Проблемы Гильберта

Под общей редакцией
П.С.АЛЕКСАНДРОВА

ИСФАРА
издательство
2000

СОДЕРЖАНИЕ

Проблемы Гильберта

Сборник, предлагаемый вниманию читателя, содержит текст известного доклада Гильберта «Математические проблемы», произнесенного на II Международном Конгрессе математиков, проходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 г. Этот доклад охватывает проблемы математики в целом и оказывается вполне уникальным явлением в истории математики и в математической литературе.

По своему характеру проблемы Гильберта очень разнородны. Они начинаются с теории множеств (континуум-проблема) и обоснования математики, переходят далее к основаниям геометрии, теории непрерывных групп (знаменитая пятая проблема об освобождении понятия непрерывной группы от требования дифференцируемости), к теории чисел, алгебре и алгебраической геометрии и заканчиваются анализом (дифференциальные уравнения, особенно с частными производными, вариационное исчисление). Особое место занимает шестая проблема — об аксиоматике теории вероятностей и механики. Какие из гильбертовских проблем решены, какие еще нет, — об этом читатель может узнать из комментариев к этим проблемам.

Издательство ТОО "ИСФАРА".
456830, Челябинская обл., г. Касли, ул. К.Маркса, 86.
Лицензия ЛР № 090005 от 10.09.99 г. Формат 60x84/16. Печ. л. 15.
Отпечатано в АОЗТ "Горизонт".
456830, Челябинская обл., г. Касли, ул. М. Уральская, 2.

ISBN 5-1236-0064-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник, предлагаемый вниманию читателя, содержит впервые переведенный на русский язык текст известного доклада Гильберта «Математические проблемы», произнесенного на II Международном Конгрессе математиков, проходившем в Париже с 6 по 12 августа 1900 г. В работе Конгресса приняло участие 226 человек: 90 человек из Франции, 25 из Германии, 17 из Соединенных Штатов, 15 из Италии, 13 из Бельгии, 9 из России, по 8 из Австрии и Швейцарии, по 7 из Англии и Швеции, 4 из Дании, по 3 из Голландии, Испании и Румынии, по 2 из Сербии и Португалии, 4 из Южной Америки, по одному делегату прислали Турция, Греция, Норвегия, Канада, Япония и Мексика. Основными языками Конгресса были английский, французский, немецкий и итальянский. Председателем Конгресса был избран Анри Пуанкаре, почетным председателем — отсутствовавший Шарль Эрмит (1822—1901), вице-председателями — Е. Чубер (Вена), К. Гейзер (Цюрих), П. Гордан (Эрланген), А. Гринхилл (Лондон), Л. Линделёф (Гельсингфорс), Ф. Линдеман (Мюнхен), Г. Миттаг-Леффлер (Стокгольм), отсутствовавший Э. Мур (Чикаго), М. А. Тихомандрицкий (Харьков), В. Вольтерра (Турин), Г. Цейтен (Копенгаген), секретарями Конгресса — И. Бендиксон (Стокгольм), А. Капелли (Неаполь), Г. Минковский (Цюрих), И. Л. Пташицкий (Петербург), отсутствовавший А. Уайтхед (Кэмбридж). Генеральным секретарем Конгресса был избран Э. Дюпорк (Париж). Работало шесть секций: 1) арифметики и алгебры (председатель Д. Гильберт, секретарь Э. Картан), 2) анализа (председатель П. Пенлеве, секретарь Ж. Адамар), 3) геометрии (председатель Г. Дарбу, секретарь Б. Нивенгловский), 4) механики и математической физики (председатель Ж. Лармо, секретарь

Т. Леви-Чивита), 5) истории и библиографии математики (председатель принц Роланд Бонапарт, секретарь М. Окань), 6) преподавания и методологии математики (председатель М. Кантор, секретарь Ш. Лезан). 5-я и 6-я секции заседали вместе. В день открытия Конгресса на общем заседании состоялось два часовых доклада: М. Кантора «Об историографии математики», в котором он сделал обзор работ по истории математики, начиная с Ж. Монтюкла и Г. Либри, и В. Вольтерра о научной деятельности Э. Бетти, Ф. Бриоски и Ф. Казорати. Затем начались секционные заседания, на которых было сделано 46 сообщений, в том числе Л. Диксоном, Г. Миттаг-Леффлером, Д. Гильбертом, Ж. Адамаром, А. Капелли, И. Фредгольмом, И. Бендиксоном, В. Вольтерра и др. Русская математика была представлена на Конгрессе единственным сообщением М. А. Тихомандрицкого «Об исчезновении функции H нескольких переменных». На заключительном общем заседании выступили Г. Миттаг-Леффлер, который рассказал о последних годах жизни Вейерштрасса по его письмам к С. В. Ковалевской, и А. Пуанкаре, сделавший доклад «О роли интуиции и логики в математике». Так проходил Конгресс, на котором 8 августа на совместном заседании 5-й и 6-й секций Д. Гильберт прочитал свой доклад «Математические проблемы». Как пишет Д. Синцов [1]), «сообщение Гильберта вызвало ряд замечаний со стороны присутствовавших, указавших, что некоторые из перечисленных Гильбертом задач вполне или отчасти ими разрешены» [2]). К тому времени Гильберт, 38-летний гёттингенский профессор, был уже широко известен своими работами по теории инвариантов и теории алгебраических чисел. В 1899 г. вышли в свет его знаменитые «Основания геометрии», составившие эпоху в основаниях математики. Удивительная разносторонность и обобщающая сила дарования Гильберта позволяли ему легко ориентироваться в различных областях математики, почти в каждой из которых он получил выдающиеся результаты и поставил ряд важных проблем.

Наиболее интересные, по мнению Гильберта, проблемы, «исследование которых может значительно стимули-

---

[1]) Д. М. Синцов, Второй Международный математический конгресс, Физ.-матем. науки (2) 1, № 5 (1901), 129—137.

[2]) Вероятно, число проблем в первоначальном тексте доклада превышало двадцать три.

ровать дальнейшее развитие науки», он и предложил математикам в своем докладе. С тех пор прошло уже две трети века. Проблемы Гильберта в течение всего этого срока не теряли актуальности, к их решению были приложены усилия талантливейших математиков. Развитие идей, связанных с содержанием указанных проблем, составило значительную часть математики XX в.

Перевод основной части доклада (исключая текст 15-й и 23-й проблем и заключения) осуществлен М. Г. Шестопал с текста, помещенного в Göttinger Nachrichten (1900, 253—297), и просмотрен И. Н. Бронштейном и И. М. Ягломом, которые внесли в него ряд редакционных поправок и изменений. Текст 15-й и 23-й проблем, а также заключительной части доклада переведен А. В. Дорофеевой. В перевод внесены дополнения, сделанные Гильбертом для издания доклада, помещенного в третьем томе его Собрания сочинений (Gesammelte Abhandlungen, Berlin, Springer, 1932—1935),— в тексте они заключены в квадратные скобки. Перевод был сверен с английским переводом (Bull. Amer. Math. Soc. 8, № 10 (1902), 403—479), также с переводом, осуществленным в кабинете истории математики и механики МГУ А. В. Дорофеевой и М. В. Чириковым [1]). Известную трудность составлял перевод некоторых старых математических терминов. В некоторых случаях рядом с переводом в круглых скобках помещен немецкий термин, а в одном случае термин (Polarenprocess) оставлен без перевода. Переводчики немало потрудились над тем, чтобы донести до русского читателя своеобразный, местами даже патетический язык гильбертовского доклада. Авторы комментариев к проблемам любезно согласились просмотреть переводы соответствующих проблем и внесли ряд существенных исправлений.

Оценить то выдающееся значение, которое сыграл доклад Гильберта для математики XX в. позволят, как мы надеемся, комментарии к проблемам, составляющие вторую часть сборника. Создание таких комментариев, содержащих обзор основных результатов, достигнутых в направлении решения гильбертовских проблем, уже

1) Этот перевод послужил началом работы по историко-математическому анализу проблем Гильберта, проводимой в кабинете истории математики и механики МГУ под руководством проф. К. А. Рыбникова.

предпринималось отдельными авторами[1]). Однако работа такого рода с привлечением известных специалистов по соответствующим областям математики осуществляется, насколько нам известно, впервые.

Выходу в свет этой книги в значительной мере способствовали внимание и помощь со стороны очень многих лиц, среди которых необходимо отметить участников семинара по истории математики и механики МГУ, в особенности его руководителей профессоров И. Г. Башмакову, К. А. Рыбникова, А. П. Юшкевича, покойную С. А. Яновскую, а также сотрудника Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР А. Н. Паршина, советы и помощь которого во многом помогли улучшить издание.

С. С. Демидов

---

[1]) L. Bieberbach, Über die Einfluß von Hilbert Pariser Vortrag über «Mathematische Probleme», auf die Entwicklung der Mathematik in den letzen dreißig Jahren, Naturwissenschaften 18 (1930), 1101—1111; С. С. Демидов, К истории проблем Гильберта, ИМИ, вып. 17, «Наука», 1967, 91—121.

НЕСКОЛЬКО СЛОВ О ПРОБЛЕМАХ ГИЛЬБЕРТА

На Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 г. выдающийся немецкий математик Давид Гильберт выступил с докладом под названием «Математические проблемы». Доклад этот был затем несколько раз опубликован в подлиннике и в переводах [1]); последнее издание подлинника находим в третьем томе собрания сочинений Гильберта [2]).

На нижеследующих страницах печатается русский перевод доклада Гильберта.

Ни до доклада Гильберта 1900 г., ни после этого доклада математики, насколько я знаю, не выступали с научными сообщениями, охватывавшими проблемы математики в целом [3]). Таким образом, доклад Гильберта оказывается вполне уникальным явлением в истории математики и в математической литературе. И сейчас, почти через 70 лет после того, как Гильберт сделал свой доклад, он сохраняет свой интерес и значение.

---

[1]) Впервые напечатан в Archiv f. Math. u Phys., III серия, 1 (1901), 44—63, 213—237.

[2]) D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen, т. III, 1935, 290—329.

[3]) Доклад американского математика Дж. фон Неймана на Международном математическом конгрессе в Амстердаме в 1954 г. не является опровержением этого утверждения: правда, доклад фон Неймана назывался «Нерешенные проблемы в математике», но докладчик начал свой доклад высказыванием, что считал бы безумием в подражание Гильберту говорить о проблемах математики в целом, а предполагает ограничиться лишь проблемами в некоторых областях математики (главным образом в областях, близких к функциональному анализу). Доклад фон Неймана опубликован не был — единственное, что о нем напечатано в Трудах Амстердамского конгресса,— это то, что рукопись доклада не была доступна издателям; по-видимому, ее не существует. Поэтому об этом докладе можно в настоящее время судить лишь по воспоминаниям лиц, слушавших его.

На все развитие современной математики Гильберт оказал влияние исключительное, охватывающее почти все направления математической мысли; это объясняется тем, что Гильберт был математиком, в котором сила математической мысли соединялась с редкой широтой и разносторонностью. Разносторонность эта была, если так можно выразиться, вполне сознательной: Гильберт постоянно делает упор на то, что математика *едина*, что различные ее части находятся в постоянном взаимодействии между собой и с науками о природе и что в этом взаимодействии не только ключ к пониманию самой сущности математики, но и лучшее средство против расщепления математики на отдельные, не связанные друг с другом части,— опасности, которая в наше время огромного количественного роста и устрашающей специализации математических исследований постоянно заставляет о себе думать. С большой силой и убежденностью говорит Гильберт, особенно в конце своего замечательного доклада, о целостном характере математики как основе всего точного естественнонаучного познания. Его убежденность в этом служит в значительной степени и путеводной нитью всего доклада в целом и, несомненно, во многих случаях руководила автором при отборе выдвигаемых им математических задач.

Доклад начинается с интересно, я бы сказал вдохновенно, написанной общей вводной части, в которой говорится не только о значении для математики «хорошо поставленной» специальной проблемы, но и высказываются суждения о математической строгости, о связи математики с естествознанием и о других вещах, близких всякому активно думающему о своей науке математику. В заключение этой вводной части Гильберт с поражающей силой и убежденностью высказывает свой основной тезис, «аксиому» о разрешимости в широком смысле слова всякой математической задачи — тезис, содержанием которого являются глубокая уверенность в неограниченном могуществе человеческого познания и непримиримая борьба со всяким агностицизмом — с нелепым «Ignorabimus» [1]), как говорит в другом месте Гильберт.

---

[1]) «Ignorabimus» (лат.) — «мы не будем знать» — одна из известных речей физиолога Э. Дюбуа-Реймона кончалась (в применении к некоторым невыясненным научным вопросам) восклицанием: «Ignoramus et ignorabimus» — мы не знаем и не будем знать!

Далее идут сами проблемы. Они начинаются с теории множеств (континуум-проблема) и обоснования математики, переходят далее к основаниям геометрии, теории непрерывных групп (знаменитая пятая проблема об освобождении понятия непрерывной группы от требования дифференцируемости), к теории чисел, алгебре и алгебраической геометрии и заканчиваются анализом (дифференциальные уравнения, особенно с частными производными, вариационное исчисление). Особое место занимает шестая проблема — об аксиоматике теории вероятностей и механики.

По своему характеру проблемы Гильберта очень разнородны. Иногда это — конкретно поставленный вопрос, на который ищется однозначный ответ — да или нет,— такова, например, геометрическая третья проблема или арифметическая седьмая проблема о трансцендентных числах. Иногда задача ставится менее определенно как, например, в двенадцатой проблеме (ей Гильберт придавал особо важное значение), в которой требуется найти как само обобщение теоремы Кронекера, так и соответствующий класс функций, которые должны заменить показательную и модулярную.

Пятнадцатая проблема есть, в сущности, проблема обоснования всей теории алгебраических многообразий.

Иногда проблема под данным номером в действительности содержит в себе несколько различных, хотя и тесно связанных между собой задач. Наконец, двадцать третья проблема есть, в сущности, проблема дальнейшего развития вариационного исчисления.

Сейчас, много лет после того, как Гильберт поставил свои проблемы, можно сказать, что они были поставлены хорошо. Они оказались подходящим объектом для того, чтобы сосредоточить вокруг себя творческие усилия математиков различных научных направлений и школ. Каковы были эти усилия и к каким результатам они привели, какие из гильбертовских проблем решены, какие еще нет, — об этом, хотя и не с исчерпывающей полнотой, читатель может узнать из комментариев к этим проблемам.

Характер этих комментариев несколько неоднороден (что в значительной мере продиктовано характером самих проблем) — некоторые из них могут быть понятны читателю, знакомому с математикой в объеме первых двух курсов механико-математических или физико-математических факультетов университетов или педагогических институтов, для понимания других требуется довольно высокая математическая культура. Думаю, во всяком случае, что читатель будет благодарен авторам комментариев, существенно облегчившим ознакомление с тем действительно выдающимся произведением общематематической литературы, каким является доклад Гильберта; кроме того, из комментариев можно, как мне кажется, понять и произведенное этим докладом воздействие на дальнейшее развитие математики.

Считаю, далее, необходимым отметить самоотверженный труд редактора этого издания С. С. Демидова, без которого оно едва ли было бы вообще осуществлено.

П. С. Александров

I

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Доклад, прочитанный 8 августа 1900 г.
на II Международном Конгрессе математиков
в Париже

Перевод с немецкого
М. Г. Шестопал и А. В. Дорофеевой

Кто из нас не хотел бы приоткрыть завесу, за которой скрыто наше будущее, чтобы хоть одним взглядом проникнуть в предстоящие успехи нашего знания и тайны его развития в ближайшие столетия? Каковы будут те особенные цели, которые поставят себе ведущие математические умы ближайшего поколения? Какие новые методы и новые факты будут открыты в новом столетии на широком и богатом поле математической мысли?

История учит, что развитие науки протекает непрерывно. Мы знаем, что каждый век имеет свои проблемы, которые последующая эпоха или решает, или отодвигает в сторону как бесплодные, чтобы заменить их новыми. Чтобы представить себе возможный характер развития математического знания в ближайшем будущем, мы должны перебрать в нашем воображении вопросы, которые еще остаются открытыми, обозреть проблемы, которые ставит современная наука, и решения которых мы ждем от будущего. Такой обзор проблем кажется мне сегодня, на рубеже нового столетия, особенно своевременным. Ведь большие даты не только заставляют нас оглянуться на прошедшее, но и направляют нашу мысль в неизвестное будущее.

Невозможно отрицать глубокое значение, какое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследователя. Всякая научная область жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития. Как вообще каждое человеческое начинание связано с той или иной целью, так и математическое творчество связано с постановкой проблем. Сила исследователя познается в решении проблем: он находит новые методы, новые точки зрения, он открывает более широкие и свободные горизонты.

Трудно, а часто и невозможно заранее правильно оценить значение отдельной задачи; ведь в конечном счете ее ценность определится пользой, которую она принесет науке. Отсюда возникает вопрос: существуют ли общие признаки, которые характеризуют хорошую математическую проблему?

Один старый французский математик сказал: «Математическую теорию можно считать совершенной только тогда, когда ты сделал ее настолько ясной, что берешься изложить ее содержание первому встречному». Это требование ясности и легкой доступности, которое здесь так резко ставится в отношении математической теории, я бы поставил еще резче в отношении математической проблемы, если она претендует на совершенство; ведь ясность и легкая доступность нас привлекают, а усложненность и запутанность отпугивают.

Математическая проблема, далее, должна быть настолько трудной, чтобы нас привлекать, и в то же время не совсем недоступной, чтобы не делать безнадежными наши усилия; она должна быть путеводным знаком на запутанных тропах, ведущих к сокрытым истинам; и она затем должна награждать нас радостью найденного решения.

Математики прошлого столетия со страстным рвением отдавались решению отдельных трудных задач; они знали цену трудной задаче. Я напомню только поставленную Иоганном Бернулли *задачу о линии быстрейшего падения*. «Как показывает опыт,— говорит Бернулли, оповещая о своей задаче,— ничто с такой силой не побуждает высокие умы к работе над обогащением знания, как постановка трудной и в то же время полезной задачи». И поэтому он надеется заслужить благодарность математического мира, если он,— следуя примеру таких мужей, как Мерсенн, Паскаль, Ферма, Вивиани и другие, которые (до него) поступали так же,— предложит задачу выдающимся аналитикам своего времени, чтобы они могли на ней, как на пробном камне, испытать достоинства своих методов и измерить свои силы. Этой задаче Бернулли и другим аналогичным задачам обязано своим зарождением вариационное исчисление.

Известно утверждение Ферма о том, что диофантово уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах x, y, z, если не считать известных очевидных исключений. *Проблема доказательства этой неразрешимости* являет разительный пример того, какое побуждающее влияние на науку может оказать специальная и на первый взгляд малозначительная проблема. Ибо, побужденный задачей Ферма, Куммер пришел к введению идеальных чисел и к открытию теоремы об однозначном разложении чисел в круговых полях на идеальные простые множители — теоремы, которая теперь, благодаря обобщениям на любую алгебраическую числовую область, полученным Дедекиндом и Кронекером, является центральной в современной теории чисел и значение которой выходит далеко за пределы теории чисел в область алгебры и теории функций.

Напомню еще об одной интересной проблеме — *задаче трех тел*. То обстоятельство, что Пуанкаре предпринял новое рассмотрение и значительно продвинул эту трудную задачу, привело к плодотворным методам и далеко идущим принципам, введенным этим ученым в небесную механику, методам и принципам, которые сейчас признаются и применяются также и в практической астрономии.

Обе упомянутые проблемы — проблема Ферма и проблема трех тел — являются в нашем запасе проблем как бы противоположными полюсами: первая представляет свободное достижение чистого разума, принадлежащее области абстрактной теории чисел, вторая выдвинута астрономией и необходима для познания простейших основных явлений природы.

Часто, однако, случается, что одна и та же специальная проблема появляется в весьма различных областях математики. Так, *проблема о кратчайшей линии* играет важную историческую и принципиальную роль одновременно в основаниях геометрии, в теории кривых и поверхностей, в механике и в вариационном исчислении. А как убедительно демонстрирует Ф. Клейн в своей книге об икосаэдре [1]), *проблема о правильных многогранниках* имеет важное значение одновременно для элементарной геометрии, теории групп, теории алгебраических и теории линейных дифференциальных уравнений!

---

[1]) F. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen von fünften Grade, Leipzig, 1884.— *Прим. ред.*

Чтобы осветить важность отдельных проблем, я позволю себе еще сослаться на Вейерштрасса, считавшего большой удачей для себя то стечение обстоятельств, которое позволило ему в начале своей научной деятельности заняться такой значительной проблемой, как *проблема Якоби об обращении эллиптического интеграла*.

После того как мы рассмотрели общее значение проблемы в математике, обратимся к вопросу о том, из какого источника математика черпает свои проблемы. Несомненно, что первые и самые старые проблемы каждой математической области знания возникли из опыта и поставлены нам миром внешних явлений. Даже правила *счета с целыми числами* были открыты на этом пути еще на ранней ступени культурного развития человечества так же, как и теперь ребенок познает применение этих правил эмпирическим методом. То же относится к *первым проблемам геометрии* — пришедшим к нам из древности задачам удвоения куба, квадратуры круга, а также к старейшим проблемам теории численных уравнений, теории кривых, дифференциального и интегрального исчислений, вариационного исчисления, теории рядов Фурье и теории потенциала, не говоря уже о всем богатстве проблем собственно механики, астрономии и физики.

При дальнейшем развитии какой-либо математической дисциплины человеческий ум, обнадеженный удачами, проявляет уже самостоятельность; он сам ставит новые и плодотворные проблемы, часто без заметного влияния внешнего мира, с помощью только логического сопоставления, обобщения, специализирования, удачного расчленения и группировки понятий и выступает затем сам на первый план как постановщик задач. Так возникли *задача о простых числах* и другие задачи арифметики, теория Галуа, теория алгебраических инвариантов, теория абелевых и автоморфных функций и так возникали вообще почти *все тонкие вопросы современной теории чисел и теории функций*.

А между тем во время действия созидательной силы чистого мышления внешний мир снова настаивает на своих правах: он навязывает нам своими реальными фактами новые вопросы и открывает нам новые области математического знания. И в процессе включения этих новых областей знания в царство чистой мысли мы часто находим ответы на старые нерешенные проблемы и таким путем наилучшим образом продвигаем вперед старые теории. На этой постоянно повторяющейся и сменяющейся игре между мышлением и опытом, мне кажется, и основаны те многочисленные и поражающие аналогии и та кажущаяся предустановленная гармония, которые математик так часто обнаруживает в задачах, методах и понятиях различных областей знания.

Остановимся еще кратко на вопросе о том, каковы могут быть общие требования, которые мы вправе предъявить к решению математической проблемы. Я имею в виду прежде всего требования, благодаря которым удается убедиться в правильности ответа с помощью конечного числа заключений и притом на основании конечного числа предпосылок, которые кладутся в основу каждой задачи и которые должны быть в каждом случае точно сформулированы. Это требование логической дедукции с помощью конечного числа заключений есть не что иное, как требование строгости проведения доказательств. Действительно, требование строгости, которое в математике уже вошло в поговорку, соответствует общей философской потребности нашего разума; с другой стороны, только выполнение этого требования приводит к выявлению полного значения существа задачи и ее плодотворности. Новая задача, особенно если она вызвана к жизни явлениями внешнего мира, подобна молодому побегу, который может расти и приносить плоды, лишь если он будет заботливо и по строгим правилам искусства садоводства выращиваться на старом стволе — твердой основе нашего математического знания.

Будет большой ошибкой думать при этом, что строгость в доказательстве — это враг простоты. Многочисленные примеры убеждают нас в противоположном: строгие методы являются в то же время простейшими и наиболее доступными. Стремление к строгости как раз и приводит к отысканию простейших доказательств. Это же стремление часто прокладывает путь к методам, которые оказываются более плодотворными, чем старые менее строгие методы. Так, теория алгебраических кривых благодаря более строгим методам теории функций комплексного переменного и целесообразному применению трансцендентных средств значительно упростилась и приобрела бо́льшую цельность. Далее, доказательство правомерности применения четырех элементарных арифметических действий к степенным рядам, а также почленного дифференцирования и интегрирования этих рядов и основанное на этом признание степенного ряда [как инструмента математического анализа — *П. А.*], несомненно, значительно упростили весь анализ, в частности, теорию исключения и теорию дифференциальных уравнений (вместе с ее теоремами существования).

Но особенно разительный пример, иллюстрирующий мою мысль, представляет вариационное исчисление. Исследование первой и второй вариаций определенного интеграла приводило к крайне сложным вычислениям, а соответствующие исследования старых математиков были лишены необходимой строгости. Вейерштрасс указал нам путь к новому и вполне надежному обоснованию вариационного исчисления. На примере простого и двойного интеграла я вкратце намечу в конце моего доклада, как следование этому пути приводит в то же время к поразительному упрощению вариационного исчисления вследствие того, что для установления необходимых и достаточных критериев максимума и минимума становится излишним вычисление второй вариации и даже частично отпадает необходимость в утомительных умозаключениях, относящихся к первой вариации. Я уже не говорю о тех преимуществах, которые возникают оттого, что исчезает надобность рассматривать лишь те вариации, для которых значения производных функций меняются незначительно.

Предъявляя к полному решению проблемы требование строгости в доказательстве, я хотел бы, с другой стороны, опровергнуть мнение о том, что совершенно строгие рассуждения применимы только к понятиям анализа или даже одной лишь арифметики. Такое мнение, поддерживаемое иногда и выдающимися умами, я считаю совершенно ложным. Такое одностороннее толкование требования строгости быстро приводит к игнорированию всех понятий, возникших из геометрии, механики, физики, приостанавливает приток [в математику — *П. А.*] нового материала из внешнего мира и, в конце концов, приводит даже к отбрасыванию понятия континуума и иррационального числа. А существует ли более важный жизненный нерв, чем тот, который был бы отрезан от математики, если из нее изъять геометрию и математическую физику? Я, напротив, считаю, что всякий раз, когда математические понятия зарождаются со стороны теории познания или в геометрии, или в естественнонаучных теориях, перед математикой возникает задача исследовать принципы, лежащие в основе этих понятий, и так обосновать эти понятия с помощью полной и простой системы аксиом, чтобы строгость новых понятий и их применимость к дедукции ни в какой мере не уступала старым арифметическим понятиям.

К новым понятиям относятся также новые обозначения. Мы их выбираем таким образом, чтобы они напоминали те явления, которые послужили поводом для образования этих понятий. Так, геометрические фигуры являются образами для напоминания пространственных представлений и в качестве таковых применяются всеми математиками. Кто не связывает с двумя неравенствами $a > b > c$ между тремя величинами a, b, c образ тройки прямолинейно расположенных и следующих друг за другом точек в качестве геометрической интерпретации понятия «между»? Кто не пользуется образом вложенных друг в друга отрезков и прямоугольников, если нужно провести полное и строгое доказательство трудной теоремы о непрерывности функций или существования предельной точки? Кто может обойтись без фигуры треугольника, окружности с заданным центром или без тройки взаимно перпендикулярных осей? Или кто хотел бы отказаться от образа векторного поля или семейства кривых, или поверхностей с их огибающей — понятий, которые играют такую существенную роль в дифференциальной геометрии, в теории дифференциальных уравнений, в основах вариационного исчисления и в других чисто математических областях знания?

Арифметические знаки — это записанные геометрические фигуры, а геометрические фигуры — это нарисованные формулы, и никакой математик не мог бы обойтись без этих нарисованных формул, так же как и не мог бы отказаться при счете от заключения в скобки или их раскрытия или применения других аналитических знаков.

Применение геометрических фигур в качестве строгого средства доказательства предполагает точное знание и полное владение теми аксиомами, которые лежат в основе теории этих фигур, и поэтому для того, чтобы эти геометрические фигуры можно было включить в общую сокровищницу математических знаков, необходимо строгое аксиоматическое исследование их наглядного содержания.

Подобно тому как при сложении двух чисел нельзя подписывать цифры слагаемых в неверном порядке, а нужно строго следовать правилам, т. е. тем аксиомам арифметики, которым подчиняются арифметические действия, так и операции над геометрическими образами определяются теми аксиомами, которые лежат в основе геометрических понятий и связей между ними.

Сходство между геометрическим и арифметическим мышлением проявляется также и в том, что в арифметических исследованиях мы так же мало, как и при геометрических рассмотрениях, прослеживаем до конца цепь логических рассуждений, вплоть до аксиом. Напротив, в особенности при первом подходе к проблеме, мы и в арифметике, совершенно так же как и в геометрии, сначала пользуемся некоторым мимолетным, бессознательным, не вполне отчетливым комбинированием, опирающимся на доверие к некоторому арифметическому чутью, к действенности арифметических знаков,— без чего мы не могли бы продвигаться в арифметике точно так же как мы не можем продвигаться в геометрии, не опираясь на силы геометрического воображения. Образцом арифметической теории, оперирующей строгим образом с геометрическими понятиями и знаками [1]), может служить работа Минковского «Геометрия чисел» [2]).

Сделаем еще несколько замечаний относительно трудностей, которые могут представлять математические проблемы, и о преодолении этих трудностей.

Если нам не удается найти решение математической проблемы, то часто причина этого заключается в том, что мы не овладели еще достаточно общей точкой зрения, с которой рассматриваемая проблема представляется лишь отдельным звеном в цепи родственных проблем. Отыскав эту точку зрения, мы часто не только делаем более доступной для исследования данную проблему, но и овладеваем методом, применимым и к родственным проблемам. Примерами могут служить введенное Коши в теорию определенного интеграла интегрирование по криволинейному пути и установление Куммером понятия идеала в теории чисел. Этот путь нахождения общих методов наиболее удобный и надежный, ибо, если ищут общие методы, не имея в виду

---

[1]) Автор сознательно говорит то о геометрических фигурах, то о геометрических «знаках» (Zeichen).— *Прим. П. А.*

[2]) Leipzig, 1896.

какую-нибудь определенную задачу, то эти поиски, по большей части, напрасны.

При исследовании математических проблем специализация играет, как я полагаю, еще более важную роль, чем обобщение. Возможно, что в большинстве случаев, когда мы напрасно ищем ответа на вопрос, причина нашей неудачи заключается в том, что еще не разрешены или не полностью решены более простые и легкие проблемы, чем данная. Тогда все дело заключается в том, чтобы найти эти более легкие проблемы и осуществить их решение наиболее совершенными средствами, при помощи понятий, поддающихся обобщению. Это правило является одним из самых мощных рычагов для преодоления математических трудностей, и мне кажется, что в большинстве случаев этот рычаг и приводят в действие, подчас бессознательно.

Вместе с тем бывает и так, что мы добиваемся ответа при недостаточных предпосылках, или идя в неправильном направлении, и вследствие этого не достигаем цели. Тогда возникает задача доказать неразрешимость данной проблемы при принятых предпосылках и выбранном направлении. Такие доказательства невозможности проводились еще старыми математиками, например, когда они обнаруживали, что отношение гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника к его катету есть иррациональное число. В новейшей математике доказательства невозможности решений определенных проблем играют выдающуюся роль; там мы констатируем, что такие старые и трудные проблемы, как доказательство аксиомы о параллельных, как квадратура круга или решение уравнения пятой степени в радикалах, получили все же строгое, вполне удовлетворяющее нас решение, хотя и в другом направлении, чем то, которое сначала предполагалось.

Этот удивительный факт наряду с другими философскими основаниями создает у нас уверенность, которую разделяет, несомненно, каждый математик, но которую до сих пор никто не подтвердил доказательством,— уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна быть доступна строгому решению [1])

---

[1]) Это столь определяющее для всего научного мировоззрения Гильберта утверждение мы считаем нужным привести в подлиннике: «...die Überzeugung, dass ein jedes bestimmte mathematische Problem einer strengen Erleitung notwendig fähig sein müss».— *Прим. П. А.*

или в том смысле, что удается получить ответ на поставленный вопрос, или же в том смысле, что будет установлена невозможность ее решения и вместе с тем доказана неизбежность неудачи всех попыток ее решить. Представим себе какую-либо нерешенную проблему, скажем, вопрос об иррациональности константы C Эйлера — Маскерони или вопрос о существовании бесконечного числа простых чисел вида $2^n + 1$. Как ни недоступными представляются нам эти проблемы и как ни беспомощно мы стоим сейчас перед ними, мы имеем все же твердое убеждение, что их решение с помощью конечного числа логических заключений все же должно удаться.

Является ли эта аксиома разрешимости каждой данной проблемы характерной особенностью только математического мышления или, быть может, имеет место общий, относящийся к внутренней сущности нашего разума закон, по которому все вопросы, которые он ставит, способны быть им разрешимы? Встречаются ведь в других областях знания старые проблемы, которые были самым удовлетворительным образом и к величайшей пользе науки разрешены путем доказательства невозможности их решения. Я вспоминаю проблему о perpetuum mobile (вечный двигатель) [1]. После напрасных попыток конструирования вечного двигателя стали, наоборот, исследовать соотношения, которые должны существовать между силами природы, в предположении, что perpetuum mobile невозможно. И эта постановка обратной задачи привела к открытию закона сохранения энергии, из которой и вытекает невозможность perpetuum mobile в первоначальном понимании его смысла.

Это убеждение в разрешимости каждой математической проблемы является для нас большим подспорьем в работе; мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его с помощью чистого мышления; ибо в математике не существует Ignorabimus! [2]).

---

[1]) Ср. H. Helmholtz, Über die Wechselwirkung der Naturkräfte und die darauf bezüglichen neuesten Ermittlungen der Physik, доклад в Кенигсберге, 1854 (русский перевод: «О взаимодействии сил природы», в сб. Г. Гельмгольц, Популярные речи, изд. 2, ч. I, СПб., 1898.— *Прим. ред.*).

[2]) См. сноску на стр. 8.— *Прим. ред.*

Неизмеримо множество проблем в математике, и как только одна проблема решена, на ее место всплывают бесчисленные новые проблемы. Разрешите мне в дальнейшем, как бы на пробу, назвать несколько определенных проблем из различных математических дисциплин, проблем, исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки.

Обратимся к основам анализа и геометрии. Наиболее значительными и важными событиями последнего столетия в этой области являются, как мне кажется, арифметическое овладение понятием континуума в работах Коши, Больцано, Кантора и открытие *неевклидовой* геометрии Гауссом, Бойяи и Лобачевским. Я привлекаю поэтому Ваше внимание к некоторым проблемам, принадлежащим к этим областям.

1. ПРОБЛЕМА КАНТОРА О МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА

Кантор называет две совокупности, т. е. два множества обыкновенных вещественных чисел (или точек), эквивалентными или равномощными, если они могут быть поставлены в такое соответствие, при котором каждому числу одного множества соответствует одно и только одно определенное число другого множества.

Исследования этих точечных множеств, осуществленные Кантором, делают весьма вероятной справедливость предложения, доказательство которого, однако, никому еще до сих пор не удалось получить, несмотря на самые настойчивые усилия. Содержание этого предложения заключается в следующем:

Каждая бесконечная совокупность чисел, т. е. каждое бесконечное числовое (или точечное) множество, эквивалентно либо множеству целых натуральных чисел 1, 2, 3, ..., либо множеству всех вещественных чисел, а следовательно континууму, т. е. эквивалентно точкам отрезка; с точки зрения эквивалентности возможны только два типа (бесконечных — *Ред.*) числовых множеств: счетное множество и континуум.

Из этого предложения вытекало бы немедленно, что мощность континуума есть ближайшая мощность к мощности счетного множества. Доказательство этой теоремы проложило бы новый мост между счетными и континуальными множествами.

Существует еще одно замечательное предложение, высказанное Кантором, которое теснейшим образом связано с упомянутым предложением и которое, возможно, и содержит ключ к доказательству этого предложения. Совокупность вещественных чисел называется у п о р я д о ч е н н о й, если известно правило, по которому для любых двух чисел этой совокупности можно установить, которое из этих чисел предшествует другому и которое за другим следует; при этом правило должно быть таким, что если число a предшествует числу b и число b предшествует числу c, то число a предшествует числу c. Е с т е с т в е н н ы м у п о р я д о ч е н и е м совокупности чисел пусть называется такое, при котором меньшее число множества предшествует большему, а большее следует за меньшим. Как легко, однако, понять, существует еще бесчисленное множество других способов упорядочивать множества чисел.

Если рассмотреть какое-нибудь упорядоченное множество чисел и из него выделить какую-нибудь часть, так называемое подмножество, то это подмножество также будет упорядоченным. Кантор рассматривал особого сорта упорядоченные множества, которые он называл в п о л н е у п о р я д о ч е н н ы м и[1]) и которые характеризовались тем, что не только во всем множестве, но в любом его подмножестве можно указать первый элемент. Совокупность целых чисел 1, 2, 3, ... в этом своем естественном порядке представляет собой, очевидно, вполне упорядоченное множество. Между тем совокупность всех вещественных чисел, т. е. континуум, рассматриваемый в своем естественном порядке, не является вполне упорядоченным. Действительно, если мы в качестве подмножества точек выделим точки конечного отрезка без его начальной точки, то это подмножество первого элемента не имеет. При этом возникает вопрос, нельзя ли каким-нибудь другим способом упорядочить совокупность всех вещественных чи-

---

[1]) См. G. C a n t o r, Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883; русский перевод: Г. К а н т о р, Основы учения о многообразиях, Новые идеи в математике, № 6, СПб., 1914, стр. 8. — *Прим. ред.*

сел так, чтобы каждое его подмножество имело первый элемент, т. е. нельзя ли континуум также рассматривать как вполне упорядоченное множество. Кантор предполагал, что на этот вопрос должен существовать положительный ответ. Мне казалось бы чрезвычайно желательным *получить прямое доказательство этого замечательного предложения Кантора*, т. е. действительно указать такое эффективное упорядочение множества чисел, при котором в каждой его части можно было бы указать первый элемент.

2. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ АРИФМЕТИЧЕСКИХ АКСИОМ

Когда речь идет о том, чтобы исследовать основания какой-нибудь науки, то следует установить систему аксиом, содержащих точное и полное описание тех соотношений, которые существуют между элементарными понятиями этой науки. Эти аксиомы являются одновременно определениями этих элементарных понятий[1]), и мы считаем правильными только такие высказывания в области науки, основания которой мы исследуем, какие получаются из установленных аксиом с помощью конечного числа логических умозаключений. При более близком рассмотрении возникает вопрос: *не являются ли некоторые из этих аксиом зависящими друг от друга, не содержат ли некоторые из этих аксиом общие части, которые следовало бы изъять, если ставить задачу об установлении системы аксиом, полностью независимых друг от друга?*

Из многочисленных вопросов, которые могут быть поставлены относительно системы аксиом, мне хотелось бы прежде всего указать на важнейшую проблему, именно *на доказательство того, что система аксиом непро-*

---

[1]) В XIX в. аксиомы математической теории рассматривались как выражения свойств ее естественной интерпретации (например, аксиомы геометрии как выражение некоторых свойств пространства), в непосредственной связи с которой рассматривалась сама теория. Согласно концепции Гильберта аксиомы — неявные определения основных свойств математической теории, а потому ее интерпретацией может служить любая совокупность объектов, свойства которых удовлетворяют рассматриваемой системе аксиом.— *Прим. ред.*

тиворечива, т. е. что на основании этих аксиом никогда нельзя с помощью конечного числа логических умозаключений получить результаты, противоречащие друг другу.

Доказательство непротиворечивости аксиом геометрии достигается тем, что строится соответствующая числовая область так, что геометрическим аксиомам соответствуют аналогичные соотношения между числами этой области; тем самым каждое противоречие, полученное в следствиях из аксиом геометрии, должно быть обнаружено также в арифметике этой числовой области. Таким образом, желательное доказательство непротиворечивости аксиом геометрии сводится к предложению о непротиворечивости аксиом арифметики.

Напротив, непротиворечивость аксиом арифметики требует прямого доказательства.

Система аксиом арифметики, по существу, представляет собой не что иное, как известные правила действий вместе с аксиомой непрерывности. Я недавно изложил эту систему[1]) и заменил при этом аксиому непрерывности двумя более простыми аксиомами, именно, известной аксиомой *Архимеда* и новой аксиомой, содержание которой заключается в следующем: числа представляют совокупность таких элементов, которые при сохранении всех остальных аксиом не допускают никакого расширения (аксиома полноты). Я убежден, что удастся найти прямое доказательство непротиворечивости аксиом арифметики, основываясь на известных методах доказательств теории иррациональных чисел, если эти методы соответствующим образом модифицировать в применении к поставленной цели.

Чтобы охарактеризовать значение этой проблемы еще и с другой точки зрения, я хотел бы добавить следующее замечание. Если какому-нибудь понятию присвоены признаки, которые друг другу противоречат, то я скажу: это понятие математически не существует. Так, например, математически не существует вещественное число, квадрат которого равен —1. Если же удается доказать, что свойства, которыми обладает некоторое понятие, ни-

[1]) Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 8 (1900), стр. 180. [Напечатано в качестве 6-го приложения к книге «Основания геометрии», изд. 7, 1930. (Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, приложение VI: «О понятии числа», 315—321.— *Прим. ред.*)].

когда не приведут, с помощью конечного числа умозаключений, к противоречию, то я скажу, что существование этого математического понятия — например, числа или функции, удовлетворяющего определенным условиям,— доказано. В рассматриваемом случае, где речь идет об аксиомах арифметики вещественных чисел, доказательство непротиворечивости этих аксиом равносильно доказательству математического существования понятия вещественных чисел или континуума. В самом деле, если удастся полностью доказать непротиворечивость этих аксиом, то все соображения, которые подчас приводились против существования понятия вещественных чисел, теряют всякое основание. Правда, понятие вещественных чисел, т. е. континуума, представляет собой при вышеизложенной точке зрения не просто совокупность всех возможных десятичных разложений или совокупность всех возможных законов, по которым могут следовать элементы какого-либо фундаментального ряда, но систему элементов, взаимные соотношения между которыми устанавливаются системой аксиом и для которых справедливы все те и только те положения, которые могут быть получены из этих аксиом конечным числом логических умозаключений. Только в этом смысле, по моему мнению, может быть строго логически осмыслено понятие континуума. Действительно, это, как мне кажется, соответствует также наилучшим образом тому, что нам дают опыт и наглядные представления. Тогда и понятие континуума, а также понятие системы всех функций, существует точно в таком же смысле, как и система целых рациональных чисел или как канторовы классы и мощности высших порядков. Ибо я убежден, что существование последних в указанном мною смысле, так же как и существование континуума, можно будет доказать, в противоположность существованию системы всех мощностей вообще или также всех канторовых алефов, для которых, как это можно показать, нельзя построить непротиворечивую систему аксиом в моем смысле и которые, следовательно, в моих терминах являются понятием, математически несуществующим.

Из области оснований геометрии я хотел бы прежде всего указать на следующую проблему.

3. РАВЕНСТВО ОБЪЕМОВ ДВУХ ТЕТРАЭДРОВ С РАВНОВЕЛИКИМИ ОСНОВАНИЯМИ И РАВНЫМИ ВЫСОТАМИ

Гаусс [1]) в двух своих письмах к Герлингу выражает сожаление по поводу того, что некоторые известные положения стереометрии зависят от метода исчерпывания, т. е., говоря современным языком, от аксиомы непрерывности (или от аксиомы Архимеда).

Гаусс специально отмечает теорему Евклида, согласно которой объемы треугольных пирамид, имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований. Аналогичная задача планиметрии ныне полностью решена [2]). [Решение задачи для плоскости было получено Фаркашем Бойяи (1832 г.) и П. Гервином (1833 г.). — *Прим. ред.*] Герлингу [3]) удалось также доказать равенство объемов симметричных многогранников при помощи разбиения их на конгруэнтные части.

Тем не менее, как мне кажется, в общем случае доказательство упомянутой теоремы Евклида этим способом провести невозможно и это, по-видимому, может быть подтверждено строгим доказательством невозможности.

Такое доказательство можно было бы получить, *если бы удалось указать такие два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами, которые никаким способом не могут быть разложены на конгруэнтные тетраэдры и которые также не могут быть дополнены конгруэнтными тетраэдрами до таких многогранников, для которых разложение на конгруэнтные тетраэдры возможно* [4]).

---

[1]) K. F. Gauss, Werke, т. 8, стр. 241 и 244.

[2]) Помимо более ранней литературы, см. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, гл. IV (русский перевод: Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, гл. IV.— *Прим. ред.*).

[3]) K. F. Gauss, Werke, т. 8, стр. 242.

[4]) [После опубликования этой проблемы ее доказательство удалось привести Дену. См. его статью Über raumgleiche Polyeder, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1900, 345—354, а также Raumteilungen, Math. Ann. 55 (1900), 465—478.]

4. ПРОБЛЕМА О ПРЯМОЙ КАК О КРАТЧАЙШЕМ СОЕДИНЕНИИ ДВУХ ТОЧЕК

Постановка другой задачи, с которой мы встречаемся в основаниях геометрии, состоит в следующем. Когда мы из всей системы аксиом, необходимых для построения обыкновенной евклидовой геометрии, отбрасываем аксиому о параллельных и принимаем, что все остальные аксиомы выполняются, а эта не выполняется, то мы, как известно, приходим к геометрии Лобачевского (гиперболической геометрии). Мы можем поэтому сказать, что эта геометрия в некотором смысле является ближайшей к геометрии Евклида. Если мы потребуем далее, чтобы не выполнялась также аксиома, согласно которой из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими, то мы придем к геометрии Римана (эллиптической геометрии), которую в этом же смысле можно рассматривать как ближайшую к геометрии Лобачевского. Если мы захотим провести аналогичное по существу исследование по поводу аксиомы Архимеда, то, приняв, что эта аксиома не выполняется, придем к *неархимедовым* геометриям, которые были исследованы Веронезе и мною[1]). Более общий вопрос, возникающий при этом, заключается в следующем: возможно ли еще с других плодотворных точек зрения построить геометрии, которые с таким же правом могли бы считаться ближайшими к обыкновенной евклидовой геометрии. При этом я хотел бы обратить Ваше внимание на одно предложение, принимаемое некоторыми авторами даже за определение прямой линии, согласно которому прямая линия есть кратчайшее соединение двух точек. Содержание этого высказывания, по существу, сводится к предложению Евклида о том, что сумма двух сторон треугольника всегда больше третьей стороны; как легко видеть, теорема эта основана только на элементарных понятиях, т. е. таких, которые непосредственно получаются из аксиом и поэтому вполне доступны логическому исследованию. Евклид доказал эту теорему о треугольнике

---

[1]) Имеются в виду исследования В е р о н е з е «Fondamenti di geometria a piú dimensioni ed a piú specie di unitá rettilinee esposti in forma elementare», Padova, 1891, и вышедшие в 1899 г. исследования Г и л ь б е р т а «Die Grundlagen der Geometrie». Более подробно о первых исследованиях по неархимедовым геометриям см. В. Ф. К а г а н «Основания геометрии», Одесса, 1907.— *Прим. ред.*

с помощью теоремы о внешнем угле, используя теоремы о конгруэнтности. Нетрудно, однако, убедиться в том, что для доказательства этой евклидовой теоремы **недостаточно** тех предложений о конгруэнтности, которые относятся к откладыванию отрезков и углов, а необходима еще теорема о равенстве треугольников. Таким образом, возникает вопрос о такой геометрии, в которой выполняются все аксиомы обыкновенной евклидовой геометрии и, в частности, все аксиомы конгруэнтности, за исключением одной аксиомы о конгруэнтности треугольников (или за исключением предложения о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника), и в которой, сверх того, принимается отдельная аксиома о том, что во всяком треугольнике сумма двух сторон больше третьей.

Оказывается, такая геометрия действительно существует и это не что иное, как геометрия, которую установил Минковский в своей книге «Геометрия чисел» [1]) и которую он положил в основу своих арифметических исследований. Таким образом, геометрия Минковского является также одной из ближайших к обыкновенной евклидовой геометрии. В основном эта геометрия характеризуется следующими основными положениями. Во-первых, совокупность точек, равноотстоящих от определенной точки O, изображается выпуклой замкнутой поверхностью в обыкновенном евклидовом пространстве с центром в точке O. Во-вторых, два отрезка называются равными друг другу также и в том случае, если один из них может быть совмещен с другим параллельным переносом евклидова пространства.

В геометрии Минковского имеет место аксиома о параллельных. В одном исследовании, посвященном вопросу о прямой линии как кратчайшем соединении двух точек [2]), мне удалось построить геометрию, в которой **не выполняется** аксиома параллельности, в то время как все остальные аксиомы геометрии Минковского выполняются. Мне представляется очень желательным *построение и систематическое исследование всех возможных здесь геометрий* ввиду того большого значения, которое имеет предложение о прямой как кратчайшем соединении двух

[1]) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Leipzig, 1896.

[2]) Math. Ann. 46 (1895), стр. 91. (См. также Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, добавление 1, стр. 195.— *Прим. ред*)

точек и (по существу ему эквивалентное) предложение Евклида о сторонах треугольника не только в теории чисел, но также и в теории поверхностей и в вариационном исчислении. Я думаю, что обстоятельное исследование условий существования этого предложения прольет новый свет и на понятие расстояния, а также на другие элементарные понятия, как, например, понятие плоскости и возможности ее определения с помощью понятия прямой.

В случае плоскости, если принять и аксиому непрерывности, указанная проблема приводит к задаче, поставленной Дарбу [1]): найти на плоскости все вариационные задачи, решениями которых являются все прямые линии на плоскости. Эта постановка вопроса кажется мне реальной и богатой далеко идущими обобщениями [2]).

5. ПОНЯТИЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛИ, БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ГРУППУ

Как известно, Ли, опираясь на понятие непрерывной группы преобразований, построил систему аксиом геометрии и на основании своей теории групп преобразований доказал, что эта система аксиом достаточна для построения геометрии. Поскольку Ли, развивая свою теорию, всегда принимает, что функции, определяющие группу, можно дифференцировать, то в этих исследованиях Ли остается невыясненным вопрос, является ли требование дифференцируемости необходимым для построения аксиом геометрии или оно не более как следствие понятия группы и остальных геометрических аксиом. Эти обстоятельства, а также некоторые проблемы, связанные с аксиомами арифметики, приводят нас к более общему вопросу: *насколько понятие непрерывных групп преобразований Ли окажется пригодным для решения поставленной задачи, если отказаться от требования дифференцируемости функций, определяющих группу.*

---

[1]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, т. 3, Paris, 1894, стр. 54.

[2]) Ср. интересные исследования A. Hirsch, Math. Ann. 49 (1897), стр. 49 и 50 (1898), стр. 429.

Как известно, Ли определяет конечную непрерывную группу преобразований как систему преобразований

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

обладающих тем свойством, что в результате последовательного выполнения двух произвольных преобразований

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$
$$x''_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; b_1, \ldots, b_r)$$

системы получается преобразование, принадлежащее этой же системе, которое, таким образом, можно представить в виде

$$x''_i = f_i(f_1(x, a), \ldots, f_n(x, a); b_1, \ldots, b_r) = \\ = f_i(x_1, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_r),$$

где $c_1, \ldots, c_r$ представляют собой определенные функции от $a_1, \ldots, a_r$ и $b_1, \ldots, b_r$.

Групповое свойство находит, таким образом, свое выражение в системе функциональных уравнений и не требует от функций $f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_r$ никаких добавочных ограничений. Однако, дальнейшие методы исследования Ли этих функциональных уравнений, а именно, вывод известных основных дифференциальных уравнений, с необходимостью предполагают непрерывность и дифференцируемость функций, определяющих группу.

Что касается непрерывности, то от этого требования, по-видимому, отказаться нельзя, хотя бы в отношении геометрических и арифметических приложений, в которых непрерывность рассматриваемых функций является следствием аксиом непрерывности. Напротив, дифференцируемость функций, определяющих группу, содержит требование, которое в геометрических аксиомах выражается только весьма неестественным и сложным образом. При этом возникает вопрос, нельзя ли введением некоторых подходящим образом выбранных новых переменных и параметров преобразовать группу в такую, в которой все определяющие функции оказались бы дифференцируемыми, или по крайней мере нельзя ли присоединить некоторые определенные простые допущения, которые сделают возможным в соответствующих группах применение методов Ли.

Согласно теореме, высказанной Ли[1]) и доказанной Шуром[2]), приведение к аналитической группе возможно тогда, когда группа транзитивна и когда предполагается существование первых и некоторых вторых производных от функций, определяющих группу.

Исследование соответствующего вопроса, как мне кажется, представляет интерес и для бесконечных групп. Мы приходим вообще к обширной и небезынтересной области функциональных уравнений, в которой до сих пор в большинстве вопросов предполагалась дифференцируемость рассматриваемых функций. Между тем функциональные уравнения, в исследовании которых Абель[3]) проявил так много остроты ума, разностные уравнения и другие уравнения, встречающиеся в литературе, не содержат в себе ничего такого, что требовало бы дифференцируемости входящих в них функций. А при изучении некоторых доказательств существования в вариационном исчислении мне представляется интересной задача доказать дифференцируемость рассматриваемых функций, исходя из существования разностного уравнения. Во всех этих случаях возникает вопрос, *насколько результаты, полученные в предположении дифференцируемости рассматриваемых функций, остаются в силе при новых условиях, без этого предположения.*

Следует заметить, что Минковский в упомянутой «Геометрии чисел» исходил из функционального неравенства

$$f(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)+f(y_1, \ldots, y_n).$$

Отправляясь от этого неравенства, ему действительно удалось доказать существование производных входящих в рассмотрение функций.

С другой стороны, я обращаю внимание на то обстоятельство, что существуют вполне аналитические функциональные уравнения, отдельными решениями которых являются недифференцируемые функции. Можно, например, построить однозначную, непрерывную и недифференцируемую функцию $\varphi(x)$, которая является единственным

[1]) S. Lie, F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, т. 3, Лейпциг, 1893, §§ 82, 144.

[2]) Über den analytischen Charakter der eine endliche Kontinuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen, Math. Ann. 41 (1893), 509—534.

[3]) Werke, т. 1, стр. 1, 61, 389.

решением двух функциональных уравнений:

$$\varphi(x+\alpha)-\varphi(x)=f(x),$$
$$\varphi(x+\beta)-\varphi(x)=0,$$

где α и β — два вещественных числа, а $f(x)$ — регулярная, аналитическая и однозначная функция, определенная для всех вещественных значений x.

Такие функции проще всего можно получить с помощью тригонометрических рядов, пользуясь теми же соображениями, какие Борель применил к недавнему результату Пикара[1]) о построении двоякопериодического неаналитического решения одного дифференциального уравнения в частных производных.

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ АКСИОМ ФИЗИКИ

С исследованиями по основаниям геометрии близко связана задача *об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика.*

Что касается аксиом теории вероятностей[2]), то мне казалось бы желательным, чтобы параллельно с логическим обоснованием этой теории шло рука об руку строгое и удовлетворительное развитие метода средних значений в математической физике, в частности в кинетической теории газов.

