) &\xrightarrow{\sim} t_F(M \oplus M) \xrightarrow{t_F(\Sigma)} t_F(M) , \\ t_F(M)(N) &\xrightarrow{t_F(s)} t_F(M)(N), \quad s \in \mathcal{O}_X(N) . \end{aligned}$$

Если функтор F перестановочен с индуктивными пределами, то таким образом получается квазикогерентный $\mathcal{O}_X$ -модуль. Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда X аффинно. Пусть $U = D(f)$, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Тогда

$$\begin{aligned} (t_f(M)(X))_f &= \varinjlim (t_F(M)(X) \xrightarrow{f^n} t_F(M)(X)) \\ &= t_F\left(\varinjlim M \xrightarrow{f^n} M\right)(X) = t_F(j_*(M|N))(X) = t_F(M)(N). \end{aligned}$$

Теперь квазикогерентность следует из [5], (1.4.1).

Если $\varphi : Y \rightarrow X$ — морфизм, то, положив

$$(\varphi^* F)(N) = \varphi^*(F(\varphi_* N)),$$

мы получим из функтора F на X аналогичный функтор на Y .

Определение. Функтор $F : \text{Nil}\mathcal{O}_X \rightarrow \widetilde{\text{Ens}}X$ называется *формальным многообразием над X* , если он изоморфен h_P , где P — локально свободный $\mathcal{O}_X$ -модуль конечного типа. Функтор $\text{Nil}\mathcal{O}_X \rightarrow \text{Ab}X$ в категорию пучков абелевых групп над X называется *формальной группой над X* , если он, как функтор в категорию $\widetilde{\text{Ens}}X$, является формальным многообразием.

Предложение 1. Функтор $F : \text{Nil}\mathcal{O}_X \rightarrow \widetilde{\text{Ab}}X$ тогда и только тогда является формальной группой, когда выполнено условие (а) и следующие условия:

- (б) F точен;
- (в) F перестановочен с индуктивными пределами;
- (г) $t_F(\mathcal{O}_X)$ — когерентный $\mathcal{O}_X$ -модуль.

Доказательство является простым вырождением рассуждений Шлезингера [17]. Ввиду свойства (а) можно считать, что $X = \text{Spec}A$ аффинно. Рассмотрим канонический морфизм

$$t_F(A) \otimes M \longrightarrow t_F(M). \quad (1)$$

Ввиду свойства (в) это изоморфизм для любых свободных модулей. Так как оба функтора в (1) точны справа, то, используя свободную резольвенту, получим изоморфизм для любого M . Так как функтор F по условию (б) точен, а $t_F(A)$ — когерентный пучок, то $t_F(A)$ — плоский, а значит локально свободный пучок.

Обозначим A -модуль, соответствующий пучку $t_F(A)$, той же буквой и положим $P = \text{Hom}_A(t_F(A), A)$. Тогда морфизм (1) можно записать как

$$h_P(M) = \text{Hom}_A(P, M) \longrightarrow t_F(M). \quad (2)$$

Обозначим через J идеал аугментации симметрической алгебры $S(P)$. Тогда для $N \in \text{Nil}A$ гомоморфизм модулей $P \rightarrow N$ определяет гомоморфизм $J/J^s \rightarrow N$ для любого $s \gg 0$ и

$$h_P(N) = \varprojlim \text{Hom}_{A[g]}(J/J^s, N).$$

Поэтому

$$\text{Hom}(h_P, F) = \varprojlim_g F(J/J^s). \quad (3)$$

Обозначим через $\xi_0 \in t_F(P)$ образ единичного эндоморфизма модуля P при гомоморфизме (2). Так как F точен справа, то элемент $\xi_0 \in F(J/J^2)$ можно поднять до элемента $\xi \in \varprojlim_g F(J/J^s)$. Согласно

но (3) можно считать, что $\xi \in \text{Hom}(h_P, F)$. Легко убедиться, что ξ — изоморфизм. Для этого, при помощи коротких точных последовательностей, надо свести утверждение к случаю $N^2 = 0$. Отсюда вытекает предложение.

Пусть $f: X \rightarrow S$ — морфизм локально нетеровых схем. Для формальной группы Φ над X определим ее высшие прямые образы как функторы на $\text{Nil}\mathcal{O}_s$:

$$(R^i f_* \Phi)(N) = R^i f_* (\Phi(f^* N)).$$

Предложение 2. Пусть морфизм $f: X \rightarrow S$ — собственный и плоский, а Φ — такая формальная группа на X , что для некоторого i и для всех $s \in S$

$$H^{i-1}(X_s, t_\Phi(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{X_s}) = H^{i+1}(X_s, t_\Phi(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{X_s}) = 0.$$

Тогда $R^i f_* \Phi$ — формальная группа над S .

Доказательство. Убедимся сначала, что

$$R^{i-1} f_* (\Phi(f^* N)) = R^{i+1} f_* (\Phi(f^* N)) = 0. \quad (4)$$

Так как функтор f^* точен, то можно все свести к случаю $N^2 = 0$. При доказательстве предшествующего предложения мы видели, что канонический морфизм

$$\Phi(f^* N) \xleftarrow{\sim} t_\Phi(\mathcal{O}_X) \otimes f^* N, \quad N^2 = 0,$$

является изоморфизмом. Как известно, для любого когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X

$$(R^m f_* \mathcal{F})_s^\wedge \simeq \varprojlim H^m(X_s, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_s / \mathfrak{m}_s^n \mathcal{O}_s).$$

Поэтому достаточно рассмотреть лишь случай, когда схема S — артинова. Тогда все легко сводится к случаю $N = \mathcal{O}_s / \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_s$, для которого утверждение содержится в условии.

Из (4) следует, что функтор $F = R^i f_* \Phi$ точен, т.е. условие (б) предложения 1. Остальные условия проверяются просто. Из предложения 1 вытекает, что $R^i f_* \Phi$ — формальная группа.

Пусть $h : T \rightarrow S$ — замкнутое вложение. Тогда условия предложения 2 для $f_T : X \times_S T \rightarrow T$ выполнены и легко проверить, что

$$h^*(R^i f_* \Phi) = (R^i f_T)_*(h_1^* \Phi),$$

где h_1 есть проекция $X \times_S T \rightarrow X$. Отсюда следует, что

$$(R^i f_* \Phi)|_T = R^i f_{T*}(\Phi|_{X \times_S T}), \quad (5)$$

т.е. функтор $R^i f_* \Phi$ перестановочен, в естественном смысле, с ограничением на замкнутую подсхему.

Мы будем рассматривать случай, когда $\Phi = \hat{G}_m$, так что $t_\Phi(\mathcal{O}_X) = \hat{G}_a$. Схема X/S будет иметь относительную размерность 2 и для ее слоев X_S будет выполняться условие $H^1(X_S \mathcal{O}_{X_S}) = 0$. Тогда, согласно предложению 2, $R^2 f_* \hat{G}_m$ функтор является формальной группой. Он называется формальной группой Брауера и обозначается через $\widehat{\text{Br}}(X/S)$. Легко проверить, что если $F = \widehat{\text{Br}}(X/S)$, то $t_F(\mathcal{O}_S) = R^2 f_* \hat{G}_a$.

Возвращаясь к случаю, когда S есть спектр одномерного регулярного локального кольца и общий слой схемы X/S — поверхность типа КЗ, мы видим, что если формальная группа $\widehat{\text{Br}}(X/S)$ существует, то она одномерна. Предложение 2 и соотношение (5) дают

Предложение 3. Пусть S — спектр одномерного регулярного локального кольца и X/S — схема, общий слой которой является поверхностью типа КЗ. Если для замкнутого слоя X_0 $H^1(X_0, \mathcal{O}_{X_0}) = 0$, то формальная группа Брауера $\widehat{\text{Br}}(X/S)$ существует, одномерна и ее высота не уменьшается при переходе от общего к замкнутому слою.

§ 2. Стандартные вырождения

Семейство X/S , где S — спектр одномерного регулярного локального кольца с общей точкой η , а X_η — поверхность типа КЗ, по определению имеет стандартное вырождение, если выполняется одной из условий:

А. X/S гладко, т.е. замкнутый слой X_0 является гладкой поверхностью типа КЗ.

В случаях В и С пусть слой X_0 приводим, $X_0 = \cup V_\alpha$ — разложение на неприводимые компоненты и $\Pi(X_0)$ — полиэдр этого покрытия. Предполагается, что компоненты V_i — кратности 1 и имеют нормальные пересечения.

В. Полиэдр $\Pi(X_0)$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & V_1 & V_2 & & V_n & V_{n+1} \\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \end{array}$$

При этом V_0 и V_{n+1} — гладкие рациональные поверхности, а V_α , $\alpha = 1, \dots, n$, — линейчатые поверхности над эллиптической кривой C_S , $V_\alpha \cap V_{\alpha+1}$ является сечением V_α при $\alpha = 1, \dots, n$ и $V_{\alpha+1}$ при $\alpha = 0, \dots, n-1$.

С. $\Pi(X_0)$ изоморфен триангуляции сферы S^2 . Компоненты V_i — рациональные поверхности, $V_\alpha \cap V_\beta$ — рациональные кривые.

Эта терминология оправдывается тем, что как показал В.С.Куликов [7], над полем C любое семейство поверхностей типа КЗ обладает перестройкой, вырождение которой — стандартного типа.

Теорема 1. Пусть X/S — семейство поверхностей типа КЗ, имеющее вырождение стандартного типа. Тогда формальная группа $\widehat{\text{Br}}(X/S)$ существует. Группа $\widehat{\text{Br}}(X_0)$ изоморфна в случае В формальной группе, соответствующей эллиптической кривой C , а в случае С — мультипликативной группе.

С. случай А очевиден ввиду предложения 2. В случаях В и С условие $H^1(X_0, \mathcal{O}) = 0$ предложения 2 проверяется, исходя из спектральной последовательности покрытия $X_0 = \cup V_\alpha$. Мы пропускаем эту проверку, так как она аналогична, но проще нижеследующих рассмотрений. Таким образом, формальная группа $\widehat{\text{Br}}(X/S)$ существует. Найдем группу $\widehat{\text{Br}}(X_0)$. По определению

$$\widehat{\text{Br}}(X_0)(N) = H^2(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*), \quad N \in \text{Nil } k.$$

Для вычисления группы в правой части воспользуемся спектральной последовательностью покрытия $X_0 = \bigcup_0^{n+1} V_\alpha$. Положим

$$V^{|\alpha|} = \prod_{\alpha_1 < \dots < \alpha_i} V_{\alpha_1} \cap \dots \cap V_{\alpha_i} = \prod_{\alpha_1 < \dots < \alpha_i} V_{\alpha_1 \dots \alpha_i}.$$

Тогда

$$E_1^{ij} = H^j \left(V^{|i|}, (1 + \mathcal{O}_{V^{|i|}} \otimes N)^* \right) \Rightarrow H^{i+j} (X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*) .$$

В случаях В и С $H^2(V_\alpha, \mathcal{O}_{V_\alpha}) = 0$. Поэтому член E_1 имеет вид

$$\begin{aligned} & \oplus H^1(V_\alpha, (1 + \mathcal{O}_{V_\alpha} \otimes N)^*) \xrightarrow{d^1} \oplus H^1(V_{\alpha\beta}, (1 + \mathcal{O}_{V_{\alpha\beta}} \otimes N)^*) \oplus \\ & \oplus H^0(V_\alpha, (1 + \mathcal{O}_{V_\alpha} \otimes N)^*) \rightarrow \oplus H^0(V_{\alpha\beta}, (1 + \mathcal{O}_{V_{\alpha\beta}} \otimes N)^*) \rightarrow \\ & \rightarrow \oplus H^0(V_{\alpha\beta\gamma}, (1 + \mathcal{O}_{V_{\alpha\beta\gamma}} \otimes N)^*) . \end{aligned}$$

Рассмотрим случай В. Тогда $V_{\alpha\beta\gamma} = \emptyset$. Очевидно, остающийся гомоморфизм в нижней строчке эпиморфен. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} H^1(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*) &= \text{Ker } d^1 , \\ H^2(X_0, (1 + \mathcal{O}_{X_0} \otimes N)^*) &= \text{Coker } d^1 . \end{aligned}$$

Пусть вообще $V \rightarrow C$ — линейчатая поверхность и $D \subset V$ — сечение. Тогда $H^1(V, (1 + \mathcal{O}_V \otimes N)^*) \rightarrow H^1(D, (1 + \mathcal{O}_D \otimes N)^*)$ — изоморфизм. Чтобы в этом убедиться, надо воспользоваться тем, что оба функтора точны — это дает возможность свести рассмотрение к случаю $N = \mathbf{k}$, в котором утверждение очевидно. Аналогично,

$$H^1(V_0, (1 + \mathcal{O}_{V_0} \otimes N)^*) = H^1(V_{n+1}, (1 + \mathcal{O}_{V_{n+1}} \otimes N)^*) = 0 ,$$

так как V_0 и V_{n+1} — рациональные поверхности. Отсюда вытекает, что d^1 — инъективный гомоморфизм с коядром $H^1(C, (1 + \mathcal{O}_C \otimes N)^*)$. Это и дает утверждение в случае В.

В случае С верхняя строчка исчезает и спектральная последовательность вырождается в последовательность

$$\bigoplus_{\alpha} \hat{G}_m(N) \rightarrow \bigoplus_{\alpha\beta} \hat{G}_m(N) \rightarrow \bigoplus_{\alpha\beta\gamma} \hat{G}_m(N) .$$

Это симплициальный комплекс некоторой триангуляции сферы S^2 , тензорно умноженный на $\hat{G}_m(N)$. Поэтому его вторая группа когомологий изоморфна $\hat{G}_m(N)$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть X/S — семейство поверхностей типа КЗ над полем характеристики $p > 0$, имеющее стандартное вырождение. Если высота общего слоя X_η (т.е. формальной группы $\widehat{\text{Br}}(X_\eta)$) больше 2, то семейство не вырождается.

Действительно, если бы оно вырождалось, т.е. имел бы место случай В или С, то согласно теореме 1, высота слоя X_0 была бы больше 2. Ввиду предложения 3 это противоречит тому, что высота слоя X_η больше 2 по предположению.

§ 3 Вырождение двойных плоскостей

Мы будем рассматривать теперь случай, когда общий слой семейства X/S — двойная плоскость типа $K3$. В этом случае он задается уравнением $z^2 = f(x, y)$, где f — многочлен степени 6. При этом мы будем предполагать, что характеристика p основного поля отлична от 2 и 3. Нашей целью является составление некоторого списка поверхностей, так что для всякого семейства двойных плоскостей типа $K3$ существует перестройка, замкнутый слой которой принадлежит к нашему списку.

В проективном пространстве $\mathfrak{B}$ плоских кривых степени 6 рассмотрим естественное действие группы $G = \text{PGL}(2)$ и множество $\mathfrak{B}_{ss}$ точек, полустабильных относительно этого действия. Из того, что фактор $\mathfrak{B}_{ss}/G$ является проективным многообразием, легко следует, что за искомый список можно принять совокупность всех двойных плоскостей с полустабильной кривой ветвления (соответствующее рассуждение приведено, например, в работе Мамфорда [10]). Однако этот список можно несколько сократить. Именно, легко проверить, что можно ограничиться теми полустабильными кривыми, G -орбита которых замкнута в множестве $\mathfrak{B}_{ss}$. Действительно, пусть $Y \rightarrow S$ — семейство полустабильных кривых с общим слоем V_η и замкнутым слоем Y_0 , y_η и y_0 — соответствующие точки в $\mathfrak{B}_{ss}$. Предположим, что орбита Gy_0 не замкнута в $\mathfrak{B}_{ss}$ и пусть $g_i(y_0)$ — однопараметрическое семейство точек, в замыкании которого лежит точка z_0 из замыкания орбиты Gy_0 . Мы можем предполагать, что базой этого семейства является схема S' , изоморфная S . Выбрав изоморфизм φ этих схем, рассмотрим семейство, соответствующее $g_i y_{\varphi(i)}$. Очевидно, что оно является перестройкой исходного семейства, а его замкнутый слой соответствует точке z_0 .

