

С.-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Д. Р. ЯФАЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

*Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по направлению
«Прикладная математика и информатика»
и специальности «Прикладная математика и физика»*



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
ИЗДАТЕЛЬСТВО С.-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1994

Редактор: Т. В. Мызникова

Рецензенты: академик Л. А. Пастур (АН Украины), д-р физ.-мат. наук проф. М. Ш. Бирман (С.-Петербургский гос. ун-т)

*Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета
С.-Петербургского университета*

УДК 517.9

Яфаев Д. Р. Математическая теория рассеяния (Общая теория). Учебное пособие.—СПб., Издательство С.-Петербургского университета, 1994. 424 с. ISBN 5-288-01398-5

В пособии систематически излагается современная математическая теория рассеяния. Изложение начинается «с нуля» и доводится до уровня последних работ по математической теории рассеяния. Описываются различные методы теории рассеяния и обсуждаются их взаимоотношения. Основное внимание уделяется освещению опорных разделов теории. Заполняется ряд лаку имеющих в монографической литературе. Изложение ведется на уровне теории операторов в абстрактном гильбертовом пространстве, но ориентировано на конкретные приложения к дифференциальным операторам (типа оператора Шредингера).

Пособие рассчитано на студентов старших курсов, аспирантов и специалистов по теоретической и математической физике, дифференциальным и интегральным уравнениям, математическому анализу.

Библиогр. 143 назв.

Я $\frac{1602070100-086}{076(02)-94}$ 53-94

При подготовке издания использовались файлы английского издания книги, любезно предоставленные Американским математическим обществом.

© Издательство
С.-Петербургского
университета, 1994

ISBN 5-288-01398-5

© Д. Р. Яфаев, 1994

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	6
Основные обозначения.....	9
Введение.....	12
Глава 1. Предварительные сведения.....	22
§ 1. Теория меры.....	22
§ 2. Аналитические функции.....	28
§ 3. Абсолютно непрерывный и сингулярный спектры.....	35
§ 4. Функции самосопряженного оператора: унитарная группа и резольвента.....	41
§ 5. Разложение в прямой интеграл.....	45
§ 6. Классы компактных операторов.....	51
§ 7. След и детерминант.....	58
§ 8. Аналитическая альтернатива Фредгольма.....	63
§ 9. Резольвентное уравнение.....	68
§ 10. Условия самосопряженности.....	74
§ 11. Унитарные операторы. Теория возмущений.....	81
Глава 2. Исходные положения теории рассеяния.....	88
§ 1. Волновые операторы.....	88
§ 2. Различные модификации понятия «волновые операторы» (слабые, локальные, абелевы и т. п.).....	96
§ 3. Полнота волновых операторов.....	101
§ 4. Оператор и матрица рассеяния. Элементарный пример.....	106
§ 5. Существование волновых операторов. Признак Кука.....	109
§ 6. Принцип инвариантности Бирмана.....	111
§ 7. Стационарный подход. Формулы для волновых операторов.....	117
§ 8. Стационарные представления для оператора и матрицы рассеяния.....	122

Глава 3. Дальнейшие свойства волновых операторов.....	125
§ 1. Возмущение граничным условием	125
§ 2. J -полнота	133
§ 3. Рассеяние при мультипликативных возмущениях ..	136
§ 4. Уравнения второго порядка по времени	138
§ 5. Принцип инвариантности для абелевых волновых операторов	140
Глава 4. Рассеяние при относительно гладких возмущениях.....	145
§ 1. Модель Фридрихса–Фаддеева	146
§ 2. Рассеяние в модели Фридрихса–Фаддеева	156
§ 3. Гладкость по Като	164
§ 4. Достаточные условия гладкости	172
§ 5. Волновые операторы при гладких возмущениях....	175
§ 6. Гладкость относительно полного гамильтониана ..	182
§ 7. Абсолютно непрерывный и точечный спектры оператора H	186
Глава 5. Общая схема в стационарной теории рассеяния .	192
§ 1. Слабая гладкость	193
§ 2. Оправдание стационарного метода	197
§ 3. Связь . нестационарным подходом. Принцип инвариантности	205
§ 4. Интегральные операторы в прямых разложениях ..	212
§ 5. Матрица рассеяния	218
§ 6. Теорема разложения	222
§ 7. Рассеяние для относительно компактных возмущений	226
§ 8. Локальный вариант стационарной схемы	229
Глава 6. Рассеяние при возмущениях ядерного типа	232
§ 1. Слабая гладкость операторов Гильберта–Шмидта	233
§ 2. Теорема Като–Розенблюма. «Отрицательные» результаты	239
§ 3. Нестационарные доказательства	243
§ 4. Локальные признаки существования волновых операторов	253
§ 5. Дальнейшие обобщения	261
§ 6. Возмущение интегральным оператором типа Фурье (Пример)	267
§ 7. Одномерное возмущение	271
§ 8. Двойные операторные интегралы Стилтеса	279
Глава 7. Свойства матрицы рассеяния	284
§ 1. Теорема умножения для операторов и матриц рассеяния	284
§ 2. Принцип инвариантности для матрицы рассеяния. Матрица рассеяния в унитарном случае	288
§ 3. Стационарные представления для волновых операторов и оператора рассеяния	292

§ 4. Матрица рассеяния при гладких возмущениях	296
§ 5. Ядерные интегральные операторы	299
§ 6. Матрица рассеяния при ядерных возмущениях	305
§ 7. Структура стационарного представления матрицы рассеяния	310
§ 8. Спектр матрицы рассеяния для знакоопределенных возмущений	316
§ 9. Сечение рассеяния. Оценки сверху	322
Глава 8. Функция спектрального сдвига и формула следа	328
§ 1. Определитель возмущения	329
§ 2. Функция спектрального сдвига в самосопряженном случае. Ядерное возмущение	336
§ 3. Формула следа М.Г. Крейна	342
§ 4. Связь с матрицей рассеяния. Формула Бирмана- Крейна	349
§ 5. Функция спектрального сдвига в унитарном случае	352
§ 6. Непрерывность функции спектрального сдвига по операторному параметру. Многозначность	362
§ 7. Функция спектрального сдвига в самосопряженном случае. Резольвентно сравнимые операторы	367
§ 8. Функция спектрального сдвига в самосопряженном случае. Уточнение результатов	375
§ 9. Функция спектрального сдвига для полуограничен- ных операторов	378
§ 10. Функция спектрального сдвига при знакоопреде- ленных возмущениях	382
§ 11. Дальнейшие сведения о функции спектрального сдвига	391
Литературные указания	400
Терминологический указатель	410
Указатель литературы	415

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время в математической теории рассеяния сложилось большое число направлений и методов (ядерная и гладкая теории, стационарный и нестационарный подходы и т.п.), на первый взгляд мало связанных между собой. Различные варианты теории находятся в достаточно сложных взаимоотношениях уже на абстрактном уровне. Их взаимоотношения еще более усложняются в приложениях к теории дифференциальных операторов. В связи с этим возник замысел книги—дать систематическое и одновременно ориентированное на конкретные приложения изложение методов абстрактной теории рассеяния. Применения этих методов к теории дифференциальных операторов, в первую очередь к оператору Шредингера, предполагается осветить во втором томе. Основное внимание в книге уделяется изложению опорных разделов теории рассеяния. При отборе материала автор ориентировался на результаты, которые теперь считаются классическими.

При написании книги автор ставил перед собой задачу привести изложение различных идей и методов теории рассеяния в определенную систему. Эта цель достигается благодаря последовательному применению стационарного подхода. В его рамках удастся до некоторой степени объединить два основных метода теории рассеяния—ядерных и гладких возмущений. Одновременно с доказательствами различных фактов стационарный подход позволяет дать формульные представления для основных объектов теории. Наряду с волновыми операторами

подробно исследуются свойства матрицы рассеяния, функции спектрального сдвига и другие объекты теории.

Отбирая материал, конечно, автор учитывал уже имеющиеся тексты. Поэтому в книгу не вошли некоторые важные, но хорошо описанные в литературе разделы. В особенности это относится к методам, специально приспособленным для изучения дифференциальных операторов (отметим теорию Лакса—Филлипса и метод Энсса, подробно изложенные в монографиях [12, 34] соответственно). Представляется, что предлагаемая книга существенно отличается от имеющихся текстов по теории рассеяния. В связи с этим упомянем прежде всего третий том широко известного курса М.Рида и Б.Саймона [18]. Тома этого курса стали для многих, во всяком случае для автора настоящей книги, настольными. Вместе с тем, ввиду широты охвата материала, курс [18] по необходимости написан в стиле хрестоматии и, по-видимому, не может заменить последовательного изложения теории. От другой известной монографии по теории рассеяния—см. [30]—настоящая книга отличается большей направленностью на приложения и отбором конкретного материала. Последнее обстоятельство отличает ее и от книг [28, 29]. Кроме того, по сравнению с [28, 29] данное изложение носит более «продвинутый» характер. Укажем еще монографии [3, 27, 32], в которых излагаются разделы теории рассеяния для дифференциальных операторов. Автор не пытался подменить физическое изложение теории рассеяния, которое можно найти, например, в книгах [13, 16]. Особо отметим учебник [23], в котором изложение квантовой теории рассеяния рассчитано на математиков.

При работе над книгой автор стремился к решению двух противоположных задач. Первая—последовательное изложение материала, начиная «с нуля». Вторая—изложение ряда вопросов со степенью полноты, могущей представить интерес для специалистов в области спектральной теории. Автор старался также заполнить некоторые лакуны, имеющиеся в монографической литературе. В особенности это относится к изложению работ советских, в частности ленинградских, математиков. В качестве такого примера отметим довольно подробное описание спектральных свойств матрицы рассеяния, изложение теории М.Г. Крейна функции спектрального сдвига.

В целом книга ориентирована на читателя (например, студента старших курсов или аспиранта по математической фи-

зике), заинтересованного в углубленном изучении теории рассеяния. Книгу можно рассматривать как существенно расширенное изложение курса по теории рассеяния, читавшегося автором в С.-Петербургском университете. Изложение строится в предположении, что читатель знаком с теорией самосопряженных операторов в объеме учебника М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка [4]. Возможно и использование учебника Н.И. Ахиезера и И.М. Глазмана [1], где имеются также элементарные сведения о теории рассеяния.

При ссылках в книге применяется «трехступенчатая» нумерация формул и теорем и «двухступенчатая» нумерация параграфов. В пределах главы опускается первый номер, а в пределах параграфа—также и второй.

Замысел и построение всей книги сформировались под воздействием Учителя автора—М.Ш. Бирмана. С ним подробно обсуждалось и изложение многих конкретных вопросов. На математическое развитие и вкусы автора большое влияние оказал также Л.Д. Фаддеев. В книге это особенно заметно при изложении теории гладких возмущений. Автор приносит М.Ш.Бирману и Л.Д.Фаддееву глубокую благодарность.

Основные обозначения

В книге рассматривается пара самосопряженных операторов H_0 и H , действующих в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ соответственно. Через J обозначается фиксированный оператор (отождествление), действующий из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}$. Возмущение $V = HJ - JH_0$ часто факторизуется в произведение $V = G^*G_0$, где $G_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{G}$, $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ —вспомогательное гильбертово пространство, а G^* —оператор, сопряженный к G .

Обозначения различных объектов, относящихся к H_0 , как правило, снабжаются нулевым индексом, а объектов, относящихся к абсолютно непрерывной части оператора,—верхним индексом «а». В унитарном случае сохраняются многие обозначения и определения самосопряженной теории. В обозначениях различных функциональных пространств в скобках обычно указывается множество, на котором определены рассматриваемые функции. В случае вектор-функции дополнительно указывается пространство, в котором функции принимают свои значения. Через C и c обозначаются различные оценочные постоянные, точное значение которых безразлично. Мы применяем следующие сокращения:

БН—борелевский носитель; ВО—волновой оператор; МР—матрица рассеяния; ОВ—определитель возмущения; п.в.—почти везде; ПИ—принцип инвариантности; ФСС—функция спектрального сдвига.

Приведем список наиболее часто встречающихся обозначений. Если обозначение не является стандартным, то указывается страница, где оно вводится:

$\bar{A}$ —замыкание линейного оператора A

$A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ —линейный оператор действует из пространства $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ —сильный и слабый абелевы волновые операторы, с. 99

$\arg$ —аргумент комплексного числа

$\mathfrak{B}$ —множество всех линейных ограниченных операторов,

$$B(z) = GR(z)G^*, \quad \tilde{B}(z) = G_0R(z)G^*,$$

$$B_0(z) = -G_0R_0(z)G^*, \quad B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^*$$

C —пространство непрерывных функций

$C^\infty(\Omega)$ —множество бесконечно дифференцируемых функций на открытом множестве Ω

$C_0^\infty(\Omega)$ —подмножество $C^\infty(\Omega)$, состоящее из функций с компактными носителями

$\mathbb{C}$ —поле комплексных чисел

$D(z)$ —определитель возмущения, с. 329

$\bar{D}(z)$, $\dot{D}(z)$, $D_p(z)$ —обобщенный (с. 333), модифицированный (с. 335) и регуляризованный (с. 335) определители возмущения

$\mathcal{D}^*$ —пространство, двойственное гильбертову пространству, $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$
относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$
 $\mathcal{D}(A)$ —область определения оператора A
 Det —определитель
 Det_p —регуляризованный определитель, с. 62
 $\dim$ —размерность линейного множества
 dist —расстояние между множествами
 δ_{kl} —символ Кронекера
 $\delta(\lambda, \varepsilon)$ —операторный интеграл Пуассона, с. 42
 $E(\cdot)$ —спектральная мера самосопряженного оператора
 $\mathcal{E}$ —множество финитных элементов, с. 51
 $\exp$ —экспонента числа или оператора
 $\mathcal{F}$ —унитарное отображение гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (или $\mathcal{H}^{(a)}$)
на прямой интеграл $\mathfrak{H}$ (или $\mathfrak{H}^{(a)}$), диагонализующее самосопря-
женный оператор, с. 46
 Φ —преобразование Фурье
 $\mathcal{H}^{(a)}, \mathcal{H}^{(s)}$ —абсолютно непрерывное и сингулярное подпространства
самосопряженного оператора
 $\mathcal{H}^{(p)}$ —подпространство, натянутое на собственные векторы самосо-
пряженного оператора
 $\mathbf{H}^{(p)}$ —класс Харди, с. 29
 $\mathfrak{H}$ —прямой интеграл гильбертовых пространств, с. 45
 $\mathfrak{H}^{(a)}$ —прямой интеграл, отвечающий абсолютно непрерывной части
самосопряженного оператора, с. 47
 $\mathfrak{h}(\lambda)$ —«инфинитизимальное подпространство» прямого интеграла,
с. 45
 I —единичный оператор
 Im —мнимая часть комплексного числа или оператора
 $\inf$ —точная нижняя грань
 L_p —пространство функций, p -я степень которых интегрируема
 $L_p^{(\text{loc})}$ —набор функций, интегрируемых со степенью p лишь локально
(на компактных подмножествах)
 $\mathcal{Q}$ —множество конечномерных операторов
 Λ —борелевское множество на прямой
 $\bar{\Lambda}$ —замыкание множества Λ
 $N(A)$ —множество нулей (ядро) оператора A
 Ξ^d —двойственное к $\mathbb{R}^d$ евклидово пространство
 P (или $P^{(a)}$)—проектор на абсолютно непрерывное подпространство
 $\mathbb{R}^d$ —евклидово пространство размерностью d
 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
 $R(A)$ —область значений (образ) оператора A
 $R_A(z) = (A - z)^{-1}$ —резольвента оператора A
 Re —вещественная часть комплексного числа или оператора $\mathfrak{R}$ —
см. с. 110
 $r(f)$ —см. с. 110
 $\rho(A)$ —множество регулярных точек оператора A
 S —оператор рассеяния
 S —матрица рассеяния

sgn —знак
 $s\text{-lim}$ —сильный предел векторов и операторов
 $\sup$ —точная верхняя грань
 supp —носитель
 $\mathfrak{S}_\infty$ —класс компактных операторов
 $\mathfrak{S}_2$ —класс операторов Гильберта—Шмидта
 $\mathfrak{S}_1$ —класс ядерных операторов
 $\mathfrak{S}_p$ —см. с. 55
 $\sigma(A)$ —спектр линейного оператора
 $\sigma^{(a)}, \sigma^{(s)}, \sigma^{(p)}, \sigma^{(ess)}$ —абсолютно непрерывный, сингулярный, точечный, существенный спектры самосопряженного оператора
 $\hat{\sigma}$ —сердцевина спектра самосопряженного оператора, с. 38
 $\mathbb{T}$ —единичная окружность в $\mathbb{C}$
 Tr —след оператора, $T(z) = V - VR(z)V$
 $T_\pm(z)$ —см. с. 123
 $U_\pm$ —стационарный волновой оператор, с. 119
 $U_\pm(\Lambda)$ —локальный стационарный волновой оператор, с. 229
 $U(t) = \exp(-iHt)$ —унитарная группа самосопряженного оператора
 V —см. с. 222
 $W_\pm$ —(сильный) волновой оператор
 $\tilde{W}_\pm$ —слабый волновой оператор, с. 96
 $W_\pm(\Lambda), \tilde{W}_\pm(\Lambda, \Lambda_0)$ —локальные сильный и слабый волновые операторы, с. 97
 $w\text{-lim}$ —слабый предел векторов и операторов
 X, Y —борелевские множества на прямой
 $\mathbb{Z}$ —множество целых чисел
 $Z(\lambda, G)$ —см. с. 213
 χ_X —характеристическая функция множества
 Ω —открытое множество
 $\emptyset$ —пустое множество
 $\cup, \cap$ —объединение и пересечение множеств
 $\setminus$ —разность множеств
 $\in, \subset$ —включение элементов и подмножеств
 $\notin, \not\subset$ —отсутствие включения
 $\forall$ —любой
 $\exists$ —существует
 $:$ — левая часть по определению равна правой
 $=:$ — правая часть по определению равна левой
 $\circ, \bullet$ —начало и конец доказательства
 $(\cdot, \cdot), \langle \cdot, \cdot \rangle$ —скалярные произведения
 $\|\cdot\|, |\cdot|$ —нормы векторов и операторов
 $\|\cdot\|_p, |\cdot|_p$ —нормы в классе $\mathfrak{S}_p$
 $+$ —знак прямой суммы линейных множеств
 $\oplus, \ominus$ —знаки ортогональной суммы и разности подпространств гильбертова пространства
 $\perp$ —символ ортогональности
 $\otimes$ —знак тензорного произведения
 $\times$ —знак прямого произведения множеств

ВВЕДЕНИЕ

1. Математическая теория рассеяния—раздел теории возмущений. Идеология последней состоит в том, что подробная информация о «невозмущенном» операторе H_0 позволяет делать заключения о другом операторе H , если H_0 и H в том или ином смысле мало отличаются друг от друга. В физических терминах гамильтониан H_0 описывает «свободную» систему (например, не взаимодействующих друг с другом квантовых частиц), а «полный» гамильтониан H —реальную систему с учетом взаимодействия.

Теория рассеяния занимается только строением непрерывного (в точных терминах—абсолютно непрерывного) спектра и решает две связанные между собой задачи. Первая из них—исследование поведения при больших временах решений нестационарного уравнения Шредингера

$$i \frac{du}{dt} = Hu, \quad u(0) = f. \quad (\text{В.1})$$

При этом асимптотика при $t \rightarrow \pm\infty$ решений уравнения (В.1) с полным гамильтонианом H изучается в терминах решений уравнения со «свободным» оператором H_0 . Вторая задача состоит в нахождении условий унитарной эквивалентности операторов H_0 и H , а точнее—их абсолютно непрерывных частей $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$.

Рассмотрим сначала первую из этих задач. Пусть H_0 и H —самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда уравнение (В.1) имеет, и притом единственное, решение

$u(t) = \exp(-iHt)f$, а решение такого же уравнения с оператором H_0 дается формулой $u_0(t) = \exp(-iH_0t)f_0$. С точки зрения теории рассеяния функция $u(t)$ имеет «свободную» асимптотику при $t \rightarrow \pm\infty$, если для подходящего начального данного $f_0^{(\pm)}$, отыскиваемого по f , выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|u(t) - u_0^\pm(t)\| = 0, \quad u_0^\pm(t) = \exp(-iH_0t)f_0^\pm. \quad (\text{B.2})_\pm$$

Здесь и всюду любое соотношение, содержащее знаки $\pm$, понимается как два независимых равенства. Соотношение $(\text{B.2})_\pm$ приводит к связи между соответствующими начальными данными $f_0^{(\pm)}$ и f :

$$f = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \exp(iHt) \exp(-iH_0t) f_0^\pm. \quad (\text{B.3})_\pm$$

Таким образом, решение $u(t)$ уравнения (В.1) имеет свободную асимптотику при $t \rightarrow \pm\infty$, если при некотором элементе $f_0^{(\pm)}$ справедливо равенство $(\text{B.3})_\pm$. Оператор $W_\pm = W_\pm(H, H_0): f_0^{(\pm)} \rightarrow f$, если он существует, называется *волновым* (точное определение см. в § 2.1).

Обсудим необходимые условия справедливости соотношения $(\text{B.2})_\pm$. Если f является собственным вектором оператора H , $Hf = \lambda f$, то $u(t) = \exp(-i\lambda t)f$ и зависимость решения уравнения (В.1) от времени тривиальна. Однако из-за того, что собственные числа сдвигаются при сколь угодно слабых возмущениях, невозмущенная задача, вообще говоря, не имеет решений с таким же поведением при $t \rightarrow \pm\infty$. Аналогично нельзя ожидать выполнения соотношения $(\text{B.2})_\pm$ при f из сингулярного непрерывного подпространства оператора H . Впрочем, типичным для обсуждаемых в теории рассеяния случаев является отсутствие сингулярного непрерывного спектра у обоих операторов.

Основное положение теории рассеяния состоит в том, что при достаточно широких предположениях о паре H_0, H для начального данного f из абсолютно непрерывного подпространства $\mathcal{H}^{(a)}$ оператора H функция $u(t)$ выходит на свободную асимптотику. В определении $(\text{B.3})_\pm$ волновых операторов (ВО) $W_\pm, W_\pm f_0^{(\pm)} = f$, элементы $f_0^{(\pm)}$ также берутся лишь из абсолютно непрерывного подпространства $\mathcal{H}_0^{(a)}$ оператора H_0 . При условии существования ВО $W_\pm$ соотношение $(\text{B.2})_\pm$ выполняется в том и только в том случае, когда f принадлежит области значений $W_\pm$. В частности, если $(\text{B.2})_\pm$ справедливо

для любого абсолютно непрерывного элемента f , то ВО $W_{\pm}$ называется *полным*. В конкретных задачах именно проверка полноты является наиболее содержательной частью исследования. Легко убедиться, что полнота ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ эквивалентна существованию «обратного» ВО $W_{\pm}(H_0, H)$.

Вторая задача, одновременно решаемая в теории рассеяния, состоит в доказательстве унитарной эквивалентности операторов $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$. Дело в том, что (при условии существования) ВО изометричны на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и обладают сплетающим свойством $HW_{\pm} = W_{\pm}H_0$. Отсюда следует, что оператор $H^{(a)}$ имеет некоторую часть, унитарно эквивалентную $H_0^{(a)}$. При полных ВО операторы $H^{(a)}$ и $H_0^{(a)}$ унитарно эквивалентны друг другу. Подчеркнем, что в рамках теории рассеяния изучается не любая унитарная эквивалентность, а лишь «каноническая», реализуемая ВО.

Часто возникает необходимость в обобщении теории на случай операторов H_0 и H , действующих в разных пространствах: $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$. Такое обобщение требует отождествления J , переводящего $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}$. Основные определения теории рассеяния для пары пространств в существенном аналогичны случаю одного пространства, но различные объекты теории (например, ВО) строятся теперь по тройке H_0, H, J . Иногда оператор J не фиксируется постановкой задачи и его целесообразно подбирать в зависимости от свойств пары H_0, H . Введение оператора $J \neq I$ зачастую бывает полезным и при рассмотрении операторов, действующих в одном пространстве. В этом случае J должен быть удовлетворительным приближением к ВО. Описанная схема с $J = I$ относится к классу задач, когда таким приближением может служить единичный оператор.

Наряду с ВО в теории рассеяния важную роль играет отображение $S: f_0^{(-)} \rightarrow f_0^{(+)}$, связывающее в терминах свободной задачи асимптотики решений уравнения Шредингера (B.1) при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$. Оператор $S = W_+^* W_-$ называется *оператором рассеяния*. При существовании ВО $W_{\pm}$ оператор $S: \mathcal{H}_0^{(a)} \rightarrow \mathcal{H}_0^{(a)}$ коммутирует с H_0 и является сжатием. При дополнительном условии полноты ВО оператор рассеяния унитарен в $\mathcal{H}_0^{(a)}$. Ввиду равенства $H_0 S = S H_0$ оператор рассеяния естественно рассматривать в диагональном для H_0 представлении пространства $\mathcal{H}_0$. В таком представлении H_0 действует

как умножение на независимую переменную λ , а $\mathbf{S}$ —как умножение на оператор-функцию $S(\lambda)$, называемую матрицей рассеяния. Именно оператор и матрица рассеяния представляют обычно наибольший интерес в задачах математической физики, поскольку связывают «начальную» характеристику процесса с «конечной» напрямую, минуя рассмотрение процесса при конечных временах. Такой подход бывает полезным при изучении взаимодействия (рассеяния) волн (акустических, электромагнитных) с препятствием или потока квантовых частиц с мишенью. Этим объясняется и сам термин «теория рассеяния», заимствованный из физики.

2. Временные асимптотики нестационарного уравнения Шредингера тесно связаны с поведением решений соответствующей стационарной задачи на больших расстояниях от «рассеивателя» (координатные асимптотики). Поясним это на примере оператора Шредингера $H = -\Delta + q(x)$ в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$, когда $H_0 = -\Delta$. При условии $q(x) = \overline{q(x)} = O(|x|^{-d-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $|x| \rightarrow \infty$, дифференциальное уравнение

$$-\Delta\psi + q(x)\psi = \lambda\psi \quad (\text{B.4})$$

для любых $\lambda > 0$ и единичного вектора $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет (и при этом единственное) решение с асимптотикой

$$\begin{aligned} \psi(x; \omega, \lambda) = & \exp\left(i\lambda^{1/2}\langle\omega, x\rangle\right) + \\ & + a|x|^{-(d-1)/2} \exp\left(i\lambda^{1/2}|x|\right) + o\left(|x|^{-(d-1)/2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

при $|x| \rightarrow \infty$. Коэффициент $a = a(\hat{x}, \omega; \lambda)$ зависит от направления ω падающей на рассеиватель плоской волны $\exp(i\lambda^{1/2}\langle\omega, x\rangle)$, ее энергии λ и направления $\hat{x} = x|x|^{-1}$ наблюдения расходящейся сферической волны $|x|^{-(d-1)/2} \exp(i\lambda^{1/2}|x|)$. Функция a называется *амплитудой рассеяния*.

С позиций квантовой механики H_0 является оператором кинетической энергии относительного движения пары частиц; их приведенная масса считается равной $1/2$, постоянная Планка $\hbar = 1$; $q(x)$ —потенциальная энергия взаимодействия частиц; H —оператор полной энергии. Плоская волна $\exp(i\langle p, x \rangle)$ описывает в этой картине поток частиц с импульсом $p = \lambda^{1/2}\omega$, падающий на рассеивающий центр; плотность потока равна здесь скорости $v = 2|p|$. Вдали от центра рассеянные частицы описываются суммой второго и третьего слагаемых в правой

части (В.5). Поэтому плотность потока рассеянных частиц через элемент площади $dS_r = r^{d-1}d\theta$ сферы радиусом r равна $vr^{-d+1}(|a|^2 + o(1))dS_r$. При $r \rightarrow \infty$ отношение этой величины к плотности падающего потока стремится к $|a(\theta, \omega; \lambda)|^2 d\theta$. Последняя величина называется (*эффективным*) *сечением рассеяния внутрь телесного угла $d\theta$* . Она является основной величиной, наблюдаемой в экспериментах по рассеянию. Дальнейшие подробности по поводу квантовомеханической картины рассеяния можно найти в учебниках Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [13] и Л.Д. Фаддеева, О.А. Якубовского [23].

В терминах решений задачи рассеяния (*волновых функций*) ψ можно построить ВО. Положим $\psi_+(x, p) = \psi(x, -\omega, \lambda)$, $\psi_-(x, p) = \psi(x, \omega, \lambda)$ и рассмотрим преобразования

$$(\Phi_{\pm} f)(p) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\psi_{\pm}(x, p)} f(x) dx$$

пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Xi^d)$, где Ξ^d — двойственное к $\mathbb{R}^d$ евклидово пространство (импульсное). Ясно, что при $q = 0$ операторы $\Phi_{\pm}$ совпадают с обычным преобразованием Фурье Φ_0 . Можно показать, что под действием $\Phi_{\pm}$ оператор H переходит в оператор умножения на p^2 , т.е.

$$\Phi_{\pm} H = p^2 \Phi_{\pm}, \quad (\text{В.6})$$

причем оператор $\Phi_{\pm}$ изометричен на подпространстве $\mathcal{H}^{(a)}$, переводит его на все $L_2(\Xi^d)$ и аннулируется на $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^{(a)}$. Кроме того, для $\hat{f} \in L_2(\Xi^d)$ при $t \rightarrow \pm\infty$

$$\Phi_{\pm}^* \exp(-ip^2 t) \hat{f} \sim \Phi_0^* \exp(-ip^2 t) \hat{f}. \quad (\text{В.7})$$

Сравнив (В.6) и (В.7), установим существование в этой задаче ВО. Одновременно получим для них представления

$$W_{\pm} = \Phi_{\pm}^* \Phi_0. \quad (\text{В.8})$$

Отсюда следует полнота построенных ВО.

Матрица рассеяния для пары H_0, H вычисляется в терминах амплитуды рассеяния. Именно, $S(\lambda)$ действует в пространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $S(\lambda) - I$ — интегральный оператор с ядром

$$i \exp(\pi i(d-3)/4) \lambda^{(d-1)/4} (2\pi)^{-(d-1)/2} a(\varphi, \omega; \lambda). \quad (\text{В.9})$$

Задача рассеяния для пары $H_0 = -\Delta$, $H = -\Delta + q$ может быть рассмотрена и в импульсном представлении. Для этого

нужно изучить возмущение оператора умножения на p^2 в $L_2(\Xi^d)$ интегральным оператором с ядром $(2\pi)^{-d/2}\hat{q}(p-p')$, где $\hat{q}$ —преобразование Фурье потенциала q . В такой постановке задача сводится к модели Фридрихса—Фаддеева (см. § 4.1, 4.2). В импульсном представлении ВО действуют как сингулярные интегральные операторы (с особенностью при $p^2 = p'^2$).

В намеченной схеме рассуждений доказательству существования и полноты ВО предшествовало исследование не зависящей от времени (стационарной) задачи (В.4), (В.5). Такой подход называется в теории рассеяния *стационарным*. Одно из его преимуществ состоит в получении попутно явных выражений для ВО и матрицы рассеяния. Отметим еще, что построение волновых функций $\psi(x; \omega, \lambda)$ и изучение их свойств удобно проводить с помощью резольвенты оператора H .

Теория рассеяния для пары $H_0 = -\Delta$, $H = -\Delta + q$ может быть построена и с помощью *нестационарного подхода*. Он состоит в прямом оправдании соотношений типа (В.2) $_{\pm}$. Если спектральный анализ оператора H_0 удастся провести явно (для оператора $H_0 = -\Delta$ —преобразованием Фурье), то нестационарным методом (см. в § 2.5 признак Кука) легко устанавливается существование ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. Однако последовательное развитие нестационарного подхода позволяет проверять и полноту ВО. Изложение соответствующей теории (метода Энсса) можно найти в оригинальной статье [94] или в книге [34].

Напротив, стационарный подход, описанный кратко в применении к паре $H_0 = -\Delta$, $H = -\Delta + q$, является для нас основным. Обсудим его теперь в более общей ситуации. Идея стационарного подхода (см. § 2.7, 2.8) состоит в предварительном изменении определения ВО, при котором унитарные группы заменяются их выражениями через соответствующие резольвенты: $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$ и $R(z) = (H - z)^{-1}$. Именно на этом пути получаются представления (В.8). В случае стационарного определения вместо пределов (В.3) $_{\pm}$ при $t \rightarrow \pm\infty$ нужно изучать предельные значения (в подходящей топологии) резольвент при стремлении спектрального параметра к вещественной оси. Коль скоро существование предельных значений резольвент установлено и исследованы свойства определяемых через них стационарных ВО, уже не представляет труда доказать существование нестационарных ВО и их совпадение со стационарными. Точнее, существование слабого предела в (В.3) $_{\pm}$ устанавливается непосредственно, а стационар-

ными средствами проверяется изометричность соответствующего слабого ВО. Отсюда вытекает, что в $(B.3)_{\pm}$ существует и сильный предел. Как уже отмечалось, важное достоинство стационарного варианта—продвинутая формульная часть.

3. Методы, применяемые в теории рассеяния, естественно разделяются на два класса—*гладкие* (гл. 4) и *ядерные* (гл. 6). Гладкие методы существенно используют возможность явного спектрального анализа невозмущенного оператора H_0 . При этом требуется, чтобы спектральное разложение H_0 было достаточно регулярным, а возмущение $V = H - H_0$ было «гладким» по отношению к H_0 . Результаты о полном гамильтониане H выводятся отсюда обычно с помощью теории возмущений.

Для построения стационарного варианта теории рассеяния нужно, чтобы существовали (в подходящей топологии) пределы $R_0(z)$ и $R(z)$ при $z = \lambda \pm i\varepsilon$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Такое утверждение называется часто *принципом предельного поглощения*. Для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами H_0 этот принцип можно проверить непосредственно. Однако аналогичное исследование для полного гамильтониана H (например, для оператора Шредингера) оказывается содержательной задачей. Один из способов ее решения (см. § 4.6) состоит в изучении уравнения для $R(z)$ и использовании принципа предельного поглощения для H_0 . Отметим, что описанная в предыдущем разделе стационарная схема построения теории рассеяния для оператора Шредингера основана на использовании «гладкого» подхода.

Существует несколько различных вариантов понимания гладкости возмущения. Удобное унитарно-инвариантное условие на поведение резольвенты в окрестности спектра формулируется в терминах так называемой *гладкости по Като* (см. § 4.3). Это понятие может быть эквивалентным образом переформулировано через соответствующую унитарную группу. Благодаря этому в теории таких возмущений стационарный и нестационарный варианты по существу сливаются.

От «гладкой» теории принципиально отличается ядерная, в которой роли H_0 и H уравниваются. Стационарный вариант ядерного метода основан на том, что для произвольного самосопряженного оператора H и любых операторов G_1, G_2 класса Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2$ произведение $G_1 R(\lambda \pm i\varepsilon) G_2$ имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ предел в $\mathfrak{S}_2$ для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}$. В нестационарном

варианте роль этого утверждения играет оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G \exp(-iHt)f\|^2 dt \leq 2\pi \|G\|_2^2 \sup \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda}$$

(здесь $E(\cdot)$ —спектральное семейство H , $\|\cdot\|_2$ —норма в $\mathfrak{S}_2$), причем множество функций f , для которых правая часть конечна, плотно в $\mathcal{H}^{(a)}$. Для развития «ядерной» теории исходной явилась теорема Като—Розенблюма о существовании ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ при ядерной разности $H - H_0$. В терминах симметрично-нормированных идеалов условие ядерности $H - H_0$ ослабить в этой теореме нельзя. В то же время для приложений к теории дифференциальных операторов решающим оказывается переход к различным классам «относительно ядерных» операторов.

«Гладкий» и «ядерный» методы не покрывают друг друга, и оба находят полезные применения. Их формульные части тождественны, хотя содержательная реализация формул может иметь разный смысл. Когда невозмущенный оператор достаточно прост и хорошо изучен, удобно пользоваться «гладким» методом. В теории дифференциальных операторов он требует меньших ограничений на поведение коэффициентов возмущения на бесконечности. «Ядерный» метод «уравнивает» роли возмущенного и невозмущенного операторов, что позволяет рассмотреть случаи, когда явный спектральный анализ оператора H_0 невозможен.

Различие в результатах «гладкой» и «ядерной» теории отчетливо проявляется уже в случае оператора Шредингера. Пусть сейчас $H_0 = -\Delta + q_0$, $H = H_0 + q$ в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Предполагается, что функция $q_0(x)$ ограничена, а

$$|q(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}. \quad (\text{В.10})$$

С помощью утверждений ядерного типа существование и полнота ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ устанавливаются при $\alpha > d$. Для применения гладкой теории требуется достаточно явный спектральный анализ оператора H_0 . Такой анализ оказывается возможным только для специальных потенциалов q_0 . В этом случае ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны, если оценка (В.10) выполняется для какого-нибудь $\alpha > 1$. Более того, гладкая теория позволяет проверить и отсутствие в спектре оператора H сингулярной непрерывной компоненты. В существен-

ном необходимый спектральный анализ оператора H_0 сводится к описанию поведения на бесконечности решений уравнения $-\Delta\psi + q_0\psi = \lambda\psi$. Эта задача легко решается, например, для периодической функции q_0 и, в частности, для $q_0 = 0$. Напротив, при произвольной ограниченной функции q_0 эффективное разложение по собственным функциям оператора H_0 нельзя построить даже в одномерном случае. Поэтому к такой паре гладкая теория оказывается неприменимой.

В настоящее время вопрос о содержательном объединении «гладкого» и «ядерного» подходов остается открытым. Впрочем, такое объединение, по-видимому, не может быть слишком «далеко продвинутом». Во всяком случае существование ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ при произвольной ограниченной функции q_0 и любом $\alpha > 1$ представляется при $d > 1$ сомнительным. Если $d = 1$, то существование и полнота ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ проверяются ядерным методом. Для него структура спектра невозмущенного оператора H_0 совершенно несущественна. В связи с этим отметим, что, как показано в [56], для «почти всех» ограниченных q_0 операторы H_0 имеют чисто точечные спектры. Из существования и полноты ВО вытекает, что этот результат обладает определенной устойчивостью. Именно, абсолютно непрерывная компонента отсутствует и в спектре оператора H .

До некоторой степени «гладкая» и «ядерная» теории объединяются в рамках общей стационарной схемы (см. гл. 5), называемой также «аксиоматической» теорией рассеяния. В этой теории существование нужных пределов резольвент $R_0(z)$ и $R(z)$ предполагается, хотя пределы и понимаются в весьма слабом смысле. При этом предположении получаются формулы для стационарных волновых операторов, изучаются их свойства, устанавливается связь с нестационарными определениями. Таким образом общая схема позволяет избежать дублирования однотипных рассуждений в различных конкретных ситуациях. Само существование пределов резольвент в разной аналитической обстановке может проверяться (и пониматься) по-разному.

4. Из полноты волновых операторов вытекает, что матрица рассеяния $S(\lambda)$ является унитарной функцией спектрального параметра λ . Кроме того, в теории относительно компактных возмущений $S(\lambda)$ отличается от единичного оператора на компактный. Например, для оператора Шредингера $S(\lambda)$ — унитарный оператор в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ при всех $\lambda > 0$, а $S(\lambda) - I$ —

интегральный оператор с ядром (B.9). Таким образом, спектр оператора $S(\lambda)$ состоит из собственных чисел, лежащих на единичной окружности и накапливается только к точке 1.

Различные спектральные свойства матрицы рассеяния подробно обсуждаются в гл. 7. Исходным здесь является стационарное представление для $S(\lambda)$. С его помощью получают, например, оценки для нормы $S(\lambda) - I$ в симметрично-нормированных идеалах компактных операторов. Отметим, что для оператора Шредингера величина

$$\iint_{\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1}} |a(\theta, \omega; \lambda)|^2 d\theta d\omega = (2\pi)^{d-1} \lambda^{-(d-1)/2} \|S(\lambda) - I\|_2^2,$$

поделенная еще на площадь сферы $\mathbb{S}^{d-1}$, называется *полным сечением рассеяния, усредненным по направлениям падения частиц ω* . Грубо говоря, сечение рассеяния показывает, насколько потенциал возмущает падающий на рассеивающий центр поток частиц с энергией λ .

Мы довольно подробно обсуждаем свойства матрицы рассеяния в зависимости от предположений относительно возмущения. В применении к дифференциальным операторам содержательна и задача о восстановлении возмущения по матрице рассеяния. Эта задача называется *обратной*. В настоящей книге она не рассматривается.

Гл. 8 примыкает к «ядерной» теории, но выходит за рамки собственно теории рассеяния. В ней изучается интегральное представление

$$\mathrm{Tr}[f(H) - f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) f'(\lambda) d\lambda \quad (\text{B.11})$$

для следа разности достаточно произвольных функций от операторов H_0 и H . Входящая в правую часть формулы следа (B.11) функция $\xi(\lambda)$ называется *функцией спектрального сдвига* для пары H_0, H . На непрерывном спектре функция $\xi(\lambda)$ связана с матрицей рассеяния соотношением $\mathrm{Det} S(\lambda) = \exp(-2\pi i \xi(\lambda))$. На дискретном спектре функция $\xi(\lambda)$ зависит от сдвига собственных значений оператора H по отношению к собственным значениям H_0 . Этим объясняется название функции $\xi(\lambda)$.

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. ТЕОРИЯ МЕРЫ

Теория рассеяния* требует классификации спектра самосопряженного оператора, основанной на теории меры. Напомним кратко основные сведения о борелевских мерах на прямой $\mathbb{R}$. Подробности можно найти в любом учебнике по теории меры (см., например, [26]). Достаточно, впрочем, обратиться к вводящей главе монографии [4] или к учебнику по теории функций вещественной переменной [15]. Некоторые элементарные сведения из этой теории нам также понадобятся (они напоминаются по ходу дела).

1. Борелевские множества образуются из открытых и замкнутых множеств взятием счетного числа их объединений и пересечений. Относительно этих операций борелевские множества образуют σ -алгебру. Иногда мы пользуемся обозначением $X' = \mathbb{R} \setminus X$.

Любая неотрицательная счетно-аддитивная функция m , заданная на этой σ -алгебре, называется (*борелевской*) *мерой*. Предполагается также, что мера любого ограниченного интервала конечна. Иногда к запасу борелевских множеств, на которых определена мера m , добавляют всевозможные подмножества всех множеств нулевой m -меры. В этом случае меру m

*Здесь собраны различные необходимые нам сведения, не относящиеся, собственно, к теории рассеяния.

называют *полной*. В интересующих нас вопросах полнота меры малосущественна, и мы на ней не останавливаемся.

Любое множество Z полной m -меры (т.е. такое, что $m(Z') = 0$) будем называть *борелевским носителем* (БН) *меры* m . Среди всех БН существует (и, конечно, единственно) наименьшее замкнутое множество. Оно называется просто *носителем* и обозначается $\text{supp } m$.

2. Мера m_1 называется *абсолютно непрерывной* относительно меры m_2 , если $m_1(X) = 0$ при $m_2(X) = 0$. Теорема Радона—Никодима утверждает, что это имеет место в том и только в том случае, когда при некоторой m_2 -измеримой функции f для любого борелевского X

$$m_1(X) = \int_X f(\lambda) dm_2(\lambda), \quad f(\lambda) \geq 0. \quad (1)$$

Функция $f =: dm_1/dm_2$ называется *производной Радона—Никодима* меры m_1 по мере m_2 . Если мера m_1 конечна, т.е. $m_1(\mathbb{R}) < \infty$, то f принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}; dm_2)$ функций, абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$ по мере m_2 . Меры, абсолютно непрерывные друг относительно друга, считаются эквивалентными. Ясно, что у эквивалентных мер носители совпадают. Все эквивалентные между собой меры объединяются в один класс называемый *типом*.

Меры m_1 и m_2 называются *взаимно сингулярными*, если у них найдутся непересекающиеся БН Z_1 и Z_2 , т.е. $m_j(Z'_j) = 0$, $j = 1, 2$, и $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$. Ненулевая мера m_1 не может быть одновременно абсолютно непрерывной относительно m_2 и взаимно сингулярной с ней. Теорема Лебега о разложении утверждает, что для любых мер m_1 и m_2 первая из них единственным образом представляется в виде

$$m_1 = m_{1,a} + m_{1,s}, \quad (2)$$

где $m_{1,a}$ абсолютно непрерывна относительно m_2 , а $m_{1,s}$ взаимно сингулярна с m_2 .

Среди всех мер на $\mathbb{R}$ особую роль играет мера Лебега, обозначаемая через $|\cdot|$; при интегрировании по ней пишем $d\lambda$ (вместо $dm(\lambda)$). В частности, термин *почти везде* («п.в.») подразумевает множество полной лебеговой меры. Соотношение $X = Y \pmod{0}$ означает, что множества X и Y совпадают с точностью до множества нулевой лебеговой меры.

Если не оговорено особо, абсолютная непрерывность и сингулярность различных мер также понимаются по их отношению к мере Лебега. Определение абсолютной непрерывности можно эквивалентным образом переформулировать в терминах множеств X , состоящих из конечного числа не пересекающихся (открытых) интервалов. Именно, мера m абсолютно непрерывна, если по любому $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $m(X) < \varepsilon$ при $|X| < \delta$. Мера m называется (просто) *непрерывной*, если $m(X) = 0$ для любого одноточечного, а потому и для любого счетного X .

Для борелевского множества Y обозначим через $m_Y(X) = m(X \cap Y)$ сужение m на Y . Абсолютная непрерывность m на Y по определению означает, что мера m_Y абсолютно непрерывна. Аналогичное соглашение применяется и по отношению к другим свойствам меры m . Отметим, что мера абсолютно непрерывна, если абсолютно непрерывны ее сужения на любые конечные интервалы.

Разложение вида (2) меры m по отношению к лебеговой мере можно построить, зная множество, на котором сосредоточена сингулярная компонента меры m . Именно, пусть $|Z_s| = 0$ и $m_s(Z'_s) = 0$. Тогда

$$m_a = m_{Z'_s}, \quad m_s = m_{Z_s}. \quad (3)$$

3. Борелевскую меру можно построить по любой неубывающей непрерывной слева функции $F(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для промежутка $[\lambda_0, \lambda_1)$ полагаем

$$m([\lambda_0, \lambda_1)) = F(\lambda_1) - F(\lambda_0). \quad (4)$$

По счетной аддитивности такая функция $m(\cdot)$ корректно распространяется до меры m , заданной на всех борелевских подмножествах $\mathbb{R}$. Функция F , для которой выполнено условие (4), называется иногда *производящей функцией меры m* . Производящая функция $F = F_m$ существует для любой меры m и определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной.

В силу теоремы Лебега (см., например, § 2 гл. 8 учебника [15]) неубывающая функция $F(\lambda)$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет производную $f(\lambda) = F'(\lambda) \geq 0$, причем $f \in L_1^{(\text{loc})}(\mathbb{R})$, т.е. интегрируема по любому конечному промежутку. В терминах $f = f_m$ можно эквивалентным образом переформулировать

определения абсолютной непрерывности и сингулярности меры m . Именно m абсолютно непрерывна, если

$$m(X) = \int_X f(\lambda) d\lambda$$

для любого интервала (а тогда и для любого борелевского множества) X . Мера m сингулярна, если $f(\lambda) = 0$ для п.в. λ . Отсюда следует, что функция f совпадает с производной Радона—Никодима от абсолютно непрерывной части меры m (по отношению к мере Лебега). Другими словами,

$$m_a(X) = \int_X f(\lambda) d\lambda \quad (5)$$

и для п.в. λ

$$F'_m(\lambda) = F'_{m_a}(\lambda). \quad (6)$$

Борелевские носители Z_s и Z_a сингулярной m_s и абсолютно непрерывной m_a компонент меры m также можно описать в терминах функции f . Точнее, будем сейчас считать f симметричной производной, т.е.

$$f(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\varepsilon)^{-1} [F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda - \varepsilon)]. \quad (7)$$

Тогда Z_s состоит из точек λ , где предел (7) существует и равен $+\infty$. Обозначим через Z_0 множество точек λ , в которых предел (7) либо не существует, либо равен нулю. Оказывается, что $m(Z_0) = 0$. Поэтому абсолютно непрерывная компонента сосредоточена (т.е. $m_a = m_{Z_a}$) на множестве $Z_a = \mathbb{R} \setminus (Z_s \cup Z_0)$, где симметричная производная существует, конечна и не равна нулю. Для непрерывных мер m эти утверждения сохраняются, если считать f обычной (а не симметричной) производной.

4. Из всех БН данной меры m в спектральной теории приходится выделять наряду с носителем $\text{supp } m$ также другие множества, обладающие определенными минимальными свойствами (по отношению к мере Лебега). Примем

Определение 1. Борелевский носитель $Z^{(0)}$ меры m называется минимальным, если для любого другого борелевского носителя Z этой меры $|Z^{(0)} \setminus Z| = 0$.

Минимальный БН всегда существует, но определяется, конечно, не однозначно. Действительно, пусть сначала m имеет

БН конечной лебеговой меры, т.е. $z = \inf |Z| < \infty$, где инфимум берется по всем БН m . Рассмотрим какую-либо последовательность БН Z_n , для которой $|Z_n| \rightarrow z$. Тогда множество $Z^{(0)} = \cap_n Z_n$ будет минимальным БН меры m , так как лебегова мера $|Z^{(0)}| = z$ минимальна среди всех БН меры m . В общем случае данное построение минимального БН можно провести на каждом промежутке $(n, n+1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, в отдельности, а затем взять объединение по всем n .

Два минимальных БН могут различаться не более чем на множество нулевой лебеговой меры. Для заданного минимального БН $Z^{(0)}$ к нему всегда можно добавить множество нулевой лебеговой меры. В случае абсолютно непрерывной меры m из $Z^{(0)}$ можно и вычитать произвольное множество нулевой лебеговой меры. Для сингулярной меры минимальный БН имеет нулевую лебегову меру. Таким образом, минимальный БН борелевской меры будет минимальным БН и для ее абсолютно непрерывной компоненты.

Минимальный БН всегда можно выбрать принадлежащим $\text{supp } m$. Однако $\text{supp } m$ может не быть минимальным БН. Приведем простой пример такой меры. Рассмотрим сужение $|\cdot|_G$ меры Лебега на борелевское множество G (по определению $|X|_G = |G \cap X|$). Для любого открытого множества G носитель такой меры есть замыкание $\overline{G}$ этого множества, а один из минимальных БН совпадает с самим G . Поэтому при $|\overline{G} \setminus G| > 0$ (а такие открытые множества существуют) $\overline{G}$ не является минимальным БН.

В терминах множеств (введенных в п. 3) минимальный БН можно задать равенством $Z^{(0)} = \mathbb{R} \setminus Z_0$. В частности, $Z^{(0)} = Z_a$ для абсолютно непрерывной меры m . В этом случае m эквивалентна сужению $|\cdot|_{Z^{(0)}}$ меры Лебега на минимальный БН. Абсолютно непрерывная мера m абсолютно непрерывна относительно $|\cdot|_{\text{supp } m}$, но может быть не эквивалентной ей.

5. Наряду с обычными неотрицательными мерами мы рассматриваем произвольные вещественные σ -аддитивные функции (заряды) на борелевских множествах. Допускаются и комплексные меры. В этом случае через $|m|$ обозначается полная вариация меры m . Мы часто отождествляем борелевские меры и их производящие функции—комплексные функции локально ограниченной вариации. Помимо мер на прямой нам

понадобятся также аналогичные объекты на единичной окружности.

6. Мы систематически используем различные теоремы (их доказательства см., например, в [15]) о предельном переходе под знаком интеграла. Наиболее употребительна теорема Лебега.

Теорема 2. Пусть $|f_\varepsilon(\lambda)| \leq \varphi(\lambda)$, где $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\lambda) = f(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda. \quad (9)$$

Следующее более общее, но менее эффективное утверждение принадлежит Витали.

Теорема 3. Пусть для функций $f_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R})$ интегралы

$$\int_X f_\varepsilon(\lambda) d\lambda \quad (10)$$

стремятся к нулю равномерно по ε при $|X| \rightarrow 0$, а также при $X = (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$ и $N \rightarrow \infty$. Тогда при условии (8) выполняется соотношение (9), причем $f \in L_1(\mathbb{R})$.

Отметим, что равностепенная непрерывность интегралов (10) в определенном смысле необходима для справедливости (9).

Следующая теорема (лемма Фату) удобна для предельного перехода в неравенствах.

Теорема 4. При условии (8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda \leq \sup_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} |f_\varepsilon(\lambda)| d\lambda. \quad (11)$$

Замечание 5. Нам понадобится также вариант этой теоремы для случая вектор-функций $f_\varepsilon(\lambda)$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Именно, если $f_\varepsilon(\lambda)$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $f(\lambda)$ для п.в. λ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(\lambda)\|^2 d\lambda \leq \sup_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \|f_\varepsilon(\lambda)\|^2 d\lambda.$$

Отметим, что в теоремах 2—4 условие (8) можно заменить предположением о сходимости f_ε к f по мере Лебега на любом конечном интервале. Перечисленные результаты сохраняют силу и для произвольных борелевских мер.

Для перестановки порядка интегрирования в двойных интегралах мы часто пользуемся *теоремой Фубини*. Она утверждает, что замена порядка законна, если хотя бы один из повторных интегралов сходится абсолютно.

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этом параграфе мы соберем используемые далее результаты об аналитических (голоморфных) функциях.

1. Стационарная формулировка теории рассеяния основана на исследовании граничных значений резольвенты самосопряженного оператора при стремлении спектрального параметра к вещественной оси. Поэтому особое значение имеет изучение поведения аналитических функций на границе области аналитичности. Доказательства приводимых здесь результатов можно найти, например, в книгах [6, 17].

Для определенности рассмотрим случай функций $\varphi(z)$, аналитических в верхней (нижней) полуплоскости. Через Λ обозначим интервал вещественной оси. Будем говорить, что в точке $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(z)$ имеет (конечное) угловое предельное значение $\varphi(\lambda + i0)$, если $\varphi(z)$ сходится к $\varphi(\lambda + i0)$ при $z \rightarrow \lambda$ в любом угле $0 < \theta < \arg(z - \lambda) < \pi - \theta$. Обозначение $\varphi(\lambda - i0)$ имеет аналогичный смысл. Впрочем в теории рассеяния, как правило, достаточно рассматривать радиальные предельные значения, когда $\varphi(\lambda \pm i0)$ понимается как предел $\varphi(\lambda \pm i\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому если не оговорено особо, предельные значения $\varphi(\lambda \pm i0)$ считаются радиальными.

Приведем сначала весьма общую теорему единственности. Она называется теоремой Лузина—Привалова.

Теорема 1. *Предположим, что функция $\varphi(z)$ голоморфна в прямоугольнике $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\operatorname{Im} z \in (0, \varepsilon_0)$ и имеет угловые предельные значения $\varphi(\lambda + i0)$ для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Если $\varphi(\lambda + i0) = 0$ на множестве положительной лебеговой меры, то и функция φ тождественно равна нулю.*

В частности, теорема единственности верна для функций, непрерывных вплоть до границы. Более общее утверждение получается в терминах классов Харди. Напомним, что класс Харди H^p , $1 \leq p \leq \infty$, состоит из функций $\varphi(z)$, для которых конечна величина

$$\|\varphi\|_p^p = \sup_{\varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda + i\varepsilon)|^p d\lambda \quad (1)$$

(при $p = \infty$ интеграл, конечно, понимается как норма $f(\lambda \pm i\varepsilon)$ в L_∞ по λ). Справедлива

Теорема 2. Функция $\varphi \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, имеет угловые предельные значения $\varphi(\lambda + i0)$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Сопоставив теоремы 1 и 2, получим эффективную теорему единственности.

Теорема 3. Если $\varphi \in H^p$, $1 \leq p \leq \infty$, и $\varphi(\lambda + i0) = 0$ на множестве положительной меры, то φ тождественно равна нулю.

Замечание 4. Теоремы 2 и 3 сохраняют силу для функций φ , имеющих в верхней полуплоскости неотрицательную мнимую часть. В этом легко убедиться, применяя теоремы 2 и 3 к ограниченной функции

$$\tilde{\varphi}(z) = [\varphi(z) - i][\varphi(z) + i]^{-1}.$$

Как и теорема 1, теоремы 2, 3 тоже имеют локальный характер. Это означает, что они верны для функций, заданных лишь в каком-либо прямоугольнике $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\operatorname{Im} z \in (0, \varepsilon_0)$, когда интегрирование в (1) ограничено на интервал Λ . Разумеется, определение пространств Харди и все результаты для них естественно переносятся на случай функций, аналитических в единичном круге.

2. Резольвента самосопряженного оператора—интеграл Коши—Стилтьеса по его спектральной мере. Поэтому исследование таких интегралов играет в теории рассеяния важную роль. Следующие два утверждения называются *теоремами Привалова*. Их доказательства можно найти в книге [17].

Теорема 5. Пусть F —комплексная функция ограниченной вариации, а

$$C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - z)^{-1} dF(\mu) \quad (2)$$

—ее преобразование Коши—Стилтьеса. Тогда при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют угловые предельные значения

$$C(\lambda + i0) = \pm \pi i \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} + \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda)^{-1} dF(\mu), \quad (3)$$

причем интеграл в смысле главного значения в правой части также существует при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Кроме того, для любого интервала $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ и $\bar{\Lambda} = [\lambda_0, \lambda_1]$ отвечающая (с.м. (1.4)) F мера восстанавливается формулой обращения Коши—Стилтьеса:

$$m(\Lambda) + m(\bar{\Lambda}) = (\pi i)^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda} [C(\lambda + i\varepsilon) - C(\lambda - i\varepsilon)] d\lambda.$$

В предположении гладкости функции F интеграл (2) имеет такую же гладкость, как и производная F .

Теорема 6. Пусть функция F равна постоянной вне конечного промежутка $\Lambda = [a, b]$, F непрерывно дифференцируема и производная $f(\lambda) = F'(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0, 1)$. Тогда интеграл (2) гильдеровски непрерывен по z в комплексной плоскости с разрезом по Λ с тем же показателем α , причем при $|z' - z| \leq 1$

$$\begin{aligned} |C(z)| + |z' - z|^{-\alpha} |C(z') - C(z)| &\leq \\ &\leq C \sup_{\lambda, \lambda' \in \Lambda} (|f(\lambda)| + |\lambda' - \lambda|^{-\alpha} |f(\lambda') - f(\lambda)|). \end{aligned} \quad (4)$$

Ясно, что в условиях этой теоремы

$$C(z) = \int_a^b (\mu - z)^{-1} f(\mu) d\mu. \quad (5)$$

Если f гильдеровски непрерывна, но нет условия $f(a) = f(b) = 0$, то утверждение теоремы 6 сохраняется вне произвольных окрестностей a и b .

Чем больше гладкость F , тем более гладкой функцией является и интеграл (2). Именно, если в условиях теоремы 6 функция F имеет $n+1$ производную и $f^{(n)}(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера, то и $C^{(n)}(z)$ непрерывна вплоть до Λ . Для производных сохраняется оценка вида (4). В этом легко убедиться, дифференцируя (2), интегрируя там по частям и применяя теорему 6 к $C^{(n)}(z)$.

3. Для интеграла Пуассона

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) &= (2\pi i)^{-1} [\mathcal{C}(\lambda + i\varepsilon) - \mathcal{C}(\lambda - i\varepsilon)] = \\ &= \pi^{-1} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} [(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2]^{-1} dF(\mu), \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (6)$$

результаты предыдущего пункта допускают дальнейшее уточнение. Так, согласно соотношению (3)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) = f(\lambda), \quad f = F', \quad (7)$$

при п.в. λ . Теорема Фату (см., например, [6]) позволяет описать это множество полной меры.

Теорема 7. Пусть F — функция ограниченной вариации. Тогда предел (7) существует и соотношение (7) выполняется в тех точках λ , где F имеет симметричную производную (1.7).

Подчеркнем, что при вещественной неубывающей F здесь допускается случай $F'(\lambda) = +\infty$. Для таких значений λ предел $\mathcal{P}(\lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ тоже равен $+\infty$. Нам понадобится еще утверждение [6] о сходимости интегралов Пуассона в классе L_1 .

Теорема 8. Пусть функция F абсолютно непрерывна и $f = F' \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда соотношение (7) выполняется в смысле пространства $L_1(\mathbb{R})$.

В терминах интеграла Пуассона легко указать условия того, что функция F (или соответствующая мера m) абсолютно непрерывна на каком-либо интервале Λ_0 . Достаточно, например, предположить, что функция $\mathcal{P}(\lambda, \varepsilon)$ ограничена при $\lambda \in \Lambda_0$ и $\varepsilon > 0$. Тогда на основании теоремы Лебега при $\Lambda \subset \Lambda_0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ в соотношении

$$m(\Lambda) + m(\overline{\Lambda}) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda} \mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) d\lambda$$

можно перейти к пределу под знаком интеграла. В силу равенства (7) это дает представление

$$m(\Lambda) = \int_{\Lambda} f(\lambda) d\lambda, \quad f \in L_1,$$

а потому мера m абсолютно непрерывна на Λ_0 .

Теперь соотношения (3) и (7) показывают, что гладкость функции $F(\lambda)$ можно описать в форме условий относительно интегралов Коши—Стилтьеса или Пуассона. Например, если функция $C(z)$ непрерывна в прямоугольниках $\operatorname{Re}(z) \in \Lambda_0$, $\pm \operatorname{Im}(z) \geq 0$, то $F(\lambda)$ непрерывно дифференцируема на Λ_0 .

4. Укажем условия представимости аналитической функции в виде интеграла (2) с вещественной неубывающей функцией F (с конечной мерой m —см. (1.4)). В этом случае $C(\bar{z}) = \overline{C(z)}$, а формула обращения из теоремы 5 записывается в виде

$$m(\Lambda) + m(\bar{\Lambda}) = 2\pi^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda} \operatorname{Im} C(\lambda + i\varepsilon) d\lambda. \quad (8)$$

Доказательство следующего утверждения см., например, в книге [1].

Теорема 9. *Для того, чтобы голоморфная в верхней полуплоскости функция $C(z)$ допускала представление (2) с вещественной неубывающей функцией F ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Im} C(z) \geq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$ и чтобы*

$$\sup_{y \geq 1} y |C(iy)| < \infty. \quad (9)$$

Учитывая еще, что при ограниченной функции $\operatorname{Im} C(z)$ мера m абсолютно непрерывна, получим

Следствие 10: Пусть в верхней полуплоскости функция $C(z)$ голоморфна, имеет неотрицательную (или неположительную) ограниченную мнимую часть и выполняется условие (9). Тогда

$$C(z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} f(\lambda) d\lambda, \quad f \in L_1, f \geq 0 \text{ (соответственно } f \leq 0), \quad (10)$$

где f строится по формуле обращения (7).

5. Резольвента унитарного оператора голоморфна внутри и вне единичного круга. При этом соответствующее спектральное представление дается интегралом Коши—Стилтьеса по единичной окружности.

При интегрировании по $\mathbb{T}$ всегда считаем, что $\mathbb{T}$ обходится против часовой стрелки. Это направление принимается за положительное. Для функции $\varphi(\zeta)$, аналитичной при $|\zeta| \neq 1$, через

$\varphi(\mu_+)$ (или $\varphi(\mu_-)$), $|\mu| = 1$, обозначаются ее угловые предельные значения при стремлении ζ к точке $\mu \in \mathbb{T}$ изнутри (соответственно извне). Следующее утверждение вполне аналогично теореме 5.

Теорема 11. Пусть F — функция ограниченной вариации (или соответствующая конечная комплексная мера), а

$$C(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} (\nu - \zeta)^{-1} dF(\nu). \quad (11)$$

Тогда при п.в. $\lambda \in \mathbb{T}$ существуют угловые предельные значения

$$C(\mu_{\pm}) = \pm \pi i \frac{dF(\mu)}{d\mu} + \text{v.p.} \int_{\mathbb{T}} (\nu - \mu)^{-1} dF(\nu), \quad (12)$$

причем интеграл в смысле главного значения в правой части также существует при п.в. $\mu \in \mathbb{T}$. В частности,

$$C(\mu_+) - C(\mu_-) = 2\pi i \frac{dF(\mu)}{d\mu}. \quad (13)$$

Если в (11) $dF(\mu) = i\mu dm(\mu)$, где мера m вещественна, то имеет место равенство симметрии:

$$C(\bar{\zeta}^{-1}) = \overline{C(\zeta)} + C(0), \quad \operatorname{Re} C(0) = 0. \quad (14)$$

В этом случае, наряду с (13), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 2\pi i \frac{dF(\mu)}{d\mu} &= 2i \operatorname{Im} C(\mu_+) - C(0) = \\ &= -2i \operatorname{Im} C(\mu_-) + C(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Следующее утверждение может быть получено (см. [1]) из теоремы 9 с помощью дробно-линейного отображения верхней полуплоскости на единичный круг.

Теорема 12. Для того, чтобы голоморфная при $|\zeta| < 1$ функция $C(\zeta)$ допускала представление

$$C(\zeta) = \overline{C(0)} + i \int_{\mathbb{T}} \mu(\mu - \zeta)^{-1} dm(\mu) \quad (16)$$

с конечной неотрицательной мерой m на окружности $\mathbb{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Im} C(\zeta) \geq 0$. При этом $m(\mathbb{T}) = 2 \operatorname{Im} C(0)$.

Как и в случае функций, голоморфных в полуплоскости, при дополнительном условии ограниченности $\operatorname{Im} C(\zeta)$ мера m абсолютно непрерывна, так что

$$i\mu dm(\mu) = \eta(\mu) d\mu, \quad \text{где } \eta \in L_1(\mathbb{T}), \eta \geq 0. \quad (17)$$

Кроме того, если отказаться от неотрицательности η , то представление

$$C(\zeta) = \overline{C(0)} + \int_{\mathbb{T}} (\mu - \zeta)^{-1} \eta(\mu) d\mu \quad (18)$$

сохраняется для любой голоморфной при $|\zeta| < 1$ функции C с ограниченной мнимой частью. В этом легко убедиться, переходя к новой функции $\tilde{C}(\zeta) = C(\zeta) + ia$, где a —подходящее положительное число. Наконец, из теоремы 12 вытекает

Следствие 13. Пусть функция $C(\zeta)$ голоморфна при $|\zeta| < 1$, имеет там ограниченную мнимую часть и $\operatorname{Re} C(0) = 0$. Тогда справедливо представление

$$C(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} (\mu - \zeta)^{-1} \eta(\mu) d\mu, \quad \eta = \bar{\eta} \in L_1(\mathbb{T}), \quad (19)$$

причем η восстанавливается по формуле

$$\eta(\mu) = \pi^{-1} \operatorname{Im} C(\mu_+) - (2\pi i)^{-1} C(0).$$

○ Нужно лишь применить (18) к функции $\tilde{C}(\zeta) = C(\zeta) - 2^{-1}C(0)$. Формула обращения—следствие первого равенства (15). •

6. Следующее утверждение называется обычно *теоремой Адамара о трех прямых*. Оно служит основой для комплексной интерполяции операторов (см. п.6 в § 6).

Теорема 14. Предположим, что функция $\varphi(z)$ голоморфна в полосе $a_1 < \operatorname{Re} z < a_2$, непрерывна вплоть до границы и равномерно ограничена в этой полосе. Пусть при всех $y \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(a_n + iy)| \leq C_n, \quad n = 1, 2.$$

Тогда при любом $x \in (a_1, a_2)$

$$|\varphi(x + iy)| \leq C_1^{1-\alpha} C_2^\alpha, \quad \alpha = \alpha(x) = (x - a_1)(a_2 - a_1)^{-1}.$$

Доказательство см., например, в т. 2 курса [18].

§ 3. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЙ И СИНГУЛЯРНЫЙ СПЕКТРЫ

1. Пусть $\mathcal{H}$ — какой-либо самосопряженный оператор с областью определения $\mathcal{D}(H)$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Через $E_H(X)$ будем обозначать спектральную меру оператора H , называемую также его *разложением единицы или спектральным семейством*. Обозначение зависимости различных объектов от H часто опускается. Для спектральной меры можно пользоваться обычной терминологией теории меры. Операторная мера $E(X)$ определена на всех борелевских множествах $X \subset \mathbb{R}$. Иногда мы применяем также обозначение $E(\lambda) := E((-\infty, \lambda))$, так что $E(\lambda)$ — производящая функция меры $E(X)$. Носитель $\text{supp } E_H =: \sigma(H)$ спектральной меры называется *спектром оператора H* . Дополнительное множество $\rho(H) = \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ состоит из регулярных точек z , в которых обратный оператор $R(z) = (H - z)^{-1}$ существует, задан на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и ограничен.

Отметим для дальнейшего «поляризационное» тождество

$$4(f, g) = \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2 \quad (1)$$

и неравенство Шварца

$$|(E(X)f, g)|^2 \leq (E(X)f, f)(E(X)g, g). \quad (2)$$

2. Нужная для теории рассеяния классификация спектра получается при рассмотрении набора мер $m(\cdot; f) = (E_H(\cdot)f, f)$ для всевозможных $f \in \mathcal{H}$. Отметим сразу, что

$$m(X; E(Y)f) = m(X \cap Y; f) = m_Y(X; f). \quad (3)$$

Определение 1. Элемент $f \in \mathcal{H}$ называется *абсолютно непрерывным (сингулярным) относительно H* , если мера $m(\cdot; f)$ *абсолютно непрерывна (сингулярна)*. Множества абсолютно непрерывных (сингулярных) элементов обозначим через $\mathcal{H}^{(a)} = \mathcal{H}_H^{(a)}$ ($\mathcal{H}^{(s)} = \mathcal{H}_H^{(s)}$).

Лемма 2. Пусть один из элементов f или g абсолютно непрерывен (сингулярен), а второй произволен. Тогда комплексная мера $m(\cdot; f, g) = (E(\cdot)f, g)$ *абсолютно непрерывна (сингулярна)*.

○ Пусть, например, абсолютно непрерывен (сингулярен) элемент f . Согласно (2)

$$|(E(X)f, g)|^2 \leq (E(X)f, f)\|g\|^2. \quad (4)$$

Если $f \in \mathcal{H}^{(a)}$, то при $|X| = 0$ выполнено $(E(X)f, f) = 0$ и, следовательно, $(E(X)f, g) = 0$. Если $f \in \mathcal{H}^{(s)}$, то $(E(Z')f, f) = 0$ при некотором борелевском множестве Z с $|Z| = 0$ и $Z' = \mathbb{R} \setminus Z$. Применим теперь (4) при $X = Z'$. Тогда $(E(Z')f, g) = 0$, так что мера $(E(\cdot)f, g)$ сингулярна. •

Лемма 3. Множества $\mathcal{H}^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$ образуют подпространства. Эти подпространства ортогональны и

$$\mathcal{H}^{(a)} \oplus \mathcal{H}^{(s)} = \mathcal{H}. \quad (5)$$

○ Линейность множеств $\mathcal{H}^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$ прямо вытекает из леммы 2. Кроме того, в силу той же леммы $(E(X)f, g) = 0$ при $f \in \mathcal{H}^{(a)}$, $g \in \mathcal{H}^{(s)}$ и любом борелевском $X \subset \mathbb{R}$. В частности, при $X = \mathbb{R}$ это означает, что линейалы $\mathcal{H}^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$ ортогональны друг другу. Остается показать, что любой элемент $\varphi \in \mathcal{H}$ можно представить в виде $\varphi = f + g$, где $f \in \mathcal{H}^{(a)}$, $g \in \mathcal{H}^{(s)}$. Рассмотрим меру $m(\cdot; \varphi) = (E(\cdot)\varphi, \varphi)$ и выделим из нее сингулярную часть $m_s(\cdot; \varphi)$. Пусть $|Z| = 0$ и $m_s(Z'; \varphi) = 0$ для $Z' = \mathbb{R} \setminus Z$. Положим $f = E(Z')\varphi$, $g = E(Z)\varphi$. Равенство $f + g = \varphi$ очевидно. В силу (3) и (1.5)

$$m(X; f) = m_{Z'}(Z; \varphi) = m_a(X; \varphi)$$

и аналогично $m(X; g) = m_s(X; \varphi)$. Поэтому мера $m(\cdot; f)$ абсолютно непрерывна, а $m(\cdot; g)$ сингулярна. •

Обозначим через $P^{(a)}$ и $P^{(s)}$ ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{H}^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$ соответственно. При доказательстве леммы 3 мы попутно установили соотношения

$$m(\cdot; P^{(a)}\varphi) = m_a(\cdot; \varphi), \quad m(\cdot; P^{(s)}\varphi) = m_s(\cdot; \varphi). \quad (6)$$

Напомним, что подпространство $\mathcal{H}_1$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *приводящим* для самосопряженного оператора H , если оно (а тогда и $\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_1$) инвариантно относительно спектральной меры оператора H . Ясно, что вместе с $\mathcal{H}_1$ его ортогональное дополнение также приводит H .

Лемма 4. Подпространства $\mathcal{H}^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$ приводят оператор H .

○ Пусть $f \in \mathcal{H}^{(a)}$, а $|X| = 0$. Тогда в силу (3) $m(X; E(Y)f) = 0$ при любом борелевском $Y \subset \mathbb{R}$. Это означает, что $E(Y)f \in \mathcal{H}^{(a)}$. •

Теперь мы можем ввести

Определение 5. Часть $H^{(a)} = P^{(a)}H$ ($H^{(s)} = P^{(s)}H$) оператора H , действующая в подпространстве $\mathcal{H}^{(a)}$ (в подпространстве $\mathcal{H}^{(s)}$), называется абсолютно непрерывной (сингулярной) частью оператора H . Спектр оператора $H^{(a)}$ ($H^{(s)}$) в подпространстве $\mathcal{H}^{(a)}$ ($\mathcal{H}^{(s)}$) называется абсолютно непрерывной (сингулярной) компонентой спектра оператора H и обозначается через $\sigma^{(a)}(H)$ ($\sigma^{(s)}(H)$).

Пусть еще $\mathcal{H}^{(p)}$ — подпространство, образуемое собственными векторами оператора H . Спектр $\sigma^{(p)}(H)$ части H в $\mathcal{H}^{(p)}$ совпадает с замыканием множества собственных значений оператора H и называется точечным. Ясно, что $\mathcal{H}^{(p)} \subset \mathcal{H}^{(s)}$. Часть H в $\mathcal{H}^{(sc)} = \mathcal{H}^{(s)} \ominus \mathcal{H}^{(p)}$ называется сингулярно непрерывной, а ее спектр обозначается через $\sigma^{(sc)}(H)$. При $f \in \mathcal{H}^{(sc)}$ мера $m(\cdot; f)$ непрерывна, но сингулярна.

Через $\sigma^{(ess)}(H)$ обозначаем существенный спектр оператора H , состоящий из $\sigma(H)$ без изолированных собственных значений конечной кратности. Другими словами, $\lambda \in \sigma^{(ess)}(H)$, если найдется такая последовательность f_n , что $\|f_n\| = 1$, $f_n \xrightarrow{w} 0$ и $\|Hf_n - \lambda f_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Будем говорить, что на борелевском множестве X спектр H абсолютно непрерывен, если оператор $E(X)H$ в пространстве $E(X)\mathcal{H}$ абсолютно непрерывен. Аналогичное соглашение применяется и по отношению к другим свойствам оператора H .

3. Напомним, что, по определению, элемент h имеет максимальный спектральный тип относительно самосопряженного оператора H , если все меры $m(\cdot; f)$ $f \in \mathcal{H}$, абсолютно непрерывны относительно меры $m(\cdot; h)$. В сепарабельном пространстве $\mathcal{H}$ такой элемент h обязательно найдется (см., книгу [4]), хотя и не единственным образом. Для меры $m(\cdot; h)$ максимального спектрального типа равенства $E(X) = 0$ и $m(X; h) = 0$ равносильны. Отсюда вытекает, что $\sigma(H) = \text{supp } m(\cdot; h)$. Тип меры $m(\cdot; h)$ называется спектральным типом операторной меры $E(\cdot)$ или самого оператора H .

Теперь нетрудно установить следующее элементарное утверждение.

Лемма 6. При некотором борелевском множестве Z_a проектор на абсолютно непрерывное подпространство допускает представление

$$P^{(a)} = E(Z_a). \quad (7)$$

○ Пусть h имеет максимальный спектральный тип. Рассмотрим сингулярную часть $m_s(\cdot; h)$ меры $m(\cdot; h)$ и такое множество Z_s с $|Z_s| = 0$, что $m_s(\mathbb{R} \setminus Z_s; h) = 0$. Убедимся, что (7) выполняется при $Z_a = \mathbb{R} \setminus Z_s$. Достаточно показать, что при любом $f \in \mathcal{H}$ элемент $E(Z_s)f$ сингулярен, а $E(Z_a)f$ абсолютно непрерывен. Первое из этих утверждений вытекает из того, что согласно (3) мера $m(\cdot; E(Z_s)f)$ сосредоточена на множестве Z_s нулевой лебеговой меры. В силу (1.3) при $|X| = 0$ выполнено $m(X \cap Z_a; h) = m_a(X; h) = 0$ и, следовательно, $m(X \cap Z_a; f) = 0$. Согласно (3) это и означает, что $E(Z_a)f \in \mathcal{H}^{(a)}$. •

Множество Z_a , для которого справедливо (7), определяется не однозначно. Отметим, что множество Z_a , построенное при доказательстве леммы, имеет полную в $\mathbb{R}$ лебегову меру.

С л е д с т в и е 7: Пусть h имеет максимальный спектральный тип относительно H . Тогда элементы $P^{(a)}h$ и $P^{(s)}h$ имеют максимальные спектральные типы относительно $H^{(a)}$ и $H^{(s)}$ соответственно. Кроме того,

$$\sigma^{(a)}(H) = \text{supp } m_a(h), \quad \sigma^{(s)}(H) = \text{supp } m_s(h). \quad (8)$$

○ Наряду с леммой 6, нужно еще учесть равенства (3) и (6).•

Как и в скалярном случае, *минимальным борелевским носителем спектральной меры E* называется такой ее БН $Z^{(0)}$, что для любого другого множества Z полной E -меры выполнено условие $|Z^{(0)} \setminus Z| = 0$. Разумеется, минимальные БН спектральной меры $E(\cdot)$ и обычной меры $(E(\cdot)h, h)$ совпадают, если h — элемент максимального спектрального типа. Введем теперь

О п р е д е л е н и е 8. *Каждый из принадлежащих $\sigma(H)$ минимальных борелевских носителей спектральной меры E будем называть сердцевинной спектра оператора H . Сердцевина спектра обозначается через $\hat{\sigma}(H)$.*

Минимальный БН можно ввести и для абсолютно непрерывной части $E^{(a)} = P^{(a)}E$ спектральной меры H . В этом случае он, естественно, называется *сердцевинной абсолютно непрерывного спектра*. Впрочем, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(H)$ будет минимальным БН и для спектральной меры $E^{(a)}$. Поэтому для нужд теории рассеяния достаточно понятия *сердцевины спектра*.

Подчеркнем, что множество, получаемое из какой-либо сердцевины спектра добавлением множества нулевой лебеговой меры, также будет сердцевинной спектра. Множество, получаемое из $\hat{\sigma}$ вычитанием множества нулевой лебеговой меры,

останется сердцевинной абсолютно непрерывного спектра. Тем самым в теории рассеяния естественно считать, что $\hat{\sigma}$ определяется с точностью до множества нулевой лебеговой меры.

4. Проиллюстрируем введенные понятия на примере оператора с простым спектром. Напомним, что оператор H имеет простой спектр, если существует элемент h , называемый *порождающим* (или *циклическим*), для которого линейная оболочка элементов $E(X)h$ при всевозможных борелевских X плотна в $\mathcal{H}$. Для операторов с простым спектром элемент h —порождающий в том и только в том случае, если он имеет максимальный спектральный тип.

Пример 9. Пусть m —какая-либо неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$, а H —оператор умножения на независимую переменную (λ) в пространстве $L_2(\mathbb{R}; dm)$. Спектральный проектор $E(X)$ является умножением на характеристическую функцию (индикатор) $\chi_X(\lambda)$ множества X . Оператор H имеет простой спектр, причем элемент f циклический, если $f(\lambda) \neq 0$ для п.в. λ по мере m . Тем самым спектральный тип оператора H равен типу меры m . Отсюда следует, что $\mathcal{H}^{(a)} = L_2(\mathbb{R}; dm_a)$, $\mathcal{H}^{(s)} = L_2(\mathbb{R}; dm_s)$, а спектры $\sigma, \sigma^{(a)}$ и $\sigma^{(s)}$ совпадают соответственно с носителями мер m, m_a и m_s . Сердцевина спектра $\hat{\sigma}$ совпадает с минимальным БН меры m .

Рассмотрим теперь два оператора умножения.

Лемма 10. Пусть H_j —оператор умножения на независимую переменную в $\mathcal{H}_j = L_2(\mathbb{R}; dm_j)$, $j = 1, 2$. Тогда H_1 содержит часть, унитарно эквивалентную H_2 , если мера m_2 абсолютно непрерывна относительно m_1 . В частности, H_1 и H_2 унитарно эквивалентны, если m_1 и m_2 имеют общий тип.

○ По условию

$$m_2(X) = \int_X p(\lambda) dm_1(\lambda), \quad p \geq 0.$$

Положим $(Uf)(\lambda) = p^{1/2}(\lambda)f(\lambda)$. Отображение $U : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ изометрично и $H_1 U = U H_2$. Поэтому сужение H_1 на область значений $R(U)$ этого отображения унитарно эквивалентно H_2 .•

В примере 9 мера m_a эквивалентна сужению меры Лебега на сердцевину спектра $\hat{\sigma}$ оператора H . Поэтому в силу леммы 10 оператор $H^{(a)}$ унитарно эквивалентен оператору умножения на

λ в пространстве $L_2(\hat{\sigma}; d\lambda)$ функций, квадратично интегрируемых на $\hat{\sigma}$ по мере Лебега. Оператор $H^{(a)}$ будет унитарно эквивалентным и части оператора умножения в $L_2(\sigma^{(a)}; d\lambda)$, однако при $|\sigma^{(a)} \setminus \hat{\sigma}| > 0$ эта часть не равна всему оператору.

5. В силу теоремы Лебега монотонная функция $(E(\lambda)f, f)$ имеет производную $d(E(\lambda)f, f)/d\lambda \in L_1(\mathbb{R})$ на (зависящем от f) множестве полной лебеговой меры. Применяя тождество (1) к элементам $E(\lambda)f, E(\lambda)g$, найдем, что функция $(E(\lambda)f, g)$ также дифференцируема для п.в. λ . Соответствующее множество полной меры зависит от f и g , а $d(E(\lambda)f, g)/d\lambda$ по-прежнему принадлежит $L_1(\mathbb{R})$. Кроме того, из (2) вытекает оценка

$$\left| \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} \right|^2 \leq \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda} \frac{d(E(\lambda)g, g)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Выражение «при п.в. $\lambda \in X$ » всюду означает, что множество $\tilde{X}$ полной в X меры, на котором выполнено обсуждаемое отношение, может зависеть от всех входящих в формулировку параметров. В противном случае используется термин «при п.в. $\lambda \in X$ независимо от ...» — с указанием параметров, от которых $\tilde{X}$ не зависит.

Из равенств (6) и (1.6) следует, что для любых $f, g \in \mathcal{H}$

$$\frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} = \frac{d(E(\lambda)P^{(a)}f, P^{(a)}g)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Кроме того, в силу (1.5)

$$(P^{(a)}f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} d\lambda. \quad (11)$$

Далее, для произвольной функции φ (определение функции оператора H см. в п. 1 следующего параграфа) справедливо равенство

$$\frac{d(E(\lambda)\varphi(H)f, g)}{d\lambda} = \varphi(\lambda) \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Левая часть здесь понимается, конечно, как производная от функции $(E((\lambda_0, \lambda))\varphi(H)f, g)$ для какого-нибудь конечного λ (или, другими словами, как производная меры $(E(\cdot)\varphi(H)f, g)$)

Согласно (10) равенство (12) достаточно проверять при $f \in \mathcal{H}^{(a)}$, когда

$$(E(X)\varphi(H)f, g) = \int_X \varphi(\lambda) \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} d\lambda.$$

Теперь нужно лишь учесть, что производная этой меры должна быть равна подынтегральному выражению.

Из (12), в частности, вытекает, что

$$\frac{d(E(\lambda)E(X)f, g)}{d\lambda} = \chi_X(\lambda) \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

где $\chi_X(\cdot)$ — индикатор борелевского множества X .

§ 4. ФУНКЦИИ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА: УНИТАРНАЯ ГРУППА И РЕЗОЛВЕНТА

1. Для самосопряженного оператора H спектральная теорема позволяет строить его функцию $\varphi(H)$, если φ измерима и п.в. конечна по спектральной мере $E = E_H$. Область определения $\mathcal{D}(\varphi(H))$ состоит из элементов $f \in \mathcal{H}$, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 d(E(\lambda)f, f) < \infty.$$

Множество таких f плотно в $\mathcal{H}$. При $f \in \mathcal{D}(\varphi(H))$ и любом $g \in \mathcal{H}$ полуторалинейная форма оператора $\varphi(H)$ определяется равенством

$$(\varphi(H)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d(E(\lambda)f, g). \quad (1)$$

При $\varphi = \overline{\varphi}$ оператор $\varphi(H)$ самосопряжен. При ограниченной функции φ оператор $\varphi(H)$ тоже ограничен и $\mathcal{D}(\varphi(H)) = \mathcal{H}$. В последнем случае, понимая интегралы в слабом смысле, мы часто пишем представления вида (1) для самих операторов (вместо их полуторалинейных форм).

В теории рассеяния особенно важное значение имеет унитарная группа $U(t) = U_H(t) = \exp(-iHt)$. Согласно (1) ее полуторалинейная форма

$$(U(t)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda t) d(E(\lambda)f, g) \quad (2)$$

—преобразование Фурье спектральной меры. В терминах $U(t)$ можно построить решение задачи Коши

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = H u, \quad u(0) = f,$$

для нестационарного уравнения Шредингера. Предполагается, что решение $u(t)$ непрерывно дифференцируемо в $\mathcal{H}$ по t и принадлежит $\mathcal{D}(H)$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Поскольку $d/dt \|u(t)\|^2 = 0$, величина $\|u(t)\|$ не зависит от t , а потому решение задачи Коши единственно. При $f \in \mathcal{D}(H)$ решение существует и дается формулой $u(t) = U(t)f$. Для произвольного $f \in \mathcal{H}$ эту функцию можно принять за обобщенное решение рассматриваемой задачи.

2. Другая важная функция оператора H —его резольвента $R(z) = R_H(z) = (H - z)^{-1}$. Ее полуторалинейная форма

$$(F(z)f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} d(E(\lambda)f, g) \quad (3)$$

—интеграл Коши—Стилтьеса по спектральной мере. Связь между функциями (2) и (3) дается соотношением

$$R(\lambda \pm i\varepsilon) = \pm i \int_0^{\infty} \exp(-\varepsilon t \pm i\lambda t) U(\pm t) dt. \quad (4)$$

Для доказательства (4) достаточно подставить в правую часть представление (2) и переставить порядок интегрирований. Поскольку интегралы здесь сходятся абсолютно, законность перестановки оправдывается ссылкой на теорему Фубини.

Положим

$$\begin{aligned} \delta(\lambda, \varepsilon) &= (2\pi i)^{-1} [R(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda - i\varepsilon)] = \\ &= \pi^{-1} \varepsilon R(\lambda + i\varepsilon) R(\lambda - i\varepsilon) \geq 0, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Вновь с помощью теоремы Фубини из (4.3) легко выводится, что при любом ε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda, \varepsilon) d\lambda = I. \quad (6)$$

Из формулы обращения (2.8) следует, что для любого интервала $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$

$$2 \text{ w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda} \delta(\lambda, \varepsilon) d\lambda = E(\Lambda) + E(\bar{\Lambda}), \quad (7)$$

причем слабый предел в левой части существует. Соотношение (7) называется *формулой Стоуна*. Отметим, что в действительности (см. т. 1 курса [18]) в (7) существует и сильный предел. Нам, однако, достаточно понимать (7) в слабом смысле.

