

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ

---

А. Н. ВАРЧЕНКО, П. И. ЭТИНГОФ

**ПОЧЕМУ  
ГРАНИЦА  
КРУГЛОЙ КАПЛИ  
ПРЕВРАЩАЕТСЯ  
В ИНВЕРСНЫЙ ОБРАЗ  
ЭЛЛИПСА**



МОСКВА  
НАУКА•ФИЗМАТЛИТ  
1995

ББК 22.311  
В18  
УДК 517.95

Серия  
«Современная математика для студентов»  
издается с 1989 года

Серия «Современная математика для студентов» выпускается под общим руководством Правления Московского математического общества.

Главный редактор серии—Президент Московского математического общества академик *С. П. Новиков*

Варченко А. Н., Этингер П. И. Почему граница круглой капли превращается в инверсный образ эллипса.—М.: Наука. Физматлит, 1995.—80 с.—(Современная математика для студентов).—ISBN 5-02-014941-1

Представляет собой расширенный вариант доклада на заседании студенческого лектория Московского математического общества.

Рассматривается плоскопараллельное движение в пористой среде ограниченного объема вязкой жидкости, окруженной жидкостью нулевой вязкости,—модель, возникающая в нефтяной гидромеханике и многих других областях, ее удивительные математические свойства, ее неожиданные связи с комплексным анализом, элементарной алгебраической геометрией и теорией ньютоновского потенциала.

Включены 30 задач различной степени трудности с решениями.

Для студентов, аспирантов и научных работников — математиков, механиков и физиков, интересующихся приложениями математики.

Ил. 40. Библиогр. 26 назв.

В 1604010000—020  
053(02)—95 Без объявл.

ISBN 5-02-014941-1

© А. Н. Варченко,  
П. И. Этингер, 1995  
© Наука. Физматлит,  
оформление, 1995

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение .....                                                                              | 5         |
| <b>§ 1. Математическая модель .....</b>                                                     | <b>6</b>  |
| 1.1. Фильтрационный поток несжимаемой жидкости .....                                        | 6         |
| 1.2. Задача о движении границы между жидкостями .....                                       | 7         |
| 1.3. Метод ломаных Эйлера .....                                                             | 8         |
| <b>§ 2. Первые интегралы движения границы .....</b>                                         | <b>8</b>  |
| 2.1. Теорема Ричардсона о первых интегралах .....                                           | 8         |
| 2.2. Восстановление области по значениям моментов и обратная задача теории потенциала ..... | 10        |
| 2.3. Результаты о единственности области с заданным набором моментов (потенциалом) .....    | 10        |
| 2.4. Независимость результата закачки от порядка действия источников .....                  | 12        |
| <b>§ 3. Алгебраические решения .....</b>                                                    | <b>13</b> |
| 3.1. Алгебраические и абелевы области .....                                                 | 13        |
| 3.2. Алгебраические решения .....                                                           | 13        |
| 3.3. Функция моментов и ее свойства .....                                                   | 14        |
| 3.4. Теорема о соответствии особенностей .....                                              | 15        |
| 3.5. Доказательство теоремы об алгебраических решениях .....                                | 17        |
| 3.6. Построение алгебраических решений .....                                                | 17        |
| 3.7. Примеры .....                                                                          | 19        |
| <b>§ 4. Задача о стягивании подвижного контура .....</b>                                    | <b>23</b> |
| 4.1. Формулировка задачи .....                                                              | 23        |
| 4.2. Свойство вложенности .....                                                             | 25        |
| 4.3. Стягивание выпуклой области .....                                                      | 25        |
| 4.4. Точки стягивания .....                                                                 | 27        |
| 4.5. Аналог теоремы Ричардсона .....                                                        | 28        |
| 4.6. Динамика гравитационного потенциала .....                                              | 30        |
| 4.7. Потенциал как решение краевой задачи .....                                             | 30        |
| 4.8. Доказательство основной теоремы .....                                                  | 31        |
| 4.9. Автомодельные решения .....                                                            | 32        |
| 4.10. Асимптотика стягивания .....                                                          | 33        |
| 4.11. Случай нескольких источников .....                                                    | 35        |
| <b>§ 5. Задача об эволюции многосвязной области .....</b>                                   | <b>37</b> |
| 5.1. Формулировка задачи .....                                                              | 37        |
| 5.2. Интегралы динамики области .....                                                       | 37        |
| 5.3. Алгебраические решения .....                                                           | 38        |

|                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.4. Теорема Римана .....                                                | 39        |
| 5.5. Теорема о соответствии особенностей .....                           | 40        |
| 5.6. Доказательство теоремы об алгебраических решениях .....             | 41        |
| 5.7. Построение решений .....                                            | 42        |
| 5.8. Восстановление кольцеобразной области по моментам .....             | 42        |
| <b>§ 6. Перестройки при эволюции области .....</b>                       | <b>46</b> |
| 6.1. Обобщенные решения задачи об эволюции .....                         | 46        |
| 6.2. Обобщенные алгебраические решения .....                             | 48        |
| 6.3. Обобщенные решения задачи о стягивании .....                        | 51        |
| 6.4. Достаточное условие распада симметричной области .....              | 53        |
| <b>§ 7. Стягивание на поверхности .....</b>                              | <b>55</b> |
| 7.1. Физическая мотивировка .....                                        | 55        |
| 7.2. Потенциал и точки стягивания .....                                  | 56        |
| 7.3. Вычисление потенциала на поверхности .....                          | 57        |
| 7.4. Задача о распаде границы на симметричной поверхности вращения ..... | 59        |
| 7.5. Алгебраические решения .....                                        | 60        |
| Ответы и указания к задачам .....                                        | 65        |
| Некоторые нерешенные вопросы .....                                       | 73        |
| Основные обозначения .....                                               | 75        |
| Список литературы .....                                                  | 76        |

## ВВЕДЕНИЕ

В сороковых годах П. Я. Полубаринова-Кочина и П. П. Куфарев исследовали задачу об эволюции нефтяной залежи круговой формы, окруженной водой, в результате откачки нефти из скважины внутри залежи. Оказалось, что граница нефти с течением времени остается алгебраической кривой четвертой степени. Эта кривая служит симметричным образом эллипса при инверсии. В 1950 г. П. П. Куфареву удалось обобщить это свойство: если область нефти в начальный момент времени является образом единичного круга при конформном отображении, задаваемом рациональной функцией комплексной переменной, то она остается таковой с течением времени.

В 1972 г. С. Ричардсон обнаружил бесконечную серию первых интегралов движения области нефти: интеграл гармонической функции по области меняется линейно во времени. Это позволило С. Ричардсону дать новое доказательство сохранения рациональности и эффективный метод построения решений.

Недавно удалось обобщить эту схему на неодносвязные области. В этом случае единичный круг заменяется одной из половин комплексной алгебраической кривой с заданной на ней вещественной  $M$ -структурой, а конформное отображение задается интегралом от мероморфного дифференциала, не имеющего нулей и полюсов на выделенной половине.

Далее будет рассказано об этих и других математических сюжетах, недавно возникших в теории течений с подвижной границей.

Этот текст является расширенным изложением доклада первого автора на заседании Московского математического общества о результатах второго автора. Авторы с благодарностью отмечают большое влияние на них В. М. Ентова, ознакомившего их с кругом обсуждаемых физических задач. Авторы благодарны также В. И. Арнольду, Д. Я. Клейнбоку, И. М. Кричеверу, Ю. Е. Хохлову и А. И. Шнирельману за полезные обсуждения.

## § 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### 1.1. Фильтрационный поток несжимаемой жидкости.

Рассмотрим плоскопараллельный фильтрационный поток однородной жидкости через однородную пористую среду. Это означает, что на плоскости задано зависящее от времени векторное поле скорости движения частиц жидкости  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Предположим, что жидкость несжимаема, т. е. имеет место уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0.$$

Основным законом фильтрации является закон Дарси<sup>1)</sup>: скорость пропорциональна градиенту давления:

$$\mathbf{v} = -\kappa \operatorname{grad} p;$$

здесь  $p$  — давление,  $\kappa > 0$  — коэффициент пропорциональности. Известно, что коэффициент  $\kappa$  обратно пропорционален вязкости жидкости:  $\kappa = k/\mu$ , где  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $k$  зависит только от свойств пористой среды.

Поле скоростей потенциально:

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi, \quad \Phi = -\kappa p,$$

причем потенциал  $\Phi$  — гармоническая функция:

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Введем комплексную координату  $z = x + iy$ .

Пусть в области фильтрации есть источники и стоки, расположенные в точках  $z_1, \dots, z_n$ , мощностей

---

<sup>1)</sup> Этот закон был открыт в 1856 г. экспериментально французским инженером А. Дарси, занимавшимся проектированием общественных фонтанов города Дижона. С этого момента принято отсчитывать историю теории фильтрации.

$q_1, \dots, q_n$ . Это означает, что около точки  $z_j$  поле  $v$  имеет вид

$$v(z) = \frac{q_j}{2\pi(\bar{z} - \bar{z}_j)} + \text{гладкая вектор-функция}$$

(рис. 1). Соответственно

$$\Phi(z) = \frac{q_j}{2\pi} \ln |z - z_j| + \text{гладкая функция.}$$

Для любого контура  $\gamma$ , обходящего  $z_j$  против часовой стрелки,

$$\int_{\gamma} (v, n) dl = q_j,$$

т. е. за единицу времени сквозь  $\gamma$  протекает количество жидкости, занимающее площадь  $q_j$ .

**1.2. Задача о движении границы между жидкостями.** Рассмотрим область одной жидкости, окруженную другой жидкостью с вязкостью  $\mu=0$ . Считается, что в невязкой жидкости давление постоянно, а при переходе из жидкости в жидкость давление непрерывно. Поэтому потенциал постоянен на каждой компоненте границы.

Обозначим область вязкой жидкости в момент  $t$  через  $D(t)$ .

Пусть область односвязна (не имеет дыр) и ограничена. Можно предполагать, что потенциал на границе области равен 0, так как изменение потенциала на постоянную не меняет поля скоростей. Точки на границе области (как и все другие) движутся со скоростью  $\text{grad } \Phi$ . Это определяет перемещение границы области во времени.

**Основная задача.** *Описать эволюцию области вязкой жидкости, если известна ее форма в начальный момент и заданы положения и мощности источников внутри области.*

**Замечание.** Аналогичные задачи возникают при описании эволюции границы между жидкостью и газом, полимером и воздухом, твердым веществом и расплавом и т. д.

В природных условиях вязкости нефти, воды и газа находятся в соотношениях  $\mu_n/\mu_v = 1 \div 10$ ,  $\mu_v/\mu_r = 10 \div 100$ . Поэтому предположение  $\mu=0$  наиболее реалистично для газа.

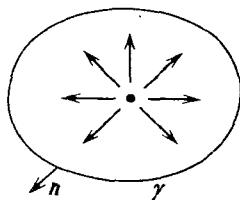


Рис. 1

**1.3. Метод ломаных Эйлера.** Поставленную задачу можно решать приближенно методом ломаных Эйлера: вычислим потенциал  $\Phi$  в области  $D(0)$ , определяемый нулевым значением на границе  $\partial D(0)$  и предписанной асимптотикой в точках  $z_1, \dots, z_n$  (его существование и единственность следуют из стандартных теорем о задаче Дирихле [1]), сдвинем каждую точку  $\gamma \in \partial D(0)$  на вектор  $\Delta t \cdot \text{grad } \Phi(\gamma)$ , где  $\Delta t$  — малый промежуток времени. Получим область  $D(\Delta t)$ . Повторяя этот процесс, определим области  $D(2\Delta t), D(3\Delta t), \dots, D(k\Delta t)$ , последовательность которых служит приближением к искомому семейству областей  $D(t)$ .

## § 2. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ

**2.1. Теорема Ричардсона о первых интегралах.** Задача об эволюции границы имеет бесконечную серию первых интегралов. Это свойство было обнаружено в 1972 г. С. Ричардсоном и заключается в следующем.

**Теорема ([2]).** Пусть  $D(t)$  — эволюционирующая область, и — гармоническая функция на плоскости. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx dy = \sum_{j=1}^n q_j u(z_j). \quad (2.1)$$

**Пример.** Площадь  $D(t)$  меняется со скоростью  $\sum_{j=1}^n q_j$  ( $u \equiv 1$ ).

Назовем  $\int_D u \, dx dy$  моментом области  $D$  относительно гармонической функции  $u$ . Теорема определяет динамику моментов области  $D(t)$  во времени. В частности, при постоянных мощностях  $q_j$  все моменты меняются линейно.

**Доказательство** теоремы. Из рис. 2 видно, что

$$\begin{aligned} \int_{D(t+\Delta t)} u \, dx dy &= \int_{D(t)} u \, dx dy + \\ &+ \int_{\partial D(t)} v_r \Delta t \, dl + o(\Delta t), \\ \Delta t &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

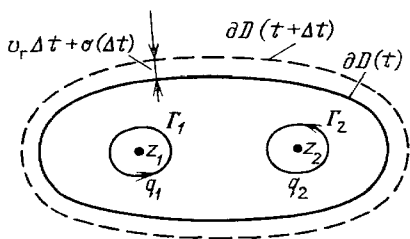


Рис. 2



где  $v_r = (\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) = \pm |\text{grad } \Phi|$  — скалярная величина скорости границы. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx dy = \int_{\partial D(t)} u \cdot (\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) \, dl.$$

Добавляя к правой части этого равенства нулевой член  $-\int_{\partial D(t)} \Phi \cdot (\text{grad } u, \mathbf{n}) \, dl$  (он равен нулю, так как потенциал на границе обращается в ноль), получим, используя формулу Грина,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx dy &= \int_{\partial D(t)} u \cdot (\text{grad } \Phi, \mathbf{n}) \, dl - \int_{\partial D(t)} \Phi \cdot (\text{grad } u, \mathbf{n}) \, dl = \\ &= \int_E \text{div} (u \cdot \text{grad } \Phi - \Phi \cdot \text{grad } u) \, dx dy + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} (u \cdot \text{grad } \Phi - \Phi \cdot \text{grad } u, \mathbf{n}) \, dl, \end{aligned}$$

где  $E$  — область  $D(t)$  с вырезанными кругами радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $z_j$ ,  $\Gamma_j$  — границы этих кругов. Интеграл по  $E$  равен нулю, так как  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta \Phi = 0$ . С учетом асимптотики функции  $\Phi$  в точке  $z_j$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} (\Phi \cdot \text{grad } u, \mathbf{n}) \, dl &\rightarrow 0, \\ \int_{\Gamma_j} (u \cdot \text{grad } \Phi, \mathbf{n}) \, dl &\rightarrow u(z_j) q_j \end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , откуда вытекает требуемое.

В теореме достаточно потребовать гармоничности функции  $u$  в некоторой области, содержащей  $D(t)$  вместе с границей.

Примеры гармонических функций:  $1, x, y, xy, x^2 - y^2$ .

Поскольку гармонические функции на плоскости суть вещественные и мнимые части аналитических функций комплексной переменной  $z$ , то для всякой аналитической функции  $f$

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} f(z) \, dx dy = \sum_{j=1}^n q_j f(z_j).$$

В частности, для любого  $k \geq 0$

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} z^k \, dx dy = \sum_{j=1}^n q_j z_j^k.$$

Моменты области относительно всех гармонических функций выражаются через «моменты Ричардсона»

$M_k(D) = \int_D z^k dx dy$ , поскольку любая аналитическая функция разлагается в ряд Тейлора.

**2.2. Восстановление области по значениям моментов и обратная задача теории потенциала.** Теорема Ричардсона подсказывает метод решения задачи об эволюции области: если область задана в начальный момент времени, то можно вычислить ее моменты. Моменты области  $D(t)$  в любой момент времени  $t$  вычисляются по формуле

$$\int_{D(t)} u dx dy = \int_{D(0)} u dx dy + \sum_{j=1}^n u(z_j) \int_0^t q_j(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Поэтому достаточно научиться восстанавливать область по набору ее моментов. Возникает следующая

*Проблема моментов Ричардсона. Восстановить область по ее моментам.*

У этой проблемы есть физическая интерпретация.

*Обратная задача теории потенциала. Восстановить форму бесконечного однородного цилиндра по создаваемому им гравитационному полю вне себя.*

Пусть  $D$  — перпендикулярное сечение цилиндра,  $w$  — комплексная координата в плоскости сечения.

Нетрудно вычислить, что сила притяжения равна градиенту функции

$$\Pi_D(w) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln |z - w| dx dy, \quad (2.3)$$

умноженному на число, зависящее только от плотности вещества цилиндра. Знание функции  $\Pi_D(w)$  вне области (и даже в окрестности  $w = \infty$ ) эквивалентно знанию моментов области, поскольку

$$\Pi_D(w) = \frac{M_0}{2\pi} \ln |w| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \operatorname{Re} \left( \frac{M_k}{w^k} \right),$$

где  $M_k$  — момент области  $D$  относительно функции  $z^k$ .

**2.3. Результаты о единственности области с заданным набором моментов (потенциалом).** Обратная задача теории потенциала изучалась в связи с ее приложениями в геофизике.

Теорема (П. С. Новиков [3], 1938 г.). Если две ограниченные области звездны<sup>1)</sup> относительно общей точки и имеют равные гравитационные потенциалы вне себя, то они совпадают.

Существуют различные области с равными моментами. Приведем их конструкцию. Рассмотрим любые две ограниченные односвязные области  $D_1$ ,  $D_2$ , границы которых пересекаются трансверсально в некоторой точке  $P$  (рис. 3). Выберем точку  $Q$  в пересечении областей. Обозначим через  $D_1(t)$ ,  $D_2(t)$  решение задачи о закачке жидкости через источник, расположенный в точке  $Q$ , при начальных условиях  $D_1$ ,  $D_2$  соответственно.

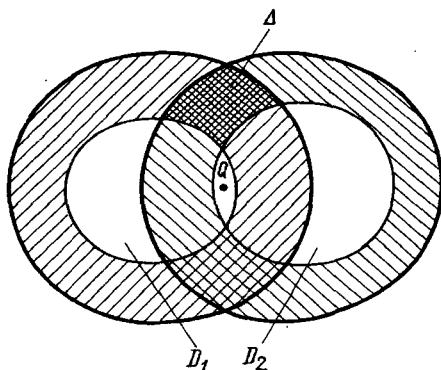


Рис. 3

Рассмотрим кольцевые области  $E_1(t) = D_1(t) \setminus D_1$ ,  $E_2(t) = D_2(t) \setminus D_2$ . Их моменты равны по формуле (2.2). Выбросив из  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  четырехугольник  $\Delta$ , получим односвязные области  $G_1$  и  $G_2$  с равными моментами.

Замечание 1. Первый пример двух областей с равными моментами принадлежит Сакаи [4]. А. М. Габриэлов построил пример в классе многоугольников.

Замечание 2. Можно показать, что при любом  $N$  существует набор  $N$  областей с одинаковыми моментами. Более того, можно построить бесконечное семейство таких областей (см. задачу 3).

Замечание 3. Построенные области с равными моментами имеют негладкую границу. Если через вершины четырехугольника  $\Delta$  закачать одинаковые порции жидкости в каждую из областей, то области будут иметь одинаковые потенциалы (по теореме Ричардсона) и гладкую (даже аналитическую) границу.

Теорема (о локальной единственности области, имеющей заданные моменты; [5]). Пусть  $D(s)$  — гладко

<sup>1)</sup> Область называется звездной относительно точки  $P$ , если вместе с каждой своей точкой  $Q$  она содержит отрезок  $PQ$ .

зависящее от параметра семейство областей, имеющих равные потенциалы. Тогда  $D(s) \equiv \text{const}$ .

Доказательство. Имеем  $\frac{d}{ds} \int_{D(s)} u dx dy = \int_{\partial D(s)} u v dl$  (см. рис. 3), где  $v$  — скорость деформации границы (функция на  $\partial D(s)$ ). Предположим, что  $v \neq 0$ . Подберем гармоническую функцию  $u$  так, чтобы  $|u - v| < \varepsilon$  на  $\partial D(s)$ . Для этого немного раздуем область  $D$  и для раздутой области  $\tilde{D}$  рассмотрим задачу Дирихле  $\Delta u = 0$  в  $\tilde{D}$ ,  $u|_{\partial \tilde{D}} = \tilde{v}$ , где  $\tilde{v}$  — какая-нибудь функция, близкая к  $v$ . Ее решение — гармоническая функция в окрестности области  $D(s)$ , близкая к  $v$  на  $\partial D(s)$  в равномерной метрике. При достаточно малом  $\varepsilon$  имеем  $\int_{\partial D(s)} v u dl > 0$ .

Но этот интеграл обязан равняться нулю в силу неизменности моментов. Противоречие.

Пример ([6]). Пусть  $D$  — ограниченная односвязная область,  $A \in \mathbb{R}^+$ ,  $P$  — некоторая точка. Предположим, что для любой гармонической функции  $u$  будет

$\int_D u dx dy = Au(P)$ . Тогда  $D$  — круг площади  $A$  с центром в точке  $P$ . Действительно, семейство областей  $D_\varphi$ , получаемых вращением  $D$  на угол  $\varphi$  вокруг точки  $P$ , удовлетворяет тому же равенству, поэтому в силу теоремы  $D_\varphi = D$  при всех  $\varphi$ .