Перечисление всех полустабильных кривых степени 6, орбиты которых замкнуты в $\mathfrak{B}_{ss}$, получается без особого труда при помощи классического приема теории инвариантов: “треугольник Гильберта” (см., например, [9]). Эта работа была проделана многими авторами (Рид, Хорикава, Тодоров, Шаа). Мы приведем ответ (см., напр., [18, теор.2.4]).

А. Изолированные особые точки кратности 2 или кратности 3, но распадающиеся на особые точки кратности ≤ 2 после одного σ -процесса. Если кривая C степени 6, $f = 0$, имеет такую особую точку, то двойная плоскость $X : z^2 = f$ имеет двойную рациональную особую точку. Соответствие между типами особых точек дается следующей таблицей.

Точка на C	Точка на X
Неособая	Неособая
Двойная с разделенными касательными	A_1
Острое	A_n
Тройная с тремя разделенными касательными	D_4
Тройная с двумя касательными, из которых одна — двойная	D_n
Тройная с одной тройной касательной, после одного σ -процесса распадающаяся на точки кратности ≤ 2	E_6, E_7, E_8

Таким образом, если поверхность X принадлежит к этому типу, то ее неособая минимальная модель является поверхностью типа $K3$.

В. Две изолированные тройные точки, остающиеся тройными после одного σ -процесса (случай одной такой точки дает незамкнутую орбиту). Если особые точки находятся в начале координат и в бесконечно удаленной точке на оси x , то уравнение кривой имеет вид $x^3 + \alpha xy^4 + \beta y^6 = 0$, а двойной плоскости — $z^2 = x^3 + \alpha xy^4 + \beta y^6$, причем $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$. Отображение $(x, y, z) \rightarrow z$ определяет на этой поверхности пучок эллиптических кривых. Полагая $z = z_1 y^3$, $x = x_1 y^2$, получаем неособую поверхность $\mathbf{P}^1 \times C$, где C — эллиптическая кривая $z_1^2 = x_1^3 + \alpha x_1 + \beta$. Отображение $(x_1, y_1, z_1) \rightarrow (x_1 y^2, y_1, z_1 y^3)$ не является морфизмом в бесконечно удаленных точках слоев, расположенных на $y = 0$ и $y = \infty$. После σ -процессов в этих точках мы получаем гладкую поверхность $\bar{X}$ и ее морфизм $f: \bar{X} \rightarrow X$, причем слои $\bar{X}$ над точками $y = 0$ и $y = \infty$ имеют вид $C + L$, где $L \simeq \mathbf{P}^1$, а морфизм f стягивает кривые C в точки.

С. Единственная двукратная компонента, трансверсально пересекающая другие. Уравнения кривой степени 6 могут иметь следующий вид:

$C_1: f = g^2$, где $g = 0$ — гладкая кубика.

$C_2: f = h^2 k$, где h и k — трансверсально пересекающиеся коники, причем коника $h = 0$ гладкая.

$C_3: f = l_0^2 l_1 l_2 l_3 l_4$, где $l_i = 0$ — различные прямые, причем прямые $l_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, проходят через одну точку, не лежащую на прямой $l_0 = 0$.

Соответствующие поверхности $z^2 = f$ не нормальны. В случае C_1 поверхность X приводима и состоит из двух рациональных компонент, пересекающихся по эллиптической кривой. В случае C_2 нормализация $\bar{X}$ поверхности X гладкая или имеет простейшую двойную точку и морфизм $\nu: \bar{X} \rightarrow X$ отображает эллиптическую кривую $C \subset \bar{X}$ на прямую $L \subset X$ как двулистное накрытие с 4

точками ветвления, а вне C является изоморфизмом.

В случае C_3 нормализация $\tilde{X} \rightarrow X$ устроена так же, но не является гладкой, а задается уравнением $z^2 = l_1 l_2 l_3 l_4$.¹ Она имеет изолированную особую точку в точке пересечения прямых $l_i = 0$. При разрешении особенностей, точно так же, как и в случае B , возникает эллиптическая кривая, стягивающаяся в особую точку. Таким образом, разрешение особенностей имеет вид $f: \tilde{X} \rightarrow X$, где $\tilde{X}$ — неминимальная модель эллиптической поверхности $P^1 \times C$, f является изоморфизмом вне двух непересекающихся эллиптических кривых C и $C' \subset \tilde{X}$. C он стягивает в точку, а C' отображает на прямую как двулистное накрытие с 4 точками ветвления.

D . Двукратная компонента, не трансверсально пересекающаяся с двумя компонентами.

D_1 : $f = gh^2$, где g и h — коники, имеющие две точки касания, причем h — гладкая.

D_2 : $f = l_1^2 l_2^2 l_3^2$, где $l_i = 0$ — три прямые, не проходящие через одну точку.

E . Трехкратная компонента. $f = g^3$, где $g = 0$ — гладкая коника.

Вырождения типа E исследовал Хорикава в работе [6]. Он показал, что они могут быть сведены к вырождениям, аналогичным $A-D$. Именно, для любого семейства двойных плоскостей степени 6, вырожденный слой которого имеет тип E , существует перестройка, вырожденный слой которой является сильно эллиптической поверхностью, полустабильной в смысле классификации эллиптических поверхностей типа $K3$ или получающийся из такой поверхности стягиванием рациональной кривой с квадратом -2 в простейшую двойную точку. Это значит, что уравнение поверхности записывается в виде $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$, где a — многочлен степени 8, b — 12, причем ни в одной точке a и b не обращаются одновременно в 0 с кратностями > 4 и > 6 .

Другое доказательство теоремы Хорикавы предложил Шаа [18]. Оба доказательства, формально говоря, предполагают, что основное поле есть поле комплексных чисел. Однако это предположение почти не используется. Для удобства читателя мы приведем ниже упрощенный вариант доказательства Хорикавы-Шаа, годный для случая характеристики > 11 . Для случая характеристики > 3 мы отсылаем читателя к исходному доказательству Хорикавы.

Сильно эллиптическая поверхность X типа $K3$ задается уравнением $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — многочлены степени ≤ 8 и ≤ 12 (сечения $\mathcal{O}(8)$ и $\mathcal{O}(12)$ на P^1). Поэтому такие поверхности па-

¹См. сноску 2 в работе 26 на стр. (Примечание автора к настоящему изданию.)

аметризируются точками взвешенного проективного пространства $\mathfrak{B}$, в котором координаты многочлена $a(t)$ имеют вес 4, а $b(t)$ — 6. На пространстве $\mathfrak{B}$ действует группа $\mathrm{PGL}(1) = \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1)$, где $\mathbf{P}^1$ — база расслоения.

Теорема Хорикавы дает нам право заменить в нашем списке тип вырождения Е полустабильными вырождениями эллиптических поверхностей типа $K3$, причем, как и в случае двойных плоскостей, мы можем ограничиться только такими вырождениями, орбиты которых замкнуты во множестве полустабильных. Получающиеся вырождения разбиваются на 4 типа:

A' . Поверхность X имеет только рациональные двойные точки и является вейштрассовой моделью эллиптической поверхности типа $K3$.

B' . Поверхность X имеет 2 изолированные тройные точки. В этом случае $a = \alpha c^4$, $b = \beta c^6$, где $c(t)$ — многочлен степени 2 без кратных корней, $4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0$. Разрешение особенностей поверхности X имеет такой же вид, как и в случае В вырождения двойных плоскостей.

C' . Поверхность X имеет кривую особых точек, прообраз при нормализации гладок. В этом случае $a = -3c^2$, $b = -2c^3$, где $c(t)$ — многочлен степени 4 без кратных корней. Разрешение особенностей имеет такой же вид, как в случае C_2 вырожденных двойных плоскостей.

D' . Поверхность X имеет кривую особых точек, прообраз которой при нормализации не гладок. Формулы те же, что и в случае C' , но многочлен $c(t)$ имеет один корень кратности 2 и два — простых.

§ 4 Теорема Хорикавы

Обозначим через S^n пространство однородных многочленов от 3-х переменных x, y и z над полем $\mathbf{k}$ характеристики p , через $Q \in S^2$ — невырожденную квадратичную форму и через $G = \mathrm{SO}(Q)$ — ее группу автоморфизмов с определителем 1. Очевидно, что G действует в S^n и QS^{n-2} является при этом инвариантным подпространством.

Лемма. При $p > 2n$ пространство QS^{n-2} обладает G -инвариантным дополнением в S^n .

Доказательство. Положим $Q = xy - z^2$ и установим изоморфизм коники $Q = 0$ с $\mathbf{P}^1$ формулами $x = u^2$, $y = v^2$, $z = uv$. При этом изоморфизме G отождествляется с образом $\mathrm{SL}(2)$ при его стандартном действии на u и v . Рассмотрим в $\mathrm{SL}(2)$ картановскую подгруппу $u \rightarrow \lambda u$, $v \rightarrow \lambda^{-1}v$ и соответствующую Борелевскую подгруппу B , сохраняющую u с точностью до множителя. Тогда B сохраняет

прямую kx^n в S^n и подпространство L , натянутое на Bx^n , совпадает с линейной оболочкой $g_\lambda x^n$, где $g_\lambda(u) = u + \lambda v$, $g_\lambda(v) = v$. Очевидно, что L G -инвариантно и $\dim L \leq 2n + 1$. С другой стороны, $\dim S^n / QS^{n-2} = 2n + 1$, поэтому мы докажем, что L является G -инвариантным дополнением для QS^{n-2} , если покажем, что $\dim L = 2n + 1$, $L \cap QS^{n-2} = 0$. Для этого рассмотрим оператор ρ ограничения на Q и докажем, что $\dim \rho L = 2n + 1$. Действительно, при указанном изоморфизме коники и P^1 $\rho x = u^2$, $\rho x^n = u^{2n}$ и $\rho g_\lambda(x^n) = (u + \lambda v)^{2n}$. Ввиду условия $p > 2n$, все биномиальные коэффициенты в разложении $(u + \lambda v)^{2n}$ отличны от 0, а поэтому подпространство, натянутое на все формы $(u + \lambda v)^{2n}$, имеет размерность $2n + 1$.

В частности, если $n \leq 6$, то лемма применима при $p \geq 11$, чем и объясняется это ограничение на характеристику, которое мы дальше накладываем.

Переходим непосредственно к доказательству теоремы Хорикавы. Пусть $S = \text{Spec } \Lambda$, где Λ — локальное кольцо с максимальным идеалом (π) . Применяя 3 раза предшествующую лемму, мы видим, что любой многочлен степени 6 от 3-х переменных может быть однозначно представлен в виде $F = \alpha Q^3 + F_2 Q^2 + F_4 Q + F_6$, где $F_i \in S^i$, и содержится в G -инвариантном дополнении к QS^{i-2} , построенном в лемме. Так как коэффициенты F принадлежат Λ и $F(x, y, z) \equiv Q^3 \pmod{\pi}$, то $\alpha \equiv 1 \pmod{\pi}$ и мы можем считать, что $\alpha = 1$, а все F_i делятся на π . Обычным преобразованием $Q \rightarrow Q - \frac{1}{3} F_2$ можно уничтожить коэффициент при Q^2 . При этом Q не изменится $\pmod{\pi}$ и, произведя линейное преобразование, тождественное $\pmod{\pi}$, мы можем привести Q к прежнему виду. Теперь мы имеем $F = Q^3 + F_4 Q + F_6$, где F_4 и F_6 делятся на π . После некоторого подъема базы мы всегда можем считать, что $F_4 = \pi^{4k} A$, $F_6 = \pi^{6k} B$, где или A или B не делятся на π . Таким образом, уравнение плоскости имеет вид

$$w^2 = Q^3 + \pi^{4k} Q A + \pi^{6k} B.$$

Разделим обе части на π^{6k} и положим

$$w = \pi^{3k} v, \quad Q = \pi^{2k} u. \quad (1)$$

Тогда уравнения нашей поверхности приобретут вид:

$$v^2 = u^3 + Au + B. \quad (2)$$

При $\pi = 0$ мы получаем отсюда $Q = 0$ и

$$v^2 = u^3 + au + b, \quad (3)$$

где a и b — ограничения многочленов A и B на конику $Q = 0$. Так как эта коника изоморфна $\mathbb{P}^1$, то таким образом мы получаем эллиптическую поверхность, в которой a и b являются многочленами степеней ≤ 8 и ≤ 12 , один из которых не равен 0.

Докажем, что существует такое преобразование $g \in G(K)$, где K — поле частных Λ , что для многочлена $g' \cdot F$ мы получим в (3) полустабильную эллиптическую поверхность. Для этого запишем F в виде $Q^3 + AQ + B$, где $A \in L$, $B \in M$ лежат в соответствующих G -инвариантных подпространствах. Действие группы G рассматривается нами в кратно-проективном пространстве $\mathbb{P}$, соответствующем G -модулю $L \oplus M$, где L имеет вес 4, а M — 6. Рассмотрим, с другой стороны, совокупность поверхностей вида (3), которая задается точками (a, b) в кратно-проективном пространстве $\mathbb{P}'$. В $\mathbb{P}'$ действует группа $\text{PL}(1)$, гомоморфным образом которой является группа G . Гомоморфизм ρ ограничения на конику $Q = 0$ определяет изоморфизм пространств $\mathbb{P}$ и $\mathbb{P}'$, перестановочный с действием $\text{PL}(1)$ и G . Ввиду стандартного аргумента, которым мы уже пользовались выше, существует преобразование $g' \in \text{PL}(1)(K)$, которое переводит наше семейство эллиптических поверхностей в семейство с полустабильным вырождением слоя. При помощи установленного изоморфизма мы получаем, что соответствующее преобразование $g \in G(K)$ обладает нужным свойством.

Чтобы закончить доказательство теоремы, нам остается убедиться, что формулы (2) описывают семейство проективных плоскостей, замкнутый слой которого изоморфен поверхности с уравнением (3). Для этого рассмотрим вторую карту, в которой определены координаты $\xi = \frac{u}{v}$, $\eta = \frac{1}{v}$ и которая вместе с картой (2) определяет проективное многообразие над S . В новой карте

$$\eta = \xi^3 + A\xi\eta^2 + B\eta^3, \quad \eta Q = \pi_k^2 \xi. \quad (4)$$

Замкнутый слой $\pi = 0$ распадается на две компоненты: $X_0 = X_1 \cup X_2$, где X_1 задается уравнением $Q = 0$, а $X_2: \eta = 0$. Очевидно, что $X_2 \simeq \mathbb{P}^2$.

Из (4) мы видим, что $\eta\varphi = \xi^3$, где $\varphi = 1 - A\xi\eta - B\eta^2$ — обратимый элемент. Отсюда $\xi^3 Q = \pi^{2k} \xi \varphi$, то есть $\xi^2 Q = \pi^{2k} \varphi$. Мы видим, что наше многообразие не нормально и нормализация его задается уравнениями

$$\zeta \xi = \pi^k, \quad \zeta^2 \varphi = Q. \quad (5)$$

Пусть X'_0, X'_1 и X'_2 — прообразы замкнутого слоя X_0 и его компонент X_1 и X_2 . Теперь дивизор Вейля X'_2 не является локально главным, но $X''_2 = kX'_2$ — локально главный и задается в карте (5)

уравнением $\xi = 0$. Так как на X'_2 $\varphi = 1$, то X'_2 — двулистное накрытие плоскости с кривой ветвления степени 2, то есть квадрика. Покажем, что эту квадрику можно стянуть в точку. Пусть Y — коника $X'_1 \cap X'_2 \subset X'_2$. Очевидно, что ограничение дивизора X''_2 (или соответствующего пучка) на X'_2 есть отрицательная кратность коники Y . Отсюда следует, что если H — очень обильный дивизор, для которого $H \cdot X'_2$ кратно Y , то существуют такие $a > 0$, $b > 0$, что $aH + bX''_2$ при ограничении на X'_2 дает дивизор, эквивалентный 0. Тем самым линейная система $|aH + bX''_2|$ стягивает X'_2 в точку. Остается выяснить, что при этом происходит с X'_1 . В карте (2) X'_1 отображается изоморфно. В карте (4) коника $Y = X'_1 \cap X'_2$ стягивается в точку. Легко видеть, что на X'_1 $(Y^2) = -2$, так как на X'_2 $(Y^2) = 2$. Умножив $aH + bX''_2$ на достаточно большое число, мы обеспечим, что точка, в которую стягивается Y , нормальна. Так как $(Y^2) = -2$, то эта точка является простейшей двойной точкой. На основании теоремы Тьюриной–Брискорна–Артина [2] (в нашем случае — простейшего частного случая этой теоремы) существует перестройка нашего семейства, в которой эта точка разрешается.