Из (3) вытекает также следующее представление спектральной меры через резольвенту. Пусть концы ограниченного интервала $\Lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ не принадлежат спектру оператора H , а простой (без самопересечений) замкнутый контур Γ охватывает Λ , пересекает вещественную ось в точках λ_0 и λ_1 (так что $\Gamma \cap \sigma(H) = \emptyset$) и проходит против часовой стрелки. Тогда

$$E(\Lambda) = -(2\pi i)^{-1} \oint_{\Gamma} R(z) dz. \quad (8)$$

3. В силу равенства (3) из теоремы 2.5 вытекает, что при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{z \rightarrow \lambda \pm i0} (R(z)f, g) = \pm \pi i \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu - \lambda)^{-1} d(E(\mu)f, g). \quad (9)$$

Тем самым

$$\lim_{z \rightarrow \lambda + i0} (R(z)f, g) - \lim_{z \rightarrow \lambda - i0} (R(z)f, g) = 2\pi i \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

и, в частности,

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta(\lambda, \varepsilon)f, g) = \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Последнее соотношение показывает, что справедлива равномерная по ε оценка

$$\varepsilon \pi^{-1} \|R(\lambda \pm i\varepsilon)f\|^2 = (\delta(\lambda, \varepsilon)f, f) \leq C(\lambda; f), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Подчеркнем, что множества полной меры, на которых выполнены соотношения (9) – (12), зависят от f и g . По этой причине,

например, соотношение (11) вовсе не означает существования слабого предела $\delta(\lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В действительности этот оператор не имеет слабого предела ни при одном λ . Это вытекает из равенства

$$\|\delta(\lambda, \varepsilon)\| = \varepsilon \pi^{-1} \sup_{\mu \in \mathbb{R}} [(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2]^{-1} = (\pi \varepsilon)^{-1}.$$

4. Приведем одно свойство абсолютно непрерывных элементов, часто используемое в теории рассеяния. Отметим предварительно, что при $f \in \mathcal{H}^{(a)}$ (или $g \in \mathcal{H}^{(a)}$) мера $d(E(\cdot)f, g)$ абсолютно непрерывна и, следовательно, в интегралах вида (1)

$$d(E(\lambda)f, g) = \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} d\lambda, \quad \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} \in L_1(\mathbb{R}). \quad (13)$$

Лемма 1. Пусть $P^{(a)}$ — проектор на абсолютно непрерывное подпространство H . Тогда

$$\text{w-lim}_{|t| \rightarrow \infty} U(t)P^{(a)} = 0, \quad (14)$$

а если оператор K компактен, то

$$\text{s-lim}_{|t| \rightarrow \infty} KU(t)P^{(a)} = 0, \quad K \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (15)$$

○ Ввиду (2) и (13) соотношение (14) — следствие леммы Римана—Лебега. Соотношение (15) — следствие (14). •

5. Укажем удобный признак абсолютной непрерывности спектра.

Предложение 2. Пусть для любого $f \in \mathcal{D}$, где $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}$, при некотором $p > 1$

$$\sup_{0 < \varepsilon < 1} \int_a^b (\delta(\lambda, \varepsilon)f, f)^p d\lambda < \infty. \quad (16)$$

Тогда на замкнутом интервале $[a, b]$ спектр оператора H абсолютно непрерывен.

○ Достаточно убедиться в абсолютной непрерывности на $[a, b]$ меры $(E(X)f, f)$, где $f \in \mathcal{D}$. Из формулы (7) следует, что для любого интервала X

$$(E(X)f, f) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_X (\delta(\lambda, \varepsilon)f, f) d\lambda. \quad (17)$$

Кроме того, согласно (7) для замкнутых интервалов X вида $[a, a + \gamma]$ и $[b - \gamma, b]$ оценка (17) сохраняется, если правую часть домножить на 2. Оценка (17) распространяется, разумеется, и на конечные объединения непересекающихся интервалов. С помощью неравенства Гельдера оценим правую часть (17) через

$$|X|^s \sup_{0 < \varepsilon < 1} \left[\int_X (\delta(\lambda, \varepsilon) f, f)^p d\lambda \right]^{1/p}, \quad s = 1 - p^{-1} > 0.$$

В силу условия (16) отсюда вытекает, что

$$(E(X)f, f) \leq C|X|^s,$$

а потому (см. п. 2 § 1) мера $(E(X)f, f)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. •

Простым достаточным условием выполнения (16) служит неравенство

$$\sup_{\substack{a \leq \lambda \leq b \\ 0 < \varepsilon < 1}} |(R(\lambda + i\varepsilon)f, f)| < \infty, \quad f \in \mathcal{D}, \quad \overline{\mathcal{D}} = \mathcal{H}. \quad (18)$$

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРЯМОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Прямой интеграл гильбертовых пространств

определяется (подробности см. в книге [4]) как гильбертово пространство вектор-функций $\tilde{f}(\lambda)$, принимающих значения во вспомогательных (инфинитезимальных) гильбертовых пространствах $\mathfrak{h}(\lambda)$, измеримых в квадратично интегрируемых по мере m ; при этом

$$(f, g)_{\mathfrak{H}} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{f}(\lambda), \tilde{g}(\lambda) \rangle dm(\lambda). \quad (2)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathfrak{h}(\lambda)$; $|\cdot|$ — норма, в том числе операторная, в этом пространстве. По определению,

гильбертово пространство $\mathcal{H}$ разложено в прямой интеграл (1), если задано унитарное отображение $\mathcal{F}$ пространства $\mathcal{H}$ на $\mathfrak{H}$. Наличие такого изоморфизма записывается в виде $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathfrak{H}$. Вектор-функцию $\tilde{f}(\lambda) = (\mathcal{F}f)(\lambda)$ будем называть *представителем элемента $f \in \mathcal{H}$ в разложении (1)*.

В рамках абстрактной теории операторов пространства $\mathfrak{h}(\lambda)$ определяются лишь с точностью до унитарной эквивалентности. В частности, в случае $\dim \mathfrak{h}(\lambda) = \text{const}$ (п.в. λ) все $\mathfrak{h}(\lambda)$ можно отождествить с каким-либо одним гильбертовым пространством $\mathfrak{h}$ той же размерности. При наличии такого отождествления прямой интеграл (1) сводится к пространству $L_2(\mathbb{R}; \mathfrak{h}, dm)$ вектор-функций, принимающих значения в одном и том же вспомогательном пространстве $\mathfrak{h}$.

Одна из формулировок спектральной теоремы дается в терминах разложений в прямой интеграл. Именно, для любого самосопряженного оператора H в $\mathcal{H}$ существует разложение (1), в котором оператор $\mathcal{F}H\mathcal{F}^*$ действует как умножение на λ . При этом $\mathcal{F}E(X)\mathcal{F}^*$ сводится к умножению на индикатор χ_X множества X , так что в согласии с (2)

$$(E(X)f, g) = \int_X \langle (\mathcal{F}f)(\lambda), (\mathcal{F}g)(\lambda) \rangle dm(\lambda). \quad (3)$$

Такое разложение $\mathcal{H}$ в прямой интеграл будем называть *диагональным для H или его спектральным представлением*. Отметим, что в диагональном для оператора H разложении (1) мера m должна иметь спектральный тип H . Для операторов H с простым спектром $\dim \mathfrak{h}(\lambda) = 1$. В этом случае H можно реализовать как умножение на λ в пространстве $L_2(\mathbb{R}; dm)$ (см. пример в § 3).

Если A —какой-либо ограниченный оператор в $\mathcal{H}$, перестановочный с H , то в разложении (1) ему отвечает такое измеримое (относительно меры m) семейство операторов $a(\lambda) : \mathfrak{h}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}(\lambda)$ что для любого $f \in \mathcal{H}$

$$(\mathcal{F}Af)(\lambda) = a(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda). \quad (4)$$

Для такого оператора

$$\|A\| = m\text{-sup}_{\lambda \in \mathbb{R}} |a(\lambda)|, \quad (5)$$

где $m\text{-sup}$ означает существенный супремум по мере m .

2. В теории рассеяния нужно рассматривать разложение в интеграл вида (1) для абсолютно непрерывной части $H^{(a)}$ оператора H . Оно строится по абсолютно непрерывной компоненте m_a меры m . Поскольку m_a имеет тип сужения меры Лебега на сердцевину спектра $\hat{\sigma}$ оператора H , то

$$\mathcal{H}^{(a)} \leftrightarrow \int_{\hat{\sigma}} \oplus h(\lambda) d\lambda =: \mathfrak{H}^{(a)}, \quad \hat{\sigma} = \hat{\sigma}(H). \quad (6)$$

Через $\mathcal{F}: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}^{(a)}$ будем обозначать унитарное отображение $\mathcal{H}^{(a)}$ на $\mathfrak{H}^{(a)}$, доопределенное нулем на $\mathcal{H}^{(s)}$. Роль (3) играет теперь соотношение

$$(E^{(a)}(X)f, g) = \int_{\hat{\sigma} \cap X} \langle (\mathcal{F}f)(\lambda), (\mathcal{F}g)(\lambda) \rangle d\lambda.$$

Поэтому из (3.10) и (4.11) вытекает, что для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta(\lambda, \varepsilon)f, g) = \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} = \langle \tilde{f}(\lambda), \tilde{g}(\lambda) \rangle, \quad (7)$$

$$\tilde{f} = \mathcal{F}f, \quad \tilde{g} = \mathcal{F}g.$$

Нам понадобится следующее почти очевидное наблюдение.

Лемма 1. Пусть при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$ задан ограниченный в $\mathfrak{h}(\lambda)$ оператор $a(\lambda)$, а D — какое-либо плотное в $\mathcal{H}$ множество. Предположим, что для любых $f, g \in D$ на (зависящем от f и g) множестве полной в $\hat{\sigma}$ меры

$$\langle a(\lambda)\tilde{f}(\lambda), \tilde{g}(\lambda) \rangle = 0. \quad (8)$$

Тогда $a(\lambda) = 0$ для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$.

○ Пользуясь сепарабельностью $\mathcal{H}$, выделим из D счетное, но по-прежнему плотное в $\mathcal{H}$ подмножество D_0 . Для каждой пары f_n, g_m элементов из D_0 рассмотрим множество полной в $\hat{\sigma}$ меры, на котором определены функции $\tilde{f}_n(\lambda)$, $\tilde{g}_m(\lambda)$ и выполняется условие (8). Ввиду счетности D_0 пересечение всех этих множеств также имеет полную меру. Более того, выбрасывая из него множество нулевой меры, получим (см [4]) множество X полной в $\hat{\sigma}$ меры, на котором элементы $\tilde{f}(\lambda)$ для всевозможных $f \in D_0$ плотны в $\mathfrak{h}(\lambda)$. Можно считать, что при $\lambda \in X$ операторы $a(\lambda)$ ограничены. Поэтому из выполнения равенства (8) для всех $f, g \in D_0$ и какого-либо $\lambda \in X$ следует, что $a(\lambda) = 0$ при том же λ . •

Иногда удобно сведение прямого интеграла (6) к сумме векторных пространств типа L_2 . Именно, пусть борелевское множество σ_k , $k = 1, 2, \dots, \infty$, состоит из тех точек λ , для которых $\dim h(\lambda) = k$, т.е. кратность спектра H в точке λ равна k . Отождествляя $h(\lambda)$ при $\lambda \in \sigma_k$ с одним и тем же пространством h_k , вместо (6) получим разложение

$$\mathcal{H}^{(a)} \leftrightarrow \sum_{1 \leq k \leq \infty} \oplus L_2(\sigma_k; h_k), \quad \dim h_k = k. \quad (9)$$

Определим еще стандартные отображения h_k в $L_2(\sigma_k; h_k) = L_2(\sigma_k) \otimes h_k$. Пусть X_k —какое-либо фиксированное ограниченное подмножество σ_k (при ограниченном σ_k можно, в частности, считать $X_k = \sigma_k$), а $\chi_k = \chi_{X_k}$ —индикатор X_k . Для $x \in h_k$ положим $(\Psi_k x)(\lambda) = \chi_k(\lambda)x$. Тогда Ψ_k —ограниченный оператор из h_k в $L_2(\sigma_k; h_k)$. Можно считать, что Ψ_k действует из h_k во всю сумму в правой части (9). Ясно, что

$$(E(X)\mathcal{F}^*\Psi_k x, \mathcal{F}^*\Psi_l y) = \delta_{kl}\chi_k(\lambda)\chi_l(\lambda)\langle x, y \rangle, \quad (10)$$

где δ_{kl} —символ Кронекера.

3. Рассмотрим теперь вопрос о представлении ограниченных операторов A в виде интегральных операторов в разложении в прямой интеграл. Точнее, в связи с применениями в теории рассеяния будем говорить о ядрах операторов $P^{(a)}AP^{(a)}$ в разложении (6). Разумеется, все сказанное остается справедливым для операторов A , сразу заданных в $\mathcal{H}^{(a)}$. Там, где это не вызывает недоразумений, часто полагаем $P = P^{(a)}$. Примем следующее

Определение 2. Оператор PAP будем называть интегральным оператором в разложении (6), если при п.в. $(\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ найдется такой ограниченный оператор $a(\mu, \nu) : h(\nu) \rightarrow h(\mu)$, что для любых $f, g \in \mathcal{H}^{(a)}$ имеет место равенство

$$(Af, g) = \int_{\hat{\sigma}} d\mu \int_{\hat{\sigma}} d\nu \langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle. \quad (11)$$

Здесь предполагается, что подынтегральная функция в (11) измерима по двумерной мере Лебега на $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$, а сам повторный интеграл сходится. Оператор-функцию $a(\mu, \nu)$ будем называть ядром оператора PAP . Иногда, допуская некоторую неточность, мы и сам оператор A называем интегральным.

Пусть для (Af, g) выполняется представление вида (11), но с переставленным порядком интегрирований. Тогда в соответствии с принятым определением интегральным оказывается оператор A^* (или, точнее, PA^*P), причем его ядро равно $a^*(\nu, \mu)$. В частности, если справедливо (11) и повторный интеграл не зависит от порядка интегрирований, то оба оператора A и A^* будут интегральными.

Из (11) следует, что для любых $X \subset \hat{\sigma}$, $Y \subset \hat{\sigma}$

$$(AE(X)f, E(Y)g) = \int_Y d\mu \int_X d\nu \langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle. \quad (12)$$

Поэтому полуторалинейная форма ядра восстанавливается равенством

$$\langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle = \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \mu} (AE(\nu)f, E(\mu)g), \quad (13)$$

$$f, g \in \mathcal{H}^{(a)}, \quad \text{п.в. } (\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma},$$

причем смешанная производная в правой части существует. Здесь, конечно, надо иметь в виду следующее (ср. с доказательством леммы 1). Множество полной в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ меры, на котором справедливо (13), зависит от f и g . Однако, рассматривая конечные линейные комбинации элементов какого-либо выделенного базиса $\{\Psi_i\}$ в $\mathcal{H}^{(a)}$, найдем, что для таких f и g (13) выполняется на общем множестве полной меры. Кроме того, для множества полной меры в $\hat{\sigma}$ конечные комбинации элементов $\tilde{\Psi}_i(\lambda)$ корректно определены и плотны в $\mathfrak{h}(\lambda)$. Отсюда вытекает, что равенством (13) форма $\langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle$ восстанавливается на плотном в $\mathfrak{h}(\nu) \times \mathfrak{h}(\mu)$ множестве, если пары (μ, ν) принадлежат некоторому множеству полной в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ меры. Поскольку ядро предполагается ограниченным оператором, это однозначно определяет его для п.в. $(\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$. Таким образом, имеет место

Лемма 3. Если ядро $a(\mu, \nu)$ оператора PA^*P существует, то оно определяется однозначно с точностью до множества нулевой меры в квадрате $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$.

Равенство (13) принимает более наглядный вид в терминах представления (9). На элементах $f = \mathcal{F}^* \Psi_l x$, $g = \mathcal{F}^* \Psi_k y$, где $x \in \mathfrak{h}_l$, $y \in \mathfrak{h}_k$, (13) означает, что для п.в. $(\mu, \nu) \in X_k \times X_l$ (это множество может зависеть от x и y)

$$\langle a(\mu, \nu)x, y \rangle = \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \mu} (AE(\nu) \mathcal{F}^* \Psi_l x, E(\mu) \mathcal{F}^* \Psi_k y). \quad (14)$$

Поскольку X_k и X_l — произвольные ограниченные подмножества σ_k и σ_l , равенством (14) форма $\langle a(\mu, \nu)x, y \rangle$ восстанавливается для любых $x \in \mathfrak{h}_l$, $y \in \mathfrak{h}_k$ и п.в. $(\mu, \nu) \in \sigma_k \times \sigma_l$.

Согласно (13) полуторалинейная форма ядра $a(\mu, \nu)$ не зависит от выбора реализации $\mathcal{H}^{(a)}$ в виде прямого интеграла (6) (от отображения $\mathcal{F}$). Само ядро $a(\mu, \nu)$ от реализации, конечно, зависит. Именно, пусть, наряду с (6), пространство $\mathcal{H}^{(a)}$ раскладывается в прямой интеграл $\tilde{\mathcal{H}}^{(a)}$ такого же вида с «инфинитезимальными» пространствами $\tilde{\mathfrak{h}}(\lambda)$. Пусть отображение $\tilde{\mathcal{F}}: \mathcal{H}^{(a)} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}^{(a)}$ задается соотношением $(\tilde{\mathcal{F}}f)(\lambda) = u(\lambda)(\mathcal{F}f)(\lambda)$, где $u(\lambda)$ — унитарное отображение $\mathfrak{h}(\lambda)$ на $\tilde{\mathfrak{h}}(\lambda)$, определенное для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$. Тогда в разложении $\tilde{\mathcal{H}}^{(a)}$ ядро оператора A равно

$$\tilde{a}(\mu, \nu) = u(\mu)a(\mu, \nu)u^*(\nu).$$

Мы не обсуждаем здесь условия, при которых оператор является интегральным. Достаточные условия, обеспечивающие сразу и некоторые специальные свойства его ядра, будут указаны в § 5.4.

4. Определение 2 естественно распространяется на довольно широкий класс неограниченных операторов. Более того, можно рассмотреть и интегральные представления полуторалинейных форм, не порождаемых операторами в $\mathcal{H}$. Для точного описания такого класса форм воспользуемся терминологией теории двойственных пространств (см., например, [2]).

Именно, рассмотрим $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H)$ как гильбертово пространство с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \|Hf\| + \|f\|.$$

Двойственное к $\mathcal{D}$ относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$ пространство $\mathcal{D}^*$ образуется пополнением $\mathcal{H}$ по норме

$$\|g\|_{\mathcal{D}^*} = \sup_{f \in \mathcal{D}} \|f\|_{\mathcal{D}}^{-1} |(g, f)|.$$

Ограниченный оператор $A: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ будем называть *интегральным*, если (11) выполняется для любых $f, g \in \mathcal{H}^{(a)} \cap \mathcal{D}$. Отметим, что в представлении $\mathcal{H}$ в виде прямого интеграла (1) пространство $\mathcal{D}^*$ состоит из вектор-функций $\tilde{f}(\lambda)$, квадратично интегрируемых по мере $(\lambda^2 + 1)^{-1} d\mathfrak{m}(\lambda)$.

Еще более широкое понимание определения 2 получается, если в нем ограничиться рассмотрением элементов, «финитных» относительно H , т.е. таких, что $f = E(X)f$ для какого-либо ограниченного X . Пространство (топологическое) финитных элементов обозначаем — через $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H)$, а двойственное ему относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$ — через $\mathcal{E}^*$. В представлении в виде прямого интеграла (1) $\mathcal{E}^*$ состоит из вектор-функций, которые только локально квадратично интегрируемы по мере $dm(\lambda)$. Ограниченный оператор $A: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$ называем *интегральным*, если (11) выполняется для любых $f, g \in \mathcal{H}^{(a)} \cap \mathcal{E}$.

Отметим, что операторы $R(z): \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{H}$ при $z \in \rho(H)$ и $\delta(\lambda, \varepsilon): \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}$ при $\varepsilon > 0$ ограничены. Поэтому для ограниченного оператора $A: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ произведение $R(z)AR(z)$, $z \in \rho(H)$, будет ограниченным оператором в $\mathcal{H}$. Аналогичным образом для ограниченного оператора $A: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^*$ произведение $E(X)AE(Y)$ будет ограниченным оператором в $\mathcal{H}$, если ограничены множества X и Y .

Многие соотношения §§ 3, 4 автоматически распространяются на элементы из $\mathcal{D}^*$ или даже $\mathcal{E}^*$. Так, соотношения (3.10), (3.12) и (3.13) верны для любых элементов $f, g \in \mathcal{E}^*$, а соотношение (4.11) — для любых $f, g \in \mathcal{D}^*$.

§ 6. КЛАССЫ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Мы приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения об s -числах (сингулярных числах) компактных операторов. Последовательные изложения соответствующей теории можно найти в монографиях [7, 36] или в учебнике [4] (подробнее см. [31]).

1. Пусть $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}$ — гильбертовы пространства и $A: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ — произвольный линейный (не обязательно ограниченный) оператор с плотной в $\mathcal{H}_0$ областью определения $\mathcal{D}(A)$. Через $N(A)$ и $\overline{R(A)}$ обозначаем его ядро (нулевое подпространство) и образ (область значений).

Отметим ортогональное разложение

$$\overline{R(A)} \oplus N(A^*) = \mathcal{H}. \quad (1)$$

Если A замкнут, то он допускает так называемое *полярное разложение*

$$A = F|A|, \quad (2)$$

где модуль $|A| = (A^*A)^{1/2}$ неотрицателен, а «знаковый» оператор $F = \operatorname{sgn} A$ аннулируется на $N(A)$ и унитарно отображает $R(A^*) = R(|A|)$ на $R(A)$.

Следующее утверждение называется *неравенством Хайнца*. Оно устанавливается для пары самосопряженных операторов A, B , действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Лемма 1. Пусть $A \geq 0$, $B \geq 0$, $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ и $\|Bx\| \leq \|Ax\|$ для $x \in \mathcal{D}(A)$. Тогда при любом $\theta \in (0, 1)$ будет $\mathcal{D}(A^\theta) \subset \mathcal{D}(B^\theta)$ и $\|B^\theta x\| \leq \|A^\theta x\|$ для $x \in \mathcal{D}(A^\theta)$.

Через $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ и $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ обозначаются классы ограниченных и компактных операторов, действующих из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}$. При $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ пишется лишь один «аргумент», например $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Обозначение зависимости от пространств, как правило, опускается. В этом параграфе допускается, что пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ разные. Это, однако, каждый раз не оговаривается. Если $A \in \mathfrak{B}$ и $\dim R(A) < \infty$, то такой оператор A называется *конечномерным*. Класс конечномерных операторов обозначается через $\mathfrak{C}$. Напомним, что в гильбертовом пространстве любой компактный оператор может быть получен как предел по норме последовательности конечномерных операторов. При $A \in \mathfrak{S}_\infty$ ($A \in \mathfrak{C}$) и сопряженный оператор A^* компактен (конечномерен). При произвольном $B \in \mathfrak{B}$ оба произведения AB и BA компактны (конечномерны), если $A \in \mathfrak{S}_\infty$ ($A \in \mathfrak{C}$). Таким образом, $\mathfrak{S}_\infty$ и $\mathfrak{C}$ — двусторонние идеалы алгебры $\mathfrak{B}$.

2. Спектр оператора $A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty$ состоит из вещественных собственных чисел, накапливающихся разве лишь к точке нуль; при этом ненулевые собственные числа конечнократны. Через $\lambda_n^+(A)$ ($-\lambda_n^-(A)$) обозначаем положительные (отрицательные) собственные числа, занумерованные с учетом кратностей в порядке убывания (возрастания); $\varphi_n^\pm(A)$ — соответствующие собственные векторы. В случае $A \geq 0$ полагаем $\lambda_n^+(A) = \lambda_n(A)$, $\varphi_n^+(A) = \varphi_n(A)$.

Для произвольного компактного оператора A числа $s_n(A) = \lambda_n(|A|)$ называются его *s-числами* или *сингулярными числами*.

Отметим, что $s_n(A) = s_n(A^*)$ и $s_1(A) = \|A\|$. Из (2) легко извлечь разложение $A \in \mathfrak{S}_\infty$ в ряд (Шмидта):

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\cdot, \varphi_n) \psi_n, \quad s_n = s_n(A), \quad \varphi_n = \varphi_n(|A|), \quad (3)$$

где $\psi_n = F\varphi_n$. Поскольку $s_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то (3) сходится по норме.

Другое (эквивалентное) определение $s_n(A)$ дается в терминах аппроксимации A конечномерными операторами. Пусть $\mathfrak{C}_n$ — множество конечномерных операторов, ранг которых не превосходит n . Ясно, что $A \in \mathfrak{C}_n$ в том и только в том случае, когда ряд (3) состоит не более, чем из n членов. Оказывается, что

$$s_n(A) = \min_{L \in \mathfrak{C}_{n-1}} \|A - L\|, \quad n \geq 2. \quad (4)$$

Определение (4) позволяет приписать s -числа ограниченным операторам, не являющимся компактными. Отметим, что минимум в (4) достигается для произвольных $A \in \mathfrak{B}$.

Соотношение (4) используется для доказательства различных свойств s -чисел. Приведем известные неравенства (Г. Вейля—Фан Сюя):

$$\begin{aligned} s_{n+m-1}(A+B) &\leq s_n(A) + s_m(B), \\ s_{n+m-1}(AB) &\leq s_n(A) s_m(B). \end{aligned} \quad (5)$$

В частности,

$$s_n(B_1 A B_2) \leq \|B_1\| \|B_2\| s_n(A). \quad (6)$$

3. Напомним, что оператор T называется *фредгольмовым*, если области значений операторов T и T^* замкнуты и

$$\dim N(T) = \dim N(T^*) < \infty.$$

Для фредгольмова оператора T обратный оператор T^{-1} иногда удобно понимать в следующем обобщенном смысле. Примем, по определению, что $T^{-1}f = 0$, если $f \in N(T^*)$, и $T^{-1}f = g$, если $f = Tg$ и $g \in R(T^*) = \mathcal{H} \ominus N(T)$. Для фредгольмова T такой обратный оператор T^{-1} всегда существует, ограничен и

$$T^{-1}T = P_{T^*}, \quad TT^{-1} = P_T, \quad (7)$$

где P_T и P_{T^*} — ортогональные проекторы на подпространства $R(T)$ и $R(T^*)$ соответственно. Равенствами (7) оператор

T^{-1} определяется с точностью до произвольного отображения $N(T^*)$ в $N(T)$. При дополнительном условии $N(T^*) \subset N(T^{-1})$ (или $N(T) \subset N((T^{-1})^*)$) оператор T^{-1} фиксируется однозначно первым (соответственно вторым) из равенств (7). Отметим, что для обобщенного обратного оператора сохраняется равенство $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$. Кроме того, для любых двух фредгольмовых операторов T_j , $j = 1, 2$, имеет место тождество:

$$T_2^{-1}P_{T_1} - P_{T_2}T_1^{-1} = T_2^{-1}(T_1 - T_2)T_1^{-1}. \quad (8)$$

Доказательства следующего утверждения в учебной литературе найти не удалось.

Предложение 2. Пусть $A \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда

$$s_n((I - A)^{-1}) \leq (1 - s_n(A))^{-1},$$

когда скоро $s_n(A) < 1$.

○ Согласно (4) оператор A можно представить в виде $A = L + B$, где $L \in \mathfrak{C}_{n-1}$, а $\|B\| = s_n(A) < 1$. Оператор $I - B$ ограниченно обратим (в обычном смысле), и в силу тождества (8)

$$(I - A)^{-1} - P_{I-A} \cdot (I - B)^{-1} = (I - A)^{-1}L(I - B)^{-1} \in \mathfrak{C}_{n-1}.$$

Согласно (4) отсюда следует, что

$$s_n((I - A)^{-1}) \leq \|P_{I-A} \cdot (I - B)^{-1}\| \leq (1 - \|B\|)^{-1}.$$

По построению правая часть равна $(1 - s_n(A))^{-1}$. •

4. В терминах s -чисел строятся симметрично-нормированные идеалы алгебры $\mathfrak{B}$. Напомним, что норма, заданная на двустороннем идеале $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{B}$, называется *симметричной*, если

$$\|B_1AB_2\|_{\mathfrak{S}} \leq \|B_1\| \|B_2\| \|A\|_{\mathfrak{S}} \quad (9)$$

при любых $A \in \mathfrak{S}$ и $B_j \in \mathfrak{B}$, а также $\|A\|_{\mathfrak{S}} = \|A\|$ для одномерного A . Симметричная норма зависит только от s -чисел оператора A , т.е. $\|A_1\|_{\mathfrak{S}} = \|A_2\|_{\mathfrak{S}}$ при $s_n(A_1) = s_n(A_2)$, $n = 1, 2, \dots$. В частности,

$$\|A\|_{\mathfrak{S}} = \|A^*\|_{\mathfrak{S}} = \| |A| \|_{\mathfrak{S}}.$$

Двусторонний идеал $\mathfrak{S}$ называется *симметрично-нормированным*, если он является полным (банаховым) пространством относительно симметричной нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$.

Важные симметрично-нормированные идеалы $\mathfrak{S}_p$ образуются операторами $A \in \mathfrak{B}$, для которых величина

$$\|A\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A), \quad 1 \leq p < \infty, \quad (10)$$

конечна. Можно показать, что функционал $\|\cdot\|_p$ является симметричной нормой. В частности, неравенство (9) вытекает из (6). Отметим, что $\mathfrak{S}_{p_1} \subset \mathfrak{S}_{p_2}$ при $p_1 \leq p_2$ и $\|A\|_{p_1} \geq \|A\|_{p_2}$. Кроме того, имеет место

Предложение 2. Если $A_j \in \mathfrak{S}_{p_j}$, $j = 1, 2$, и $p^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-1} \leq 1$, то $A = A_1 A_2 \in \mathfrak{S}_p$ и

$$\|A\|_p \leq \|A_1\|_{p_1} \|A_2\|_{p_2}. \quad (11)$$

Множество $\mathfrak{C}$ конечномерных операторов плотно в $\mathfrak{S}_p$ по норме $\|\cdot\|_p$, так что пространства $\mathfrak{S}_p$ сепарабельны. Наиболее употребительны идеалы $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта—Шмидта и $\mathfrak{S}_1$ ядерных операторов. Из (11) следует, что произведение двух операторов Гильберта—Шмидта—ядерный оператор. Верно и обратное: любой ядерный оператор может быть представлен (конечно, не единственным образом) в виде произведения двух операторов Гильберта—Шмидта. Отметим, что любой симметрично-нормированный идеал $\mathfrak{S}$ лежит между $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_\infty$, т.е. $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_\infty$.

Иногда рассматривают и более общие классы операторов, порождаемые симметричными квазинормами. Их определение отличается от определения нормы лишь тем, что роль неравенства треугольника играет более общее неравенство:

$$\|A + B\|_{\mathfrak{S}} \leq C(\|A\|_{\mathfrak{S}} + \|B\|_{\mathfrak{S}}).$$

Важный пример квазинормированных классов—идеалы $\mathfrak{S}_p$ для $p \in (0, 1)$, когда функционал $\|\cdot\|_p$ становится квазинормой, причем $C = 2^{1/p-1}$. Отметим, что предложение 3 сохраняется для всех $p > 0$.

5. Остановимся несколько подробнее на свойствах операторов Гильберта—Шмидта. Для $A \in \mathfrak{S}_2$ при любом ортонормированном базисе v_n

$$\|A\|_2^2 = \sum_n \|Av_n\|^2 < \infty, \quad (12)$$

причем сходимость ряда в правой части хотя бы для одного такого базиса обеспечивает включение $A \in \mathfrak{S}_2$. Отсюда легко извлечь, что

$$A = \sum_n (\cdot, u_n) v_n, \quad u_n = A^* v_n, \quad (13)$$

где ряд в правой части сходится по норме $\mathfrak{S}_2$. В случае, когда v_n — собственные векторы оператора AA^* , соотношение (13) сводится к каноническому представлению (3).

Пусть теперь $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ реализованы, как $L_2(M_0; dm_0)$ и $L_2(M; dm)$, где M_0, M — абстрактные пространства с мерами dm_0, dm . Тогда любой оператор $A \in \mathfrak{S}_2$ действует как интегральный, т.е.

$$(Af)(\mu) = \int_{M_0} a(\mu, \nu) f(\nu) dm_0(\nu), \quad (14)$$

при этом

$$\|A\|_2^2 = \int_M \int_{M_0} |a(\mu, \nu)|_2^2 dm(\mu) dm_0(\nu). \quad (15)$$

Это описание прямо переносится на операторы Гильберта — Шмидта, действующие в прямых интегралах вида (5.1) или (5.6). Именно, любой оператор $A \in \mathfrak{S}_2$, действующий в пространстве $\mathcal{H}^{(a)}$, является интегральным в разложении (5.6) в смысле определения 5.2. При п.в. $(\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ его ядро $a(\mu, \nu)$ принадлежит $\mathfrak{S}_2(h(\nu), h(\mu))$ и

$$\|A\|_2^2 = \int_{\hat{\sigma}} \int_{\hat{\sigma}} |a(\mu, \nu)|_2^2 d\mu d\nu. \quad (16)$$

Конструктивно ядро $a(\mu, \nu)$ может быть построено следующим образом. Пусть оператор $A: \mathcal{H}^{(a)} \rightarrow \mathcal{H}^{(a)}$ в каком-либо ортонормированном базисе представлен в виде (13). Обозначим через $\tilde{u}_n = \mathcal{F}u_n$ и $\tilde{v}_n = \mathcal{F}v_n$ представители элементов u_n и v_n в разложении (5.6) и положим

$$a(\mu, \nu) = \sum_n \langle \cdot, \tilde{u}_n(\nu) \rangle_{h(\nu)} \tilde{v}_n(\mu). \quad (17)$$

Поскольку

$$\sum_n \int_{\hat{\sigma}} |\tilde{u}_n(\nu)|_{h(\nu)}^2 d\nu \leq \sum_n \|A^* v_n\|^2 < \infty, \quad (18)$$

то ряд (17) сходится по метрике (16) и, следовательно, по метрике $\mathfrak{S}_2(h(\nu), h(\mu))$ для п.в. $(\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$. Для функции (17) имеет место равенство (5.11). Действительно, при любых $f, g \in \mathcal{H}^{(a)}$ и $\tilde{f} = \mathcal{F}f$, $\tilde{g} = \mathcal{F}g$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\sigma}} \int_{\hat{\sigma}} \langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle d\mu d\nu = \\ = \sum_n \int_{\hat{\sigma}} \langle \tilde{f}(\nu), \tilde{u}_n(\nu) \rangle d\nu \int_{\hat{\sigma}} \langle \tilde{v}_n(\mu), \tilde{g}(\mu) \rangle d\mu. \end{aligned} \quad (19)$$

При условии (18) ряд в правой части абсолютно сходится, так что проведенная перестановка суммирования и интегрирований по μ и ν законна на основании теоремы Фубини. Правая часть (19) очевидно равна форме (Af, g) оператора (13). Тем самым функция (17) является ядром оператора A в смысле определения 5.2. В частности, при п.в. (μ, ν) из $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ эта функция не зависит от выбора разложения (13).

6. При практической проверке принадлежности ограниченного оператора классу $\mathfrak{S}_p$ иногда полезно следующее утверждение. Оно часто называется *теоремой о трех прямых для оператор-функций, кочующих в классах $\mathfrak{S}_p$* . Доказательство легко получается (см. [7, 8]) с помощью теоремы 2.14.

Теорема 4. *Предположим, что оператор-функция $A(z)$ голоморфна в полосе $a_1 < \operatorname{Re} z < a_2$, непрерывна вплоть до границы и выполнено условие*

$$\sup_{a_1 < \operatorname{Re} z < a_2} \|A(z)\| < \infty.$$

Пусть $A(a_n + iy) \in \mathfrak{S}_{p_n}$, $1 \leq p_n < \infty$, и

$$\sup_y \|A(a_n + iy)\|_{p_n} \leq C_n < \infty, \quad n = 1, 2.$$

Тогда при всех $x \in (a_1, a_2)$ значения $A(x + iy)$ принадлежат классу $\mathfrak{S}_p$, где

$$p^{-1} = p_1^{-1} + \alpha(p_2^{-1} - p_1^{-1}), \quad \alpha = \alpha(x) = (x - a_1)(a_2 - a_1)^{-1},$$

причем

$$\|A(x + iy)\|_p \leq C_1^{1-\alpha} C_2^\alpha.$$

В теореме 4 допускается, что одно из чисел $p_n = \infty$. Более того, в этом случае включения $A \in \mathfrak{S}_\infty$ не требуется; нужна лишь равномерная оценка обычной нормы.

7. Через $\mathbb{R}^d$ всюду обозначаем (координатное) евклидово пространство размерностью d ; x —точка в $\mathbb{R}^d$; Ξ^d —двойственное к $\mathbb{R}^d$ евклидово пространство (импульсное), ξ —точка в Ξ^d . Введем в рассмотрение интегральный оператор

$$(\Phi f)(\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\langle x, \xi \rangle) f(x) dx. \quad (20)$$

Оператор Φ (Фурье) унитарно отображает $L_2(\mathbb{R}^d)$ на $L_2(\Xi^d)$. Подробности по этому поводу см., например, в [4].

Рассмотрим теперь оператор Φ , окаймленный слева и справа операторами умножения. Именно, положим

$$T = B_1 \Phi B_2, \quad (21)$$

где B_1, B_2 —умножения на функции $b_1(\xi), b_2(x)$. Ясно, что $T \in \mathfrak{S}_2$, если $b_1 \in L_2(\Xi^d)$ и $b_2 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Аппроксимируя исчезающую на бесконечности функцию b_j финитными, получим признак компактности оператора T .

Лемма 5. Пусть функции b_j ограничены и стремятся к нулю на бесконечности. Тогда оператор (21) компактен.

Более содержательны признаки ядерности. Доказательство следующего утверждения можно найти в курсе [18, т. 3] или в обзорной статье [47].

Теорема 6. Пусть

$$|b_1(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\beta}, \quad |b_2(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\beta},$$

где $\beta > d$. Тогда оператор (21) принадлежит классу $\mathfrak{S}_1$.

§ 7. СЛЕД И ДЕТЕРМИНАНТ

Подробное изложение материала этого параграфа можно найти в книгах [4, 7, 31, 36].

1. В этом параграфе будем считать, что все операторы действуют в одном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. *Спектром* $\sigma(A)$ произвольного замкнутого (и, как всегда, плотно определенного) оператора A называется множество точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых не существует ограниченного обратного оператора $(A - \lambda I)^{-1}$. Отметим, что $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$. Для самосопряженного оператора A это определение эквивалентно данному в § 3.

Спектр компактного оператора A описывается классической теоремой Фредгольма. Именно, при $A \in \mathfrak{S}_\infty$ множество $\sigma(A)$ состоит из собственных чисел, накапливающихся разве лишь к точке нуль. Кроме того, ненулевые собственные числа имеют конечные алгебраические кратности. Аналогичный результат справедлив для компактных операторов, действующих в произвольном банаховом пространстве, а также для операторов, лишь некоторая степень которых компактна (подробнее см. § 8). Поясним, что в банаховом пространстве оператор называется *компактным*, если он переводит любое ограниченное множество в компактное. Класс компактных операторов, вообще говоря, шире замыкания конечномерных операторов по норме. Будем считать, что собственные числа $\lambda_n = \lambda_n(A)$ оператора $A \in \mathfrak{S}_\infty$ (или такого, что $A^l \in \mathfrak{S}_\infty$ при каком-либо натуральном l) пронумерованы с учетом алгебраических кратностей в порядке невозрастания их модулей.

2. На классе ядерных операторов можно определить функционал Tr , являющийся естественным обобщением матричного следа в конечномерном случае. Именно, при $A \in \mathfrak{S}_1$

$$\text{Tr } A = \sum_{n=1}^{\infty} (Av_n, v_n), \quad (1)$$

причем ряд (1) сходится абсолютно для любого ортонормированного базиса $\{v_n\}$, а его сумма от выбора базиса не зависит. Ввиду спектрального представления для самосопряженного оператора $A \in \mathfrak{S}_1$

$$\text{Tr } A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A). \quad (2)$$

Соотношение (2) сохраняется и при произвольном $A \in \mathfrak{S}_1$. Это утверждение называется *теоремой Лидского*; его доказательство можно найти, например, в [7] или [31]. Отметим еще неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(A)| \leq \|A\|_1. \quad (3)$$

В случае $A \in \mathfrak{C}$ величина (1) (или (2)), разумеется, равна следу оператора A , рассматриваемому в конечномерном пространстве $R(A)$.

На бесконечномерный случай переносятся многие свойства следов, известные из линейной алгебры.

Предложение 1. Пусть $A, B \in \mathfrak{B}$ и $AB \in \mathfrak{S}_1$, $BA \in \mathfrak{S}_1$. Тогда

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA). \quad (4)$$

С помощью (2) доказательство этого предложения может быть получено совсем просто. Нужно лишь учесть, что операторы AB и BA имеют общие ненулевые собственные значения, причем их алгебраические кратности совпадают.

Из (4) следует, что след ядерного оператора—линейный инвариант:

$$\text{Tr}(LAL^{-1}) = \text{Tr } A, \quad (5)$$

если оператор L ограничен и ограниченно обратим.

В терминах функционала (1) устанавливается двойственность пространств $\mathfrak{S}_p$ с сопряженными показателями. Именно, любой непрерывный функционал l на $\mathfrak{S}_p$, $1 < p < \infty$, единственным образом представим в виде

$$l(A) = \text{Tr}(AB), \quad (6)$$

где $B \in \mathfrak{S}_q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, причем $\|l\| = \|B\|_q$. В частности, относительно скалярного произведения $(A, B)_2 = \text{Tr}(AB^*)$ пространство $\mathfrak{S}_2$ превращается в гильбертово. Таким образом, $\mathfrak{S}_p^* = \mathfrak{S}_q$ и при $1 < p < \infty$ пространства $\mathfrak{S}_p$ рефлексивны. Кроме того, при двойственности (6) $\mathfrak{S}_1^* = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S}_\infty^* = \mathfrak{S}_1$.

3. Для ядерного A корректно определяется и другой важный функционал—детерминант $\text{Det}(I + A)$. Пусть опять $\{v_n\}$ —произвольный ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Рассмотрим $N \times N$ -матрицу с элементами $\delta_{n,m} + (Av_n, v_m)$, где $1 \leq n, m \leq N$. Для $A \in \mathfrak{S}_1$ определитель этой матрицы имеет предел при $N \rightarrow \infty$, и этот предел не зависит от базиса $\{v_n\}$. Получившийся предел называется *опредетелем оператора $I + A$* и обозначается $\text{Det}(I + A)$.

Эквивалентное определение дается равенством

$$\text{Det}(I + A) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n(A)), \quad (7)$$

причем в силу (3) это бесконечное произведение сходится абсолютно и

$$|\text{Det}(I + A)| \leq \exp \|A\|_1. \quad (8)$$

Равенство (7) обобщает соотношение, хорошо известное для конечномерного случая. Ясно, что

$$\text{Det}(I + A^*) = \overline{\text{Det}(I + A)}.$$

В случае $A \geq 0$, сравнивая (2) и (7), получим неравенство

$$\text{Tr } A \leq \text{Det}(I + A). \quad (9)$$

Из (7) и альтернативы Фредгольма следует, что оператор $I + A$ ограниченно обратим в том и только в том случае, когда $\text{Det}(I + A) \neq 0$.

Функция $\text{Det}(I + A)$ непрерывна при изменении A в ядерной норме, т.е.

$$\text{Det}(I + A_n) \rightarrow \text{Det}(I + A),$$

если $A_n \in \mathfrak{S}_1$ и $\|A_n - A\|_1 \rightarrow 0$. В частности, $\text{Det}(I + A_n) \rightarrow 1$ при $\|A_n\|_1 \rightarrow 0$. Далее, если оператор-функция $A(z)$ голоморфна в некоторой области и принимает там значения из $\mathfrak{S}_1$, то и $\text{Det}(I + A(z))$ голоморфен в той же области. При этом имеет место формула дифференцирования

$$(\text{Det}(I + A(z)))^{-1} \frac{d}{dz} \text{Det}(I + A(z)) = \text{Tr} \left[(I + A(z))^{-1} \frac{dA(z)}{dz} \right]. \quad (10)$$

Не приводя точного доказательства этого равенства, заметим лишь, что по крайней мере формально $\ln \text{Det}(I + A) = \text{Tr} \ln(I + A)$. Дифференцируя под знаком следа логарифм оператор-функции по обычным скалярным правилам, мы и получим тождество (10). Левую часть (10) можно еще записать в виде $\frac{d}{dz} \ln \text{Det}(I + A(z))$, причем производная, конечно, не зависит от выбора ветви логарифма.

В условиях предложения 1 тем же приемом устанавливается, что

$$\text{Det}(I + AB) = \text{Det}(I + BA). \quad (11)$$

Аналогично (5) отсюда следует, что

$$\text{Det}(I + LAL^{-1}) = \text{Det}(I + A). \quad (12)$$

Кроме того, для ядерных A и B

$$\text{Det}[(I + A)(I + B)] = \text{Det}(I + A) \text{Det}(I + B). \quad (13)$$

Последнее равенство может быть установлено аппроксимацией в $\mathfrak{S}_1$ операторов A и B конечномерными операторами.

4. Определение детерминанта (7) естественно распространяется на операторы A из произвольного класса $\mathfrak{S}_p$, $p < \infty$. Именно, если $A \in \mathfrak{S}_p$, где $p = 2, 3, \dots$, то регуляризованный детерминант Det_p вводится равенством

$$\text{Det}_p(I + A) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n) \exp \left(\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} (-1)^k \lambda_n^k \right), \quad \lambda_n = \lambda_n(A). \quad (14)$$

Например,

$$\text{Det}_2(I + A) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda_n) \exp(-\lambda_n). \quad (15)$$

Согласно (14) при $A \in \mathfrak{S}_{p-1}$ величина $\text{Det}_p(I + A)$ выражается через $\text{Det}_{p-1}(I + A)$:

$$\text{Det}_p(I + A) = \text{Det}_{p-1}(I + A) \exp[(p-1)^{-1} (-1)^{p-1} \text{Tr } A^{p-1}]. \quad (16)$$

В частности, при $A \in \mathfrak{S}_1$

$$\text{Det}_p(I + A) = \text{Det}(I + A) \exp \left(\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} (-1)^k \text{Tr } A^k \right). \quad (17)$$

Регуляризованные определители сохраняют многие свойства обычных. Так, функция $\text{Det}_p(I + A)$ непрерывна по A при изменении A в метрике $\mathfrak{S}_p$. Если оператор-функция $A(z)$ голоморфна в некоторой области и принимает там значения из $\mathfrak{S}_p$, то и функция $\text{Det}_p(I + A(z))$ голоморфна в той же области. Обобщение (10) имеет вид

$$\frac{d}{dz} \ln \text{Det}_p(I + A(z)) = (-1)^{p-1} \text{Tr}[(I + A(z))^{-1} A^{p-1}(z) A'(z)]. \quad (18)$$

При $A \in \mathfrak{S}_1$ эта формула является, конечно, следствием (10) и (17).

Далее, согласно (14) при $A \in \mathfrak{S}_p$ оператор $I + A$ ограниченно обратим в том и только в том случае, когда $\text{Det}_p(I + A) \neq 0$. При $AB \in \mathfrak{S}_p$ и $BA \in \mathfrak{S}_p$ на регуляризованные определители переносятся тождества (11), а потому и (12). Обобщение соотношения (13) отметим для $p = 2$:

$$\text{Det}_2((I + A)(I + B)) = \text{Det}_2(I + A) \text{Det}_2(I + B) \exp(-\text{Tr}(AB)). \quad (19)$$

§ 8. АНАЛИТИЧЕСКАЯ АЛЬТЕРНАТИВА ФРЕДГОЛЬМА

В этом параграфе рассматривается задача об обращении голоморфной оператор-функции, значения которой отличаются на компактные операторы от единичного. Для этого стандартные результаты линейной алгебры комбинируются с различными теоремами единственности для скалярных аналитических функций. Простейшая возможность состоит в использовании теоремы об отсутствии накопления нулей внутри области аналитичности функции, не равной тождественно нулю. На этом пути получается обобщение (см. далее теорему 2) сформулированной в п. 1 § 7 классической теоремы Фредгольма. Далее мы применяем приведенные в п. 1 § 2 теоремы единственности в терминах граничных значений аналитической функции. В результате и оператор-функцию удастся обратить (см. далее теоремы 3 и 5) вплоть до границы ее области аналитичности.

1. Для конечномерного оператора A построение обратного оператора $(I - A)^{-1}$ сводится к задаче линейной алгебры. Действительно, обозначая через A_R сужение A на его область значений $R(A)$, найдем, что

$$(I - A)^{-1} = I + (I - A_R)^{-1}A. \quad (1)$$

При построении $(I - A)^{-1}$ мы допускаем, что не сам оператор A , а лишь некоторая его степень компактна. В связи с этим напомним (см., например, [10]), что при произвольном $A \in \mathfrak{B}$ и любом натуральном l

$$\sigma(A^l) = \sigma(A)^l. \quad (2)$$

По определению, правая часть здесь состоит из точек μ , для которых $\mu = \lambda^l$ при каком-нибудь $\lambda \in \sigma(A)$.

Ниже аналитичность (голоморфность) оператор-функций всегда можно понимать в слабом смысле. Следующее почти очевидное утверждение носит локальный характер.

Лемма 1. Пусть оператор-функция $A(z)$ голоморфна в окрестности какой-либо точки z_0 и $1 \notin \sigma(A(z_0))$. Тогда в достаточно малой окрестности z_0 оператор $(I - A(z))^{-1}$ существует, ограничен и зависит от z голоморфно.

○ Поскольку оператор $(I - A(z_0))^{-1} = F(z_0)$ существует и ограничен, то

$$I - A(z) = [I - (A(z) - A(z_0))F(z_0)](I - A(z_0)). \quad (3)$$

При достаточно малой величине $|z - z_0|$ норма оператора $(A(z) - A(z_0))F(z_0)$ меньше 1. Поэтому для таких z обратный оператор к первому сомножителю в правой части существует и представляется рядом последовательных приближений. •

2. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество. Функцию (в том числе операторную) $F(z)$ будем называть *мероморфной* в Ω , если она голоморфна там, за исключением дискретного множества $\mathfrak{N}$ своих полюсов. Таким образом, мероморфная функция $F(z)$ голоморфна по $z \in \Omega \setminus \mathfrak{N}$, где «особое множество» $\mathfrak{N}$ не имеет точек накопления в Ω . Кроме того, разложения $F(z)$ в ряды Лорана в окрестностях точек из $\mathfrak{N}$ должны содержать лишь конечное число сингулярных членов.

Следующее утверждение называют часто *аналитической альтернативой Фредгольма*.

Теорема 2. Пусть оператор-функция $A(z)$ голоморфна в Ω , $A^l(z) \in \mathfrak{S}_\infty$ для какого-нибудь натурального l и при некотором $z_1 \in \Omega$ существует ограниченный оператор $(I - A(z_1))^{-1}$. Тогда оператор-функция $(I - A(z))^{-1} =: F(z)$ мероморфна по $z \in \Omega$, причем множество ее полюсов

$$\mathfrak{N} = \{z \in \Omega : 1 \in \sigma(A(z))\}. \quad (4)$$

Кроме того, в разложении $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности любой точки $z_0 \in \mathfrak{N}$ коэффициенты при отрицательных степенях $z - z_0$ суть конечномерные операторы.

○ Согласно лемме 1 оператор-функция $F(z)$ голоморфна по $z \in \Omega \setminus \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ определяется равенством (4). Поэтому надо лишь установить дискретность $\mathfrak{N}$, а также проверить свойства разложения $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z_0 \in \mathfrak{N}$.

Предположим сначала, что сам оператор $A(z)$ компактен. В окрестности каждой точки $z_0 \in \Omega$ задача сводится к конечномерной. Именно, пусть $A(z_0) = K_0 + B_0$, где $k_0 = \dim R(K_0) < \infty$, а $\|B\| = c_1 < 1$. Рассмотрим такой круг:

$$D_{z_0}(r) = \{z : |z - z_0| < r\} \subset \Omega, \quad r = r(z_0),$$

что $\|A(z) - A(z_0)\| \leq c_2$ при $z \in D_{z_0}(r)$ и $c = c_1 + c_2 < 1$. Положим

$$B(z) = B_0 + A(z) - A(z_0).$$

Тогда $\|B(z)\| \leq c < 1$ и

$$I - A(z) = I - B(z) - K_0 = (I - K(z))(I - B(z)), \quad (5)$$

причем оператор-функция

$$K(z) = K_0(I - B(z))^{-1} \quad (6)$$

голоморфна в $D_{z_0}(r)$ и $R(K(z)) \subset R(K_0)$. Следовательно, множество $\mathfrak{N} \cap D_{z_0}(r)$ состоит из тех и только тех z , где оператор $I - K(z)$ необратим, или, что то же самое, где $\text{Det}(I - K(z)) = 0$. Поскольку функция $\text{Det}(I - K(z))$ аналитична в $D_{z_0}(r)$, ее нули либо не имеют в $D_{z_0}(r)$ точек накопления, либо она тождественно равна нулю в $D_{z_0}(r)$. Таким образом, либо множество $\mathfrak{N}$ не имеет точек накопления в $D_{z_0}(r)$, либо $\mathfrak{N}$ заполняет весь круг $D_{z_0}(r)$.

Предположим, что $\mathfrak{N}$ накапливается к некоторой точке $z_0 \in \Omega$. В силу связности Ω точки z_1 и z_0 можно соединить непрерывной кривой. По лемме Гейне—Бореля на этой кривой найдется такой конечный набор точек $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}, z_N = z_0$, что соответствующие круги $D_{z_n}(r_n)$, $r_n = r_n(z_n)$, попарно пересекаются, т.е.

$$D_{z_n}(r_n) \cap D_{z_{n+1}}(r_{n+1}) \neq \emptyset, n = 1, \dots, N-1.$$

Поскольку, как уже проверено, $D_{z_N}(r_N) \subset \mathfrak{N}$, теперь последовательно убеждаемся, что все круги $D_{z_{N-1}}(r_{N-1}), \dots, D_{z_1}(r_1)$ должны принадлежать множеству $\mathfrak{N}$. В то же время по условию $z_1 \notin \mathfrak{N}$. Отсюда следует дискретность $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим разложение $F(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ при $z_0 \in \mathfrak{N}$. Из равенства (5) вытекает, что

$$F(z) = (I - B(z))^{-1}(I - K(z))^{-1}, \quad (7)$$

где сомножитель $(I - B(z))^{-1}$ голоморфен в окрестности точки z_0 , а $K(z)$ определяется равенством (6). Сузим оператор $I - K(z)$ на подпространство $R(K_0)$ размерности k_0 . Детерминант такой оператор-функции не может иметь нулей порядка выше, чем k_0 . Строя обратный оператор по обычному рецепту линейной алгебры, найдем, что на инвариантном для $K(z)$ подпространстве $R(K_0)$

$$(I - K(z))^{-1} = I + \sum_{n=-n_0}^{\infty} \mathcal{K}_n(z - z_0)^n, \quad (8)$$

причем $n_0 \leq k_0$ и $\dim \mathcal{K}_n \leq k_0$. В силу (1) отсюда следует, что аналогичное разложение справедливо и для оператора $I - K(z)$, рассматриваемого во всем пространстве. Поэтому согласно (7), (8) и $F(z)$ разлагается в ряд Лорана лишь с конечным

числом отрицательных степеней $z = z_0$ и с конечномерными коэффициентами при них.

Перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть $A'(z_1) \in \mathfrak{S}_\infty$ и $1 \notin \sigma(A(z_1))$. Покажем, что найдется такое натуральное $m \geq l$, что $1 \notin \sigma(A^m(z_1))$. В самом деле, спектр компактного оператора $A'(z_1)$ состоит из собственных значений, накапливающихся лишь к нулю. В силу (2) спектр оператора $A(z_1)$ обладает тем же свойством. В частности, на единичной окружности лежит лишь конечное число собственных значений $\nu_1, \dots, \nu_s$ оператора $A(z_1)$. Вновь в силу (2) спектр $A^m(z_1)$ на единичной окружности состоит из чисел $\nu_1^m, \dots, \nu_s^m$. Поскольку по условию $\nu_j \neq 1$, $j = 1, \dots, s$, можно так подобрать сколь угодно большое m , что и $\nu_j^m \neq 1$, $j = 1, \dots, s$.

Таким образом, оператор-функция $\tilde{A}(z) = A^m(z)$ принимает компактные значения и существует $(I - \tilde{A}(z_1))^{-1}$. Применим к $\tilde{A}(z)$ уже доказанную часть теоремы (для случая $l = 1$). Из нее вытекает, что множество

$$\tilde{\mathfrak{N}} = \{z \in \Omega : 1 \in \sigma(\tilde{A}(z))\}$$

дискретно. Теперь дискретность $\mathfrak{N}$ следует из очевидного включения $\mathfrak{N} \subset \tilde{\mathfrak{N}}$. Наконец, утверждения о разложении $F(z)$ в ряд Лорана следуют из равенства

$$(I - A(z))^{-1} = (I + A(z) + \dots + A^{m-1}(z))(I - \tilde{A}(z))^{-1} \quad (9)$$

и соответствующих утверждений о $(I - \tilde{A}(z))^{-1}$. •

В частном случае $A(z) = zA$, $\Omega = \mathbb{C}$, $z_1 = 0$ теорема 2 сводится к теореме Фредгольма о спектре оператора, некоторая степень которого компактна.

3. В теории рассеяния нам понадобится информация о структуре особого множества оператор-функции на границе ее области аналитичности. С помощью теоремы 2.1, а точнее ее следствия для функций непрерывных вплоть до границы, следующий результат устанавливается вполне аналогично теореме 2.

Теорема 3. Пусть Λ — интервал вещественной оси, а оператор-функция $A(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 в прямоугольнике:

$$\Omega = \Omega_\Lambda^{(\pm)} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in \Lambda, \pm \operatorname{Im} z \in (0, \varepsilon_0)\}. \quad (10)$$

Предположим, кроме того, что $A(z)$ непрерывна по норме вплоть до Λ . Тогда множество

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\Lambda}^{(\pm)} = \{\lambda \in \bar{\Lambda} : 1 \in \sigma(A(\lambda \pm i0))\}$$

замкнуто и имеет нулевую лебегову меру, а оператор-функция $F(z) = (I - A(z))^{-1}$ мероморфна в Ω и непрерывна по норме при приближении z к точкам из множества $\bar{\Lambda} \setminus \mathcal{N}$.

○ Мероморфность $F(z)$ вытекает из теоремы 2. При $\lambda_0 \in \bar{\Lambda} \setminus \mathcal{N}$ и $z_0 = \lambda_0 \pm i0$ оператор $F(z_0)$ существует и ограничен. Аналогично доказательству леммы 1, легко убедиться, что ограниченный оператор $F(z)$, $z \in \bar{\Omega}$, будет существовать в достаточно малой окрестности такой точки z_0 и $\|F(z) - F(z_0)\| \rightarrow 0$ при $|z - z_0| \rightarrow 0$. Отсюда вытекает, что полюсы $F(z)$ не могут накапливаться к точкам из $\bar{\Lambda} \setminus \mathcal{N}$ и множество $\bar{\Lambda} \setminus \mathcal{N}$ открыто (в $\bar{\Lambda}$). Следовательно, дополнительное множество $\mathcal{N}$ замкнуто.

Остается показать, что $|\mathcal{N}| = 0$. Воспользуемся конструкцией, изложенной при доказательстве теоремы 2. Пусть сначала $l = 1$. Для любого $\lambda_0 \in \bar{\Lambda}$ рассмотрим круг $D_{\lambda_0}(r)$, $r = r(\lambda_0)$, такой, что при $z \in D_{\lambda_0}(r) \cap \bar{\Omega}$ выполняются представления (5), (6), где $\|B(z)\| \leq c < 1$, а $\dim K_0 < \infty$. Скалярная функция $\text{Det}(I - K(z))$ голоморфна по $z \in D_{\lambda_0}(r) \cap \Omega$ и непрерывна вплоть до $\bar{\Lambda}$, а соотношения $1 \in \sigma(A(z))$ и $\text{Det}(I - K(z)) = 0$ равносильны. Функция $\text{Det}(I - K(z))$ не равна тождественно нулю в $D_{\lambda_0}(r) \cap \Omega$. Поэтому в силу теоремы 2.1 множество ее нулей на $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r)$ имеет меру нуль. Отсюда следует, что $|\mathcal{N} \cap (\lambda_0 - r, \lambda_0 + r)| = 0$. Коль скоро согласно лемме Гейне—Бореля $\bar{\Lambda}$ покрывается конечным числом построенных промежутков $(\lambda_0 - r, \lambda_0 + r)$, то мера всего $\mathcal{N}$ также равна нулю.

Для перехода к общему случаю надо опять (ср. с доказательством теоремы 2) рассмотреть вспомогательную оператор-функцию $\tilde{A}(z) = A^m(z)$. Она удовлетворяет условиям доказываемой теоремы для случая $l = 1$. Следовательно множество

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{\lambda \in \bar{\Lambda} : 1 \in \sigma(\tilde{A}(\lambda \pm i0))\} \quad (11)$$

имеет нулевую меру. Остается заметить, что $\mathcal{N} \subset \tilde{\mathcal{N}}$. •

Замечание 4. Как видно из доказательства, теоремы 2 и 3 распространяются на банаховы пространства, если $\mathfrak{S}_{\infty}$ понимать как множество ограниченных операторов, аппроксимируемых по норме конечномерными.

Нам понадобится также модификация теоремы 3 для случая, когда вместо непрерывности вплоть до границы оператор-функция $A(z)$ имеет лишь угловые предельные значения, но зато сходимости понимается в смысле $\mathfrak{S}_p$.

Теорема 5. Пусть в области (10) оператор-функция $A(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и имеет угловые предельные значения в $\mathfrak{B}$ для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Предположим также, что при некоторых натуральных l и p оператор-функция $A^l(z)$ принимает значения в $\mathfrak{S}_p$ и имеет угловые предельные значения в этом классе для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Тогда мероморфная в Ω оператор-функция $F(z) = (I - A(z))^{-1}$ имеет в смысле сходимости по норме угловые предельные значения для п.в. $\lambda \in \Lambda$.

○ Подберем $m \geq l$ так же, как в теоремах 2 и 3, и положим $\tilde{A}(z) = A^m(z)$. Аналогично доказательству теоремы 3, достаточно убедиться, что оператор $I - \tilde{A}(\lambda \pm i0)$ обратим для п.в. $\lambda \in \Lambda$. С этой целью нужно проверить, что мера множества (11) равна нулю. Регуляризованный (см. п. 4 § 7) определитель $\text{Det}_p(I - \tilde{A}(z))$ голоморфен по $z \in \Omega$, не равен тождественно нулю и имеет угловые предельные значения для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Кроме того, включение $\lambda \in \tilde{\mathcal{N}}$ равносильно равенству $\text{Det}_p(I - \tilde{A}(\lambda \pm i0)) = 0$. В то же время по теореме 2.1 это равенство может выполняться лишь на множестве нулевой меры. •

§ 9. РЕЗОЛЬВЕНТНОЕ УРАВНЕНИЕ

При стационарном построении теории рассеяния для пары самосопряженных операторов H_0 и H так или иначе важную роль играет уравнение, связывающее их резольвенты. Это уравнение может быть применено (см. § 10) и для корректного определения полного гамильтониана H .

1. Пусть H_0, H — самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ соответственно; $R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}$, $R(z) = (H - z)^{-1}$ — их резольвенты; $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ — ограниченный оператор (отождествления); $\mathfrak{G}$ — вспомогательное гильбертово пространство. Напомним, что оператор $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ называется *H-ограниченным*, если $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(G)$ и оператор $GR(z)$ ограничен при z из резольвентного множества $\rho = \rho(H)$. Для таких G мы систематически считаем, что (по определению)

$$R(z)G^*: = (GR(\bar{z}))^*. \quad (1)$$

Если оператор G допускает замыкание и, следовательно, G^* плотно определен, то

$$(GR(\bar{z}))^* = \overline{R(z)G^*}.$$

В терминах двойственных пространств $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H)$ и $\mathcal{D}^*$ (см. п. 4 § 5) соотношение (1) означает, что оператор G^* можно рассматривать как ограниченный из $\mathfrak{E}$ в $\mathcal{D}^*$. Далее, не оговаривая это каждый раз особо, для H -ограниченного оператора G мы пишем G^* , имея в виду, что его точный смысл дается соотношением (1).

Аналогичным образом, если G определен лишь на финитных элементах из $\mathcal{E} = \mathcal{E}(H)$ и для ограниченных множеств Λ ограничены операторы $GE(\Lambda) =: G_\Lambda$, то имеет смысл оператор $E(\Lambda)G^* := G_\Lambda^*$. В этом случае G^* можно рассматривать как ограниченный оператор из $\mathfrak{E}$ в $\mathcal{E}^*$.

Мы часто используем факторизацию возмущения

$$V := HJ - JH_0 = G^*G_0, \quad G_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{E}, \quad G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{E}. \quad (2)$$

В точном смысле соотношение (2) понимается как равенство соответствующих полуторалинейных форм

$$v[f_0, f] := (Jf_0, Hf) - (JH_0f_0, f) = (G_0f_0, Gf). \quad (3)$$

Как правило, мы считаем, что операторы G_0 и G ограничены соответственно относительно H_0 и H , а равенство (3) рассматривается на элементах $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$, $f \in \mathcal{D}(H)$. Поскольку оператор V , рассматриваемый как отображение $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(H_0)$ в $\mathcal{D}^*$, ограничен, то факторизация (2) всегда существует, но определяется, конечно, не однозначно. Иногда, впрочем, достаточно рассматривать (3) лишь на некоторых подмножествах $\mathcal{D}(H_0)$ и $\mathcal{D}(H)$. Наборы $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(H_0)$ и $\mathcal{E}$ «финитных» элементов f_0 и f дают наиболее узкий естественный выбор таких подмножеств. При этом достигается самое широкое понимание (3).

Получим и теперь уравнение, связывающее резольвенты операторов H_0 и H . С этой целью рассмотрим (3) на элементах $f_0 = R_0(z)\psi_0$, $f = R(\bar{z})\psi$, где $\psi \in \mathcal{H}_0$, $\psi \in \mathcal{H}$ произвольны, а $z \in \rho_0 \cap \rho$, $\rho_0 = \rho(H_0)$. Тогда

$$(JR_0(z)\psi_0, \psi) - (J\psi_0, R(\bar{z})\psi) = (G_0R_0(z)\psi_0, GR(\bar{z})\psi).$$

Все операторы здесь корректно определены и ограничены, а потому

$$JR_0(z) - R(z)J = (GR(\bar{z}))^*G_0R_0(z). \quad (4)$$

Соотношение (4) называется *резольвентным тождеством* или *уравнением*. Таким образом, справедливо

Предложение 1. Пусть в (2) сомножители G_0 и G ограничены относительно операторов H_0 и H соответственно. Тогда при всех $z \in \rho_0 \cap \rho$ выполняется тождество (4).

Формально равенство (4) можно записать в виде

$$JR_0(z) - R(z)J = R(z)V R_0(z). \quad (5)$$

Это соотношение приобретает корректный смысл, если V рассматривать как оператор из $\mathcal{D}_0$ в $\mathcal{D}^*$.

Выделим частный случай, когда возмущение (2) является ограниченным оператором. В точном смысле это означает, что форма (3) удовлетворяет оценке

$$|v[f_0, f]| \leq C \|f_0\| \|f\|.$$

При этом условии форме (3) отвечает такой ограниченный оператор $V: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$, что

$$(Vf_0, f) = v[f_0, f], \quad f_0 \in \mathcal{D}(H_0), \quad f \in \mathcal{D}(H).$$

Оператор V и принимается за возмущение. Оценка для $v[f_0, f]$ равносильна тому, что $J: \mathcal{D}(H_0) \rightarrow \mathcal{D}(H)$, а оператор $V = HJ - JH_0$ распространяется с $\mathcal{D}(H_0)$ до ограниченного оператора на всем пространстве $\mathcal{H}_0$. В этом случае $J^*: \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{D}(H_0)$.

2. Соотношение (4) можно рассматривать как уравнение для резольвенты полного гамильтониана. Решение этого уравнения относительно $R(z)$ требует, однако, дополнительных предположений. В дальнейших рассмотрениях этого параграфа операторы H_0 и H теряют равноправие. Первый из них считается заданным, и предположения о возмущении $V = G^*G_0$ делаются в его терминах. Полный гамильтониан определяется по невозмущенному оператору H_0 и возмущению V лишь с помощью равенства вида (3) для его полуторационной формы.

Далее, в этом параграфе будем считать, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$, а операторы G_0 и G ограничены относительно операторов $|H_0|^{\theta_0}$ и $|H_0|^\theta$ соответственно, где θ_0 — какое-либо число из промежутка $[1/2, 1]$, а $\theta = 1 - \theta_0 \in [0, 1/2]$. Таким образом,

$$G_0(|H_0| + I)^{-\theta_0} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{G}), \quad G(|H_0| + I)^{-\theta} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{G}). \quad (6)$$

Возмущение V предполагается симметричным

$$(G_0f, Gg) = (Gf, G_0g), \quad f, g \in \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0}) \quad (7)$$

При этих условиях примем

Определение 2. Будем говорить, что самосопряженный оператор H отвечает сумме $H_0 + G^*G_0$, если выполнены следующие два условия. Во-первых, для любой регулярной точки $z \in \rho$ его резольвента $R(z)$ допускает представление

$$R(z) = (|H_0| + I)^{-\theta_0} \Gamma(z) (|H_0| + I)^{-\theta}, \quad (8)$$

где оператор $\Gamma(z)$ ограничен. В частности, $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$. Во-вторых, при всех $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$ и $f \in \mathcal{D}(H)$

$$(Hf, f_0) = (f, H_0 f_0) + (Gf, G_0 f_0). \quad (9)$$

В определении 2 оператор H заранее предполагается самосопряженным. Однако имеет место

Замечание 3. При условиях (6), (7) оператор H , для которого $\overline{\mathcal{D}(H)} = \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$ и выполнено равенство (9), обязательно симметричен. Действительно, полагая $H_0^{\theta_0} = \operatorname{sgn} H_0 |H_0|^{\theta_0}$, равенство (9) в форме

$$(Hf, g) = (H_0^{\theta_0} f, |H_0|^{\theta} g) + (G_0 f, Gg), \quad f \in \mathcal{D}(H), \quad (10)$$

можно распространить на все $g \in \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$. В частности, (10) применимо к любым $f, g \in \mathcal{D}(H)$. Остается учесть самосопряженность оператора H_0 и равенство (7).

Если в условиях этого замечания для каких-либо двух точек $z_{\pm}$, $\pm \operatorname{Im} z_{\pm} > 0$ (или одной вещественной точки), область значений $R(H - z_{\pm} I)$ совпадает с $\mathcal{H}$, то оператор H самосопряжен. Далее мы увидим (см. теорему 5), что определению 2 может удовлетворять лишь один самосопряженный оператор. Нам понадобится также

Замечание. 4 В силу тождества Гильберта

$$R(z) = R(z_1) - (z - z_1)R^2(z_1) + (z - z_1)^2 R(z_1)R(z)R(z_1)$$

представление (8) достаточно проверить для какой-либо одной регулярной точки $z_1 \in \rho(H)$.

Отметим также, что при условии (8) оператор

$$G_0 R(z) G^* = [G_0 (|H_0| + I)^{-\theta_0}] \Gamma(z) [G (|H_0| + I)^{-\theta}]^* \quad (11)$$

корректно определен, ограничен и голоморфен по $z \in \rho(H)$.

Достаточным условием справедливости представления (8) служит включение

$$\mathcal{D}(|H|^{\theta_0}) \subset \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0}). \quad (12)$$

Действительно, (12) означает, что оператор

$$L_{\theta_0} = (|H_0| + I)^{\theta_0} (|H| + I)^{-\theta_0}$$

ограничен. В силу неравенства Хайнца (см. лемму 6.1) оператор L_{θ} также будет ограниченным. Ясно, что (8) выполняется, если положить

$$\Gamma(z) = L_{\theta_0}[(|H| + I)R(z)]L_{\theta}^*.$$

При условии (12) этот оператор—произведение трех ограниченных сомножителей. В свою очередь, для справедливости (12) достаточно соотношения $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H_0)$.

3. Вернемся к рассмотрению резольвентного тождества. При $J = I$ и условии (7), наряду с (4), выполняется и симметричное ему тождество. Таким образом, при $z \in \rho_0 \cap \rho$

$$R(z) - R_0(z) = -(GR(\bar{z}))^* G_0 R_0(z) = -(GR_0(\bar{z}))^* (G_0 R(z)). \quad (13)$$

Если $R(z)$ удовлетворяет соотношению (8), то к обеим частям можно применить слева оператор G_0 , а справа—оператор G^* . Это приводит к тождеству

$$\begin{aligned} [I + G_0 R_0(z) G^*][I - G_0 R(z) G^*] = \\ = [I - G_0 R(z) G^*][I + G_0 R_0(z) G^*] = I. \end{aligned} \quad (14)$$

Из него вытекает, что оба сомножителя в (14) при $z \in \rho_0 \cap \rho$ ограниченно обратимы. Итерируя (13), найдем, что

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) G^* [I - G_0 R(z) G^*] G_0 R_0(z).$$

В силу (14) отсюда вытекает представление

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z) G^* [I + G_0 R_0(z) G^*]^{-1} G_0 R_0(z). \quad (15)$$

Аналогичным образом, можно и обратно выразить $R_0(z)$ через $R(z)$:

$$R_0(z) = R(z) + R(z) G^* [I - G_0 R(z) G^*]^{-1} G_0 R(z). \quad (16)$$

Согласно (15) резольвента самосопряженного оператора H , удовлетворяющего условиям определения 2, однозначно восстанавливается по H_0 , G_0 и G . Отсюда следует, что и сам оператор H определяется этими условиями однозначно. Тем самым установлена

Теорема 5. *Определению 2 может удовлетворять лишь один самосопряженный оператор H . Если такой существует,*

то при $z \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$ для его резольвенты справедливы тождества (13), (14). Кроме того, $R(z)$ выражается через $R_0(z)$ равенством (15), причем обратный оператор в правой части (15) существует для всех $z \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$.

В приложениях, как правило, встречаются лишь случаи $\theta_0 = 1$ и $\theta_0 = 1/2$. В первом из них $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H_0)$ по определению 2. Однако в действительности здесь обязательно имеет место равенство $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$. Противоположное включение: $\mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(H)$ вытекает из соотношения $R_0(z) = R(z)\Gamma$, где $\Gamma \in \mathfrak{B}$, являющегося следствием равенства (16).

При $\theta_0 = 1/2$ рассмотрим специально случай полуограниченных (снизу) операторов. За счет сдвига можно считать, что $H_0 \geq cI > 0$ и $H \geq cI > 0$. Покажем, что тогда

$$\mathcal{D}(H^{1/2}) = \mathcal{D}(H_0^{1/2}). \quad (17)$$

В самом деле, равенство (8), т.е. $(H^{-1}f, f) = (H_0^{-1/2}\Gamma H_0^{-1/2}f, f)$, $\Gamma \in \mathfrak{B}$, показывает, что $\|H^{-1/2}f\| \leq C\|H_0^{-1/2}f\|$. Это означает, что $\mathcal{D}(H^{1/2}) \subset \mathcal{D}(H_0^{1/2})$ и $H_0^{1/2}H^{-1/2} \in \mathfrak{B}$. Теперь из представления (16) следует, что $H_0^{-1} = H^{-1/2}\tilde{\Gamma}H^{-1/2}$ при ограниченном $\tilde{\Gamma}$, а потому $\mathcal{D}(H_0^{1/2}) \subset \mathcal{D}(H^{1/2})$ и $H^{1/2}H_0^{-1/2} \in \mathfrak{B}$. Отсюда вытекает (17).

4. Установим связь спектра σ оператора H с множеством $\mathfrak{N} \subset \rho_0$, в точках z которого не существует оператора

$$(I + G_0 R_0(z) G^*)^{-1}. \quad (18)$$

Напомним, что оператор-функция $G_0 R_0(z) G^*$ голоморфна на множестве ρ_0 . Согласно лемме 8.1, если в какой-то точке оператор (18) существует, то он и голоморфен в окрестности этой точки.

Предложение 6. Пусть оператор H удовлетворяет определению 2. Тогда

$$\mathfrak{N} = \sigma(H) \cap \rho(H_0). \quad (19)$$

○ Пусть $z \in \rho_0$. При $z \in \rho$ существование и ограниченность оператора (18) вытекает из равенств (14). Обратно, если в какой-то точке z оператор (18) существует и ограничен, то оператор (15) голоморфен в окрестности этой точки. Это означает, что $z \in \rho$. •

Следствие 7. В условиях предложения 1 оператор (18) существует и ограничен для всех не вещественных точек z .

5. Во всех построениях этого параграфа условие (6) можно несколько ослабить. Именно, достаточно считать, что ограничены операторы $G_0 h^{\theta_0}$ и $G h^{-\theta}$ при каком-либо вспомогательном положительно определенном операторе h . Кроме того, нужно предположить, что

$$R_0(z) = h^{-\theta_0} \Gamma_0(z) h^{-\theta}, \quad \Gamma_0(z) \in \mathfrak{B}, \quad (20)$$

и, следовательно, $\mathcal{D}(H_0) \subset \mathcal{D}(h^{\theta_0})$. Тогда определение 2 сохраняется, если вместо (8) потребовать, чтобы

$$R(z) = h^{-\theta_0} \Gamma(z) h^{-\theta}, \quad \Gamma(z) \in \mathfrak{B}, \quad (21)$$

откуда $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(h^{\theta_0})$.

При сделанных предположениях операторы $G_0 R_0(z) G^*$ и $G_0 R(z) G^*$ по-прежнему корректно определены. Это позволяет буквально перенести теорему 5 на рассматриваемый более общий случай. Он сводится к уже рассмотренному при $h = |H_0| + I$. При этом представление (20) выполняется тривиально, а (21) переходит в (8).

Указанное обобщение может быть удобнее за счет большей симметрии операторов H_0 и H . Например, из него прямо вытекает, что для пары операторов H_1 и H_2 , удовлетворяющих определению 2, справедливо резольвентное тождество. Действительно, пусть $H_1 = H_0 + V_1$, $H_2 = H_0 + V_2$, где $V_1 = G_1^* G_{0,1}$, $V_2 = G_2^* G_{0,2}$. Тогда $H_2 = H_1 + V$ при $V = V_2 - V_1 = G^* G_0$, где $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$, $G = G_1 \oplus G_2$, $G_0 = (-G_{0,1}) \oplus G_{0,2}$. При $h = |H_0| + I$ для пары H_1 , H_2 справедливо отмеченное обобщение теоремы 5. Поэтому для этой пары выполняются соотношения вида (13) — (16).

§ 10. УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ

При изучении резольвенты полного гамильтониана $H = H_0 + V$ с помощью резольвенты $R_0(z)$ невозмущенного оператора H_0 естественно и условие самосопряженности H формулировать в терминах $R_0(z)$. Здесь мы покажем, что при условии существования и ограниченности оператора (9.18) найдется самосопряженный оператор H , удовлетворяющий определению 9.2. Отсюда нетрудно извлечь ряд часто применяемых достаточных признаков самосопряженности. В этом параграфе по-прежнему предполагается, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$, оператор H_0 самосопряжен и выполнены условия (9.6), (9.7).

1. В приводимой далее конструкции самосопряженный оператор H строится через свою резольвенту, которая, в свою очередь, определяется равенством (9.15). Свойства операторов вида (9.15) описываются в следующих двух элементарных утверждениях. Положим для краткости

$$B_0(z) = -G_0 R_0(z) G^*. \quad (1)$$

Лемма 1. Пусть оператор (9.18) существует и ограничен. Тогда оператор

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(z) = R_0(z) - R_0(z) G^* [I + G_0 R_0(z) G^*]^{-1} G_0 R_0(z) \quad (2)$$

и его сопряженный имеют тривиальные ядра.

○ Пусть при некотором f

$$R_0 f - R_0 G^* (I + G_0 R_0 G^*)^{-1} G_0 R_0 f = 0, \quad R_0 = R_0(z). \quad (3)$$

По условию (9.6) к этому равенству можно применить оператор G_0 . Тогда для $g = G_0 R_0 f$ и $B_0 = B_0(z)$ из (3) вытекает, что $g + B_0(I - B_0)^{-1}g = (I - B_0)^{-1}g = 0$. Следовательно, $g = 0$. Возвращаясь к (3), найдем, что $R_0 f = 0$, а потому и $f = 0$.

Учтем, что наряду с (9.18) должен существовать и обратный к сопряженному оператору, т.е. существует $(I + G R_0^* G_0^*)^{-1}$, $R_0^* = R_0(\bar{z})$. Поскольку операторы $\mathcal{R}^* = R_0^* - R_0^* G_0^* (I + G R_0^* G_0^*)^{-1} G R_0^*$ и $\mathcal{R}$ имеют одинаковую структуру, доказательства равенств $N(\mathcal{R}^*) = \{0\}$ и $N(\mathcal{R}) = \{0\}$ вполне аналогичны. •

Лемма 2. Пусть операторы (9.18) существуют и ограничены при $z = z_1$ и $z = z_2$. Тогда для операторов (2) будет $R(\mathcal{R}(z_1)) = R(\mathcal{R}(z_2))$.

○ Достаточно проверить, например, включение $R(\mathcal{R}(z_1)) \subset R(\mathcal{R}(z_2))$. С этой целью надо показать, что уравнение $\mathcal{R}(z_1)f_1 = \mathcal{R}(z_2)f_2$ может быть решено относительно f_2 . Положим для краткости $\tilde{f}_1 = R_0(z_1)f_1 \in \mathcal{D}(H_0)$. Определим искомый элемент f_2 равенствами

$$\tilde{f}_2 = \tilde{f}_1 - (R_0(z_1) - R_0(z_2))G^*(I - B_0(z_1))^{-1}G_0\tilde{f}_1$$

и

$$f_2 = (H_0 - z_2)\tilde{f}_2.$$

Применяя к f_2 оператор $\mathcal{R}(z_2)$, согласно (2) найдем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z_2)f_2 = & \tilde{f}_1 - R_0(z_1)G^*(I - B_0(z_1))^{-1}G_0\tilde{f}_1 + \\ & + R_0(z_1)G^*[(I - B_0(z_1))^{-1} - (I - B_0(z_2))^{-1} - \\ & - (I - B_0(z_2))^{-1}(B_0(z_1) - B_0(z_2))(I - B_0(z_1))^{-1}]G_0\tilde{f}_1. \end{aligned}$$

Ясно, что оператор в квадратных скобках здесь равен нулю. Поэтому вновь согласно (2) правая часть равна $\mathcal{R}(z_1)f_1$. •

Построим в условиях леммы 1 оператор $H = H_z$ (пока не обязательно самосопряженный), удовлетворяющий определению 9.2. С этой целью заметим, что в силу леммы 1 оператор $\mathcal{R}^{-1}(z)$ корректно определен на $R(\mathcal{R}(z))$, причем согласно (6.1) его область определения плотна в $\mathcal{H}$. Кроме того, оператор $\mathcal{R}^{-1}(z)$ обязательно замкнут. Следовательно, оператор

$$H_z := \mathcal{R}^{-1}(z) + zI \quad (4)$$

также будет замкнут на плотной области определения $\mathcal{D}(H_z) := R(\mathcal{R}(z))$. Точка z будет регулярной для оператора (4), причем его резольвента $R_z(\xi) = (H_z - \xi)^{-1}$ при $\xi = z$ совпадает с оператором $\mathcal{R}(z)$.

По определению (2) оператора $\mathcal{R}(z)$ при условиях (9.6) для $R_z(\xi)$ в точке $\xi = z$ справедливо представление (9.8). В силу замечания 9.4 это представление сохраняется для всех регулярных ξ . Из (9.8) следует, в частности, что $\mathcal{D}(H_z) \subset \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$. Далее, из (2) сразу вытекает уравнение

$$\mathcal{R}(z) - R_0(z) = -(GR_0(\bar{z}))^* G_0 \mathcal{R}(z).$$

Применим его обе части к вектору $\Psi = (H_z - z)f$, $f \in \mathcal{D}(H_z)$, и составим скалярное произведение получившегося элемента с вектором $\Psi_0 = (H_0 - \bar{z})f_0$, $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$. Так как, $\mathcal{R}(z)\Psi = f$, это приводит к равенству (9.9) для оператора H_z . Таким образом, оператор H_z удовлетворяет всем требованиям определения 9.2. Кроме того, в силу замечания 9.3 при условии (9.7) этот оператор симметричен. Наконец, поскольку точка z является для H_z регулярной, его дефектное число в этой точке равно нулю.

Предположим теперь, что операторы (9.18) существуют и ограничены для точек z_1 и z_2 . Построим соответствующие операторы H_{z_1} и H_{z_2} . Каждый из них удовлетворяет равенству (9.9), откуда следует, что $H_{z_1}f = H_{z_2}f$ для $f \in \mathcal{D}(H_{z_1}) \cap \mathcal{D}(H_{z_2})$. В то же время согласно лемме 2 области определения операторов H_{z_1} и H_{z_2} совпадают друг с другом, а потому $H_{z_1} = H_{z_2}$. Таким образом, в условиях леммы 2 дефектные числа этого оператора равны нулю в двух точках z_1 и z_2 . Учтем, наконец, что симметричный оператор самосопряжен, если его дефектные числа равны нулю хотя бы для одной точки из верхней полуплоскости и одной точки из нижней полуплоскости. Таким образом, установлена

Теорема 3. Пусть выполнены условия (9.6) и (9.7). Предположим, что для каких-либо двух точек $z_{\pm}$, $\pm \operatorname{Im} z_{\pm} > 0$ (или одной вещественной точки $z_+ = z_- \in \rho(H_0)$, если она найдется) существует и ограничен оператор (9.18). Тогда существует самосопряженный оператор H , удовлетворяющий условиям определения 9.2.

Разумеется, в условиях теоремы 3 оператор H определяется равенством $H = H_{z_{\pm}}$, где $H_{z_{\pm}}$ строятся по формулам (2), (4). Подчеркнем, что существования оператора (9.18) лишь в одной точке z с $\operatorname{Im} z \neq 0$ недостаточно для самосопряженности соответствующего оператора $H = H_z$. В этом легко убедиться, рассматривая симметричный оператор H , у которого только один из индексов дефекта равен нулю.

2. Обсудим достаточные признаки существования ограниченного оператора (9.18). Простейший из них дается в следующем утверждении.

Предложение 4. Предположим, что для какого-нибудь натурального l

$$\|(G_0 R_0(z_{\pm}) G^*)^l\| < 1, \quad \pm \operatorname{Im} z_{\pm} \geq 0. \quad (5)$$

Тогда существует самосопряженный оператор H , удовлетворяющий определению 9.2.

○ В силу теоремы 3 достаточно проверить существование и ограниченность оператора (9.18) при $z = z_{\pm}$. С этой целью нужно лишь воспользоваться тождеством

$$(I - B_0)^{-1} = (I - B_0^l)^{-1} (I + B_0 + \dots + B_0^{l-1}), \quad B_0 = B_0(z_{\pm}),$$

для оператора (1) и учесть, что при условии (5) оператор $(I - B_0^l)^{-1}$ заведомо существует и ограничен. •

При доказательстве существования оператора (9.18) часто полезна следующая

Лемма 5. Пусть $\operatorname{Im} z \neq 0$. Тогда

$$N(I + G_0 R_0(z) G^*) = \{0\}.$$

○ Предположим, что

$$f + G_0 R_0(z) G^* f = 0. \quad (6)$$

Составим скалярное произведение (6) с элементом $G R_0(z) G^* f$:

$$(f, G R_0(z) G^* f) + (G_0 R_0(z) G^* f, G R_0(z) G^* f) = 0$$

и возьмем мнимую часть равенства. Тогда в силу (9.7)

$$\operatorname{Im}(f, GR_0(z)G^*f) = -\operatorname{Im} z \|R_0(z)G^*f\|^2 = 0.$$

Согласно (6) из равенства $R_0(z)G^*f = 0$ следует, что и $f = 0$. •

Следствие 6. *Предположим, что для какого-нибудь натурального l*

$$(G_0R_0(z_{\pm})G^*)^l \in \mathfrak{S}_{\infty}, \quad \pm \operatorname{Im} z_{\pm} > 0. \quad (7)$$

Тогда существует самосопряженный оператор H , удовлетворяющий определению 9.2.