**2.4. Независимость результата закачки от порядка действия источников.** Назовем стратегией эксплуатации вектор-функцию  $q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$ , добычей стратегии — вектор  $Q = \left( \int_0^T q_1 dt, \int_0^T q_2 dt, \dots, \int_0^T q_n dt \right)$ .

Пусть на отрезке  $[0, T]$  задано гладкое семейство стратегий  $q^s(t)$ , зависящих от параметра  $s$  и имеющих фиксированную (не зависящую от  $s$ ) добычу. Рассмотрим эволюцию области  $D$  под действием стратегии  $q^s$  в течение промежутка времени  $[0, T]$ .

**С л е д с т в и е** (теоремы о локальной единственности). *Результирующая область не зависит от стратегии (от  $s$ ).*

В частности, «все равно», в каком порядке включать источники: производимые ими деформации области перестановочны.

**Задачи.** 1. Найдите центр тяжести области, полученной из круга откачкой через сток, находящийся не в центре, в течение заданного промежутка времени.

2. Докажите, что если две ограниченные выпуклые области имеют равные потенциалы вне себя, то они совпадают.

3. Приведите пример  $n$  различных односвязных ограниченных областей с одинаковыми моментами.

### § 3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

**3.1. Алгебраические и абелевы области.** Эволюция границы обладает удивительным свойством: алгебраические области преобразуются в алгебраические.

Согласно теореме Римана каждая односвязная область  $D$  на плоскости, граница которой содержит не менее двух точек, конформно эквивалентна кругу. Точнее, пусть  $K = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| < 1\}$  — единичный круг. Существует комплексно-аналитическая функция  $f$ , определенная на  $K$  и устанавливающая взаимно однозначное соответствие между  $K$  и  $D$ . Такая функция определена неоднозначно, так как круг имеет нетривиальные конформные отображения на себя. Группа аналитических конформных отображений круга на себя состоит из трехпараметрического семейства функций  $z = e^{i\theta} \left( \frac{\zeta - a}{1 - \bar{a}\zeta} \right)$ , где  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Для выделения одного отображения  $f: K \rightarrow D$  достаточно зафиксировать точку  $f(0) \in D$  и величину  $\arg f'(0)$ . Всякое конформное отображение единичного круга в область назовем *униформизирующим* отображением этой области.

Особый интерес представляют области  $D$ , для которых униформизирующее отображение задается рациональной функцией  $z = f(\zeta) = P(\zeta)/Q(\zeta)$ , где  $P$ ,  $Q$  — многочлены. Такую область назовем *алгебраической*, а ее *степенью* назовем число  $\deg f = \max(\deg P, \deg Q)$ . Алгебраическая область  $D$  ограничена алгебраической кривой степени  $2 \deg D$ , но не всякая область, ограниченная алгебраической кривой, алгебраична. Алгебраические области ограниченной степени определяются конечным числом параметров — коэффициентов многочленов.

Интересны также *абелевы* области, т. е. те, для которых  $f'(\zeta)$  рациональна. *Кратностью* абелевой области назовем число  $\deg f'$ .

**3.2. Алгебраические решения.** Пусть  $D(t)$  — эволюционирующая область.

**Теорема** (С. Ричардсон — П. П. Куфарев; [2, 12]).

1) Если  $D(0)$  — алгебраическая область степени  $d$ , то

$D(t)$  — алгебраическая область степени не выше  $d+n$ .  
 2) Если  $D(0)$  — абелева область кратности  $d$ , то  $D(t)$  — абелева область кратности не выше  $d+2n$ .

Таким образом, существуют решения задачи об эволюции области, для которых область  $D(t)$  алгебраична (абелева) при всех  $t$ . Отыскание таких решений — задача с конечным числом параметров. Решения, обладающие этим свойством, всюду плотны в пространстве всех решений в любой разумной топологии (например,  $C^k$ ,  $k \geq 0$ ,  $C^\infty$ , аналитической), поскольку любую область можно аппроксимировать алгебраическими (абелевыми) с любой наперед заданной точностью.

**3.3. Функция моментов и ее свойства.** Основную роль в доказательстве и применении теоремы об алгебраических решениях играет *функция моментов* области  $D$ <sup>1)</sup>

$$h_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx dy}{w-z}, \quad w \notin D. \quad (3.1)$$

$h_D(w)$  — это момент области  $D$  относительно функции  $\frac{1}{\pi(w-z)}$ , поэтому для задачи об эволюции границы по теореме Ричардсона о моментах имеем

$$\frac{d}{dt} h_{D(t)}(w) = \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\pi(w-z_j)}.$$

Функция моментов обладает следующими свойствами.

1.  $h_D$  — аналитическая функция вне  $D$ ,  $\lim_{w \rightarrow \infty} h_D(w) = 0$ .

2.  $h_D(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k(D)}{w^{k+1}}.$

3. Пусть  $F_D(w)$  — гравитационное поле цилиндра с сечением  $D$  (см. § 2); тогда  $F_D(w) = \text{const} \cdot h_D(w)$ . Это следует из формул (2.3) и (2.4).

4.  $h_D(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z} dz}{w-z}$ . Эта формула получается из (3.1) и формулы Грина.

---

<sup>1)</sup> Другие ее названия: преобразование Коши области  $D$ , спектральная функция равномерного распределения на  $D$ .

5.  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\bar{z} - h_D(z)}{w - z} dz = 0$ . Эта формула следует из свойства 4 и формулы Коши.

6.  $h_{D(t)}(w) = h_{D(0)}(w) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j t}{\pi(w - z_j)}$  при  $q_j = \text{const}$ ; если  $q_j$  зависят от  $t$ , то  $q_j t$  заменяется на  $\int_0^t q_j(\tau) d\tau$ . Формула получается интегрированием (3.2).

7.  $h_{D(t)}$  рациональна тогда и только тогда, когда  $h_{D(0)}$  рациональна;  $h'_{D(t)}$  рациональна тогда и только тогда, когда  $h'_{D(0)}$  рациональна. Это — очевидное следствие свойства 6.

В качестве следствия свойства 1 отметим, что замыкания областей с одинаковыми моментами имеют непустое пересечение. Действительно, эти области имеют общую функцию моментов, аналитическую вне замыкания каждой из них. Если бы пересечение было пустым, то эта функция была бы аналитической всюду, т. е. константой, что невозможно.

Замечание. Открытые области с одинаковыми моментами могут иметь пустое пересечение (см. решение задачи 3 § 2).

### 3.4. Теорема о соответствии особенностей.

Теорема (Ричардсон — Густафсон; [6, 7]). Пусть  $f$  — униформизирующее отображение области  $D$ , отображающее на нее единичный круг. Тогда:

1) Функция  $\psi(\xi) = f(1/\bar{\xi}) - h_D(f(\xi))$  аналитична в единичном круге, если хотя бы одна из функций  $f(1/\bar{\xi})$  и  $h_D(f(\xi))$  продолжается внутрь круга с конечным числом полюсов и логарифмических ветвлений.

2) Функция  $f(\xi)$  рациональна тогда и только тогда, когда функция  $h_D(z)$  рациональна.

3) Функция  $f'(\xi)$  рациональна тогда и только тогда, когда функция  $h'_D(z)$  рациональна.

4) Степени функций  $f$  и  $h_D$ ,  $f'$  и  $h'_D$  совпадают.

Доказательство. 1) Основную роль в доказательстве играет формула Сохоцкого — Племелья (см. [8]).

Формула Сохоцкого — Племелья. Пусть  $D$  — ограниченная область на плоскости,  $\varphi$  — непрерывная комплексная функция на  $\partial D$ ,

$$F^+(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in D; \quad F^-(z) = \int_{\partial D} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \notin D;$$

тогда для любой точки  $z_0$  на границе области

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F^+(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} F^-(z) = \varphi(z_0) \cdot 2\pi i.$$

В частности, если  $F^-(z) \equiv 0$ , то  $\varphi(\xi)$  продолжается до аналитической функции в  $D$  (а именно — функции  $\frac{1}{2\pi i} F^+(z)$ ).

Согласно формуле Сохоцкого — Племелья и свойству 5 функции моментов функция  $\bar{z} - h_D(z)$  аналитически продолжается внутрь области  $D$ . Следовательно, функция  $f(\zeta) - h_D(f(\zeta))$ , определенная на единичной окружности, аналитически продолжается внутрь единичного круга. Если хотя бы одна из функций  $f(\zeta)$  и  $h_D(f(\zeta))$  продолжается внутрь круга с конечным числом полюсов и логарифмических ветвлений, то тем же свойством обладает и вторая функция. При этом продолжением функции  $f(\zeta)$  внутрь круга служит аналитическая функция с особенностями  $f(1/\bar{\zeta})$ , поскольку на единичной окружности  $\zeta = 1/\bar{\zeta}$ . Пункт 1 теоремы доказан.

2) Если функция  $f$  рациональна, то функция  $f(1/\bar{\zeta})$  мероморфна в единичном круге, следовательно, функция  $h_D(f(\zeta))$  продолжается до мероморфной функции в круге в силу утверждения пункта 1, поэтому функция моментов  $h_D$  продолжается внутрь  $D$  с конечным числом полюсов. Поскольку  $h_D$  — аналитическая функция вне области  $D$ , то  $h_D$  — рациональная функция.

Обратно, если функция  $h_D$  рациональна, то функция  $h_D(f(\zeta))$  мероморфна внутри единичного круга, поэтому там мероморфна и функция  $f(1/\bar{\zeta})$ , откуда следует, что функция  $f(\zeta)$  мероморфна вне единичного круга. Поскольку функция  $f(\zeta)$  голоморфна внутри круга, то она рациональна.

3) Доказывается аналогично пункту 2.

4) Согласно п. 1 теоремы, между особыми точками продолжений функции  $f$  вне единичного круга и функции  $h_D$  внутри области  $D$  имеет место взаимно однозначное соответствие: если  $\xi$  — особая точка  $f$ , а  $\bar{\xi}$  — инверсный образ точки  $\xi$  относительно единичной окружности, то  $f(\bar{\xi})$  — особая точка функции  $h_D$  того же типа (рис. 4). (Этим объясняется название теоремы.) Следовательно, степени функций  $f$  и  $h_D$ ,  $f'$  и  $h_D'$  совпадают, поскольку степень рациональной функции — сумма порядков ее полюсов.



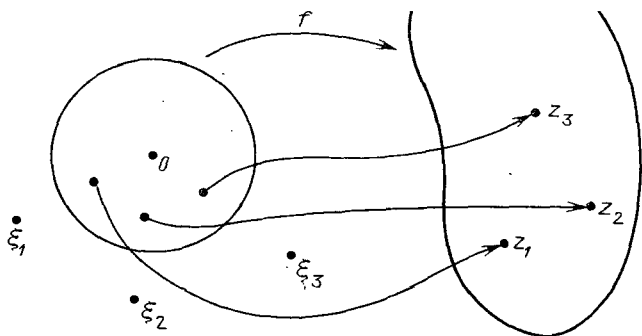


Рис. 4

**3.5. Доказательство теоремы об алгебраических решениях.** Согласно свойствам 6 и 7 функции моментов, функции  $h_D$  и  $h'_D$  рациональны при всех  $t$  тогда и только тогда, когда они рациональны при  $t=0$ , причем  $\deg h_{D(t)} - \deg h_{D(0)} \leq n$ ,  $\deg h'_{D(t)} - \deg h'_{D(0)} \leq 2n$ , где  $\deg h$  обозначает степень рациональной функции  $h$ . В силу теоремы о соответствии особенностей из этого следует, что унифицирующее отображение  $f_t$  области  $D(t)$  и его производная  $f'_t$  рациональны при всех  $t$  тогда и только тогда, когда они рациональны при  $t=0$ , причем  $\deg f_t - \deg f_0 \leq n$ ,  $\deg f'_t - \deg f'_0 \leq 2n$ . Теорема доказана.

**3.6. Построение алгебраических решений.** Теорема о соответствии особенностей сводит задачу построения

решения в случае рациональной функции  $f_0$  или  $\frac{df_0}{d\zeta}$

к решению конечной системы нелинейных уравнений, выражающих коэффициенты функции  $f$  через коэффициенты функции  $h_D$ . Эти уравнения выводятся из условия равенства главных частей функций  $f^*(1/\zeta)$  и  $h_D(f(\zeta))$  в особых точках внутри  $K$ . Рассмотрим вначале простейший случай единственной особой точки.

**Теорема (Л. А. Галин [9], 1945 г.).** Если единственный источник находится в точке  $0$ , т. е.  $f_t(0)=0$ , и  $f_0(\zeta)$  — многочлен степени  $d$ , то  $f_t(\zeta)$  — также многочлен степени  $d$  в любой момент времени  $t$ .

**Доказательство.** Функция  $f_0(\zeta)$  имеет единственную особенность в бесконечности — полюс порядка

$d$ . По теореме о соответствии особенностей  $h_{D(0)}(z)$  имеет единственную особенность в нуле — полюс порядка  $d$ , поэтому то же верно для  $h_{D(t)}(z)$  при любом  $t$ . Следовательно,  $f_t(\zeta)$  имеет единственную особенность в бесконечности, являющуюся полюсом порядка  $d$ , т. е.  $f_t$  — многочлен.

С. Ричардсон показал, что  $f(\zeta)$  — многочлен степени  $d$  тогда и только тогда, когда  $M_k(D)=0$ ,  $k \geq d$ ,  $M_{d-1}(D) \neq 0$ . При этом для  $f(\zeta)=a_1\zeta+a_2\zeta^2+\dots+a_d\zeta^d$  прямое вычисление дает

$$M_k(D)=\sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_{k+1} \geq 1 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1} = d}} m_1 a_{m_1} a_{m_2} \dots a_{m_{k+1}} \cdot \bar{a}_{m_1 + \dots + m_{k+1}}. \quad (3.2)$$

Это — система уравнений для вычисления  $a_j$  по известным  $M_k$ . Известно, что если  $f'(\zeta) \neq 0$ ,  $|\zeta| \leq 1$ , то эта система невырождена [10].

Выпишем уравнения для случая, когда все особенности функции  $h_D(z)$  — простые полюсы. Тогда

$$h_D(z) = \sum_{j=1}^m \frac{A_j}{z - B_j}. \quad (3.3)$$

Ищем  $f$  в виде

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^m \frac{C_j \zeta}{1 - E_j \zeta}. \quad (3.4)$$

Такая форма выбрана, чтобы фиксировать  $f(0)=0$  (пусть  $0 \in D$ ) и допустить возможность  $E_j=0$  — полюса в  $\infty$  у функции  $f$ . Имеем

$$\overline{f(1/\bar{\zeta})} = \sum_{j=1}^m \frac{\overline{C_j}}{\zeta - E_j}.$$

#### Упражнения

1. Полюсы  $\overline{f(1/\bar{\zeta})}$  совпадают с полюсами  $h_D(f(\zeta))$ :

$$f(E_j) = B_j, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (3.5)$$

2. Вычеты функций  $\overline{f(1/\bar{\zeta})}$ ,  $h_D(f(\zeta))$  должны совпадать:

$$A_j = f'(\overline{E_j}) \overline{C_j}, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (3.6)$$

Система (3.5), (3.6) содержит  $2n$  уравнений с  $2n$  неизвестными  $\{C_j, E_j\}$ . Эти уравнения не являются

независимыми. Если  $\{C_j, E_j\}$  — решение, то  $\{C_j e^{i\theta}, E_j e^{i\theta}\}$  — тоже решение, поскольку эти наборы коэффициентов задают одну и ту же область.

**Замечание.** Пусть  $f^s$  — гладкое семейство решений системы (3.5), (3.6) и  $f^{s_0}$  конформно отображает единичный круг на область  $D$ . Тогда тем же свойством обладает  $f^s$  для любого  $s$ . Действительно, области  $D_s = f^s(K)$  имеют по определению одинаковую функцию моментов, поэтому  $D_s \equiv D$  по теореме о локальной единственности.

**3.7. Примеры. 1** (П. Я. Полубаринова-Кочина [11], П. П. Куфарев [12]). Пусть  $D(0)$  — круг радиуса  $R$  с центром в точке  $(a, 0)$ , единственный источник находится в точке  $(0, 0)$  и имеет производительность  $q$  (рис. 5). Тогда

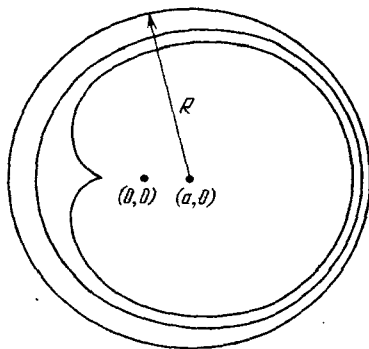


Рис. 5

$$h_{D(0)}(w) = \frac{R^2}{w-a}, \quad h_{D(t)}(w) = \frac{qt}{\pi w} + \frac{R^2}{w-a}.$$

Функция  $h_{D(t)}$  имеет два простых полюса 0 и  $a$ , поэтому  $f_t$  имеет два простых полюса  $\alpha_t$  и  $\infty$ , откуда

$$f_t(\zeta) = \frac{\beta_t \zeta}{1 - \alpha_t \zeta} + \gamma_t \zeta. \quad (3.7)$$

Таким образом,  $\partial D(t)$  — кривая степени не выше четвертой.

В силу симметрии относительно оси абсцисс можно считать, что  $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t \in \mathbb{R}$ ,  $f_t(\bar{z}) = f_t(z)$ . Пусть  $\alpha_t > 0$ . Тогда уравнения (3.5), (3.6) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\beta_t \alpha_t}{1 - \alpha_t^2} + \gamma_t \alpha_t &= a, \\ \frac{\beta_t^2}{(1 - \alpha_t^2)^2} + \gamma_t \beta_t &= R^2, \\ (\beta_t + \gamma_t) \gamma_t &= \frac{qt}{\pi}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получаем после некоторых вычислений

$$\gamma_t = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\alpha_t} - \frac{\alpha_t}{a} \left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right) \right),$$

$$\beta_t = \frac{1 - \alpha_t^2}{2} \left( \frac{a}{\alpha_t} + \frac{\alpha_t}{a} \left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right) \right),$$

а  $\alpha_t$  находится из уравнения

$$\left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 \alpha_t^6 - \left( 2a^2 R^2 + 2a^2 \frac{qt}{\pi} + a^4 \right) \alpha_t^2 + 2a^4 = 0. \quad (3.8)$$

Анализ случая  $t=0$  показывает, что следует брать средний корень этого уравнения (он равен  $\alpha_0^2$ ).

Пусть  $q < 0$ . Тогда в некоторый момент времени на границе области образуется полукубическое острие (рис. 5), интерпретируемое как прорыв воды к скважине. Интересно вычислить, какая доля нефти будет откачана к этому моменту. Приравняв дискриминант (3.8) к нулю, можно вычислить момент прорыва и долю откачанной нефти. Если расстояние от скважины до центра залежи равно половине радиуса залежи, то эта доля приближенно равна 0,1. Чтобы обеспечить откачку половины нефти, необходимо расположить скважину на расстоянии примерно 0,23 радиуса залежи от центра.

Граница области жидкости является кривой четвертого порядка и имеет уравнение

$$(x^2 + y^2)^2 + 2\alpha_t a (x^2 + y^2) + K_t (x^2 + y^2) + L_t x + M_t = 0,$$

где  $K_t, L_t, M_t$  — некоторые коэффициенты, которые могут быть вычислены по явным формулам. Легко проверить, что эта кривая получается из эллипса симметричным отражением относительно окружности с центром в точке  $(a, 0)$ .

2. Пусть начальная область  $D(0)$  является образом единичного круга при отображении

$$f_0(\zeta) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1 + \alpha_0 \zeta}{1 - \alpha_0 \zeta}, \quad 0 < \alpha_0 < 1, \quad a > 0.$$

Эта область имеет форму овала (рис. 6), тем более вытянутого, чем ближе величина  $\alpha_0$  к 1. При  $\alpha_0 = 1$  отображение  $f$  переводит единичный круг в полосу  $-a/2 \leq y \leq a/2$ . Рассмотрим эволюцию области  $D(t)$

под действием закачки жидкости через источник мощности  $q$  в точке  $z=0$ . Найдем конформное отображение  $f_t$  круга в  $D(t)$ .