§ 5 Вырождения поверхностей типа КЗ степени 2 и высоты, большей 2

Теорема. Пусть X/S — семейство, определенное над полем характеристики $p \neq 2, 3$, общий слой которого — поверхность типа КЗ степени 2. Существует перестройка X'/S' этого семейства, для которого группа $\widehat{\text{Br}}(X'/S')$ определена, причем либо семейство X'/S' невырождено, либо группа $\widehat{\text{Br}}(X'_0)$ замкнутого слоя имеет высоту ≤ 2 .

Поверхность типа КЗ степени 2 является или сильно эллиптической поверхностью (то есть задается уравнением $y^2 = x^3 + a(t)x + b(t)$, где $\deg a(t) \leq 8$, $\deg b(t) \leq 12$) или двойной плоскостью (то есть задается уравнением $z^2 = f(x, y)$, где f — многочлен степени 6).

Согласно § 3 семейство X/S имеет перестройку, вырожденный слой которой принадлежит к одному из типов А, А'; В, В'; С₁, С₂, С₃, С'; D₁, D₂, D'. Мы их рассмотрим по порядку.

А и А'. В этом случае все слои имеют только рациональные двойные точки. Согласно теореме Брискорна—Тьюриной—Артина [2], семейство имеет перестройку, все слои которой гладкие, то есть само семейство гладко.

В случаях В, В'; С₁, С₂, С₃, С'; D₁, D₂, D' мы покажем, что выполнены условия теоремы 1, то есть $\widehat{\text{Br}}(X/S)$ задается одномерной формальной группой над S . Кроме того, мы проверим, что для

замкнутого слоя X_0 формальная группа $\widehat{\text{Br}}(X_0)$ имеет высоту ≤ 2 . Отсюда следует, что этот случай не может встретиться, если высота формальной группы $\widehat{\text{Br}}(X_\eta)$ больше 2.

Проверим, что выполнены условия теоремы 1, то есть, что $H^1(X_s, \mathcal{O}_X) = 0$ для любого слоя X_s семейства X . Это есть общее свойство сильно эллиптических поверхностей и двойных плоскостей. Сильно эллиптическую поверхность мы задаем уравнением

$$y^2 = x^3 + A(t_0 : t_1)x + B(t_0 : t_1), \quad (1)$$

где A — форма степени 8, а B — 12. При этом мы придадим переменным t_0 и t_1 вес 1, переменной x — 4, а y — 6, рассматривая соотношение во взвешенно проективном пространстве соответствующего типа. Уравнение (1) является множеством нулей сечения пучка $\mathcal{O}(12)$ в этом пространстве. Аналогично, уравнение двойной плоскости мы запишем в виде $z^2 = F(x : y : u)$ и интерпретируем его как множество нулей сечения пучка $\mathcal{O}(6)$ во взвешенно-проективном пространстве, определим вес x, y и u равным 1, а z — 3. Если X — наша поверхность, а $\mathbb{P}$ — то взвешенно-проективное пространство, в котором она содержится, то из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$$

(где $n = 12$ или 6) и из соотношений $H^i(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) = 0$ при $i = 1$ и 2 (см. [4, стр.8] следует, что $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Теперь остается вычислить группу $\widehat{\text{Br}}(X_0)$ для всех поверхностей X , имеющих тип В, В'; $C_1, C_2, C_3, C'; D_1, D_2$ или D' .

В и В'. Разрешение особенностей имеет вид $f : \bar{X} \rightarrow X$, где $\bar{X}$ — поверхность $C \times \mathbb{P}^1$ с двумя раздутыми точками, а f сжимает две непересекающиеся эллиптические кривые C_1 и C_2 в точки x_1 и x_2 . Обозначим через $\mathcal{F}_X$ пучок $(1 + \mathcal{O}_X \otimes N)^*$, где N — некоторая нильпотентная алгебра. Для вычисления групп $H^2(X, \mathcal{F}_X)$ воспользуемся спектральной последовательностью

$$E_2^{i,j} = H^j(X, R^i f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}) \Rightarrow H^{i+j}(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}). \quad (2)$$

$R^2 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = 0$, так как размерность слоев морфизма $f \leq 1$, а пучок $\mathcal{F}_{\bar{X}}$ "почти когерентен", то есть имеет фильтрацию с когерентными факторами и даже более того, факторами, изоморфными $\mathcal{O}_{\bar{X}}$.

$R_0 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = \mathcal{F}_X$, так как слои полны и связны, а $R^1 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}$ сосредоточен в точках x_1 и x_2 .

Докажем, что для каждой из точек $x = x_i$, $i = 1, 2$, слой пучка $R^1 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}$ изоморфен $C(N)$, где $C = C_i$. Нам надо доказать, что гомоморфизм ограничения

$$(R^1 f_*(1 + \mathcal{O}_{\bar{X}} \otimes N)^*)_X \rightarrow H^1(C, (1 + \mathcal{O}_C \otimes N)^*) \quad (3)$$

является изоморфизмом. Пользуясь короткими точными последовательностями, это утверждение легко редуцируется к случаю $N = \mathbf{k}$, когда гомоморфизм (3) имеет вид

$$(R^1 f_* \mathcal{O}_{\bar{X}})_x \rightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Воспользуемся соотношением

$$(R^1 f_* \mathcal{O}_{\bar{X}})_x^\wedge \simeq \varprojlim H^1(C, \mathcal{O}_{\bar{X}}/\mathfrak{m}_x^n) = \varprojlim H^1(C, \mathcal{O}_{\bar{X}}/I),$$

где I — пучок идеалов, определяющий C . Мы докажем, что $H^1(C, I^n/I^{n+1}) = 0$, откуда легко вытекает наше утверждение. Заметим для этого, что I/I^2 определяет конормальное расслоение на C , а I^n/I^{n+1} — его n -ю степень. Так как $(C^2) = -1$, то эти расслоения положительны, а так как C — эллиптическая кривая, то $H^1(C, I^n/I^{n+1}) = 0$.

Таким образом, второй член спектральной последовательности (2) задается диаграммой:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \widehat{\text{Pic}}_C(N)^2 & 0 & 0 \\ H^0(X, \mathcal{F}_X) & H^1(X, \mathcal{F}_X) & H^2(X, \mathcal{F}_X) \end{array}$$

и дифференциал d_2 сводится к $d: H^0(X, \widehat{\text{Pic}}_C(N)^2) \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}_X)$.

Из структуры пучка $\mathcal{F}_X$ и из того, что $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, следует, что $H^1(X, \mathcal{F}_X) = 0$. Точно так же, из того, что $H^2(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$, следует, что $H^2(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = 0$. Наконец,

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = \widehat{\text{Pic}}(N).$$

Таким образом,

$$\text{Ker } d = \widehat{\text{Pic}}(N), \quad \text{Coker } d = 0.$$

Иными словами, мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \widehat{\text{Pic}}_C(N) \rightarrow \widehat{\text{Pic}}_C(N)^2 \rightarrow H^2(X, \mathcal{F}_X) \rightarrow 0,$$

из которой следует, что $H^2(X, \mathcal{F}_X) = \widehat{\text{Pic}}(N)$.

C_1 — это частный случай ситуации, разобранный в § 2.

C_2 и C' приводят к разрешению особенностей $f: \bar{X} \rightarrow X$, где $\bar{X}$ — рациональная поверхность, $\bar{X} \supset C$ — эллиптическая кривая, $f(C) = L$ — рациональная кривая, f определяет двулистное накрытие $C \rightarrow L$ с 4 точками ветвления, а $f: \bar{X} - C \rightarrow X - L$ является изоморфизмом. В этом случае слои морфизма f нульмерны и поэтому $R^1 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = R^2 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}} = 0$.

Второй член спектральной последовательности имеет вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ H^0(X, \mathcal{G}) & H^1(X, \mathcal{G}) & H^2(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

где $\mathcal{G} = R^0 f_* \mathcal{F}_{\bar{X}}$.

Так как поверхность $\bar{X}$ рациональна, то $H^2(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = H^1(\bar{X}, \mathcal{F}_{\bar{X}}) = 0$. Привлекая спектральную последовательность, мы выводим отсюда, что и $H^2(X, \mathcal{G}) = H^1(X, \mathcal{G}) = 0$.

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0. \quad (4)$$

Пучок $\mathcal{H}$ сосредоточен на L . Докажем, что его ограничение на L получается из аналогичной точной последовательности:

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{H}|_L \rightarrow 0, \quad (5)$$

где $\mathcal{G}_L = R^0 f_* \mathcal{F}_C$. Рассуждая, как и в предшествующем случае, мы сводим это утверждение к случаю $N = \mathbf{k}$, когда оно равносильно тому, что кондуктор накрытия $\bar{X} \rightarrow X$ совпадает с пучком идеалов, определяющих L . Это очевидно, так как локально X определяется уравнением $z^2 = x^2 y$, где $x = 0$ — уравнение L , а $\mathbf{k}[\bar{X}] = \mathbf{k}[X] + \mathbf{k}[X]z/x$.

Из точной последовательности (4) и из того, что $H^1(X, \mathcal{G}) = H^2(X, \mathcal{G}) = 0$, получаем, что $H^1(X, \mathcal{H}) \simeq H^2(X, \mathcal{F}_X)$. С другой стороны, $H^1(L, \mathcal{F}_L) = H^2(L, \mathcal{F}_L) = 0$, так как кривая L рациональна и из точной последовательности (5) следует, что $H^1(L, \mathcal{G}_L) \simeq H^1(L, \mathcal{H}|_L)$. По определению, $H^1(L, \mathcal{G}_L) \simeq H^1(C, \mathcal{F}_C)$. Соединяя эти равенства, видим,

$$H^2(X, \mathcal{F}_X) \simeq H^1(X, \mathcal{H}) \simeq H^1(C, \mathcal{F}_C) = \widehat{\text{Pic}}_C(N).$$

Таким образом,

$$\widehat{\text{Br}}(N) = \widehat{\text{Pic}}_C(N).$$

S_3 приводит к разрешению особенностей $f: \tilde{X} \rightarrow X$, $\tilde{X}$ гладко и бирационально изоморфно $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — эллиптическая кривая, $\tilde{X} \supset C$, C' — две не пересекающиеся эллиптические кривые, $f(C) = x$, $f(C') = L$ — рациональная кривая, $f: C' \rightarrow L$ — накрытие степени 2 с 4 точками ветвления и $f: \tilde{X} - C - C' \rightarrow X - x - L$ — изоморфизм.

Положим $R^0 f_* \mathcal{F}_{\tilde{X}} = \mathcal{G}$. Второй член спектральной последовательности будет иметь вид

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N) & 0 & 0 \\ H^0(X, \mathcal{G}) & H^1(X, \mathcal{G}) & H^2(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

и дифференциал d_2 сводится к гомоморфизму $d: \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N) \rightarrow H^2(X, \mathcal{G})$. Аналогично предшествующему случаю, мы имеем точные последовательности

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathcal{F}_L \rightarrow \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{H}|_L \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathcal{H}$ сосредоточен на L и $\mathcal{G}_L = R^0 f_* \mathcal{F}_{C'}$. Как и раньше,

$$H^1(X, \mathcal{H}) = \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N).$$

Кроме того,

$$H^1(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = \widehat{\text{Pic}}_C(N), \quad H^2(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = 0.$$

Докажем, что $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$. Для этого рассмотрим нормализацию $\nu: X^\nu \rightarrow X$. Очевидно, что $\mathcal{G} = R^0 \nu_* \mathcal{F}_{X^\nu}$ и

$$H^1(X, \mathcal{G}) \simeq H^1(X^\nu, \mathcal{F}_{X^\nu}) \simeq \widehat{\text{Pic}} X^\nu(N).$$

Но $\widehat{\text{Pic}} X^\nu = 0$, так как X^ν задается уравнением $z^2 = l_1 l_2 l_3 l_4$, а мы проверили, что для таких поверхностей $H^1(X^\nu, \mathcal{O}_{X^\nu}) = 0$. Спектральная последовательность показывает теперь, что, ввиду равенства $H^1(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = 0$, гомоморфизм $d = 0$. Ввиду равенства $H^2(\tilde{X}, \mathcal{F}_{\tilde{X}}) = 0$ отсюда точно так же следует, что и $H^2(X, \mathcal{G}) = 0$. Тогда из точной последовательности (6) вытекает, что $H^2(X, \mathcal{F}_X) \simeq H^1(X, \mathcal{H}) \simeq \widehat{\text{Pic}}_{C'}(N)$, то есть $\widehat{\text{Br}}(X) = \widehat{\text{Pic}}(C')$.

D_1, D_2 и D' . В этих случаях так же можно было бы вычислить группу $\widehat{\text{Br}}(X)$ для вырожденного слоя и показать, что она имеет даже точно высоту 1. Но еще проще вычислить инвариант Хассе поверхности X и доказать, что он $\neq 0$. Инвариант Хассе $\lambda(X)$ определяется тем, что $\lambda(X) = \alpha^p$, если $C\omega = \alpha\omega$, где ω — базис одномерного пространства $H^0(X, \Omega_{X^2})$, а C — оператор Картье. Для двойной плоскости, задаваемой уравнением $z^2 = f(x, y)$, где f — многочлен степени 6, $\omega = z^{-1} dx \wedge dy$. Из равенства

$$\omega = z^{p-1} / z^p \cdot dx \wedge dy = f(x, y)^{\frac{p-1}{2}} / z \cdot dx \wedge dy$$

и из определения оператора C легко выводится, что (если степень f равна 6) $\lambda(X)$ есть коэффициент при $x^{p-1}y^{p-1}$ в $f(x, y)^{\frac{p-1}{2}}$. Если записать f в однородной форме как $F(x_0 : x_1 : x_2)$, то $\lambda(X)$ будет равно коэффициенту при $x_0^{p-1}x_1^{p-1}x_2^{p-1}$ в $F^{\frac{p-1}{2}}$.

В случае D_1 можно положить $h = x_0x_2 + x_1^2$, $g = x_0x_2 + ax_1^2 = h + (a-1)x_1^2$ при $a \neq 1$. Тогда

$$F^{\frac{p-1}{2}} = h^{p-1} (h + (a-1)x_1^2)^{\frac{p-1}{2}}$$

Члены, содержащие h во втором сомножителе, дадут выражение, делящееся на h^p , которое не может содержать нужного нам члена. Поэтому такой член может содержаться только в

$$(a-1)^{\frac{p-1}{2}} h^{p-1} x_1^{p-1} = (x_0x_2 + x_1^2)^{-p-1} x_1^{p-1} \cdot (a-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Опять члены, содержащие x_1 , из первого сомножителя, будут делиться на x_1^p и не могут содержать нужного члена. В результате мы получаем, что $\lambda(X) = (a-1)^{\frac{p-1}{2}} \neq 0$, так как $a \neq 1$.

В случае D_2 можно взять прямые l_i за оси координат и тогда мы получим

$$F^{\frac{p-1}{2}} = x_0^{p-1} x_1^{p-1} x_2^{p-1},$$

то есть $\lambda(X) = 1$.