○ В силу леммы 5 и альтернативы Фредгольма (см. п. 1 § 7) в точках $z = z_{\pm}$ существуют операторы (9.18). Остается воспользоваться теоремой 3. •

Условие (7) автоматически накладывает жесткие ограничения на существенный спектр $\sigma^{(\text{ess})}(H)$ оператора H , построенного при доказательстве теоремы 3. Именно, верна

Теорема 7. *Пусть выполнены условия (9.6), (9.7), а оператор $(G_0R_0(z)G^*)^l$ компактен при $z \in \rho(H_0)$. Тогда $\sigma^{(\text{ess})}(H) = \sigma^{(\text{ess})}(H_0)$.*

○ Согласно лемме 5 оператор-функция (1) удовлетворяет на множестве ρ_0 (или двух его связных компонентах) условиям теоремы 8.2. Поэтому соответствующее множество «особых» точек $\mathfrak{M}$ дискретно. В силу равенства (9.19) отсюда следует, что спектр H в ρ_0 может состоять только из собственных чисел, накапливающихся разве лишь к точкам из $\sigma(H_0)$. Кроме того, по теореме 8.2 особенности оператора (9.15) в особых точках имеют характер полюсов с конечномерными вычетами. Это означает, что собственные значения H конечнократны и, следовательно, $\sigma^{(\text{ess})}(H) \subset \sigma^{(\text{ess})}(H_0)$.

Поменяем теперь операторы H_0 и H ролями. В силу равенства (9.14) для голоморфной по $z \in \rho$ оператор-функции $\tilde{B}(z) = G_0R(z)G^*$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ существует ограниченный оператор $(I - \tilde{B}(z))^{-1}$. Кроме того, $\tilde{B}(z) = -B_0(z)(I - B_0(z))^{-1}$ и, следовательно, $\tilde{B}^l(z) \in \mathfrak{S}_{\infty}$. Поэтому по теореме 8.2 оператор-функция (9.16) голоморфна в ρ за исключением дискретного множества полюсов с конечномерными вычетами. Тем самым $\sigma^{(\text{ess})}(H_0) \subset \sigma^{(\text{ess})}(H)$. •

Нетрудно видеть, что в условиях этой теоремы решения уравнения (6) и собственные функции ψ , оператора H , $H\psi = z\psi$, связаны равенствами

$$\psi = (GR_0(\bar{z}))^*f, \quad f = -G_0\psi. \quad (8)$$

Отметим еще, что равенство $\sigma^{(\text{ess})}(H) = \sigma^{(\text{ess})}(H_0)$ выполняется и в случаях, когда компактен один из операторов $G_0 R_0(z)$ или $GR_0(z)$. Действительно, согласно (9.15) в этих случаях разность резольвент $R(z) - R_0(z)$ также компактна. Поэтому нужно лишь сослаться на обобщенную теорему Г. Вейля (см. книгу [4]).

3. В условиях теоремы 3 при $\theta_0 = 1$ оператор H самосопряжен (см. п. 3, § 9) на $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$. На этой области он может быть и прямо определен равенством $Hf = H_0f + Vf$, $V = G^*G_0$. Самосопряженность такого оператора вытекает из теоремы 3, но может быть проверена и непосредственно. Именно, при любом $h \in \mathcal{H}$ элемент

$$f = R_0(z)h - R_0(z)G^*[I + G_0R_0(z)G^*]^{-1}G_0R_0(z)h$$

принадлежит $\mathcal{D}(H_0)$ и $(H_0 - z)f + G^*G_0f = h$. Отсюда следует, что $R(H - zI) = \mathcal{H}$.

Достаточным условием (Реллиха—Като) самосопряженности оператора $H = H_0 + V$ на $\mathcal{D}(H_0)$ служит неравенство

$$\|Vf\| \leq \gamma \|H_0f\| + C\|f\|, \quad \gamma < 1, \quad f \in \mathcal{D}(H_0). \quad (9)$$

В этом случае оценка (5) выполняется для $G_0 = V$, $G = I$, $l = 1$ и $z_{\pm} = \pm i\gamma$, где γ достаточно велико. При $\theta_0 = 1/2$ аналогичное условие

$$\|G_0f\| \leq \gamma \| |H_0|^{1/2}f \| + C\|f\|, \quad \gamma < 1, \quad f \in \mathcal{D}(|H_0|^{1/2}),$$

и такая же оценка для $\|Gf\|$ обеспечивают существование самосопряженного оператора H , удовлетворяющего определению 9.2. Оценка (5) по-прежнему выполняется при $l = 1$ и $z_{\pm} = \pm i\gamma$ с достаточно большим γ .

Если условия теоремы 3 справедливы при $\theta_0 = 1/2$ и оба оператора H_0 , H полуограничены снизу, то обязательно $\mathcal{D}(|H|^{1/2}) = \mathcal{D}(|H_0|^{1/2})$. Отметим, однако, что при $H_0 \geq c > 0$ из существования оператора (9.18) для какого-либо $z \leq 0$ еще не следует, что и оператор H полуограничен снизу. Так, например, при $H = -H_0$ и $G = H_0^{1/2}$, $G_0 = -2H_0^{1/2}$, оператор (9.18) в точке $z = 0$ существует (и равен $-I$). В то же время оператор H не ограничен снизу, если H_0 не ограничен сверху. Возможен и случай, когда при полуограниченном H_0 оператор H не ограничен с обеих сторон.

Теорема 3 позволяет указать условия самосопряженности H , основанные на знаке возмущения.

Предложение 8. Пусть $H_0 \geq 0$ и для $G_0 = G$ при $\theta_0 = \theta = 1/2$ выполняется (9.6). Тогда существует оператор $H \geq 0$, удовлетворяющий условиям определения 9.2.

○ Достаточно заметить, что $I + GR_0(z)G^* \geq I$ при $z < 0$ и, следовательно, оператор (9.18) существует и ограничен. •

4. В полуограниченном (снизу) случае удобно пользоваться методом Фридрихса (см. [4]) построения самосопряженного оператора через соответствующую квадратичную форму. Напомним, что каждой положительно определенной квадратичной форме $h[u, u]$, замкнутой на плотной в $\mathcal{H}$ области определения $\mathcal{D}[h]$, отвечает самосопряженный оператор H , такой, что

$$\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}[h]$$

и

$$h[f, g] = (Hf, g), \quad f \in \mathcal{D}(H), \quad g \in \mathcal{D}[h]. \quad (10)$$

При этом нижние грани оператора H и формы h совпадают, а $\mathcal{D}[h] = \mathcal{D}(H^{1/2})$. Важно, что квадратичная форма $(\overset{0}{H}f, f)$ любого симметричного положительно определенного оператора $\overset{0}{H}$ допускает замыкание в исходном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Самосопряженный оператор H , отвечающий соответствующей замкнутой квадратичной форме, называется *расширением по Фридрихсу оператора $\overset{0}{H}$* . Полуограниченный снизу случай сводится к положительно определенному за счет сдвига на оператор $cI, c = \text{const}$. Из сказанного вытекает

Теорема 9. Пусть H_0 — неотрицательный самосопряженный оператор, а вещественная квадратичная форма $v[f, f]$ задана на $\mathcal{D}(H_0^{1/2})$ и

$$-\gamma \|H_0^{1/2}f\|^2 - C_1 \|f\|^2 \leq v[f, f] \leq C_2 (\|H_0^{1/2}f\|^2 + \|f\|^2), \quad (11)$$

$$f \in \mathcal{D}(H_0^{1/2}).$$

при каких-либо положительных числах C_1, C_2 и $\gamma < 1$. Тогда при достаточно большом δ форма

$$h_\delta[f, f] = \|H_0^{1/2}f\|^2 + v[f, f] + \delta \|f\|^2 \quad (12)$$

положительно определена и замкнута на области определения $\mathcal{D}[h] = \mathcal{D}(H_0^{1/2})$ и, следовательно, ей отвечает самосопряженный оператор, принимаемый за $H + \delta I$.

○ При условии (11) метрики $\|H_0^{1/2}f\|^2$ и (12) эквивалентны. Поскольку первая из них замкнута, то замкнута и вторая. •

Для возмущения $V = G^*G_0$ его полуторалинейная форма $v[f, g] = (G_0f, Gg)$. При условии (9.6), где $\theta_0 = \theta = 1/2$, она будет ограниченной на $\mathcal{D}(H_0^{1/2})$, а при условии (9.7) — симметричной. В предположениях теоремы 9 оператор H удовлетворяет определению 9.2. Действительно, из равенства $\mathcal{D}((H + \delta I)^{1/2}) = \mathcal{D}(H_0^{1/2})$ следует, что $(H + \delta I)^{-1/2} = H_0^{-1/2}\Gamma_1 = \Gamma_2H_0^{-1/2}$, где операторы Γ_j ограничены. Тем самым выполняется и представление (9.8). Наконец, равенство (9.9) прямо вытекает из определения (10). Таким образом, теорема 9 имеет

Следствие 10. Пусть $H_0 \geq 0$, условия (9.6), (9.7) выполнены при $\theta_0 = \theta = 1/2$, а при $f \in \mathcal{D}(H_0^{1/2})$

$$-(G_0f, Gf) \leq \gamma \|H_0^{1/2}f\|^2 + C\|f\|^2 \quad (13)$$

для какого-либо $\gamma < 1$. Тогда существует полуограниченный снизу оператор H , удовлетворяющий определению 9.2.

Оценка (13) похожа, конечно, на условие (5) для $l = 1$ и $z_+ = z_- < 0$, но формулируется несколько в иных терминах.

В отличие от предложения 8 метод Фридрихса позволяет рассматривать неотрицательные возмущения оператора $H_0 \geq 0$ без каких бы то ни было условий подчиненности. В общем случае справедливо лишь включение $\mathcal{D}(H^{1/2}) \subset \mathcal{D}(H_0^{1/2})$, тогда как в условиях предложения 8 эти области определения совпадают.

§ 11. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

На унитарный случай более или менее автоматически переносятся все положения самосопряженной теории. Соберем здесь нужные нам результаты.

1. Остановимся вначале на модификации результатов §§ 3–5. Спектральная мера $E_U(X)$ унитарного оператора U определена на борелевских множествах X единичной окружности $\mathbb{T} \subset \mathbb{C}$. Точки $\mathbb{T}$ обозначаем, как правило, буквой μ (или ν), $|\mu| = 1$; через $|X|$ обозначаем лебегову меру множества $X \subset \mathbb{T}$, $|\mathbb{T}| = 2\pi$. Совершенно аналогично самосопряженному случаю по отношению к этой мере определяются абсолютно непрерывные и сингулярные элементы. Это позволяет буквально перенести изложенную в § 3 классификацию спектра на унитарный случай.

По спектральной теореме резольвента $R(\zeta) = R_U(\zeta)$ унитарного оператора U допускает представление

$$(R(\zeta)f, g) = \int_{\mathbb{T}} (\mu - \zeta)^{-1} d(E(\mu)f, g), \quad E = E_U. \quad (1)$$

Эта функция голоморфна при $|\zeta| < 1$ и $|\zeta| > 1$ и при п.в. $\mu \in \mathbb{T}$ имеет радиальные (и угловые) пределы изнутри и снаружи. Отметим, что

$$R^*(\zeta) = -\zeta' U R(\zeta'), \quad \zeta' = \bar{\zeta}^{-1}, \quad (2)$$

где точка ζ' симметрична ζ относительно $\mathbb{T}$. Положим

$$\delta(\mu, \eta) = \pi^{-1} \eta |\zeta| R(\zeta) R^*(\zeta) = \pi^{-1} \eta |\zeta'| R(\zeta') R^*(\zeta'), \quad \zeta = (1 - \eta)\mu. \quad (3)$$

Применяя соотношение (2.13) к функции (1) и учитывая (2), найдем, что

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (\delta(\mu, \eta)f, g) = i\mu d(E(\mu)f, g)/d\mu, \quad \text{п.в. } \mu \in \mathbb{T}. \quad (4)$$

Это соотношение, конечно, аналогично (4.11).

Диагонализующее U разложение $\mathcal{H}$ в прямой интеграл строится (ср. с (5.1)) по отношению к мере, заданной на $\mathbb{T}$. В частности, на абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{H}^{(a)}$ роль (5.3) играет равенство

$$(E(X)f, g) = \int_{\hat{\sigma} \cap X} \langle \tilde{f}(\mu), \tilde{g}(\mu) \rangle (i\mu)^{-1} d\mu. \quad (5)$$

Здесь хотя бы один из элементов f, g принадлежит $\mathcal{H}^{(a)}$, $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ — представители Pf и Pg ($P = P_U^{(a)}$) в прямом интеграле, $\hat{\sigma}$ — сердцевина спектра оператора U , X — произвольное борелевское множество на $\mathbb{T}$. Из (5) вытекает, что для любых $f, g \in \mathcal{H}$

$$i\mu d(E(\mu)f, g)/d\mu = \langle \tilde{f}(\mu), \tilde{g}(\mu) \rangle, \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}. \quad (6)$$

Как и в самосопряженном случае, коммутирующий с U ограниченный оператор A в разложении $\mathcal{H}^{(a)}$ в прямой интеграл действует как умножение на $a(\mu)$, причем для любых $f, g \in \mathcal{H}$

$$\langle a(\mu)\tilde{f}(\mu), \tilde{g}(\mu) \rangle = i\mu d(AE(\mu)f, g)/d\mu, \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}. \quad (7)$$

Для полуторалинейной формы ядра интегрального в прямом разложении ограниченного оператора A (или, точнее, оператора PAP) справедливо равенство

$$\langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle = (i\mu)(i\nu) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial \mu} (AE(\nu)f, E(\mu)g), \quad (8)$$

$$f, g \in \mathcal{H}^{(a)}, \quad \text{п.в. } (\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma}.$$

2. В отличие от самосопряженной теории, где возмущение обычно аддитивно, в теории унитарных операторов возмущение естественно вводить мультипликативно. Дело в том, что при унитарных невозмущенном операторе U_0 и возмущении M произведение

$$U = MU_0 \quad (9)$$

автоматически унитарно. Аддитивное возмущение $V = U - U_0$ связано с мультипликативным M равенством $V = (M - I)U_0$. Ясно, что (9) эквивалентно соотношению $U = U_0 M'$, где оператор $M' = U_0^{-1} M U_0$ унитарно эквивалентен M , но записывается справа от U_0 . Приводимые здесь утверждения хорошо известны для самосопряженного случая (см., например, [4]) и легко распространяется на унитарные операторы.

Доказательство теоремы Вейля об инвариантности существенного спектра в унитарном случае ничем не отличается от самосопряженного.

Предложение 1. Пусть разность унитарных операторов U и U_0 компактна. Тогда $\sigma^{(\text{ess})}(U) = \sigma^{(\text{ess})}(U_0)$.

Следствие 2. Если оператор U унитарен и $U - I \in \mathfrak{S}_\infty$, то его спектр состоит из собственных чисел, накапливающихся разве лишь к точке 1. Отличные от 1 собственные числа конечнократны.

В самосопряженном случае собственные значения могут сдвигаться не более, чем на норму возмущения. Обсудим соответствующие результаты для унитарного случая. Теперь роль спектральной точки $0 \in \mathbb{R}$ играет точка $1 \in \mathbb{T}$, роль сдвига по $\mathbb{R}$ — поворот на $\mathbb{T}$, а роль самосопряженных операторов с малой нормой — унитарные операторы, спектр которых лежит на малой дуге с центром в точке 1. Через (μ_1, μ_2) и $[\mu_1, \mu_2]$, где $|\mu_j| = 1$, обозначаются соответственно открытая и замкнутая дуги $\mathbb{T}$, заметаемые при движении из μ_1 в μ_2 в положительном направлении (против часовой стрелки).

Предложение 3. Пусть τ_0 — собственное число оператора U_0 кратности k , а спектр M лежит на дуге $[\mu_1, \mu_2]$ единичной окружности. Тогда для произведения $U = MU_0$

$$\dim E_U([\tau_0\mu_1, \tau_0\mu_2])\mathcal{H} \geq k. \quad (10)$$

○ Пусть вначале дуга $[\mu_1, \mu_2]$ симметрична относительно точки 1, т.е. $\mu_1 = \bar{\mu}$, $\mu_2 = \mu$, $\text{Im} \mu > 0$. В этом случае $\|V\| = \|M - I\| = |\mu - 1|$. Предположим, что (10) нарушается. Тогда найдется элемент $f \neq 0$, ортогональный подпространству $E_U([\tau_0\bar{\mu}, \tau_0\mu])\mathcal{H}$ и такой, что $U_0f = \tau_0f$. Из этого уравнения следует, что

$$\|Uf - \tau_0f\| = \|Vf\| \leq |\mu - 1|\|f\|. \quad (11)$$

В то же время по спектральной теореме на ортогональном дополнении к $E_U([\tau_0\bar{\mu}, \tau_0\mu])\mathcal{H}$

$$\|Uf - \tau_0f\|^2 = \int_{|\nu - \tau_0| > |\mu - 1|} |\nu - \tau_0|^2 d(E_U(\nu)f, f) > |\mu - 1|^2 \|f\|^2. \quad (12)$$

Сравнив (11) и (12), получим, что $f = 0$. Это доказывает (10) в симметричном случае.

В общем случае обозначим через μ_0 , $|\mu_0| = 1$, середину дуги $[\mu_1, \mu_2]$ и представим M в виде $M = \mu_0 M'$. Спектр оператора M' лежит на дуге $[\bar{\mu}_0\mu_1, \bar{\mu}_0\mu_2]$, симметричной относительно точки 1. Как уже проверено, для оператора $U' = M'U_0$

$$\dim E_{U'}([\tau_0\bar{\mu}_0\mu_1, \tau_0\bar{\mu}_0\mu_2])\mathcal{H} \geq k.$$

Поскольку $U = \mu_0 U'$, это эквивалентно (10). •

Нам понадобится также вариант этого утверждения, относящийся к случаю, когда τ_0 — произвольная точка спектра оператора U_0 .

Предложение 4. Пусть $\tau_0 \in \sigma(U_0)$, $\sigma(M) \subset [\mu_1, \mu_2]$ и $U = MU_0$. Тогда $\sigma(U) \cap [\tau_0\mu_1, \tau_0\mu_2] \neq \emptyset$.

○ Доказательство почти такое же, как и для предложения 3.

Вновь дело сводится к симметричному случаю $\mu_1 = \bar{\mu}$, $\mu_2 = \mu$, $\text{Im} \mu > 0$. Затем учитывается, что при $\sigma(U) \cap [\tau_0\bar{\mu}, \tau_0\mu] = \emptyset$ замкнутое множество $\sigma(U)$ не пересекается и с некоторой расширенной дугой $[e^{-i\delta}\tau_0\bar{\mu}, e^{i\delta}\tau_0\mu]$, где $\delta > 0$ достаточно мало. Поэтому аналогично (12) для каждого $f \in \mathcal{H}$ величина $\|Uf - \tau_0f\|$ оценивается снизу через $|e^{i\delta}\mu - 1|\|f\|$. С другой стороны, при $\tau_0 \in \sigma(U_0)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $f = f_\varepsilon$, $\|f\| = 1$, что $\|U_0f - \tau_0f\| < \varepsilon$. Аналогично (11) отсюда вытекает,

что $\|Uf - \tau_0 f\|$ оценивается сверху через $|\mu - 1| + \varepsilon$. Оценки снизу и сверху показывают вместе, что при достаточно малом ε должно быть $f_\varepsilon = 0$. •

Следующее утверждение дает условия того, что части спектра оператора U на дуге $[\tau_0\mu_1, \tau_0\mu_2]$ и вне ее отделены друг от друга на положительное расстояние.

Предложение 5. Пусть в условиях предложения 3 на некоторой дуге $(\tau_1, \tau_2) \subset \mathbb{T}$ собственное значение τ_0 является единственной точкой спектра оператора U_0 . Предположим, что

$$|(\mu_1, \mu_2)| < \inf_{j=1,2} |(\tau_j, \tau_0)|. \quad (13)$$

Тогда на дугах $(\tau_1\mu_2, \tau_0\mu_1)$ и $(\tau_0\mu_2, \tau_2\mu_1)$ нет точек спектра оператора $U = MU_0$.

○ Пусть, например, найдется точка $\tau \in \sigma(U)$ на дуге $(\tau_1\mu_2, \tau_0\mu_1)$. Воспользуемся предложением 4, поменяв там операторы U_0 и U ролями. Поскольку $U_0 = M^*U$ и $\sigma(M^*) \subset [\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_1]$, то

$$\sigma(U_0) \cap [\tau\bar{\mu}_2, \tau\bar{\mu}_1] \neq \emptyset. \quad (14)$$

В то же время при условии $|(\mu_1, \mu_2)| < |(\tau_1, \tau_0)|$ дуга $[\tau\bar{\mu}_2, \tau\bar{\mu}_1]$ содержится в (τ_1, τ_0) для любого $\tau \in (\tau_1\mu_2, \tau_0\mu_1)$. Поэтому из (14) вытекает, что $\sigma(U_0) \cap (\tau_1, \tau_0) \neq \emptyset$. Это противоречит тому, что по условию дуга (τ_1, τ_0) состоит из регулярных точек оператора U_0 . •

Отметим еще, что в условиях предложения 5 неравенство (10) превращается в равенство, т.е. на дуге $[\tau_0\mu_1, \tau_0\mu_2]$ лежит ровно k собственных чисел (с учетом кратностей) оператора U . Впрочем, нам этот факт не понадобится.

Мы применяем предложение 5 в частном случае, когда одно из чисел μ_1 или μ_2 равно единице. Такой оператор M играет роль знакоопределенного возмущения для самосопряженного случая.

Следствие 6. Пусть τ_0 — изолированное собственное число оператора U_0 , отделенное от остального спектра U_0 на расстояние $d, d \in (0, 2]$. Предположим, что $\sigma(M) \subset [1, \mu]$ (или $\sigma(M) \subset [\bar{\mu}, 1]$), где $\operatorname{Im} \mu \geq 0$ и $|\mu - 1| < d$. Тогда при некотором $\theta > 0$ на дуге $(\tau_0 e^{-i\theta}, \tau_0)$ (соответственно на дуге $(\tau_0, \tau_0 e^{i\theta})$) нет спектра оператора U .

Вместе с предложением 3 следствие 6 показывает, что для «знакоопределенных» возмущений собственные числа вращаются в «направлении» возмущения.

3. Здесь мы приведем исчерпывающий результат о сохранении суммарной кратности спектра в теории возмущений унитарных операторов. Теорема 8 и следствие 9 обобщают утверждения предыдущего пункта, но прямо в книге не используются. Наряду со спектральной теоремой нам теперь понадобится элементарное утверждение геометрического характера.

Лемма 7. Пусть $f_n \in \mathcal{H}$ и $\|f_n\| = 1$, $n = 1, 2, 3$. Положим $\cos \alpha_n = \operatorname{Re}(f_m, f_l)$, $n \neq m \neq l$, $\lambda_n \in [0, \pi]$. Тогда $\cos \alpha_n \leq \cos(\alpha_m - \alpha_l)$ и, следовательно, $\alpha_1 \leq \alpha_n + \alpha_m$ для любых $n \neq m \neq l$.

○ Рассмотрим неотрицательную квадратичную форму

$$\begin{aligned} \|\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2 + \xi_3 f_3\|^2 = & \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + 2 \cos \alpha_3 \xi_1 \xi_2 + \\ & + 2 \cos \alpha_1 \xi_2 \xi_3 + 2 \cos \alpha_2 \xi_3 \xi_1. \end{aligned}$$

Отвечающий ей определитель

$$1 - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_3 + 2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \quad (15)$$

также должен быть неотрицательным. Установим, например, что

$$\cos \alpha_2 \leq \cos(\alpha_3 - \alpha_1). \quad (16)$$

С этой целью запишем (15) в виде

$$[\cos(\alpha_3 - \alpha_1) - \cos \alpha_2][\cos \alpha_2 - \cos(\alpha_3 + \alpha_1)]. \quad (17)$$

Пусть (16) нарушается и пусть, например, $\alpha_3 \geq \alpha_1$. Тогда $\alpha_2 < \alpha_3 - \alpha_1$. Наряду с первым и второй сомножитель в (17) должен быть неположительным. Это означает, что либо $\alpha_2 \geq \alpha_1 + \alpha_3$, либо $\alpha_1 + \alpha_3 \geq 2\pi - \alpha_2$. Поскольку $\alpha_2 < \alpha_3 - \alpha_1$, то первое из этих соотношений противоречит условию $\alpha_2 \geq 0$. Аналогичным образом, второе соотношение противоречит условию $\alpha_3 \leq \pi$. •

Теорема 8. Пусть $\sigma(M) \subset [\mu_1, \mu_2]$ и (τ_1, τ_2) — такая дуга $\mathbb{T}$, что

$$|(\mu_1, \mu_2)| < |(\tau_1, \tau_2)|. \quad (18)$$

Тогда для $U = MU_0$

$$\dim E_U((\tau_1 \mu_2, \tau_2 \mu_1))\mathcal{H} \leq \dim E_{U_0}((\tau_1, \tau_2))\mathcal{H}. \quad (19)$$

○ Аналогично доказательству предложения 3 дело сводится к рассмотрению случая «центрированных» дуг, когда $\mu_1 = \bar{\mu}$, $\mu_2 = \mu$, $\operatorname{Im} \mu \geq 0$, $\tau_1 = \bar{\tau}$, $\tau_2 = \tau$, $\operatorname{Im} \tau \geq 0$. Для этого нужно лишь перейти к новым операторам $M' = \bar{\mu}_0 M$, $U'_0 = \bar{\tau}_0 U_0$, где μ_0 и τ_0 — середины дуг (μ_1, μ_2) и (τ_1, τ_2) соответственно.

Если (19) нарушается, то найдется такой элемент f , что $\|f\| = 1$ и

$$f \in E_U((\bar{\tau}\mu, \tau\bar{\mu}))\mathcal{H}, \quad f \perp E_{U_0}(\bar{\tau}, \tau)\mathcal{H}. \quad (20)$$

Обозначим через $\beta = \arg \tau \in (0, \pi]$, через $\gamma = \arg \mu \in [0, \pi]$. В силу спектральной теоремы из первого соотношения (20) следует, что

$$\operatorname{Re}(Uf, f) = \int_{\cos \nu > \cos(\beta - \gamma)} \cos \nu d(E_U(\nu)f, f) > \cos(\beta - \gamma),$$

а из второго — что

$$\operatorname{Re}(U_0f, f) = \int_{\cos \nu \leq \cos \beta} \cos \nu d(E_{U_0}(\nu)f, f) \leq \cos \beta.$$

Кроме того, по условию $\sigma(M) \subset [\bar{\mu}, \mu]$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(Uf, U_0f) &= \operatorname{Re}(MU_0f, U_0f) = \\ &= \int_{\cos \nu \geq \cos \gamma} \cos \nu d(E_M(\nu)U_0f, U_0f) \geq \\ &\geq \cos \gamma \|U_0f\|^2 = \cos \gamma. \end{aligned}$$

Положим теперь $f_1 = f$, $f_2 = U_0f$, $f_3 = Uf$ и обозначим, как и в лемме 7, через $\alpha_n, \alpha_n \in [0, \pi]$, соответствующие углы $\cos \alpha_n = \operatorname{Re}(f_m, f_l)$, $n \neq m \neq l$. Тогда

$$\cos \alpha_2 > \cos(\beta - \gamma), \quad \cos \alpha_3 \leq \cos \beta, \quad \cos \alpha_1 \geq \cos \gamma.$$

Это означает, что

$$\alpha_2 < \beta - \gamma, \quad \alpha_3 \geq \beta, \quad \alpha_1 \leq \gamma.$$

Вытекающее отсюда неравенство $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_3$ противоречит лемме 7. •

Следствие 9. Пусть $\sigma(M) \subset [\mu_1, \mu_2]$ и $|(\tau_1, \tau_2)| + |(\mu_1, \mu_2)| < 2\pi$. Тогда для $U = MU_0$

$$\dim E_U((\tau_1\mu_1, \tau_2\mu_2))\mathcal{H} \geq \dim E_{U_0}((\tau_1, \tau_2))\mathcal{H}.$$

○ Поскольку $U_0 = M^*U$ и $\sigma(M^*) \subset [\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_1]$, достаточно применить теорему 8, поменяв операторы U_0 и U ролями. При этом роль дуги (τ_1, τ_2) играет дуга $(\tau_1\mu_1, \tau_2\mu_2)$. •

Глава 2

ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

Как ясно из названия, материал этой главы служит основой для всех последующих рассмотрений. Все утверждения здесь доказываются элементарно. Термин «теорема» указывает лишь на важность того или иного утверждения, но не на содержательность его доказательства. Впрочем, последние два параграфа отличаются по стилю изложения от остальных. В них на эвристическом уровне выводятся стационарные представления для основных объектов теории рассеяния. Обоснования этих представлений откладываются до гл. 5.

Мы с самого начала допускаем, что «свободный» (H_0) и «полный» (H) гамильтонианы действуют в различных гильбертовых пространствах, обозначаемых соответственно через $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$. Построение теории рассеяния требует при этом задания ограниченного оператора $J : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$, называемого *оператором отождествления*. Результаты, относящиеся к важному частному случаю $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ формулируются отдельно как следствия более общих утверждений.

§ 1. ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Волновой оператор—основной объект теории рассеяния. Он строится по паре самосопряженных операторов H_0 и H , действующих в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$, и ограниченному оператору $J : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$. В обозначениях различных объ-

ектов (например, унитарной группы $U_H(t) = \exp(-iHt)$, проектора $P_H^{(a)}$ на абсолютно непрерывное (см. § 1.3) подпространство $\mathcal{H}_H^{(a)}$ оператора H и т.п.) зависимость от H , как правило, опускается. Аналогичные объекты, построенные по «невозмущенному» оператору H_0 , снабжаются нулевым индексом, например $U_0(t) = U_{H_0}(t)$. Там, где это не может вызывать недоразумений, полагаем $P_0 = P_0^{(a)}$, $P = P^{(a)}$.

Во введении подробно мотивировалось

Определение 1. Волновым оператором (ВО) для пары самосопряженных операторов H_0 , H и отождествления J называется оператор

$$W_{\pm}(H, H_0; J) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)JU_0(t)P_0, \quad (1)$$

когда скоро соответствующий сильный предел существует.

Напомним, что всюду в книге любое соотношение, содержащее знаки $\pm$, понимается как два независимых равенства.

Чтобы подчеркнуть, что в (1) рассматривается сильный предельный переход, такой ВО называют иногда *сильным*. При $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ ВО (1) обозначается $W_{\pm}(H, H_0)$. Там, где это не вызывает недоразумений, обозначение зависимости ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ от H, H_0 и J может опускаться.

Ясно, что даже при $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ включение в (1) оператора $J \neq I$ вносит в определение ВО новые моменты. Однако для унитарного отображения $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ общий случай сводится к $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$. В самом деле, при $\tilde{H}_0 = JH_0J^{-1}$

$$W_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}(H, \tilde{H}_0)J,$$

причем ВО в обеих частях существует одновременно.

Положим

$$W(t) = W_J(t) = U(-t)JU_0(t). \quad (2)$$

Ввиду оценки $\|W_J(t)\| \leq \|J\|$ для доказательства существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ достаточно проверять сходимость $W_J(t)f$ при $t \rightarrow \pm\infty$ на плотном в $\mathcal{H}_0^{(a)}$ множестве элементов f .

В силу леммы 1.4.1 при компактном J оба предела (1) заведомо существуют и равны нулю. Однако при произвольном ограниченном J ВО (1) существуют, конечно, далеко не для каждой пары самосопряженных операторов H_0, H . Например, в случае $J = I$ наличие предела (1) автоматически накладывает на пару H_0, H сильные ограничения.

2. Предполагая существование предела (1), изучим свойства ВО $W_{\pm}(H, H_0; J) =: W_{\pm}$ и его взаимоотношения с операторами H_0, H .

Ясно, что ядро $N(W_{\pm})$ ВО $W_{\pm}$ всегда содержит сингулярное подпространство H_0 , т.е.

$$\mathcal{H}_0^{(s)} =: \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_0^{(a)} \subset N(W_{\pm}). \quad (3)$$

Более того, справедлива

Лемма 2. Волновой оператор $W_{\pm}$ ограничен и

$$\|W_{\pm}f\| \leq \|J\| \|P_0f\|. \quad (4)$$

Для изометричности $W_{\pm}$ на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in \mathcal{H}_0^{(a)}$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|JU_0(t)f\| = \|f\|. \quad (5)$$

○ Относительно сильной сходимости норма—непрерывный функционал. Поэтому в силу унитарности $U(t)$

$$\begin{aligned} \|W_{\pm}f\| &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|W_J(t)P_0f\| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|JU_0(t)P_0f\|. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда следует, что при $f \in \mathcal{H}_0^{(a)}$ равенства $\|W_{\pm}f\| = \|f\|$ и (5) эквивалентны. Для доказательства (4) нужно еще использовать унитарность $U_0(t)$. •

Для изометричности $W_{\pm}$ на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ достаточно выполнения (5) лишь для какой-либо последовательности $t_n \rightarrow \pm\infty$. Более того, эта последовательность может зависеть от элемента, на котором вычисляется предел (5). Отметим, что изометричность $W_{\pm}$ на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ равносильна равенству

$$W_{\pm}^*(H, H_0; J)W_{\pm}(H, H_0; J) = P_0. \quad (7)$$

Укажем теперь удобный достаточный признак справедливости (5).

Предложение 3. Волновой оператор $W_{\pm}$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$, если

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} (J^*J - I)U_0(t)P_0 = 0. \quad (8)$$

Достаточно также компактности оператора $J^*J - I$ или хотя бы выполнения соотношения

$$(J^*J - I)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_{\infty} \quad (9)$$

для любого ограниченного интервала Λ .

○ Поскольку

$$\|JU_0(t)f\|^2 = ((J^*J - I)U_0(t)f, U_0(t)f) + \|f\|^2,$$

соотношение (5) вытекает из (8) и унитарности $U_0(t)$. Далее, условие (8) можно проверять на плотном множестве финитных элементов вида $f = E_0(\Lambda)f$. Другими словами, вместо (8) достаточно установить, что для произвольного ограниченного Λ

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J^*J - I)E_0(\Lambda)U_0(t)P_0 = 0.$$

Это соотношение прямо следует из (9) в силу леммы 1.4.1.●

При $\|J\| \leq 1$ условие (8) и необходимо для изометричности ВО (1) на $\mathcal{H}_0^{(a)}$. Действительно, согласно (5) при $f \in \mathcal{H}_0^{(a)}$ и $t \rightarrow \pm\infty$

$$((J^*J - I)U_0(t)f, U_0(t)f) = -\|(I - J^*J)^{1/2}U_0(t)f\|^2 \rightarrow 0.$$

Отсюда вытекает (8).

Условие (5) изометричности ВО на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ (а также достаточные условия (8) и (9)) выполняется, если сам оператор J изометричен. В частности, в случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ при условии существования ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ автоматически изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$. Важно подчеркнуть, что даже в этом случае (и при абсолютной непрерывности H_0) ВО $W_{\pm}(H, H_0)$, вообще говоря, лишь изометричен, но не унитарен. Следующее свойство ВО называется *сплетающим*.

Теорема 4. Для любой ограниченной борелевской функции φ имеет место равенство

$$\varphi(H)W_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}(H, H_0; J)\varphi(H_0). \quad (10)$$

В частности, для любого борелевского множества $\Lambda \subset \mathbb{R}$

$$E(\Lambda)W_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}(H, H_0; J)E_0(\Lambda). \quad (11)$$

○ По определению (1)

$$\begin{aligned} U(s)W_{\pm} &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(s-t)JU_0(t)P_0 = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} U(-\tau)JU_0(\tau+s)P_0 = W_{\pm}U_0(s), \end{aligned}$$

что сразу доказывает (10) для $\varphi(\lambda) = e^{-i\lambda s}$. В силу представления (1.4.2) это означает, что при любых $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$ и $s \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\lambda} d(E(\lambda)W_{\pm}f_0, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-is\lambda} d(E_0(\lambda)f_0, W_{\pm}^*f).$$

Применяя к этому равенству теорему единственности для интегралов Фурье—Стилтьеса (см., например, т. 5 курса [21]), установим (11). Наконец, согласно (1.4.1) соотношение (10) для произвольной функции φ выводится из (11) с помощью интегрирования. •

В силу (10) оператор $W_{\pm}$ отображает $\mathcal{D}(H_0)$ в $\mathcal{D}(H)$ и при любом $f \in \mathcal{D}(H_0)$

$$HW_{\pm}f = W_{\pm}H_0f.$$

Переходя в (10) к сопряженным операторам, получим еще равенство

$$W_{\pm}^*\varphi(H) = \varphi(H_0)W_{\pm}^*. \quad (12)$$

3. Следующие два утверждения не специфичны для теории рассеяния. При их выводе используется лишь сплетающее свойство (10) (или (11)), а также равенство

$$\overline{R(W_{\pm})} \oplus N(W_{\pm}^*) = \mathcal{H}, \quad (13)$$

вытекающее из (1 §.1).

Лемма 5. Подпространства

$$\mathcal{H}_0 \ominus N(W_{\pm}) =: \mathcal{H}_0^{(\pm)} \quad \text{и} \quad \overline{R(W_{\pm})} =: \mathcal{H}^{(\pm)} \quad (14)$$

приводят соответственно операторы H_0 и H .

○ Подпространство $N(W_{\pm})$ инвариантно относительно спектральной меры $E_0(\cdot)$, так как при $W_{\pm}f = 0$ равенство $W_{\pm}E_0(\Lambda)f = 0$ является следствием (11). Тем самым $\mathcal{H}_0^{(\pm)}$ приводит H_0 . В силу равенства (13) второе утверждение равносильно тому, что $N(W_{\pm}^*)$ инвариантно относительно семейства проекторов $E(\cdot)$. Поэтому оно прямо вытекает из (12). •

Обозначим через $H_0^{(\pm)}$ и $H^{(\pm)}$ сужения H_0 и H на подпространства $\mathcal{H}_0^{(\pm)}$ и $\mathcal{H}^{(\pm)}$, т.е.

$$H_0^{(\pm)} = H_0|_{\mathcal{H}_0^{(\pm)}}, \quad H^{(\pm)} = H|_{\mathcal{H}^{(\pm)}}.$$

Согласно (3) $\mathcal{H}_0^{(\pm)} \subset \mathcal{H}_0^{(a)}$, т.е. оператор $H_0^{(\pm)}$ абсолютно непрерывен. В силу (11) для изометрического на $\mathcal{H}_0^{(\pm)}$ ВО $W_{\pm}$ операторы $H_0^{(\pm)}$ и $H^{(\pm)}$ унитарно эквивалентны. При дополнительном условии

$$N(W_{\pm}) = \mathcal{H}_0^{(s)} \quad (15)$$

это приводит к унитарной эквивалентности $H^{(\pm)}$ со всей абсолютно непрерывной частью $H_0^{(a)}$ оператора H_0 . В действительности, аналогичные результаты справедливы и без предположения о частичной изометричности $W_{\pm}$. Для доказательства рассмотрим полярное (см. п. 1 § 1.6) представление ВО (1):

$$W_{\pm} = F_{\pm}|W_{\pm}|, \quad |W_{\pm}| = (W_{\pm}^* W_{\pm})^{1/2}, \quad (16)$$

где $F_{\pm} = \text{sgn } W_{\pm}: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ — частично изометрический оператор, отображающий унитарно $\mathcal{H}_0^{(\pm)}$ на $\mathcal{H}^{(\pm)}$ и аннулирующий на $N(W_{\pm})$.

Теорема 6. *Имеет место равенство*

$$\varphi(H)F_{\pm} = F_{\pm}\varphi(H_0), \quad (17)$$

и, в частности, операторы $H_0^{(\pm)}$ и $H^{(\pm)}$ унитарно эквивалентны.

○ Согласно (10) и (12)

$$W_{\pm}^* W_{\pm} \varphi(H_0) = W_{\pm}^* \varphi(H) W_{\pm} = \varphi(H_0) W_{\pm}^* W_{\pm}.$$

Отсюда следует, что и любая функция неотрицательного оператора $W_{\pm}^* W_{\pm}$ коммутирует с $\varphi(H_0)$. В частности,

$$|W_{\pm}| \varphi(H_0) = \varphi(H_0) |W_{\pm}|.$$

Сравнивая это равенство с (10) и (16), найдем, что

$$\varphi(H)F_{\pm}|W_{\pm}| = F_{\pm}\varphi(H_0)|W_{\pm}|.$$

Поэтому соотношение (17) выполнено во всяком случае на элементах из $\overline{R(|W_{\pm}|)}$. Остается показать, что на элементах из $\mathcal{H}_0 \ominus \overline{R(|W_{\pm}|)} = N(|W_{\pm}|) = N(W_{\pm})$ операторы в обеих частях (17) равны нулю. Левая часть равна нулю, так как по построению $F_{\pm}$ аннулируется на $N(W_{\pm})$. В правой части надо дополнительно учесть, что согласно лемме 5 подпространство $N(W_{\pm})$ приводит оператор H_0 . •

В силу теоремы 6 оператор $H^{(\pm)}$ абсолютно непрерывен, т.е.

$$\overline{R(W_{\pm})} \subset \mathcal{H}^{(a)} \text{ или } P W_{\pm} = W_{\pm}. \quad (18)$$

Оператор $H^{(\pm)}$ будет унитарно эквивалентным $H_0^{(a)}$, если выполнено условие (15).

Отметим, что при условии (15) оператор $W_{\pm}$, рассматриваемый как отображение $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на $\mathcal{H}^{(a)}$, имеет тривиальное ядро. Если к тому же его образ замкнут, т.е. $R(W_{\pm}) = \overline{R(W_{\pm})}$, то отображение $W_{\pm}: \mathcal{H}_0^{(a)} \rightarrow R(W_{\pm})$ ограничено обратимо. Другими

словами, найдется ограниченный оператор $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$, при котором $TW_{\pm} = P_0$. Такие операторы $W_{\pm}$ называем *обратимыми слева на $\mathcal{H}_0^{(a)}$* . Например, изометрические на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ операторы обратимы слева на этом подпространстве.

4. Следующее утверждение называют *цепным правилом* или *теоремой умножения волновых операторов*. При его доказательстве воспользуемся тем, что для семейств операторов A_t и B_t , сильно сходящихся при $t \rightarrow \infty$ к A и B , их произведение $A_t B_t$ сильно сходится к AB .

Теорема 7. Если существуют ВО $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$ и $W_{\pm}(H, H_1; J_1)$, то при $J = J_1 J_0$ существует и ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, причем

$$W_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}(H, H_1; J_1)W_{\pm}(H_1, H_0; J_0). \quad (19)$$

○ При $P_1 = P_{H_1}^{(a)}$ и $U_1(t) = U_{H_1}(t)$ запишем равенство

$$U(-t)JU_0(t)P_0 = U(-t)J_1U_1(t)[P_1 + (I - P_1)]U_1(-t)J_0U_0(t)P_0. \quad (20)$$

Согласно (18) для любого $f_0 \in \mathcal{H}_0^{(a)}$ при $t \rightarrow \pm\infty$

$$\|(I - P_1)U_1(-t)J_0U_0(t)f_0\| \rightarrow 0.$$

Поэтому в правой части (20) слагаемое, отвечающее члену $I - P_1$ в квадратных скобках, сильно стремится к нулю. Оставшееся слагаемое есть произведение двух сомножителей, сходящихся соответственно к $W_{\pm}(H, H_1; J_1)$ и к $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$. Тем самым правая, а потому и левая части (20) сходятся к правой части (19). •

Из равенств (18) и (19) вытекает, что изометричность ВО $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$ и $W_{\pm}(H, H_1; J_1)$ соответственно на $\mathcal{H}_{H_0}^{(a)}$ и $\mathcal{H}_{H_1}^{(a)}$ индуцирует изометричность ВО $W_{\pm}(H, H_0; J_1 J_0)$ на $\mathcal{H}_{H_0}^{(a)}$. Аналогичным образом, левая обратимость этих операторов на $\mathcal{H}_{H_0}^{(a)}$ и $\mathcal{H}_{H_1}^{(a)}$ индуцирует левую обратимость $W_{\pm}(H, H_0; J_1 J_0)$ на $\mathcal{H}_{H_0}^{(a)}$.

5. Для данной пары H_0, H различные отождествления J могут приводить к одному и тому же ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. В связи с этим вводится следующее важное

Определение 8. Отождествления J_1 и J_2 называются эквивалентными (относительно оператора H_0 и знака $\pm$), если

$$\text{s-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_1 - J_2)U_0(t)P_0 = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что соотношение (21) равносильно тому, что при любом операторе H ВО $W_{\pm}(H, H_0; J_1)$ и $W_{\pm}(H, H_0; J_2)$ существуют одновременно и совпадают.

Ясно, что если ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и J эквивалентно изометрическому оператору, то ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

Приведем простой достаточный признак эквивалентности J_1 и J_2 . Следующее утверждение прямо вытекает (ср. с доказательством предложения 3) из леммы 1.4.1.

Предложение 9. *Отождествления J_1 и J_2 будут H_0 -эквивалентными (при обоих знаках времени), если для любого ограниченного интервала Λ*

$$(J_1 - J_2)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (22)$$

В частности, если разность $J_1 - J_2$ компактна, то эти отождествления эквивалентны относительно любого самосопряженного оператора H_0 .

Соотношением (21) все ограниченные операторы $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ разбиваются на классы (классы эквивалентности) отождествлений H_0 -эквивалентных друг другу. Пусть ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует, а тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} [W_{\pm}(H, H_0; J) - J]U_0(t)P_0 = 0 \quad (23)$$

в силу равенства (10) при $\varphi(\lambda) = \exp(-i\lambda t)$. Если сам ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ рассматривать как новое отождествление, то он H_0 -эквивалентен исходному отождествлению J . Таким образом, при заданных H_0 и H правильный (т.е. такой, при котором существует ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$) выбор J сводится к угадыванию ВО с точностью до H_0 -эквивалентности. Этот выбор может быть различным для разных знаков $\pm$, т.е. $J = J_{\pm}$. С этой точки зрения ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ соответствует случаю, когда уже тождественный оператор служит достаточно хорошим приближением к ВО.

Введение отождествления J может оказаться полезным и при рассмотрении ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. Именно, иногда при удачно подобранном J существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ удастся проверить проще, чем существование $W_{\pm}(H, H_0)$. Если при этом оператор J оказывается H_0 -эквивалентным единичному, то существует и ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. Такой прием часто применяется при использовании признака Кука существования ВО (см. § 5). В частности, он применяется в примере, рассматриваемом в § 3.1.

§ 2. РАЗЛИЧНЫЕ МОДИФИКАЦИИ
ПОНЯТИЯ «ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ»
(СЛАБЫЕ, ЛОКАЛЬНЫЕ, АБЕЛЕВЫ И Т.П.)

1. Наряду с сильными ВО, определенными соотношением (1.1), иногда бывает удобно рассматривать и так называемые *слабые волновые операторы*:

$$\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J) = \text{w-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} PU(-t)JU_0(t)P_0. \quad (1)$$

При существовании ВО (1.1), разумеется, существует и слабый ВО $\widetilde{W}_{\pm} : = \widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$; при этом $W_{\pm} = \widetilde{W}_{\pm}$. Однако ВО (1) имеют «больше шансов» на существование. Как и сильный ВО, оператор $\widetilde{W}_{\pm}$ ограничен и удовлетворяет оценке (1.4). Поскольку, однако, норма не является непрерывным функционалом относительно слабой сходимости, соотношение (1.6) для $\widetilde{W}_{\pm}$ теряет силу. Тем самым даже при $J = I$ ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0)$ может быть не изометрическим на $\mathcal{H}_0^{(a)}$. Сплетающее свойство (1.10) для слабых ВО сохраняется. Отсюда, в частности, следует, что $R(\widetilde{W}_{\pm}) \subset \mathcal{H}^{(a)}$. Напротив, цепное правило (1.19) для них нарушается из-за того, что произведение двух слабо сходящихся семейств операторов, вообще говоря, не сходится даже слабо. С другой стороны, в отличие от сильной слабая сходимость операторов выдерживает сопряжение. Это означает, что наряду с ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ обязательно существует

$$\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H; J^*) = \widetilde{W}_{\pm}^*(H, H_0; J). \quad (2)$$

Связь существования сильных (1.1) и слабых (1) ВО устанавливается в терминах вспомогательных ВО, определяемых только по H_0 и J . Эти ВО отвечают «тройке» H_0, H_0, J^*J .

Теорема 1. *Существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ равносильно существованию слабых ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$, $\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ и равенству*

$$\widetilde{W}_{\pm}^*(H, H_0; J)\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J) = \widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J). \quad (3)$$

○ Пусть слабый ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J) =: \widetilde{W}_{\pm}$ существует. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \|U(-t)JU_0(t)P_0f - \widetilde{W}_{\pm}f\|^2 &= (P_0U_0(-t)J^*JU_0(t)P_0f, f) - \\ &\quad - 2\operatorname{Re}(U(-t)JU_0(t)P_0f, \widetilde{W}_{\pm}f) + \|\widetilde{W}_{\pm}f\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку $\widetilde{W}_{\pm} = P\widetilde{W}_{\pm}$, в правой части (4) второе слагаемое стремится к $-2\|\widetilde{W}_{\pm}f\|^2$. Поэтому сходимость к нулю левой части (4) равносильна существованию предела у первого слагаемого в правой части (т.е. существованию ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$) и равенству нулю предела правой части. Последнее равенство имеет вид

$$(\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)f, f) = \|\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)f\|^2$$

и следовательно, эквивалентно (3). •

Следствие 2. При условии (1.8) (в частности, в случае $H_0 = H, J = I$) существование сильного ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ равносильно существованию слабого ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и его изометричности на $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

○ При условии (1.8) $W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J) = P_0$. •

Замечание 3. Существование и изометричность на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ слабого ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ достаточны для существования сильного ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и при дополнительном предположении $\|J\| \leq 1$.

○ При изометрическом $\widetilde{W}_{\pm}$ правая часть (4) равна

$$([J^*J - I]U_0(t)P_0f, U_0(t)P_0f) + o(1), \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

В случае $\|J\| \leq 1$ первое слагаемое здесь не положительно. Поскольку левая часть (4) не отрицательна, она должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. •

2. В случае, когда ВО (1.1) не существует, иногда тем не менее существуют так называемые *локальные волновые операторы*, определение которых связано с борелевскими множествами Λ на вещественной (спектральной) оси. Положим $E^{(a)}(\Lambda) = E(\Lambda)P^{(a)}$.

Локальным волновым оператором для тройки H_0, H, J и борелевского множества $\Lambda \subset \mathbb{R}$ называется оператор

$$W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)JU_0(t)E_0^{(a)}(\Lambda), \quad (5)$$

если сильный предел в (5) существует. Понятие *слабого локального волнового оператора* связывается с парой борелевских множеств $\Lambda_0, \Lambda \subset \mathbb{R}$. По определению

$$\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda, \Lambda_0) = \text{w-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} E^{(a)}(\Lambda)U(-t)JU_0(t)E_0(\Lambda_0), \quad (6)$$

при этом $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda, \Lambda) =: \widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$.

Ясно, что при существовании предела (5) и $\Lambda_1 \subset \Lambda$ существует и W_0

$$W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_1) = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)E_0(\Lambda_1).$$

Кроме того, если $|\Lambda_1 \cap \Lambda_2| = 0$, то

$$W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_1 \cup \Lambda_2) = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_1) + W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_2),$$

причем левая и правая части здесь существуют одновременно.

Формально говоря, определения (5) и (6) сводятся соответственно к (1.1) и (1). Для этого надо перейти к новым отождествлениям: $J' = JE_0(\Lambda)$ (для сильных ВО) и $J'' = E(\Lambda)JE_0(\Lambda_0)$ (для слабых ВО); т.е.

$$\begin{aligned} W_{\pm}(H, H_0, J, \Lambda) &= W_{\pm}(H, H_0; JE_0(\Lambda)), \\ \widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda, \Lambda_0) &= W_{\pm}(H, H_0; E(\Lambda)JE_0(\Lambda)). \end{aligned} \quad (7)$$

Тем самым на локальные ВО (5), (6) автоматически переносятся результаты § 1 и п. 1 этого параграфа, установленные для ВО в целом. В частности, локальные ВО, даже слабые, обладают сплетающим свойством (1.10). Из него вытекает, что

$$\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda, \Lambda_0) = \widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda \cap \Lambda_0), \quad (8)$$

причем существование ВО в левой части влечет за собой существование ВО в правой части. Сохраняется и теорема 1, где надо считать, что все ВО отвечают одному и тому же множеству Λ . При редукции (7) теряются, однако, специфические черты локальности. Так, оператор (5) может быть изометрическим лишь на подпространстве $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$, а его область значений всегда содержится в подпространстве $E^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}$. Достаточное условие изометричности $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ на $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$ вполне аналогично (1.8):

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} (J^*J - I)U_0(t)E_0^{(a)}(\Lambda) = 0.$$

Локальные ВО бывают полезны и при рассмотрении ВО «в целом». Именно, вместо (1.1) часто устанавливается существование локальных ВО (5) для достаточно широкого запаса множеств Λ . Поскольку существование предела (1.1) можно проверять лишь на плотном множестве, ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует, коль скоро существуют $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_n)$ и объединение множеств Λ_n исчерпывает $\mathbb{R}$ с точностью до множества

нулевой лебеговой меры. Достаточно, впрочем, чтобы объединение Λ_n совпадало с сердцевинкой спектра (см. определение 1.3.8) оператора H_0 . Аналогичным образом, локальный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ существует, если существуют $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda_n)$ и $\bigcup_n \Lambda_n = \Lambda \pmod{0}$.

3. Иногда предельные переходы в (1.1) и (1) понимаются в расширенном смысле—по Абелю. Именно, пусть неотрицательная функция $\omega(t)$, $t \geq 0$, нормирована условием $\int_0^{\infty} \omega(t) dt = 1$, а преобразование Фурье $\hat{\psi}(\lambda)$ функции $\psi(t) = e^{-t}\omega(e^{-t})$ не имеет вещественных нулей. Введем усредняющее ядро $\omega_{\varepsilon}(t) = \varepsilon\omega(\varepsilon t)$, $\varepsilon > 0$.

Абелевым волновым оператором называется такой оператор $\mathfrak{A}_{\pm} = \mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J)$, что для любого $f \in \mathcal{H}_0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \omega_{\varepsilon}(t) \|W_J(\pm t)P_0 f - \mathfrak{A}_{\pm} f\|^p dt = 0, \quad p > 0, \quad (9)$$

где применяется обозначение (1.2). Поскольку $\|W_J(t)\| \leq 1$, соотношения (9) для различных функций $\omega(t)$ и различных p эквивалентны между собой. Это—следствие общей тауберовой теоремы (см. книгу [5]). Таким образом, при сформулированных условиях абелевы ВО не зависят от выбора $\omega(t)$ и p . Ввиду эквивалентности можно не отражать в обозначениях зависимость от ω и p , выбирая их в (9) по удобству. Собственно абелеву предельному переходу отвечает функция $\omega(t) = \exp(-t)$, переходу по Чезаро—индикатор интервала $(0, 1)$. Полагая $\varepsilon^{-1} = T$, можно записать определение *волнового оператора по Чезаро* в стандартной форме:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \|W_J(\pm t)P_0 f - \mathfrak{A}_{\pm} f\|^p dt = 0, \quad p > 0. \quad (10)$$

Нетрудно убедиться, что для ВО $\mathfrak{A}_{\pm}$ справедливы все утверждения § 1. Если ВО $W_{\pm}$ существует, то при $\mathfrak{A}_{\pm} = W_{\pm}$ выполнено и (9). Обратное заключение, разумеется, неверно.

Слабые абелевы волновые операторы $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm} = \tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}(H, H_0; J)$ определяются равенством

$$\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm} = \text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \omega_{\varepsilon}(t) P W_J(\pm t) P_0 dt. \quad (11)$$

Для ВО $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}$ остаются в силе замечания, сделанные только что относительно $\mathfrak{A}_{\pm}$. Именно, существование пределов (11) для различных ω_e эквивалентно между собой и вытекает из (1), причем в этом случае $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm} = \tilde{W}_{\pm}$. Обратное утверждение, конечно, неверно. Волновые операторы $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}$ сохраняют все свойства ВО $\tilde{W}_{\pm}$, перечисленные в п. 1. На абелевы ВО переносится и теорема 1 о связи сильных и слабых ВО; при этом роль оператора в правой части (3) играет, разумеется, слабый абелев ВО $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$.

Рассматриваются и локальные абелевы ВО $\mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ и $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda, \Lambda_0)$. Эти операторы можно определить равенствами вида (9) и (11), где J заменяется соответственно на $J E_0(\Lambda)$ и на $E(\Lambda) J E_0(\Lambda_0)$.

Вообще, теории рассеяния для обычных и абелевых ВО строятся совершенно параллельно. Поэтому формулировки в «абелевых» терминах, как правило, опускаются.

4. Для пары унитарных операторов U_0, U ВО вводятся аналогично (1.1). В определение ВО входят порождаемые ими дискретные группы:

$$W_{\pm}(U, U_0; J) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty, n \in \mathbb{Z}} s\text{-} \lim U^n J U_0^{-n} P_0, \quad P_0 = P_{U_0}^{(a)}. \quad (12)$$

Для ВО (12) сохраняются результаты § 1 о ВО в самосопряженном случае. Равным образом на ВО для пары унитарных операторов распространяются понятия слабых, локальных, абелевых ВО и т.п., а также сохраняются взаимоотношения между этими объектами.

Построение теории рассеяния для унитарных операторов в существенном аналогично самосопряженному случаю. По этой причине мы обычно не делаем специальных оговорок по поводу унитарного случая.

Напомним, что преобразованием Кэли самосопряженного оператора H называется унитарный оператор

$$\mathcal{K}_H = (H - i)(H + i)^{-1}. \quad (13)$$

Иногда вместо ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ удобно рассматривать ВО для преобразований Кэли $U_0 = \mathcal{K}_{H_0}$, $U = \mathcal{K}_H$. Поскольку

$$\mathcal{K}_H J - J \mathcal{K}_{H_0} = 2i[R_H(-i)J - J R_{H_0}(-i)], \quad (14)$$

условия существования таких ВО, формулируемые в терминах разности $UJ - JU_0$, совпадают с условиями существования ВО,

формулируемыми в терминах разности резольвент в самосопряженном случае. Условия такого рода обсуждаются, например, в ядерной теории (см. п. 3 § 6.5).

§ 3. ПОЛНОТА ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Как пояснялось во Введении, теория рассеяния занимается исследованием асимптотики $U(t)f$ при $t \rightarrow \pm\infty$ (в терминах функции $U_0(t)f_0$) и проблемой унитарной эквивалентности операторов H_0 и H . В случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ обе эти задачи получают окончательное решение, если ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны, т.е. их образы совпадают с абсолютно непрерывным пространством $\mathcal{H}^{(a)}$ оператора H . При этом полнота $W_{\pm}(H, H_0)$ эквивалентна существованию ВО $W_{\pm}(H_0, H)$. При практической проверке обычно устанавливают существование обоих ВО: $W_{\pm}(H, H_0)$ и $W_{\pm}(H_0, H)$.

Здесь мы обсудим соответствующие понятия и утверждения сразу для случая пары пространств.

1. В этом параграфе существование ВО (1.1) будем предполагать. Асимптотика $U(t)f$ вычисляется для любого элемента f из области значений $R(W_{\pm})$ ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$. Именно, при $f \in R(W_{\pm})$ для некоторого $f_0 \in \mathcal{H}_0$ (такого, что $f = W_{\pm}f_0$) справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U(t)f - JU_0(t)P_0f_0\| = 0. \quad (1)$$

Условимся выбирать f_0 из абсолютно непрерывного подпространства $\mathcal{H}_0^{(a)}$ оператора H_0 . Тогда при дополнительном предположении (1.15) он находится единственным образом. В случае

$$R(W_{\pm}) = \mathcal{H}^{(a)} \quad (2)$$

асимптотика (1) верна для любого $f \in \mathcal{H}^{(a)}$. В связи с этим примем

Определение 1. Оператор $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ называется полным, если справедливы равенства (1.15) и (2).

Что касается второй задачи, то в силу теоремы 1.6 унитарно эквивалентными будут сужения $H_0^{(\pm)}$ и $H^{(\pm)}$ операторов H_0 и H на подпространства $\mathcal{H}_0^{(\pm)}$ и $\mathcal{H}^{(\pm)}$ (см. (1.14)), содержащиеся соответственно в $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$. При условиях $\mathcal{H}_0^{(\pm)} = \mathcal{H}_0^{(a)}$

и $\mathcal{H}^{(\pm)} = \mathcal{H}^{(a)}$ сами операторы $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$ унитарно эквивалентны. Тем самым из теоремы 1.6 вытекает

Предложение 2. При условиях (1.15) и

$$\overline{R(W_{\pm})} = \mathcal{H}^{(a)} \quad (3)$$

абсолютно непрерывные части операторов H_0 и H унитарно эквивалентны.

Таким образом, полнота $W_{\pm}$ гарантирует унитарную эквивалентность операторов $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$. Для ВО, обратимого на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ слева, определение полноты сводится к одному равенству (3) (или (2)). Для изометрического на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ ВО $W_{\pm}$ произведение $W_{\pm}W_{\pm}^*$ — ортогональный проектор на $R(W_{\pm})$. Поэтому равенство (2) эквивалентно тому, что

$$W_{\pm}(H, H_0; J)W_{\pm}^*(H, H_0; J) = P. \quad (4)$$

Если ВО $W_{\pm}$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и полон, то унитарная эквивалентность $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$ реализуется им самим.

С помощью теоремы 1.7 и соотношения (1.18) элементарно проверяется

Теорема 3. Пусть ВО $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$ и $W_{\pm}(H, H_1; J_1)$ существуют и полны. Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; J_1J_0)$ также существует и будет полным.

2. Обсудим теперь связь полноты «прямого» ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ с существованием «обратного» ВО $W_{\pm}(H_0, H; J_1)$ для подходящего $J_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$. При этом требуется, чтобы в некотором смысле оператор J_1 был «квазиобратным» к J . Наиболее гибкое соотношение между отождествлениями J и J_1 дается следующим определением.

Определение 4. Ограниченный оператор $J_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ называется H_0 -асимптотически (левым) обратным к J , если

$$\text{s-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J_1J - I)U_0(t)P_0 = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5), конечно, означает, что произведение J_1J H_0 -эквивалентно единичному оператору I (для знака $\pm$) в смысле определения 1.8.

Лемма 5. Если J имеет H_0 -асимптотически обратный J_1 , то

$$\|P_0f\| \leq \|J_1\| \cdot \|W_{\pm}f\|, \quad W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J), \quad (6)$$

причем $BO W_{\pm}$ обратим слева на $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

○ Воспользуемся оценкой

$$\|J_1 J U_0(t) P_0 f\| \leq \|J_1\| \cdot \|J U_0(t) P_0 f\|.$$

При $t \rightarrow \pm\infty$ левая часть здесь стремится к $\|P_0 f\|$ в силу (5), а правая часть стремится к $\|J_1\| \cdot \|W_{\pm} f\|$ в силу (1.6). Левая обратимость $W_{\pm}$ — следствие (6). •

Теорема 6. Пусть $BO W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и для некоторого $J_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$ выполнено условие (5). Тогда полнота $W_{\pm}(H, H_0; J)$ эквивалентна существованию $W_{\pm}(H_0, H; J_1)$ и условию

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J J_1 - I) U(t) P = 0. \quad (7)$$

В этом случае $BO W_{\pm}(H_0, H; J_1)$ также является полным, а $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J_1)$ суть взаимно обратные отображения $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на $\mathcal{H}^{(a)}$, т.е.

$$\begin{aligned} W_{\pm}(H_0, H; J_1) W_{\pm}(H, H_0; J) &= P_0, \\ W_{\pm}(H, H_0; J) W_{\pm}(H_0, H; J_1) &= P. \end{aligned} \quad (8)$$

○ Пусть $BO W_{\pm}(H_0, H; J_1) =: \tilde{W}_{\pm}$ существует и выполнено условие (7). В силу теоремы 1.7 левые части (8) равны соответственно $W_{\pm}(H_0, H_0; J_1 J)$ и $W_{\pm}(H, H; J J_1)$. Из условий (5) и (7) вытекает, что первый из этих операторов равен P_0 , а второй равен P . Согласно лемме 5 для доказательства полноты $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ достаточно убедиться в равенстве (3) или согласно (1.13) и (1.18) во включении $N(W_{\pm}^*) \subset \mathcal{H}^{(s)}$. Переходя во втором соотношении (8) к сопряженным операторам, найдем, что $\tilde{W}_{\pm}^* W_{\pm}^* = P$. Поэтому из равенства $W_{\pm}^* f = 0$ следует, что $P f = 0$, т.е. $f \in \mathcal{H}^{(s)}$. Наконец, полнота $\tilde{W}_{\pm}$ вытекает из уже доказанного утверждения, примененного к тройке H, H_0, J_1 .

Пусть теперь выполнено условие (2). Тогда при любом $f \in \mathcal{H}^{(a)}$ справедливо соотношение (1). Из него следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_0^*(t) J_1 U(t) f - U_0^*(t) J_1 J U_0(t) P_0 f_0\| = 0.$$

Тем самым согласно (5) $U_0^*(t) J_1 U(t) f$ при $t \rightarrow \pm\infty$ имеет предел (равный $P_0 f_0$). Это и означает существование $BO W_{\pm}(H_0, H; J_1)$. Для доказательства (7) заметим, что в силу (5)

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (J J_1 - I) J U_0(t) P_0 = 0.$$

Ввиду (1) при условии (2) это равенство эквивалентно (7). •

Замечание 7. Пусть $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и полон. Тогда согласно теореме 6 $\text{BO } W_{\pm}(H_0, H; J_1)$ также существует и полон для любого отождествления J_1 , удовлетворяющего (5). Оказывается, все такие отождествления H -эквивалентны, а потому при различных H_0 -асимптотически обратных к J отождествлениях J_1 $\text{BO } W_{\pm}(H_0, H; J_1)$ в действительности совпадают.

○ Если J_1 и J'_1 удовлетворяют (5), то операторы $J_1 J$ и $J'_1 J$ будут H_0 -эквивалентными. Теперь H -эквивалентность J_1 и J'_1 вытекает в силу (1) из полноты $W_{\pm}(H, H_0; J)$. •

Обсудим различные следствия теоремы 6. Если J имеет ограниченный обратный оператор J^{-1} , то он, конечно, будет асимптотически обратным к J по отношению к любому оператору H_0 .

Следствие 8. Пусть J ограниченно обратим и $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует. Тогда полнота $W_{\pm}(H, H_0; J)$ эквивалентна существованию «обратного» $W_{\pm}(H_0, H; J^{-1})$.

○ При $J_1 = J^{-1}$ соотношения (5) и (7) тривиально выполняются. •

В приложениях наиболее важен случай одного пространства, когда $J = J_1 = I$.

Следствие 9. Пусть $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ и $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0)$ существует. Тогда полнота $W_{\pm}(H, H_0)$ эквивалентна существованию $\text{BO } W_{\pm}(H_0, H)$.

Рассмотрим теперь случай, когда можно положить $J_1 = J^*$. При этом условие (5) совпадает с (1.8).

Следствие 10: Пусть $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и выполнено условие (1.8). Тогда полнота $W_{\pm}(H, H_0; J)$ эквивалентна существованию $\text{BO } W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ и условию

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} (JJ^* - I)U(t)P = 0. \quad (9)$$

В силу предложения 1.3 в условиях следствия 10 $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ будут изометрическими соответственно на подпространствах $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$. Отметим еще следующее соотношение между этими операторами.

Предложение 11. Пусть оба $\text{BO } W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $\check{W}_{\pm} = W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют. Тогда

1) Они взаимно сопряжены, т.е.

$$W_{\pm}(H_0, H; J^*) = W_{\pm}^*(H, H_0; J). \quad (10)$$

2) Равенства (1.15) и (3) эквивалентны соответственно равенствам $R(\dot{W}_{\pm}) = \mathcal{H}_0^{(a)}$ и $N(\dot{W}_{\pm}) = \mathcal{H}^{(s)}$. Если ВО $W_{\pm}$ обратим слева на $\mathcal{H}_0^{(a)}$, то его полнота эквивалентна равенству $N(\dot{W}_{\pm}) = \mathcal{H}^{(s)}$. В частности, если ВО $W_{\pm}$ и $\dot{W}_{\pm}$ обратимы слева на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$, то они оба полны.

3) Если ВО $W_{\pm}$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$, то его полнота эквивалентна изометричности $\dot{W}_{\pm}$ на $\mathcal{H}^{(a)}$. При этих условиях $W_{\pm}$ и $\dot{W}_{\pm}$ — взаимно обратные отображения.

○ Равенство (10) прямо вытекает из равенства (22) для соответствующих слабых ВО. В силу (10) эквивалентность равенств (3) и $N(\dot{W}_{\pm}) = \mathcal{H}^{(s)}$ следует из соотношения (1.13), а эквивалентность (1.15) и $R(\dot{W}_{\pm}) = \mathcal{H}_0^{(a)}$ — из аналогичного соотношения для $\dot{W}_{\pm}$. В частности, для обратимого слева $W_{\pm}$ равенство $N(\dot{W}_{\pm}) = \mathcal{H}^{(s)}$ равносильно (2). Для изометрического на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ ВО $W_{\pm}$ определение полноты можно записать в виде (4). С учетом (10) равенство (4) и означает изометричность $\dot{W}_{\pm}$ на $\mathcal{H}^{(a)}$. Наконец, заменяя в (1.7) и (4) $W_{\pm}^*(H, H_0; J)$ на $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$, установим взаимную обратность $W_{\pm}$ и $\dot{W}_{\pm}$. •

Следствие 12. Если J ограниченно обратим и ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют, то они полны.

○ В силу леммы 5 эти ВО обратимы слева соответственно на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$. Поэтому можно воспользоваться вторым утверждением предложения 11. •

3. Локальный ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ аннулируется на подпространстве $\mathcal{H}_0 \ominus E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$, а его область значений обязательно содержится в $E^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}$. Поэтому локальный ВО естественно называть полным, если вместо (1.15), (3) выполнены равенства

$$N(W_{\pm}) = \mathcal{H}_0 \ominus E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0, \quad R(W_{\pm}) = E^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}. \quad (11)$$

В этом случае операторы $E_0^{(a)}(\Lambda)H_0$ и $E^{(a)}(\Lambda)H$ унитарно эквивалентны. Последнее утверждение сохраняет силу и в случае, когда во втором равенстве (11) $R(W_{\pm})$ заменено на $\overline{R(W_{\pm})}$. На локальные ВО переносятся теорема 6 и предложение 11. При этом роль «обратного» и «сопряженного» играют также локальные ВО $W_{\pm}(H_0, H; J_1, \Lambda)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*, \Lambda)$, а соотношения (5) и (7) рассматриваются лишь на подпространствах $E_0(\Lambda)\mathcal{H}_0$ и $E(\Lambda)\mathcal{H}$.

Понятие полноты и все утверждения этого параграфа без изменения переносятся на абелевы ВО. Равным образом все введенные понятия и утверждения сохраняют смысл для ВО (в том числе и абелевых) вида (2.12) в унитарном случае.

§ 4. ОПЕРАТОР И МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПРИМЕР

1. В контексте абстрактной теории рассеяния оператор рассеяния $S = S(H, H_0; J)$, называемый также S -оператором, определяется через ВО

$$S = W_+^* W_-, \quad W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J). \quad (1)$$

В силу (1.3) оператор S аннулируется на $\mathcal{H}_0^{(s)}$, а его область значений принадлежит $\mathcal{H}_0^{(a)}$. Поэтому оператор рассеяния будем рассматривать лишь на абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

Перечислим основные свойства оператора рассеяния. Из леммы 1.2 вытекает, что оператор S ограничен и $\|S\| \leq \|J\|^2$, а из теоремы 1.4—что S перестановочен с H_0 . Условия унитарности S -оператора даются следующим утверждением.

Предложение 1. Пусть ВО $W_{\pm}$ изометричны на $\mathcal{H}_0^{(a)}$. Тогда изометричность S равносильна включению $R(W_-) \subset R(W_+)$, а унитарность S —равенству $R(W_-) = R(W_+)$.

○ При изометрическом операторе W_- равенство $\|Sf\| = \|f\|$ эквивалентно тому, что $\|W_+^* g\| = \|g\|$ для любого $g \in R(W_-)$. В свою очередь, при изометрическом W_+ последнее равенство выполняется в том и только том случае, если $g \in R(W_+)$.

Далее, соотношение $R(S) = \mathcal{H}_0^{(a)}$ означает, что любой $g \in \mathcal{H}_0^{(a)}$ представим в виде $g = W_+^* W_- f$ или $W_+ g = P_+ W_- f$, где $P_+ = W_+ W_+^*$ —ортогональный проектор на $R(W_+)$. Поэтому $R(S) = \mathcal{H}_0^{(a)}$ в том и только том случае, если для любого $h_+ \in R(W_+)$ найдется $h_- \in R(W_-)$, для которого $h_+ = P_+ h_-$. При $R(W_-) \subset R(W_+)$ для этого необходимо и достаточно выполнение равенства $R(W_-) = R(W_+)$. •

Следствие 2. Оператор рассеяния унитарен, если ВО $W_{\pm}$ изометричны на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и полны.

2. Рассмотрим теперь диагонализующее оператор $H_0^{(a)}$ разложение подпространства $\mathcal{H}_0^{(a)}$ в прямой интеграл

$$\mathcal{H}_0^{(a)} \leftrightarrow \int_{\hat{\sigma}_0} \oplus \mathfrak{h}_0(\lambda) d\lambda =: \mathfrak{H}_0^{(a)}, \quad \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}(H_0), \quad (2)$$

вида (1.5.6). Здесь $\hat{\sigma}_0$ — сердцевина спектра (см. определение 1.3.8) оператора H_0 , т.е. какое-либо множество полной E_0 -меры (и, следовательно, полной $E_0^{(a)}$ -меры), имеющее «минимальную» лебегову меру. Поскольку оператор рассеяния (1) перестановочен с $H_0^{(a)}$, при соответствии (2) он переходит в умножение на оператор-функцию $S(\lambda): \mathfrak{h}_0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}_0(\lambda)$. Оператор $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0; J)$ и называется *матрицей рассеяния*. При таком определении матрица рассеяния находится лишь при п.в. λ из $\hat{\sigma}_0$ и с точностью до унитарной эквивалентности в $\mathfrak{h}_0(\lambda)$. Разумеется, и все обсуждаемые далее свойства $S(\lambda)$ выполняются лишь для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$, что каждый раз не оговаривается.

Различные утверждения об S -операторе могут быть переформулированы в терминах матрицы рассеяния. Например, $|S(\lambda)| \leq \|J\|^2$ в силу аналогичного неравенства для S -оператора. Из предложения 1 вытекает, что для изометричных на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ ВО $W_{\pm}$ изометричность $S(\lambda)$ для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ равносильна включению $R(W_-) \subset R(W_+)$, а унитарность $S(\lambda)$ — равенству $R(W_-) = R(W_+)$.

С помощью локальных ВО (2.5) можно аналогично (1) определить оператор рассеяния S на подпространстве $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$. При существовании ВО (1.1) такой «локальный» оператор рассеяния совпадает с сужением на $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$ оператора (1). Существования ВО (2.5) достаточно для определения матрицы рассеяния $S(\lambda)$ при п.в. $\lambda \in \Lambda \cap \hat{\sigma}_0$. По-прежнему изометричность на $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$ локальных ВО $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ и их полнота обеспечивают унитарность $S(\lambda)$.

3. Рассмотрим сейчас совсем простой пример, в котором теория рассеяния строится явно. Пусть $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, а $H_0 = -id/dx$, причем $\mathcal{D}(H_0)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$ вместе со своей производной. Оператор H_0 унитарно эквивалентен оператору A умножения на независимую переменную в «двойственном» пространстве

$L_2(\Xi)$. Именно, $H_0 = \Phi^* A \Phi$, где Φ — преобразование Фурье. Таким образом, спектр H_0 абсолютно непрерывен, покрывает всю (см. п. 7 § 1.6) спектральную ось и является простым. Кроме того,

$$(U_0(t)f)(x) = f(x - t). \quad (3)$$

Пусть теперь q — какая-либо локально суммируемая вещественная функция. Обозначим через $\mathcal{D}(H)$ множество абсолютно непрерывных функций, принадлежащих $L_2(\mathbb{R})$ вместе с функцией $-if' + qf$. На области определения $\mathcal{D}(H)$ оператор H зададим равенством

$$Hf = -if' + qf.$$

Положим

$$(Yf)(x) = \exp \left(-i \int_0^x q(y) dy \right) f(x). \quad (4)$$

Ясно, что оператор Y унитарен в $\mathcal{H}$, переводит $\mathcal{D}(H_0)$ на $\mathcal{D}(H)$ и

$$HYf = YH_0f, \quad f \in \mathcal{D}(H_0). \quad (5)$$

Отсюда, в частности, следует, что оператор H самосопряжен на $\mathcal{D}(H)$.

При построении для пары H_0, H ВО будем считать $J = I$. Используя равенства (3) — (5), найдем, что оператор (1.2) действует по формуле

$$\begin{aligned} (W(t)f)(x) &= (YU_0(-t)Y^*U_0(t)f)(x) = \\ &= \exp \left(i \int_x^{x+t} q(y) dy \right) f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место

Предложение 3. Пусть сходится интеграл от q по полуоси $\mathbb{R}_\pm$. Тогда ВО $W_\pm(H, H_0)$ существует и действует как умножение на функцию

$$\exp \left(i \int_x^{\pm\infty} q(y) dy \right).$$

В этом примере ВО оказываются унитарными и, в частности, полными в смысле определения 3.1. Оператор рассеяния

S действует как умножение на постоянную функцию

$$\exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} q(x) dx \right). \quad (6)$$

Матрица рассеяния $S(\lambda)$ не зависит от λ и также сводится к умножению на число (6).

§ 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ. ПРИЗНАК КУКА

1. При доказательстве существования ВО систематически учитывается, что сходимость в (1.1) достаточно проверять для плотного в $\mathcal{H}_0$ или хотя бы в $\mathcal{H}_0^{(a)}$ множества элементов. Следующее простое, но эффективное достаточное условие существования ВО называется обычно *признаком Кука*.

Теорема 1. Пусть оператор J переводит область определения $\mathcal{D}(H_0)$ оператора H_0 в $\mathcal{D}(H)$. Предположим, что при некотором плотном в $\mathcal{H}_0^{(a)}$ множестве $D_0 \subset \mathcal{D}(H_0) \cap \mathcal{H}_0^{(a)}$ для любого $f \in D_0$

$$\int_0^{\pm\infty} \|(HJ - JH_0)U_0(t)f\| dt < \infty. \quad (1)$$

Тогда существует ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Поскольку $\overline{D_0} = \mathcal{H}_0^{(a)}$, достаточно проверить сильную сходимость вектор-функции $U(-t)JU_0(t)f =: w(t)$ для элементов $f \in D_0$. Из условий $f \in \mathcal{D}(H_0)$ и $J: \mathcal{D}(H_0) \rightarrow \mathcal{D}(H)$ вытекает, что вектор-функция $w(t)$ дифференцируема и

$$w'(t) = iU(-t)(HJ - JH_0)U_0(t)f.$$

По условию (1) функция $w'(t)$ абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}_{\pm}$, а потому $w(t)$ имеет предел при $t \rightarrow \pm\infty$. •

З а м е ч а н и е 2. Условие $J: \mathcal{D}(H_0) \rightarrow \mathcal{D}(H)$ можно заменить предположением $JU_0(t)f \in \mathcal{D}(H)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и $f \in D_0$.

Теорема 1 требует достаточно явного представления для группы $U_0(t)$. Такое представление часто удается получить для свободной динамики, что позволяет проверить существование прямого ВО при достаточно широких предположениях о

возмущении. Напротив, для унитарной группы $U(t)$ полного гамильтониана H явное представление, как правило, отсутствует. Именно поэтому доказательство существования обратного ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ или полноты прямого оказывается существенно более трудной задачей. В теории дифференциальных операторов, когда H_0 имеет постоянные коэффициенты, представление для $U_0(t)$ строится с помощью преобразования Фурье. Совсем простой пример такого типа будет приведен в § 3.1.

Иногда условие (1) существования ВО не оптимально. Так, в примере п. 3 § 4 для выполнения (5.1) требуется, чтобы $\|q\|_{L_2(t-1, t+1)} \in L_1(\mathbb{R}_{\pm})$. В то же время, как мы видели, ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существует, если интеграл от q по $\mathbb{R}_{\pm}$ сходится хотя бы условно.

2. При проверке существования ВО в абстрактной теории рассеяния важную роль играет множество $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_H$ элементов $f \in \mathcal{H}_H^{(a)}$, для которых

$$r_H^2(f) := \text{vrai sup} \frac{d(E_H(\lambda)f, f)}{d\lambda} < \infty. \quad (2)$$

Его использование основано на следующем неравенстве:

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |(U(t)f, g)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d(E(\lambda)f, g)}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \leq r^2(f) \|Pg\|^2, \\ f \in \mathfrak{R}, \quad g \in \mathcal{H}, \quad r = r_H, \quad P = P_H^{(a)}. \quad (3)$$

Здесь равенство в левой части является следствием равенства Парсеваля, примененного к соотношению (1.4.2) с абсолютно непрерывной функцией $(E(\lambda)f, g)$. Для доказательства неравенства (3) нужно лишь применить оценку (1.3.9) и учесть представление (1.3.11).

Из (1.3.9) следует также, что множество $\mathfrak{R}$ линейно. Кроме того, имеет место

Лемма 3. Множество $\mathfrak{R}_H$ плотно в абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{H}_H^{(a)}$.

○ Для $f \in \mathcal{H}^{(a)}$ положим $X_N = \{\lambda: \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda} \leq N\}$, $Y_N = \mathbb{R} \setminus X_N$. Тогда $Y_{\infty} = \cap Y_N$ — множество тех λ , в которых $d(E(\lambda)f, f)/d\lambda$ не существует или равна ∞ . Поскольку функция $d(E(\lambda)f, f)/d\lambda$ суммируема, то $|Y_{\infty}| = 0$, и, следовательно,

$|Y_N| \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В силу (1.3.13) для элементов $f_N = E(X_N)f$

$$\frac{d(E(\lambda)f_N, f_N)}{d\lambda} = \chi_{X_N}(\lambda) \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda} \leq N,$$

так что $f_N \in \mathfrak{R}$. Кроме того, $\|f - f_N\| = \|E(Y_N)f\| \rightarrow 0$ при $|Y_N| \rightarrow 0$ ввиду абсолютной непрерывности меры $(E(\cdot)f, f)$. •

Определение множества $\mathfrak{R}$ становится особенно прозрачным в терминах разложения пространства $\mathcal{H}^{(a)}$ в прямой интеграл (1.5.6). Именно, в силу (1.5.7) $\mathfrak{R}$ состоит из элементов, представители $\hat{f}(\lambda)$ которых в существенном ограничены на $\hat{\sigma}$. Лемма 3 означает, что утверждение о плотности L_∞ в L_2 распространяется на вектор-функции со значениями в прямых интегралах.

§ 6. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ БИРМАНА

1. *Принципом инвариантности (ПИ)* называется общая гипотеза о том, что при определенных условиях на вещественную функцию φ (включающих предположение $\varphi'(\lambda) > 0$) ВО для пар H_0, H и $h_0 = \varphi(H_0)$, $h = \varphi(H)$, существуют одновременно и совпадают друг с другом, т.е.

$$w_\pm = W_\pm(\varphi(H), \varphi(H_0); J) = W_\pm(H, H_0; J) =: W_\pm. \quad (1)$$

Принцип инвариантности выполняется практически во всех конкретных признаках существования ВО, хотя приведенная только что его «абсолютная» формулировка неверна.

Коль скоро ПИ оказывается верным в условиях какого-либо признака существования ВО, для последнего автоматически расширяется сфера его применимости. Действительно, проверяя условия признака для пары H_0, H , мы автоматически получаем существование ВО уже для другой пары h_0, h . Что касается равенства инвариантности (1), то оно полезно для перенесения информации о ВО $W_\pm$ на ВО $w_\pm$. В конкретных применениях обычно, напротив, ВО $W_\pm$ изучается с помощью $w_\pm$ при подходящей обратимой функции φ . Такой прием особенно удобен в теории ядерных возмущений (см. п. 2 § 6.5).

2. При рассмотрении оператора $\varphi(H)$ функция φ предполагается, разумеется, измеримой и п.в. конечной относительно

спектральной меры E оператора H . Напомним, что спектральная мера функции от оператора строится по формуле

$$E_{\varphi(H)}(\Lambda) = E_H(\varphi^{-1}(\Lambda)), \quad (2)$$

где $\varphi^{-1}(\Lambda)$ — полный прообраз борелевского множества Λ при отображении φ .

При обосновании ПИ относительно φ достаточно делать предположения на каком-либо открытом множестве полной E -меры. За счет наличия в определении ВО абсолютно непрерывного проектора P такое множество можно еще уменьшить. Предположим предварительно, что функция φ определена и принимает конечные значения на некотором множестве M полной E -меры, т.е.

$$E(\mathbb{R} \setminus M) = 0. \quad (3)$$

Реальные условия относительно φ формируются на открытом множестве Ω , для которого

$$|M \setminus \Omega| = 0, \quad (4)$$

$$|\varphi(M \setminus \Omega)| = 0. \quad (5)$$

Например, условия (4), (5) выполнены, если множество $M \setminus \Omega$ счетно.

Положим $\Omega_0 = M \setminus \Omega$ и рассмотрим представление открытого множества

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \quad (6)$$

в виде объединения непересекающихся интервалов. Ввиду равенств (3) и (6) построение функции $\varphi(H)$ в $\mathcal{H}$ сводится к аналогичной задаче в каждом из подпространств $\mathcal{H}^{(n)} = E(\Omega_n)\mathcal{H}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в отдельности. Именно, обозначая $H^{(n)} = E(\Omega_n)H$, найдем, что

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}^{(n)}, \quad H = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus H^{(n)}, \quad \varphi(H) = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus \varphi(H^{(n)}). \quad (7)$$

Отметим, что $\varphi(H^{(n)}) = \varphi_n(H^{(n)})$, где φ_n — сужение φ на множество Ω_n .

Найдем прежде всего условия инвариантности абсолютно непрерывного подпространства. Отметим предварительно, что при условиях (3), (4) оператор $H^{(0)}$ сингулярен, т.е.

$$P_H^{(a)} = E_H^{(a)}(\Omega). \quad (8)$$

Лемма 1. Пусть функция φ абсолютно непрерывна на составляющих интервалах открытого множества Ω и $\varphi'(\lambda) > 0$ или $\varphi'(\lambda) < 0$ при п.в. $\lambda \in \Omega_n$. Предположим, что выполнены условия (3)–(5). Тогда справедливо равенство

$$\mathcal{H}_H^{(a)} = \mathcal{H}_{\varphi(H)}^{(a)}. \quad (9)$$

○ Как уже отмечалось, при условиях (3), (4) оператор $H^{(0)}$ сингулярен. Аналогичным образом в силу (2) при условиях (3), (5) сингулярен оператор $\varphi(H^{(0)})$. Поэтому согласно (7) достаточно установить совпадение абсолютно непрерывных подпространств каждой из пар $H^{(n)}$ и $h^{(n)} = \varphi(H^{(n)})$, $n \geq 1$, в отдельности. Убедимся предварительно, что для $X \subset \Omega_n$ равенства $|X| = 0$ и $|\varphi(X)| = 0$ равносильны. В силу абсолютной непрерывности φ на Ω_n и постоянства знака $\varphi' \in L_1^{(\text{loc})}$

$$|\varphi(X)| = \left| \int_X \varphi'(\lambda) d\lambda \right| = \int_X |\varphi'(\lambda)| d\lambda.$$

Тем самым $|\varphi(X)| = 0$ при $|X| = 0$. Обратно, если $|\varphi(X)| = 0$, то $\varphi'(\lambda) = 0$ при п.в. $\lambda \in X$. По условию на φ отсюда следует, что $|X| = 0$.

Проверим теперь равенство (9) для $H^{(n)}$ и $h^{(n)}$. Согласно (2) для $f \in \mathcal{H}^{(n)}$

$$(E_{H^{(n)}}(X)f, f) = (E_{h^{(n)}}(x)f, f), \quad X \subset \Omega_n, \quad x = \varphi(X). \quad (10)$$

Элемент f абсолютно непрерывен относительно $H^{(n)}$, если левая часть (10) равна нулю при любом $X \subset \Omega_n$ с $|X| = 0$. Поскольку равенства $|X| = 0$ и $|x| = 0$ эквивалентны, это выполнено в том и только в том случае, когда правая часть (10) равна нулю при любом $x \subset \varphi(\Omega_n)$ с $|x| = 0$. Это и означает, что f абсолютно непрерывен относительно $h^{(n)}$. •

Укажем теперь класс функций, для которых обсуждается справедливость соотношения (1). По сравнению с условиями леммы 1 требуются лишь незначительные дополнительные предположения.