В силу теоремы о соответствии особенностей функция  $h_{D(0)}(z)$  имеет две логарифмические особые точки, которые из-за симметрии задачи центрально-симметричны относительно начала координат и лежат на оси абсцисс. Обозначим их через  $F_0$  и  $-F_0$  ( $F_0 > 0$ ). Других особых точек у  $h_{D(0)}(z)$  нет, поэтому

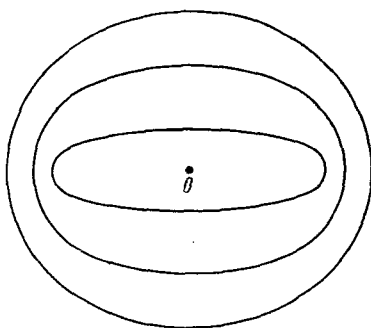


Рис. 6

$$h_{D(0)}(z) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{z+F_0}{z-F_0}, \text{ где } F_0 = f(\alpha_0) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1+\alpha_0^2}{1-\alpha_0^2}$$

(коэффициенты при логарифмах в  $f_0(\zeta)$  и  $h_{D(0)}(z)$  равны в силу соответствия особенностей). Следовательно, по теореме Ричардсона

$$h_{D(t)}(z) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{z+F_0}{z-F_0} + \frac{qt}{\pi z}.$$

Отсюда следует, что аналитическое продолжение  $f_t(\zeta)$  вне  $K$  имеет две логарифмические особые точки  $1/\alpha_t$  и  $-1/\alpha_t$  и простой полюс в бесконечности ( $\alpha_t > 0$ ,  $\alpha_t = \alpha_0$  при  $t=0$ ). Следовательно, функция  $f_t(\zeta)$  имеет вид

$$f_t(\zeta) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1+\alpha_t \zeta}{1-\alpha_t \zeta} + \gamma_t \zeta.$$

Коэффициенты  $\alpha_t$  и  $\gamma_t$  находятся из уравнений

$$F_0 = f_t(\alpha_t) = \frac{a}{\pi} \ln \frac{1+\alpha_t^2}{1-\alpha_t^2} + \gamma_t \alpha_t$$

— совпадение логарифмических особых точек  $\overline{f_t(1/\bar{\zeta})}$  и  $h_{D(t)}(f_t(\zeta))$ ;

$$\gamma_t = \frac{qt}{\pi f'_t(0)} = \frac{qt}{\pi \left( \gamma_t + \frac{2a\alpha_t}{\pi} \right)}$$

— совпадение вычетов в точке 0. Из этих уравнений имеем для  $\alpha_t$  уравнение

$$\frac{a}{\pi} \ln \frac{1+\alpha_t^2}{1-\alpha_t^2} + \alpha_t \sqrt{\frac{\alpha_t^2 a^2}{\pi^2} - \frac{qt}{\pi}} - \alpha_t^2 \frac{a}{\pi} = F_0,$$

а  $\gamma_t$  выражается через  $\alpha_t$  по формуле

$$\gamma_t = -\frac{\alpha_t a}{\pi} + \sqrt{\frac{\alpha_t^2 a^2}{\pi^2} - \frac{qt}{\pi}}.$$

**Задачи.** 1. Доказать, что граница алгебраической области  $D$ , униформизирующее отображение которой — многочлен, является алгебраической кривой степени  $2 \deg D$ .

2. Является ли алгебраической область

а)  $x^4 + y^4 \leq 1$ ;

б)  $x^2 + 2y^2 \leq 1$ ?

3. Пусть униформизирующее отображение области имеет вид  $a_0 \zeta + b_0 \zeta^2$  [11]. Найдите закон эволюции этой области при откачке нефти из начала координат с мощностью  $q$ . Найдите момент образования полукубического острия на границе и долю откачанной нефти к этому моменту. При каком отношении  $|b_0|/|a_0|$  эта доля составит половину всей залежи?

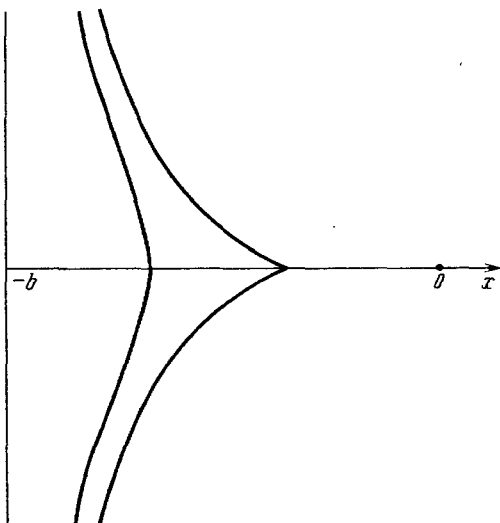


Рис. 7

4. Рассмотрите асимптотику решения примера 1 при  $R \rightarrow \infty$ ,  $a = R - b$ . Это соответствует случаю откачки из неограниченной залежи, имеющей форму полуплоскости (рис. 7). Покажите, что количество жидкости, которое удается отобрать до прорыва воды (образования острия), равно  $\pi b^2/3$ , т. е. в три раза меньше, чем в случае откачки из круговой залежи (рис. 5). Таким образом, увеличение залежи привело к ускорению прорыва воды, а не к замедлению.

5. (П. П. Куфарев.) Рассмотрите асимптотику примера 2 п. 3.7 при  $\alpha_0 \rightarrow 1$ . Это соответствует задаче об откачке жидкости из полосы (рис. 8). Найдите момент образования заострения на границе.

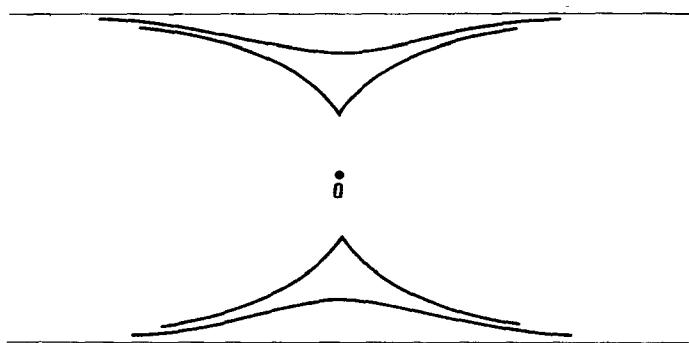


Рис. 8

6. (П. Я. Полубаринова-Кочина, П. П. Куфарев.) Опишите динамику круговой залежи при откачке из  $N$  стоков, находящихся в вершинах правильного  $N$ -угольника и имеющих одинаковую мощность.

7. В круговую область жидкости производится равномерная закачка через источник, равномерно вращающийся вокруг некоторой точки. Найдите форму области жидкости в момент, когда источник совершает полный оборот.

#### § 4. ЗАДАЧА О СЯГИВАНИИ ПОДВИЖНОГО КОНТУРА

**4.1. Формулировка задачи.** Рассмотрим конечную односвязную область газа, внешность которой заполнена жидкостью (рис. 9). В результате откачки газа контур раздела стягивается. Интересно изучить динамику стягивания контура. Пусть  $S$  — площадь газовой

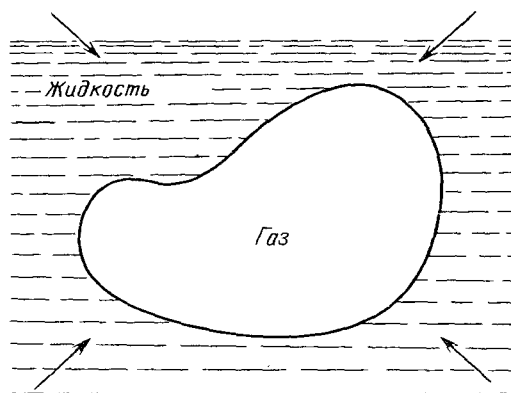


Рис. 9

области в начальный момент времени,  $q$  — интенсивность скачка газа. Тогда весь газ будет откачан к моменту  $t^* = S/q$ . Во многих случаях подвижный контур стягивается в точку при  $t \rightarrow t^*$ , имея при  $t$ , близких к  $t^*$ , форму, близкую к эллиптической. Удивительно, что как положение этой точки, так и полуоси асимптотического эллипса можно найти, зная начальную газовую область. С практической точки зрения разумно установить скважину, добывающую газ, в точке стягивания контура. В противном случае вытесняющая газ вода попадает в скважину раньше, чем будет выкачан весь газ (см. [5]).

Математическая модель. Отобранный газ замещается водой. Считается, что вода подается из источника, находящегося в бесконечно удаленной точке. В остальном модель аналогична модели из § 1. Именно, пусть  $D(t)$  — область газа в момент  $t$ ,  $\overline{D(t)}$  — ее дополнение. Тогда в  $\overline{D(t)}$  в каждый момент времени  $t$  задано потенциальное поле скорости  $v_t = \text{grad } \Phi_t$ , где потенциал  $\Phi_t$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi_t = 0 \text{ в } \overline{D(t)},$$

имеет на бесконечности асимптотику

$$\Phi_t = -\frac{q}{2\pi} \ln |z|, \quad z \rightarrow \infty,$$

и обращается в ноль на границе:

$$\Phi_t|_{\partial D(t)} = 0.$$



Для удобства будем считать, что  $\Phi_i = 0$  также и внутри области  $D(t)$ .

Точки границы, как и все остальные точки в  $D(t)$ , движутся со скоростью  $\text{grad } \Phi_i$ <sup>1)</sup>.

**З а м е ч а н и е.** Можно считать, что область  $D(t)$  состоит из нескольких односвязных компонент. Это соответствует одновременному стягиванию нескольких областей газа.

Для всякой начальной области  $D(0)$  с гладкой границей эволюция границы определена на некотором отрезке времени  $[0, \tau]$ , причем границы  $\partial D(t)$  при  $0 \leq t \leq \tau$  — гладкие и даже аналитические кривые (см. [13]).

**4.2. Свойство вложенности. Л е м м а.** В процессе стягивания область монотонно убывает: при  $D(t_1) \supset D(t_2)$   $t_1 < t_2$ .

Действительно, в силу принципа максимума,  $\Phi_i \leq 0$  в  $D(t)$ , поэтому  $\text{grad } \Phi_i$  всюду направлен внутрь области  $D$ , т. е. граница движется вовнутрь.

**С л е д с т в и е.** Пересечение областей  $\bigcap_{t < t_0} D(t)$  совпадает с замыканием области  $D(t_0)$ .

Предположим, что некоторое решение  $D(t)$  задачи 4.1 определено на полуинтервале времени  $[0, \tau]$  и пересечение  $\bigcap_{t < \tau} D(t)$  есть замыкание односвязной области. Тогда решение можно продолжить на больший интервал времени, рассмотрев стягивание границы этой области.

Следовательно, начальные области разбиваются на два типа.

1. Области, сохраняющие связность при стягивании и стягивающиеся полностью в момент откачки всего газа.

2. Области, теряющие связность в процессе стягивания.

В этом параграфе рассматриваются области первого типа. Области второго типа рассматриваются в § 6.

#### **4.3. Стягивание выпуклой области.**

**Т е о р е м а.** Выпуклая область остается выпуклой при стягивании.

**С л е д с т в и е.** Выпуклая область остается связной и стягивается полностью в момент откачки всего газа.

---

<sup>1)</sup> Эта задача, как и задачи п. 6.3 и 7.1, поставлена В. М. Ентовым.

**Лемма.** Пусть  $D$  — выпуклая область,  $\Phi$  — потенциал скоростей вне  $D$ , определенный в п. 4.1,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}(P)$  — вторая производная  $\Phi$  вдоль касательной к линии уровня в точке  $P \in \bar{D}$ . Тогда  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \leq 0$  в  $\bar{D}$  и может обращаться в ноль только на границе. В точках границы, где  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} = 0$ , производная вдоль внешней нормали  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right)$  положительна.

**Доказательство.** Введем вспомогательную функцию  $\Omega(P) = \frac{1}{|\text{grad } \Phi(P)|^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}(P)$ , определенную в  $\bar{D}$ . Она является гармонической в  $\bar{D}$  и регулярна в бесконечности<sup>1)</sup>. Знак функции  $\Omega(P)$  совпадает со знаком  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}(P)$  и противоположен знаку кривизны линии уровня функции  $\Phi$  в точке  $P$ . Поскольку  $\partial D$  — выпуклая линия уровня  $\Phi$ , то  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$  и  $\Omega$  неположительны вдоль  $\partial D$ . В силу принципа максимума модуля из этого следует, что  $\Omega$  (и поэтому  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}$ ) отрицательна внутри  $\bar{D}$ . Более того, усиленный принцип максимума Хопфа [14] утверждает, что наибольшее значение непостоянной гармонической функции  $\Omega$  не может достигаться в той точке границы, где  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , откуда следует  $\frac{\partial \Omega(P)}{\partial n} > 0$  при  $P \in \partial D$ ,  $\Omega(P) = 0$ . Следовательно,  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}(P) \right) = |\text{grad } \Phi(P)|^2 \frac{\partial \Omega(P)}{\partial n} > 0$  при  $P \in \partial D$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2}(P) = 0$ .

**Следствие.** Для выпуклой области  $D$  все линии уровня функции  $\Phi$  вне  $D$  строго выпуклы.

**Доказательство теоремы.** Пусть  $\tau$  — последний момент времени, в который область  $D(t)$  выпукла. Предположим, что  $\tau \neq t^*$ , и нарушение выпук-

<sup>1)</sup> Проще всего убедиться в этом, показав, что  $\Omega = 2\text{Re} \left( \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\omega(z)} \right) \right)$ ,

где  $\omega(z)$  — комплексная скорость течения  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ .

лости при  $t > \tau$  происходит в окрестности точки  $Q \in \partial D(\tau)$ . Очевидно, что кривизна границы в этой точке равна нулю (рис. 10). Из рисунка видно, что скорость границы  $v$  в окрестности точки  $Q$  — выпуклая вверх функция натурального параметра  $s$  на  $\partial D(\tau)$ :

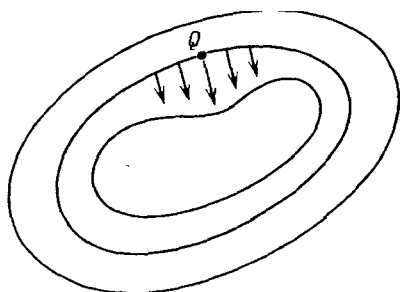


Рис. 10

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(Q) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) (Q) \leq 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \right) (Q) \leq 0,$$

что противоречит доказанной выше лемме.

**Замечание.** Мы доказали, что области  $D(t)$  при  $t > 0$  строго выпуклы.

#### 4.4. Точки стягивания.

**Определение.** Точка называется *точкой стягивания* области  $D(0)$  (или контура  $\partial D(0)$ ), если она принадлежит области газа  $D(t)$  для всех моментов времени  $t \in [0, t^*)$ , где  $t^*$  — момент откачки всего газа.

**Основная теорема.** Пусть область  $D(0)$  остается связной при стягивании и стягивается полностью в момент откачки всего газа. Тогда:

1) Гравитационный потенциал  $\Pi_{D(t)}$  области внутри нее, задаваемый формулой (2.3), меняется при стягивании на константу:  $\Pi_{D(0)} - \Pi_{D(t)} = \text{const}(t)$  в  $D(t)$ .

2) Всякое гладкое семейство областей, площадь которых линейно зависит от параметра, а потенциал меняется на константу при изменении параметра, служит решением задачи о стягивании.

3) Точка стягивания единственна.

4) Наименьшее значение потенциала  $\Pi_{D(0)}$  достигается в точке стягивания и только в ней.

Доказательство теоремы излагается в п. 4.5—4.8.

Точку стягивания удобно искать среди геометрических центров области  $D(0)$ .

**Определение.** Геометрическим центром области назовем всякую точку  $P$ , для которой

$$\int_0^{2\pi} r_P(\theta) d\theta = 0, \quad (4.1)$$

где  $r_P(\theta)$  — радиус-вектор точки границы  $\partial D(0)$ , приве-

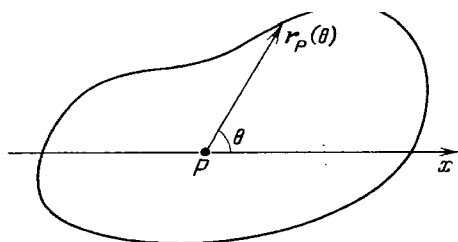


Рис. 11

денный из точки  $P$  и образующий с осью абсцисс угол  $\theta$  (рис. 11).

Имеет место  
Л е м м а. Вектор-  
функция

$$a(P) = \int_0^{2\pi} r_P(\theta) d\theta$$

пропорциональна градиенту потенциала  $\Pi_{D(0)}$ .

С л е д с т в и я. 1) Геометрические центры — это критические точки потенциала.

2) Точка стягивания — геометрический центр области.

В моменты, близкие к моменту полной откачки, стягивающаяся область имеет приближенную форму эллипса. Его оси направлены вдоль собственных векторов, а длины полуосей пропорциональны собственным значениям матрицы вторых производных потенциала  $\Pi_{D(0)}$  в точке стягивания.

Техническим средством получения этих результатов служат обобщение теоремы Ричардсона.

#### 4.5. Аналог теоремы Ричардсона.

О п р е д е л е н и е. Назовем функцию  $u(z)$  на плоскости *регулярной в бесконечности*, если функция  $u(1/z)$  определена и непрерывно дифференцируема в окрестности точки  $z=0$ .

Рассмотрим стягивающуюся область  $D(t)$  и произвольную область  $G$ , содержащую  $D(t)$ , например, достаточно большой круг.

Т е о р е м а. Для всякой регулярной в бесконечности функции  $u(z)$

$$\frac{d}{dt} \int_{G \setminus D(t)} u dx dy = qu(\infty) - \int_{\overline{D(t)}} \Phi_t \Delta u dx dy. \quad (4.2)$$

З а м е ч а н и е. Интеграл в правой части (4.2) сходится, поскольку  $\Delta u(z) = O(1/|z|^4)$ ,  $\Phi_t \sim -\frac{q}{2\pi} \ln |z|$ ,  $z \rightarrow \infty$ .

С л е д с т в и е. Для гармонической регулярной в бесконечности функции  $u(z)$

$$\frac{d}{dt} \int_{G \setminus D(t)} u dx dy = qu(\infty). \quad (4.3)$$

Пример.

$$\frac{d}{dt} \int_{G \setminus D(t)} z^{-k} dx dy = \begin{cases} q, & k=0, \\ 0, & k>0. \end{cases} \quad (4.4)$$

При  $k=0$  это означает, что скорость изменения площади равна интенсивности закачки воды. При  $k \geq 3$  в качестве  $G$  можно взять всю плоскость и интегрировать по дополнению к  $D(t)$ , т. е. по всей области жидкости. Свойства интегралов (4.4) аналогичны свойствам моментов Ричардсона.

**Теорема (о локальной единственности).** В не-тривиальном непрерывном семействе областей  $D(s)$  хотя бы один из интегралов  $\int_{G \setminus D(t)} z^{-k} dx dy$  меняется.

**Теорема (об алгебраических решениях).** 1) Если область  $D(0)$  такова, что конформное отображение круга в ее дополнение задается рациональной функцией, то тем же свойством обладает область  $D(t)$  при всех  $t \in [0, t^*)$ .

2) Если производная конформного отображения круга в дополнение области  $D(0)$  рациональна, то тем же свойством обладает область  $D(t)$  при всех  $t \in [0, t^*)$ .

Таким образом, алгебраичность и абелевость дополнения  $D(t)$  сохраняются при стягивании. Коэффициенты униформизирующего отображения определяются из конечной системы алгебраических уравнений, аналогичной (3.5), (3.6).

**Доказательство теоремы (об интегралах).** Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{G \setminus D(t)} u dx dy &= \int_{\partial D(t)} u \frac{\partial \Phi_t}{\partial n} dl = \int_{\partial D(t)} \left( u \frac{\partial \Phi_t}{\partial n} - \Phi_t \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \\ &= \int_{\partial K_R} \left( u \frac{\partial \Phi_t}{\partial n} - \Phi_t \frac{\partial u}{\partial n} \right) dl + \int_{K_R \setminus D(t)} (u \Delta \Phi - \Phi \Delta u) dx dy, \end{aligned}$$

где  $K_R$  — круг радиуса  $R$  с центром в нуле, содержащий область  $D(t)$ . Эта величина не зависит от  $R$ . Учитывая, что при  $R \rightarrow \infty$

$$u|_{\partial K_R} = u(\infty) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial K_R} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

$$\Phi_t|_{\partial K_R} = \frac{q}{2\pi} \ln R + \mathcal{O}(1), \quad \frac{\partial \Phi_t}{\partial n} \Big|_{\partial K_R} = \frac{q}{2\pi R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

а также что  $\Delta\Phi=0$  в  $\overline{D(t)}$ , в пределе при  $R \rightarrow \infty$  получаем (4.2).

**4.6. Динамика гравитационного потенциала.** Гравитационный потенциал области  $D$  определяется формулой (2.3):

$$\Pi_D(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} dx dy.$$

**Теорема.** Гравитационный потенциал стягивающейся области меняется по закону

$$\frac{d}{dt} \Pi_{D(t)}(\xi, \eta) = C(t) + \Phi_t(\xi, \eta), \quad (4.5)$$

где  $\Phi_t$  — потенциал скоростей.

**Доказательство.** Чтобы применить теорему 4.5, перейдем в формуле для потенциала к интегрированию по  $G \setminus D(t)$  и сделаем подынтегральную функцию регулярной в бесконечности:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_{D(t)}(\xi, \eta) &= \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{G \setminus D(t)} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} dx dy = \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{G \setminus D(t)} \ln \sqrt{\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2}} dx dy - \\ &\quad - \frac{d}{dt} \frac{1}{2\pi} \int_{G \setminus D(t)} \ln \sqrt{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2} dx dy, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $(\xi_0, \eta_0)$  — произвольная точка в  $D(t)$ . Функция  $u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi_0)^2 + (y-\eta_0)^2}}$  удовлетворяет уравнению  $\Delta u = \delta(x-\xi, y-\eta)$  в  $\overline{D(t)}$ , регулярна и обращается в 0 на бесконечности. Поэтому первый член в правой части (4.6) по теореме 4.5 равен  $\Phi_t(\xi, \eta)$ . Второй член не зависит от  $\xi, \eta$ . Обозначая его через  $C(t)$ , получаем (4.5). (Здесь  $\delta(x, y)$  — функция Дирака.)