В случае D' вычисление аналогично. Надо только воспользоваться выражением инварианта Хассе для эллиптической поверхности. Это вычисление приведено в [15]. Теорема доказана.

Аналогично § 2 получаем

Следствие. Пусть X/S — семейство поверхностей типа $K3$ степени 2 над полем характеристики $p > 3$. Если общий слой семейства имеет высоту > 2 , то семейство не вырождается.

Тем самым другим образом доказан основной результат заметки [16].

§ 6 Суперсингулярные поверхности

Поверхность типа $K3$ называется суперсингулярной, если все ее двумерные циклы алгебраичны, то есть ее число Пикара ρ равно 22. Такие поверхности существуют, конечно, только над полями характеристики $p > 0$. Как показал Артин [1], суперсингулярная поверхность X типа $K3$ имеет бесконечную высоту, то есть ее группа $\widehat{\text{Br}}(X)$ унипотентна. (В работе [1] Артин называет суперсингулярной поверхность бесконечной высоты, но нам, по чисто техническим причинам, удобнее пользоваться другой терминологией.)

Теорема 3. Семейство X/S поверхностей типа $K3$, определенное над полем характеристики $p > 3$, общий слой которого суперсингулярен, не вырождается.

Чтобы свести это утверждение к теореме, достаточно доказать, что суперсингулярная поверхность X типа $K3$ имеет степень 2. Это означает, что ее решетка Пикара $S(X)$ представляет 2. Все возможные типы решетки Пикара для суперсингулярных поверхностей типа $K3$ перечислены в работе [14]. Из приведенного там списка видно, что решетка $S(X)$ либо представляет решетку U , соответствующую квадратичной форме $2x_1x_2$, в этом случае $S(X)$ очевидно представляет 2, а поверхность X является эллиптической, либо представляет решетку $H_p \oplus U(p)$, где H_p — четная решетка ранга 4 и дискриминанта $-p^2$, а $U(p)$ соответствует квадратичной форме $2px_1x_2$. В последнем случае нам достаточно проверить, что H_p представляет все целые числа по модулю p . Это очевидно, так как ранг H_p по модулю p равен 2, а форма ранга 2 над полем $\mathbb{F}_p$ представляет все элементы из $\mathbb{F}_p^*$.

Как известно, из теоремы 3 вытекает, что для отображения периодов суперсингулярных поверхностей типа $K3$, введенного Огасом [11], имеет место аналог теоремы Торелли и что каждая точка пространства периодов соответствует некоторой поверхности.

В заключение приведем одно применение теоремы 2, связывающее понятие суперсингулярности с высотой поверхности типа $K3$. В работе [1] Артин доказал, что из унипотентности группы $\widehat{\text{Br}}(X)$ вытекает суперсингулярность поверхности X , если предположить, что X эллиптика. Он обратил внимание на естественный вопрос о том, верно ли это утверждение в общем случае. Мы можем ответить на него для случая поверхностей степени 2 (и, конечно, характеристики $p > 3$).

Теорема 4. Если высота поверхности X типа $K3$ степени 2, определенной над полем характеристики $p > 3$, бесконечна, то по-

верхность X суперсингулярна.

Мы воспользуемся двумя результатами Артина, доказанными в [1]. Во-первых, уже сформулированным утверждением, что эллиптическая поверхность типа X бесконечной высоты суперсингулярна, во-вторых, тем, что для гладкого семейства X/S поверхностей типа $K3$ бесконечной высоты со связной базой S число Пикара слоя постоянно. В частности, если один из слоев суперсингулярен, то это верно для всех.

Пусть X_0 — поверхность типа $K3$ степени 2 и бесконечной высоты. Если X_0 эллиптична, то она суперсингулярна ввиду цитированного выше результата. Таким образом, можно предполагать, что X_0 — двойная плоскость. Если она имеет особые точки (двойные рациональные), то она тоже эллиптична. Действительно, в этом случае среди кривых, получающийся при разрешении особых точек, существует кривая C с $(C^2) = -2$. С другой стороны, если D — прообраз прямой на плоскости, которую X_0 двулистно накрывает, то $(D^2) = 2$, $(C \cdot D) = 0$. Поэтому решетка Пикара поверхности X_0 представляет квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_2^2$, а значит, представляет 0. Отсюда следует, что поверхность X_0 эллиптическая [12].

Окончательно, мы можем считать, что X_0 — гладкая двойная плоскость. Рассмотрим, как и в §3, проективное пространство $\mathfrak{B}$ кривых степени 6 и в нем аффинное открытое множество U , соответствующее гладким кривым. Пусть $x_0 \in U$ — точка, соответствующая поверхности X_0 . Так как U аффинно, то фактор $\Sigma = U/\mathrm{PGL}(2)$ тоже аффинен. Обозначим через y_0 образ x_0 в Σ . Условие того, что высота поверхности $\geq h$, выделяет как в $\mathfrak{B}$, так и в Σ , замкнутое подмногообразие коразмерности 1. Так как высота уже бесконечна, если она больше 10, а $\dim \Sigma = 19$, то через x_0 проходит гладкая замкнутая кривая D , все точки которой соответствуют поверхностям бесконечной высоты, а образ ее в Σ одномерен. Применим теперь теорему 3. Из нее следует, что у кривой D существует такое накрытие, являющееся открытым множеством в полной кривой C , что прообраз естественного семейства, определенного на D (ввиду вложения $D \rightarrow \mathfrak{B}$) является на C невырождающимся семейством поверхностей степени 2. Если слой, расположенный хоть над одной точкой $s \in C$, является эллиптической поверхностью (в частности, особой двойной плоскостью), то, ввиду цитированных выше результатов Артина, поверхность X_0 суперсингулярна. Если же все эти слои являются гладкими двойными плоскостями, то определен морфизм $C \rightarrow \Sigma$, образ которого содержит образ D . Так как C полна, а Σ аффинно, то этот образ должен быть точкой, что противоречит тому, что образ D одномерен. Это противоречие доказывает теорему.

(Поступило в редакцию 3 августа 1981г.)

Литература

- [1] Artin M., *Supersingular $K3$ surfaces*, Ann. Sci. l'Ecole normale superieure, 4-t ser 7 (1974), no. fasc.4, 543-567.
- [2] Artin M., *Algebraic construction of Briskorn's resolution*, J. of Algebra 29 (1974), no. 2, 330-348.
- [3] Artin M., *Formal groups, arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. l'Ecole normale superieure, 4-t ser 10 (1977), no. fasc. 1, 87-131.
- [4] Dolgachev I., *Weighted projective varieties*, Preprint, 1937.
- [5] Grothendieck A (en collaboration avec J. Diendonne), *Elements de geometrie algebrue. 1*, Inst. des hautes et sc. publ. math. (1960), no. 4.
- [6] Horikawa E., *Surjectivity of the period map of $K3$ surfaces of degree 2*, Math. Ann. B. 228 (1977), no. H.2, 113-146.
- [7] Куликов В.С., *Вырождения $K3$ поверхностей*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 41 (1977), no. 5, 1008-1042.
- [8] Манин Ю.И., *Теория коммутативных формальных групп над полями конечной характеристики*, Успехи матем. наук 18 (1963), no. 6, 3-90.
- [9] Mumford D., *Geometric invariant theory*, Berlin, 1965.
- [10] Mumford D., *Stability of projective varieties*, l'Enseignemen mathematique 2-e ser 23 (1977), no. fasc. 1-2, 39-110.
- [11] Ogus A., *Supersingular $K3$ crystals*, Paris: Asterisque (1979), no. 64, 3-86.
- [12] Пятецкий-Шапиро, Шафаревич И.Р., *Аналог теоремы Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$* , Изв. АН СССР. Сер. матем. 35 (1971), no. 3, 530-572.
- [13] Raynaud M. "*p*-torsion" du schema de Picard, Paris: Asterisque (1979), no. 63, 2, 87-148.
- [14] Рудаков А.Н., Шафаревич И.Р., *Суперсингулярные поверхности типа $K3$ над полями характеристики 2*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 42 (1978), no. 4, 843-869.
- [15] Рудаков А.Н., Шафаревич И.Р., *О вырождении поверхности типа $K3$ над полями конечной характеристики*, Изв. АН СССР. Сер. матем. 45 (1981), no. 3, 646-661.
- [16] Рудаков А.Н., Шафаревич И.Р., *О вырождении поверхности типа $K3$* , Докл. АН СССР 259 (1981), no. 5, 1050-1052.
- [17] Schlessinger M., *Functors on Artin rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), 205-222.
- [18] Shah J., *A complete moduli space for $K3$ surface of degree 2*, Math. Ann. 112 (1980), 480-510.

О ВЫРОЖДЕНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА КЗ

(с А.Н.Рудаковым)

Тр. Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, **166** (1984), 222-234

Настоящая работа содержит доказательства результатов, анонсированных в заметке [1]. Речь идет об алгебраических поверхностях типа КЗ, т. е. алгебраических поверхностях X , для которых канонический класс тривиален ($K_X = 0$) и $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Мы рассматриваем поверхности над алгебраически замкнутым полем k характеристики p . В случае характеристики 0 результаты более общие, чем те, которые мы доказываем, вытекают из классификации вырождений поверхностей типа КЗ, данной В. С. Куликовым [2]. Таким образом, здесь нас интересуют поверхности над полями характеристики $p > 0$. Мы ограничиваемся случаем $p > 3$. Было бы интересно распространить полученные здесь результаты на случаи $p = 2$ и $p = 3$. Во втором случае ситуация, по-видимому, в значительной мере аналогична. Случай $p = 2$, наоборот, вероятно, приводит к новым рассмотрениям.

Настоящая работа, точнее говоря, теорема 1, имеет ряд точек соприкосновения с работой Шаа [3]. Хотя Шаа рассматривает лишь многообразия над полем комплексных чисел и интересуют его, в отличие от нас, смешанные структуры Ходжа, связанные с особыми многообразиями, ряд его рассуждений не зависит от предположений и посвящен анализу таких же (и более общих) вырождений, как в теореме 1 настоящей работы. В одном месте мы используем соображение, предложенное Шаа. По-видимому, можно было бы в большей мере воспользоваться результатами его работы. Однако рассуждения Шаа в нашей ситуации, вероятно, оказались бы

более громоздкими, чем непосредственно рассмотрение, учитывающее специфику интересующего нас случая. (Все это относится лишь к теореме 1, а не к теоремам 2 и 3 и приложениям к суперсингулярным поверхностям.)

Определение. Особенности алгебраической поверхности X называются *умеренными*, если они принадлежат одному из следующих типов:

- а) рациональная двойная точка;
- б) изолированные особые точки вложенной размерности 3, получающиеся стягиванием эллиптической кривой с квадратом -1 .

Локально (формально) они задаются уравнением

$$z^2 = x^3 + \alpha xy^4 + \beta y^6, \quad 4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0; \quad (1)$$

- б') изолированные особые точки вложенной размерности 3, получающиеся стягиванием эллиптической кривой с квадратом -2 .

Локально (формально) они задаются уравнением

$$z^2 = x^4 + \alpha x^2 y^2 + \beta xy^3 + \gamma y^4, \quad (2)$$

и форма в правой части не имеет кратных множителей¹. Об особенностях типа б) и б') см., например [4];

- с) двойная кривая особенностей C с конечным числом вершин $c_1, \dots, c_n$. В формальной окрестности точки $c \in C$, $c \neq c_i$, поверхность записывается уравнением $xy = 0$, а в окрестности одной из точек c_i $x^2 - zy^2 = 0$ (допускается и случай $n = 0$).

Пусть $\mathcal{X} \rightarrow S$ — плоское семейство алгебраических поверхностей с базой $S = \text{Spec } k[[\varepsilon]]$. Модификацией семейства $\mathcal{X}$ называется семейство $\bar{\mathcal{X}} \rightarrow S$, общий слой которого изоморфен общему слою семейства $\mathcal{X}$.

Последовательность компонент $X_1, \dots, X_n$ замкнутого слоя семейства $\mathcal{X}$ называется *цепочкой*, если все X_i — гладкие линейчатые поверхности с базой C , $X_i \cap X_{i+1}$ является сечением на X_i и X_{i+1} и $X_i \cap X_j = \emptyset$, если $j \neq i-1, i, i+1$. *Цепочкой, начинающейся с компоненты* X_0 , называется последовательность $X_0, X_1, \dots, X_n$, где $X_1, \dots, X_{n-1}$ — цепочка; $X_0 \cap X_1$ — сечение на X_1 ; $X_0 \cap X_i = \emptyset$ при $i > 1$; $X_{n-1} \cap X_n$ — сечение на X_{n-1} , а X_n — рациональная поверхность. *Цепочкой, соединяющей компоненты* X_0 и X_{n+1} , называется последовательность $X_0, X_1, \dots, X_{n+1}$, где $X_1, \dots, X_n$ —

¹ По непонятной причине в заметке [1] мы не включили в список особенностей особенность типа б'). На это наше внимание обратил А. Огас. Как увидит читатель, типы б) и б') рассматриваются совершенно одинаково.

цепочка; $X_0 \cap X_1$ — сечение на X_1 ; $X_n \cap X_{n+1}$ — сечение на X_n , $X_0 \cap X_i = \emptyset$ при $i > 1$ и $X_i \cap X_{n+1} = \emptyset$ при $i < n$. Кольцом, закрепленным в компоненте X_0 , называется последовательность $X_0, X_1, \dots, X_n$, где $X_1, \dots, X_n$ — цепочка; $X_0 \cap X_1$ — сечение X_1 ; $X_n \cap X_0$ — сечение X_n и $X_0 \cap X_i = \emptyset$ при $1 < i < n$.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{X} \rightarrow S$ — плоское семейство поверхностей, общий слой которого гладок или имеет двойные рациональные особые точки, а замкнутый имеет только умеренные особенности. Существуют конечное накрытие базы $S' \rightarrow S$ и модификация $\bar{\mathcal{X}} \rightarrow S'$ семейства $\mathcal{X} \times_S S'$, обладающая следующими свойствами. Компоненты замкнутого слоя семейства $\bar{\mathcal{X}}$ гладки или имеют двойные рациональные особые точки и пересекаются трансверсально. Компоненты эти принадлежат одному из типов: а) модели Z_i компонент замкнутого слоя семейства $\mathcal{X}$, б) линейчатые поверхности, в) рациональные поверхности. Линейчатые и рациональные поверхности образуют цепочки, начинающиеся с компонент Z_i , а линейчатые поверхности — цепочки, соединяющие компоненты Z_i и Z_j или кольца, закрепленные в компонентах Z_i . Все линейчатые поверхности имеют базами или эллиптические кривые, или кривые C_i , участвующие в определении умеренных особенностей замкнутого слоя семейства $\mathcal{X}$, или кривые C' — двойные их накрытия, разветвленные в точках $c_1, \dots, c_n$. Разные цепочки и кольца не имеют общих точек и компонент, кроме компонент Z_i . Разные компоненты Z_i не пересекаются.

Таким образом, компоненты образуют граф типа, показанного на рис. 1, где черные точки изображают Z_i , белые — X_i , являющиеся линейчатыми, а крестиками — рациональные X_i .

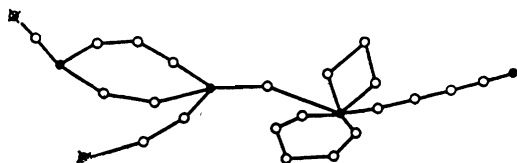


Рис. 1

Начнем с замечания, которое надо иметь в виду при доказательстве теоремы. Мы будем разрешать особые точки и кривые замкнутого слоя одну за другой. При этом не будет нарушаться

структура уже рассмотренных особенностей. Это связано с тем, что модификации, которые мы будем строить, будут носить строго локальный характер, являясь изоморфизмом вне рассматриваемой особой точки или кривой. Подъем базы не будет нарушать особых точек (предпосылок теоремы), так как при этом замкнутый слой не меняется. Проверим, что сохраняются и свойства построенных уже цепочек. Если X' и X'' — две гладкие поверхности, входящие в цепочку и трансверсально пересекающиеся по кривой C , то локально уравнение семейства $\mathcal{X}$ записывается уравнением $xy = \varepsilon$, где $x = 0$ и $y = 0$ — локальные уравнения поверхностей X' и X'' . После подъема базы это уравнение (быть может, в других локальных координатах) примет вид $xy = \varepsilon^k$. Таким образом, локально наше семейство представляется в виде $U \times T$, где $U \subset C$ — открытое множество; T — росток особенности типа A_{k-1} . При разрешении особенность A_{k-1} разрешается в цепочку из $[k/2]$ рациональных кривых. Ввиду этого в первоначальную цепочку в этом месте вклеивается дополнительная цепочка из $[k/2]$ линейчатых поверхностей с базой C .