Определение 2. Вещественную функцию φ назовем допустимой на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$, если φ имеет на Ω производную φ' , абсолютно непрерывную и знакопостоянную на каждом из составляющих Ω интервалов Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, (т.е.

$\varphi'(\lambda) > 0$ или $\varphi'(\lambda) < 0$ при $\lambda \in \Omega_n$). Если, кроме того, эта функция E -измерима, E -п.в. конечна и при некотором борелевском множестве M выполняются равенства (3)–(5), то φ называется допустимой по отношению к оператору H .

3. Уточним формулировку ПИ. Положим $\Omega_{\pm} = \{\lambda \in \Omega: \pm \varphi'(\lambda) > 0\}$; тогда $\Omega_+ \cup \Omega_- = \Omega$. Формулировка ПИ (1) относится к случаю, когда $\varphi'(\lambda) > 0$ при $\lambda \in \Omega$. В общем случае роль (1) играет соотношение

$$W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0); J) = W_{\pm}(H, H_0; J, \Omega_+) + W_{\mp}(H, H_0; J, \Omega_-), \quad (11)$$

формулируемое в терминах локальных ВО (2.5). В силу (8) и (9) это соотношение эквивалентно двум равенствам:

$$W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0); J E_0(\Omega_+)) = W_{\pm}(H, H_0; J, \Omega_+), \quad (12)_+$$

$$W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0); J E_0(\Omega_-)) = W_{\mp}(H, H_0; J, \Omega_-). \quad (12)_-$$

Строго говоря, ПИ называют утверждение о том, что существование локального ВО в правой части $(12)_+$ или $(12)_-$ обеспечивает существование ВО в его левой части и само это равенство. Это утверждение верно лишь в конкретных предположениях. Тем не менее, как мы увидим в § 3.5, всегда справедлива следующая ослабленная формулировка ПИ: если волновые операторы в обеих частях $(12)_{\pm}$ существуют, то они связаны равенством $(12)_{\pm}$.

Подчеркнем, что в этих рассуждениях соотношения $(12)_+$ и $(12)_-$ рассматриваются независимо друг от друга. В свою очередь, каждое из них понимается, как всегда, как совокупность двух независимых равенств.

Из (11) вытекает и ПИ для операторов рассеяния (4.1):

$$S(\varphi(H), \varphi(H_0); J) = S(H, H_0; J) E_0(\Omega_+) + S^*(H, H_0; J) E_0(\Omega_-). \quad (13)$$

Для формулировки ПИ в терминах матриц рассеяния надо прежде всего согласовать разложения пространства $\mathcal{H}_{H_0}^{(a)} = \mathcal{H}_{h_0}^{(a)}$ в прямые интегралы, диагонализующие операторы $H_0^{(a)}$ и $h_0^{(a)}$. Будем считать, что разложение для оператора $h_0^{(a)}$ строится из какого-либо фиксированного разложения (4.2) с помощью замены переменных $\mu = \varphi(\lambda)$. Тогда согласно (13) матрица рассеяния $s(\mu)$, отвечающая оператору $S(h, h_0; J)$, действует в пространстве

$$b_0(\mu) = \sum_{\varphi(\lambda)=\mu} \oplus h_0(\lambda)$$

при п.в. $\mu \in \hat{\sigma}_{h_0}$ по формуле

$$s(\mu) = \left(\sum_{\substack{\varphi(\lambda)=\mu \\ \lambda \in \Omega_+}} \oplus S(\lambda) \right) \oplus \left(\sum_{\substack{\varphi(\lambda)=\mu \\ \lambda \in \Omega_-}} \oplus S^*(\lambda) \right). \quad (14)$$

4. Приведем, наконец, вспомогательные технические соображения, используемые в конкретных предположениях для доказательства ПИ.

Если для пары H_0, H существует ВО $W_{\pm}$, то в силу сплетающего свойства справедливо соотношение (1.23). Аналогичное соотношение для группы $u_0(t) = \exp(-ih_0 t)$ оказывается полезным при проверке ПИ.

Лемма 3. Пусть для пары H_0, H и множества Ω_{ν} , где $\nu = +$ или $\nu = -$, существует локальный ВО

$$W_{\pm}(H, H_0; J, \Omega_{\nu}) =: W_{\pm}(\Omega_{\nu}).$$

Тогда существование ВО $W_{\pm\nu}(h, h_0, JE_0(\Omega_{\nu}))$ и справедливость для него равенства $(12)_{\nu}$ равносильны соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \pm\nu\infty} (W_{\pm}(\Omega_{\nu}) - J)u_0(t)E_0^{(a)}(\Omega_{\nu}) = 0. \quad (15)$$

○ В силу сплетающего свойства

$$u(t)W_{\pm}(\Omega_{\nu}) = W_{\pm}(\Omega_{\nu})u_0(t)$$

соотношение (15) эквивалентно тому, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\nu\infty} [W_{\pm}(\Omega_{\nu}) - u(-t)Ju_0(t)]E_0^{(a)}(\Omega_{\nu}) = 0.$$

Последнее равенство означает, что при $f \in E_0^{(a)}(\Omega_{\nu})\mathcal{H}$ и $t \rightarrow \pm\nu\infty$ существует предел $u(-t)Ju_0(t)f$, равный $W_{\pm}(\Omega_{\nu})f$. •

Лемма 3 показывает, что доказательство ПИ сводится к проверке соотношения (15). Отметим, что при существовании ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ оператор $W_{\pm}(\Omega_{\nu})$ в (15) можно заменить на $W_{\pm}$. Ввиду равенства $W_{\pm}(\Omega_{\nu})E_0^{(a)}(\Omega_{\nu}) = W_{\pm}E_0^{(a)}(\Omega_{\nu})$, получившееся соотношение совпадает с (15).

Согласно (7) при доказательстве (15) достаточно рассматривать каждый из составляющих интервалов Ω_n , $n = 1, 2, \dots$, в отдельности. При этом часто применяется следующее элементарное техническое утверждение.

Лемма 4. Пусть функция φ допустима на интервале Λ и $\psi \in L_2(\Lambda)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^\infty ds \left| \int_\Lambda \exp(-is\lambda - it\varphi(\lambda)) \psi(\lambda) d\lambda \right|^2 = 0, \quad \pm\varphi'(\lambda) > 0. \quad (16)$$

○ Достаточно проверять (16) для $\psi \in C_0^\infty(\Lambda)$. В этом проще всего убедиться, записав (16) в операторных обозначениях. Пусть B —умножение на $\varphi(\lambda)$ в пространстве $L_2(\Lambda)$, а оператор $T: L_2(\Lambda) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$ действует по формуле

$$(Tf)(s) = \int_\Lambda e^{-is\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

Тогда (16) эквивалентно тому, что

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T \exp(-itB) \psi = 0, \quad \pm\varphi'(\lambda) > 0.$$

Ввиду ограниченности T такое равенство достаточно проверять на каком-либо плотном в $L_2(\Lambda)$ множестве.

При $\psi \in C_0^\infty(\Lambda)$ в интеграле по Λ можно проинтегрировать по частям. Тогда

$$(T \exp(-itB) \psi)(s) = -i \int_\Lambda \exp(-is\lambda - it\varphi(\lambda)) [\psi(\lambda)(s + t\varphi'(\lambda))^{-1}]' d\lambda. \quad (17)$$

Выполняя в правой части дифференцирование, найдем, что подинтегральная функция по модулю не превосходит

$$|\psi'(\lambda)|(s + |t\varphi'(\lambda)|)^{-1} + |\psi(\lambda)\varphi''(\lambda)t|(s + |t\varphi'(\lambda)|)^{-2}.$$

Для допустимой функции φ на компактном множестве $\text{supp } \varphi$ верна оценка $|\varphi'(\lambda)| \geq a > 0$ и $\varphi'' \in L_1^{(\text{loc})}(\Lambda)$. Поэтому модуль функции (17) оценивается через $C(s + a|t|)^{-1}$ и, следовательно, весь интеграл (16)—через $|t|^{-1}$. •

5. При формулировке ПИ для глобальных ВО $W_\pm(\varphi(H), \varphi(H_0); J)$ нам было удобно ввести локальные ВО для пары H_0, H . Последовательно локальная формулировка ПИ состоит в следующем. Пусть функция φ допустима на интервале Λ . Продолжим φ на $\mathbb{R} \setminus \Lambda$ так, чтобы $\varphi \in L_\infty^{(\text{loc})}$, а в остальном—произвольно. Можно, например, считать, что $\varphi(\lambda) = 0$ при

$\lambda \notin \Lambda$. Тогда для любого самосопряженного оператора H корректно определяется его функция $\varphi(H)$. Локальный вариант ПИ состоит в гипотезе, что из существования волнового оператора $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ вытекает существование предела в левой части равенства

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(-t)Ju_0(t)E_{H_0}^{(a)}(\Lambda) = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda), \quad \varphi'(\lambda) > 0, \quad (18)$$

и само это равенство. Если $\varphi'(\lambda) < 0$ при $\lambda \in \Lambda$, то предел в (18) надо, конечно, брать при $t \rightarrow \mp\infty$. В отношении справедливости локальной формулировки ПИ верно сказанное в п. 3 о ВО «в целом». Нетрудно убедиться, что справедливость (18) для всех составляющих интервалов открытого множества Ω равносильна формулировке (11).

Принцип инвариантности содержателен и для слабых ВО (2.1), в том числе локальных (2.6). Отметим, что ПИ для слабых ВО не эквивалентен ПИ для сильных ВО, и ни одна из этих двух формулировок не вытекает из другой. Важно, что с помощью теоремы 2.1 из слабой формулировки можно в конкретных приложениях (см. п. 4 § 5.3) извлечь сильную.

Принцип инвариантности имеет смысл и в применении к ВО вида (2.12) для пары унитарных операторов, когда рассматриваются функции $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, а также для отображений $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ и $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, связывающих самосопряженные операторы с унитарными. В частности, при $\varphi(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)^{-1}$ справедливость ПИ означает, что ВО для пары самосопряженных операторов H_0, H и их преобразований Кэли $U_0 = \mathcal{K}_{H_0}$, $U = \mathcal{K}_H$ (см. (2.13)) существуют одновременно и совпадают.

Если операторы H_0, H положительны, то применение ПИ чаще всего связано с использованием пар $(H_0 + I)^{-\alpha}$, $(H + I)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, и $\exp(-H_0)$, $\exp(-H)$.

§ 7. СТАЦИОНАРНЫЙ ПОДХОД.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

При стационарном подходе ВО определяется через резольвенты гамильтонианов H_0 и H . Такое определение имеет два преимущества. Во-первых, в приложениях исследование резольвенты оказывается, как правило, более простой задачей, чем прямое изучение унитарной группы. Во-вторых, в стационарных терминах даются формульные представления для ВО,

оператора и матрицы рассеяния, часто используемые в физике и удобные при проверке различных свойств этих объектов. В настоящем параграфе мы даем эвристическое описание стационарного подхода и приводим представления для ВО. Точные формулировки и их доказательства можно найти в гл. 5.

1. Далее нам понадобится обобщение равенства Парсеваля на вектор-функции, принимающие значения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $f_j \in L_1(\mathbb{R}; \mathcal{H}) \cap L_2(\mathbb{R}; \mathcal{H})$, $j = 1, 2$, а

$$\hat{f}_j(\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm i\lambda t) f_j(t) dt.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}_1(\lambda), \hat{f}_2(\lambda)) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(t), f_2(t)) dt. \quad (1)$$

Доказательство (1) получается разложением обеих частей по какому-либо ортонормированному базису в $\mathcal{H}$ и применением скалярного равенства Парсеваля.

Отправной точкой стационарной теории рассеяния является преобразование нестационарного определения (1.1) к выражению ВО через резольвенты $R_0(z)$ и $R(z)$ операторов H_0 и H . При таком преобразовании достаточно считать, что существует лишь слабый ВО (2.1), причем даже слабый предельный переход можно понимать по Абелю. Именно, предположим, что при $\omega_\epsilon(t) = 2\epsilon \exp(-2\epsilon t)$ выполнено (2.11), т.е. для пары элементов $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$ и $f_0^{(a)} = P_0^{(a)} f_0$, $f^{(a)} = P^{(a)} f$ существует

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon \int_0^{\infty} e^{-2\epsilon t} (JU_0(\pm t) f_0^{(a)}, U(\pm t) f^{(a)}) dt = (\tilde{\mathfrak{U}}_{\pm} f_0, f).$$

Пусть $\theta(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta(t) = 0$ при $t < 0$. Применим равенство (1) к функциям $\theta(t)e^{-\epsilon t} JU_0(\pm t) f_0^{(a)}$, $\theta(t)e^{-\epsilon t} U(\pm t) f^{(a)}$. Тогда, учитывая выражения (1.4.4) для резольвент операторов

H_0 и H , найдем, что

$$2\varepsilon \int_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t} (J U_0(\pm t) f_0^{(a)}, U(\pm t) f^{(a)}) dt = \\ = \pi^{-1} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0^{(a)}, R(\lambda \pm i\varepsilon) f^{(a)}) d\lambda. \quad (2)$$

Тем самым установлена

Лемма 1. *Существование слабого абелева ВО $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}(H, H_0; J)$ равносильно существованию для любых $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$ предела выражения (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем*

$$(\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}(H, H_0; J) f_0^{(a)}, f^{(a)}) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} (J R_0(\lambda + i\varepsilon) f_0^{(a)}, R(\lambda + i\varepsilon) f^{(a)}) d\lambda. \quad (3)$$

Таким образом, определение ВО $\tilde{\mathfrak{A}}_{\pm}(H, H_0; J)$ эквивалентным образом переформулируется в терминах резольвент операторов H_0 и H . При существовании ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ соотношение (3) можно рассматривать как стационарное представление для его полуторалинейной формы. Определение стационарного ВО отличается от (3) лишь тем, что предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ вносится под знак интеграла. Именно, примем

Определение 2. *Предположим, что для плотных в $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}$ линейных $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}$ для любых $f_0 \in \mathcal{L}_0$, $f \in \mathcal{L}$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ (соответствующее множество полной меры в $\mathbb{R}$ может зависеть от f_0 и f) существует*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon) f) =: a_{\pm}(f_0, f; \lambda). \quad (4)$$

Стационарным ВО $\mathcal{U}_{\pm} = \mathcal{U}_{\pm}(H, H_0; J)$ для операторов H_0 , H и отождествления J назовем оператор, определенный посредством заданной на $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}$ полуторалинейной формы

$$(\mathcal{U}_{\pm} f_0, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon) f) d\lambda. \quad (5)$$

Отложим обсуждение корректности этого определения до § 5.2. Там же мы убедимся, что при существовании предела

(4) оператор $\mathcal{U}_{\pm}$ обладает обычными для ВО свойствами. Он ограничен, удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{H}_0^{(s)} \subset N(\mathcal{U}_{\pm}), \quad R(\mathcal{U}_{\pm}) \subset \mathcal{H}^{(a)} \quad (6)$$

и выполняется сплетающее свойство

$$E(\Lambda)\mathcal{U}_{\pm} = \mathcal{U}_{\pm}E_0(\Lambda). \quad (7)$$

Кроме того, справедливо представление

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{\pm}E_0(\Lambda_0)f_0, E(\Lambda)f) = \\ = \int_{\Lambda_0 \cap \Lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1}\varepsilon (JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)f) d\lambda. \end{aligned} \quad (8)$$

Предельный переход по ε и интегрирование по λ можно в (5) (и в (8)) переставить; при этом f_0, f надо заменить на $f_0^{(a)}, f^{(a)}$. Таким образом, при условии (4) существует и слабый абелев ВО $\tilde{\mathcal{U}}_{\pm} = \mathcal{U}_{\pm}$. В условиях определения (2) существует также стационарный ВО

$$\mathcal{U}_{\pm}(H_0, H; J^*) = \mathcal{U}_{\pm}^*(H, H_0; J). \quad (9)$$

Отметим еще, что ввиду резольвентного тождества (1.9.5) выражение под знаком предела в (4) можно переписать в любой из двух форм:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}\varepsilon (JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)f) = \\ = ([J + VR_0(\lambda \pm i\varepsilon)]f_0, \delta(\lambda, \varepsilon)f) = \\ = (\delta_0(\lambda, \varepsilon)f_0, [J^* - V^*R(\lambda \pm i\varepsilon)]f), \end{aligned} \quad (10)$$

где мы воспользовались обозначением (1.4.5).

2. Дальнейшее изучение свойств стационарных ВО основано на представлении

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_{\pm}f_0, \mathcal{U}_{\pm}g_0) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1}\varepsilon (JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0) d\lambda, \end{aligned} \quad (11)_{\pm}$$

где f_0 и g_0 принадлежат подходящему плотному в $\mathcal{H}_0$ множеству. Приведем здесь лишь формальный вывод $(11)_{\pm}$. В силу

соотношения (1.4.11) и включения $U_{\pm} f_0 \in \mathcal{H}^{(a)}$ для произвольного борелевского множества Λ

$$(E(\Lambda)U_{\pm} f_0, f) = \int_{\Lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta(\lambda, \varepsilon) U_{\pm} f_0, f) d\lambda.$$

Сравнивая это равенство с (8) при $\Lambda_0 = \mathbb{R}$, найдем, что при $f_0 \in \mathcal{L}_0$, $f \in \mathcal{L}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta(\lambda, \varepsilon) U_{\pm} f_0, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon) f). \quad (12)$$

Соотношение (12) вполне корректно. Формально из него вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\delta(\lambda, \varepsilon) U_{\pm} f_0 \sim \pi^{-1} \varepsilon R(\lambda \mp i\varepsilon) J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0. \quad (13)$$

Положим в (10) $f = U_{\pm} g_0$ и учтем резольвентное тождество. Ввиду (13) это дает соотношение

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon) U_{\pm} g_0) &= \\ &= ([J + V R_0(\lambda \pm i\varepsilon)] f_0, \delta(\lambda, \varepsilon) U_{\pm} g_0) \sim \\ &\sim \pi^{-1} \varepsilon ([J + V R_0(\lambda \pm i\varepsilon)] f_0, R(\lambda \mp i\varepsilon) J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) g_0) = \\ &= \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) g_0). \end{aligned} \quad (14)$$

В отличие от (13) здесь символ $\alpha(\lambda, \varepsilon) \sim \beta(\lambda, \varepsilon)$ имеет точный смысл и означает, что обе части для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ имеют совпадающие конечные пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Воспользуемся теперь определением (5) при $f = U_{\pm} g_0$. Подставляя (14) в его правую часть, завершим проверку (11) $_{\pm}$. Подчеркнем, что мы опустили точную формулировку и обоснование соотношения (13). Его обоснование возможно (см. § 5.2), но требует дополнительных предположений.

Наряду с $U_{\pm}(H, H_0; J)$ рассмотрим также стационарные ВО $U_{\pm}^{(0)} = U_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$ для пары H_0, H_0 и отождествления $J^* J$. Согласно определению (5)

$$(U_{\pm}^{(0)} f_0, g_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) g_0) d\lambda. \quad (15)$$

Сопоставляя это равенство с (11) $_{\pm}$ найдем, что

$$U_{\pm}^*(H, H_0; J) U_{\pm}(H, H_0; J) = U_{\pm}(H_0, H_0; J^* J). \quad (16)$$

В частности, для отождествления J^*J , эквивалентного I (например, для $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$), отсюда вытекает, что оператор $\mathcal{U}_\pm$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

3. Равенство (16) является ключевым соотношением стационарного подхода. В самом деле, предположим, что мы сумели установить существование слабых нестационарных ВО $\widetilde{W}_\pm(H, H_0; J)$ и $\widetilde{W}_\pm(H_0, H_0; J^*J)$. Эти операторы автоматически совпадают с соответствующими стационарными ВО. Поэтому из равенства (16) для них вытекает, что выполняется соотношение (2.3) для слабых нестационарных ВО. Тем самым в силу теоремы 2.1 существует сильный ВО $W_\pm(H, H_0; J)$.

Таким образом, проверка существования сильного нестационарного ВО $W_\pm(H, H_0; J)$ разбилась на два этапа. Первый из них—доказательство существования слабых нестационарных ВО, что существенно проще такой задачи для сильных ВО. Второй, наиболее содержательный, этап—стационарное доказательство тождества (16). Поэтому и вся эта схема называется *стационарной*.

§ 8. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА И МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Продолжая рассмотрения предыдущего параграфа, мы получим здесь выражения для оператора и матрицы рассеяния в терминах предельных значений резольвент. Их точные доказательства см. в § 5.5.

1. Установим прежде всего представление для полуторалинейной формы стационарного оператора рассеяния $\mathcal{U}_+^*\mathcal{U}_-$ или, общее, оператора $\mathcal{U}_+^*E(X)\mathcal{U}_-$, где X —произвольное борелевское множество. Это делается аналогично выводу представления (7.11) $_\pm$. Будем опять исходить из соотношения (7.13), которое пока имеет лишь формальный смысл. Из него вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} \pi^{-1}\varepsilon(JR_0(\lambda - i\varepsilon)f_0, R(\lambda - i\varepsilon)\mathcal{U}_+g_0) &= \\ &= ([J + VR_0(\lambda - i\varepsilon)]f_0, \delta(\lambda, \varepsilon)\mathcal{U}_+g_0) \sim \\ &\sim \pi^{-1}\varepsilon([J + VR_0(\lambda - i\varepsilon)]f_0, R(\lambda - i\varepsilon)JR_0(\lambda + i\varepsilon)g_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Подставим теперь в представление (7.8) для формы $(E(X)\mathcal{U}_- f_0, f)$ элемент $f = \mathcal{U}_+ g_0$. Тогда согласно (1)

$$(E(X)\mathcal{U}_- f_0, \mathcal{U}_+ g_0) = \int_X \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon ([J + V R_0(\lambda - i\varepsilon)] f_0, R(\lambda - i\varepsilon) J R_0(\lambda + i\varepsilon) g_0) d\lambda. \quad (2)$$

Скалярное произведение под знаком предела можно тождественно преобразовать с помощью равенств

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \varepsilon R_0^* J^* R(J + V R_0^*) &= (J^* + R_0^* V^*) \delta(\lambda, \varepsilon) (J + V R_0^*) = \\ &= \pi^{-1} \varepsilon (J^* + R_0^* V^*) R J R_0^*. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь считаем, что $z = \lambda + i\varepsilon$, а обозначение зависимости от z опущено, т.е. $R_0 = R_0(\lambda + i\varepsilon)$, $R_0^* = R_0(\lambda - i\varepsilon)$ и аналогично для R .

При существовании ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ различные варианты равенства (2) при $X = \mathbb{R}$ можно рассматривать как стационарные представления для полуторалинейной формы оператора рассеяния $S = W_+^* W_-$.

Другое важное преобразование оператора (3) используется для вычисления матрицы рассеяния. Положим

$$T_+(z) = J^* V - V^* R(z) V, \quad (4)_+$$

$$T_-(z) = V^* J - V^* R(z) V \quad (4)_-$$

и воспользуемся опять определением (1.4.5) и резольвентным тождеством (1.9.5). Тогда

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \varepsilon (R J R_0^* f_0, [J + V R_0] g_0) &= \\ &= \pi^{-1} \varepsilon (J R_0^* f_0, R^* [J + V R_0^*] g_0) - 2i\varepsilon (R J R_0^* f_0, V \delta_0(\lambda, \varepsilon) g_0) = \\ &= \pi^{-1} \varepsilon (J R_0^* f_0, J R_0^* g_0) - 2\pi i (T_-(\lambda + i\varepsilon) \delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0, \delta_0(\lambda, \varepsilon) g_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Можно также провести аналогичное преобразование, выделяя $\pi^{-1} \varepsilon (J R_0 f_0, J R_0 g_0)$ в качестве первого слагаемого в правой части. Тогда во втором слагаемом T_- заменится на T_+ . В силу равенств (2), (3) и (7.15) отсюда вытекают два представления:

$$\begin{aligned} (E(X)\mathcal{U}_- f_0, \mathcal{U}_+ g_0) &= (E_0(X)\mathcal{U}_{\pm}^{(0)} f_0, g_0) - \\ &- 2\pi i \int_X \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_{\pm}(\lambda + i\varepsilon) \delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0, \delta_0(\lambda, \varepsilon) g_0) d\lambda. \end{aligned} \quad (6)$$

2. Равенства (6) позволяют легко получить представления для матрицы рассеяния $S(\lambda)$. Пусть $\mathcal{H}_0^{(a)}$ разложено в прямой интеграл (4.2), так что $f_0 \leftrightarrow \tilde{f}_0(\lambda)$. Поскольку оператор $\mathcal{U}_\pm^{(0)}$ коммутирует с H_0 и аннулируется на $\mathcal{H}_0^{(s)}$, в этом разложении ему отвечает семейство ограниченных операторов $u_\pm(\lambda): \mathfrak{h}_0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}_0(\lambda)$. Поэтому

$$(E(X)\mathcal{U}_-f_0, \mathcal{U}_+g_0) = (E_0(X)\mathcal{U}_\pm^{(0)}f_0, g_0) + \int_X ((S(\lambda) - u_\pm(\lambda))\tilde{f}_0(\lambda), \tilde{g}_0(\lambda)) d\lambda.$$

Сравнивая это равенство с (6) и учитывая произвольность X , найдем, что для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$

$$([S(\lambda) - u_\pm(\lambda)]\tilde{f}_0(\lambda), \tilde{g}_0(\lambda)) = -2\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\pm(\lambda + i\varepsilon)\delta_0(\lambda, \varepsilon)f_0, \delta_0(\lambda, \varepsilon)g_0). \quad (7)$$

Предположим теперь, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует предел $T_\pm(\lambda + i\varepsilon)$ и оператору $P_0T_\pm(\lambda + i0)P_0$ можно корректно приписать (см. § 1.5 и § 5.4) ядро $t_\pm(\mu, \nu, \lambda + i0)$. При этом дополнительно требуется, чтобы точки λ, μ и ν независимо друг от друга пробегали некоторое множество полной в $\hat{\sigma}_0$ меры. Тогда корректно определяется и значение ядра оператора $P_0T_\pm(\lambda + i0)P_0$ на «тройной» диагонали $\lambda = \mu = \nu$, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\pm(\lambda + i\varepsilon)\delta_0(\lambda, \varepsilon)f_0, \delta_0(\lambda, \varepsilon)g_0) = (t_\pm(\lambda, \lambda; \lambda + i0)\tilde{f}_0(\lambda), \tilde{g}_0(\lambda)). \quad (8)$$

Теперь из (7) вытекает, что

$$S(\lambda) = u_\pm(\lambda) - 2\pi i t_\pm(\lambda, \lambda; \lambda + i0) \quad (9)_\pm$$

для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$. Для изометрического на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ ВО $\mathcal{U}_\pm$ выполнено $u_\pm(\lambda) = I(\lambda)$, так что (9) $_\pm$ сводится к равенству

$$S(\lambda) = I(\lambda) - 2\pi i t_\pm(\lambda, \lambda; \lambda + i0). \quad (10)$$

В этом случае значения ядер (различных) операторов $T_+(\lambda + i0)$ и $T_-(\lambda - i0)$ в точке $\mu = \nu = \lambda$ совпадают друг с другом. При $J = I$, конечно, $T_+ = T_- =: T$, и, следовательно,

$$S(\lambda) = I(\lambda) - 2\pi i t(\lambda, \lambda; \lambda + i0). \quad (11)$$

Дополнительные сведения о формульных представлениях матрицы рассеяния можно найти в § 7.2.

Глава 3

ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе собраны сведения из теории рассеяния, выходящие за рамки «обязательного минимума» гл. 2. Отдельные параграфы здесь мало связаны друг с другом. В значительной мере их можно читать независимо. При первом чтении эту главу можно пропустить и обращаться к ней лишь в связи со ссылками в последующих главах.

§ 1. ВОЗМУЩЕНИЕ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим сейчас пример, в котором возмущение состоит в изменении граничного условия у дифференциального оператора $-d^2/dx^2$. В нем ВО, оператор и матрица рассеяния могут быть вычислены явно. Вместе с тем мы увидим, что даже в этом простом примере построение рассеяния оказывается связанным с содержательными вопросами теории функций.

1. Пусть $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}_+)$, $H_0 = -d^2/dx^2$ при граничном условии $u(0) = 0$. В качестве «возмущенного» оператора $H = H^{(\alpha)}$ возьмем оператор $-d^2/dx^2$ при граничном условии $u'(0) = \alpha u(0)$, $\alpha = \bar{\alpha}$. Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$. Введем в рассмо-

трение синус- и косинус-преобразования Фурье:

$$(\Phi_s f)(p) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} \sin px f(x) dx,$$

$$(\Phi_c f)(p) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} \cos px f(x) dx,$$

отображающие унитарно $L_2(\mathbb{R}_+)$ на $L_2(\Xi_+)$, $\Xi_+ = (0, \infty)$. Пусть A —оператор умножения на p^2 в $L_2(\Xi_+)$. Элементарно проверяется, что

$$H_0 = \Phi_s^* A \Phi_s, \quad H^{(0)} = \Phi_c^* A \Phi_c. \quad (1)$$

Таким образом, операторы H_0 и $H = H^{(0)}$ унитарно эквивалентны друг другу, а их спектры—просты, абсолютно непрерывны и совпадают с положительной полуосью. Волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0)$ также легко вычисляются в терминах преобразований Φ_s и Φ_c . Положим

$$(\Pi_{\pm} f)(p) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} \exp(\pm ipx) f(x) dx. \quad (2)$$

Тогда $2i\Phi_s = \Pi_+ - \Pi_-$, $2\Phi_c = \Pi_+ + \Pi_-$. Согласно (1) справедливы равенства

$$U_0(t)f = (2i)^{-1}(\Pi_-^* - \Pi_+^*)U_A(t)\hat{f}_s,$$

$$U(t)g = 2^{-1}(\Pi_+^* + \Pi_-^*)U_A(t)\hat{g}_c, \quad (3)$$

где $\hat{f}_s = \Phi_s f$, $\hat{g}_c = \Phi_c g$.

Из леммы 2.6.4 вытекает, что

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Pi_{\pm}^* U_A(t) = 0. \quad (4)$$

Действительно, при верхнем знаке это соотношение является следствием (2.6.16) для случая $\varphi(\lambda) = \lambda^2$, $\Lambda = \mathbb{R}_+$ (при этом $\Pi_+^* = (2/\pi)^{1/2} T$ в обозначениях леммы 2.6.4). При нижнем знаке нужно еще перейти в (2.6.16) к комплексному сопряжению.

Согласно (3), (4) при $t \rightarrow \pm\infty$ верны асимптотики

$$U_0(t)f \sim \pm(2i)^{-1}\Pi_{\mp}^* U_A(t)\hat{f}_s, \quad U(t)g \sim 2^{-1}\Pi_{\mp}^* U_A(t)\hat{g}_c,$$

где $\sim$ означает, что разность левой и правой частей стремится к нулю в $\mathcal{H}$. Тем самым $U(t)g \sim U_0(t)f$ при $t \rightarrow \pm\infty$, если

$\hat{f}_s = \pm i\hat{g}_s$. Это означает, что все ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ и $W_{\pm}(H_0, H)$ существуют и $W_{\pm}(H, H_0) = \mp i\Phi_s^* \Phi_s$. Волновые операторы унитарны в $\mathcal{H}$, а соответствующий оператор рассеяния $S = -I$.

2. При произвольном α убедимся сначала в существовании ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. Поскольку области определения $\mathcal{D}(H_0)$ и $\mathcal{D}(H)$ этих операторов существенно различны, теорему 2.5.1 прямо применить не удастся. Рассмотрим предварительно ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, где отождествление J есть оператор умножения на такую функцию $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+)$, что $\eta(x) = 0$ при $x \leq 1$ и $\eta(x) = 1$ при $x \geq 2$. Тогда при $u \in \mathcal{D}(H_0)$

$$(HJ - JH_0)u = (H_0J - JH_0)u = -2\eta' u' - \eta'' u.$$

Пусть множество D_0 состоит из функций, для которых $\hat{f}_s \in C_0^{\infty}(\Xi_+)$. Воспользуемся вновь выражением (3) для $U_0(t)f$. Интегрируя с помощью равенства $e^{-ip^2t} dp = i(2pt)^{-1} de^{-ip^2t}$ в соотношении

$$(U_0(t)f)(x) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^{\infty} \sin px \exp(-ip^2t) \hat{f}_s(\rho) d\rho$$

дважды по частям, получим оценку

$$|(U_0(t)f)(x)| + |(U_0(t)f)'(x)| \leq Ct^{-2}, \quad 0 < x \leq 2.$$

Поэтому подынтегральная функция в (2.5.1) убывает как t^{-2} при $|t| \rightarrow \infty$, и, следовательно, ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существуют на основании теоремы 2.5.1.

Остается показать, что отождествление J эквивалентно (см. определение 2.1.8) единичному. В силу предложения 2.1.9 для этого достаточно убедиться в компактности оператора

$$(J - I)E_0(\Lambda) = (J - I)\Phi_s^* E_A(\Lambda) \Phi_s, \quad (5)$$

где $\Lambda = (0, a^2)$ — какой-либо ограниченный интервал. Оператор Φ_s унитарен, а оператор $(J - I)\Phi_s^* E_A(\Lambda)$ является интегральным с ядром

$$(2/\pi)^{1/2} [\eta(x) - 1] \sin px \chi_{\Lambda_1}(p), \quad \Lambda_1 = (0, a).$$

Это ядро очевидно принадлежит $L_2(\mathbb{R}_+ \times \Xi_+)$, а потому сам оператор принадлежит классу Гильберта—Шмидта $\mathfrak{S}_2$. Отсюда вытекает компактность оператора (5), что завершает проверку существования ВО $W_{\pm}(H, H_0)$.

3. Установим теперь полноту ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. Отметим предварительно, что при $\alpha < 0$ оператор $H = H^{(\alpha)}$ имеет (единственное) простое отрицательное число $\lambda = \lambda_{\alpha} = -\alpha^2$; соответствующая нормированная собственная функция $\psi_{\alpha}(x) = (2|\alpha|)^{1/2}e^{\alpha x}$. Обозначим через $P = P_{\alpha}$ проектор на ортогональное дополнение к $\psi = \psi_{\alpha}$, т.е. $P_{\alpha} = I - (\cdot, \psi_{\alpha})\psi_{\alpha}$ при $\alpha < 0$ и $P_{\alpha} = I$ при $\alpha \geq 0$. Мы установим равенство

$$R(W_{\pm}(H^{(\alpha)}, H_0)) = P_{\alpha}\mathcal{H}, \quad (6)$$

обеспечивающее, в частности, полноту ВО $W_{\pm}(H^{(\alpha)}, H_0)$. Из нее следует, что абсолютно непрерывный спектр H прост и совпадает с $[0, \infty)$. Кроме того, из (6) вытекает, что при $\alpha \geq 0$ сингулярная компонента в спектре $H^{(\alpha)}$ отсутствует, а при $\alpha < 0$ она состоит из единственного собственного числа λ_{α} . Тем самым при всех α операторы $H^{(\alpha)}$ сингулярного непрерывного спектра не имеют, а P_{α} проектируют на их абсолютно непрерывные подпространства.

При доказательстве соотношения (6) будем исходить из следующего явного выражения для оператора эволюции

$$\begin{aligned} (U(t)f)(x) = & 2^{-1}(\pi|t|)^{-1/2}\gamma_{\pm} \int_0^{\infty} [\exp(i4^{-1}t^{-1}(x-x')^2)f(x') + \\ & + \exp(i4^{-1}t^{-1}(x+x')^2)F(x')] dx', \quad \pm t > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\gamma_+ = \bar{\gamma}_- = \exp(-\pi i/4)$,

$$F(x) = f(x) - 2\alpha e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha y} f(y) dy, \quad (8)$$

а $f \in P\mathcal{H}$. Очевидно, что при $\alpha < 0$ и $f = c\psi_{\alpha}$ вместо (7) выполнено $\mathcal{U}(t)f = e^{i\alpha^2 t}f$. При $(f, \psi_{\alpha}) = 0$ соотношение (8) эквивалентно равенству

$$F(x) = f(x) + 2\alpha e^{-\alpha x} \int_x^{\infty} e^{\alpha y} f(y) dy, \quad \alpha < 0. \quad (9)$$

Формула (7) может быть получена из приведенного в т. 2 курса [21] явного выражения для решения уравнения теплопроводности. Для этого надо лишь провести замену t на it .

Прямая проверка (7) состоит в следующем. Если функции f и F достаточно быстро убывают при $x \rightarrow \infty$, то в (7) можно дифференцировать по t и x под знаком интеграла. Это показывает, что функция (7) удовлетворяет уравнению $i du/dt = -d^2 u/dx^2$. Для проверки начального условия распространим функции f и F нулем на всю ось. Тогда первое слагаемое в правой части (7) можно рассматривать как $(\exp(-i\overset{0}{H}t)f)(x)$, где $\overset{0}{H} = -d^2/dx^2$ в $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому при $t \rightarrow 0$ оно сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к $f(x)$. Аналогичным образом второе слагаемое в (7) сходится при $t \rightarrow 0$ в $L_2(\mathbb{R})$ к $F(-x)$. Поскольку $F(x) = 0$ при $x < 0$, это означает, что в $L_2(\mathbb{R}_+)$ оно стремится к нулю. Граничное условие $u'(0, t) = \alpha u(0, t)$ дает связь (8) между F и f . В самом деле, дифференцируя (7) по x , полагая затем $x = 0$ и интегрируя один раз по частям, найдем, что граничное условие выполняется, если $f(0) = F(0)$ и $f'(x) - F'(x) = \alpha[f(x) + F(x)]$. Решая это дифференциальное уравнение относительно F , получим соотношение (8). Приведенные рассуждения требуют, чтобы функции f и F были достаточно гладкими и быстро убывающими при $|x| \rightarrow \infty$. Относительно начального данного f это можно предположить. Тогда при $\alpha \geq 0$ и функция F , определяемая равенством (8), тоже гладкая и быстро убывает. При $\alpha < 0$ быстрое убывание F обеспечивается соотношением (9), справедливым для $(f, \psi_\alpha) = 0$.

Перепишем теперь выражение для $U(t)f$ в операторных обозначениях. Положим

$$\begin{aligned} (Kf)(x) &= \alpha e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha y} f(y) dy, & \alpha \geq 0, \\ (Kf)(x) &= -\alpha e^{-\alpha x} \int_x^\infty e^{\alpha y} f(y) dy, & \alpha \leq 0. \end{aligned} \quad (10)$$

При любом α оператор $K = K_\alpha$ ограничен в $\mathcal{H}$. Соотношения (8) для $\alpha \geq 0$ и (9) для $\alpha \leq 0$ можно записать в виде $F = f - 2Kf$. Введем, далее, в рассмотрение унитарный оператор растяжений $T(s)$, $(T(s)f)(x) = s^{-1/2}f(s^{-1}x)$, $s > 0$, и оператор $\Gamma(t)$ умножения на функцию $\exp(i4^{-1}t^{-1}x^2)$. Пользуясь, кроме того, обозначением (12), запишем выражение (7) в виде

$$U(t)Pf = \gamma_\pm \Gamma(t)T(2|t|)[\Phi_\epsilon \Gamma(t) - \Pi_\pm \Gamma(t)K]Pf, \quad \pm t > 0. \quad (11)$$

Поскольку все операторы здесь ограничены, соотношение (11) распространяется по непрерывности с плотного множества гладких и финитных функций f на все пространство $\mathcal{H}$. Представление, аналогичное (11), имеет место и для невозмущенной

группы

$$U_0(t) = \mp i \gamma_{\pm} \Gamma(t) T(2|t|) \Phi_s \Gamma(t). \quad (12)$$

4. Для нахождения асимптотики функций $U(t)g$ и $U_0(t)f$ воспользуемся тем, что $\Gamma(t) \xrightarrow{s} I$ при $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому из (11), (12) вытекает, что при

$$\Phi_{\pm} = \Phi_{\pm}^{(\alpha)} = \Phi_s - \Pi_{\pm} K_{\alpha} \quad (13)$$

для любых $g \in P\mathcal{H}$, $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} U(t)g &\sim \gamma_{\pm} \Gamma(t) T(2|t|) \Phi_{\pm} g, \\ U_0(t)f &\sim \mp i \gamma_{\pm} \Gamma(t) T(2|t|) \Phi_s f. \end{aligned} \quad (14)$$

Сравнение этих соотношений показывает, что $U(t)g \sim U_0(t)f$ при $t \rightarrow \pm\infty$, если $\Phi_{\pm} g = \mp i \Phi_s f$. Отсюда находится $f = f_{\pm} = \pm i \Phi_s^* \Phi_{\pm} g$. Таким образом, при любом $g \in P\mathcal{H}$ функция $U(t)g$ имеет свободную асимптотику при $t \rightarrow \pm\infty$, т.е. $P\mathcal{H} \subset R(W_{\pm}(H, H_0))$. Поскольку при существовании ВО $W_{\pm}(H, H_0)$, всегда $R(W_{\pm}(H, H_0)) \subset \mathcal{H}^{(a)} \subset P\mathcal{H}$, в действительности здесь справедливы равенства, что доказывает соотношение (6). Одновременно получены выражения для ВО:

$$W_{\pm}(H, H_0) = \mp i P \Phi_{\pm}^* \Phi_s, \quad (15)$$

а также для оператора рассеяния:

$$S(H, H_0) = -\Phi_s^* \Phi_+ P \Phi_-^* \Phi_s. \quad (16)$$

5. Вычислим, наконец, матрицу рассеяния. Согласно (16) для этого надо найти связь между операторами $\Phi_{\pm}$. Отметим прежде всего тождество

$$\Phi_{\pm} P \Phi_{\pm}^* = I, \quad (17)$$

вытекающее из изометричности оператора (15).

Пусть $M = M_{\alpha}$ — оператор умножения на функцию $m_{\alpha}(p) = \alpha(\alpha - ip)^{-1}$. Покажем, что

$$\Pi_+ K P = M \Pi_+ P. \quad (18)_+$$

Достаточно проверять (18) $_{\pm}$ на финитных функциях f . При $\alpha \geq 0$, сопоставляя определения (2) и (10) и переставляя порядок интегрирований, найдем, что

$$(\pi/2)^{1/2} (\Pi_+ K f)(p) = \alpha \int_0^{\infty} dy f(y) e^{\alpha y} \int_y^{\infty} dx e^{ipx - \alpha x}.$$

Вычисляя интеграл по x , получим, что правая часть здесь равна $m(p)(\Pi_+ f)(p)$. Это доказывает соотношение $(18)_+$ для случая $\alpha \geq 0$. Аналогичным образом, при $\alpha \leq 0$

$$\begin{aligned} (\pi/2)^{1/2}(\Pi_+ K f)(p) &= -\alpha \int_0^\infty dy f(y) e^{\alpha y} \int_0^y dx e^{ipx - \alpha x} = \\ &= m_\alpha(p) \int_0^\infty dy f(y) (e^{ipy} - e^{\alpha y}). \end{aligned}$$

Кроме того, при $Pf = f$ член с $e^{\alpha y}$ в правой части пропадает. Тем самым тождество $(18)_+$ справедливо и для случая $\alpha < 0$. Переходя в $(18)_+$ к комплексному сопряжению, получим также, что

$$\Pi_- K P = M^* \Pi_- P. \quad (18)_-$$

Обозначим через $S = S_\alpha$ оператор умножения в $L_2(\Xi_+)$ на функцию

$$s_\alpha(p) = (\alpha + ip)(\alpha - ip)^{-1}. \quad (19)$$

Тогда $|s_\alpha(p)| = 1$, $S = 2M - I$ и $S\Pi_+ \psi_\alpha = \Pi_- \psi_\alpha$. Сопоставляя определения (13) с равенствами $(18)_\pm$ и $2\Phi_c = \Pi_+ + \Pi_-$, найдем, что

$$2\Phi_+ P = -S\Pi_+ + \Pi_-, \quad 2\Phi_- P = \Pi_+ - S^* \Pi_-. \quad (20)$$

Отсюда вытекает, что $\Phi_+ P = -S\Phi_- P$. Применяя здесь справа оператор Φ_-^* и учитывая тождество (17), получим равенство $\Phi_+ P \Phi_- = -S$. Согласно (16) это дает искомое выражение для оператора рассеяния:

$$S(H^{(\alpha)}, H_0) = \Phi_s^* S_\alpha \Phi_s.$$

Таким образом, в представлении (см. (1)), в котором H_0 действует как умножение на p^2 , оператор рассеяния $S(H^{(\alpha)}, H_0)$ действует как умножение на функцию $s_\alpha(p)$. Определенная в п. 2 § 2.4 матрица рассеяния отличается от $s_\alpha(p)$ лишь заменой переменной. Именно, для приведения оператора A к умножению на λ надо провести в $L_2(\Xi_+)$ дополнительное унитарное преобразование, отвечающее замене $p^2 = \lambda$. Тем самым матрица рассеяния

$$S(\lambda; H^{(\alpha)}, H_0) = (\alpha + i\lambda^{1/2})(\alpha - i\lambda^{1/2})^{-1}.$$

6. При построении теории рассеяния для пары H_0, H комбинируются два существенно разных приема. Именно, доказательство существования «прямых» ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ получалось с помощью признака Кука. Существование «обратных» ВО $W_{\pm}(H_0, H)$, а также все явные представления, устанавливались вычислениями. Естественно и существование ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ выводить из асимптотик (14). Такой вывод возможен, но требует независимой проверки тождества (17). Действительно, в п. 4 было показано, что ВО $W_{\pm}(H_0, H)$ существуют и

$$W_{\pm}(H_0, H) = \pm i\Phi_s^* \Phi_{\pm} P. \quad (21)$$

Поэтому существование $W_{\pm}(H, H_0)$ эквивалентно тому, что образ оператора (21) совпадает с $\mathcal{H}$, а это, в свою очередь, равносильно (17).

В заключение приведем прямой (т.е. не зависящий от рассмотрения ВО), но несколько искусственный вывод тождества (17). Рассмотрим, например, случай верхнего знака. Отметим равенства

$$\begin{aligned} P_+ P_+^* + P_- P_-^* &= 4I, \\ P_- P_+^* + P_+ P_-^* &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

являющиеся следствием унитарности синус- и косинус-преобразований Фурье. В силу (20) искомое соотношение (17) эквивалентно равенству

$$(-SP_+ + P_-)(-P_+^* S^* + P_-^*) = 4I,$$

или в силу (22)—равенству

$$SP_+ P_+^* S^* - P_+ P_+^* + P_+ P_-^* S^* - SP_+ P_-^* = 0. \quad (23)$$

Подставим сюда определение (19) и домножим (23) на $(\alpha - ip)$ слева и на $(\alpha + ip)$ справа. Очевидно, что в получившемся равенстве члены нулевой степени и квадратичные по p обратятся в нуль. Для завершения доказательства (23) остается показать, что и сумма линейных по p членов равна нулю, т.е.

$$pP_+ P_+^* - P_+ P_+^* p - pP_+ P_-^* - P_+ P_-^* p = 0. \quad (24)$$

Один из способов проверки (24) состоит в следующем. Согласно (2) $P_+ P_-^*$ —сингулярный интегральный оператор с ядром

$$2\pi^{-1} \int_0^{\infty} e^{i(p-p')x} dx = 2\pi^{-1} i(p - p' + i0)^{-1}.$$

Аналогичным образом, ядро оператора $P_+ P_-^*$ равно $2\pi^{-1} i(p + p')^{-1}$. Отсюда выводится, что ядро оператора в левой части (24) тождественно равно нулю.

§ 2. J-ПОЛНОТА

1. Пусть ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует. При произвольном J рассчитывать на его полноту в смысле определения 2.3.1, разумеется, трудно. Более того, соотношения (2.1.15) и (2.3.2) отвечают по существу разным свойствам ВО $W_{\pm}$. Понятие полноты естественно связывать лишь с описанием области значений $R(W_{\pm})$, поскольку для $f \in R(W_{\pm})$ асимптотика $U(t)f$ выражается через «свободную» группу $U_0(t)$ соотношением (2.3.1). В общем случае описание $R(W_{\pm})$, а точнее его замыкания $\overline{R(W_{\pm})}$, приходится давать в зависящих от J терминах.

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}_{\pm} = \mathfrak{N}_{\pm}(H, J)$ элементов $g \in \mathcal{H}$, для которых

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J^*U(t)Pg\| = 0. \quad (1)$$

Ясно, что $\mathfrak{N}_{\pm}$ — подпространство и $\mathcal{H}^{(s)} \subset \mathfrak{N}_{\pm}$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{N}_{\pm}$ содержит вместе с каким-либо g все элементы вида $U(s)g$, $s \in \mathbb{R}$, это подпространство приводит оператор H . Отметим еще, что (1) эквивалентно равенству

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|JJ^*U(t)Pg\| = 0 \quad (2)$$

с неотрицательным оператором JJ^* .

Лемма 1. Пусть ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует. Тогда подпространства $R(W_{\pm})$ и $\mathfrak{N}_{\pm}$ взаимно ортогональны.

○ Пусть $f \in R(W_{\pm}) \subset \mathcal{H}^{(a)}$. Тогда для некоторого $f_0 \in \mathcal{H}_0$ выполнено (2.3.1). При $g \in \mathfrak{N}_{\pm}$ отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} (f, g) &= (Pf, g) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (U(t)Pf, U(t)Pg) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (JU_0(t)P_0f_0, U(t)Pg) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (U_0(t)P_0f_0, J^*U(t)Pg). \end{aligned}$$

В силу (1) это выражение равно нулю. •

Следствие 2: Если ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует, то

$$\overline{R(W_{\pm})} \subset \mathfrak{B}_{\pm} := \mathcal{H} \ominus \mathfrak{N}_{\pm}. \quad (3)$$

Таким образом, область значений ВО всегда погружается в подпространство $\mathfrak{B}_{\pm} = \mathfrak{B}_{\pm}(H, J)$, приводящее H и содержащееся в $\mathcal{H}^{(a)}$, но, вообще говоря, более узкое. Это оправдывает

Определение 3. Оператор $W_{\pm}(H, H_0; J)$ называется J -полным, если в (3) имеет место равенство, т.е. $\overline{R(W_{\pm})} = \mathfrak{B}_{\pm}$.

Подчеркнем, что при условии J -полноты ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ замыкание его образа описывается в не зависящих от H_0 терминах.

2. J -полноту «прямого» ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ удастся связать с существованием «сопряженного» ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ без дополнительных априорных предположений типа (2.1.8). Такая связь реализуется опять (ср. с теоремой 2.2.1) в терминах ВО для вспомогательной «тройки» H_0, H_0, J^*J .

Теорема 4. Пусть существует ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. Тогда существование ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ равносильно выполнению следующих двух условий:

- 1) оператор $W_{\pm}(H, H_0; J)$ является J -полным;
- 2) существует сильный ВО $W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$.

○ Пусть ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существует. Тогда он сопряжен ВО $W_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}$, и его ядро равно $\mathfrak{N}_{\pm}$. В силу (2.1.13) отсюда вытекает, что $\mathfrak{N}_{\pm} = \mathcal{H} \ominus \overline{R(W_{\pm})}$. Это совпадает с определением J -полноты $W_{\pm}$. Существование оператора

$$\Omega_{\pm} := W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J) = W_{\pm}(H_0, H; J^*)W_{\pm}(H, H_0; J)$$

следует из теоремы 2.1.7 умножения ВО.

Обратно, пусть $W_{\pm}$ — J -полон и существует оператор $\Omega_{\pm}$. Предел $U_0(-t)J^*U(t)Pf$ заведомо существует (и равен нулю) при $f \in \mathfrak{N}_{\pm}$. Далее, $\mathcal{H} \ominus \mathfrak{N}_{\pm} = \overline{R(W_{\pm})}$ в силу J -полноты $W_{\pm}$. При $f \in R(W_{\pm})$ для некоторого $f_0 \in \mathcal{H}_0$ выполнено соотношение (2.3.1), а потому и

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_0^*(t)J^*U(t)f - U_0^*(t)J^*JU_0(t)P_0f_0\| = 0.$$

Для доказательства существования ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ остается воспользоваться существованием оператора $\Omega_{\pm}$. •

При выполнении (2.1.8) вспомогательную тройку H_0, H_0, J^*J рассматривать не нужно.

Следствие 5: Пусть оператор $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и справедливо условие (2.1.8). Тогда существование ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ равносильно J -полноте ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ При условии (2.1.8) ВО $W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ существует (и равен P_0). •

Это утверждение естественно сравнить со следствием 2.3.10. При этом надо иметь в виду, что при условиях (2.1.8) и (2.3.9) определения J -полноты и полноты совпадают.

Понятие J -полноты и связанные с ним утверждения сохраняются для абелевых ВО $\mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J)$, если предельный переход в (1) также понимать по Абелю.

3. Приведем теперь достаточные условия на оператор J , при которых для любого самосопряженного H

$$\mathfrak{B}_{\pm}(H, J) = \mathcal{H}_H^{(a)}. \quad (4)$$

В этом случае определение J -полноты сводится к равенству (2.3.3).

Лемма 6. Пусть нуль не является точкой существенного спектра неотрицательного оператора JJ^* . Тогда равенство (4) выполняется для любого самосопряженного оператора H .

○ Предположение о спектре JJ^* равносильно тому, что $JJ^* = A + K$, где оператор $A = A^*$ ограниченно обратим (или $A \geq \alpha I, \alpha > 0$), а K компактен (или конечномерен). Пусть $g \in \mathfrak{N}_{\pm}$. В силу леммы 1.4.1 из (2) вытекает, что $\|AU(t)Pg\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$, а потому $Pg = 0$. Тем самым $\mathfrak{N}_{\pm} \subset \mathcal{H}^{(s)}$, что доказывает (4). •

Сопоставляя теорему 4 с леммой 6, получим

Следствие 7: Пусть J удовлетворяет условию леммы 6. Тогда из существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ вытекает равенство (2.3.3).

Отметим, что для фредгольмова (см. п. 3 § 1.6) оператора J условие леммы 6 заведомо выполняется. Если точка нуль принадлежит существенному спектру оператора JJ^* , то равенство (4), вообще говоря, нарушается. Рассмотрим в связи с этим два примера.

Пример 8. Пусть H —оператор умножения на x в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$; $\Phi: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\Xi)$ —преобразование Фурье; $\Gamma_{\pm}$ —умножение на индикатор $\chi_{\pm}$ полуоси $\pm p > 0$. Рассмотрим два отождествления $J_{\pm} = \Phi^* \Gamma_{\pm}: L_2(\Xi) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$. Тогда

$$(J_{\pm}^* U(t)g)(p) = \chi_{\pm}(p)(\Phi g)(p+t)$$

а потому для любого $g \in \mathcal{H}$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\pm}^* U(t)g\| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|J_{\mp}^* U(t)g\| = \|g\|.$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{N}_{+} = \mathcal{H}$ при $J = J_{+}$ и $\mathfrak{N}_{+} = \{0\}$ при $J = J_{-}$. Напротив, при изменении знака времени $\mathfrak{N}_{-} = \{0\}$ при $J = J_{+}$ и $\mathfrak{N}_{-} = \mathcal{H}$ при $J = J_{-}$. В этом примере операторы $J_{+}J_{+}^*$ и $J_{-}J_{-}^*$ суть проекторы в

$L_2(\mathbb{R})$ на классы Харди (см. § 1.2) функций аналитических в верхней или нижней полуплоскостях. Для обоих операторов точка нуль—собственное значение бесконечной кратности. Для каждого из отождествлений $J_{\pm}$ соотношение (4) выполняется при одном знаке и нарушается при другом.

Пример 9. Пусть H —оператор умножения на x в $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}_+)$, $Z: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$ —оператор сужения на положительную полуось. В обозначениях примера 8 положим $J_{\pm} = Z\Phi^*\Gamma_{\pm}$. Совершенно аналогично предыдущим рассмотрениям можно опять убедиться, что $\mathcal{N}_{\pm} = \mathcal{H}$ при $J = J_{\pm}$ и $\mathcal{N}_{\pm} = \{0\}$ при $J = J_{\mp}$. Теперь, однако, подпространства $N(J_{\pm}J_{\pm}^*)$ тривиальны. Действительно, равенство $J_{\pm}J_{\pm}^*g = 0$ (или $J_{\mp}^*g = 0$) означает, что $(\Phi Z^*g)(p) = 0$ при $\pm p > 0$. Тем самым функция $(Z^*g)(x)$ принадлежит соответствующему классу Харди. Действие оператора $Z^*: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ сводится к продолжению функций нулем на отрицательную полуось. По теореме 1.2.3 единственности для классов Харди из равенства $(Z^*g)(x) = 0$ для $x < 0$ вытекает, что функция $(Z^*g)(x)$ равна нулю при всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, $g = 0$ и, следовательно, $N(J_{\pm}J_{\pm}^*) = \{0\}$. В этом примере точка нуль принадлежит непрерывному спектру каждого из операторов $J_{\pm}J_{\pm}^*$.

§ 3. РАССЕЯНИЕ ПРИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Задачи с мультипликативным введением возмущения возникают, например, при изучении рассеяния волн на неоднородностях среды. Здесь мы рассмотрим такие задачи в абстрактной постановке. Для них теорию рассеяния приходится строить в паре пространств. При этом естественно рассматривать сразу целый набор отождествлений, эквивалентных друг другу.

Пусть H_0 —произвольный самосопряженный оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_0$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_0$. Рассмотрим какой-либо ограниченный положительно определенный оператор M ,

$$0 < m_0 I \leq M \leq m_1 I < \infty. \quad (1)$$

Через $\mathcal{H}$ обозначим гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = (Mf, g)_0, \quad f, g \in \mathcal{H}_0. \quad (2)$$

В силу (1) нормы в $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ эквивалентны. Поэтому, различаясь скалярным произведением и нормой, пространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ совпадают поэлементно. Гамильтониан H определим в пространстве $\mathcal{H}$ на множестве $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$ соотношением $H = M^{-1}H_0$.

Исходя из определения сопряженного оператора и пользуясь тем, что $H_0 = H_0^*$, легко убедиться, что H также самосопряжен.

Поскольку H_0 и H действуют в разных гильбертовых пространствах, при построении для пары H_0, H теории рассеяния нужно ввести оператор отождествления $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$. В качестве J можно, например, взять оператор $J = M^{-1/2}$, отображающий унитарно $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}$. Удобнее, однако, подобрать такой оператор J , чтобы «возмущение» $HJ - JH_0$ было по возможности просто устроено. В приложениях на эту роль обычно подходит тождественное отображение $I_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$. Обратный к I_0 оператор, конечно, существует (и тоже тождествен), но согласно (2) $I_0^* = M$ и, следовательно, такое отождествление не изометрично.

Таким образом, для мультипликативных возмущений отождествление J имеет ряд специальных свойств. Для таких J свойства ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ в существенном те же, что и в случае одного пространства (при единичном отождествлении). Они описываются в следующем утверждении, справедливом для произвольных самосопряженных операторов H_0 и H . Это утверждение сразу вытекает из результатов § 2.3 (см. теорему 6, предложение 11 и следствие 12).

Лемма 1. Пусть оператор $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ ограниченно обратим, выполнено условие (2.1.8) и ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют. Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ изометричны соответственно на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$ и оба эти ВО полны. Кроме того, для любого оператора $J_1: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0$, удовлетворяющего (2.3.5), существует ВО $W_{\pm}(H_0, H; J_1) = W_{\pm}(H_0, H; J^*)$.

В приложениях для оператора M справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (M^{\alpha} - I)U_0(t)P_0 = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Отметим, что в силу (1) оператор $(M^{\alpha} - I)(M^{\beta} - I)^{-1}$ ограничен при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Поэтому, предполагая (3) для какого-нибудь одного α , найдем, что это соотношение выполняется для всех α .

При $\alpha = 1$ условие (3) означает, что отождествление $J = I_0$ удовлетворяет условию (2.1.8). При $\alpha = -1/2$ из (3) следует, что это отождествление H_0 -эквивалентно (в смысле определения 2.1.8) унитарному оператору $M^{-1/2}: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$.

Применим теперь к рассматриваемой паре операторов H_0, H и отождествлению $J = I_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ лемму 1. Следующее утверждение показывает, что для мультипликативных возмущений все свойства ВО (наиболее важное из них — полнота) извлекаются из существования «прямых» и «сопряженных» ВО.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (1), (3), $H = M^{-1}H_0$ и $BO W_{\pm}(H, H_0; I_0), W_{\pm}(H_0, H; I_0^*)$ существуют. Тогда они изометричны и полны. Кроме того, для любого оператора $N \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_0)$, H_0 -эквивалентного единичному, существует ВО

$$W_{\pm}(H_0, H; NI_0^{-1}) = W_{\pm}(H_0, H; I_0^*).$$

§ 4. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

Установим связь теории рассеяния для уравнения Шредингера с теорией рассеяния для уравнения второго порядка по времени. Для этого мы воспользуемся принципом инвариантности (ПИ).

Рассмотрим задачу Коши (ср. с п. 1 § 1.4)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + H\psi = 0, \quad \psi(0) = f, \quad \frac{d\psi(0)}{dt} = g, \quad (1)$$

с положительным оператором H (это означает, что $H \geq 0$ и $0 \notin \sigma^{(p)}(H)$) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В (1) предполагается, что функция $\psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема и $\psi(t) \in \mathcal{D}(H)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. В силу уравнения (1) «энергия»

$$\|\psi_t\|^2 + \|H^{1/2}\psi\|^2, \quad \psi_t = \frac{d\psi}{dt}, \quad (2)$$

не зависит от t , а потому решение задачи (1) единственно. Нетрудно убедиться, что при $f \in \mathcal{D}(H), g \in \mathcal{D}(H^{1/2})$ решение существует и дается формулой

$$\psi(t) = \cos(H^{1/2}t)f + H^{-1/2}\sin(H^{1/2}t)g. \quad (3)$$

Удобный способ исследования задачи (1) состоит в редукции к системе первого порядка по t . Именно, подстановкой

$$\psi_t = x_1, \quad H^{1/2}\psi = x_2 \quad (4)$$

(1) сводится к задаче

$$i\frac{dx}{dt} = hx, \quad x(0) = a, \quad (5)$$

где

$$h = \begin{pmatrix} 0 & -iH^{1/2} \\ iH^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} g \\ H^{1/2}f \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Оператор h самосопряжен в пространстве $\mathfrak{H} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ на области определения $\mathcal{D}(h) = \mathcal{D}(H^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(H^{1/2})$. Он может быть «диагонализирован» равенствами

$$h = \mathcal{F} \begin{pmatrix} H^{1/2} & 0 \\ 0 & -H^{1/2} \end{pmatrix} \mathcal{F}^*, \quad \mathcal{F} = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}. \quad (7)$$

При любом $a \in \mathcal{D}(h)$ решение задачи (5) дается формулой

$$x(t) = \exp(-iht)a. \quad (8)$$

С помощью равенств (4), (6) и (7) отсюда можно извлечь представление (3). При этом сохранение величины (2) является следствием унитарности оператора $\exp(-iht)$ в $\mathfrak{H}$. Подразумевая связь (4), можно изучение асимптотики при $t \rightarrow \pm\infty$ решения $\psi(t)$ задачи (1) заменить аналогичным вопросом для функции (8).

Наряду с (1) рассмотрим свободную задачу

$$\frac{d^2\psi_0}{dt^2} + H_0\psi_0 = 0, \quad \psi_0(0) = f_0, \quad \frac{d\psi_0(0)}{dt} = g_0,$$

того же типа с положительным оператором H_0 , действующим в том же пространстве $\mathcal{H}$. Это уравнение также сведем к системе первого порядка

$$id x_0/dt = h_0 x_0, \quad x_0(0) = a_0$$

вида (5), (6).

Как объяснялось во Введении, сравнение асимптотик в пространстве $\mathfrak{H}$ функций (8) и

$$x_0(t) = \exp(-ih_0 t)a_0 \quad (9)$$

удобно проводить в терминах ВО для пары h_0, h . Из (7) вытекает, что существование каждого из ВО $W_+(h, h_0)$, $W_-(h, h_0)$ равносильно существованию обоих ВО $W_{\pm}(H^{1/2}, H_0^{1/2})$, причем

$$W_{\pm}(h, h_0) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} W_{\pm}(H^{1/2}, H_0^{1/2}) & 0 \\ 0 & W_{\mp}(H^{1/2}, H_0^{1/2}) \end{pmatrix} \mathcal{F}^*.$$

Это равенство показывает, что полнота каждого из $W_+(h, h_0)$ и $W_-(h, h_0)$ равносильна полноте обоих ВО $W_{\pm}(H^{1/2}, H_0^{1/2})$.

Пусть теперь для пары операторов H_0, H и функции $\varphi(\lambda) = \lambda^{1/2}$ верен ПИ. Тогда из существования ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ вытекает существование ВО $W_{\pm}(H^{1/2}, H_0^{1/2})$ и их совпадение с $W_{\pm}(H, H_0)$. Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть для пары H_0, H оба ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны и при $\varphi(\lambda) = \lambda^{1/2}$ для этой пары верен ПИ. Тогда ВО для пары h_0, h также существуют, полны и строятся по формуле

$$W_{\pm}(h, h_0) = 2^{-1} \begin{pmatrix} W_{\pm} + W_{\mp} & i(W_{\mp} - W_{\pm}) \\ i(W_{\pm} - W_{\mp}) & W_{\pm} + W_{\mp} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В условиях этого утверждения при $a \in \mathcal{H}_h^{(a)}$ для функций (8), (9) имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|x(t) - x_0(t)\|_h = 0, \quad a_0 = W_{\pm}^*(h, h_0)a. \quad (11)$$

При этом оператор $W_{\pm}(h, h_0)$ строится через ВО для вспомогательных уравнений Шредингера с гамильтонианами H_0 и H по формуле (10). Согласно (4) в исходных переменных соотношение (11) означает, что при $t \rightarrow \pm\infty$ в $\mathcal{H}$ справедливы асимптотики

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \sim \frac{\partial \psi_0}{\partial t}, \quad H^{1/2}\psi(t) \sim H_0^{1/2}\psi_0(t). \quad (12)$$

В приложениях представляет интерес и асимптотика $\psi(t)$ в других метриках. Например, если метрики $\|H^{1/2}u\|$ и $\|H_0^{1/2}u\|$ эквивалентны, то второе из соотношений (12) естественно заменить равенством

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|H_0^{1/2}(\psi(t) - \psi_0(t))\| = 0.$$

В терминах уравнений первого порядка доказательство такой асимптотики требует рассмотрения ВО для пары h_0, h при нетривиальном отождествлении. По этому поводу см. статью Т.Като [110] и т. 3 курса [18].

§ 5. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ АВЕЛЕВЫХ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для ВО (2.1.1) ПИ, сформулированный в п. 1.3 § 2.6, вообще говоря, неверен. В то же время приведенная там его абсолютная формулировка оказывается справедливой для абелевых ВО, определенных равенством (2.2.9).

Пусть функция φ допустима (в смысле определения 2.6.2) по отношению к самосопряженным операторам H_0 и H , $h_0 = \varphi(H_0)$, $h = \varphi(H)$, а $\Omega_{\pm} = \{\lambda \in \Omega : \pm \varphi'(\lambda) > 0\}$.

Теорема 1. Если существует локальный абелев ВО $\mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J, \Omega_{\nu})$, где $\nu = +$ или $\nu = -$, то существует и абелев ВО $\mathfrak{A}_{\pm\nu}(h, h_0; J E_0(\Omega_{\nu}))$, причем

$$\mathfrak{A}_{\pm\nu}(h, h_0; J E_0(\Omega_{\nu})) = \mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J, \Omega_{\nu}).$$

Положим для краткости

$$\mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J, \Omega_{\nu}) =: \mathfrak{A}_{\pm}(\Omega_{\nu}).$$

Если оба ВО $\mathfrak{A}_{+}(\Omega_{+})$ и $\mathfrak{A}_{-}(\Omega_{-})$ существуют, то в силу теоремы 1 существует и глобальный ВО

$$\mathfrak{A}_{\pm}(h, h_0; J) = \mathfrak{A}_{+}(\Omega_{+}) + \mathfrak{A}_{-}(\Omega_{-}).$$

Напомним, что определение (2.2.9) не зависит от выбора усредняющего ядра $\omega_{\varepsilon}(t) = \varepsilon \omega(\varepsilon t)$, коль скоро ω удовлетворяет условиям, перечисленным в п. 3 § 2.2. Нам удобно доказывать теорему 1 для определения (2.2.10) ВО по Чезаро. Для ВО (2.2.9) и, в частности (2.2.10), сохраняются как соотношение вида (2.1.23), так и утверждение леммы 2.6.3. Поэтому для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что из справедливости для всех $f \in E_0^{(a)}(\Omega_{\nu})\mathcal{H}$ равенства

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \|(\mathfrak{A}_{\pm}(\Omega_{\nu}) - J)U_0(\pm t)f\|^p dt = 0$$

следует аналогичное равенство для $u_0(t) = \exp(-ih_0 t)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \|(\mathfrak{A}_{\pm}(\Omega_{\nu}) - J)u_0(\pm \nu t)f\|^p dt = 0.$$

Установим более общее утверждение.

Теорема 2. Пусть H — произвольный самосопряженный оператор, функция φ допустима на множестве $\mathcal{S}_{\nu}$ по отношению к H , K — какой-либо ограниченный оператор. Предположим, что для любого $f \in E^{(a)}(\Omega_{\nu})\mathcal{H}$ выполнено равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \|KU(\pm t)f\|^p dt = 0, \quad 0 < p < \infty. \quad (1)$$

Тогда для $u(t) = \exp(-i\varphi(H)t)$ и любого $g \in E^{(a)}(\Omega_\nu)\mathcal{H}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \|Ku(\pm \nu t)g\|^p dt = 0. \quad (2)$$

○ В силу равномерной ограниченности подынтегральных функций соотношения (1) и (2) для различных p эквивалентны между собой. Мы воспользуемся (1) при $p = 2$ и установим (2) при $p = 4$. Для определенности будем рассматривать (1), (2) для $\nu = +$ и знака $+$ при переменной t . Покажем, что если (1) справедливо для какого-нибудь элемента $f \in \mathfrak{R}_H$ с конечной величиной (2.5.2), то (2) выполняется для элементов $g = \psi(H)f$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega_n)$, а Ω_n —какой-либо из составляющих Ω_+ интервалов. Этого достаточно, поскольку линейные комбинации таких элементов g образуют плотное множество в $E^{(a)}(\Omega_+)\mathcal{H}$.

Получим прежде всего удобное представление для $\|Ku(t)g\|$. При произвольном $x \in \mathcal{H}$ из спектральной теоремы вытекает, что

$$(u(t)g, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-it\varphi(\lambda))\psi(\lambda) \frac{d(E(\lambda)f, x)}{d\lambda} d\lambda. \quad (3)$$

В силу оценки (2.5.3) при $f \in \mathfrak{R}_H$ функция $d(E(\lambda)f, x)/d\lambda$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, причем ее преобразование Фурье равно $(2\pi)^{-1/2}(U(s)f, x)$. Так как, разумеется, и $\exp(-it\varphi(\cdot))\psi(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, то к интегралу (3) можно применить равенство Парсеваля. Это приводит к представлению

$$(u(t)g, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)(U(s)f, x) ds, \quad (4)$$

где

$$G(t, s) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-it\varphi(\lambda) + is\lambda]\psi(\lambda) d\lambda. \quad (5)$$

В частности, полагая в (4) $x = K^*Ku(t)g$, найдем, что

$$\|Ku(t)g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)(U(s)f, K^*Ku(t)g) ds. \quad (6)$$

Для вывода нужных нам свойств ядра $G(t, s)$ проинтегрируем в (5) по частям и учтем, что $0 < a_1 \leq \varphi'(\lambda) \leq a_2 < \infty$ при $\lambda \in \text{supp } \psi$ и подходящих числах a_1, a_2 . Тем самым

$$G(t, s) = i(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-it\varphi(\lambda) + is\lambda][\psi(\lambda)(s - t\varphi'(\lambda))^{-1}]' d\lambda$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |G(t, s)| &\leq C(|s| + a_1 t)^{-1}, & s \leq 0, \\ |G(t, s)| &\leq C|s - a_2 t|^{-1}, & s \geq at, \end{aligned}$$

где a — фиксированное число, большее a_2 . Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_{-\infty}^0 |G(t, s)|^2 ds + \int_{at}^{\infty} |G(t, s)|^2 ds \right] = 0. \quad (7)$$

Кроме того, применяя к (5) равенство Парсеваля, найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(t, s)|^2 ds = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 d\lambda < \infty. \quad (8)$$

Теперь мы можем оценить интеграл (6). Разобьем его на два слагаемых, отвечающих областям $\Lambda_t = \mathbb{R}_- \cup (at, \infty) \cup (0, at)$. Покажем, что первое из этих слагаемых стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ в обычном (без усреднения) смысле. Применяя неравенство Шварца, получим, что квадрат интеграла по Λ_t не превосходит

$$\int_{\Lambda_t} |G(t, s)|^2 ds \int_{\mathbb{R}} |(U(s)f, K^* K u(t)g)|^2 ds.$$

Первый сомножитель здесь стремится к нулю в силу (7). Второй сомножитель согласно (2.5.3) оценивается через $2\pi(r_H(f) \times \|K^* K\| \|g\|)^2$ и, стало быть, ограничен равномерно по t .

Покажем, далее, что слагаемое в (6), отвечающее промежутку $(0, at)$, стремится к нулю по Чезаро, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T dt \left[\int_0^{at} G(t, s)(U(s)f, K^* K u(t)g) ds \right]^2 = 0. \quad (9)$$

Применим к интегралу по s в (9) неравенство Шварца, расширим промежуток до $(0, aT)$ и учтем равенство (8). Переставляя еще порядок интегрирований, сведем проверку (9) к доказательству того, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^{aT} ds \int_0^T |(K^* K U(s)f, u(t)g)|^2 dt = 0. \quad (10)$$

Воспользуемся теперь оценкой (2.5.3) для интеграла по t и оператора $h = \varphi(H)$. При этом заметим, что элемент $g = \psi(H)f \in \mathfrak{R}_h$, а потому

$$\int_0^T |(K^* K U(s)f, u(t)g)|^2 dt \leq 2\pi(r_h(g)\|K\| \|KU(s)f\|)^2.$$

Отсюда видно, что (10) является следствием соотношения (1) для $p = 2$. Таким образом, все выражение (6) стремится к нулю по Чезаро. Это завершает проверку равенства (2) при $p = 4$. •

Как уже пояснялось, теорема 1 прямо вытекает из теоремы 2. Согласно теореме 1 в несколько ослабленной форме ПИ всегда справедлив и для обычных ВО.

Следствие 3: Пусть существуют ВО из обеих частей (2.6.12)₊ или (2.6.12)₋. Тогда они связаны равенством (2.6.12)₊ или (2.6.12)₋.

Для функций φ , кусочно-линейных на Ω (когда $\varphi(\lambda) = a_n \lambda + b_n$ при $\lambda \in \Omega_n$), ПИ, разумеется, верен для любых пар H_0, H . Если, однако, $\varphi'(\lambda)$ строго монотонна хотя бы на одном из интервалов Ω_n , то при заданном H_0 можно подобрать оператор H так, что (при $J = I$) ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существует, а ВО $W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0))$ — нет. Соответствующую конструкцию можно найти в оригинальной статье М. Волленберга [140] или в книге [30].

Глава 4

РАССЕЯНИЕ ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

По существу эта глава распадается на две независимые части, составляемые §§ 1, 2 и 3—7. В первых двух параграфах изучается модель Фридрихса—Фаддеева, в которой рассматривается возмущение оператора умножения интегральным оператором с гладким матричным ядром. Применение стационарного метода требует исследования резольвенты полного гамильтониана. Такое исследование проводится в § 1 с помощью подходящего интегрального управления. Важно, что во вспомогательном банаховом пространстве гильбертовских вектор-функций это уравнение оказывается фредгольмовым. В § 2 в рамках модели Фридрихса—Фаддеева реализуется стационарная схема §§ 2.7, 2.8.

В §§ 3—7 излагается абстрактная теория гладких возмущений. В § 3 вводится удобное унитарно инвариантное понятие гладкости (гладкости по Като) какого-либо оператора G относительно самосопряженного гамильтониана H . В § 4 приводятся два достаточных условия на пару H, G , обеспечивающих H -гладкость оператора G . При построении теории рассеяния в § 5 предполагается, что возмущение $V = HJ - JH_0$ допускает факторизацию $V = G^*G_0$, где сомножители G_0 и G являются гладкими относительно операторов H_0 и H соответственно. Поскольку понятие H -гладкости эквивалентным образом формулируется как в терминах резольвенты H , так и его

унитарной группы $U(t)$, для рассматриваемых здесь возмущений стационарный и нестационарный подходы практически сливаются. В § 5 дается прямое доказательство существования нестационарных ВО. Результаты § 5 могут быть получены и стационарными средствами, что откладывается, однако, до §§ 7.3, 7.4. Там же выясняется, что в случае гладких возмущений для ВО, оператора и матрицы рассеяния справедливы формульные представления §§ 2.7, 2.8.

В приложениях гладкость по отношению к невозмущенному оператору H_0 обычно удается проверить прямыми выкладками. Напротив, изучение гладкости относительно полного гамильтониана H представляет собой содержательную задачу. В § 6 излагается методика, позволяющая для относительно компактных возмущений сводить вопрос об H -гладкости G к исследованию H_0 -гладкости операторов G_0 и G . Правда, H_0 -гладкость приходится при этом понимать в некотором усиленном смысле. В § 7 методика § 6 используется для изучения сингулярного спектра оператора H . В значительной мере §§ 6, 7 основаны на соображениях, развитых в связи с моделью Фридрихса—Фаддеева. Однако в отличие от §§ 1, 2 предположения делаются не о самом возмущении V , а о сомножителях G_0 и G из соотношения $V = G^*G_0$. Благодаря этому удается избежать введения вспомогательного банахова пространства.

§ 1. МОДЕЛЬ ФРИДРИХСА—ФАДДЕЕВА

Любой самосопряженный оператор H_0 с абсолютно непрерывным спектром постоянной (возможно, бесконечной) кратности может быть реализован (см. § 1.5) как оператор умножения на независимую переменную (λ) в гильбертовом пространстве $L_2(\hat{\sigma}; \mathfrak{h})$. Здесь $\hat{\sigma}$ —сердцевина спектра оператора H_0 , $\mathfrak{h}$ —«вспомогательное» гильбертово пространство, размерность которого равна кратности спектра. В модели Фридрихса—Фаддеева рассматривается случай, когда $\hat{\sigma} = \sigma$ —замкнутый интервал, а возмущение V оператора H_0 является интегральным оператором с гладким ядром $v(\lambda, \mu)$. В рамках этой модели удастся не только построить теорию рассеяния, т.е. доказать существование и полноту ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ (отвечающих $J = I$), но и проверить отсутствие у оператора $H = H_0 + V$ сингулярного непрерывного спектра.

1. Дадим точное описание модели Фридрихса—Фаддеева. Для простоты будем считать промежуток $\sigma = [a, b]$ конечным. Пусть $\mathcal{H} = L_2(\sigma; \mathfrak{h})$, $(H_0 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$,

$$(Vf)(\lambda) = \int_{\sigma} v(\lambda, \mu) f(\mu) d\mu. \quad (1)$$

«Ядро» $v(\lambda, \mu)$ считается компактным оператором в $\mathfrak{h}$. Через $|\cdot|$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать норму (в том числе операторную) и скалярное произведение в $\mathfrak{h}$. Предполагаются гельдеровская непрерывность $v(\lambda, \mu)$, т.е.

$$\sup_{\lambda, \mu \in \sigma} |v(\lambda, \mu)| + \sup_{\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \sigma} |v(\lambda', \mu') - v(\lambda, \mu)| (|\lambda' - \lambda| + |\mu' - \mu|)^{-\alpha_0} < \infty, \quad (2)$$

и обращение в нуль на концах промежутка:

$$v(\lambda, a) = v(\lambda, b) = v(a, \mu) = v(b, \mu) = 0. \quad (3)$$

Ядро $v(\lambda, \mu) = v^*(\mu, \lambda)$ эрмитово, так что возмущение V симметрично.

При компактности ядра $v(\lambda, \mu)$ в $\mathfrak{h}$ и его равномерной ограниченности по $\lambda, \mu \in \sigma$ оператор V компактен в $\mathcal{H}$. Поэтому на основании теоремы Г. Вейля существенный спектр оператора $H = H_0 + V$ совпадает со спектром $\sigma(H_0) = \sigma$ оператора H_0 . В частности, вне отрезка σ спектр H исчерпывается конечнократными собственными значениями, накапливающимися разве лишь к концам a и b . Теория рассеяния позволяет изучить структуру спектра оператора H значительно детальнее.

Отметим, что согласно классическому результату Фредгольма (см. [7]) при $\lambda_0 > 1/2$ и $\dim \mathfrak{h} < \infty$ условие (2) обеспечивает ядерность оператора $V = V^*$. Однако при $\dim \mathfrak{h} = \infty$ ядерная теория рассеяния к рассматриваемой модели заведомо неприменима.

Для оператора $H = H_0 + V$ вместо самой резольвенты $R(z) = (H - z)^{-1}$ удобнее рассмотреть оператор

$$T(z) = V - VR(z)V, \quad (4)$$

через который резольвента выражается равенством

$$R(z) = R_0(z) - R_0(z)T(z)R_0(z), \quad R_0(z) = (H_0 - z)^{-1}. \quad (5)$$

Согласно (4) оператор-функция $T(z)$ мероморфна в $\rho(H_0)$ и имеет полюсы лишь в точках дискретного спектра оператора

H . Обозначим через $\Pi = \overline{\rho(H_0)}$ (замкнутую) комплексную плоскость с разрезом по спектру $\sigma = \sigma(H_0)$ оператора H_0 . Нужные для стационарного построения теории рассеяния результаты о непрерывности $T(z)$ по $z \in \Pi$ формулируются в следующем утверждении.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (2), где $\alpha_0 > 1/2$, и (3). Тогда точечный спектр $\sigma(p)$ оператора H конечен, а его собственные значения конечнократны. Оператор $T(z)$ является интегральным, причем его ядро $t(\lambda, \mu; z)$ гельдеровски непрерывно по аргументам $\lambda, \mu \in \sigma$ и $z \in \Pi$, $z \in \sigma^{(p)}$, с любым показателем $\alpha < \alpha_0$, т.е.

$$|t(\lambda', \mu'; z') - t(\lambda, \mu; z)| \leq C(|\lambda' - \lambda| + |\mu' - \mu| + |z' - z|)^\alpha. \quad (6)$$

Здесь постоянная C не зависит от $z, z' \in \Pi$ вне произвольных окрестностей точек из $\sigma^{(p)}$. На границе квадрата $\sigma \times \sigma$ ядро $t(\cdot, \cdot; z)$ обращается в нуль. Значения ядра t суть компактные операторы в $\mathfrak{h}$.

В силу (4) $T(\bar{z}) = T^*(z)$. В терминах ядра $t(\lambda, \mu; z)$ это означает, что

$$t(\lambda, \mu; \bar{z}) = t^*(\mu, \lambda; z). \quad (7)$$

Из теоремы 1 нетрудно извлечь, что, помимо собственных значений, спектр оператора H может содержать лишь абсолютно непрерывную компоненту. Обсуждение этого момента откладывается до § 2.

2. Для изучения оператора $T(z)$ применяется уравнение

$$T(z) = V - V R_0(z) T(z), \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad (8)$$

эквивалентное резольвентному тождеству (1.9.5) при $J = I$. Предполагая, что оператор $T(z)$ является интегральным, запишем уравнение (8) в терминах его ядра:

$$t(\lambda, \mu; z) = v(\lambda, \mu) - \int_{\sigma} v(\lambda, \nu) (\nu - z)^{-1} t(\nu, \mu; z) d\nu. \quad (9)$$

Из устанавливаемой далее разрешимости этого уравнения при $\operatorname{Im} z \neq 0$ следует, что интегральный оператор с ядром $t(\lambda, \mu; z)$ удовлетворяет уравнению (8). Поэтому такой оператор совпадает с $T(z)$, т.е. и в самом деле $T(z)$ — интегральный оператор с ядром $t(\lambda, \mu; z)$.

Уравнение (9) рассматривается при фиксированном μ относительно функции $t(\lambda, \mu; z)$ переменной λ . Чтобы не иметь дело с оператор-функциями, применим обе части (9) к элементу $\varphi \in \mathfrak{h}$ и запишем его в виде

$$t(z) = v + A(z)t(z). \quad (10)$$

Здесь v —вектор-функция $v(\cdot) = v(\cdot, \mu)\varphi$, $t(z)$ —вектор-функция $t(\cdot; z) = t(\cdot, \mu; z)\varphi$, а $A(z) = -VR_0(z)$ —интегральный оператор с ядром $-v(\lambda, \nu)(\nu - z)^{-1}$. Мы будем рассматривать уравнение (10) во вспомогательном банаховом пространстве гильбертовски непрерывных функций. Важно, что на основании теоремы 1.2.6 уравнение (10) распространяется в этом пространстве по непрерывности на все $z \in \Pi$.

Именно: пусть $C^\alpha = C^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$ —банахово пространство вектор-функций $f(\lambda)$, принимающих значения в $\mathfrak{h}$, с нормой

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\lambda, \lambda' \in \sigma} (|f(\lambda)| + |f(\lambda') - f(\lambda)| |\lambda' - \lambda|^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (11)$$

Это пространство не сепарабельно. Поэтому введем еще замыкание $\dot{C}^\alpha = \dot{C}^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$ класса $C^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$ бесконечно дифференцируемых функций по норме (11). Через C_0^α и $\dot{C}_0^\alpha$ обозначаем подпространства функций f соответственно из C^α и $\dot{C}^\alpha$, обращающихся в нуль на концах σ . Отметим, что $C^{\alpha_1} \subset C^\alpha$ (и $C_0^{\alpha_1} \subset \dot{C}_0^\alpha$) для любого $\alpha < \alpha_1 \leq 1$. Нам понадобится признак компактности в пространстве $\dot{C}^\alpha$. Пусть множество вектор-функций $f_n(\lambda)$ компактно в $\mathfrak{h}$ при любом фиксированном $\lambda \in \sigma$ и равномерно (по n) гильбертовски непрерывно с каким-либо показателем $\alpha_1 \leq 1$. Тогда для любого $\alpha < \alpha_1$ множество $\{f_n\}$ принадлежит $\dot{C}^\alpha$ и компактно в этом пространстве. В скалярном случае $\dim \mathfrak{h} = 1$ это утверждение вполне аналогично известному (см., например, [10]) критерию компактности в пространстве непрерывных функций. Обобщение на векторный случай достигается благодаря предположению о компактности $\{f_n(\lambda)\}$ в $\mathfrak{h}$.

Оператор $A(z)$ будем рассматривать в шкале пространств C_0^α и $\dot{C}_0^\alpha$. Из (2) вытекает, что при любом $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} &|v(\lambda', \mu') - v(\lambda, \mu') - v(\lambda', \mu) + v(\lambda, \mu)| \leq \\ &\leq C|\lambda' - \lambda|^{\alpha_0 s} |\mu' - \mu|^{\alpha_0(1-s)}. \end{aligned}$$

При $f \in C^\alpha$, $\alpha < \alpha_0$, отсюда легко извлечь оценку

$$\|[v(\lambda', \cdot) - v(\lambda, \cdot)]f(\cdot)\|_{\alpha(1-s)} \leq C|\lambda' - \lambda|^{\alpha_0 s} \|f\|_\alpha. \quad (12)$$

Применим теперь теорему 1.2.6 к интегралу в правой части равенства

$$(A(z)f)(\lambda') - (A(z)f)(\lambda) = \int_{\sigma} \frac{v(\lambda, \mu) - v(\lambda', \mu)}{\mu - z} f(\mu) d\mu.$$

Из (1.2.4) и (12) следует, что

$$\begin{aligned} & |(A(z)f)(\lambda') - (A(z)f)(\lambda)| + |z' - z|^{-\alpha(1-s)} \times \\ & \times |(A(z)f)(\lambda') - (A(z)f)(\lambda) - (A(z')f)(\lambda') + (A(z')f)(\lambda)| \leq \\ & \leq C|\lambda' - \lambda|^{\alpha_0 s} \|f\|_{\alpha}. \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая здесь $\lambda' = a$ (или $\lambda' = b$) и учитывая условие (3), получим также оценку для самой функции $(A(z)f)(\lambda)$. Оценка для первого слагаемого в левой части (13) показывает, что оператор $A(z)$ при всех $z \in \Pi$ переводит пространство C_0^{α} в $C_0^{\alpha_1}$, где α_1 — произвольное число, меньшее $\alpha_0 s$. Учтем еще, что операторы $v(\lambda, \mu)$ компактны в $\mathfrak{h}$ при всех $\lambda, \mu \in \sigma$, а s — произвольно. Поэтому при любых $\alpha < \alpha_0$ и $\alpha_1 < \alpha_0$ оператор $A(z): C_0^{\alpha} \rightarrow \dot{C}_0^{\alpha_1}$ компактен. Кроме того, при $s = \alpha_1 \alpha_0^{-1}$ из оценки (13) для второго слагаемого левой части вытекает гельдеровская зависимость (с показателем $\alpha(1-s)$) этого оператора от параметра $z \in \Pi$. Таким образом, верна

Лемма 2. При $z \in \Pi$ и любых $\alpha < \alpha_0$, $\alpha_1 < \alpha_0$ оператор $A(z): C_0^{\alpha} \rightarrow \dot{C}_0^{\alpha_1}$ компактен. Оператор-функция $A(z)$ голоморфна по z на открытом множестве $\rho(H_0)$ и гельдеровски непрерывна с показателем $\gamma = (\alpha_0 - \alpha_1)\alpha_0^{-1}$ по $z \in \Pi$.