Об основах механики имеются значительные исследования с точки зрения физической. Укажу на сочинения Маха[3]), Герца[4]), Больцманна[5]) и Фолькманна[6]). При этом было бы очень желательно, чтобы и математики взялись за исследование основ механики. На эту мысль наводит,

---

[1]) Quelques théories fondamentales dans l'analyse mathématique, Conférences faites à Clark University Rev. gen. des Sciences, 1900, стр. 22.

[2]) Ср. G. Bohlmann, Über Versicherungsmathematik, Лекция Клейна и Рикке (Vorlesung aus Klein und Riecke: über angewandte Mathematik und Physik, Leipzig und Berlin, 1900).

[3]) Die Mechanik und ihrer Entwicklung, 2 Aufl., Leipzig, 1889.

[4]) Die Prinzipien der Mechanik, Leipzig, 1894.

[5]) Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik, Leipzig, 1897.

[6]) Einfürung in das Studium der theoretischen Physik, Leipzig, 1900.

например, книга Больцманна о принципах механики, в которой следовало бы строго математически обосновать и провести те изложенные в ней процессы предельного перехода, которые ведут от атомистического понимания к теории движения твердого тела. С другой стороны, можно было бы попытаться получить все теоремы о движении твердого тела с помощью предельного перехода из системы аксиом, которые основаны на представлении о непрерывно изменяющемся состоянии (определяемом каким-нибудь параметром) материи, непрерывно заполняющей все пространство. Вопрос о том, насколько равноправны различные системы аксиом, представляет тоже глубоко принципиальный интерес.

Для того чтобы построение физических аксиом провести по образцу аксиом геометрии, следует попробовать сначала небольшим количеством аксиом охватить возможно более общий класс физических явлений, а затем присоединением каждой следующей аксиомы прийти к более специальным теориям, а тогда, возможно, возникнет принцип классификации, который сможет использовать глубокую теорию бесконечных групп преобразований Ли. Кроме того, математик должен, подобно тому как это сделано в геометрии, принимать во внимание не только факты реальной действительности, но и все логически возможные теории и особенно быть внимательным к тому, чтобы получить наиболее полный обзор совокупности следствий, которые вытекают из принятой системы аксиом.

Далее, кроме физических методов изучения задачи, перед математиком всякий раз возникает задача — точно доказать, что вновь присоединенная аксиома не находится в противоречии с прежними аксиомами. Физик часто находится во власти результатов своего эксперимента, с помощью которого и *во время которого* он вынужден в развитии своей теории делать новые допущения; при этом в отсутствии противоречия вновь принятого допущения с прежними его убеждает только или сам эксперимент, или некоторая физическая интуиция — обстоятельство, которое при строго логическом построении теории недопустимо. Доказательство непротиворечивости всех принятых допущений кажется мне очень важным, поскольку само стремление провести такое доказательство наиболее действенно побуждает нас к точной формулировке аксиом.

Мы до сих пор занимались только вопросами об **основах** математических отраслей знания. Действительно, занятия основами науки имеют особую притягательную силу и изучение этих основ всегда принадлежит к наиболее почетным задачам исследователя.

«Конечная цель,— так сказал однажды Вейерштрасс,— которую нужно всегда иметь в виду (im Auge behalten), состоит в том, чтобы достичь правильной точки зрения на фундамент науки...».

«Вообще, чтобы проникнуть в науку, неизбежно заняться некоторыми отдельными ее проблемами». В самом деле, для плодотворного исследования основ науки необходимо глубокое понимание ее специальных теорий. Только тот строитель в состоянии прочно уложить фундамент здания, который сам глубоко понимает специальное назначение этого здания. Займемся теперь специальными проблемами отдельных ветвей математики и обратимся прежде всего к Арифметике и Алгебре.

7. ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ И ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ

Арифметические теоремы Эрмита о показательной функции и их развитие, выполненное Линдеманном, несомненно, останутся удивительными для математиков всех поколений. Но сейчас же появляется задача — пойти по проложенному пути дальше, как это уже сделал Гурвиц в своих двух интересных исследованиях «Об арифметических свойствах некоторых трансцендентных функций» [1]). Я хотел бы поэтому указать класс задач, на которые, по-моему, следовало обратить внимание как на ближайшие в этом направлении. Когда мы узнаем, что некоторые специальные трансцендентные функции, играющие в анализе существенную роль, принимают при определенных алгебраических значениях аргумента алгебраические же значения, то это обстоятельство кажется нам особенно удивительным и достойным дальнейшего исследования. Мы всегда ждем, что трансцендентные функции при алгебраических значениях аргументов принимают, вообще

---

[1]) A. Hurwitz, Über arithmetische Eigenschaften gewisser transcendenten Funktionen, Math. Ann. 22 (1883), 211—224; 32 (1888), 583—588.

говоря, трансцендентные значения, и хотя нам хорошо известно, что существуют даже такие целые трансцендентные функции, которые для всех алгебраических значений аргумента принимают рациональные значения, мы все же считаем очень вероятным, что такая функция, как, например, показательная $e^{i\pi z}$, которая, очевидно, для всех рациональных значений аргумента z принимает алгебраические значения, с другой стороны, будет всегда принимать для всех алгебраических иррациональных значений z трансцендентные значения. Этому высказыванию можно придать и геометрический облик следующим образом. *Если в равнобедренном треугольнике отношение угла при основании к углу при вершине есть алгебраическое, но не рациональное число, то отношение основания к боковой стороне есть трансцендентное число.* Несмотря на простоту этого предложения, а также на его сходство с задачами, решенными Эрмитом и Линдеманном, его доказательство представляется мне исключительно трудным, так же как и доказательство того, что *степень α^{β} при алгебраическом основании α и алгебраическом иррациональном показателе β — как, например, число $2^{\sqrt{2}}$ или $e^{\pi} = i^{-2i}$ — есть всегда или трансцендентное число, или по крайней мере иррациональное.* Можно быть уверенным, что решение этой и аналогичных проблем должно привести нас к новым методам и новым точкам зрения на существо специальных иррациональных и трансцендентных чисел.

8. ПРОБЛЕМА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В теории распределения простых чисел в последнее время сделаны существенные сдвиги Адамаром, Валле-Пуссеном, Мангольдтом и другими. Для полного решения проблемы, поставленной в исследовании Римана «О числе простых чисел, не превышающих данной величины»[1]), необходимо прежде всего доказать справедливость исключительно важного утверждения Римана: *все нули функции* $\zeta(s)$, определяемой рядом

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots,$$

---

[1]) Monatsber. der Berl. Ak., 1859 (русский перевод: Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1948, 216 — 224. — *Прим. ред.*).

имеют вещественную часть, равную $^1/_2$, если не считать известных отрицательных целочисленных нулей[1]). Как только это доказательство будет получено, то дальнейшая задача будет заключаться в том, чтобы использовать бесконечный ряд Римана для более точного определения числа простых чисел и в особенности *выяснить, будет ли разность между числом простых чисел, меньших данного числа x, и интегральным логарифмом от x действительно не выше половинного порядка при неограниченно возрастающем x*[2]); далее, действительно ли те члены формулы Римана, которые зависят от первых комплексных нулей функции $\zeta(s)$, обусловливают то сгущение простых чисел, которое обнаружено при подсчете числа простых чисел.

Возможно, что после исчерпывающего исследования формулы Римана для простых чисел наступит, наконец, такое положение, когда можно будет дать строгое решение проблемы Гольдбаха[3]) «каждое четное число можно представить в виде суммы двух простых чисел»[4]), а также ответить на известный вопрос: существует ли бесконечное множество пар простых чисел с разностью, равной 2,— и, наконец, решить еще более общую проблему: всегда ли разрешимо в простых числах линейное диофантово уравнение

$$ax + by + c = 0$$

с данными целыми попарно взаимно простыми коэффициентами a, b, c.

Однако не менее, а возможно и более, интересной представляется мне задача — *перенести результаты, полученные для распределения рациональных простых чисел, на теорию распределения простых идеалов в заданном числовом поле k* — задача, которая возникает при изучении

---

[1]) В 1896 г. Адамар (Bull. Soc. Math. France 24 (1896), 199—220) и Ш. Ж. Валле-Пуссен (Ann. de la Soc. scien. de Bruxelles 20 (1896), 183—256) независимо друг от друга доказали, что $\zeta(\sigma + i\tau)$ не имеет нулей на прямых $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$. Они показали, что это эквивалентно асимптотическому закону распределения простых чисел: $\pi(x) \sim \mathrm{li}\, x$ $(x \to \infty)$.— *Прим. ред.*

[2]) [Ср. H. v. Koch, Math. Ann. 55 (1902), 441—464.]

[3]) Ср. P. Stäckel, Über Goldbachs empirisches Theorem, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1896, 292—299 и E. Landau, Über die zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ und ihre Bezihung zum Goldbachschen Satze, там же, 1900, 177—186.

[4]) Х. Гольдбах сформулировал ее в своем письме к Эйлеру от 7 июля 1742 г.— *Прим. ред.*

функции, принадлежащей числовому полю

$$\zeta_k(s) = \sum \frac{1}{n(j)^s},$$

где сумма распространяется на все идеалы j данного числового поля k, а $n(j)$ означает норму идеала j.

Я назову еще три специальные проблемы из теории чисел, именно: одна о законе взаимности, вторая о диофантовых уравнениях и третья из области квадратичных форм.

9. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НАИБОЛЕЕ ОБЩЕГО ЗАКОНА ВЗАИМНОСТИ В ЛЮБОМ ЧИСЛОВОМ ПОЛЕ

Требуется доказать закон взаимности для степенных вычетов l-го порядка в любом числовом поле, если l — нечетное простое число и если l есть целая степень числа 2 или степень нечетного простого числа. Установление этого закона, а также и основные средства для его доказательства, я думаю, определятся, если соответствующим образом обобщить изложенную мною теорию полей корней l-й степени из единицы [1]), а также мою теорию относительно квадратичного поля [2]).

10. ЗАДАЧА О РАЗРЕШИМОСТИ ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ

Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. *Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах.*

---

[1]) Über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 4 (1897) [напечатано в Gesamm. Abh., I, № 7].

[2]) Math. Ann. 51 (1899), 1—127 u Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1898, 370—399 [или см. Gesamm. Abh., I, №№ 9, 10, кроме того, сравн. с появившейся вскоре докторской диссертацией G. R ü c k l e, Göttingen, 1901, D. V. № 13].

11. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ЧИСЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Наше современное знание теории квадратичных числовых полей[1]) позволяет нам *успешно рассматривать теорию квадратичных форм с произвольным числом переменных и с произвольными алгебраическими числовыми коэффициентами.* Отсюда мы, в частности, приходим к интересной задаче: данное квадратичное уравнение с произвольным числом переменных с алгебраическими числовыми коэффициентами разрешить в целых или в дробных числах, принадлежащих определенной алгебраической области рациональности, которая определяется коэффициентами уравнения.

Связующим звеном с алгеброй и теорией функций может служить следующая важная проблема.

12. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КРОНЕКЕРА ОБ АБЕЛЕВЫХ ПОЛЯХ НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ АЛГЕБРАИЧЕСКУЮ ОБЛАСТЬ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

Кронекером доказана теорема[2]) о том, что каждое абелево числовое поле в области рациональных чисел вкладывается в поле корней из единицы. Это основное предложение теории целочисленных уравнений содержит два утверждения, а именно:

в о - п е р в ы х, из него получается ответ на вопрос о существовании и о числе уравнений заданной степени, заданной абелевой группы и заданного дискриминанта относительно области рациональных чисел и,

в о - в т о р ы х, можно доказать, что корни таких уравнений составляют область алгебраических чисел, которая в точности совпадает с областью, которая получится, если

---

[1]) D. H i l b e r t, Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper, Math. Ann. 45 (1894), 309—340; Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 6 (1899), 88—94 u Math. Ann. 51 (1899); Über die Theorie der relativ Abelschen Körper, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1898 [или D. H i l b e r t, Gesamm. Abh., I, №№ 5, 8, 9, 10].

[2]) Ber. der K. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1853; ibid., 1877. Доказательство Кронекера не полно. Полное доказательство теоремы дал Г. В е б е р, Acta Math. 8 (1886); 9 (1887).— *Прим. ред.*

в экспоненциальную функцию $e^{i\pi z}$ от аргумента z вместо последнего последовательно подставить всевозможные рациональные числовые значения.

Первое утверждение связано с вопросом об определении некоторых алгебраических чисел их группой и ветвлением; этот вопрос, таким образом, связан с известной проблемой об определении алгебраической функции на заданной римановой поверхности. Второе утверждение вводит требуемые числа трансцендентным способом, а именно с помощью экспоненциальной функции $e^{i\pi z}$.

Так как простейшей после области рациональных чисел является комплексная квадратичная числовая область, то возникает задача доказать и для этого случая теорему Кронекера. Кронекер сам высказал утверждение, что абелевы уравнения задаются в области комплексного квадратичного поля уравнениями преобразования эллиптических функций с особым модулем, так что роль экспоненциальной функции в предыдущем случае здесь играет эллиптическая функция. Доказательство предположения Кронекера до сих пор не найдено. Тем не менее я считаю, что оно может быть проведено без особых трудностей на основе теории комплексного умножения, развитой Вебером [1]), и с учетом доказанных мною чисто арифметических теорем о классах полей.

И, наконец, исключительное значение я придаю распространению теоремы Кронекера на тот случай, *когда вместо области рациональных чисел или комплексной квадратичной области в основу кладется произвольное алгебраическое числовое поле в качестве области рациональности.* Я считаю эту проблему одной из наиболее глубоких и далеко ведущих проблем теории функций.

Проблема эта представляется доступной с разных сторон. Важнейшим ключом к решению арифметической части проблемы я считаю общий закон взаимности степенных вычетов l-го порядка внутри произвольно заданного числового поля.

Что касается теоретико-функциональной части проблемы, то исследователю следует пойти по очень привлекательному пути той поразительной аналогии, какая

---

[1]) Elliptische Funktionen und algebraischen Zahlen, Braunschweig, 1891.

замечается между теорией алгебраических функций от одной независимой переменной и теорией алгебраических чисел. На аналог разложения алгебраической функции в степенной ряд в теории алгебраических чисел указал Гензель [1]) и исследовал его. Аналог теоремы Римана — Роха рассмотрел Ландсберг [2]). Бросается также в глаза аналогия между понятием рода римановой поверхности и понятием числа классов числового поля. Если мы рассмотрим, чтобы затронуть только простейший случай, риманову поверхность рода $p = 1$, а с другой стороны, числовое поле с числом классов $h = 2$, то доказательству существования всюду конечного интеграла на римановой поверхности соответствует доказательство существования целого числа α числового поля такого сорта, что число $\sqrt{\alpha}$ представляет относительно неразветвленное квадратичное поле над основным полем. Для доказательства этой римановой теоремы существования в теории алгебраических функций, как известно, применяется метод задач с граничными условиями. В теории числовых полей доказательство существования упомянутого числа α также представляет наибольшие трудности. Это доказательство опирается существенно на предположение о том, что в числовом поле всегда существуют простые идеалы с заданным вычетом. Последнее обстоятельство является, таким образом, теоретико-числовым аналогом для краевых задач.

Как известно, уравнение теоремы Абеля в теории алгебраических функций выражает необходимое и достаточное условие того, что соответствующие точки римановой поверхности являются нулями алгебраической функции, принадлежащей поверхности. Точным аналогом абелевой теоремы в теории числовых полей с числом классов $h = 2$ является уравнение квадратичного закона взаимности [3])

$$\left(\frac{\alpha}{j}\right) = +1,$$

[1]) Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 6 (1899), 83—88 [а также Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen, Math. Ann. 55 (1902), 301—336].

[2]) Math. Ann. 50 (1898), 333—380, 577—582.

[3]) Ср. D. Hilbert, Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1898 [или Gesamm. Abh., I, № 10].

которое утверждает, что идеал j тогда и только тогда является главным идеалом числового поля, если это число α имеет относительно идеала j положительный квадратичный вычет.

Как мы видим, в вышеприведенной задаче три основные ветви математики — именно, теория чисел, алгебра и теория функций — находятся во внутренней взаимной связи. Я убежден, в частности, что теория аналитических функций многих переменных достигла бы существенного обогащения, если бы удалось *найти и исследовать такие функции, которые играли бы такую же роль в произвольном алгебраическом числовом поле, какую играют экспоненциальная функция в поле рациональных чисел и эллиптическая модулярная функция для комплексного квадратичного числового поля.*

Теперь перейдем к алгебре. Я назову далее одну проблему из теории уравнений и одну, к которой меня привела теория алгебраических инвариантов.

13. НЕВОЗМОЖНОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ТОЛЬКО ОТ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Номография [1]) имеет своей задачей решать уравнения с помощью начерченных семейств кривых, зависящих от одного произвольного параметра. Отсюда сразу видно, что каждый корень уравнения, коэффициенты которого зависят только от двух параметров, т. е. каждая функция от двух независимых переменных, может быть представлен многими способами с помощью этого принципа, лежащего в основе номографии. Далее, очевидно, можно, применяя только этот принцип и не привлекая подвижных элементов, представить большой класс функций, зависящих от трех и большего числа переменных, именно все те функции, которые можно получить, образуя сначала функцию от двух аргументов, затем каждый из этих аргументов выразить снова функцией двух аргументов, каждый из которых далее выразится снова функцией двух аргументов, и т. д.; при этом допускается любое конечное

[1]) M. d'O c a g n e, Traité de Nomographie, Paris, 1899.

число суперпозиций функций двух аргументов. Так, например, каждая рациональная функция от произвольно большого числа аргументов принадлежит к классу тех функций, которые возможно построить с помощью номограмм, ибо такая функция осуществляется посредством операций сложения, вычитания, умножения и деления, а каждая такая операция представляет функцию только двух аргументов. Легко видеть, что к рассматриваемому классу функций принадлежат также корни всех тех уравнений, которые разрешимы в обычной области рациональности с помощью извлечения корня, так как здесь к четырем основным операциям присоединяется еще лишь операция извлечения корня, которую можно рассматривать как функцию о д н о й переменной. Аналогично общие уравнения пятой и шестой степеней разрешимы с помощью соответствующих номограмм; ибо в результате преобразований Чирнгаузена, которые со своей стороны требуют только извлечения корня, эти уравнения могут быть приведены к такому виду, где коэффициенты зависят только от двух параметров.

Вероятно, корень уравнения седьмой степени представляет собой такую функцию от его коэффициентов, которая не относится к упомянутому классу функций, т. е. не может быть получена конечным числом суперпозиций функций двух аргументов. Чтобы это обнаружить, пришлось бы показать, что *уравнение седьмой степени*

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

неразрешимо с помощью каких-либо непрерывных функций, зависящих только от двух аргументов. Что существуют вообще аналитические функции от трех аргументов x, y, z, которые не могут быть получены с помощью цепочки из конечного числа звеньев — функций, зависящих только от двух аргументов [1],— в этом я убедился (я хотел бы отметить это) с помощью строгого рассуждения.

[С привлечением еще и подвижных элементов номография получает возможность построить также функции, зависящие больше чем от двух аргументов, как недавно показал Д'Окань [2]) по поводу уравнения седьмой степени.]

---

[1]) Имеются в виду, по-видимому, аналитические функции двух аргументов.— *Прим. ред.*

[2]) [Sur la résolution nomographique de l'équation du septième degré, C. r. Acad. sci. 131 (1900), 522—524.]

14. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОНЕЧНОСТИ НЕКОТОРОЙ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

В теории алгебраических инвариантов, как мне кажется, особого интереса заслуживают вопросы, связанные с конечностью полной системы форм. Маурреру[1]) недавно удалось распространить доказанные Жорданом и мною теоремы конечности в теории инвариантов на случай, когда инварианты определяются не общей проективной группой, как в обыкновенной теории инвариантов, а произвольной ее подгруппой. Существенный шаг в этом направлении сделал сначала Гурвиц[2]), ему удалось с помощью глубоких соображений провести общее доказательство конечности ортогональных инвариантов произвольной основной формы.

Изучение вопроса о конечности системы инвариантов привело меня к простой проблеме, которая включает задачу о конечности инвариантов как частный случай и для решения которой необходимо, вероятно, значительно более тонкое, чем это было до сих пор, изучение теории исключения и системы алгебраических модулей Кронекера.

Пусть дано некоторое число m целых рациональных функций $X_1, \ldots, X_m$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{array}\right\} \qquad (S)$$

Всякая целая рациональная связь между $X_1, X_2, \ldots, X_m$, если в нее внесены эти их значения, очевидно, тоже представляет целую рациональную функцию от $x_1, \ldots, x_n$. Вполне, однако, могут существовать дробные рациональные функции от $X_1, \ldots, X_m$, которые после подстановки (S) приведут к ц е л ы м функциям от $x_1, \ldots, x_n$. Каждую

[1]) Ср. Sitzungsber. der K. Akad. der Wiss. zu München, 1899, 147—175 [а также Math. Ann. 57 (1903), 265—313].

[2]) Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1897, 71—90.

такую рациональную функцию от $X_1, X_2, \ldots, X_m$, которая после подстановки значений (S) представляет целую функцию от $x_1, \ldots, x_n$, я буду называть относительно целой функцией от $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Каждая целая функция от $X_1, X_2, \ldots, X_m$ есть, очевидно, и относительно целая; кроме того, сумма, разность и произведение относительно целых функций есть снова относительно целая функция.

Проблема заключается в следующем: *установить, всегда ли возможно найти такую конечную систему относительно целых функций от $X_1, \ldots, X_m$, через которую каждая другая относительно целая функция выражается целым и рациональным образом.* Эту проблему можно еще проще формулировать, если ввести понятие конечной области целостности. Конечной областью целостности я буду называть такую систему функций, из которой можно выделить конечную часть функций, через которые остальные функции выражаются целым рациональным образом. Тогда наша проблема сведется к тому, чтобы показать, что совокупность всех относительно целых функций в любой области рациональности всегда составляет конечную область целостности.

А теперь можно легко *уточнить проблему с теоретико-числовой точки зрения*, если принять, что коэффициентами данных функций $f_1, \ldots, f_m$ являются целые рациональные числа, и под относительно целыми функциями от $X_1, \ldots, X_m$ понимать только такие рациональные функции этих аргументов, которые после подстановки в них выражений (S) превращаются в целые рациональные функции от $x_1, \ldots, x_n$ с целыми рациональными коэффициентами.

Особенно простой случай этой уточненной проблемы следующий: Пусть даны m рациональных функций $X_1, \ldots$ $\ldots, X_m$ одной переменной x с целыми рациональными коэффициентами и, кроме того, простое число p. Рассмотрим систему таких целых рациональных функций от x, которые можно представить в виде $\dfrac{G(X_1, \ldots, X_m)}{p^h}$, где G — целая рациональная функция аргументов $X_1, \ldots$ $\ldots, X_m$, а p^h — любая степень простого числа p. Из прежних моих исследований[1]) непосредственно вытекает, что все

---

[1]) Math. Ann. 36 (1890), 485 [а также D. Hilbert, Gesamm. Abh., II, № 16].

такие выражения при определенном показателе h образуют конечную область целостности; вопрос заключается в том, справедливо ли это предложение для всех показателей h, т. е. можно ли из выражений этого вида выбрать некоторое конечное их число, через которые все другие выражения этого вида при любом показателе h выражаются целым и рациональным образом.

Из областей, граничных между алгеброй и геометрией, я хочу назвать две проблемы. Одна из них относится к исчислительной геометрии (abzählende Geometrie), а вторая — к топологии алгебраических кривых и поверхностей.

15. СТРОГОЕ ОБОСНОВАНИЕ ИСЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ШУБЕРТА

Проблема состоит в том, *чтобы строго обосновать, указав точные границы их применимости, те самые геометрические числа, которые впервые определил Шуберт*[1]) *на основе так называемых принципов специального положения или сохранения числа в созданном им исчислении*[2]).

Хотя современная алгебра обеспечивает в принципе выполнимость процесса исключения, но для доказательства законов исчислительной геометрии требуется значительно больше, именно, необходимо провести исключение в случае, когда уравнения построены таким особым образом, что заранее задается степень окончательных уравнений и кратность их решений.

---

[1]) Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig, 1879.

[2]) Г. Шуберт изложил свою исчислительную геометрию на 330 страницах сочинения, указанного в сноске [1]); впоследствии он расширил и усовершенствовал свой символизм. Г. Шуберт ввел многообразия, носящие ныне его имя, и выяснил, что представляет собой пересечение таких многообразий в частных случаях. При этом Шуберт недостаточно обосновал свою геометрию, что явилось причиной ожесточенной полемики. Основным пунктом, вызвавшим особые возражения многих математиков, был так называемый принцип Шуберта, который в общем случае оказался неверным. Историческую справку и краткое изложение основных положений исчислительной геометрии Шуберта можно найти в книге I. C o o l i d g e, A history of geometrical methods, Oxford, 1940. — *Прим. ред.*

16. ПРОБЛЕМА ТОПОЛОГИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Максимальное число замкнутых и отдельно расположенных ветвей, которые может иметь плоская алгебраическая кривая n-го порядка, было определено Гарнаком [1]). Возникает дальнейший вопрос о взаимном расположении этих ветвей на плоскости. Что касается кривых шестого порядка, то я, — правда, на достаточно сложном пути — убедился [2]), что те 11 ветвей, которые получаются по Гарнаку, никогда не расположены все вне друг друга; всегда существует одна ветвь, внутри которой содержится еще *одна* и вне которой находятся остальные *девять*, или наоборот. *Мне представляется очень интересным основательное изучение взаимного расположения максимального числа отдельных ветвей, так же как и соответствующее исследование о числе, характере и расположении отдельных полостей алгебраической поверхности в пространстве*; ведь до сих пор еще не установлено, каково в действительности максимальное число полостей поверхности четвертого порядка в трехмерном пространстве [3]).

В связи с этой чисто алгебраической проблемой я затрону еще один вопрос, который, как мне кажется, должен быть решен с помощью упомянутого метода непрерывного изменения коэффициентов и ответ на который имеет важное значение для топологии семейств кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, а именно, вопрос *о максимальном числе и о расположении предельных циклов* (cycles limites) *Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка и первой степени вида*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

где X, Y — целые рациональные функции n-й степени относительно x, y, или в однородной записи,

$$X\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) + Y\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) + Z\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

---

[1]) Math. Ann. 10 (1876), 189—192.

[2]) Über die reellen Züge algebraischen Curven, Math. Ann. 38 (1891), 116—138.

[3]) Ср. K. Rohn, Flächen vierter Ordnung. Preisschrift der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig, 1886.

где X, Y, Z — целые рациональные однородные функции n-й степени относительно x, y, z, которые и нужно определить как функции параметра t.

17. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФОРМ В ВИДЕ СУММЫ КВАДРАТОВ

Целая рациональная функция, или форма, зависящая от произвольного числа переменных с вещественными коэффициентами, называется определенной, если ни при каких вещественных значениях этих переменных она не может принимать отрицательных значений. Совокупность всех определенных функций является инвариантной относительно операций сложения и умножения; но также и частное двух определенных функций, если только оно представляет целую функцию от аргументов, тоже есть определенная форма. Квадрат каждой произвольной формы есть, очевидно, определенная форма. Но, как я показал [1]), не каждая определенная форма может быть представлена в виде суммы квадратов форм. Поэтому возникает вопрос, на который я получил утвердительный ответ [2]) в отношении тернарных форм: *не может ли каждая определенная форма быть представлена в виде частного сумм квадратов форм.*

В то же время для некоторых вопросов, связанных с возможностью некоторых геометрических построений, желательно знать, должны ли коэффициенты используемых форм всегда принадлежать той же области рациональности, которой принадлежат коэффициенты разлагаемой формы [3]).

Я назову еще одну геометрическую задачу.

---

[1]) Math. Ann. 32 (1888), 342—350 [или D. Hilbert, Gesamm. Abh., II, № 10].

[2]) Acta mathematica 17 (1893), 169—197 [или D. Hilbert, Gesamm. Abh., II, № 20].

[3]) Ср. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1899, гл. VII, в частности § 38 (русский перевод: Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.— *Прим. ред.*).

18. ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ИЗ КОНГРУЭНТНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Если поставить вопрос о таких группах движений на плоскости, для которых существует фундаментальная область, то ответ будет, как известно, звучать по-разному, в зависимости от того, будет ли рассматриваемая плоскость римановой (эллиптической), евклидовой или плоскостью Лобачевского (гиперболической). В случае эллиптической плоскости существует к о н е ч н о е число существенно различных видов фундаментальных областей и достаточно к о н е ч н о г о числа экземпляров конгруэнтных областей, чтобы покрыть ими всю плоскость без просветов: группа состоит только из конечного числа движений. В случае гиперболической плоскости имеется б е с ч и с л е н н о е множество существенно различных видов фундаментальных областей, а именно известные многоугольники Пуанкаре; для покрытия всей плоскости без пробелов необходимо б е с к о н е ч н о е число экземпляров конгруэнтных областей. Случай евклидовой плоскости занимает промежуточное положение, ибо в этом случае имеется только к о н е ч н о е число существенно различных типов групп движений, имеющих фундаментальную область, но для покрытия всей плоскости без пробелов необходимо б е с к о н е ч н о е множество экземпляров конгруэнтных областей.

В точности соответствующие факты имеют место также в трехмерном пространстве; существование конечной группы движений в эллиптическом пространстве есть непосредственное следствие основной теоремы Жордана[1]), согласно которой число существенно различных типов к о н е ч н ы х групп линейных подстановок n переменных не превосходит некоторой определенной конечной границы, зависящей от n. Группы движений с фундаментальной областью в гиперболическом пространстве исследованы Фрике и Клейном в лекциях по теории автоморфных функций[2]), а затем Федоров[3]), Шёнфлисс[4]) и в последнее время Роон[5]) получили доказательство того, что в евклидовом прос-

[1]) J. de Math. 84 (1878) и Atti della Reale Academia di Napoli, 1880.

[2]) Leipzig, 1897; см. в особенности разд. 1, гл. 2—3.

[3]) Symmetrie des regelmäsigen Systeme von Figuren, 1890.

[4]) Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig, 1891.

[5]) Math. Ann. 53 (1900), 440—449.

транстве существует только конечное число существенно различных типов групп движений с фундаментальной областью. В то время как результаты и методы исследования, полученные для эллиптического и гиперболического пространств, непосредственно распространяются на пространство n измерений, обобщение соответствующего предложения на случай евклидова пространства встречает, по-видимому, значительные трудности и потому представляется желательным исследовать вопрос, *существует ли также и в n-мерном евклидовом пространстве только конечное число существенно различных типов групп движений с фундаментальной областью*

Фундаментальная область каждой группы движений вместе с конгруэнтными ей областями, определяемыми этой группой, дает, очевидно, покрытие пространства без пробелов. Возникает при этом вопрос, *существуют ли, кроме того, такие многогранники, которые не являются фундаментальными областями группы движений и с помощью которых все же возможно заполнить все пространство без пробелов соответствующим укладыванием конгруэнтных экземпляров этих многогранников*. Я укажу здесь на связанный с этим вопрос, важный для теории чисел, а возможно, полезный в будущем даже для физики и химии,— как можно наиболее плотным образом расположить в пространстве бесконечное множество одинаковых тел заданной формы, например, шаров заданного радиуса или правильных тетраэдров с данным ребром (или в предписанном положении), т. е. расположить так, чтобы отношение заполненной части пространства к незаполненной было по возможности наибольшим.

Обозревая развитие теории функций в последнем столетии, мы прежде всего замечаем основную роль класса тех функций, которые мы теперь называем аналитическими,— класса функций, который, несомненно, еще долго будет находиться в центре математических интересов.

Мы можем, исходя из самых разных точек зрения, выделять из множества всевозможных функций такие их классы, которые требуют особенно глубокого исследования. Например, рассмотрим класс тех функций, которые можно характеризовать дифференциальными уравнениями, обыкновенными или в частных производных. Как мы это сейчас увидим, в этот класс не входят функции, которые порождаются теорией чисел и исследование которых для нас чрезвычайно важно. Например, упомянутая уже функция $\zeta(s)$ не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению, как это легко усмотреть из известного соотношения между $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$, пользуясь предложением, доказанным Гёльдером [1]), о том, что функция $\Gamma(x)$ не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению. Далее, функция от двух переменных s и x, определяемая бесконечным рядом

$$\zeta(s, x) = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + \frac{x^4}{4^s} + \ldots,$$

которая находится в тесной связи с функцией $\zeta(s)$, вероятно, не удовлетворяет никакому алгебраическому дифференциальному уравнению в частных производных. При исследовании этого вопроса придется использовать функциональное уравнение

$$x\frac{\partial\zeta(s, x)}{\partial x} = \zeta(s-1, x).$$

Если мы, с другой стороны, исходя из арифметических или геометрических соображений, ограничимся классом всех тех функций, которые непрерывны и неограниченное число раз дифференцируемы, то при их исследовании нам придется пренебречь таким удобным оружием, как теория рядов, а также и тем обстоятельством, что функция полностью определяется значениями, которые она принимает в каждой сколь угодно малой области. Таким образом, если указанное выше ограничение области функций было слишком узким, то рассматриваемое теперь — слишком широко.

В противоположность этому понятие аналитической функции включает все богатство функций, важных для науки, независимо от того, возникают ли они из теории чисел, из теории дифференциальных уравнений или алгебраических функциональных уравнений или же из геометрии или математической физики. Поэтому аналитические функции по праву обладают неограниченным господством в царстве функций.

---

[1]) Math. Ann. 28 (1886), 1—13.

19. ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НЕОБХОДИМО АНАЛИТИЧЕСКИМИ?

Одним из наиболее замечательных обстоятельств в основах теории аналитических функций я считаю то, что существуют дифференциальные уравнения с частными производными, все интегралы которых необходимо являются *аналитическими* функциями своих независимых переменных; короче говоря, эти уравнения допускают только аналитические решения. Наиболее известные дифференциальные уравнения в частных производных этого рода — это уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

и известные линейные дифференциальные уравнения, исследованные Пикаром[1]), кроме того, дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f,$$

дифференциальное уравнение в частных производных минимальных поверхностей и другие. Подобные дифференциальные уравнения в частных производных имеют между собой то общее, что они являются дифференциальными уравнениями Лагранжа для известной вариационной задачи, а именно для следующей задачи:

$$\iint F(p,\,q,\,z,\,x,\,y)\,dx\,dy=\text{minimum}\;\left[p=\frac{\partial z}{\partial x},\;q=\frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

где F — аналитическая функция, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\right)^2>0$$

для всех значений входящих в нее аргументов. Такую вариационную задачу мы будем называть *регулярной* вариационной задачей.

Вариационные задачи, которые играют некоторую роль в геометрии, механике и математической физике, являются преимущественно регулярными вариационными

---

[1]) Journ. de l'École Polytechnique 60 (1890), 89—105.

задачами, и возникает вопрос, должны ли быть все решения регулярной вариационной задачи необходимо аналитическими функциями, т. е. *обладает ли каждое дифференциальное уравнение Лагранжа в частных производных для регулярной вариационной задачи тем свойством, что оно допускает только аналитические интегралы*[1]), даже если, как в случае задачи Дирихле, граничные значения непрерывные, но не аналитические.

Замечу еще, что существуют, например, поверхности постоянной отрицательной гауссовой кривизны, которые могут быть представлены непрерывными и неограничено дифференцируемыми, но не аналитическими функциями, в то время как каждая поверхность постоянной положительной гауссовой кривизны, вероятно, необходимо должна быть аналитической поверхностью. Известно, что поверхности постоянной положительной кривизны также тесно связаны с регулярной вариационной задачей о проведении через замкнутую пространственную кривую поверхности наименьшей площади, которая вместе с данной поверхностью, проходящей через ту же пространственную кривую, ограничивала бы пространство заданного объема.

20. ОБЩАЯ ЗАДАЧА О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Одной из важных задач, тесно связанных с приведенными выше задачами, является задача о существовании решений дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными условиями. Остроумные методы Шварца, Неймана и Пуанкаре привели в основном к решению этой задачи для случая дифференциального уравнения потенциала; тем не менее эти методы не могут быть непосредственно обобщены на случай, когда на границах заданы значения производных или соотношения между этими значениями и значениями искомой функции,

---

[1]) С. Н. Бернштейн в своей статье «Об изгибании поверхностей» (1905) (см. Собр. соч., т. 3, стр. 16) пишет: «Когда я спросил Гильберта, каковы общие соображения, которые привели его к предложению, доказанному мною впоследствии, о том, что все решения регулярных задач вариационного исчисления аналитичны, знаменитый геометр ответил, что он считает, что решения всех естественно поставленных задач должны быть аналитическими». — *Прим. ред.*

или на случай, если речь идет не о поверхности потенциала, а, например, о поверхности наименьшей площади или о поверхности постоянной гауссовой кривизны, которая проходит через заданную пространственную кривую или должна натягиваться на данную кольцевую поверхность.

Я убежден, что эти доказательства существования можно будет провести с помощью некоторого общего основного положения, на которое указывает принцип Дирихле и который, вероятно, приблизит нас к вопросу о том, *не допускает ли решение каждая регулярная вариационная задача, если только на данные граничные условия наложены определенные допущения*, например, непрерывность или кусочная дифференцируемость до определенного порядка функций, определяющих условия на границах,— и *если в случае необходимости самому понятию решения придать расширенное толкование*[1]).

21. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАДАННОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ

Из теории линейных дифференциальных уравнений с одной независимой переменной z я хотел бы указать на одну важную проблему, над которой, по-видимому, размышлял еще Риман и содержание которой состоит в том, чтобы показать, что *всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии*. В задаче, таким образом, требуется найти n функций переменной z, регулярных на всей комплексной плоскости z, за исключением, быть может, данных особых точек: в этих точках они имеют полюсы только конечного порядка и при об-

---

[1]) Ср. мою лекцию о принципе Дирихле: Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. (1900), стр. 184 [или Gesamm. Abh. III, № 3].

(Первый пример такого обогащения понятия решения мы находим в работе Римана «Основы общей теории функций одной комплексной переменной» (1851 г.) (см. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1948, стр. 49—87), в которой вводится понятие обобщения решения уравнения Лапласа. Идеи Римана и Гильберта относительно расширенного толкования понятия решения дифференциального уравнения оказались плодотворными и привели в XX столетии к построению теории обобщенных функций (С.Л. Соболев, Л. Шварц).— *Прим. ред.*)

ходе в плоскости z вокруг этих точек эти функции подвергаются линейной подстановке. О существовании таких дифференциальных уравнений, вероятно, возможно заключить путем подсчета констант, однако строгое доказательство этого предложения удалось до сих пор провести только для частного случая, когда корни характеристических уравнений заданных преобразований по модулю равны единице. Это доказательство провел Л. Шлезингер[1]) на основании принадлежащей Пуанкаре теории ζ-функций Фукса. Теория линейных дифференциальных уравнений приобрела бы более законченный вид, если бы удалось общее исследование указанной проблемы.

22. УНИФОРМИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Как доказал первым Пуанкаре, любое *алгебраическое* соотношение между двумя переменными можно униформизировать с помощью автоморфных функций от одной переменной: если задано любое алгебраическое уравнение, связывающее две переменные, то всегда можно найти такие однозначные автоморфные функции от одной переменной, подстановка которых в данное уравнение обращает его в тождество относительно этой переменной. Впоследствии Пуанкаре[2]) занялся обобщением этого фундаментального предложения на случай не алгебраического, а произвольного аналитического соотношения между двумя переменными; при этом он пошел по совершенно новому пути, отличному от того, который привел его к решению первой задачи. Из доказательства Пуанкаре возможности униформизировать произвольное аналитическое соотношение с двумя переменными не следует, однако, делать заключение о том, что эти однозначные функции новой переменной можно выбрать таким образом, чтобы при изменении этой переменной в области регулярности обеих функций можно было получить полную совокупность в с е х регулярных точек заданной аналитической области. Более того, из исследований Пуанкаре вид-

---

[1]) Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 2, Teil 2, № 366, Leipzig, 1898.

[2]) Bull. Soc. Math. France 11 (1883), 112—125.

но, что, кроме точек разветвления, из данной аналитической области нужно исключить другие точки, которые образуют, вообще говоря, бесконечное дискретное множество и возникают как предельные значения при приближении нового переменного к границе области. *Мне казалось бы исключительно желательным разъяснение и разрешение этой трудности, принимая во внимание фундаментальное значение, какое имеет постановка вопроса Пуанкаре.* В связи с этой проблемой естественно возникает проблема о разрешимости алгебраического или произвольного аналитического соотношения между тремя или между бо́льшим числом комплексных переменных — проблема, которая, как известно, разрешима в многочисленных частных случаях и при решении которой следует учесть новейшие исследования Пикара [1]) об алгебраических функциях от двух переменных, как весьма ценные и значительные.

23. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

До сих пор я называл, вообще говоря, по возможности более определенные и специальные проблемы, принимая во внимание, что как раз такие проблемы нас больше всего привлекают и от них часто исходит продолжительнейшее влияние на всю науку. Однако я хочу закончить общей проблемой, а именно, указанием на дисциплину, которая уже много раз упоминалась в моем докладе и которая, несмотря на значительный подъем, испытанный ею в последнее время благодаря Вейерштрассу, однако не пользуется в широких кругах тем уважением, какое ей, по-моему, подобает,— я имею в виду в а р и а ц и о н н о е   и с ч и с л е н и е [2]). [Тем значительнее тот факт, что Кнезер [3]) в недавно появившемся сочинении предста-

---

[1]) См. E. P i c a r d, G. S i m a r t, Théorie des fonctions algebriques de deux variables indépendantes, т. I, Paris, 1897.— *Прим. ред.*

[2]) Учебные пособия по вариационному исчислению: M o i g n o, L. L i n d e l ö f, Leçons du calcul des variations, Paris, 1861 и M. K n e s e r, Lehrbuch der Variationrechnung, Braunschweig, 1900.

[3]) [Braunschweig, 1900. Для характеристики содержания этого произведения необходимо отметить, что Кнезер вывел достаточные условия экстремума для простейшей задачи в случае, когда меняются границы интегрирования, и использовал огибающую семейства кривых, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям задачи,

вил вариационное исчисление с новой точки зрения и на современном уровне строгости.]

Вариационное исчисление в широком смысле — это учение об изменении функций, и в качестве такового оно оказывается естественным продолжением дифференциального и интегрального исчисления. При таком понимании, например, исследования Пуанкаре о проблеме трех тел образуют главу вариационного исчисления, поскольку в них Пуанкаре из известных траекторий, обладающих некоторым свойством, с помощью принципа варьирования получил новые траектории, обладающие сходными свойствами.

К общим замечаниям о вариационном исчислении, сделанным в начале моего доклада, я присовокуплю здесь короткое доказательство.

Простейшая проблема собственно вариационного исчисления, как известно, состоит в том, чтобы найти функцию y от x такую, чтобы определенный интеграл

$$J = \int_a^b F(y_x, y, x)\,dx \qquad \left[y_x = \frac{dy}{dx}\right]$$

имел минимальное значение по сравнению с теми значениями, которые он принимает, если мы вместо y подставим

для доказательства необходимости условия Якоби для существования экстремума. Далее необходимо подчеркнуть, что Кнезер в своем учебнике применил теорию Вейерштрасса также к вопросу об экстремуме величин, определяющихся дифференциальными уравнениями.]

(Чтобы сделать понятной высокую оценку, данную Гильбертом работе Кнезера, охарактеризуем кратко историческую обстановку, сложившуюся в то время в вариационном исчислении.

Вейерштрасс рассмотрел простейшую задачу вариационного исчисления об экстремуме интеграла с закрепленными границами, взятого вдоль плоской кривой. В конце XIX в. появилось большое число статей, учебников, диссертаций, в которых развивались и обобщались его идеи. В результате была создана теория поля экстремалей, представляющая собой гибкий метод для перенесения результатов Вейерштрасса на общие вариационные задачи. Среди работ этого направления выделяется геометрическая теория Кнезера, основанная на плодотворной мысли распространить на общие вариационные задачи понятия и законы теории геодезических линий на поверхности. Аналогично гауссовой криволинейной системе координат на поверхности Кнезер ввел в рассмотрение поля экстремалей и трансверсалей. Так впервые был создан аппарат для решения задач об экстремуме интегралов с подвижными границами.— *Прим. перев.*)

в него другие функции от x, принимающие на концах отрезка интегрирования те же значения.

Обращение в нуль первой вариации в обычном смысле $\delta J = 0$ дает для искомой функции y известное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{dF_{y_x}}{dx} - F_y = 0 \qquad \left[F_{y_x} = \frac{\partial F}{\partial y_x},\ F_y = \frac{\partial F}{\partial y}\right]. \tag{1}$$

Чтобы детально исследовать необходимые и достаточные критерии наступления требуемого минимума, рассмотрим *интеграл*

$$J^* = \int_a^b \{F + (y_x - p)\, F_p\}\, dx$$

$$\left[F = F(p, y, x), \quad F_p = \frac{\partial F(p, y, x)}{\partial p}\right]$$

и спросим, как выбрать функцию p от x и y, чтобы значение интеграла J^* не зависело от выбранного пути, т. е. от выбора функции y от x. Интеграл J^* имеет форму

$$J^* = \int_a^b \{A y_x - B\}\, dx,$$

где A и B не содержат y_x, и обращение в нуль первой вариации $\delta J^* = 0$ в смысле, которого требует новая постановка задачи, дает уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = 0,$$

т. е. мы получаем для функции p от x и y уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial (pF_p - F)}{\partial y} = 0. \tag{1*}$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (1) и только что найденное уравнение в частных производных (1*) тесно связаны. Эта связь станет непосредственно ясной благодаря следующему простому преобразованию:

$$\delta J^* = \int_a^b \{F_y \delta y + F_p \delta p + (\delta y_x - \delta p)\, F_p + (y_x - p)\, \delta F_p\}\, dx =$$

$$= \int_a^b \{F_y \delta y + \delta y_x F_p + (y_x - p)\, \delta F_p\}\, dx = \delta J + \int_a^b (y_x - p)\, \delta F_p\, dx.$$

А именно, мы выведем из этого следующее: если мы найдем какое-нибудь *однопараметрическое* семейство интегральных кривых дифференциального уравнения второго порядка (1) и затем образуем дифференциальное уравнение первого порядка

$$y_x = p\,(x,\ y), \tag{2}$$

решениями которого являются рассматриваемые интегральные кривые, то функция $p\,(x,\ y)$ всегда будет интегралом уравнения в частных производных первого порядка (1*); и обратно, если $p\,(x,\ y)$ обозначает какое-нибудь решение уравнения в частных производных (1*), то все неособые решения дифференциального уравнения первого порядка (2) являются одновременно решениями дифференциального уравнения второго порядка (1); или, короче говоря, если $y_x = p\,(x,\ y)$ — дифференциальное уравнение первого порядка, являющееся интегралом дифференциального уравнения второго порядка (1), то $p\,(x,\ y)$ — интеграл уравнения в частных производных (1*), и обратно; итак, интегральные кривые дифференциального уравнения второго порядка (1) одновременно являются характеристиками уравнения в частных производных первого порядка (1*).

Тот же результат мы получим также посредством простого вычисления, а именно, к этому результату нас приводят дифференциальные уравнения (1), соответственно (2) в виде $y_{xx}F_{y_xy_x} + y_xF_{y_xy} + F_{y_xx} - F_y = 0$, соответственно $(p_x + pp_y)\,F_{pp} + pF_{py} + F_{px} - F_y = 0$, где нижние индексы означают, как легко понять из записи, частные производные по x, y, p, y_x. Отсюда видно, что высказанное утверждение справедливо.

Ранее установленная и только что доказанная тесная связь между дифференциальным уравнением второго порядка (1) и уравнениями в частных производных первого порядка (1*), как мне кажется, имеет для вариационного исчисления основополагающее значение. Действительно, из независимости интеграла J^* от пути интегрирования вытекает

$$\int\limits_a^b \{F_p + (y_x - p)\,F_p\,(p)\}\,dx = \int\limits_a^b F\,(\overline{y}_x)\,dx, \tag{3}$$

если считать, что интеграл слева взят вдоль некоторой кривой y, а интеграл справа — вдоль интегральной кривой

$\bar{y}$ уравнения

$$\bar{y}(x) = p(x, \bar{y}).$$

С помощью уравнения (3) получаем формулу Вейерштрасса:

$$\int_a^b F(y_x)\,dx - \int_a^b F(\bar{y}_x)\,dx = \int_a^b E(y_x, p)\,dx, \qquad (4)$$

где E — введенное Вейерштрассом выражение, зависящее от четырех аргументов y_x, p, y, x:

$$E(y_x, p) = F(y_x) - F_p - (y_x - p)\,F_p(p).$$

Поскольку здесь все дело только в том, чтобы упомянутую интегральную кривую $\bar{y}$ окружить в плоскости xy однозначным и непрерывным образом значениями соответствующей функции $p(x, y)$, то проведенные рассмотрения непосредственно позволяют — без привлечения второй вариации, а только применением Polarenprozesses к дифференциальному уравнению (1) — установить условие Якоби и ответить на вопрос, в какой мере это условие в совокупности с условием Вейерштрасса $E > 0$ необходимо и достаточно для наступления минимума.

Указанные рассмотрения[1]) без громоздких вычислений можно перенести на случай двух и более функций и на случай двойного и многократных интегралов. Так, например, в случае двойного интеграла, взятого в области ω,

$$J = \int F(z_x, z_y, z, x, y)\,d\omega \left[z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\ z_y = \frac{\partial z}{\partial y}\right],$$

[1]) «Теоремой о независимости», сформулированной в двадцать третьей проблеме, Гильберт продолжает исследования Кнезера по упрощению и обобщению методов вариационного исчисления, развивает теорию поля. В 1903 г. А. Майер (A. M a y e r, Math. Ann. 58 (1903)) распространил теорему независимости Гильберта на случай функций многих переменных. При этом он рассмотрел семейства экстремалей в пространстве, так называемые поля Майера. Обобщению теоремы независимости посвящена работа Гильберта (D. H i l b e r t, Zur Variationsrechnung, Math. Ann. 62 (1906)). Продолжением работ Майера и Гильберта явилась статья Больца (O. B o l z a, Trans. Amer. Math. Soc. 7 (1906)). Метод Больца основан на изучении поля экстремалей. Исследования по отысканию необходимых и достаточных условий экстремума для все более общих вариационных задач составили так называемое «классическое» направление в вариационном исчислении. Основа этого направления была создана Кнезером и Гильбертом, разработавшими теорию поля экстремалей. — *Прим. перев.*

обращение в нуль первой вариации, понимаемое в обычном смысле,

$$\delta J = 0$$

дает известное уравнение в частных производных второго порядка для искомой функции z от x и y

$$\frac{dF_{z_x}}{dx} + \frac{dF_{z_y}}{dy} - F_z = 0 \left[F_{z_x} = \frac{\partial F}{\partial z_x},\ F_{z_y} = \frac{\partial F}{\partial z_y},\ F_z = \frac{\partial F}{\partial z}\right]. \tag{I}$$

С другой стороны, рассмотрим **интеграл**

$$J^* = \int \{F + (z_x - p) F_p + (z_y - q) F_q\} d\omega$$

$$\left[F = F(p, q, z, x, y),\ F_p = \frac{\partial F(p, q, z, x, y)}{\partial p},\right.$$

$$\left. F_q = \frac{\partial F(p, q, z, x, y)}{\partial q}\right]$$

и спросим, как выбрать функции p и q от x, y, z, чтобы значение этого интеграла не зависело от поверхности, проходящей через данную замкнутую кривую, т. е. от выбора функции z переменных x и y. Интеграл J^* имеет форму

$$J^* = \int \{Az_x + Bz_y - C\} d\omega$$

и обращение в нуль первой вариации

$$\delta J^* = 0,$$

понимаемое в смысле, который диктуется новой постановкой вопроса, дает уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

т. е. для функций p и q трех переменных x, y, z мы получаем уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F_p}{\partial x} + \frac{\partial F_q}{\partial y} + \frac{\partial (pF_p + qF_q - F)}{\partial z} = 0. \tag{I*}$$

Если мы к этому уравнению присоединим еще уравнение в частных производных

$$p_y + qp_z = q_x + pq_z, \tag{I**}$$

получающееся из уравнений

$$z_x = p(x, y, z), \ z_y = q(x, y, z),$$

то уравнение в частных производных второго порядка (I) для функции z двух переменных x и y и система двух уравнений в частных производных первого порядка (I*) и (I**) для двух функций p и q трех переменных x, y, z находятся между собой в таком же отношении, как в случае однократного интеграла уравнения (1) и (1*).

Из независимости интеграла J^* от выбора поверхности интегрирования z следует

$$\int \{F(p, q) + (z_x - p) F_p(p, q) + (z_y - q) F_q(p, q)\} d\omega =$$
$$= \int F(\overline{z}_x, \overline{z}_y) \, d\omega,$$

если предположить, что интеграл, стоящий справа, взят по интегральной поверхности $\overline{z}$ уравнений

$$\overline{z}_x = p(x, y, \overline{z}), \quad \overline{z}_y = q(x, y, \overline{z}),$$

то с помощью этой формулы мы получаем тотчас же формулу

$$\int F(z_x, z_y) \, d\omega - \int F(\overline{z}_x, \overline{z}_y) \, d\omega = \int E(z_x, z_y, p, q) \, d\omega,$$

$$E(z_x, z_y, p, q) =$$
$$= F(z_x, z_y) - F(p, q) - (z_x - p) F_p(p, q) - (z_y - q) F_q(p, q),$$

которая для двойного интеграла играет ту же роль, что формула (4) в предыдущем случае, и с помощью которой мы опять можем ответить на вопрос, в какой мере условие Якоби в соединении с условием Вейерштрасса $E > 0$ необходимо и достаточно для наступления минимума.

Названные проблемы — это только образцы проблем; но их достаточно, чтобы показать, как богата, многообразна и широка математическая наука уже сейчас; перед нами встает вопрос, предстоит ли математике когда-нибудь то, что с другими науками происходит с давних пор, не распадется ли она на отдельные частные науки, представители которых будут едва понимать друг друга и связь между которыми будет поэтому становиться все меньше.

Я не верю в это и не хочу этого. Математическая наука, на мой взгляд, представляет неделимое целое, организм, жизнеспособность которого обусловливается связностью его частей. Ведь при всем различии математического материала в частностях мы все же очень ясно видим тождественность логических вспомогательных средств, родство образования идей в математике в целом и многочисленные аналогии в ее различных областях. Мы также замечаем, что, чем дальше развивается математическая теория, тем гармоничнее и более едино оформляется ее сооружение и между до сих пор разделенными областями открываются неожиданные связи. Так получается, что при расширении математики ее единый характер не теряется, а становится все более отчетливым.