После этих предварительных замечаний мы можем приступить к доказательству теоремы, причем мы имеем право рассматривать особые точки и кривые типов а), b), b') и с) отдельно, а также ограничиться рассмотрением формальных окрестностей особых точек.

В случае особенностей типа а) наше утверждение очевидно. В случаях b) и b') мы можем привести наше семейство $\mathcal{X}$ к некоторой нормальной форме. Для этого мы построим версальное семейство деформаций для каждой из этих особенностей. Согласно [5], оно строится так. Если изолированная особенность задается уравнением $F(x, y, z) = 0$, то пространство $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}/(F, F'_x, F'_y, F'_z)$, где $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ — локальное кольцо точки $\mathcal{P}$ в трехмерном пространстве, — конечномерно. Выберем любое конечное множество функций $\Phi_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, порождающее это пространство. Тогда семейство $F + \sum \lambda_i \Phi_i$ является версальным. В нашем случае $F = z^2 - f(x, y)$, где f — квазиоднородный многочлен (для типа b) надо придать x вес 2, y — вес 1; для типа b') x и y вес 1). Благодаря этому $f \in (f'_x, f'_y)$, и так как $F'_x = -f'_x$, $F'_y = -f'_y$, $F'_z = 2z$, то наше фактор-пространство принимает вид $\mathcal{O}/(f'_x, f'_y)$, где $\mathcal{O}$ — локальное кольцо точки $(0, 0)$ на плоскости.

Очень простые вычисления показывают, что в нашем случае вер-

сальную деформацию заведомо можно записать в виде:

$$b) \quad z^2 = x^3 + x \sum_{i=0}^4 \alpha_i y^i + \sum_{j=0}^6 \beta_j y^j,$$

$$b') \quad z^2 = x^4 + x^2 \sum_{i=0}^2 \alpha_i y^i + x \sum_{j=0}^3 \beta_j y^j + \sum_{k=0}^4 \gamma_k y^k.$$

(Более экономный вид версальной информации выписан в [4].) Чтобы получить наши формулы, проще всего воспользоваться тем, что многочлен f в уравнениях $z^2 = f(x, y)$ (1) и (2) является квазиоднородным, и свести его к многочлену от одной переменной: $f = \varphi(x/y^2)y^6$, $\deg \varphi = 3$ в случае b) и $f = \varphi(x/y)y^4$, $\deg \varphi = 4$ в случае b'), а потом воспользоваться тем, что в силу сделанных предположений многочлены φ и φ' взаимно просты, так что в виде их линейной комбинации можно получить все одночлены.

Таким образом, любое семейство поверхностей с вырожденным слоем типа b) и b') может быть задано в окрестности особой точки слоя уравнениями в случаях b) и b'):

$$b) \quad z^2 = x^3 + a_4(y, \varepsilon)x + a_6(y, \varepsilon), \quad (3)$$

$$b') \quad z^2 = x^4 + a_2(y, \varepsilon)x^2 + a_3(y, \varepsilon)x + a_4(y, \varepsilon), \quad (4)$$

причем выполнены условия: $\deg_y a_i(y, \varepsilon) \leq i$, многочлен $x^3 + a_4(y, 0)x + a_6(y, 0)$ в случае b) и $x^4 + a_2(y, 0)x^2 + a_3(y, 0)x + a_4(y, 0)$ в случае b') не имеет кратных корней. Так как общий слой имеет только двойные рациональные особые точки, не могут быть одновременно выполнены условия $a_i(y, \varepsilon) \equiv 0$ (y^i) (при $y = 4, 6$ в случае b) и $i = 2, 3, 4$ в случае b')). Заменой $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^k$ мы можем добиться того, что

$$a_i \in (y, \varepsilon)^i, \quad (5)$$

и всегда будем это предполагать.

Далее доказательство в случаях b) и b') точно следует работе [6] (доказательство теоремы 2, исследование вырождений второго типа). Мы приводим его по трем причинам: 1) для удобства читателя; 2) так как в [6] разобран только тип b) особых точек; 3) так как использование одного соображения, примененного Шаа в работе [3], дает возможность несколько сократить доказательство.

Трехмерные многообразия, заданные уравнениями (3) и (4), определяют расслоения над $A^1 \times S$, где $S = \text{Spec } k[[\varepsilon]]$, $A^1 = \text{Spec } k[y]$,

слои которых — аффинные кривые (над общей точкой S — эллиптические). Мы дополним каждый слой бесконечно удаленной точкой, которая на нем будет неособой. Иными словами, мы будем считать наше многообразие склеенным из двух кусков, один из которых задается уравнениями (3) и (4), а другой в случаях б) и б') уравнениями

$$\text{б)} \quad u = v^3 + a_4 v^2 u + a_6 u^3,$$

$$\text{б')} \quad u^2 = 1 + a_2 v^2 + a_3 v^3 + a_4 v^4.$$

с правилами склейки

$$\text{б)} \quad u = 1/z, \quad v = x/z,$$

$$\text{б')} \quad u = (z/x)^2, \quad v = 1/x.$$

Таким образом, мы получим рассеяние $\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{A}^1 \times S$, проекция которого является собственным изоморфизмом.

Построим новое расслоение $\mathcal{X}' \rightarrow \Sigma$, которое мы будем называть *элементарной перестройкой* первоначального. Σ получается из $\mathbf{A}^1 \times S$ σ -процессом в точке $(0,0)$ и накрывается двумя картами:

$$U_1 = \text{Spec}(k[[\varepsilon]] [y, \varepsilon_1]/(y\varepsilon_1 - \varepsilon)),$$

$$U_2 = \text{Spec}(k[[\varepsilon]] [y_2, \varepsilon]/(y_2\varepsilon - y)),$$

в которых выделены подмножества $U_{12} \subset U_1$ и $U_{21} \subset U_2$, определенные условиями $\varepsilon_1 \neq 0$ и $y_1 \neq 0$, изоморфно отображающиеся друг на друга благодаря тому, что $\varepsilon_1 y_2 = 1$.

Над U_1 семейство $\mathcal{X}'_1$ определяется в случаях б) и б') уравнениями:

$$\text{б)} \quad z_1^2 = x_1^4 + a_4^{(1)} x_1 + a_6^{(1)},$$

$$\text{б')} \quad z_1^2 = x_1^4 + a_2^{(1)} x_1^2 + a_3^{(1)} x_1 + a_4^{(1)},$$

$$a_i^{(1)} = a_i(y, y\varepsilon_1)y^{-i}.$$

Над U_2 семейство $\mathcal{X}'_2$ определяется в случаях б) и б') уравнениями

$$\text{б)} \quad z_2^2 = x_2^3 + a_4^{(2)} x_2 + a_6^{(2)}, \quad (6)$$

$$\text{б')} \quad z_2^2 = x_2^4 + a_2^{(2)} x_2^2 + a_3^{(2)} x_2 + a_4^{(2)}, \quad (7)$$

$$a_i^{(2)} = a_i(y_2, \varepsilon, \varepsilon)\varepsilon^{-i}.$$

Над $U_{12} \simeq U_{21}$ эти семейства склеиваются по формулам, для более компактной записи которых мы будем считать, что числа λ и μ равны 2 и 3 в случае b) и 1 и 2 в случае b'). Тогда формулы примут вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \varepsilon_1^\lambda, & z_1 &= z_2 \varepsilon_1^\mu & \text{на} & U_{12}, \\ x_2 &= x_1 y_2^\lambda, & z_2 &= z_1 y_2^\mu & \text{на} & U_{21}. \end{aligned}$$

Над U_1 при $y \neq 0$ прообразы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'_1$ изоморфны:

$$x_1 = xy^{-\lambda}, \quad z_1 = zy^{-\mu}.$$

Над U_2 при $\varepsilon \neq 0$ прообразы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}'_2$ изоморфны:

$$x_2 = x\varepsilon^{-\lambda}, \quad z_2 = z\varepsilon^{-\mu}.$$

Аналогично тому, как мы поступали с семейством, заданным уравнениями (3) и (4), мы дополняем слои построенных семейств $\mathcal{X}'_1$ и $\mathcal{X}'_2$ бесконечно удаленными точкам. Легко видеть, что автоморфизмы склейки распространяются на эти пополненные семейства. Так, мы получаем семейство $\mathcal{X}'$ с собственным морфизмом $\mathcal{X}' \rightarrow \Sigma$, изоморфное исходному семейству $\mathcal{X}$ вне прообраза точки $y = 0$, $\varepsilon = 0$. Это семейство мы и будем называть элементарной перестройкой семейства $\mathcal{X}$.

В $\mathcal{X}'$ прообраз X'_s замкнутой точки $s \in S$ распадается на две компоненты: $\mathcal{X}'_s = X_0 \cup X_1$. Компонента X_0 определяется над U_1 уравнением $\varepsilon_1 = 0$ и (в случаях b) и b')):

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad z_1^2 &= x_1^3 + a_4(a, 0)x_1 + a_6(y, 0), \\ \text{b')} \quad z_1^2 &= x_1^4 + a_2(y, 0)x_1^2 + a_3(y, 0)x_1 + a_4(y, 0). \end{aligned}$$

С прообразом U_2 эта компонента не пересекается. X_0 бирационально изоморфна замкнутому слою X_s расслоения $\mathcal{X} \rightarrow S$.

Перейдем к описанию компоненты X_1 и положим

$$a_i(y, \varepsilon) = \sum_{j+k \geq i} \alpha_{ijk} y^j \varepsilon^k, \quad A_i(y, \varepsilon) = \sum_{j+k=i} \alpha_{ijk} y^j \varepsilon^k.$$

Тогда компонента X_1 задается над U_1 (в случаях b) и b')) уравнениями

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y &= 0, \quad z_1^2 = x_1^3 + A_4(1, \varepsilon_1)x_1 + A_6(1, \varepsilon_1), \\ \text{b')} \quad y &= 0, \quad z_1^2 = x_1^4 + A_2(1, \varepsilon_1)x_1^2 + A_3(1, \varepsilon_1)x_1 + A_4(1, \varepsilon_1), \end{aligned}$$

а над U_2 — уравнениями

$$\text{б)} \quad \varepsilon = 0, \quad z_2^2 = x_2^3 + A_4(y_2, 1)x_2 + A_6(y_2, 1),$$

$$\text{б')} \quad \varepsilon = 0, \quad z_2^2 = x_2^4 + A_2(y_2, 1)x_2^2 + A_3(y_2, 1)x_2 + A_4(y_2, 1).$$

Кривая $Y = X_0 \cap X_1$ задается уравнениями $\varepsilon_1 = t = 0$ и

$$\text{б)} \quad z_1^2 = x_1^3 + a_4^{(1)}(0, 0)x_1 + a_6^{(1)}(0, 0),$$

$$\text{б')} \quad z_1^2 = x_1^4 + a_2^{(1)}(0, 0)x_1^2 + a_3^{(1)}(0, 0)x_1 + a_4^{(1)}(0, 0).$$

Ввиду сделанных предложений кривая Y — гладкая, а компонента X_0 — гладкая во всех точках этой кривой, — отображается на первоначальный замкнутый слой $X_0 \rightarrow X_s$ так, что Y стягивается в особую точку $\varepsilon = x = y = z = 0$ этого слоя. Она изоморфна $Y \times \mathbf{A}^1$. Легко видеть, что во всех точках кривой Y все семейство $\mathcal{X}'$ — гладкое, а X_0 и X_1 пересекаются по Y трансверсально.

Если многочлены $A_i(y_2, 1)$ при $i = 4$ и 6 в случае б) и $i = 2, 3, 4$ в случае б') не являются i -ой степенью одного и того же линейного многочлена $y_2 - \lambda$, то компонента X_1 является рациональной поверхностью, имеющей только двойные рациональные особые точки, и на этом процесс построения цепочки, связанной с рассматриваемой особой точкой, закончится.

Если же указанное представление в виде степеней линейных многочленов имеет место, то, сделав замену $y_2 \rightarrow \lambda \rightarrow y_2$, мы попадаем почти точно в рассмотренную ситуацию. Компонента X_1 имеет особую точку, расположенную в карте U_2 и принадлежащую к типу б) или б'). Единственное отличие заключается в том, что теперь поверхность X_1 является расслоением не над $\mathbf{A}^1$, но над $\mathbf{P}^1$. Однако наши локальные рассуждения полностью применимы к ее открытому подмножеству, лежащему над $\mathbf{A}^1$ (в карте U_2).

Таким образом, последовательное рассмотрение элементарных перестроек дает нам последовательность семейств $\mathcal{X}_r$, в каждом из которых вырожденный слой будет иметь вид цепочки $X_0, \dots, X_r$, которая начинается с X_0 : вырожденного слоя первоначального семейства с разрешенной особой точкой, $X_1, \dots, X_{r-1}$ изоморфны $Y \times \mathbf{P}^1$ и пересекаются трансверсально по кривой, изоморфной Y , а X_r или имеет такой же вид, или является рациональной поверхностью с рациональными двойными точками — в этом случае процесс построения цепочки заканчивается.

Докажем, что процесс построения цепочки не может продолжаться до бесконечности. Для этого напомним, что многочлен $a_i(y, 0)$ (при $i = 4$ или 6 в случае б) и $i = 2, 3$ или 4 в случае б')) содержит

старший член степени i . Соответствующий многочлен $a_i(y, \varepsilon)$ будет иметь корень $\lambda(\varepsilon') \in k[[\varepsilon']]$, $\lambda(0) = 0$ где $k[[\varepsilon']]/k[[\varepsilon]]$ — конечное расширение. Перейдя к накрытию $S' \rightarrow S$, $S' = \text{Spec } k[[\varepsilon']]$ и сделав сдвиг $y = y - \lambda$, мы можем считать, что один из многочленов a_i (пусть это будет a_m) делится на y (это и есть прием Шаа). Такое преобразование мы совершим в начале процесса, но то же свойство будет выполняться и для всех членов цепочки. Действительно, следующий член цепочки задается формулами (6) и (7), при которых нужное свойство, очевидно, сохраняется. Тогда, если в семействе $\mathcal{X}'$ компонента X_1 имеет особенность типа б) или б'), то многочлены $a_i(y_2, 0)$ должны быть i -ой степенью одночлена $y_2 - \lambda$ (при $i = 4$ и 6 в случае б) и $i = 2, 3$ и 4 в случае б')). Но так как $a_m(y_2, 0)$ по предположению делится на y_2 , то $\lambda = 0$. Таким образом, новая особенность всегда будет находиться в начале координат (в той системе координат, в которой выписаны уравнения (6) и (7)).

Последовательность s перестроек задается формулами $y = y_s \varepsilon^s$ и уравнениями (6) и (7) с коэффициентами

$$a_i^{(s)}(y_s, \varepsilon) = a_i(y_s \varepsilon^s, \varepsilon) \varepsilon^{-is}. \quad (8)$$

Теперь воспользуемся тем условием, что $a_i \neq 0$ (y^i) для $i = 4$ или 6 в случае б) и $i = 2, 3$ или 4 в случае б'). Пусть $a_l \neq 0$ (y^l). Это значит, что a_l содержит член $\alpha_{ljk} y^j \varepsilon^k$ с $\alpha_{ljk} \neq 0$ для некоторого j , $0 \leq j < l$. После подъема базы $\varepsilon = \varepsilon_1^q$ и преобразования по формулам (8) он даст член $\alpha_{ljk} y_s^j \varepsilon_1^{qk+(j-l)s}$. Положим $s = qk/(l-j)$, выбрав q так, чтобы это число было целым (заметим, что $s > 0$, так как $j < l$). Тогда наш член дает член $\alpha_{ljk} y_s^j$, $0 \leq j < l$, т. е. на s -м шаге поверхность X_s будет рациональной и процесс оборвется.