**4.7. Потенциал как решение краевой задачи.** Из определения потенциала области следует, что он не-

прерывно-дифференцируем во всей плоскости и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \Pi_D(x, y) = \chi_D(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases} \quad (4.7)$$

с условием на бесконечности

$$\Pi_D(x, y) \sim \frac{S}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

где  $S$  — площадь области  $D$ . Это определяет потенциал единственным образом с точностью до константы.

**4.8. Доказательство основной теоремы.** Проинтегрируем обе части равенства (4.5) от 0 до  $t$ :

$$\Pi_{D(0)}(\xi, \eta) - \Pi_{D(t)}(\xi, \eta) = - \int_0^t C(\tau) d\tau - \int_0^t \Phi_\tau(\xi, \eta) d\tau. \quad (4.9)$$

Положим  $K(t) = - \int_0^t C(\tau) d\tau$ . Поскольку  $\Phi_t(\xi, \eta) \leq 0$  и  $\Phi_t(\xi, \eta) = 0$  тогда и только тогда, когда  $(\xi, \eta)$  принадлежит замыканию области газа  $[D(t)]$ , равенство (4.9) дает:

1) (п. 1 основной теоремы):

$$\Pi_{D(0)}(\xi, \eta) - \Pi_{D(t)}(\xi, \eta) = K(t), \quad (\xi, \eta) \in [D(t)]; \quad (4.10)$$

2)

$$\Pi_{D(0)}(\xi, \eta) - \Pi_{D(t)}(\xi, \eta) > K(t), \quad (\xi, \eta) \notin [D(t)]; \quad (4.11)$$

3) разность  $\Pi_{D(0)} - \Pi_{D(t)} - K(t)$  монотонно возрастает как функция от  $t$  при фиксированных  $\xi, \eta$ .

Пусть  $t^* = S/q$ . При  $t \rightarrow t^*$  площадь стягивающейся области стремится к нулю, поэтому  $\Pi_{D(t)}(\xi, \eta) \rightarrow 0$ .

Если  $(\xi, \eta)$  — точка стягивания, то  $(\xi, \eta) \in [D(t)]$  для всех  $t$ , поэтому предельный переход  $t \rightarrow t^*$  в (4.10) дает  $\Pi_{D(0)}(\xi, \eta) = \lim_{t \rightarrow t^*} K(t) = K$ . Если же  $(\xi, \eta)$  — не точка стягивания, то для некоторого  $\tau$   $(\xi, \eta) \notin [D(t)]$  при  $t > \tau$ , и предельный переход  $t \rightarrow t^*$  в (4.11) дает  $\Pi_{D(0)}(\xi, \eta) > K$ . Это доказывает п. 4 теоремы.

Докажем п. 2 основной теоремы. Пусть  $D(t)$  — решение задачи о стягивании,  $D'(t)$  — другое семейство областей площади  $S - qt$ , потенциал внутри которого меняется на константу, причем  $D(0) = D'(0) = D$ . Рассмотрим для некоторого момента  $\tau$  семейство областей

$D(\tau, s)$ , полученных при стягивании области  $D'(\tau-s)$  за время  $s$ ,  $s \in [0, \tau]$ . Области  $D(\tau, s)$  имеют площадь  $S - q\tau$ , а их потенциалы могут различаться лишь на константу внутри их пересечения. Из этого следует, что моменты (4.4) областей  $D(\tau, s)$  не зависят от  $s$ . По теореме о локальной единственности  $D(\tau, s)$  не зависит от  $s$ , т. е.  $D(\tau, \tau) = D(\tau)$  совпадает с  $D(\tau, 0) = D'(\tau)$ .

Докажем п. 3 — единственность точки стягивания. Рассмотрим множество точек стягивания. Это множество

1) односвязное, так как является пересечением односвязных областей газа;

2) ограниченное;

3) аналитическое, поскольку задается уравнением  $\Pi_{D(0)} = K$ , а функция  $\Pi_{D(0)}$  удовлетворяет внутри  $D(0)$  уравнению  $\Delta \Pi_{D(0)} = 1$ .

Поэтому множество точек стягивания — точка или аналитическая кривая. Ограниченная аналитическая кривая имеет топологию конечного графа. Этот граф является деревом в силу свойства односвязности. Дерево имеет хотя бы один конец — вершину, из которой выходит одно ребро. Аналитических кривых с такой топологией нет [15]. Следовательно, множество стягивания — точка.

**З а м е ч а н и е.** Предельный переход  $t \rightarrow t^*$  (в 4.9) дает следующее выражение потенциала области через функцию  $\Phi_t$ :

$$\Pi_{D(0)}(\xi, \eta) = K - \int_0^{t^*} \Phi_t(\xi, \eta) dt, \quad (4.12)$$

где  $K$  — некоторая константа.

Из этой формулы следует п. 4 основной теоремы.

#### 4.9. Автомодельные решения.

**Теорема.** 1) Семейство гомотетичных эллипсов с центром гомотетии в центре эллипса — решение задачи о стягивании.

2) Любое семейство гомотетичных областей, являющееся решением задачи о стягивании, — семейство гомотетичных эллипсов с центром гомотетии в центре эллипса.

**Доказательство.** 1) Ньютон показал, что потенциал внутри гомотетичных эллипсов с центром гомотетии в центре эллипса с точностью до константы



не зависит от коэффициента растяжения. Поэтому в силу п. 2 основной теоремы семейство гомотетичных эллипсов — решение задачи о стягивании.

2) Доказательство основано на применении теоремы М. Саккаи [16]: если  $D$  — односвязная область,  $\bar{D}$  — ее дополнение и  $\int_{\bar{D}} z^{-k} dx dy = 0$  при  $k \geq 3$ , то  $D$  — эллипс.

Пусть  $D(t)$  — семейство областей, гомотетичных относительно начала координат, являющееся решением задачи о стягивании. Область  $D(t)$  получается из  $D(0)$  сжатием в  $\lambda(t) = \sqrt{S/(S-qt)}$  раз, поэтому

$$\int_{\overline{D(t)}} z^{-k} dx dy = \lambda(t)^{2-k} \int_{\overline{D(0)}} z^{-k} dx dy, \quad k \geq 3,$$

где  $\overline{D(t)}$  — дополнение к  $D(t)$ . С другой стороны,  $\int_{\overline{D(t)}} z^{-k} dx dy = \text{const}$  в силу (4.4). Следовательно,

$$\int_{\overline{D(0)}} z^{-k} dx dy = 0, \quad k \geq 3. \quad (4.13)$$

Поэтому  $D(0)$  — эллипс. При стягивании эллипс гомотетически сжимается относительно своего центра. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Потенциал эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  внутри него легко вычисляется:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a+b} x^2 + \frac{b}{a+b} y^2 \right) + C(a, b). \quad (4.14)$$

В частности, потенциал внутри круга радиуса  $R$  с центром в начале координат равен

$$\Pi = \frac{1}{4} (x^2 + y^2) + C(R). \quad (4.15)$$

**4.10. Асимптотика стягивания.** Пусть  $D(0)$  — выпуклая область, стягивающаяся в начало координат. Все области  $D(t)$  также выпуклы. Рассмотрим область  $E(t)$ , получающуюся из  $D(t)$  растяжением в  $\lambda(t)$  раз с таким расчетом, чтобы длина границы  $E(t)$  равнялась фиксированной величине  $l$ .

**Теорема.** Границы областей  $\{E(t)\}$  равномерно стремятся к эллипсу, оси которого направлены вдоль собственных векторов матрицы вторых производных потенциала  $\Pi_{D(0)}$  в точке стягивания, а длины полуосей пропорциональны ее собственным значениям.

Набросок доказательства. Достаточно доказать, что из любой последовательности моментов времени  $\{t_n\}$ , стремящейся к  $t^*$  при  $n \rightarrow \infty$ , можно выделить подпоследовательность  $\{t_{n_k}\}$  такую, что кривые  $\partial E(t_{n_k})$  равномерно сходятся при  $k \rightarrow \infty$  к эллипсу, определенному в формулировке теоремы.

Из всякой последовательности вектор-функций на отрезке, ограниченных в совокупности вместе с производной, можно выделить подпоследовательность функций, равномерно сходящуюся на этом отрезке. Пусть  $z = z_t(s)$ ,  $s \in [0, l]$ , — параметрическое уравнение кривой  $\partial E(t)$ ,  $s$  — натуральный параметр на этой кривой. Поскольку  $|z_t(s)| \leq l/2$ ,  $\left| \frac{dz_t(s)}{ds} \right| = 1$ ,  $\max_{s \in [0, l]} |z_t(s)| \geq \frac{l}{2\pi}$ , то для всякой последовательности  $\{t_n\}$ , стремящейся к  $t^*$ , существует подпоследовательность  $\{t_{n_k}\}$  такая, что  $z_{t_{n_k}}(s)$  равномерно сходится на  $[0, l]$  к некоторой функции  $Z(s) \neq 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Уравнение  $z = Z(s)$  определяет замкнутую кривую. Проверяется, что эта кривая ограничивает выпуклую область. Обозначим ее через  $E$ .

Поскольку при  $k \geq 3$

$$\int_{\overline{E(t)}} z^{-k} dx dy = \lambda(t)^{2-k} \int_{\overline{D(t)}} z^{-k} dx dy = \lambda(t)^{2-k} \int_{\overline{D(0)}} z^{-k} dx dy,$$

то  $\int_{\overline{E(t)}} z^{-k} dx dy$  стремится к нулю при  $t \rightarrow t^*$ , поэтому

$$\int_{\overline{E}} z^{-k} dx dy = 0, \quad k \geq 3.$$

Всякая область, обладающая этим свойством, является эллипсом (см. п. 4.9). Потенциал эллипса  $E$  внутри себя равен

$$\Pi_E(\xi, \eta) = \lim_{t \rightarrow t^*} \Pi_{E(t)}(\xi, \eta) = \Pi_{D(0)}^{(2)}(\xi, \eta) + \text{const},$$

где  $\Pi_{D(0)}^{(2)}(\xi, \eta)$  — члены второго порядка в разложении потенциала области  $D(0)$  в окрестности начала коор-

динат по формуле Тейлора. Из формулы (4.14) следует, что у эллипса с центром в начале координат оси направлены вдоль собственных векторов, а длины полуосей пропорциональны собственным значениям матрицы коэффициентов его потенциала (являющегося суммой квадратичной функции и константы). Для эллипса  $E$  эта матрица совпадает с матрицей вторых производных потенциала области  $D(0)$ .

**4.11. Случай нескольких источников.** Рассмотрим задачу о стягивании границы между жидкостью и газом в случае, когда жидкость накачивается через несколько источников. Пусть  $q$  — производительность бесконечно удаленного источника,  $q_1, \dots, q_n$  — производительности источников, расположенных в точках  $P_1, \dots, P_n$  с координатами  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Потенциал поля скоростей в этом случае определяется из краевой задачи

$$\Delta \Phi_t = 0 \text{ в } \overline{D(t)} \setminus \{P_1, \dots, P_n\}, \quad \Phi_t = 0 \text{ на } \partial D(t),$$

$$\Phi_t \sim \frac{q_j}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}, \quad (x, y) \rightarrow (x_j, y_j),$$

$$\Phi_t \sim -\frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \rightarrow \infty.$$

В задаче о стягивании под действием источников область, остающаяся связной при стягивании, имеет единственную точку стягивания. Она является точкой наименьшего значения некоторой функции — эффективного потенциала, который внутри области меняется на константу при эволюции. Этот потенциал задается формулой (4.12) и может быть получен из гравитационного потенциала по формуле

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_D(x, y) = & \Pi_D(x, y) - \\ & - \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{q + q_1 + \dots + q_n} \cdot \frac{S}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Таким образом,  $\hat{\Pi}_D$  — это электрический потенциал равномерно заряженной области  $D$  в присутствии зарядов противоположного знака в точках  $P_j$ , пропорциональных  $q_j$ .

Доказательство этого не отличается принципиально от вышеприведенных рассуждений.

**Пример.** Пусть начальная область газа — круг радиуса  $R$  с центром в нуле; единственный источник

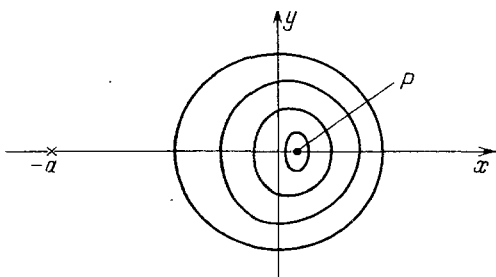


Рис. 12

жидкости находится в точке  $(-a, 0)$  (рис. 12). Тогда эффективный потенциал равен

$$\hat{\Pi} = \frac{x^2 + y^2}{4} - \frac{R^2}{2} \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + C$$

и его наименьшее значение достигается в точке  $\left( \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4R^2}}{2}, 0 \right)$ . Это и есть точка стягивания.

**Задачи.** 1. Рассмотрим задачу о расширении области под действием откачки жидкости из бесконечности (задача п. 4.1 с  $q < 0$ ). Пусть  $D(t)$ ,  $t > 0$ , — расширяющаяся область газа и  $\bigcup_{t>0} D(t) = \mathbb{R}^2$ . Покажите, что  $D(0)$  — эллипс,  $D(t)$  — гомотетичные ему эллипсы относительно центра. Таким образом, решения с другими начальными областями либо перестают существовать при некотором конечном  $t$ , либо существуют при всех  $t$ , но газ заполняет не всю плоскость [17].

2. Пусть стягивающаяся область  $D$  симметрична относительно оси абсцисс и остается связной до

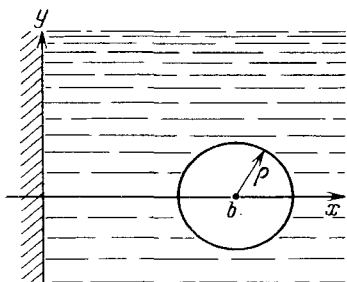


Рис. 13

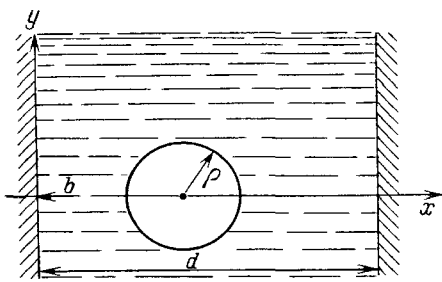


Рис. 14

момента полной откачки. Доказать, что в этом случае функция  $P_D(x, 0)$  имеет ровно один локальный минимум.

3. Найдите точку стягивания круговой области при закачке жидкости из бесконечно удаленного источника внутрь а) полуплоскости (рис. 13), б) канала (рис. 14). Границы, обозначенные штриховкой, непроницаемы, т. е. на них  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ .

4. Найдите отношение полуосей асимптотического эллипса для стягивающегося контура в примере п. 4.11.

## § 5. ЗАДАЧА ОБ ЭВОЛЮЦИИ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

**5.1. Формулировка задачи.** Пусть область жидкости окружена газом и является ограниченной областью с  $g$  дырами (рис. 15). Рассмотрим ее эволюцию под действием закачки жидкости через точечные источники. Пусть  $D(t)$  — область жидкости в момент времени  $t$ ;  $z_1, \dots, z_n$  — точки расположения источников жидкости,  $q_1, \dots, q_n$  — их производительности,  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{g+1}$  — компоненты связности границы  $\partial D(t)$ . Давление на каждой компоненте границы постоянно. На различных компонентах давления могут различаться. Потенциал скоростей частиц жидкости определяется условиями

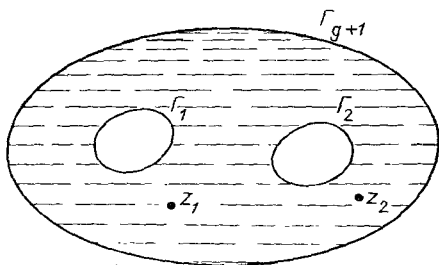


Рис. 15

$$\Delta \Phi = 0 \text{ в } D(t) \setminus \{z_1, \dots, z_n\}, \quad \Phi \sim \frac{q_j}{2\pi} \ln |z - z_j|,$$

$$z \rightarrow z_j, \quad \Phi|_{\Gamma_j} = \Phi_j(t), \quad j = 1, \dots, g+1.$$

Скорость границы равна  $v = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\partial D(t)}$ , т. е. величине градиента потенциала скоростей.

### 5.2. Интегралы динамики области.

**Теорема (Ричардсон — Густафсон).** Для всякой гармонической функции  $u$ , заданной в окрестности

области  $D(t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx \, dy = \sum_{j=1}^n q_j u(z_j) + \sum_{j=1}^{g+1} \Phi_j R_j, \quad (5.1)$$

где  $R_j = \int_{\Gamma_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$  — поток градиента функции и через контур  $\Gamma_j$ .

**З а м е ч а н и е.** Для функции  $u$ , голоморфной в окрестности контура  $\Gamma_j$ ,  $R_j = 0$ .

**Т е о р е м а** (о локальной единственности области с заданным набором моментов). Пусть  $D(s)$ ,  $s \in (s_1, s_2)$ , — гладкое семейство многосвязных областей и для любого  $s_0 \in (s_1, s_2)$  и всякой функции  $u(z)$ , гармонической в окрестности области  $D(s_0)$ ,  $\int_{D(s_0)} u \, dx \, dy = \int_{D(s)} u \, dx \, dy$

для  $s$ , близких к  $s_0$ . Тогда  $D(s) \equiv \text{const}$ .

**С л е д с т в и е.** Результат закачки зависит только от начальной области и суммарных количеств жидкости, закачанных источниками.

Доказательства этих утверждений аналогичны доказательствам их аналогов для односвязного случая (см. § 2).

**5.3. Алгебраические решения.** Алгебраическая область в многосвязном случае определяется с помощью римановой поверхности и заданных на ней антиголоморфной инволюции и мероморфной дифференциальной формы.

**Риманова поверхность** (комплексная кривая) — это гладкая поверхность, на которой в окрестности каждой точки задана комплексная координата, и переход от одной локальной координаты к другой на пересечении двух окрестностей задается голоморфной функцией; см. [18].

**Антиголоморфная инволюция** римановой поверхности — это ее диффеоморфизм на себя, квадрат которого является тождественным отображением и который в локальных комплексных координатах записывается в виде  $w = \overline{\varphi(z)}$ , где  $\varphi$  — голоморфная функция. Риманова поверхность  $\Sigma$  рода  $g$  снабжена вещественной  $M$ -структурой, если на ней задана антиголоморфная инволюция, множество неподвижных точек которой состоит из  $g+1$  замкнутого контура (овала). В этом случае множество неподвижных точек делит поверхность на две «половины»  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , переставляемые инволюцией.

**Пример.** Поверхность — сфера Римана, инволюция — инверсия относительно окружности.

**Мероморфный дифференциал** на поверхности — это дифференциальная 1-форма  $\omega$ , имеющая в локальных координатах вид  $\varphi(z) dz$ , где  $\varphi(z)$  — мероморфная функция.

Пусть  $\Sigma$  — риманова поверхность с вещественной  $M$ -структурой,  $\omega$  — мероморфный дифференциал на  $\Sigma$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  — компоненты связности множества неподвижных точек антиголоморфной инволюции (овалы).

Предположим, что  $\oint_{\gamma_i} \omega = 0$  и  $\omega$  не имеет нулей и полюсов

в  $\Sigma^+$ . Рассмотрим функцию  $f(z) = \int_{z_0}^z \omega$ , где  $z_0$  — фиксированная точка в  $\Sigma^+$ ,  $z \in \Sigma^+$ . Эта функция голоморфна и однозначна в  $\Sigma^+$ . Предположим, что функция  $f$  принимает разные значения в разных точках. Тогда она задает конформное отображение половины  $\Sigma^+$  на некоторую область с  $g$  дырами на плоскости. Такую область назовем *абелевой областью* рода  $g$ . *Кратностью* абелевой области назовем сумму порядков полюсов формы  $\omega$ .

Если форма  $\omega$  точная, то функция  $f$  аналитически продолжается до мероморфной функции на  $\Sigma$ . В этом случае область назовем *алгебраической областью* рода  $g$ . *Степенью* алгебраической области назовем сумму порядков полюсов функции  $f$ . Разность кратности и степени алгебраической области равна числу полюсов функции  $f$ . Граница алгебраической области — алгебраическая кривая, состоящая из  $g+1$  компоненты. Любая область приближается алгебраическими с любой наперед заданной точностью.

**Теорема.** Пусть  $D(t)$  — эволюционирующая область жидкости. Тогда:

1) Если область  $D(0)$  — алгебраическая область рода  $g$  и степени  $d$ , то  $D(t)$  — алгебраическая область рода  $g$  и степени не выше  $d+n$ , где  $n$  — число источников.

2) Если область  $D(0)$  — абелева область рода  $g$  и кратности  $d$ , то  $D(t)$  — абелева область рода  $g$  и кратности не выше  $d+2n$ .

#### 5.4. Теорема Римана.

**Теорема.** Пусть  $D$  — область, граница которой  $\partial D$  состоит из  $g+1$  кусочно гладкой замкнутой кривой. Тогда существуют риманова поверхность  $\Sigma$  рода  $g$  с вещественной  $M$ -структурой и конформное отображение

$f: \Sigma^+ \rightarrow D$ , устанавливающее гомеоморфизм между замыканиями областей  $\Sigma^+$  и  $D$ .