Отметим еще, что при больших z норма оператора $A(z)$ не превосходит $C|z|^{-1}$. Далее оператор $A(z)$ рассматривается в пространстве $\dot{C}_0^{\alpha}$ при $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Для построения оператора $(I - A(z))^{-1}$ изучим прежде всего множество $\mathfrak{M} \subset \Pi$ «особых» точек z , в которых уравнение $f = A(z)f$ имеет нетривиальные решения. Это множество разбивается на три компоненты: $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cup \mathfrak{N}^+ \cup \mathfrak{N}^-$, где $\mathfrak{N} \subset \rho(H_0)$, а $\mathfrak{N}^{(+)} \setminus \mathfrak{N}^{(-)}$ принадлежит верхнему (нижнему) берегу разреза по σ . В силу леммы 2 все эти множества не зависят от выбора $\alpha \in (0, \alpha_0)$. Нам понадобится

Лемма 3. Пусть $\lambda_0 \in \sigma$ и $f = A(\lambda_0 \pm i0)f$. Тогда $f(\lambda_0) = 0$.

○ Положим $g(\varepsilon) = A(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f$. Поскольку $A(z) = -VR_0(z)$

при $z \in \rho(H_0)$ и, по условию, $g(0) = f$, то

$$\begin{aligned} & (VR_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f, R_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f) = \\ & = -(g(\varepsilon) - g(0), R_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f) - (f, R_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f), \end{aligned} \quad (14)$$

где скалярное произведение берется, конечно, в $L_2(\sigma; \mathfrak{H})$. Согласно лемме 2 верна оценка $\|g(\varepsilon) - g(0)\|_\alpha \leq C\varepsilon^\gamma$, $\gamma > 0$, а потому

$$|(g(\varepsilon) - g(0), R_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f)| \leq C\varepsilon^\gamma \int_\sigma (|\lambda - \lambda_0| + \varepsilon)^{-1} d\lambda = o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Возьмем мнимую часть от обеих частей (14). При этом в силу симметричности V левая часть обратится в нуль, и, следовательно,

$$\operatorname{Im}(f, R_0(\lambda_0 \pm i\varepsilon)f) = o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. В то же время в силу равенств (1.2.6), (1.2.7) при $a < \lambda_0 < b$ это выражение стремится к $2\pi i f(\lambda_0)$. При $\lambda_0 = a$ или $\lambda_0 = b$ искомое равенство $f(\lambda_0) = 0$ следует из условия (3). •

Согласно лемме 3 оба уравнения $f = A(\lambda_0 \pm i0)f$ имеют решения одновременно, и эти решения совпадают. Через $\mathcal{N}$ обозначаем множество $\mathcal{N}^{(+)} = \mathcal{N}^{(-)}$, рассматриваемое как подмножество $\sigma \subset \mathbb{R}$. В действительности имеет место

Лемма 4. Пусть $\alpha_0 > 1/2$. Тогда множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{N}$ совпадает с точечным спектром $\sigma^{(p)}$ оператора H . Кроме того, кратность собственного числа z оператора H равна кратности собственного числа 1 оператора $A(z)$

○ Для оператора $A(z) = -VR_0(z)$ соотношения $(H_0 - z)\psi + V\psi = 0$ и $f = A(z)f$ формально эквивалентны, причем соответствующие собственные элементы ψ и f связаны равенствами $f = -V\psi$ и $\psi = R_0(z)f$. В силу условий (2) $V\psi \in C_0^\alpha$ при $\psi \in \mathcal{H}$ и любом $\alpha < \alpha_0$, а потому $\sigma^{(p)} \subset \mathcal{N} \cup \mathfrak{N}$. Обратно при $f \in C_0^\alpha$ включение $\psi = R_0(z)f \in \mathcal{H}$ очевидно для $z \in \rho(H_0)$, откуда $\mathfrak{N} \subset \sigma^{(p)}$. Для $z = \lambda_0 \pm i0$, $\lambda_0 \in \sigma$, учтем лемму 3 и конечность нормы (11). Тогда

$$|\psi(\lambda)| = |\lambda - \lambda_0|^{-1} |f(\lambda)| \leq C|\lambda - \lambda_0|^{\alpha-1}$$

и ψ квадратично интегрируема, если $2\alpha > 1$. Отсюда следует включение $\mathcal{N} \subset \sigma^{(p)}$. Проведенное рассуждение устанавливает и совпадение кратностей собственных чисел z и 1 операторов H и $A(z)$. •

Из леммы 4 безусловно вытекает, что множество $\mathfrak{M}$ может лежать только на вещественной оси.

3. Теперь мы можем доказать теорему 1.

○ Конечнократность собственных значений (в том числе лежащих на непрерывном спектре) оператора H — прямое следствие леммы 4 и компактности оператора $A(z)$.

Установим конечность множества $\sigma^{(p)}$. Ввиду ограниченности H , достаточно проверить отсутствие у $\mathcal{N} \cup \mathfrak{M}$ конечных точек накопления. Предположим противное. Пусть, например, $\lambda_n \in \mathcal{N}$ и $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ при $n \rightarrow \infty$. Согласно лемме 2 множество нормированных в $\dot{C}^\alpha$ решений f_n уравнения $A(z_n)f_n = f_n$, $z_n = \lambda_n \pm i0$, компактно в $\dot{C}^\alpha$. Можно считать, что $f_n \rightarrow f_0$ в $\dot{C}^\alpha$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $A(z_0)f_0 = f_0$. В силу ортогональности собственных функций $\psi_n = R_0(z_n)f_n$ и $\psi_0 = R_0(z_0)f_0$ самосопряженного оператора H

$$\int_{\sigma} (\lambda - \lambda_n)^{-1} f_n(\lambda) (\lambda - \lambda_0)^{-1} \overline{f_0(\lambda)} d\lambda = 0. \quad (15)$$

Согласно лемме 3 справедливы равенства $f_n(\lambda_n) = 0$ и $f_0(\lambda_0) = 0$, а потому

$$|f_n(\lambda)| \leq C|\lambda - \lambda_n|^\alpha, \quad |f_0(\lambda)| \leq C|\lambda - \lambda_0|^\alpha \quad (16)$$

с постоянной C , не зависящей от n . При $2\alpha > 1$ это позволяет оценить интеграл (15) по окрестности точки λ_0 равномерно по n . Теперь соотношение $\|f_n - f_0\|_\alpha \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, показывает, что в интеграле (15) можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Тем самым из (15) следует равенство $(\lambda - \lambda_0)^{-1} f_0(\lambda) = 0$, противоречащее нормировке $\|f_0\|_\alpha = 1$. Что касается конечности множества $\mathfrak{M}$, то содержательна лишь проверка отсутствия накопления к концам a и b . При оправдании предельного перехода в (15) надо учесть, что в силу (3) $f_0(\lambda_0) = 0$, $f_n(\lambda_0) = 0$. Теперь неравенства (16) будут выполняться, если в правой части λ_n заменить на λ_0 . Аналогично предыдущему в случае $2\alpha > 1$ это позволяет перейти в интеграле (15) к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Для доказательства результатов теоремы 1 о ядре $t(\lambda, \mu; z)$ оператора (4) будем исходить из интегрального уравнения (9), записанного в форме (10). В силу леммы 2 и альтернативы Фредгольма (см. п. 1 § 1.7) оператор $I - A(z)$ обратим в пространстве $\dot{C}_0^\alpha$ при всех $z \in \Pi \setminus \mathfrak{M}$. Кроме того, постоянная C

в оценке $\|(I - A(z))^{-1}\| \leq C$ не зависит от $z \in \Pi$ вне произвольных окрестностей точек из множества $\mathfrak{M}$. Таким образом, при каждом $\mu \in \sigma$ решение уравнения (10) дается равенством $t(z) = (I - A(z))^{-1}v$ и, следовательно,

$$\|t(\cdot, \mu; z)\|_{\alpha} \leq C\|v(\cdot, \mu)\|_{\alpha}, \quad \alpha < \alpha_0. \quad (17)$$

Отсюда вытекает, что уравнение (9) разрешимо, а функция $t(\lambda, \mu; z)$ гильбертовски непрерывна по первой переменной с любым показателем $\alpha < \alpha_0$. Ввиду равенства симметрии (7) то же верно и в отношении гладкости по второй переменной.

Остается изучить гладкость $t(\lambda, \mu; z)$ по спектральной переменной z . В силу уравнения (10)

$$t(z') - t(z) = (I - A(z'))^{-1}(A(z') - A(z))t(z). \quad (18)$$

Из леммы 2 и оценки (17) вытекает, что при любых $\alpha_1 \in (0, \alpha_0)$ и $\gamma < \alpha_0 - \alpha_1$

$$\|(A(z') - A(z))t(z)\|_{\alpha_1} \leq C|z' - z|^{\gamma}. \quad (19)$$

Поскольку оператор $(I - A(z'))^{-1}$ ограничен в пространстве $\dot{C}_0^{\alpha_1}$ при сколь угодно малом α_1 , сравнивая (18) и (19), найдем, что ядро $t(\lambda, \mu; z)$ гильбертовски непрерывно по z с любым показателем $\gamma < \alpha_0$.

Для завершения доказательства теоремы 1 заметим, что коль скоро решение уравнения (9) существует, его правая, а потому и левая части являются компактными операторами в $\mathfrak{h}$ при всех $\lambda, \mu \in \sigma$. Аналогичным образом согласно (3) $t(\lambda, \mu; z) = 0$ при $\lambda = a$ и $\lambda = b$. Теперь согласно (7) $t(\lambda, \mu; z) = 0$ при $\mu = a$ и $\mu = b$. •

4. Сделаем несколько замечаний по поводу необходимости условий теоремы 1. Без условия (3) оператор $A(z)$ приходится рассматривать в пространстве $\dot{C}^{\alpha}(\sigma; \mathfrak{h})$ (вместо $\dot{C}_0^{\alpha}(\sigma; \mathfrak{h})$). При этом в силу теоремы 1.2.6 и замечания к ней леммы 2 и 4 сохраняются, если исключить из рассмотрения концы интервала σ . Собственные значения оператора H не имеют точек накопления, отличных от a и b . Оценка (6) теоремы 1 для ядра оператора (4) справедлива при всех $\lambda, \mu \in \sigma$ и значениях z , лежащих вне произвольных окрестностей точек из $\sigma^{(p)}$ и концов a и b . На границе квадрата $\sigma \times \sigma$ ядро $t(\cdot, \cdot; z)$ теперь, конечно, не обращается в нуль.

Если вместо (3) выполнено равенство $v(\lambda, a) = v(a, \mu) = 0$, то исключать из рассмотрения надо только точку b . Собственные значения H также могут накапливаться только к этой точке.

Покажем, что и при отсутствии условия (3) дискретный спектр оператора H остается конечным. Установим, например, отсутствие накопления слева к точке a . С этой целью рассмотрим вспомогательный оператор $H_1 = H_0 + V_1$, где V_1 — интегральный оператор вида (1) с ядром

$$v_1(\lambda, \mu) = v(\lambda, \mu) - \zeta(\lambda) - \overline{\zeta(\mu)}, \quad \zeta(\lambda) = v(\lambda, a) - 2^{-1}v(a, a).$$

Для этого ядра выполняется условие $v_1(\lambda, a) = v_1(a, \mu) = 0$, а потому собственные значения H_1 не накапливаются к точке a (ни слева, ни справа). В то же время операторы H и H_1 различаются на конечномерный (двумерный). Поэтому (см., например, [4]) общие кратности их дискретных спектров в интервале $(-\infty, a)$ также могут различаться лишь на конечное число (два). Отсюда вытекает конечность дискретного спектра оператора H .

Остановимся теперь на обобщении теоремы 1 на случай, когда условие (2) выполняется лишь при каком-либо $\alpha_0 > 0$. Это потребует применения результатов § 1.8. Предположение (3) сейчас также опускается.

При доказательстве теоремы 1 условие $\alpha_0 > 1/2$ было использовано лишь для проверки включения $\mathcal{N} \subset \sigma^{(p)}$, а также для доказательства конечности множества $\sigma^{(p)}$. Поэтому оценка (6) для ядра $t(\lambda, \mu; z)$ сохраняется, если спектральный параметр z отделен от точек из множества $\mathfrak{M} \cup \mathcal{N}$, а также концов a и b . Для описания структуры множества $\mathcal{N}$, в которое мы условимся включать концы a и b , нам понадобится сейчас теорема 1.8.3. При этом важно, что оператор $A(z)$ аппроксимируется конечномерными. Это вытекает из следующего элементарного утверждения общего характера.

Лемма 5. В пространстве $\dot{C}^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$, где $\alpha \in (0, 1)$, любой компактный оператор аппроксимируется по норме конечномерными.

○ Достаточно построить такую последовательность конечномерных операторов T_n , что

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = I. \quad (20)$$

Тогда для любого $A \in \mathfrak{S}_\infty$ будет $\|A - A_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, где операторы $A_n = T_n A$ конечномерны. При построении T_n доста-

точно рассмотреть пространство $\dot{C}^\alpha(\sigma)$, что отвечает $\dim \mathfrak{h} = 1$. Переход к общему случаю осуществляется соотношением $T_n = T_n \otimes P_n$, где T_n — операторы в $\dot{C}^\alpha(\sigma)$, удовлетворяющие (20), а P_n — ортогональный проектор в $\mathfrak{h}$ на первые n векторов какого-либо фиксированного ортонормированного базиса. Далее, вместо $\dot{C}^\alpha(\sigma)$ можно рассмотреть его подпространство $\overset{0}{C}^\alpha(\sigma)$, состоящее из периодических функций и отличающееся от $\dot{C}^\alpha(\sigma)$ на одномерное. Кроме того, заменой переменных дело сводится к случаю $\sigma = [-\pi, \pi]$. Наконец, в пространстве $\overset{0}{C}^\alpha([-\pi, \pi])$ в качестве T_n можно взять интегральный оператор с ядром $T_n(\lambda - \mu)$, где

$$T_n(\lambda) = (2\pi n)^{-1}(1 - \cos n\lambda)(1 - \cos \lambda)^{-1},$$

т.е. $T_n f$ — n -е чезаровское среднее ряда Фурье f . Размерность T_n равна $2n+1$, а соотношение (20) для него проверяется вполне аналогично доказательству такого же факта для непрерывных функций (см., например, [6]). •

В силу этой леммы и замечания 1.8.4 к оператор-функции $A(z)$ в пространстве $\dot{C}^\alpha = \dot{C}^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$ применима теорема 1.8.3. Поэтому множество $\mathcal{N}$ замкнуто и имеет нулевую лебегову меру.

Остановимся теперь на дискретном спектре оператора H . Заметим прежде всего, что при доказательстве в лемме 4 включения $\sigma^{(p)} \subset \mathcal{N} \cup \mathfrak{M}$ использовалось лишь условие $\alpha_0 > 0$. Действительно, при $H\psi = \lambda\psi$ функция $f = -V\psi \in \dot{C}^\alpha$ и удовлетворяет уравнению $A(\lambda \pm i0)f = f$. Такой элемент $f \neq 0$, так как в противном случае будет $H_0\psi = \lambda\psi$. При этом дополнительно выясняется, что кратность собственного числа λ оператора H не превосходит кратности собственного числа 1 оператора $A(\lambda \pm i0)$. Поскольку при $\lambda \neq a$ и $\lambda \neq b$ оператор $A(\lambda \pm i0)$ компактен в пространстве $\dot{C}^\alpha$, отсюда вытекает конечнократность собственных значений оператора H . Кроме того, совершенно аналогично доказательству теоремы 1 проверяется, что $\mathfrak{M} \subset \sigma^{(p)}$ и собственные значения оператора H не имеют точек накопления в $(-\infty, a)$ и (b, ∞) . Таким образом, имеет место

Теорема 6. Пусть при некотором $\alpha_0 > 0$ выполнено условие (2). Тогда множество $\mathcal{N}$ замкнуто и имеет нулевую лебегову меру. Собственные значения оператора H принадлежат множеству $\mathfrak{M} = \mathcal{N} \cup \mathfrak{M}$, вне отрезка σ не имеют точек накопления и,

за возможным исключением точек a' и b , конечнократны. Ядро $t(\lambda, \mu; z)$ оператора $T(z)$ принимает компактные значения и гильбертовски непрерывно по аргументам $\lambda, \mu \in \sigma$ и $z \in \Pi \setminus \mathcal{M}$ с любым показателем $\alpha < \alpha_0$. Постоянная C в (6) равномерна по $z, z' \in \Pi$ вне произвольных окрестностей точек из множества $\mathcal{M}$.

Отметим, что при исследовании собственных значений оператора H , лежащих вне σ , можно было бы сослаться на теорему 1.8.2. Впрочем, вся полученная информация о дискретном спектре вытекает и из теоремы Г. Вейля.

Без предположения о компактности операторов $v(\lambda, \mu)$ в $\mathfrak{h}$ теоремы 1 или 6, вообще говоря, теряют силу. Тем не менее при условиях (2) и (3) оператор $A(z)$ по-прежнему ограничен в пространствах $\dot{C}_0^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$ для $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и гильбертовски непрерывно зависит от $z \in \Pi$. Поэтому при всех $z \in \Pi$ уравнение (10) имеет корректный смысл, а для малых возмущений оно будет разрешимо на основании принципа сжатых отображений. Точнее, имеет место

Теорема 7. Пусть выполнены условия (2), где $\alpha_0 > 0$, и (3), а для оператора $A(z): \dot{C}_0^\alpha(\sigma; \mathfrak{h}) \rightarrow \dot{C}_0^\alpha(\sigma; \mathfrak{h})$, при каком-либо $\alpha \in (0, \alpha_0)$ справедлива оценка

$$\sup_{z \in \Pi} \|A(z)\| < 1$$

(но предположения $v(\lambda, \mu) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{h})$ не делается). Тогда оператор абсолютно непрерывен и, в частности, не имеет точечного спектра. Ядро $t(\lambda, \mu; z)$ гильбертовски непрерывно с любым показателем $\alpha < \alpha_0$ зависит от аргументов $\lambda, \mu \in \sigma$ и $z \in \Pi$. Кроме того, на границе квадрата $\sigma \times \sigma$ ядро $t(\cdot, \cdot; z)$ обращается в нуль.

При условиях (2) и (3) утверждение теоремы 7 заведомо справедливо для оператора $H_\epsilon = H_0 + \epsilon V$, если ϵ достаточно мало.

§ 2. РАССЕЯНИЕ В МОДЕЛИ ФРИДРИХСА—ФАДДЕЕВА

Здесь результаты § 1 применяются для стационарного построения теории рассеяния в модели Фридрихса—Фаддеева. В этой модели ВО представляются сингулярными интегральными операторами. Эти представления отличаются по форме от представлений § 2.7, но эквивалентны им. В связи с

этим отметим, что в рассматриваемой модели предположения о возмущении не имеют явно унитарно-инвариантного характера. Тем самым и получаем формульные представления не унитарно-инвариантные. В то же время исследование модели Фридрихса—Фаддеева позволяет выявить специфические черты и упрощения в случаях, когда спектральный анализ невозмущенного оператора можно провести явно.

1. Как и в § 1, считаем, что $\mathcal{H} = L_2(\sigma; \mathfrak{h})$, $(H_0 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, $H = H_0 + V$, где V —интегральный оператор (1.1). По-прежнему предполагается, что ядро v эрмитово, т.е. $v(\lambda, \mu) = v^*(\mu, \lambda)$, и (за исключением теоремы 3—см. далее) принимает компактные значения в $\mathfrak{h}$.

Рассмотрения будем проводить сразу в условиях теоремы 1.6, более общей по сравнению с теоремой 1.1. Через $\mathcal{N}$ обозначаем множество точек $\lambda \in (a, b)$, для которых уравнения $A(\lambda \pm i0)f = f$ имеют нетривиальные решения. Точки a и b также включаются в это множество. В условиях теоремы 1.6 множество $\mathcal{N}$ замкнуто и имеет нулевую лебегову меру.

Сформулируем основные результаты этого параграфа.

Теорема 1. Пусть при каком-либо $\alpha_0 > 0$ выполнено условие (1.2). Тогда $BO W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны. На множестве $\sigma \setminus \mathcal{N}$ спектр оператора H абсолютно непрерывен.

Согласно лемме 1.4 в условиях теоремы 1.1 множество $\mathcal{N}$ исчерпывается собственными значениями оператора H . Без условия (1.3) это верно по отношению ко всем внутренним точкам промежутка σ . Комбинируя эти утверждения с теоремой 1, получим

Следствие 2: Пусть условие (1.2) выполнено при каком-либо $\alpha_0 > 1/2$. Тогда оператор H не имеет сингулярного непрерывного спектра.

Для малых возмущений множество $\mathcal{N}$ пусто, причем предположение о компактности v не нужно. В этом случае верна

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1.7. Тогда спектр оператора H абсолютно непрерывен, а $BO W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и унитарны.

При доказательстве теоремы 1 предположение о компактности операторов $v(\lambda, \mu)$ явно не используется. Оно нужно лишь для применения результатов § 1. Поэтому теорема 3 по существу является следствием теоремы 1.

В силу следствия 2.3.9 в условиях теоремы 1 и 3 существуют и ВО $W_{\pm}(H_0, H) = W_{\pm}^*(H, H_0)$.

2. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим ядро $t(\lambda, \mu; z)$ оператора (1.4). В его терминах можно определить два сингулярных интегральных оператора $U_{\pm}$ (стационарных ВО):

$$(U_{\pm}f)(\lambda) = f(\lambda) - \int_{\sigma} t(\lambda, \mu, \mu \mp i0)(\lambda - \mu \pm i0)^{-1} f(\mu) d\mu. \quad (1)$$

В точном смысле операторы $U_{\pm} =: I - T_{\pm}$ задаются в $\mathcal{H}$ соотношением (1) на множестве $\mathcal{D} = C_0^{\infty}(\sigma \setminus \mathcal{N}; \mathfrak{h})$ гладких вектор-функций, исчезающих в окрестностях точек из $\mathcal{N}$. Поскольку $\sigma \setminus \mathcal{N}$ — открытое множество полной меры, $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}$.

Установим, что операторы $U_{\pm}$ изометричны на $\mathcal{D}$ и, следовательно, распространяются по непрерывности до изометрических операторов на всем пространстве $\mathcal{H}$. С этой целью рассмотрим при $\varepsilon > 0$, $\tau > 0$ вспомогательные интегральные операторы

$$(T_{\pm}(\varepsilon, \tau)f)(\lambda) = \int_{\sigma} t(\lambda, \mu; \mu \mp i\varepsilon)(\lambda - \mu \pm i\tau)^{-1} f(\mu) d\mu. \quad (2)$$

Согласно теоремам 1.2.6 и 1.6 при $f \in \mathcal{D}$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ функции $T_{\pm}(\varepsilon, \tau)f$ сходятся к $T_{\pm}f$ равномерно по $\lambda \in \sigma$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} T_{\pm}(\varepsilon, \tau)f = T_{\pm}f, \quad f \in \mathcal{D}, \quad (3)$$

в смысле сильной сходимости в $\mathcal{H}$. Нам понадобится также тождество

$T(z_2) - T(z_1) = (z_1 - z_2)T(z_2)R_0(z_2)R_0(z_1)T(z_1)$, $z_j \in \rho(H)$,
вытекающее из определения (1.4), равенства $T(z)R_0(z) = VR(z)$ и тождества Гильберта для $R(z)$. В терминах ядер оно означает, что

$$\begin{aligned} & t(\lambda, \mu; z_2) - t(\lambda, \mu; z_1) = \\ & = (z_1 - z_2) \int_{\sigma} t(\lambda, \nu; z_2)(\nu - z_2)^{-1}(\nu - z_1)^{-1} t(\nu, \mu; z_1) d\nu, \quad z_j \in \rho(H). \end{aligned} \quad (4)$$

Лемма 3. Операторы $U_{\pm}$ изометричны.

○ Положим в (4) $z_1 = \lambda \pm i\varepsilon$, $z_2 = \mu \mp i\varepsilon$ и учтем равенство симметрии (1.7). Тогда найдем, что

$$T_{\pm}(\varepsilon, 2\varepsilon) + T_{\pm}^*(\varepsilon, 2\varepsilon) = T_{\pm}^*(\varepsilon, \varepsilon)T_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon).$$

Вычислим квадратичную форму этого оператора на элементе $f \in \mathcal{D}$ и согласно (3) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это приводит к равенству $\|U_{\pm} f\| = \|f\|$, $f \in \mathcal{D}$, для оператора $U_{\pm} = I - T_{\pm}$. •

Столь же просто устанавливается сплетающее свойство операторов $U_{\pm}$.

Лемма 4. При любом $z \in \rho(H)$

$$R(z)U_{\pm} = U_{\pm}R_0(z). \quad (5)$$

○ Будем опять исходить из тождества (4), где положим $z_1 = \mu \pm i\varepsilon$, $z_2 = z$. Умножив его на функцию

$$(\lambda - z)^{-1}(\mu - z \mp i\varepsilon)^{-1} = (\lambda - \mu \pm i\varepsilon)^{-1}[(\mu - z \mp i\varepsilon)^{-1} - (\lambda - z)^{-1}],$$

найдем, что

$$\begin{aligned} R_0(z)T(z)R_0(z \pm i\varepsilon) + R_0(z)T_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon) - T_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon)R_0(z \pm i\varepsilon) = \\ = R_0(z)T(z)R_0(z)T_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$

Применим этот оператор к элементу $f \in \mathcal{D}$ и в согласии с (3) перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ввиду (1.5) получившееся соотношение эквивалентно (5) для $U_{\pm} = I - T_{\pm}$. •

Стандартным образом (ср. с § 2.1) из (5) вытекает равенство $\varphi(H)U_{\pm} = U_{\pm}\varphi(H_0)$ для произвольной ограниченной функции φ . Справедливо и равенство $HU_{\pm} = U_{\pm}H_0$.

3. Установим теперь абсолютную непрерывность спектра оператора H на множестве $\sigma \setminus \mathcal{N}$. С этой целью вычислим с помощью формулы Стоуна (1.4.7) спектральную меру оператора H . При $f \in C^{\alpha} = C^{\alpha}(\sigma; \mathfrak{h})$, $\alpha > 0$, рассмотрим функцию

$$u(\lambda, z; f) = f(\lambda) - \int_{\sigma} t(\lambda, \mu; z)(\mu - z)^{-1}f(\mu) d\mu. \quad (6)$$

В силу теорем 1.2.6 и 1.6 эта функция гельдеровски непрерывна по переменным $\lambda \in \sigma$ и $z \in \Pi \setminus \mathcal{M}$. Поэтому при $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$ корректно определены «диагональные» значения $u(\lambda, \lambda \pm i0; f)$.

Лемма 5. Пусть $f, g \in C^{\alpha}$, а борелевское множество $\Lambda \subset \sigma \setminus \mathcal{N}$. Тогда при любом $\lambda \in \Lambda$

$$(E(\Lambda)f, g) = \int_{\Lambda} \langle u(\lambda, \lambda \pm i0; f), u(\lambda, \lambda \pm i0; g) \rangle d\lambda. \quad (7)$$

○ Согласно (6) и (1.5)

$$(R(z)f)(\mu) = (\mu - z)^{-1}u(\mu, z; f).$$

Поэтому по определению (1.4.5)

$$\begin{aligned} (\delta(\lambda, \varepsilon)f, g) &= \pi^{-1}\varepsilon(R(\lambda \pm i\varepsilon)f, R(\lambda \pm i\varepsilon)g) = \\ &= \pi^{-1}\varepsilon \int_{\sigma} \frac{\langle u(\mu, \lambda \pm i\varepsilon; f), u(\mu, \lambda \pm i\varepsilon; g) \rangle}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} d\mu. \end{aligned}$$

При $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$ устремим здесь ε к нулю. Тогда на основании равенств (1.2.6), (1.2.7) найдем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta(\lambda, \varepsilon)f, g) = \langle u(\lambda, \lambda \pm i0; f), u(\lambda, \lambda \pm i0; g) \rangle,$$

причем предельный переход равномерен по $\lambda \in [\beta_1, \beta_2]$, если $[\beta_1, \beta_2] \cap \mathcal{N} = \emptyset$. Следовательно, при $\Lambda = (\beta_1, \beta_2)$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ в (1.4.7) можно перейти к пределу под знаком интеграла. Это доказывает (7) для случая интервалов, а потому и для любых борелевских множеств. •

На множестве $\sigma \setminus \mathcal{N}$ мера (7) абсолютно непрерывна. Поскольку, кроме того, множества $\mathcal{N}$ и $\mathfrak{N}$ имеют нулевую лебегову меру, отсюда вытекает равенство

$$P^{(a)} = E(\sigma \setminus \mathcal{N}). \quad (8)$$

Для доказательства полноты ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ запишем представление (7) в терминах операторов (1). При этом нам понадобится

Лемма 6. При $f \in C^{\alpha}$ и $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$

$$(\mathcal{U}_{\pm}^* f)(\lambda) = u(\lambda, \lambda \pm i0; f). \quad (9)$$

○ Будем исходить из соотношения

$$(f, g) - (f, T_{\pm}(\varepsilon, \varepsilon)g) = \int_{\sigma} \langle u(\lambda, \lambda \pm i\varepsilon; f), g(\lambda) \rangle d\lambda. \quad (10)$$

Для его доказательства надо подставить в правую часть (10) определение (6), переставить интегрирования по λ и μ и воспользоваться равенством (1.7). Согласно (2) получившееся выражение будет равно левой части (10).

Далее, считая $g \in \mathcal{D}$, перейдем в (10) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу (3) и непрерывности $u(\lambda, z; f)$ по $\lambda \in \sigma$ и $z \in \Pi \setminus \mathfrak{M}$ это приводит к равенству

$$(f, \mathcal{U}_{\pm} g) = \int_{\sigma} \langle u(\lambda, \lambda \pm i0; f), g(\lambda) \rangle d\lambda.$$

Ввиду произвольности $g \in \mathcal{D}$ из него прямо вытекает искомое соотношение (9). •

Сопоставляя равенства (7) и (9), найдем, что

$$(E(\Lambda)f, g) = \int_{\Lambda} \langle (U_{\pm}^* f)(\lambda), (U_{\pm}^* g)(\lambda) \rangle d\lambda.$$

Положим здесь $\Lambda = \sigma \setminus \mathcal{N}$ и учтем (8). Тогда получим соотношение

$$U_{\pm} U_{\pm}^* = P^{(a)}, \quad (11)$$

означающее полноту ВО $U_{\pm}$. Таким образом, $R(U_{\pm}) = \mathcal{H}^{(a)}$ и на этом подпространстве оператор H унитарно эквивалентен H_0 .

Для завершения доказательства теоремы 1 остается рассмотреть нестационарные ВО (2.1.1) (для $J = I$). При этом нам понадобится элементарная

Лемма 7. Пусть f — гельдеровски непрерывная функция на отрезке $[-a, a]$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{-a}^a f(x) e^{itx} (x \pm i\varepsilon)^{-1} dx = 0. \quad (12)$$

○ Добавим и вычтем значение f в нуле и учтем, что функция $[f(x) - f(0)]x^{-1}$ абсолютно интегрируема. Интеграл вида (12), где роль $f(x)$ играет $f(x) - f(0)$, стремится к нулю в силу леммы Римана—Лебега. Остается заметить, что при $\varepsilon > 0$ и $\pm t > 0$ интеграл от $\exp(itx)(x \pm i\varepsilon)^{-1}$ по $\mathbb{R}$ равен нулю, а потому

$$\int_{-a}^a e^{itx} (x \pm i0)^{-1} dx = - \int_{|x| \geq a} e^{itx} x^{-1} dx = - \int_{|y| \geq a|t|} e^{\pm iy} y^{-1} dy.$$

Последний интеграл, конечно, стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$.

•
Теперь нетрудно убедиться в существовании нестационарных пределов $W_{\pm}(H, H_0)$ и в их совпадении с $U_{\pm}$. Ввиду сплетающего свойства и изометричности $U_{\pm}$

$$\|U(-t)U_0(t)f - U_{\pm}f\|^2 = 2 \operatorname{Re}([I - U_{\pm}]U_0(t)f, U_0(t)f). \quad (13)$$

При $f \in \mathcal{D}$ для оператора $U_{\pm}$ можно воспользоваться определением (1), что дает для правой части (13) представление в виде двойного интеграла:

$$2 \operatorname{Re} \int_{\sigma} \int_{\sigma} (\lambda - \mu \pm i0)^{-1} e^{i(\lambda - \mu)t} w_{\pm}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu, \quad (14)$$

где

$$w_{\pm}(\lambda, \mu) = \langle t(\lambda, \mu; \mu \mp i0)f(\mu), f(\lambda) \rangle$$

—гильдеровски непрерывная функция переменных $\lambda, \mu \in \sigma$. Применяя теперь к интегралу (14) лемму 7 по переменной $\lambda - \mu$, убедимся, что он стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, согласно (13) предел $U(-t)U_0(t)f$ при $t \rightarrow \pm\infty$ существует и равен $U_{\pm}f$, т.е. $W_{\pm}(H, H_0) = U_{\pm}$. Равенство (11) показывает, что ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ полны. Это завершает доказательство теоремы 1.

4. Получим еще выражения для оператора и матрицы рассеяния. Поскольку $W_{\pm} = I - T_{\pm}$, то в силу (3) при $f, g \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} (Sf, g) = & (f, g) + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ([-T_+^*(2\varepsilon, \varepsilon) - T_-(\varepsilon, \varepsilon) + T_+^*(2\varepsilon, 2\varepsilon)T_-(\varepsilon, \varepsilon)]f, g). \end{aligned} \quad (15)$$

Согласно (2) и равенству симметрии (1.7) ядро оператора в квадратных скобках равно

$$\begin{aligned} & (\lambda - \mu + i\varepsilon)^{-1}t(\lambda, \mu; \lambda + 2i\varepsilon) - (\lambda - \mu - i\varepsilon)^{-1}t(\lambda, \mu; \mu + i\varepsilon) + \\ & + \int_{\sigma} \frac{t(\lambda, \nu; \lambda + 2i\varepsilon)t(\nu, \mu; \mu + i\varepsilon)}{(\nu - \lambda - 2i\varepsilon)(\nu - \mu - i\varepsilon)} d\nu. \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя к последнему интегралу тождество (4) при $z_1 = \mu + i\varepsilon$, $z_2 = \lambda + 2i\varepsilon$, запишем второе слагаемое в правой части (15) в виде

$$-2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\sigma} \int_{\sigma} [(\lambda - \mu)^2 + \varepsilon^2]^{-1} \langle t(\lambda, \mu; \mu + i\varepsilon)f(\mu), g(\lambda) \rangle d\lambda d\mu.$$

На основании соотношений (1.2.6), (1.2.7) в получившемся по переменной $\lambda - \mu$ интеграле Пуассона можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это приводит к представлению для полуторалинейности формы оператора рассеяния:

$$(Sf, g) = (f, g) - 2\pi i \int_{\sigma} \langle t(\lambda, \lambda; \lambda + i0)f(\lambda), g(\lambda) \rangle d\lambda.$$

Таким образом, S действует как умножение на оператор-функцию (матрицу рассеяния):

$$S(\lambda) = I - 2\pi i t(\lambda, \lambda; \lambda + i0): \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}. \quad (17)$$

В силу теоремы 1.6 матрица рассеяния корректно определена для $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$. Из унитарности S в $\mathcal{H}$ следует, что и оператор (17) унитарен в $\mathfrak{h}$. Впрочем, унитарность оператора (17) прямо вытекает из равенства (1.7) и тождества (4), где надо положить $\lambda = \mu$, $z_2 = \bar{z}_1 = \lambda + i\varepsilon$ и устремить ε к нулю. Формулируемые далее свойства $S(\lambda)$ —следствия теоремы 1.6.

Теорема 9. В условиях теоремы 1 матрица рассеяния для пары H_0, H задается при $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$ соотношением (17). Оператор $S(\lambda)$ унитарен в $\mathfrak{h}$, отличается от единичного оператора на компактный и $S(\lambda)$ гельдеровски непрерывно с показателем $\alpha < \alpha_0$ (по операторной норме в $\mathfrak{h}$) зависит от $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$.

5. Представление (17) для матрицы рассеяния является, разумеется, реализацией в рамках модели Фридрихса—Фаддеева равенства (2.8.11). Что касается ВО, то в совпадении операторов (1) со стационарными ВО § 2.7 можно убедиться следующим образом. В силу второго равенства (2.7.10) соотношение (2.7.5) можно записать в виде

$$(\mathcal{U}_{\pm} f_0, f) = (P_0 f_0, f) - \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0, T(\lambda \pm i\varepsilon) R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f) d\lambda. \quad (18)$$

В рассматриваемой обстановке это выражение равно полуторалинейной форме оператора (1).

При бесконечном промежутке σ (например, при $\sigma = \mathbb{R}_+$ или $\sigma = \mathbb{R}$) описанная схема исследования и заключения теорем 1 и 9 сохраняются (см. оригинальную статью Л.Д. Фаддеева [79]) при определенных предположениях о ядре $v(\lambda, \mu)$ на бесконечности. Именно, нужно потребовать, чтобы

$$|v(\lambda, \mu)| \leq C(1 + |\lambda| + |\mu|)^{-\theta_0}, \quad \theta_0 > 1/2,$$

а также предположить аналогичную оценку относительно гельдеровских разностей $v(\lambda, \mu)$. Разумеется, эта схема непосредственно распространяется и на случай, когда σ —конечное объединение непересекающихся промежутков.

В заключение отметим, что при доказательстве отсутствия сингулярного непрерывного спектра от условия $\alpha_0 > 1/2$ в (1.2) отказаться нельзя. Именно, как показано в [71], даже для одномерного возмущения $V = (\cdot, v)v$ при $v \in C_0^\alpha$ и любом $\alpha < 1/2$

оператор H , вообще говоря, имеет нетривиальный сингулярный непрерывный спектр. Некоторые подробности по этому поводу можно найти в § 6.7.

§ 3. ГЛАДКОСТЬ ПО КАТО

1. Пусть H —самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathfrak{G}$ —вспомогательное гильбертово пространство, $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ — H -ограниченный (см. п. 1 § 1.9) оператор, Λ —произвольный конечный интервал. В отличие от оригинальной статьи Т. Като [109] (см. также т.4 курса [18]) оператор G не предполагается замкнутым (или допускающим замыкание). Поэтому оператор $R(z)G^*$ нужно определять равенством (1.9.1). Мы пользуемся также обозначением $G_\Lambda = GE(\Lambda)$. Напомним еще, что оператор $\delta(\lambda, \varepsilon) = \delta_H(\lambda, \varepsilon)$ определяется соотношением (1.4.5).

Понятие *гладкости по Като* вводится в унитарно-инвариантных терминах и допускает несколько эквивалентных формулировок. Определению этого понятия предположим следующее утверждение.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

$$\gamma_1^2 = (2\pi)^{-1} \sup_{f \in \mathcal{D}(H), \|f\|=1} \int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)f\|^2 dt < \infty, \quad (1)$$

$$\gamma_2^2 = (2\pi)^{-2} \sup_{\|f\|=1, \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} (\|GR(\lambda + i\varepsilon)f\|^2 + \|GR(\lambda - i\varepsilon)f\|^2) d\lambda < \infty, \quad (2)$$

$$\gamma_3^2 = \sup_{\|f\|=1, \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|^2 d\lambda < \infty, \quad (3)$$

$$\gamma_4^2 = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*\| < \infty, \quad (4)$$

$$\gamma_5^2 = \sup_{\Lambda \subset \mathbb{R}} |\Lambda|^{-1} \|GE(\Lambda)\|^2 < \infty. \quad (5)$$

Все постоянные $\gamma_j = \gamma_j(G)$, $j = 1, \dots, 5$, равны друг другу.

Заметим предварительно, что супремумы в (2) и (3) можно вычислять на элементах из $\mathcal{D}(H)$ или на финитных элементах

вида $f = E(X)f$, где множество X ограничено. В самом деле, пусть, например, для любого n и $X_n = (-n, n)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)E(X_n)f\|^2 d\lambda \leq \gamma_3^2 \|f\|^2.$$

Поскольку $E(X_n)f \xrightarrow{s} f$ при $n \rightarrow \infty$, подынтегральная функция для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ сходится к $\|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|^2$. Поэтому на основании теоремы 1.1.4 (Фату) под знаком интеграла в последнем неравенстве можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Это дает (3).

Установим сначала равенства $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$. Из выражения (1.4.4) резольвенты через унитарную группу и векторного равенства Парсеваля (2.7.1) вытекает, что при $f \in \mathcal{D}(H)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|GR(\lambda \pm i\varepsilon)f\|^2 d\lambda = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-2\varepsilon t} \|GU(\pm t)f\|^2 dt. \quad (6)_{\pm}$$

Сложим равенства $(6)_+$ и $(6)_-$ и возьмем супремум по ε . При этом в силу теоремы 1.1.2 (Лебега) множитель $\exp(-2\varepsilon t)$ в правой части пропадает. Переходя еще к супремуму по $f \in \mathcal{D}(H)$, $\|f\| = 1$, получим равенство $\gamma_1 = \gamma_2$. Из (1.4.4) и (2.7.1) вытекает также, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} (GR(\lambda + i\varepsilon)f, GR(\lambda - i\varepsilon)f) d\lambda = 0.$$

Поскольку по определению (1.4.5)

$$(2\pi)^2 \|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|^2 = \|GR(\lambda + i\varepsilon)f\|^2 + \|GR(\lambda - i\varepsilon)f\|^2 - 2 \operatorname{Re}(GR(\lambda + i\varepsilon)f, GR(\lambda - i\varepsilon)f),$$

это показывает, что $\gamma_2 = \gamma_3$.

Проверим теперь, что $\gamma_3 \leq \gamma_4 \leq \gamma_5 \leq \gamma_3$. Для доказательства первой из этих оценок воспользуемся неравенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|^2 d\lambda \leq \sup_{\lambda} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)^{1/2}\|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \|\delta(\lambda, \varepsilon)^{1/2}f\|^2 d\lambda.$$

В правой части первый сомножитель не превосходит γ_4^2 , а интеграл равен $\|f\|^2$ согласно (1.4.6). Отсюда следует, что $\gamma_3 \leq \gamma_4$.

Далее, при условии (5) для произвольного ограниченного множества X

$$(E(\Lambda)G_X^*f, G_X^*f) \leq \gamma_5^2 |\Lambda| \|f\|^2. \quad (7)$$

Тем самым элемент G_X^*f абсолютно непрерывен и

$$\frac{d(E(\lambda)G_X^*f, G_X^*f)}{d\lambda} \leq \gamma_5^2 \|f\|^2.$$

Применяя теперь спектральную теорему, получим неравенство

$$\begin{aligned} (\delta(\lambda, \varepsilon)G_X^*f, G_X^*f) &= \varepsilon \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2]^{-1} \frac{d(E(\mu)G_X^*f, G_X^*f)}{d\mu} d\mu \leq \\ &\leq \sup_{\lambda} \frac{d(E(\lambda)G_X^*f, G_X^*f)}{d\lambda} \varepsilon \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2]^{-1} d\mu \leq \gamma_5^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\|G\delta(\lambda, \varepsilon)^{1/2} E(X)\| \leq \gamma_5.$$

Ввиду произвольности X такое же неравенство справедливо и без оператора $E(X)$ в левой части, т.е. $\gamma_4 \leq \gamma_5$. Наконец, согласно формуле Стоуна (1.4.7)

$$|2^{-1}(G(E(\Lambda) + E(\bar{\Lambda}))f, g)|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\Lambda} (G\delta(\lambda, \varepsilon)f, g) d\lambda \right|^2.$$

Правую часть оценим по неравенству Шварца через

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Lambda} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|^2 d\lambda \|g\|^2 |\Lambda| \leq (\gamma_3 \|f\| \|g\|)^2 |\Lambda|.$$

Сравнивая два последних соотношения, найдем, что $\gamma_5 \leq \gamma_3$. •

Определение 2. Если G — H -ограничен и выполняется одно из неравенств (1)—(5) (а тогда и все эти неравенства), то оператор G называется гладким по Като относительно оператора H (H -гладким). Общее значение величин $\gamma_1, \dots, \gamma_5$ будем обозначать через $\gamma_H(G)$. Гладкость по Като мы называем, как правило, просто гладкостью.

Сделаем еще два замечания по поводу определения H -гладкости.

Замечание 3. Величины $\gamma_2 - \gamma_4$ не меняются, если супремумы по ε в (2)–(4) берутся лишь по интервалу $(0, \varepsilon_0)$ для

какого-либо $\varepsilon_0 > 0$. Действительно, обозначим временно соответствующие величины через $\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_4$. Доказательство теоремы 1 не меняется при замене чисел γ_j на $\tilde{\gamma}_j$, $j = 2, 3, 4$. Поэтому $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_2 = \tilde{\gamma}_3 = \tilde{\gamma}_4 = \gamma_5$ и, следовательно, $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j$, $j = 2, 3, 4$ в силу теоремы 1.

З а м е ч а н и е 4. Можно дать и другие выражения для числа $\gamma_H(G)$. Например, при каждом из знаков $\pm$

$$\gamma_H^2(G) = (2\pi)^{-1} \sup_{f \in \mathcal{D}(H), \|f\|=1} \int_0^\infty \|GU(\pm t)f\|^2 dt, \quad (8)$$

$$\gamma_H^2(G) = (2\pi)^{-2} \sup_{\|f\|=1, \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^\infty \|GR(\lambda \pm i\varepsilon)f\|^2 d\lambda, \quad (9)$$

а также

$$\gamma_H^2(G) = \pi^{-1} \sup_{\|f\|=1, \varepsilon > 0, \lambda \in \mathbb{R}} \varepsilon (\|GR(\lambda + i\varepsilon)f\|^2 + \|GR(\lambda - i\varepsilon)f\|^2). \quad (10)$$

○ Для доказательства (8) положим $f = U(\mp s)f_s$. Тогда

$$\int_0^\infty \|GU(\pm t)f\|^2 dt = \int_{-s}^\infty \|GU(\pm t)f_s\|^2 dt.$$

Устремляя здесь s к бесконечности, видим, что супремумы в (8) и (1) совпадают. Теперь (9) прямо вытекает из тождества (6) $_{\pm}$. Установим, наконец, (10). Отметим прежде всего, что равенство (4) можно эквивалентным образом переписать в виде

$$\gamma_H^2(G) = \pi^{-1} \sup_{\|f\|=1, \varepsilon > 0, \lambda \in \mathbb{R}} \varepsilon \|GR(\lambda \pm i\varepsilon)f\|^2. \quad (11)$$

Величина (11), разумеется, оценивается сверху через выражение (10). Для доказательства противоположного неравенства заметим, что в силу представления (1.4.4)

$$\|GR(\lambda \pm i\varepsilon)f\| \leq \int_0^\infty \|GU(\pm t)f\| e^{-\varepsilon t} dt, \quad f \in \mathcal{D}(H).$$

Поэтому согласно неравенству Шварца

$$\|GR(\lambda \pm i\varepsilon)f\|^2 \leq (2\varepsilon)^{-1} \int_0^\infty \|GU(\pm t)f\|^2 dt.$$

Складывая оценки для знаков $+$ и $-$, найдем, что правая часть (10) не превосходит величины (1). Это доказывает равенство (10). •

Отметим еще, что класс H -гладких операторов инвариантен относительно умножения слева на ограниченные операторы. Это вытекает из любого из условий (1)–(5). Кроме того, в силу (5) этот класс инвариантен и относительно умножения справа на ограниченные операторы, коммутирующие с $E(\cdot)$.

Важно, что понятие H -гладкости формулируется как в нестационарных (1), так и в стационарных (2)–(5) терминах. В § 5 мы увидим, что первое из этих определений очень удобно для проверки существования ВО (2.1.1). Напротив, саму H -гладкость, как правило, приходится проверять в стационарных терминах.

2. Из определения (5) H -гладкости оператора G вытекает (см. неравенство (7)), что при любом ограниченном множестве X элементы $G_X^* f$ абсолютно непрерывны. Поэтому имеет место

Предложение 5. Если оператор G является H -гладким, то

$$\bigcup_{\Lambda} \overline{R(G_{\Lambda}^*)} \subset \mathcal{H}^{(a)}, \quad (12)$$

где объединение берется по всевозможным конечным интервалам Λ . В частности, при $N(G) = 0$ оператор H абсолютно непрерывен.

○ В пояснении нуждается лишь последнее утверждение. Поскольку $\overline{R(G_{\Lambda}^*)} \oplus N(G_{\Lambda}) = \mathcal{H}$, из (12) следует, что

$$\mathcal{H}^{(s)} \subset \bigcap_{\Lambda} N(G_{\Lambda}).$$

Если $GE(\Lambda)f = 0$ для любого ограниченного Λ , то при $N(G) = 0$ обязательно $f = 0$. Тем самым подпространство $\mathcal{H}^{(s)}$ тривиально. •

Гладкий относительно H оператор G априорно предполагается H -ограниченным. Это утверждение можно уточнить.

Предложение 6. Пусть оператор G является H -гладким. Тогда его относительная H -грань равна нулю, т.е. для любого $\varepsilon > 0$

$$\|Gg\|^2 \leq \varepsilon \|Hg\|^2 + C(\varepsilon) \|g\|^2, \quad g \in \mathcal{D}(H). \quad (13)$$

○ Соотношение (11) означает, что

$$\tau \|GR(\lambda \pm i\tau)f\|^2 \leq \pi\gamma^2 \|f\|^2.$$

Положим здесь $\lambda = 0$ и $g = R(\pm i\tau)f$. Тогда

$$\tau \|Gg\|^2 \leq \pi\gamma^2 (\|Hg\|^2 + \tau^2 \|g\|^2).$$

При $\tau = \pi\gamma^2 \varepsilon^{-1}$ (и $\tau \rightarrow \infty$) отсюда вытекает (13). •

З а м е ч а н и е 7. Априорное предположение об H -ограниченности G также можно снять. Достаточно считать, что оператор G задан только на множестве $\mathcal{E}$ (см. п. 4 § 1.5) финитных элементов. При этом определение (5) сохраняет смысл, а в определениях (1)—(3) надо супремумы брать по $f \in \mathcal{E}$. Как видно из доказательства в теореме 1 неравенства $\gamma_4 \leq \gamma_5$, конечность величины (5) уже обеспечивает H -ограниченность оператора G .

Согласно определению (2) вектор-функция $GR(z)f$ принадлежит в верхней и нижней полуплоскостях соответствующим классам Харди $H_{\pm}^2(\mathfrak{G})$. На вектор-функции обобщается (см. [20]) утверждение теоремы 1.2.2 о существовании у функций из класса $H_{\pm}^2$ радиальных (и угловых) предельных значений для п.в. λ . В векторном случае предельные значения существуют в сильном смысле, что устанавливается дублированием скалярных рассуждений. Положим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} GR(\lambda \pm i\varepsilon)f =: F^{(\pm)}(\lambda), \quad F^{(\pm)} = F_G^{(\pm)}, \quad (14)_{\pm}$$

и $F(\lambda) = (2\pi i)^{-1}(F^{(+)}(\lambda) - F^{(-)}(\lambda))$. Переходя на основании леммы Фату к пределу под знаком интеграла (3), найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|F(\lambda)\|^2 d\lambda \leq \gamma_H^2(G) \|f\|^2. \quad (15)$$

Существование сильных пределов (14) используется в §§ 7.3, 7.4 при обосновании формульных представлений §§ 2.7, 2.8 для ВО и матрицы рассеяния. В этой главе при выводе в § 5 принципа инвариантности нам достаточно существования при п.в. λ слабого предела:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G\delta(\lambda, \varepsilon)f = F(\lambda), \quad F = F_G. \quad (16)$$

Этот факт доказан в § 5.1 (см. лемму 6) без применения теорем о вектор-функциях. В силу (16)

$$\|F(\lambda)\| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|.$$

Поэтому для слабого предела также оправдывается неравенство (15).

Проиллюстрируем понятие относительной гладкости на примере оператора умножения H . В этом случае естественный класс H -гладких операторов образуется интегральными операторами.

Пример 8. Пусть Ω —какой-либо, возможно бесконечный, интервал вещественной оси; H —умножение на λ в $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$; G —интегральный оператор с ядром $G(\lambda, \mu)$, для которого

$$\sup_{\mu \in \Omega} \int_{\Omega} |G(\lambda, \mu)|^2 d\lambda =: b^2 < \infty. \quad (17)$$

Тогда оператор G является H -гладким, причем $\gamma_H(G) \leq b$.

О Применяя неравенство Шварца, найдем, что

$$\begin{aligned} \|GE(\Lambda)f\|^2 &= \int_{\Omega} d\lambda \left| \int_{\Omega} G(\lambda, \mu) \chi_{\Lambda}(\mu) f(\mu) d\mu \right|^2 \leq \\ &\leq \int_{\Omega} d\lambda \int_{\Lambda \cap \Omega} |G(\lambda, \mu)|^2 d\mu \int_{\Omega} |f(\nu)|^2 d\nu. \end{aligned}$$

По условию (17) эта величина не превосходит $|\lambda|b^2\|f\|^2$. Остается воспользоваться определением (5). •

H -гладкий оператор G может не допускать замыкания. В предыдущем примере такой оператор G получается, если считать, что $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ и $G(\lambda, \mu) = g(\lambda)$. При $g \in L_2(\mathbb{R})$ условие (17) будет выполнено. В то же время оператор G замыкания не допускает. В этом можно убедиться, рассматривая последовательность $f_n(\lambda) = n^{-1}f(n^{-1}\lambda)$, где $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ и $\int f(\lambda)d\lambda = a \neq 0$. Для нее $\|f_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но $Gf_n = ag$.

3. Предположение об H -гладкости оператора G накладывает слишком жесткие ограничения на оператор H . Так, при $N(G) = \{0\}$ оператор H должен быть абсолютно непрерывным. Существенно более гибким оказывается понятие локальной H -гладкости.

Определение 9. Оператор G называется H -гладким на борелевском множестве Λ , если оператор $GE(\Lambda)$ является H -гладким.

Сейчас априорная H -ограниченность оператора G не предполагается. Для корректного определения (на $\mathcal{D}(H)$) произведения $GE(\Lambda)$ достаточно считать, что $E(\Lambda)\mathcal{H} \cap \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(G)$. Ясно, что в условиях определения 9 оператор G оказывается

гладким на любом борелевском $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Далее, согласно предположению 5, при $N(G) = \{0\}$ спектр оператора H на множестве Λ абсолютно непрерывен. При практической проверке локальной H -гладкости удобна следующая

Теорема 10. Пусть G — H -ограничен и для борелевского множества Λ

$$\sup_{\lambda \in \Lambda, 0 < \varepsilon < 1} \|G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*\| < \infty. \quad (18)$$

Тогда оператор G является H -гладким на замыкании $\bar{\Lambda}$ множества Λ .

○ В силу непрерывности $GR(\lambda + i\varepsilon)$ по λ при $\varepsilon > 0$ неравенство (18) распространяется на все Λ , т.е.

$$\sup_{\lambda \in \bar{\Lambda}, 0 < \varepsilon < 1} \varepsilon^{1/2} \|GR(\lambda + i\varepsilon)\| < \infty. \quad (19)$$

Нам надо показать, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}, 0 < \varepsilon < 1} \varepsilon^{1/2} \|GE(\bar{\Lambda})R(\lambda + i\varepsilon)\| < \infty. \quad (20)$$

С учетом (19) в искомой оценке (20) можно считать, что $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \bar{\Lambda}$. Поскольку множество $\mathbb{R} \setminus \bar{\Lambda}$ открыто, каждая его точка λ попадает в некоторый составляющий интервал. Обозначим через λ' , $\lambda' \in \bar{\Lambda}$, его ближайший к λ конец. Тогда

$$\inf_{\mu \in \bar{\Lambda}} |\mu - \lambda| = |\lambda' - \lambda|. \quad (21)$$

Теперь согласно тождеству Гильберта можно написать оценку

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/2} \|GR(\lambda + i\varepsilon)E(\bar{\Lambda})\| &\leq \\ &\leq (\varepsilon^{1/2} \|GR(\lambda' + i\varepsilon)\|) \|[I + (\lambda - \lambda')R(\lambda + i\varepsilon)]E(\bar{\Lambda})\|. \end{aligned} \quad (22)$$

Коль скоро $\lambda' \in \bar{\Lambda}$, то первый сомножитель в правой части равномерно ограничен в силу (19). Остается учесть, что на основании (21)

$$\|R(\lambda + i\varepsilon)E(\bar{\Lambda})\| = \sup_{\mu \in \bar{\Lambda}} |\mu - \lambda - i\varepsilon|^{-1} \leq |\lambda' - \lambda|^{-1},$$

а потому второй сомножитель в (22) не превосходит 2.●

§ 4. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГЛАДКОСТИ

1. Укажем прежде всего достаточное условие гладкости «коммутаторного» типа. Это условие позволяет строить H -гладкие операторы, коль скоро найден такой вспомогательный антисимметричный оператор A , что коммутатор $[H, A]$ положителен. Приведем сразу более общее утверждение такого типа, в котором антисимметричность A не предполагается.

Теорема 1. Пусть H самосопряжен, оператор G ограничен относительно $|H|^{1+\vartheta}$, $\vartheta \geq 0$, Λ — какое-либо борелевское множество. Предположим, что для некоторого $|H|^\vartheta$ -ограниченного оператора A при всех $\lambda \in \Lambda$ и $f \in \mathcal{D}(|H|^{1+\vartheta})$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re}((H - \lambda)f, Af) \geq \|Gf\|^2. \quad (1)$$

Тогда оператор $G|H - i|^{-\vartheta} =: G_\vartheta$ является H -гладким на $\bar{\Lambda}$.

○ Из (1) вытекает оценка

$$\|Gf\|^2 \leq \|(H - \lambda)f\| \cdot \|Af\|, \quad \lambda \in \Lambda, \quad f \in \mathcal{D}(|H|^{1+\vartheta}).$$

Применим ее к элементу $f = |H - i|^{-\vartheta} R(\lambda + i\varepsilon)g$. Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon \|G_\vartheta R(\lambda + i\varepsilon)g\|^2 &\leq \|(H - \lambda)R(\lambda + i\varepsilon)\|(\varepsilon \|R(\lambda + i\varepsilon)\|) \|A|H - i|^{-\vartheta}\| \\ &\quad \times \| |H - i|^{-\vartheta} g \| \|g\|. \end{aligned} \quad (2)$$

По спектральной теореме оба зависящие от ε сомножителя в правой части не превосходят 1. Тем самым правая, а потому и левая части (2) при $\lambda \in \Lambda$ оцениваются через $C\|g\|^2$. Остается воспользоваться теоремой 3.10. •

Следствие 2. На любом ограниченном подмножестве Λ оператор G является H -гладким.

Отметим, что неравенство (1) достаточно проверять на каком-либо подмножестве пространства $\mathcal{D}(|H|^{1+\vartheta})$, плотном в этом пространстве по его метрике.

Замечание 3. Если оператор A антисимметричен, т.е. $A = i\tilde{A}$, где $\tilde{A} \subset \tilde{A}^*$, то в левой части (1) член $\lambda \operatorname{Re}(f, Af)$ пропадает и (1) принимает вид

$$i(\tilde{A}f, Hf) - i(Hf, \tilde{A}f) \geq \|Gf\|^2.$$

Это неравенство для коммутатора $i[H, \tilde{A}]$ гарантирует сразу глобальную гладкость оператора G_ϑ . Отказ от симметричности A позволяет получить условия локальной гладкости.

В конкретных случаях найти антисимметричный оператор A , для которого коммутатор $[H, A]$ строго положителен, обычно нелегко. Тем не менее предыдущие построения в определенном смысле обратимы. Именно, верно

Предложение 4. Пусть оператор G — H -гладкий. Тогда найдется такой ограниченный оператор $A = -A^*$, что

$$(Af, Hg) - (AHf, g) = (Gf, Gg) \quad (3)$$

для любых $f, g \in \mathcal{D}(H)$.

○ Построим два оператора $A = A_{\pm}$, удовлетворяющих (3). Определим их через полуторалинейные формы

$$a_{\pm}(f, g) = \mp i \int_0^{\infty} (GU(\pm t)f, GU(\pm t)g) dt. \quad (4)$$

В силу определения (3.1) H -гладкости оператора G при $f, g \in \mathcal{D}(H)$ интеграл (4) сходится и оценивается по неравенству Шварца через

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)f\|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)g\|^2 dt \right\}^{1/2} \leq 2\pi\gamma_H^2(G) \|f\| \|g\|.$$

Поэтому форме (4) отвечает ограниченный оператор $A_{\pm}$, такой, что $(A_{\pm}f, g) = a_{\pm}(f, g)$ при $f, g \in \mathcal{D}(H)$. Поскольку $\overline{a_{\pm}(f, g)} = -a_{\pm}(g, f)$, операторы $A_{\pm}$ антисимметричны. По определению (4)

$$(A_{\pm}U(\pm s)f, U(\pm s)g) = \mp i \int_s^{\infty} (GU(\pm t)f, GU(\pm t)g) dt.$$

Дифференцируя это равенство по s , найдем, что

$$\begin{aligned} & - (A_{\pm}U(\pm s)Hf, U(\pm s)g) + (A_{\pm}U(\pm s)f, U(\pm s)Hg) = \\ & = (GU(\pm s)f, GU(\pm s)g). \end{aligned}$$

При $s = 0$ отсюда вытекает (3). •

2. В приложениях иногда удобно формулировать достаточные условия H -гладкости в терминах диагонального для H разложения $\mathcal{H}$ в прямой интеграл. В связи с этим вводится понятие *усиленной H -гладкости*. Предположим, что на компактном интервале $\Lambda = [a, b]$ спектр оператора H абсолютно непрерывен и имеет постоянную (возможно, бесконечную) кратность k . Рассмотрим (см. § 1.5) унитарное отображение $\mathcal{F}$

пространства $E(\Lambda)\mathcal{H}$ на $L_2(\Lambda, \mathfrak{h})$, $\dim \mathfrak{h} = k$, при котором H переходит в оператор умножения: если $f \in E(\Lambda)\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}f = \tilde{f}$, то $(\mathcal{F}E(X)f)(\lambda) = \chi_{X \cap \Lambda}(\lambda) \tilde{f}(\lambda)$. Наряду с $L_2(\Lambda; \mathfrak{h})$, рассмотрим пространство $C^\alpha(\Lambda; \mathfrak{h})$, $\alpha > 0$, гельдеровски непрерывных на Λ вектор-функций со значениями в $\mathfrak{h}$. Норма в этом пространстве задается соотношением (1.11). Относительно оператора $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ предполагается, что $E(\Lambda)\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(G)$ и оператор $G_\Lambda = GE(\Lambda)$ ограничен.

Определение 5. Оператор G называется усиленно H -гладким (с показателем $\alpha \in (0, 1]$) на Λ , если оператор $\mathcal{F}G_\Lambda^*$ непрерывно отображает $\mathfrak{G}$ в $C^\alpha(\Lambda; \mathfrak{h})$, т.е. для $g = G_\Lambda^*f$ выполнены условия

$$|\tilde{g}(\lambda)|_{\mathfrak{h}} \leq C\|f\|_{\mathfrak{G}}, \quad |\tilde{g}(\lambda) - \tilde{g}(\mu)|_{\mathfrak{h}} \leq C|\lambda - \mu|^\alpha \|f\|_{\mathfrak{G}}, \quad (5)$$

где C не зависит ни от f , ни от $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Нужно иметь в виду, что приведенное определение не унитарно инвариантно, поскольку зависит от выбора отображения $\mathcal{F}$. Следующее утверждение объясняет введенный термин.

Лемма 6. Оператор, усиленно H -гладкий на каком-либо отрезке Λ , является там гладким по Като.

○ Согласно (1.5.3) для $g = G_\Lambda^*f$ и любого интервала X

$$\begin{aligned} \|E(X)G_\Lambda^*f\|^2 &= \|E(X \cap \Lambda)g\|^2 \leq \\ &= \int_{X \cap \Lambda} |\tilde{g}(\lambda)|^2 d\lambda \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} |\tilde{g}(\lambda)|^2 |X|. \end{aligned}$$

Тем самым при первом из условий (5) оператор G_Λ удовлетворяет неравенству (3.5). По определению 3.9 это и означает, что G — H -гладкий на Λ . •

В действительности, для усиленно H -гладких операторов справедливо более сильное утверждение, также формулируемое в унитарно инвариантных терминах. Как принято в § 1.9, полагаем $E(\Lambda)G^* = G_\Lambda^*$.

Теорема 7. Пусть операторы G_1 и G_2 —усиленно H -гладкие на Λ . Тогда операторная мера $G_1 E(\cdot) G_2^*$ слабо дифференцируема внутри Λ , а ее производная гельдеровски непрерывна на Λ по норме операторов в $\mathfrak{G}$. Если, кроме того, операторы G_j — H -ограничены, то оператор-функция $G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_2^*$ гельдеровски непрерывна по параметрам $\lambda \in (a, b)$ и $\varepsilon \geq 0$. При дополнительном предположении об $|H|^\theta$ -ограниченности операторов G_j , где

$\theta_j \in [0, 1]$ и $\theta_1 + \theta_2 = 1$, оператор-функция $G_1 R(z) G_2^*$ переменной z гельдеровски непрерывна по норме при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ вплоть до разреза по Λ (за исключением концов Λ).

○ Пусть операторы G_j , $j = 1, 2$, удовлетворяют определению 5 с показателем $\alpha > 0$. Тогда при любых $f_j \in \mathfrak{G}$ для элементов $g_j = G_{j,\Lambda}^* f_j$ функция

$$\mathcal{G}(\lambda) = \mathcal{G}(\lambda; f_1, f_2) = \langle \tilde{g}_1(\lambda), \tilde{g}_2(\lambda) \rangle$$

гельдеровски непрерывна на Λ и

$$|\mathcal{G}(\lambda) - \mathcal{G}(\mu)| \leq C |\lambda - \mu|^\alpha \|f_1\| \|f_2\|. \quad (6)$$

Поскольку

$$(E(X)g_1, g_2) = \int_X \mathcal{G}(\lambda) d\lambda, \quad X \subset \Lambda,$$

из (6) вытекает, что слабая производная $G_1 E(X) G_2^*$ существует и гельдеровски непрерывна по норме (с показателем $\alpha > 0$). В силу теоремы 1.2.6 отсюда в свою очередь следует, что и функция

$$(G_1 R(z) E(\Lambda) G_2^* f_2, f_1) = \int_{\Lambda} (\lambda - z)^{-1} \mathcal{G}(\lambda; f_1, f_2) d\lambda$$

гельдеровски непрерывна (равномерно по f_j и $\|f_j\| \leq 1$) по z при $a < \operatorname{Re} z < b$ вплоть до разреза по Λ . Для завершения рассмотрения оператор-функции $G_1 R(z) G_2^*$ надо еще заметить, что остающееся слагаемое $G_1 R(z) E(\mathbb{R} \setminus \Lambda) G_2^*$ голоморфно во всей полосе $a < \operatorname{Re} z < b$ из-за условий подчиненности операторов G_j . Аналогичным образом, для доказательства утверждения о $G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_2^*$ надо еще воспользоваться гладкостью $G_1 R(z) R(\bar{z}) E(\mathbb{R} \setminus \Lambda) G_2^*$ при $a < \operatorname{Re} z < b$. •

§ 5. ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРИ ГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

С помощью нестационарного определения (3.1) в теории гладких (по Като) возмущений существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ проверяется совсем элементарно. Ввиду симметрии налагаемых условий одновременно устанавливается существование и сопряженного ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$. Мы рассматриваем здесь

также локальные ВО. Кроме того, доказывается принцип инвариантности.

1. Пусть, как всегда, H_0 и H — самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$, а $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ — ограниченное отождествление. Предположим, что возмущение $V = HJ - JH_0$ представлено в виде (1.9.2), где операторы $G_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{G}$ и $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ ограничены относительно H_0 и H соответственно. При $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$, $f \in \mathcal{D}(H)$ существует производная

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(JU_0(t)f_0, U(t)f) &= -i(JH_0U_0(t)f_0, U(t)f) + i(JU_0(t)f_0, HU(t)f) \\ &= i(G_0U_0(t)f_0, GU(t)f). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что для оператора (2.1.2)

$$(W(t_2)f_0, f) - (W(t_1)f_0, f) = i \int_{t_1}^{t_2} (G_0U_0(s)f_0, GU(s)f) ds. \quad (1)$$

Теорема 1. Пусть справедливо соотношение (1.9.3), где операторы G_0 и G являются гладкими относительно операторов H_0 и H соответственно. Тогда существуют оба ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Применяя неравенство Шварца и учитывая определение (2.1) H -гладкости оператора G , оценим выражение (1) через

$$(2\pi)^{1/2} \gamma_H(G) \|f\| \left(\int_{t_1}^{t_2} \|G_0U_0(s)f_0\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Это дает оценку

$$\|W(t_2)f_0 - W(t_1)f_0\| \leq (2\pi)^{1/2} \gamma_H(G) \left(\int_{t_1}^{t_2} \|G_0U_0(s)f_0\|^2 ds \right)^{1/2}. \quad (2)$$

В силу H_0 -гладкости оператора G_0 последний интеграл стремится к нулю при $t_j \rightarrow \pm\infty$, $j = 1, 2$. Поэтому при $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$, а следовательно, и при любом $f_0 \in \mathcal{H}_0$ существует сильный предел вектор-функции $W(t)f_0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. •

Следствие 2. В условиях теоремы 1 существуют ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$. Кроме того, ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ будут J -полными (см. определение 3.2.3), а ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ — J^* -полными.

Ввиду симметрии условий теоремы 1 ее можно применить к паре H_0, H и отождествлению J^* . Это дает существование $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$. Утверждение о J (или J^*)-полноте ВО вытекает из теоремы 3.2.4. •

В частности, при $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ и $J = I$ в условиях теоремы 1 ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ и $W_{\pm}(H_0, H)$ полны в смысле определения 2.3.1, т.е. их образы совпадают с абсолютно непрерывными подпространствами операторов H и H_0 соответственно.

Замечание 3. Утверждение теоремы 1 сохраняет силу, если вместо (1.9.2) справедливо представление

$$V = \sum_{k=1}^r G_k^* G_{0,k}, \quad (3)$$

где все операторы $G_{0,k}: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{G}$ и $G_k: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ являются гладкими относительно H_0 и H соответственно. Этот случай сводится к рассмотренному переходом к новым операторам $G_0 f = (G_{0,1} f, \dots, G_{0,r} f)$, $G f = (G_1 f, \dots, G_r f)$, действующим из $\mathfrak{G}$ в «векторное» пространство $\mathfrak{G} \otimes \mathbb{C}^r$. Для них (3) записывается в стандартном виде: $V = G^* G_0$.

Замечание 4. При доказательстве теоремы 1 мы в полном объеме использовали лишь гладкость оператора G относительно H . Что касается пары G_0, H_0 , то для существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ достаточно сходимости интеграла

$$\int_0^{\infty} \|G_0 U_0(\pm t) f_0\|^2 dt$$

для какого-либо плотного в $\mathcal{H}_0$ (или хотя бы в $\mathcal{H}_0^{(a)}$) множества элементов f_0 .

Замечание 5. При доказательстве теоремы 1 не предполагалось, что $f_0 \in \mathcal{H}_0^{(a)}$. Поэтому в ее условиях существует сильный предел при $t \rightarrow \pm\infty$ оператор-функции $W(t)$ (без проектора P_0 справа). Это находится в согласии с предложением 3.5, которое утверждает абсолютную непрерывность H_0 при дополнительном предположении $N(G_0) = \{0\}$. Аналогичным образом сильный предел $W^*(t)$ существует без проектора P справа. Тем

самым при $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ и $J = I$ ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ не только полны, но и унитарны.

В реальной обстановке ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ обычно не унитарны. Поэтому утверждение теоремы 1 является «слишком сильным», а его условия редко выполняются. В связи с этим заметим еще, что при $H_0\psi = \lambda\psi$ в условиях теоремы 1 должно быть $HJ\psi = \lambda J\psi$. Такая инвариантность дискретного спектра, конечно, маловероятна. Поэтому практически условия теоремы 1 требуют, чтобы оба оператора H_0 и H были абсолютно непрерывными.

2. От отмеченного «недостатка» свободна теория рассеяния для возмущений, гладких лишь локально. Равенство (1.9.3), придающее точный смысл (1.9.2), будем сейчас рассматривать лишь на множествах $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}$ финитных элементов f_0 и f . При этом предполагается, что $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{D}(G_0)$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(G)$. Для локально гладких возмущений справедлив аналог теоремы 1. В нем рассматриваются локальные ВО, определяемые соотношением (2.2.5).

Теорема 6. Пусть возмущение $V = HJ - JH_0$ представимо в виде G^*G_0 , где операторы G_0 и G являются гладкими на некотором интервале Λ относительно операторов H_0 и H соответственно. Пусть, кроме того, оператор G — H -ограничен. Тогда существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$.

○ Поскольку операторы $G_0E_0(\Lambda)$ и $GE(\Lambda)$ — гладкие соответственно относительно H_0 и H , то существование предела

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} E(\Lambda)U(-t)JU_0(t)E_0(\Lambda) \quad (4)$$

проверяется вполне аналогично доказательству теоремы 1. Тем более существует предел выражения вида (4) с дополнительным множителем P_0 справа. Поэтому для доказательства теоремы нужно лишь убедиться в том, что

$$\text{s-lim}_{|t| \rightarrow \infty} E(\Lambda')JU_0(t)E_0(\Lambda)P_0 = 0, \quad \Lambda' = \mathbb{R} \setminus \Lambda. \quad (5)$$

Соотношение (5) достаточно проверять на каком-либо плотном в $E_0(\Lambda)\mathcal{H}_0^{(a)}$ множестве. Следовательно, оператор $E_0(\Lambda)$ в (5) можно заменить на $E_0(\Lambda_0)$, где Λ_0 — произвольный ограниченный и строго внутренний для Λ подынтервал.

Пусть простой замкнутый контур Γ охватывает Λ_0 , не пересекает Λ' и обходится против часовой стрелки. В силу формулы (1.4.8), примененной к резольвенте оператора $H_0E_0(\Lambda_0)$ в

пространстве $E_0(\Lambda_0)\mathcal{H}_0$,

$$2\pi i E_0(\Lambda_0) = - \oint_{\Gamma} R_0(z) E_0(\Lambda_0) dz.$$

Кроме того, применим (1.4.8) к резольвенте оператора $HE(\Lambda')$ в $E(\Lambda')\mathcal{H}$. Поскольку Λ' лежит вне Γ , то

$$\oint_{\Gamma} E(\Lambda') R(z) dz = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$2\pi i E(\Lambda') J E_0(\Lambda_0) = \oint_{\Gamma} E(\Lambda') [R(z) J - J R_0(z)] E_0(\Lambda_0) dz. \quad (6)$$

Ввиду резольвентного тождества (1.9.4) при $z \in \Gamma$

$$E(\Lambda') [R(z) J - J R_0(z)] E_0(\Lambda_0) = -(GR(\bar{z})E(\Lambda'))^* G_0 R_0(z) E_0(\Lambda_0),$$

где оператор $GR(\bar{z})E(\Lambda')$ ограничен.

Согласно (6) для доказательства соотношения (5) остается проверить, что вектор-функция

$$\varphi(t) = G_0 R_0(z) U_0(t) E_0(\Lambda_0) f, \quad z \in \Gamma,$$

(сильно) стремится к нулю при $|t| \rightarrow \infty$. По определению (3.1) H_0 -гладкости оператора $G_0 E_0(\Lambda_0)$ функция $\|\varphi(t)\|^2$ интегрируема по t . Кроме того, $\|\varphi'(t)\| \leq C < \infty$ при ограниченном Λ_0 . Отсюда следует искомое соотношение $\|\varphi(t)\| = 0(1)$, $|t| \rightarrow \infty$. Действительно, пусть, напротив, существует последовательность $t_n \rightarrow \infty$, такая, что $\|\varphi(t_n)\| \geq c > 0$. В силу равномерной ограниченности $\varphi'(t)$ найдется такое (не зависящее от n) число $\tau > 0$, что $\|\varphi(t)\| \geq c/2$ при $t \in (t_n - \tau, t_n + \tau)$. Это противоречит интегрируемости $\|\varphi(t)\|^2$. •

Понятие локальной гладкости полезно и для доказательства существования ВО «в целом». Именно, из теоремы 6 вытекает

Следствие 7. Предположим, что справедливо представление (1.9.3), где оператор G_0 — H_0 -ограничен, а G — H -ограничен. Пусть $\{\Lambda_n\}$ —набор интервалов, объединение которых исчерпывает сердцевину спектров операторов H_0 и H (с точностью до множества нулевой лебеговой меры). Если на каждом из интервалов Λ_n оператор G_0 — H_0 -гладкий, а G — H -гладкий, то существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$.

Подчеркнем, что в условиях следствия 7 операторы H_0 и H могут иметь нетривиальные сингулярные спектры. В частности, собственные значения операторов H_0 и H могут не совпадать.

3. В теории гладких возмущений имеет место принцип инвариантности (ПИ)—см. § 2.6. Пусть функция φ допустима (в смысле определения 2.6.2) на открытом множестве Ω по отношению к самосопряженным операторам H_0 и H . Положим $\Omega_{\pm} = \{\lambda \in \Omega: \pm \varphi'(\lambda) > 0\}$. Для оправдания ПИ нам понадобится

Лемма 8. Пусть интервал $\Lambda \subset \Omega_{\nu}$, $\nu = \pm$, оператор G —гладкий относительно самосопряженного оператора H и $f \in E(\Lambda)\mathcal{H} \cap \mathcal{D}(H)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\nu\infty} \int_0^{\infty} \|G \exp(\mp isH - it\varphi(H))f\|^2 ds = 0. \quad (7)$$

○ Пусть $\{\omega_k\}$ —какой-либо ортонормированный базис в $\mathfrak{G}$, $G_1 = G(H+i)^{-1}$, $f_1 = (H+i)f$. Тогда

$$\begin{aligned} & \|G \exp(\mp isH - it\varphi(H))f\|^2 = \\ &= \sum_k |(\exp(\mp isH - it\varphi(H))f_1, G_1^* \omega_k)|^2 = \\ &= \sum_k \left| \int_{\Lambda} \exp(\mp is\lambda - it\varphi(\lambda)) \frac{d(E(\lambda)f_1, G_1^* \omega_k)}{d\lambda} d\lambda \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано, что при $f \in E(\Lambda)\mathcal{H}$ интегрирование можно ограничить на Λ , а в силу предложения 3.5 функция $(E(\lambda)f_1, G_1^* \omega_k)$ абсолютно непрерывна. Из равенств (1.4.11) и (3.16) вытекает, что $d(E(\lambda)f_1, G_1^* \omega_k)/d\lambda = (F(\lambda), \omega_k)$, а потому интеграл в (7) равен

$$\sum_k \int_0^{\infty} ds \left| \int_{\Lambda} \exp[\mp is\lambda - it\varphi(\lambda)] (F(\lambda), \omega_k) d\lambda \right|^2. \quad (8)$$

В силу леммы 2.6.4 каждый член ряда по k стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\nu\infty$. В то же время согласно равенству Парсеваля

и оценке (3.15) ряд (8) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$2\pi \sum_k \int_{\Lambda} |(F(\lambda), \omega_k)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{\Lambda} \|F(\lambda)\|^2 d\lambda < \infty.$$

Поэтому по теореме Лебега вся сумма (8) стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\nu\infty$. •

Для гладких возмущений ПИ формулируется следующим образом:

Теорема 9. В условиях теоремы 1 для пары $h_0 = \varphi(H_0)$, $h = \varphi(H)$ существуют $W_{\pm}(h, h_0; J)$ и выполнено равенство (2.6.11).

○ Пусть Λ — один из составляющих интервалов Ω . Принимая во внимание лемму 2.6.3, достаточно проверить, что

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\nu\infty} (W_{\pm}(H, H_0; J) - J) \exp(-ith_0) E_0(\Lambda) = 0, \quad \Lambda \subset \Omega_{\nu}.$$

В силу равенства (1) для этого, в свою очередь, достаточно установить оценку

$$\left| \int_0^{\infty} (G_0 U_0(\pm s) \exp(-ith_0) f_0, GU(\pm s) f) ds \right| \leq \varepsilon(t) \|f\|, \quad f \in \mathcal{D}(H), \quad (9)$$

где $f_0 \in E_0(\Lambda) \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{D}(H_0)$, а $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при стремлении t к соответствующей бесконечности. Применяя неравенство Шварца и учитывая определение (3.1) H -гладкости оператора G , оценим (ср. с (2)) левую часть (9) через

$$(2\pi)^{1/2} \gamma_H(G) \|f\| \left(\int_0^{\infty} \|G_0 U_0(\pm s) \exp(-ith_0) f_0\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

По лемме 8 этот интеграл стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\nu\infty$. Это завершает проверку (9). •

Совершенно аналогично проверяется, что в условиях «локальной» теоремы 6 существуют

$$\begin{aligned} \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} E(\Lambda) \exp(ith) J \exp(-ith_0) E_0^{(a)}(\Lambda) = \\ = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь функция φ допустима на интервале Λ и каким-либо ограниченным образом продолжена на $\mathbb{R} \setminus \Lambda$. Проектор $E(\Lambda)$ в левой

части (10) можно снять, например, в случае компактности оператора $J^*J - I$ (и, в частности, при $J = I$). Это вытекает из стандартной (ср. с доказательством теоремы 2.2.1) выкладки

$$\begin{aligned} & \|u(-t)Ju_0(t)f_0 - W_{\pm}f_0\|^2 = \\ & = \|Ju_0(t)f_0\|^2 - 2\operatorname{Re}(E(\Lambda)u(-t)Ju_0(t)f_0, W_{\pm}f_0) + \|W_{\pm}f_0\|^2 = \\ & = \|Ju_0(t)f_0\|^2 - \|W_{\pm}f_0\|^2 + o(1). \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь $f_0 \in E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$, $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$, $u_0(t) = \exp(-it\varphi(H_0))$, $u(t) = \exp(-it\varphi(H))$. В (11) использовано существование в (10) только слабого предела. В силу леммы 1.4.1 при $(J^*J - I)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_{\infty}$ первое слагаемое в правой части (11) стремится к $\|f_0\|^2$, а $\|W_{\pm}f_0\| = \|f_0\|$. Поэтому (10) выполняется и без проектора $E(\Lambda)$ слева.

§ 6. ГЛАДКОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОЛНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

В приложениях, как правило, непосредственно удается проверить гладкость лишь относительно «невозмущенного» оператора H_0 . Это затрудняет использование результатов предыдущего параграфа. Здесь мы изложим стационарный метод проверки H -гладкости, основанный по существу на теории возмущений. Этот метод позволяет свести доказательство существования и полноты ВО к проверке некоторых свойств возмущения по отношению к одному оператору H_0 . В связи с этим теперь несколько меняется идеология изложения. Полный гамильтониан H уже не считается заданным заранее, а его корректное определение как самосопряженного оператора является следствием предположений о возмущении. Мы ограничиваемся рассмотрением случая $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$. Обобщение на случай пары пространств возможно, но требует обратимости J .

Исследование относительно компактных возмущений V предвзвешивается изучением существенно более простого случая малых операторов V . Рассмотрения в этом параграфе носят локальный характер. Это позволяет найти и условие существования, и условие полноты ВО «в целом».

1. Пусть H_0 — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а возмущение $V = G^*G_0$ удовлетворяет условиям (1.9.6) (при каких-либо $\theta_0 \in [1/2, 1]$ и $\theta = 1 - \theta_0$) и (1.9.7).

При дополнительных предположениях, требуемых далее, для $\text{Im } z \neq 0$ существуют операторы (1.9.18). Поэтому по теореме 1.10.3 существует (и, конечно, единственен) самосопряженный оператор H , отвечающий сумме $H_0 + V$ в смысле определения 1.9.2. Для резольвенты $R(z)$ этого оператора справедливо соотношение (1.9.8), так что оператор G заведомо будет H -ограниченным и, кроме того, произведение $GR(z)G^*$ корректно определено.

Исследование $R(z)$ основано на резольвентном тождестве (1.9.13), из которого вытекает нужное нам соотношение

$$GR(z)G^* = GR_0(z)G^* - (GR(z)G^*)(G_0R_0(z)G^*), \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (1)$$

Положим

$$B_0(z) = -G_0R_0(z)G^*, \quad B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^*, \quad B(z) = GR(z)G^*. \quad (2)$$

Тогда (1) можно рассматривать как уравнение для оператора $B(z)$. Решая это уравнение, найдем, что

$$B(z) = B^{(0)}(z)[I - B_0(z)]^{-1}, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad (3)$$

причем обратный оператор здесь существует по теореме 1.9.5.

При построении теории рассеяния для пары H_0, H мы считаем в этом параграфе, что $J = I$, но рассматриваем локальные ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$, связанные с произвольным интервалом $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Напомним (см. п.3 § 2.3), что при $J = I$ полнота ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ эквивалентна существованию «обратного» ВО $W_{\pm}(H_0, H; \Lambda)$. Поэтому из устанавливаемого далее существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ и $W_{\pm}(H_0, H; \Lambda)$ следует полнота всех этих ВО. Существование ВО достаточно проверять на системе интервалов Λ_n , объединение которых исчерпывает Λ с точностью до множества нулевой меры.

Рассмотрим сначала случай малых возмущений.

Теорема 1. Пусть

- 1) оператор G_0 является H_0 -гладким на Λ ,
- 2) оператор-функция $GR_0(z)G^*$ равномерно ограничена при $\text{Re } z \in \Lambda, \text{Im } z \neq 0$,
- 3) справедливо неравенство

$$\sup_{\text{Re } z \in \Lambda} \|G_0R_0(z)G^*\| < 1. \quad (4)$$

Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ существуют и полны.

○ Отметим прежде всего, что условие (4) гарантирует существование операторов (1.9.18) при всех z с $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Поэтому оператор H корректно определен, и для соответствующего (см. (2)) оператора $B(z)$ справедливо соотношение (3). По условиям 2), 3) оба сомножителя в правой части (3) равномерно ограничены при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$. Таким образом, оператор $B(z)$ также ограничен вплоть до Λ , и, следовательно, согласно теореме 3.10 оператор G оказывается H -гладким на Λ . Вспоминая еще условие 1), в силу теоремы 5.6 получим, что существуют все четыре ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ и $W_{\pm}(H_0, H; \Lambda)$. •

Для относительно компактных возмущений верна

Теорема 2. Пусть

- 1) оператор G_0 является H_0 -гладким на Λ ,
- 2) голоморфные при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, оператор-функции $G_0 R_0(z) G^*$ и $G R_0(z) G^*$ непрерывны по норме вплоть до «разреза» по Λ ,
- 3) $(G_0 R_0(z) G^*)^p \in \mathfrak{S}_{\infty}$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ и каком-либо натуральном p . Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ существуют и полны.