Перейдем к рассмотрению оставшегося случая — особенностей типа с). Мы будем постепенно упрощать особенность вдоль кривой C , совершая σ -процессы вдоль этой кривой и аналогичных кривых, возникающих в ходе σ -процессов. При этом мы будем следить за тем, что происходит в окрестности тех точек кривой, в которых имеют место представления (3) и (4) и в общей точке кривой.

Полное локальное кольцо общей точки кривой C может быть задано как фактор регулярного кольца с параметрами x и y , т. е. “определено уравнением” $x^2 - ay^2 = 0$, где $a \notin (x, y)$, и, следовательно, задает ненулевую функцию $\alpha \in k(C)$. Ввиду этого семейство $\mathcal{X}$ в окрестности общей точки кривой C может быть определено уравнением

$$x^2 - ay^2 + \varepsilon^{2k}b = 0 \quad (9)$$

(показатель степени у ε можно считать четным за счет подъема базы). При этом $b \neq 0$ (ε). Тогда $b \in (x, y)$, так как в противном случае путем преобразований $x \rightarrow x + P$, $y \rightarrow y + Q$ мы могли бы сделать в (9) $b = 0$, а это противоречило бы тому, что общий слой семейства $\mathcal{X}$ имеет только двойные рациональные особые точки. Аналогично, в окрестности точки с кривой C , в которой поверхность X задается уравнением $xy = 0$, деформация может быть записана уравнением

$$xy + \varepsilon^{2k}b = 0, \quad b \notin (x, y) \quad (10)$$

Если же в окрестности некоторой точки c_i кривой C поверхность X задается уравнением $x^2 - zy^2 = 0$, то деформация может быть задана уравнением

$$x^2 - zy^2 + \varepsilon^r \cdot b \cdot y + \varepsilon^{2s}c = 0, \quad (11)$$

причем или $b \notin (x, y, z)$, или $c \notin (x, y)$. Заметим еще, что как показывает подстановка $y \rightarrow y - \varepsilon^r/2z \cdot b$, если в точке c_i выполнено соотношение (11), то в точке c из некоторой ее окрестности выполнено (10) с $k = \min(r, s)$. При этом если $r < s$, то $b \in (x, y, z)$, а если $s < r$, то $c \in (x, y)$.

Произведем σ -процесс в кривой C . В одной из карт он будет задаваться формулами $x = u\varepsilon$, $y = v\varepsilon$ и семейство $\mathcal{X}$ будет иметь уравнение

$$u^2 - av^2 + \varepsilon^{2k-2}b = 0$$

в общей точке кривой C ,

$$uv + \varepsilon^{2k-2}b = 0$$

в окрестности точек $c \neq c_i$ и

$$u^2 - zv^2 + \varepsilon^{r-1} \cdot b \cdot v + \varepsilon^{2s-2}c = 0$$

в окрестности точек c_i ($i = 1, \dots, n$). Если $k > 1$, то вклеенное подмногообразие Y задается в этих условиях уравнением $\varepsilon = 0$ и уравнениями

$$u^2 - av^2 = 0, \quad uv = 0, \quad u^2 - zv^2 = 0.$$

Отсюда следует, что если a — полный квадрат, (это равносильно тому, что функция $\alpha \in k(C)$ — ограничение a на кривую C — полный квадрат), то вклеенное многообразие Y распадается на две

компоненты Y' и Y'' , каждая из которых — линейчатая поверхность над кривой C , причем они трансверсально пересекаются по кривой, являющейся сечением на любой из них. Если a (а значит и α) — не квадрат, то Y — линейчатая поверхность с базой C , имеющая двойную кривую с n вершинами.

Рассмотрение двух других карт показывает после совершенно стандартных вычислений, что собственный прообраз X_1 вырожденного слоя X_0 первоначального семейства гладок в окрестности прообраза кривой C , т. е. совпадает с нормализацией X_0 в этой окрестности. Прообраз C' кривой C на X_1 состоит из неособых точек этого семейства. Поверхности Y и X_1 в этих точках тоже гладки и пересекаются трансверсально.

Теперь может представиться три случая.

1. Вырожденный слой X_0 первоначального семейства приводим и две его компоненты X' и X'' трансверсально пересекаются по кривой C . Очевидно, что тогда функция $\alpha \in k(C)$ является полным квадратом. В этом случае переход от компоненты замкнутого слоя X_0 в окрестности кривой C к вырожденному слою нового семейства может быть изображен так, как показано на рис. 2.

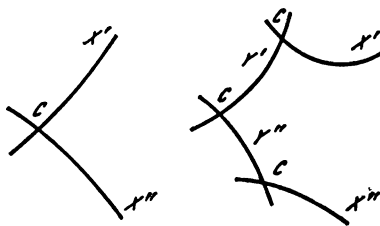


Рис. 2

2. Вырожденный слой X_0 первоначального семейства неприводим в окрестности (по Зарисскому) кривой C , но функция α — полный квадрат. В этом случае чертеж таков (рис. 3).

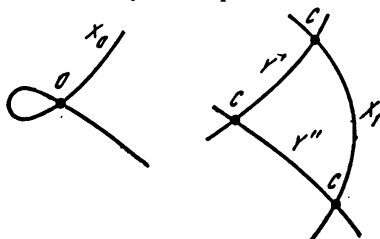


Рис. 3

3. Функция α — не квадрат, и тем более слой X_0 неприводим в окрестности C . В этом случае вклеенное многообразие Y неприводимо и пересекается с X_1 по кривой C' , являющейся двойным накрытием C с точками ветвления $c_1, \dots, c_n$ (рис. 4).

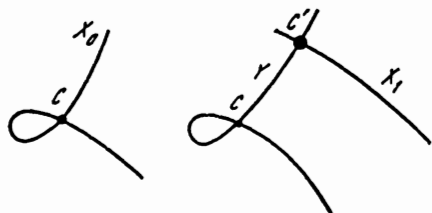


Рис. 4

На правом рисунке кривая C' изображена темной более крупной точкой, чем кривая C , чтобы показать, что она накрывает ее с кратностью 2.

Проделав σ -процесс в кривой C k раз, мы перейдем к тому, что вклеенное многообразие Y_k будет задаваться уравнениями в окрестности общей точки кривой C , точки $c \neq c_i$ и в одной из точек c_i :

$$u^2 - \bar{a}v^2 = \bar{b}, \quad (12)$$

$$uv + \bar{b} = 0, \quad (13)$$

$$u^2 - zv^2 + \bar{b}v + \bar{c} = 0, \quad (14)$$

где $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ означают ограничения при $\varepsilon = 0$ или (в случае (14)) — 0. Мы видели, что в (12) $\bar{a} \neq 0$ и $\bar{b} \neq 0$, так что Y_k является бирационально пучком квадрик, т. е. линейчатой поверхностью над кривой C , и нам остается исследовать ее особенности, а для этого обратиться к уравнениям (13) и (14). Если z — локальная координата, индуцирующая локальную координату на кривой C , то мы можем положить в (13) $\bar{b} = z^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — обратимый ряд. Действительно, члены, содержащие u или v , можно уничтожить при помощи преобразований $u \rightarrow u + P$, $v \rightarrow v + Q$. Положив $u = u_1 \varphi(z)$, мы приведем уравнение к виду $u_1 v + z^m = 0$, т. е. к уравнению особой точки A_{m-1} .

В уравнении (14) мы можем опять считать $\bar{c} = z^m \varphi(z)$ степенным рядом от z , а $\bar{b} = \beta$ — константой, причем или $\beta \neq 0$, или $\varphi(z) \neq 0$.

Если $\beta = 0$, то, полагая $u = u_1 \varphi(z)^{1/2}$, $v = v_1 \varphi(z)^{1/2}$, мы приведем уравнение к виду

$$u_1^2 + zv_1^2 + z^m = 0.$$

При $m = 1$ запишем уравнение в виде $u_1^2 + z(1 - v_1^2) = 0$. Мы получаем две особые точки типа A_1 : $u_1 = z = 0$, $v_1 = \pm 1$. При $m = 2$, положив $u_1 - \frac{1}{2}v_1^2 z = u_2$, мы приведем уравнение к виду $u_2^2 + z^2 + \frac{1}{4}v_1^4 = 0$, т. е. получаем точку типа A_3 . Наконец, при $m \geq 3$ — это особая точка типа D_{m+1} . Если же $\beta \neq 0$, то особых точек нет (надо напомнить, что мы ищем лишь особые точки с $z = 0$). Таким образом, все возникающие особые точки — двойные рациональные. Следовательно, мы получаем в случае 1 — цепочку, соединяющую две компоненты, в случае 2 — кольцо, закрепленное в компоненте, а в случае 3 — цепочку, исходящую из компоненты.

Далее, под обобщенной поверхностью типа КЗ мы будем понимать такую поверхность, имеющую только двойные рациональные особые точки, минимальное разрешение которой является поверхностью типа КЗ.

Пусть X — обобщенная поверхность типа КЗ, определенная над полем характеристики $p > 3$. Ее инвариант Хассе $\lambda(X)$ задается условием $C(\omega) = \lambda(X) \cdot \omega$, где ω — ненулевая регулярная дифференциальная форма на X (т. е. ненулевое сечение дуализирующего пучка ω_X), а C — оператор Картье. Так как форма ω определена однозначно с точностью до постоянного множителя $\gamma \neq 0$, то $\lambda(X)$ определяется с точностью до множителя γ^{1-p} . Инвариантный смысл имеет условие $\lambda(X) = 0$.

Поверхность типа КЗ имеет, по определению, степень 2, если на ее неособой модели существует дивизор D с $D^2 = 2$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{X} \rightarrow S$ — семейство обобщенных поверхностей типа КЗ степени 2, инвариант Хассе общего слоя которого равен нулю. После некоторого подъема базы $S' \rightarrow S$ семейство $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_S S'$ обладает модификацией, у которой замкнутый слой имеет умеренные особенности.

Как известно (см., например, [7]), поверхность типа КЗ степени 2 является или двойной плоскостью, или обладает пучком эллиптических кривых с сечением (т. е. является сильноэллиптической поверхностью в терминологии работы [6]). В первом случае поверхность задается уравнением

$$z^2 = f(x, y), \quad (15)$$

где f — многочлен шестой степени, во втором — уравнением

$$z^2 = x^3 + a(y)x + b(y), \quad (16)$$

где a — многочлен восьмой, а b — двенадцатой степени. Мы должны разработать два случая в зависимости от того, к какому типу относится общий слой семейства.

В обоих случаях мы исследуем множество $\mathfrak{B}$ всех поверхностей рассматриваемого вида. В первом случае $\mathfrak{B}$ — это проективное пространство всех плоских кривых степени 6, во втором — это взвешенно-проективное пространство пар многочленов a, b указанных степеней, причем коэффициенты многочлена a имеют вес 4, а b — 6. В обоих случаях на многообразии $\mathfrak{B}$ действует полупростая алгебраическая группа G : в первом случае $G = PGL(2)$ — группа проективных преобразований координат x, y , во втором $G = PGL(1)$ — группа проективных преобразований координаты y . Общие принципы теории инвариантов дают возможность составить такой список особых поверхностей, что для любого семейства поверхностей рассматриваемого типа существует модификация, замкнутый слой которой принадлежит нашему списку. Таким списком является множество полустабильных точек в $\mathfrak{B}$, орбита которых относительно группы G замкнута в множестве полустабильных точек (см., например, [8]). Таким образом, задача сводится к перечислению полустабильных точек (обладающих замкнутой орбитой) в указанных G -многообразиях $\mathfrak{B}$. Решение этой задачи хорошо известно (см., например, [8]), и мы только приведем ответ для удобства читателя.

В случае сильноэллиптических поверхностей соответствующие вырождения могут быть четырех типов (мы следуем обозначениям работы [8]).

A'. Поверхность X имеет только рациональные двойные особые точки.

B'. Поверхность X имеет две изолированные тройные особые точки. В этом случае в уравнении (16) $a = \alpha c^4$, $b = \beta c^6$, где c — многочлен второй степени с различными корнями, $4\alpha^2 + 27\beta^2 \neq 0$.

C'. Поверхность X имеет кривую особых точек, прообраз которой при нормализации гладок. В этом случае в уравнении (16) $a = -3c^2$, $b = -2c^3$, где c — многочлен четвертой степени без кратных корней.

D'. Поверхность X имеет кривую особенностей, прообраз которой при нормализации не гладок. При этом для a и b имеют место те же формулы, что и в случае C', но многочлен $c(y)$ имеет один двойной корень и два простых.

В случае двойных плоскостей возможны пять типов. Мы предполагаем, что поверхность задана уравнением (15).

A. Кривая $f(x, y) = 0$ имеет изолированные особые точки кратности 2 или кратности 3, но распадающиеся на особые точки кратности 2 после одного σ -процесса.

Поверхность X имеет только рациональные двойные точки.

B. Кривая $f(x, y) = 0$ имеет две тройные точки, остающиеся

тройными после σ -процесса.

Поверхность X имеет две изолированные особые точки, и уравнение ее приводится к виду

$$z^2 = x^3 + \alpha y^4 x + \beta y^6, \quad 4\alpha^3 + 27\beta^2 \neq 0.$$

С. Кривая $f(x, y) = 0$ имеет единственную двукратную компоненту, трансверсально пересекающую другие. Для уравнения поверхности X возможны типы:

C_1 : $z^2 = g^2$, $g = 0$ — гладкая кубики.

C_2 : $z^2 = h^2 k$, где $h = 0$ и $k = 0$ — трансверсально пересекающиеся коники, причем коника $h = 0$ гладкая.

C_3 : $z^2 = l_0^2 l_1 l_2 l_3 l_4$, где $l_i = 0$ — различные прямые, причем прямые $l_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ проходят через одну точку, не лежащую на прямой $l_0 = 0^2$.

Д. Кривая $f(x, y) = 0$ имеет двукратную компоненту, нетрансверсально пересекающую другие. Для уравнения поверхности возможны случаи:

D_1 : $z^2 = gh^2$, где $g = 0$ и $h = 0$ — коники, имеющие две точки касания, причем коника $h = 0$ — гладкая.

D_2 : $z^2 = l_1^2 l_2^2 l_3^2$, где $l_i = 0$ — прямые, не проходящие через одну точку.

Е. Кривая $f(x, y) = 0$ имеет трехкратную компоненту. Уравнение поверхности X принимает вид $z^2 = g^3$, где $g = 0$ — гладкая коника.

Как показал Хоригава [7], любое семейство двойных плоскостей, имеющее вырожденный слой типа E , обладает модификацией, вырожденный слой которой принадлежит к одному из типов $A' - D'$. (Его доказательство проведено для случая поля характеристики 0, но сохраняет силу для любой характеристики $p > 3$). Таким образом, вырождения типа E из нашего списка можно удалить.

Нам остается проверить, что среди вырождений типов $A' - D'$ и $A - D$ одни не могут встретиться в семействах, инвариант Хассе которых равен нулю, а другие обладают умеренными особенностями.

Докажем прежде всего, что вырождения типов D' , D_1 и D_2 не могут встретиться в семействах, инвариант Хассе общего слоя которых равен нулю. Для этого фиксируем прежде всего определенную

²Воспользуемся случаем, чтобы исправить неверное высказывание в работе [8, с. 124], касающееся особых поверхностей типа C_3 . Там сказано, что разрешение особенностей этих поверхностей является минимальной моделью поверхности вида $C \times \mathbb{P}^1$, где C — эллиптическая кривая. На самом деле это минимальная модель линейчатой поверхности с базой C . Дальнейшие рассуждения от этого не зависят.