Но — спросим мы — при расширении математического знания не становится ли в конце концов невозможным для отдельного исследователя охватить все его части? В качестве ответа я хочу сослаться на то, что существо математической науки таково, что каждый действительный успех в ней идет рука об руку с нахождением более сильных вспомогательных средств и более простых методов, которые одновременно облегчают понимание более ранних теорий и устраняют затруднительные старые рассуждения; поэтому отдельному исследователю, благодаря тому что он усвоит эти более сильные вспомогательные средства и более простые методы, удастся легче ориентироваться в различных областях математики, чем это имеет место для какой-нибудь другой науки.

Единый характер математики обусловлен внутренним существом этой науки; ведь математика — основа всего точного естествознания. А для того чтобы в совершенстве выполнить это высокое назначение, пусть в грядущем столетии она обретет гениальных мастеров и многочисленных, пылающих благородным рвением приверженцев [1]).

---

[1]) В подлиннике эти слова звучат так: «Der einheitliche Charakter der Mathematik liegt im inneren Wesen dieser Wissenschaft begründet; denn die Mathematik ist die Grundlage alles exakten naturwissenschaftlichen Erkennens. Damit sie diese hohe Bestimmung vollkommen erfülle, mögen ihr im neuen Jahrhundert geniale Meister erstehen und zahlreiche in edlem Eifer erglühende Jünger!» — *Прим. ред.*

II

КОММЕНТАРИИ К ПРОБЛЕМАМ ГИЛЬБЕРТА

К ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

А. С. Есенин-Вольпин

Чтобы сформулировать эту проблему, напомним основные понятия канторовской теории кардинальных чисел (мощностей).

Термин *множество* означает то же, что и «совокупность». Объекты, из которых состоит множество или совокупность, называются *элементами* этого множества; обычно предполагается, что можно рассматривать множества объектов любой природы. Если каждый элемент множества X является элементом множества Y, то множество X называется *частью* или *подмножеством* множества Y (обозначается: $X \subseteq Y$). Понятие *взаимно однозначного соответствия* в обычной «наивной» теории множеств не определяется и рассматривается как первоначальное. Считается, что оно выражает некоторую интуитивно ясную идею, а именно: между пальцами левой и правой рук неискалеченного человека можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставив с левым мизинцем правый мизинец, с левым безымянным пальцем—правый безымянный палец и т. д. Между всеми натуральными числами и между всеми четными натуральными числами также можно установить взаимно однозначное соответствие, сопоставив всякому натуральному числу n четное число $2n$.

Два множества называются *эквивалентными* или *равномощными*, если существует взаимно однозначное соответствие, сопоставляющее каждому элементу любого из этих множеств некоторый (единственный) элемент другого множества. О двух эквивалентных множествах говорят также, что они имеют *одинаковую мощность*. Запись $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ означает, что множества X и Y имеют одинаковую мощность.

Говорят, что мощность множества X *меньше*, чем мощность множества Y (и пишут $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$), если множество X эквивалентно части множества Y и притом множества X и Y не эквивалентны.

Натуральный ряд чисел 0, 1, 2, ... является множеством, и всякое множество, эквивалентное натуральному ряду, называется *счетным*. Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$.

Мощность множества всех действительных чисел называется *мощностью континуума*. Часто она обозначается через $\mathfrak{C}$. Очевидно, что $\aleph_0 \leqslant \mathfrak{C}$.

Еще Кантор доказал, что множество всех рациональных чисел счетно, а множество мощности континуума несчетно. Множество всех точек плоскости или трехмерного пространства имеет мощность континуума.

В 1878 г. Кантор высказал гипотезу[1]) о том, что не существует множества, мощность которого была бы промежуточной между $\aleph_0$ и $\mathfrak{C}$. Эта гипотеза называется гипотезой континуума (или *континуум-гипотезой*). В конце прошлого века Кантору одно время казалось, что он может доказать эту гипотезу[2]), однако на самом деле ему это не удалось. С тех пор возникла проблема континуума, состоявшая в доказательстве или опровержении континуум-гипотезы. Очень многие ученые — в том числе и крупнейшие специалисты в области теории множеств — занимались этой проблемой, но она оставалась нерешенной вплоть до недавних работ П. Коэна, доказавшего (в известном смысле) как раз ее неразрешимость.

Говоря о важности континуум-гипотезы, часто утверждают, что она дала бы возможность во многом упростить построение теории действительных чисел, а также теории функций действительного переменного; из-за отсутствия ее в числе принятых предложений в этих теориях, а также в топологии возникают специальные проблемы, вызванные необходимостью отличать мощность континуума от «наименьшей несчетной мощности».

---

[1]) G. Cantor, Gesamm. Abh., стр. 132.— *Прим. ред.*

[2]) Кантор не раз обещал в своих статьях сообщить решение континуум-проблемы в одной из следующих публикаций; наконец, он даже объявил о ее решении (см. G. Cantor, Gesamm. Abh., стр. 244). Подробную справку по истории этого вопроса в XIX столетии можно получить в книге Ф. А. Медведева «Развитие теории множеств в XIX веке», М., 1965.— *Прим. ред.*

Но, хотя это и верно, роль континуум-гипотезы проявилась скорее в качестве одной из главных целей многих исследований, чем в качестве средства для построения теорий. (По этому поводу уместно вспомнить, что когда удается исключить из построения какого-либо фрагмента теории, например, аксиому выбора (см. ниже) не более дорогой ценой, чем та, которой мы расплачиваемся за неприятие континуум-гипотезы в упомянутых областях математики, то говорят, что этот фрагмент теории, по существу, не зависит от аксиомы выбора.)

Множество X называется *линейно упорядоченным*, если существует некоторое отношение R такое, что для двух различных элементов a и b множества X либо a находится в отношении R к b (в символах: aRb), либо b находится в отношении R к a (bRa), причем из aRb и bRc следует aRc, каковы бы ни были элементы a, b и c множества X. Упорядоченное множество (с его *отношением порядка* R) называется *вполне упорядоченным*, если во всяком непустом множестве Y, являющемся частью множества X, имеется такой элемент a, что aRb для всякого отличного от a элемента b множества Y. (*Пустым множеством* называется множество, не содержащее ни одного элемента, скажем, множество всех чисел, являющихся одновременно четными и нечетными.)

Всякое конечное множество можно рассматривать как вполне упорядоченное, также и натуральный ряд является вполне упорядоченным множеством (за отношение R можно принять отношение «$<$»).

В теории множеств имеется постулат, именуемый *аксиомой выбора*. Он состоит в том, что для всякой системы $\mathfrak{M}$ непустых множеств, попарно не имеющих общих элементов, существует множество N, имеющее с каждым множеством системы $\mathfrak{M}$ в точности один-единственный общий элемент. Как доказал Цермело, из этой аксиомы выбора следует, что всякое множество эквивалентно некоторому вполне упорядоченному множеству (верно и обратное утверждение).

Проблема континуума тесно связана с проблемой о том, можно ли вполне упорядочить множество действительных чисел, не прибегая к аксиоме выбора (т. е. можно ли, не прибегая к этой аксиоме, определить в этом множестве такое отношение порядка R, при котором это множество является вполне упорядоченным). Эта проблема также до последнего времени оставалась нерешенной.

Легко доказывается, что мощность континуума является мощностью множества всех частей натурального ряда. Мощность множества всех частей множества M обозначается через 2^M (если M конечно, то это обозначение согласуется с тем, что всякое множество мощности M действительно имеет 2^M частей). Согласно широко известной теореме Кантора, всегда $m < 2^M$, где m — мощность множества M.

Обобщенная континуум-гипотеза состоит в том, что если мощность m не является мощностью конечного множества, то между мощностями m и 2^M не имеется никакой промежуточной мощности.

Серпинский в 1947 г. и Шпеккер в 1952 г. доказали, что из обобщенной континуум-гипотезы следует аксиома выбора. Вследствие безуспешности попыток решения континуум-проблемы возникло предположение о ее неразрешимости, и в наше время постановка проблемы состоит в доказательстве невозможности доказать или опровергнуть континуум-гипотезу в той или иной системе аксиом для теории множеств. Идея такого рода возникла у Гильберта.

Первого большого успеха в этом направлении добился Курт Гёдель, крупнейший из современных ученых в области математической логики. Для некоторой системы аксиом Σ он доказал [1]) (в 1940 г.), что *если эта система непротиворечива, то к ней можно присоединить без противоречия аксиому выбора и обобщенную континуум-гипотезу*. В 1963 г. молодой американский ученый Паул Коэн [2]) доказал и независимость аксиомы выбора и континуум-гипотезы для системы Σ, т. е. что *если эта система непротиворечива, то к ней можно без противоречия присоединить отрицание аксиомы выбора и отрицание континуум-гипотезы, а также аксиому выбора и отрицание континуум-гипотезы*. (Вместо Σ Коэн рассматривает достаточно близкую к ней систему Цермело — Френкеля.)

Чтобы дать некоторое представление о результатах Гёделя и Коэна, надо сказать несколько слов об общих прин-

---

[1]) Ann. Math. Studies № 3, Princeton, 1940, стр. 66 (русский перевод: УМН 3, № 1 (1948), 96—149.— *Прим. ред.*).

[2]) Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50, № 6 (1963) и 51, № 1 (1964) (русский перевод: Математика (сб. перев.) 9, № 4 (1965), 142—155.— *Прим. ред.*).

ципах построения аксиоматизированной теории множеств [1]).

Всякая система аксиом для теории множеств содержит аксиомы следующих видов:

1) Принцип свертывания, согласно которому для всякого свойства P существует множество, состоящее из тех и только тех предметов, которые обладают свойством P. При этом P может быть любым свойством, которое можно выразить с помощью логических операторов «если..., то...», «и», «или», «не», «для всякого», «для некоторого» и отношений $X = Y$ и $X \in Y$ (читается: «X есть элемент Y»). Для каждого такого свойства P этот принцип дает *аксиому свертывания* (для этого P). Предполагается, что в формулировку P не входит имя того множества, которое вводится этой аксиомой.

2) Аксиома объемности, согласно которой два множества равны (т. е. совпадают), если они состоят из одних и тех же элементов.

3) Аксиома о существовании бесконечного множества.

4) Аксиома выбора (если только она принимается в рассматриваемой системе).

Такой перечень аксиом представляется очень естественным и вполне достаточным для теории множеств, но беда в том, что уже принцип свертывания, без каких-либо дальнейших аксиом, приводит к противоречиям. Например, если в качестве свойства P выбрать свойство «X не является элементом X», то получится известный парадокс Рассела (именно, если Y означает множество тех множеств X, которые не являются элементами самих себя, то Y является элементом Y в том и только в том случае, если Y не является элементом Y, откуда следует, что одновременно Y является и не является элементом самого себя). Ввиду этого и некоторых других парадоксов приходится ограничить принцип свертывания, т. е. постулировать аксиомы свертывания не для всех свойств P, однако все же для настолько широкого класса этих свойств, чтобы с помощью соответствующих свойствам этого класса аксиом свертывания можно было построить теорию множеств в объеме, достаточном для всех теоретико-множественных разделов математики.

---

[1]) См. Ван Хао и Р. Мак-Нотон, Аксиоматические системы теории множеств, ИЛ, 1963.— *Прим. ред.*

Э. Цермело указал наиболее естественную совокупность аксиом свертывания, которая вместе с аксиомами 2), 3) образует так называемую *систему Цермело*. Именно, в этой системе имеются следующие три аксиомы свертывания: *аксиома существования пары любых двух множеств* (причем пара считается тоже множеством), *аксиома существования множества, являющегося объединением любого множества множеств, и аксиома существования множества всех подмножеств для произвольного множества*; кроме того, в этой системе принята с х е м а а к с и о м в ы д е л е н и я, т. е. аксиом, состоящих в том, что для всякого множества X и всякого свойства P вышеописанного вида существует множество всех элементов X, обладающих свойством P. Эти аксиомы свертывания вместе с аксиомами объемности и бесконечности и образуют систему Цермело (точнее, перечень ее «нелогических» аксиом). Хотя этой системы достаточно для построения теории функций и других разделов классической математики (кроме тех случаев, когда требуется привлечение аксиомы выбора), для свободного построения теории порядковых чисел и мощностей требуется, как впервые указал А. Френкель, дополнительная с х е м а а к с и о м п о д с т а н о в к и, состоящая в том, что для всякого однозначного отображения $P(t, z)$ (представимого формулой рассматриваемой системы, содержащей свободные переменные t и z; однозначность выражается в этой схеме условием: для всякого t существует не более одного z со свойством $P(t, z)$) и для всякого множества X существует множество всех таких z, для которых существует $t \in X$ со свойством $P(t, z)$. Смысл этих аксиом состоит в том, что однозначный образ любого множества «является множеством, коль скоро само это отображение выразимо в языке системы»; аксиомы выделения следуют из аксиом свертывания (без помощи других аксиом этой теории), а потому могут быть исключены из перечня аксиом, содержащего аксиомы подстановки. Система, получаемая из системы Цермело заменой аксиом выделения аксиомами подстановки, называется *системой Цермело — Френкеля* (ZF); польский математик Мыцельский доказал недавно, что аксиома пары является в этой системе следствием остальных аксиом, а потому может быть исключена из перечня аксиом ZF.

Упомянутая система Σ Гёделя лишь несущественно отличается от системы ZF (именно, наряду с множествами в ней имеются классы множеств, обладающих произвольным свойством, выразимым в языке ZF и могущим, кроме того, зависеть, как от параметров, от других классов; это позволяет заменить схему подстановки одной аксиомой и ограничиться в формулировке системы конечным числом «нелогических» аксиом). Каждая из систем Σ и ZF непротиворечива, если непротиворечива другая, и результаты Гёделя и Коэна, будучи получены для одной из этих систем, легко переносятся на другую. Метод Гёделя состоит в построении (средствами его системы Σ) некоторой «модели», т. е. системы объектов этой теории, удовлетворяющей аксиомам Σ, а также аксиоме выбора и обобщенной континуум-гипотезе. Тем самым устанавливается относительная непротиворечивость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы для каждой из систем ZF или Σ.

Система ZF (как и Σ) обладает той особенностью, что элементами рассматриваемых в ней множеств (или множеств и классов) могут быть только множества. Это не согласуется с общим духом канторовской теории множеств, в которой разрешалось полностью абстрагироваться от природы элементов и рассматривать множества объектов любой природы, в том числе и не являющихся множествами. Такие объекты — я называю их *индивидуумами* — могут быть введены в систему, что приводит к незначительному изменению ее формулировок.

С другой стороны, в системы ZF и Σ часто включают аксиому фундирования, согласно которой любое непустое множество содержит элемент, непересекающийся с этим множеством. Из этой аксиомы (с помощью остальных аксиом ZF) вытекает аналогичное утверждение для непустых классов, и это дает возможность доказать предложение о том, что произвольное множество X обладает свойством P (выразимым в языке ZF), путем своеобразной индукции, основанной на посылке: коль скоро всякий элемент произвольного множества Y обладает свойством P, то и Y обладает свойством P. (Из этой посылки согласно только что высказанному утверждению вытекает, что всякое множество обладает свойством P. При наличии индивидуумов к этой посылке следует добавить, что все индивидуумы обладают свойством P, а также соответственно расширить понятие «пересечения» в аксиоме фундирования, распространив его на индивидуумы.)

Индукция, о которой идет речь, отсутствовала у Кантора, но она выражает ту мысль, что в теории множеств рассматриваются лишь множества, которые могут быть введены (хотя бы путем трансфинитной индукции) при помощи последовательного образования множеств уже введенных элементов (начиная с пустого множества или с пустого множества и индивидуумов), а никакие другие множества для канторовской теории не нужны. (Эти множества называют «фундированными».) Иными словами, аксиома фундирования состоит в том, что в теории множеств рассматриваются лишь такие множества, которые могут возникнуть в ходе теоретико-множественных построений. Аксиомой фундирования сразу исключаются множества X, для которых $X \in X$, пары X, Y, для которых $X \in Y$ и $Y \in X$, и т. п. Для аксиомы фундирования ее непротиворечивость относительно остальных аксиом типа Σ или ZF была доказана еще фон Нейманом, который и ввел эту аксиому. (Фон Нейман ввел в 1925 г. свою систему, сходную с Σ и равноценную ей в смысле непротиворечивости, см. А. А. Френкель и И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, «Мир», 1966, сноска на стр. 129[1]), для этой системы он и рассматривал вопросы об аксиоме фундирования, независимость которой также доказывается без труда.)

Что касается независимости аксиомы выбора, то для системы с индивидуумами она была доказана польским ученым А. Мостовским в 1939 г. (причем сходные идеи высказывал А. Френкель еще в 1922 г.). Более того, им доказано, что к системе с индивидуумами можно без противоречия присоединить отрицание аксиомы выбора и в то же время аксиому о том, что всякое множество может быть упорядоченно; в других работах вместо этой последней аксиомы наряду с отрицанием аксиомы выбора в непротиворечивую систему включается аксиома о существовании так называемого *«дедекиндова множества»*, т. е. бесконечного множества, не содержащего никакого счетного подмножества (или, что то же, не эквивалентного никакой своей правильной части). В силу упомянутого результата Серпинского, в этой системе нарушается и обобщенная континуум-гипотеза.

---

[1]) В этой книге, а также в книге Коэна, о которой речь пойдет ниже, имеется обширная библиография.— *Прим. ред.*

Конечно, речь при этом идет о непротиворечивости полученной системы относительно некоторой исходной системы, которая в работе Мостовского содержит бесконечное множество индивидуумов, а в остальном может считаться достаточно близкой к системе Σ или ZF (т. е. если непротиворечива исходная система, то непротиворечива и полученная).

Как Гёдель, так и Мостовский включали в свои системы аксиому фундирования. В своих работах Мостовский очень существенно пользовался индивидуумами, но можно было бы легко обойтись и без них, отказавшись от аксиомы фундирования. Это связано с тем, что, при отказе от аксиомы фундирования, легко заменить индивидуумы x такими множествами x, которые отождествляются с $\{x\}$ (в результате чего $\{x\}$ отождествляется с $\{\{x\}\}$ и т. д.; $\{x\}$ означает множество, состоящее из одного-единственного элемента x).

Как было отмечено, работы Мостовского существенно зависят от использования индивидуумов или таких множеств, которые по своей природе чужды целям классической математики. Это не означает, что и вопрос об их включении в систему чужд этим целям. Но континуум-гипотеза по самому своему существу относится к области фундированных множеств, так что то ее обобщение, недоказуемость которого доказывается методом Мостовского, можно считать слишком далеко идущим. Так или иначе, после работы Мостовского 1939 г. последовал ряд других работ в этом направлении (важнейшие из которых принадлежат опять Мостовскому), но обнаружилось, что от них еще очень далеко до доказательства независимости континуум-гипотезы. Принципиальная трудность, преодоленная лишь Коэном, состояла в том, чтобы получить модель для Σ или для ZF, в которой имелись бы множества, существенно отличные от тех, которые имеются в упомянутой модели Гёделя (они называются *«конструктивными»*). Очень важно было, чтобы в этой модели выполнялись аксиомы фундирования и чтобы класс индивидуумов был в ней вполне упорядочен (чего не было у Мостовского). Последнее условие, с точки зрения возможности модели, по существу не отличается от того, чтобы этот класс был пуст.

Шефердсон доказал в 1951 г. теорему (в несколько более общей форме полученную около того же времени автором этих строк), согласно которой такая модель (с некоторыми оговорками, отпадающими для системы ZF при надлежащем уточнении понятия «модели») должна быть *«нестандартной»*, т. е. класс ее порядковых чисел, упорядоченный отношением «меньше» этой модели, не может быть вполне упорядоченным по отношению к той «исходной» системе, средствами которой строится модель. Конечно, такая «нестандартность» возможна только благодаря тому, что не все множества порядковых чисел модели, имеющиеся в «исходной» системе, будут представляться множествами модели. Хотя «нестандартные» модели были давно известны (по существу, они были открыты Сколемом еще в начале 20-х годов), построение «нестандартной» модели, в которой именно в связи с ее «нестандартностью» имелись бы «неконструктивные» (в смысле Гёделя) множества, и вызывало те трудности, которые впервые (правда, другим путем) удалось преодолеть именно Коэну. (Модель Гёделя была стандартной.)

Как уже сказано, в 1963 г. Паул Коэн доказал, что если непротиворечива система ZF, то к этой системе можно без противоречия присоединить отрицание континуум-гипотезы. Коэн рассматривает систему ZF, но, как и в случае с работой Гёделя, его результаты переносятся на Σ. Результаты Коэна распространяются и на системы с аксиомой выбора, и на системы с отрицанием аксиомы выбора, однако при отсутствии аксиомы выбора сама постановка континуум-проблемы утрачивает свою однозначность. Дело в том, что из аксиомы выбора вытекает эквивалентность следующих двух суждений: α) не существует мощностей, промежуточных между $\aleph_0$ и $\mathfrak{C}$, и β) мощность $\mathfrak{C}$ совпадает с наименьшей мощностью $\aleph_1$ несчетного вполне упорядоченного множества. Поэтому континуум-гипотезу часто формулируют в виде $\mathfrak{C} = \aleph_1$ или $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, но при отсутствии аксиомы выбора возможно, что эта формулировка не эквивалентна α) и α) также можно называть континуум-гипотезой. Независимость континуум-гипотезы в форме β) была доказана Коэном еще в 1963 г., но изложение содержало некоторые неясные места; однако его более поздняя публикация (Proc. Nat. Acad. Sci. USA 50, № 6 (1963) и 51, № 1 (1964)) внесла ясность в эти вопросы (хотя формально в ней рассматривалась лишь модель для системы с аксиомой выбора, но можно было понять, как уточняется его предыдущая работа и в части, касающейся отрицания этой аксиомы). В 1966 г.

вышла книга К о э н а «Set theory and the continuum-hypothesis», N. Y., 1966. В ней систематически рассмотрены все результаты, которые Коэну удалось получить его методом. В частности, для системы без аксиомы выбора доказана непротиворечивость (относительно ZF) того утверждения, что континуум содержит дедекиндово подмножество $\mathfrak{M}$. Отсюда следует и нарушение α), ибо мощность $\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ должна быть промежуточной между $\aleph_0$ и $\mathfrak{C}$. (Очевидно, $\aleph_0 \leqslant \aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqslant \mathfrak{C}$; равенство $\aleph_0 = \aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ невозможно, так как множество $\mathfrak{M}$ с указанным свойством не может быть вполне упорядочено, а равенство $\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}} = \mathfrak{C}$ невозможно, так как без аксиомы выбора доказывается $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} = \mathfrak{C}$, но $(\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}) + (\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}})$ не эквивалентно $\aleph_0 + \overline{\overline{\mathfrak{M}}}$. Это последнее утверждение легко вытекает из указанного свойства $\mathfrak{M}$ и того факта, что без помощи аксиомы выбора доказывается, что любое множество эквивалентно своей правильной части в том и только в том случае, когда оно содержит счетное подмножество.) Таким образом, и вопрос о независимости континуум-гипотезы в форме α) был фактически решен в работах Коэна. (Следует заметить, что сам Коэн отмечает не столько нарушение α), сколько то обстоятельство, что континуум вовсе не может быть вполне упорядочен; это непосредственно вытекает из наличия в нем дедекиндова подмножества.)

Эти результаты (как отмечали уже их авторы) переносятся и на расширения системы Σ, получаемые путем присоединения аксиом о существовании так называемых *недостижимых кардинальных* чисел. При этом *регулярными* называются такие алефы, т. е. мощности вполне упорядоченных множеств, которые не представимы в виде суммы — или, что то же, предела — меньшего числа меньших множеств; предельными называются алефы, не имеющие непосредственно предшествующих им (по мощности) алефов; недостижимыми называются предельные регулярные алефы $> \aleph_0$.

Аксиомы о недостижимых числах родственны аксиоме бесконечности и иногда называются «сильными аксиомами о бесконечности». Их независимость легко доказывается, непротиворечивость же составляет одну из глубоких проблем оснований теории множеств. (Аксиома бесконечности может быть представлена, например, как аксиома о существовании множества всех натуральных чисел, и в таком случае она становится аксиомой свертывания. Можно присоединять много аксиом разной силы о существовании недостижимых чисел, и по крайней мере простейшие из них можно представлять в виде аксиом свертывания.)

Известная теорема о счетности суммы счетного множества счетных множеств зависит от аксиомы выбора. Коэн в своей книге доказывает непротиворечивость утверждений о том, что $\aleph_1$, а также континуум могут быть представлены в виде суммы счетного множества счетных множеств. Таким образом, при отсутствии аксиомы выбора $\aleph_1$ может быть нерегулярным.

В 1964 г. молодой чешский ученый Петр Вопенка предложил новый способ построения моделей для системы Σ, позволяющий, помимо прочего, заново получить результаты Коэна. При этом указанное утверждение о промежуточных мощностях (для системы с аксиомой выбора) доказано и для любых так называемых «регулярных» $\aleph_\alpha$, т. е. между $\aleph_\alpha$ и $2^{\aleph_\alpha}$ в некоторой модели имеется много промежуточных мощностей. Доказано также (для той же системы), что $2^{\aleph_0}$ может быть недостижимым кардинальным числом, если такие числа существуют. (Этот результат имеется и в упомянутой книге Коэна.)

С другой стороны, автор этих строк еще в 1959 г. в связи со своей ультраинтуиционистской программой обоснования систем ZF и Σ (т. е. программой, направленной на доказательство непротиворечивости этих систем) показал, что его способ обоснования этих систем попутно приводит к доказательству независимости аксиомы выбора и континуум-гипотезы в форме α) (см. сборник Infinitistic methods, Warszawa, 1961, 201—223; готовится к опубликованию обширное изложение пересмотренного варианта этой теории, содержащее доказательство непротиворечивости системы ZF). По поводу взаимоотношений между α) и β) следует заметить, что основанное на аксиоме выбора отождествление этих формулировок использует не столько саму аксиому выбора, сколько ее следствие $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$. Недоказуемость этого следствия (в смысле Цермело — Френкеля) без помощи аксиомы выбора доказана в упомянутой книге П. Коэна.

Вопенка доказал также, что для любых регулярных алефов $\aleph_\lambda$ и $\aleph_\alpha$ таких, что $\aleph_\alpha < \aleph_\lambda$, равенство $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\lambda$ непротиворечиво относительно Σ с аксиомой выбора; к Σ

можно при этом добавлять любые аксиомы о недостижимых числах.

Имеется существенное различие между работами Коэна и Вопенки. Коэн строит стандартные модели; его доказательство непротиворечивости основано на построении моделей, в которых выполняется лишь произвольное конечное множество аксиом ZF, чего, впрочем, достаточно для целей доказательства непротиворечивости всей системы (ибо противоречие вытекало бы из конечного числа аксиом). Для того чтобы получить модель для всей системы в целом, Коэну приходится пользоваться одной дополнительной аксиомой (о существовании счетной стандартной модели для ZF), которая может быть выведена из аксиомы о недостижимом числе. Большего он со своими стандартными моделями не мог бы достичь в силу теоремы Шефердсона. Для Σ он вовсе не мог бы построить модели (с интересующими его свойствами) средствами Σ. Вопенка же строит нестандартные модели, и ему удается получить модель для Σ (с указанными свойствами) средствами Σ. Для доказательства непротиворечивости это не дает никаких существенных преимуществ, но это является вкладом в теорию моделей. Вопросы непротиворечивости и наличия модели связаны между собой таким образом, что каждый из них можно считать лишь средством для рассмотрения другого, а для моделей всегда существенно, какими средствами они построены. Поэтому нельзя игнорировать результаты Вопенки только на том основании, что они были до этого получены Коэном,— это отождествление касается вопросов относительной непротиворечивости, но не вопросов осуществимости моделей заранее указанными средствами. Правда, в гильбертовской программе речь шла о непротиворечивости, но имелось в виду доказать, в конечном счете, непротиворечивость всей математики,— здесь же рассматриваются лишь вопросы относительной непротиворечивости, а вопрос о непротиворечивости исходной системы Σ или ZF даже не ставится. При таких условиях трудно отдать предпочтение одному из этих видов проблем (непротиворечивость и модели) перед другим.

Как уже указывалось, Вопенка доказал, что если $\aleph_\lambda > \aleph_\alpha$, $\aleph_\lambda$ — непредельная или недостижимая мощность и $\aleph_\alpha$ — недостижимое кардинальное число или непосредственно следует за другой мощностью в ряде мощностей вполне упорядоченных множеств, то непротиворечиво равенство $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\lambda$. Что касается систем с недостижимыми числами, то по крайней мере для конечного числа таких чисел их непротиворечивость может быть доказана ультраинтуиционистски. Коэн доказал (1963—1964 гг.) непротиворечивость равенства $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ (в чем состояла гипотеза Лузина [1])).

При всей важности этих новейших достижений нельзя забывать о том, что они относятся к определенным формальным системам типа ZF или Σ. Между тем Кантор основал и завещал нам теорию множеств не в виде ZF, и именно в этой первоначальной, «наивной» теории множеств возникла континуум-проблема. Наивная теория была противоречива и нуждалась в замене непротиворечивой формальной системой, но, несмотря на то, что система ZF достаточна для нормальных математических конструкций и я доказываю ее непротиворечивость, я считаю необходимым напомнить о том, что проблема отождествления ZF — или другой подобной системы — с теорией множеств отнюдь не тривиальна.

Между прочим, теория *трансфинитных рекурсий* до сих пор еще слабо изучена. Весьма правдоподобно, что для ZF можно указать разумные схемы определения функций путем той или иной формы такой рекурсии, которые невозможно обосновать посредством ZF, причем сегодня еще нет теорем, позволяющих утверждать достаточность дополнительной аксиомы о недостижимом числе для формализуемости этих рекурсий (рассматриваемых хотя бы по отношению к нерасширенной области). Поэтому не опровергнуто предположение о том, что ZF нуждается — для естественного пополнения аксиоматической теории — в присоединении новых, пока еще неизвестных аксиом. В связи с каждым таким расширением вопросы о непротиворечивости и независимости как аксиомы выбора, так и континуум-гипотезы придется ставить заново, и еще нет оснований утверждать, что методы Гёделя и Коэна окажутся при этом применимыми.

Гёдель отмечал, что его результаты об относительной непротиворечивости можно доказать и для более слабых систем (Цермело и теории типов), но подробного изложе-

---

[1]) Н. И. Лузин, Собр. соч., т. 2, Изд-во АН СССР, 1958, стр. 565.— *Прим. ред.*

ния доказательств до сих пор не появилось. Правдоподобно (вследствие недавних результатов Шпеккера о связи между теорией типов и системой New Foundations Куайна), что эти результаты можно перенести и на систему New Foundations. (Речь идет об аксиоматической теории множеств, предложенной в 1937 г. Куайном и мало похожей на систему Цермело — Френкеля. Аксиома выбора в ее общей форме была для этой системы опровергнута Шпеккером, а потому речь может идти лишь об относительной непротиворечивости ее ограниченных форм.) Труднее утверждать (хотя правдоподобно и это), что все это можно применить и к результатам Коэна.

В принципе следует ставить подобные вопросы для любых систем аксиом, содержащих лишь аксиомы свертывания и объемности (и логические постулаты). Такие системы естественно называть «канторовскими». П. С. Новикову принадлежит простое доказательство того, что если в канторовской системе доказуемо существование пустого множества, то в ней доказуема и любая формула вида $\exists y\ \forall z (z \in y \sim \urcorner z \in z \ \& \urcorner A) \equiv A$ (где A не содержит свободно y и z). Левая часть этой эквивалентности является аксиомой свертывания. Отсюда легко следует, что если A (например, континуум-гипотеза или ее отрицание) непротиворечива относительно ZF, то имеется непротиворечивое канторовское расширение ZF, в котором A доказуема.

Доказательство только что указанной эквивалентности основано на том, что парадокс Рассела использует лишь одну аксиому свертывания: $\exists y \forall z (z \in y \sim \urcorner z \ni z)$, с которой естественно связана левая часть этой эквивалентности. С любым другим парадоксом можно аналогичным образом связать соответствующие аксиомы свертывания, получаемые присоединением «$\& \urcorner A$» к правым частям эквивалентностей, входящих в те аксиомы свертывания, которые используются в этом парадоксе. Поэтому о каждой формуле A, непротиворечивость которой относительно ZF доказана, можно утверждать ее доказуемость в некоторой канторовской системе, непротиворечивой относительно ZF, и притом в любой такой системе, только что указанным образом связанной с парадоксами.

Такие канторовские системы естественно называть «парадоксальными». Даже в случае своей непротиворечивости они, по-видимому, не могут считаться естественными расширениями систем типа ZF. Естественно поэтому исключить их из рассмотрения. При этом возникает много вопросов о характере ограничений, вводимых на аксиомы свертывания в связи с этой «проблемой парадоксальности». Например, бросается в глаза отсутствие всякой связи частей $\neg A$ с другими частями формулы $\exists y \forall z(z \in y \sim \sim \neg z \in z \mathbin{\&} \neg A)$ и естественно ставить вопрос о наложении на аксиомы канторовских систем ограничения «связности» (состоящего, грубо говоря, в соединимости любых двух «атомарных» частей вида $u \in v$ цепочками таких частей каждой аксиомы, причем любые два соседних члена цепочки должны иметь общую переменную). Вопросы о доказуемости континуум-гипотезы и ее отрицания в канторовских системах с такими ограничениями следует включить в общую проблематику континуум-проблемы (и аналогично для других проблем).

Но это — вопросы, обращенные к науке будущего. Сегодня о них следует говорить лишь в целях их постановки и для того, чтобы избежать чрезмерного самодовольства блестящими результатами наших дней.

Континуум-проблема числится первой в историческом гильбертовском перечне проблем, обращенных к математикам нашего века. Однако с логической точки зрения вопрос о непротиворечивом построении теории множеств (включающий в себя вопросы о непротиворечивости системы Цермело — Френкеля, New Foundations и т. п. систем), конечно, намного важнее и глубже. И если Гильберт не включил этой проблемы в свою программную речь, то это можно объяснить лишь тем, что теория множеств подверглась аксиоматизации уже после 1900 г., и в своей речи 8 августа того же года Гильберт вынужден был упомянуть даже о противоречивости неограниченной теории множеств.

КО ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

А. С. Есенин-Вольпин

На грани XIX и XX вв. арифметика стала аксиоматической наукой. Пеано ввел для арифметики следующую систему аксиом [1]) [число 0 и операция $'$ (означающая переход к «числу, непосредственно следующему за x») являются первоначальными понятиями]:

1) каково бы ни было число a, число $a' \neq 0$;

2) каковы бы ни были числа a и b, из $a' \neq b'$ следует $a \neq b$;

3) каково бы ни было свойство P, выражаемое в терминах первоначальных понятий с помощью логических операторов, если число 0 обладает свойством P и для любого числа n из того, что n обладает свойством P, следует, что и число n' обладает свойством P, то всякое число обладает свойством P («принцип полной индукции»).

Конечно, термин «число» относится здесь только к натуральным числам. Он не рассматривается как первоначальное понятие потому, что, кроме (натуральных) чисел, в этой аксиоматической теории нет никаких других объектов.

Позднее оказалось, что для вполне строгого построения арифметики натуральных чисел необходимо ввести в качестве дополнительных первоначальных понятий

---

[1]) Система аксиом Пеано была опубликована в 1891 г. (Rivista di mat., Turin, v. I, 1891). За три года до этого (в 1888 г.) аналогичная система была предложена Р. Дедекиндом (Gesamm. math. Werke, III, 359—361, Braunschweig, 1932).— *Прим. ред.*

операции сложения и умножения с аксиомами:

$$a + 0 = a,\ a + b' = (a + b)',\ a \cdot 0 = 0,$$
$$a \cdot b' = a \cdot b + a,$$

где a и b означают произвольные числа.

В связи с этой системой аксиом, как и в связи со всякой другой системой, возникает проблема ее непротиворечивости. Особенность постановки этой проблемы в применении к арифметике натуральных чисел состоит в следующем: непротиворечивость многих других теорий, например теории целых и рациональных чисел, может быть сведена к непротиворечивости теории натуральных чисел посредством построения некоторой «интерпретации» или «модели». Но для арифметики натуральных чисел уже не существует более простой модели. Поэтому непротиворечивость арифметики натуральных чисел (которую я буду в дальнейшем называть просто «арифметикой») должна быть доказана непосредственно.

С этой целью (а также имея в виду более трудную задачу установления непротиворечивости аксиоматики теории множеств) Гильберт построил специальную теорию доказательств. Эта теория основана на том, что всякое предложение арифметики может быть записано в виде формулы некоторого специального логико-арифметического языка. Каждое умозаключение из числа тех, на которые распадается любое доказательство, является переходом от одних предложений (посылок) к другим (заключениям), и этот переход происходит по правилам формальной логики. А это значит, что если посылки и заключения записать в виде формул упомянутого языка, то тот факт, что они действительно являются посылками и заключениями, может быть установлен с помощью совершенно четких приемов, основанных на рассмотрении структуры записи этих формул. Согласно теории доказательств на формулы (в частности на те, которые выражают на этом логико-арифметическом языке аксиомы арифметики или логики) следует смотреть как на простые ряды знаков, и в терминах только что упомянутых «четких приемов» можно сформулировать, при каких условиях последовательность формул представляет собой «доказательство». При этом противоречие представляет собой пару формул, из которых одна является «отрицанием» другой. Кроме того, по правилам той логики, которая подразумевается в этой аксиоматической арифметике, из противоречия можно вывести любое предложение этой теории, в частности, предложение $0 = 1$ (где 1 есть сокращенное обозначение числа $0'$). Таким образом, непротиворечивость арифметики означает невозможность получить в ней доказательство предложения $0 = 1$.

Это понятие противоречия является достаточно четким для того, чтобы считать, что проблема доказательства непротиворечивости состоит в доказательстве несуществования объекта достаточно ясной природы. Такое доказательство будет представлять ценность для обоснования арифметики, если оно будет свободно от некоторых принципов, которые считаются спорными.

В начале этого столетия, когда зарождалась гильбертовская теория доказательств, спорным считалось употребление идеи бесконечности, в особенности в том виде «актуальной бесконечности», в каком подразумевалась эта идея при обосновании *закона исключенного третьего*, выражаемого аксиомой: «A или не A». Поэтому Гильберт пытался найти такое доказательство непротиворечивости арифметики, которое вовсе не использовало бы понятия бесконечности (в этом состоит сущность «финитистского» подхода Гильберта).

Гильберту и его ученикам удалось получить ряд интересных результатов в этом направлении; однако все время та или иная часть трудностей оставалась непреодоленной. В 1931 г. Курт Гёдель фактически доказал невозможность положительного решения задачи о непротиворечивости арифметики гильбертовскими финитными методами.

Но, поскольку главным объектом критики оснований арифметики являлся закон исключенного третьего, можно было считать, что Гёдель в 1933 г. решил задачу обоснования арифметики. Именно, он доказал, что если *непротиворечива интуиционистская арифметика* (т. е. арифметика, в которой не постулируется закон исключенного третьего), *то непротиворечива и классическая арифметика* (с законом исключенного третьего). Доказательство Гёделя сравнительно несложно (см., например, К л и н и, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957, § 81) и получено на пути, еще раньше намеченном А. Н. Колмогоровым.

В 1936 г. Генцен доказал непротиворечивость классической арифметики, не пользуясь предположением о непротиворечивости интуиционистской арифметики, а также законом исключенного третьего, но зато использовав другие средства, выходящие за пределы тех, которыми хотел пользоваться Гильберт. В 1941 г. П. С. Новиков получил тот же (а фактически более сильный) результат, пользуясь, однако, еще более сильными средствами.

После этого проблема обоснования классической арифметики считалась решенной. Следовало бы, однако, выражаться осторожнее, так как преодолены были только известные трудности, связанные с понятием бесконечности.

Но имеются в основаниях арифметики и такие трудности, которые вовсе не связаны с этим понятием бесконечности. На них в свое время указывали Борель и А.Пуанкаре (упоминавший в своей книге «Наука и метод», 1908, о том, что многие исследователи встречали порочные круги при попытках обоснования принципа полной индукции), а в 1956 г.— Ван-Данциг, работа которого называется: «Является ли число $10^{10^{10}}$ конечным?».

Упомянутые здесь трудности связаны с тем, что возможность аксиом о сложении и умножении не представляется очевидной, если под натуральными числами понимать элементы 0, 0′, 0′′, ... Как д о к а з а т ь, что в этом ряду содержится число, равное 10^{12}? Очевидно, что ни один человек не в состоянии досчитать до этого числа, и само это число дано нам вовсе не как элемент этого ряда. Но в таком случае, на каком основании можем мы принять в применении к этому числу принцип полной индукции, т. е. выводить из постулата о полной индукции, что 10^{12} обладает описанным выше свойством P?

Легко понять, что все естественные попытки доказать «существование» в натуральном ряду числа 10^{12} оказываются неудачными из-за порочного круга, именно все они в той или иной форме используют *число* 10^{12} (например, в виде ссылки на это «число» шагов). Поэтому — коль скоро вообще мыслим натуральный ряд с числом 10^{12} — мыслимы различные натуральные ряды, в том числе как содержащие, так и не содержащие только что указанного числа.

В этом отказе от традиционного допущения о единственности натурального ряда я вижу исходный пункт новой критики оснований математики, которую я называю ультраинтуиционистской (см. Infinitistic methods, Warszawa, 1961, 201—223). Наряду с этим допущением, которое я обозначу сейчас через Т1, эта критика распространяется и на другие, тесно с ним связанные. Не очевидно, например, что всякий натуральный ряд «регулярен», т. е. изоморфен любой конфинальной ему последовательности. Этот вопрос нуждается в дальнейших уточнениях ввиду очевидной расплывчатости понятия «последовательности» (натуральных чисел) — ясно, что эта проблема родственна континуум-проблеме из теории множеств. Далее, если натуральный ряд содержит числа 10 и 12, но не число 10^{12}, то он в легко определяемом смысле «незамкнут» относительно степени. Допущение Т2 состоит в том, что «имеется» хотя бы один натуральный ряд, «замкнутый» относительно любой примитивно рекурсивной функции; так как это последнее понятие само зависит от понятия натурального числа, возникают различные обобщения этого понятия и допущения Т2. Независимо от этих обобщений из определения натурального ряда вытекает замкнутость всякого натурального ряда лишь относительно функций $\varphi(n)$, при любом n из этого натурального ряда удовлетворяющих неравенству $\varphi(n) \leqslant n + 1$. Для всех других функций, в том числе и для $m + n$ и даже для $n + 2$, допущение Т2 нуждается в обосновании.

Через Т3 я обозначаю принцип индукции от n к $n + 1$, а через Т4 — «принцип локальности для доказательств», согласно которому, коль скоро все аксиомы истинны, а правила вывода сохраняют истинность, должна быть истинной и каждая теорема рассматриваемой аксиоматической теории. Очевидно, что Т4 принимается на основании Т3, а интуитивное обоснование Т3 использует Т4 в той же мере, в какой этот принцип локальности всегда подразумевался принятым в логико-математических теориях. Здесь снова налицо порочный круг, побуждающий меня отказаться как от Т3, так и от Т4 (разумеется, речь идет лишь об отказе от этих принципов в качестве априорных; при наличии достаточного основания их надлежит принять, но не шире, чем в тех пределах, на которые это основание будет распространяться). Этот отказ означает неприемлемость аксиоматического метода при исследовании тех глубоких вопросов, с которыми имеет дело ультраинтуиционистская критика. Пытаясь ее преодолеть, я строю позитивную программу, которую называю тоже «ультраинтуиционистской». Важная и трудная проблема состоит в установлении ультраинтуиционистского понятия доказательства, пригодного для целей обоснования математики. Ввиду отказа от Т4 я при этом отказываюсь и от аксиоматического метода, но это не означает отказа от аксиом и правил вывода как таковых. Конечно, прежние обоснования этих «постулатов» будут заменены новыми, учитывающими потребности описываемой критики (по отношению к обычным постулатам интуиционистского исчисления предикатов, но не к Т3, это удается). Но главное будет состоять в ревизии самого понятия «доказательства». Прежние логические аксиомы и правила по существу сохранятся, хотя и будут надлежащим образом уточнены. Но в силу отказа от Т4 фигура, полученная из аксиом по правилам вывода, уже не будет называться доказательством. Я называю такую фигуру «демонстроидой», а в более общем случае, когда наряду с аксиомами в выводе могут участвовать произвольные исходные формулы, я называю ее не выводом, а «дедукциоидой» (из этих исходных формул). Для получения из дедукциоиды (демонстроиды) «настоящего» вывода (доказательства) требуется (и считается достаточным) наличие некоторой «констатации убедительности», представляющей собой доказательство того, что данная дедукциоида корректна не только «локально», т. е. в каждом узле той древовидной фигуры, которую она собой представляет, но и «интегрально», т. е. в целом. Эта констатация убедительности может в свою очередь быть демонстроидой с констатацией убедительности,— но для того, чтобы этот процесс обрывался, нужны некоторые первоначальные приемы доказательств, именуемые «протодемонстрациями». Эти приемы черпаются из области тех, которые предшествуют знакомству с началами традиционной математической логики. Важнейшим из этих приемов является (непосредственное) применение определений, т. е. переход от определения «*A* обозначает *B*» к «*A* есть *B*» или к «*B* есть *A*» (где связка «есть» толкуется в терминах обозначений).

При рассмотрении существенно различных натуральных рядов сразу возникают некоторые проблемы, незнакомые традиционной математической логике только потому, что она перескочила через них путем неявного принятия некоторых допущений в своих основах. К числу этих допущений, помимо Т1—Т4, следует отнести допущение Т5 об объективном характере тождества и различия рассматриваемых объектов. Считается, что отношение тождества как бы имеет смысл, не зависящий от выполняемых отождествлений, хотя со времен Гераклита известно, с какими трудностями было связано понятие «тождества» в теории познания. Эти трудности оживают при отказе от T1. Например, если N_1 есть натуральный ряд, содержащий число 20, а N_2 — ряд, не содержащий этого числа (вовсе нет надобности в том, чтобы число, не входящее в некоторый ряд, было столь велико, как 10^{12}), то при наивном отождествлении «равновеликих» чисел N_2 и N_1 ряд N_2 окажется погруженным в конечный отрезок N_1 и в некотором смысле N_2 утратит при этом свою бесконечность или же эти отождествления «вносят» бесконечность в некоторый вполне конечный объект, а именно в перечень чисел 0,1,..., 20 из N_1. Никакого «противоречия» в строгом смысле слова здесь нет, так как не обязательно считать каждый раз выполненными эти отождествления и, кроме того, объект, конечный в одном своем вхождении, не обязательно должен считаться конечным и во всяком другом. («Конечность» означает «возможность окончания», а «бесконечность» — «невозможность окончания» или, в другом смысле, «возможность ненаступления конца», но вовсе не наличие любого «огромного» числа частей или элементов.) Если попытаться выполнить простейшую математическую конструкцию — рассмотреть последовательность N_2N_1, полученную из N_1 и N_2 путем чередования ее членов: b_0, a_0, b_1, a_1, b_2, a_2,..., где a_0, a_1,... и b_0, b_1,... представляют собой N_1 и N_2 соответственно и в N_2 нет и не будет b_{20} — и попытаться указать вхождение a_{20} в N_2N_1, то очевидно, что это задание неосуществимо (даже при наличии a_{20} в N_1) из-за *препятствия*, состоящего в «зацеплении» N_1 за N_2 (и даже отрезка N_1, порожденного элементом a_{20}, за N_2). Многие отождествления (если требуется, чтобы их выполняли «структурно», т. е. сложные объекты отождествлялись только после того, как выполнены все отождествления соответствующих частей, и это обстоятельство «констатировано») оказываются невозможными из-за зацеплений.

Ультраинтуиционистская программа требует явного изучения более широкой части естественного языка, чем традиционная математическая логика, и, сверх того, более глубокого, чем эта последняя, проникновения в *семиотику*, т. е. науку о знаках вообще. Приходится явно изучать законы *теории модальностей* (в том числе и «деонтических» модальностей «разрешается» и «требуется», на которых основано само понятие правила) и *глагольных времен*. Нельзя серьезно изучать бесконечные процессы, игнорируя различие между будущими и уже наступившими событиями. Поскольку обычные предложения языка математической логики не содержат знака для будущего времени, они могут считаться осмысленными только в предположении о наступлении в изучаемых процессах всех тех событий, которые обозначаются именами, входящими в эти предложения. Только в этом предположении они и могут входить в состав дедукциоид. Нельзя отождествлять — без опасности путаницы и противоречий — наступившее с ненаступившим, так что сами отождествления этих событий (и их имен) можно выполнять лишь по мере их наступления. Отказ от Т3 вынуждает вернуться к общему правилу бесконечной индукции, позволяющему принять $\forall x A(x)$ в предположении об истинности каждого $A(n)$ (где n — произвольное значение x), а «истинность» толкуется при этом как «возможность» (т. е. наличие способа) доказательства. Таким образом, в анализ дедукциоид и констатации убедительности входят проблемы, связанные с зацеплениями, возникающими при отождествлениях. Так как в принципе можно искусственно вводить в рассмотрение некоторые зацепления, не связанные с анализом дедукциоид, возникает проблема уточнения тех правил, по которым должны прослеживаться связи, и разрешается пренебрегать посторонними объектами (в том числе зацеплениями). Таким образом, в программу включается *теория релевантности* (т. е. принципов связи или относимости, а также пренебрежения), причем выясняется важная роль этой теории и при построении различных натуральных рядов. Теория релевантности должна предшествовать построению арифметики и обоснованию обычных логических постулатов, а принцип, разрешающий пренебрегать только посторонним (т. е. тем, что запрещено считать связанным), оказывается в теории релевантности основополагающим. Поэтому удается при построении натуральных рядов объявлять посторонними и исключать из рассмотрения любые натуральные числа $\geqslant 2$, откуда следует возможность весьма коротких натуральных рядов. (Из определения натурального ряда следует — и то лишь после надлежащего уточнения этого понятия в модальном отношении,— что в нем будет число, следующее за 0, т. е. 1, а также, что в предположении о наступлении 1 будет 2,— но это предположение нельзя вывести из того, что 1 «будет»; суждение «будет так, что будет *A*» нужно уметь отличать от «будет *A*», по крайней мере в процессе обсуждения вопроса о необходимости наступления 2.) С другой стороны, семиотика и теория отождествлений доставляют гибкие правила, позволяющие вводить сколь угодно большие натуральные числа, известные в традиционной математике, путем «неопределенных указаний» на ранее введенные таким же образом объекты и их различений в новых и старых вхождениях. На этом основана *онтологическая теория* натуральных чисел; *генетическая теория* дискретных процессов имеет дело с уточнением понятия констатации убедительности и тем самым ультраинтуиционистского понятия доказательства. В целом генетическая теория гораздо сложнее онтологической (и это связано с тем, что понятие «математического доказательства», в общем, намного сложнее понятия натурального числа); однако в принципе для понятия доказательства имеется следующая исходная экспликация: «доказательством суждения называется всякий честный прием, благодаря которому это суждение становится неоспоримым». Как пользоваться этой и другими экспликациями, чтобы получить связную теорию ультраинтуиционистских доказательств,— это вопрос, во многом связанный с *теорией целей*, которая также систематически рассматривается ультраинтуиционистской программой. Таким образом, эта программа содержит ряд (тесно переплетающихся) *«прототеорий»* — *теории модальностей*, *целей*, *глагольных времен*, *релевантности*, *отождествлений и различий*, *семиотику* и др.— «центральное ядро», состоящее из *онтологической* и *генетической* теорий. Естественно, что в этом кратком комментарии подробнее остановиться на изложении этих теорий невозможно. Остается заметить лишь, что не только для арифметики, но и для системы аксиом Цермело — Френкеля для теории множеств (и притом с недостижимыми кардинальными числами) в настоящее время найдено доказательство непротиворечивости, если и не вполне «абсолютное», то более надежное, чем какое-либо из доказательств традиционной математической логики. Остающиеся нерешенными вопросы граничат с обоснованием законности таких модально-семиотических приемов рассуждения, которыми явно или неявно были пронизаны, по существу, все известные доказательства.

К ТРЕТЬЕЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

В. Г. Болтянский

Учение о площадях в элементарной геометрии основывается на следующих четырех положениях:

1) Площади конгруэнтных фигур равны.

2) Если фигура разбита [1]) на две части, то ее площадь равна сумме площадей обеих частей.

3) Если фигура X целиком размещается в фигуре A, то площадь фигуры X не превосходит площади фигуры A.

4) Площадь квадрата, сторона которого является единицей длины, равна единице.

Положение 3), или равносильное ему утверждение о том, что площадь любой фигуры неотрицательна, и лежит в основе м е т о д а и с ч е р п ы в а н и я, который в одном из своих вариантов может быть сформулирован следующим образом: если $X_1, X_2, \ldots$ — такая последовательность фигур, расположенных в одной и той же фигуре A, что часть фигуры A, не заполненная фигурой X_n, делается по площади все меньше и меньше [2]), то $\lim\limits_{n\to\infty} S(X_n) = S(A)$, где S означает площадь. Метод этот, будучи связан с понятием предельного перехода, *неэлементарен*. Пользование методом исчерпывания (или каким-либо эквивалентным ему методом) неизбежно при строгом построении

[1]) Мы здесь не уточняем, что такое «фигура» и что такое «разбиение» фигуры на части, так как ниже речь идет только о *многоугольниках*.

[2]) Для того чтобы убедиться, что площадь этой части делается все меньше и меньше, и пользуются сформулированным выше положением 3): заключают эту часть в узкую полоску простой формы, площадь которой легко найти. В качестве такой «полоски» обычно берут часть плоскости между «вписанной» и «описанной» фигурами простой формы.

учения о площадях. Достаточно сказать, что этот метод необходим уже для вывода формулы площади прямоугольника (при переходе от прямоугольников с рациональными сторонами к произвольным прямоугольникам).

Однако если формула площади прямоугольника уже установлена, то площади *любых* многоугольников уже находятся без применения метода исчерпывания. Такое нахождение площадей проводится с помощью методов разбиения и дополнения, основанных на указанных выше положениях 1) и 2): если два многоугольника равносоставлены, т. е. если их можно разбить на соответственно конгруэнтные треугольники, то они имеют одинаковую площадь (равновелики); если два многоугольника можно дополнить соответственно конгруэнтными треугольниками до двух равносоставленных многоугольников, то исходные многоугольники равновелики. Примерами применения этих методов могут служить теоремы о площади параллелограмма, треугольника, трапеции и т. п. в курсах элементарной геометрии.

Итак, если принять формулу площади прямоугольника известной, то все учение о площадях *многоугольников* строится на основе элементарно-геометрических методов разбиения и дополнения, без применения неэлементарного метода исчерпывания (который вновь оказывается необходимым лишь при вычислении площадей криволинейных фигур, например площади круга и его частей). Этот факт со всей полнотой устанавливается следующей теоремой Бойяи — Гервина: *два многоугольника тогда и только тогда равновелики, когда они равносоставлены* (см. [1], [2]).