○ В силу леммы 1.10.5 и следствия к ней гамильтониан H корректно определен, а при $\operatorname{Im} z \neq 0$ существует $(I - B_0(z))^{-1}$ и для операторов (2) выполняется соотношение (3). Для проверки H -гладкости оператора G применим теорему 1.8.3 к оператор-функции $I - B_0(z)$. По этой теореме для некоторой системы интервалов Ω_n , такой, что

$$|\Lambda \setminus \tilde{\Lambda}| = 0, \quad \tilde{\Lambda} = \bigcup_n \Lambda_n, \quad (5)$$

оператор-функция $(I - B_0(z))^{-1}$ непрерывна по z (при $\operatorname{Im} z \geq 0$ и $\operatorname{Im} z \leq 0$) вплоть до «разрезов» Λ_n . Согласно (3) то же верно и для $B(z)$, так что оператор G является H -гладким на Ω_n . Пользуясь еще условием 1), по теореме 5.6 получим, что существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda_n)$ и $W_{\pm}(H_0, H; \Lambda_n)$. Ввиду (5) отсюда вытекает существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ и $W_{\pm}(H_0, H; \Lambda)$. •

Замечание 3. Условие 3) этой теоремы можно заменить предположением о существовании операторов $(I - B_0(z_{\pm}))^{-1}$ для двух точек $z_{\pm} \in \rho(H_0)$, $\pm \operatorname{Im} z_{\pm} \geq 0$, и о компактности разности

$$B_0(z) - B_0(z') = (z' - z) G_0 R_0(z) R_0(z') G^* \quad (6)$$

для любых $z, z' \in \rho(H_0)$.

○ Согласно теореме 1.10.3 при первом из этих предположений существует самосопряженный гамильтониан H , удовле-

творяющий определению 1.9.2. Кроме того, согласно теореме 1.9.5 оператор-функция $I - B_0(z)$ обратима при всех z с $\text{Im } z \neq 0$. В силу компактности оператора (6) при рассмотрении этой оператор-функции в полуплоскости $\pm \text{Im } z \geq 0$ теорему 1.8.3 можно применить к первому сомножителю в произведении

$$I - B_0(z) = [I - (B_0(z) - B_0(z_{\pm}))(I - B_0(z_{\pm}))^{-1}][I - B_0(z_{\pm})].$$

Поэтому оператор-функция $(I - B_0(z))^{-1}$ по-прежнему непрерывна по z , $\text{Re } z \in \Lambda_n$, сверху и снизу вплоть до разрезов по Λ_n . Как и при доказательстве теоремы 2, отсюда вытекает существование операторов $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ и $W_{\pm}(H_0, H; \Lambda)$. •

2. Теореме 2 (и теореме 1) можно придать еще более эффективный характер, используя понятие усиленной H_0 -гладкости (см. п.2 § 4). Именно, ее сочетание с теоремой 4.7 сразу приводит к следующему результату:

Теорема 4. *Предположим, что оператор H_0 имеет на интервале Λ лишь абсолютно непрерывный спектр постоянной кратности. Пусть операторы G_0 и G — усиленно H_0 -гладкие (с какими-либо показателями $\alpha_0 > 0$ и $\alpha > 0$) на любом компактном подынтервале Λ , а оператор $(G_0 R_0(z) G^*)^l$ компактен при $\text{Im } z \neq 0$ и каком-либо натуральном l . Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ существуют и полны.*

Напомним, что в соответствии с принятым в начале параграфа соглашением здесь предполагается и выполнение условий (1.9.6) и (1.9.7). Предположение о компактности оператора $(G_0 R_0(z) G^*)^l$ можно по-прежнему заменить условиями, сформулированными в замечании 3.

Из теоремы 4 вытекают условия существования и полноты ВО «в целом».

Теорема 5. *Пусть операторы G_0 и G являются усиленно H_0 -гладкими на такой системе компактных интервалов Λ_n , что*

$$\left| \sigma(H_0) \setminus \bigcup_n \Lambda_n \right| = 0. \quad (7)$$

Предположим опять, что оператор $(G_0 R_0(z) G^*)^l$ компактен при $\text{Im } z \neq 0$ и каком-либо натуральном l . Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны.

○ По теореме 4 для объединения Λ интервалов Λ_n существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; \tilde{\Lambda})$ и $W_{\pm}(H_0, H; \tilde{\Lambda})$. Поэтому достаточно проверить, что

$$E_0(\tilde{\Lambda})\mathcal{H}_0^{(a)} = \mathcal{H}_0^{(a)}, \quad E(\tilde{\Lambda})\mathcal{H}^{(a)} = \mathcal{H}^{(a)}.$$

Первое из этих равенств прямо вытекает из условия (7). Для доказательства второго надо еще дополнительно заметить, что $\sigma^{(ess)}(H) = \sigma^{(ess)}(H_0)$ в силу теоремы 1.10.7. Поскольку $\sigma^{(a)}(H) \subset \sigma^{(ess)}(H)$, отсюда следует, что $|\sigma^{(a)}(H) \setminus \tilde{\Lambda}| = 0$. •

Как выяснено в п. 3 предыдущего параграфа, в условиях теорем 1—5 справедлив ПИ. Кроме того, в §§ 7.3 и 7.4 будет установлено, что в этих предположениях выполняются все стационарные представления §§ 2.7 и 2.8. Там же обсуждаются свойства матрицы рассеяния.

§ 7. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЙ И ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТРЫ ОПЕРАТОРА H

В этом параграфе приводятся достаточные условия отсутствия в спектре полного гамильтониана сингулярной непрерывной компоненты. Те же условия дают жесткие ограничения на структуру точечного спектра.

1. Совсем просто решается вопрос о характере спектра для малых возмущений.

Теорема 1. Пусть выполнены условия теоремы 6.1 и $N(G) = \{0\}$. Тогда спектр оператора H на Λ абсолютно непрерывен.

○ При доказательстве теоремы 6.1 показано, что оператор G является H -гладким на Λ . Поэтому нужно лишь воспользоваться предложением 3.5. •

При относительно компактных возмущениях появление сингулярной компоненты не исключается. Тем не менее совершенно аналогично теореме 1 устанавливается

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 6.2, а оператор $B_0(z)$ определяется равенством (6.2). Обозначим через $\mathcal{N}$ множество тех $\lambda \in \Lambda$, для которых хотя бы одно из уравнений

$$f = B_0(\lambda \pm i0)f \tag{1}_{\pm}$$

имеет нетривиальное решение. Тогда множество $\mathcal{N}$ замкнуто и имеет нулевую лебегову меру. При дополнительном условии $N(G) = \{0\}$ спектр оператора H на множестве $\Lambda_0 = \Lambda \setminus \mathcal{N}$ абсолютно непрерывен.

Выделим еще полученные в предыдущем параграфе сведения об оператор-функции $B(z) = GR(z)G^*$.

Теорема 3. В условиях теоремы 6.2 оператор-функция $B(z)$ непрерывна по норме вплоть до разреза по Λ , за исключением точек из множества $\mathcal{N}$. В условиях теоремы 6.4 это утверждение сохраняет силу с заменой обычной непрерывности на гельдеровскую—с показателем $\min\{\alpha_0, \alpha\}$.

2. При дальнейшем исследовании особого множества $\mathcal{N}$ нам понадобится утверждение, в определенном смысле обратное теореме 4.7.

Лемма 4. Пусть операторы $G_j: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathfrak{G}$, $j = 1, 2$, ограничены относительно операторов $|H_0|^{\theta_j}$, где $\theta_j \in [0, 1]$ и $\theta_1 + \theta_2 \leq 1$, а оператор-функция $G_1 R_0(z) G_2^*$ непрерывна по норме при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\pm \operatorname{Im} z \geq 0$. Тогда при любых $f_1, f_2 \in \mathfrak{G}$ мера $(G_1 E_0(\cdot) G_2^* f_2, f_1)$ непрерывно дифференцируема и справедливо равенство

$$2\pi i \frac{d(G_1 E_0(\lambda) G_2^* f_2, f_1)}{d\lambda} = \lim_{z \rightarrow \lambda + i0} (G_1 [R_0(z) - R_0(\bar{z})] G_2^* f_2, f_1). \quad (2)$$

○ Пусть X —произвольный ограниченный подынтервал Λ , $\tilde{G}_j = G_j(|H_0| + I)^{-\theta_j} \in \mathfrak{B}$, а $\vartheta = \theta_1 = \theta_2$. В правой части равенства

$$(G_1 R_0(z) G_2^* f_2, f_1) = (\tilde{G}_1 (|H_0| + 1)^{\vartheta} E_0(\mathbb{R} \setminus X) R_0(z) \tilde{G}_2^* f_2, f_1) + (G_{1,X} R_0(z) G_{2,X}^* f_2, f_1), \quad G_{j,X} = G_j E_0(X), \quad (3)$$

очевидно, что первое слагаемое аналитично по z в полосе $\operatorname{Re} z \in X$. Из условий леммы следует, что второе слагаемое в правой части (3) непрерывно при приближении z к разрезу по X . Поэтому из формулы Стоуна (1.4.7) вытекает, что для любого интервала $(\lambda_0, \lambda_1) \subset X$

$$(G_{1,X} E_0((\lambda_0, \lambda_1)) G_{2,X}^* f_2, f_1) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (G_{1,X} \delta(\mu + i\epsilon) G_{2,X}^* f_2, f_1) d\mu.$$

Это означает, что функция в левой части непрерывно дифференцируема по λ и ее производная равна подынтегральной

функции в правой части. Получившееся равенство эквивалентно (2). •

Теперь множество $\mathcal{N}$ можно рассмотреть по схеме, изложенной в § 1. Установим прежде всего аналог леммы 1.3.

Лемма 5. Пусть оператор-функция $G_0 R_0(z) G^*$ и $GR_0(z) G^*$ непрерывны по норме в полуполосах $\operatorname{Re} z \in \Lambda$, $\pm \operatorname{Im} z \geq 0$, а элемент f удовлетворяет какому-либо из уравнений $(1)_+$ или $(1)_-$. Тогда производная меры $(GE_0(\cdot) G^* f, f)$ равна нулю в точке λ :

$$\frac{d(GE_0(\lambda) G^* f, f)}{d\lambda} = 0. \quad (4)$$

○ Непрерывная дифференцируемость меры $(GE_0(\cdot) G^* f, f)$ следует из леммы 4. Далее, в силу уравнения $(1)_\pm$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f + G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon) G^* f, GR_0(\lambda \pm i\varepsilon) G^* f) = 0.$$

Возьмем мнимую часть этого равенства и учтем равенство симметрии (1.9.7). Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\delta_0(\lambda, \varepsilon) G^* f, G^* f) = 0.$$

Ввиду (2) отсюда вытекает искомое равенство (4). •

Лемма 6. Пусть в дополнение к условиям леммы 5 оператор-функция $G_0 E_0(\cdot) G_0^*$ непрерывно дифференцируема (в слабом смысле) по $\lambda \in \Lambda$. Тогда оба уравнения $(1)_\pm$ имеют решения одновременно, и эти решения совпадают.

○ Нужно показать, что при условии (4) $B_0(\lambda + i0)f = B_0(\lambda - i0)f$. В силу непрерывности $B_0(z)$ по z достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (G_0 \delta_0(\lambda, \varepsilon) G^* f, g) = 0 \quad (5)$$

для любого $g \in \mathfrak{G}$. Из (1.3.9), (1.4.11) вытекает, что квадрат модуля левой части в (5) оценивается через величину

$$\frac{d(GE_0(\mu) G^* f, f)}{d\mu} \frac{d(G_0 E_0(\mu) G_0^* g, g)}{d\mu}$$

в точке $\mu = \lambda$. Первый сомножитель здесь непрерывен по $\mu \in \Lambda$ в силу леммы 4, а второй — по условию. Кроме того, согласно лемме 5 первый сомножитель равен нулю при $\mu = \lambda$. Это доказывает равенство (5).

Установим еще независимость множества $\mathcal{N}$ от выбора факторизации $V = G^* G_0$.

Лемма 7. Пусть $V = G^*G_0 = \tilde{G}^*\tilde{G}_0$. Предположим, что оператор-функции $B_0(z) = -G_0R_0(z)G^*$, $\tilde{B}_0(z) = -\tilde{G}_0R_0(z)\tilde{G}^*$, а также $G_0R_0(z)\tilde{G}^*$ и $\tilde{G}_0R_0(z)G^*$ непрерывны по норме вплоть до разреза по Λ . Тогда отвечающие B_0 и $\tilde{B}_0$ множества $\mathcal{N}$ и $\tilde{\mathcal{N}}$ совпадают между собой.

○ Решения уравнений $f = B_0(\lambda + i0)f$ и $f = \tilde{B}_0(\lambda + i0)\tilde{f}$ связаны равенствами

$$\tilde{f} = \tilde{G}_0R_0(\lambda + i0)G^*f, \quad f = G_0R_0(\lambda + i0)\tilde{G}^*\tilde{f}.$$

Это вытекает из тождества

$$[I + \tilde{B}_0(\lambda + i0)]\tilde{G}_0R_0(\lambda + i0)G^* = \tilde{G}_0R_0(\lambda + i0)G^*[I + B_0(\lambda + i0)]$$

и аналогичного соотношения, в котором B_0 и $\tilde{B}_0$ меняются ролями. •

3. Следующее утверждение вполне аналогично лемме 1.4. Его можно также рассматривать как распространение предложения 1.9.6 на случай собственных значений, лежащих на непрерывном спектре. Связь решений f уравнения $(1)_{\pm}$ и собственных функций ψ оператора H устанавливается опять равенствами вида (1.10.8). Сейчас нам придется считать, что показатель α в определении 4.5 усиленной H_0 -гладкости оператора G больше $1/2$. До некоторой степени это условие играет роль предположения о гельдеровости с показателем больше $1/2$ ядра $v(\lambda, \mu)$ в модели Фридрихса—Фаддеева.

Лемма 8. Пусть выполнены условия теоремы 6.4 и $\alpha > 1/2$. Тогда $\mathcal{N} = \sigma^{(p)}(H) \cap \Lambda$. При этом кратности собственного числа $\lambda \in \Lambda$ оператора H и собственного числа l оператора $B(\lambda \pm i0)$ совпадают.

○ Обозначим через $\mathcal{F}_0$ унитарное отображение $E_0(\Lambda)\mathcal{H}$ на $L_2(\Lambda; \mathfrak{h})$. Пусть $f \neq 0$ удовлетворяет уравнению $(1)_{\pm}$, X — компактный подынтервал Λ , $\lambda \in X$, а $g = (GE_0(X))^*f$. Тогда $\tilde{g} = \mathcal{F}_0g \in C^\alpha(X; \mathfrak{h})$ по определению усиленной H_0 -гладкости оператора G на X и $\tilde{g}(\lambda) = 0$ в силу леммы 5. При $\alpha > 1/2$ отсюда следует, что вектор-функция $(\mu - \lambda)^{-1}\tilde{g}(\mu)$ переменной μ принадлежит пространству $L_2(X; \mathfrak{h})$, а потому $\psi = R_0(\lambda \pm i0)G^*f \in \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$. Составим скалярное произведение уравнения $(1)_{\pm}$ с элементом Gh , где h — произвольный элемент из $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$. Тогда по определению ψ

$$(f, Gh) + (G_0\psi, Gh) = 0, \quad (6)$$

причем

$$(f, Gh) = (H_0^{\theta_0} \psi, |H_0|^{\theta} h) - \lambda(\psi, h).$$

Теперь в силу соотношения (1.9.10) равенство (6) можно переписать в виде $(\psi, (H - \lambda)h) = 0$. Для самосопряженного оператора H отсюда вытекает, что $\psi \in \mathcal{D}(H)$ и $H\psi = \lambda\psi$. Кроме того, $\psi \neq 0$, так как согласно (1) $_{\pm}$ $f = -G_0\psi$. Это доказывает включение $\mathcal{N} \subset \sigma^{(p)}(H) \cap \Lambda$.

Обратно, пусть $H\psi = \lambda\psi$, где $\lambda \in \Lambda$ и $\psi \in \mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(|H_0|^{\theta_0})$. Положим $f = -G_0\psi \in \mathcal{H}$ и при произвольном $h \in \mathcal{H}$ составим скалярное произведение уравнения $H\psi = \lambda\psi$ с элементом $R_0(\lambda \mp i\varepsilon)G_0^*h$. Тогда

$$(G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon)(H_0 - \lambda)\psi, h) = (G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon)G^*f, h). \quad (7)$$

Из усиленной H_0 -гладкости оператора G_0 легко извлечь, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon(G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon)\psi, h) = 0.$$

Поэтому при всех $\varepsilon \rightarrow 0$ левая часть (7) стремится к $(G_0\psi, h)$. Правая часть стремится к $-(B_0(\lambda \pm i0)f, h)$, так как оператор $B_0(z) = -G_0 R_0(z)G^*$ непрерывен по норме при приближении z к разрезу по Λ . Таким образом, из (7) вытекает, что $(f, h) = (B_0(\lambda \pm i0)f, h)$, т.е. f удовлетворяет обоим уравнениям (1) $_{\pm}$. Элемент $f \neq 0$, так как в противном случае $(H_0 - \lambda)\psi = 0$ и, следовательно, $\psi = 0$. Это завершает проверку включения $\sigma^{(p)}(H) \cap \Lambda \subset \mathcal{N}$. Проведенное рассуждение устанавливает и совпадение кратностей собственных чисел операторов H и $B_0(\lambda \pm i0)$. •

Комбинируя это утверждение с теоремой 2, найдем, что верна

Теорема 9. Пусть выполнены условие теоремы 6.4, $N(G) = 0$ и $\alpha > 1/2$. Тогда на интервале Λ оператор H не имеет сингулярного непрерывного спектра.

Отметим, что в лемме 8 условие $\alpha > 1/2$ использовалось лишь при проверке включения $\mathcal{N} \subset \sigma^{(p)}(H) \cap \Lambda$, которое и нужно для доказательства отсутствия сингулярного непрерывного спектра. Обратное включение $\sigma^{(p)}(H) \cap \Lambda \subset \mathcal{N}$ справедливо при любом $\alpha > 0$. Поэтому из компактности операторов $B_0(\lambda \pm i0)$ следует, что при любом $\alpha > 0$ собственные числа $\lambda \in \Lambda$ оператора H конечнократны.

При сделанных предположениях структура точечного спектра оператора H также не может быть произвольной. Именно, теорема 9 допускает следующее дополнение:

Теорема 10. Пусть выполнены условия теоремы 9. Тогда на интервале Λ сингулярный спектр оператора H состоит лишь из конечнократных собственных значений, не имеющих внутри Λ точек накопления.

○ Предположим противное. Пусть $H\psi_n = \lambda_n\psi_n$, где $\lambda_n \rightarrow \lambda_0 \in \Lambda$ при $n \rightarrow \infty$, а ψ_n — соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций. Обозначим через X какой-либо компактный подынтервал Λ , содержащий все точки λ_n . Как показано при доказательстве леммы 8, элементы $f_n = -G_0\psi_n = -G_0E_0(X)\psi_n$ удовлетворяют уравнениям $(1)_{\pm}$ при $\lambda = \lambda_n$. В силу компактности операторов $B_0^l(\lambda \pm i0)$ и их непрерывной зависимости от λ последовательность f_n компактна в $\mathcal{H}$. Убедимся, что тогда и множество собственных функций $\psi_n = R_0(\lambda_n \pm i0)G^*f_n$ должно быть компактным в $\mathcal{H}$. Положим $g_n = (GE_0(X))^*f_n$, $\tilde{g}_n = \mathcal{F}_0g_n$, $\tilde{\psi}_n = \mathcal{F}_0\psi_n$. Достаточно проверить компактность множества вектор-функций $\tilde{\psi}_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_n \mp i0)^{-1}\tilde{g}_n(\lambda)$ в пространстве $L_2(X; \mathfrak{h})$. В силу компактности f_n в $\mathcal{H}$ это множество заведомо компактно в пространстве $L_2(X \setminus (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon); \mathfrak{h})$ для любого $\varepsilon > 0$. В то же время $\tilde{g}_n(\lambda_n) = 0$ согласно лемме 5, так что из усиленной H_0 -гладкости на X оператора G вытекает равномерная по n оценка

$$|\tilde{g}_n(\lambda)| \leq C|\lambda - \lambda_n|^\alpha.$$

При $2\alpha > 1$ это позволяет оценить нормы $\tilde{\psi}_n$ в $L_2((\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon); \mathfrak{h})$ величиной $c(\varepsilon)$, не зависящей от n и стремящейся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым множество $\{\psi_n\}$ компактно в $\mathcal{H}$, что противоречит ортонормированности этих функций. •

Оказывается, при небольших уточняющих предположениях теорема 10 сохраняет силу и для произвольного $\alpha > 0$. Этот результат будет изложен в т. 2 в применении к оператору Шредингера.

Глава 5

ОБЩАЯ СХЕМА В СТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ

В этой главе будут найдены условия на возмущение, позволяющее реализовать изложенную в § 2.7 схему построения стационарной теории рассеяния. Грубо говоря, эти условия состоят в том, что возмущение $V = G^*G_0$ факторизуется на два сомножителя G_0 и G , в определенном смысле гладких по отношению к операторам H_0 и H соответственно. При этом достаточно гладкости более слабой, чем введенная в § 4.3 гладкость по Като.

Изложению свойств операторов относительно гладких в слабом смысле, посвящен § 1. В § 2 приводятся точные условия, позволяющие оправдать стационарную схему § 2.7, и даются соответствующие обоснования. Связь при этих предположениях стационарного подхода с нестационарным обсуждается в § 3. Там же рассмотрен принцип инвариантности. С помощью понятия слабой H -гладкости в § 4 указываются эффективные достаточные условия того, что некоторый оператор является интегральным (см. п. 3 § 1.5) в соответствующем прямом разложении. Эти результаты используются в § 5 при обосновании формульных представлений § 2.8 для матрицы рассеяния. Построение полных изометрических ВО эквивалентно теореме разложения по некоторым специальным «собственным векторам» оператора $H^{(a)}$. Эта точка зрения развивается в § 6. Наконец, в § 7 рассматривается рассеяние при относительно компактных возмущениях, а в § 8—локальный вариант теории.

В слабом смысле произвольный оператор Гильберта—Шмидта оказывается гладким по отношению к любому самосопряженному оператору, что объясняет существование ВО при ядерных возмущениях. Рассмотрение ядерных возмущений откладывается, однако, до следующей гл.6. Сравнение излагаемой здесь схемы с гладкой теорией гл.4 проводится в п. 1 § 7.3.

§ 1. СЛАБАЯ ГЛАДКОСТЬ

В этом параграфе мы без дополнительных пояснений применяем обозначения и соглашения, введенные в начале § 4.3. В частности, для H -ограниченного оператора $G: \mathcal{D} = \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{H}$ сопряженный оператор G^* всегда существует, если его понимать как отображение $\mathcal{H}$ в $\mathcal{D}^*$.

Как объяснялось в п. 3 § 1.4, для самосопряженного оператора H оператор-функция $\delta(\lambda, \varepsilon) = \delta_H(\lambda, \varepsilon)$ ни при одном λ не имеет даже слабого предела при $\varepsilon \rightarrow 0$. В то же время при подходящем окаймляющем операторе G слабый предел произведения $G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*$ существовать может. Примем

Определение 1. H -ограниченный оператор G называется H -гладким в слабом смысле, если для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существует

$$\text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*. \quad (1)$$

Важно, что понятие слабой H -гладкости допускает ряд эквивалентных формулировок. Совсем просто проверяется

Лемма 2. Оператор G является H -гладким в том и только в том случае, когда выполняется любое из следующих двух неравенств:

$$\|G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*\| \leq C(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\varepsilon^{1/2}\|GR(\lambda \pm i\varepsilon)\| \leq C(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

○ Оценки (2) и (3) равносильны в силу определения (1.4.5). Из (1) прямо следует (2). Установим обратное. Рассмотрим плотное в $\mathfrak{E}$ множество D конечных линейных комбинаций элементов какого-либо базиса φ_i , $i = 1, 2, \dots$. В силу соотношения (1.4.11) на множестве $\Lambda_{i,j}$ полной меры при $\varepsilon \rightarrow 0$ существует предел величины $(\delta(\lambda, \varepsilon)G^*\varphi_i, G^*\varphi_j)$. Множество $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \Lambda_{i,j})$ имеет нулевую меру. Выбрасывая его из $\mathbb{R}$, получим множество полной меры, на котором величины $(\delta(\lambda, \varepsilon)G^*\varphi, G^*\psi)$

имеют пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех $\varphi, \psi \in D$. Выбросим из него еще множество нулевой меры, на котором для G нарушается (2). Ввиду равномерной по ε ограниченности $\|G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*\|$ и равенства $\overline{D} = \mathfrak{G}$ на получившемся множестве полной меры существует предел (1). •

Согласно определению (4.3.4) для H -гладкого по Като оператора G оценка (2) выполняется при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, причем постоянная в правой части не зависит от λ . Таким образом, на основании леммы 2 любой H -гладкий по Като оператор G является и H -гладким в слабом смысле.

Наряду с леммой 2 справедливо вполне аналогичное утверждение, формулируемое в терминах спектрального семейства (вместо операторов $\delta(\lambda, \varepsilon)$).

Лемма 3. Следующие три условия эквивалентны

$$\exists \text{ w-lim}_{\eta \rightarrow 0} (2\eta)^{-1} G[E(\lambda + \eta) - E(\lambda - \eta)]G^*, \quad \text{п.п. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\|GE((\lambda - \eta, \lambda + \eta))G^*\| \leq C(\lambda)\eta, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\|GE((\lambda - \eta, \lambda + \eta))\| \leq C(\lambda)\eta^{1/2}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Оценки (5) и (6) равносильны, так как левая часть (5) равна квадрату левой части (6). Из (4) прямо следует (5). Для доказательства обратного надо воспользоваться тем, что мера $(E(\cdot)G^*\varphi, G^*\psi)$ дифференцируема при любых $\varphi, \psi \in \mathfrak{G}$. Множество точек λ , где эта производная существует, зависит от φ и ψ . Ограничиваясь, как и при доказательстве леммы 2, элементами из D , $\overline{D} = \mathfrak{G}$, найдем, что такая производная существует на общем множестве точек λ . Вместе с равномерной оценкой (5) это обеспечивает существование слабого предела (4). •

Оценка (6) напоминает определение (4.3.5) гладкости по Като, хотя и отличается от (4.3.5) зависимостью от λ постоянной в правой части. Оказывается, аналогично гладкости по Като и слабая гладкость может быть определена в терминах спектрального семейства. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4. Условия лемм 2 и 3 эквивалентны друг другу.

○ Выведем сначала существование предела (1) из условия (4). В силу спектральной теоремы при любых $f, g \in \mathfrak{G}$

$$(\delta(\lambda, \varepsilon)G^*f, G^*g) = \varepsilon\pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} ((\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2)^{-1} d(E(\mu)G^*f, G^*g). \quad (7)$$

По условию (4) все функции $(E(\mu)G^*f, G^*g)$ имеют (симметричные) производные на общем (не зависящем от f, g) множестве Λ полной меры. Поэтому согласно теореме 1.2.7 (Фату) при $\lambda \in \Lambda$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют пределы интегралов Пуассона (7). Поскольку Λ не зависит от f, g , это означает, что на Λ существует предел (1).

Обратно, пусть при каком-либо $\lambda \in \mathbb{R}$ справедлива оценка (3). Проверим при этом λ неравенство (6). По спектральной теореме для любого $\varepsilon > 0$

$$\|E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))g\| \leq (\eta^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \|R(\lambda - i\varepsilon)g\|.$$

При $g = G^*f$ правая часть оценится через $(\eta^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \times \|GR(\lambda + i\varepsilon)\| \cdot \|f\|$. Поэтому согласно (3) справедливо неравенство

$$\|E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))G^*f\| \leq C(\lambda)(\eta^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \varepsilon^{-1/2} \|f\|.$$

При $\varepsilon = \eta$ отсюда вытекает (6). •

Таким образом, на основании лемм 2—4 понятие слабой H -гладкости может быть эквивалентным образом сформулировано в любой из форм (1)—(6). Отметим еще, что в силу (1.4.11) пределы (1) и (4) при п.в. λ равны друг другу.

Пределы вида (1) и (4) существуют и при окаймлении $\delta(\lambda, \varepsilon)$ слева и справа разными слабо H -гладкими операторами.

Лемма 5. Пусть операторы $G_j, j = 1, 2$, —слабо гладкие относительно H . Тогда при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_2^* = \text{w-lim}_{\eta \rightarrow 0} (2\eta)^{-1} G_1 [E(\lambda + \eta) - E(\lambda - \eta)] G_2^*, \quad (8)$$

причем оба эти предела существуют.

○ Ввиду (1.4.11) нужно лишь проверить существование обеих частей (8). Как и в леммах 2, 3, для этого достаточно убедиться в равномерной по ε и η ограниченности операторов в (8). По определению (1.4.5) из оценки (3) следует, что

$$\pi \|G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_2^*\| \leq \varepsilon \|G_1 R(\lambda + i\varepsilon)\| \|G_2 R(\lambda + i\varepsilon)\| \leq C(\lambda).$$

Совершенно аналогично в силу (6)

$$\begin{aligned} \|G_1 [E(\lambda + \eta) - E(\lambda - \eta)] G_2^*\| &\leq \\ &\leq \|G_1 E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))\| \|G_2 E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))\| \leq \\ &\leq C(\lambda) \eta. \quad \bullet \end{aligned}$$

Рассмотрим еще пределы вектор-функции.

Лемма 6. Пусть оператор G —слабо гладкий относительно H . Тогда при любом $f \in \mathcal{H}$ существуют и равны между собой пределы

$$\begin{aligned} \text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} G\delta(\lambda, \varepsilon)f &= \\ &= \text{w-lim}_{\eta \rightarrow 0} (2\eta)^{-1} G[E(\lambda + \eta) - E(\lambda - \eta)]f, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (9)$$

(соответствующее множество полной меры зависит от элемента f).

○ Ввиду равенства (1.4.11) нужно опять проверить лишь существование обоих пределов (9). В свою очередь, для этого достаточно убедиться (ср. с доказательствами лемм 2 и 3) в равномерной по ε и η ограниченности элементов в (9). В неравенстве

$$\pi^2 \|G\delta(\lambda, \varepsilon)f\|^2 \leq (\varepsilon \|GR(\lambda - i\varepsilon)\|^2)(\varepsilon \|R(\lambda + i\varepsilon)f\|^2)$$

первый сомножитель справа ограничен равномерно по ε в силу (3), а второй—в силу (1.4.12). Аналогичным образом

$$\begin{aligned} \|GE((\lambda - \eta, \lambda + \eta))f\| &\leq \\ &\leq \|\mathcal{J}E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))\| \|E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))f\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно (6) первый сомножитель здесь оценивается через $C(\lambda)\eta^{1/2}$. В точках λ , где функция $(E(\lambda)f, f)$ дифференцируема,

$$(E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))f, f) \leq C(\lambda, f)\eta,$$

а потому и второй сомножитель в правой части (10) не превосходит $C(\lambda, f)\eta^{1/2}$. •

Отметим, что для H -гладкости оператора G существуют не только симметричные (4) и (9), но и обычные слабые производные $dGE(\lambda)G^*/d\lambda$, $dGE(\lambda)f/d\lambda$.

Определение слабой H -гладкости может быть сформулировано и локально—для произвольного борелевского множества Λ . Именно, H -ограниченный оператор G называется слабо H -гладким на Λ , если хотя бы одно из (а тогда и все остальные) соотношений (1)—(6) выполняется для п.в. $\lambda \in \Lambda$. В этом случае пределы (8), (9) также существуют для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Нетрудно убедиться (ср. с теоремой 4.3.10), что при условии $|\bar{\Lambda} \setminus \Lambda| = 0$ для слабо H -гладкого на множестве Λ оператора G произведение $GE(\bar{\Lambda})$ будет (глобально) слабо H -гладким. Ясно также, что слабая гладкость оператора G равносильна слабой гладкости операторов $GE(\Lambda)$ для всех ограниченных интервалов Λ .

§ 2. ОПРАВДАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА

Этот параграф примыкает к § 2.7. Здесь мы приведем опущенные в § 2.7 точные формулировки и их доказательства. Пункты 1—3 этого параграфа отвечают пунктам § 2.7 с тем же номером. В последнем п. 4 обсуждаются условия изометричности стационарных ВО и условия их полноты.

1. Пусть, как всегда, H_0, H — самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}$, а $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ — ограниченное отождествление. В этом пункте мы установим корректность определения 2.7.2 стационарного ВО $\mathcal{U}_{\pm} = \mathcal{U}_{\pm}(H, H_0; J)$. Перечислим сначала ряд вспомогательных фактов.

Пусть форма $a_{\pm}(f_0, f; \lambda)$ определяется соотношением (2.7.4). Из существования этого предела вытекает оценка

$$|a_{\pm}(f_0, f; \lambda)|^2 \leq \|J\|^2 \frac{d(E_0(\lambda)f_0, f_0)}{d\lambda} \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для ее доказательства достаточно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве

$$|\varepsilon(JR_0(z)f_0, R(z)f)|^2 \leq \|J\|^2(\varepsilon\|R_0(z)f_0\|^2)(\varepsilon\|R(z)f\|^2) \quad (2)$$

и учесть соотношение (1.4.11). Столь же просто проверяется

Лемма 1. Для любых $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$, борелевских множеств $\Lambda_0, \Lambda \subset \mathbb{R}$ и $\mathfrak{X} = \Lambda_0 \cap \Lambda$ справедливо равенство

$$a_{\pm}(E_0(\Lambda_0)f_0, E(\Lambda)f; \lambda) = 0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathfrak{X}. \quad (3)$$

Кроме того, если существует предел (2.7.4), то существует

$$a_{\pm}(E_0(\Lambda_0)f_0, E(\Lambda)f; \lambda) = \chi_{\mathfrak{X}}(\lambda)a_{\pm}(f_0, f; \lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

○ Воспользуемся неравенством (2) с заменой f_0, f на $E_0(\Lambda_0)f_0, E(\Lambda)f$. Согласно (1.3.13), (1.4.11) предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ его правой части равен

$$\|J\|^2 \chi_{\Lambda_0}(\lambda) \chi_{\Lambda}(\lambda) \frac{d(E_0(\lambda)f_0, f_0)}{d\lambda} \frac{d(E(\lambda)f, f)}{d\lambda}.$$

При $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathfrak{X}$ это выражение равно нулю, что доказывает (3).

Далее, в силу (3) соотношение (4) достаточно проверять лишь на множестве $\mathfrak{X}$. Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} a_{\pm}(E_0(\Lambda_0)f_0, E(\Lambda)f; \lambda) = & -a_{\pm}(E_0(\mathbb{R} \setminus \Lambda_0)f_0, E(\Lambda)f; \lambda) - \\ & -a_{\pm}(f_0, E(\mathbb{R} \setminus \Lambda)f; \lambda) + a_{\pm}(f_0, f; \lambda), \end{aligned}$$

прямо вытекающим из полуторалинейности (линейности по первому и антилинейности по второму аргументам) формы $a_{\pm}$. Остается заметить, что при п.в. $\lambda \in \mathfrak{X}$ первые два слагаемые справа равны нулю в силу (3). •

Согласно лемме 1.3.6 сингулярную (относительно какого-либо самосопряженного оператора H) компоненту $f^{(s)}$ элемента f можно записать в виде $f^{(s)} = E(Z_s)f$, где Z_s — некоторое борелевское множество нулевой лебеговой меры. Поэтому из (3), (4) вытекает, что условие (2.7.4) равносильно такому же условию для любой из пар $\{f_0^{(a)}, f\}$, $\{f_0, f^{(a)}\}$, $\{f_0^{(a)}, f^{(a)}\}$; при этом для всех четырех пар значение формы $a_{\pm}$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ одно и то же.

Производные в правой части (1) равны нулю для п.в. λ из дополнений к сердцевинам спектров $\hat{\sigma}_0$ и $\hat{\sigma}$ (см. определение 1.3.8) операторов H_0 и H . Следовательно, в силу (1) для п.в. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus (\hat{\sigma}_0 \cap \hat{\sigma})$ предел (2.7.4) существует и равен нулю.

Пусть теперь на множестве $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}$, где $\overline{\mathcal{L}_0} = \mathcal{H}_0$, $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{H}$, для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существует предел (2.7.4). Согласно определению 2.7.2 стационарный ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ вводится через полуторалинейную форму (2.7.5), заданную на $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}$. Из неравенства (1) прямо следует, что функция (2.7.4) абсолютно интегрируема, интеграл (2.7.5) конечен и в силу (1.3.11)

$$|(U_{\pm} f_0, f)| \leq \|J\| \|P_0 f_0\| \|P f\|.$$

Поэтому форме (2.7.5) отвечает ограниченный оператор $\mathcal{U}_{\pm} = U_{\pm}(H, H_0; J)$, причем $\|\mathcal{U}_{\pm}\| \leq \|J\|$ и справедливы соотношения (2.7.6). Условия определения 2.7.2 симметричны относительно операторов H_0 и H . Тем самым операторы $\mathcal{U}_{\pm}(H, H_0; J)$ и $\mathcal{U}_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют одновременно и согласно (2.7.5) справедливо равенство (2.7.9). Отметим еще, что согласно (1) интеграл (2.7.5) фактически берется лишь по множеству $\hat{\sigma}_0 \cap \hat{\sigma}$.

Дальнейшее изучение оператора $\mathcal{U}_{\pm}$ удобно основывать на рассмотрении вспомогательного оператора $\mathcal{U}_{\pm}(\varepsilon)$. Этот опера-

тор определим через полуторалинейную форму:

$$(U_{\pm}(\varepsilon)f_0, f) = \pi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon (JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)f) d\lambda, \quad (5)$$

заданную на $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}$. Согласно (2) правая часть (5) оценивается величиной

$$\|J\| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-1} \varepsilon \|R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|^2 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \pi^{-1} \varepsilon \|R(\lambda \pm i\varepsilon)f\|^2 d\lambda \right)^{1/2}.$$

В силу равенства (1.4.6) отсюда следует равномерная по ε оценка

$$\|U_{\pm}(\varepsilon)\| \leq \|J\|. \quad (6)$$

Предел выражения (5) при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно найти в случае, когда один из элементов f_0 или f абсолютно непрерывен.

Лемма 2. Пусть Λ_0, Λ — борелевские множества, $\mathcal{X} = \Lambda_0 \cap \Lambda$. Предположим, что для пары f_0, f и п.в. $\lambda \in \mathcal{X}$ существует предел (2.7.4). Тогда существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (U_{\pm}(\varepsilon)E_0(\Lambda_0)f_0^{(a)}, E(\Lambda)f) = \int_{\mathcal{X}} a_{\pm}(f_0, f; \lambda) d\lambda. \quad (7)$$

○ Положим $g_0 = E_0(\Lambda_0)f_0^{(a)}$, $g = E(\Lambda)f$. Согласно равенствам (4) и

$$a_{\pm}(f_0^{(a)}, f; \lambda) = a_{\pm}(f_0, f; \lambda)$$

формальный предельный переход под знаком интеграла (5) для $(U_{\pm}(\varepsilon)g_0, g)$ дает соотношение (7). Нужно лишь обосновать этот предельный переход. В силу оценки (2), неравенства Шварца и соотношения (1.4.6) для любого борелевского множества $Y \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \left| \pi^{-1} \int_Y \varepsilon (JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)g) d\lambda \right| \leq \\ & \leq \|J\| \int_Y (\delta_0(\lambda, \varepsilon)g_0, g_0)^{1/2} (\delta(\lambda, \varepsilon)g, g)^{1/2} d\lambda \leq \\ & \leq \|J\| \|g\| \left(\int_Y (\delta_0(\lambda, \varepsilon)g_0, g_0) d\lambda \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

На основании теоремы 1.1.3 (Витали) для обоснования предельного перехода нужно проверить, что интеграл в левой части (8) стремится к нулю равномерно по $\varepsilon \in (0, 1)$, когда $|Y| \rightarrow 0$ и когда $Y = (-\infty, -N) \cup (N, \infty)$ и $N \rightarrow \infty$. Учтем, что это свойство заведомо выполняется, если $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, а ε_0 — любое фиксированное положительное число. Поэтому достаточно показать, что подынтегральная функция в правой части (8) имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_1(\mathbb{R})$. Поскольку $g_0 \in \mathcal{H}_0^{(a)}$, функция $(\delta_0(\lambda, \varepsilon)g_0, g_0)$ есть интеграл Пуассона от суммируемой функции $d(E_0(\lambda)g_0, g_0)/d\lambda$. Остается воспользоваться теоремой 1.2.8. •

Следствие 3. В условиях определения 2.7.2. существует

$$\text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{U}_{\pm}(\varepsilon)P_0 = \mathcal{U}_{\pm}.$$

○ Достаточно сопоставить лемму 2 для $\Lambda_0 = \Lambda = \mathbb{R}$ и произвольных $f_0 \in \mathcal{L}_0$, $f \in \mathcal{L}$ с равномерной оценкой (6). •

Отметим, что соотношение (7) сохранится, если слева пару $f_0^{(a)}, f$ заменить на $f_0, f^{(a)}$ или $f_0^{(a)}, f^{(a)}$ (но не на пару f_0, f).

В силу следствия 3 операторы $\mathcal{U}_{\pm}$ не зависят от множеств $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}$, входящих в определение 2.7.2. Кроме того, лемма 2 показывает, что представление (2.7.5) распространяется на все пары f_0, f , для которых предел (2.7.4) существует. В частности, согласно (4) множества $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}$ можно считать инвариантными относительно спектральных проекторов $E_0(\cdot)$ и $E(\cdot)$ соответственно. Далее, из (7) вытекает соотношение (2.7.8), которое, в свою очередь, обеспечивает сплетающее свойство (2.7.7). Наконец, сопоставляя леммы 2 и 2.7.1, найдем, что в условиях определения 2.7.2 существуют слабые абелевы ВО. Соберем вместе полученные результаты.

Теорема 4. Пусть выполнены условия определения 2.7.2. Тогда равенством (2.7.5) корректно определен ограниченный оператор $\mathcal{U}_{\pm} = \mathcal{U}_{\pm}(H, H_0; J)$ и $\|\mathcal{U}_{\pm}\| \leq \|J\|$. Для оператора $\mathcal{U}_{\pm}$ справедливы соотношения (2.7.6) — (2.7.8). Слабый нестационарный абелев ВО $\tilde{\mathcal{A}}_{\pm}(H, H_0; J)$ также существует и совпадает с $\mathcal{U}_{\pm}$. Одновременно с $\mathcal{U}_{\pm}$ существует $\mathcal{U}_{\pm}(H_0, H; J^*)$, причем выполнено (2.7.9).

Условия, обеспечивающие существование предела (2.7.4), естественно формулировать в терминах «возмущения» $V = HJ - JH_0$. Будем считать, что справедлива факторизация (1.9.2), где G_0 — ограничен относительно H_0 , а G — относительно H . Как объяснялось в § 1.9, в точном смысле пред-

полагается выполнение равенства (1.9.3) на элементах $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$, $f \in \mathcal{D}(H)$. Тогда согласно предложению 1.9.1 справедливо резольвентное тождество (1.9.4). С учетом факторизации V первое равенство (2.7.10) можно теперь переписать в виде

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \varepsilon (J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon) f) = \\ = (\delta(\lambda, \varepsilon) J f_0, f) + (G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, G \delta(\lambda, \varepsilon) f). \end{aligned}$$

В силу (1.4.11) для любых $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ первое слагаемое в правой части имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому справедлива

Лемма 5. Для пары f_0, f существует предел (2.7.4), если предель при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют вектор-функции $G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0$, $G \delta(\lambda, \varepsilon) f$. При этом один из этих пределов (любой) может быть слабым, если другой — сильный.

Пользуясь вторым равенством (2.7.10), можно поменять здесь операторы H_0 и H ролями.

Лемма 5'. Утверждение леммы 5 сохраняется, если одна из вектор-функций

$$G_0 \delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0, \quad G R(\lambda \pm i\varepsilon) f \quad (9)$$

имеет слабый предел, а другая — сильный.

В частности, если условия лемм 5 и 5' выполнены на плотных множествах элементов f_0 и f , то существует ВО $\mathcal{U}_{\pm}(H, H_0; J)$.

2. Перейдем к обоснованию представления (2.7.11) $_{\pm}$. Это потребует предположений типа условий лемм 5 или 5', хотя и несколько более сильных.

Лемма 6. Пусть для элементов f_0 из какого-либо плотного в $\mathcal{H}_0$ (линейного) множества $\mathcal{M}_0$

$$\exists s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_0 R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (10)_{\pm}$$

Кроме того, предположим, что оператор G — слабо H -гладкий. Тогда ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ существует, а представление (2.7.5) для его полуторалинейной формы справедливо на $\mathcal{M}_0 \times \mathcal{H}$.

○ Согласно леммам 1.6 и 5 условия определения 2.7.2 выполнены при $\mathcal{L}_0 = \mathcal{M}_0$, $\mathcal{L} = \mathcal{H}$. •

Совершенно аналогично с помощью лемм 1.6 и 5' получается

Лемма 6'. Пусть для элементов f из какого-либо плотного в $\mathcal{H}$ множества $\mathcal{M}$ существует предел (4.3.14) $_{\pm}$, и оператор G_0 — слабо H_0 -гладкий. Тогда ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ существует, а представление (2.7.5) справедливо на $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{M}$.

Для доказательства (2.7.11) будем исходить из соотношения (2.7.12), справедливого в условиях определения 2.7.2. Придадим прежде всего точный смысл соотношению (2.7.13).

Лемма 7. В условиях леммы 6 для $f_0 \in M_0$ справедливо равенство

$$\text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} G\delta(\lambda, \varepsilon)U_{\pm}f_0 = \text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1}\varepsilon GR(\lambda \mp i\varepsilon)JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, \quad (11)$$

причем пределы в обеих частях существуют при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

○ В силу равенства (2.7.12) нужно проверить лишь существование пределов в (11). Существование для любого $f_0 \in \mathcal{H}_0$ предела в левой части прямо вытекает из леммы 1.6. Рассмотрим правую часть (11). Скалярное произведение элемента под знаком предела с произвольным $\varphi \in \mathcal{G}$ равно

$$\pi^{-1}\varepsilon(JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)h), \quad (12)$$

где $h = G^*\varphi \in \mathcal{D}^*$. Воспользуемся теперь условием $(10)_{\pm}$ и учтем, что слабый предел $G\delta(\lambda, \varepsilon)h$ существует для любого h . Поэтому в силу леммы 5 предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ выражения (12) существует для $f_0 \in M_0$, произвольного $\varphi \in \mathcal{G}$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Соответствующее множество полной меры можно, конечно, считать не зависящим от выбора φ из совокупности D линейных комбинаций какого-либо базиса в $\mathcal{G}$. Поэтому для доказательства существования предела в правой части (11) остается получить оценку

$$\varepsilon\|GR(\lambda \mp i\varepsilon)JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\| \leq C(\lambda), \quad f_0 \in M_0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как левая часть здесь не превосходит $\|J\|(\varepsilon^{1/2}\|GR(\lambda \pm i\varepsilon)\|)(\varepsilon^{1/2}\|R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|)$, то оценка через $C(\lambda)$ следует из неравенств (1.3) и (1.4.12). •

Лемма 7 позволяет оправдать соотношение (2.7.14) на множестве $M_0 \times M_0$. В самом деле, (2.7.14) эквивалентно двум соотношениям:

$$\begin{aligned} (Jf_0, \delta(\lambda, \varepsilon)U_{\pm}g_0) &\sim \pi^{-1}\varepsilon(Jf_0, R(\lambda \mp i\varepsilon)JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0), \\ (G_0R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, G\delta(\lambda, \varepsilon)U_{\pm}g_0) &\sim \\ &\sim \pi^{-1}\varepsilon(G_0R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, GR(\lambda \mp i\varepsilon)JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Первое из них заменой Jf_0 на $\tilde{f}_0$ сводится к (2.7.12). Для доказательства второго нужно заметить, что первые сомножители в обеих частях совпадают и при $\varepsilon \rightarrow 0$ согласно (10) имеют

сильный предел, а вторые сомножители согласно (11) имеют общий слабый предел.

В условиях леммы 6 в представлении (2.7.5) можно положить $f = U_{\pm} g_0$. Теперь (2.7.11) $_{\pm}$ является прямым следствием (2.7.14). Именно, верна

Теорема 8. В условиях леммы 6 для $f_0, g_0 \in \mathcal{M}_0$ справедливо представление (2.7.11) $_{\pm}$, причем предел под знаком интеграла существует при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. $\dagger$

Согласно определению 2.7.2 последнее утверждение теоремы 8 означает, что существует ВО $U_{\pm}^{(0)} = U_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$ для вспомогательной тройки $H_0, H_0, J^* J$. При этом интеграл (2.7.11) $_{\pm}$ равен $(U_{\pm}^{(0)} f_0, g_0)$. Таким образом, теорема 8 допускает следующую переформулировку:

Теорема 9. В условиях леммы 6 существует стационарный ВО $U_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$ и выполняется равенство (2.7.16).

Меняя операторы H_0 и H ролями и учитывая равенство (2.7.9), получим также следующее утверждение.

Теорема 9'. В условиях леммы 6'

$$U_{\pm}(H, H_0; J) U_{\pm}^*(H, H_0; J) = U_{\pm}(H, H; J J^*),$$

причем ВО в обеих частях существуют.

3. Установим теперь существование сильных нестационарных ВО. В этом пункте ограничимся рассмотрением абелевых ВО (2.2.9).

Теорема 10. В условиях леммы 6 существует сильный нестационарный абелев ВО $\mathfrak{U}_{\pm}(H, H_0; J)$, равный $U_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Согласно теоремам 4 и 9 в условиях леммы 6 существуют слабые нестационарные абелевы ВО $\tilde{\mathfrak{U}}_{\pm}(H, H_0; J)$ и $\tilde{\mathfrak{U}}_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$, совпадающие с соответствующими стационарными ВО. При этом (2.7.16) дает равенство

$$\tilde{\mathfrak{U}}_{\pm}^*(H, H_0; J) \tilde{\mathfrak{U}}_{\pm}(H, H_0; J) = \tilde{\mathfrak{U}}_{\pm}(H_0, H_0; J^* J).$$

Теперь существование $\mathfrak{U}_{\pm}(H, H_0; J)$ является следствием теоремы 2.2.1, которая справедлива и для абелевых ВО. •

Существование нестационарных ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ обсуждается в следующем параграфе.

4. Остановимся здесь на условиях изометричности стационарных ВО $U_{\pm} = U_{\pm}(H, H_0; J)$. Будем исходить из теоремы 8.

При $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ изометричность $\mathcal{U}_{\pm}$ на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ прямо вытекает из соотношения $(2.7.11)_{\pm}$ в силу (1.3.11), (1.4.11).

В общем случае условия изометричности ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ аналогичны условиям изометричности (см. предложение 2.1.3) нестационарных ВО (2.1.1). Действительно, изометричность $\mathcal{U}_{\pm}$ равносильна соотношению

$$\varepsilon \|JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|^2 \sim \varepsilon \|R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|^2, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

для любого $f_0 \in \mathcal{M}_0$. Оценим абсолютную величину разности левой и правой частей (14) через

$$(\varepsilon^{1/2} \|(JJ^* - I)R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|)(\varepsilon^{1/2} \|R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|).$$

Согласно (1.4.12) отсюда следует, что (14) обеспечивается условием

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{1/2} \|(J^*J - I)R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0\|) = 0, \quad \forall f_0 \in \mathcal{M}_0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (15)_{\pm}$$

Легко понять, что при $J^*J - I \leq 0$ условие $(15)_{\pm}$ и необходимо для (14). Сформулируем результат.

Предложение 11. В условиях леммы 6 для изометричности оператора $\mathcal{U}_{\pm}$ на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ достаточно (а при $\|J\| \leq 1$ — и необходимо) условие $(15)_{\pm}$.

Следствие 12. Стационарный ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$, если в условиях леммы 6 оператор $J^*J - I$ компактен или хотя бы выполнено условие (2.1.9).

○ Достаточно убедиться, что

$$\text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{1/2} R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0 = 0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

На основании (1.4.9) предел $(R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, \varphi)$ существует на множестве полной меры, не зависящем от выбора линейной комбинации φ из элементов какого-либо базиса в $\mathcal{H}_0$. На том же множестве точек λ предел $\varepsilon^{1/2}(R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, \varphi)$ очевидно равен нулю. Для доказательства (16) остается учесть оценку (1.4.12). •

Наконец, меняя опять ролями операторы H_0 и H , получим

Предложение 11'. Если выполнены условия леммы 6' и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{1/2} \|(JJ^* - I)R(\lambda \pm i\varepsilon)f\|) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{M}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (17)_{\pm}$$

то ВО $\mathcal{U}_{\pm}(H_0, H; J^*)$ изометричен.

Объединим еще предложения 11 и 11'.

Следствие 12'. Если выполнены условия обеих лемм 6 и 6' и условия $(15)_{\pm}$ и $(17)_{\pm}$, то ВО $U_{\pm}(H, H_0; J)$ изометричен и полон.

§ 3. СВЯЗЬ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ПОДХОДОМ. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ

1. В отличие (см. п. 3 § 2) от абелевых ВО $\mathfrak{A}_{\pm}(H, H_0; J)$ существование сильного нестационарного ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ не вытекает прямо из результатов о стационарных ВО. Однако согласно теореме 2.9 дело сводится к доказательству существования слабых ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ и $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$. Рассмотрение слабых ВО элементарно и не зависит от построений § 2. При этом используется

Лемма 1. Пусть оператор H самосопряжен в $\mathcal{H}$, и оператор $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ ограничен относительно H^2 . Предположим, что для элементов f из плотного в $\mathcal{H}$ линейала $\mathfrak{M}$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существует предел (4.3.16). Тогда на некотором плотном в $\mathcal{H}^{(a)}$ и состоящем из «финитных» векторов линейале D

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)g\|^2 dt < \infty, \quad g \in D. \quad (1)$$

○ Для произвольного $f \in \mathfrak{M}$ обозначим через $F(\lambda)$ значение предела (4.3.16), положим

$$X_{N,n} = X_{N,n}(f) = \{\lambda : |\lambda| \leq n, \|F(\lambda)\| \leq N\}$$

и примем за D совокупность линейных комбинаций всех элементов вида $g = E^{(a)}(X_{N,n})f$ (при всевозможных $f \in \mathfrak{M}$, n и N). Аналогично доказательству леммы 2.5.3 можно убедиться, что при любом n

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |(-n, n) \setminus X_{N,n}| = 0.$$

Отсюда следует, что для каждого $f \in \mathfrak{M}$ элемент Pf приближается элементами $E^{(a)}(X_{N,n})f \in D$. Тем самым $\overline{D} = \mathcal{H}^{(a)}$.

Пусть $\{\varphi_p\}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{G}$. В силу спектральной теоремы и соотношений (1.3.13), (1.4.11) при $g \in D$

справедливо представление

$$\begin{aligned}(GU(t)g, \varphi_p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda t) \frac{d(GE(\lambda)g, \varphi_p)}{d\lambda} d\lambda = \\ &= \int_{X_{N,n}} \exp(-i\lambda t) (F(\lambda), \varphi_p) d\lambda.\end{aligned}$$

Применим теперь равенство Парсеваля и возьмем сумму по p . Тогда найдем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)g\|^2 dt = 2\pi \int_{X_{N,n}} \|F(\lambda)\|^2 d\lambda.$$

Таким образом, по построению множества $X_{N,n}$ интеграл (1) сходится (и не превосходит $4\pi N^2 n$). •

При рассмотрении слабых ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ достаточно считать, что соотношение (1.9.3) выполняется лишь на элементах $f_0 \in \mathcal{D}(H_0^2)$ и $f \in \mathcal{D}(H^2)$, а операторы G_0 и G ограничены относительно H_0^2 и H^2 .

Теорема 2. Пусть на плотных в $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}$ линейных $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\exists \text{ w-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_0 \delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0, \quad \text{w-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G \delta(\lambda, \varepsilon) f, \quad f_0 \in \mathfrak{M}_0, f \in \mathfrak{M}. \quad (2)$$

Тогда существуют слабые нестационарные ВО $\tilde{W}_{\pm} = \tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Поскольку норма оператора ВО (2.1.2) не превосходит $\|J\|$, достаточно установить существование предела $(W(t)f_0, f)$ при $f_0 \in \mathfrak{M}_0, f \in \mathfrak{M}$. Согласно неравенству Шварца интеграл (4.5.1) оценивается через

$$\left(\int_{t_1}^{t_2} \|G_0 U_0(s) f_0\|^2 ds \int_{t_1}^{t_2} \|GU(s) f\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

В силу леммы 1 это выражение стремится к нулю при $t_1, t_2 \rightarrow \pm\infty$, что доказывает существование искомого предела. •

Согласно лемме 1.6 условия теоремы 2 выполняются (при $\mathfrak{M}_0 = \mathcal{H}_0, \mathfrak{M} = \mathcal{H}$) и, следовательно, слабые ВО $\tilde{W}_{\pm}$ существуют, если операторы G_0 и G являются соответственно слабо H_0 - и H -гладкими. Утверждение теоремы 2 сохраняет силу,

если вместо (1.9.2) справедливо представление (4.5.3) и условия (2) выполнены на $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}$ для всех $G_{0,k}, G_k$. Отметим еще, что при справедливости (2) такие же условия выполняются и для набора H, H_0, J^* . Так и должно быть, поскольку ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ и $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют одновременно. Наконец, комбинируя теорему 2 с теоремой 2.4 и леммами 2.5 или 2.5', установим, что имеет место

Теорема 3. Пусть условия лемм 2.5 или 2.5' выполнены при обоих знаках для элементов f_0 и f из плотных в $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$ множеств. Тогда существуют и совпадают друг с другом ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ и $U_{\pm}(H, H_0; J)$.

2. Приведем теперь достаточные условия существования сильного ВО (2.1.1). Будем опять без специальных оговорок считать операторы G_0 и G ограниченными относительно операторов H_0 и H соответственно. Дадим прежде всего полуэффektivное условие существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы 2.6 и существует слабый ВО $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$. Тогда сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и совпадает со стационарным ВО $U_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ В силу теоремы 2.9 существует стационарный ВО $U_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$, совпадающий с $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$. В то же время из теоремы 3 вытекает, что существуют ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J) = U_{\pm}(H, H_0; J)$. Равенство (2.7.16) для стационарных ВО дает соотношение (2.2.3). Поэтому существование сильного ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ —следствие теоремы 2.2.1. *

В важном частном случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, J = I$ предположение о существовании $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ здесь отпадает. Приведем несколько более общее утверждение такого типа.

Теорема 5. Пусть в дополнение к условиям леммы 2.6 для любого ограниченного множества Λ выполняется соотношение (2.1.9). Тогда справедливо утверждение теоремы 4, причем ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$.

○ Существование ВО $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ (и его равенство проектору P_0)—следствие леммы 1.4.1. Поэтому ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует по теореме 4. Его изометричность вытекает из предложения 2.1.3. •

Можно указать конкретные условия существования ВО $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ и в общем случае. При этом по сравнению

с леммой 2.6 требуются лишь незначительные дополнительные предположения. Следующее утверждение достаточно удобно, хотя проверка существования ВО $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ и носит в нем несколько искусственный характер.

Теорема 6. Пусть на плотном в $\mathcal{H}_0$ множестве выполнены оба условия (2.10) $_{\pm}$ и, кроме того, оператор $G = |H|^{1/2}$ -ограничен и

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B(\lambda + i\varepsilon) =: B(\lambda + i0), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad B(z) = GR(z)G^*. \quad (3)$$

Тогда сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует и совпадает со стационарным ВО $U_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ При условии (3) оператор G будет, конечно, слабо H -гладким. Поэтому в силу теоремы 4 нужно лишь установить существование слабого ВО $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$. Будем исходить из теоремы 2. При $|H|^{1/2}$ -ограниченном операторе G из резольвентного тождества (1.9.4) сразу следует, что $J: \mathcal{D}(H_0) \rightarrow \mathcal{D}(|H|^{1/2})$. Поэтому в форме

$$(\operatorname{sgn} H \cdot |H|^{1/2} J f_0, |H|^{1/2} \varphi) - (J H_0 f_0, \varphi) = (G_0 f_0, G \varphi) \quad (4)$$

равенство (1.9.3) распространяется на произвольные $f_0 \in \mathcal{D}(H_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(|H|^{1/2})$. Вычислим теперь «возмущение»

$$\begin{aligned} H_0 J^* J - J^* J H_0 &= J^* (H J - J H_0) - (J^* H - H_0 J^*) J = \\ &= J^* V - V^* J = \\ &= (G J)^* G_0 - G_0^* (G J). \end{aligned} \quad (5)$$

В точном смысле (5) надо, конечно, понимать как равенство соответствующих полуторалинейных форм на элементах $f_0, g_0 \in \mathcal{D}(H_0)$. Это оправдывается ссылкой на (4), где при $g_0 \in \mathcal{D}(H_0)$ можно положить $\varphi = J g_0$, $\varphi \in \mathcal{D}(|H|^{1/2})$. Равенство (5) дает представление вида (4.5.3) для набора H_0, H_0, J^*J . В силу условий (2.10) $_{\pm}$ для сомножителя G_0 выполняется предположение типа (2). Остается проверить его для сомножителя $\tilde{G}_0 = G J$. С этой целью достаточно (ср. с леммой 1.2) получить оценку

$$\|G J \delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0\| \leq C(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad f_0 \in \mathcal{M}_0. \quad (6)$$

При $|H|^{1/2}$ -ограниченном операторе G его можно применить слева к обеим частям (1.9.4). Это дает равенство

$$G J R_0(z) = G R(z) J + B(z) G_0 R_0(z). \quad (7)$$

Вычисляя оператор (7) на элементе $R_0(z)f_0$, найдем, что

$$\|GJ\delta_0(\lambda, \epsilon)f_0\| \leq \pi^{-1}(\epsilon^{1/2}\|GR(z)\|)\|J\|(\epsilon^{1/2}\|R_0(\bar{z})f_0\|) + \\ + \|B(z)\|\|G_0\delta_0(\lambda, \epsilon)f_0\|, \quad z = \lambda + i\epsilon.$$

Теперь (6) следует из (2.10) и (3), если учесть (1.4.12). •

В теореме 6 условие $|H|^{1/2}$ -ограниченности оператора G можно несколько ослабить. Именно, если при каком-либо вспомогательном операторе $h \geq c > 0$ при $\theta_0 = \theta = 1/2$ выполняется равенство (1.9.21), то относительно G достаточно потребовать его h -ограниченности. Аналогичное замечание справедливо и в других утверждениях этой главы, где возникают предположения об $|H|^{1/2}$ -ограниченности (или $|H_0|^{1/2}$ -ограниченности) каких-либо операторов.

3. Комбинируя условия существования нестационарных ВО с условиями полноты стационарных ВО, получим признаки полноты (или J -полноты) ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, а также признаки существования «обратного» ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия лемм 2.6 и 2.6' также соотношения (2.1.9) и (2.1.7) $_{\pm}$. Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют, изометричны (соответственно на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$) и полны.

○ Существование и изометричность $W_{\pm}(H, H_0; J)$ следуют из теоремы 5. Его полнота эквивалентна изометричности ВО

$$W_{\pm}^*(H, H_0; J) = \widetilde{W}_{\pm}(H_0, H; J^*) = U_{\pm}(H_0, H; J^*),$$

которая прямо вытекает из предложения 2.11'. Теперь существование ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ обеспечивается следствием 2.3.10. Ввиду равенства (2.3.10) этот ВО будет изометрическим и полным вместе с $W_{\pm}(H, H_0; J)$. •

В следующем утверждении условия существования ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ получаются из теоремы 6 переменной ролей операторов H_0, H .

Теорема 8. Пусть в дополнение к условиям теоремы 6 на плотном в $\mathcal{H}$ множестве существуют оба предела (4.3.14) $_{\pm}$, оператор $G_0 - |H_0|^{1/2}$ -ограничен и

$$\exists \text{w-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_0 R_0(\lambda + i\epsilon) G_0^*. \quad (8)$$

Тогда сильные ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют и являются соответственно J - и J^* -полными.

○ В силу теоремы 3.2.4 нужно проверять лишь существование ВО. Волновой оператор $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует по теореме 6. Предположения $(4.3.14)_{\pm}$ и (8) играют для ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ роль условий $(2.10)_{\pm}$ и (3). Поэтому в силу теоремы 6 ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ также существует. •

4. Обсудим, наконец, принцип инвариантности (ПИ). Рассмотрим какую-либо функцию φ , допустимую в смысле определения 2.6.2 на открытом множестве Ω . Предполагается, что φ допустима по отношению к оператору H . Напомним, что $\Omega_{\pm} = \{\lambda \in \Omega: \pm \varphi'(\lambda) > 0\}$; $\mathcal{E}$ — множество финитных (по отношению к $E(\cdot)$) векторов. Следующее вспомогательное утверждение аналогично лемме 1; в частности, множество D в нем то же, что и в лемме 1.

Лемма 9. В условиях леммы 1 на некоторых плотных в $E^{(a)}(\Omega_{\pm})\mathcal{H}$ линейалах $D^{\pm} \subset \mathcal{E}$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^{\infty} \|G \exp(\pm isH \pm it\varphi(H))g\|^2 ds = 0, \quad g \in D^{(\pm)}. \quad (9)$$

Кроме того, при любом $g \in D$ интеграл (9) оценивается равномерно по t .

○ Через $D^{\pm}$ обозначаем множество элементов $g \in D$, принадлежащих к тому же подпространству $E(\tilde{\Omega}_{\pm})\mathcal{H}$ для какого-нибудь конечного объединения $\tilde{\Omega}_{\pm}$ составляющих интервалов $\Omega_{\pm}$. В обозначениях доказательства леммы 1 интеграл (9) допускает представление

$$\sum_p \int_0^{\infty} ds \left| \int_{X_{N,n}} \exp(\pm is\lambda \pm it\varphi(\lambda))(F(\lambda), \varphi_p) d\lambda \right|^2. \quad (10)$$

При $g \in D^{\pm}$ каждый член суммы (10) стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$ в силу леммы 2.6.4. В то же время согласно равенству Парсеваля члены ряда (3.10) равномерно по t оцениваются через

$$2\pi \int_{X_{N,n}} |(F(\lambda), \varphi_p)|^2 d\lambda.$$

Такой ряд сходится, так как на множестве $X_{N,n}$ функция $F(\lambda)$ заведомо квадратично интегрируема. Этим обосновывается почленный предельный переход в (10).

Наконец, при любом $g \in D$ равномерная оценка интеграла (9) устанавливается дублированием доказательства леммы 1.

Сначала мы установим ПИ для слабых ВО. Обозначим $h_0 = \varphi(H_0)$, $h = \varphi(H)$, $u_0(t) = \exp(-ith_0)$, $u(t) = \exp(-ith)$. Функцию φ будем считать допустимой на Ω по отношению к обоим операторам H_0 и H , $D_0^\pm$ — плотное в $E_0^{(a)}(\Omega_\pm)\mathcal{H}_0$ множество, построенное в лемме 9 (но по оператору H_0).

Теорема 10. В условиях теоремы 2 существуют слабые ВО $\tilde{W}_\pm = \tilde{W}_\pm(h, h_0; J)$, причем

$$\widetilde{W}_\pm(h, h_0; J)E_0(\Omega_\nu) = \widetilde{W}_{\pm\nu}(H, H_0; J)E_0(\Omega_\nu), \quad \nu = \pm. \quad (11)$$

○ Пусть в соотношении (4.5.1) $f_0 = u_0(t)g_0$, $f = u(t)g$, где $g_0 = D_0^{(\nu)}$, $g \in D$. Поскольку по теореме 2 ВО $\tilde{W}_\pm(H, H_0; J) =: \tilde{W}_\pm$ существует, в этом соотношении можно положить $t_1 = 0$, $t_2 = \pm\infty$. Тогда, используя сплетающее свойство, получим равенство

$$\begin{aligned} (\widetilde{W}_\pm g_0, g) - (Ju_0(t)g_0, u(t)g) = \\ = i \int_0^{\pm\infty} (G_0 U_0(s)u_0(t)g_0, GU(s)u(t)g) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Оценим интеграл справа по неравенству Шварца через

$$\left(\int_0^{\pm\infty} \|G_0 U_0(s)u_0(t)g_0\|^2 ds \int_0^{\pm\infty} \|GU(s)u(t)g\|^2 ds \right)^{1/2}.$$

В силу леммы 9 первый сомножитель здесь стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, а второй — равномерно по t ограничен. Теперь искомое утверждение вытекает из равенства (12). •

Оправдание ПИ для сильных ВО основывается на теореме 2.2.1 или на следствии к ней.

Теорема 11. В условиях теорем 5 или 6 существуют сильные ВО $W_\pm(\varphi(H), \varphi(H_0); J)$ и для них выполняется равенство (2.6.11).

○ Пусть, например, выполнены условия теоремы 6. Тогда для H_0, H, J^*J выполняются условия теоремы 2. Следовательно, по теореме 10 существует слабый ВО $\tilde{W}_\pm(h_0, h_0; J^*J)$,

связанный с $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ равенствами вида (11). Воспользуемся теперь равенством (2.2.3), справедливым в условиях теоремы 6. Учитывая еще теорему 10, получим соотношение

$$\tilde{W}_{\pm}^*(h, h_0; J)\tilde{W}_{\pm}(h, h_0; J) = \tilde{W}_{\pm}(h_0, h_0; J^*J). \quad (13)$$

Поэтому по теореме 2.2.1 существуют сильные ВО $W_{\pm}(h, h_0, J)$. Равенства (11) дают (2.6.11).

В условиях теоремы 5 слабые ВО $\tilde{W}_{\pm}(h, h_0; J) = \tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ изометричны на $\mathcal{H}_0^{(a)}$. При условии (2.1.9) эти ВО будут и сильными в силу следствия 2.2.2. •

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРЯМЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

Формульные представления для матрицы рассеяния даются в терминах ядер некоторых операторов, которые понимаются как интегральные (см. п. 3 § 1.5). При этом важно, что с помощью понятия слабой г-адкости можно приписать разумный смысл значениям ядер на диагонали.

1. Обсудим условия того, что какой-либо оператор A является интегральным в диагональном для самосопряженного оператора H разложении гильбертова пространства в прямой интеграл. Точнее, в связи с применениями в теории рассеяния вместо A в разложении (1.5.6) рассматривается оператор PAR , где $P = P_H^{(a)}$. Напомним, что в (1.5.6) $\hat{\sigma}$ —сердцевина спектра оператора H . Через $\mathcal{F}$ обозначается отображение $\mathcal{H}$ на прямой интеграл (1.5.6), действующее унитарно на подпространство $\mathcal{H}^{(a)}$ и равное нулю на $\mathcal{H}^{(s)}$. Как пояснялось в п. 4 § 1.5, оператор A не обязательно предполагать ограниченным. Достаточно считать, что A действует ограничено из $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H)$ в $\mathcal{D}^*$. Тогда A приобретает в $\mathcal{H}$ операторный смысл лишь при окаймлении с обеих сторон резольвентами оператора H .

С позиций теории рассеяния определение 1.5.2 является излишне широким. Дело в том, что значения ядер $a(\mu, \nu)$ интегрального оператора фиксируются им только для п.в. (μ, ν) по двумерной мере Лебега на $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$. В то же время получение формульных представлений матрицы рассеяния требует, чтобы ядру удалось приписать разумный смысл на прямом произведении $\Lambda \times \Lambda$, где $|\hat{\sigma} \setminus \Lambda| = 0$. Для таких ядер можно, в частности,

определить значения на диагонали, хотя она и имеет нулевую двумерную меру. В терминах слабой H -гладкости как раз и дается определение ядра, приспособленное для нужд теории рассеяния. Именно, здесь будут рассматриваться ядра операторов вида

$$A = G^*AG, \quad (1)$$

где A —ограниченный оператор в $\mathfrak{G}$, а $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ является H -гладким в слабом смысле.

С помощью оператора G построим для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$ ограниченное отображение $Z(\lambda) = Z(\lambda; G)$ пространства $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{h}(\lambda)$. Обозначим через Λ_1 множество $\lambda \in \hat{\sigma}$, для которых пределы (1.1) и (1.4) существуют, а через $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda; G)$ —их общее значение. Пусть D —плотное в $\mathfrak{G}$ множество линейных комбинаций элементов φ_i какого-либо базиса, а множество Λ_2 полной в $\hat{\sigma}$ меры состоит из тех $\lambda \in \hat{\sigma}$, для которых определены все функции $(\mathcal{F}G^*\varphi_i)(\lambda)$. На элементах $\varphi \in D$ оператор $Z(\lambda; G)$ можно для $\lambda \in \Lambda_2$ задать равенством

$$Z(\lambda; G)\varphi = (\mathcal{F}G^*\varphi)(\lambda). \quad (2)$$

Функция (2) принадлежит $\mathfrak{H}^{(a)}$, если $G \in \mathfrak{B}$. В общем случае надо иметь в виду указанное в п. 4 § 1.5. распространение отображения $\mathcal{F}$ на весь класс $\mathcal{E}^*$ (или хотя бы на $\mathcal{D}^*$). Из (1.5.7) вытекает, что при $\lambda \in \Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$

$$(Z(\lambda; G)\varphi, Z(\lambda; G)\psi) = (\Delta(\lambda; G)\varphi, \psi). \quad (3)$$

Поскольку оператор $\Delta(\lambda; G)$ ограничен, отсюда следует, что на множестве Λ полной в $\hat{\sigma}$ меры оператор $Z(\lambda; G)$ также ограничен и продолжается по непрерывности на все $\mathfrak{G}$. Кроме того, согласно (3)

$$Z^*(\lambda; G)Z(\lambda; G) = \Delta(\lambda; G). \quad (4)$$

Поясним, что данное определение оператора $Z(\lambda)$ зависит от базиса $\{\varphi_i\}$ вследствие зависимости от него множества Λ , на котором $Z(\lambda)$ определен. Если отображение $\tilde{Z}(\lambda)$ строится при $\lambda \in \tilde{\Lambda}$ по другому базису $\{\tilde{\varphi}_i\}$, то при $\lambda \in \Lambda \cap \tilde{\Lambda}$ обязательно $Z(\lambda) = \tilde{Z}(\lambda)$.

С помощью отображения $Z(\lambda)$ можно «вычислить» пределы (1.9).

Лемма 1. Пусть оператор G —слабо гладкий относительно H . Тогда при любом $f \in \mathcal{H}$ слабая производная

$$\frac{dGE(\lambda)f}{d\lambda} = Z^*(\lambda; G)\tilde{f}(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}. \quad (5)$$

○ Достаточно проверить, что при $\varphi \in D$

$$\frac{d(GE(\lambda)f, \varphi)}{d\lambda} = \langle \tilde{f}(\lambda), Z(\lambda; G)\varphi \rangle.$$

Это равенство прямо вытекает из определения (2) и соотношения (1.5.7). •

Отметим, что для п.в. $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \hat{\sigma}$ пределы (1.1) и (1.4) существуют и равны нулю при любом H -ограниченном операторе G и, в частности, при $G = I$. Распространяя $Z(\lambda; G)$ на $\mathbb{R} \setminus \hat{\sigma}$ нулем, естественно считать это отображение заданным для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ сохраняются равенства (4) и (5).

2. Теперь можно ввести

Определение 2. Пусть оператор $A: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*$ представим в виде (1). Ядром оператора $PA\bar{P}$ в разложении (1.5.6) называется оператор-функция

$$a(\mu, \nu) = Z(\mu; G)AZ^*(\nu; G). \quad (6)$$

Ядро (6) задано на квадрате $\Lambda \times \Lambda$, где множество Λ полной в $\hat{\sigma}$ меры состоит из точек λ , для которых определен оператор $Z(\lambda, G)$. От оператора A множество Λ не зависит. Значение ядра $a(\mu, \nu)$ суть ограниченные отображения $\mathfrak{h}(\nu)$ в $\mathfrak{h}(\mu)$. При этом для $\lambda \in \Lambda$ определено и значение $a(\lambda, \lambda)$ ядра на диагонали. Иногда в условиях определения 2 мы для краткости и сам оператор A называем *интегральным*, а $a(\mu, \nu)$ —его *ядром*.

Определения 2 и 1.5.2, разумеется, согласованы друг с другом.

Лемма 3. Пусть оператор A имеет вид (1), где оператор G —слабо H -гладкий. Тогда оператор A является интегральным, а функция (6)—его ядром в смысле определения 1.5.2.

○ Достаточно убедиться, что для оператор-функции (6) при любых $f, g \in \mathcal{H}^{(a)} \cap \mathcal{D}$ имеет место равенство (1.5.11). Действительно, согласно лемме 1

$$\begin{aligned} (Af, g) &= \int_{\hat{\sigma}} \frac{d}{d\mu} (E(\mu)G^*AGf, g) d\mu = \\ &= \int_{\hat{\sigma}} (AGf, Z^*(\mu; G)\tilde{g}(\mu)) d\mu. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично, при фиксированном $\mu \in \hat{\sigma}$

$$\begin{aligned} (AGf, Z^*(\mu; G)\tilde{g}(\mu)) &= \int_{\hat{\sigma}} \frac{d}{d\nu} (GE(\nu)f, A^*Z^*(\mu; G)\tilde{g}(\mu)) d\nu = \\ &= \int_{\hat{\sigma}} (Z^*(\nu; G)\tilde{f}(\nu), A^*Z^*(\mu; G)\tilde{g}(\mu)) d\nu = \\ &= \int_{\hat{\sigma}} \langle a(\mu, \nu)\tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle d\nu, \end{aligned}$$

где $a(\mu, \nu)$ задается равенством (6). Остается подставить это выражение в (7). •

В условиях определения 2 для формы (Af, g) справедливо и представление (1.5.11) с переставленным порядком интегрирований. Поэтому и оператор A^* оказывается интегральным в смысле определения 1.5.2.

Напомним, что для любого интегрального (в смысле определения 1.5.2) оператора полуторалинейная форма его ядра восстанавливается равенством (1.5.13) при п.в. $(\mu, \nu) \in \hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$. Для операторов (1) это утверждение можно уточнить.

Лемма 4. Пусть оператор A имеет вид (1), где оператор G —слабо H -гладкий, а множество D состоит из линейных комбинаций какого-либо базиса $\{\varphi_i\}$ в $\mathcal{H}$. Тогда на некотором измеримом квадрате $\Lambda \times \Lambda$ полной в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ меры при любых $\varphi, \psi \in D$ выполняется соотношение

$$\langle a(\mu, \nu)\tilde{\varphi}(\nu), \tilde{\psi}(\mu) \rangle = \left(A \frac{d}{d\nu} GE(\nu)\varphi, \frac{d}{d\mu} GE(\mu)\psi \right). \quad (8)$$

○ Пусть Λ_f —множество $\lambda \in \hat{\sigma}$, для которых справедливо равенство (5). Тогда для $\nu \in \Lambda_\varphi, \mu \in \Lambda_\psi$ соотношение (8) прямо вытекает из определения (6). Для любых $\varphi, \psi \in D$ соотношение (8) будет выполняться на квадрате $\Lambda \times \Lambda$, где $\Lambda = \bigcap_i \Lambda_{\varphi_i}$. Множество Λ имеет полную в $\hat{\sigma}$ меру, так как $|\hat{\sigma} \setminus \Lambda_{\varphi_i}| = 0$ в силу леммы 1. •

В силу леммы 4 для элементов $\varphi, \psi \in D$ полуторалинейная форма $\langle a(\mu, \nu)\tilde{\varphi}(\nu), \tilde{\psi}(\mu) \rangle$ восстанавливается равенством (1.5.13) на измеримом квадрате $\Lambda \times \Lambda$ полной в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ меры. Отсюда следует, что само ядро $a(\mu, \nu)$ определяется однозначно на $\Lambda \times \Lambda$, в частности не зависит от факторизации (1). Это утверждение сильнее леммы 1.5.3 благодаря тому, что теперь ядро $a(\mu, \nu)$

строится на множестве полной меры, имеющем структуру прямого произведения.

Приведем еще вариант леммы 4, отвечающий представлению (1.5.9). Напомним, что в терминах этого представления соотношение (1.5.13) принимает вид (1.5.14), где $(\Psi_k y)(\lambda) = \chi_k(\lambda)y$, $y \in \mathfrak{h}_k$, а $\chi_k = \chi \chi_k$ — индикатор какого-либо ограниченного множества $X_k \subset \sigma_k$. Установим предварительно утверждение, дополняющее лемму 1.6.

Лемма 5. Пусть оператор G — слабо H -гладкий. Тогда при п.в. $\lambda \in X_m$ оператор-функция $GE(\lambda)\mathcal{F}^*\Psi_m: \mathfrak{h}_m \rightarrow \mathfrak{G}$ слабо дифференцируема.

○ Достаточно проверить оценку

$$\|GE((\lambda - \eta, \lambda + \eta))\mathcal{F}^*\Psi_m\| \leq C(\lambda)\eta. \quad (9)$$

По определению Ψ_m

$$\|E((\lambda - \eta, \lambda + \eta))\mathcal{F}^*\Psi_m y\|^2 = \int_{\lambda - \eta}^{\lambda + \eta} |(\Psi_m y)(\mu)|^2 d\mu \leq 2\eta|y|^2,$$

что вместе с (1.6) доказывает (9). •

Следующее утверждение получается из леммы 4 при переходе к представлению (1.5.9). Оно распространяет равенство (1.5.14) на измеримый прямоугольник полной меры, который от выбора пары x, y не зависит.

Лемма 6. Пусть оператор A имеет вид (1), где оператор G — слабо H -гладкий. Тогда на некотором измеримом в $X_k \times X_l$ прямоугольнике полной меры при любых $x \in \mathfrak{h}_l, y \in \mathfrak{h}_k$

$$(a(\mu, \nu)x, y) = \left(A \frac{d}{d\nu} GE(\nu)\mathcal{F}^*\Psi_l x, \frac{d}{d\mu} GE(\mu)\mathcal{F}^*\Psi_k y \right). \quad (10)$$

○ На элементах $f = \mathcal{F}^*\Psi_l x$, $g = \mathcal{F}^*\Psi_k y$ равенство (8) принимает вид (10). Можно считать, что (10) выполняется на общем измеримом прямоугольнике полной в $X_k \times X_l$ меры, если x и y образуются из конечных линейных комбинаций элементов каких-либо базисов в $\mathfrak{h}_l$ и $\mathfrak{h}_k$. Кроме того, по определению 2 операторы $a(\mu, \nu): \mathfrak{h}_l \rightarrow \mathfrak{h}_k$ ограничены на прямоугольнике полной меры, а в силу леммы 5 операторы $dGE(\lambda)\mathcal{F}^*\Psi_m/d\lambda$ ограничены для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$. Поэтому соотношение (10) распространяется по непрерывности на все $x \in \mathfrak{h}_l, y \in \mathfrak{h}_k$. •

Описанная схема естественно обобщается на конечные суммы вида

$$A = \sum_{i,j=1}^r A_{ij}, \quad A_{ij} = G_i^* A_{ij} G_j, \quad (11)$$

где операторы $A_{i,j}$ ограничены в $\mathfrak{G}$, а $G_i: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ — слабо H -гладкие. Получающееся при этом ядро $a(\mu, \nu)$ оператора A распадается на сумму ядер отдельных слагаемых:

$$a(\mu, \nu) = \sum_{i,j=1}^r a_{ij}(\mu, \nu), \quad a_{ij}(\mu, \nu) = Z(\mu; G_i) A_{ij} Z^*(\nu; G_j). \quad (12)$$

Отметим, что этот более общий случай можно свести (ср. с замечанием 4.5.3) к случаю операторов вида (1). Для этого надо ввести новое вспомогательное пространство $\mathfrak{G}^{(r)} = \mathfrak{G} \otimes \mathbb{C}^{(r)}$ и положить $Gf = \{G_1f, G_2f, \dots, G_rf\}$. Оператор G оказывается слабо H -гладким в силу леммы 1.5.

3. Ввиду леммы 1.6 в условиях определения 2 соотношение (1.5.13) (см. также его запись (8)) переписывается в виде

$$\langle a(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle A\delta(\nu, \eta)f, \delta(\mu, \varepsilon)g \rangle, \quad (13)$$

п.в. $\mu \in \hat{\sigma}$, п.в. $\nu \in \hat{\sigma}$.

Предел здесь понимается как повторный, причем предельные переходы по ε и η в (13) можно поменять местами. Оказывается, при небольших дополнительных предположениях повторный предел в (13) можно заменить на двойной. Кроме того, рассматривается случай операторов A , зависящих от дополнительного параметра. Соответствующие формулы выпишем для ядер a_{ij} операторов A_{ij} (см. (11), (12)).

Лемма 7. *Предположим, что операторы G_i и G_j являются слабо H -гладкими, а a_{ij} — ядро оператора $A_{ij} = G_i^* A_{ij} G_j$.*

1) Пусть существует один (любой) из сильных пределов

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_j \delta(\lambda, \varepsilon)f, \quad s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_i \delta(\lambda, \varepsilon)g, \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}. \quad (14)$$

Тогда при п.в. $\mu \in \hat{\sigma}$ и п.в. $\nu \in \hat{\sigma}$ существует двойной предел:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \langle A_{ij} \delta(\nu, \eta)f, \delta(\mu, \varepsilon)g \rangle = \langle a_{ij}(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle. \quad (15)$$

2) Пусть существуют оба предела (14), $A_{ij}(\kappa) = G_i^* A_{ij}(\kappa) G_j$ и $A_{ij}(\kappa) \xrightarrow{w} A_{ij}$ при $\kappa \rightarrow 0$. Тогда при п.в. $\mu \in \hat{\sigma}$ и п.в. $\nu \in \hat{\sigma}$ существует тройной предел:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0, \\ \kappa \rightarrow 0}} \langle A_{ij}(\kappa) \delta(\nu, \eta)f, \delta(\mu, \varepsilon)g \rangle = \langle a_{ij}(\mu, \nu) \tilde{f}(\nu), \tilde{g}(\mu) \rangle. \quad (16)$$

○ Поясним, например, первое утверждение. В силу леммы 1.6 второй из пределов (14) существует с заменой $s\text{-}\lim$ на $w\text{-}\lim$. Тем самым при $\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ один из сомножителей в $\langle A_{ij} G_j \delta(\nu, \eta)f, G_i \delta(\mu, \varepsilon)g \rangle$ имеет сильный предел, а второй — слабый. Поэтому существует и двойной предел этого скалярного произведения. Само равенство (15) следует теперь из (13). •

Эта лемма естественно распространяется на п.в. $\mu \in \mathbb{R}$ и п.в. $\nu \in \mathbb{R}$. При этом, как пояснялось в конце п. 1, обе части (15) и (16) равны нулю, если хотя бы одна из переменных μ или ν не принадлежит $\hat{\sigma}$.

§ 5. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

Этот параграф примыкает к § 2.8. В п. 1 и 2 обосновываются соответственно представления для стационарных оператора и матрицы рассеяния, приведенные без доказательства в п. 1 и 2 § 2.8.

1. Представления для формы $(E(X)U_- f_0, U_+ g_0)$ оправдываются по схеме п. 2 § 2. Действительно, все представления п. 1 § 2.8 прямо выводились из соотношения (2.8.1). Поэтому достаточно обосновать только это соотношение. Аналогично (2.7.14) соотношение (2.8.1) разбивается на два асимптотических равенства типа (2.13). Точнее, первое из них совпадает с первым равенством (2.13) для верхнего знака, а второе имеет вид

$$\begin{aligned} (G_0 R_0(\lambda - i\varepsilon) f_0, G\delta(\lambda, \varepsilon) U_+ g_0) &\sim \\ &\sim \pi^{-1} \varepsilon (G_0 R_0(\lambda - i\varepsilon) f_0, GR(\lambda - i\varepsilon) J R_0(\lambda + i\varepsilon) g_0). \end{aligned}$$

Поэтому соотношение (2.8.1) вытекает опять из леммы 2.7. Подчеркнем, однако, что (2.8.1) требует обоих условий (2.10) $_{\pm}$, тогда как в п. 2 § 2 условие (2.10) $_{\pm}$ использовалось лишь «со своим знаком».

Теперь для вывода представления (2.8.2) нужно положить в равенстве (2.7.8) (при нижнем знаке) $f = U_+ g_0$ и учесть (2.8.1). Остальные соотношения п. 1 § 2.8 выводятся из (2.8.2) тождественными преобразованиями. Таким образом, аналогично теореме 2.8 имеет место

Теорема 1. Пусть на плотном в $\mathcal{H}_0$ множестве $\mathcal{M}_0$ выполнены оба условия (2.10) $_{+}$ и (2.10) $_{-}$, и оператор G — слабо H -гладкий. Тогда для $f_0, g_0 \in \mathcal{M}_0$ справедливы представления (2.8.2), (2.8.6), а также представления, получаемые из (2.8.2) учетом тождеств (2.8.3).