Отображение  $f$  назовем *униформизирующим отображением* для области  $D$ .

**Доказательство.** Любая область служит конформным образом области  $D$ , ограниченной окружностями [18]. Представим последнюю как половину римановой поверхности. Обозначим через  $\tau_1, \dots, \tau_{g+1}$  инверсии относительно граничных окружностей. Пусть  $\Omega$  — множество точек плоскости, которые можно перевести в  $E$  конечным числом инверсий  $\tau_j$ . Группа  $T$ , порожденная  $\tau_j$ ,  $1 \leq j \leq g+1$ , действует на  $\Omega$ . Пусть  $T_0 \subset T$  — подгруппа четных элементов (слов из  $\tau_j$ , содержащих четное число букв). Легко проверить, что  $T_0$  действует свободно на  $\Omega$  и что фундаментальной областью подгруппы  $T_0$  служит  $E \cup \tau_i E$  для любого  $i \in \{1, \dots, g+1\}$ . Пусть  $\Sigma = \Omega/T_0$ . Тогда  $\Sigma$  — компактная риманова поверхность рода  $g$ , полученная  $E \cup \tau_i E$  отождествлением частей границы, переходящих друг в друга при отображении  $\tau_i$ . Отображение  $\tau_i$  индуцирует антиголоморфную инволюцию на  $\Sigma$ , множество неподвижных точек которой разрезает  $\Sigma$  на две половины  $\Sigma^+$  и  $\Sigma^-$ , переставляемые инволюцией  $\tau_i$ .

**5.5. Теорема о соответствии особенностей.** Назовем *функцией моментов* многосвязной области  $D$  функцию

$$h_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx dy}{w - z}, \quad z = x + iy, \quad w \notin D. \quad (5.2)$$

Она обладает свойствами 1,3—7 из § 3, аналогично случаю односвязной области, и состоит из  $g+1$  голоморфных функций, определенных в связных компонентах дополнения к  $D$ .

Область является алгебраической тогда и только тогда, когда ее функция моментов рациональна, и является абелевой тогда и только тогда, когда производная функции моментов рациональна.

**Теорема о соответствии особенностей** (Густафсон [6]). Пусть  $f$  — униформизирующее отображение для области  $D$ , отображающее на  $D$  половину  $\Sigma^+$  римановой поверхности  $\Sigma$  с вещественной  $M$ -структурой. Тогда

1) Функция  $\psi(\zeta) = f(\tau(\zeta)) - \overline{h_D(f(\zeta))}$  аналитична в  $\Sigma^+$ , если хотя бы одна из функций  $f(\zeta)$  и  $h_D(f(\zeta))$  продолжается внутрь  $\Sigma^+$  с конечным числом полюсов и логарифмических ветвлений ( $\tau$  — антиголоморфная инволюция на  $\Sigma$ ).



2) Функция  $f$  аналитически продолжается до мероморфной функции на поверхности  $\Sigma$  тогда и только тогда, когда функция  $h_D$  продолжается до рациональной функции на римановой сфере.

3) Форма  $df$  аналитически продолжается до мероморфного дифференциала на  $\Sigma$  тогда и только тогда, когда  $h'_D$  аналитически продолжается до рациональной функции на римановой сфере.

4) Степени функций  $f$  и  $h_D$  (соответственно форм  $df$  и  $dh_D$ ) совпадают.

**Доказательство.** 1) Из формулы Сохоцкого — Племелья следует, что функция  $\psi(\zeta) = \overline{f(\zeta)} - h_D(f(\zeta))$ , определенная на границе «половины»  $\Sigma^+$ , аналитически продолжается без особенностей внутрь  $\Sigma^+$ . Если хотя бы одна из функций  $\overline{f(\zeta)}$ ,  $h_D(f(\zeta))$  аналитически продолжается внутрь  $\Sigma^+$  с конечным числом полюсов и логарифмических ветвлений, то тем же свойством обладает и вторая функция. Продолжением  $\overline{f(\zeta)}$  внутрь  $\Sigma^+$  с особенностями является функция  $\overline{f(\tau(\zeta))}$ , поскольку на границе  $\Sigma^+$   $\tau(\zeta) = \zeta$ .

2) Если  $f$  мероморфна в  $\Sigma$ , то  $\overline{f(\tau(\zeta))}$  мероморфна в  $\Sigma^+$ , следовательно,  $h_D(f(\zeta))$  продолжается до мероморфной функции в  $\Sigma^+$  в силу утверждения п. 1, поэтому  $h_D$  продолжается до мероморфной функции в  $D$ . Поскольку  $h_D$  аналитична вне  $D$ , то  $h_D$  — рациональная функция. Если  $h_D$  рациональна, то  $h_D(f(\zeta))$  мероморфна в  $\Sigma^+$ , следовательно,  $\overline{f(\tau(\zeta))}$  мероморфна в  $\Sigma^+$ , а  $f(\zeta)$  мероморфна вне  $\Sigma^+$ . Поскольку  $f$  аналитична в  $\Sigma^+$ , то  $f$  аналитически продолжается до мероморфной функции на  $\Sigma$ .

3) Доказывается аналогично п. 2.

4) Каждой особой точке функции  $f$  на  $\Sigma$  соответствует особая точка того же типа функции  $h_D$ , и наоборот. Следовательно, степени функций  $f$  и  $h_D$  форм  $df$  и  $dh_D$  совпадают.

**5.6. Доказательство теоремы об алгебраических решениях.** Из теоремы 5.2 следует, что функция моментов области жидкости  $D(t)$  меняется по закону

$$h_{D(t)}(w) = h_{D(0)}(w) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi(w-z_j)} \int_0^t q_j(\tau) d\tau.$$

Следовательно, функции  $h_{D(t)}$  и  $h'_{D(t)}$  рациональны при всех  $t$  тогда и только тогда, когда они рациональны при  $t=0$ .

причем  $\deg h_{D(0)} - \deg h_{D(0)} \leq n$ ,  $\deg h'_{D(0)} - \deg h'_{D(0)} \leq 2n$ . В силу теоремы о соответствии особенностей из этого следует, что униформирующее отображение  $f_t$  и его дифференциал  $df_t$  мероморфны на поверхности при всех  $t$  тогда и только тогда, когда они мероморфны при  $t=0$ , причем  $\deg f_t - \deg f_0 \leq n$ ,  $\deg df_t - \deg df_0 \leq 2n$ . Теорема доказана.

**5.7. Построение решений.** Теоремы об алгебраических решениях и соответствии особенностей сводят задачу описания динамики абелевой области к задаче решения системы уравнений на параметры абелевых областей фиксированной степени.

**Теорема (о локальной единственности).** Пусть  $D(s)$ ,  $s \in (s_1, s_2)$ , — гладкое семейство областей,  $s_0 \in (s_1, s_2)$ ,  $\zeta_1, \dots, \zeta_g$  — фиксированные точки в  $g$  различных ограниченных связных компонентах дополнения к  $D(s)$ . Тогда если функция моментов области  $D(s)$  и интегралы  $\int \ln |z - \zeta_m| dx dy$ ,  $m=1, \dots, g$ , не зависят от  $s$ , то  $D(s) \equiv \text{const}$ .

**Идея доказательства.** Любая гармоническая функция  $u$  в окрестности области  $D(s)$  равномерно приближается в этой окрестности линейными комбинациями функций  $\text{Re} \frac{1}{w-z}$ ,  $\text{Im} \frac{1}{w-z}$ ,  $w \notin D(s)$  и  $\ln |z - \zeta_m|$ , поэтому  $\int_{D(s)} u dx dy$  не зависит от  $s$ .

Следовательно, по теореме о локальной единственности области с заданными моментами  $D(s) \equiv \text{const}$ .

Согласно теореме параметры униформирующего отображения для области  $D(t)$  находятся из системы уравнений, состоящей из

1) условий взаимного уничтожения главных частей функций  $\overline{f(\tau(\zeta))}$  и  $h_D(f(\zeta))$  в особых точках;

2) уравнений динамики моментов области  $D(t)$  относительно функций  $\ln |z - \zeta_m|$ , где  $\zeta_m$  принадлежит  $m$ -й конечной связной компоненте дополнения к  $D(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_{D(t)} \ln |z - \zeta_m| dx dy &= \int_{D(0)} \ln |z - \zeta_m| dx dy + \\ &+ \sum_{j=1}^n q_j \ln |z_j - \zeta_m| - 2\pi(\Phi_m - \Phi_{g+1}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

**5.8. Восстановление кольцеобразной области по моментам.** Рассмотрим алгебраическую область с одной дырой. Она служит образом прямоугольника при

конформном отображении, задаваемом эллиптической функцией. Ограничимся случаем области, все особые точки функции моментов которой — простые полюсы.

**Теорема.** Пусть  $D$  — алгебраическая область, гомеоморфная кольцу, с функцией моментов

$$h_D(z) = \sum_{j=1}^d \frac{A_j}{z - B_j}. \quad (5.4)$$

Тогда область  $D$  является образом прямоугольника  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq \lambda\}$ ,  $\lambda > 0$ , при конформном отображении

$$f(w) = \sum_{j=1}^d c_j \zeta_\lambda(w - \alpha_j) + c, \quad (5.5)$$

где  $\zeta_\lambda$  —  $\zeta$ -функция Вейерштрасса с периодами 1 и  $i\lambda$ <sup>1)</sup>. Параметры  $c_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $c$ ,  $\lambda$  удовлетворяют уравнениям

$$f(-\bar{\alpha}_j) = B, \quad j = 1, \dots, d, \quad (5.6)$$

$$-\bar{c}_j = A_j / f'(-\bar{\alpha}_j), \quad j = 1, \dots, d, \quad (5.7)$$

$$\sum_{j=1}^d c_j = 0. \quad (5.8)$$

**Доказательство.** Риманова поверхность  $\Sigma$  с  $M$ -структурой, соответствующая области  $D$ , — это вещественный тор. Его можно представить как факторпространство  $\mathbb{C}/\Gamma$  комплексной прямой по прямоугольной решетке с периодами 1 и  $i\lambda$ , причем половине  $\Sigma^+$  будет соответствовать прямоугольник  $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq \lambda\}$ . По теореме о соответствии особенностей униформизирующее отображение для области  $D$  задается мероморфной функцией на  $\Sigma$  с  $d$  простыми полюсами, т. е. эллиптической функцией вида (5.5), причем полюсы функций  $\overline{f(\tau(\zeta))}$  и  $h_D(f(\zeta))$  в  $\Sigma^+$  и вычеты в них должны совпадать. Совпадение полюсов выражается уравнениями (5.6), совпадение вычетов — уравнениями (5.7). Уравнение (5.8) — это условие равенства нулю суммы вычетов эллиптической функции в прямоугольнике периодов.

<sup>1)</sup>  $\zeta$ -функция Вейерштрасса с периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — это мероморфная функция, имеющая простые полюсы в точках  $m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n$  — целые) с вычетом 1 и удовлетворяющая соотношениям  $\zeta(w + \omega_1) = \zeta(w) + \delta$ ,  $\zeta(w + \omega_2) = \zeta(w) + \delta'$ , где  $\delta, \delta'$  зависят от  $\omega_1, \omega_2$  [8].

Для однозначного определения динамики кольцевой области под действием закачки жидкости к уравнениям (5.6) — (5.8), связывающим отображение  $f_t$  и функцию  $h_{D(t)}$ , следует добавить уравнение (5.3), а в случае кольцевой области имеющее вид

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2\lambda} \int_0^\lambda \ln |f_t(w)| \cdot |f'_t(w)|^2 dy dx = \\ = \int_0^{1/2\lambda} \int_0^\lambda \ln |f_0(w)| \cdot |f'_0(w)|^2 dy dx + \\ + \sum_{j=1}^n q_j \ln |z_j| - 2\pi(\Phi_1 - \Phi_2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

По теореме 5.7 уравнения (5.6) — (5.9) локально однозначно определяют область  $D(t)$ .

**Пример.** Рассмотрим кольцообразную область  $D$ , имеющую функцию моментов

$$h_D(w) = \frac{A}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{w - Re^{2\pi ik/N}}, \quad (5.10)$$

и такую, что  $\int_D \ln \left| \frac{z}{R} \right| dx dy = 0$  (рис. 16). Такая область

существует на некотором интервале значений отношения  $A/R^2$  и инвариантна относительно поворота на угол  $2\pi/N$  вокруг начала координат. Рассмотрим эволюцию этой области при закачке жидкости через источники в точках  $Re^{2\pi ik/N}$  с интенсивностью  $q$  при нулевом потенциале на границе. Функция моментов области жидкости  $D(t)$  в момент  $t$  равна

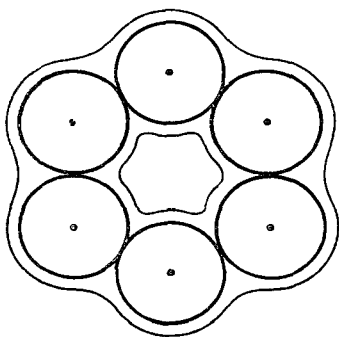


Рис. 16

$$h_{D(t)}(w) = \frac{A+qt}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{w - Re^{2\pi ik/N}}.$$

По формуле (5.5) униформизирующее отображение равно

$$\begin{aligned} f_t(w) = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} B e^{2\pi ik/N} \zeta_\lambda \left( w + \alpha + \frac{ik\lambda}{N} \right), \end{aligned}$$

$$B, \alpha, \lambda \in \mathbb{R},$$

где параметры  $B$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  определяются из уравнений (5.6) — (5.9):

$$f_i(\alpha) = R, \quad f'_i(\alpha) = -\frac{qt+A}{\pi B},$$

$$\int_0^{1/2} \int_0^\lambda \ln \left| \frac{f_i(z)}{R} \right| \cdot |f'_i(z)|^2 dy dx = 0.$$

**Задачи.** В задачах 1—6 доказать, что

1. Неодносвязная область, ограниченная окружностями, не абелева. В частности, круговое кольцо — не абелева область.

2. Граница алгебраической области — алгебраическая кривая.

3. (Густафсон.) Алгебраическая область степени 2 односвязна.

4. Область является алгебраической тогда и только тогда, когда интеграл по ней от всякой аналитической функции равен конечной линейной комбинации частных производных этой функции в конечном числе точек, коэффициенты которой не зависят от выбора функции.

5. При достаточно большом  $n$  существует область рода  $g$  такая, что ее функция моментов — многочлен степени  $n$  от  $1/z$ .

6. Любая область приближается алгебраическими с любой наперед заданной точностью (в равномерной метрике).

7. (П. П. Куфарев.) Пусть в начальный момент жидкость заполняет полосу  $|\operatorname{Im} z| < b$ , и закачка производится с мощностью  $q$  через источники, расположенные в точках  $z = na$ , где  $n$  пробегает целые числа. Найдите область, занятую жидкостью в момент времени  $t$ .

8. Рассмотрим эволюцию области, заключенной между двумя окружностями, под действием откачки газа из дыры. Найдите точку стягивания внутренней границы (рис. 17).

9. Пусть  $D$  — двухсвязная область, не содержащая начала координат, и

$$\int_D z^n dx dy = 0 \quad \text{при } n \neq 0, n \in \mathbb{Z}.$$

Доказать, что  $D$  — круговое кольцо с центром в начале координат.

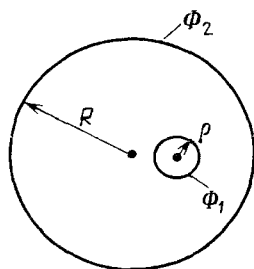


Рис. 17

## § 6. ПЕРЕСТРОЙКИ ПРИ ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАСТИ

**6.1. Обобщенные решения задачи об эволюции.** В задаче о закачке жидкости в многосвязную область естественно предположить, что откачка газа из всех дыр производится под одинаковым давлением. Например, в задаче о заполнении литейной формы (см. п. 7.1) давление на всех частях границы атмосферное.

Итак, рассмотрим частный случай задачи § 5 об эволюции многосвязной области, когда мощности источников  $q_j$  положительны, а потенциал скоростей

равен нулю на всех компонентах границы. В этом случае решение задачи обладает «свойством вложенности» (ср. с п. 4.2):

**Теорема.** Пусть  $D(t)$  — решение рассматриваемой задачи. Тогда  $D(t_1) \subset D(t_2)$ , если  $t_1 < t_2$ .

В процессе закачки область жидкости может топологически перестраиваться. Например, участки границы могут стал-

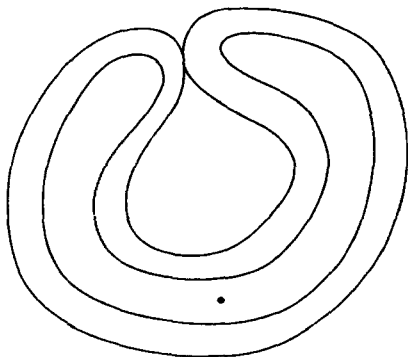


Рис. 18

киваться (рис. 18). Для математического описания эволюции области после момента столкновения введем понятие обобщенного решения задачи о закачке. Решения, которые рассматривались до сих пор, назовем классическими.

Обобщенным решением задачи о закачке жидкости назовем семейство ограниченных областей  $D(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , с тремя свойствами:

1) вложенности:  $D(t_1) \subset D(t_2)$  при  $t_1 < t_2$ ;

2) линейно изменяющейся площади: площадь области  $D(t)$  равна  $S_0 + \left( \sum_{j=1}^n q_j \right) t$ , где  $S_0$  — площадь области  $D(0)$ ;

3) конечности числа перестроек: существуют моменты  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$  такие, что на  $n+1$  интервалах времени  $[0, \tau_1)$ ,  $(\tau_1, \tau_2)$ , ...,  $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ ,  $(\tau_k, \infty)$  область  $D(t)$  ограничена конечным числом гладких неособых кривых, и семейство  $D(t)$  является «классическим» решением задачи об эволюции.

Замечание. Если  $t_1, t_2$  принадлежат разным интервалам из  $n+1$  указанных, то области  $D(t_1)$  и  $D(t_2)$  могут иметь разное число компонент и дыр.

Теорема о первых интегралах верна для обобщенных решений.

Теорема. Пусть  $u(x, y)$  — гармоническая функция в некоторой области, содержащей  $D(t)$  вместе с границей. Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u \, dx \, dy = \sum_{j=1}^n q_j u(z_j). \quad (6.1)$$

Действительно, в промежутках между моментами  $\tau_j$  это равенство верно по теореме 5.2, поэтому оно верно при всех  $t$  в силу непрерывности зависимости  $\int_{D(t)} u \, dx \, dy$  от  $t$ .

$D(t)$  Следствие.

$$\int_{D(t)} u \, dx \, dy = \int_{D(0)} u \, dx \, dy + \sum_{j=1}^n u(z_j) \int_0^t q_j(\tau) \, d\tau. \quad (6.2)$$

Для описания эволюции области жидкости нужно построить обобщенное решение  $D(t)$  задачи о закачке для заданной начальной области  $D(0)$  при заданных положениях и мощностях источников. Доказано [16], что для алгебраической области  $D(0)$  это решение существует и единственно. При  $t > \tau_k$  область  $D(t)$  односвязна и при больших  $t$  имеет приближенную форму круга.

По-видимому, это верно для всякой конечносвязной области  $D(0)$  с гладкой границей.

Из формулы (6.2) следует, что результат закачки зависит только от общих количеств жидкости, закачанной источниками, и не зависит от порядка их работы, как и в случае классических решений.

Замечание. В случае неодинаковых давлений в дырах обобщенное решение с хорошими свойствами определить не удастся.

В моменты  $\tau_j$  область жидкости подвергается перестройкам. Перестройки области в обобщенном решении бывают двух типов:

1. Столкновение двух участков границы (рис. 19).
2. Стягивание дыры (рис. 20).

Дыра стягивается в точку (ср. с п. 3 основной теоремы из п. 4.4).

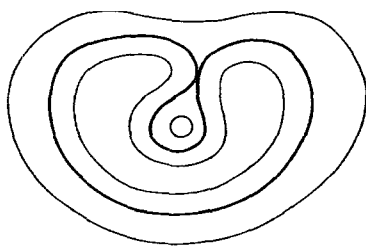


Рис. 19

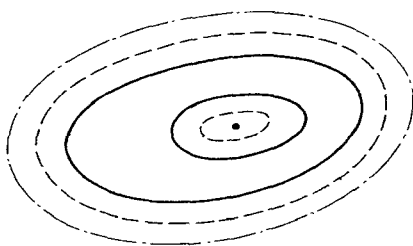


Рис. 20

Перестройки первого и второго типов могут чередоваться, за счет чего количество связных компонент области и ее границы меняется.

Топологическая структура простейшего обобщенного решения задачи о закачке показана на рис. 21.

**6.2. Обобщенные алгебраические решения.** Пусть  $D(t)$  — обобщенное решение задачи о закачке.

По теореме 6.1 функция моментов области  $D(t)$  меняется по закону

$$h_{D(t)}(w) = h_{D(0)}(w) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\pi(w-z_j)} \int_0^t q_j(\tau) d\tau, \quad w \in \overline{D(t)}.$$

Поэтому функции  $h_{D(t)}$  и  $\frac{dh_{D(t)}}{dw}$  рациональны тогда и только тогда, когда они рациональны при  $t=0$ . Следовательно, по теореме о соответствии особенностей свойства алгебраичности и абелевости области сохраняются при эволюции.