Обращаясь к геометрии в пространстве, естественно поставить следующий вопрос: можно ли, имея в своем распоряжении формулу объема прямоугольного параллелепипеда (или даже только куба), определить объем любого многогранника с помощью только метода разбиения (или дополнения), без использования метода исчерпывания? Как известно, учебная литература всегда использует либо метод исчерпывания («чертова лестница»), либо какой-нибудь эквивалентный ему метод (например, принцип Кавальери или какое-либо иное завуалированное интегрирование). По существу ли это? Так как эти неэлементарные методы используются в курсе элементарной геометрии при вычислении объемов многогранников *лишь один раз*, а именно для доказательства того, что два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами равновелики, то становится понятной проблема Гильберта: *любые ли два тетраэдра такого вида равносоставлены или дополняемы равными частями до равносоставленных многогранников?*

Как отмечает Гильберт в своем примечании, отрицательное решение этой проблемы было дано Деном, который показал, что существуют многогранники, имеющие равные объемы, но не равносоставленные. В частности, куб и правильный тетраэдр одинакового объема неравносоставлены (и не дополняются равными частями до равносоставленных многогранников). Существуют также неравносоставленные тетраэдры с равными основаниями и высотами. Тем самым была строго установлена необходимость привлечения неэлементарных методов в теории объемов.

Доказательства Дена, очень сложные и, надо сказать, довольно путаные, были существенно усовершенствованы В. Ф. Каганом [1]). По-видимому, наиболее простое доказательство теоремы Дена, основывающееся на идеях современной швейцарской геометрической школы (Хадвигер и др.), приведено в книге [2]. Там же изложены некоторые дальнейшие результаты, относящиеся к рассматриваемому кругу вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Каган В. Ф., О преобразовании многогранников, ГТТИ, 1933.

[2] Болтянский В. Г., Равновеликие и равносоставленные фигуры, Гостехиздат, 1956.

1) Math. Ann. 57 (1903), 421—424.

К ЧЕТВЕРТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

И. М. Яглом

Четвертая проблема Гильберта, тесно связанная с его исследованиями по основаниям геометрии, ставит задачу об изучении геометрий, «близких» (в известном смысле) к обыкновенной евклидовой [1]). В этих геометриях должны выполняться все *евклидовы* аксиомы соединения и порядка, а также ослабленные аксиомы конгруэнтности, не включающие сильную аксиому III_5 гильбертовой аксиоматики

---

[1]) Здесь «близость» геометрии к евклидовой определяется сходством ее аксиоматики с аксиоматикой Гильберта евклидовой геометрии; с этой точки зрения исследования, связанные с четвертой проблемой, продолжают путь, приведший к открытию неевклидовой геометрии Лобачевского, аксиоматика которой отличается от аксиоматики Гильберта лишь одной аксиомой. К совсем иным геометриям можно прийти, видоизменяя другие системы аксиоматического обоснования евклидовой геометрии. Так, например, «аксиоматика Вейля» евклидовой геометрии определяет евклидову плоскость как двумерное векторное пространство, в котором связь между точками и векторами определяется возможностью откладывания вектора от точки (каждым двум точкам A и B отвечает единственный вектор $\overline{AB}$; каждому вектору a и точке A отвечает единственная точка B такая, что $\overline{AB} = a$) и тем, что $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ для любых трех точек A, B и C; кроме того, здесь должно существовать скалярное произведение ab с обычными свойствами. С точки зрения этой аксиоматики геометрией, «ближайшей» к евклидовой, будет так называемая «псевдоевклидова геометрия Минковского» (не путать с совсем другой геометрией Минковского, о которой пойдет речь ниже!), аксиоматика которой отличается от аксиоматики геометрии Евклида заменой требования «положительной определенности» скалярного произведения ($a^2 \geqslant 0$ для любого a) требованием существования векторов a_1, для которых $a_1^2 > 0$, и векторов a_2, для которых $a_2^2 < 0$.

(«аксиома о равенстве треугольников»; см. [1]), но включающие более ограничительное требование о том, что каждая сторона треугольника не превосходит суммы двух других его сторон (эквивалентное, очевидно, требованию: прямая есть кратчайшая линия, соединяющая две точки). Наличие обычных аксиом соединения и порядка (и аксиом непрерывности, присоединение которых оставляет еще достаточный произвол в выборе соответствующих геометрий) позволяет рассматривать точки и прямые нашей геометрии как точки и прямые евклидовой (или аффинной) плоскости (здесь мы ограничиваемся, для простоты, вопросом о двумерных геометриях, удовлетворяющих поставленным Гильбертом требованиям); соответственно этому задача сводится к тому, чтобы так определить расстояние между двумя точками плоскости (или какой-либо ее области), чтобы прямая явилась кратчайшим расстоянием между двумя точками. Одну возможность такого рода доставляет неевклидова геометрия Лобачевского, которую согласно идее Ф. Клейна можно описать так[1]): рассмотрим внутренность единичного круга (или другого конического сечения) K и примем за расстояние между двумя точками A и B логарифм двойного отношения, в котором точки A и B делят отрезок PQ, где P и Q — точки пересечения прямой AB с ограничивающей K линией Σ:

$$d_{AB} = \log(A,B;P,Q) = \log\left[\frac{AP}{BP} : \frac{AQ}{BQ}\right] = \log\frac{AP}{BP} + \log\frac{BQ}{AQ} \tag{1}$$

(рис. 1, *а*). Д. Гильберт заметил, что эту конструкцию можно еще обобщить, заменив K произвольной *выпуклой* областью Φ, ограниченной кривой Σ (рис. 1, *б*; см. тесно связанное с четвертой проблемой Гильберта Добавление 1 к книге [1]); полученную на этом пути геометрию часто называют геометрией Гильберта. Другой пример геометрии, удовлетворяющей поставленным Гильбертом условиям, доставляет так называемая геометрия Минковского, в которой концы отложенных из одной точки O «единичных отрезков» образуют некоторую центрально-симметричную выпуклую кривую Λ и

[1]) Math. Ann. 4 (1871), 573—625; 6 (1872), 112—145; русский перевод: сб. «Об основаниях геометрии» Гостехиздат, 1956, 253—303.

длина произвольного отрезка AB принимается равной отношению $AB:OE$, где OE — «единичный» отрезок того же направления (рис. 2, *а*). Последнюю схему можно еще несколько обобщить, не требуя, чтобы кривая Λ имела в точке O центр симметрии (см. рис. 2, *б*); при этом мы приходим к обладающей близкими свойствами «геометрии

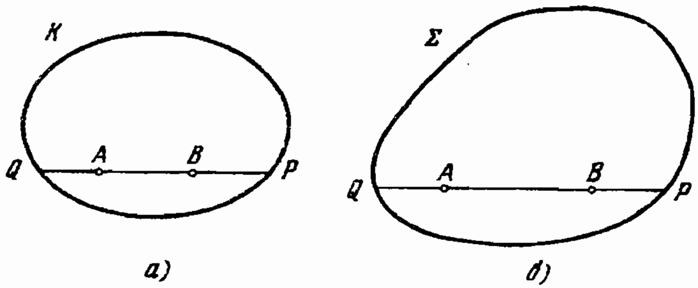

Рис. 1.

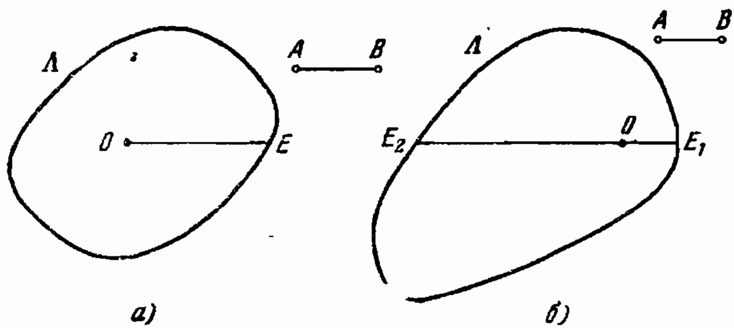

Рис. 2.

Минковского с несимметричным расстоянием», где, однако, теперь уже длина отрезка AB не равна длине отрезка BA; так на рис. 2, *б* дл. $AB = AB:OE_1$, а дл. $BA = BA:OE_2$. Однако здесь по-прежнему для любых трех точек A, B и C имеем: дл. $AB \leqslant$ дл. $AC +$ дл. CB (это «неравенство треугольника» оказывается эквивалентным требованию выпуклости кривой Λ). Подробнее рассмотрение геометрий, удовлетворяющих поставленным Гильбертом условиям (и, в частности, геометрий Минковского с симметрической метрикой и Гильберта), содержится в книге [2].

Решение (в определенном смысле) четвертой проблемы Гильберта было, по-видимому, найдено раньше решений всех других проблем, — считается, что оно содержалось в диссертации ученика Гильберта Г. Гамеля, представленной в Гёттингенский университет уже в 1901 г. Полученные Гамелем результаты были изложены в обширном мемуаре [3], напечатанном в 1903 г. Из этих результатов особого внимания заслуживает эффектная теорема о том, что при *любой метризации всей проективной плоскости или какой-либо ее части* Ф, *при которой прямые являются кратчайшими линиями, либо* Ф *есть вся проективная плоскость и все прямые являются замкнутыми линиями, имеющими одну и ту же* (*конечную*) *длину* (так обстоит дело в случае, когда проективная плоскость рассматривается как эллиптическая плоскость; это можно понимать так, что за расстояние между двумя точками A и B плоскости π принимается угол AOB, где O — фиксированная точка евклидова пространства, не принадлежащая плоскости π, дополненной «бесконечно удаленными точками» до проективной плоскости, — см. рис. 3), *либо* Ф *есть выпуклая область аффинной плоскости* (может быть, — вся аффинная плоскость) *и прямые «устроены» как евклидовы прямые* (в частности, имеют бесконечную длину; с этим случаем мы встречаемся при рассмотрении геометрий Минковского и Гильберта). Тем самым Гамель установил, что геометрии Минковского и Гильберта являются, в каком-то смысле, «типичными» примерами геометрий, удовлетворяющих требованиям Гильберта: так, например, «полем действия» такой геометрии может быть лишь вся аффинная (или евклидова) плоскость, как в случае геометрии Минковского, либо выпуклая ее часть, как в случае геометрии Гильберта [1]).

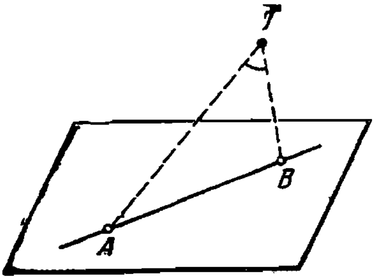

Рис. 3.

[1]) Особый класс «метрических геометрий гильбертова типа» составляют метризации всей проективной плоскости (или проективного пространства), где приходится видоизменять также аксиомы порядка евклидовой геометрии (об этом упоминает и Гильберт в тексте четвертой проблемы).

Однако число различных метризаций, удовлетворяющих поставленным Гильбертом условиям, оказывается довольно большим; так, например, геометрии Минковского с разными «индикатрисами длин» Λ дают примеры разных метризаций евклидовой плоскости, осуществляемых с условием выполнения довольно жестких ограничений, поставленных в четвертой проблеме Гильберта; при этом множество таких примеров может быть еще значительно увеличено (см., например, § 11а книги [4]). Это обстоятельство заставило американского геометра Г. Буземана [5] считать даже постановку четвертой проблемы Гильберта неоправданно широкой: достаточный простор остается здесь еще и при наложении на рассматриваемую геометрию тех или иных дополнительных условий (так, например, требование инвариантности расстояний относительно параллельных переносов приводит к геометрии Минковского).

Работа Гамеля, разумеется, не исчерпала всего, что можно сказать о четвертой проблеме Гильберта, другие подходы к которой неоднократно предлагались и позже. Упомянем здесь, например, об исследовании немецкого математика П. Функа [6], в котором, в частности, видимо, впервые были рассмотрены и несимметричные метрики. П. Функ предложил определить расстояние в ограниченной выпуклой кривой Λ области Φ аффинной плоскости (или пространства) формулами

$$d_{AB} = \log \frac{AP}{BP}, \qquad d_{BA} = \log \frac{BQ}{AQ}, \tag{2}$$

где P и Q имеют тот же смысл, что и в формуле (1) (рис. 1, *б*).

Наиболее серьезным дефектом исследований Гамеля явилось то обстоятельство, что они базировались на мало уместных в исследованиях по основаниям геометрии аналитических методах (методах вариационного исчисления), использование которых потребовало определенных оговорок типа требований дифференцируемости, не связанных с существом задачи.

Широкий анализ всего круга вопросов, связанных с четвертой проблемой Гильберта, был предпринят в последние десятилетия уже упоминавшимся выше американским геометром Г. Буземаном. Эта проблематика занимает большое место в его монографии [7]; укажем еще на несколько более позднюю работу [8], в которой анализируются геометрические предпосылки, необходимые для построения соответствующих геометрий. В дальнейшем Буземан пришел к мысли о целесообразности известного ослабления наложенных Гильбертом требований; широким обобщением геометрий, о которых говорится в четвертой проблеме Гильберта, являются так называемые «геометрии геодезических» (G-пространства) Г. Буземана, которым посвящена монография [4]. (По поводу случая несимметричного расстояния см. книгу Е. Цаустинского [9].)

См. также обзор Г. Буземана [5], специально посвященный четвертой проблеме Гильберта.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, 1948.

[2] Буземан Г. и Келли П., Проективная геометрия и проективные метрики, ИЛ, 1957.

[3] Hammel G., Über die Geometrien in denen die Geraden die Kürzesten sind, Math. Ann. 57 (1903), 231—264.

[4] Буземан Г., Геометрия геодезических, Физматгиз, 1962.

[5] Буземан Г., О четвертой проблеме Гильберта, УМН 21, № 1 (127) (1966), 155—164.

[6] Funk P., Über die Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind, Math. Ann. 101 (1929), 226—237.

[7] Busemann H., Metrik Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry, Princeton, 1942.

[8] Busemann H., On spaces in which two points determine a geodesic, Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 171—184.

[9] Zaustinsky E. M., Spaces with non-symmetric distances, New York, 1959.

К ПЯТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Е. Г. Скляренко

Понятие топологической (или непрерывной) группы возникло в математике в конце прошлого столетия в связи с развитием теоретико-групповых принципов в геометрии, принадлежащих в основном Ф. Клейну и С. Ли. Еще в 1872 г. Ф. Клейн предложил рассматривать различные геометрические теории как теории инвариантов тех или иных групп преобразований[1]). В аналогичной роли непрерывные группы используются и в исследованиях С. Ли, основателя теории групп Ли. Однако развитие теории топологических групп, а также построение основ этой теории начались гораздо позже — в конце 20-х и начале 30-х годов XX в. Большое влияние на развитие теории топологических групп оказала пятая проблема Гильберта.

Топологические группы появились первоначально как непрерывные группы преобразований. При этом очень часто непрерывные группы употреблялись совсем не в том смысле, который придается этому понятию сейчас, а лишь как локальные группы преобразований. Так, в работах С. Ли непрерывные группы преобразований — это локально евклидовы локальные группы гладких преобразований областей евклидова пространства, в которых групповые операции определяются достаточное число раз дифференцируемыми функциями. В локальном смысле, очевидно, группы преобразований понимаются и Гильбертом в его пятой проблеме. Задачу, поставленную

---

[1]) См. Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»), перев. Д. М. Синцова, в сб. «Об основаниях геометрии», Гостехиздат, 1956, 399—434. — *Прим. ред.*

Гильбертом, кратко можно сформулировать так: можно ли выбрать координаты в локально евклидовой группе преобразований и в той области, над которой совершаются преобразования, таким образом, чтобы функции $f_1, \ldots, f_n, c_1, \ldots, c_r$, определяющие группу преобразований (см. текст проблемы Гильберта) в этой системе координат, были дифференцируемыми (или даже аналитическими), если известно лишь, что в некоторой системе координат функции, задающие эту группу, являются непрерывными?

В дальнейшем наряду с исследованиями, в которых топологические группы рассматриваются преимущественно как группы преобразований, все большее значение приобретают работы, в которых эти группы выступают и как самостоятельный объект изучения. Это мы видим, например, в работах Брауэра [1]) (1909—1912 гг.), в которых он исследует группы преобразований прямой и евклидовой плоскости (где, в частности, им построен пример преобразования плоскости без неподвижных точек, не гомеоморфного обычному сдвигу); в работах Брауэра было фактически дано определение топологической группы в том смысле, в котором оно теперь считается общепринятым, и было показано, что канторово совершенное множество является пространством некоторой такой группы.

Окончательно отношение к топологическим группам как к самостоятельному и важному объекту исследования выработалось в конце 20-х и начале 30-х годов. К этому времени относится возникновение целого нового и самостоятельного раздела математики, занимающегося изучением различного рода алгебраических образований, наделенных топологией, — групп, колец, тел и др. (несколько позже эта область математики получает название топологической алгебры). Большое влияние на развитие топологической алгебры оказала работа А. Н. Колмогорова [3], в которой им дана аксиоматика пространств постоянной кривизны, основанная на характеристике их топологии и группы движений, а также работа Л. С. Понтрягина [4] о топологически-алгебраической характеристике топологических тел. Последовавшие вслед за этим основополагающие работы фон Неймана ([6],

---

1) См. Math. Ann. 67 (1909), 246; 69 (1910), 181—203 и др.— *Прим. ред.*

[7]) и Л. С. Понтрягина ([8], [9], [10] и др.) послужили окончательным толчком для бурного развития теории топологических групп и всей топологической алгебры, приведшего в конечном итоге и к решению пятой проблемы Гильберта.

Примерно в те же годы происходят большие сдвиги и собственно в теории групп Ли (т. е. локально евклидовых групп, пространства которых являются гладкими многообразиями, а операции не только непрерывны, но и дифференцируемы). В работах Э. Картана (см., например, [2]), Г. Вейля и др. авторов в значительной степени были исследованы глобальная структура групп Ли и их связь с подгруппами групп линейных преобразований. Э. Картан, доказав возможность построения группы Ли по любой алгебре Ли, показал тем самым, что любая локальная группа Ли изоморфна окрестности единицы некоторой глобальной группы Ли.

Вместе с развитием теории топологических групп и теории групп Ли отношение математиков к трактовке задачи, поставленной Гильбертом, постепенно изменилось. Проблема Гильберта стала рассматриваться в большей степени для самих топологических групп (локально евклидовых), чем для групп преобразований, причем преимущественно для топологических групп в целом, а не для локальных групп. Традиционной стала следующая формулировка пятой проблемы Гильберта:

Является ли группой Ли любая локально евклидова топологическая группа (при подходящем выборе локальных координат)?

Что касается соотношения между локальными и обычными топологическими группами, то здесь, как отмечалось выше, положение оказалось вполне ясным в случае групп Ли — всякая локальная группа Ли является частью некоторой глобальной группы Ли. Вопрос о том, справедливо ли это утверждение для произвольных топологических групп, был поставлен П. Смитом [12] и Л. С. Понтрягиным [13], в работах которых были впервые четко систематизированы определения всех понятий, относящихся к локальным топологическим группам. Ответ на этот вопрос был получен А. И. Мальцевым [15], показавшим, что не всякая локальная группа является частью некоторой топологической группы; в то же время А. И. Мальцев нашел некоторое алгебраическое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы локальную группу можно было включить в некоторую топологическую группу. Однако неясно, для всякой ли локально евклидовой локальной группы существует локально изоморфная ей обычная топологическая группа, причем эта задача, по-видимому, очень сложна (см. об этом, например, в обзоре А. И. Мальцева [18]).

Несколько замечаний к той части проблемы Гильберта, которая относится к группам преобразований. Простые примеры показывают, что непрерывное действие группы Ли может не быть аналитическим ни при каком выборе координат в пространстве: например, можно определить действие аддитивной группы действительных чисел на евклидовой плоскости, при котором замкнутый круг является множеством неподвижных точек (как известно, при нетривиальном аналитическом действии множество неподвижных точек не может содержать внутренних точек). В конце 30-х годов Д. Монтгомери и Л. Циппин [14] доказали, что всякая компактная связная группа, эффективно действующая на трехмерном евклидовом пространстве, является либо группой вращений $SO(2)$, либо группой собственных ортогональных преобразований трехмерного пространства $SO(3)$, причем ее действие эквивалентно стандартному действию соответствующей группы. Положение резко меняется, если рассматривать несвязные группы или увеличить размерность пространства. Сравнительно недавно (в 1952 г.) Р. Бинг [23] построил любопытный пример действия циклической группы второго порядка на трехмерном евклидовом пространстве, не эквивалентного никакому гладкому действию. В 1954 г., используя те же идеи, что и Бинг, Монтгомери и Циппин [28] построили пример действия $SO(2)$ на четырехмерном евклидовом пространстве, не являющегося гладким ни при каком выборе гладкой структуры на этом пространстве; очевидно, можно определить аналогичное действие аддитивной группы действительных чисел. Интересен также недавний результат Д. Милнора и М. Хирша [31], показавших, что на каждой сфере размерности $\geqslant 8$ существует кусочно линейная инволюция, которая не эквивалентна никакой гладкой инволюции. И хотя теория групп преобразований уже имеет свою историю (отметим, что интенсивное развитие топологических аспектов теории групп преобразований началось в конце 30-х годов и в 40-е годы и не ослабевает до сих пор), мало что известно о непрерывных действиях групп Ли, если эти действия не предполагаются гладкими [1]).

Пятая проблема относится к числу решенных проблем Гильберта: сформулированный выше вопрос решается положительно — всякая локально евклидова топологическая группа есть группа Ли. Решение этой проблемы явилось следствием очень длительного и сложного процесса построения глубокой теории локально бикомпактных топологических групп, исследования их алгебраической и топологической структуры (нередко основанного на достижениях теории групп Ли) и выяснения связей, существующих между локально бикомпактными группами и группами Ли (в частности, линейными группами). Математический аппарат, созданный в теории локально бикомпактных групп для решения пятой проблемы Гильберта, позволил дать полное описание любых (а не только локально евклидовых) локально бикомпактных групп. Этот же аппарат, с другой стороны, одновременно дает доказательство следующего предложения, интересного с точки зрения теории групп Ли: расширение группы Ли с помощью группы Ли всегда является группой Ли [2]).

Решение проблемы Гильберта четко распадается на два этапа. На первом этапе, закончившемся в основном к 1935 г., пятая проблема Гильберта была решена для бикомпактных и коммутативных локально бикомпактных групп. Для бикомпактных групп доказательство было дано фон Нейманом [6]. Несколько позже Л. С. Понтрягин [8] полностью исследовал структуру компактных топологических групп, доказав при этом, что всякая компактная локально связная конечномерная группа является группой Ли. Решение проблемы Гильберта для коммутативных локально бикомпактных групп дано Л. С. Понтрягиным [9].

Аппарат линейных представлений, созданный для бикомпактных и коммутативных локально бикомпактных групп и сыгравший решающую роль при изучении структуры этих групп, оказался неприменимым к любым локально бикомпактным группам. Поиски путей, с помощью

---

[1]) См. ниже об эффективных транзитивных действиях.

[2]) Этот результат принадлежит К. Ивасава [19] и А. Глисону [22].

которых можно получить окончательное решение пятой проблемы, составляют содержание второго этапа, завершившегося лишь в начале 50-х годов. В 1941 г. К. Шевалле [16] дает решение проблемы Гильберта для разрешимых групп. В 1946 г. А. И. Мальцев [17], исследуя локальную структуру разрешимых локально бикомпактных групп, показывает, что всякая связная локально связная разрешимая локально бикомпактная группа конечной размерности есть группа Ли. Наконец, в 1952 г. окончательное решение проблемы Гильберта для любых локально бикомпактных групп было получено А. Глисоном [24] и Д. Монтгомери и Л. Циппином [25]. В 1953 г. Ямабе [26], [27] усовершенствует и несколько упрощает построения Глисона; его метод позволяет подойти к любым, а не только конечномерным, локально бикомпактным группам, что дает возможность исследовать структуру любых локально бикомпактных групп без всяких ограничений.

Для групп преобразований методы, используемые при решении пятой проблемы Гильберта, дают следующую теорему (эта теорема принадлежит Д. Монтгомери и Л. Циппину [29]): всякая локально бикомпактная группа преобразований некоторого конечномерного локально компактного и локально связного топологического пространства X (например, топологического многообразия) является группой Ли, если она действует эффективно и транзитивно; при этом само пространство X автоматически оказывается фактор-пространством этой группы и, следовательно, аналитическим многообразием. (Напомним, что действие группы называется эффективным, если каждый отличный от единицы элемент этой группы действует нетривиально; действие называется транзитивным, если для всяких двух точек $x, y \in X$ имеется преобразование, переводящее x в y.) Для компактных групп доказательство этой теоремы было получено Л. С. Понтрягиным [1]) (1936 г., см. [18]), а для разрешимых групп в 1946 г. она была доказана А. И. Мальцевым [17].

Главным инструментом при исследовании локально бикомпактных групп является применение инвариантного интегрирования (т. е. интегрирования по инвариантной

---

[1]) Первоначальное доказательство, полученное Д. Монтгомери и Л. Циппином независимо друг от друга, также было дано для компактных групп.

мере) на этих группах. Мера на группе называется инвариантной, если для всякого множества M из группы и любого элемента g мера множества Mg равна мере M (инвариантность справа). Инвариантное интегрирование на группах Ли устанавливается довольно просто; впервые оно было применено Ф. Петером и Г. Вейлем [1] еще в 1927 г. для построения полной системы линейных представлений компактных групп Ли. В 1933 г. А. Хаар [5] определил инвариантную меру на любых локально компактных группах, удовлетворяющих второй аксиоме счетности. Несколько позже (в 1934 г.) фон Нейман [7] предложил более совершенный и прямой способ инвариантного интегрирования на компактных группах[1]). Конструкция фон Неймана была затем упрощена в работах Л. С. Понтрягина ([8], [13]), который построил с ее помощью полную систему линейных представлений для любой бикомпактной группы.

Существование инвариантной меры позволяет широко использовать методы функционального анализа и, в частности, теорию интегральных уравнений. В случае бикомпактной группы с помощью этих методов нетрудно построить полную систему линейных представлений. В самом деле, для любой непрерывной функции двух переменных $K(x, y)$, определенной на группе G и симметричной $(K(x,y) = K(y,x))$, оператор $\int\limits_G K(x, y)f(y)dy$ симметричен и вполне непрерывен, поэтому для любого $\lambda \neq 0$ пространство $H(\lambda)$ собственных функций этого оператора с собственным значением λ конечномерно. Если $K(x, y)$ имеет вид $k(x^{-1}y)$, где $k(x)$ — непрерывная функция одного переменного, то при действии G на $H(G)$, определенном по формуле $g(f)(x) = f(g^{-1}x)$, все подпространства $H(\lambda)$ гильбертова пространства $H(G)$ суммируемых в квадрате функций на G являются инвариантными. Таким образом, имеются представления G в группы линейных преобразований конечномерных векторных пространств $H(\lambda)$. Пусть $g \neq e$ — любой элемент группы G и U — такая окрестность единицы e, что U^2 не содержит g. Возьмем в качестве $k(x)$

[1]) Мера фон Неймана (как и мера на группах Ли) инвариантна с двух сторон; однако она эквивалентна мере Хаара (это следует из теоремы единственности инвариантной меры на бикомпактных группах; единственность меры Хаара на любой локально компактной группе была доказана фон Нейманом в 1936 г.).

функцию $h(x) + h(x^{-1})$, где $h(x)$ — непрерывная неотрицательная функция, равная нулю вне окрестности U и принимающая значение 1 в точке $e \in G$. Тогда для функции $f(x) = \int\limits_G k(x^{-1}y)h(y)dy$ имеем $g(f)(x) \neq f(x)$. Раскладывая функцию $f(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям оператора $\int\limits_G k(x^{-1}y)\varphi(y)\,dy$, убеждаемся в том, что элемент g определяет нетривиальное преобразование хотя бы на одном из собственных подпространств; это и означает, что определенная выше система линейных представлений является полной.

Используя существование полной системы линейных представлений, нетрудно показать, что в любой окрестности единицы группы G существует бикомпактный нормальный делитель Y такой, что фактор-группа G / Y есть группа Ли. Это означает, что группа G с любой степенью точности может быть аппроксимирована группами Ли. Следствием этой аппроксимации является следующая структурная теорема ([13]): всякая бикомпактная группа конечной размерности n локально распадается в прямое произведение n-мерной локальной группы Ли и своего нульмерного бикомпактного нормального делителя. Отсюда немедленно вытекает, что конечномерная локально связная бикомпактная группа (например, локально евклидова бикомпактная группа) есть группа Ли.

Линейные представления играют существенную роль и при рассмотрении коммутативных локально бикомпактных групп. Правда, с формальной точки зрения решение пятой проблемы Гильберта для коммутативных локально бикомпактных групп можно вывести из ее решения для бикомпактных групп. В самом деле, как показал Л. С. Понтрягин [13], всякая коммутативная локально бикомпактная группа бикомпактного происхождения [1]) накрывает некоторую бикомпактную группу (доказательство этого утверждения несложно: сперва показывается, что циклическая подгруппа, порожденная произвольным элементом коммутативной локально бикомпактной груп-

[1]) Группой бикомпактного происхождения называется топологическая группа, которая порождается некоторой бикомпактной окрестностью единицы; в любой локально бикомпактной группе имеется открытая подгруппа бикомпактного происхождения.

пы, либо имеет бикомпактное замыкание, либо замкнута и дискретна; затем с помощью этого факта устанавливается, что в коммутативной группе бикомпактного происхождения имеется дискретная подгруппа с конечным числом образующих, фактор-группа по которой бикомпактна); таким образом, локальные свойства этих двух групп идентичны, и если вторая из них есть группа Ли, то группой Ли является также любое ее накрытие. Отсюда легко вытекает, что всякая локально евклидова коммутативная группа есть группа Ли.

Однако такое решение проблемы Гильберта для коммутативных групп совершенно не вскрывает специфику их структуры. Решение этой проблемы, данное Л. С. Понтрягиным [9], не зависит от достижений в области бикомпактных групп и является следствием построенной им теории коммутативных локально бикомпактных групп.

Прежде всего, оказывается, что в коммутативном случае можно ограничиться лишь представлениями в группу вращений плоскости $SO(2)$, которые образуют полную систему. Так как $SO(2)$ — коммутативная группа, то множество G^* всех таких представлений также является (коммутативной) группой. Более того, G^* — топологическая локально бикомпактная группа по отношению к компактно открытой топологии на множестве G^*. Представления группы G в $SO(2)$ называются характерами группы G, а группа G^* — группой характеров группы G. Оказывается, что естественное отображение $G \to G^{**}$ есть (топологический) изоморфизм. Таким образом, группы G и G^* являются двойственными друг к другу — группа G не только определяет G^*, но и, в свою очередь, полностью определяется группой G^*. Отсюда следует, что различного рода условиям, накладываемым на G, соответствуют «двойственные» условия для группы G^* и что в тех случаях, когда это целесообразно, те или иные задачи, относящиеся к коммутативным локально бикомпактным группам, можно подменять «двойственными» задачами. Одним из самых существенных фактов, относящихся к этой теории двойственности, является следующий результат: дискретные и бикомпактные группы двойственны друг другу (т. е. группа характеров любой бикомпактной группы дискретна и, наоборот, группа характеров дискретной группы всегда бикомпактна). При этом многим топологическим свойствам группы G (таким как связность, вполне несвязность, локальная связность, конечномерность, свойство иметь данный топологический вес и др.) соответствуют двойственные алгебраические свойства группы G^*. Например, размерность G совпадает с рангом группы G^*, а локальная связность G эквивалентна тому, что каждое конечное подмножество в G^* можно включить в подгруппу H с конечным числом образующих, для которой фактор-группа G^* / H не имеет отличных от нуля элементов конечного порядка.

Опираясь на эти результаты, уже нетрудно показать, что для коммутативной локально евклидовой компактной группы G группа G^* имеет конечное число образующих. Представим теперь G^* в виде прямой суммы свободной и конечной групп. Учитывая, что разложению G^* в конечную прямую сумму соответствуют двойственное разложение в прямую сумму группы $G = G^{**}$, а также что для любой конечной абелевой группы H группа H^* изоморфна H и что $SO(2)$ двойственна бесконечной циклической группе, придем к следующему заключению: компактная коммутативная локально евклидова [1]) группа изоморфна прямому произведению конечного числа экземпляров группы $SO(2)$ и некоторой конечной группы.

Выше уже отмечалась связь, существующая между локально бикомпактными и бикомпактными коммутативными группами. Используя эту связь, Л. С. Понтрягин показал, что всякая локально связная конечномерная коммутативная локально бикомпактная группа бикомпактного происхождения распадается в конечное произведение элементарных групп, т. е. групп типа $SO(2)$, R^1 (аддитивная группа действительных чисел), Z (аддитивная группа целых чисел) и Z^n (циклическая группа конечного порядка).

Как видно из только что приведенных рассуждений, методы, с помощью которых проблема Гильберта была решена для компактных и коммутативных групп, существенно зависят от специфики структуры этих групп в каждом из рассматриваемых частных случаев. Уже вскоре после работ фон Неймана и Понтрягина стало ясно, что для окончательного решения пятой проблемы Гильберта необходимо искать новые пути. Это связано прежде всего с

[1]) Слова «локально евклидова», как обычно, можно заменить на «конечномерная локально связная».

тем, что, как выяснилось, существуют локально бикомпактные топологические группы (и среди них даже связные группы Ли), не обладающие полной системой линейных представлений (см., например, [11]). И хотя один из наиболее принципиальных результатов, с помощью которого вскрывается локальная структура бикомпактных групп, — утверждение о том, что в любой окрестности единицы группы G существует бикомпактный нормальный делитель Y, фактор-группа по которому G / Y есть группа Ли, — остается справедливым практически для любых локально бикомпактных групп [1]), в случае произвольных локально бикомпактных групп этот результат скорее можно отнести к следствиям всего аппарата, с помощью которого была решена пятая проблема, чем к средствам для ее решения.

Топологическая группа, у которой имеются подгруппы в каждой окрестности ее единицы, называется группой с малыми подгруппами. Хорошо известно, что всякая группа Ли — это группа без малых подгрупп. Общая идея решения проблемы, данного А. Глисоном, Д. Монтгомери и Л. Циппином, состоит в следующем. Сначала показывается, что всякая локально компактная группа без малых подгрупп есть группа Ли (этот результат был получен А. Глисоном [24] для конечномерных групп, после чего Ямабе [26], [27], развивая идеи А. Глисона, доказал это утверждение без предположения конечномерности). Затем исследуются локально бикомпактные группы, обладающие малыми подгруппами. В работе [25] Д. Монтгомери и Л. Циппин доказывают, что во всякой конечномерной локально бикомпактной группе с малыми подгруппами имеется открытая подгруппа H, удовлетворяющая следующему условию: в любой окрестности единицы группы H имеется такой бикомпактный нормальный делитель X, что группа H/X не имеет малых подгрупп и, следовательно, является группой Ли (в работах [26], [27] Ямабе показывает, что это справедливо также и для бесконечномерных групп). Локально бикомпактные группы, у которых в каждой окрестности единицы имеется нормальный делитель, фактор-группа по которому есть группа Ли, известны под названием

---

[1]) Во всякой локально бикомпактной группе имеется открытая подгруппа, для которой это утверждение верно.

проективно-лиевых групп (или обобщенных групп Ли); эти группы были исследованы незадолго до работ [24] и [25] К. Ивасава [19] и А. Глисоном [22], из результатов которых, в частности, вытекает, что эти группы не являются локально евклидовыми (а также, что в конечномерном случае эти группы не являются даже локально связными). Таким образом, решение проблемы Гильберта есть следствие всех перечисленных выше утверждений.

Остановимся вкратце на основных моментах доказательства этих утверждений. Решение проблемы Гильберта для групп без малых подгрупп основывается на следующей идее. Пусть E^n — пространство касательных векторов в единице группы Ли G; легко видеть, что G обладает каноническим линейным представлением в группе преобразований пространства E^n — это представление индуцируется внутренними автоморфизмами группы G. Как известно, в группе Ли G однопараметрические (локальные) подгруппы (т. е. подгруппы, локально изоморфные аддитивной группе действительных чисел) целиком заполняют некоторую окрестность единицы; при этом нетрудно установить взаимно однозначное соответствие между всеми однопараметрическими подгруппами и векторами из E^n, при котором умножению векторов на числа будет соответствовать подходящее линейное преобразование параметра на соответствующих подгруппах. Оказывается (и это легко показать для подгрупп линейных групп), что для любых двух однопараметрических подгрупп $x(t)$, $y(t)$ посредством перехода к пределу $\lim \left(x\left(\frac{t}{m}\right) \cdot y\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m$ определяется операция, соответствующая операции сложения векторов в E^n. Таким образом, вместо E^n можно рассматривать линейное пространство однопараметрических подгрупп. В своей работе [24] А. Глисон строит такое представление для локально компактной группы без малых подгрупп и с помощью этого представления доказывает, что G есть группа Ли.

Отметим, что уже сам факт существования однопараметрических подгрупп в произвольной локально бикомпактной группе (см. А. Глисон [20]) доказывается довольно сложно (для бикомпактных и коммутативных локально бикомпактных групп существование однопараметрических подгрупп вытекает из соответствующих структурных теорем). Еще бо́льшие трудности встают при исследовании возможности предельного перехода с помощью последовательности $\left(x\left(\frac{t}{m}\right)\cdot y\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m$. Тем не менее оказывается, что если G — группа без малых подгрупп, то для любых двух однопараметрических подгрупп $x(t)$, $y(t)$ и любых значений параметра t, для которых $x(t)$, $y(t)$ находятся в достаточно малой окрестности единицы, существует такая подпоследовательность чисел m, что предел $\lim\left(x\left(\frac{t}{m}\right)\cdot y\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m$ (по этой подпоследовательности) существует и является однопараметрической подгруппой группы G. Этот предел обозначим через $x(t) \dotplus y(t)$. Операция сложения (которая оказывается коммутативной) вместе с операцией умножения на действительные числа ($\lambda \cdot x(t) = x(\lambda t)$) превращает множество всех однопараметрических подгрупп группы G в топологическое векторное пространство E, которое оказывается локально компактным и, следовательно, конечномерным.

Нетрудно проверить, что внутренние автоморфизмы группы G определяют линейное представление G в группу преобразований пространства E. Из существования такого представления вытекает, что G/H есть группа Ли, где H — ядро этого представления. Группой Ли оказывается и ядро H, так как, с одной стороны, H не имеет малых подгрупп (как подгруппа в G) и, с другой стороны, компонента единицы этой группы коммутативна[1]. Кроме того, нормальный делитель H оказывается центральным, если группа G связна. Таким образом, в G имеется центральный нормальный делитель H, являющийся группой Ли, факторгруппа по которому также есть группа Ли. Можно показать, что при этих условиях сама G является группой Ли (в такой форме впервые это доказано Курaниси [21]; см. также [19]).

Пусть теперь G — группа с малыми подгруппами. С помощью примерно той же техники, которая применялась для доказательства существования однопараметрических подгрупп, можно показать, что в любой окрестности U единицы группы G существует такая бикомпактная

---

[1]) Отсюда и из упоминавшейся теоремы Ивасава — Глисона (см. [19], [22]) о расширениях группы Ли уже вытекает, что G есть группа Ли; однако сама эта теорема является следствием формулируемого ниже менее сильного утверждения.

подгруппа Y, что все «достаточно малые» подгруппы группы G (т. е. подгруппы, содержащиеся в достаточно малой окрестности $V \subset U$) лежат в Y. Далее уже нетрудно прийти к следующему: в G имеются такая открытая подгруппа H и такая бикомпактная подгруппа $Y \subset H$, что Y является нормальным делителем в H, причем H/Y не имеет малых подгрупп. Другими словами, G содержит открытую проективно-лиевую подгруппу H. Как показали К. Ивасава [19] и А. Глисон [22], проективно-лиевы группы представляются в виде обратного предела групп Ли (к таким группам применим и метод аппроксимации Л. С. Понтрягина [13], разработанный им для бикомпактных групп). Это позволяет исследовать локальную структуру таких групп и показать, в частности, что они не являются локально евклидовыми (окончательный результат (см. [30]) гласит, что в любой проективно-лиевой группе имеются сколь угодно малые окрестности единицы, распадающиеся в прямое произведение локальной группы Ли и бикомпактной подгруппы).

Ограничиваясь этим кратким описанием большого круга идей, приводящих в конечном итоге к полному решению проблемы Гильберта для локально компактных групп, отсылаем читателя к статье В. М. Глушкова [30], в которой изложены доказательства всех утверждений, относящихся к этой проблеме и к структуре локально бикомпактных групп. Решение проблемы Гильберта для бикомпактных и коммутативных локально бикомпактных групп изложено в книге Л. С. Понтрягина [13].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Peter F., Weyl H., Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. 97 (1927), 737—755 [русский перевод: УМН 2 (1936), 144—160].

[2] Cartan E., La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis Situs, Mém. Sci. Math., fasc. XLII, 1930.

[3] Kolmogoroff A. N., Zur topologisch-gruppentheoretischen Begründung der Geometrie, Gött. Nachr. 2 (1930), 208—210.

[4] Pontrjagin L., Über stetige algebraische Körper, Ann. Math. 33 (1932), 163—174.

[5] Haar A., Der Massbegriff in der Theorie der Kontinuieerlichen Gruppen, Ann. Math. 34 (1933), 147—169.

[6] von Neumann J., Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen, Ann. Math. 34 (1933), 170—190.

[7] von Neumann J., Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, Compositio Math. 1 № 1 (1934), 106—114 [русский перевод: УМН 2 (1936), 168—176].

[8] P o n t r j a g i n L., Sur les groupes topologiques compacts et le cinquième problème de M. Hilbert, C. r. Acad. sci. 198 (1934), 238—240.

[9] P o n t r j a g i n L., Sur les groupes abéliens continus, C. r. Acad. sci. 198 (1934), 328—330.

[10] P o n t r j a g i n L., The theory of topological commutative groups, Ann. Math. 35 (1934), 361—388 [русский перевод: УМН 2 (1936), 177—195].

[11] B i r k h o f f G., Lie Groups simply isomorphic with no linear group, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 883—888.

[12] S m i t h P., Topological foundations in the theory of continuous transformations groups, Duke Math. J. 2 (1936), 246—280.

[13] П о н т р я г и н Л. С., Непрерывные группы, ГОНТИ, 1938; второе издание: Гостехиздат, 1954.

[14] M o n t g o m e r y D., Z i p p i n L., Non-abelean, compact, connected transformation groups of three-space, Amer. J. Math. 61 (1939), 375—387.

[15] М а л ь ц е в А. И., О локальных и полных топологических группах, ДАН СССР 32 (1941), 606—608.

[16] C h e v a l l e y C., Two theorems on solvable topological groups, Michigan Lectures in Topology, 1941, 291—292.

[17] М а л ь ц е в А. И., Топологические разрешимые группы, Матем. сб. 19, № 2 (1946), 165—174.

[18] М а л ь ц е в А. И., Топологическая алгебра и группы Ли, Математика в СССР за 30 лет, Гостехиздат, 1948, 134—180.

[19] I w a s a w a K., On some types of topological groups, Ann. Math. 50 (1949), 507—557.

[20] G l e a s o n A., Arcs in locally compact groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 663—667.

[21] K u r a n i s h i M., On local euclidean groups satisfying certain conditions, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 372—380.

[22] G l e a s o n A., On the structure of locally compact groups, Duke Math. J. 18 (1951), 85—104.

[23] B i n g R., A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, Ann. Math. 56 (1952), 354—362.

[24] G l e a s o n A., Groups without small subgroups, Ann. Math. 56, № 2 (1952), 193—212.

[25] M o n t g o m e r y D., Z i p p i n L., Small subgroups in finite dimensional groups, Ann. Math. 56, № 2 (1952), 213—241.

[26] Y a m a b e H., On conjecture of Iwasawa and Gleason, Ann. Math. 58, № 1 (1953), 48—54.

[27] Y a m a b e H., A generalization of a theorem of Gleason, Ann. Math. 58, № 2 (1953), 351—365.

[28] M o n t g o m e r y D., Z i p p i n L., Examples of transformation groups, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 460—465.

[29] M o n t g o m e r y D., Z i p p i n L., Topological transformation groups, New York — London, 1955.

[30] Г л у ш к о в В. М., Строение локально бикомпактных групп и пятая проблема Гильберта, УМН 12, № 2 (1957), 3—41.

[31] H i r s c h M. W., M i l n o r J., Some curious involutions of Spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 372—377.

К ШЕСТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Б. В. Гнеденко

Аксиоматическое построение основ ряда разделов физики интересовало и интересует многих выдающихся ученых. В настоящее время существует большое число таких изложений основ классической механики, квантовой физики, статистической физики и т. д.[1]). Это важное направление исследований заслуживает специального и обстоятельного обзора. Здесь мы коснемся лишь вопросов, связанных с аксиоматическим построением теории вероятностей.

Заслуживает упоминания то, что для Гильберта теория вероятностей является главой физики в которой математические методы играют выдающуюся роль. Сейчас эта точка зрения уже не имеет такого распространения, которым она пользовалась на рубеже двух столетий, поскольку с тех пор достаточно определенно выявилось собственно математическое содержание теории вероятностей. Теперь уже не вызывает сомнения то, что созданные в ней понятия и методы исследования, а также полученные результаты имеют общенаучное значение, далеко выходящее за пределы физики и даже всего естествознания. К тому же и методологически необоснованно считать теорию вероятностей частью физики или даже частью естествознания. Действительно, каждая естественнонаучная дисциплина имеет свой материальный объект исследования и ее

[1]) В качестве примера можно привести работы Г. Гамеля и Р. Марколонго по аксиоматизации механики, недавние работы В. Нолла по обоснованию механики сплошных сред, работы К. Каратеодори по аксиоматизации термодинамики, Д. Гильберта, Л. Нордхайма, Дж. фон Неймана и Г. Биркгофа по квантовой механике. — *Прим. ред.*

содержание определяется природой тех реальных явлений, которые она изучает. Не метод исследования, а материальный предмет исследования является определяющим для каждой науки о природе. Акустика имеет свой определенный объект исследования, и именно он, а не метод, которым изучаются акустические явления, предопределяет, будет ли данное исследование относиться к этой области физики. Теория же вероятностей изучает общие закономерности случайных явлений независимо от того, относятся они к физике, химии, экономике, биологии или лингвистике.

Современное развитие теории вероятностей в значительной мере находилось под влиянием общих идей теории множеств и теории функций действительного переменного. Именно эти идеи позволили теории вероятностей осознать себя как математическую дисциплину и разработать в ней четкую систему понятий и освободить ее от чисто интуитивных представлений и заключений. Конечно, сказанное совсем не означает умаления роли естествознания и техники, в первую очередь физики, биологии, теории связи, организации производства, в формировании основных ее понятий и направлений исследования.

Попытки аксиоматического изложения теории вероятностей были предприняты в начале нашего века Г. Больманом (см., например, [1]). Однако его работы далеки от глубокого решения стоявшей перед ним задачи, поскольку в них не было дано ни анализа основных понятий теории вероятностей, ни логически стройного изложения накопленных в ней фактов, ни связей с остальной частью математики и господствовавшими в ней представлениями. Только в 1917 г. появилась статья С. Н. Бернштейна [2], в которой было дано современное и развернутое аксиоматическое построение основ теории вероятностей. Позднее этот подход был подробно изложен в известной его книге [3]. Система аксиом С Н Бернштейна основана на качественном сравнении случайных событий по их большей или меньшей вероятности. Совокупность всех событий рассматривалась как булева алгебра. Позднее более подробное изложение этой системы взглядов было дано В. И. Гливенко и Купмэном.

С других позиций к обоснованию теории вероятностей подошел в ряде работ, которые начали публиковаться, с 1918 г., Р. Мизес (см. [4], [5], [6]). Для него теория вероятностей является естественнонаучной дисциплиной и поэтому в основу понятия вероятности случайного события он положил результат идеализированного эксперимента, заменив реальную статистическую совокупность, по необходимости конечную, некоторым бесконечным рядом и потребовав от этого ряда выполнения двух свойств — существования предела частоты и иррегулярности. Концепция Р. Мизеса встретила и встречает многочисленных восторженных последователей и серьезные критические возражения по существу его взглядов (см. об этом работы А. Я. Хинчина [7] и [8]).

Э. Борель, высказавший мысль о связи теории вероятностей с теорией меры, явился основоположником очень плодотворного круга идей. В намеченном им направлении начали работать многочисленные исследователи, и плоды не заставили себя ждать. Уже в 1923 г. была опубликована превосходная работа А. Ломницкого [9], в которой достаточно систематически и продвинуто излагалось аксиоматическое построение основ теории вероятностей на базе теоретико-множественных концепций.

Как ни велики были достигнуты успехи, проведенные исследования должны рассматриваться лишь как начало аксиоматического построения теории вероятностей. Ряд основных задач еще не только не был решен, но даже и не получил четкой математической формулировки. Здесь в первую очередь следует упомянуть вопросы аксиоматического обоснования счетных операций над событиями и их вероятностями, определения таких фундаментальных для теории вероятностей понятий, как случайная величина, математическое ожидание, условная вероятность. Необходимо было также создать предпосылки для возникавшей теории случайных процессов. Эти задачи с успехом были решены работами А. Н. Колмогорова [10], [11].

Аксиоматика, предложенная А. Н. Колмогоровым и базирующаяся на концепциях теории множеств и теории меры, с логической и философской позиций не является ни единственно возможной, ни принципиально более совершенной по сравнению с другими. Ее успех объясняется рядом обстоятельств, среди которых упомянем лишь следующие: она соответствовала общему духу математики того времени, тесно связала теорию вероятностей с метрической теорией функций и тем самым открыла перед ней богатейший арсенал хорошо разработанных методов исследования, позволила охватить единой простой схемой не только классические главы теории вероятностей, но и вновь возникающие ее понятия и проблемы.

Отметим, что в работе В. И. Гливенко [12] удалось доказать, что подход к аксиоматизации теории вероятностей, предложенный С. Н. Бернштейном и относящийся к рассмотрению полных нормированных булевых алгебр, совпадает с аксиоматикой А. Н. Колмогорова.

Исследования по основам теории вероятностей продолжаются непрерывно. За последние годы были предложены многие новые подходы — А. Реньи, А. Н. Колмогоровым и рядом других исследователей. В основу новых аксиоматических построений предлагается взять различные исходные понятия — понятия информации, сложности и т. д.

Совершенно ясно, что живая математическая дисциплина с очень широкими связями буквально со всеми областями знания всегда будет требовать тщательного изучения ее основ с различных позиций. И как бы хорошо ни были разработаны аксиоматические основы математической дисциплины, пока она развивается, будут продолжаться поиски иных методов ее логического обоснования.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bohlmann G., Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung, Atti del IV Congresso internazionale dei Mathematici, Roma, 6—11 Aprile 1908, vol. III, Secione 11b, 1909.

[2] Бернштейн С. Н., Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей, Сообщения Харьковского математического общества 15 (1917), 209—274.

[3] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946.

[4] Mises R., Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Z. 5 (1919), 52—99.

[5] Mises R., Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, Wien, 1928.

[6] Mises R., Mathematical theory of probability, Acad. Press, 1964.

[7] Хинчин А. Я., Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики, УФН 9 (1929), 141—166.

[8] Хинчин А. Я., Частотная теория Р. Мизеса и современные идеи теории вероятностей, Вопросы философии, 1961, № 1, 91—102, № 2, 77—89.

[9] Łomnicki A., Nouveaux fondements du calcul des probabilités, Fundam. Math. 4 (1923), 34—71.

[10] Колмогоров А. Н., Общая теория меры и исчисление вероятностей, Тр. Коммунистич. академии, разд. Математика 1 (1929), 8—21.

[11] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей ОНТИ, 1936 (немецкое издание, 1933).

[12] Гливенко В. И., Курс теории вероятностей, ГОНТИ, 1939.

К СЕДЬМОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

А. О. Гельфонд

Алгебраическим числом называется любой корень алгебраического уравнения $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа. Всякое неалгебраическое число называется трансцендентным числом. Существование трансцендентных чисел строго было доказано Ж. Лиувиллем [1]) в 1844 г., но еще Л. Эйлер их существование считал безусловным, хотя вполне строгого определения трансцендентного числа у него, по-видимому, не было.

Первые общие утверждения относительно арифметической природы чисел мы находим у Л. Эйлера, который, например, утверждал, что числа $a^{\sqrt{b}}$, где a иррационально, а b — целое, но не квадрат, не только не рациональны, но даже не «иррациональны», что в нашей терминологии значит «трансцендентны».

В создании и развитии методов доказательства трансцендентности чисел за 60 лет, прошедших со времени постановки проблем Д. Гильберта, были достигнуты существенные успехи и основная проблема, поставленная Д. Гильбертом, была решена в общем виде. Два основных метода доказательства трансцендентности, как это и было предположено Д. Гильбертом, основаны на исследовании арифметических и аналитических свойств функции, значением которой является при алгебраическом значении аргумента исследуемое число. Мы остановимся только на основных этапах развития этих методов.

---

[1]) C. r. Acad. sci. 18 (1844), 883, 910; J. math. pures et appl. 16 (1851), 133.— *Прим. ред.*

Геометрическая проблема трансцендентности отношения основания к боковой стороне равнобедренного треугольника, отношение углов которого будет иррациональным алгебраическим числом, сводится к трансцендентности числа $e^{\pi\alpha} = i^{-2i\alpha}$ при алгебраическом и действительном α. Трансцендентность чисел вида $\alpha^{i\sqrt{q}}$, где $\alpha \neq \neq 0, 1$ — алгебраическое число, а $q \geqslant 1$ целое, была доказана А. О. Гельфондом в 1929 г. [1]) с помощью исследования роста и арифметических свойств коэффициентов разложения функции α^z в интерполяционный ряд Ньютона с узлами интерполяции вида $x + i\sqrt{q}y$, где x и y пробегают все целые значения. Этот же метод был в дальнейшем использован Р. О. Кузьминым [2]) для доказательства трансцендентности чисел вида $\alpha^{\sqrt{q}}$ при прежних предположениях относительно α и q и дополнительном условии иррациональности $\sqrt{q}$ и К. Л. Зигелем для доказательства трансцендентности хотя бы одного из периодов эллиптической функции $\wp(x)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$[\wp'(x)]^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3$$

при алгебраических значениях инвариантов g_2 и g_3.