модель для нашего семейства. Сильноэллиптическую поверхность, заданную уравнением (16), мы будем рассматривать как подмногообразие, заданное уравнением

$$z^2 u = x^3 + a(y)xu^2 + b(y)u^3$$

в расслоении $P(E)$ над P^1 , где $E = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(4) \oplus \mathcal{O}(6)$; $P(E)$ — проективизация E ; y — координата на P^1 ; x , y и z — сечения расслоений $\mathcal{O}(4)$, $\mathcal{O}(6)$ и $\mathcal{O}$, наконец, $a(y)$ и $b(y)$ рассматриваются как сечения расслоений $\mathcal{O}(8)$ и $\mathcal{O}(12)$. Двойную плоскость, заданную уравнением (15), мы будем рассматривать как подмногообразие, заданное тем же уравнением в расслоении $P(E)$, где теперь E — расслоение $\mathcal{O}(3) \oplus \mathcal{O}(1)$ над P^2 ; x и y — сечения $\mathcal{O}(1)$; z — $\mathcal{O}(3)$; $f(x, y)$ и z^2 — сечения $\mathcal{O}(6)$. В обоих случаях семейство $\mathcal{X}$ рассматривается как гиперповерхность в $P(E) \times S$. Согласно сделанным предположениям общий слой семейства $\mathcal{X}$ — обобщенная поверхность типа КЗ.

Обозначим через ω_X и $\omega_{X/S}$ — дуализирующие пучки на поверхности X рассматриваемого типа и на семействе $\mathcal{X}$. Так как все поверхности X нашего типа линейно эквивалентны в $P(E)$ и $H^i(P(E), \mathcal{O}) = 0$ при $i > 0$, то $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ для них одно и то же, т. е. равно 1. Поэтому $R^0 f_* \omega_{X/S}$ — локально-постоянный обратимый пучок (здесь f — проекция $X \rightarrow S$). Операция Картье C действует на нем послойно как p -линейное преобразование. Поэтому если $C = 0$ (т. е. равен нулю инвариант Хассе общего слоя), то то же верно и для замкнутого слоя семейства $\mathcal{X}$. Наконец, для вычисления инварианта Хассе конкретной поверхности X нам надо иметь ненулевое сечение пучка ω_X . Оно получается путем стандартного построения резольвенты Кошуля пучка $\omega_{P(E)}$, так как X — гиперповерхность в $P(E)$ (см., например, [9, с. 245]). В нашем случае это сечение задается формой $y^{-1} dx \wedge dt$ для сильноэллиптической поверхности, определенной уравнением (16), и $z^{-1} dx \wedge dy$ для двойной плоскости с уравнением (15). К этой форме можно уже применить стандартным образом операцию Картье. Соответствующие вычисления (очень простые) содержатся в работах [6, 8]. Для сильноэллиптической поверхности (16) инвариант Хассе равен коэффициенту при $x^{p-1}y^{p-1}$ в многочлене $(x^3 + a(y)x + b(y))^{(p-1)/2}$, а для двойной плоскости (15) — тому же коэффициенту в многочлене $f(x, y)^{(p-1)/2}$. В работах [6, 8] показано (столь же простым вычислением), что для вырожденных поверхностей типа D' , D_1 и D_2 этот коэффициент отличен от нуля. Таким образом, вырождения типа D' , D_1 и D_2 не могут встретиться в семействах, у которых инвариант Хассе общего слоя равен нулю.

В заключение нам осталось проверить, что вырожденные поверхности типов $A' - C'$ и $A - C$ обладают умеренными особенностями. Это непосредственно видно из уравнений, определяющих эти вырождения, так что мы лишь укажем, какие именно особенности эти вырождения имеют.

$A' - a$).

$B' - b$). Особенности в двух точках, где $c(y) = x = z = 0$.

$C' - c$). Кривая C задается уравнением $z = 0$, $x = -c(y)$, c_1, c_2, c_3 и c_4 — корни многочлена $c(y)$.

$A - a$).

$B - b$). Особенности в двух точках: $y = 0$ и $y = \infty$.

$C_1 - c$). Кривая C задается уравнениями $g = z = 0$. Множество $\{c_1, \dots, c_n\}$ — пусто.

$C_2 - c$). Кривая C задается уравнениями $h = z = 0$.

Точки c_1, c_2, c_3, c_4 — это точки пересечения коник $h = 0$ и $k = 0$.

$C_3 - c) + b'$). Кривая $l_0 = z = 0$ дает особенность типа c), где c_1, c_2, c_3, c_4 — точки пересечения прямой l_0 с прямыми $l_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Общая точка прямых l_1, l_2, l_3, l_4 дает особенность типа b). Теорема доказана.

Приведем графы вырожденных слоев, которые возникают, если заменить семейство $\mathcal{X}$ с особенностями вырожденного слоя $A' - C'$ или $A - C$ модификацией $\mathcal{X}$, построенной в теореме 1 (рис. 5).

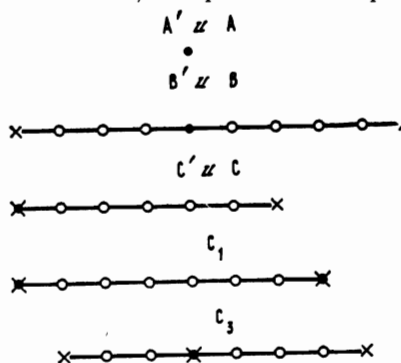


Рис. 5

Заметим, что в нашем случае, как это сразу следует из описания особенностей $A' - C'$ и $A - C$, компоненты вырожденного слоя семейства $\mathcal{X}$ (обозначенные на рис. 5 темными точками), в случаях A' и A являются обобщенными поверхностями типа КЗ, в случаях B' и B — эллиптическими линейчатыми поверхностями, а в случае C — рациональные. Линейчатые же поверхности (обозначенные на рис. 5 кружками) — эллиптические.

Теперь мы имеем все необходимое для того, чтобы дословно перенести результат работы [6], касающийся семейств сильноэллиптических поверхностей (теорему 4), на любые семейства обобщенных поверхностей типа КЗ степени 2. Теперь мы будем называть такое семейство невырождающимся, если его замкнутый слой — тоже обобщенная поверхность типа КЗ.

Теорема 3. Семейство обобщенных поверхностей типа КЗ степени 2 с равным нулю инвариантом Хассе тогда и только тогда имеет невырождающуюся модификацию (возможно, после подъема базы), когда его монодромия, действующая на группу когомологий $H_{\text{et}}^2(X_\eta, \mathbf{Q}_l)$ общего слоя, конечна.

Мы можем воспользоваться теоремами 1 и 2, и нам остается проверить, что в семействе $\mathcal{X} \rightarrow S$, вырожденный слой которого относится к одному из типов B', B, C', C , изображенных на рис. 5, монодромия бесконечна. Прежде всего, на основании теоремы Брискорна – Тьюриной – Артина мы можем найти перестройку $\mathcal{X}' \rightarrow S'$ (возможно, после накрытия базы), в которой слои не будут иметь двойных рациональных точек. Как было замечено в начале доказательства теоремы 1, при этом в вырожденном слое произойдет лишь удлинение цепочек, так что граф его по-прежнему будет соответствовать одному из изображенных на рис. 5. Для исследования монодромии семейства $\mathcal{X}' \rightarrow S'$ мы применим следующий необходимый признак конечности монодромии (вытекающий, как показано в [6], из результатов работы [10]): нужно, чтобы гомоморфизм

$$\bigoplus_i H^1(X_i, \mathbf{Q}_l) \rightarrow \bigoplus_{i < j} H^1(X_i \cap X_j, \mathbf{Q}_l) \quad (17)$$

был эпиморфным (здесь X_i обозначает теперь все компоненты вырожденного слоя). Но, как и в ситуации работы [6], ранг группы слева всегда меньше ранга группы справа, так что этот гомоморфизм не может быть эпиморфным. Именно, если число эллиптических линейчатых поверхностей в вырожденном слое равно n , то группа в левой части равенства (17) имеет ранг $2n$. Группа же в правой части имеет (как видно из рисунка 5) ранг $2n + 2$ в случаях B', B, C', C_1 и C_2 и $2n + 4$ — в случае C_3 .

Как и в работе [6], отсюда вытекает

Следствие. Семейство суперсингулярных поверхностей типа КЗ в характеристике $p > 3$ имеет невырождающуюся модификацию (т. е. такую, замкнутый слой которой тоже является поверхностью типа КЗ).

Это следствие другим путем было получено нами совместно с Т. Цинком в работе [6].

Авторы благодарят Е.С.Кедрову за помощь в оформлении рукописи и В.С.Куликова за ценные обсуждения.

Литература

- [1] Рудаков А.Н., Шафаревич И.Р., *О вырождении поверхностей типа $K3$* , ДАН **259** (1981), no. 5, 10–50.
- [2] Куликов В.С., *Вырождения $K3$ поверхностей*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **41** (1977), no. 5, 1008–1042.
- [3] Shan J., *Insignificant limit singularities of surfaces and mixed Hodge structures*, Ann. Math. **109** (1979), 497–536.
- [4] Satto J., *Einfach-elliptischen Singularitäten*, Invent. Math. **23** (1974), no. 3/4, 10–52.
- [5] Тюрин Г.Н., *Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **33** (1969), no. 5, 1026–1058.
- [6] Рудаков А.Н., Шафаревич И.Р., *О вырождении поверхностей типа $K3$ над полями конечной характеристики*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **4** (1981), no. 3, 646–661.
- [7] Horikawa E., *Surjectivity of the period map of $K3$ -surfaces of degree 2*, Math. Ann. **228** (1977), no. 2, 113–146.
- [8] Рудаков А.Н., Цинк Т., Шафаревич И.Р., *Влияние высоты на вырождение алгебраических поверхностей типа $K3$* , Изв. АН СССР. Сер. мат. **46** (1982), no. 1, 117–134.
- [9] Harlsthorne R., *Algebraic geometry*, Spring.-Verl., N. Y., 1977.
- [10] Rappoport M., Zink Th., *Über die lokale Zeta funktion von Shmiravarietäten*, Invent. Math. **68** (1982), 21–101.

**ОБ АРИФМЕТИКЕ СИНГУЛЯРНЫХ
ПОВЕРХНОСТЕЙ ТИПА КЗ**
*ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИИ, ПОСВЯЩЕННОЙ 100-ЛЕТИЮ
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Н.Г. ЧЕБОТАРЕВА,
КАЗАНЬ, 6-11 ИЮНЯ 1994Г.*

Цель этой работы — обсудить влияние поля определения алгебраической поверхности типа КЗ на ее геометрические свойства. Геометрический инвариант, который мы будем рассматривать здесь, — это группа Нерона–Севери (или Пикара) S_X поверхности X , состоящая из классов дивизоров поверхности, определенных над алгебраическим замыканием ее поля определения. При помощи индекса пересечения группа S_X превращается в целочисленную решетку и в этом качестве будет дальше рассматриваться. Мы обсудим здесь следующий вопрос:

ГИПОТЕЗА. Для всех поверхностей типа КЗ, определенных над заданным полем алгебраических чисел K , их решетки Нерона–Севери S_X принадлежат лишь к конечному числу типов с точностью до изоморфизма.

Это утверждение будет называться **слабой формой** гипотезы. В ее **сильной форме** она утверждает, что то же заключение верно для всех поверхностей типа КЗ, определенных над всеми полями алгебраических чисел заданной степени $[K : \mathbb{Q}] = n$.

Сложность поверхности типа КЗ измеряется рангом ρ ее группы S_X . Известно, что всегда $1 \leq \rho \leq 20$, и поверхности с $\rho = 20$ называются сингулярными. Мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА. Сформулированная выше гипотеза верна в ее **сильной форме** для сингулярных поверхностей.

Мы докажем даже более сильное утверждение: среди поверхностей рассматриваемого типа имеется лишь конечное число разных с точностью до изоморфизма над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Доказательство состоит из трех шагов: а) редукция общего случая к случаю Куммеровой сингулярной поверхности, б) редукция случая Куммеровой сингулярной поверхности к аналогичному утверждению о сингулярных абелевых поверхностях, в) доказательство утверждения о сингулярных абелевых поверхностях.

Шаг а). Пусть X — поверхность типа КЗ, определенная над полем алгебраических чисел степени $[K : \mathbb{Q}] = n$. Если некоторая величина N ограничена константой, зависящей только от n , то мы будем записывать это как $N \ll \infty$. Мы докажем, что существует поле $K' \supset K$ степени $[K' : \mathbb{Q}] \ll \infty$ и такое, что все классы дивизоров из группы S_X определены над K' . Действительно, все классы дивизоров из S_X определены над некоторым конечным расширением $\tilde{K}$ поля K , так как эта группа конечно порождена. Мы можем предполагать $\tilde{K}/K$ расширением Галуа. Его группа Галуа G действует на S_X и определяет гомоморфизм $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(S_X) \subset \text{GL}(20, \mathbb{Z})$ с конечным образом. Но согласно известному замечанию (см., например, [1]) конечная подгруппа группы $\text{GL}(20, \mathbb{Z})$ имеет порядок, ограниченный, например, числом $|\text{GL}(20, \mathbb{Z}/3)|$. Поэтому поле K' , принадлежащее $\text{Ker } \varphi$, обладает нужным свойством. Так как $[K' : \mathbb{Q}] \ll \infty$, то мы можем дальше предполагать, что все классы дивизоров из группы S_X определены уже над K .

Как впервые заметили Т.Шиода и Х.Инозе [2], всякая сингулярная поверхность типа КЗ или является Куммеровой или обладает Куммеровой сингулярной поверхностью Y в качестве двулистного накрытия $\varphi : Y \dashrightarrow X$, $\deg \varphi = 2$. См. также Никулин [3], куда включены наши совместные результаты на эту тему. Нам надо доказать, что можно выбрать Y и накрытие φ определенными над некоторым полем K' , $[K' : \mathbb{Q}] \ll \infty$, и что одна поверхность Y может накрывать двулистно лишь конечное число различных с точностью до изоморфизма над $\mathbb{C}$ поверхностей X . Согласно [3] ветвление накрытия φ состоит из 8 непересекающихся гладких рациональных кривых E_i , $i = 1, \dots, 8$. Пусть $\bar{K}(Y) = \bar{K}(X)(\sqrt{f})$. Тогда

$$(f) = \sum_1^8 E_i + 2D. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что все классы дивизоров из S_X определены над K . Так как E_i единственны в своих классах, то $\sigma E_i = E_i$ для $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$. С другой стороны, $\sigma D \sim D$ и $\sigma D = D + (g_\sigma)$, $g_\sigma \in \bar{K}(X)$. Из (1) мы получаем, что $(f^{1-\sigma}) = (g_\sigma^2)$, а так как g_σ определены с точностью до постоянных множителей, то мы мо-

жем предполагать, что $f^{1-\sigma} = g_\sigma^2$. Для кограницы δg_σ концы g_σ мы имеем тогда: $(\delta g_\sigma^2) = 1$, $(\delta g_\sigma) \in \text{Br}(K)_2$, где $\text{Br}(K)$ — группа Брауера поля K . Но любой элемент второго порядка группы $\text{Br}(K)$ распадается над некоторым квадратичным расширением и после такого расширения мы имеем $\delta g_\sigma = \delta \lambda_\sigma$, $\lambda_\sigma \in (\overline{K})^*$. Из “Теоремы 90” Гильберта мы получаем: $g_\sigma(\lambda_\sigma)^{-1} = h^{\sigma-1}$ с $h \in \overline{K}(X)^*$, $f^{\sigma-1} = \lambda_\sigma^2 h^{2(\sigma-1)}$, $\lambda_\sigma^2 = \mu^{\sigma-1}$, $\mu \in (\overline{K})^*$ и, значит, $f(\mu)^{-1} h^{-2} \in K(X)$. Это доказывает, что Y и φ определены над некоторым полем K' , $[K' : \mathbb{Q}] \ll \infty$.