Фактически интегралы (2.8.2), (2.8.6) берутся, конечно, лишь по множеству $\hat{\sigma}_0 \cap X$.

2. Представления п. 2 § 2.8 для матрицы рассеяния $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0; J)$ выводятся из (2.8.6). Представление (2.8.7) для полуторалинейной формы $S(\lambda)$ является прямым следствием (2.8.6) и, следовательно, выполняется при тех же условиях.

Представление (2.8.9) $_{\pm}$ требует, чтобы существовал хотя бы слабый предел $T_{\pm}(\lambda + i0)$ операторов (2.8.4) $_{\pm}$, действующих из $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(H_0)$ в $\mathcal{D}_0^*$. Кроме того, требуется, чтобы оператору $P_0 T_{\pm}(\lambda + i0) P_0$ можно было корректно приписать в разложении (2.4.2) ядро в смысле определения 4.2. При этом надо считать, что соответствующие операторы Z_0 определяются равенствами вида (4.2) по унитарному отображению $\mathcal{F}_0$ пространства $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на прямой интеграл (2.4.2) (на $\mathcal{H}_0^{(s)}$ отображение $\mathcal{F}_0$ продолжается нулем).

Пусть выполнено условие (3.3). Тогда существует

$$T_{\pm}(\lambda + i0) := \text{w-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\pm}(\lambda + i\varepsilon) = \tilde{V}_{\pm} - G_0^* B(\lambda + i0) G_0, \quad (1)$$

где

$$\tilde{V}_+ = \tilde{G}_0^* G_0, \quad \tilde{V}_- = G_0^* \tilde{G}_0, \quad \tilde{G}_0 = GJ. \quad (2)$$

Убедимся, что (1), (2) дают для $T_{\pm}(\lambda + i0)$ представление вида (4.11). Следующее утверждение аналогично доказательству теоремы 3.6.

Лемма 2. Пусть оператор G_0 является слабо H_0 -гладким, а $G - |H|^{1/2}$ -ограничен и выполнено условие (3.3). Тогда оператор GJ — слабо H_0 -гладкий.

○ Согласно (3.7)

$$\|GJR_0(z)\| \leq \|GR(z)\| \|J\| + \|B(z)\| \|G_0 R_0(z)\|.$$

Из (3.3) и оценки (1.3) для пар H_0, G_0 и H, G теперь следует, что

$$\varepsilon^{1/2} \|GJR_0(\lambda + i\varepsilon)\| \leq C(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Этим проверяется определение (1.3) слабый H_0 -гладкости оператора GJ . •

Таким образом, по определению 4.2 в условиях леммы 2 оператору $P_0 T_{\pm}(\lambda + i0) P_0$ отвечает в разложении (2.4.2) ядро $t_{\pm}(\mu, \nu; \lambda + i0)$. Согласно (4.12)

$$\begin{aligned} t_+(\mu, \nu; \lambda + i0) &= Z_0(\mu; \tilde{G}_0) Z_0^*(\nu; G_0) - \\ &\quad - Z_0(\mu; G_0) B(\lambda + i0) Z_0^*(\nu; G_0). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение справедливо и для ядра $t_-(\mu, \nu; \lambda + i0)$. Здесь точки λ, μ, ν независимо друг от друга пробегают

некоторое множество полной в $\hat{\sigma}_0$ меры. Следовательно, для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ корректно определен ограниченный в $\mathfrak{h}_0(\lambda)$ оператор $t_{\pm}(\lambda, \lambda; \lambda + i0)$.

Теперь уже нетрудно оправдать искомые представления (2.8.9) $_{\pm}$, которые в точном смысле реализуются в форме соотношений

$$S(\lambda) = u_+(\lambda) - 2\pi i [Z_0(\lambda; \tilde{G}_0) Z_0^*(\lambda; G_0) - Z_0(\lambda; G_0) B(\lambda + i0) Z_0^*(\lambda; G_0)], \quad (3)_+$$

$$S(\lambda) = u_-(\lambda) - 2\pi i [Z_0(\lambda; G_0) Z_0^*(\lambda; \tilde{G}_0) - Z_0(\lambda; G_0) B(\lambda + i0) Z_0^*(\lambda; G_0)]. \quad (3)_-$$

Напомним, что $u_{\pm}(\lambda) : \mathfrak{h}_0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}_0(\lambda)$ — семейство операторов, в которое переходит в разложении (2.4.2) оператор $U_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$, коммутирующий с H_0 .

Теорема 3. Пусть на плотном в $\mathcal{H}_0$ множестве M_0 справедливы оба условия (2.10) $_{+}$, (2.10) $_{-}$, оператор G_0 — слабо H_0 — гладкий, а оператор $G = |H|^{1/2}$ — ограничен и выполнено условие (3.3). Тогда для стационарной матрицы рассеяния при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ имеют место оба представления (2.8.9) $_{\pm}$, (3) $_{\pm}$.

○ Будем исходить из представления (2.8.7), справедливого в силу теоремы 1. Ввиду леммы 1.5.1 достаточно при $f_0, g_0 \in M_0$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ проверить соотношение (2.8.8). Воспользуемся леммой 4.7. Согласно (1) оператор $P_0 T_{\pm} P_0$ состоит из двух слагаемых. При условиях (2.10) $_{\pm}$ из (4.15) вытекает, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} (V_+ \delta_0(\nu, \eta) f_0, \delta(\mu, \varepsilon) g_0) = (Z_0^*(\nu; G_0) \tilde{f}_0(\nu), Z_0^*(\mu; \tilde{G}_0) \tilde{g}_0(\mu)).$$

Аналогичное равенство получается и при замене V_+ на V_- . Кроме того, при условиях (2.10) $_{\pm}$ и (3.3) из (4.16) вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0, \\ \kappa \rightarrow 0}} (G_0^* B(\lambda + i\kappa) G_0 \delta(\nu, \eta) f_0, \delta(\mu, \varepsilon) g_0) = \\ = (B(\lambda + i0) Z_0^*(\nu; G_0) \tilde{f}_0(\nu), Z_0^*(\mu; G_0) \tilde{g}_0(\mu)). \end{aligned}$$

Полагая теперь в этих равенствах $\lambda = \mu = \nu, \varepsilon = \eta = \kappa$ и вспоминая определение ядра $t_{\pm}$, получим искомое соотношение (2.8.8). •

Согласно теореме 3.6 в условиях теоремы 3 существуют сильные нестационарные ВО, совпадающие со стационарными.

Поэтому соотношения $(2.8.9)_{\pm}$ (или $(3)_{\pm}$) можно рассматривать и как представления для нестационарной матрицы рассеяния. Для изометрического на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ выполнено $u_{\pm}(\lambda) = I(\lambda)$, так что $(2.8.9)_{\pm}$ сводится к $(2.8.10)_{\pm}$.

3. Остановимся специально на случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, J = I$, когда $T_+ = T_-$ и, следовательно, представления $(3)_+$ и $(3)_-$ сливаются, т.е.

$$S(\lambda) = I - 2\pi i [Z_0(\lambda; G_0)Z_0^*(\lambda; G) - Z_0(\lambda; G_0)B(\lambda + i0)Z_0^*(\lambda; G_0)]. \quad (4)$$

При этом в силу симметрии возмущения

$$Z_0(\lambda; G_0)Z_0^*(\lambda; G) = Z_0(\lambda; G)Z_0^*(\lambda; G_0).$$

При небольших дополнительных предположениях представление для $S(\lambda)$ можно записать в терминах оператора

$$\tilde{B}(z) = G_0 R(z) G^*, \quad (5)$$

что иногда удобнее. Будем сейчас считать, что при $\theta_0 + \theta = 1$ операторы G_0 и G соответственно $|H_0|^{\theta_0}$ - и $|H_0|^{\theta}$ -ограничены, а потому при $\text{Im } z \neq 0$ оператор (5) корректно определен.

Теорема 4. Пусть выполнены условия обеих лемм 2.6 и 2.6'. Предположим также, что для п.в. λ существуют слабые пределы $B(\lambda + i0)$ операторов $B(\lambda + i\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а на элементах f_0 из плотного множества $\mathcal{M}_0$ при обоих знаках

$$\exists \text{ s-lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} G R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0. \quad (6)$$

Тогда существуют и полны сильные нестационарные волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0)$, а для соответствующей матрицы рассеяния при п.в. λ справедливо представление

$$S(\lambda) = I - 2\pi i Z_0(\lambda; G)(I - \tilde{B}(\lambda + i0))Z_0^*(\lambda; G_0). \quad (7)$$

○ Существование и полнота ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ вытекает из следствия 2.12 и теоремы 3.5. Теорема 1 показывает, что на $\mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_0$ справедливо представление (2.8.7). Вычислим предел его правой части при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку G_0 и G являются H_0 -гладкими, то операторы $Z_0(\lambda; G_0)$ и $Z_0(\lambda; G)$ при п.в. λ корректно определены. Теперь на основании леммы 4.7 из соотношений $(2.10)_{\pm}$ и (6) вытекает, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T(\lambda \pm i\varepsilon)\delta_0(\lambda, \varepsilon)f_0, \delta_0(\lambda, \varepsilon)g_0) = \\ = ((I - \tilde{B}(\lambda + i0))Z_0^*(\lambda; G_0)\tilde{f}_0(\lambda), Z_0^*(\lambda; G)\tilde{g}_0(\lambda)). \end{aligned}$$

Для доказательства (7) остается воспользоваться леммой 1.5.1.

Теорему 4 можно сформулировать существенно короче, если предположить, что в факторизации (1.9.2) сомножители G_0 и G связаны соотношением

$$G_0 = \mathcal{V}G, \quad \mathcal{V}' = \mathcal{V}^* \in \mathfrak{B}. \quad (8)$$

Тогда (1.9.2) принимает вид

$$V = G^* \mathcal{V}G. \quad (9)$$

Возмущение (9) автоматически будет формально симметричным. Предположение (8) позволяет все условия сформулировать в терминах одного оператора G . Представления (4) и (7) при этом совпадают. Именно, верна

Теорема 4'. *Предположим, что выполняются соотношения (8) и (9), где оператор $G - |H_0|^{1/2}$ -ограничен. Пусть оператор G — слабо H_0 -гладкий, справедливы условия (6), (3.3), а также на элементах f из плотного множества $\mathcal{M}$*

$$\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} GR(\lambda \pm i\epsilon)f.$$

Тогда существуют и полны ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ и

$$S(\lambda) = I - 2\pi i Z_0(\lambda; G) \mathcal{V} [I - B(\lambda + i0) \mathcal{V}] Z_0^*(\lambda; G), \quad \text{п.в. } \lambda. \quad (10)$$

В заключение отметим, что при принятом в конце п. 1 § 4 соглашении для операторов (4), (7) и (10) будет $S(\lambda) = I$ при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \hat{\sigma}_0$. То же верно и в условиях теоремы 3, если положить $u_{\pm}(\lambda) = I$ при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \hat{\sigma}_0$.

§ 6. ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ

Мы покажем здесь как с помощью ВО строится спектральное представление оператора $H^{(a)}$. Кроме того, устанавливается связь между разложениями в прямые интегралы, отвечающими операторам $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$.

1. Пусть $\mathcal{U}: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ —какой-либо ограниченный оператор, удовлетворяющий сплетающему свойству

$$E(X)\mathcal{U} = \mathcal{U}E_0(X) \quad (1)$$

и такой, что $R(\mathcal{U}) \subset \mathcal{H}^{(a)}$, $\mathcal{H}_0^{(s)} \subset N(\mathcal{U})$. Предположим, что фиксировано унитарное отображение $\mathcal{F}_0$ пространства $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на

прямой интеграл (2.4.2); на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ это отображение, как всегда, продолжается нулем. Через A обозначаем оператор умножения на λ в $\mathfrak{H}_0^{(a)}$; его спектральный проектор $E_A(X)$ — умножение на характеристическую функцию множества X . Согласно (1) для оператора

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \mathcal{U}^*: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}_0^{(a)} \quad (2)$$

выполняется сплетающее свойство

$$\mathcal{F} E(X) = E_A(X) \mathcal{F}. \quad (3)$$

Поскольку $\mathcal{F}_0^* \mathcal{F}_0 = P_0$, оператор $\mathcal{U}$ восстанавливается по $\mathcal{F}$ равенством

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}^* \mathcal{F}_0. \quad (4)$$

Если операторы $\mathcal{U}: \mathcal{H}_0^{(a)} \rightarrow \mathcal{H}^{(a)}$ и, следовательно, $\mathcal{F}: \mathcal{H}^{(a)} \rightarrow \mathfrak{H}_0^{(a)}$ унитарны, то $\mathcal{F}$ реализует переход в спектральное представление оператора $H^{(a)}$, причем $\mathfrak{H}^{(a)} = \mathfrak{H}_0^{(a)}$. Согласно (3) при $u \in \mathfrak{h}(\lambda)$ "элемент" $\mathcal{F}^* u$ можно интерпретировать как обобщенный "собственный вектор" оператора H , отвечающий "собственному числу" λ .

Пусть теперь $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\pm}$ является волновым оператором. Будем считать, что выполнены условия определения 2.7.2 и, следовательно, в силу теоремы 2.4 корректно определен стационарный ВО $\mathcal{U}_{\pm} = \mathcal{U}_{\pm}(H, H_0; J)$. Получим для $\mathcal{F}_{\pm} = \mathcal{F}_0 \mathcal{U}_{\pm}^*$ явное выражение в терминах спектрального разложения оператора H_0 и резольвенты оператора H . Пусть выполняются условия леммы 2.6'. Тогда представление (2.7.5) для полуторалинейной формы ВО $\mathcal{U}_{\pm}$ справедливо на множестве $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{M}$. Учитывая выражение (2.7.10) для подынтегральной функции и соотношения (1.3.11), (1.4.11), запишем (2.7.5) в виде

$$(\mathcal{U}_{\pm} f_0, f) = (J P_0 f_0, f) - \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (V \delta_0(\lambda, \varepsilon) f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon) f) d\lambda, \quad (5)$$

где $V = G^* G_0$. В условиях леммы 2.6' для п.в. λ корректно определен оператор $Z_0(\lambda; G_0)$. Поэтому согласно леммам 1.6 и 4.1 подынтегральное выражение в (5) равно

$$(\tilde{f}_0(\lambda), Z_0(\lambda; G_0) G R(\lambda \pm i0) f), \quad \tilde{f}_0 = \mathcal{F}_0 f_0,$$

где через $G R(\lambda \pm i0) f$ обозначается сильный предел $G R(\lambda \pm i\varepsilon) f$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $\tilde{f}_0 = \mathcal{F}_0 f_0$. Подставляя это выражение в (5) и

пользуясь (4), найдем, что

$$(\tilde{f}_0, \mathcal{F}_\pm f)_{\mathfrak{H}_0^{(a)}} = (\tilde{f}_0, \mathcal{F}_0 J^* f)_{\mathfrak{H}_0^{(a)}} - \int_{\hat{\sigma}_0} \langle \tilde{f}_0(\lambda), Z_0(\lambda; G_0) GR(\lambda \pm i0) f \rangle d\lambda.$$

Ввиду произвольности $\tilde{f}_0 \in \mathfrak{H}_0^{(a)}$ отсюда вытекает, что

$$(\mathcal{F}_\pm f)(\lambda) = (\mathcal{F}_0 J^* f)(\lambda) - Z_0(\lambda; G_0) GR(\lambda \pm i0) f, \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}_0. \quad (6)$$

Отметим, что при сделанных предположениях вектор-функция (6) корректно определена для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ и квадратично интегрируема по $\hat{\sigma}_0$.

Для изометричного и полного ВО $\mathcal{U}_\pm$ отображение $\mathcal{F}_\pm : \mathcal{H}^{(a)} \rightarrow \mathfrak{H}_0^{(a)}$ оказывается унитарным. Подведем итог нашим рассуждениям. От леммы 2.6' и следствия 2.12 формулируемая теорема отличается по существу лишь изменением точки зрения:

Теорема 1. В условиях леммы 2.6' определим на множестве $\mathcal{M}$ оператор $\mathcal{F}_\pm : \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}_0^{(a)}$ равенством (6). Тогда оператор $\mathcal{F}_\pm$ ограничен, $\mathcal{F}_\pm f = 0$ при $f \in \mathcal{H}^{(s)}$, выполняется сплетающее свойство (3) и $\mathcal{F}_\pm$ связан со стационарным ВО $\mathcal{U}_\pm$ равенствами (2) и (4), где $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\pm$. В условиях следствия 2.12 оператор $\mathcal{F}_\pm$ унитарно отображает $\mathcal{H}^{(a)}$ на $\mathfrak{H}_0^{(a)}$ и, следовательно, реализует спектральное представление оператора $H^{(a)}$.

2. В § 7.1 нам понадобится строить в разложении (2.4.2) ядра $\tilde{a}(\mu, \nu)$ операторов $\tilde{A} = \mathcal{U}^* A \mathcal{U}$, где ограниченный $\mathcal{U}$ удовлетворяет сплетающему свойству (1). Относительно A предполагается, что

$$A = G_1^* A G_1 \quad (7)$$

при слабо H -гладком операторе G_1 и $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$. Тогда, проверяя, например, условие (1.3), найдем, что оператор $G_1 \mathcal{U}$ будет слабо H_0 -гладким. Поэтому ядро $\tilde{a}(\mu, \nu)$ корректно задается определением 4.2 на измеримом квадрате полной меры. При этом

$$\tilde{a}(\mu, \nu) = Z(\mu; G_1) A Z^*(\nu; G_1), \quad (8)$$

где согласно (4.2)

$$Z(\lambda; G_1) \varphi = (\mathcal{F} G_1^* \varphi)(\lambda), \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \mathcal{U}^*, \quad \varphi \in D. \quad (9)$$

Наша цель здесь — найти связь операторов (9) с операторами Z_0 , отвечающими отображению $\mathcal{F}_0$.

Для сокращения записи нам иногда будет удобно пользоваться формальным обозначением $Z_0(\lambda)$, определяемым равенством $Z_0(\lambda)f = (\mathcal{F}_0 f)(\lambda)$. Отображение $Z_0(\lambda): \mathcal{H}_0^{(a)} \rightarrow \mathfrak{h}_0(\lambda)$ приобретает точный смысл в произведении с G_0^* , если оператор G_0 — слабо H_0 -гладкий; при этом $Z_0(\lambda)G_0^* = Z_0(\lambda; G_0)$. Аналогичным образом вводится и формальное отображение $Z(\lambda)$, $Z(\lambda)f = (\mathcal{F}f)(\lambda)$.

Будем теперь считать, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\pm}$ — стационарный ВО для пары H_0, H и отождествления J , и, следовательно, отображение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\pm}$ задается равенством (6). Тогда для соответствующего оператора $Z_{\pm}(\lambda)$ будет выполняться формальное соотношение

$$Z_{\pm}(\lambda) = Z_0(\lambda)(J^* - V^* R(\lambda \pm i0)). \quad (10)$$

Точный смысл ему придается в рамках предположений типа теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия леммы 2.6', операторы G и G_1 ограничены относительно $|H|^{\theta}$ и $|H|^{\theta_1}$, где $\theta + \theta_1 \leq 1$,

$$\exists \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} GR(\lambda \pm i\varepsilon)G_1^* =: GR(\lambda \pm i0)G_1^*$$

и, кроме того, оператор $G_1 J$ — слабо H_0 -гладкий. Тогда для оператора (9) имеет место представление

$$Z_{\pm}(\lambda; G_1) = Z_0(\lambda; G_1 J) - Z_0(\lambda; G_0)(GR(\lambda \pm i0)G_1^*), \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}_0. \quad (11)$$

3. В диагональном для оператора $H_0^{(a)}$ представлении любой коммутирующий с ним оператор (и, в частности, оператор рассеяния) действует как умножение на оператор-функцию. Аналогичное утверждение справедливо для ВО. Будем сейчас считать, что заданы унитарные отображения $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$ пространств $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$ на прямые интегралы $\mathfrak{H}_0^{(a)}$ и $\mathfrak{H}^{(a)}$ соответственно, причем на $\mathcal{H}_0^{(s)}$ и $\mathcal{H}^{(s)}$ эти отображения продолжены как нулевые.

Предложение 3. Пусть для ограниченного оператора $U: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ выполнено сплетающее свойство (1). Тогда оператор

$$\mathcal{F}U\mathcal{F}_0^*: \mathfrak{H}_0^{(a)} \rightarrow \mathfrak{H}^{(a)} \quad (12)$$

действует как умножение на некоторую оператор-функцию $u(\lambda): \mathfrak{h}_0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}(\lambda)$. При этом

$$\|\mathcal{U}\| = \operatorname{vrai\,sup}_{\lambda \in \hat{\sigma}_0} |u(\lambda)|$$

и для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0 \setminus \hat{\sigma}$ отображения $u(\lambda)$ должны быть нулевыми. Если оператор $\mathcal{U}$ унитарно отображает $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на $\mathcal{H}^{(a)}$, то операторы $u(\lambda): \mathfrak{h}_0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}(\lambda)$ унитарны для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}$.

○ Если операторы $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$ унитарно эквивалентны, то можно считать, что $\mathfrak{h}_0(\lambda) = \mathfrak{h}(\lambda)$ для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}$. Тогда оператор (12) коммутирует с умножением на λ в прямом интеграле $\mathfrak{H}_0^{(a)} = \mathfrak{H}^{(a)}$. Тем самым (см. п. 1 § 1.5) он действует как умножение на $u(\lambda)$ в $\mathfrak{h}_0(\lambda) = \mathfrak{h}(\lambda)$. Общий случай сводится к рассмотренному, так как в силу теоремы 2.1.6 унитарно эквивалентными будут сужения операторов H_0 и H на подпространства $(\mathcal{H}_0 \ominus N(\mathcal{U})) \cap \mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\overline{R(\mathcal{U})} \cap \mathcal{H}^{(a)}$ соответственно. •

§ 7. РАССЕЯНИЕ ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Мы выяснили в § 4.6, что в случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ в рамках гладких предположений все нужные для построения теории рассеяния свойства возмущения можно извлечь из надлежащих условий, формулируемых только по отношению к свободному гамильтониану. Сейчас тот же метод применяется в более широкой обстановке. Сначала мы приведем общее утверждение (теорема 1), дающее условия существования и полноты ВО и обеспечивающее справедливость стационарного представления для матрицы рассеяния. Теорема 1 объединяет гладкий и ядерный варианты, однако, как и остальные утверждения этой главы, полуэффektivна. Из теоремы 1 прямо вытекает более конкретная теорема 2, непосредственно применимая (см. далее п. 4 § 6.4) в предположениях ядерного типа.

1. Будем считать, что в факторизации (1.9.2) сомножители G_0 и G являются соответственно $|H_0|^{\theta_0}$ - и $|H_0|^\theta$ -ограниченными, причем $\theta_0 + \theta = 1$, $\theta_0 \in [1/2, 1]$. Впрочем, это предположение можно стандартным образом ослабить—см. п. 5 § 1.9. Пусть при $\operatorname{Im} z \neq 0$ существует и ограничен оператор (1.9.18). Тогда

по теореме 1.10.3 существует и единственен оператор H , удовлетворяющий определению 1.9.2. Для его резольвенты справедливо представление (1.9.15). Далее мы пользуемся обозначениями (4.6.2) и (5.5). Все эти операторы корректно определены и согласно тождеству (1.9.14)

$$I - \tilde{B}(z) = (I - B_0(z))^{-1}. \quad (1)$$

В этом параграфе различные условия накладываются сразу при обоих знаках $\pm$, что обеспечивает существование обоих ВО $W_{\pm}$.

Теорема 1. Пусть для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют слабые пределы операторов $B^{(0)}(\lambda \pm i\varepsilon)$, оператор G_0 — слабо H_0 -гладкий, а для элементов f_0 из какого-либо плотного в $\mathcal{H}$ множества $\mathcal{M}_0$ выполнены условия (2.10) $_{\pm}$ и (5.6). Предположим, кроме того, что для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют пределы по норме операторов $B_0(\lambda \pm i\varepsilon)$, причем

$$\exists (I - B_0(\lambda \pm i0))^{-1} \in \mathfrak{B}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Тогда существуют и полны ВО $W_{\pm}(H, H_0)$, а для соответствующей матрицы рассеяния при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ справедливо представление

$$S(\lambda; H, H_0) = I - 2\pi i Z_0(\lambda; G)(I - B_0(\lambda + i0))^{-1} Z_0^*(\lambda; G_0). \quad (3)$$

○ Будем исходить из теоремы 5.4. Те ее условия, которые формулируются по отношению к оператору H_0 , предполагаются и сейчас. Поэтому нужно лишь проверить условия, формулируемые по отношению к H . В силу (1) из условия (2) вытекает, что существуют пределы (по норме) операторов $\tilde{B}(\lambda \pm i\varepsilon)$. Аналогичным образом, в силу равенства (4.6.3) существуют слабые пределы операторов $B(\lambda \pm i\varepsilon)$, так что заведомо оператор G — слабо H -гладкий. Далее, согласно резольвентному тождеству

$$GR(z)f_0 = (I - B_0^*(\bar{z}))^{-1} GR_0(z)f_0. \quad (4)$$

По условию (5.6) при $f_0 \in \mathcal{M}_0$ элемент $GR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0$ имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ сильный предел, а обратный оператор сходится по норме. Отсюда следует, что вектор-функция (4) имеет сильный предел. Таким образом выполняются все условия теоремы 5.4. Поэтому ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны, а для матрицы рассеяния справедливо представление (5.7). Согласно (1) его можно переписать в виде (3). •

При дополнительном условии (5.8) эту теорему можно сформулировать короче.

Теорема 1'. Пусть при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют пределы по норме $B^{(0)}(\lambda \pm i0)$ операторов $B^{(0)}(\lambda \pm i\varepsilon)$, причем

$$\exists(I + \mathcal{V}B^{(0)}(\lambda \pm i0))^{-1} \in \mathfrak{B}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

а также выполнено условие (5.6). Тогда существуют и полны во $W_{\pm}(H, H_0)$ и

$$S(\lambda; H, H_0) = I - 2\pi i Z_0(\lambda; G)(I + \mathcal{V}B^{(0)}(\lambda + i0))^{-1} \mathcal{V}Z_0^*(\lambda; G), \quad (6)$$

$$\text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}_0.$$

Отметим, что входящие в (6) операторы связаны соотношением

$$Z_0^*(\lambda; G)Z_0(\lambda; G) = B^{(0)}(\lambda + i0) - B^{(0)}(\lambda - i0), \quad (7)$$

прямо вытекающим из (4.4). Равенство (6) корректно на множестве полной меры, где заданы операторы $Z_0(\lambda; G)$ и существуют операторы (5). В силу равенства $(B^{(0)}(z))^* = B^{(0)}(\bar{z})$, наряду с (5), существуют и операторы

$$(I + B^{(0)}(\lambda \pm i0)\mathcal{V})^{-1}, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Поэтому (6) можно еще переписать в виде

$$S(\lambda; H, H_0) = I - 2\pi i Z_0(\lambda; G)\mathcal{V}(I + B^{(0)}(\lambda + i0)\mathcal{V})^{-1}Z_0^*(\lambda; G), \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}_0. \quad (9)$$

2. Практическое применение теоремы 1 осложняется, конечно, трудностью проверки условия (2). Одно из эффективных достаточных условий его справедливости дается теоремой 4.6.2, где требуется, чтобы оператор-функция $B_0(z)$ была непрерывна вплоть до вещественной оси и $B_0^{(l)}(z) \in \mathfrak{S}_{\infty}$ для какого-либо натурального l . Напомним, что условие (2) выводилось отсюда с помощью теоремы 1.8.3 об обращении голоморфной оператор-функции. Приведем теперь другой эффективный вариант, основанный на теореме 1.8.5. Отметим, что в условиях следующего утверждения существование и ограниченность оператора (1.9.18) вытекают из леммы 1.10.5 и следствия 1.10.6. Поэтому, как и в п. 1, самосопряженный оператор H корректно определен.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 предположение (2) заменено следующим. Оператор-функция $B_0(z)$ имеет по норме угловые предельные значения при $z \rightarrow \lambda \pm i0$ для п.в. λ . Кроме того, $B_0^l(z) \in \mathfrak{S}_p$ при каких-либо натуральных l и p , и $B_0^l(z)$ имеет угловые предельные значения при $z \rightarrow \lambda \pm i0$ в $\mathfrak{S}_p$ для п.в. λ . Тогда сохраняются все заключения теоремы 1.

○ При сделанных предположениях о существовании угловых предельных значений $B_0(z)$ и $B_0^l(z)$ условие (2) прямо вытекает из теоремы 1.8.5. •

В предположении (5.8) эта теорема тоже формулируется короче.

Теорема 2'. Пусть оператор-функция $B^{(0)}(z)$ имеет по норме угловые предельные значения при $z \rightarrow \lambda \pm i0$ для п.в. λ . Кроме того, пусть $(B^{(0)}(z))^l \in \mathfrak{S}_p$ при каких-либо натуральных l и p , и $(B^{(0)}(z))^l$ имеет угловые предельные значения при $z \rightarrow \lambda \pm i0$ в $\mathfrak{S}_p$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Дополнительно предположим, что выполняется условие (5.6). Тогда справедливы все заключения теоремы 1'.

§8. ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ СТАЦИОНАРНОЙ СХЕМЫ

Обсудим здесь кратко распространение результатов предыдущих параграфов на локальные ВО.

1. Пусть Λ —произвольное борелевское множество на спектральной оси. Стационарным волновым оператором $U_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda) =: U_{\pm}(J, \Lambda)$ называется оператор, задаваемый полуторалинейной формой:

$$(U_{\pm}(J, \Lambda)f_0, f) = \int_{\Lambda} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \epsilon (J R_0(\lambda \pm i\epsilon)f_0, R(\lambda \pm i\epsilon)f) d\lambda. \quad (1)$$

Изучение локальных ВО новых соображений не требует. Результаты о них легко получаются заменой $\mathbb{R}$ на Λ во всех рассуждениях §§ 1–7. При этом различные предположения также накладываются только на множестве Λ (для п.в. $\lambda \in \Lambda$).

Так, определение (1) корректно, если предел под знаком интеграла существует для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Слабая H -гладкость на Λ , по определению, означает, что одно из (а тогда и все) условий (1.1)—(1.6) выполнено для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Если сомножитель G —слабо H -гладкий на Λ и условие (2.10) $_{\pm}$ справедливо для п.в. $\lambda \in \Lambda$, то для формы $(U_{\pm}(J, \Lambda)f_0, U_{\pm}(J, \Lambda)g_0)$ будет выполняться

представление $(2.7.11)_{\pm}$, где надо считать, что интеграл в правой части берется по множеству Λ . Оператор $U_{\pm}(J, \Lambda)$ изометричен на $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}_0$, если условие $(2.15)_{\pm}$ справедливо для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Как и раньше, из $(2.7.11)_{\pm}$ следует, что

$$U_{\pm}^*(J, \Lambda)U_{\pm}(J, \Lambda) = U_{\pm}(H_0, H_0; J^*J, \Lambda).$$

Для локальных ВО это соотношение играет роль (2.7.16). Сохраняется и связь с нестационарными локальными ВО, определяемыми соотношениями (2.2.5) и (2.2.6).

Представления для формы $(E(X)U_{-}(J, \Lambda)f_0, U_{+}(J, \Lambda)g_0)$ получаются из соответствующих представлений § 2.8 ограничением интегрирований на множество $X \cap \Lambda$. В частности, в представлениях для формы локального оператора рассеяния $S(J, \Lambda) = U_{+}^*(J, \Lambda)U_{-}(J, \Lambda)$ интегралы берутся по Λ . Отсюда выводятся и выражения для матрицы рассеяния $S(\lambda)$, отвечающей $S(J, \Lambda)$. Например, если на Λ выполняются условия теоремы 5.3, то при п.в. $\lambda \in \Lambda \cap \hat{\sigma}_0$ для $S(\lambda)$ верны представления $(2.8.9)_{\pm}$ (или $(5.3)_{\pm}$). Приведем для примера локальный вариант теоремы 7.1'.

Теорема 1. Пусть условия теоремы 7.1' выполняются на борелевском множестве Λ . Тогда существуют и полны локальные ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ и для матрицы рассеяния при п.в. $\lambda \in \Lambda \cap \hat{\sigma}_0$ справедливо представление (7.6).

2. Вводя новое отождествление $\tilde{J}$, локальный ВО можно свести к глобальному. Именно, согласно (2.4)

$$U_{\pm}(J, \Lambda) = U_{\pm}(\tilde{J}): = U_{\pm}(H, H_0; \tilde{J}), \quad (2)$$

где $\tilde{J} = E(X)JE_0(X_0)$, а X_0, X —какие-либо борелевские множества, для которых $X_0 \cap X = \Lambda$; при этом левая и правая части (2) существуют одновременно. Такая редукция оказывается зачастую (например, в ядерной теории рассеяния—см. § 6.4) очень полезной. Однако вывод свойств локальных ВО $U_{\pm}(J, \Lambda)$ из соответствующих результатов о ВО $U_{\pm}(\tilde{J})$ требует предположений для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, а получаемые формулы зависят от X_0 и X .

Поясним это на примере представления вида $(2.7.11)_{\pm}$. При $HJ - JH_0 = G^*G_0$ и $\tilde{G}_0 = G_0E_0(X_0)$, $\tilde{G} = GE(X)$, будет $H\tilde{J} - \tilde{J}H_0 = \tilde{G}^*\tilde{G}_0^*$. Пусть условие $(2.10)_{\pm}$ для $\tilde{G}_0$ выполняется при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, а оператор $\tilde{G}$ —слабо H -гладкий (на всей

оси). Тогда согласно (2) форма $(\mathcal{U}_{\pm}(J, \Lambda)f_0, \mathcal{U}_{\pm}(J, \Lambda)g_0)$ представляется правой частью $(2.7.11)_{\pm}$, где роль J играет $\tilde{J}$. В силу леммы 2.1, примененной к паре H_0, H_0 и отождествлению $J^*E(X)J$, это представление можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_{\pm}(J, \Lambda)f_0, \mathcal{U}_{\pm}(J, \Lambda)g_0) = \\ &= \int_{X_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon (E(X)JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0) d\lambda. \end{aligned}$$

При $X_0 = \Lambda, X = \mathbb{R}$ оно совпадает с выражением левой части, получаемым при последовательном учете (см. п. 1) локальности.

В некоторых случаях условия относительно операторов $\tilde{G}_0$ и $\tilde{G}$ можно извлечь из аналогичных предположений, формулируемых в терминах G_0 и G на множестве Λ . Так, это возможно при $X_0 = X = \Lambda$ и некоторых условиях относительно структуры множества Λ (например, если Λ —конечное объединение интервалов).

Глава 6

РАССЕЯНИЕ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЯДЕРНОГО ТИПА

В абстрактной теории рассеяния рассмотрение ядерных возмущений занимает центральное место. Это связано с унитарной инвариантностью формулируемых здесь условий существования и полноты ВО.

При построении теории рассеяния для ядерных возмущений мы параллельно пользуемся двумя подходами. Первый из них, стационарный, основан на проверке в § 1 условий предыдущей главы. Тем самым ядерная теория рассеяния укладывается в общую стационарную схему гл. 5. Обсуждение исходного результата ядерной теории, теоремы Като—Розенблюма, составляет § 2. Здесь же приводится обобщение этой теоремы на случай пары пространств. Второй подход, излагаемый в § 3, дает прямое доказательство существования пределов в нестационарном определении ВО. Это доказательство сравнительно коротко, но его вряд ли можно назвать прозрачным.

Следующие §§ 4, 5 посвящены различным обобщениям теоремы Като—Розенблюма. Эти обобщения необходимы, в частности, для применения ядерных методов к теории дифференциальных операторов. В качестве примера мы ограничиваемся рассмотрением в § 6 возмущения оператора умножения интегральным оператором типа Фурье. В § 7 излагается дополнительная информация, справедливая для одномерного возмущения. Наконец, в § 8 конспективно описывается аппарат двойных операторных интегралов Стилтеса, удобный, например, для

исследования разности функций двух самосопряженных операторов.

Стационарный подход позволяет в рамках ядерных предположений оправдать формульные представления §§ 2.7 и 2.8. Их подробное рассмотрение, а также изучение свойств матрицы рассеяния откладываются, однако, до гл. 7.

§ 1. СЛАБАЯ ГЛАДКОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА

В этом параграфе мы установим, что для произвольного самосопряженного оператора H и любого оператора Гильберта—Шмидта оператор-функция $GE(\lambda)G^*$ дифференцируема по ядерной норме для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Отсюда, конечно, следует, что в слабом смысле G является гладким относительно H . Кроме того, как выясняется, в классе Гильберта—Шмидта произведение $GR(\lambda \pm i\varepsilon)G^*$ имеет предельные значения при $\varepsilon \rightarrow 0$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Тем самым ядерная теория рассеяния может быть уложена в стационарную схему предыдущей главы.

1. Остановимся здесь на некоторых специальных свойствах идеалов $\mathfrak{S}_p$, $1 \leq p < \infty$, состоящих из компактных операторов с конечной величиной (1.6.10).

Лемма 1. *Любой оператор $A \in \mathfrak{S}_p$ можно представить в виде $A = TB$ (или $A = BT$), где $B \in \mathfrak{S}_p$, а $T \in \mathfrak{S}_\infty$.*

○ Будем исходить из разложения Шмидта (1.6.3) оператора $A \in \mathfrak{S}_p$. Последовательность его s -чисел $s_n \in l_p$ можно (см., например, [24]) записать в виде $s_n = \sigma_n \tau_n$, где по-прежнему $\sigma_n \in l_p$, а $\tau_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Ясно, что для операторов

$$B = \sum_n \sigma_n(\cdot, \varphi_n) \varphi_n, \quad T = \sum_n \tau_n(\cdot, \varphi_n) \psi_n$$

будет $TB = A$. •

Лемма 2. *Если $A \in \mathfrak{B}$ и для любого $T \in \mathfrak{S}_\infty$ произведение $AT \in \mathfrak{S}_p$ (или $TA \in \mathfrak{S}_p$), где $p < \infty$, то обязательно $A \in \mathfrak{S}_p$.*

○ Если заранее известно, что $A \in \mathfrak{S}_\infty$, то можно, как и в лемме 1, воспользоваться представлением (1.6.3) для A и взять T в виде $T = \sum \tau_n(\cdot, \varphi_n) \varphi_n$. Сингулярные числа AT равны $s_n \tau_n$. Остается учесть (см. опять [24]), что $s_n \in l_p$, если $s_n \tau_n \in l_p$ для любой последовательности $\tau_n \rightarrow 0$.

Для доказательства того, что $A \in \mathfrak{S}_\infty$, установим компактность его модуля $|A|$. Ввиду равенства $s_n(AT) = s_n(|A|T)$ при любом $T \in \mathfrak{S}_\infty$ будет $|A|T \in \mathfrak{S}_p$. Если $|A| \notin \mathfrak{S}_\infty$, то для некоторого $\gamma > 0$ подпространство $\mathcal{H}_\gamma = E_{|A|}(\gamma, \infty)\mathcal{H}$ бесконечномерно. Поэтому найдется компактный оператор $T: \mathcal{H}_\gamma \rightarrow \mathcal{H}_\gamma$, не попадающий в класс $\mathfrak{S}_p$. По условию, при $A_\gamma = E_{|A|}(\gamma, \infty)|A|$ произведение $A_\gamma T: \mathcal{H}_\gamma \rightarrow \mathcal{H}_\gamma$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$. Поэтому из обратимости A_γ в $\mathcal{H}_\gamma$ следует, что $T \in \mathfrak{S}_p$. Таким образом, предположение $|A| \notin \mathfrak{S}_\infty$ привело к противоречию. •

Приведем еще два элементарных утверждения о сходимости в классах $\mathfrak{S}_p$.

Лемма 3. Пусть $A \in \mathfrak{S}_p$ и $T_n \xrightarrow{s} 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $\|T_n A\|_p \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

○ При любом $\varepsilon > 0$ найдется такой конечномерный оператор A_ε , что $\|A - A_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Поскольку $\|T_n\| \leq C$, отсюда следует, что

$$\|T_n A\|_p \leq C\varepsilon + \|T_n A_\varepsilon\|_p.$$

Тем самым достаточно рассматривать конечномерные или хотя бы одномерные операторы A . При $A = (\cdot, f)g$

$$\|T_n A\|_p = \|f\| \cdot \|T_n g\| \rightarrow 0,$$

так как по условию $T_n \xrightarrow{s} 0$ при $n \rightarrow \infty$. •

При доказательстве следующего утверждения полезно понятие о *трансформаторе*. Так называют операторы, сами действующие в пространствах операторов.

Лемма 4. Пусть $A_n \in \mathfrak{S}_p$, $\|A_n\|_p \leq C < \infty$ и $A_n \xrightarrow{w} A$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $A \in \mathfrak{S}_p$ и для любых компактных операторов T и Y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T(A_n - A)Y\|_p = 0.$$

○ Рассмотрим набор трансформаторов Γ_n , действующих из пространств $\mathfrak{S}_\infty$ в пространство $\mathfrak{S}_p$ и определяемых равенством $\Gamma_n Y = T A_n Y$. Пусть также $\Gamma Y = T A Y$. Искомое утверждение эквивалентно сильной сходимости Γ_n к трансформатору Γ . Согласно теореме Банаха — Штейнгауза достаточно установить равномерную ограниченность норм трансформаторов $\Gamma_n: \mathfrak{S}_\infty \rightarrow \mathfrak{S}_p$ и сильную сходимость Γ_n на плотном в $\mathfrak{S}_\infty$ множестве конечномерных операторов Y . Первое из этих утверждений следует из оценки

$$\|\Gamma_n Y\|_p = \|T A_n Y\|_p \leq \|T\| \|A_n\|_p \|Y\|$$

и равномерной ограниченности $\|A_n\|_p$. При доказательстве второго утверждения оператор Y можно считать одномерным, т.е. $Y = (\cdot, f)g$. В этом случае $\Gamma_n Y = (\cdot, f)T A_n g$. Поскольку $A_n g \xrightarrow{w} A g$ и $T \in \mathfrak{S}_\infty$, то $T A_n g \xrightarrow{s} T A g$ при $n \rightarrow \infty$. Тем самым при $n \rightarrow \infty$

$$\|(\Gamma_n - \Gamma)Y\|_p = \|f\| \|T(A_n - A)g\| \rightarrow 0,$$

т.е. $\Gamma_n \xrightarrow{s} \Gamma$. Наконец, включение $A \in \mathfrak{S}_p$ вытекает из $TAY \in \mathfrak{S}_p$ на основании леммы 2. •

2. Установим дифференцируемость спектральной меры $E(\cdot)$ самосопряженного оператора $E(\cdot)$, окаймленной какими-либо операторами Гильберта—Шмидта. Напомним, что в силу теоремы Лебега монотонная функция $(E(\lambda)f, f)$ при любом $f \in \mathcal{H}$ дифференцируема для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. В то же время $\|E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)\| = 1$ при $\lambda \in \sigma(H)$ и любом $\varepsilon > 0$. Поэтому слабой (операторной) производной спектральная мера не может иметь ни в одной точке спектра. Положение меняется при окаймлении $E(\cdot)$ операторами Гильберта—Шмидта.

Теорема 5. Пусть H —самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ —оператор Гильберта—Шмидта. Тогда при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор-функция $GE(\lambda)G^*$ дифференцируема по ядерной норме, оператор-функция $G\delta(\lambda, \varepsilon)G^*$ имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ предел в $\mathfrak{S}_1$ и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G\delta(\lambda, \varepsilon)G^* = \frac{dGE(\lambda)G^*}{d\lambda}. \quad (1)$$

○ На основании леммы 1 представим оператор G в виде $G = TG_1$, где $G_1 \in \mathfrak{S}_2$, а $T \in \mathfrak{S}_\infty$. В силу леммы 4 для рассмотрения $GE(\lambda)G^*$ достаточно установить слабую дифференцируемость оператор-функции $G_1 E(\lambda) G_1^*$ и оценку

$$\|G_1 E((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) G_1^*\|_1 \leq C(\lambda) \varepsilon \quad (2)$$

для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть D —плотное в $\mathfrak{G}$ множество, состоящее из конечных линейных комбинаций элементов какого-либо базиса в $\mathfrak{G}$. Тогда (ср., например, с доказательством леммы 5.1.2) на некотором множестве полной меры функции $(E(\lambda)G_1^* f, G_1^* g)$ дифференцируемы, если $f, g \in D$. Поэтому, коль скоро выполняется (2), оператор-функция $G_1 E(\lambda) G_1^*$ будет слабо дифференцируемой.

Поскольку $G_1 E(\cdot) G_1^* \geq 0$, оценка (2) равносильна тому, что

$$\text{Tr } G_1 E((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) G_1^* \leq C(\lambda) \varepsilon.$$

Очевидно, что последнее неравенство справедливо во всех точках λ , где монотонно возрастающая функция $\text{Tr } G_1 E(\lambda) G_1^*$ дифференцируема. В силу теоремы Лебега такие λ образуют множество полной меры.

Оператор-функция $G\delta(\lambda, \varepsilon) G^*$ рассматривается вполне аналогично с помощью теорем 1.2.5 или 1.2.7. Именно, согласно любой из них пределы $(\delta(\lambda, \varepsilon) G_1^* f, G_1^* g)$ при $f, g \in D$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют на общем множестве полной меры. Роль (2) играет оценка

$$\|G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_1^*\|_1 \leq C(\lambda), \quad (3)$$

равносильная в силу неравенства $\delta(\lambda, \varepsilon) \geq 0$ аналогичной оценке для скалярной функции

$$\text{Tr } G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_1^* = \pi^{-1} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} ((\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2)^{-1} d \text{Tr } G_1 E(\mu) G_1^*.$$

Поскольку функция $\text{Tr } G_1 E(\mu) G_1^*$ дифференцируема для п.в. μ , на основании теорем 1.2.5 или 1.2.7 левая часть здесь имеет предел и, следовательно, ограничена по ε для п.в. λ . Отсюда вытекают оценка (3), а потому и существование предела по норме $\mathfrak{S}_1$ в левой части (1). Само равенство (1) является, конечно, следствием соотношения (1.4.11). •

Следствие 6: Для произвольных операторов $G_j \in \mathfrak{S}_2$, $j = 1, 2$, оператор-функция $G_1 E(\lambda) G_2^*$ дифференцируема по ядерной норме для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. По той же норме для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существует и предел $G_1 \delta(\lambda, \varepsilon) G_2^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем сохраняется равенство вида (1).

○ Нужно лишь применить «поляризационное» тождество (ср. с (1.3.1))

$$4G_1 E G_2^* = (G_1 + G_2) E (G_1 + G_2)^* - (G_1 - G_2) E (G_1 - G_2)^* - \\ - i(G_1 - iG_2) E (G_1 - iG_2)^* + i(G_1 + iG_2) E (G_1 + iG_2)^*$$

для $E(\lambda)$ и аналогичное соотношение для $\delta(\lambda, \varepsilon)$. •

Следствие 7: При $G \in \mathfrak{S}_2$ для любого $f \in \mathcal{H}$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют сильные пределы в обеих частях (5.1.9) и выполняется само это соотношение.

○ Достаточно воспользоваться следствием 6 при $G_1 = G$ и каком-либо операторе $G_2 \in \mathfrak{S}_2$, для которого $G_2^* f = f$. •

Согласно теореме 5 произвольный оператор Гильберта—Шмидта является слабо гладким (в смысле определения 5.1.1) относительно любого самосопряженного оператора H . Кроме того, по сравнению с общими результатами § 5.1 при $G \in \mathfrak{S}_2$ пределы (5.1.8) и (5.1.9) существуют в более сильном смысле.

3. Для применений в теории рассеяния нам понадобится установить, что каждое из двух слагаемых $GR(\lambda \pm i\varepsilon)G^*$, составляющих левую часть (1), имеет в отдельности предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Доказательство этого факта использует те же соображения, что и доказательство теоремы 5, но существенно сложнее. При этом нам понадобится элементарная

Лемма 8. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости и $|f(z)| \geq 1$ при $\text{Im } z > 0$. Тогда $f(z)$ при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет предельные значения $f(\lambda + i0)$.

○ Применим теоремы 1.2.2 и 1.2.3 при $p = \infty$ к голоморфной и ограниченной (сверху) функции $g(z) = f(z)^{-1}$. В силу первой из них при п.в. λ существуют предельные значения $g(\lambda + i0)$. В силу второй эти предельные значения отличны от нуля на множестве полной меры. На этом множестве существуют и пределы $f(\lambda + i0)$. •

Теорема 9. Пусть H — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, а $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{S}$ — оператор Гильберта—Шмидта. Тогда для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ оператор-функция $GR(\lambda \pm i\varepsilon)G^*$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ по норме Гильберта—Шмидта.

○ Пусть опять $G = TG_1$, где $G_1 \in \mathfrak{S}_2$, а $T \in \mathfrak{S}_\infty$. В силу леммы 4 достаточно установить для п.в. λ слабую сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор-функции

$$B(\lambda \pm i\varepsilon) = G_1 R(\lambda \pm i\varepsilon) G_1^*$$

и оценку

$$\|B(\lambda \pm i\varepsilon)\|_2 \leq C(\lambda). \quad (4)$$

Обозначим вновь через D плотное в $\mathfrak{S}$ множество линейных комбинаций какого-либо базиса. Согласно теореме 1.2.5 на общем множестве полной меры при $f, g \in D$ существуют пределы $(R(\lambda \pm i\varepsilon)G_1^* f, G_1^* g)$. Поэтому слабая сходимость $B(\lambda \pm i\varepsilon)$ вытекает из оценки (4).

Доказательство (4) достаточно провести для верхнего знака. Согласно (1.7.9) имеет место неравенство

$$\|B\|_2^2 = \text{Tr}(B^* B) \leq \text{Det}(I + B^* B). \quad (5)$$

Воспользуемся теперь соотношением (1.7.13) и тем, что

$$1 \leq \text{Det}(I + A_1) \leq \text{Det}(I + A_2)$$

при $0 \leq A_1 \leq A_2$. Тогда с помощью условия

$$iB^* - iB = 2\varepsilon G_1 R R^* G_1^* \geq 0$$

найдем, что

$$\begin{aligned} 1 &\leq \text{Det}(I + B^* B) \leq \text{Det}((I + iB^*)(I - iB)) = \\ &= |\text{Det}(I - iB)|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5), (6) следует, что

$$\|B(z)\|_2 \leq |\text{Det}(I - iB(z))|. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь голоморфную в верхней полуплоскости функцию $f(z) = \text{Det}(I - iB(z))$. Согласно (6) $|f(z)| \geq 1$, так что по лемме 8 для п.в. λ существуют конечные предельные значения $f(\lambda + i0)$. На этом множестве полной меры оценка (4) вытекает из (7). •

Отметим, что в нижней полуплоскости роль (7) играет неравенство

$$\|B(z)\|_2 \leq |\text{Det}(I + iB(z))|.$$

Следующие два утверждения получаются вполне аналогично выводу следствий 6 и 7 из теоремы 5.

Следствие 10. При произвольных $G_j \in \mathfrak{S}_2$, $j = 1, 2$, оператор-функция $G_1 R(\lambda \pm i\varepsilon) G_2^*$ имеет предел в $\mathfrak{S}_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Следствие 11. При $G \in \mathfrak{S}_2$ для любого $f \in \mathcal{H}$ вектор-функция $GR(\lambda \pm i\varepsilon)f$ имеет сильный предел в $\mathfrak{S}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание 12. В теореме 9 и в следствиях к ней существуют угловые (а не только радиальные) предельные значения.

4. Доказательство теоремы 5, конечно, существенно проще, чем доказательство теоремы 9. В связи с этим отметим, что теорему 9 можно вывести из теоремы 5, если воспользоваться следующим утверждением об интегралах Коши от векторных функций.

Теорема 13. Пусть $\mathfrak{h}$ —гильбертово пространство, $f \in L_1(\mathbb{R}; \mathfrak{h})$ и

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu)(\mu - z)^{-1} d\mu.$$

Тогда для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ функция $F(\lambda \pm i\varepsilon)$ имеет предел в $\mathfrak{h}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство этого утверждения можно найти в работе К.Асано [87].

Для вывода теоремы 9 применим теорему 13 к вектор-функции $f(\lambda) = dGE(\lambda)G^*/d\lambda$, принимающей согласно теореме 5 значения в гильбертовом пространстве $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(\mathfrak{G})$. При этом

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}; \mathfrak{S}_2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{dGE(\lambda)G^*}{d\lambda} \right\|_{\mathfrak{S}_2} d\lambda \leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \text{Tr } GE(\lambda)G^* d\lambda \leq \|G\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому в силу теоремы 13 функция $F(\lambda \pm i\varepsilon) = GR(\lambda \pm i\varepsilon)G^*$ имеет предел в $\mathfrak{S}_2$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 13 не обобщается на случай банаховых пространств $\mathfrak{h}$, так что ее нельзя применить при $\mathfrak{h} = \mathfrak{S}_p$, если $p \in [1, 2)$. В действительности, как выяснил С.Н.Набоко [70], предел в $\mathfrak{S}_1$ оператора $GR(\lambda \pm i\varepsilon)G^*$ может не существовать ни на каком множестве положительной меры. Вместе с тем им же показано, что оператор $GR(\lambda \pm i\varepsilon)G^*$ имеет при п.в. λ предел в $\mathfrak{S}_p$ для любого $p > 1$.

§ 2. ТЕОРЕМА КАТО—РОЗЕНБЛЮМА.

«ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ» РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть H_0 и H —самосопряженные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$, а $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ —ограниченное отождествление. Напомним, что точное определение возмущения $V = HJ - JH_0$ давалось в п. 1 § 1.9.

1. Исходным результатом ядерной теории рассеяния является теорема Като—Розенблума, относящаяся к случаю $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$.

Теорема 1. Пусть H_0 и H — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и их разность ядерна: $H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$. Тогда существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0)$.

Мы откладываем доказательство этого результата, коль скоро он является частным случаем теоремы 3.

Следствие 2: При $H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ существуют и ВО $W_{\pm}(H_0, H)$, причем все четыре ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ и $W_{\pm}(H_0, H)$ являются полными. В частности, операторы $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$ унитарно эквивалентны.

○ Волновые операторы $W_{\pm}(H_0, H)$ существуют, так как в условиях теоремы 1 операторы H_0 и H входят симметрично. Теперь полнота ВО вытекает из следствия 2.3.9. •

Помимо простоты и элегантности формулировки, к достоинствам теоремы Като—Розенблюма надо отнести унитарную инвариантность и практическую проверяемость условия $V = H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$. Кроме того, в терминах классов $\mathfrak{S}_p$ это условие не может быть ослаблено. По этому поводу см. п. 2.

Теорема 1 допускает непосредственное распространение на операторы, действующие в разных пространствах. При этом отождествление J может быть любым ограниченным оператором. Следующее утверждение получено Пирсоном.

Теорема 3. Пусть H_0 и H — самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$, $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ и $V \in \mathfrak{S}_1$. Тогда существуют волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

Следствие 4: При $HJ - JH_0 \in \mathfrak{S}_1$ существуют и ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$, причем ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ являются соответственно J -полными (см. определение 3.2.3) и J^* -полными.

○ Поскольку $H_0 J^* - J^* H \in \mathfrak{S}_1$, ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ существуют в силу теоремы 3. Теперь J - и J^* -полнота ВО вытекает из теоремы 3.2.4. •

Ясно, что при $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ теорема 3 и следствие 4 сводятся соответственно к теореме 1 и следствию 2. Поскольку в теореме 3 отсутствуют какие-либо предположения об отождествлении J (кроме его ограниченности), она применима и в тех случаях, когда ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ заведомо не изометричны и (или) не полны.

С помощью теоремы 1.9 теорему 3 нетрудно вывести из общих результатов гл. 5. Приведем соответствующее рассуждение.

○ Запишем оператор $V \in \mathfrak{S}_1$ в виде $V = G^*G_0$, где $G_0 \in \mathfrak{S}_2$ и $G \in \mathfrak{S}_2$. Согласно следствию 1.11 условие $(5.2.10)_\pm$ выполняется сейчас на всех элементах $f_0 \in \mathcal{H}_0 =: \mathcal{M}_0$. В силу теоремы 1.9 оператор-функция $B(z)$ в (5.3.3) имеет предел по норме Гильберта—Шмидта. Поэтому условие (5.3.3) выполняется даже в более сильном смысле, чем нужно. Теперь существование ВО $W_\pm(H, H_0; J)$ вытекает из теоремы 5.3.6. •

Приведенное доказательство теоремы 3 можно считать последовательно стационарным. Действительно, непосредственно нестационарные рассуждения свелись к элементарной лемме 5.3.1, причем и ее условия выражены в терминах резольвент. Основной момент состоит в доказательстве равенства (2.7.16), полученном чисто стационарными средствами.

Результаты § 5.3 показывают также, что в условиях теоремы 3 справедлив принцип инвариантности. Именно, в силу теоремы 5.3.11 верна.

Теорема 5. Пусть $HJ - JH_0 \in \mathfrak{S}_1$, а функция φ допустима (см. определение 2.6.2) для обоих операторов H_0 и H . Тогда существуют ВО $W_\pm(\varphi(H), \varphi(H_0); J)$ и выполнены равенства (2.6.11).

2. В оставшейся части параграфа мы обсудим с разных точек зрения результат теоремы 1 об инвариантности абсолютно непрерывной компоненты при ядерных возмущениях. Излагаемые здесь результаты не относятся собственно к теории рассеяния, так что доказательства опускаются. Без дополнительных оговорок считаем $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$.

Следующее утверждение показывает точность условия $V \in \mathfrak{S}_1$ теоремы 1.

Теорема 6. Пусть H_0 —произвольный самосопряженный оператор. При любых $p > 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется самосопряженный оператор $V = V_{p,\varepsilon}$, что $V \in \mathfrak{S}_p$, $\|V\|_p < \varepsilon$, и оператор $H = H_0 + V$ имеет чисто точечный спектр.

Теорема 6 принадлежит Г. Вейлю, фон Нейману и Куроде. Ее доказательство может быть найдено в монографии [11]. Отметим, что в теореме 6 класс $\mathfrak{S}_p$, $p > 1$, можно заменить любым симметрично-нормированным идеалом (см. п. 4 § 1.6), не совпадающим поэлементно с $\mathfrak{S}_1$.

В условиях теоремы 6 у оператора H отсутствует абсолютно непрерывная часть. В то же время допускается, что оператор H_0 абсолютно непрерывен. Таким образом, для любого

$p > 1$ при возмущениях класса $\mathfrak{S}_p$ абсолютно непрерывная компонента спектра может исчезать. Более того, теорема 6 позволяет и норму возмущения в $\mathfrak{S}_p$ сделать сколь угодно малой. Ясно, конечно, что в такой обстановке ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ не существуют, если только абсолютно непрерывная часть H_0 не тривиальна.

В условиях теоремы 6 у оператора H отсутствует и сингулярно непрерывная часть. Тем самым при возмущениях классов $\mathfrak{S}_p, p > 1$, может полностью исчезать непрерывная (сумма абсолютно и сингулярно непрерывных частей) компонента. Этот результат естественно сопоставить с теоремой Г. Вейля, утверждающей, что *при компактной разности $H - H_0$ существенные спектры операторов H_0 и H совпадают*. Кажущееся противоречие этих двух результатов снимается тем, что в предположениях теоремы 6 множество собственных значений оператора H всюду плотно на $\sigma^{(ess)}(H_0)$. Мы видим, что непрерывная компонента значительно менее устойчива, чем существенный спектр.

3. По сравнению с абсолютно непрерывной сингулярно непрерывная компонента оказывается еще менее устойчивой—она не сохраняется и при ядерных возмущениях. Это вытекает из следующего утверждения, дополняющего теорему 6:

Теорема 7. Пусть H_0 —какой-либо самосопряженный оператор с чисто сингулярным спектром. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой самосопряженный ядерный оператор $V = V_{\varepsilon}$, что $\|V\|_1 < \varepsilon$ и оператор $H = H_0 + V$ имеет чисто точечный спектр.

Теорема 7 установлена в работе Кэри и Пинкуса [89]. В некотором смысле сингулярная компонента не устойчива ни для каких возмущений. Именно, Хоулэнд показал [103], что верна

Теорема 8. Пусть V —какой-либо самосопряженный ограниченный оператор. Предположим, что сингулярные части операторов H_0 и $H = H_0 + V$ унитарно эквивалентны при любом самосопряженном операторе H_0 . Тогда обязательно $V = 0$.

В специальной обстановке сингулярно непрерывная компонента может обладать определенной устойчивостью. Так, в модели Фридрихса—Фаддеева сингулярный непрерывный спектр сохраняется (отсутствует у обоих операторов H_0 и H), если ядро возмущения достаточно гладкое (см. следствие 4.2.2). Предположение о гладкости лежит здесь в существе дела. Без

него сингулярно непрерывная компонента может появляться (или исчезать) уже при возмущениях ранга 1. Подробности по этому поводу см. в § 7. Таким образом, условия сохранения сингулярного непрерывного спектра вряд ли можно сформулировать в унитарно инвариантных терминах.

Разумеется, точечный спектр—самая неустойчивая компонента. Дело в том, что собственные значения самосопряженного оператора, вообще говоря, сдвигаются при сколь угодно малых одномерных возмущениях. В то же время в специальной обстановке и эта компонента может обладать определенной устойчивостью. Так, согласно теореме 4.1.7 при достаточно малых константах связи ϵ гамильтониан $H_\epsilon = H_0 + \epsilon V$ в модели Фридрихса—Фаддеева собственных значений не имеет. Тем самым точечная компонента сохраняется (отсутствует).

4. В теории возмущений мера Лебега играет выделенную роль. Поясним здесь этот факт.

В § 1.3 понятия *абсолютной непрерывности, сингулярности* и т.п. были сформулированы по отношению к мере Лебега. Разумеется, все эти понятия могут быть переформулированы по отношению к произвольной счетно-аддитивной и счетно-конечной борелевской мере m на $\mathbb{R}$. Следующее утверждение показывает, что теорема 1 не допускает содержательного обобщения на меры, отличающиеся от лебеговой.

Теорема 9. Пусть $V \neq 0$ —какой-либо самосопряженный ограниченный оператор, а m —ненулевая борелева мера на $\mathbb{R}$. Предположим, что абсолютно непрерывные по отношению к m части операторов H_0 и $H = H_0 + V$ унитарно эквивалентны при любом самосопряженном операторе H_0 . Тогда мера m абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Кроме того, абсолютно непрерывные (уже по отношению к мере Лебега) части операторов H_0 и H также оказываются унитарно эквивалентными.

Теорема 9 получена в уже упомянутой статье Хоуланда [103]. Отметим еще, что (как показано в [103]) в ее условиях оператор V обязательно компактен.

§ 3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Приведем здесь еще одно доказательство теоремы 2.3. Оно воспроизводит оригинальные рассуждения Пирсона. Это до-

казательство не зависит от рассмотрений предыдущей главы и основано на прямом исследовании нестационарных пределов (2.1.1). На этом пути в п.3 получаются также содержательные оценки для ВО и оператора рассеяния, позволяющие установить их непрерывную зависимость от оператора H . Кроме того, в п. 4 дается нестационарное доказательство ПИ.

1. При ядерных возмущениях доказательство существования слабых ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$ затруднений не вызывает. Достаточно воспользоваться сходимостью при $G \in \mathfrak{S}_2$ интегралов вида (5.3.1). В свою очередь, этот факт вытекает из следствия 1.7 и леммы 5.3.1.

Нестационарное доказательство существования сильных ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ опирается на эффективную оценку сверху для интеграла (5.3.1). При этом требуется, чтобы элемент g принадлежал множеству $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_H$ с конечной величиной $r_H(g)$ (см. определение (2.5.2)). Напомним, что согласно лемме 2.5.3 это множество плотно в абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{H}^{(a)}$. Нужная оценка интеграла (5.3.1) дается в следующей лемме, принадлежащей М. Розенблюму:

Лемма 1. Пусть H —самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, а $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{S}$ —оператор Гильберта—Шмидта. Тогда при любом $f \in \mathfrak{R}_H$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)f\|^2 dt \leq 2\pi r^2(f) \|G\|_2^2. \quad (1)$$

○ Пользуясь для G разложением Шмидта вида (1.6.3), найдем, что

$$GU(t)f = \sum_n s_n(U(t)f, \varphi_n) \psi_n,$$

где наборы векторов $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ ортонормированы, а $s_n = s_n(G)$ —сингулярные числа оператора G . Отсюда следует равенство

$$\|GU(t)f\|^2 = \sum_n s_n^2 |(U(t)f, \varphi_n)|^2.$$

Интегрируя его по всем $t \in \mathbb{R}$ и учитывая оценку (2.5.3), получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|GU(t)f\|^2 dt \leq 2\pi r^2(f) \sum_n s_n^2 \|P\varphi_n\|^2. \quad (2)$$

Проведенная здесь перестановка интегрирования по t и суммирования по n оправдывается ссылкой на теорему Фубини. Для доказательства (1) остается заметить, что сумма в правой части (2) не превосходит $\|G\|_2^2$. •

Теперь мы можем привести нестационарное доказательство теоремы 2.3. Далее систематически пользуемся обозначением (2.1.2). Для ограниченного оператора B через $[H, B] = HB - BH$ обозначается его коммутатор с самосопряженным оператором H . В точном смысле коммутатор $[H, B]$ определяется через соответствующую полуторалинейную форму на $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, где $\mathcal{D} = \mathcal{D}(H)$, и, вообще говоря, является лишь (ограниченным) отображением $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}^*$.

○ Рассмотрим, например, случай $t \rightarrow +\infty$. Для доказательства существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ надо показать, что при $f \in \mathfrak{R}_0 := \mathfrak{R}_{H_0}$ величина

$$\begin{aligned} \|(W(t) - W(s))f\|^2 = & (f, W^*(t)(W(t) - W(s))f) - \\ & - (f, W^*(s)(W(t) - W(s))f) \end{aligned}$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$. Установим, что каждое из двух слагаемых в правой части исчезает в таком пределе. Для определенности рассмотрим первое из них. Из равенства (4.5.1) видно, что при $V \in \mathfrak{S}_1$

$$W(t) - W(s) \in \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_{\infty}.$$

Поэтому в силу леммы 1.4.1 при $f \in \mathcal{H}_0^{(a)}$

$$\text{s-}\lim_{\rho \rightarrow \infty} (W(t) - W(s))U_0(\rho)f = 0, \quad (3)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (f, W^*(t)(W(t) - W(s))f) = & \lim_{\rho \rightarrow \infty} (f, W^*(t)(W(t) - W(s))f - \\ & - U_0^*(\rho)W^*(t)(W(t) - W(s))U_0(\rho)f). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно убедиться, что каждое из двух выражений:

$$\begin{aligned} & (f, (W^*(t)W(t) - U_0^*(\rho)W^*(t)W(t)U_0(\rho))f), \\ & (f, (W^*(t)W(s) - U_0^*(\rho)W^*(t)W(s)U_0(\rho))f) \end{aligned} \quad (4)$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$ равномерно по $\rho \geq 0$.

Можно рассматривать лишь второе скалярное произведение, так как первое получается из него в частном случае $s = t$. Учтем, что при $f \in \mathcal{D}(H_0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} (W^*(t)W(s)U_0(\tau)f, U_0(\tau)f) = \\ = i([H_0, W^*(t)W(s)]U_0(\tau)f, U_0(\tau)f), \end{aligned} \quad (5)$$

причем по определению оператора $W(\cdot)$

$$\begin{aligned} [H_0, W^*(t)W(s)] &= U_0^*(t)(H_0 J^* U(t-s)J - J^* U(t-s)J H_0)U_0(s) = \\ &= U_0^*(t)(J^* U(t-s)V - V^* U(t-s)J)U_0(s). \end{aligned} \quad (6)$$

В точном смысле соотношение (6) надо, конечно, понимать как равенство соответствующих полуторалинейных форм на $\mathcal{D}(H_0) \times \mathcal{D}(H_0)$. Сопоставляя соотношения (5) и (6), найдем, что при $f \in \mathcal{D}(H_0)$ выражение (4) равно

$$\begin{aligned} -i \int_0^\rho ([H_0, W^*(t)W(s)]U_0(\tau)f, U_0(\tau)f) d\tau = \\ = -i \int_0^\rho ((J^* U(t-s)V - V^* U(t-s)J)U_0(\tau+s)f, U_0(\tau+t)f) d\tau. \end{aligned}$$

В силу ограниченности всех операторов это представление распространяется на произвольные элементы $f \in \mathcal{H}_0$. Последний интеграл вновь состоит из двух однотипных слагаемых. Можно рассмотреть, например, первое из них. Тем самым дело сводится к проверке того, что при $f \in \mathfrak{R}_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty} \int_0^\rho (J^* U(t-s)V U_0(\tau+s)f, U_0(\tau+t)f) d\tau = 0 \quad (7)$$

равномерно по $\rho \geq 0$.

Полагая $V = G^* G_0$, где $G_0 \in \mathfrak{S}_2$, $G \in \mathfrak{S}_2$, оценим интеграл в

(7) с помощью неравенства Шварца через

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \|G_0 U_0(\tau + s)f\| \|GU(s - t)JU_0(\tau + t)f\| d\tau \leq \\ & \leq \left(\int_s^\infty \|G_0 U_0(\tau)f\|^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_t^\infty \|GU(s - t)JU_0(\tau)f\|^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

В первом интеграле в правой части мы провели замену $\tau + s$ на τ , а во втором—замену $\tau + t$ на τ . Подчеркнем, что (8) от параметра ρ не зависит. Учтем теперь, что $f \in \mathfrak{R}_0$. В силу леммы 1 первый сомножитель в правой части (8) стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$, а во второй—не превосходит величины

$$(2\pi)^{1/2} r(f) \|GU(t - s)J\|_2 \leq (2\pi)^{1/2} r(f) \|G\|_2 \|J\|,$$

которая ни от t , ни от s не зависит. Таким образом, правая часть (8) стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ (равномерно по t). Отсюда вытекает искомое соотношение (7). •

З а м е ч а н и е 2. Попутно мы доказали неравенства

$$\begin{aligned} & \|(W(t) - W(s))f\|^2 \leq 4(2\pi)^{1/2} r(f) \|G\|_2 \|J\| \times \\ & \times \left(\left| \int_t^{\pm\infty} \|G_0 U_0(\tau)f\|^2 d\tau \right|^{1/2} + \left| \int_s^{\pm\infty} \|G_0 U_0(\tau)f\|^2 d\tau \right|^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (9)_{\pm}$$

2. Приведенное в п. 1 доказательство теоремы 2.3 имеет несколько трюковый характер. Обсудим поэтому его ключевые моменты и, в частности, сравним его с доказательством существования ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ в теории гладких (по Като) возмущений. Подчеркнем еще раз, что сходимости (на плотном множестве элементов) интегралов вида (1) обеспечивает существование лишь слабых ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$. В теории гладких возмущений интеграл (1) оценивается (см. определение (4.3.1)) равномерно по f с $\|f\| \leq 1$. Это и позволило в теореме 4.5.1 установить существование сильных ВО. В ядерной теории интеграл (1) сходится только на множестве $\mathfrak{R}_H$ и равномерной по f оценки заведомо нет. В нестационарном доказательстве теоремы 2.3 решающую роль сыграла равномерность оценки (1) по другому параметру—по операторам $G \in \mathfrak{S}_2$ с $\|G\|_2 \leq 1$.

В связи с этим отметим, что рассуждение п. 1 устанавливает в действительности следующий признак существования ВО:

Предложение 3. Пусть $V = G^*G_0$, где операторы G_0 и G ограничены, и для элементов f из какого-либо плотного в $\mathcal{H}_0^{(a)}$ множества выполнены два условия:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|G_0 U_0(\pm t)f\|^2 dt &< \infty, \\ \int_0^\infty \|GU(\tau)JU_0(\pm t)f\|^2 dt &\leq C < \infty, \end{aligned} \quad (10)$$

причем $C = C(f)$ не зависит от $\tau \in \mathbb{R}$. Тогда ВО $W_\pm(H, H_0; J)$ существует.

Строго говоря, помимо условий (10) при доказательстве теоремы 2.3 использовалась еще компактность оператора V . Она была нужна лишь для проверки соотношения (3). На самом деле оно вытекает и из первого условия (10). Именно, в силу (4.5.1)

$$\begin{aligned} \|(W(t) - W(s))U_0(\rho)f\| &\leq \|G\| \int_s^t \|G_0 U_0(\tau + \rho)f\| d\tau \leq \\ &\leq \|G\| \left((t-s) \int_{s+\rho}^{t+\rho} \|G_0 U_0(\sigma)f\|^2 d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

При $\rho \rightarrow \infty$ и фиксированных t, s правая часть здесь стремится к нулю за счет сходимости первого интеграла (10).

3. Оценка (9) $_{\pm}$ позволяет получить некоторую информацию о свойствах ВО $W_\pm = W_\pm(H, H_0; J)$. Будем сейчас считать, что $G_0 = |V|^{1/2}$, $G = |V|^{1/2} \operatorname{sgn} V$, и положим $s = \pm\infty$. Тогда из (9) $_{\pm}$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|(W_\pm - W(t))f\|^2 &\leq 4(2\pi)^{1/2} r(f) \|V\|_1^{1/2} \|J\| \times \\ &\times \left| \int_t^{\pm\infty} \| |V|^{1/2} U_0(\tau)f \|^2 d\tau \right|^{1/2}, \quad f \in \mathfrak{R}_{H_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

При $t \rightarrow \pm\infty$ (11) дает оценку сходимости $W(t)$ к соответствующему ВО. Выделим, кроме того, частные случаи (11), отвечающие $t = 0$ и $t = \pm\infty$. В следующем утверждении еще раз учтено неравенство (1):

Теорема 4. В условиях теоремы 2.3 при $f \in \mathfrak{R}_{H_0}$ верны оценки

$$\begin{aligned} \|(W_{\pm} - J)f\|^2 &\leq 4(2\pi)^{1/2} r(f) \|V\|_1^{1/2} \|J\| \left(\int_0^{\infty} \| |V|^{1/2} U_0(\pm\tau) f \|^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq 8\pi r^2(f) \|V\|_1 \|J\| \end{aligned} \quad (12)$$

а также

$$\begin{aligned} \|(W_+ - W_-)f\|^2 &\leq 4(2\pi)^{1/2} r(f) \|V\|_1^{1/2} \|J\| \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| |V|^{1/2} U_0(\tau) f \|^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq 8\pi r^2(f) \|V\|_1 \|J\|. \end{aligned} \quad (13)$$

Установим теперь оценку для разности оператора рассеяния, определенного соотношением (2.4.1), и ВО для вспомогательного набора H_0, H_0, J^*J . Такая разность уже рассматривалась в § 2.8 в связи со стационарным представлением оператора рассеяния. По теореме (умножения) 2.1.7 ВО $W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$ существуют и равны $W_{\pm}^* W_{\pm}$. Впрочем, их существование вытекает и из теоремы 2.3, так как $H_0 J^* J - J^* J H_0 \in \mathfrak{S}_1$ при $HJ - JH_0 \in \mathfrak{S}_1$. Применяя неравенство (13) и учитывая, что $\|W_{\pm}\| \leq \|J\|$, сразу получим

Следствие 5: В условиях теоремы 2.3 при $f \in \mathfrak{R}_{H_0}$

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{S}(H, H_0; J) - W_+(H_0, H_0; J^*J))f\|^2 &\leq \\ &\leq 4(2\pi)^{1/2} r(f) \|V\|_1^{1/2} \|J\|^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| |V|^{1/2} U_0(\tau) f \|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 8\pi r^2(f) \|V\|_1 \|J\|^2. \end{aligned}$$

Ясно, конечно, что такая же оценка верна и для

$$\|(\mathbf{S}^*(H, H_0; J) - W_-(H_0, H_0; J^*J))f\|^2.$$

При $J = I$ эти оценки дают неравенства для $(\mathbf{S}(H, H_0) - I)f$ и $(\mathbf{S}^*(H, H_0) - I)f$.

Из теоремы 4 легко извлечь сильную непрерывность ВО при изменении H в ядерной топологии. Именно, справедлива

Теорема 6. Пусть $J_0: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_1$ и ВО $W_{\pm}(H_1, H_0; J)$ существует. Предположим, что для семейства самосопряженных операторов $H(\epsilon)$ в $\mathcal{H}$ и $J_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|H(\epsilon)J_1 - J_1H_1\|_1 = 0. \quad (14)$$

Тогда при $J = J_1J_0$ существуют ВО $W_{\pm}(H(\epsilon), H_0; J)$ и

$$s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{\pm}(H(\epsilon), H_0; J) = J_1W_{\pm}(H_1, H_0; J_0). \quad (15)$$

○ По теореме 2.3 существуют ВО $W_{\pm}(H(\epsilon), H_1; J_1)$. Поэтому согласно теореме 2.1.7 существуют и ВО

$$W_{\pm}(H(\epsilon), H_0; J) = W_{\pm}(H(\epsilon), H_1; J_1)W_{\pm}(H_1, H_0; J_0). \quad (16)$$

Таким образом, для доказательства (15) достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{\pm}(H(\epsilon), H_1; J_1) = J_1P_{H_1}. \quad (17)$$

К набору $H_1, H(\epsilon), J_1$ применим второе неравенство (12). Тогда по условию (14) соотношение (17) будет выполняться на плотном в $\mathcal{H}_{H_1}^{(a)}$ множестве $\mathfrak{H}_{H_1}$. Для доказательства (17) нужно еще учесть, что нормы операторов в левой части ограничены числом $\|J_1\|$. •

Отметим, что при условии (14) операторы H_1 и $J_1^*J_1$ должны коммутировать, т.е.

$$J_1^*J_1H_1 = H_1J_1^*J_1. \quad (18)$$

Наиболее важный частный случай теоремы 6 получается при $H_0 = H_1, J_0 = J_1 = I$.

Следствие 7: Если $\|H(\epsilon) - H_0\|_1 \rightarrow 0$, то

$$s\text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} W_{\pm}(H(\epsilon), H_0) = P_{H_0}.$$

В условиях теоремы 6 (даже при $J_0 = J_1 = I$) сходимости ВО по норме, вообще говоря, нет (по этому поводу см. статью Путнама [133]). Из теоремы 6, конечно, сразу вытекает, что при условии (14) оператор рассеяния $S(H(\epsilon), H_0; J)$ слабо непрерывен. В действительности он будет непрерывным и в сильном смысле.

Теорема 8. Пусть выполнены условия теоремы 6, причем в $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$ существуют при обоих знаках. Тогда существует

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(H(\varepsilon), H_0; J) = W_+^*(H_1, H_0; J_0) J_1^* J_1 W_-(H_1, H_0; J_0). \quad (19)$$

○ Будем исходить из определения (2.4.1) оператора $S(H(\varepsilon), H_0; J)$ через $W_{\pm}(H(\varepsilon), H_0; J)$. В силу равенства (16) для доказательства (19) достаточно показать, что

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_+^*(H(\varepsilon), H_1; J_1) W_-(H(\varepsilon), H_1; J_1) = J_1^* J_1 P_1. \quad (20)$$

Согласно теореме 2.1.7 и равенству (18)

$$\begin{aligned} W_+^*(H(\varepsilon), H_1; J_1) W_+(H(\varepsilon), H_1; J_1) &= W_+(H_1, H_1; J_1^* J_1) = \\ &= J_1^* J_1 P_1. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (20) эквивалентно соотношению

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_+^*(H(\varepsilon), H_1; J_1) (W_+(H(\varepsilon), H_1; J_1) - W_-(H(\varepsilon), H_1; J_1)) = 0.$$

Здесь норма первого сомножителя ограничена равномерно по ε , а второй сомножитель сильно стремится к нулю в силу (17).

•

Выделим опять случай $H_0 = H_1$, $J_0 = J_1 = I$.

Следствие 9: Если $\|H(\varepsilon) - H_0\|_1 \rightarrow 0$, то

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(H(\varepsilon), H_0) = P_0.$$

4. Приведем, наконец, нестационарное доказательство теоремы 2.5 (принципа инвариантности). Через Ω обозначаем открытое множество, на котором функция φ допустима. В силу леммы 2.6.3 достаточно проверить соотношение (2.6.15). Пусть Ω_n — какой-либо составляющий интервал множества Ω . Согласно первой оценке (12) для доказательства теоремы 2.5 нужно убедиться в том, что при $f \in \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_{H_0}$

$$\lim_{t \rightarrow \pm \nu \infty} \int_0^{\infty} \|G_0 U_0(\pm \tau) \exp(-it h_0) E_0(\Omega_n) f\|^2 d\tau = 0, \quad (21)$$

где $h_0 = \varphi(H_0)$, $G_0 = |V|^{1/2}$, $\nu = \text{sgn } \varphi'(\lambda)$, $\lambda \in \Omega_n$.

Мы дадим сейчас нестационарное обоснование этого соотношения. Впрочем, по существу следующее утверждение сводится к лемме 5.3.9:

Лемма 10. При $G_0 \in \mathfrak{S}_2$ и $f \in \mathfrak{R}_0$ имеет место соотношение (21).

○ Рассмотрим для определенности случай верхнего знака. Представляя оператор G_0 его рядом Шмидта, запишем интеграл (21) в виде

$$\sum_n s_n^2 \int_0^\infty |(U_0(\tau)g_t, \varphi_n)|^2 d\tau, \quad (22)$$

где $g(t) = \exp(-ith_0)E_0(\Omega_n)f$, $s_n = s_n(G_0)$ — сингулярные числа оператора G_0 , а векторы φ_n образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_0$. Проведенная здесь перестановка суммирования по n и интегрирования по τ оправдывается задним числом ссылкой на теорему Фубини. По спектральной теореме

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |(U_0(\tau)g_t, \varphi_n)|^2 d\tau = \\ = \int_0^\infty d\tau \left| \int_{\Omega_n} \exp(-i\tau\lambda - it\varphi(\lambda)) \frac{d(E_0(\lambda)f, \varphi_n)}{d\lambda} d\lambda \right|^2, \end{aligned}$$

причем согласно неравенству (2.5.3) функция $d(E_0(\cdot)f, \varphi_n)/d\lambda$ принадлежит $L_2(\Omega_n)$. Поэтому в силу леммы 2.6.4 каждый член ряда в (22) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Далее, согласно неравенству (2.5.3) члены этого ряда оцениваются через $2\pi s_n^2 r_0^2(g_t)$, где $r_0 = r_{H_0}$. Поскольку $\{s_n^2\} \in l_1$ и $r_0(g_t) \leq r_0(f)$, это дает суммируемую мажоранту для ряда (22). Отсюда следует, что сумма (22) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. •

С помощью теоремы 2.2.1 при обосновании ПИ можно обойтись без оценки (12), получаемой методом Пирсона. Действительно, из леммы 10 сразу вытекает (ср. с теоремой 5.3.10) ПИ для слабых ВО. Это означает, что существуют $\widetilde{W}_\pm(h, h_0; J)$ и для них справедливо равенство (5.3.11). Аналогичным образом, поскольку в условиях теоремы 2.5 оператор $H_0 J^* J - J^* J H_0 \in \mathfrak{S}_1$, то

$$\widetilde{W}_\pm(h_0, h_0; J^* J)E_0(\Omega_\nu) = \widetilde{W}_{\pm\nu}(H_0, H_0; J^* J)E_0(\Omega_\nu), \quad \nu = \pm,$$

причем оба слабых ВО здесь существуют. Согласно теореме 2.2.1 из существования сильного ВО $W_\pm(H, H_0; J)$ вытекает равенство (2.2.3). Поэтому для набора h, h_0, J выполняется равенство (5.3.13). Применяя теперь теорему 2.2.1 к этому набору, найдем, что существуют ВО $W_\pm(h, h_0; J)$. Следовательно, ПИ справедлив и для сильных ВО.

В заключение отметим, что такая же схема обоснования ПИ применялась в п. 4 § 5.3, где, однако, существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ проверялось стационарными средствами.

§ 4. ЛОКАЛЬНЫЕ ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Ввиду теоремы 2.6 с точки зрения абстрактной теории операторов теорема 2.1 в случае одного пространства и теорема 2.3 в случае пары пространств полностью решают вопрос о существовании ВО в терминах классов $\mathfrak{S}_p$. Тем не менее для приложений этих теорем явно недостаточно. В самом деле, оператор умножения на функцию, являющийся типичным возмущением в теории дифференциальных операторов, имеет непрерывный спектр и, следовательно, не может быть даже компактным. Поэтому теоремы 2.1 и 2.3 к таким возмущениям заведомо неприменимы. «Недостаток» этих теорем состоит в том, что их условия формулируются лишь в терминах самого возмущения V ($V \in \mathfrak{S}_1$) безотносительно к свойствам операторов H_0 и H . Для приложений, однако, решающую роль играет переход к различным классам «относительно ядерных» возмущений.

Описанию получаемых на этом пути условий существования и полноты (или J -полноты) ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ посвящены этот и следующий параграфы. В этом параграфе мы рассмотрим признаки, основанные на предположении «локальной» ядерности возмущения. Один из наиболее удобных технических приемов для обобщения результатов § 2 состоит в переходе к новому отождествлению. Тем самым для получения общих признаков существования и полноты ВО даже в случае $J = I$ нужно исходить из теоремы 2.3, относящейся к произвольным J . В качестве вспомогательного средства мы пользуемся также слабыми и локальными ВО, введенными в § 2.2.

Простейшее и достаточно эффективное условие получается при наличии спектральной срезки лишь с одной стороны.

Теорема 1. Пусть для любого ограниченного интервала Λ

$$(HJ - JH_0)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_1. \quad (1)$$

Тогда существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Для отождествления $J' = JE_0(\Lambda)$ возмущение $HJ' - J'H_0$ будет ядерным. Поэтому по теореме 2.3 существуют ВО

$$W_{\pm}(H, H_0; J') = W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda).$$

Остается воспользоваться тем, что существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ «в целом» достаточно проверять на плотном множестве финитных элементов $f = E_0(\Lambda)f$. •

Недостаток теоремы 1 состоит в том, что условие (1) не симметрично относительно перемены ролей операторов H_0 и H . Поэтому теорема 1 не обеспечивает полноты или J -полноты ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$.

2. Симметричное условие ядерного типа получается при окаймлении возмущения спектральными срезками с обеих сторон, когда

$$E(\Lambda)(HJ - JH_0)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_1 \quad (2)$$

для любого ограниченного интервала Λ . Это условие является самым слабым естественным предположением ядерного типа. Поясним, что оператор (2) корректно определен и ограничен для любых H_0, H, J . Почти очевидна

Лемма 2. Пусть условие (2) выполнено для любого ограниченного интервала Λ . Тогда существуют слабые ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Существование при $t \rightarrow \pm\infty$ предела $(W(t)f_0, f)$ достаточно проверять на каких-либо плотных в $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $\mathcal{H}^{(a)}$ множествах элементов f_0 и f . В силу леммы 3.1 эти пределы существуют, если $f_0 \in \mathfrak{R}_0$, $f \in \mathfrak{R}$ и f_0, f финитны. •

Вместо леммы 3.1 при доказательстве этого утверждения можно было бы воспользоваться и комбинацией леммы 5.3.1 со следствием 1.7. Отметим еще, что выполнение (2) для какого-либо одного интервала Λ обеспечивает существование слабых локальных ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$.

Одного условия (2) для доказательства существования сильных ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ не хватает. Обсудим поэтому необходимые дополнительные предположения. Следующий результат имеет предварительный характер.

Лемма 3. Волновые операторы $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существуют, если для любого ограниченного интервала Λ выполнено условие (2) и

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} E(\Lambda')JU_0(t)E_0(\Lambda_0)P_0 = 0, \quad \Lambda' = \mathbb{R} \setminus \Lambda, \quad (3)$$

где Λ_0 — произвольный строго внутренний подынтервал Λ .

○ Вводя вспомогательное отождествление $J'' = E(\Lambda)JE_0(\Lambda)$, с помощью теоремы 2.3 установим существование пределов

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} E(\Lambda)U^*(t)JU_0(t)E_0(\Lambda)P_0. \quad (4)$$

Поэтому (ср. с теоремой 4.5.6) сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$ существует, коль скоро здесь удастся «снять» проектор $E(\Lambda)$ слева. Это возможно при условии (3). Для доказательства существования $W_{\pm}(H, H_0; J)$ нужно еще использовать произвольность Λ . •

Приведем теперь более конкретные признаки существования ВО. Ряд из них симметричен относительно операторов H_0 и H . Такие признаки обеспечивают существование и «обратных» ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$. Тем самым, ввиду теоремы 3.2.4, оба ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$) оказываются J -полными (соответственно J^* -полными).