Трансцендентность чисел вида α^β при алгебраическом α, $\alpha \neq 0, 1$, и β алгебраическом иррациональном (к вопросу об арифметической природе таких чисел и сводится проблема Д. Гильберта) была впервые доказана в 1934 г. А. О. Гельфондом [3]) с помощью более глубокого исследования арифметических и аналитических свойств показательных функций. Несколько позднее эта теорема была доказана Т. Шнейдером [4]), который также использовал метод А. О. Гельфонда для доказательства трансцендентности каждого из периодов эллиптической функции при алгебраических инвариантах, а также трансцендентности многих постоянных, связанных с эллиптическими функциями. Трансцендентность чисел вида α^β эквивалентна трансцендентности отношения логарифмов $\frac{\ln\alpha}{\ln\beta}$ при алгебраических α и β, откуда, в частности, следует, что

---

[1]) C. r. Acad. sci. 189 (1929), 1224—1228.— *Прим. ред.*

[2]) ИАН СССР, сер. матем. 3 (1930), 585—597.— *Прим. ред.*

[3]) ДАН СССР 2 (1934), 1—6; ИАН СССР, сер. физ.-матем. 4 (1934), 623—630.— *Прим. ред.*

[4]) J. reine u. angew Math. 172 (1934), 65—69.—*Прим. ред.*

все логарифмы, приближенные значения которых приводятся в таблице десятичных логарифмов, — или рациональные или трансцендентные числа.

Общая проблема отсутствия алгебраических соотношений с целыми коэффициентами между числами вида α^β при прежних предположениях относительно α и β не решена до настоящего времени.

Некоторые частные случаи этой проблемы с помощью существенного усиления прежних методов были решены в 1949 г. А. О. Гельфондом. В частности, было доказано, что таких соотношений нет между числами a^α и a^{α^2}, где $a \neq 0$, 1 — алгебраическое число, а α — кубическая иррациональность. Не решена также проблема отсутствия алгебраических соотношений с целыми коэффициентами между логарифмами алгебраических чисел, исключая случай однородного соотношения между двумя логарифмами. Эта проблема представляет большой интерес с точки зрения возможных приложений в области других числовых задач, в частности решения уравнений в целых числах.

Отметим еще раз, что впервые проблема трансцендентности чисел вида α^β или $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ была в частной формулировке поставлена Л. Эйлером (Введение в анализ, т. 1, 1738 г.).

Все числа, о трансцендентности которых мы говорили выше, являются значениями аналитических функций, обладающих тем свойством, что из предположения алгебраичности одного ее значения при алгебраическом значении переменного следует алгебраичность значений на очень плотном множестве значений аргумента вместе с умноженными на какое-то число значениями производных. Например, для функции $\varphi(z) = a^z$ все числа $\frac{1}{\ln^k a} \varphi^{(k)}(z)$ при $z = m + nz_0$ будут алгебраическими, если a, z_0 и a^{z_0} — алгебраические и z_0 — иррациональное число, а $k \geqslant 0$, m и n — целые числа. К другому классу проблем трансцендентности относится трансцендентность значений функций, разлагающихся в хорошо сходящиеся степенные ряды с алгебраическими коэффициентами и удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям с полиномиальными коэффициентами. Простейшим примером таких функций является функция e^z, где число

e — основание натуральных логарифмов, так как

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Такие функции К. Зигель назвал E-функциями.

В 1873 г. Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e [1]), а в 1882 г. Линдеманн [2]), обобщая метод Эрмита, доказал, что соотношение $\sum_{k=1}^{n} A_k e^{z_k} = 0$ невозможно при алгебраических не равных нулю в совокупности A_k и алгебраических и различных z_k. Этим была доказана трансцендентность π, так как $e^{2\pi i} = 1$, что было бы невозможно, если бы π, а тем самым и $2\pi i$ было бы алгебраическим числом [3]). Трансцендентность π, как известно, влечет за собой и отрицательное решение проблемы квадратуры круга. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям второго порядка при алгебраических значениях аргумента, была доказана впервые К. Зигелем [4]) в 1930 г. с помощью разработанного им общего метода. Например, им была доказана трансцендентность чисел вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{[n!]^2}$ при алгебраическом a, $a \neq 0$, и, более общо, значений функций Бесселя или цилиндрических функций. В самые последние годы очень существенное продвижение в этом направлении, в известном смысле слова исчерпавшее естественную проблематику этой области, было сделано А. Б. Шидловским. Он доказал, что если система E-функций представляет собой решение системы линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами, числовые коэффициенты которых являются алгебраическими числами, то из алгебраической незави-

---

[1]) C. r. Acad. sci. 77 (1873), 18, 74, 226, 285.— *Прим. ред.*

[2]) Math. Ann. 20 (1882), 213.— *Прим. ред.*

[3]) Вопрос об арифметической природе чисел e и π имеет длительную историю. В 1767 г. Ламберт доказал, что числа π и e^m (где m рациональное) не являются рациональными (Mém. Ac. Berlin, 1761 (1768)). Лиувилль в 1840 г. (J. math. pures et appl.) показал, что ни e, ни e^2 не могут являться квадратичными иррациональностями.— *Прим. ред.*

[4]) Abh. preuss. Acad. Wiss., № 1 (1929—1930), 1—70.

-симости этих функций в поле рациональных функций следует алгебраическая независимость их значений в рациональном поле при алгебраических значениях аргумента, кроме, конечно, отдельных тривиальных исключений.

В частности, например, им доказана трансцендентность чисел вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{[n!]^q}$, где $a \neq 0$ — алгебраическое, а $q \geqslant 1$ — целое число.

Отметим также очень красивую теорему К. Малера о трансцендентности числа α

$$\alpha = 0{,}123456789101112\ldots,$$

другими словами, десятичной или q-ичной дроби, в которой после запятой выписаны подряд все числа натурального ряда, или, более общо, цифры последовательных значений целочисленного многочлена $P(n)$, $n = 1,2,3,\ldots$ Этот результат получен с помощью теоремы Т. Шнейдера о приближении алгебраических чисел рациональными дробями и явился прямым следствием полученной позднее теоремы Рота.

Помимо некоторых геометрических приложений факта трансцендентности тех или иных чисел, о которых мы уже говорили, большое прикладное значение имеет так называемая мера трансцендентности или алгебраической независимости чисел, изучению которой посвящено много работ. Если $P(x_1,\ldots, x_s)$ — многочлен с целыми коэффициентами, не имеющими общего делителя, верхняя грань модуля которых H, а степени по отношению $x_1, \ldots, x_s$ будут $n_1, \ldots, n_s$, то при любых действительных значениях $x_1, x_2,\ldots$ $\ldots, x_s$ эти коэффициенты, отличные от нуля, в совокупности могут быть выбраны так, что будет выполняться неравенство

$$|P(x_1, \ldots, x_s)| < H^{-(1+\varepsilon)\, n_1 n_2 \ldots n_s}, \qquad \varepsilon > 0,$$

где ε — произвольно малая постоянная. Мерой трансцендентности или взаимной трансцендентности чисел α_1, $\alpha_2,\ldots, \alpha_s$ называется функция $\Phi(H, n_1,\ldots, n_s)$, определяемая соотношением

$$\Phi(H, n_1, \ldots, n_s) = \inf |P(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)| > 0.$$

В этом направлении многочисленные и интересные результаты принадлежат К. Зигелю, Коксма, К. Малеру, И. Попкену, Н. Фельдману, А. Шидловскому, А. Гельфонду, А. Бейкеру и другим авторам. Общие методы оценки и многие результаты Н. И. Фельдмана были в дальнейшем использованы в ряде работ этого направления. Мы остановимся здесь только на двух результатах, имеющих прямое отношение к проблеме Д. Гильберта. Более тридцати лет назад А. Гельфонд доказал неравенство

$$|t_1 \ln \alpha + t_2 \ln \beta| > e^{-\ln^q t}, \qquad q > 3, \quad t \geqslant t_0,$$

где t_1 и t_2 — целые числа, $|t_1| < t$, $|t_2| < t$, а α и β — алгебраические числа, логарифмы которых линейно независимы в рациональном поле. Такое неравенство может быть получено, если в доказательство чисто качественного утверждения трансцендентности $\frac{\ln \alpha}{\ln \beta}$ ввести элемент оценки приближения таких чисел рациональными дробями. Это неравенство было использовано в ряде теорем аналитической теории чисел и в некоторых задачах теории диофантовых уравнений. В самом конце 1966 г. Бейкер с помощью весьма остроумного усиления метода А. Гельфонда доказал общее неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{s} t_k \ln \alpha_k\right| > e^{-\ln^q t}, \quad q > s+1, \quad |t_k| \leqslant t, \quad t \geqslant t_0,$$

где α_k — алгебраические числа, их логарифмы линейно независимы в рациональном поле и t_k — целые, $\sum |t_k| > 0$.

В самое последнее время Н. И. Фельдманом неравенство Бейкера было весьма существенно усилено. Он доказал, что имеет место неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{s} \beta_k \ln \alpha_k\right| > H^{-\gamma},$$

где H — максимальная высота алгебраических чисел β_k, α_k — алгебраические, с линейно независимыми логарифмами, а γ от H не зависит.

Неравенство Бейкера, в котором, так же как и в частном его случае неравенства А. Гельфонда, при заданных $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ и q можно эффективно установить, с какого t оно будет верно, позволяет указать эффективную границу для величин решений уравнения А. Туэ, именно $P(x,y) = c$, где $P(x,y)$ — однородный многочлен степени $n > 2$ с целыми коэффициентами, а c — целое число. Эта проблема стояла много лет и считалась одной из труднейших. Все сведения о литературе по вопросам трансцендентности можно найти в статье Н. И. Фельдмана и А. Б. Шидловского «Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел», УМН 22, № 3 (1967).

Если направление в области теории трансцендентных чисел, начатое работами Эрмита и Линдеманна, обогатилось в работах А. Б. Шидловского очень общими результатами, то направление, начатое высказываниями Эйлера и Гильберта, пока обладает теоремами с не слишком широкими формулировками. Например, ничего не известно даже о линейной независимости чисел вида $\omega^{\alpha_k}, k=1,\dots,n$, где α_k — различные иррациональные алгебраические числа, а $\omega \neq 0, 1$ — алгебраическое число, в поле рациональных чисел, кроме случая $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = \alpha^2$, где α—кубическая иррациональность (случай квадратической иррациональности α есть следствие трансцендентности ω^α), и, наконец, трансцендентности числа $\prod_{k=1}^{s} \omega_k^{\alpha_k} = \alpha$ при алгебраических ω_k и α_k (Бейкер). Числа $\ln\omega_k$ линейно независимы в рациональном поле. Аналогичная задача не решена и для логарифмов алгебраических чисел — задача об их алгебраической независимости, кроме случая невозможности однородной связи двух логарифмов. Далее ничего пока не известно об арифметической природе постоянной Эйлера и чисел $\xi(2n+1)$, где $\xi(s)$ — функция Римана — Эйлера, а $n \geqslant 1$ — целые числа. Наконец, по-видимому, должна иметь место теорема о том, что если неполные частные разложения числа в непрерывную дробь ограничены и если дробь бесконечна, то это число является либо квадратической иррациональностью, либо числом трансцендентным.

К ВОСЬМОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. В. Линник

Исследования по гипотезе Римана продолжались и продолжаются по сие время, но пока получены результаты, весьма далекие от ожидаемого. Между тем убежденность математиков в том, что гипотеза верна, возрастает, особенно за последнее время, когда с помощью быстродействующей счетной техники обнаружено, что комплексные (так называемые критические) нули, мнимая часть которых не превосходит по абсолютной величине довольно большой константы, лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Последние результаты в этом направлении получены Н. А. Меллером [1] на быстродействующей машине «Стрела» в Вычислительном центре АН СССР; из них, в частности, следует, что нули с положительной мнимой частью и номерами от 15 000 до 35 337 лежат на прямой $\sigma = 1/2$. Подтверждением гипотезы Римана служит также важная теорема, доказанная в 1942 г. норвежским ученым Атле Селбергом [2]. Если обозначим $N(T)$ число критических нулей $\rho = \sigma + it$ при условии $|t| \leqslant T$, а $N_0(T)$ — число тех из них, которые лежат на прямой $\sigma = 1/2$, то гипотеза Римана может быть сформулирована так: $N_0(T)/N(T) = 1$, если $N(T) > 0$. А. Селберг доказал, что $N_0(T)/N(T) > \delta_0 > 0$ при $N(T) > 0$, где δ_0 — некоторая (довольно малая) константа. Гипотеза о том, что для нулей $\rho = \sigma + it$ имеем $\sigma < \alpha_0 < 1$, где $\alpha_0 < 1$ — какая-либо константа < 1, называется ослабленной гипотезой Римана. Эту гипотезу также не удалось доказать, но некоторое продвижение в этом направлении имеется. Оказалось, что оценка действительной части σ нулей $\rho = \sigma + it$ зависит от оценки величины $|\zeta(1 + it)|$. Последняя задача сводится к оценкам тригонометрических сумм. После изобретения И. М. Виноградовым способа оценки нужных сумм (И. М. Виноградов [3]), в 1936 г. Н. Г. Чудаков [4] получил на основе метода И. М. Виноградова сильную оценку $|\zeta(1+it)|$, в результате чего ему удалось указать оценку сверху для σ: $\sigma \leqslant \sigma_0(t) = 1 - \eta(t)$, где $\eta(t)$ хотя и медленно, но все же стремится к 0 при $|t| \to \infty$. Впоследствии эти идеи развивались многими авторами. Наилучшие результаты в этом направлении получены в 1958г. И. М. Виноградовым [5] и Н. М. Коробовым [6]: $\eta(t) \geqslant A(\ln t)^{-2/3}$. ζ-функции алгебраических полей изучались и изучаются; положение с аналогами гипотезы Римана здесь не лучше, чем для $\zeta(s)$. Однако для некоторых аналогов $\zeta(s)$ — так называемых конгруэнц-L-функций — Андре Вейлю [7] в 1941 г. удалось добиться решительного успеха — доказать аналог гипотезы Римана. Приведем простейший пример конгруэнц-L-функции и аналога гипотезы Римана. Рассматриваем целочисленный полином $f(x)$ по простому модулю p, неприводимый и с первым коэффициентом 1; пусть $\sigma_\nu = \sum\limits_g \chi((f, g))$ — сумма, распространенная по всем полиномам g степени ν по модулю p со старшим коэффициентом 1; здесь (f, g) — результант f и g; χ — характер (mod p). $L(f, \chi, s) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \sigma_\nu p^{-\nu s}$ (Re $s > 0$) будет конгруэнц-L-функцией (частного вида). Все ее нули (кроме, может быть, $s=0$) лежат на прямой $\sigma = 1/2$, т. е. для нее верен аналог гипотезы Римана. Изучение связи между конгруэнц-L-функциями и обычной дзета-функцией является одним из плодотворнейших и многообещающих направлений в этой области.

Д. Гильберт высказал мнение, что после исчерпывающего изучения формулы Римана будет найден подход к решению проблемы Гольдбаха и вообще уравнения $ax + by + c = 0$ в простых числах x и y. Последнее уравнение не решено и в настоящее время; условное решение его, если принять гипотезу Римана, также не удается. Наиболее далеко идущие результаты в направлении этой проблемы были получены Вигго Бруном по методу решета Эратосфена. Этот метод разрабатывался многими авторами; один из последних результатов в этом направлении получен А. И. Виноградовым [8]: все большие четные числа представляют собой суммы двух слагаемых, имеющих каждое не более трех простых множителей.

Тернарная проблема Гольдбаха, т. е. уравнение $x + y + z - d = 0$ в простых числах x, y, z в случае нечетного достаточно большого d полностью решена в 1937 г. И. М. Виноградовым [1]) [3]; уравнение $ax + by + cz - d = 0$ в простых числах решается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Меллер Н. А., О вычислениях, связанных с проверкой гипотезы Римана, ДАН СССР 129, № 2 (1958), 245—247.

[2] Selberg A., On the zeros of Riemann's zeta-function, Shr. Norshe Vid. Akad. Oslo, № 10, 1942.

[3] Виноградов И. М., Избранные труды, Изд-во АН СССР, 1952.

[4] Чудаков Н. Г., О нулях функции $\zeta(s)$, ДАН СССР 1, № 1 (1936), 187—201.

[5] Виноградов И. М., Новая оценка функции $\zeta(1 + it)$, ИАН СССР, сер. матем. 22, № 2 (1958), 161—169.

[6] Коробов Н. М., Новые теоретико-числовые оценки, ДАН СССР 119, № 3 (1958), 433—439.

[7] Weil A., Riemann hypothesis in function fields, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 27 (1941), 345—347.

[8] Виноградов А. И., Применение $\zeta(s)$ к решету Эратосфена, Матем. сб. 41 (83), № 1 (1957), 49—80.

---

[1]) Проблема, поставленная петербургским академиком X. Гольдбахом в письме к Эйлеру от 7 июня 1742 г., формулировалась следующим образом: доказать, что всякое целое число $\geqslant 6$ есть сумма трех простых. История вопроса изложена в работах: L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, т. 1, Washington, 1934, 421—425 (до 1923 г.) и Н. Г. Чудаков, О проблеме Гольдбаха, УМН 4 (1938), 14—33. Теорема, доказанная Виноградовым в 1937 г., давала решение проблемы Гольдбаха для достаточно больших нечетных чисел. В 1946 г. Ю. В. Линник (Матем. сб. (н. с.) 19 (61), № 1 (4) (1946), 3—8) получил другое доказательство теоремы Виноградова с привлечением методов теории аналитических функций. К проблематике задачи Гольдбаха тесно примыкает результат, полученный в 1930 г. Л. Г. Шнирельманом (Изв. Донск. политехн. ин-та 14, № 2—3 (1930), 3—28): каждое натуральное число N, кроме единицы, есть сумма не более чем C простых чисел, где C от N не зависит. У самого Шнирельмана $C = 800\,000$, трудами многих математиков величина этой константы понижена до 20 (Г. Шапиро и Д. Варга, 1950).— *Прим. ред.*

К ДЕВЯТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Д. К. Фаддеев

1°. *Закон взаимности Гаусса.* Самым простым проявлением закона взаимности является следующий факт, бывший известным еще П. Ферма. Среди простых множителей чисел $z^2 + 1$ при целых z появляются все простые числа, лежащие в прогрессии $4k + 1$, и отсутствуют простые вида $4k + 3$. Так, $2^2 + 1 = 5$; $8^2 + 1 = 5 \cdot 13$; $4^2 + 1 = 17$; $12^2 + 1 = 5 \cdot 29$ и т. д. Другими словами, сравнение $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ по простому модулю p разрешимо в том и только в том случае, когда $p = 2$ или $p \equiv 1 \pmod 4$. Этот факт обобщается следующим образом. Если целое число a не квадрат целого, то простые делители чисел $z^2 - a$, кроме 2 и делителей a, укладываются ровно в половину примитивных классов вычетов по модулю $4a$ (т. е. арифметических прогрессий $4ak + b$, $0 < b < 4a$, b взаимно просто с $4a$). Характеристика классов вычетов, содержащих простые делители чисел $z^2 - a$, составляет основное содержание закона взаимности Гаусса.

Введем термины и обозначения для формулировки этого закона. Целое число a называется квадратичным вычетом по простому модулю $p \neq 2$, если a не делится на p и сравнение $x^2 - a \equiv 0 \pmod p$ разрешимо. Если же сравнение $x^2 - a \equiv 0 \pmod p$ не имеет решений, то a называется квадратичным невычетом. Согласно «малой теореме Ферма», для любого целого a, не делящегося на p, выполняется сравнение $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, откуда $\left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod p$, и, следовательно, или $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p$ или $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$. Оказывается, — и это составляет содержание так называемого критерия Эйлера, — первое сравнение выполняется, если a есть квадратичный вычет, второе— если a есть квадратичный невычет. Свойства квадратичных вычетов и невычетов удобно формализуются при помощи символа Лежандра $\left(\frac{a}{p}\right)$[1], который является функцией от простого p и целого a, не делящегося на p, со значениями $+1$ или -1 в зависимости от того, является число a квадратичным вычетом или невычетом. Простейшие свойства квадратичных вычетов и невычетов даются формулами:

1) $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a_1}{p}\right)$, если $a \equiv a_1 (\mathrm{mod}\ p)$, так что $\left(\frac{a}{p}\right)$ как функция от a при фиксированном p имеет период p.

2) $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\mathrm{mod}\ p)$ (критерий Эйлера).

3) $\left(\frac{a_1 a_2}{p}\right)=\left(\frac{a_1}{p}\right)\left(\frac{a_2}{p}\right)$. Это свойство обозначает, что произведение двух квадратичных вычетов или двух невычетов есть вычет, а произведение вычета на невычет есть невычет.

Исследование поведения символа $\left(\frac{a}{p}\right)$ как функции от p при фиксированном a представляет собой вопрос, тождественный с вопросом об описании простых делителей $z^2 - a$. Ответ на него дается законом взаимности Гаусса. Он состоит из основной формулировки и двух дополнений:

1) Если p и q — два нечетных простых числа, то p для q и q для p будут одновременно квадратичными вычетами или невычетами, если хотя бы одно из этих чисел сравнимо с $+1$ по модулю 4. Если же оба сравнимы с -1 $(\mathrm{mod}\ 4)$, то одно из них — вычет для второго, второе — невычет для первого.

С помощью символа Лежандра это запишется так:

$$\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}\left(\frac{p}{q}\right).$$

2) $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Эта формула обозначает, что -1 есть квадратичный вычет для $p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$ и невычет для $p \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 4)$.

---

[1]) Этот символ введен А. М. Лежандром в 1808 г.—*Прим. ред.*

3) $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Эта формула дает, что 2 есть квадратичный вычет для $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ и невычет для $p \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Выясним, как закон взаимности решает задачу о значениях $\left(\frac{a}{p}\right)$ при фиксированном a. Будем считать, что a свободно от квадратов, что не нарушает общности. Пусть $a=(-1)^{\alpha}2^{\beta}q_1\ldots q_k$, $\alpha=0,\ 1$; $\beta=0,1$; $q_1,\ \ldots,q_k$ — нечетные простые. Тогда

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)^{\alpha}\left(\frac{2}{p}\right)^{\beta}\left(\frac{q_1}{p}\right)\cdots\left(\frac{q_k}{p}\right).$$

Значение первого множителя (при $\alpha=1$) зависит от класса p по модулю 4, второго (при $\beta=1$) — от класса p по модулю 8. Следующие множители $\left(\frac{q_i}{p}\right)$ в силу равенства $\left(\frac{q_i}{p}\right)=\left(\frac{p}{q_i}\right)(-1)^{\frac{q_i-1}{2}\cdot\frac{p-1}{2}}$ зависят от класса p по модулю $4q_i$. Поэтому, если нам известен класс вычетов, которому принадлежит p по модулю $4\cdot 2^{\beta}q_1\ldots q_k=4\,|a|$, то будут известны значения каждого множителя и значения символа $\left(\frac{a}{p}\right)$. Например, $\left(\frac{-5}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right)$, откуда легко получить, что $\left(\frac{-5}{p}\right)=+1$ при $p\equiv 1,3,\ 7,\ 9 \pmod{20}$ и $\left(\frac{-5}{p}\right)=-1$ при $p\equiv 11,\ 13,\ 17,\ 19 \pmod{20}$.

Гаусс справедливо придавал очень большое значение доказанному им закону взаимности и дал несколько его доказательств, основанных на совершенно различных идеях [1] [1]).

Для многих целей, в частности для дальнейших обобщений, оказывается удобной несколько более общая фор-

[1]) Квадратичный закон взаимности был установлен Л. Эйлером в 1772 г. (опубликован (без доказательства) в 1783 г. в I томе «Аналитических сочинений») и независимо от него А. М. Лежандром в 1785 г. (опубликован в Mém. Ac. Paris, 1785 (1788) и в «Опыте теории чисел» (1797—1798). Лежандр приводил доказательство закона, которое являлось неполным. Впервые полное доказательство квадратичного закона взаимности было получено К. Гауссом. Два доказательства опубликованы им в 1801 г. в 4-м отделе «Арифметических исследований» (всего им было найдено семь таких доказательств). — *Прим. ред.*

ма закона взаимности, связанная с символом Якоби. Символ Якоби $\left(\frac{a}{b}\right)$ определяется для нечетного положительного b и взаимно простого с ним целого a. По определению, если $b = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение b, то $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{q_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{a}{q_k}\right)^{\alpha_k}$. Символ Якоби обладает свойствами мультипликативности по числителю и по знаменателю:

$$\left(\frac{a_1 a_2}{b}\right) = \left(\frac{a_1}{b}\right)\left(\frac{a_2}{b}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{a}{b_1 b_2}\right) = \left(\frac{a}{b_1}\right)\left(\frac{a}{b_2}\right).$$

Закон взаимности, сформулированный в терминах символа Якоби, не отличается по форме от закона в терминах символа Лежандра и дается тремя формулами: $\left(\frac{-1}{b}\right) = (-1)^{\frac{b-1}{2}}$; $\left(\frac{2}{b}\right) = (-1)^{\frac{b^2-1}{8}}$; $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}$ (при нечетных положительных взаимно простых a и b).

2°. *Обобщения закона взаимности.* Понятие квадратичного вычета естественно обобщается. Число a, взаимно простое с натуральным числом n, называется вычетом степени n по простому модулю p, если сравнение $x^n \equiv a \pmod{p}$ имеет решение. Разумное обобщение закона взаимности на вычет n-й степени оказывается возможным при переходе от арифметики целых рациональных чисел к теории алгебраических чисел. Арифметика целых чисел в поле конечной степени над полем рациональных чисел Q в основном похожа на арифметику целых рациональных чисел с двумя существенными отличиями. Во-первых, в кольце целых алгебраических чисел поля имеется бесконечно много единиц, т. е. чисел, целых вместе с обратными (за исключением квадратичных мнимых полей). Это заставляет в вопросах делимости «склеивать» числа, отличающиеся единичными множителями, в один объект — «главный дивизор». Во-вторых, для спасения теоремы об однозначном разложении на простые множители приходится погрузить множество главных дивизоров в большее множество всех дивизоров («идеальных чисел»). Число классов дивизоров оказывается конечным, если объединить в классы дивизоры, отличающиеся на главные. Классы вычетов по простому дивизору $\mathfrak{p}$ образуют конечное поле, являющееся конечным расширением поля вычетов по простому числу p, делителем которого является простой дивизор $\mathfrak{p}$. Степень f этого расширения называется степенью (или порядком) $\mathfrak{p}$. Число p^f классов вычетов называется нормой $\mathfrak{p}$, $N\mathfrak{p} = p^f$. Имеет место аналог теоремы Ферма: $a^{N\mathfrak{p}-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$.

При обобщении закона взаимности на вычеты n-й степени нужно предполагать, что поле содержит примитивный корень ζ степени n из 1. В этом предположении, для простых $\mathfrak{p}$, не делящих n, будет $N\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{n}$. Аналог символа Лежандра определяется при помощи сравнения $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^k \equiv a^{\frac{1}{n}(N\mathfrak{p}-1)} \pmod{\mathfrak{p}}$.

Символ, аналогичный символу Якоби, определяется по формуле $\left(\frac{a}{b}\right) = \prod \left(\frac{a}{\mathfrak{p}_i}\right)^{m_i}$, если $(b) = \prod \mathfrak{p}_i^{m_i}$ для пары целых чисел a и b, причем b взаимно просто с an.

Закон взаимности для $n = 4$ в поле $Q(i)$ был установлен еще Гауссом [2], для $n = 3$ в поле $Q(e^{\frac{2\pi i}{3}})$ — Эйзенштейном [3]. Эйзенштейну [4] принадлежит также закон взаимности при простом n в поле $Q(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ для пары чисел, одно из которых рационально. Общий закон взаимности для простой степени n в поле $Q(e^{\frac{2\pi i}{n}})$ был установлен Куммером [5].

Формула Куммера такова:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{l^1(\alpha)l^{n-1}(\beta) - l^2(\alpha)l^{n-2}(\beta) + \ldots - l^{n-1}(\alpha)l^1(\beta)}.$$

Здесь α и β — целые числа поля $Q(e^{\frac{2\pi i}{n}})$,

$$\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod{(\zeta - 1)}, \quad l^i(\alpha) = \left[\frac{d^i \lg f(e^v)}{dv^i}\right]_{v=0},$$

где $f(t)$ — полином степени $n-1$ такой, что $\alpha = f(\zeta)$, $f(1) = 1$.

Куммер доказал закон взаимности для случая регулярного простого n (т. е. если число классов дивизоров поля $Q(\zeta)$ не делится на n), впоследствии Таками [6] установил, что это ограничение излишне.

3°. *Теория Гильберта.* Правая часть в формуле закона взаимности Гаусса и Куммера зависит лишь от вычетов по модулю 4 чисел a и b (для закона Гаусса) и от вычетов по модулю $(\zeta - 1)^n$ чисел α и β (для закона Куммера). Свойства чисел, зависящие лишь от содержащих их классов сравнений по модулю достаточно высокой степени простого дивизора $\mathfrak{p}$, называются локальными по отношению к этому дивизору. Таким образом, правая часть закона взаимности Гаусса и Куммера имеет локальный характер по отношению к простым делителям числа n.

Гильберту принадлежит заслуга построения теории, объясняющей это явление. Самим Гильбертом эта теория была построена до конца не в полной общности (для регулярного кругового поля [7] и для $n = 2$ [8] для комплексного поля алгебраических чисел, имеющего нечетное число классов дивизоров). В формулировке девятой проблемы Гильберт выражает надежду, что ее решение будет получено именно на пути развития его теории.

Изложим вкратце теорию Гильберта в применении к простейшей ситуации закона взаимности Гаусса. Для каждого простого числа p и целых чисел a и b вводится «символ норменного вычета» $\left(\frac{a,\, b}{p}\right)$ со значениями $+1$ и -1 в зависимости от того, разрешимо сравнение $x^2 - ay^2 \equiv b (\mathrm{mod}\, p^k)$ при любом k или нет. Символ $\left(\frac{a,\, b}{p}\right)$, таким образом, зависит лишь от локального по отношению к p поведения чисел a и b. Из определения ясно, что

$$\left(\frac{a,\, b}{p}\right) = \left(\frac{b,\, a}{p}\right), \quad \left(\frac{a,\, b_1 b_2}{p}\right) = \left(\frac{a,\, b_1}{p}\right)\left(\frac{a,\, b_2}{p}\right) \text{ и } \left(\frac{a,\, -a}{p}\right) = 1.$$

Из более подробного анализа следует, что если p нечетное, a и b не делятся на p, то $\left(\frac{a,\, b}{p}\right) = 1$. Далее, для нечетных a и b

$$\left(\frac{a,\, b}{2}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}\frac{b-1}{2}}; \qquad \left(\frac{a,\, 2}{2}\right) = (-1)^{\frac{a^2-1}{8}}.$$

Поэтому при фиксированных a и b символ $\left(\frac{a,\, b}{p}\right)$ принимает значение $+1$ при всех значениях p, кроме, может быть, $p = 2$ и делителей a и b.

Для нечетных положительных a и b будет

$$\prod_{p|a}\left(\frac{a,\, b}{p}\right)=\left(\frac{b}{a}\right); \quad \prod_{p|b}\left(\frac{a,\, b}{p}\right)=\left(\frac{a}{b}\right),$$

так что закон взаимности в терминах символа Якоби преобразуется в формулу

$$\prod_{p}\left(\frac{a,\, b}{p}\right)=1. \qquad (*)$$

Эта формула остается верной для любых целых a и b, из которых хотя бы одно положительно, и она равносильна закону взаимности вместе с дополнительными формулами. При распространении ее на любые целые a и b нужно добавить к левой части еще один сомножитель

$$\left(\frac{a,\, b}{p_\infty}\right)=(-1)^{\frac{\operatorname{sgn} a-1}{2}\frac{\operatorname{sgn} b-1}{2}},$$

зависящий от знаков чисел a и b.

Таким образом, согласно плану, намеченному Гильбертом, для решения проблемы требовалось дать надлежащее определение символа норменного вычета $\left(\frac{a,\, b}{\mathfrak{p}}\right)$ для любого n и любого поля, содержащего корень n-й степени из 1, установить формулу (*) для построенного символа и дать явные формулы для вычисления значений символа.

Тем самым этот план предвосхитил часто применяемый в настоящее время принцип разделения проблемы на две части — локальную и глобальную. Здесь первая состоит в определении и исследовании символов $\left(\frac{a,\, b}{\mathfrak{p}}\right)$, вторая — в установлении формулы (*).

Развитие теории поля классов (Т а к а г и [9], Х а с с е [10]), установление закона взаимности Артина (А р т и н [11]) и систематическое применение метода погружения поля алгебраических чисел в полные локальные поля (пополнения поля алгебраических чисел по архимедовым и неархимедовым метрикам) (Хассе) привели к реализации плана Гильберта, однако без установления явных формул для символа норменных вычетов. Наиболее совершенным на этом этапе (Х а с с е [12]) следует считать определение символа $\left(\frac{a,\,b}{\mathfrak{p}}\right)$ через инвариант алгебры $k(A, B)$ с таблицей умножения $A^n = a$, $B^n = b$, $BA = AB\zeta$, где ζ — примитивный корень n-й степени из 1. Это определение эквивалентно более современному определению в терминах теории когомологий в группах. При таком определении формула (*) оказалась верной без всяких ограничений.

Эти способы определения символа $\left(\frac{a,\,b}{\mathfrak{p}}\right)$ не дают, однако, явных формул для вычисления его значений, так что проблема Гильберта о явной форме закона взаимности в виде выражений типа формул Гаусса и Куммера оставалась открытой.

4°. *Закон взаимности Шафаревича.* Для построения явной формулы для закона взаимности степенных вычетов степени n достаточно ограничиться случаем $n = p^k$, p простое, и дать явную формулу $\left(\frac{a,\,b}{\mathfrak{p}}\right)$ для простых дивизоров $\mathfrak{p}$, делящих p. Такая формула была получена И. Р. Шафаревичем в 1948 г. [13] и опубликована в работах [14] и [15]. При описании формулы Шафаревича мы должны пользоваться простейшими фактами теории локальных полей.

Пусть N — степень локального поля $k_\mathfrak{p}$ над полем p-адических чисел Q_p, $N = ef$, где f — степень инерции, e — степень разветвления поля $k_\mathfrak{p}$. Всякий элемент a поля $k_\mathfrak{p}$ допускает разложение $a = \pi^m \omega^s \eta$, где π — простой элемент поля, ω — примитивный корень степени $p^f - 1$ из 1, $\eta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Числа η называются главными единицами. И. Р. Шафаревич исходит из полученного им канонического разложения главных единиц:

$$\eta = E(\alpha) \prod_i E(\alpha_i, \pi^i).$$

Здесь α и α_i — целые числа максимального неразветвленного подполя $\mathfrak{K}$ поля $k_\mathfrak{p}$; его степень относительно Q_p равна f. Число i меняется от 1 до $\frac{pe}{p-1}$ с пропуском всех чисел этого интервала, делящихся на p. Числа $E(\alpha_i, \pi^i)$ являются значениями специальной функции $E(\alpha, x) = \exp(\alpha x + \alpha^{(p)} p^{-1} x^p + \alpha^{(p^2)} p^{-2} x^{p^2} + \ldots)$, определенной для всех целых $\alpha \in \mathfrak{K}$ и $x \in k_\mathfrak{p}$, $x \equiv 0\ (\mathfrak{p})$. Символом $\alpha^{(p)}$ обозначен результат применения автоморфизма Фробениуса к числу $\alpha \in \mathfrak{K}$. Число $E(\alpha)$ имеет еще более сложное описание. Важно подчеркнуть, что $E(\alpha)$ всегда примарно, т. е. такое, что поле $k_{\mathfrak{p}}(\sqrt[p^k]{E(\alpha)})$ не разветвлено над $k_{\mathfrak{p}}$. Примарные числа, рассматриваемые с точностью до p^k-х степеней, образуют циклическую группу порядка p^k. Запись примарного числа θ в виде $E(\alpha)$ зависит от выбора в поле $k_{\mathfrak{p}}$ примитивного корня p^k-й степени из 1, однако число $\chi E(\alpha) = \zeta^{\mathrm{Sp}(\alpha)}$ зависит только от самого примарного числа θ. Множитель $E(\alpha)$ в каноническом разложении главной единицы η может быть назван примарной проекцией числа η.

Каждой паре объектов $\lambda = \pi^a\omega^r E(\alpha) \prod E(\alpha_i, \pi^i)$ и $\mu = \pi^b\omega^s E(\beta) \prod E(\beta_j, \pi^j)$ сопоставляется примарное число $(\lambda, \mu) = E(a\beta - b\alpha + \nu) = (E(\beta))^a (E(\alpha))^{-b} E(\nu)$, где $E(\nu)$ — примарная проекция числа $\prod\limits_{i,j} E(i\alpha_i\beta_j, \pi^{i+j})$. Символ норменного вычета $\left(\frac{\lambda,\mu}{\mathfrak{p}}\right)$ оказывается равен $\chi(\lambda,\mu)$.

Формула для (λ,μ) аналогична формуле вычисления вычета абелева дифференциала $\mu d\lambda$.

Исследование свойств символа (λ, μ) и установление его связи с символом норменного вычета дано И. Р. Шафаревичем (при $k = 1$) прямо из определения его символа, без использования известных ранее свойств символов норменных вычетов. Это открыло возможность для нового обоснования локальной теории поля классов. Основную трудность в исследовании представило доказательство независимости символа (λ, μ) от выбора простого элемента π.

Для $n = p^k$ при любом k доказательства были проведены А. И. Лапиным [16] прямо из определения символа Шафаревича и М. Кнезером [17] с использованием свойств символа норменного вычета. А. И. Лапин [18], [19] осуществил также обоснование теории поля классов на основе закона взаимности Шафаревича.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gauss C. F., Disquisitiones arithmeticae, Werke 1, Göttingen, 1870.

[2] Gauss C. F., Theorie residuorum biquadraticorum, commentatio prima et secunda, Werke 2, Göttingen, 1863, 65 и 93.

[3] Eisenstein G., Beweis des Reziprozitätsgesetzes für die Kubischen Reste in der Theorie der aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten komplexen Zahlen, J. Math. 27 (1844).

[4] Eisenstein G., Beweis der allgemeinsten Reziprozitätsgesetze zwischen reellen und komplexen Zahlen, Ber. K. Akad. Wiss., Berlin, 1850.

[5] Kummer E., Ueber allgemeine Reziprozitätsgesetze für beliebig hohe Potenzseste, Ber. K. Akad. Wiss., Berlin, 1850.

[6] Takagi T., On the law reciprocity in the cyclotomic corpus, Proc. of the Phys.-math. Soc. of Japan, 1922.

[7] Hilbert D., Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 4 (1897).

[8] Hilbert D., Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 6 (1899).

[9] Takagi T., Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörper, J. Coll. Science, Tokyo, 41, 9 (1920).

[10] Hasse H., Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der theorie der algebraischen Zahlkörper, Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 35 (1926); 36 (1927); 39 (1930).

[11] Artin E., Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. 5 (1928).

[12] Hasse H., Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Ann. 107 (1935), 731—760.

[13] Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, УМН 3, № 3 (25) (1948), стр. 165.

[14] Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, ДАН СССР 64 (1949), 25—28.

[15] Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, Матем. сб. 26 (68) (1950), 113—146.

[16] Лапин А. И. Теория символа Шафаревича, ИАН СССР, сер. матем. 17 (1953), 31—50.

[17] Kneser M., Zum expliziten Reziprozitätsgesetz von Šafarevič, Math. Nachr. 6, № 2 (1951), 89—96.

[18] Лапин А. И., К теории символа Шафаревича, ИАН СССР, сер. матем., 18 (1954), 145—158.

[19] Лапин А. И., Общий закон взаимности и новое обоснование теории полей классов, ИАН СССР, сер. матем. 18 (1954), 335—378.

К ДЕСЯТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. И. Хмелевский

Десятая проблема Гильберта относится к одной из самых древних областей математики — решению алгебраических уравнений с целыми коэффициентами в целых числах. Такие уравнения называют диофантовыми в память греческого математика Диофанта, рассмотревшего некоторые из них. Гильберт следующим образом формулирует эту проблему.

«10. Решение проблемы разрешимости для произвольного диофантова уравнения.

Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных и с целыми рациональными коэффициентами; требуется указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение решение в целых рациональных числах или нет».

Фундаментальный труд L. E. Dickson, «History of the Theory of Numbers» т. 2, «Диофантовы уравнения», дает представление о том, какой интерес испытывали математики всех времен к решению диофантовых уравнений.

Целочисленными решениями алгебраических уравнений интересовались еще античные математики; например, в связи с теоремой Пифагора они рассматривали уравнение $x^2 + y^2 = z^2$; Евклид (III в. до н. э.) приводит формулы, позволяющие найти все целочисленные решения этого уравнения. Отдельные виды уравнений и систем уравнений второй степени с двумя неизвестными рассматривал Диофант (III в. н. э.). Например, он рассмотрел уравнение $ax^2 + bx + c = y^2$ и решил его для некоторых частных случаев. Работы Диофанта впоследствии легли в основу работ Ферма, Эйлера и других математиков по теории чисел [1]).

И в эпоху развития анализа диофантовы уравнения привлекали внимание выдающихся ученых. Ферма, Эйлер, Лагранж, Гаусс внесли свой вклад в теорию диофантовых уравнений. В частности, Ферма выдвинул знаменитую гипотезу о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$ не имеет целочисленных решений. Наибольшего успеха добился Лагранж. Благодаря трудам Ферма, Валлиса, Эйлера и других Лагранжу (1768 г.) удалось полностью исследовать вопрос об отыскании целочисленных решений любого уравнения второй степени с двумя неизвестными. Позднее другое изложение результата Лагранжа дал Гаусс [1].

В XIX в. различные ученые предпринимали попытки решения диофантовых уравнений степени выше второй, в частности, в связи с проблемой Ферма. Однако сколько-нибудь общих результатов здесь получено не было; рассматривались лишь отдельные виды уравнений, для решения которых придумывался какой-либо специальный прием. По-видимому, и сам Гильберт пытался найти подходы к решению диофантовых уравнений.

Таким образом, несмотря на усилия многих поколений математиков, проблема решения диофантовых уравнений оставалась открытой. Вместе с тем было ясно, что продвижение в этой области неизбежно связано с созданием глубоких теорий, значение которых, по-видимому, не ограничивалось бы только диофантовыми уравнениями (классический пример: исследования Куммера по проблеме Ферма, приведшие его к важному понятию идеала). В этом, возможно, одна из причин, побудивших Гильберта включить проблему диофантовых уравнений в число наиболее важных проблем, которые XIX в. оставил двадцатому. Таким образом, если рассматривать замысел Гильберта достаточно широко, то десятой проблемой Гильберт нацеливал математиков на исследование диофантовых уравнений.

---

[1]) По этому поводу см. работы И. Г. Башмаковой: Диофант и Ферма (к истории метода касательных и экстремумов), ИМИ, вып. 17, «Наука», 1966, 185—204 и «Diophante et Fermat», Rev. histoire sci. XIX, 1966, 289—306.

Что касается формулировки этой проблемы, данной самим Гильбертом, то здесь надо сказать следующее. Гильберт требовал отыскания «общего метода» для решения диофантовых уравнений. По-видимому, он считал, что такой метод рано или поздно будет найден; во всяком случае, в принципе такой метод существует, надо только его найти. Вопрос о том, что такого метода вообще не существует, во времена Гильберта вряд ли мог возникнуть: точное понятие алгорифма появилось в математике позднее. Теперь точное понятие алгорифма является предметом изучения новой области математики — теории алгорифмов. Вместе с уточнением понятия алгорифма появилась принципиальная возможность рассматривать вопрос о несуществовании алгорифмов, обладающих определенными свойствами. В настоящее время развиваются методы доказательства теорем о невозможности тех или иных алгорифмов. Имеются примеры массовых математических проблем, для которых невозможны алгорифмы, искомые в этих проблемах. «Общий метод», о котором говорит Гильберт, мы теперь понимаем как алгорифм. Если подойти теперь к проблеме Гильберта с алгорифмической точки зрения, то ее можно сформулировать следующим образом: «Существует ли алгорифм, который по данному многочлену $P(x_1,\ldots,x_n)$ с целыми коэффициентами распознавал бы, имеет уравнение $P = 0$ решения в целых числах или не имеет». Априори возможно как положительное (построение алгорифма), так и отрицательное (доказательство невозможности алгорифма) решение проблемы Гильберта. Во времена Гильберта, как мы уже отмечали, точного понятия алгорифма не существовало, и речь могла идти только о положительном решении проблемы.

Вскоре после того, как Гильберт сформулировал свою проблему, появилась одна из самых замечательных работ в области диофантова анализа (так называют иногда исследование диофантовых уравнений) — работа А. Туэ [2]. Используя полученную им оценку для приближения алгебраических чисел рациональными, Туэ доказал, что уравнение $f(x, y) = c$, где c — целое число, f — неприводимая форма [1]) степени $\geqslant 3$, не может иметь бесконечно

[1]) Формой называется многочлен, у которого все слагаемые имеют одинаковую степень. Неприводимый многочлен — это многочлен, который не разлагается на множители с целыми коэффициентами.

много целочисленных решений. Однако ни метод Туэ, ни более поздние методы не давали верхних оценок для границ, в которых должны лежать решения. (Противоречие получается из-за того, что решений бесконечно много, но не из-за того, что решения очень большие.) В силу последнего обстоятельства из теоремы Туэ не вытекает алгорифм для решения уравнения $f(x,y) = c$. К настоящему времени алгорифм неизвестен даже для случая, когда степень многочлена f равна трем, хотя еще в 1922 г. Делоне доказал ([3], стр. 302), что диофантово уравнение $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 1$ имеет не более пяти решений, и предложил некоторый способ распознавания, имеет ли уравнение хотя бы одно решение. Однако доказательства того, что этот способ дает ответ во всех случаях, до сих пор не было. Недавно Бейкер (Phil. Trans. Roy. Math. Soc., London, July — August 1968) нашел верхнюю границу величины решений уравнения $f(x, y) = c$, где c—целое число, f — неприводимая форма степени $\geqslant 3$. Тем самым для уравнений указанного типа построен разрешающий алгорифм.

В 1938 г. Сколем предложил довольно общий метод исследования диофантовых уравнений вида $P(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = 0$, где P — неприводимый многочлен, разлагающийся в некотором расширении поля рациональных чисел в произведение $m > n$ линейных множителей (неполная разложимая форма) и удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям. Метод Сколема изложен в [4].

До появления теории алгорифмов исследования по проблеме Гильберта велись, если так можно выразиться, в одном направлении: найти алгорифм, которого требовал Гильберт, хотя бы для некоторых частных классов диофантовых уравнений. Однако уже проблема решения уравнений с двумя неизвестными, несмотря на классический результат Туэ, не поддавалась никаким усилиям. (Для уравнений с одним неизвестным разрешающий алгорифм весьма просто вытекает из теоремы Безу.)

В середине 30-х годов (1935, 1936 гг.) в математической логике установилось точное понятие алгорифма и были получены первые примеры неразрешимых алгорифмических проблем, сначала в области математической логики (Черч, Тьюринг, 1936 г.), а позднее и алгебры (Пост, А. А. Марков [5], 1947 г). В 1952 г. П. С. Новиковым была доказана неразрешимость важной алгорифмической проблемы теории групп — так называемой проблемы тождества слов.

Эти примеры, с одной стороны, и трудности, связанные с решением диофантовых уравнений, с другой стороны, вызвали предположение, что алгорифма, которого требовал Гильберт, не существует. Это предположение вместе с развитием самой теории алгорифмов стимулировало реальные попытки дать отрицательное решение десятой проблемы Гильберта. Начиная с 1953 г., появилась серия работ американских математиков [6]—[10], авторам которых удалось доказать неразрешимость некоторых алгорифмических проблем из области арифметики, в частности проблемы разрешимости показательно-диофантовых уравнений, близкой по формулировке к проблеме Гильберта.

Опишем в общих чертах метод, который применяется в этих исследованиях.

Заметим сначала, что из теоремы Лагранжа о представлении любого натурального числа суммой четырех квадратов целых чисел вытекает, что если есть алгорифм для отыскания целочисленных решений диофантовых уравнений, то он есть и для отыскания натуральных решений, и наоборот. В силу этого при рассмотрении проблемы Гильберта достаточно интересоваться решением диофантовых уравнений в натуральных числах.

Будем рассматривать множества натуральных чисел. Множество M называется разрешимым, если существует алгорифм, распознающий по любому натуральному числу, принадлежит это число множеству M или не принадлежит. Множество M называется перечислимым, если существует вычислимая арифметическая функция, множество значений которой совпадает с M. В теории алгорифмов доказывается, что можно построить перечислимое множество, не являющееся разрешимым. С другой стороны, всякое перечислимое множество M можно задать арифметической формулой [1]) $\Phi(x)$ с одной свободной переменной в том смысле, что $x \in M$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x)$ —

[1]) То есть формулой, которая получается с помощью логических связок & (и), $\vee$ (или), $\supset$ (если..., то...), $\neg$ (не) и кванторов $\forall x$ (для любого x), $\exists x$ (существует x), применяемых к уравнениям вида $P = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Переменные, на которые не распространяется действие кванторов, называются свободными.

истинная формула. На языке математической логики это записывается в виде эквивалентности $x \in M \Leftrightarrow \Phi(x)$. Возникает вопрос, нельзя ли задать любое перечислимое множество, используя не все связки и кванторы, а только некоторые из них. Множество M натуральных чисел называется диофантовым, если можно построить многочлен с целыми коэффициентами $P(t, x_1, \ldots, x_n)$ такой, что

$$t \in M \Leftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_n (P(t, x_1, \ldots, x_n) = 0). \qquad (1)$$

Другими словами, M есть множество тех значений параметра t, при которых уравнение $P(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$ разрешимо в натуральных числах $x_1, \ldots, x_n$. Если бы оказалось, что всякое перечислимое множество является диофантовым, то в силу существования неразрешимого перечислимого множества мы могли бы построить и неразрешимое диофантово множество, т. е. мы имели бы многочлен $P(t, x_1, \ldots, x_n)$ такой, что не существует алгорифма, распознающего по данному t, имеет ли решение уравнение $P(t, x_1, \ldots, x_n) = 0$. Таким образом, проблема Гильберта была бы неразрешима уже для многочленов вида $P(0, x_1, \ldots, x_n)$, $P(1, x_1, \ldots, x_n)$, $P(2, x_1, \ldots, x_n), \ldots$ и тем более для всех многочленов. Итак, если бы всякое перечислимое множество было представимо в виде (1), то проблема Гильберта была бы неразрешима.

Авторам работ [6]—[10] удалось получить ряд представлений перечислимых множеств с помощью арифметических формул специального вида и извлечь из этих представлений следствия о невозможности некоторых алгорифмов в теории чисел. Одним из наиболее интересных результатов является невозможность алгорифма для решения так называемых показательно-диофантовых уравнений. Это — уравнения вида $P = Q$, где P, Q — выражения, полученные из натуральных чисел и переменных с помощью сложения, умножения и возведения в степень. Девис, Путнам и Робинсон [7] доказали, что всякое перечислимое множество представимо в виде (1), если допустить в правой части, помимо сложения и умножения, еще и действие возведения в степень, и отсюда вывели теорему о невозможности алгорифма, распознающего по данному показательно-диофантову уравнению, имеет оно решение в области натуральных чисел или не имеет.

Используя несколько иное представление перечислимых множеств, Путнам [8] доказал, что не существует алгорифма, распознающего по данному многочлену с целыми коэффициентами, представляет этот многочлен все натуральные числа или нет [1]).

Р. Робинсон [9] доказал, что всякое перечислимое множество M представимо в виде $(x \in M) \Leftrightarrow \exists y \forall z \leqslant y \exists x_1 \ldots \exists x_4 (P(x, y, z, x_1, \ldots, x_4) = 0)$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Отсюда следует, что невозможен алгорифм, распознающий по данному многочлену $P(y, z, x_1, x_2, x_3, x_4)$ с шестью (!) неизвестными, существует ли такое y, что уравнение $P(y, z, x_1, \ldots, x_4) = 0$ разрешимо относительно x_1, x_2, x_3, x_4 при всяком z, $0 \leqslant z \leqslant y$. Девис и Путнам [10] доказали также неразрешимость следующей проблемы. Обозначим через R кольцо многочленов от одной переменной. Невозможен алгорифм, распознающий по данному полиному $P(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из R, имеет уравнение $P = 0$ решения в R или не имеет. Недавно Девис [11] получил следующий интересный результат. Рассмотрим диофантово уравнение $x^3 - zy^3 = 1$. Если для любого $k \geqslant 0$ существует решение этого уравнения, такое, что $x > z^k$, то десятая проблема Гильберта неразрешима. Любопытно, что еще в 1916 г. Делоне [3] доказал, что при фиксированном z уравнение $x^3 - zy^3 = 1$ имеет, кроме решения $(1, 0)$, не более одного решения в целых числах. Однако каких-либо количественных оценок, указывающих зависимость x от z, мы не имеем.

Остроумным рассуждением Путнам [8] доказал, что всякое диофантово множество совпадает с множеством натуральных значений некоторого многочлена (или с множеством целых значений некоторой рациональной дроби). Отсюда следует, что если все перечислимые множества являются диофантовыми, то всякое перечислимое множество есть множество натуральных значений некоторого многочлена. В частности, такими будут множества всех простых чисел, всех чисел вида $n!$, 2^n и т. п. Эти «маловероятные» результаты могут рассматриваться как «доводы» против гипотезы о том, что всякое перечислимое множество является диофантовым.

---

1) Многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ представляет число a, если уравнение $P(x_1, \ldots, x_n) = a$ имеет целочисленные решения.

Другой подход к отрицательному решению десятой проблемы Гильберта, не связанный с диофантовым представлением перечислимых множеств, был предложен А. А. Марковым. Этот подход основан на связи диофантовых уравнений с уравнениями в свободной группе или полугруппе. Уравнения в свободной полугруппе (или, короче, уравнения в словах) определяются следующим образом. Пусть $(a_1, \ldots, a_k)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ — непересекающиеся алфавиты. Равенство $\Phi = \Psi$, где Φ, Ψ — слова в алфавите $(a_1, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_n)$, называется уравнением в словах с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$. Решением уравнения $\Phi = \Psi$ называется такой набор $(X_1, \ldots, X_n)$ слов в алфавите $(a_1, \ldots, a_k)$, что после подстановки слова X_i вместо неизвестной x_i в слова Φ, Ψ получим графически равные слова. Известно [12], что совокупность матриц второго порядка с натуральными элементами и определителем 1 образует свободную полугруппу с двумя образующими $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Исходя из этого, нетрудно всякой системе Σ уравнений в словах сопоставить диофантово уравнение $P = 0$ так, что система Σ имеет решения тогда и только тогда, когда уравнение $P = 0$ разрешимо в натуральных числах. Отсюда следует, что если есть алгорифм для решения диофантовых уравнений, то он есть и для решения уравнений в словах. Если же алгорифма для решения уравнений в словах нет, то его нет и для диофантовых уравнений. Аналогичная связь существует между диофантовыми уравнениями и уравнениями в свободной группе в силу результата [13], согласно которому совокупность матриц второго порядка с целочисленными элементами и определителем 1 образует свободную группу с двумя образующими $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Исследованием уравнений в свободной группе и полугруппе занимался ряд авторов. Надо сказать, что полученные здесь результаты имеют пока положительный характер. Для уравнений в словах с двумя неизвестными разрешающий алгорифм построил А. А. Марков, позднее (1966 г.) Ю. И. Хмелевский нашел алгорифм для решения уравнений в словах с тремя неизвестными. Системы уравнений с одним неизвестным в свободной группе изучал Лоренц. Он нашел разрешающий алгорифм и изучил структуру решений таких систем. Однако уже для уравнений с двумя неизвестными в свободной группе не сделано, по существу, ничего.