Мы должны еще доказать, что лишь конечное число разных поверхностей X (с точностью до изоморфизма над $\mathbb{C}$) имеют заданную поверхность Y в качестве накрытия степени 2. Если c — автоморфизм накрытия φ , то бирационально $X = Y/c$. Поэтому достаточно доказать, что с точностью до сопряженности в $\text{Aut}(Y)$ существует лишь конечное число инволюций. Это следует из того, что существует гомоморфизм $\text{Aut}(Y) \rightarrow H$, где $H \subset \text{Aut}(S_Y)$, имеющий конечное ядро и коядро, а группа $\text{Aut}(S_Y)$ является полупрямым произведением подгруппы H и некоторого нормального делителя W ([4]). Группа $\text{Aut}(S_Y)$ — арифметическая и поэтому наше утверждение для нее верно (см. [5]). Отсюда оно тавтологически вытекает для H , а отсюда — для $\text{Aut}(Y)$.

Шаг б). Он полностью параллелен шагу а), так как для любой куммеровой поверхности $Y = \text{Kum}(A)$ по определению существует двулистное накрытие $\varphi : A \dashrightarrow Y$ абелевой поверхностью A . Единственное отличие заключается в том, что ветвление накрытия φ состоит не из 8, а из 16 рациональных кривых. Так как поверхность Y была сингулярной, то для абелевой поверхности A мы имеем $\rho = 20 - 16 = 4$, то есть A тоже сингулярна.

Шаг в). Пусть A — абелева поверхность с $\rho = 4$, определенная над полем алгебраических чисел K степени $[K : \mathbb{Q}] = n$. Тогда над $\overline{K}$ поверхность A изогенна произведению двух эллиптических кривых с комплексным умножением из одного и того же квадратичного мнимого поля L . Мы рассмотрим более общий случай абелевых многообразий A размерности g , изогенных над $\overline{K}$ произведению g эллиптических кривых с комплексным умножением из квадратичного мнимого поля L . Тогда $\text{End}_{\overline{K}}(A) \otimes \mathbb{Q} = M_g(L)$. Мы можем применить к группе $\text{End}_K(A)$ то же рассуждение, которое применяли в шаге а) к группе S_X . Поэтому мы можем предполагать, что $\text{End}_K(A) = \text{End}_{\overline{K}}(A)$ (если нужно, заменяя K полем K' с $[K' : \mathbb{Q}] \ll \infty$). В нашем случае тогда $\text{End}_K(A)$ будет порядком в матричной алгебре $M_g(L)$. В частности, $\text{End}_K(A)$ содержит g элементов ранга 1, сумма которых равна скалярной матрице. От-

сюда вытекает существование изогении $\varphi : C_1 \times \cdots \times C_g \rightarrow A$, где φ и $C_1, \dots, C_g$ определены над K , а $\text{End}(C_i) = R_i$ являются порядками в поле L . Нам надо доказать: α) что существует лишь конечное число таких кривых C_i с точностью до изоморфизма над $\mathbb{C}$ и β) что для заданных $C_1, \dots, C_g$ существует лишь конечное число разных с точностью до изоморфизма абелевых многообразий A , определенных над полем алгебраических чисел K заданной степени n , изогенных $C_1 \times \cdots \times C_g$, причем изогения тоже определена над K . При этом в обоих случаях число многообразий ограничено константой, зависящей только от n .

Утверждение α). Эллиптическая кривая C определяется с точностью до изоморфизма над $\mathbb{C}$ значением своего абсолютно-го инварианта $j(C)$. Согласно теории комплексного умножения $[L(j(C)) : L] = h(R)$ — числу классов порядка R , где $R = \text{End} C$ ([6]). Так как $j(C) \in K$, то $h(R) \leq n$. С другой стороны, $h(R) = h(L)\Psi(f)$, $\Psi(f) = f \prod_{p|f} \left(1 - \left(\frac{d}{p}\right)p^{-1}\right)$, где f — кондуктор порядка

R , d — дискриминант поля L , и вышеприведенная формула верна при $d \neq -3, -4$, в то время, как в этих исключительных случаях правую часть надо поделить на 2 или 3 ([7]). Согласно теореме Зигеля ([8])

$$\log h(L) / \log \sqrt{|d|} \rightarrow 1$$

и поэтому $|d|$ ограничено при $h(R) \leq n$. Элементарная проверка показывает, что $\Psi(f) \rightarrow \infty$ при $f \rightarrow \infty$, поэтому при $h(R) \leq n$ существует только конечное число порядков R . Для каждого R существует ровно $h(R)$ значений $j(C)$. Поэтому в целом существует лишь конечное число неизоморфных эллиптических кривых с комплексным умножением, определенных над полем алгебраических чисел степени n и это число ограничено в зависимости от n .

Утверждение β). Пусть теперь кривые $C_1, \dots, C_g$ фиксированы. Мы докажем, что для любой изогении $\varphi : C_1 \times \cdots \times C_g \rightarrow A$, определенной над K , существует другая изогения $\varphi' : C_1 \times \cdots \times C_g \rightarrow A$ с $\deg \varphi' \ll \infty$. Для этого достаточно доказать, что для любой такой изогении существует эндоморфизм α многообразия $C_1 \times \cdots \times C_g$ с $\text{Ker } \alpha \supset \text{Ker } \varphi$ и $(\text{Ker } \alpha : \text{Ker } \varphi) \ll \infty$.

Мы должны воспользоваться тем, что изогения φ определена над K . Это значит, что группа $\mathfrak{A} = \text{Ker } \varphi$ является G -инвариантной подгруппой группы кручения в $(C_1 \times \cdots \times C_g)(\bar{K})$, где $G = \text{Gal}(\bar{K}/k)$.

Для этого воспользуемся основной теоремой теории комплексного умножения, как она сформулирована в [9]. Действие группы G на точки конечного порядка в $C_i(K)$ определяет гомоморфизм $G \rightarrow$

$U(R_i) = \prod_p (R_i \otimes \mathbb{Z}_p)^*$. Сравнение с теорией полей классов дает гомоморфизм

$$\xi_i : C_K \rightarrow U(R_i),$$

где C_K — группа классов идеалов, и соответствующий гомоморфизм

$$\rho_i : I_K \rightarrow U(R_i),$$

где I_K — группа идеалов поля K . Гомоморфизм ρ_i тривиален на группе главных идеалов P_K . Теория комплексного умножения утверждает, что ограничение гомоморфизма ρ_i на группу единичных (т.е. имеющих единичный идеал) идеалов $U(K)$ задается в виде

$$\rho_i(x) = N_{K/L}(x) \varepsilon_i(x), \quad (2)$$

где ε_i — гомоморфизмы конечного порядка: 2, 4 или 6 в зависимости от числа корней из единицы в поле L . Из (2) следует, что a^m ($m = 2n, 4n$ или $6n$) принадлежит образу группы Галуа G для φ каждого $a \in U(L)$. Поэтому из того, что ядро $\mathfrak{A}$ изогении G -инвариантно, следует, что $\mathfrak{A}$ инвариантно относительно $U(L)^m$. Однако подгруппа, инвариантная относительно множества операторов X , инвариантна и относительно порожденного им кольца $\mathbb{Z}[X]$. Поэтому $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно $\mathbb{Z}[U(L)^m]$. Мы покажем, что $\mathbb{Z}[U(L)^m]$ содержит порядок $R = R_f$ с кондуктором f , где $f \ll \infty$. Очевидно, что для любого простого числа p , $[\mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_p : \mathbb{Z}[(\mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_p)^*]^m] \ll \infty$, где $\mathcal{O}$ — кольцо целых чисел L . Поэтому достаточно доказать, что этот индекс равен 1 для почти всех p . Поэтому мы можем считать p взаимно простым с m и дискриминантом L . В этом случае достаточно доказать, что $\mathbb{Z}[(\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p)^*]^m = \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$ и $\mathbb{Z}[(\mathbb{F}_{p^2}^*)^m] = \mathbb{F}_{p^2}$ для достаточно больших p . В первом случае $((\mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p)^*)^m$ содержит элемент $(1, x)$, $x \neq 1$, если $(p-1) \nmid m$, поэтому наше утверждение неверно лишь для $(p-1) \mid m$ и, значит, $p \leq m+1$. Во втором случае оно неверно, только если $\mathbb{F}_{p^2}^m \subset \mathbb{F}_p$, $(p^2-1) \mid m(p-1)$ и, значит, $p \leq m-1$. Следовательно, можно задать R как порядок, определенный конечным числом сравнений и, значит, $R = R_f$, $f \ll \infty$.

Мы будем пользоваться следующим формализмом. Пусть T_l — l -адический модуль Тэйта многообразия $C_1 \times \dots \times C_g$, а $T = \prod_l T_l$ — полный модуль Тэйта. Как обычно, положим $V = T_l \otimes \mathbb{Q}_l$ и $V = \prod^* V_l$, где $\prod^*$ — ограниченное произведение в смысле теории аделей. Тогда V/T — это подгруппа кручения в $(C_1 \times \dots \times C_g)(\bar{K})$.

Каждой конечной подгруппе $\alpha \subset V/T$ соответствует подгруппа A , $T \subset A \subset V$, $A/T = \alpha$. Выберем элементы $e_1, \dots, e_{2g} \in V$ таким образом, что подгруппа $\bigoplus_i^{2g} e_i \hat{\mathbb{Z}}$ соизмерима с T . Здесь $\hat{\mathbb{Z}} = \prod \mathbb{Z}_l$.

Каждой подгруппе $M \subset V$, соизмеримой с T , соответствует свободная абелева группа $\mathfrak{M} = M \cap (\bigoplus e_i \mathbb{Q})$ ранга $2g$. Для двух таких групп M и N включения $M \subset N$ и $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ (как подгрупп в $\bigoplus e_i \mathbb{Q}$) эквивалентны. Теперь выберем e_i так, чтобы группа $\bigoplus e_i \mathbb{Z}$ была R -инвариантной. Например, положим $\bigoplus_i^{2g} e_i \mathbb{Z} = \bigoplus_i^g f_i R$, где $f_i \in V(C_i)$

таковы, что группа $f_i R \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ соизмерима с $T(C_i)$. Тогда подгруппа $M \subset V$ и соизмеримая с T , будет R -инвариантной тогда же, когда и соответствующая группа $\mathfrak{M}$.

Таким образом, мы можем предполагать, что подгруппа $A \subset V$, $A/T = \alpha$ и соответствующая подгруппа $\mathfrak{A}$ обе R -инвариантны. Векторное пространство $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{Q}$ является модулем над $R \otimes \mathbb{Q} = L$ и как таковой изоморфна L^g . Среди R -подмодулей $\mathfrak{M} \subset L^g$, являющихся свободными $\mathbb{Z}$ -модулями ранга $2g$ есть только конечное число неизоморфных (теорема о конечности числа классов, см., например, [10]). Пусть $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_h$ — их представители. Здесь h зависит только от R , т.е. от $C_1, \dots, C_g$ и n . Мы можем выбрать их так, что соответствующие модули $M_i \subset V$ содержатся в T . Модуль $\mathfrak{A}$ изоморфен одному из них: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{M}_i$. Этот изоморфизм продолжается до изоморфизма $\mathfrak{A} \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathfrak{M}_i \otimes \mathbb{Q} = L^2$, который определяется некоторым элементом α из кольца $\text{End}_L(L^g) = M_g(L) = \text{End}(C_1 \times \dots \times C_g) \otimes \mathbb{Q}$. Поэтому $\alpha A = M_i$. Так как $A \supset T$, то $\alpha A \supset \alpha T$, а так как $\alpha A = M_i \subset T$, то $\alpha T \subset T$. Из этого следует, что $\alpha \in \text{End}(C_1 \times \dots \times C_g)$. С другой стороны, $\alpha A \supset T$ так, что $\alpha A \subset T$ и $A \subset \alpha^{-1}T$, $(\alpha^{-1}T : A) = (T : \alpha A) = (T : M_i)$. Мы видим, что $\text{Ker} \alpha = \alpha^{-1}T/T \supset \alpha = A/T$ и $(\text{Ker} \alpha : \alpha) \leq \text{Max}(T : M_i) \ll \infty$. Это завершает доказательство.

Замечания. 1. Более сильное утверждение, доказанное нами для сингулярных поверхностей типа K3: что в предположениях гипотезы существует лишь конечное число неизоморфных над $\mathbb{C}$ поверхностей — неверно в общем случае. Оно неверно в случае $X = \text{Kum}(A)$, $A = C_1 \times C_2$, где C_1 и C_2 — эллиптические кривые без комплексного умножения, определенные над $\mathbb{Q}$.

2. После окончания конференции Ю.Г.Зархин обратил мое внимание на более короткое доказательство утверждения β в случае $g = 2$. Именно, как показано в работе Т.Шиоды и Н.Митани [11], каждая сингулярная абелева поверхность изоморфна над $\mathbb{C}$ произведению эллиптических кривых $A = C_1 \times C_2$. Так как в нашем

случае $\text{End}_C(A) = \text{End}_K(A)$, то проекции на C_1 и C_2 определены над K . Нам остается применить утверждение α .

3. С каждой сингулярной абелевой поверхностью (и с каждой сингулярной поверхностью типа К3) связана эллиптическая кривая $C_A = H^2(A, \mathcal{O})/j^*H^2(A, \mathbb{Z})$, где j^* соответствует включению $j: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}$. В работе [11] доказано, что в разложении $A = C_1 \times C_2$ можно предполагать $C_1 = C_A$. Предшествующее рассуждение показывает, что кривая C_A определена над полем определения кольца $\text{End}(A)$. Это увеличивает шанс на возможность алгебраического определения кривой C_A .

4. Как сообщил мне Ж.-П.Серр, гипотеза, аналогичная сформулированной в начале работы, обсуждалась Р.Колменом по отношению к абелевым многообразиям и их кольцам эндоморфизмов (в варианте, соответствующем слабой форме нашей гипотезы). Доказательство утверждения β) содержит, очевидно, проверку этой гипотезы для случая "сингулярных" абелевых многообразий.

Литература

1. A.Speiser, *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, Berlin, 1937.
2. T.Shioda, H.Inose, *The singular K3 surfaces*, Complex Analysis and Algebraic Geometry. Cambridge University Press (1977), 119–137.
3. V.Nikulin, *On rational maps between K3 surfaces*, Constantin Caratheodory. World Science Publishing (1991), 964–995.
4. И.И.Пятецкий-Шапиро, И.Р.Шафаревич, *Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа К3*, Изв. АН СССР, сер. матем. **35** (1971), 530–572.
5. A.Borel, *Arithmetic Properties of linear algebraic groups*, Proc. Int. Congr. Mathematicians. Stockholm (1962), Upsala (1963), 11–22.
6. G.Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton University Press, 1971.
7. R.Dedekind, P.G.Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen uber Zahlentheorie*, Zweite Ausgabe.
8. K.Siegel, *Über die Klassenzahl quadratischer Körper*, Gesammelte Abhandlungen Bd. II, 406–409.
9. J.P.Serre, J.Tate, *Good reduction of abelian varieties*, Ann. of Math. **88** (1968), 492–577.
10. C.Curtis, I.Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Interscience Publishers, 1962.
11. T.Shioda, N.Mitani, *Singular abelian surfaces and binary quadratic forms. Classification of Algebraic and Compact Complex Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics **412** (1974), 259–287.

Издание осуществлено АО "Прима В"

121183. г.Москва, Б.Академическая ул 83 - 87

лр 060727 от 17.02.92.

Подписано в печать 6.06.96. Формат 60х88/16. Бумага офсетная № 1.

Объем 40,25 п.л. Печать офсетная. Тираж 3000 экз. Заказ № 81.

Отпечатано в АООТ «Оригинал».

101898, Москва, Центр, Хохловский пер., 7.