**Теорема.** Пусть  $D(t)$  — обобщенное решение задачи об эволюции области. Тогда

- 1) Если область  $D(0)$  — алгебраическая степени  $d$ , то область  $D(t)$  — алгебраическая степени не выше  $d+n$ , где  $n$  — число источников.

- 2) Если область  $D(0)$  — абелева кратности  $d$ , то область  $D(t)$  — абелева кратности не выше  $d+2n$ .

Рассмотрим примеры обобщенных алгебраических решений.

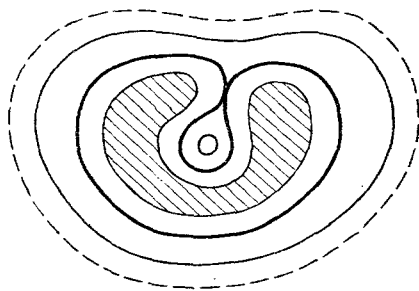


Рис. 21



Пример 1. (Ричардсон.) Рассмотрим задачу о закачке жидкости через два источника в точках  $a$  и  $-a$  с одинаковой интенсивностью  $q$ . В начальный момент времени жидкости нет. Следовательно, при  $t \leq \pi a^2/q$  область жидкости будет иметь форму двух одинаковых

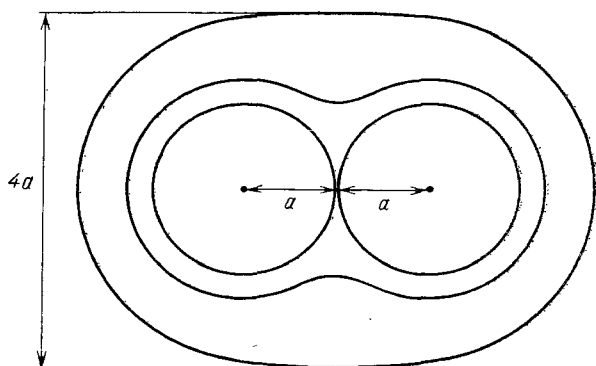


Рис. 22

кругов, имеющих площадь  $qt$ , с центрами в точках  $a$  и  $-a$ . В момент  $t_0 = \pi a^2/q$  круги сольются в одну связную область (рис. 22). Рассмотрим дальнейшую эволюцию этой области  $D(t)$ . Функция моментов области  $D(t)$ , очевидно, равна

$$h_{D(t)}(w) = \frac{qt}{\pi} \left( \frac{1}{w+a} + \frac{1}{w-a} \right).$$

Следовательно, функция  $f$  имеет два простых полюса и может быть найдена в виде (в силу центральной симметрии):

$$f_t(\zeta) = \frac{A_t \zeta}{1 - \alpha_t \zeta} + \frac{A_t \zeta}{1 + \alpha_t \zeta} = \frac{2A_t \zeta}{1 - \alpha_t^2 \zeta^2}, \quad A_t > 0, \quad \alpha_t > 0.$$

Коэффициенты  $A_t$  и  $\alpha_t$  находятся из уравнений (3.5), (3.6):

$$\frac{2A_t \alpha_t}{1 - \alpha_t^4} = a, \quad 2A_t^2 \frac{1 + \alpha_t^4}{(1 - \alpha_t^4)^2} = \frac{qt}{\pi},$$

откуда

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{qt}{\pi a^2} - \sqrt{\left(\frac{qt}{\pi a^2}\right)^2 - 1}}, \quad A_t = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 - \alpha_t^4}{\alpha_t}.$$

Замечание 1. Рассмотренная задача эквивалентна задаче о работе источника в полуплоскости с непроницаемой границей.

Замечание 2. Первый момент времени, в который область жидкости является выпуклой, равен  $3\pi a^2/q$ ; в этот момент ширина области вдвое больше расстояния между источниками (рис. 22).

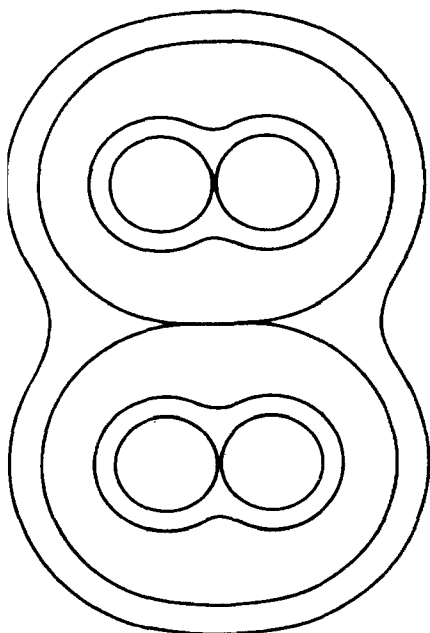


Рис. 23

Пример 2. (Ричардсон.) Рассмотрим задачу о закачке жидкости с одинаковой интенсивностью  $q$  через четыре источника, расположенных в вершинах прямоугольника. Пусть координаты источников равны  $(\pm a, \pm b)$ ,  $a \geq b$  (рис. 23, 24). Согласно замечанию 2 из предыдущего примера, если  $a \geq 2b$ , то сначала будет четыре пятна жидкости, имеющих форму круга, затем они попарно сольются в момент  $t_0 = \pi b^2/q$ , образуя две области, эволюция которых изучена в пре-

дыдущем примере, а затем эти две области сольются в момент  $t_1 \geq 3\pi a^2/q$  в начале координат, образуя односвязную область жидкости. Изучим ее динамику. Функция моментов равна

$$h_{D(t)}(w) = \frac{qt}{\pi} \left( \frac{1}{w-a-ib} + \frac{1}{w+a+ib} + \frac{1}{w+a-ib} + \frac{1}{w-a+ib} \right).$$

Следовательно,  $f_t$  имеет 4 простых полюса, и в силу симметрии

$$f_t(\xi) = \frac{A_t \xi}{1 - (\alpha_t + i\beta_t)\xi} + \frac{A_t \xi}{1 - (\alpha_t - i\beta_t)\xi} + \frac{A_t \xi}{1 + (\alpha_t + i\beta_t)\xi} + \frac{A_t \xi}{1 + (\alpha_t - i\beta_t)\xi},$$

где  $A_t$ ,  $\alpha_t$ ,  $\beta_t$  находятся из уравнений

$$f_t(\alpha_t + i\beta_t) = a + ib, \quad \frac{qt}{\pi} = A_t f'(\alpha_t + i\beta_t).$$

Если  $a < 2b$ , то второе слияние происходит раньше момента  $3\pi a^2/q$ . Момент слияния  $t_1$  легко найти из формул примера 1. Слияние происходит сразу в двух точках, в результате чего получается двухсвязная область (рис. 24). Ее функция моментов та же, что и в случае слияния в односвязную область. Рассмотрим случай  $a = b$ . Тогда функция моментов равна (5.10) при  $N=4$ , и решение совпадает с динамикой области из примера п. 5.7 до момента  $t_2$  стягивания внутренней границы. После этого момента область  $D(t)$  связна и односвязна, и конформное отображение круга в нее вычисляется по приведенным выше формулам. Момент  $t_2$  вычисляется из уравнений (5.6) — (5.9), в которых  $\lambda$  устремляется к бесконечности (поскольку моменту стягивания соответствует  $\lambda = \infty$ ).

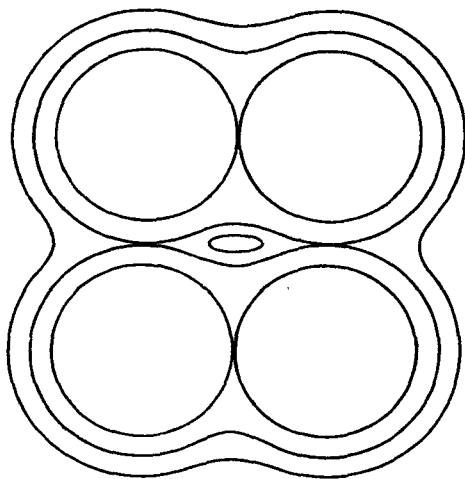


Рис. 24

**Замечание.** Рассмотренная задача эквивалентна задаче о работе источника в прямом угле с непроницаемыми стенками.

**6.3. Обобщенные решения задачи о стягивании.** В задаче о стягивании, рассмотренной в § 4, изучим динамику областей газа, не остающихся связными при стягивании (см. п. 4.2), т. е. таких, у которых два участка границы сталкиваются (рис. 25). Определим динамику области после момента столкновения, вплоть

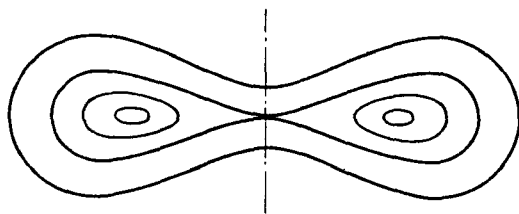


Рис. 25

до момента  $t^*$  откачки всего газа, введя понятие обобщенного решения аналогично п. 6.1.

Семейство ограниченных областей  $D(t)$ ,  $0 \leq t < t^*$ , состоящих из конечного числа односвязных компонент, назовем *обобщенным решением* задачи о стягивании, если оно обладает тремя свойствами:

- 1) вложенности:  $D(t_1) \supset D(t_2)$  при  $t_1 < t_2$ ;
- 2) линейно меняющейся площади: площадь области  $D(t)$  равна  $S - qt$ , где  $S$  — площадь области  $D(0)$ ,  $q$  — интенсивность источника в бесконечно удаленной точке;
- 3) конечности числа перестроек: существуют моменты  $\tau_1, \dots, \tau_k$  такие, что на интервалах времени  $[0, \tau_1)$ ,  $(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\dots$ ,  $(\tau_{k-1}, \tau_k)$ ,  $(\tau_k, t^*)$  граница области  $D(t)$  состоит из конечного числа гладких кривых, и семейство  $D(t)$  служит классическим решением задачи о стягивании (см. п. 4.1, замечание).

Обобщенное решение  $D(t)$ , соответствующее данной начальной области  $D(0)$ , существует и единственно, если область  $D(0)$  алгебраическая.

*Точкой полного стягивания области  $D(0)$*  назовем всякую точку, принадлежащую области  $D(t)$  для всех  $t \in [0, t^*)$ , где  $t^*$  — момент стягивания. Точек полного стягивания может быть несколько.

**Замечание.** В результате столкновения участков границы область газа распадается на односвязные области. Часть этих областей стягивается в момент откачки всего газа — в точки полного стягивания. Остальные области исчезают раньше этого момента, в других точках.

**Основная теорема.** Пусть  $D(t)$  — обобщенное решение задачи о стягивании. Тогда

- 1) Гравитационный потенциал  $\Pi_{D(t)}$  области газа внутри нее, задаваемый формулой (2.3), меняется на константу при стягивании:  $\Pi_{D(0)} - \Pi_{D(t)} = \text{const}(t)$  в  $D(t)$ .
- 2) Множество точек полного стягивания конечно.
- 3) Наименьшее значение потенциала  $\Pi_{D(0)}$  достигается в точках полного стягивания и только в них.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.4.

**Замечание.** Наличие нескольких точек полного стягивания является достаточным условием того, что область распадется в процессе стягивания. Это условие эффективно проверяется, поскольку точки полного стягивания — глобальные минимумы потенциала. Для симметричных областей наличие нескольких точек полного стягивания — явление общего положения.

Обобщенное решение задачи о стягивании под действием источников определяется аналогично. В этом случае точки стягивания — глобальные минимумы «эффективного» потенциала, получаемого из гравитационного потенциала начальной области по формуле (4.16).

**6.4. Достаточное условие распада симметричной области.** Пусть граница начальной области газа  $D$  задается уравнением  $y^2 = f(x)$ , где  $f(x)$  — четная функция (рис. 26).

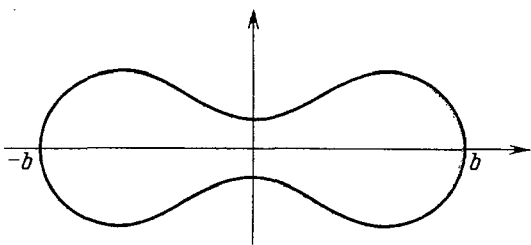


Рис. 26

**Теорема.** Если

$$\int_0^b \frac{xf'(x) + 2f(x)}{\sqrt{f(x)}(x^2 + f(x))} dx > \frac{\pi}{2},$$

где  $b$  — наименьший положительный корень уравнения  $f(x) = 0$ , то область распадется на части в процессе стягивания.

**Доказательство.** Вследствие симметрии, если область не распадется, то она стягивается в начало координат. В этом случае по основной теореме начало координат является точкой наименьшего значения потенциала. Следовательно, вторая производная  $\frac{\partial^2 \Pi_D}{\partial x^2}(0, 0)$  должна быть неотрицательной. Вычисление показывает, что

$$\frac{\partial^2 \Pi_D}{\partial x^2}(0, 0) = 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^b \frac{xf'(x) + 2f(x)}{\sqrt{f(x)}(x^2 + f(x))} dx,$$

что доказывает теорему.

**Пример.** Пусть начальная область газа — эллипс с полуосями  $a$ ,  $b$ , и два источника одинаковой

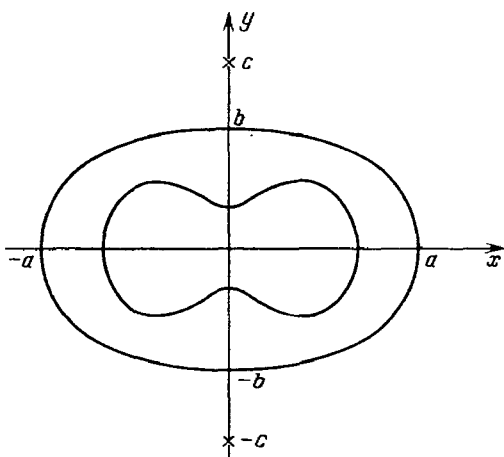


Рис. 27

интенсивности расположены в симметричных точках продолжения малой полуоси на расстоянии  $c$  от центра (рис. 27). Эффективный потенциал в этом случае равен

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{a+b} x^2 + \frac{b}{a+b} y^2 \right) - \frac{ab}{4} (\ln \sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \ln \sqrt{x^2 + (y-c)^2}).$$

Для того чтобы выяснить, распадется ли область при стягивании, следует рассмотреть величину  $\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial x^2}(0, 0)$  и сравнить ее с нулем. Условие распада получается в виде  $b(a+b) > 2c^2$ . Например, если  $b = a/2$ , то распад происходит при  $c < \sqrt{\frac{3}{2}} b \approx 1,22b$ .

**Задачи.** 1. В кольцообразную залежь  $R_1 \leq |z| \leq R_2$  закачивается жидкость через источник мощности  $q$ , расположенный внутри залежи. Покажите, что при достаточно большом  $t$  область  $D(t)$  совпадает (с точностью до сдвига) с областью  $D(t - \pi R_1^2/q)$  из примера 1 п. 3.7. (Полное решение задачи о закачке в кольцо неизвестно.)

2. Напишите уравнение границы области из примера 1 п. 6.2.

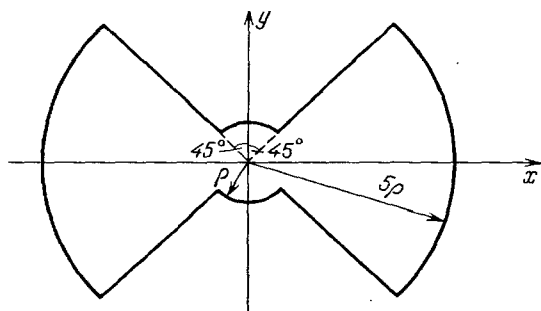


Рис. 28

3. Приведите пример алгебраической области с  $g$  дырами степени не выше  $\left[\frac{g+1}{2}\right] + 2$  ( $[a]$  обозначает целую часть  $a$ ).

4. Найдите точки полного стягивания области в примере 6.4.

5. Распадется ли при стягивании область, изображенная на рис. 28?

## § 7. СЯГИВАНИЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

**7.1. Физическая мотивировка.** Задача об эволюции области на поверхности возникает при исследовании процесса заполнения тонкостенной литейной формы — щели постоянной толщины — расплавом металла или полимерного материала [7]. Пусть форма имеет вид поверхности  $\Sigma$  в трехмерном пространстве. Для простоты предположим, что  $\Sigma$  — замкнутая поверхность (рис. 29). Пусть форма заполняется путем закачки жидкости через источники в точках  $A_1, \dots, A_n$  производительности  $q_1, \dots, q_n$ . Поскольку в начале закачки щель заполнена воздухом, то воздух должен отводиться через другое отверстие. Очевидно, что оптимальное положение этого отверстия находится в точке стягивания границы расплав — воздух в момент заполнения всей формы.

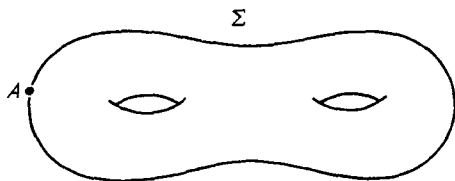


Рис. 29

**7.2. Потенциал и точки стягивания.** Математическая формулировка задачи аналогична ее формулировке для плоского случая: в момент  $t$  жидкость (расплав) занимает область  $D(t)$ , воздух — область  $\Sigma \setminus D(t)$ ; внутри  $D(t)$  задан потенциал скоростей  $\Phi(P, t)$ , удовлетворяющий условиям  $\Delta\Phi = 0$  в  $D(t) \setminus \{A_1, \dots, A_n\}$ ,

$\Phi(P, t) \sim \frac{q_j}{2\pi} \ln \rho(P, A_j)$ , где  $q_j$  — мощности,  $A_j$  — точки

расположения источников,  $\rho(P, Q)$  — расстояние между точками  $P$  и  $Q$  по геодезической,  $\Delta$  — оператор Лапласа на поверхности, действующий по формуле  $\Delta\phi(P) =$

$= \lim_{\sigma(\Gamma) \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma} \frac{\partial\phi}{\partial n} dl / \sigma(\Gamma) \right]$ , где  $\Gamma$  — малый контур, окружа-

ющий точку  $P$ ,  $\sigma(\Gamma)$  — ограничиваемая им площадь,  $\phi$  — гладкая функция на поверхности. Скорость движения границы равна  $\text{grad } \Phi$ .

Решения задачи о закачке в поверхности обладают свойством вложенности:  $D(t_1) \subset D(t_2)$  при  $t_1 < t_2$ . Обобщенные решения этой задачи на отрезке  $[0, t^*)$ , где  $t^* = S_a / (\sum q_j)$ ,  $S_a$  — площадь области воздуха, определяются аналогично п. 6.1.

**Теорема.** Пусть  $u(P)$  — гладкая функция на поверхности в окрестности области  $D(t)$  такая, что  $\Delta u(P) = 0$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{D(t)} u(P) d\sigma = \sum_{j=1}^n q_j \cdot u(A_j), \quad (7.1)$$

где  $d\sigma$  — элемент площади на поверхности.

Теорема доказывается аналогично теореме Ричардсона.

**Замечание.** Для поверхностей вращения удается выделить класс точных решений задачи о закачке, аналогичных алгебраическим решениям § 3.

Рассмотрим физически наиболее интересный случай закачки в «пустую» поверхность: начальная область жидкости  $D(0)$  — пустое множество. Определим потенциал для задачи о закачке в поверхность  $\Sigma$  как решение краевой задачи для уравнения Пуассона:

$$\Delta\Pi = 1 \text{ в } \Sigma \setminus \{A_1, \dots, A_n\},$$

$$\Pi(P) \sim -\frac{q_j}{q_1 + \dots + q_n} \cdot \frac{S}{2\pi} \ln \rho(P, A_j), \quad P \rightarrow A_j, \quad (7.2)$$

где  $S$  — площадь поверхности.



Точкой полного стягивания границы назовем всякую точку, принадлежащую области воздуха во все моменты времени  $t$ :  $0 \leq t < S/(\sum q_j)$ .

Теорема. 1) Потенциал внутри области воздуха меняется на константу при стягивании.

2) Множество точек полного стягивания конечно.

3) Точки полного стягивания являются точками глобального минимума потенциала, и наоборот.

Таким образом, задача о нахождении точек полного стягивания свелась к задаче вычисления потенциала, соответствующего системе источников.