По поводу исследований проблемы Гильберта в положительном направлении предоставим слово Дэвенпорту. Он пишет [19]: «Вероятно, ни одна из областей теории чисел не сталкивается с такими трудностями, как теория диофантовых уравнений... При беглом взгляде на обширную литературу создается впечатление, что установлено с помощью различных искусственных приемов много результатов, связанных с отдельными уравнениями; кажется весьма затруднительным объединить эти результаты в общую теорию. Иногда, решив уравнение искусственным приемом, удается создать общую теорию, связанную с найденным решением, разумно объясняющую возникновение этого решения и показывающую, насколько найденное решение можно обобщить. Но внутренние трудности предмета настолько велики, что область применения такой теории обычно очень ограничена. Если удается развить достаточно глубокую теорию диофантовых уравнений специального вида (например, теорию квадратичных форм), то такая теория получает право на самостоятельное существование». Все же математикам XIX—XX вв. удалось найти общие методы для решения диофантовых уравнений первой и второй степени. (См. по этому поводу [14]. Там же имеется обширная библиография.) Собственно уравнения первой степени умели решать и раньше (Баше, XVII в.), а вот решение уравнений второй степени — заслуга математиков XIX и XX вв. Известен также алгорифм для решения в целых числах систем уравнений первой степени (см. [14]). Однако уже для системы уравнений $x^2 + ay^2 = u^2$, $x^2 - ay^2 = v^2$ до сих пор неизвестен алгорифм, распознающий по данному целому a, имеет система целочисленные решения или нет.

В связи с положительным решением проблемы Гильберта для уравнений первой и второй степени интересно отметить, что решение произвольного диофантова уравнения сводится к решению диофантовых уравнений четвертой степени. Для этого, вводя новые неизвестные, сводим произвольное диофантово уравнение к системе, состоящей из уравнений вида $x \pm y = \lambda$, $xy = \lambda$, $0 = \lambda$, а затем свертываем эту систему в одно уравнение, пользуясь тем, что система уравнений $P_i = 0$ $(i = 1,\dots, m)$

эквивалентна уравнению $\sum_{i=1}^{m} P_i^2 = 0$. Мы получим уравнение четвертой степени, которое имеет целочисленные решения тогда и только тогда, когда их имеет первоначальное уравнение. При этом в новом уравнении каждая неизвестная встречается не более чем во второй степени.

Таким образом, для решения проблемы Гильберта остается решить уравнения третьей и четвертой степени. О трудностях, связанных с решением таких уравнений, уже говорилось. В последнее время получен ряд интересных результатов, относящихся к решению диофантовых уравнений $P(x_1,\ldots, x_n)= 0$, где P — форма от n переменных [1]). Одна из основных гипотез теории диофантовых уравнений состоит в том, что если число переменных достаточно велико по сравнению со степенью формы $P(x_1,\ldots$ $\ldots, x_n)$, то уравнение $P = 0$, вообще говоря, имеет нетривиальное (т. е. ненулевое) решение. Более точная гипотеза Артина утверждает, что форма нечетной степени d от n переменных имеет нетривиальный нуль, если $n > d^2$. Гипотеза Артина доказана пока только для $d = 2$. Берч [16] доказал, что форма нечетной степени представляет нуль, если число ее переменных достаточно велико по сравнению со степенью. Дэвенпорт [17] доказал, что всякая кубическая форма от шестнадцати переменных имеет нетривиальный нуль. Берч [18] рассматривает также вопрос о представлении нуля системой форм степени d, в которых число переменных велико по сравнению со степенью. Упомянутые работы связаны с представлением нуля формами. Вопрос о представлении нуля многочленами степени выше второй изучен совсем мало. Дэвенпорт и Льюис [15] рассматривали уравнение третьей степени $P(x_1,\ldots, x_n) = 0$ в предположении, что форма третьей степени, входящая в P, является суммой произведений форм первой и второй степени. Ряд авторов занимается исследованием конкрет-

---

[1]) Решение таких уравнений связано с другим важным направлением диофантова анализа — решением уравнений в рациональных числах. Отыскание рациональных решений диофантовых уравнений как раз сводится к отысканию целых решений уравнения $P = 0$, где P — форма с целыми (или рациональными) коэффициентами.

ных диофантовых уравнений степени выше второй. (См., например, [26]).

В последнее время получен ряд результатов алгорифмического характера, относящихся к решению неопределенных уравнений над полем p-адических чисел. Это представляет известный интерес и для диофантовых уравнений, поскольку между диофантовым и p-адическим анализом имеется определенная связь. Она состоит в следующем. Рассмотрим диофантово уравнение $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и сравнение $P \equiv 0 \pmod m$. Если уравнение имеет решение, то сравнение разрешимо при любом модуле m. Обратное, вообще говоря, неверно. Но иногда верно и обратное, например, если P — квадратичная или линейная форма. Таким образом, вопрос о том, когда сравнение $P \equiv 0 \pmod m$ разрешимо при всех m, имеет значение для выяснения вопроса о том, когда уравнение $P = 0$ имеет решение. В частности, в связи с десятой проблемой Гильберта интересно, существует ли алгорифм, распознающий по данному многочлену P с целыми коэффициентами, разрешимо сравнение $P \equiv 0 \pmod m$ при всех m или нет.

В 1906 г. Гензель ввел p-адические числа и доказал, что сравнение $P \equiv 0 \pmod m$ разрешимо при всех m тогда и только тогда, когда уравнение $P = 0$ разрешимо в p-адических числах при всех p (p — простое число). В связи с этим интересно [20], что существует алгорифм, распознающий по данному многочлену P с целыми коэффициентами, имеет ли уравнение $P = 0$ p-адические решения. Более того ([21], [22]) существует алгорифм, распознающий по любой арифметической формуле, истинна эта формула в поле p-адических чисел (при фиксированном p) или нет. В частности, это относится к формулам вида $\exists x_1, \ldots, \exists x_n \ (P(x_1, \ldots, x_n) = 0)$, выражающим разрешимость диофантовых уравнений в p-адических числах. Однако вопрос о том, существует ли алгорифм, распознающий по данному многочлену P с целыми коэффициентами, разрешимо ли уравнение $P = 0$ в p-адических числах при всех p, оставался открытым. Существование такого алгорифма доказано недавно Аксом. (См. J. A x, The elementary theory of finite fields, Ann. Math. 88, № 2 (1968), 239—271.)

Для современного подхода к диофантовым проблемам, в частности к проблеме Гильберта, с положительной точки зрения вообще характерны широкая постановка задач, выход за пределы области целых чисел, использование новейших идей алгебры, топологии, анализа. Обсуждение диофантовых проблем в этом плане можно найти в докладе Манина [23] и обзорной статье Ленга [24]. О перспективе применения новых методов в диофантовом анализе говорит также Дьедонне [25].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гаусс К. Ф., Труды по теории чисел, Изд-во АН СССР, 1959, 151—468.

[2] Thue A., Bemerkungen über Gewisse Naherungsbrüche algebraischer Zahlen, Christiania, 1908. Videnskabs-selskabets skrifter. I Math. naturv. Klasse, № 3 (1908) (см. также [3]).

[3] Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К., Теория иррациональностей третьей степени, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 11, Изд-во АН СССР, 1940.

[4] Боревич З. И., Шафаревич И. Р., Теория чисел, «Наука», 1964.

[5] Марков А. А., Теория алгорифмов, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 42, Изд-во АН СССР, 1954.

[6] Девис М., Арифметические проблемы и рекурсивно-перечислимые предикаты, Математика (сб. перев.) 8, № 5 (1964).

[7] Девис М., Путнам Х., Робинсон Дж., Проблемы разрешимости для показательно-диофантовых уравнений, там же.

[8] Путнам Х., Об одной неразрешимой проблеме арифметики, там же.

[9] Робинсон Р., Арифметическое представление рекурсивно-перечисленных множеств, там же.

[10] Девис М., Путнам Х., Диофантовы множества в полиномиальных кольцах, там же.

[11] Davis M., Diophantine equations and recursively enumerable sets. «Automata theory», Acad. Press, New York — London, 1966, 146—157.

[12] Детловс В. К., Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 52, Изд-во АН СССР, 1958, 103—107.

[13] Санов И. И., Свойство одного представления свободной группы, ДАН СССР 57, № 7 (1947).

[14] Skolem T., Diophantische Gleichungen, Berlin, 1938.

[15] Davenport H., Lewis, Non-homogeneous cubic equations, J. London Math. Soc. 39, № 4 (1964), 657—671.

[16] Birch B. J., Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables, Mathematika 4, № 8 (1967), 102—105.

[17] Davenport H., Cubic forms in sixteen variables, Proc. Roy. Soc. A 272 (1963), 285—303.

[18] Birch B. J., Forms in many variables, Proc. Roy. Soc. A 265 (1962), 245—263.

[19] Дэвенпорт Г., Высшая арифметика, «Наука», 1965, стр. 154.

[20] Nerode A., A decision method for p-adic integral zeros of diophantine equations, Bull. Amer. Math. Soc. 69, № 4 (1963).

[21] Акс Дж, Кочен С., Диофантовы проблемы над конечными полями, Математика (сб. перев.) 9, № 5 (1966).

[22] Ершов Ю. Л., Об элементарной теории максимальных нормированных полей, ДАН СССР 165, № 1 (1965).

[23] Манин Ю. И., Диофантовы уравнения и алгебраическая геометрия, Тр. IV Всесоюзного математического съезда, т. II, 15—21.

[24] Ленг С., Некоторые результаты и предположения в теории диофантовых уравнений, Математика (сб. перев.) 5, № 6 (1961).

[25] Дьедонне Ж., Современное развитие математики, Математика (сб. перев.) 10, № 3 (1966).

[26] Серпинский В., О решении уравнений в целых числах, Физматгиз, 1961.

К ОДИННАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. И. Манин

Формулировка этой проблемы может быть истолкована в узком смысле, как задача перенести на поля алгебраических чисел результаты теории квадратичных форм над полем рациональных чисел, известные к 1900 г. Более широкое толкование вынуждает отнести к кругу вопросов, связанных с одиннадцатой проблемой, всю серию результатов Хассе, Гекке, Зигеля (называя лишь центральные имена) по арифметической и аналитической теории квадратичных форм над числовыми полями и их современную интерпретацию и обобщение, связанные с введением аделей и чисел Тамагава. Приняв эту последнюю точку зрения, мы оказываемся перед необходимостью обозреть большой по объему и технически сложный материал по арифметике алгебраических групп, в особенности ортогональной группы, накопленный к настоящему времени. Поэтому, заведомо жертвуя полнотой, мы опишем лишь немногие центральные понятия и результаты, не пытаясь объяснить их доказательства.

Пусть k — некоторое поле алгебраических чисел, f, g — квадратичные формы над k. Формы f и g *эквивалентны* над k, если одна переводится в другую невырожденной линейной подстановкой. Число $a \in k$ *представляется* формой f, если уравнение $f = a$ разрешимо в k. Эквивалентные формы, очевидно, представляют одну и ту же совокупность чисел из k; классические постановки задач состоят в классификации форм с точностью до эквивалентности и в описании множества чисел, представимых данной формой. Оба эти вопроса являются частными случаями вопроса о «*представимости формы формой*»: существует ли линейная подстановка, переводящая f в g?

Фундаментальный результат Хассе [1]) (подготовленный более ранними исследованиями Лагранжа, Минковского и других) дает следующий ответ на эту задачу. Рассмотрим пополнения k_v поля k по всем (архимедовым и неархимедовым) метрикам v. Существует очевидное необходимое условие представимости g с помощью f: она должна иметь место во всех полях k_v. Хассе доказал, что это условие и достаточно. Смысл этой редукции глобальной задачи к набору локальных состоит в том, что в полях k_v арифметика значительно проще.

Если в описанной постановке заменить поле k кольцом целых чисел o, рассматривая формы, эквивалентность и представимость с коэффициентами в o, то положение усложняется. Из того, что две формы всюду локально целочисленно эквивалентны (т. е. над пополненными кольцами o_v для всех v), еще не следует, что они эквивалентны над o. Множество всюду локально целочисленно эквивалентных форм — *род* форм — разбивается на конечное число *классов* форм относительно эквивалентности над o. С другой стороны, вопрос о представимости может быть в этом случае значительно уточнен: например, для *положительно определенной* квадратичной формы f над Z и любого числа $a \in Z$ мы можем спросить, *сколько решений* имеет уравнение $f = a$. К. Зигель в работах [9], [10] установил ряд замечательных результатов о связи числа целочисленных и локальных решений задачи о представлении. Мы опишем сейчас одну из его формул, относящуюся к случаю положительно определенных форм над Z. Рассмотрим некоторый род квадратичных форм, и пусть (f_i) — представители всех классов форм в этом роде. Будем рассматривать представление некоторой формы g формами f_i. Обозначим через $E(f_i)$ порядок группы целочисленных автоморфизмов формы f_i, а через $A(f_i, g)$ — количество целочисленных представлений формы g формой f_i. Взвешенное среднее чисел $A(f_i, g)$, взятое по всему роду:

$$\mu(f, g) = \left(\sum_i A(f_i, g) / E(f_i)\right) \Big/ \left(\sum_i 1/E(f_i)\right)$$

---

[1]) J. Crelles, 153 (1923), 113—130; Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., Teil I, 35 (1926), 1—55; Teil Ia, 36 (1927), 233—311.— *Прим. ред.*

называется «мерой представления формы g родом (f_i)» и является разумной заменой понятия «число представлений формы формой». Необходимость усреднения по роду вытекает из существа дела: если мы хотим выразить число представлений в чисто локальных терминах, то мы неизбежно утратим различие между классами в данном роде, а они действительно могут давать разные числа представлений.

Локальные «меры представления» вводятся следующим образом.

Пусть сначала v — p-адическая метрика. Обозначим через $A_{p^a}(f, g)$ число представлений g с помощью f в кольце $Z / p^a Z$ и положим, обозначая через n, m, ранги g, f соответственно:

$$\alpha_p(f, g) = \lambda_p (p^a)^{\frac{n(n+1)}{2} - mn} A_{p^a}(f, g),$$

где $\lambda_p = 1$ при $n > m$ и $\lambda_p = 1/2$ при $n = m$.

Множитель, соответствующий архимедовой метрике, $\alpha_\infty(f, g)$, определяется так. Введем в пространстве Y форм над R и в пространстве X преобразований f в формы ранга n над R согласованные инвариантные меры; тогда f отображает X в Y; коэффициент искажения объема в точке Y, соответствующей g, и равен $\alpha_\infty(f, g)$ (или $2\,\alpha_\infty(f, g)$ при $m = n + 1$).

В описанных обозначениях формула Зигеля выглядит так:

$$\mu(f, g) = \prod_v \alpha_v(f, g),$$

где v пробегает все метрики поля Q.

В последующих работах Зигель перенес этот результат на случай произвольных числовых полей, а также обобщил его, рассматривая не только положительно определенные формы. В этом случае нуждается в переопределении число $\mu(f, g)$; не останавливаясь на подробностях, укажем лишь, что усреднение по роду перестает быть необходимым, потому что меры представления для всех классов оказываются одинаковыми (см. К н е з е р [6] и литературу, указанную там).

В книге Э й х л е р а [5] подведены итоги исследований по теории квадратичных форм до 1952 г. и последовательно проведена геометрическая концепция, эффективно использованная В и т т о м [13]. С геометрической точки зрения теория квадратичных форм над полем k — это теория абстрактных «метрических пространств» — линейных пространств над k, снабженных скалярным произведением. Понятия, связанные с кольцом, естественно появляются при рассмотрении «решеток» в таком метрическом пространстве. На первый план при таком изложении выходит ортогональная группа автоморфизмов метрического пространства, которая с алгебро-геометрической точки зрения представляет собой группу k точек некоторой линейной алгебраической группы, определенной над k. Анализ результатов Зигеля с этой точки зрения привел независимо Т. Тамагава и М. Кнезера к переформулировке теоремы Зигеля, которая стала интерпретироваться как вычисление инвариантного объема фактор-пространства группы аделей ортогональной группы по дискретной подгруппе главных аделей — так называемого «числа Тамагава».

Подробнее, пусть G — некоторая связная линейная алгебраическая группа, скажем, над полем рациональных чисел Q. Рассмотрим фиксированную левоинвариантную дифференциальную форму ω старшей размерности на G. Ее «интегрирование» определяет набор инвариантных мер ω_v на локально компактных группах $G(Q_v)$ Q_v-точек группы G (только условие инвариантности определяет локальную меру лишь с точностью до множителя из Q_v; выбор ω дает возможность согласовать эти меры, ограничив произвол до общего множителя из k). Обозначим через G_A группу аделей группы G; это—подгруппа произведения $\prod\limits_v G(Q_v)$, состоящая из векторов, почти все координаты которых целые. Группа $G(Q)$ диагонально вкладывается в G_A. При некоторых естественных условиях на G (выполняющихся для ортогональных групп) объем фактор-пространства $G_A / G(Q)$ конечен. Как следует из «формулы произведения», он не зависит от выбора ω. Этот объем называется *числом Тамагава* группы G и обозначается через $\tau(G)$. Теорема Зигеля формальным и несложным подсчетом сводится к утверждению о том, что $\tau(G) = 2$, если G — (собственная) ортогональная группа.

Определение чисел Тамагавы немедленно переносится на широкий класс линейных алгебраических групп; методы их вычисления были развиты А. Вейлем и Т. Оно в работах [7], [8], [11].

Самые последние идеи в этой области относятся к вопросу о возможности перенести определение чисел Тамагавы и найти аналоги результатов Зигеля в случае, когда G является абелевым многообразием. Результаты в этой области еще весьма отрывочны, но ряд точных и глубоких гипотез был высказан Берчем, Суиннертоном-Дайером и Тэйтом; их внутренняя согласованность и подтверждающий их проведенный на вычислительных машинах просчет большого числа частных случаев делают эти гипотезы весьма заманчивой целью исследований. Литература по этому вопросу — статьи [2], [3], [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Borel A., Arithmetic properties of algebraic groups, Proc. Int. Math. Congress, Stockholm, 1962 (русский перевод: Математика, сб. перев. 8, № 2 (1964), 3—17).

[2] Birch B. J., Conjectures concerning elliptic curves, Theory of numbers, California, 1965, 106—113.

[3] Birch B. J., Suinnerton-Dyer H. P., Notes on elliptic curves II, J. f. reine u. angew. Math. 218 (1965), 79—108.

[4] Cassels J. W. S., Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. Lond. Math. Soc. 41, p. 2, № 162 (1966), 193—291 (русский перевод: Математика, сб. перев. 12, № 1 (1968), 114—160; 12, № 2 (1968), 3—48).

[5] Eichler M., Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin, 1952.

[6] Kneser M., Darstellungsmasse indefiniter quadratischen Formen, Math. Z. 77 (1961), 188—194.

[7] Ono T., The Tamagawa number of algebraic tori, Ann. Math. 78 (1965), 47—73.

[8] Ono T., On the relative theory of Tamagawa numbers, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 325—326.

[9] Siegel C. L., Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III, Ann. Math. 36 (1935), 527—606; 37 (1936), 230—263; 38 (1937), 212—291.

[10] Siegel C. L., Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie. I, II, Math. Ann. 124 (1951), 17—54, 366—387.

[11] Weil A., Adèles and algebraic groups, Princeton, 1961 (русский перевод: Математика, сб. перев. 8, № 4 (1964), 3—74).

[12] Weil A., Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques, Acta Math. 113 (1965), 1—87.

[13] Witt E., Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J. f. reine u. angew. Math. 176 (1937), 31—44.

К ДВЕНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. И. Манин

Теорема Кронекера — Вебера утверждает, что максимальное абелево расширение A_Q поля рациональных чисел Q порождено всеми корнями из единицы (идейно прозрачное и элементарное доказательство принадлежит И. Р. Шафаревичу [10]). Из этого результата немедленно получается описание группы Галуа A_Q / Q; она изоморфна $\prod\limits_{p \neq p_\infty} U_p$, где U_p — группа p-адических единиц. Действительно, если ζ — примитивный корень из 1 степени m, то группа Галуа расширения $Q(\zeta) / Q$ изоморфна $(Z / mZ)^*$, и $\varprojlim (Z / mZ)^* = \prod\limits_{p \neq p_\infty} U_p$. Более детальное исследование этого изоморфизма позволяет придать явную форму закону взаимности и получить подробные сведения об арифметике полей, соответствующих различным подгруппам группы Галуа. Группа $\prod\limits_{p \neq p_\infty} U_p$ изоморфна фактор-группе классов иделей J_Q / Q^* по ее связной компоненте. В этой формулировке результат переносится на произвольные поля k, $[k : Q] < \infty$: для любого такого поля группа Галуа максимального абелева расширения A_k поля k изоморфна фактор-группе классов иделей J_k / k^* поля k по ее связной компоненте. Подгруппа, соответствующая абелеву полю $K \supset k$, порождена классами норм иделей поля K. Приведенная формулировка основного результата современной теории полей классов выкристаллизовалась постепенно в результате работ самого Гильберта, Такаги, Чеботарева, Артина, Хассе, Шевалле, Накаяма, Хохшильда, А. Вейля, Тэйта и ряда других исследователей. Список литературы слишком длинен, чтобы приводить его здесь. Итоги подводят две книги: Хассе [3] и записки семинара Артина и Тэйта [1]; в обзоре Хассе есть подробная библиография работ, выполненных до 30-х годов. Разумеется, теория полей классов содержит гораздо больше, чем доказательство этой теоремы; в частности, ее когомологическая формулировка позволяет получить весьма точные сведения о когомологиях групп Галуа не обязательно абелевых расширений (ср. Серр [7]). Локальная теория полей классов подробно изложена в книге Серра [6] [1]).

При всем том вопрос о явном описании поля A_k, как в теореме Кронекера — Вебера, до сих пор до конца не решен. Моделью для последующих работ в этой области служит предугаданная Кронекером и завершенная Вебером, Такаги, а затем Хассе и Дойрингом теория, относящаяся к случаю мнимого квадратичного поля k. Рассмотрим порядки такого поля; любой идеал такого порядка является решеткой в комплексной плоскости и фактор по нему есть комплексный тор, т. е. эллиптическая кривая. Две кривые изоморфны, если их решетки принадлежат одному и тому же классу идеалов (относительно порядка, который является общим кольцом эндоморфизмов таких кривых). Ограничимся, в частности, кривыми, которые соответствуют максимальному порядку. Тогда абсолютный инвариант j_X любой такой кривой X порождает максимальное абелево неразветвленное расширение поля k. Для того чтобы получить все поле A_k, нужно рассмотреть кривую $X' = X / \mathrm{Aut}\, X$ и добавить к $k(j_X)$ координаты образов всех точек конечного порядка на X. Аналитическая теория эллиптических кривых позволяет переформулировать этот результат в терминах деления аргумента специальных функций. (Более подробные формулировки, доказательства и библиографию можно найти в записках семинара [2].)

Эта старая теория комплексного умножения и работа Гекке [4] до последнего времени составляли все, что

---

[1]) См. также сборник Algebraic number Theory, London, 1967 (под ред. J. W. S. Cassels'a и A. Fröhlich'a), русский перевод которого скоро выйдет в свет. Он содержит теорию полей классов, локальную и глобальную теорию комплексного умножения, исторический очерк, написанный Хассе и др.— *Прим. ред.*

было известно о второй части проблемы Гильберта. В 1955 г. появились работы А. Вейля, Г. Шимуры и И. Таниямы, в которых теория комплексного умножения обобщалась на многомерный случай абелевых многообразий с «большим» кольцом эндоморфизмов. Точнее говоря, пусть K — вполне мнимое квадратичное расширение некоторого вполне вещественного поля алгебраических чисел. Можно построить абелево многообразие A, кольцо эндоморфизмов которого изоморфно некоторому порядку поля K. Поля, полученные присоединением значений «модулей» многообразия A и координат точек конечного порядка, вообще говоря, являются абелевыми не над K, а над некоторым конечным расширением K^*; лишь в одномерном случае всегда $K^* = K$. Кроме того, так получаемые поля не исчерпывают всех абелевых расширений поля K^*, и, как отмечалось выше, сам класс полей K довольно узок. Тем не менее эта теория весьма интересна и имеет важные связи с теорией ζ-функций абелевых многообразий и алгебраических кривых. Она изложена в книге Шимуры и Таниямы [8].

В этой связи нужно отметить еще статью Любина и Тэйта [5], где показано, что для локальных полей k совершенно общая теория комплексного умножения получается, если заменить абелевы многообразия одномерными формальными группами. Всегда существуют такие группы, кольцо эндоморфизмов которых изоморфно кольцу целых чисел в k, и присоединение точек конечного порядка к максимальному неразветвленному расширению поля k доставляет его максимальное абелево расширение. Закон взаимности в этой изящной модели имеет обычный вид: элементы группы Галуа действуют на точки конечного порядка через эндоморфизмы.

Гильберт придает исключительное значение аналогии между алгебраическими числами и алгебраическими функциями и предлагает искать на этом пути общую формулировку закона взаимности для l-х степеней. Эта задача была решена И. Р. Шафаревичем в работе [10]. Он обнаружил, в частности, что для символа норменного вычета существует удивительная явная конструкция, аналогичная конструкции вычета дифференциала на римановой поверхности. Мы еще далеки от понимания истинного механизма этого явления. Некоторые указания см. также в книге Серра [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] A r t i n E., T a t e J., Class field theory, Institute of Advanced Study, Princeton, 1961.

[2] B o r e l A., C h o w l a S. and others, Seminar on Complex Multiplication, Lecture Notes in Mathematics 21 (1966), Springer Verlag (русский перевод: Математика, сб. перев. 12, № 1 (1968), 55—96).

[3] H a s s e H., Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil 1 — 2, Leipzig — Berlin, 1930.

[4] H e c k e E., Über die Konstruktion relativ Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variablen, Math. Ann. 74 (1913), 465—510.

[5] L u b i n J., T a t e J., Formal complex multiplication in local fields, Ann. Math. ser. 2, 81, № 2 (1965), 380—387 (русский перевод: Математика, сб. перев. 12, № 1 (1968), 48—54).

[6] S e r r e J. P., Corps locaux, Act. Sci. Ind., no. 1296, Paris, 1962.

[7] S e r r e J. P., Cohomologie Galoisienne, Lecture Notes in Mathematics 5 (1965), Springer Verlag (русский перевод: Когомологии Галуа, «Мир», 1968).

[8] S h i m u r a G., T a n i y a m a Y., Complex multiplication of abelian varietics and its applications to number theory, Publ. Math. Soc. Japan 6 (1961).

[9] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Новое доказательство теоремы Кронекера — Вебера, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 38, Изд-во АН СССР, 1951, 382—387.

[10] Ш а ф а р е в и ч И. Р., Общий закон взаимности, Матем. сб. 26 (68), № 1 (1950), 113—146.

К ТРИНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

А. Г. Витушкин

Тринадцатая проблема связана с одной из наиболее древних задач математики (разрешимость алгебраических уравнений), и одновременно она удачно переплетается с современной проблематикой. В связи с этой проблемой получен ряд крупных результатов в алгебре и анализе. Высказанная Д. Гильбертом конкретная гипотеза, как показали А. Н. Колмогоров и В. И. Арнольд, оказалась ошибочной. Однако алгебраическое ядро этой задачи по существу осталось незатронутым.

С помощью преобразования Чирнгаузена [1]) общее алгебраическое уравнение n-й степени приводится к виду

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + 1 = 0.$$

В частности, уравнение седьмой степени приобретает вид

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0. \tag{1}$$

Дальнейшие попытки алгебраистов привести это уравнение к более простому виду по настоящее время остаются безуспешными. В своих «Математических проблемах» Д. Гильберт [1] по-новому подошел к этой задаче, сформулировав ее под № 13 как проблему о невозможности решения общего уравнения седьмой степени при помощи функций только двух переменных. Для доказательства этого предложения Д. Гильберт считал нужным показать, что функция $f = f(x, y, z)$, являющаяся решением уравнения (1), не представима суперпозицией непрерывных функций двух переменных.

---

[1]) Acta Eruditorum, 1683.— *Прим. ред.*

Естественной целью является или с помощью алгебраических подстановок свести решение уравнения (1) к решению алгебраических уравнений с двумя параметрами, т. е. доказать, что функция $f(x, y, z)$ является суперпозицией алгебраических функций двух переменных, или же доказать, что решение уравнения (1) не является суперпозицией алгебраических функций двух переменных.

Гильберт ожидал, что уравнение седьмой степени не разрешимо даже в непрерывных функциях двух переменных. Работы А. Н. Колмогорова [6], [8] и В. И. Арнольда [7] опровергают сформулированную гипотезу Д. Гильберта. Однако рассматриваемая проблема по существу остается открытой, так как остается возможность доказывать неразрешимость уравнения седьмой степени в каком-либо другом классе функций двух переменных, содержащем все алгебраические функции двух переменных.

Сформулируем теперь основные результаты, полученные в связи с тринадцатой проблемой Д. Гильберта.

I. СУПЕРПОЗИЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Доказательство существования аналитических функций n переменных ($n \geqslant 2$), не представимых в виде суперпозиции аналитических функций меньшего числа переменных, может быть получено различными способами. Формулируя тринадцатую проблему, Д. Гильберт [1] прибавляет, что он «располагает строгим доказательством того, что существует аналитическая функция трех переменных, которая не может быть получена конечной суперпозицией функций только двух аргументов». Не указывая точно, о каких функциях двух аргументов идет речь, Д. Гильберт здесь имел в виду аналитические функции двух переменных.

Более сильные результаты в этом направлении получил в 1920 г. А. Островский [2], который, в частности, доказал, что аналитическая функция двух аргументов $\zeta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ не является конечной суперпозицией бесконечно дифференцируемых функций одного переменного и алгебраических функций любого числа переменных.

II. ПРОБЛЕМА РЕЗОЛЬВЕНТ

Алгебраические уравнения до четвертой степени включительно разрешимы в радикалах, т. е. корни этих уравнений как функции коэффициентов представляются в виде суперпозиции арифметических операций и функций одного переменного вида $\sqrt[n]{t}$ ($n = 2, 3$). Общее уравнение пятой степени в радикалах неразрешимо. Но поскольку общее уравнение пятой степени алгебраическими подстановками приводится к виду $x^5 + tx + 1 = 0$, содержащему один параметр t, то мы можем сказать, что корень общего уравнения пятой степени как функция коэффициентов также представляется в виде суперпозиции арифметических операций и алгебраических функций одного переменного.

Проблема резольвент в терминах суперпозиций может быть сформулирована следующим образом: указать для любого n такое наименьшее число k, что корень общего уравнения n-й степени как функция коэффициентов представляется в виде суперпозиции алгебраических функций k переменных. В работе [3] Д. Гильберт высказал предположение, что для n, равных 6, 7, 8, число k соответственно равно 2, 3, 4. Тем более неожиданным оказался результат Д. Гильберта [3] (1926 г.), полученный для уравнения девятой степени: корень общего уравнения девятой степени представляется в виде суперпозиции алгебраических функций четырех переменных. А. Виман [12], обобщая результат Д. Гильберта, доказал, что при всяком $n \geqslant 9$ имеет место неравенство $k \leqslant n - 5$. Как заметил Н. Г. Чеботарёв [13], тем же методом можно доказать, что для $n \geqslant 21$ $k \leqslant n - 6$, а для $n \geqslant 121$ $k \leqslant n - 7$. Проблеме резольвент был посвящен также цикл работ Н. Г. Чеботарёва [14]. Однако доказательство основного результата оказалось ошибочным (см. [15]).

III. СУПЕРПОЗИЦИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

В работе [4] было доказано, что в классе всех p раз непрерывно дифференцируемых функций n переменных существуют такие, которые не могут быть представлены в виде конечной суперпозиции функций, для которых отношение числа аргументов к числу имеющихся у них дифференциалов строго меньше, чем $\frac{n}{p}$.

Эта теорема, по существу, показывает, что характеристикой сложности p раз дифференцируемых функций n переменных может служить отношение $\frac{n}{p}$. Первоначальное доказательство этой теоремы использовало теорию многомерных вариаций множеств (см. [16]). А. Н. Колмогоров [5] показал, что тот же результат можно получить, основываясь лишь на оценках числа элементов ε-сетей функциональных компактов.

Эти работы имеют интересные продолжения в работах различных авторов по оценкам сложности алгорифмов.

IV. СУПЕРПОЗИЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Крайне неожиданной была относящаяся к 1956 г. работа А. Н. Колмогорова [6], в которой доказывалось, что всякая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций трех переменных. В 1957 г. в студенческой работе В. И. Арнольду [7] удалось снизить число переменных в этой теореме до двух. Завершает этот цикл теорема А. Н. Колмогорова [8] о представлении непрерывных функций n переменных в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x_j)\right), \tag{2}$$

где все функции непрерывны, а внутренние функции $\alpha_{i,j}(x_j)$ заранее фиксированы, т. е. не зависят от разлагаемой функции f.

По теореме В. И. Арнольда решение уравнения седьмой степени представляется суперпозицией непрерывных функций двух переменных. Как уже упоминалось, этот результат опровергает гипотезу Д. Гильберта.

Следует отметить, однако, что участвующие в этом представлении функции заведомо не являются алгебраическими, поскольку они даже недифференцируемы.

В 1930 г. в связи с проблематикой рядов Фурье Н. К. Бари [17] доказала, что всякая непрерывная функция одного переменного $f(t)$ может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(\varphi_1(t)) + f_2(\varphi_2(t)) + f_3(\varphi_3(t)),$$

где все функции $\{f_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ абсолютно непрерывны.

Из теоремы А. Н. Колмогорова и теоремы Н. К. Бари вытекает, что каждую непрерывную функцию n переменных можно представить в виде суперпозиции абсолютно непрерывных функций одного переменного и операции сложения.

Имеется ряд результатов (см. [18] — [24]), дополняющих теорему А. Н. Колмогорова. Отметим здесь, что Б. Л. Фридман в студенческой работе показал, что в конструкции А. Н. Колмогорова внутренние функции $\{\alpha_{i,j}(x_j)\}$ могут быть выбраны удовлетворяющими условию Липшица.

При рассмотрении суперпозиций гладких функций характер результатов существенно меняется. Один из таких результатов был указан в п. III. Еще один результат связан с рассмотрением так называемых линейных суперпозиций.

V. ЛИНЕЙНЫЕ СУПЕРПОЗИЦИИ

Одной из наиболее интересных задач в тематике суперпозиций в настоящее время представляется следующая: существует ли аналитическая функция двух переменных, не представимая в виде конечной суперпозиции непрерывно дифференцируемых функций одного переменного и операции сложения.

Линейные суперпозиции появляются в результате следующих рассуждений. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ является суперпозицией некоторых гладких функций одного переменного $\{f_i(t)\}$ и операции сложения. Проварьируем эту суперпозицию, т. е. рассмотрим суперпозицию $\tilde{f}(x, y)$ того же вида, но составленную из функций $\{f_i(t) + \varphi_i(t)\}$, где $\{\varphi_i(t)\}$ — малые возмущения, которые тоже являются гладкими функциями одного переменного. Тогда разность этих суперпозиций можно записать в виде

$$\tilde{f}(x, y) - f(x, y) = \sum_{i=1}^{N} p_i(x, y)\varphi_i(q_i(x, y)) + \\ + o(\max_i \sup_t |\varphi_i(t)|), \qquad (3)$$

где функции $\{p_i(x, y)\}$ выражаются через исходные функции и их производные, а потому про них известно лишь то, что они непрерывны; $\{q_i(x, y)\}$ выражаются только через функции $\{f_i(t)\}$, следовательно, они непрерывно дифференцируемы; остаточный член есть бесконечно малая величина по сравнению с $\max\limits_i \sup\limits_t |\varphi_i(t)|$, если только функции $\left\{\dfrac{d\varphi_i}{dt}\right\}$ имеют некоторый фиксированный модуль непрерывности.

Равенство (3) дает некоторую надежду на сведение общей задачи о суперпозициях гладких функций к отысканию аналитических функций, не представимых суперпозициями вида

$$\sum_{i=1}^{N} p_i(x, y)\,\varphi_i(q_i(x, y)), \qquad (4)$$

где $\{p_i(x, y)\}$ — наперед фиксированные непрерывные функции, $\{q_i(x, y)\}$ — наперед фиксированные непрерывно дифференцируемые функции, а $\{\varphi_i(t)\}$ — произвольные непрерывные функции одного переменного.

Такие суперпозиции будем называть линейными, подчеркивая этим, что функции $\{p_i(x, y)\}$ и $\{q_i(x, y)\}$ фиксированы, а от переменных функций $\{\varphi_i(t)\}$ суперпозиция зависит линейным образом. Отметим здесь же, что суперпозиции А. Н. Колмогорова (2) также линейные, причем все $p_i \equiv 1$, а $q_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}(x_j)$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n + 1)$ являются фиксированными непрерывными функциями. Оказалось (см. [9], [10], [11]), что множество суперпозиций вида (4) является замкнутым и нигде не плотным в пространстве всех непрерывных функций двух переменных. Отсюда, в частности, следует, что существует даже многочлен, не представимый суперпозицией вида (4).

Что касается возможности сведения задачи о суперпозициях гладких функций к задаче о линейных суперпозициях, то оно удается в случае «устойчивых» суперпозиций. На этом пути возможно доказать, например (см. [24]), что нельзя представить все аналитические функции n переменных суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций от k переменных $(k < n)$ так, чтобы малым изменениям (в равномерной метрике) разлагаемых функций соответствовали столь же малые изменения функций, составляющих суперпозицию.

[1] Hilbert D., Mathematische Probleme, Gesamm. Abh., III, 1935, 290—329.

[2] Ostrowski A., Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen, Math. Z. 8, № 3—4 (1920), 241—298.

[3] Hilbert D., Über die Gleichung neunten Grades, Gesamm. Abh., II, 1933, 393—400.

[4] Витушкин А. Г., К тринадцатой проблеме Гильберта, ДАН СССР 95, № 4 (1954), 701—704.

[5] Колмогоров А. Н., Оценки минимального числа элементов ε-сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных, ДАН СССР 101, № 2 (1955), 192—194.

[6] Колмогоров А. Н., О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозициями непрерывных функций меньшего числа переменных, ДАН СССР 108, № 2 (1956), 179—182.

[7] Арнольд В. И., О функциях трех переменных, ДАН СССР 114, № 4 (1957), 679—681.

[8] Колмогоров А. Н., О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения, ДАН СССР 114, № 5 (1957), 953—956.

[9] Витушкин А. Г., Некоторые свойства линейных суперпозиций гладких функций, ДАН СССР 156, № 5 (1964), 1003—1006.

[10] Витушкин А. Г., Доказательство существования аналитических функций многих переменных, не представимых линейными суперпозициями непрерывно дифференцируемых функций меньшего числа переменных, ДАН СССР 156, № 6 (1964), 1258—1261.

[11] Хенкин Г. М., О линейных суперпозициях непрерывно дифференцируемых функций, ДАН СССР 157, № 2 (1964), 288—290.

[12] Wiman A., Ueber die Anwendung der Tschirnhausen-Transformation auf die Reduktion algebraischer Gleichungen, Nova Acta R. Soc. Sc. Uppsaliensis, vol. extraordin. editum, 1927, 3—8.

[13] Чеботарёв Н. Г., К проблеме резольвент, Уч. зап. Казанск. ун-та 114, № 2 (1954), 189—193.

[14] Чеботарёв Н. Г., Собрание сочинений, т. I, Изд-во АН СССР, 1949, 255—340.

[15] Морозов В. В., О некоторых вопросах проблемы резольвент, Уч. зап. Казанск. ун-та 114, № 2 (1954).

[16] Витушкин А. Г., О многомерных вариациях, Гостехиздат, 1955.

[17] Bari N. K., Mémoire sur la représentation finie des fonctions continues, Math. Ann. 103 (1930), 145—248, 598—653.

[18] Арнольд В. И., О представимости функций двух переменных в виде $\chi[\varphi(x)+\psi(y)]$, УМН 12, № 2 (1957), 119—121.

[19] Бассалыго Л. А., О представлении непрерывных функций двух переменных при помощи непрерывных функций одного переменного, Вестн. МГУ, № 1 (1966).
[20] Doss R., On the representation of the continuous functions of two variables by means of addition and continuous of one variable, Colloq. math. 10, № 2 (1963), 249—259.
[21] Lorentz G. G., Metric entropy, widths and superpositions of functions, Amer. Math. Monthly 69, № 6 (1962), 469—485.
[22] Ostrand P. A., Dimension of metric spaces and Hilbert's problem 13, Bull. Amer. Math. Soc. 71, № 4 (1965), 619—622.
[23] Sprecher D. A., On the structure of continuous functions of several variables, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1964), 340—355.
[24] Витушкин А. Г. и Хенкин Г. М., Линейные суперпозиции функций, УМН 22, № 1 (1967), 77—124.

К ЧЕТЫРНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. И. Манин

Совокупность задач, поставленных Гильбертом в этой части его доклада, обязана своим возникновением следующему вопросу в теории инвариантов. Пусть $k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над полем k, G — некоторая группа k-автоморфизмов этого кольца. Имеет ли конечное число образующих над k подкольцо G-инвариантных многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]^G$? (В первоначальной постановке k является полем комплексных чисел, а G—некоторая подгруппа проективной группы.) Обозначая через L поле инвариантных элементов, имеем $k[x_1, \ldots, x_n]^G = L \cap k[x_1, \ldots \ldots, x_n]$; естественное обобщение задачи, которое предлагает Гильберт, состоит в том, чтобы взять в качестве L произвольное подполе в $k(x_1, \ldots, x_n)$, содержащее k. Вариант этого вопроса получается, если заменить поле k кольцом целых чисел Z.

Для представлений ряда классических групп G вопрос решен положительно [1]); тем более неожиданным был результат Нагаты [3], объявленный на Эдинбургском международном математическом конгрессе, согласно которому над «достаточно большим» полем k (например, над полем комплексных чисел C) существует представление прямой суммы G конечного числа аддитивных групп k^+ в кольце многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ такое, что $k[x_1, \ldots, x_n]^G$ не имеет конечного числа образующих.

Прежде чем описывать пример Нагаты более подробно, укажем на важную алгебро-геометрическую интерпретацию и обобщение задачи, принадлежащие Зарис-

[1]) Для проективной группы это было сделано Гильбертом.— *Прим. ред.*

кому [1]. Зариский заменяет кольцо многочленов произвольным целозамкнутым кольцом конечного типа над полем и замечает, что в этом варианте проблема допускает следующую геометрическую формулировку. Пусть V — нормальное алгебраическое многообразие над полем k, $D \subset V$ — некоторый дивизор. Обозначим через $R[D]$ кольцо функций на V, не имеющих полюсов вне D. Является ли $R[D]$ кольцом конечного типа? В работе [1] Зариский анализирует алгебро-геометрические трудности задачи и решает ее положительно в случае $\dim V = 1, 2$. В статьях [2] и [3] Нагата обобщает эту теорему Зариского, заменив $R[D]$ произвольным нормальным кольцом, поле частных которого имеет размерность 2.

Опишем теперь вкратце пример Нагаты, дающий отрицательное решение четырнадцатой проблемы Гильберта в ее первоначальной постановке.

Пусть $r > 0$ — некоторое целое число (оно будет выбрано позже), k — основное поле любой характеристики, степень трансцендентности которого над простым подполем не меньше $3r$. Пусть $a_{ij} \in k$, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, \dots, r$, — элементы из k, алгебраически независимые над простым подполем, V — r-мерное линейное пространство над k с фиксированным базисом, $V^* \subset V$ — $(r-3)$-мерное подпространство, состоящее из векторов (b_j) таких, что $\sum_{j=1}^{r} a_{ij} b_j = 0$ при $i = 1, 2, 3$. Обозначим через G аддитивную группу V^*. G действует в кольце многочленов $k[x_1, \dots, x_r; t_1, \dots, t_r]$ следующим образом:

$$s(t_i) = t_i, \qquad s(x_i) = x_i + b_i t_i,$$

где

$$s = (b_1, \dots, b_r).$$

Теорема. *Кольцо $k[x_1, \dots, x_r, t_1, \dots, t_r]^G$ не имеет конечного числа образующих над k.*

Набросок доказательства. Положим $u = t_1 \dots t_r$, $v_i = u/t_i$, $w_i = v_i x_i$, $y_i = \sum_{i=1}^{r} a_{ji} w_i$. Непосредственный подсчет показывает, что

$$k(x_1, \dots, x_r; t_1, \dots, t_r)^G = k(y_1, y_2, y_3; t_1, \dots, t_r).$$

Поэтому

$$J = k[x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_r]^G =$$
$$= k[x_1, \ldots, x_r; t_1, \ldots, t_r] \cap k[y_1, y_2, y_3; t_1, \ldots, t_r].$$

Любой элемент из J поэтому можно записать в виде

$$\sum c_{i_1, \ldots, i_r}(y_1, y_2, y_3)\, t_1^{-i_1} \ldots t_r^{-i_r}, \tag{1}$$

где $i_k \in Z$, $c_{i_1, \ldots, i_r} \in k[y_1, y_2, y_3]$. Мы сейчас опишем условия, которые накладывает на коэффициенты $c_{i_1, \ldots, i_r}$ принадлежность элемента (1) к J.

Обозначим через $p_i \subset k[y_1, y_2, y_3]$ однородный простой идеал, соответствующий точке (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}) на проективной плоскости. Идеал p_i порожден многочленами $a_{1i}y_2 - a_{2i}y_1$, $a_{1i}y_3 - a_{3i}y_1$. Положим

$$m_{i_1, \ldots, i_r} = p_1^{i_1} \cap \ldots \cap p_r^{i_r}.$$

Лемма. *Элемент* (1) *принадлежит* J *в том и только том случае, когда для всех* $i_1, \ldots, i_r \in Z$

$$c_{i_1, \ldots, i_r} \in m_{i_1, \ldots, i_r}.$$

(Доказательство мы опускаем.)

Предположим теперь, что кольцо J порождено конечным числом элементов. Можно считать, что все они имеют вид $c_{i_1, \ldots, i_r}(y_1, y_2, y_3)\, t_1^{-i_1} \ldots t_r^{-i_r}$. Легко видеть, что тогда выражение

$$\delta(c_{j_1, \ldots, j_r}) = \frac{\deg c_{j_1, \ldots, j_r}}{j_1 + \ldots + j_r},$$

где $c_{j_1, \ldots, j_r} \in m_{j_1, \ldots, j_r}$, принимает нижнюю грань своих значений, когда c и $j_1, \ldots, j_r$ меняются. Геометрическая интерпретация условия $c_{j_1, \ldots, j_r} \in m_{j_1, \ldots, j_r}$ состоит в том, что кривая $c = 0$ в проективной плоскости проходит через точки (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}) с кратностями $\geqslant j_i$. Если

$$\frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1 \geqslant \sum_{i=1}^{r} \frac{j_i(j_i+1)}{2},$$

то такая кривая степени d существует; при $j_1 = \ldots = j_r = j$ это неравенство превращается в $d^2 + 3d \geqslant rj\,(j+1)$.

Выбирая d и j достаточно большими, этому неравенству можно удовлетворить, сделав отношение $\frac{d}{rj} = \frac{d}{j_1 + \cdots + j_r}$ сколь угодно близким к $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Поэтому

$$\inf \delta (c) \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}} .$$

Сравнивая этот результат с предыдущим, мы получаем, что основная теорема вытекает из следующего утверждения:

Основная лемма. *Пусть при данном r кривая C степени d проходит через точки (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}), $i = 1, \ldots, r$, с кратностями $\geqslant j_i$. Тогда*

$$\frac{d}{j_1 + \cdots + j_r} > \frac{1}{\sqrt{r}} .$$

Нагата доказывает эту лемму при $r = s^2$, $s \geqslant 4$, пользуясь алгебро-геометрическими соображениями. Ввиду того, что дальнейшие детали изложения являются достаточно техническими, мы их опускаем, отсылая читателя к оригинальной работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Zariski O., Interprétations algèbro-géometriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. 78 (1954), 155—168.

[2] Nagata M., A treatise on the 14-th problem of Hilbert, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, ser. A 30, № 1 (1956), 57—70.

[3] Nagata M., Addition and corrections to my paper «A treatise on the 14-th problem of Hilbert», Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, ser. A 30, № 2 (1956), 197—200.

[4] Nagata M., On the fourteenth problem of Hilbert, Proc. Int. Congress of Math. (Edinburgh 1958), Cambridge, 1960, 459—462.

[5] Nagata M., On the 14-th problem of Hilbert, Amer. J. Math. 81 (1959), 766—772.

К ПЯТНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. И. Манин

Эта проблема Гильберта, в отличие от предыдущей, не является четко поставленной математической задачей, допускающей ответ, который можно сформулировать в виде теоремы. Речь идет скорее о необходимости построения ряда технических средств, с помощью которых вычисления Шуберта могли бы быть проведены на твердой основе в достаточно формализованной системе. Ниже мы по необходимости очень кратко опишем результаты современной алгебраической геометрии, которые служат фундаментом для ее «исчислительной» части. Но прежде всего процитируем начало второй главы шестого тома книги Б е й к е р а [1], в котором даны краткие и неформальные комментарии к исчислению Шуберта: «Это исчисление основано на том, что каждому условию, которому подчинен некоторый алгебраический объект, ставится в соответствие определенный алгебраический символ. Тогда наложение хотя бы одного из двух независимых условий удобно представлять суммой символов этих условий в любом порядке. Одновременное наложение двух условий представляется произведением символов этих условий в любом порядке. Умножение подчиняется дистрибутивному закону; сложение и умножение коммутативны...

...Всегда подразумевается, что геометрические объекты, рассматриваемые в теории, определяются значениями некоторого числа параметров и что условия, накладываемые на эти объекты, алгебраичны. Класс объектов, описываемых данной системой из m параметров, имеет размерность (freedom) m... Если на параметры наложено i (независимых) условий, то множество объектов класса, удовлетворяющих этим условиям, образует подкласс размерности $m - i$. В частности, при $i = m$ этот подкласс состоит, вообще говоря, из конечного числа объектов».

«Геометрические объекты» современной теории — это алгебраические многообразия или схемы Гротендика. В затянувшемся периоде перестройки основ, который переживает сейчас алгебраическая геометрия, отсутствие устоявшихся книг и курсов исключает возможность отослать читателя к какому-нибудь стандартному изложению. Мы будем считать в дальнейшем, что мы работаем в одной из следующих трех категорий:

а. Алгебраические многообразия над полем комплексных чисел («классический случай»).

б. Алгебраические многообразия над произвольным полем (скажем, в смысле Вейля [13]).

в. Схемы Гротендика (для справедливости ряда результатов нужно ограничиться рассмотрением нетеровых или алгебраических или только проективных алгебраических схем). (Литература: [4], [5].)

Возможность определить геометрический объект из данного класса конечным числом параметров возникает в большом классе задач. Вот простейший пример: кривая степени n на проективной плоскости над полем k задается своим уравнением, которое является формой степени n от трех переменных с коэффициентами в k. Можно считать поэтому, что множество таких кривых параметризуется точками $\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)$-мерного проективного пространства коэффициентов таких форм. «Условие», налагаемое на такую кривую, означает, что соответствующая ей точка принадлежит некоторому алгебраическому подмногообразию пространства коэффициентов. Наложение двух условий такого типа одновременно соответствует рассмотрению пересечения двух многообразий в пространстве коэффициентов, а наложение «хотя бы одного из двух условий» — объединению многообразий. В этом неформальном описании смешаны две существенно разные идеи: вопрос о возможности введения «естественных параметров», с одной стороны, и вопрос о построении «теории пересечений» внутри этого пространства, которое априори может быть любым многообразием (или схемой).

Начнем с первого и самого простого случая: с параметризации алгебраических подмногообразий в данном проективном пространстве P^n. Дискретные инварианты, которые следует здесь зафиксировать, — это размерность и степень параметризуемых подмногообразий. Пример кривых на плоскости показывает, впрочем, что вместо подмногообразий следует рассматривать более общие объекты: например, естественно считать, что уравнение $x_0^2 x_1 = 0$ на плоскости задает объединение двух прямых: $x_0 = 0$ и $x_1 = 0$, из которых первая берется «с кратностью два», из-за чего вся «кривая» и имеет степень три. Обобщением этого в многомерном случае служит понятие «цикла»: цикл в P^n есть элемент свободной абелевой группы, порожденной (неприводимыми) подмногообразиями в P^n; цикл эффективен, если коэффициенты при многообразиях неотрицательны, однороден, если его компоненты имеют одинаковую размерность. Степень цикла определяется по линейности, размерность — очевидным образом. В классической теории параметризуются эффективные однородные циклы данной степени и размерности в P^n; конструкция пространства параметров («координаты Чжоу») принадлежит Чжоу и ван-дер-Вардену; см. ее изложение в книге Ходжа и Пидо [12]. Нужно, впрочем, отметить, что эффективное вычисление многообразий Чжоу представляет собой исключительно трудную задачу; например, классический вопрос об описании всех неприводимых компонент многообразий Чжоу для кривых в трехмерном пространстве до сих пор не имеет полного решения.

В теории Гротендика рассмотрение циклов в P^n заменяется рассмотрением замкнутых подсхем. Замкнутые подсхемы в P^n находятся во взаимно однозначном соответствии с классами однородных идеалов в кольце многочленов $k[x_0, \ldots, x_1]$ относительно следующего отношения эквивалентности: два идеала определяют одну и ту же подсхему, если их однородные компоненты совпадают для всех достаточно больших степеней. Дискретный инвариант подсхемы, заменяющий степень и размерность цикла, — многочлен Гильберта соответствующего идеала, измеряющий линейную размерность однородной компоненты идеала в функции степени этой компоненты. (Впрочем, степень и размерность подмногообразия в P^n также удобнее всего вычислять через многочлен Гильберта этого многообразия, т. е. соответствующей ему подсхемы.) Утверждение о том, что подсхемы в P^n с фиксированным многочленом Гильберта могут быть естественно параметризованы, приобретает в теории Гротендика совершенно точный смысл и является очень сильным. Рассмотрим произвольную «систему» подсхем в P^n, параметризованную некоторой схемой S, т. е. произвольную подсхему в $P^n \times S$. Допустим, что эта система является «плоской», — это свойство означает, грубо говоря, что в слоях не происходит скачков,— и что на всех слоях над точками S индуцируются подсхемы с данным многочленом Гильберта h. Утверждается, что в классе таких систем существует единственная «универсальная» система, из которой все остальные получаются отображениями базы. База этой универсальной системы называется «схемой Гильберта» для P^n (точнее, ее частью, соответствующей многочлену h). Мамфорд обнаружил поразительное обстоятельство, что даже над полем C в P^3 схемы Гильберта для кривых могут не быть многообразиями: в слое структурного пучка общей точки такой схемы могут быть нильпотентные элементы.

По-видимому, неизвестно, можно ли описать многообразия Чжоу с помощью какого-либо универсального свойства; во всяком случае, изучение связи между многообразиями Чжоу и схемами Гильберта представляет существенный интерес.

Обе эти конструкции обобщаются на случай, когда P^n заменяется произвольным проективным многообразием (соответственно проективной алгебраической схемой). (Литература: [6], [9].)

Перейдем теперь к теории пересечений. Ей естественно предшествуют рудименты теории размерности, на которой мы не будем останавливаться подробно: ограничимся указанием, что размерность определяется как максимум длин цепочек неприводимых замкнутых подмногообразий (подсхем). Один из первых результатов теории пересечений состоит в оправдании представления о том, что «наложение i независимых условий» понижает размерность на i. Точная формулировка в контексте алгебраических многообразий: пусть W — алгебраическое многообразие, U, V — его подмногообразия размерностей w, u, v соответственно. Допустим, что $U \cap V$ не пусто, тогда через каждую точку пересечения, неособую на W, проходят компоненты, $U \cap V$, и все они имеют размерность $\geqslant u + v - w$. Важным дополнением служит теорема о размерности слоев отображения: если $U \to V$ — собственное отображение многообразия U на V, то $u = v + t$, где t — размерность общего слоя отображения; на отдельных подмногообразиях V размерность слоя может повышаться; точнее говоря, размерность слоя как функция на V полунепрерывна сверху в топологии Зариского. Эта теорема является обоснованием классического приема «счета констант». В теории Гротендика этот результат получил далекое развитие в серии теорем о полунепрерывности различных когомологических инвариантов слоя.

Вторая, более тонкая часть теории пересечений связана с конструкцией «кратностей»: если в ситуации U, $V \subset W$ имеем для некоторой неприводимой компоненты $X \subset U \cap V$ равенство $\dim X = \dim U + \dim V - \dim W$, то многообразию X можно приписать некоторое целое число — кратность, с которой он входит в пересечение $U \cap V$. Первую последовательную теорию кратностей пересечений в алгебраической геометрии развил Вейль в классической книге [13]; последующие работы его и его школы позволили восстановить на этой основе бо́льшую часть результатов классической алгебраической геометрии и — в силу того, что теория годна для любого поля констант, — значительно их обобщить. Самым эффектным результатом теории Вейля было, несомненно, доказательство им гипотезы Римана для дзета-функции кривых над конечными полями (см. Вейль [14]).

В этой теории кратностей существенно требование, чтобы U и V были в «достаточно общем положении», т. е. чтобы пересечение $U \cap V$ имело должную размерность. В случае, когда это не так, возможный выход подсказывается топологией: нужно «сдвинуть» многообразия U, V так, чтобы они оказались уже в общем положении. Естественно, не ограничиваясь подмногообразиями, рассматривать циклы; тогда описание «допустимых сдвигов» формально означает выделение подгруппы циклов, эквивалентных нулю, а теория пересечений должна строиться уже для классов эквивалентности.

В алгебраической геометрии есть несколько естественных вариантов введения такой эквивалентности; самый тонкий из известных способов — рациональная эквивалентность — является алгебраическим аналогом гомотопии (вместо $[0, 1]$ следует брать проективную прямую). Во всех получающихся теориях пересечения алгебраическому многообразию X ставится в соответствие некоторое градуированное кольцо $A(X)$: оно состоит из классов эквивалентности циклов (или по крайней мере содержит такие классы); степень градуировки определяется коразмерностью;

умножение индуцировано пересечением. В случае рациональной эквивалентности $A(X)$ называется кольцом Чжоу; конструкция $A(X)$ содержится в записках семинара Шевалле [10].

Последний доклад Гротендика на этом семинаре содержит новую точку зрения на теорию пересечений, весьма характерную для всего круга его идей. Он дает аксиоматическое описание $A(X)$ как функтора на категории алгебраических многообразий. Система аксиом Гротендика не определяет $A(X)$ однозначно, но содержит все свойства, достаточные для формального построения, например, теории классов Чженя алгебраических расслоений и, вероятно, для проведения большей части вычислений «исчислительной геометрии». Конструкции Вейля, а также Серра [11], давшего чрезвычайно удачный и поддающийся далекому обобщению когомологический метод введения кратностей пересечения, представляются в этом свете как теоремы существования для некоторых функторов типа $A(X)$. Другие примеры таких функторов доставляют кольца «когомологий Ходжа» $\bigoplus\limits_{p,q} H^p(X, \Omega^q)$, где Ω^q — пучок дифференциалов на X или — в классическом случае — кольца когомологий (скажем, сингулярных) в обычной хаусдорфовой топологии X, или, наконец, накрывающие когомологии Гротендика и М. Артина.

Таким образом, «исчислительные» методы в современной алгебраической геометрии получают обоснование, превращаясь в алгебраическую теорию колец $A(X)$. Практические вычисления Шуберта и многих других классиков относятся к случаю разнообразных специальных многообразий X: грассманианов многообразий флагов, касательных расслоений и т. д. Часть результатов в модернизированной форме изложена в статье Хоррокса [8], см. также библиографию. Теория классов Чженя в современных вариантах этих вычислений играет фундаментальную роль; объяснение этому состоит в том, что для расслоений с проективным слоем $Y \to X$ (или со слоем — многообразием флагов) кольцо $A(Y)$ вычисляется в терминах $A(X)$ и классов Чженя этого расслоения [10]. Методы теории когомологий когерентных пучков проникли в теорию пересечений сначала с идеей Серра вычислять кратности пересечения с помощью функторов Tor_i; обобщение этой конструкции, с одной стороны, и исследований Хирцебруха, с другой, привели Гротендика к его «теореме Римана-Роха» [2], лишь немногие следствия из которой еще реально использовались в литературе и которая представляет собой сейчас один из самых мощных общих результатов «исчислительной геометрии».

ЛИТЕРАТУРА

[1] Baker H. F., Principles of Geometry, vol. 6, Cambridge, 1933.

[2] Борель А., Серр Ж. П., Теорема Римана — Роха, Математика (сб. перев.) 5, № 5 (1961), 17—54.

[3] Chow W. L., van der Waerden B. L., Zur algebraischen Geometrie IX: Über zugeordnete Formen und algebraische Systeme von algebraischen Mannigfaltigkeiten 113, № 5 (1937), 692—704.

[4] Дьедонне Ж., Алгебраическая геометрия, Математика (сб. перев.) 9, № 1 (1965), 54—126.

[5] Grothendieck A., Eléments de la géometrie algébrique redigés avec la collab. de J. Dieudonné, Publ. Math. IHES, 4, 8, 11.

[6] Grothendieck A., Les schèmas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, 1960/61, № 221.

[7] Hirzebruch F., Topological Methods in algebraic Geometry, Springer Verlag, 1966.

[8] Horrocks G., On the relations of S-functions to Schubert varieties, Proc. London Math. Soc. 26 (1957), 265—280.

[9] Mumford D., Lectures on curves on an algebraic surface, Princeton, 1966 (русский перевод: Лекции о кривых на алгебраической поверхности, «Мир», 1968).

[10] Séminaire Anneaux de Chow, Paris. 1958.

[11] Серр Ж., Локальная алгебра и кратности пересечений, Математика (сб. перев.) 7, № 5 (1963), 3—93.

[12] Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, т. 2, ИЛ, 1954; т. 3, ИЛ, 1955.

[13] Weil A., Foundations of algebraic geometry, New York, 1946.

[14] Weil A., Variétés abeliennes et courbes algébriques, Paris, Herman, 1948.

[15] Van der Waerden B. L., Topologische Begründung des Kalküls der abzählende Geometrie, Math. Ann. 102 (1930), 337—362.

К ШЕСТНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

О. А. Олейник

Вопрос об изучении взаимного расположения ветвей действительной алгебраической кривой на плоскости, а также вопрос о числе, характере и расположении отдельных полостей алгебраической поверхности в пространстве, поставленные Д. Гильбертом в его шестнадцатой проблеме, открыли новый раздел математики — топологию действительных алгебраических многообразий. Отправным пунктом для этих вопросов послужила знаменитая теорема А. Харнака [1] о максимальном числе компонент действительной плоской алгебраической кривой. Изучению алгебраических кривых и поверхностей было посвящено несколько работ самого Д. Гильберта [2], [3] и его учеников. Позже замечательные результаты по топологии алгебраических кривых были получены в работах И. Г. Петровского [4], [5]; вопросы топологии действительных алгебраических поверхностей рассматривались в работах И. Г. Петровского и О. А. Олейник [6], Дж. Милнора [7], Р. Тома [8] и других математиков. Все эти работы, по-видимому, можно рассматривать как начало большой теории — топологии действительных алгебраических многообразий, которая будет создана в будущем и которая должна явиться полным решением шестнадцатой проблемы Гильберта [1]).

Проблема Гильберта о топологии алгебраических многообразий выдвигает большое множество вопросов, часто просто формулируемых, но решение которых вызывает

---

[1]) Говоря о шестнадцатой проблеме Гильберта, мы подразумеваем всюду в статье ту ее часть, которая относится к топологии алгебраических кривых и поверхностей.

большие трудности. Примеры таких простых конкретных вопросов были указаны Гильбертом при формулировке шестнадцатой проблемы: каково взаимное расположение 11 овалов алгебраической кривой шестого порядка, каково максимальное число компонент (замкнутых кусков) алгебраической поверхности четвертого порядка. Решение таких частных вопросов требует привлечения глубоких фактов топологии, алгебры, анализа и часто приводит к открытию общих закономерностей для алгебраических кривых или поверхностей (см., например, [4], [6]). Замечу, что вопрос о максимальном числе кусков алгебраической поверхности четвертого порядка до сих пор еще полностью не решен.

Многие результаты по топологии алгебраических кривых и поверхностей получены с привлечением теории М. Морса [9] о критических точках функций, заданных на многообразии. Впервые это было сделано в работе И. Г. Петровского [4].

До сих пор имеется лишь небольшое число работ, посвященных топологии действительных алгебраических многообразий. Некоторые результаты этой теории нашли применения при решении задач, относящихся к другим областям математики (см., например, [10]).

Ниже мы приводим обзор работ, относящихся к топологии действительных алгебраических многообразий, т. е. алгебраических кривых и поверхностей без действительных особых точек. Каждая из них является определенным вкладом в решение той общей проблемы изучения топологии действительных алгебраических кривых и поверхностей, которая поставлена Гильбертом в его шестнадцатой проблеме. Возможно, что некоторые из работ по топологии действительных алгебраических кривых и поверхностей без особых точек остались неизвестными автору и поэтому не нашли отражения в этом обзоре.

В 1876 г. А. Харнак [1] показал, что число замкнутых ветвей алгебраической кривой порядка n на проективной плоскости не превосходит $\frac{1}{2}(n-1)\times$ $\times(n-2)+1$, и построил алгебраические кривые с этим максимальным числом компонент. (Алгебраической кривой порядка n на действительной проективной плоскости (x, y, z) называется множество точек (x, y, z) этой плоскости, для которых $z^n F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, где $F(x, y)$ — многочлен степени n относительно переменных x, y с действительными коэффициентами.) Алгебраическую кривую порядка n, состоящую из максимального числа компонент, будем называть M-кривой. А. Харнак показал также, что M-кривая не имеет действительных особых точек. Это означает, что для M-кривой система $F = 0$, $F_x = 0$, $F_y = 0$ не имеет действительных конечных или бесконечных решений. Будем рассматривать проективную плоскость как сферу в трехмерном пространстве, у которой отождествлены диаметрально противоположные точки. Алгебраическая M-кривая состоит из овалов (четных компонент) и нечетных компонент. Овалом называется такая компонента алгебраической кривой на проективной плоскости, которой на сфере соответствуют две замкнутые кривые. Если компоненте алгебраической кривой соответствует на сфере только одна замкнутая кривая, то такая компонента называется нечетной или непарным куском. В шестнадцатой проблеме Гильберта ставится, в частности, задача об исследовании взаимного расположения компонент алгебраической M-кривой порядка n на проективной плоскости. При этом, естественно, предполагается $n \geqslant 6$, так как для алгебраических M-кривых не выше пятого порядка эта задача решается без труда. Очевидно, что M-кривая четвертого порядка состоит из четырех овалов, расположенных вне друг друга, а M-кривая пятого порядка состоит из одного непарного куска и шести овалов, расположенных вне друг друга.

В 1891 г. Д. Гильбертом в работе [2] была высказана гипотеза, которую он затем повторил на Международном математическом конгрессе в 1900 г. при формулировке своей шестнадцатой проблемы, что алгебраическая M-кривая шестого порядка не может состоять из 11 овалов, расположенных вне друг друга. В первом и втором десятилетии нашего века было несколько попыток доказать это предложение (см. [11] — [18]), и до последнего времени считалось, что первое доказательство было дано швейцарским математиком К. Рооном в работе [16], однако это доказательство, как указано в работе [19], неполное.

И. Г. Петровскому принадлежит глубокое исследование топологии алгебраических кривых на проективной плоскости (работы [4], [5]). Из его результатов, как весьма частный случай, следует утверждение Гильберта о M-кривой шестого порядка, о котором мы говорили выше. И. Г. Петровским установлено, что алгебраическая кривая четного порядка n не может состоять более чем из $\frac{1}{8}(3n^2-6n)+$ $+1$ овалов, расположенных вне друг друга. Таким образом, гипотеза Гильберта о том, что не существует кривой шестого порядка, состоящей из 11 овалов, расположенных вне друг друга, была впервые доказана в работе И. Г. Петровского [4].

А. Харнак [1] построил алгебраическую кривую шестого порядка, имеющую один овал, расположенный внутри некоторого другого овала α, и девять овалов вне друг друга и вне овала α. Д. Гильберт в работе [2] построил алгебраическую кривую шестого порядка, содержащую девять овалов внутри некоторого овала α и один овал вне α.

Обобщения методов Харнака и Гильберта для построения M-кривых указаны в работе [20].

Вопрос о взаимном расположении кривых шестого порядка, не имеющих действительных особых точек, изучался также в работе Д. А. Гудкова [19]. Как сообщил нам автор, в этой работе имеются неверные утверждения. Их исправление и подробные доказательства результатов о кривых шестого порядка будут опубликованы в «Ученых записках Горьковского государственного университета», вып. 89. В частности, там приводится построение M-кривой шестого порядка, состоящей из пяти овалов, расположенных внутри одного овала α, и пяти овалов вне α и вне друг друга.

Будем называть овал положительным (отрицательным), если для точек некоторой окрестности этого овала, лежащих внутри него, $F(x, y) > 0$ $(F(x, y) < 0)$. Теорему И. Г. Петровского [4], [5] относительно алгебраических кривых четного порядка n можно сформулировать следующим образом: пусть p означает число положительных овалов и m — число отрицательных овалов алгебраической кривой четного порядка n. Тогда

$$|p-m| \leqslant \frac{1}{8}(3n^2-6n)+1$$

и существуют кривые, для которых эта граница достигается. Такие алгебраические кривые построены в [5] методом, предложенным А. Харнаком для построения M-кривых. Из этой теоремы И. Г. Петровского следует целый ряд предложений о взаимном расположении овалов алгебраической кривой на проективной плоскости. Аналогичная теорема установлена и для кривых нечетного порядка n. Легко проверить, что $p - m$ для четного n равно эйлеровой характеристике замыкания множества конечных точек на проективной плоскости, для которых

$$z^n F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad z = 1.$$

В такой формулировке теорема И. Г. Петровского обобщается [6] на алгебраические поверхности любого порядка n в действительном проективном пространстве P_m, а также на алгебраические пространственные кривые [21].

Пусть $F(x_1, \ldots, x_m)$ — многочлен степени n относительно переменных $x_1, \ldots, x_m$ с действительными коэффициентами. Будем предполагать, что система уравнений $F = 0$, $F_{x_1} = 0, \ldots, F_{x_m} = 0$, где F_{x_i} означает производную от F по x_i, не имеет действительных конечных или бесконечных решений.

Множество Γ_0 точек $(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$ m-мерного проективного действительного пространства P_m, для которых

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) = 0,$$

представляет собой замкнутое $(m-1)$-мерное многообразие (алгебраическую поверхность без особых точек). Обозначим через $E(\Gamma_0)$ его эйлерову характеристику, т. е. $\Sigma(-1)^r p^r$, где p^r — его r-мерное число Бетти по модулю два. В работе И. Г. Петровского и О. А. Олейник [6] доказано, что для нечетного m

$$|E(\Gamma_0)| \leqslant (n-1)^m - 2S(m, n) + 1. \tag{1}$$

(Для четного m, как известно, $E(\Gamma_0) = 0$.) Здесь и в дальнейшем через $S(m, n)$ обозначено число, равное числу членов полинома $\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i^{n-1} - 1}{x_i - 1}$, степень которых не превосходит $\left[\frac{mn - 2m - n}{2}\right]$, где $[N]$ обозначает целую часть N. Легко подсчитать, что

$$S(2, n) = \frac{\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right)}{2}, \quad S(3, n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Обозначим через M_0 замыкание в проективном пространстве P_m множества конечных точек, для которых

$$x_{m+1}^n F\left(\frac{x_1}{x_{m+1}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{m+1}}\right) \geqslant 0$$

(гиперплоскость $x_{m+1} = 0$ мы считаем бесконечно удаленной). Тогда при четном n справедлива оценка

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{1}{2}, \tag{2}$$

каково бы ни было m. Если n нечетное, то

$$|E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + 1 \tag{3}$$

при нечетном m и

$$E(M_0)| \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} - S(m-1, n) + 1 \tag{4}$$

при четном m.

При $m = 2$, т. е. в случае проективной плоскости, неравенства (2) и (4) дают оценки И. Г. Петровского, полученные им в работах [4], [5]. Как мы уже говорили, эти оценки являются точными в том смысле, что существуют многочлены $F(x_1, x_2)$, для которых (2) и (4) выполняются со знаком равенства. При $m = 3$ и $n = 4$ также можно указать пример многочлена $F(x_1, x_2, x_3)$, для которого соотношения (1) и (3) выполняются со знаком равенства. Такая алгебраическая поверхность построена К. Роном в работе [14]. Она состоит из 10 овалов. Вопрос о том, являются ли точными оценки (1) — (4) при других значениях m и n, пока остается открытым. Трудности решения этого вопроса заключаются в том, что до сих пор неизвестны общие методы построения алгебраических поверхностей с достаточно большим числом компонент. Оценки (2), (3), (4) справедливы также и в том случае, когда поверхность $F = 0$ имеет конечное число действительных изолированных особых точек.

В 1891 г. Д. Гильберт в работе [2] исследовал топологическую структуру действительных пространственных алгебраических кривых. Он показал, что число компонент действительной пространственной алгебраической кривой порядка n не превосходит $\frac{1}{4}(n-2)^2+1$, если n четное, и $\frac{1}{4}(n-1)(n-3)+1$, если n нечетное, и построил пространственные алгебраические кривые с этим максимальным числом компонент. Вопрос о взаимном расположении на алгебраической поверхности компонент действительной алгебраической пространственной кривой, заданной пересечением двух алгебраических поверхностей, рассмотрен О. А. Олейник в работе [21].

Обозначим через Γ алгебраическую поверхность в действительном проективном пространстве (x, y, z, t), определяемую уравнением

$$t^p F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)=0,$$

где $F(x, y, z)$ — многочлен степени p с действительными коэффициентами, и через γ обозначим поверхность, определяемую уравнением

$$t^q f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right)=0,$$

где $f(x, y, z)$ — многочлен степени q с действительными коэффициентами. Предположим, что Γ и γ не имеют действительных особых точек, а также что действительная алгебраическая пространственная кривая K, определенная пересечением Γ и γ, не имеет действительных особых точек, т. е. что ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} F_x, & F_y, & F_z \\ f_x, & f_y, & f_z \end{Vmatrix}$$

равен 2 во всех точках K. Обозначим через M замыкание в проективном пространстве множества конечных точек на поверхности Γ, для которых выполняется неравенство $f(x, y\ z) \geqslant 0$, при $t=1$.

В работе [21] доказано, что если q четное, то

$$|E(M)| \leqslant \frac{1}{3}p^3+\frac{3}{8}pq^2+\frac{1}{4}p^2q-p^2-pq+\frac{7}{6}p+\frac{|E(\Gamma)|}{2}. \tag{5}$$

Для $E(\Gamma)$ имеет место оценка (1). При $m=3$ из неравенства (1) получаем

$$|E(\Gamma)| \leqslant (p-1)^3+\frac{p(p-1)(p-2)}{3}+1.$$

Если q — нечетное число и γ, Γ и $t = 0$ пересекаются в конечном числе точек, равном σ, то

$$|E(M)| \leqslant \frac{1}{3}p^3 + \frac{3}{8}pq^2 + \frac{1}{4}p^2q - \frac{3}{4}p^2 - \frac{3}{4}pq + \frac{13}{24}p + \frac{|E(\Gamma) - \sigma|}{2}. \qquad (6)$$

Легко видеть, что при $p = 1$ и любом q, т. е. в случае плоских алгебраических кривых K, соотношения (5) и (6) совпадают с оценками, полученными И. Г. Петровским в работах [4], [5]. Эти оценки имеют вид

$$|E(M)| \leqslant \frac{3q^2 - 6q}{8} + 1 \quad \text{при } q \text{ четном},$$

$$|E(M)| \leqslant \frac{3q^2 - 3}{8} \quad \text{при } q \text{ нечетном}.$$

Мы уже говорили, что эти оценки не могут быть улучшены. В случае $p = 2$ соотношения (5) и (6) имеют вид

$$|E(M)| \leqslant \frac{3}{4}q^2 - q + 1 + \frac{|E(\Gamma)|}{2}, \quad \text{если } q \text{ четное}, \qquad (7)$$

$$|E(M)| \leqslant \frac{3}{4}q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{3}{4} + \frac{|E(\Gamma) - \sigma|}{2}, \quad \text{если } q \text{ нечетное}. \qquad (8)$$

При $p = 2$ величина $E(\Gamma)$ может равняться нулю или двум. В работе [21] доказано, что оценки (7), (8) также являются точными. В случае, когда Γ — однополостный гиперболоид, построены пространственные алгебраические кривые K, для которых (7) и (8) выполнены со знаком равенства. В случае, когда Γ — алгебраическая поверхность произвольного порядка p, построены алгебраические кривые K, для которых

$$E(M) = \frac{3}{8}pq^2 + C(p), \qquad (9)$$

где $C(p)$ зависит только от p. Заметим, что в оценках (5) и (6) коэффициент при старшей степени q такой же, как и в равенстве (9). Из оценок (5) и (6), как и в случае плоских кривых, можно получить ряд геометрических следствий для пространственных алгебраических кривых.

Одним из наиболее интересных вопросов, поставленных Гильбертом в его шестнадцатой проблеме, является вопрос о числе компонент алгебраической поверхности в проективном пространстве. Ответ на этот вопрос явился бы обобщением теоремы А. Харнака о максимальном числе компонент алгебраической кривой на случай алгебраических поверхностей любой размерности. Некоторые оценки для числа компонент алгебраической поверхности следуют из результатов, полученных в работах [22], [7], [8].

Всюду в дальнейшем через $\sigma(Q)$ будем обозначать сумму всех чисел Бетти полиэдра Q, через $\sigma_1(Q)$ — сумму всех его четномерных чисел Бетти и через $\sigma_2(Q)$ — сумму всех его нечетномерных чисел Бетти. Все числа Бетти рассматриваются по модулю 2. Пусть M_0 и Γ_0 определены, как и выше в неравенствах (1)—(4), с помощью полинома F степени n. О. А. Олейник в работе [22] доказала, что если m и n — нечетные числа, то

$$\sigma(M_0) \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} + 2m,$$

$$\sigma_i(M_0) \leqslant \frac{1}{2}\left[(n-1)^m - S(m, n) + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} + 2m\right], \quad i=1, 2.$$

Если же n — нечетное число, а m — четное, то

$$\sigma(M_0) \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{(n-1)^{m-1}}{2} + 2m,$$

$$\sigma_i(M_0) \leqslant \frac{1}{2}[(n-1)^m - S(m, n) + (n-1)^{m-1} - S(m-1, n) + 2m], \qquad i = 1, 2.$$

Если n — четное, то при любом m

$$\sigma(M_0) \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)^{m+1} - (n-1)}{(n-2)} + \frac{m(m+1)}{2}\right],$$

$$\sigma_i(M_0) \leqslant \frac{1}{2}\left[(n-1)^m - S(m, n) + \frac{(n-1)^m - (n-1)}{2(n-2)} + \frac{m^2+m+2}{4}\right], \quad i=1, 2.$$

Для чисел Бетти алгебраической поверхности Γ_0 в пространстве P_m, определяемой многочленом F степени n, получены следующие оценки.

Если m и n — нечетные числа, то

$$\sigma(\Gamma_0) \leqslant (n-1)^m + m,$$

$$\sigma_i(\Gamma_0) \leqslant (n-1)^m - S(m, n) + \frac{(m+1)}{2}, \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Если n — нечетное, а m — четное число, то

$$\sigma(\Gamma_0) \leqslant (n-1)^m + m, \ \sigma_i(\Gamma_0) \leqslant \frac{(n-1)^m}{2} + \frac{m}{2}, \ i = 1, 2. \quad (11)$$

Если n — четное, а m — нечетное число, то

$$\sigma(\Gamma_0) \leqslant \frac{(n-1)^{m+1} - (n-1)}{n-2} + \frac{m(m-1)}{2} + 2m, \quad (12)$$

$$\sigma_i(\Gamma_0) \leqslant (n-1)^m - S(m, n) + \frac{(n-1)^m - (n-1)}{2(n-2)} + \\ + m + \frac{m(m-1)}{4}, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Если n и m — четные числа, то

$$\sigma_1(\Gamma_0) = \sigma_2(\Gamma_0) = \frac{\sigma(\Gamma_0)}{2} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)^{m+1} - (n-1)}{n-2} + \frac{m(m-1)}{2} + 2m\right]. \quad (14)$$

В случае $m = 2$ из неравенств (11) и (14) следуют оценки числа компонент плоской алгебраической кривой порядка n. Это число не превосходит $\frac{(n-1)^2}{2} + 1$, если n — нечетное, и $\frac{1}{2}(n-1)n + 2$, если n — четное число. Очевидно, что эти оценки более грубые, чем те, которые даются теоремой А. Харнака. Из неравенств (10), (13) получаются также оценки числа кусков p^0 действительной алгебраической поверхности в трехмерном пространстве:

$$p^0 \leqslant \frac{(n-1)^3}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{12} + 2, \text{ если } n \text{ нечетное,}$$

$$p^0 \leqslant \frac{(n-1)^3}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} + 2,$$

если n четное.

Основным методом исследования в работе [22], так же как и в работах [21], [6], [4], [5], является изучение изменения топологической структуры алгебраической кривой или поверхности при изменении коэффициентов алгебраического уравнения, определяющего алгебраическую кривую или поверхность. При этом существенную роль играют результаты и идеи М. Морса [9], связанные с исследованием изменения топологии множества уровня при переходе функции через критические значения, а также формулы Эйлера — Якоби [23].

Теория М. Морса применялась также в работах [7], [8] для оценки чисел Бетти алгебраических многообразий.

В работе Дж. Милнора [7] рассматриваются алгебраические поверхности в евклидовом, а также в проективном пространствах и даются оценки суммы их чисел Бетти. Под q-м числом Бетти понимается ранг группы когомологий H^q с коэффициентами из некоторого поля.

Пусть V — множество в евклидовом пространстве R^m, определенное уравнениями

$$f_1(x_1, \ldots, x_m) = 0, \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Тогда, если каждый полином f_i имеет степень, не превосходящую n, то сумма всех чисел Бетти множества V не превосходит $n(2n-1)^{m-1}$. Вопрос о том, насколько эту оценку можно улучшить, остается открытым.

Если W — компактная гиперповерхность в R^m, не содержащая особых точек и определяемая уравнением $f=0$, где f — полином степени n и n — четное число, то сумма чисел Бетти W не превосходит $n(n-1)^{m-1}$. Эта оценка аналогична оценкам (12) и (14), полученным в работе [22].

В работе Милнора [7] доказана также следующая теорема. Пусть множество V в евклидовом пространстве R^m определяется неравенствами

$$f_1 \geqslant 0, \ldots, f_p \geqslant 0,$$

где f_i — полином степени d_i, и пусть $d = \sum_{i=1}^{p} d_i$. Тогда сумма чисел Бетти V не превосходит

$$\frac{1}{2}(d+2)(d+1)^{m-1}.$$

Как следствие указанных выше теорем для евклидова пространства R^m Дж. Милнор получает соответствующие оценки в проективном пространстве.

В работе Р. Тома [8] доказано, основываясь на теории Морса, что если A — множество нулей полинома степени n в R^m, то сумма чисел Бетти A мажорируется n^m.

Если же A — компактное множество в R^m, определяемое уравнением $F = 0$, где F — неотрицательный полином (т. е. полином, не принимающий отрицательных значений) степени n, то сумма чисел Бетти A не превосходит $(n-1)^m$. Если A — алгебраическая поверхность без особых точек в проективном пространстве P_m, определяемая уравнением $F = 0$, где F — полином степени n в P_m, то сумма чисел Бетти для A не превосходит $\frac{n(n^m-1)}{n-1}$.

Для алгебраических поверхностей четвертого порядка получены более точные результаты.

Алгебраические поверхности четвертого порядка в трехмерном пространстве были предметом рассмотрения многих работ (см., например, [3], [14], [16], [24]). К. Роон [24] доказал, что поверхность четвертого порядка может состоять не более чем из 12 компонент.

В работе [14] построены поверхности четвертого порядка в трехмерном пространстве, состоящие из 10 овалов. Из оценки (2), полученной в работе О. А. Олейник и И. Г. Петровского [6], следует, что если алгебраическая поверхность четвертого порядка состоит только из овалов, то их число не превышает 10. Ряд интересных результатов о поверхностях четвертого порядка сформулирован в работе [25]. В частности, там утверждается, что поверхность четвертого порядка может состоять не более чем из 11 компонент. Остается открытым вопрос, существуют ли поверхности четвертого порядка с 11 компонентами. Таким образом, ответ на вопрос о максимальном числе компонент алгебраической поверхности четвертого порядка, содержащийся в формулировке шестнадцатой проблемы Гильберта, все еще не найден.

Нам кажется, что несмотря на то, что в XX в. получен ряд важных результатов по топологии алгебраических многообразий (из них наиболее значительными являются результаты работ И. Г. Петровского [4], [5]), шестнадцатая проблема Гильберта при всей ее широте постановки вопроса является в настоящее время столь же актуальной, как и на рубеже XX в. Несомненно, что она еще долго будет привлекать внимание исследователей. Одной из наиболее интересных и трудных задач, связанных с этой проблемой, которые еще ждут своего решения, является обобщение теоремы Харнака на случай алгебраических поверхностей.

[1] Harnack A., Über die Vielheitkeit der ebenen algebraischen Kurven, Math. Ann. 10 (1876), 189—198.

[2] Hilbert D., Über die reellen Züge algebraischen Kurven, Math. Ann. 38 (1891), 115—138.

[3] Hilbert D., Über die Gestalt einer Fläche vierter Ordnung, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1909, 308—313.

[4] Petrowsky I., Sur la topologie des courbes planes, réeles et algèbriques, C. r. Acad. Sci. 197 (1933), 1270—1272.

[5] Петровский И. Г., On the topology of real plane algebraic curves, Ann. Math. 39 (1938), 189—396.

[6] Петровский И. Г., Олейник О. А., О топологии действительных алгебраических поверхностей, ИАН СССР, сер. матем. 13 (1949), 389—402.

[7] Milnor J., On the Betti numbers of real varieties, Proc. Amer. Math. Soc. 15, № 2 (1964), 275—280.

[8] Thom R., Sur l'homologie des variétés algèbriques réelles, Differential and combinatorial topology, A Symposium in honour of Marston Morse, Princeton University Press, 1965, 255—265.

[9] Morse M., Critical points, Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925), 345—396.

[10] Витушкин А. Г., Оценки сложности задачи табулирования, Физматгиз, 1959.

[11] Wright J. E., The ovals of the plane sextic curves, Amer. J. Math. 29 (1907), 305—308.

[12] Kahn G., Eine Allgemeine Methode zur Untersuchung der Gestalten algebraischer Kurven, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1909.

[13] Löbenstein K., Über den Satz, dass ebene algebraische Kurve 6 Ordnung mit 11 sich einander ausschlissenden Ovalen nicht existiert, Inaugural Dissertation, Göttingen, 1910.

[14] Rohn K., Die Maximalzahl von Ovalen bei einer Fläche 4 Ordnung, Berichte über die Verhandlungen, Leipzig 63 (1911), 423—440.

[15] Rohn K., Die ebene Kurve 6 Ordnung mit elf Ovalen, Berichte über die Verhandlungen, Leipzig 63 (1911), 540—555.

[16] Rohn K., Die Maximalzahl und Anordnung der Ovalen bei der ebenen Kurve 6 Ordnung und bei der Fläche 4 Ordnung, Math. Ann. 73 (1913), 177—229.

[17] McDonald, The ovals of the plane sextic curve, Amer. J. Math. 49 (1927), 523—526.

[18] Hilton H., On the circuits of a plane sextic curve, Rend. Circ. Math. di Palermo 60 (1936), 280—285.

[19] Гудков Д. А., Полная топологическая классификация неособых действительных алгебраических кривых шестого порядка в действительной проективной плоскости, ДАН СССР 98, № 4 (1954), 521—524.

[20] Coolidge I., A treatise on algebraic plane curves, Oxford, 1931.

[21] Олейник О. А., О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности, Матем. сб. 29 (71), № 1 (1951), 133—156.

[22] Олейник О. А., Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей, Матем. сб. 28 (70), № 3 (1951), 635—640.

[23] L. Kronecker's Werke, Über einige Interpolationsformeln für ganze Funktionen mehrer Variablen, I, 1895, 133—141.

[24] Rohn K., Die Fläche 4 Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestaltung, Preisschriften der Fürstl. Iablonowskischen Geselschaft, Leipzig, 1886, 1—58.

[25] Уткин Г. А., О топологической классификации неособых действительных поверхностей четвертого порядка, ДАН СССР 175, № 1 (1967), 40—43.

К СЕМНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Ю. И. Манин

Формулировка задачи по Гильберту следующая: пусть дана рациональная функция от n переменных с вещественными коэффициентами, которая во всех вещественных точках, где она определена, принимает неотрицательные значения. Можно ли представить ее в виде суммы квадратов рациональных функций с вещественными коэффициентами (или в виде отношения сумм квадратов многочленов — это одно и то же)? Э. Артин дал положительное решение этого вопроса в работе [2], которое мы сейчас опишем [1]).

Доказательство Артина основано на тщательном анализе упорядоченных полей и связи упорядоченности с множеством сумм квадратов. Естественно, что аксиоматическое изучение задачи позволяет установить результат в большей общности, чем он сформулирован Гильбертом.

Пусть k — произвольное поле. Оно называется *формально вещественным*, если из равенства $\sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 0$, $a_i \in k$, следует, что $a_i = 0$ для всех i. Формально вещественное поле k называется *вещественно замкнутым*, если никакое его собственное алгебраическое расширение уже не является формально вещественным.

Упорядочением поля k называется задание подмножества элементов $P \subset k$ (положительных в данном

---

[1]) В частном случае проблема была решена Гильбертом. См. Д. Гильберт, Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, 187—188.— *Прим. ред.*

упорядочении), которое обладает следующими свойствами:

а) P замкнуто относительно сложения и умножения.

б) Для всякого элемента $a \in k$, $a \neq 0$, либо $a \in P$, либо $-a \in P$.

в) $0 \notin P$.

Естественно писать $a > b$, если $a - b \in P$.

Доказывается, что у всякого вещественно замкнутого поля существует единственное упорядочение (P состоит из квадратов ненулевых элементов поля) и что всякое формально вещественное поле k вкладывается в вещественно замкнутое поле K, определенное однозначно с точностью до изоморфизма. (Более точно: любой автоморфизм упорядоченного поля $k \subset K$ продолжается до автоморфизма K.)

Вещественно замкнутые поля обладают очень многими свойствами обычного поля вещественных чисел, которые доказываются несложным видоизменением классических рассуждений.

Вот наиболее существенные из них:

1. «Основная теорема алгебры»: Если поле k вещественно замкнуто, то $\sqrt{-1} \notin k$ и $k(\sqrt{-1})$ алгебраически замкнуто.

2. Обращение предыдущей теоремы: Если $\sqrt{-1} \notin k$ и $k(\sqrt{-1})$ алгебраически замкнуто, то k вещественно замкнуто.

3. Теорема Штурма в классической формулировке.

Первый результат этой изящной теории в направлении проблемы Гильберта состоит в доказательстве следующей теоремы: *Суммы квадратов в формально вещественном поле k — это в точности те элементы, которые при любом упорядочении k остаются положительными.* (Если поле k не является формально вещественным и характеристика k отлична от 2, то любой его элемент есть сумма квадратов

$$a = \left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{1-a}{2}\right)^2,$$

и -1 является суммой квадратов, ибо существует тождество

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0,$$

где не все a_i нулевые.)

Вот набросок основного момента в доказательстве: *если элемент a положителен при всех упорядочениях k, то он есть сумма квадратов.* Пусть это не так. В алгебраическом замыкании k рассмотрим максимальное подполе K, в котором a не есть сумма квадратов (оно существует по лемме Цорна). Легко видеть, что оно формально вещественное. В нем $-a$ является квадратом: иначе в $K(\sqrt{-a})$ должно существовать представление вида

$$a = \sum (x_i + y_i\sqrt{-a})^2, \; x_i, \; y_i \in K,$$

откуда легко следует, что

$$a = \left(\sum x_i^2\right) \Big/ \left(1 + \sum y_i^2\right)$$

является суммой квадратов уже в K, — противоречие. Значит, $a = -b^2$, $b \in K$, так что $a < 0$ в любом упорядочении K, что невозможно, так как любое упорядочение k продолжается до некоторого упорядочения K. Теорема доказана.

Для вывода гипотезы Гильберта из этого результата рассмотрим некоторое подполе $k \subset R$ поля вещественных чисел; предположим, что *k допускает единственное упорядочение* (примеры: $k = Q$, $k = R$, k — поле всех вещественных алгебраических чисел). Пусть $f \in k(x_1, \ldots, x_n)$; назовем f *определенной* функцией, если $f(a_1, \ldots, a_n) \geqslant 0$ при любых $a_i \in k$, для которых f существует.

Теорема (Артин). *Если f определена, то* $f = \sum_{i=1}^{k} g_i^2$, $g_i \in k(x_1, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Без труда проверяется, что поле $k(x_1, \ldots, x_n)$ формально вещественно. Из вышеизложенного ясно, что для доказательства теоремы Артина следует проверить следующий факт: *если f определена,* то *$f > 0$ при всех упорядочениях поля $k(x_1, \ldots, x_n)$* или, иначе, что если $f < 0$ при каком-нибудь упорядочении поля $k(x_1, \ldots, x_n)$, то f принимает отрицательные значения (в смысле единственной структуры порядка в k).

Последнее утверждение относится к совместимости упорядочения со специализациями и устанавливается индукцией по числу переменных n. Основную роль в этой индукции играет теорема Штурма для формально вещественных полей. Мы опускаем дальнейшие детали доказательства, отсылая читателя к оригинальным работам Артина и Шрейера или к главе 6 книги Джекобсона [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Artin E., Schreier O., Algebraische Konstruktion reeller Körper, Hamb. Abh. 5 (1926), 85—99.

[2] Artin E., Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Hamb. Abh. 5 (1927), 100—115.

[3] Jacobson N., Lectures in abstract algebra, vol. III, Theory of fields and Galois theory, Princeton, N. J., 1964.

К ВОСЕМНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Б. Н. Делоне

Почти всякое вещество в твердой своей фазе (кроме животных и растительных тканей, стекол и т. д.) кристаллично, т. е. либо является монокристаллом (например, один кристалл горного хрусталя, одна песчинка сахарного песка и т. д.), либо имеет микрокристаллическую структуру, т. е. как бы склеено из мельчайших монокристалликов (кусок сахара, сталь ножа и т. д.). Всякий монокристалл получается выращиванием из малой затравки. Если его мысленно вырастить до бесконечности, получим монокристаллическую, или просто кристаллическую, структуру. Сейчас определены структуры около 8000 кристаллических веществ, т. е. исследовано, как именно, в геометрическом смысле, каждое из них сложено из атомов. Оказывается, что всякая кристаллическая структура «правильна», т. е. группа G всех тех движений пространства как жесткого целого, которые совмещают эту структуру саму с собой, дискретна и имеет конечную фундаментальную область. Группа G движений называется дискретной, если существуют такая точка A и такое положительное число r, что всякая точка, отличная от A и эквивалентная точке A относительно G (т. е. такая, в которую переходит точка A движением из G), лежит от A не ближе, чем на расстоянии r. Фундаментальной областью группы G называется такое множество точек пространства, что: 1) все точки его не эквивалентны друг другу относительно G и 2) любая точка пространства эквивалентна некоторой точке этой области относительно G. Всякая дискретная группа движений n-мерного евклидова пространства с конечной фундаментальной областью называется (n-мерной) пространственной кристаллографической группой.

Две такие группы называются (кристаллографически) одинаковыми, если для них можно так подобрать декартовы реперы одинаковых ориентаций, что все их движения в этих реперах описываются одними и теми же линейными выражениями. Если можно найти такие реперы только разной ориентации, то группы называются энантиоморфными. Было установлено, что на плоскости имеется 17 в этом смысле различных пространственных кристаллографических групп, а в пространстве — 230, из которых 11 имеют энантиоморфные парные им группы. Таким образом, если не различать энантиоморфных групп, то в пространстве существует 219 разных групп. В силу одной, совсем не тривиальной, теоремы Бибербаха все кристаллографически разные пространственные группы, если они не энантиоморфны, абстрактно не изоморфны. Вывод 230 трехмерных пространственных кристаллографических групп был независимо друг от друга и одновременно сделан в 1890—1891 гг. Е. С. Федоровым и Шёнфлисом.

Если к условиям дискретности и конечности фундаментальной области прибавить еще третье, а именно требование, чтобы в группе G существовала n-мерная (если G n-мерна) подгруппа T параллельных переносов (как это делал Федоров при своем выводе), то доказательство конечности числа таких групп при заданном n непосредственно вытекает из одного совсем простого соображения Фробениуса [1]. Тогда остается кропотливым только сам вывод, потому что групп G много. Существование подгруппы T для $n = 2$ устанавливается тривиально. Но для $n = 3$ доказательство (Шёнфлис [2], Цассенгауз [3]) уже трудное. В 1900 г., когда Гильберт предлагал свои задачи, не было известно доказательство существования подгруппы T для $n > 3$. Это и сделал Бибербах [4], [5], [6], обобщив доказательство Шёнфлиса, и тем самым решил первую из задач, сформулированных Гильбертом в тексте проблемы.

Очень жалко, что даже для $n = 3$ доказательство существования подгруппы T трудно. Было бы весьма желательно найти, хотя бы для $n = 3$, простое доказательство, так как эта теорема, несомненно, является основной теоремой всей геометрической кристаллографии. Все дальнейшие теоремы геометрической кристаллографии уже совсем просто следуют из нее. Однако пока такого простого доказательства не найдено.

Вычислительный алгорифм для разыскания всех n-мерных кристаллографических групп дал в 1947 г. Цассенгауз [3]. Но он предполагает, что уже известны все неэквивалентные конечные группы n-мерных целочисленных матриц. Для $n = 2$ и $n = 3$ все такие группы были давно известны, но удобного алгорифма для их нахождения для $n > 3$ пока нет. Было бы очень желательно найти такой алгорифм.

Тот же Цассенгауз [3] дал абстрактную характеристику n-мерных пространственных кристаллографических групп. А именно, группа изоморфна такой группе тогда и только тогда, когда она есть такое конечное расширение свободной абелевой группы с n образующими, при котором единичный автоморфизм нормального делителя соответствует только единичному элементу фактор-группы.

На второй вопрос восемнадцатой проблемы Гильберта дал отрицательный ответ К. Рейнгардт [7]: оказывается, существуют такие многогранники, которые не являются фундаментальными областями групп движений и с помощью которых, соответствующим образом укладывая конгруэнтные друг другу их экземпляры, можно заполнить пространство.

Каковы те выпуклые многогранники, которые могут быть фундаментальными областями групп движений даже для трехмерного евклидова пространства, до последнего времени не было известно. В 1961 г. Б. Делоне [8] доказал, что если еще требовать, чтобы они давали так называемое нормальное разбиение, т. е. были бы смежными целыми $(n - 1)$-мерными гранями, то для любого n существует только конечное число топологически разных таких разбиений. Если взять группу G и повторить ею некоторую точку A, то получится правильная система точек $\{A_G\}$. Области Дирихле ее точек образуют некоторое правильное разбиение Дирихле, связанное с группой G. Оно нормально. Б. Делоне и Н. Сандакова [9] дали конечный алгорифм, позволяющий найти все такие разбиения для данного n. Если не требовать нормальности разбиения на выпуклые фундаментальные области группы G, то, как это показал на примере Заморзаев [10], таких топологически разных разбиений может быть бесконечно много. Однако из метода Делоне все же следует, что сами стереоэдры (многогранники) этих разбиений для фиксированного n могут быть (в отношении топологии сетки их ребер) лишь конечного числа топологически разных типов. Топологически разных разбиений Дирихле для центров атомов монокристаллической структуры, у которой на основной параллелепипед повторяемости приходится h атомов, не больше, чем некоторое число, зависящее только от h.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Frobenius G., Ueber die unzerlegbaren diskreten Bewegungsgruppen, Sitzb. preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., 1911, 654—655.

[2] Schönfliess, Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig, 1891.

[3] Zassenhaus, Über einen algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen, Comment. Math. Helvetica 21, № 2 (1948), 117—141.

[4] Bieberbach L., Ueber die Bewegungsgruppen des n-dimensionalen Euklidischen Raumes mit einem endlichen Fundamentalbereich, Gött. Nachr., 1910, 75—84.

[5] Bieberbach L., Ueber die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume I, Math. Ann. 70 (1911), 207—336.

[6] Bieberbach L., Ueber die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume II, Math. Ann. 72 (1912), 400—412.

[7] Reinhardt K., Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in Kongruente Polytope, Sitzb. preuss. Akad. Wiss., 1928, 150—155.

[8] Делоне Б. Н., Доказательство основной теоремы теории стереоэдров, ДАН СССР 138, № 6 (1961), 1270—1272.

[9] Делоне Б. Н., Сандакова Н. Н., Теория стереоэдров, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 64, Изд-во АН СССР, 1961, 28—51.

[10] Заморзаев А. М., О ненормальных правильных разбиениях евклидова пространства, ДАН СССР 161, № 1 (1965), 30—31.

К ДЕВЯТНАДЦАТОЙ И ДВАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМАМ ГИЛЬБЕРТА

А. Г. Сигалов

Девятнадцатая и двадцатая проблемы Гильберта, взятые вместе, составляют основу широкой программы исследований, завершение которой и сейчас нельзя предвидеть.

В девятнадцатой проблеме дается понятие регулярной вариационной задачи, как задачи на отыскание минимума интеграла

$$J = \iint_G F(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

где F — аналитическая функция, удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} > 0.$$

В двадцатой проблеме ставится вопрос, не допускает ли каждая такая задача решение, если понятие решения разумно расширено. В то же время в девятнадцатой проблеме предлагается выяснить, будут ли решения регулярной задачи всегда аналитичны, независимо от свойств гладкости или аналитичности граничных условий.

В качестве примеров указываются принцип Дирихле ($F = p^2 + q^2$) и задача на определение поверхности наименьшей площади, ограниченной заданной кривой ($F = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$).

Формулируя двадцатую проблему, Гильберт высказывает убеждение, что доказательства существования можно провести с помощью некоторого общего основного положения, на которое указывает принцип Дирихле. По-видимому, здесь имеется в виду получение решения как предела построенной определенным образом минимизирующей последовательности. Именно на этом пути Гильбертом [1], [2], были даны решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа и доказательство существования кратчайшей линии на поверхности, соединяющей две фиксированные точки.

Пример $F = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ показывает, что не каждая регулярная задача имеет решение, независимо от гладкости граничных условий. Такая возможность возникает, когда область G не является выпуклой.

Для решения таких задач поверхность $z = f(x, y)$ следует задавать в параметрической форме и считать, что функционал J зависит от трех неизвестных функций. Решение может иметь несколько участков, проектирующихся на одну и ту же часть плоскости (x, y). Такие примеры были известны задолго до доклада Гильберта. Чтобы исключить связанные с ними затруднения, вводят «гильбертово условие трех точек»: угол наклона плоскости, проходящей через любые три точки граничной кривой, к плоскости (x, y) ограничен постоянной, меньшей $\pi/2$ [1]). Можно допустить, что Гильберт имел в виду возможные ограничения такого типа, не указав на них. Но задачи, связанные с выражениями вида $\varphi(x, y, z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, дают нам такие примеры несуществования решения, которые нельзя исключить никаким ограничением на граничные значения. Эти примеры имеют природу, не зависящую от размерности задачи. Для пояснения приведем функционал геометрической оптики:

$$J(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\,dx = \int\limits_{\Gamma} \varphi(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt.$$

Коэффициент преломления φ может быть задан так, чтобы минимум не достигался ни на одной кривой $y = f(x)$. Но решение этой задачи в параметрической форме существует для *любой непрерывной* $\varphi > 0$. Доказательство существования легко провести, следуя работам Гильберта, предшествующим его докладу.

Отправляясь от аналитичности выражения F, предписанного Гильбертом, С. Н. Бернштейн предполагал, что F

---

[1]) Условие трех точек Гильберт ввел, решая задачу на минимум интеграла $\iint (p^2 + q^2)\,dxdy$.

разлагается в ряд однородных относительно (p, q) функций для достаточно больших p, q. Такой класс выражений F мы будем называть бернштейновским. Оказалось, что для того, чтобы существовало решение соответствующего дифференциального уравнения при любых достаточно гладких граничных данных, необходимо, чтобы порядок роста α функции F относительно $\sqrt{p^2+q^2}$ при $|p|, |q| \to \infty$ был больше 1. Для выражения $F = \varphi(x, y, z)\sqrt{1+p^2+q^2}$ порядок роста α равен 1.

Возвращаясь к формулировке девятнадцатой и двадцатой проблем, можно предположить, что имел в виду Гильберт, предлагая расширить понятие решения в соответствии со смыслом задачи. Нам представляется маловероятным, чтобы Гильберт предлагал отказываться от гладкости решения, надеясь, что позднее будет доказана его гладкость и аналитичность. Он знал, что регулярные задачи могут потребовать введения в качестве решений объектов, геометрически более сложных, чем поверхности вида $z = f(x, y)$, но при этом надеялся, что для аналитических задач и решения должны быть аналитичны. Но существует и другая точка зрения, по которой Гильберт, разбивая всю проблему отыскания аналитических решений для аналитических задач на две части, угадывал последующее развитие этой проблематики и предлагал в двадцатой проблеме искать доказательства существования обобщенных решений, не заботясь об их гладкости. Р. Курант [33] считал, что для задачи Плато в непараметрической форме Гильберт допускал рассмотрение поверхностей, которые на некоторых участках не задаются уравнением $z = f(x, y)$. Это равносильно переходу к параметрической форме. Именно такому направлению следовал Р. Курант в своей книге [34].

В девятнадцатой проблеме Гильберт, формулируя понятие регулярной задачи для двух независимых переменных, говорит, что вариационные задачи, которые играют роль в геометрии, механике и математической физике, являются преимущественно регулярными. Но в математической физике естественная постановка задачи требует трех и более независимых переменных. Когда Гильберт формулировал свои проблемы, трудности перехода от двух к большему числу переменных не были известны так хорошо, как сейчас; считалось, что достаточно получить решение двумерной задачи, перенесение же результатов на n-мерный случай не представляет интереса для математика.

Для математической физики и геометрии естественны вариационные задачи с несколькими неизвестными функциями. Соответствующие функционалы можно задавать выражениями вида

$$J(z) = \int\limits_G F(x_1, \ldots, x_n; z, J_1, \ldots, J_m)\, dx,$$

где z — вектор-функция аргументов $x_1, \ldots, x_n$, а J_k — некоторые величины, зависящие от $\partial z_i / \partial x_j$, например якобианы вектор-функции z, определяющей поверхности в параметрической форме, или компоненты тензора деформации, если z — вектор смещения упруго деформированного тела. В этих случаях выпуклость F относительно $\{J_k\}$ играет ту же роль в доказательствах существования минимума, что и гильбертово условие регулярности для функционалов, содержащих одну неизвестную функцию. Чтобы не отдаляться от проблем, сформулированных Гильбертом, мы ограничимся в этом кратком обзоре задачами с одной неизвестной функцией от n независимых переменных и двумерными регулярными задачами в параметрической форме.

В математических работах и приложениях регулярные задачи с неаналитическими подынтегральными выражениями не менее важны, чем задачи с аналитическими выражениями. Имея в виду, что в формулировках девятнадцатой и двадцатой проблем ясно выражено требование аналитичности F, мы включили в обзор неаналитические постановки лишь в той мере, в какой они имеют значение для решения задач с аналитическими выражениями.

ЗАДАЧИ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Работы С. Н. Бернштейна и А. Лебега определили главные направления, по которым развивалась программа, намеченная Гильбертом.

В работах Бернштейна аналитические проблемы Гильберта трактовались чисто аналитическими средствами. При $n = 2$ было доказано, что решение z регулярной задачи аналитично, если $z \in C_0^3$ [1]) (Бернштейн [3])[2]). Это требование было ослаблено Лихтенштейном [6] до $z \in C_\gamma^2$, $0 < \gamma < 1$, А. Хааром [7] до $z \in C_\gamma^1$ и Морри [8] до $z \in C_1^0$. Но даже этот результат не дал решения девятнадцатой проблемы при $n = 2$, ибо для регулярных задач общего вида все известные способы построения минимизирующих последовательностей дают решения, принадлежность которых классу C_1^0 установить в то время не удавалось.

Все эти результаты сводят девятнадцатую проблему к доказательству гладкости решения вариационной задачи. Но вместе с тем они ставят решение двадцатой проблемы в зависимость от решения девятнадцатой проблемы, ибо нельзя утверждать, что обобщенное решение отвечает смыслу задачи, если неизвестно, не будет ли всякое обобщенное решение гладким.