**7.3. Вычисление потенциала на поверхности.** Пусть поверхность  $\Sigma$  имеет топологию сферы; тогда по теореме Римана она конформно эквивалентна сфере, т. е. существует гладкое, взаимно однозначное отображение  $z: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ , сохраняющее углы между кривыми [19, 20]. Комплексное число  $z(P)$  назовем координатой точки  $P$ . Можно выбрать координату так, чтобы  $z(A) = \infty$ . Пусть  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  — вещественные координаты на поверхности. Если элемент площади на поверхности имеет вид  $g(x, y) dx dy$ , то оператор Лапласа в координатах  $x, y$  вычисляется по формуле

$$\Delta \varphi(x, y) = \frac{1}{g(x, y)} \left( \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \right).$$

Если единственный источник расположен в  $\infty$ , то потенциал определяется условиями

$$\Delta \Pi = g(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}; \quad \Pi \sim \frac{q}{2\pi} \ln |z|, \quad z \rightarrow \infty. \quad (7.3)$$

Если источники расположены в точках  $\infty, z_1, \dots, z_n$  и имеют мощности  $q, q_1, \dots, q_n$ , то потенциал определяется условиями:

$\Delta \hat{\Pi} = g(x, y)$  вне источников,

$$\hat{\Pi} \sim -\frac{q_j}{q + q_1 + \dots + q_n} \cdot \frac{S}{2\pi} \ln |z - z_j|, \quad z \rightarrow z_j. \quad (7.4)$$

Очевидно, что

$$\hat{\Pi} = \Pi - \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{q + q_1 + \dots + q_n} \cdot \frac{S}{2\pi} \ln |z - z_j|. \quad (7.5)$$

Пусть  $\Sigma$  — поверхность вращения, точка  $A$  лежит на оси вращения (рис. 30). Тогда комплексная

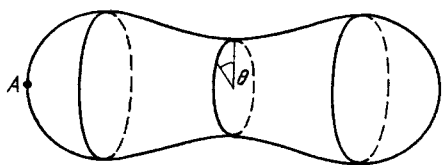


Рис. 30

но вращений, поэтому он выражается через  $\rho$ . Согласно (7.3)

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{d\Pi}{d\rho} \right) = g(\rho),$$

откуда с учетом асимптотики на бесконечности

$$\Pi(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\xi} \int_0^\xi g(\eta) \eta d\eta d\xi + C. \quad (7.6)$$

Следовательно, если функция  $\rho(P)$  задана, то потенциал системы источников вычисляется по формулам (7.5) и (7.6).

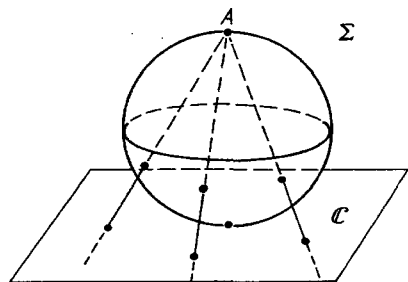


Рис. 31

Пример. Пусть  $\Sigma$  — сфера радиуса  $R$ . В качестве  $\theta$  можно взять стереографическую координату (рис. 31), тогда 
$$g(\rho) = \frac{4R^2}{(1 + \rho^2/R^2)^2},$$
 откуда после простой выкладки получаем

$$\Pi(\rho) = R^2 \ln \left( 1 + \frac{\rho^2}{R^2} \right) + C. \quad (7.7)$$

Для случая нескольких источников

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(x, y) = & R^2 \ln \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) - \\ & - R^2 \sum_j \frac{q_j}{q + q_1 + \dots + q_n} \ln \frac{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}{R^2} + C. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Если имеется два источника  $A$  и  $A_1$  с производительностями  $q$  и  $q_1$  и координата точки

$A_1$  равна  $a \in \mathbb{R}^+$ , то

$$\hat{\Pi}(x, y) = R^2 \ln \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) - R^2 \frac{q_1}{q + q_1} \ln \frac{(x - a)^2 + y^2}{R^2} + C.$$

Решение уравнения  $\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial x}(x, 0) = 0$  дает координату точки полного стягивания:

$$x = \frac{a(q + q_1) - \sqrt{a^2(q + q_1)^2 + 4qq_1R^2}}{2q}.$$

**7.4. Задача о распаде границы на симметричной поверхности вращения.** Пусть  $\Sigma$  — поверхность вращения, симметричная относительно плоскости, перпендикулярной оси вращения, т. е. получаемая вращением графика четной функции  $\varphi(x)$  вокруг оси абсцисс (рис. 32). Сечение поверхности плоскостью симметрии назовем экватором. Предположим, что закачка жидкости ведется из точки  $A$  экватора. Если поверхность — сфера или близка к сфере, то граница не распадется и стянется в точку  $B$ , противоположную  $A$  (рис. 33). Если же поверхность имеет форму вытянутого эллипсоида, то граница распадется в процессе стягивания (рис. 34). Можно различить эти две ситуации.

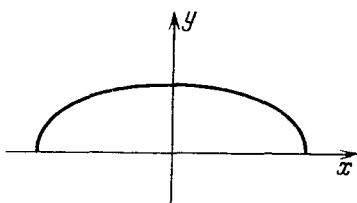


Рис. 32

**Теорема.** Если отношение площади поверхности к площади экваториального сечения больше 8, то контур распадется при стягивании.

**Доказательство.** Если бы контур не распадался, то он бы стягивался в точку  $B$ . С помощью формул

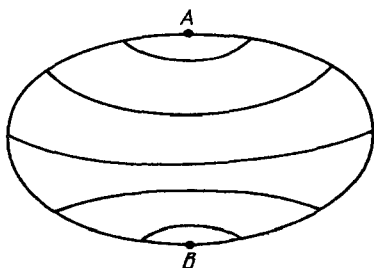


Рис. 33

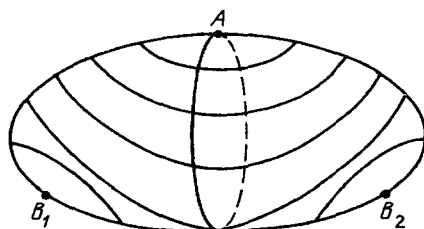


Рис. 34

п. 7.3 легко установить, что эта точка является локальным минимумом потенциала (т. е.  $d^2\hat{\Pi}(B) \geq 0$ ) тогда и только тогда, когда указанное отношение площадей не превышает восьми.

**Пример.** Для эллипсоида вращения с полуосями  $a$  и  $b$  при  $a/b > \lambda \approx 3,418$  граница распадается в процессе стягивания.

**7.5. Алгебраические решения.** Для поверхностей вращения удастся выделить класс точных решений задачи о закачке, аналогичных алгебраическим решениям § 3.

Пусть  $\Sigma$  — поверхность вращения, и пусть  $D$  — область на поверхности  $\Sigma$ . Введем функцию моментов

$$h_D(w) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{g(\rho) dx dy}{w - z}, \quad (7.9)$$

где  $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$  — комплексная координата на поверхности, определенная в п. 7.3. Эта функция голоморфна вне  $D$  и обращается в ноль на бесконечности. Согласно (7.1) функция моментов меняется при эволюции по закону

$$h_{D(t)}(w) = h_{D(0)}(w) + \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\pi(w - z_j)}. \quad (7.10)$$

По аналогии с § 3 назовем область  $D$  *алгебраической*, если функция  $h_D$  рациональна. Очевидно, что при эволюции алгебраические области преобразуются в алгебраические.

Для построения явных решений задачи о закачке достаточно научиться восстанавливать область  $D$  по функции  $h_D$ . Сделаем это для односвязных алгебраических областей.

Введем функцию

$$I(x) = \int_0^x g(\sqrt{y}) dy. \quad (7.11)$$

Используя формулу Грина, выразим функцию моментов через  $I(x)$ :

$$h_D(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{I(z\bar{z})}{z(w - z)} dz. \quad (7.12)$$

Предположим, что поверхность  $\Sigma$  и кривая  $\partial D$  — аналитические. Тогда  $I(x)$  — аналитическая функция на  $(0, \infty)$ . Выберем конформное отображение  $f: K \rightarrow D$  единичного круга в область  $D$ , и рассмотрим функцию

$$\psi(\zeta) = \frac{I(f(\zeta)\overline{f(1/\bar{\zeta})})}{f(\zeta)} - h_D(f(\zeta)). \quad (7.13)$$

Эта функция определена на единичной окружности и может быть аналитически продолжена в ее окрестности ввиду аналитичности кривой  $\partial D$  и функции  $I(x)$ .

*Лемма. Функция  $\psi$  аналитически продолжается без особенностей внутрь единичного круга.*

Доказательство леммы вытекает из формулы Сохоцкого — Племелья и аналогично доказательству п.1 теоремы 3.4.

*Замечание.* Если  $\Sigma$  — плоскость, то  $I(x) = x$ , и лемма эквивалентна п.1 теоремы 3.4.

Введем функции  $\tilde{h}_D(z) = zh_D(z)$  и  $\Theta(\zeta) = I(f(\zeta)\overline{f(1/\bar{\zeta})})$ .

*Следствие (из леммы). Разность  $\Theta(\zeta) - \tilde{h}_D(f(\zeta))$  голоморфна в единичном круге.*

*Теорема. Область  $D$  — алгебраическая тогда и только тогда, когда функция  $\Theta(\zeta)$  рациональна. При этом  $\deg \Theta = 2 \deg h_D$ .*

*Доказательство.* Если  $\Theta$  — рациональная функция, то она мероморфна в  $K$ . Следовательно, согласно лемме, функция  $\tilde{h}_D(f(\zeta))$  мероморфна в  $K$ , откуда вытекает, что функция  $\tilde{h}_D(z)$  мероморфна в области  $D$ , т. е. что  $D$  — алгебраическая область.

Обратно, если область  $D$  — алгебраическая, то функции  $h_D$  и  $\tilde{h}_D$  мероморфны в  $D$ , поэтому функция  $\tilde{h}_D(f(\zeta))$  мероморфна в единичном круге. Следовательно,  $\Theta(\zeta)$  также мероморфна в единичном круге. Из определения функции  $\Theta$  очевидно, что  $\Theta(\zeta) = \Theta(1/\bar{\zeta})$ , поэтому  $\Theta(\zeta)$  мероморфна также и во внешности круга, из чего следует ее рациональность. Равенство  $\deg \Theta = 2 \deg \tilde{h}_D$  следует из того, что  $\Theta$  имеет одинаковое количество полюсов снаружи и внутри единичной окружности, а внутри  $K$  ее полюсы совпадают с полюсами функции  $\tilde{h}_D(f(\zeta))$ .

Таким образом, если область  $D$  — алгебраическая, и ее функция моментов известна, то функция  $\Theta$  известна с точностью до конечного числа параметров. Опишем метод восстановления отображения  $f$  по функции  $\Theta$ .

Поскольку функция  $I(x)$  монотонно возрастает на  $(0, \infty)$ , то она обратима в комплексной окрестности этого интервала, и для  $\zeta$ , близких к единичной окружности,

$$f(\zeta) \overline{f(1/\bar{\zeta})} = I^{-1}(\Theta(\zeta)). \quad (7.14)$$

Логарифмирование этого равенства дает

$$\ln f(\zeta) + \ln \overline{f(1/\bar{\zeta})} = \ln I^{-1}(\Theta(\zeta)). \quad (7.15)$$

Воспользуемся теперь интегральной формулой Коши. Если  $0 \notin D$ , то первое слагаемое в (7.15) голоморфно внутри  $K$ , а второе слагаемое голоморфно вне  $K$ , поэтому по формуле Коши

$$\ln f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\ln I^{-1}(f(z))}{z-\zeta} dz - \ln f(0), \quad (7.16)$$

что дает

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= A \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\ln I^{-1}(f(z))}{z-\zeta} dz \right), \\ A &= \exp \left( \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\ln I^{-1}(f(z))}{z} dz \right). \end{aligned} \quad (7.17)$$

Если  $0 \in D$ , то можно считать, что  $f(0)=0$ . Тогда равенство (7.16) можно записать в виде

$$\ln(\zeta^{-1} f(\zeta)) + \ln(\zeta \cdot \overline{f(1/\bar{\zeta})}) = \ln I^{-1}(\Theta(\zeta)), \quad (7.18)$$

что после применения формулы Коши дает

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= A \zeta \exp \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\ln I^{-1}(f(z))}{z-\zeta} dz \right), \\ A &= \exp \left( \frac{1}{4\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\ln I^{-1}(f(z))}{z} dz \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Неизвестные параметры функции  $\Theta(\zeta)$  могут быть найдены из конечной системы трансцендентных уравнений, получаемых из условия, что функции  $\Theta(\zeta)/f(\zeta)$  и  $h_D(f(\zeta))$  имеют одинаковые полюсы в единичном круге и одинаковые главные части в этих полюсах.

Таким образом, формулы (7.17) и (7.19) дают явное решение задачи об эволюции на поверхности вращения.

Пример. Пусть  $\Sigma$  — сфера радиуса  $R$ . Тогда  $I(x) = \frac{4R^4 x}{R^2 + x}$ . Предположим, что закачка ведется из двух источников одинаковой мощности  $q$ , и пусть начальная область жидкости — пустое множество. Тогда область  $D(t)$  при малых  $t$  представляет собой объединение двух сферических сегментов. В некоторый момент времени  $t_0$  границы двух сегментов сталкиваются, и при  $t > t_0$  область  $D(t)$  связна аналогично примеру 1 в п. 6.2. Найдем форму ее границы.

Выберем комплексную координату  $z$  так, чтобы источники имели координаты  $a$  и  $-a$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ . Тогда функция моментов области  $D(t)$  равна

$$h_{D(t)}(w) = \frac{qt}{\pi} \left( \frac{1}{w+a} + \frac{1}{w-a} \right). \quad (7.20)$$

Пусть  $f_t: K \rightarrow D(t)$  — конформное отображение, такое что  $f_t(0) = 0$ ,  $\left. \frac{df_t}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} > 0$ . Тогда функция  $\Theta_t(\zeta) = I(f_t(\zeta) \overline{f_t(1/\bar{\zeta})})$  является рациональной функцией четвертой степени. Она имеет два полюса внутри единичной окружности и два полюса снаружи. Ввиду симметрии координаты этих полюсов равны  $\alpha_t$ ,  $-\alpha_t$ ,  $1/\alpha_t$ ,  $-1/\alpha_t$ , где  $0 < \alpha < 1$ , и функция  $\Theta_t(\zeta)$  имеет вид

$$\Theta_t(\zeta) = \frac{A_t \zeta^2}{(\zeta^2 - \alpha_t^2)(\zeta^2 - \alpha_t^{-2})}. \quad (7.21)$$

Следовательно,

$$f(\zeta) \overline{f(1/\bar{\zeta})} = I^{-1}(\Theta_t(\zeta)) = \frac{A_t \zeta^2}{4(\zeta^2 - \beta_t^2)(\zeta^2 - \beta_t^{-2})}, \quad (7.22)$$

где  $\beta_t > 1$  и удовлетворяет условию  $\beta_t^2 + \beta_t^{-2} = \alpha_t^2 + \alpha_t^{-2} + A_t/(4R^2)$ . Из формулы (7.22) следует, что функция  $f_t(\zeta)$  — рациональная функция второй степени с полюсами в точках  $\beta_t$  и  $-\beta_t$ , что определяет вид этой функции однозначно:

$$f_t(\zeta) = \frac{B_t \zeta}{\zeta^2 - \beta_t^2}. \quad (7.23)$$

Коэффициент  $B_t$  находится из условия  $f(\alpha_t) = a$ . Он равен

$$B_t = \frac{a(\beta_t^4 - 1)}{\sqrt{(1 - a^2 \beta_t^2/R^2)(\beta_t^2 - a^2/R^2)}}. \quad (7.24)$$

Наконец, зависимость  $\beta_t$  от  $t$  можно найти из условия, что площадь области  $D(t)$  равна  $qt$ . Это условие дает довольно громоздкое трансцендентное уравнение, которое лучше всего решать численно.

**Задачи.** 1. Поверхность составлена из двух полусфер и цилиндра, длина образующей которого больше диаметра основания (рис. 35). Распадется ли область



Рис. 35

воздуха при заполнении поверхности через точку на экваторе?

2. В моменты, близкие к моменту стягивания, граница области воздуха по форме близка к эллипсу (ср. с п. 4.10). Найдите отношение полуосей асимптотического эллипса для задачи о заполнении сферы через два источника одинаковой интенсивности (пример 7.3,  $q = q_1$ ).



## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ЗАДАЧАМ

### § 2.

1. Ответ:  $z(t) = \frac{Sz_0 - aqt}{S - qt}$ , где  $a$  — координата стока,  $q$  — его производительность,  $t$  — время,  $S$  — площадь круга,  $z_0$  — координата центра круга.

2. Координаты центра тяжести области выражаются через ее моменты. Центр тяжести выпуклой области лежит внутри нее. Следовательно, рассматриваемые области имеют общую точку (центр тяжести), относительно которой они звездны, поэтому по теореме П. С. Новикова они совпадают.

3. Возьмем области  $D_1, D_2, D_3$ , расположенные, как показано на рис. 36, и содержащие общую точку  $Q$ . Закачаем в эти области некоторое (одинаковое) количество жидкости в этой точке. Получим области  $D'_1, D'_2, D'_3$ . Рассмотрим кольцевые области  $D'_1 \setminus D_1, D'_2 \setminus D_2, D'_3 \setminus D_3$ . Они имеют одинаковые моменты. Пересечение этих областей — шестиугольник  $\Delta$ . Выбросив его из кольцевых областей, получим три односвязные области с одинаковыми моментами. Аналогично строятся  $N$  областей с одинаковыми моментами и даже бесконечное количество таких областей.

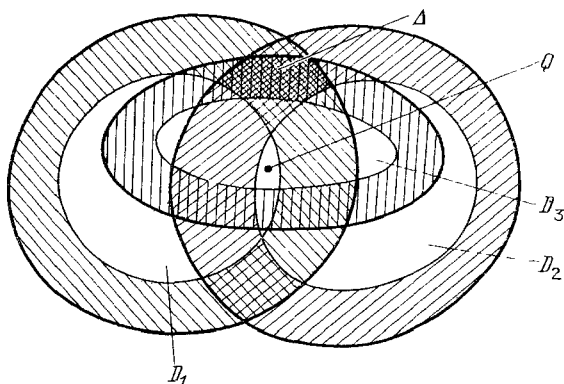


Рис. 36

### § 3

1. Граница  $\partial D$  получается из кривой второго порядка (окружности) при рациональном отображении степени  $\deg D$ , поэтому степень кривой  $\partial D$  равна  $2 \deg D$ .

2. а) Граница алгебраической области — рациональная алгебраическая кривая, так как она является образом окружности при рациональном отображении. Известно, что кривая  $x^4 + y^4 = 1$  — не рациональна.

б) Функция моментов эллипса равна  $c(\sqrt{z^2 - \varepsilon^2} - z)$  и не является рациональной, поэтому эллипс — не алгебраическая область.

3. Ответ: униформизирующее отображение области  $D(t)$  равно  $f_t(\zeta) = a_t \zeta + b_t \zeta^2$  (рис. 37), где  $a_t, b_t$  выражаются через  $a_0, b_0$  из уравнений

$$a_t^2 + 2b_t^2 = a_0^2 + 2b_0^2 - \frac{qt}{\pi}, \quad a_t^2 b_t = a_0^2 b_0.$$

Момент образования острия равен

$$t^* = \frac{\pi}{q} \left[ \frac{3}{2} (2a_0^2 b_0)^{2/3} - a_0^2 - 2b_0^2 \right].$$

Доля откачанной к моменту  $t^*$  нефти равна  $\eta = qt^* / [\pi(a_0^2 + 2b_0^2)]$ . Значение  $\eta = 1/2$  принимается при  $b_0/a_0 \approx 0,1$ .

4. Ответ: униформизирующее отображение области  $D(t)$  равно

$$f_t(\zeta) = \frac{\zeta}{1-\zeta} \left( \frac{4}{3}b + \frac{2}{3}\sqrt{b^2 - \frac{3qt}{\pi}} \right) - \zeta \left( \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}\sqrt{b^2 - \frac{3qt}{\pi}} \right).$$

Моменту прорыва соответствует бесконечная скорость  $\frac{df}{dt}(-1)$ , что получается при нулевом значении подкоренного выражения, т. е. при  $t = \pi b^2 / (3q)$ .

5. Ответ: униформизирующее отображение области  $D(t)$  имеет вид

$$f_t(\zeta) = a \left( \frac{1}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right) + a\zeta \sqrt{\frac{1}{\pi^2} - \frac{qt}{\pi a^2}}.$$

Время прорыва  $t^*$  равно  $a^2 / (\pi q)$ . Объем жидкости, откачанной до прорыва, примерно в 2,5 раза меньше, чем в случае откачки из круга диаметра  $a/2$  (рис. 8).

6. Пусть стоки расположены в точках  $ae^{2\pi i k/N}$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$ , радиус круга  $R > a$ , его центр рас-

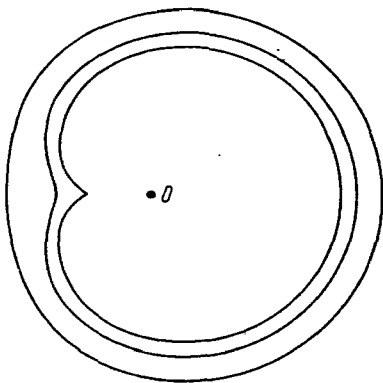


Рис. 37

положен в начале координат, мощность стоков  $q$ . Униформизирующее отображение в момент  $t$  равно

$$f_t(\zeta) = \frac{n\beta_t\zeta}{1 - \alpha_t^N \zeta^N} + \gamma_t \zeta,$$

где

$$\beta_t = \frac{-\frac{\alpha_t}{a} \left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right) + \frac{a}{\alpha_t}}{N+1 + (N-1)\alpha_t^{2N}} (1 - \alpha_t^{2N}),$$

$$\gamma_t = \frac{(1 + (N-1)\alpha_t^{2N}) \frac{a}{\alpha_t} + N \frac{\alpha_t}{a} \left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)}{N+1 + (N-1)\alpha_t^{2N}},$$

$\alpha_t$  находится из уравнения

$$R^2(N+1 + (N-1)\alpha_t^{2N})^2 = \frac{a^2}{\alpha_t^2} (N+1 - \alpha_t^{2N})(1 + (N-1)\alpha_t^{2N}) +$$

$$+ N \frac{\alpha_t^{2N+2}}{a^2} \left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right)^2 + N \left( R^2 - \frac{qt}{\pi} \right) ((N-1)\alpha_t^{4N} + N+1).$$

В приведенные формулы вместо  $N$  можно подставить любое положительное число, большее 1. Тогда получится решение задачи об откачке жидкости через источник из сектора величины  $2\pi/N$  (рис. 38).