Для решения двадцатой проблемы С. Н. Бернштейн [5] развил метод продолжения решения дифференциального уравнения по параметру, входящему в уравнение. Этот метод дает решение вариационной задачи только в тех случаях, когда функционал выпуклый, например для выражений вида $F(p, q)$. Для таких выражений условие выпуклости функционала $\delta^2 J(z, \delta z) > 0$ равносильно условию регулярности.

Диссертация Лебега [12] содержала расширение класса допустимых функций и граничных условий вариационных задач. Такое расширение, независимо от его самостоятельного значения, не имело прямого отношения к поставленным Гильбертом задачам. Этот путь освобождал от трудностей, заменяя требуемые Гильбертом аналитические решения неким суррогатом. Полагали, что введение обобщенных решений оправдано для задач с неаналитическими подынтегральными выражениями. Оказалось, что обобщенные решения были почвой, на которой произросли доказательства существования аналитических

---

[1]) C_γ^l — совокупность функций $z(x_1, \ldots, x_n)$, обладающих непрерывными производными до порядка l включительно, причем производные порядка l удовлетворяют условию Гёльдера с показателем γ.

[2]) Результат Бернштейна относился не только к решениям регулярных задач вариационного исчисления, а к более общему случаю: к решениям аналитических нелинейных эллиптических уравнений ($n = 2$). — *Прим. ред.*

решений. Общие классы допустимых функций позволили сформулировать критерии компактности. Вместе с тем Лебег заметил, что функционалы некоторых регулярных задач полунепрерывны снизу. Этот факт был детально разработан Л. Тонелли [13], [14] сначала для однократных интегралов, а затем и для двойных. Было обнаружено, что если не заботиться о гладкости решения, можно отказаться от требуемой Гильбертом строгой выпуклости выражения $F(x, y, z, p, q)$ относительно (p, q), заменив в неравенстве, определяющем регулярность, знак $>$ на $\geqslant$. Такие задачи были названы квазирегулярными. Морри [9] дал простое доказательство существования обобщенных решений квазирегулярных задач на минимум интегралов общего вида, опираясь на слабую компактность ограниченных множеств в пространствах функций с обобщенными производными и полунепрерывность функционалов относительно слабой сходимости. В этой теореме можно усмотреть призрак «общего основного положения», в существование которого верил Гильберт. Однако истинное «основное положение» требовало более сложных средств.

Гладкость обобщенного решения задачи Плато в непараметрической форме, найденного Лебегом в 1902 г., была доказана А. Хааром в 1926 г. Гладкость непрерывных решений А. Хаара для интегралов типа $\iint F(p, q)\, dxdy$ была получена Морри в 1938 г. Для квадратичных интегралов понятие обобщенного решения также оказалось продуктивным, однако доказательство аналитичности решений этих задач не вызывало затруднений, ибо соответствующие дифференциальные уравнения были линейны. Для выражений общего вида $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$, $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $n = 2$, были получены доказательства гладкости при тех или иных ограничениях на F. Эти ограничения нарушали естественное согласование порядков роста F и производных от F относительно $|p|$ при $|p| \to \infty$ (Морри [9], Сигалов [16], Плотников [22]; дальнейшую литературу см. в обзорах [15], [39]).

Приведем полученные О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой в 1959—1961 гг. условия гладкости обобщенных решений многомерных вариационных задач общего вида, не содержащие таких ограничений.

Для того чтобы ограниченная стационарная функция $z \in W_\alpha^1$ многомерной вариационной задачи при $F \in C_\beta^l$

также принадлежала классу C_β^l, $l \geqslant 2$, $\beta > 0$, достаточно выполнения условий:

$$\nu_1(|z|)(1+|p|)^\alpha \leqslant F(x, z, p) \leqslant \mu_1(|z|)(1+|p|)^\alpha; \qquad (1)$$

дифференцирование выражения F по p_k понижает порядки роста относительно $|p| = (\Sigma p_k^2)^{1/2}$ по крайней мере на единицу, а дифференцирование по x_k и z не повышает порядков роста;

$$\nu_2(|z|)(1+|p|)^{\alpha-2}|\xi| \leqslant \sum_{i, j} F_{p_i p_j}\xi_i\xi_j \leqslant$$

$$\leqslant \mu_2(|z|)(1+|p|)^{\alpha-2}|\xi| \qquad (2)$$

для любого действительного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$; ν_i, μ_i — неубывающие положительные функции. Если граница области G и граничные значения z лежат в классе C_β^l, то $z \in \overline{C}_\beta^l(\overline{G})$.

Условия (1), (2) выполняются для всех задач бернштейновского класса. Из этой теоремы и теоремы И. Г. Петровского [21] следует, что для аналитических F, удовлетворяющих условиям (1), (2), обобщенное ограниченное решение $z \in W_\alpha^1$ аналитично. Стационарность z означает выполнение равенства $\delta J(z, \eta) = 0$.

Таким образом, для всех задач, удовлетворяющих условиям (1), (2), предположения, высказанные Гильбертом в девятнадцатой и двадцатой проблемах, оправдываются. В связи с этим заметим, что в формулировке девятнадцатой проблемы, помимо гипотезы об аналитичности решений регулярных вариационных задач, содержится также гипотеза об аналитичности любых решений соответствующих дифференциальных уравнений. Условие стационарности не требует существования вторых производных у z, и поэтому оно будет более общим, чем оба предположения Гильберта.

Условия, которым должно удовлетворять F для того, чтобы существовало ограниченное решение вариационной задачи, содержались в [16], [11], а также в [38]. Дать полный ответ на этот вопрос в явных характеристиках данных задачи невозможно, ибо для квадратичных интегралов этот вопрос сводится к определению расположения спектра соответствующего линейного дифференциального оператора по его коэффициентам.

Не исключено, что среди регулярных задач с аналитическими F без особенностей имеются и такие, для которых решение аналитично, но имеет особенности, в окрестности которых оно не ограничено.

Методы исследования гладкости обобщенных решений можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, опирающиеся на уравнение Хаара

$$\iint\limits_{G} F_z\,dx\,dy = \int\limits_{G^*} (F_p\,dy - F_q\,dx)$$

(Хаар [7], Морри [8], [9]). Чтобы получить условия гладкости решения z, находят уравнение для $z^h = \frac{1}{h}\{z(x+h, y) - z(x, y)\}$, аналогичное уравнению Хаара, и исследуют поведение его решений при $h \to 0$.

Более поздние результаты получены прямо из условия стационарности $\delta J(z, \eta) = 0$. Выбирая специальным образом функцию η, получают интегральные соотношения, из которых извлекают оценки интегральных норм неизвестной функции. Если, например, взять $\eta = z$ при (x, y), лежащей в области меньших значений G_c функции z, и $\eta = 0$ вне G_c, можно получить оценку для выражения $\iint\limits_{G_c} |\mathrm{grad}\ z|^\alpha dx dy = J_c$.

Дифференцируя J_c по уровню c, можно получить оценки разности колебаний решения в области и на ее границе, обобщающие принцип максимума для гармонических функций.

Дальнейший прогресс этой техники был связан с работой Де Джорджи [35], который изучал изменение интегралов от $|\mathrm{grad}\ z|^2$ по пересечению области G_c с шаром радиуса r в зависимости от c и r в задачах, связанных с выражениями вида $F(p_1, \ldots, p_n)$.

Наиболее полного развития, приведшего к результату, о котором говорилось выше, эта техника получила в работах О. А. Ладыженской и Н. Н. Уральцевой. Ю. Мозер [36] внес в получение таких оценок идею введения вспомогательной функции. Большой интерес представляют регулярные задачи, в которых $G = R^n$, а $F(x, z, p)$ как функция x, оставаясь аналитической, может иметь особенности. Один класс таких задач с особенностями, суммируемыми в достаточно высокой степени, изучен в [11], гл. IX. Более сложные задачи, не входящие в бернштейновский класс, в изобилии поставляет квантовая механика. Решение оказывается аналитической функцией, голоморфной в каждой точке, где нет особенностей, и сейчас мы имеем много интересных нерешенных задач такого типа [20].

ЗАДАЧИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Если выражение F удовлетворяет условию

$$m\sqrt{1+p^2+q^2}\leqslant F\leqslant M\sqrt{1+p^2+q^2}, \qquad \text{(A)}$$

то преобразование функционала $J(z)$ к параметрической форме дает функционал

$$J(T)=\iint_T \Phi(f, A_f)\,du,$$

определенный для непрерывных поверхностей конечной площади T, задаваемых параметрическими представлениями $x = f(u)$, $u \in \pi$; здесь A_f — три якобиана вектор-функции $f(u)$. Гильбертово условие регулярности для F равносильно строгой выпуклости выражения $\Phi(x, A)$ относительно A.

Задача на отыскание минимума $J(z)$ при условии (A), вообще говоря, не имеет решения. Но задача на отыскание минимума $J(T)$ имеет решение, если допустимые поверхности непрерывны и ограничены заданной жордановой кривой Г. От $\Phi(x, A)$ требуется только непрерывность, а от Г—только, чтобы она ограничивала по крайней мере одну поверхность конечной площади. Имеется несколько доказательств этой теоремы: Сигалов [17], Л. Чезари [24], И. Данскин [23], Л. Юнг [25], Ю. Решетняк [27]. Связь задач на минимум $J(z)$ и $J(T)$ при условии более общем, чем (A), дана в [19].

Трактовка двумерных регулярных задач в параметрической форме в классе непрерывных поверхностей была связана с глубокими исследованиями понятия поверхности конечной площади. Л. Юнг для получения теоремы существования использовал понятие обобщенной поверхности, близкое по содержанию к обобщенным функциям Л. Шварца.

При $\Phi = |A|$, т. е. при $F=\sqrt{1+p^2+q^2}$, получаем задачу об отыскании поверхности наименьшей площади, ограниченной кривой Г. Впервые решение этой задачи было получено Т. Радо [28] и Д. Дугласом [31] в 1930 г. Обзор предшествующих работ дан Т. Радо [30].

Решение дается аналитическими функциями, если параметрическое представление $f(u)$ конформно, т. е. если коэффициенты первой дифференциальной формы удовлетворяют равенствам

$$E_f = G_f, \qquad F_f = 0.$$

В теореме Радо — Дугласа допустимые поверхности имеют топологический тип круга, т. е. область изменения параметров гомеоморфна кругу. Однако известны примеры замкнутых жордановых кривых Г, для которых поверхность наименьшей площади имеет тип листа Мёбиуса, тора с отверстием или более сложный тип (Дуглас [32]).

Отыскание минимальной поверхности заданного топологического типа, ограниченной заданной системой жордановых кривых, называют задачей Дугласа. Условия существования их решений изложены в книге Куранта [34].

Обобщение задачи Дугласа на регулярные интегралы общего вида $J(T)$ подсказывается следующим примером. Пусть $\Phi(x, A) = \varphi(x)\cdot|A|$. Даже когда граничная кривая Г — окружность, $\varphi(x)$ может быть задана так, что нижняя грань значений $J(T)$ на поверхностях заданного топологического типа будет меньшей, чем на поверхностях более простых топологических типов.

Зная связь $J(z)$ с $J(T)$, мы видим, что расширение понятия решения, включающее поверхности произвольных топологических типов, естественно укладывается в постановку двадцатой проблемы. Существование решений предписанного топологического типа или ограниченного типа с заданной системой замкнутых кривых дано в [18]; для жордановых кривых Л. Юнг [25] получил решение этой задачи с помощью аппарата обобщенных поверхностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В какой мере изложенные выше результаты оправдывают предположения, высказанные Гильбертом в девятнадцатой и двадцатой проблемах?

Для регулярных задач в непараметрической форме бернштейновского класса мы имеем положительный ответ на обе гипотезы, если известно, что обобщенное решение ограничено.

Остаются малоизученными задачи, имеющие особенности не только при $p = \infty$; таковы, например, вариационные задачи квантовой механики, о которых говорилось выше.

Для задач в параметрической форме все имеющиеся результаты подтверждают оба предположения Гильберта. Для завершения результатов, относящихся к выражениям общего вида $\Phi(x, A)$, недостает теорем о гладкости и аналитичности решений задач с допустимыми поверхностями типа круга. Интересные геометрические идеи были высказаны в этом направлении Л. Юнгом [26], однако полного доказательства опубликовано не было.

В связи с уже известными результатами по задачам в параметрической форме представляет интерес следующий вопрос. Можно ли утверждать, что для двумерных регулярных задач с одной достаточно гладкой жордановой граничной кривой и аналитическим выражением $\Phi(x, A)$ без ограничений на топологический тип допустимых поверхностей абсолютный минимум достигается на аналитической поверхности конечного топологического типа?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hilbert D., Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 8 (1900), 184—188.

[2] Hilbert D., Math. Ann. 59 (1904), 161—186.

[3] Бернштейн С. Н., Math. Ann. 59 (1904), 20—76.

[4] Бернштейн С. Н., УМН 8 (1941), 32—81.

[5] Бернштейн С. Н., Ann. Ec. N. Sup. 29 (1912), 431—485; УМН 8 (1941), 32—74.

[6] Lichtenstein L., Bull de l'Ac. de Sc. de Cracovie (A), Dec. 1912, 915—941.

[7] Haar A., Math. Ann. 97, № 1/2 (1926), 124—158.

[8] Morrey C., Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 127—166.

[9] Morrey C., Multiple Integral problems in the Calculus of Variations, Univ. Calif. Publ., 1943.

[10] Morrey C., Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations, 1966.

[11] Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения, «Наука», 1964.

[12] Lebesgue H., Ann. Math. pur. appl. 7 (1902), 231—359.

[13] Tonelli L., Acta Math. 53 (1929), 325—346.
[14] Tonelli L., Ann. d. Scuola norm. di Pisa 2 (1933), 89—130.
[15] Сигалов А. Г., Тр. Третьего всесоюзного математического съезда, т. 1, Изд-во АН СССР, 1956, 293—299.
[16] Сигалов А. Г., Тр. Московск. матем. о-ва 2 (1953), 202—233.
[17] Сигалов А. Г., УМН 6, № 2 (1951), 16—101.
[18] Сигалов А. Г., УМН 12, № 1 (1957), 54—98.
[19] Сигалов А. Г., Матем. сб. 34 (76), № 3 (1954), 386—406.
[20] Сигалов А. Г., УМН 22, № 2 (1967), 3—19.
[21] Петровский И. Г., Матем. сб. 5, № 1 (1939), 3—68.
[22] Плотников В. И., Матем. сб. 47 (89), № 3 (1959), 355—396.
[23] Danskin J. M., Rivista Mat. Parma 3 (1952), 46—63.
[24] Cesari L., Amer. J. Math. 74, № 2 (1952), 265—295.
[25] Young L. C., Mem. Amer. Math. Soc. 17 (1955).
[26] Young L. C., C. r. Acad. sci. 248, № 8 (1959); 916—919, 1110—1112.
[27] Решетняк Ю., Сиб. матем. ж. 3 (1962), 744—768.
[28] Radó T., Length and Area, New York, 1948.
[29] Radó T., Math. Z. 32 (1930), 763—796.
[30] Radó T., On the problem of Plateau, Springer-Verlag, Berlin, 1933.
[31] Douglas J., Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 263—321.
[32] Douglas J., Ann. Math. 40 (1939), 195—218.
[33] Courant R., Math. Ann. 97 (1927), 711—736.
[34] Курант Р., Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, ИЛ, 1953.
[35] De Giorgi, Memorie delle Acc. Sci. Torino Ser. 3, 3, № 1 (1957), 25—43 (русский перевод: Математика (сб. перев.) 4, № 6 (1960), 25—38).
[36] Moser J., Comm. Pure and Appl. Math. 13, № 3 (1960), 457—468.
[37] Silverman E., Pacific J. Math. 15 (1965), 299—303.
[38] Stampacchia G., Comm. Pure and Appl. Math. 16, № 4 (1963), 383—422.
[39] Плотников В. И., Сигалов А. Г. и Уральцева Н. Н., Тр. Четвертого всесоюзного математического съезда, т. 1, Изд-во АН СССР, 1963, 199 — 213.

К ДЕВЯТНАДЦАТОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

О. А. Олейник

Здесь мы коротко осветим ту сторону девятнадцатой проблемы Гильберта, которая связана с вопросом о дифференциальных уравнениях, все решения которых аналитичны. Согласно гипотезе Гильберта этим свойством должны обладать уравнения, являющиеся дифференциальными уравнениями Лагранжа — Эйлера для регулярных вариационных задач. В 1903 г. С. Н. Бернштейн [1], [2] установил более общее предложение, он доказал аналитичность всех решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка, задаваемых аналитическими функциями, с двумя независимыми переменными в предположении существования и ограниченности третьих производных у решений. Позже этот результат был усилен и передоказан другими математиками. Обзор результатов об аналитичности решений эллиптических уравнений, полученных до 1940 г., содержится в статье С. Н. Бернштейна и И. Г. Петровского [3]. В 1937 г. в работах И. Г. Петровского [4], [5] было дано наиболее полное и в определенном смысле исчерпывающее решение этого круга вопросов, связанных с девятнадцатой проблемой Гильберта; речь идет об описании класса дифференциальных уравнений и систем, все достаточно гладкие решения которых аналитичны. И. Г. Петровский выделил класс систем дифференциальных уравнений, которые теперь принято называть системами, эллиптическими по И. Г. Петровскому, обладающий этим свойством. Именно, И. Г. Петровский доказал следующую теорему:

Пусть дана система

$$F_i(x, u, Du, \ldots, D^k u) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \qquad (1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_N)$, $D^k u = \dfrac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $k_i \geqslant 0$, причем в левые части системы входят производные от u_j порядка не выше n_j. Пусть F_i — аналитические функции своих аргументов в некоторой комплексной области и в этой области определитель матрицы

$$\left\| \sum_{|k|=n_j} \frac{\partial F_i}{\partial (D^k u_j)} \xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \right\| \qquad (2)$$

отличен от нуля для всех действительных $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, для которых $|\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \neq 0$. При этих условиях все достаточно гладкие решения, лежащие в рассматриваемой области, аналитичны по x.

С другой стороны, им показано, что у системы (1) есть решения, имеющие непрерывные производные как угодно высоких порядков, но не являющиеся аналитическими по x функциями, если:

1) существуют действительные $\xi_1, \ldots, \xi_n$ такие, что $|\xi_1| + \ldots + |\xi_n| \neq 0$ и для них определитель матрицы (2) равен нулю;

2) определитель матрицы (2) не равен тождественно нулю по $\xi_1, \ldots, \xi_n$;

3) F_i — линейные функции с постоянными коэффициентами от u_j и их производных, а свободные члены аналитичны по x.

Как показывают примеры, условие 2) является существенным.

Для доказательства теоремы об аналитичности решений И. Г. Петровский продолжает заданное решение на комплексное пространство x, так чтобы для u_j удовлетворялись уравнения Коши — Римана. Для уравнения второго порядка идея продолжения решения в комплексную область для доказательства аналитичности решения была использована ранее в работе Г. Леви [6].

В 1957 г. Морри и Ниренберг [7] (см. также [8]) дали другое доказательство аналитичности достаточно гладких решений эллиптических по И. Г. Петровскому систем, пользуясь априорными оценками производных решений системы и теоремами вложения С. Л. Соболева. В этой же работе доказана аналитичность решений систем, введенных в работе Д у г л и с а и Н и р е н б е р г а [9] (см. также [10]).

Мы не касаемся здесь вопроса об априорной минимальной гладкости решения (в обобщенном или классическом смысле), позволяющей судить о его аналитичности. Этот вопрос освещается в предыдущей статье. Заметим в связи с этим, что недавно построены интересные примеры эллиптических уравнений высокого порядка, являющихся уравнениями Лагранжа — Эйлера для регулярных вариационных задач, задаваемых аналитическими функциями, обобщенные решения которых, в отличие от решений уравнений второго порядка, не являются аналитическими функциями. (См. Д е Д ж о р д ж и [11], В. Г. М а з ь я [12], Э. Д ж у с т и и М. М и р а н д а [13].) Ряд результатов о гладкости обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений и систем получен в работах М о р р и [14] и Н е ч а с а [15].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б е р н ш т е й н С. Н., Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre, C. r. Acad. sci. **137** (1903), 778—781.

[2] Б е р н ш т е й н С. Н., Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles des second ordre, Math. Ann. **59** (1904), 20—76.

[3] Б е р н ш т е й н С. Н. и П е т р о в с к и й И. Г., О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям, УМН **8** (1940), 8—31.

[4] П е т р о в с к и й И. Г., О системах дифференциальных уравнений, все решения которых аналитичны, ДАН СССР **17** (1937), 339—342.

[5] П е т р о в с к и й И. Г., Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, Матем. сб. **5** (47) (1939), 3—68.

[6] L e w y H., Über den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen, Göttingen Nachrichten, 1927, 178—186 (русский перевод: УМН **8** (1940), 100—106).

[7] M o r r e y C., N i r e n b e r g L., On the analiticity of the solutions of linear elliptic systemes of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 271—290.

[8] M o r r e y C., On the analyticity of the solutions of analytic non-linear elliptic systems of partial differential equations, Amer. J. Math. **80** (1958), 198—237.

[9] D o u g l i s A., N i r e n b e r g L., Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. **8** (1955), 503—538.

[10] Morrey C., Multiple Integral in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Die Grundlehren der math. Wiss. **130** (1966).

[11] De Giorgi E. Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico, Bollettino della Unione Matematica Italiana, ser. IV, № 1, Febbraio 1968, 135—137.

[12] Мазья В. Г., Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами, Функциональный анализ и его приложения 2, вып. 3 (1968), 53—57.

[13] Giusti E., Miranda M., Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni, Bollettino della Unione Matematica Italiana, ser. IV, № 2 Aprile 1968, 219—226.

[14] Morrey C. B., Partial regularity results for non-linear elliptic systems, J. Math. Mech. 17, № 7 (1968), 649—670.

[15] Nečas J., Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non linéaires d' ordre $2m$ en deux dimensions, Ann. Scuola Norm. Super., Pisa, s. 3, 21 (1967), 427—456.

К ДВАДЦАТЬ ПЕРВОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Хельмут Рёрль [1])

Если дана система $\frac{dy_i}{dz} = \sum\limits_{i=1}^{n} R_{ij}(z)y_j$, $i = 1, \ldots, n$, линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с рациональными коэффициентами, то ее решения не являются, вообще говоря, функциями, однозначными и мероморфными в расширенной числовой плоскости P^1. Каждое отдельное решение обладает конечным числом изолированных особенностей: такими особенностями могут быть полюсы коэффициентов $R_{ij}(z)$: $x_1, \ldots, x_k$ и, возможно, точка $x_0 = \infty$. Если решения $\eta_i = (y_{1i}(z), \ldots$ $\ldots, y_{ni}(z))$, $i = 1, \ldots, n$, образуют фундаментальную систему решений, то при обходе вокруг особой точки x_m вектор η_i превращается в вектор $\Sigma a_{ij}^{(m)}\eta_j$, причем матрицы $A^{(m)}$ невырождены и удовлетворяют так называемому соотношению Римана $A^{(0)}A^{(1)}\ldots A^{(m)} = E$. Это риманово соотношение означает не что иное, как то, что каждая фундаментальная система $\eta_1, \ldots, \eta_n$ решений определяет гомоморфизм фундаментальной группы пространства $P^1 - \{x_0, \ldots, x_k\}$ в общую линейную группу $GL(n, C)$ над полем комплексных чисел.

Уже в 1857 г. Б. Р и м а н [15] поставил обратную задачу: не существует ли для каждого гомоморфизма фундаментальной группы $\pi_1(P^1 - \{x_0, \ldots, x_k\})$, где $x_0, \ldots, x_k$ заранее даны, в группу $GL(n, C)$ система из n линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений

---

[1]) H. R ö h r l, Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen (Einleitung), Math. Ann. 133 (1957), 1—3; перевод А. Н. Паршина.— *Прим. ред.*

первого порядка с рациональными коэффициентами, обладающая фундаментальной системой решений, которая порождает данный гомоморфизм. Сверх того, Риман предположил, что в качестве такой системы дифференциальных уравнений можно выбрать систему фуксова типа. В том же году он дал [14] положительный ответ на этот вопрос в случае $k = n = 2$ и указал явным образом фундаментальную систему, обладающую нужными свойствами. В последующее время проблемой Римана занимались А. Пуанкаре [13] и Л. Шлезингер [17], [18]. Предложенные ими доказательства обладают пробелами и с современной точки зрения не являются строгими. На это указал уже Племель [12], который в 1908 г. дал первое свободное от возражений доказательство [11], годное для любых k и n. В 1900 г. Д. Гильберт [5] включил проблему Римана в число своих «Математических проблем», вследствие чего в дальнейшем она получила наименование проблемы Римана — Гильберта; в 1905 г. Гильберт [6], [7] рассмотрел случай $n = 2$, k произвольно (в одном частном случае проблема рассматривалась перед этим О. Келлогом [8]). Доказательство Племеля, как и доказательства Гильберта и Келлога, основывалось на теории фредгольмовских интегральных уравнений. В 1913 г. Г. Д. Биркгоф [1] получил общий результат Племеля с помощью одной аппроксимационной теоремы; одновременно он доказал ранее высказанное им обобщение проблемы Римана — Гильберта. В 1924 г. О. Хаупт [2], [3], [4] занимался вопросами, близко связанными с проблемой Римана — Гильберта.

Из монографий, в которых подробно рассматривается проблема Римана — Гильберта, следует упомянуть труды И. А. Лаппо-Данилевского [9] и Н. И. Мусхелишвили [10]. В [9] был рассмотрен в достаточной общности вопрос о зависимости фундаментальной системы от выбора «точек ветвления».

Благодаря результату Племеля общая теория систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка фуксова типа с рациональными коэффициентами была, в определенном смысле, полностью завершена, так как можно получить полное представление о локальных и глобальных теоретико-функциональных свойствах решений. Аналогичные исследования для систем линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, коэффициенты которых являются мероморфными функциями на произвольной компактной или некомпактной римановой поверхности, до сих пор отсутствовали. Локальная теория, очевидно, такова, как и в классическом случае. Так же как на числовой плоскости, можно определить множество особенностей X' системы решений. Каждая фундаментальная система порождает, как и в классическом случае, гомоморфизм фундаментальной группы множества $X - X'$ в группу $GL(n, C)$. В этой ситуации можно снова сформулировать проблему Римана — Гильберта, а также спросить: как зависят решения от точек ветвления? Трудности, возникающие при попытке ответить на подобные вопросы, происходят главным образом от существования неразбивающих циклов.

В работе [16] общая проблема Римана — Гильберта для произвольных (компактных или некомпактных) римановых поверхностей решается в утвердительном смысле. При этом используются как методы теории функций многих комплексных переменных, так и теория комплексно аналитических расслоений на римановых поверхностях. Выясняется зависимость решений от точек ветвления. Если точки ветвления изменяются в односвязных и попарно непересекающихся областях, то существует решение проблемы Римана — Гильберта, зависящее от них мероморфно.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G. D., The generalized Riemann problem for linear differential equations, Proc. Acad. Sci. USA 49 (1913), 521—568; Bull. Amer. Math. Soc. (2) 19 (1913), 508—509.

[2] Haupt O., Zur Theorie der Prymschen Funktionen erster und N-ter Ordnung, Math. Ann. 77 (1915), 24—64.

[3] Haupt O., Über eine dem sog. Riemannschen Problem entsprechende Randwertoufgabe, Sitzgsber. Heidelb. Akad. 16 (1920), 5—41.

[4] Haupt O., Zur Parametrixmethode, Math. Ann. 88 (1922), 136—150.

[5] Hilbert D., Mathematische Probleme, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1900, 253—297.

[6] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Dritte Mitt.), Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1905, 307—3:8.

[7] Hilbert D., Über eine Anwendung der Integralgeichungen auf ein Problem der Funktionentheorie, Verh. 3 internat. Math. Kongr. Heidelberg, 1904, 233—240.

[8] Kellog O., Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Riemann, Math. Ann. 60 (1903), 424—433.

[9] Лаппо-Данилевский И. А., Mémoires sur la théorie des systèmes des équations differentielles linéaires, Chelsea Publ. Comp., 1953.

[10] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», 1967.

[11] Plemelj J., Riemannsche Formenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, Monatsch. für Math. u. Phys, 1908, 211—246.

[12] Plemelj J., Über Schlesingers «Beweis» der Existenz Riemannscher Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, Dtsch. Math.-Ver. 18 (1909), 15—20, 340—343.

[13] Poincaré H., Mémoire sur les fonctions zetafuchsiennes, Acta. Math. 5 (1884), 209—278.

[14] Riemann B., Beitrage zur Theorie der durch die Gaußsche Reine $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen, Math. Werke, 62—78 (русский перевод: Риман Б., Сочинения, Гостехиздат, 1948, 159—175).

[15] Riemann B., Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraishen Koefficienten, Math. Werke, 357—369 (русский перевод: Риман Б., Сочинения, Гостехиздат, 1948, 176—186).

[16] Röhrl H., Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann. 133 (1957), 1—25.

[17] Schlesinger L., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen in Anschluß an das Riemannsche Problem (III), J. f. Math. 130 (1905), 26—46.

[18] Schlesinger L., Bemerkungen zu dem Kontinuitätsbeweis für die Lösbarkeit des Riemannschen Problems, Math. Ann. 63 (1906), 273—276.

К ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Б. В. Шабат

Проблема униформизации аналитических зависимостей, связывающих два переменных, в настоящее время в основном решена[1]). Кроме указанного Пуанкаре подхода (с которым можно ознакомиться, например, по книге Л. Р. Форда, Автоморфные функции, ОНТИ, 1936), найдены геометрические подходы (см., например, монографию Р. Неванлинна, Униформизация, ИЛ, 1955, особенно § 4 гл. VIII).

Значительно хуже разработана проблеме униформизации соотношений более чем с двумя переменными. По этому поводу см. К. Зигель, Автоморфные функции нескольких комплексных переменных, ИЛ, 1954. Здесь на стр. 89 приведены также некоторые нерешенные вопросы. Об алгебраических вопросах, связанных с проблемой униформизации, см. тезисы доклада И. И. Пятецкого-Шапиро и И. Р. Шафаревича на Ереванской конференции по теории аналитических функций (сб. «Современные проблемы теории аналитических функций», «Наука», 1966, стр. 262).

---

[1]) Проблемы униформизации возникли из теории автоморфных функций, у истоков которой стоят К. Гаусс и Б. Риман. В XIX в. значительных успехов в этой области добились Ф. Клейн, А. Пуанкаре и Э. Пикар. Наконец, Пуанкаре доказал возможность униформизации любой алгебраической функции двух переменных посредством автоморфных функций одной переменной. Гильберт ставит задачу: решить проблему униформизации для аналитических функций. Опираясь на методы, созданные К. Нейманом и Г. Шварцем, П. Кёбе (Nach. Ges. Wiss. Göttingen, 1907, стр. 410) и А. Пуанкаре (Oeuvres, t. I, Paris, 1916) почти одновременно к 1907 г. решили эту задачу. П. Кёбе разработал данный вопрос в Math. Ann. 67—75 (1909—1914), J. f. d. reine u. angew. Math. 138, 139 (1910—1911) и других работах.— *Прим. ред.*

К ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЕЙ ПРОБЛЕМЕ ГИЛЬБЕРТА

Л. Э. Эльсгольц

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта проблема сформулирована менее определенно, чем остальные проблемы Д. Гильберта. В ней указывается на необходимость дальнейшего развития вариационного исчисления, которому, по мнению Д. Гильберта, уделяется недостаточное внимание, причем вариационное исчисление понимается в столь широком смысле, что в этом можно усмотреть предвидение развития функционального анализа.

После этого общего замечания Д. Гильберт указывает на возможность получения достаточных условий экстремума многих вариационных задач с помощью построения инвариантных интегралов, совпадающих на экстремалях с интегралом, исследуемым на экстремум, и называемых теперь инвариантными интегралами Д. Гильберта.

Эта идея была развита в работе Д. Гильберта [1]) и в дальнейшем оказалась весьма плодотворной при исследовании более сложных вариационных задач на условный экстремум.

Итак, основным в двадцать третьей проблеме является указание на большую значимость идей вариационного исчисления.

Это указание Д. Гильберта блестяще подтвердилось, причем динамизм идей вариационного исчисления был столь велик, что они в значительной мере явились основой развития функционального анализа, многих разде-

---

[1]) Math. Ann. 62 (1906), 351—370.

лов физики, механики и теории дифференциальных уравнений.

В этих комментариях мы кратко остановимся лишь на развитии собственно вариационного исчисления, не касаясь смежных областей.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

К 1901 г. [1]) в основном было завершено исследование основных необходимых условий экстремума во многих вариационных задачах с неподвижными и подвижными границами и задачах на условный экстремум. В основном трудами А. М. Лежандра, К. Якоби и К. Вейерштрасса были получены также достаточные условия экстремума в простейших вариационных задачах. Исследовались задачи с ломаными экстремалями. Начато исследование полей экстремалей. Были найдены многие вариационные законы механики и физики. Сравнительно слабо были исследованы задачи на экстремум кратных интегралов, но уже четко были сформулированы возражения К. Вейерштрасса [8] по поводу принципа Дирихле (впрочем, уже Б. Риман отчетливо понимал необходимость обоснования этого принципа и даже предпринял попытки его доказательства) [2]).

В последующие годы были получены уточняющие и дополняющие результаты во всех указанных направлениях. Из более значительных результатов следует отметить:

1) Детальное изучение задач на условный экстремум вплоть до получения необходимых и достаточных условий экстремума в весьма общей постановке задачи на услов-

---

[1]) Истории развития вариационного исчисления посвящены работы: К. А. Рыбников, Первые этапы развития вариационного исчисления, ИМИ, вып. 2, Гостехиздат, 1949, 355—498; А. В. Дорофеева, Развитие вариационного исчисления, там же, вып. 14, Физматгиз, 1961, 101—180; А. В. Дорофеева, Вариационное исчисление во второй половине XIX в., там же, вып. 15, Физматгиз, 1963, 99—128.— *Прим. ред.*

[2]) Об истории принципа Дирихле см. работы С. С. Петровой «Принцип Дирихле в работах Римана», ИМИ, вып. 16, «Наука», 1965, 295—310 и «О принципе Дирихле», сб. «История и методология естественных наук», Изд-во МГУ, 1966, 200—218.— *Прим. ред.*

ный экстремум — в задаче О. Больца: среди всех кусочно-гладких вектор-функций найти ту, на которой достигает экстремума функционал

$$v\,[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx + g(x_0, y(x_0), x_1, y(x_1))$$

при связях

$$\varphi_k(x, y, y') = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m, m < n)$$

и условиях на границах

$$\psi_s(x_0, y(x_0), x_1, y(x_1)) = 0$$

$$(s = 1, 2, \ldots, p;\ p \leqslant 2n + 2)$$

(работы О. Больца, К. Каратеодори, Г. Блисса, М. Хестенса, Макштейна и др.).

2) Большое продвижение в исследовании экстремумов кратных интегралов (задачи с подвижными границами, достаточные условия, задачи на условный экстремум и, особенно, теоремы существования решений вариационных задач), в частности работы Д. Гильберта и А. Лебега по обоснованию принципа Дирихле, работы С. Н. Бернштейна [3], А. Хаара, Л. Тонелли, Р. Куранта, А. Г. Сигалова, О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой. Многие из этих авторов применяли прямые методы вариационного исчисления; см. стр. 204—215.

3) Исследование преобразований, оставляющих функционал инвариантным, и их приложение к вариационным принципам (работы Э. Нетер).

4) Теория поля, в частности геометрическая теория поля (продолжение работ А. Кнезера и Дарбу).

5) Отметим также создание теории вариационных задач на пространствах кусочно-непрерывных функций (А. М. Размадзе [18]).

3. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Значительным шагом в развитии вариационного исчисления следует считать создание новых прямых методов и реабилитацию старого конечноразностного прямого метода Л. Эйлера.

Прямыми методами в вариационных задачах называют методы, в которых вариационная задача рассматривается как предельная при $n \to \infty$ для задачи об экстремуме функций конечного числа n переменных.

Если предельный переход не совершается, то получаем приближенное решение, если $n \to \infty$, то при некоторых условиях в пределе можно получить точное решение.

Прямой метод был применен в работе Д. Гильберта [1]), посвященной принципу Дирихле.

В 1909 г. В. Ритц [19] опубликовал статью, в которой был разработан новый, весьма эффективный, прямой метод, получивший название метода Ритца. В этом методе при исследовании на экстремум функционала $v[y(x)]$ выбирается некоторая последовательность функций

$$w_1(x),\ w_2(x), \ldots, w_n(x), \ldots \tag{1}$$

Решение вариационной задачи вначале ищется лишь на линейных комбинациях с произвольными постоянными коэффициентами из n первых функций этой последовательности:

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k(x).$$

При этом функционал

$$v[y_n(x)] = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

превращается в функцию коэффициентов α_k, и эта функция исследуется на экстремум обычными методами. Найденное таким методом $y_n(x)$ является приближенным решением вариационной задачи.

Если функционал $v[y(x)]$, последовательность функций (1) и пространство, на котором задан функционал v, удовлетворяют некоторым дополнительным условиям, то $y_n(x)$ при $n \to \infty$ стремится к точному решению вариационной задачи. Совершенно аналогично решаются вариационные задачи, в которых $y(x)$ или x являются вектор-функциями.

В практических вопросах прямые методы обычно применяются для приближенного нахождения решений вариационных задач, причем для наиболее часто встречающихся в приложениях функционалов и для часто применя-

---

[1]) Math. Ann. 59 (1904), 161—186.— *Прим. ред.*

ющихся последовательностей функций (1) найдены весьма точные оценки погрешностей, если в методе Ритца ограничиться небольшим числом n (работы Н. Н. Боголюбова и Н. М. Крылова).

После 1909 г. была разработана теория различных прямых методов, большинство из которых являются модификациями метода Ритца (работы Л. В. Канторовича, Э. Трефтца, С. Г. Михлина [14] и др.).

В 1936 г. в работе Л. А. Люстерника и И. Г. Петровского с успехом был применен прямой конечно-разностный метод Эйлера, весьма редко применявшийся со времени разработки Лагранжем метода вариаций в 1755 г.

Этот метод заключается в том, что функции, на которых задан функционал, определяются вначале лишь в точках некоторой сетки, а вне сетки продолжаются линейно. При этом функционал превращается в функцию значений линейной функции в узлах сетки. Эту функцию исследуют на экстремум и, сгущая сетку предельным переходом, при некоторых условиях получают точное решение. В дальнейшем этот метод часто применялся с большим успехом.

Прямые методы оказались совершенно незаменимыми при доказательстве существования решений многомерных вариационных задач.

При этом уже не требовалось решать вспомогательную задачу на экстремум функции и затем совершать обычно весьма сложный предельный переход, а достаточно было лишь доказывать существование решения задачи на экстремум функции, допустимость предельного перехода и существование предельной функции. На этом пути были достигнуты в последние годы исключительные успехи в доказательстве существования решений многомерных регулярных вариационных задач (см. стр. 204—215) и их обобщений; особенно следует отметить работы А. Г. Сигалова (см. [20]) и О. А. Ладыженской, а также Н. Н. Уральцевой (см. [10]).

4. КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Новым этапом развития вариационного исчисления явились качественные топологические методы исследования вариационных задач. Основным вопросом явилась оценка снизу числа решений вариационной задачи в зависимости от свойств функционального пространства, на котором функционал определен. Естественно, что вначале надо было решить аналогичную, но более простую задачу об оценке снизу числа критических точек функции конечного числа переменных (т. е. точек, в которых $df = 0$) в зависимости от свойств ее области определения.

Из теоремы Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией своей точной верхней и точной нижней границ следует, что дифференцируемая функция, заданная на любом замкнутом многообразии, имеет по крайней мере две критические точки — точку максимума и точку минимума. Но если топологическая структура многообразия сложна, то эта оценка очень неточна, например, на n-мерной проективной плоскости каждая дважды непрерывно дифференцируемая функция имеет по крайней мере $n + 1$ критических точек.

В работах 1925 и 1931 гг. М. Морс (см. [15]) с попомощью чисел Betti mod 2 дал оценку числа аналитически различных критических точек функции, заданной на замкнутом многообразии, а также при некоторых ограничениях и на областях евклидова пространства.

Оказалось, что число критических точек функции, заданной на замкнутом многообразии, не меньше суммы чисел Betti mod 2.

При этом предполагалось, что критические точки не вырождены (гессиан отличен от нуля). Результат распространялся и на вырожденные критические точки, но тогда им приписывалась некоторая кратность. В дальнейшем М. Морс перенес эти результаты на функциональный случай и дал оценку числа аналитически различных решений многих вариационных задач.

В СССР работа в основном велась в ином направлении — оценивалась не сумма кратностей критических точек, а число геометрически различных критических точек.

Основополагающие результаты в этом направлении были получены Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом (1927 г.). Для оценки снизу числа геометрически различных критических точек они ввели новый топологический инвариант — гомотопическую категорию множества. Гомотопической категорией $\mathrm{cat}_M A$ замкнутого множества A относительно содержащего это множество многообразия M называется наименьшее число замкнутых множеств из

M, сумма которых содержит A, а каждое множество может быть стянуто в точку с помощью непрерывной деформации в M. Удалось доказать, что $\mathrm{cat}_M M$ оценивает снизу минимальное число критических точек функции, заданной на многообразии M.

Эта теорема была обобщена Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом на функциональный случай и дала им возможность оценивать число решений различных вариационных задач и, в частности, в 1928 г. решить известную проблему о трех геодезических линиях на поверхностях рода 0.

Они доказали (см. [13]), что на всякой трижды дифференцируемой гомеоморфной сфере поверхности существуют по крайней мере три замкнутые самонепересекающиеся геодезические линии различной длины, совпадение длин которых возможно лишь при появлении континуума геодезических линий той же длины.

Идеи Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана получили развитие в работах многих математиков, причем в одной из этих работ [23] был введен новый, связанный с кольцом пересечений, сравнительно легко вычисляемый топологический инвариант — длина множества относительно многообразия. Этот инвариант оценивает снизу гомотопическую категорию, а следовательно, оценивает снизу и число критических точек.

В 1941 — 1943 гг. Л. А. Люстерник (см. [12]) с помощью созданной А. Н. Колмогоровым и Александером теории верхних гомологий построил теорию пересечений в бесконечномерных пространствах и определил в этих пространствах понятие длины множества.

В то время как в конечномерном случае группы гомологий верхних циклов (∇-циклов) могут быть выражены через группы гомологий нижних циклов (Δ-циклов), в бесконечномерных пространствах группы верхних гомологий дают существенно новые топологические инварианты, позволяющие изучать, так сказать, $(\infty-k)$-мерные циклы — циклы дополнительной размерности k.

Вычислив длину некоторых функциональных пространств, Л. А. Люстерник получил оценку снизу числа решений многих вариационных задач и, в частности, доказал существование $n+1$ замкнутых самонепересекающихся геодезических линий на поверхностях, гомеоморфных n-мерной сфере.

Интересные результаты в том же направлении были получены Л. С. Понтрягиным, А. И. Фетом (см. [22]), С. И. Альбером (см. [1]), Ж. П. Серром, А. С. Шварцем (см. [25]).

5. БОЛЕЕ ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Функциональный анализ оформился в самостоятельный отдел математики значительно позже вариационного исчисления. Многие разделы функционального анализа, особенно в СССР, развивались на базе идей вариационного исчисления.

В дальнейшем возникло естественное желание включить вариационное исчисление в качестве одной из глав в уже достаточно развившийся функциональный анализ и придать задачам и методам вариационного исчисления присущую современному функциональному анализу общность.

Если раньше на экстремум в основном исследовались определенного вида интегралы, то теперь стали рассматриваться любые функционалы, обладающие лишь некоторыми весьма общими свойствами, заданные на самых разнообразных функциональных пространствах.

Для возможности обобщения основных понятий теории экстремума функций конечного числа переменных на функциональный случай чаще всего рассматривают линейные или по крайней мере локально линейные пространства и предполагают, что функционал $f(x)$ обладает дифференциалом в каком-нибудь обобщенном смысле. Например, пусть E — линейное нормированное пространство, E^* — сопряженное к E пространство. Если

$$(F(x), h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

(где $h \in E$) является линейным относительно h функционалом, то естественно считать $df = (F(x), h)$ и оператор $F(x)$ называть градиентом $f(x)$. Если оператор $F(x)$ является градиентом $f(x)$, то $F(x)$ называется потенциальным оператором, а $f(x)$ называется потенциалом $F(x)$.

Были найдены различные необходимые и достаточные условия потенциальности операторов. Точки, в которых $df = 0$, называются критическими. Разработаны различные методы доказательства существования критических точек и оценки их числа, причем здесь нередко возникают добавочные трудности из-за отсутствия локальной компактности у многих важных классов пространств.

В столь общем виде могут быть сформулированы и различные задачи на условный экстремум, в том числе и некоторые задачи теории оптимальных процессов. При этом удается доказать обобщенное правило множителей Лагранжа и некоторые обобщения принципа максимума Понтрягина (см. стр. 213). В создание такой абстрактной теории экстремальных задач большой вклад внесли Л. А. Люстерник, М. М. Вайнберг (см. [7]), М.А. Красносельский (см. [9]), Ю. Г. Борисович, а в последнее время В. Ф. Демянов, Е. С. Левитин, И. М. Лаврентьев, Б. Т. Поляк и др.

6. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

За последние 10—15 лет вариационное исчисление вновь переживало период бурного развития: создавался новый раздел — теория оптимальных процессов.

Хотя основные задачи теории оптимальных процессов формулируются почти так же, как некоторые вариационные задачи на условный экстремум, однако добавочные ограничения, встречающиеся в практических задачах оптимального управления, делают классические методы решения часто неприменимыми или неэффективными.

Простейшая оптимальная задача заключается в нахождении функции (или вектор-функции) $u(t)$, называемой управляющей функцией, такой, чтобы функционал

$$V[x(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t))\,dt \qquad (2)$$

достигал экстремума, причем

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

(задаются еще некоторые граничные условия)

На первый взгляд эта задача не отличается от обычной задачи на условный экстремум с неголономными связями и может быть решена классическими методами Однако в своей практической постановке она содержит ряд специфических особенностей:

1) подынтегральная функция в (2) обычно не содержит $\dot{x}(t)$ и $\dot{u}(t)$ и, следовательно, рассматриваемая задача является вырожденной вариационной задачей, которая до недавнего времени была изучена весьма слабо;

2) управляющая функция $u(t)$ обычно является лишь кусочно-непрерывной;

3) допустимые управления обычно расположены в замкнутой области, например, подчинены условию $|u(t)| \leqslant M$.

С каждой из этих трудностей математики уже встречались на различных этапах развития вариационного исчисления. Действительно, вырожденные задачи уже подвергались, правда, не очень детальному исследованию, кусочно-непрерывными решениями занимался еще в 1920 г. А. М. Размадзе (см. [18]), замкнутость области определения встречалась в задачах на односторонние вариации, к тому же в последнее время во многих задачах научились переходить от замкнутых областей определения к открытым (возник даже термин «раскрыть область определения»). Однако нагромождение этих трудностей в одной задаче настолько ее осложняет, что классические методы часто становятся совершенно неэффективными.

Наиболее значительный вклад в теорию оптимальных процессов сделали Л. С. Понтрягин и Р. Беллман.

Л. С. Понтрягин разработал весьма общий принцип, называемый теперь принципом максимума Понтрягина, позволяющий решать широкие классы оптимальных задач, и вместе с В. Г. Болтянским, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко (см. [17]) рассмотрел многочисленные приложения и частные случаи этого принципа. В дальнейшем многие авторы (Н. Н. Красовский, Л. И. Розоноэр, А. М. Летов, А. Г. Бутковский, Т. К. Сиразетдинов, Ю. В. Егоров, А. А. Фельдбаум, А. Фридман и др.) еще более расширили границы применимости принципа максимума и детально исследовали некоторые иные постановки задач на оптимальное управление: стохастические задачи, задачи с отклоняющимся аргументом, многомерные задачи, задачи в банаховом пространстве и т. д.

Р. Беллман разработал совершенно иной метод решения оптимальных задач — метод динамического программирования, при котором рассматриваемый процесс разбивается на ряд этапов, при этом управление на k-м этапе выбирается в зависимости от его выбора на $(k-1)$-м этапе. Такой поэтапный выбор управлений часто оказывается весьма удобным, особенно при применении вычислительных машин (см. [2]).

Нельзя не отметить еще один важный класс оптимальных задач — так называемые дифференциальные игры.

В этих задачах также надо выбирать управляющую функцию или вектор-функцию $u(t)$ так, чтобы функционал

$$V = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), v(t))\, dt$$

достигал экстремума при наличии неголономных связей

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)),$$

но функционал и уравнения связей зависят еще от функции или вектор-функции $v(t)$, которая неизвестна и, более того, она может выбираться наименее выгодным для поставленной задачи способом.

Таким задачам и их видоизменениям посвящены, например, работы [16] и [доп. список, 1].

Мы охватили, конечно, далеко не все постановки задач теории оптимальных процессов, имеющей сейчас исключительное прикладное значение и огромную литературу. Требованием времени, и во многих задачах уже осуществимым требованием, является не только решение какой-нибудь технической или экономической задачи, но и оптимальность этого решения. В этом — залог бурного развития экстремальных методов в ближайшие годы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Альбер С. И., О периодической задаче вариационного исчисления в целом, УМН 12, № 4 (76) (1957), 135—153.

[2] Беллман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.

[3] Бернштейн С. Н., Об уравнениях вариационного исчисления, УМН 8 (1941), 32—74.

[4] Блисс Г. А., Лекции по вариационному исчислению, ИЛ, 1950.

[5] Больца О. (Bolza O.), Vorlesungen über Variationsrechnung, 1909.
[6] Бутковский А. Г., Теория оптимального управления системы с распределенными параметрами, «Наука», 1965.
[7] Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956.
[8] Вейерштрасс К. (Weierstrass K.), Über das sogenante Dirichlet'sche Princip, Mathematische Werke II, 1895, 49—54.
[9] Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
[10] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964.
[11] Лебег А. (Lebesgue H.), Sur le problème Dirichlet, Rend. Circ. Math. di Palermo 24 (1907), 371—402.
[12] Люстерник Л. А., а) Топология и вариационное исчисление, УМН 1, № 1 (11) (1946), 242—247;
б) Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом, Тр. Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова, т. 19, Изд-во АН СССР, 1947.
[13] Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г., Топологические методы в вариационных задачах, Госиздат, 1930.
[14] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.
[15], Морс М. (Morse M.), а) The calculus of variations in the large, Amer. math. Soc. coloq. publ. 18 (1934);
б) Functional topology and abstract variational theory, Mémorial des sciences math., 1938.
[16] Понтрягин Л. С., К теории дифференциальных игр, УМН 21, № 4 (1966), 219—274.
[17] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф., Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.
[18] Размадзе А. М., Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations, Math. Ann. 94 (1925), 1—52.
[19] Ритц В. (Ritz W.) Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. f. d. reine und angew. Math. 135 (1909), 1—61.
[20] Сигалов А. Г., Вариационные задачи с допустимыми поверхностями произвольных топологических типов, УМН 12, № 1 (73) (1957), 53—98.
[21] Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, Физматгиз, 1966.
[22] Фет А. И., Вариационные задачи на замкнутых многообразиях, Матем. сб. 30 (72) (1952), 271—316.
[23] Фролов С. В. Эльсгольц Л. Э., Limite inférieure par le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donnée sur une variété, Матем. сб. 42 (1935), 637—643.
[24] Хестенс М. (Hestenes M.), а) The Problem of Bolza in the calculs of variations in Parametric Form, Amer. J. Math. 58 (1936), 391—406;

б) On sufficient conditions in the Problems of Lagrange and Bolza, Ann. of Math. 37 (1936), 543—551.

[25] Шварц А. С., Гомологии пространств замкнутых кривых, ДАН СССР 117 (1957), 769—772.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Айзекс Р., Дифференциальные игры, ИЛ, 1967.

[2] Альбер С. И., Многомерные задачи вариационного исчисления в целом, ДАН СССР 156, № 4 (1964), 727—730.

[3] Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления, «Наука», 1966.

[4] Беллман Р., Процессы регулирования с адаптацией, «Наука», 1964.

[5] Дубовицкий А. Я. и Милютин А. А., Задачи на экстремум при наличии ограничений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 5, № 3 (1965), 393—453.

[6] Демьянов В. Ф., Рубинов А. М., Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве, Вестн. Ленингр. ун-та 19 (1964), 5—17.

[7] Егоров А. И., Необходимые условия оптимизации в банаховом пространстве, Матем. сб. 64, № 1 (1964), 79—101.

[8] Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа, УМН 9, № 3 (61) (1954), 57—114.

[9] Кротов В. Ф., Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума, Автоматика и телемеханика 23, № 12 (1962), 1571—1583.

[10] Красовский Н. Н., Оптимальное управление в обыкновенных динамических системах, УМН 20, № 3 (1965), 153—174.

[11] Ладыженская О. А. и Уральцева Н. Н., О вариационной задаче в квазилинейных эллиптических уравнениях со многими независимыми переменными, ДАН СССР 135, № 6 (1960), 1330—1333.

[12] Люстерник Л. А., Проблема Дирихле, УМН 8 (1941), 115—124.

[13] Люстерник Л. А., Новое доказательство теоремы о трех геодезических, ДАН СССР 41 (1943), 3—5.

[14] Люстерник Л. А., Вариационное исчисление, в сб.: «Математика в СССР за 40 лет», Физматгиз, 1958, 637—648.

[15] Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат, 1957.

[16] Стратонович Р. Л., Принцип максимума и статистические задачи оптимального управления, в сб.: «Оптимальные системы автоматического управления», «Наука», 1967, 102—125.

[17] Фет А. И., Об алгебраическом числе замкнутых экстремалей на многообразии, ДАН СССР 88 (1953), 619—621.

[18] Gould S. H., Variational methods for eigenvalue problems, 1966,

[19] Боголюбов Н. Н., Sur quelques méthodes nouvelles dans le calcul des variations, Ann. di mat. 7 (1930), 243—272.

[20] Боголюбов Н. Н., Application des méthodes directes à quelques problèmes de calcul des variations, Ann. di Mat. 9 (1933), 195—242.

[21] Канторович Л. В., О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, ДАН СССР 30 (1941), 579—582.

[22] Красносельский М. А., Некоторые задачи нелинейного анализа, УМН 9, № 3 (61) (1954), 301—322.

[23] Розоноэр Л. И., Вариационный подход к проблеме инвариантности систем автоматического управления, Автоматика и телемеханика 24, № 6 (1963).

[24] Сиразетдинов Т. К., К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами, Автоматика и телемеханика 25, № 4 (1964), 463—472.

[25] Сигалов А. Г., Двумерные задачи вариационного исчисления, УМН 6, № 2 (42) (1951), 16—101.