7. Ответ: область из примера 1 п. 3.7.

Моменты искомой области не зависят от радиуса окружности, по которой движется источник, а зависят только от положения ее центра, периода обращения и мощности источника. Это следует из теоремы о среднем для гармонических функций. Следовательно, результат закачки не зависит от радиуса этой окружности. В случае нулевого радиуса (т. е. неподвижного источника) полученная область рассмотрена в примере 1 п. 3.7.

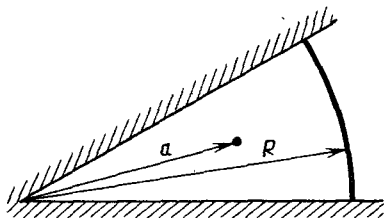


Рис. 38

## § 4

1. Поскольку  $\bigcup_{t>0} D(t)$  — вся плоскость, то  $\bigcap_{t>0} \overline{D(t)} = \emptyset$ . Следовательно, для  $k \geq 3$

$$\int_{D(t)} z^{-k} dx dy \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

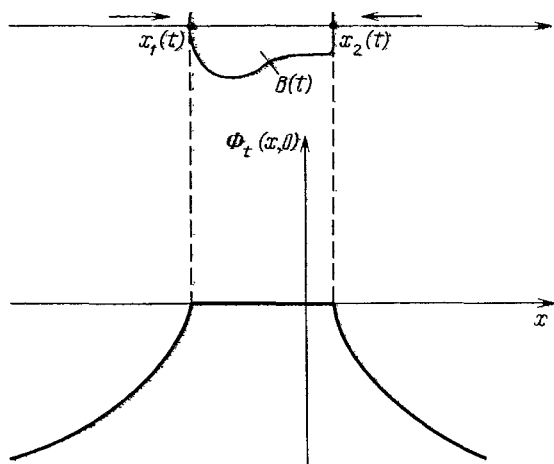


Рис. 39

В силу (4.4) этот интеграл не зависит от  $t$ , откуда

$$\int_{D(0)} z^{-k} dx dy = 0, \quad k \geq 3.$$

Согласно теореме Сакаи (см. п. 4.9), область  $D(0)$  — эллипс.

2. Пусть  $x_0$  — абсцисса точки стягивания. Тогда для любого  $t$   $\Phi_t(x_1, 0) \geq \Phi_t(x_2, 0)$ , если  $x_0 > x_1 > x_2$  или  $x_0 < x_1 < x_2$  (рис. 39), поскольку течение вдоль оси абсцисс направлено в сторону точки стягивания. Следовательно, при  $x_0 < x_1 < x_2$  или  $x_0 > x_1 > x_2$   $\int_0^{x_1} \Phi_t(x_1, 0) dt > \int_0^{x_2} \Phi_t(x_2, 0) dt$ , откуда по формуле (4.12)  $P_{D(0)}(x_1, 0) < P_{D(0)}(x_2, 0)$ . Потому единственный локальный минимум потенциала на оси абсцисс — точка стягивания.

3. Указание. Рассмотрите одновременное стягивание области и ее образов относительно границ.

Ответ: а) абсцисса точки стягивания равна  $x = \sqrt{b^2 - \rho^2}$ , где  $b$  — абсцисса центра круга,  $\rho$  — радиус круга (см. рис. 13);

б) абсцисса точки стягивания равна корню уравнения

$$\frac{x-b}{2} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\pi}{2d} \left[ \operatorname{ctg} \pi \frac{x-b}{2d} + \operatorname{ctg} \pi \frac{x+b-d}{2d} \right] - \frac{\rho^2}{2} \cdot \frac{1}{x-b},$$

заключенному между 0 и  $b$ ; здесь  $\rho$  — радиус круга,  $d$  — ширина канала,  $b$  — расстояние от центра круга до ближайшей стенки канала (см. рис. 14).

4. Ответ: отношение малой полуоси к большой равно  $a/\sqrt{a^2 + 4\rho^2}$ .

## § 5

1. Функция моментов области, ограниченной окружностями, в компонентах связности дополнения области задается различными дробно-рациональными функциями. Поэтому производная функции моментов не продолжается до рациональной функции, следовательно, область не абелева.

2. Граница  $\partial D$  алгебраической области получается при рациональном отображении  $f$  из вещественной алгебраической кривой  $\partial \Sigma^+$ , поэтому она является алгебраической кривой. Эта кривая неприводима.

3. Предположим противное. Пусть  $D$  — область степени 2,  $\Sigma$  — соответствующая риманова поверхность,  $f$  — отображение  $\Sigma^+$  на  $D$ . Отображение  $f$  определяет двулистное накрытие сферы Римана поверхностью  $\Sigma$ .

Случай 1. Поверхность имеет род  $g > 1$ . На поверхности  $\Sigma$  определен гиперэллиптический автоморфизм  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ , сопоставляющий одному прообразу точки  $z \in \mathbb{C}P^1$  при отображении  $f$  другой ее прообраз. Этот автоморфизм не зависит от  $f$ . Пусть  $a \in \mathbb{C}P^1$ ,  $a \notin D$ . Тогда оба прообраза  $\lambda, \mu \in \Sigma$  точки  $a$  лежат в  $\Sigma^-$ ; для них имеем  $\sigma(\lambda) = \mu$ ,  $\sigma(\mu) = \lambda$ ,  $f(\lambda) = f(\mu)$ . Поскольку  $\sigma$  коммутирует с антиголоморфной инволюцией  $\tau$ , то  $\sigma(\tau(\lambda)) = \tau(\mu)$ ,  $\sigma(\tau(\mu)) = \tau(\lambda)$ ,  $f(\tau(\lambda)) = f(\tau(\mu))$ . Но  $\tau(\lambda), \tau(\mu) \in \Sigma^+$ . Это противоречит взаимной однозначности отображения  $f$  на  $\Sigma^+ \cup \partial \Sigma^+$ .

Случай 2. Поверхность  $\Sigma$  имеет род 1. На  $\Sigma$  и в этом случае определен гиперэллиптический автоморфизм  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ , введенный в случае 1. Он зависит от отображения  $f$ . Если отождествить  $\Sigma$  с тором  $\mathbb{C}/\Gamma$ , где  $\Gamma$  — решетка, то автоморфизм  $\sigma$  будет действовать по формуле  $\sigma_f(\zeta) = -\zeta + a(f)$ . Этот автоморфизм сохраняет площадь, поэтому  $\sigma_f(\Sigma^+ \cup \partial \Sigma^+)$  пересекается с  $\Sigma^+ \cup \partial \Sigma^+$ . Это противоречит взаимной однозначности  $f$  на  $\Sigma^+ \cup \partial \Sigma^+$ .

4. Пусть  $D$  — алгебраическая область,

$$h_D(w) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{N_j} \frac{a_{jk}/\pi}{(w-z_j)^k} = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{dx dy}{w-z}$$

— ее функция моментов. Поскольку функции вида  $1/(w-z)$  при  $w \notin D$  порождают пространство аналитических функций в  $D$ , то для аналитической функции  $\varphi$  в области  $D$  имеем

$$\int_D \varphi(z) dx dy = \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{N_j-1} \varphi^{(k)}(z_j) \frac{(-1)^k a_{jk}}{k!}.$$

5, 6. Любая область приближается областями с аналитическими граничными кривыми. Приближение областей с аналитической границей алгебраическими областями осуществляется так. Строится соответствующая области поверхность  $\Sigma$  (п. 5.4). Вводятся мероморфные функции  $\varphi_n$  на  $\Sigma$  — аналоги функций  $z^n$ , имеющие единственный

полюс в некоторой точке  $P \in \Sigma^-$  и ноль порядка  $n$  в точке  $\tau(P) \in \Sigma^+$ . По функциям  $\varphi_n$  раскладывается в ряд всякая функция, голоморфная в  $\Sigma^+$ , подобно тому как голоморфная функция в круге раскладывается в ряд Тейлора. Этот ряд сходится равномерно в замыкании  $\Sigma^+$ , если функция аналитична вдоль  $\partial\Sigma^+$ , что имеет место для униформизирующего отображения областей с аналитической границей. Частичная сумма этого ряда для униформизирующего отображения при достаточно большом числе членов реализует отображение половины  $\Sigma^+$  на алгебраическую область, близкую к исходной (см. [21]). Функция моментов этой области — многочлен от  $1/z$ .

7. Ответ: конформное отображение полосы  $|\operatorname{Im} z| \leq c$  в область жидкости  $D(t)$  задается формулой

$$f_i(w) = A\zeta_\lambda\left(\frac{w}{a} + 2ci\right) - A\zeta_\lambda(2ci) + Bw,$$

где  $\zeta_\lambda$  — функция Вейерштрасса (п. 5.8),  $\lambda = 4c/a$ , а параметры  $A$ ,  $B$  и  $c$  находятся из уравнений

$$A\delta = (1-B)a; \quad A\delta' = 4i(b - Bc);$$

$$Aa = -\frac{qt}{\pi m} \cdot \frac{1}{B - \frac{A}{a}\zeta'_\lambda\left(\frac{i\lambda}{2}\right)};$$

$\delta, \delta'$  — монодромии  $\zeta_\lambda$  по периодам.

Указание. Задача эквивалентна задаче об эволюции двухсвязной области на цилиндре под действием закачки через источник. Для нее применима техника, аналогичная описанной в § 5.

8. При эволюции потенциал области  $D(t)$  внутри дыры меняется по закону  $\Pi_{D(t)} = \Pi_{D(0)} + C(t)$ , а его градиент неизменен. В момент стягивания  $t^*$  область  $D(t)$  односвязна, и ее функция моментов равна функции моментов области  $D(0)$ , т. е.  $\frac{R^2}{z} - \frac{\rho^2}{z-a}$ . Следовательно,  $D(t^*)$  — область П. Я. Полубариновой-Кочиной — П. П. Куфарова из примера 1 п. 3.7. Точка стягивания  $P$  находится из соотношения  $\operatorname{grad} \Pi_{D(t^*)}(P) = \operatorname{grad} \Pi_{D(0)}(P)$ .

9. Рассмотрим семейство областей  $D_\varphi$ , полученных из  $D$  вращением вокруг начала координат на угол  $\varphi$ . Они имеют одинаковые моменты, поэтому совпадают с  $D$ .

## § 6

1. При достаточно большом  $t$  область  $D(t)$  односвязна, поскольку в некоторый момент  $t$  внутренняя граница стягивается. Функция моментов области  $D(t)$  равна

$$h_{D(t)}(w) = \frac{R_2^2 - R_1^2}{w} + \frac{qt}{\pi(w - z_0)},$$

т. е. такая же, как у области  $D(t - \pi R_1^2/q)$  из примера 1 п. 3.7. Из этого примера видно, что функции моментов с двумя полюсами соответствует не более одной области, поэтому две рассматриваемые области совпадают.

2. Ответ:  $(x^2 + y^2)^2 = P^2 x^2 + Q^2 y^2$ , где

$$P = \sqrt{2\left(\frac{qt}{\pi} + a^2\right)}, \quad Q = \sqrt{2\left(\frac{qt}{\pi} - a^2\right)}.$$

3. Выберем связную систему касающихся друг друга кругов с непересекающимися внутренностями так, чтобы ее дополнение имело  $g+1$  компоненту связности (рис. 40). Количество кругов в такой системе можно сделать не больше  $\left[\frac{g+1}{2}\right] + 2$ , так как каждый новый круг можно выбирать касающимся трех предыдущих (круг Аполлония), за счет чего количество компонент дополнения увеличивается на два.

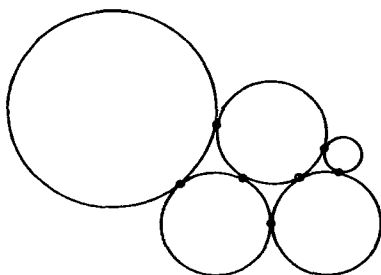


Рис. 40

Закачаем в центры кругов  $z_i$  некоторые малые количества жидкости. Получим связную область с  $g$  дырами. Ее функция моментов равна  $\sum_{i=1}^N \frac{c_i}{z - z_i}$ ,  $N \leq \left[\frac{g+1}{2}\right] + 2$ , поэтому она является алгебраической степени не выше  $\left[\frac{g+1}{2}\right] + 2$ .

4. Ответ:  $\left(\pm \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}} - c^2, 0\right)$ .

5. Ответ: да.

Указание. Для областей с кусочно гладкими границами достаточное условие распада из п. 6.4 сохраняет силу. Область, изображенная на рис. 28, распадается при отношении радиусов внешней и внутренней окружности больше, чем  $e^{\pi/2} \approx 4,81$ .

## § 7

1. Ответ: да.

Указание. Отношение площади поверхности к площади экваториального сечения больше восьми.

2. Ответ:  $\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial y^2}$  в точке стягивания  $P = (a - \sqrt{a^2 + R^2}, 0)$ .

Указание. При стягивании на поверхности, как и при стягивании на плоскости, оси асимптотического эллипса направлены вдоль собственных векторов, а длины полуосей пропорциональны собственным значениям матрицы вторых производных потенциала в точке стягивания.



## НЕКОТОРЫЕ НЕРЕШЕННЫЕ ВОПРОСЫ

Ниже приводится краткий список нерешенных задач, связанных с рассмотренными вопросами.

1. Гипотеза (П. С. Новиков). Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — односвязные ограниченные области на плоскости, такие, что их пересечение и объединение связаны. Тогда если внешние логарифмические потенциалы областей  $D_1$  и  $D_2$  равны, то эти области совпадают.

Эта гипотеза была доказана при различных дополнительных предположениях относительно областей  $D_1$  и  $D_2$ . Например, в 1979 г. В. Исаков доказал ее для областей, выпуклых вдоль фиксированной прямой [22].<sup>1)</sup>

2. Вопрос. Существуют ли две различные односвязные абелевы области с одинаковым внешним логарифмическим потенциалом (одинаковыми моментами)?

Этот вопрос был поставлен Ахароновым и Шапиро в 1976 г. [23]. К. Уллемар [24] показала, что такие области не существуют в классе конформных образов круга при полиномиальных отображениях степени  $\leq 3$ .

Замечание. Топологическая природа примера двух областей с одинаковыми моментами может навести на мысль, что подобные примеры возможны в любом разумном плотном подклассе односвязных ограниченных областей. В 1986 г. М. А. Бродский и В. Н. Страхов [25] показали, что это не так. Они доказали, что обратная задача теории потенциала имеет единственное решение в классе областей, ограниченных линиями уровня модуля комплексного многочлена. Такие области очевидно плотны в множестве областей с кусочно гладкой границей.

3. Можно сформулировать аналог задачи об эволюции в евклидовом пространстве любой размерности. Именно, зафиксируем систему источников  $z_1, \dots, z_n$  с мощностями  $q_1, \dots, q_n$  и для произвольной области  $D$ , содержащей источники, определим потенциал скоростей

$$\Phi(z, D) = \sum_{j=1}^n q_j G(z, z_j, D),$$

где  $G(z, z_j, D)$  — функция Грина области  $D$  с полюсом в  $z_j$ . Теперь определим эволюцию условием: скорость границы области  $D$  равна нормальной производной потенциала скоростей на границе. Как классические, так и обобщенные решения этой задачи определяются

<sup>1)</sup> Область  $D$  называется выпуклой вдоль прямой  $l$ , если пересечение этой области с любой прямой, параллельной к  $l$ , либо пусто, либо является открытым интервалом.

аналогично двумерному случаю. Теорема Ричардсона также имеет очевидный аналог.

Возникает естественный вопрос: можно ли построить какие-либо нетривиальные точные решения задачи об эволюции в  $N$ -мерном пространстве при  $N > 2$ ? Другими словами, существуют ли какие-либо естественные многомерные аналоги алгебраических решений на плоскости?

Ответ на этот вопрос положителен для  $N=4$ . Семейство явных решений в размерности 4 было недавно обнаружено Л. Карпом [26] и независимо вторым автором этого текста. Однако для всех остальных размерностей, в том числе для имеющего прикладное значение случая  $N=3$ , вопрос остается открытым.

4. Теоремы 6.4 и 7.4 дают достаточные условия разрыва симметричной области газа. В этой связи возникает естественный вопрос: при каких разумных предположениях эти условия также необходимы? Например, будет ли необходимым условие теоремы 7.4, если предположить, что поверхность выпукла?

5. В теории стягивания несимметричных областей нам не удалось найти эффективно проверяемого достаточного условия разрыва области во время стягивания. Следующее утверждение, если оно верно, дало бы нам такое условие.

*Гипотеза. Если гравитационный потенциал односвязной области имеет более одного локального минимума на плоскости, то эта область распадается при эволюции.*

Задача 2 к гл. 4 устанавливает верность этого утверждения для областей, симметричных относительно горизонтальной оси.

Можно показать, что достаточно доказать эту гипотезу для областей с ровно двумя локальными минимумами потенциала. Для этого было бы достаточно проверить, что пространство таких областей связно.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

|                      |                                                                           |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\Phi$               | — потенциал скоростей фильтрации                                          |
| $v$                  | — поле скоростей                                                          |
| $q, q_1, \dots, q_n$ | — мощности источников                                                     |
| $z, w, \zeta$        | — комплексные переменные (координаты)                                     |
| $x, y, \xi, \eta$    | — вещественные координаты                                                 |
| $D(t)$               | — область жидкости или газа                                               |
| $u(x, y)$            | — гармоническая функция                                                   |
| $h_D$                | — функция моментов области $D$                                            |
| $f_t$                | — конформное отображение единичного круга в области жидкости в момент $t$ |
| $K$                  | — единичный круг                                                          |
| $\Pi_D$              | — ньютоновский потенциал области $D$                                      |
| $\Sigma$             | — риманова поверхность                                                    |
| $\Sigma^+, \Sigma^-$ | — половины римановой поверхности                                          |
| $\tau$               | — антиголоморфная инволюция римановой поверхности                         |
| $s$                  | — параметр на кривой                                                      |
| $S$                  | — площадь области жидкости или газа                                       |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С. Л. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1966.— 443 с.
2. Richardson S. // J. of Fluid Mech.— 1981.— V. 102.— P. 263—278.
3. Новиков П. С. // Докл. АН СССР.— 1938.— Т. 18, № 3.— С. 165—168.
4. Sakai M. // Proc. Amer. Math. Soc.— 1978.— V. 70.— P. 35—38.
5. Этингоф П. И. // Докл. АН СССР.— 1990.— Т. 313, № 1.— С. 42—47.
6. Gustafsson B. // Acta Appl. Math.— 1989.— V. 1, N 3.
7. Richardson S. // J. of Fluid Mech.— 1972.— V. 56.— P. 609—618.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1988.— 700 с.
9. Галин Л. А. // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 47, № 4.— С. 250—253.
10. Gustafsson B. // Arkiv for Math.— 1984.— V. 22, N 2.
11. Полубаринова-Кочина П. Я. // Докл. АН СССР.— 1945.— Т. 47, № 4.— С. 254—257.
12. Куфарев П. П. // Докл. АН СССР.— 1950.— Т. 75, № 4.— С. 507—510.
13. Sakai M. // Quadrature domains. Lecture notes in mathematics, N 934.— New York: Springer, 1982.
14. Protter M. H., Weinberger H. F. // Maximum principles in differential equations.— New York: Springer, 1984.
15. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей.— М.: Мир, 1971.— 00 с.
16. Sakai M. // J. d'Analyse Math.— 1981.— V. 40.— P. 144—154.
17. Howison S. D. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh.— 1986.— V. 102.
18. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.— М.: Наука, 1968.— 648 с.
19. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных.— М.: ИЛ, 1963.— 296 с.
20. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения.— М.: Наука, 1986.— 759 с.
21. Кричевер И. М., Новиков С. П. // Функцион. анализ и его прил.— 1987.— Т. 21, вып. 2.— С. 46—63.
22. Isakov V. About the equivalence and uniqueness in the inverse potential problem of potential theory // Soviet Math. Doklady— 1979.— V. 20.— P. 387—390.
23. Aharonov D., Shapiro H. S. Domains on which analytic functions satisfy quadrature identities // J. d'Analyse Math.— 1976.— V. 30.— P. 39—73.

24. Ullemar C. A. uniqueness theorem for domains satisfying quadrature identity for analytic functions, /TRITA-MAT-1980-37, Mathematics, Royal Inst. of Technology, S-100-44, Stockholm, Sweden.
25. Strakhov V. N., Brödsky M. A. On the uniqueness of the solution of the inverse logarithmic potential problem // SIAM J. Appl. Math.—1986.—V. 46, N 2.—P. 324—344.
26. Karp L. Construction of quadrature domains in  $\mathbf{R}^n$  from quadrature domains in  $\mathbf{R}^2$  // J. of Complex Variables.—1992.—V. 17, N 3—4.—P. 179—188.