Укажем эффективные условия выполнения соотношения (3). Прежде всего заметим, что в силу леммы 1.4.1 оно обеспечивается включением

$$E(\Lambda')JE_0(\Lambda_0) \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (5)$$

Практически условие (5) удобно проверять с помощью следующего элементарного утверждения.

Лемма 4. Пусть справедливо одно из двух условий:

1) при любой $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\varphi(H)J - J\varphi(H_0) \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (6)$$

2) при каком-либо (а тогда и при всех) z

$$R(z)J - JR_0(z) \in \mathfrak{S}_{\infty}, \quad z \in \rho(H_0) \cap \rho(H). \quad (7)$$

Тогда для произвольного ограниченного интервала Λ и любого его строго внутреннего подынтервала Λ_0 выполняется включение (5).

○ Рассмотрим какую-либо функцию $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, равную 1 при $\lambda \in \Lambda_0$ и равную 0 при $\lambda \in \Lambda'$. При условии (6) оператор

$$E(\Lambda')JE_0(\Lambda_0) = E(\Lambda')(J\varphi(H_0) - \varphi(H)J)E_0(\Lambda_0)$$

будет компактным.

Если (7) справедливо для какого-нибудь одного $z = z_1$, то в силу тождества

$$R(z)J - JR_0(z) = (H - z_1)R(z)[R(z_1)J - JR_0(z_1)](H_0 - z_1)R_0(z) \quad (8)$$

соотношение (7) будет выполняться и для всех $z \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$. Для доказательства (5) воспользуемся представлением (4.5.6), где контур Γ охватывает Λ_0 , не пересекает Λ' и обходится против часовой стрелки. Подынтегральная функция в (4.5.6) непрерывна и принимает компактные значения в силу (7). Поэтому и сам интеграл будет компактным оператором. •

Объединим теперь леммы 3, 4 и учтем, что их условия симметричны относительно перемены ролей операторов H_0 и H .

Теорема 5. Пусть для любого ограниченного интервала $\Lambda \subset \mathbb{R}$ выполнено условие (2), а также справедливо одно из включений (6) или (7). Тогда существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$) и они J -полны (соответственно J^* -полны).

Соотношения (6) и (7) в действительности эквивалентны друг другу. Если выполнено (6), то, в частности, компактным будет оператор $K_n = \theta_n(H)J - J\theta_n(H_0)$, где $\theta_n(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}\vartheta_n(\lambda)$, а $\vartheta_n(\lambda) = \vartheta(n^{-1}\lambda)$, $\vartheta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\vartheta(\lambda) = 1$ при $|\lambda| \leq 1$ и $\vartheta(\lambda) = 0$ при $|\lambda| \geq 2$. Поскольку $\theta_n(\lambda) \rightarrow (\lambda - z)^{-1}$ в $C(\mathbb{R})$, оператор (7) аппроксимируется по норме компактными операторами K_n .

Обратно, пусть справедливо (7). Тогда (6) выполняется для функции $\varphi_z(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$, а потому и для функции

$$\begin{aligned}\varphi_{z,\zeta}(\lambda) &= (\lambda - z)^{-1}(\lambda - \zeta)^{-1} = \\ &= (z - \zeta)^{-1}[\varphi_z(\lambda) - \varphi_\zeta(\lambda)], \quad \text{Im } z > 0, \text{Im } \zeta < 0.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор-функция $\Phi_{z,\zeta} = \varphi_{z,\zeta}(H)J - J\varphi_{z,\zeta}(H_0)$ принимает компактные значения и аналитична (в отдельности) по переменным z ($\text{Im } z > 0$) и ζ ($\text{Im } \zeta < 0$). Воспользуемся представлением

$$f^{(n)}(z) = -(2\pi i)^{-1}n! \int_{\Gamma} (z' - z)^{-n-1} f(z') dz' \quad (9)$$

для производных аналитической функции. Здесь Γ —простой замкнутый контур, обходящий точку z против часовой стрелки. Применяя (9) к $\Phi_{z,\zeta}$ при фиксированном ζ , найдем, что операторы $d^k \Phi_{z,\zeta} / dz^k$ компактны. Теперь при фиксированном z применим к ним (9) по переменной ζ . Тогда получим, что компактными будут все операторы $d^k / dz^k d^l / d\zeta^l \Phi_{z,\zeta}$. Это означает, что соотношение (7) справедливо для всех функций $\varphi(\lambda) = (\lambda - i)^{-k}(\lambda + i)^{-l}$, где k, l —целые неотрицательные числа. Учтем еще, что согласно одному из вариантов теоремы Стоуна—Вейерштрасса (см. [19], т. 1) любая непрерывная стремящаяся к нулю функция может быть аппроксимирована в $C(\mathbb{R})$ полиномами от $(\lambda - i)^{-k}(\lambda + i)^{-l}$. Поэтому (6) будет выполняться для произвольной $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

3. Часто при проверке существования ВО условие (2) удобно дополнять предположением об областях определения

операторов H_0 и H (или функций от них). В связи с этим полезно

Определение 6. Пусть для какой-либо пары локально ограниченных (борелевских) функций f_0 и f на $\mathbb{R}$, таких, что

$$|f_0(\lambda)| \geq 1, \quad |f(\lambda)| \geq 1, \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |f_0(\lambda)| = \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |f(\lambda)| = \infty, \quad (10)$$

выполнено условие

$$J: \mathcal{D}(f_0(H_0)) \rightarrow \mathcal{D}(f(H)).$$

Тогда оператор H называется подчиненным (J -подчиненным) оператору H_0 . В этом случае оператор $f(H)Jf_0^{-1}(H_0)$ ограничен.

Аналогично, H_0 подчинен (J^* -подчинен) оператору H , если $J^*: \mathcal{D}(g(H)) \rightarrow \mathcal{D}(g_0(H_0))$ и

$$g_0(H_0)J^*g^{-1}(H) \in \mathfrak{B} \quad (11)$$

для какой-либо пары функций g_0, g , удовлетворяющих условию вида (10).

Разумеется, данное определение подчиненности операторов H_0, H зависит от отождествления J , но мы не будем это каждый раз оговаривать. В приложениях при $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ часто бывает достаточно условий $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$ или $\mathcal{D}(H^{1/2}) = \mathcal{D}(H_0^{1/2})$ при $H \geq 0$, $H_0 \geq 0$, гарантирующих взаимную подчиненность операторов H_0 и H . Применение понятия подчиненности в теории рассеяния основано на следующем элементарном наблюдении:

Лемма 7. Пусть $X_r = (-r, r)$, $X'_r = \mathbb{R} \setminus X_r$. Если H подчинен H_0 , то для любого ограниченного интервала Λ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|E(X'_r)JE_0(\Lambda)\| = 0. \quad (12)$$

○ В правой части неравенства

$$\|E(X'_r)JE_0(\Lambda)\| \leq \|E(X'_r)f^{-1}(H)\| \|f(H)Jf_0^{-1}(H_0)\| \|f_0(H_0)E_0(\Lambda)\|$$

первый сомножитель стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$, так как $f(\lambda)^{-1} \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Второй сомножитель ограничен в силу подчиненности H оператору H_0 , а третий—в силу ограниченности Λ . •

В действительности можно показать (см. [99]), что выполнение (12) для любого ограниченного Λ эквивалентно подчиненности H оператору H_0 . С помощью леммы 7 элементарно проверяется

Лемма 8. Пусть для любого ограниченного интервала $\Lambda \subset \mathbb{R}$ существуют пределы (4), и оператор H подчинен H_0 . Тогда существуют $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$.

○ Достаточно установить существование $W_{\pm}(H, H_0; J)$ на финитных элементах $f = E_0(\Lambda)f$. Поскольку по условию при любом r существуют сильные пределы операторов $E(X_r)U(-t)JU_0(t)E_0^{(a)}(\Lambda)$, при $t \rightarrow \pm\infty$, для этого нужно лишь воспользоваться соотношением (12). •

Так как при условии (2) существуют пределы (4), из леммы 8 прямо вытекает

Теорема 9. Пусть для любого ограниченного интервала $\Lambda \subset \mathbb{R}$ выполнено условие (2), и оператор H подчинен H_0 . Тогда существуют $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$.

Теорема 9 может быть выведена и из леммы 3. Действительно, с помощью представления (4.5.6) из условия (2) нетрудно извлечь при любом $r > 0$ и $X_r = (-r, r)$ компактность оператора $E(\Lambda' \cap X_r)JE_0(\Lambda_0)$ (он будет и ядерным). Вместе с (12) это показывает, что в условиях теоремы 9 справедливо включение (5), а потому выполняются предположения леммы 3.

На основании теоремы 9 получаются и удобные условия J -полноты BO .

Следствие 10: Пусть выполнено условие (2), и операторы H_0 и H взаимно подчинены. Тогда существуют $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и $\text{BO } W_{\pm}(H_0, H; J^*)$), и они J -полны (соответственно J^* -полны).

Иногда бывает удобнее несимметричный вариант условий того же типа.

Следствие 11: Пусть для любого ограниченного интервала Λ выполнено условие (1), и оператор H_0 подчинен H . Тогда существуют $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и $\text{BO } W_{\pm}(H_0, H; J^*)$), и они J -полны (соответственно J^* -полны).

○ Согласно теореме 1 существование $\text{BO } W_{\pm}(H, H_0; J)$ является следствием лишь одного условия (1). Существование $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ прямо вытекает из теоремы 9, если операторы H_0 и H поменять ролями. •

В приложениях, как правило, эффективно известно лишь

спектральное семейство $E_0(\cdot)$ невозмущенного оператора. Для доказательства (2) спектральную срезку $E(\cdot)$ слева можно реально использовать, если учесть еще подчиненность H_0 оператору H .

Следствие 12: Предположим, что операторы H_0 и H взаимно подчинены, отождествление J обратимо и $J^{-1} \in \mathfrak{B}$. Пусть для любого ограниченного интервала Λ

$$g_0^{-1}(H_0)J^{-1}VE_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_1, \quad (13)$$

где g_0 —функция, входящая в условие (11). Тогда существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$), и они J -полны (соответственно J^* -полны).

○ В силу следствия 10 нужно лишь проверить условие (2). Пусть A —оператор (11), T —оператор (13), а Λ —произвольный ограниченный интервал. Тогда в правой части равенства

$$E(\Lambda)VE_0(\Lambda) = (E(\Lambda)g(H))A^*T$$

первые два сомножителя—ограниченные операторы, а третий—ядерный. •

Следствие 12 показывает, что при построении теории рассеяния не требуется предварительного спектрального анализа оператора H . Важно, что ядерная теория позволяет обойтись и без спектрального анализа оператора H_0 . Так, для применения следствия 10 нужно лишь знать области определения операторов H и H_0 , или, в более общей форме, подходящих функций от них. Это соображение иллюстрируется в § 6.

В действительности результаты настоящего и предыдущего пунктов по существу эквивалентны друг другу. Это вытекает из следующих двух несложных утверждений.

Предложение 13. Компактность оператора

$$(R(z)J - JR_0(z))E_0(\Lambda), \quad z \in \rho(H_0) \cap \rho(H),$$

для любого ограниченного интервала Λ равносильно тому, что

$$E(\Lambda)(HJ - JH_0)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_{\infty} \quad (14)$$

и H подчинен H_0 .

Предложение 14. Включение (7) равносильно (14) и взаимной подчиненности операторов H_0 и H .

Доказательства этих двух утверждений можно найти в [99]. Отметим лишь, что для доказательства первого из них надо воспользоваться определением (12) подчиненности H оператору H_0 , а второе является прямым следствием первого.

Предложение 14 показывает, что теорема 5 и следствие 10 равносильны друг другу.

4. Укажем теперь эффективные условия ядерного типа, обеспечивающие выполнение предположений теоремы 5.7.2. Мы считаем сейчас $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$. Никаких априорных предположений о полном гамильтониане H в теореме 15 не делается. В ее условиях оператор H определяется с помощью конструкции § 1.10.

Теорема 15. Пусть при $\theta_0 + \theta = 1$, $\theta \in [0, 1/2]$, выполнены условия (1.9.6), (1.9.7) и хотя бы один из двух операторов $G_0(|H_0| + I)^{-\theta_0}$ или $G(|H_0| + I)^{-\theta}$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ для какого-либо $p < \infty$. Предположим также, что для любого ограниченного интервала Λ

$$G_0 E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_2, \quad G E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_2. \quad (15)$$

Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны.

○ Проверим выполнение теоремы 5.7.2 при $l = 1$. Для произвольного ограниченного интервала Λ и $\Lambda' = \mathbb{R} \setminus \Lambda$

$$G_0 R_0(z) G^* = G_0 E_0(\Lambda) R_0(z) (G E_0(\Lambda))^* + \\ + (G_0(|H_0| + I)^{-\theta_0} (E_0(\Lambda') (|H_0| + I) R_0(z)) (G(|H_0| + I)^{-\theta})^*. \quad (16)$$

В силу теоремы 1.9 и замечания 1.12 при условии (15) первое слагаемое в правой части имеет для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ угловые предельные значения в $\mathfrak{S}_2$. Во втором слагаемом оператор

$$E_0(\Lambda') (|H_0| + I) R_0(z_0) (I + (z - z_0) R_0(z)), \quad z_0 \in \rho(H_0),$$

при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ голоморфно зависит от z . Окаймляющие его множители суть ограниченные операторы, причем один из них принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$. Таким образом, оператор (16) имеет угловые предельные значения для п.в. $\lambda \in \Lambda$ в классе $\mathfrak{S}_q$, где $q = \max\{2, p\}$. При проверке остальных предположений теоремы 5.7.1 также нужно применять разбиение $I = E_0(\Lambda) + E_0(\Lambda')$. В членах с $E_0(\Lambda)$ используются условие (15) и теорема 1.9, а в членах с $E_0(\Lambda')$ — условие (1.9.6). Это позволяет установить существование для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ пределов по норме у операторов $G_0 \delta_0(\lambda, \varepsilon) G_0^*$ и $GR_0(\lambda \pm i\varepsilon) G^*$. Аналогичным образом с помощью следствия 1.11 устанавливается существование на всех элементах f_0 сильных пределов (5.2.10) $_{\pm}$ и (5.5.6).•

5. В локальных условиях существования ВО по-прежнему справедлив ПИ. Проверим его, например, при условиях (2), (5). Пусть Λ — произвольный ограниченный интервал, а $J'' =$

$E(\Lambda)JE_0(\Lambda)$. Согласно теореме 2.5 при условии (2) для отождествления J'' существуют ВО $W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0); J'')$ и выполнены равенства вида (2.6.11). На основании леммы 1.4.1 J'' в них можно заменить на отождествление $J' = JE_0(\Lambda)$. При этом используется условие (5). Теперь в силу произвольности Λ от J' можно перейти к исходному отождествлению J .

Справедливость ПИ в остальных утверждениях п. 1—3 устанавливается вполне аналогично. Наконец, в условиях теоремы 15 выполняются все предложения теоремы 5.3.6. Поэтому ПИ вытекает из теоремы 5.3.11.

§ 5. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОБОБЩЕНИЯ

1. В приложениях часто используются обобщения теорем Като—Розенблюма и Пирсона, в которых при подходящей функции φ предполагается, что

$$\varphi(H)J - J\varphi(H_0) \in \mathfrak{S}_1. \quad (1)$$

Одно это условие позволяет заменить в теореме 4.5 предположение локальной ядерности (4.1) и включение (4.6). По сравнению с результатами п. 3 § 4 теперь не возникает в явной форме условий на подчиненность операторов H_0 и H . Наиболее употребительно условие (1) при $\varphi(\lambda) = (\lambda - z)^{-p}$. Именно, верна

Теорема 1. Пусть для какого-либо натурального p выполнено условие

$$T_p(z) := R^p(z)J - JR_0^p(z) \in \mathfrak{S}_1, \quad z \in \rho(H_0) \cap \rho(H). \quad (2)$$

Тогда существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$), и они J -полны (соответственно J^* -полны).

○ Проверим предварительно, что при условии (2) соотношение (1) будет выполняться и для $\varphi(\lambda) = (\lambda - z)^{-m}$, $m > p$. Пользуясь равенством (4.9) для $n = m - p$, $f(z) = R^p(z)$ и $f(z) = R_0^p(z)$, получим интегральное представление

$$2\pi i(m-1)!T_m(z) = -(m-p)!(p-1)! \int_{\Gamma} (\zeta - z)^{p-m-1} T_p(\zeta) d\zeta, \quad (3)$$

где простой замкнутый контур Γ обходит точку z против часовой стрелки. Из условия (2) вытекает, что оператор (3) является ядерным.

Ввиду симметрии условий теоремы для ее доказательства достаточно установить существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. Рассмотрим сначала вспомогательное отождествление

$$J_1 = R^{p-1}(z) \sum_{l=0}^{p-1} R^{l+1}(z) J R_0^{p-l}(z),$$

где $z \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$ —какая-либо фиксированная точка. По условию (2) оператор

$$H J_1 - J_1 H_0 = -R^{p-1} T_p$$

будет ядерным. Следовательно, ВО $W_{\pm}(H, H_0; J_1)$ существуют в силу теоремы 2.3. Далее, из компактности операторов (3) вытекает, что при $J_2 = p J R_0^{2p}(z)$ разность

$$J_1 - J_2 = \sum_{l=0}^{p-1} T_{p+l} R_0^{p-l}$$

компактна. Поэтому согласно предположению 2.1.9 существуют и ВО $W_{\pm}(H; H_0; J_2)$. Для доказательства существования искомого ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ остается учесть, что область значений оператора $R_0^{2p}(z)$ плотна в $\mathcal{H}_0$. •

Замечание 2. Для доказательства теоремы 1 достаточно предположить справедливость включения (2) в окрестности какой-либо точки $z_1 \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$. Более того, и это условие можно заменить предположением (2) для $z = z_1$ и всех натуральных p , больших какого-нибудь фиксированного числа p_1 . Впрочем, при $p = 1$ в силу тождества (4.8) из выполнения (2) хотя бы для одной точки z_1 следует справедливость (2) для всех $z \in \rho(H_0) \cap \rho(H)$.

Ясно, что теорема 1 для случая $p = 1$ может быть легко выведена из теоремы 4.5. При произвольном p такой вывод требует аппарата двойных операторных интегралов—см. § 8. Отметим, что операторы H_0, H , для которых (2) выполняется при $p = 1$, называют иногда *резольвентно сравнимыми*.

2. Большое число практически удобных «ядерных» признаков существования и J -полноты ВО основано на принципе инвариантности (ПИ). Именно, справедлива

Теорема 3. Пусть вещественная функция φ допустима (см. определение 2.6.2) для пары операторов H_0, H и отображение,

определяемое этой функцией, взаимно однозначно. Тогда при условии (1) существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$), и они J -полны (соответственно J^* -полны). Кроме того, справедливо равенство (2.6.11).

○ Обратная к φ функция ψ допустима для пары $h_0 = \varphi(H_0)$ $h = \varphi(H)$. Поэтому согласно теореме 2.5 при $hJ - Jh_0 \in \mathfrak{S}_1$ существуют ВО для пары $\psi(h_0) = H_0$, $\psi(h) = H$ (и отождествления J). Аналогичным образом, существуют и ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$. •

В конкретных применениях в качестве $\varphi(\lambda)$ берется часто одна из следующих функций: 1) $\varphi(\lambda) = \exp(-\lambda)$, 2) $\varphi(\lambda) = (\lambda - a)^{-n}$, если H_0 и H имеют общую регулярную точку $a = \bar{a}$, а n нечетно (но, возможно, отрицательно), 3) $\varphi(\lambda) = (\lambda - a)^{-\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ — любое вещественное число, если операторы H_0, H полуограничены, $H_0 \geq cI$, $H \geq cI$ и $a < c$. Второй и третий варианты, конечно, очень близки к теореме 1.

Принцип инвариантности может, разумеется, комбинироваться и с более общими условиями существования ВО, чем основное условие $V \in \mathfrak{S}_1$. В связи с этим приведем

З а м е ч а н и е 4. Теорема 3 сохраняет силу, если включение (1) заменено более общим условием

$$(\varphi(H) - z)^{-p} J - J(\varphi(H_0) - z)^{-p} \in \mathfrak{S}_1, \quad \text{Im } z \neq 0.$$

○ Нужно лишь убедиться в справедливости ПИ в условиях теоремы 1. В обозначениях ее доказательства для ВО с отождествлением J_1 ПИ выполняется в силу теоремы 2.5. Переход к исходному отождествлению J для функций от операторов H_0, H осуществляется точно так же, как и для них самих. •

3. Принцип инвариантности удобно использовать для перенесения теоремы 2.3 на случай унитарных операторов. Напомним, что для унитарных операторов ВО определяются соотношением (2.2.12).

Теорема 5. Пусть U_0 и U — унитарные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$, $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ — ограниченный оператор и $UJ - JU_0 \in \mathfrak{S}_1$. Тогда ВО $W_{\pm}(U, U_0; J)$ (и $W_{\pm}(U_0, U; J^*)$) существуют и J -полны (соответственно J^* -полны).

○ Домножая U_0 и U на общий множитель, равный по модулю 1, можно добиться того, что 1 не будет собственным числом ни для одного из них. Тогда U_0 и U окажутся преобразованиями Кэли (см. равенство (2.2.13)) самосопряженных операторов $H_0 = i(I + U_0)(I - U_0)^{-1}$, $H = i(I + U)(I - U)^{-1}$.

Ввиду равенства (2.2.14), где $\mathcal{K}_{H_0} = U_0$, $\mathcal{K}_H = U$, пара H_0, H удовлетворяет условию (2) (при $p = 1$). Тем самым на основании замечания 4 для любой допустимой функции φ существуют ВО $W_{\pm}(\varphi(H), \varphi(H_0); J)$.

Далее, по спектральной теореме оператор U можно представить в виде $U = \exp(iG)$, где

$$U = \int_0^{2\pi} e^{it} dE(t), \quad G = \int_0^{2\pi} t dE(t).$$

Аналогичным образом положим $U_0 = \exp(iG_0)$. Тогда $H = -\operatorname{ctg}(G/2)$ и $H_0 = -\operatorname{ctg}(G_0/2)$. Самосопряженные операторы G и G_0 являются функциями H и H_0 , причем соответствующая функция $2 \operatorname{arccotg}(-\lambda)$ допустима. Тем самым существуют ВО $W_{\pm}(G, G_0; J)$. Переходя в определении (2.1.1) этих ВО к пределу при $t \rightarrow \pm\infty$ только по целым t , найдем, что существуют ВО $W_{\pm}(U, U_0; J) = W_{\pm}(G, G_0; J)$. •

З а м е ч а н и е 6. В условиях теоремы 5 ВО для пары U_0, U и для их преобразований Кэли H_0, H совпадают друг с другом, т.е.

$$W_{\pm}(U, U_0; J) = W_{\pm}(H, H_0; J).$$

Подчеркнем, что несмотря на формальную аналогию с теоремой 2.3 в терминах самосопряженных операторов теорема 5 отвечает случаю, когда ядерной является разность резольвент.

Вернемся к рассмотрению самосопряженных операторов. Определенный интерес представляют условия существования ВО, формулируемые в терминах унитарных групп $U_0(t), U(t)$, а не их генераторов H_0, H .

Теорема 7. Пусть при всех t

$$U(t)J - JU_0(t) \in \mathfrak{S}_1. \quad (4)$$

Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ (и ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$) существуют и J -полны (соответственно J^* -полны).

○ Проверим, например, существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. Рассмотрим сначала вспомогательное отождествление $J_r = E(X_r)JE_0(X_r)$, где $X_r = (-r, r)$. Из (4) следует, что

$$\sin(tH)J - J \sin(tH_0) \in \mathfrak{S}_1.$$

При $|t| < \pi(2r)^{-1}$ отображение отрезка $(-r, r)$, определяемое функцией $\mu = \sin(t\lambda)$, взаимно однозначно. Поэтому в силу ПИ

существует ВО $W_{\pm}(H, H_0; J_r)$. Ввиду произвольности r отсюда следует, что существует слабый ВО $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$.

Для доказательства существования сильного ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ применим теперь теорему 2.2.1. Согласно (4)

$$J^* J U_0(t) - U_0(t) J^* J \in \mathfrak{S}_1,$$

а потому, как уже доказано, существует слабый ВО $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$. Остается установить равенство (2.2.3). Рассмотрим для этого пару унитарных операторов $U_0(1), U(1)$. В силу теоремы 5 при условии (4) существуют сильные ВО $W_{\pm}(U(1), U_0(1); J)$ и $W_{\pm}(U_0(1), U_0(1); J^* J)$. Из теоремы 2.2.1 (а точнее, ее аналога для унитарных операторов) теперь следует, что

$$W_{\pm}^*(U(1), U_0(1); J) W_{\pm}(U(1), U_0(1); J) = W_{\pm}(U_0(1), U_0(1); J^* J). \quad (5)$$

Переходя в определении ВО (2.2.1) к пределу по целым t , найдем, что $\tilde{W}_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}(U(1), U_0(1); J)$ и $\tilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^* J) = W_{\pm}(U_0(1), U_0(1); J^* J)$. Поэтому искомое равенство (2.2.3) прямо вытекает из (5). •

4. В различных утверждениях § 4 и пп. 1—3 этого параграфа ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ могут, вообще говоря, быть не изометрическими. Таким образом, условия существования ВО и даже J -полноты можно отделить от условий их изометричности. С другой стороны, рассматриваемые условия существования ВО легко комбинируются с условиями изометричности (например, вида (2.1.9)) из § 2.1. При этом надо иметь в виду, что при существовании и изометричности обоих ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ оба эти ВО полны (а не только J -полны или J^* -полны). Удобная комбинация условий, гарантирующая сразу существование, изометричность и полноту ВО, дается следующей теоремой:

Теорема 8. *Предположим, что оператор $J: \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}$ имеет ограниченный обратный и $J\mathcal{D}(f_0(H_0)) = \mathcal{D}(f(H))$ для какой-либо пары функций, удовлетворяющих (4.10). Пусть при любом ограниченном интервале Λ выполнены условия (4.2) и (2.1.9). Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существуют, изометричны на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и полны, т.е. $R(W_{\pm}(H, H_0; J)) = \mathcal{H}^{(a)}$. Кроме того, существуют ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^{-1})$; эти ВО равны между собой, изометричны на $\mathcal{H}^{(a)}$ и полны.*

○ Ввиду условия (4.2) и подчиненности H оператору H_0 , существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ вытекает из теоремы 4.9. Эти ВО изометричны в силу (2.1.9). Далее, согласно лемме 4.7 из соотношения

$$J^{-1}\mathcal{D}(f(H)) = \mathcal{D}(f_0(H_0)) \quad (6)$$

следует, что при $X_r = (-r, r)$, $X'_r = \mathbb{R} \setminus X_r$ и любом ограниченном Λ

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|E_0(X'_r)J^{-1}E(\Lambda)\| = 0.$$

Поэтому в силу (2.1.9) справедливо включение

$$(J^* - J^{-1})E(\Lambda) = (J^*J - I)E_0(X_r)J^{-1}E(\Lambda) + \\ + (J^*J - I)E_0(X'_r)J^{-1}E(\Lambda) \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (7)$$

Тем самым наряду с $W_{\pm}(H_0, H; E_0(\Lambda)J^*E(\Lambda))$, существующим при условии (4.2), существует и $W_{\pm}(H_0, H; E_0(\Lambda)J^{-1}E(\Lambda))$. Согласно лемме 4.8 из (6) теперь вытекает, что существует ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^{-1})$. Вновь пользуясь (7), получим, что существует и ВО $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$, равный $W_{\pm}(H_0, H; J^{-1})$. Кроме того, согласно (7) $(JJ^* - I)E(\Lambda) \in \mathfrak{S}_{\infty}$, так что эти ВО изометричны на $\mathcal{H}^{(a)}$. Наконец, полнота операторов $W_{\pm}(H, H_0; J)$ и $W_{\pm}(H_0, H; J^*)$ вытекает, например, из предложения 2.3.11. •

5. При построении теории рассеяния для пары самосопряженных операторов всегда делались те или иные предположения относительно их разности. Здесь мы рассмотрим более специальный случай, когда условие ядерного типа накладывается на их произведение. Это позволяет сравнить их обычную сумму с прямой.

Теорема 9. Пусть H_0 и H — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Отождествление $J: \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ определим формулой $J(f \oplus g) = f + g$. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ и $X_{\varepsilon} = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$HE_0(X_{\varepsilon}) \in \mathfrak{S}_1, \quad H_0E(X_{\varepsilon}) \in \mathfrak{S}_1.$$

Тогда ВО $W_{\pm}(H_0 + H, H_0 \oplus H; J)$ существуют, изометричны и полны.

Доказательство можно найти в статье А.В. Суслова [78].

§ 6. ВОЗМУЩЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТИПА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ (Пример)

В качестве примера применения ядерных методов рассмотрим сейчас возмущение оператора умножения интегральным оператором типа оператора Фурье. Напомним, что возмущение оператора умножения интегральным оператором с гладким и достаточно быстро убывающим на бесконечности ядром изучалось в §§ 4.1, 4.2. Ядро оператора Фурье, однако, не убывает на бесконечности.

1. Обозначим через H_{00} оператор умножения на функцию $|x|^{2l}$, $l > 0$, в пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$. Оператор H_{00} самосопряжен на области определения $\mathcal{D}(H_{00})$, состоящей из функций f , для которых

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^{2l})^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

В качестве «невозмущенного» оператора H_0 возьмем произвольный самосопряженный оператор с областью определения

$$\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{D}(H_{00}). \quad (1)$$

Положим

$$(V_+ f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \cos\langle x, y \rangle f(y) dy, \quad (2)_+$$

$$(V_- f)(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \sin\langle x, y \rangle f(y) dy. \quad (2)_-$$

Если не различать в обозначениях координатное и импульсное представления, то операторы $V_{\pm}$ можно записать в виде

$$2V_+ = \Phi + \Phi^*, \quad 2iV_- = \Phi^* - \Phi. \quad (3)$$

Операторы $V_{\pm}$ ограничены и симметричны. Поэтому при $V = V_{\pm}$ полный гамильтониан $H = H_0 + V$ будет самосопряженным на области определения

$$\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0). \quad (4)$$

Из (1), (4) вытекает, что

$$(H_{00} - z)R_0(z) \in \mathfrak{B}, \quad (H_{00} - z)R(z) \in \mathfrak{B}, \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (5)$$

Аналогичным образом, операторы $\dot{H}_0$ и H ограничены относительно H_{00} и относительно друг друга.

Обозначим через $\mathcal{H}_{\pm}$ подпространства четных и нечетных функций $f \in \mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d)$: $f(x) = \pm f(-x)$; $P_{\pm}$ — ортогональный проектор на $\mathcal{H}_{\pm}$. Подпространства $\mathcal{H}_{\pm}$ приводят как $\mathcal{H}_{00}$, так и операторы $V_{\pm}$, причем $V_{\pm}f = 0$ при $f \in \mathcal{H}_{\pm}$. Кроме того, согласно (3)

$$V_{\pm}^2 = P_{\pm}. \quad (6)$$

Операторы $(2)_{\pm}$ ограничены, но не компактны. Более того, эти операторы не являются компактными даже относительно H_0 , т.е. $V_{\pm}R_0(z) \notin \mathfrak{S}_{\infty}$. Действительно, в силу (1) и (6) из компактности $V_{\pm}R_0$ следовало бы, что $R_{00}P_{\pm} \in \mathfrak{S}_{\infty}$. Последнее включение противоречит тому, что оператор H_{00} имеет непрерывный спектр на каждом из подпространств $\mathcal{H}_{\pm}$.

Хотя операторы $V_{\pm}$ не обладают никакими «улучшающими» свойствами, при возмущении ими существенный спектр не меняется. Именно, справедлива

Теорема 1. Пусть H_0 — произвольный самосопряженный оператор, для которого выполнено условие (1), а $V_{\pm}$ определяются равенствами $(2)_{\pm}$. Тогда существенные спектры операторов H_0 и $H = H_0 + V_{\pm}$ совпадают.

○ В силу обобщенной теоремы Вейля (см., например, [4]) достаточно убедиться, что

$$R(z) - R_0(z) \in \mathfrak{S}_{\infty}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \quad (7)$$

Согласно резольвентному тождеству (1.9.5) и условиям (5) соотношение (7) равносильно включению

$$(H_{00} + I)^{-1}V_{\pm}(H_{00} + I)^{-1} \in \mathfrak{S}_{\infty}. \quad (8)$$

Оператор (8) является интегральным, причем его ядро задается равенством

$$(2\pi)^{-d/2}(|x|^{2l} + 1)^{-1}\varphi_{\pm}(\langle x, y \rangle)(|y|^{2l} + 1)^{-1}, \quad (9)$$

где $\varphi_{+}(s) = \cos s$, $\varphi_{-}(s) = \sin s$. Следовательно, оператор в (8) равен полусумме или полуразности операторов вида (1.6.21). Поэтому включение (8) при любом $l > 0$ вытекает из леммы 1.6.5. •

При достаточно большом l для рассматриваемой пары H_0, H можно строить ВО, отвечающие $J = I$.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 выполнено неравенство $2l > d$. Тогда ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны.

○ В силу теоремы 5.1 (для $p = 1$ и $J = I$) нужно лишь убедиться в ядерности операторов (7) или (8). При $2l > d$ ядерность интегрального оператора с ядром (9) вытекает из теоремы 1.6.6. •

Следствие 3: При $2l > d$ абсолютно непрерывные спектры операторов H_0 и H совпадают.

В частности, при $H_0 = H_{00}$ абсолютно непрерывный спектр оператора H совпадает с $[0, \infty)$. Кратность абсолютно непрерывного спектра равна двум при $d = 1$ и бесконечна при $d > 1$.

Как видно из (3), возмущение инвариантно относительно преобразования Фурье, т.е. оператор $\Phi V_{\pm} \Phi^*$ вновь задается соотношением $(2)_{\pm}$. В то же время при преобразовании Фурье оператор умножения на $|x|^{2l}$ переходит в оператор $(-\Delta)^l$, где Δ — оператор Лапласа. Отсюда следует, что теоремы 1 и 2 сохраняют силу, если в них $H_{00} = (-\Delta)^l$.

2. Результаты п. 1 автоматически распространяются на несколько более общие возмущения. Будем сейчас считать, что V — интегральный оператор с ядром

$$\sum_{j=1}^N (q_j(x) \exp(i\langle x, y \rangle) \overline{r_j(y)} + r_j(x) \exp(-i\langle x, y \rangle) \overline{q_j(y)}). \quad (10)$$

Очевидно, что такой оператор симметричен. При $N = 1$ и $2q_1 = (2\pi)^{-d/2}$, $r_1 = 1$ (или $2q_1 = i(2\pi)^{-d/2}$, $r_1 = -1$) он сводится к $(2)_+$ (соответственно к $(2)_-$). Если функции q_j , r_j ограничены и убывают на бесконечности, то существование и полнота ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ устанавливаются при меньших ограничениях на l и d , чем в теореме 2. Именно, аналогично теореме 2 проверяется

Теорема 4. Пусть H_0 — тот же оператор, что в теореме 1, V — интегральный оператор с ядром (10) и $H = H_0 + V$. Тогда при условии

$$|q_j(x)| + |r_j(x)| \leq C(1 + |x|)^{-a}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (11)$$

ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ существуют и полны, если $a \geq 0$ и $2l + a > d$.

Можно рассмотреть и случай, когда функции q_j , r_j растут на бесконечности, т.е. $a < 0$ в (11). При этом нужно считать, что $a > -l$, оператор H_0 полуограничен и $\mathcal{D}(|H_0|^{1/2}) = \mathcal{D}(H_{00}^{1/2})$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$

$$|(Vf, f)| \leq \varepsilon \|H_{00}^{1/2} f\|^2 + C(\varepsilon) \|f\|^2, \quad f \in \mathcal{D}(H_{00}^{1/2}),$$

оператор $H = H_0 + V$ можно с помощью теоремы 1.10.9 определить через соответствующую квадратичную форму. Для него $\mathcal{D}(|H|^{1/2}) = \mathcal{D}(H_{00}^{1/2})$. Поэтому в правой части резольвентного тождества

$$R(z) - R_0(z) = - (R(z)(H_{00} + I)^{1/2}) \times \\ \times ((H_{00} + I)^{-1/2} V (H_{00} + I)^{-1/2}) ((H_{00} + I)^{1/2} R_0(z))$$

первый и последний сомножители будут ограниченными операторами. Отсюда видно, что при переносе теоремы 4 на случай $a < 0$ вместо оператора в (8) приходится рассматривать оператор

$$(H_{00} + I)^{-1/2} V (H_{00} + I)^{-1/2}. \quad (12)$$

Условия его компактности и ядерности даются вновь леммой 1.6.5 и теоремой 1.6.6. Таким образом, верна

Теорема 5. Пусть H_0 — полуограниченный самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, для которого $\mathcal{D}(|H_0|^{1/2}) = \mathcal{D}(H_{00}^{1/2})$, H — интегральный оператор с ядром (10) и при $a \in (-l, 0]$ выполнено условие (11). Тогда существенные спектры операторов H_0 и $H = H_0 + V$ совпадают. Если к тому же $l > -a + d$, то $W_\pm(H, H_0)$ существуют и полны.

3. При доказательстве теорем 2, 4 и 5 мы исходили из признака теоремы 5.1 существования и полноты ВО. Можно было бы воспользоваться и локальными результатами § 4. Ввиду условий $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$ или $\mathcal{D}(|H|^{1/2}) = \mathcal{D}(|H_0|^{1/2})$, операторы H_0 и H взаимно подчинены. Тем самым в силу следствия 4.10 достаточно проверять условие (4.2) (при $J = I$). Проблема, однако, состоит в том, что явный вид функций операторов H_0 и H неизвестен. Поэтому для проверки (4.2) все равно приходится (ср. с выводом следствия 4.12) заменять спектральные проекторы $E_0(\cdot)$ и $E(\cdot)$ на подходящие функции оператора H_{00} . При этом требуются условия вида (1) и (4).

Для доказательства (4.2) достаточно, например, показать, что при каком-либо n

$$R^n(z) V R_0^n(z) \in \mathfrak{S}_1.$$

При $n > 1$ это условие формально менее ограничительно, чем предположение $R - R_0 \in \mathfrak{S}_1$. Однако замена R_0^n и R^n на R_{00}^n возможна лишь при условиях

$$\mathcal{D}(|H|^n) = \mathcal{D}(|H_0|^n) = \mathcal{D}(H_{00}^n).$$

Эти соотношения выполняются только при $n \leq 1$ в теоремах 2, 4 и только при $n \leq 1/2$ в теореме 5. Таким образом, в теоремах 2 и 4 все равно приходится рассматривать оператор (8), а в теореме 5—оператор (12). По изложенным причинам ничего нового для изучаемой пары H_0, H не дает и применение теоремы 5.1 при $p > 1$.

При $H_0 = H_{00}$ оператор $H = H_0 + V$ сводится к гамильтониану модели Фридрихса—Фаддеева (см. §§ 4.1, 4.2) в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+; L_2(\mathbb{S}^{d-1}))$ при $d > 1$ и в $L_2(\mathbb{R})$ при $d = 1$. Однако ядро отвечающего $(2)_{\pm}$ интегрального оператора заведомо не удовлетворяет указанным в конце § 4.2 требованиям убывания на бесконечности. Таким образом, теорема 2 не вытекает из результатов гл. 4 даже в частном случае $H_0 = H_{00}$. Данное в п. 1 доказательство теоремы 2 учитывает осцилляцию ядер операторов $(2)_{\pm}$ на бесконечности. Характерно, что относительно невозмущенного оператора ядерная техника потребовала лишь информацию о его области определения.

В условиях теоремы 2 к паре $H_0 = H_{00}$, $H = H_0 + V$ не применима и теорема 2.5.1 (признак Кука), обеспечивающая существование прямых ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. Дело в том, что в силу равенства (6)

$$\|V_{\pm} \exp(-iH_0 t) f\| = \|f\|, \quad H_0 = H_{00}, \quad f \in \mathcal{H}_{\pm}.$$

Поэтому подынтегральная функция в (2.5.1) не зависит от t , и, следовательно, интеграл расходится.

Аналогичные замечания справедливы и в условиях теоремы 5. В условиях теоремы 4 применение методов модели Фридрихса—Фаддеева и признака Кука требует, чтобы число a в (11) было достаточно большим и, конечно, чтобы $H_0 = H_{00}$.

§ 7. ОДНОМЕРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Задача об одномерном возмущении оказывается в существенном явно решаемой. Это позволяет дать еще одно доказательство устойчивости абсолютно непрерывного спектра, а также довольно детально изучить структуру сингулярной непрерывной компоненты.

1. В этом параграфе считаем, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $H = H_0 + V$ и $V = \gamma(\cdot, v)v$, $\gamma = \bar{\gamma}$, $\|v\| = 1$. Найдём резольвенту $R(z)$

или соответствующий оператор $T(z)$, связанный с $R(z)$ равенствами (4.1.4) и (4.1.5). Для одномерного возмущения уравнение (4.1.8) имеет вид

$$T(z)f = \gamma(f, v)v - \gamma(R_0(z)T(z)f, v)v$$

и решается явно. Действительно, из этого уравнения следует, что $T(z)f = (f, u_z)v$, где вектор-функция u_z удовлетворяет уравнению

$$u_z = \gamma v - \gamma(v, R_0(z)v)u_z.$$

Отсюда вытекает, что

$$u_z = \gamma[1 + \gamma(v, R_0(z)v)]^{-1}v,$$

и, следовательно, оператор $T(z)$ оказывается одномерным:

$$T(z) = \gamma D^{-1}(z)(\cdot, v)v, \quad (1)$$

где

$$D(z) = 1 + \gamma(R_0(z)v, v). \quad (2)$$

Согласно (4.1.5) это дает также выражение для резольвенты:

$$R(z) = R_0(z) - \gamma D^{-1}(z)(\cdot, R_0(\bar{z})v)R_0(z)v. \quad (3)$$

Задача об одномерном возмущении может быть сведена к случаю операторов с простым (см. п. 4 § 1.3) спектром. Для этого нужно воспользоваться следующим утверждением:

Лемма 1. *Обозначим через $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}$ замыкания линейных оболочек всевозможных элементов $\{E_0(X)v\}$ и $\{E(X)v\}$. Тогда $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ и $Hf = H_0f$ при $f \in (\mathcal{H} \ominus \mathcal{L}) \cap \mathcal{D}(H)$.*

○ По определению $\mathcal{L}_0(\mathcal{L})$ — наименьшее подпространство, содержащее v и приводящее оператор $H_0(H)$. При $f \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{L}_0$ выполнено $Vf = 0$, а потому подпространства $\mathcal{H} \ominus \mathcal{L}_0$, а следовательно, и $\mathcal{L}_0$, приводят оператор H . Отсюда следует, что $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0$. Переставляя H_0 и H , найдем, что и $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$. •

Сужения $\tilde{H}_0$ и $\tilde{H}$ операторов H_0 и H на подпространство $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$ имеют простой спектр. Поэтому (см. п. 1 § 1.5) они могут быть реализованы как операторы умножения на λ в пространствах $L_2(\mathbb{R}; \rho_0)$ и $L_2(\mathbb{R}; \rho)$, где меры ρ_0 и ρ задаются равенствами

$$\rho_0(\cdot) = (E_0(\cdot)v, v), \quad \rho(\cdot) = (E(\cdot)v, v). \quad (4)$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Re_0(z) = (R_0(z)v, v), \quad \Re(z) = (R(z)v, v), \quad (5)$$

являющиеся в силу спектральной теоремы интегралами Коши—Стилтьеса по мерам (4). Из (2), (3) вытекает, что эти функции связаны равенством

$$(1 + \gamma \Re_0(z))(1 - \gamma \Re(z)) = 1. \quad (6)$$

2. На основании теоремы 2.1 для пары H_0, H существуют (и полны) ВО $W_{\pm}(H, H_0)$. В терминах функции (2) для этих ВО и соответствующей матрицы рассеяния нетрудно получить явные выражения. При этом нам понадобится

Лемма 2. При п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют конечные и не равные нулю предельные значения $D(\lambda \pm i0)$ функции (2).

○ Согласно теореме 1.2.5 функции (5) при $z = \lambda \pm i\varepsilon$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют конечные пределы для п.в. λ . Тем самым существуют и пределы $D(\lambda \pm i0)$. Соотношение $D(\lambda \pm i0) \neq 0$ для п.в. λ вытекает теперь из тождества (6), распространенного на $z = \lambda \pm i0$. •

Отметим еще, что соотношение $D(\lambda \pm i0) \neq 0$ для п.в. λ следует и из теоремы единственности для аналитических функций с неотрицательной мнимой частью (см. замечание 1.2.4). Кроме того, поскольку функция $D(z)$ имеет для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ угловые предельные значения, можно при этом сослаться и на теорему Лузина—Привалова (теорема 1.2.1).

Теперь, подставляя выражение (1) в представление (4.2.18) для полуторалинейной формы ВО, найдем, что

$$(W_{\pm}(H, H_0)f_0, f) = (P_0f_0, f) - \int_{-\infty}^{\infty} w_{\pm}(\lambda; f_0, f) d\lambda, \quad (7)$$

где

$$w_{\pm}(\lambda; f_0, f) = \gamma D^{-1}(\lambda \mp i0) \frac{d(E_0(\lambda)f_0, v)}{d\lambda} (R_0(\lambda \mp i0)v, f). \quad (8)$$

В диагональном для H_0 представлении пространства $\mathcal{H}_0^{(a)} = \mathcal{H}^{(a)}$ ВО, конечно, должен (ср. с § 4.2) действовать как сингулярный интегральный оператор. Именно, пусть $\tilde{v}(\cdot)$ — представитель элемента v в разложении (2.4.2). Тогда из равенств (7) и (8) вытекает, что $W_{\pm}(H, H_0) - P_0$ — интегральный оператор в $\mathfrak{H}_0^{(a)}$ с сингулярным ядром

$$\gamma D^{-1}(\mu \mp i0) \langle \cdot, \tilde{v}(\mu) \rangle_{\mathfrak{H}(\mu)} \tilde{v}(\lambda) (\lambda - \mu \pm i0)^{-1}.$$

То же выражение получается при подстановке равенства (1) для $T(z)$ в формулу (4.2.1) для ВО. Аналогичным образом, подставляя (1) в представление (2.8.11) для матрицы рассеяния, найдем, что

$$S(\lambda) = I(\lambda) - 2\pi i \gamma D^{-1}(\lambda + i0) \langle \cdot, \tilde{v}(\lambda) \rangle_{\mathfrak{h}(\lambda)} \tilde{v}(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}_0. \quad (9)$$

Отсюда видно, что действующий в $\mathfrak{h}(\lambda)$ оператор $S(\lambda) - I(\lambda)$ является одномерным. Унитарность в $\mathfrak{h}(\lambda)$ оператора (9) является следствием равенства

$$D(\lambda + i0) - D(\lambda - i0) = 2\pi i \gamma |\tilde{v}(\lambda)|^2, \quad (10)$$

вытекающего из соотношения (1.2.7) между предельными значениями интеграла Коши—Стилтьеса и производной от его меры. Сформулируем полученный результат.

Теорема 3. Пусть $H = H_0 + \gamma(\cdot, v)v$. Тогда для полугермитической формы ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ на произвольных элементах $f_0, f \in \mathcal{H}$ справедливо представление (7), (8). Соответствующая матрица рассеяния при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ задается соотношением (9).

3. С помощью соотношения (6) можно вновь показать, что абсолютно непрерывные части $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$ операторов H_0 и H унитарно эквивалентны. Точнее, доказательство этого факта основано на сравнении мер (4). При этом удобно ввести в рассмотрение их интегралы Пуассона:

$$\mathcal{P}_0(\lambda, \varepsilon) = \text{Im } \mathcal{R}_0(\lambda + i\varepsilon), \quad \mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) = \text{Im } \mathcal{R}(\lambda + i\varepsilon).$$

Эти функции связаны равенством

$$\mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) = |D(\lambda + i\varepsilon)|^{-2} \mathcal{P}_0(\lambda, \varepsilon). \quad (11)$$

Для его доказательства нужно взять мнимую часть в соотношении

$$\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}_0(z)(1 + \gamma \mathcal{R}_0(z))^{-1},$$

вытекающем из (6). Следующее наблюдение совсем элементарно:

Лемма 4. Пусть производные (неотрицательных) мер m_0 и m удовлетворяют соотношению

$$m'(\lambda) = p(\lambda)m'_0(\lambda), \quad \text{п.в. } \lambda, \quad (12)$$

с п.в. конечной функцией $p(\lambda)$. Обозначим через $m_{0,a}$ и m_a части этих мер, абсолютно непрерывные относительно меры Лебега. Тогда мера m_a абсолютно непрерывна относительно меры $m_{0,a}$.

○ Поскольку для п.в. λ производная от меры равна производной от ее абсолютно непрерывной части, из (12) следует, что $m'_a(\lambda) = p(\lambda)m'_{0,a}(\lambda)$. Остается воспользоваться тем, что $m_{0,a}(X)$ и $m_a(X)$ — интегралы по X от своих производных. •

Теперь нетрудно показать, что абсолютно непрерывные части мер (4) эквивалентны друг другу.

Лемма 5. Меры $\rho_{0,a}$ и ρ_a эквивалентны.

○ Перейдем в (11) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда, учитывая лемму 2 и соотношение (1.2.7), найдем, что для п.в. λ производные мер (4) связаны равенством

$$\rho'_0(\lambda) = |D(\lambda + i0)|^2 \rho'(\lambda).$$

Теперь абсолютная непрерывность $\rho_{0,a}$ относительно ρ_a вытекает из леммы 4. Для доказательства абсолютной непрерывности ρ относительно ρ_0 нужно еще воспользоваться тем, что $D(\lambda \pm i0) \neq 0$ для п.в. λ . •

Вернемся к рассмотрению операторов H_0 и H . Сейчас мы докажем унитарную эквивалентность их абсолютно непрерывных частей $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$, минуя построение ВО $W_{\pm}(H, H_0)$ и опираясь только на лемму 5.

Теорема 6. Операторы $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$ унитарно эквивалентны.

○ В силу леммы 1 достаточно рассматривать сужения $\tilde{H}_0$ и $\tilde{H}$ операторов H_0 и H на подпространство $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$. Их абсолютно непрерывные части $\tilde{H}_0^{(a)}$ и $\tilde{H}^{(a)}$ могут быть реализованы как операторы умножения на λ в пространствах $L_2(\mathbb{R}; \rho_{0,a})$ и $L_2(\mathbb{R}; \rho_a)$, где ρ_0 и ρ — меры (4). Согласно лемме 5 меры $\rho_{0,a}$ и ρ_a эквивалентны. На основании леммы 1.3.10 отсюда следует унитарная эквивалентность операторов $\tilde{H}_0^{(a)}$ и $\tilde{H}^{(a)}$. •

4. В отличие от абсолютно непрерывных сингулярные компоненты $\rho_{0,s}$ и ρ_s мер (4) не только не эквивалентны, но, напротив, сингулярны друг относительно друга. Именно, верна

Лемма 7. Меры $\rho_{0,s}$ и ρ_s сосредоточены на дизъюнктивных множествах, т.е. найдутся такие борелевские множества $Z_{0,s}$ и Z_s , что $Z_{0,s} \cap Z_s = \emptyset$ и

$$\rho_{0,s}(\mathbb{R} \setminus Z_{0,s}) = 0, \quad \rho_s(\mathbb{R} \setminus Z_s) = 0.$$

○ Мера ρ_s сосредоточена (см п.3 § 1.1) на множестве Z_s тех λ , где симметричная производная $d\rho/d\lambda = +\infty$. Аналогично $\rho_{0,s}$ сосредоточена на множестве $Z_{0,s}$, где $d\rho_0/d\lambda = +\infty$. Покажем, что $Z_{0,s} \cap Z_s = \emptyset$. В силу теоремы 1.2.7 (Фату) при $\lambda \in Z_s$ будет $\mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогично $\mathcal{P}_0(\lambda, \varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\lambda \in Z_{0,s}$. В то же время из определений (2) и (5) прямо следует, что

$$|D(z)| = |1 + \gamma \mathcal{R}_0(z)| \geq \gamma \mathcal{P}_0(\lambda, \varepsilon), \quad z = \lambda + i\varepsilon.$$

Комбинируя эту оценку с (11), найдем, что

$$\mathcal{P}_0(\lambda, \varepsilon) \mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) \leq \gamma^{-2}.$$

Однако в точке $\lambda \in Z_{0,s} \cap Z_s$ левая часть этого неравенства должна была бы стремиться к $+\infty$. •

Для операторов с простым спектром из леммы 7 непосредственно вытекает, что при одномерных возмущениях сингулярный спектр полностью меняется. Именно, верна

Теорема 8. Пусть H_0 —произвольный самосопряженный оператор с простым спектром, v —какой-либо циклический для H_0 вектор и $H = H_\gamma = H_0 + \gamma(\cdot, v)v$. Тогда при произвольном вещественном $\gamma \neq 0$ сингулярные части спектральных мер операторов H_0 и H (спектр H также оказывается простым) сосредоточены на дизъюнктивных борелевских множествах.

Из этой теоремы вытекает, что при $\gamma \neq \gamma'$ сингулярные (относительно меры Лебега) компоненты спектральных мер операторов H_γ и $H_{\gamma'}$ будут и взаимно сингулярными.

5. Рассмотрим теперь одномерное возмущение в рамках модели Фридрихса—Фаддеева (см. § 4.1). Будем считать, что H_0 —умножение на независимую переменную в $\mathcal{H} = L_2(\sigma)$, $\sigma = [a, b]$, вспомогательное пространство $\mathfrak{h} = \mathbb{C}$, $H_\gamma = H_0 + \gamma(\cdot, v)v$, а v удовлетворяет условию Гельдера с каким-либо показателем $\alpha_0 > 0$ и $v(a) = v(b) = 0$. Таким образом, возмущение имеет вид (4.1.1) с

$$v(\lambda, \mu) = \gamma v(\lambda) \overline{v(\mu)}$$

и для него выполняются условия (4.1.2) и (4.1.3). Поэтому в рассматриваемой обстановке применимы все результаты §§ 4.1, 4.2. Некоторые из них допускают теперь более конкретное описание. Кроме того, рассмотрение одномерного возмущения позволяет установить необходимость условия $\alpha_0 > 1/2$ в вопросе об отсутствии сингулярного непрерывного спектра.

Пусть, как и в § 4.1, множество $\mathcal{N}^\pm$ состоит из тех точек $\lambda_0 \pm i0$, где однородное уравнение $f = A(\lambda_0 \pm i0)f$, $\lambda_0 \in \sigma$, имеет нетривиальное решение. Приведем независимое от рассмотрений § 4.1 описание этого множества. Заметим предварительно, что в силу теоремы 1.2.6 функция

$$D(z) = 1 + \gamma \int_{\sigma} (\mu - z)^{-1} |v(\mu)|^2 d\mu$$

гельдеровски непрерывна с показателем α_0 в комплексной плоскости с разрезом по σ . Так как теперь $A(z)$ — интегральный оператор с ядром $-\gamma v(\lambda)v(\mu)(\mu - z)^{-1}$, то для решения уравнения $f = A(\lambda_0 \pm i0)f$ должно быть $f = cv$. При этом условие $c \neq 0$ эквивалентно тому, что $D(\lambda_0 \pm i0) = 0$. Поскольку согласно теореме 1.2.5

$$D(\lambda \pm i0) = 1 \pm \pi i \gamma |v(\lambda)|^2 + \gamma \text{ v. p. } \int_{\sigma} (\mu - \lambda)^{-1} |v(\mu)|^2 d\mu, \quad (13)$$

отсюда вытекает, что и $v(\lambda_0) = 0$. Таким образом, уравнения $D(\lambda_0 \pm i0) = 0$ имеют решения одновременно и, следовательно, $\mathcal{N}^{(+)} = \mathcal{N}^{(-)} =: \mathcal{N}$, если $\mathcal{N}^{(\pm)}$ рассматривать как подмножество σ . Мы установили, что верна

Лемма 9. *Множество $\mathcal{N}$ «особых» $\lambda_0 \in \sigma$ состоит из тех и только тех точек, где $D(\lambda_0 \pm i0) = 0$.*

В силу (13) равенство $v(\lambda_0) = 0$ является необходимым условием принадлежности точки λ_0 множеству $\mathcal{N}$. Согласно теореме 4.1.6 множество $\mathcal{N}$ замкнуто и имеет нулевую меру, а согласно теореме 4.2.1 на дополнительном множестве $\sigma \setminus \mathcal{N}$ спектр оператора H абсолютно непрерывен. В рассматриваемом случае эти утверждения легко проверить непосредственно. Так, замкнутость $\mathcal{N}$ вытекает из непрерывности функции (13), а равенство $|\mathcal{N}| = 0$ — из леммы 2. Наконец, для проверки последнего утверждения нужно установить абсолютную непрерывность на $\sigma \setminus \mathcal{N}$ спектральной меры $\rho(\cdot)$ (см. (4)) оператора $\tilde{H}$. Пусть замкнутый отрезок X содержится $\sigma \setminus \mathcal{N}$. По формуле обращения (1.2.8) мера (4) восстанавливается равенством

$$\rho(X) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_X \mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) d\lambda. \quad (14)$$

Согласно (2) и (11)

$$\mathcal{P}(\lambda, \varepsilon) = \gamma^{-1} |D(\lambda + i\varepsilon)|^{-2} \operatorname{Im} D(\lambda + i\varepsilon),$$

причем при $\lambda \in X$ величина $|D(\lambda + i0)|$ отделена от нуля. Отсюда следует, что $\mathcal{P}(\lambda, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $\lambda \in X$ сходится к непрерывной функции $\pi|D(\lambda + i0)|^{-2}|v(\lambda)|^2$. Тем самым под знаком интеграла (14) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это доказывает абсолютную непрерывность меры (14) на множестве $\sigma \setminus \mathcal{N}$.

В силу теоремы 4.1.1 и леммы 4.1.4 при $\alpha_0 > 1/2$ множество $\mathcal{N}$ конечно, и в частности, сингулярная непрерывная компонента в спектре оператора H отсутствует. При меньших α_0 можно утверждать отсутствие сингулярной непрерывной компоненты, если, например, функция $v(\lambda)$ имеет лишь счетное число нулей. В общем случае, однако, спектр может быть устроен достаточно сложно. Это вытекает из следующей теоремы, установленной в [71]:

Теорема 10. Пусть $\mathcal{N} \subset \sigma$ замкнуто, $|\mathcal{N}| = 0$, а для составляющих интервалов l_n множества $\sigma \setminus \mathcal{N}$ выполнено условие

$$\sum_n |l_n|^{1-2\beta} < \infty, \quad 2\beta < 1.$$

Пусть m — произвольная мера с носителем $\mathcal{N}$. Тогда найдется функция $v(\lambda)$, удовлетворяющая условию Гельдера с показателем $\alpha_0 = \beta[2(1 - \beta)]^{-1}$ и равенствам $v(a) = v(b) = 0$, для которой сингулярная часть ρ_s меры $(E(\cdot)v, v)$ оператора $H = H_0 + (\cdot, v)v$ совпадает с m .

Отметим еще, что и при $\alpha_0 < 1/2$ множество $\mathcal{N}$ не может быть слишком «густым». Именно, как показано в [71], в этом случае для его ε -окрестности $\mathcal{N}_\varepsilon$ верна оценка $|\mathcal{N}_\varepsilon| \leq C\varepsilon^{2\alpha_0}$.

6. Остановимся, наконец, на поведении матрицы рассеяния $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ при приближении λ к собственным числам H . Будем считать, что H_0 — умножение на λ в $L_2(\sigma)$, а функция $v(\lambda)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha_0 > 1/2$ и $v(a) = v(b) = 0$. Тогда в силу леммы 4.1.4 и теоремы 4.1.1 множество $\mathcal{N} = \sigma^{(p)}(H) \cap \sigma$ конечно, а в силу леммы 9 точка $\lambda_0 \in \mathcal{N}$ в том и только в том случае, если $D(\lambda_0 \pm i0) = 0$. Матрица рассеяния $S(\lambda)$ определяется соотношением (9), где $\tilde{v} = v$, для всех $\lambda \in \sigma \setminus \mathcal{N}$ и непрерывна по λ на составляющих интервалах этого множества. Рассмотрим поведение $S(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0 \in \mathcal{N}$. В окрестности такого λ_0 функция (13) имеет асимптотику:

$$D(\lambda + i0) = \gamma v_0(\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0),$$

где

$$v_0 = \int_{\sigma} (\mu - \lambda_0)^{-2} |v(\mu)|^2 d\mu > 0.$$

В силу равенства (9) отсюда следует, что при $\lambda \rightarrow \lambda_0$

$$S(\lambda) = 1 - 2\pi i v_0^{-1} (\lambda - \lambda_0)^{-1} |v(\lambda)|^2 (1 + o(1)). \quad (15)$$

Поскольку $v(\lambda) = O(|\lambda - \lambda_0|^{\alpha_0})$, второе слагаемое в правой части стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Таким образом, мы установили

Предложение 11. Пусть $\alpha_0 > 1/2$ и $D(\lambda_0 \pm i0) = 0$. Тогда при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ справедливо соотношение (15). Тем самым $S(\lambda) \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$, причем при приближении λ к λ_0 справа (слева) число $S(\lambda) \in \mathbb{T}$ стремится к точке 1 снизу (сверху). Если, кроме того, функция v дифференцируема в точке λ_0 , то

$$S(\lambda) = 1 - 2\pi i v_0^{-1} |v'(\lambda_0)|^2 (\lambda - \lambda_0) + o(\lambda - \lambda_0), \quad \lambda \rightarrow \lambda_0.$$

§ 8. ДВОЙНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ СТИЛТЬЕСА

В спектральной теории довольно часто возникает необходимость в исследовании разности функций $f(H)J - Jf(H_0)$ самосопряженных операторов H_0 и H в зависимости от свойств функции f и известной разности $HJ - JH_0$. Для решения такого типа вопросов весьма удобен аппарат двойных операторных интегралов (ДОИ) Стилтеса, разработанный в статьях М.Ш. Бирмана и М.З.Соломяка [45, 48]. Здесь мы ограничимся формулировками простейших результатов этой теории и приведем в конце параграфа пример их применения.

1. Пусть $E_0(\cdot), E(\cdot)$ — спектральные семейства самосопряженных операторов H_0 и H , действующие соответственно в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}$. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_0, \mathcal{H})$ операторов Гильберта — Шмидта (см. п.2 § 1.7) и зададим проекторнозначную функцию $\mathcal{E}: \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_2$ равенством

$$\mathcal{E}(X \times Y)T = E(Y)TE_0(X), \quad T \in \mathfrak{S}_2.$$

Определенная на измеримых прямоугольниках из $\mathbb{R}^2$ функция $\mathcal{E}$ стандартным образом распространяется до спектральной

меры, заданной на всех борелевских множествах из $\mathbb{R}^2$. Спектральная теорема сопоставляет каждой в существенном ограниченной (относительно меры $\mathcal{E}$) функции φ ограниченный нормальный оператор (трансформатор):

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu) d\mathcal{E}(\lambda, \mu): \mathfrak{S}_2 \rightarrow \mathfrak{S}_2; \quad (1)$$

при этом

$$\|\Phi\| = (\mathcal{E})\text{-sup } |\varphi(\lambda, \mu)|. \quad (2)$$

Значение трансформатора Φ на операторе $T \in \mathfrak{S}_2$ по определению называются *двойным операторным интегралом (ДОИ)* и обозначается

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu) dE(\mu) T dE_0(\lambda): = \Phi T. \quad (3)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Пусть величина (2) конечна. Тогда при любом $T \in \mathfrak{S}_2$ двойной операторный интеграл (3) принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$ и

$$\|\Phi T\|_2 \leq (\mathcal{E})\text{-sup } |\varphi(\lambda, \mu)| \|T\|_2.$$

В силу спектральной теоремы сопряженный (относительно скалярного произведения в $\mathfrak{S}_2$) к (1) оператор (трансформатор) равен

$$\Phi^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(\lambda, \mu)} d\mathcal{E}(\lambda, \mu). \quad (4)$$

Аналогично для двух различных трансформаторов Φ_j вида (1) (с ядрами φ_j) справедливо равенство

$$\Phi_1 \Phi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\lambda, \mu) \varphi_2(\lambda, \mu) d\mathcal{E}(\lambda, \mu).$$

Отсюда вытекает, что для любых ограниченных функций f_0

и f

$$\begin{aligned} f(H) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda, \mu) dE(\mu) T dE_0(\lambda) f_0(H_0) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\lambda) \varphi(\lambda, \mu) f(\mu) dE(\mu) T dE_0(\lambda). \end{aligned} \quad (5)$$

В частности, если $f_0(H_0) = E_0(X_0)$, а $f(H) = E(X)$ то интегрирования в (5) ограничиваются на множества X_0 (по λ) и X (по μ). Это позволяет рассматривать ДООИ (3) с интегрированием по произвольным борелевским множествам X_0 и X .

2. Условия ограниченности трансформатора Φ в других идеалах $\mathfrak{S}_p$ получаются с помощью результатов о ядерности интегральных операторов и оценок для их s -чисел. Приведем здесь лишь самое простое утверждение такого типа.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(\lambda, \mu)$ в (3) удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$ по переменной λ (или μ) с постоянной, не зависящей от μ (от λ). Пусть, кроме того, спектральная мера E_0 (соответственно E) имеет компактный носитель. Тогда трансформатор Φ действует ограниченно из пространства $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}_p$, где $p > 2(1 + 2\alpha)^{-1}$ и $p \geq 1$. В частности, при $\alpha > 1/2$ и $T \in \mathfrak{S}_1$ оператор ΦT является ядерным.

При $T \notin \mathfrak{S}_2$ ДООИ определяется на основе двойственности классов $\mathfrak{S}_p$. Именно, пусть трансформатор $\bar{\Phi}$:

$$\bar{\Phi}T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(\lambda, \mu)} dE(\mu) T dE_0(\lambda),$$

действует ограниченно из $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}_1$. Тогда сопряженный ему трансформатор $\bar{\Phi}^*$ действует ограниченно из $\mathfrak{S}_1^* = \mathfrak{B}$ в $\mathfrak{S}_1^* = \mathfrak{B}$. Теперь в согласии с (4) при произвольном $T \in \mathfrak{B}$ ДООИ естественно определить равенством $\Phi T = \bar{\Phi}^* T$. При таком определении условия ограниченности Φ в $\mathfrak{S}_1$ автоматически дают условия ограниченности Φ в $\mathfrak{B}$.

3. Вернемся, наконец, к упомянутому в начале параграфа вопросу о свойствах разности $f(H)J - Jf(H_0)$. Эту разность можно (по крайней мере формально) выразить через оператор

$$T = g(H)J - Jg(H_0) \quad (6)$$

с помощью ДОИ:

$$f(H)J - Jf(H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{g(\lambda) - g(\mu)} dE(\mu) T dE_0(\lambda). \quad (7)$$

Можно указать условия относительно функций f и g , обеспечивающие ограниченность трансформатора в правой части (7) в различных классах $\mathfrak{S}_p$. Само равенство (7) принимает при этом точный смысл. Подробное изложение этих вопросов см. в статье М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [48].

Конкретные условия, обеспечивающие ядерность левой части (7) при $HJ - JH_0 \in \mathfrak{S}_1$, обсуждаются в § 8.3. Там, впрочем, мы обходимся без аппарата ДОИ. С помощью этого аппарата условия на f можно уточнить. Такое уточнение проводится в § 8.5 для случая унитарных операторов.

Отметим еще, что аналогично (5), (7) можно установить и равенство

$$f(H)Jf_0(H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_0(\lambda)f(\mu)}{g(\mu) - g(\lambda)} dE(\mu) T dE_0(\lambda), \quad (8)$$

где T —оператор (6).

4. В качестве примера использования ДОИ покажем, что теорема 5.1 может быть выведена из локальных результатов § 4. Ввиду симметрии условия (5.2) теоремы 5.1 достаточно установить существование ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. С этой целью в силу леммы 4.3 нужно проверить соотношения (4.2) и (4.5).

Согласно (5), (7) справедливо представление

$$\begin{aligned} E(\Lambda)(HJ - JH_0)E_0(\Lambda) = \\ = \int_{\Lambda} \int_{\Lambda} (\mu - \lambda)[(\mu - z)^{-p} - (\lambda - z)^{-p}]^{-1} dE(\mu) T_p(z) dE_0(\lambda), \end{aligned} \quad (9)$$

где $T_p(z)$ —оператор (5.2). Ядро в правой части (9) можно переписать в виде

$$-(\lambda - z)^p (\mu - z)^p [(\lambda - z)^{p-1} + (\lambda - z)^{p-2} (\mu - z) + \dots + (\mu - z)^{p-1}]^{-1}. \quad (10)$$

Будем считать, что $\Lambda = (-r, r)$, а $|z|$ достаточно велико по сравнению с r . Тогда при $|\lambda| \leq r$, $|\mu| \leq r$ знаменатель в (10) не обращается в нуль, так что ядро (10) является непрерывно дифференцируемой функцией. Поэтому согласно теореме 2 трансформатор, определяемый соотношением (9), переводит класс $\mathfrak{S}_1$

в себя. Теперь ядерность оператора (9) является следствием условия (5.2).

Аналогичным образом согласно (8)

$$E(\Lambda') J E_0(\Lambda_0) =$$

$$= \int_{\Lambda'} \int_{\Lambda_0} [(\mu - z)^{-p} - (\lambda - z)^{-p}]^{-1} dE(\mu) T_p(z) dE_0(\lambda), \quad \Lambda' = \mathbb{R} \setminus \Lambda. \quad (11)$$

Поскольку $\text{dist}\{\Lambda', \Lambda_0\} > 0$, то, например, при чисто мнимых z знаменатель в (11) не обращается в нуль, так что ядро в (11) ограничено. Тем самым согласно теореме 1 трансформатор (11) переводит класс $\mathfrak{S}_2$ в себя, что доказывает (4.5).

Глава 7

СВОЙСТВА МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

В этой главе собраны разрозненные сведения о матрице рассеяния (МР). Так или иначе приводимые здесь результаты группируются вокруг ее стационарного представления. Прямо с МР не связаны §§ 3 и 5. В первом из них изучаются представления для ВО и оператора рассеяния. Во втором—приведен вспомогательный материал о реализации ядерных операторов в виде интегральных. Изучению спектральных свойств МР посвящены §§ 7–9.

§ 1. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ И МАТРИЦ РАССЕЯНИЯ

Приведем здесь следствия об операторе и матрице рассеяния, вытекающие из теоремы 2.1.7 умножения ВО.

1. Рассмотрим сначала оператор рассеяния.

Теорема 1. Пусть при обоих знаках существуют ВО

$$W_{\pm}^{(0)}: = W_{\pm}(H_1, H_0; J_0), \quad W_{\pm}^{(1)}: = W_{\pm}(H, H_1; J_1). \quad (1)$$

Тогда при $J = J_1 J_0$ существует оператор рассеяния $S = S(H, H_0; J)$. Если оператор $W_+^{(0)}$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $R(W_-^{(0)}) \subset R(W_+^{(0)})$, то

$$S(H, H_0; J) = (W_+^{(0)})^* S(H, H_1; J_1) W_+^{(0)} S(H_1, H_0; J_0). \quad (2)_+$$

Если оператор $W_-^{(0)}$ изометричен на $\mathcal{H}_0^{(a)}$ и $R(W_+^{(0)}) \subset R(W_+^{(0)})$, то

$$S(H, H_0; J) = S(H_1, H_0; J_0)(W_-^{(0)*} S(H, H_1; J_1) W_-^{(0)}). \quad (2)_-$$

○ В силу теоремы 2.1.7 существуют ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J) = W_{\pm}^{(1)} W_{\pm}^{(0)}$. Поэтому оператор рассеяния S корректно определяется равенством (2.4.1) и

$$\begin{aligned} S &= W_+^* W_- = W_+^{(0)*} W_+^{(1)*} W_-^{(1)} W_-^{(0)} = \\ &= W_+^{(0)*} S(H, H_1; J_1) W_-^{(0)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для доказательства $(2)_+$ нужно учесть, что по условию оператор $W_+^{(0)} W_+^{(0)*}$ — проектор на $R(W_+^{(0)}) \supset R(W_-^{(0)})$ и, следовательно,

$$W_-^{(0)} = W_+^{(0)} W_+^{(0)*} W_-^{(0)} = W_+^{(0)} S(H_1, H_0; J_0).$$

Подставляя это выражение для $W_-^{(0)}$ в правую часть (3), получаем искомое равенство $(2)_+$. Аналогично для доказательства $(2)_-$ нужно использовать равенство

$$W_+^{(0)} = W_-^{(0)} W_-^{(0)*} W_+^{(0)} = W_-^{(0)} S^*(H_1, H_0; J_0) \quad \bullet$$

2. Запишем теперь соотношения $(2)_{\pm}$ в терминах соответствующих МР. Пусть задано унитарное отображение $\mathcal{F}_0$ пространства $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на прямой интеграл (2.4.2), диагонализующее оператор H_0 , а $S(H, H_0; J)$ и $S(H_1, H_0; J_0)$ действуют в этом разложении как умножения на $S(\lambda)$ и $S_0(\lambda)$. Предположим также, что унитарное отображение

$$\mathcal{F}_1: \mathcal{H}_1^{(a)} \rightarrow \int_{\hat{\sigma}_1} \oplus \mathfrak{h}_1(\lambda) d\lambda =: \mathfrak{H}_1^{(a)}, \quad \hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}(H_1), \quad (4)$$

диагонализует оператор H_1 , а семейство $S_1(\lambda): \mathfrak{h}_1(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}_1(\lambda)$ отвечает $S(H, H_1; J_1)$ в разложении (4). Согласно предложению 5.6.3 оператор $\mathcal{F}_1 W_{\pm}^{(0)} \mathcal{F}_0^*: \mathfrak{H}_0^{(a)} \rightarrow \mathfrak{H}_1^{(a)}$ действует как умножение на оператор-функцию $w_{\pm}^{(0)}(\lambda): \mathfrak{h}_0(\lambda) \rightarrow \mathfrak{h}_1(\lambda)$. Поэтому в прямом интеграле (2.4.2) оператор

$$\mathcal{F}_0 W_{\pm}^{(0)*} S(H, H_1; J_1) W_{\pm}^{(0)} \mathcal{F}_0^*$$

сводится к умножению на

$$S_1^{(\pm)}(\lambda) = w_{\pm}^{(0)*}(\lambda) S_1(\lambda) w_{\pm}^{(0)}(\lambda).$$

Теперь из теоремы 1 прямо вытекает

Следствие 2: В условиях справедливости равенства (2)₊

$$S(\lambda) = S_1^{(+)}(\lambda) S_0(\lambda), \quad (5)_+$$

а в условиях справедливости равенства (2)₋

$$S(\lambda) = S_0(\lambda) S_1^{(-)}(\lambda). \quad (5)_-$$

Соотношения (5)_± выполняются для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$. Отметим, что при унитарном операторе $W_{\pm}^{(0)}: \mathcal{H}_0^{(a)} \rightarrow \mathcal{H}_1^{(a)}$ операторы $S_1^{(\pm)}(\lambda)$ и $S_1(\lambda)$ также будут унитарно эквивалентными для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$. Чтобы избежать лишних оговорок, мы иногда рассматриваем различные МР на всей спектральной оси, продолжая их единичными операторами.

Пусть Λ — какое-либо борелевское множество. Для выполнения соотношений (5)_± на Λ достаточно, чтобы условия теоремы 1 выполнялись для локальных ВО, отвечающих Λ .

3. Получим еще стационарное представление для оператора $S_1^{(\pm)}$ и выпишем формульные реализации соотношений (5)_±. Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $J_0 = J_1 = I$. Будем считать, что для обеих пар $H_0, H_1 = H_0 + V_0$ и $H_1, H = H_1 + V_1$ ВО существуют и полны, а для МР выполняются представления вида (2.8.11). Нам удобно сейчас воспользоваться формальными обозначениями $\mathcal{Z}_0(\lambda)$ и $\mathcal{Z}_{\pm}(\lambda)$, введенными в п. 2 § 5.6. В их терминах

$$S_0(\lambda) = I - 2\pi i \mathcal{Z}_0(\lambda) (V_0 - V_0 R_1(\lambda + i0) V_0) \mathcal{Z}_0^*(\lambda). \quad (6)$$

Отображение $\mathcal{F}_{\pm} = \mathcal{F}_0 W_{\pm}^{(0)*}: \mathcal{H}_1^{(a)} \rightarrow \mathcal{H}_0^{(a)}$ унитарно и реализует диагонализацию оператора H_1 , причем согласно (5.6.10)

$$(\mathcal{F}_{\pm} f)(\lambda) = \mathcal{Z}_{\pm}(\lambda) f = \mathcal{Z}_0(\lambda) (I - V_0 R_1(\lambda \pm i0)) f. \quad (7)$$

Оператор $S_1^{\pm}(\lambda)$ можно рассматривать как МР, получаемую при этом разложении из оператора рассеяния $S(H, H_1)$. В силу общей формулы (2.8.11) это означает, что

$$S_1^{(\pm)}(\lambda) = I - 2\pi i \mathcal{Z}_{\pm}(\lambda) (V_1 - V_1 R(\lambda + i0) V_1) \mathcal{Z}_{\pm}^*(\lambda).$$

Подставим сюда выражение (7) для $\mathcal{Z}_{\pm}(\lambda)$ и учтем резольвентное тождество. Тогда, полагая $V = V_0 + V_1$, получим соотношения

$$S_1^{(+)}(\lambda) = I - 2\pi i Z_0(\lambda)(I - VR(\lambda + i0))V_1(I - R_1(\lambda - i0)V_0)Z_0^*(\lambda), \quad (8)_+$$

$$S_1^{(-)}(\lambda) = I - 2\pi i Z_0(\lambda)(I - V_0 R_1(\lambda - i0))V_1(I - R(\lambda + i0)V)Z_0^*(\lambda). \quad (8)_-$$

Таким образом, для МР $S(\lambda)$ справедливо представление $(5)_{\pm}$, где операторы в правой части определяются равенствами (6) и $(8)_{\pm}$. Возможны различные (например, в духе гл. 5) варианты точных условий справедливости этих представлений, но мы не будем на них останавливаться.

Подставляя в левую часть $(5)_{\pm}$ выражение

$$S(\lambda) = I - 2\pi i Z_0(\lambda)(V - VR(\lambda + i0)V)Z_0^*(\lambda), \quad (9)$$

получим тождество, связывающее резольвенты R_1, R и операторы Z_0 . Это тождество можно проверить и непосредственно, минуя нестационарное определение МР. Установим, например, тождество $(5)_+$. Будем опускать обозначение зависимости от λ , считая, что резольвенты вычисляются в точке $\lambda + i0$. Поскольку $2\pi i Z_0^* Z_0 = R_0 - R_0^*$, правая часть $(5)_+$ равна

$$S_1^{(+)}S_0 = I - 2\pi i Z_0[(I - VR)V_1(I - R_1^*V_0) + (V_0 - V_0R_1V_0) - (I - VR)V_1(I - R_1^*V_0)(R_0 - R_0^*)(V_0 - V_0R_1V_0)]Z_0^*. \quad (10)$$

При преобразовании последнего слагаемого в квадратных скобках заменим $\lambda + i0$ на $\lambda + i\epsilon$. Из тождеств

$$(I - R_1^*V_0)(R_0 - R_0^*)(V_0 - V_0R_1V_0) = 2i\epsilon(I - R_1^*V_0)R_0^* \times \\ \times R_0(I - V_0R_1)V_0 = 2i\epsilon R_1^*R_1V_0 = (R_1 - R_1^*)V_0$$

вытекает, что в первом и последнем слагаемых часть членов взаимно сократится. Поэтому сумма в квадратных скобках (10) равна $(I - VR)V_1(I - R_1V_0) + V_0 - V_0R_1V_0$. В силу резольвентного тождества последнее выражение равно $V - VRV$. Тем самым правые части (10) и (9) совпадают друг с другом.

4. В теории рассеяния для относительно компактных возмущений оператор $S(\lambda) - I$ оказывается, как правило, компактным. Пусть $|\cdot|_{\mathfrak{S}}$ — (квази) норма в каком-либо симметричном (квази) нормированном (см. п. 4 § 1.6) идеале $\mathfrak{S}$ (например, в идеале $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < \infty$) операторов в пространствах $\mathfrak{h}(\lambda)$. Оценим квазинорму в $\mathfrak{S}$ разности МР для двух близких (с учетом отождествлений) операторов H_1 и H . Согласно равенству (3) при

условии существования ВО (1)

$$S(H, H_0; J) - S(H_1, H_0; J_0) = W_+^{(0)*} [S(H, H_1; J_1) - I] W_-^{(0)},$$

$$W_{\pm}^{(0)} = W_{\pm}(H_1, H_0; J_0).$$

В терминах введенных в п. 2 МР и операторов $w_{\pm}^{(0)}(\lambda)$: $h_0(\lambda) \rightarrow h_1(\lambda)$ это равенство можно записать в виде

$$S(\lambda) - S_0(\lambda) = w_+^{(0)*}(\lambda)(S_1(\lambda) - I)w_-^{(0)}(\lambda).$$

Поскольку $|w_{\pm}^{(0)}(\lambda)| \leq \|W_{\pm}^{(0)}\| \leq \|J_0\|$, отсюда вытекает

Предложение 3. Пусть ВО (1) существуют. Тогда

$$|S(\lambda; H, H_0; J) - S(\lambda; H_1, H_0; J_0)|_{\mathfrak{E}} \leq$$

$$\leq \|J_0\|^2 |S(\lambda; H, H_1; J_1) - I|_{\mathfrak{E}}. \quad (11)$$

Обычная операторная норма здесь не исключается.

§ 2. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ.

МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ В УНИТАРНОМ СЛУЧАЕ

В п.1 ПИ применяется для получения новых формульных представлений для МР. В п. 2 кратко обсуждается теория рассеяния для унитарных операторов.

1. Будем считать, что вещественная функция φ допустима в смысле определения 2.6.2 для пары самосопряженных операторов H_0, H и отображение, определяемое этой функцией, взаимно однозначно. Тогда обратная к φ функция ψ допустима для операторов $h_0 = \varphi(H_0)$, $h = \varphi(H)$. Предположим, что разложения в прямой интеграл для операторов $H_0^{(a)}$ и $h_0^{(a)}$ согласованы (см. п. 3 § 2.6) заменой переменных $\tilde{\lambda} = \varphi(\lambda)$. Произвольный коммутирующий с $H_0^{(a)}$ оператор A , задаваемый умножением на $a(\lambda)$ в первом из этих представлений, действует как умножение на $\tilde{a}(\tilde{\lambda}) = a(\lambda)$ во втором представлении. Интегральный оператор B с ядром $b(\mu, \nu)$ в прямом интеграле (2.4.2) имеет ядро

$$\tilde{b}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) = |\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)|^{-1/2} b(\mu, \nu) \quad (1)$$

в разложении по $h_0^{(a)}$.

Пусть операторы $T_{\pm}(z; \varphi)$ строятся по операторам h_0, h и отождествлению J в соответствии с равенствами $(2.8.4)_{\pm}$, т.е.

$$T_{+}(z; \varphi) = J^* v - v^*(h - z)^{-1} v, \quad (2)_{+}$$

$$T_{-}(z; \varphi) = v^* J - v^*(h - z)^{-1} v, \quad (2)_{-}$$

где $v = hJ - Jh_0$. Через $t_{\pm}(\mu, \nu; z; \varphi)$ обозначаем ядро оператора $T_{\pm}(z; \varphi)$ в разложении (2.4.2), а через $\tilde{t}_{\pm}(\mu, \nu; z; \varphi)$ — его ядро в разложении по $h_0^{(a)}$. В последнем разложении оператор $U_{\pm}(h_0, h_0; J^* J)$ действует как умножение на оператор-функцию, обозначаемую $\tilde{u}_{\pm}(\tilde{\lambda})$. Предположим, что набор h_0, h, J удовлетворяет условиям теоремы 5.5.3. Тогда, применяя к этому набору равенство $(2.8.9)_{\pm}$, найдем, что для МР $s(\tilde{\lambda}) = S(\tilde{\lambda}; h, h_0; J)$ справедливо представление

$$s(\tilde{\lambda}) = \tilde{u}_{\pm}(\tilde{\lambda}) - 2\pi i \tilde{t}_{\pm}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}; \tilde{\lambda} + i0; \varphi). \quad (3)_{\pm}$$

В силу теоремы 5.3.11 для операторов h_0, h, J и функции ψ справедлив ПИ. В применении к МР это означает согласно (2.6.14), что $s(\tilde{\lambda}) = S(\lambda)$ при $\varphi'(\lambda) > 0$ и $s(\tilde{\lambda}) = S^*(\lambda)$ при $\varphi'(\lambda) < 0$. Кроме того, $\tilde{u}_{\pm}(\tilde{\lambda}) = u_{\pm}(\lambda)$ при $\varphi'(\lambda) > 0$ и $\tilde{u}_{\pm}(\tilde{\lambda}) = u_{\mp}(\lambda)$ при $\varphi'(\lambda) < 0$. Учтем еще равенства (1), $u_{\pm}(\lambda) = u_{\pm}^*(\lambda)$ и $T_{\pm}^*(z) = T_{\mp}(\bar{z})$. Тогда соотношение $(3)_{\pm}$ дает представление для МР исходной пары:

$$S(\lambda) = u_{\pm\omega}(\lambda) - 2\pi i \varphi'(\lambda)^{-1} t_{\pm\omega}(\lambda, \lambda; \varphi(\lambda) \pm \omega i0; \varphi), \quad (4)_{\pm}$$

$$\omega = \operatorname{sgn} \varphi'(\lambda).$$

Таким образом, установлена

Теорема 1. Пусть вещественная функция φ допустима для операторов H_0 и H , причем определяемое ею отображение взаимно однозначно. Предположим, что пара $\varphi(H_0), \varphi(H)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.5.3. Тогда для МР $S(\lambda; H, H_0; J)$ справедливы оба представления $(4)_{\pm}$, где $t_{\pm}(\cdot, \cdot; z; \varphi)$ — ядро оператора $(2)_{\pm}$.

2. Остановимся здесь на теории рассеяния для пары унитарных операторов. Напомним, что ВО для унитарных U_0 и U вводились соотношением (2.2.12). В их терминах оператор рассеяния по-прежнему определяется равенством (2.4.1), а МР

$S(\mu) = S(\mu; U, U_0; J)$, $\mu \in \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}(U_0) \subset \mathbb{T}$, строится по диагонализующему $U_0^{(a)}$ разложению пространства $\mathcal{H}_{U_0}^{(a)}$ в прямой интеграл (см. п. 1 § 1.11). Сейчас мы получим формульные представления для ВО, оператора и матрицы рассеяния. К этому возможны два пути. Первый из них состоит в повторении рассуждений §§ 2.7, 2.8. Теперь, однако, интегралы по $\mathbb{R}$ заменяются интегралами по единичной окружности $\mathbb{T}$, а преобразование Фурье—разложением в ряд Фурье. Другая возможность состоит в применении стационарных выражений §§ 2.7, 2.8 для объектов, относящихся к преобразованиям Кэли H_0, H пары U_0, U . В силу ПИ это дает выражения соответствующих объектов для самой пары U_0, U .

Опишем коротко первый путь. Если в (2.2.12) существует хотя бы слабый предел, то при любых $f_0 \in \mathcal{H}_{U_0}^{(a)}$, $f \in \mathcal{H}_U^{(a)}$ полуторалинейная форма соответствующего ВО $\widetilde{W}_{\pm} = \widetilde{W}_{\pm}(U, U_0; J)$ равна

$$(\widetilde{W}_{\pm} f_0, f) = \lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r^2) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (J U_0^{\mp(n+1)} f_0, U^{\mp(n+1)} f). \quad (5)$$

В то же время при $|\zeta| < 1$

$$R(\zeta) = (U - \zeta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U^{-n-1} \zeta^n = \sum_{n=0}^{\infty} U^{-n-1} r^n e^{in\theta}, \quad \zeta = r e^{i\theta}.$$

Аналогичное представление справедливо и для $R_0(\zeta) = (U_0 - \zeta)^{-1}$. Поэтому в силу равенства Парсеваля

$$(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} (J R_0(r e^{i\theta}) f_0, R(r e^{i\theta}) f) d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} (J U_0^{-n-1} f_0, U^{-n-1} f).$$

Сравнивая это равенство с (5) и обозначая $e^{i\theta} = \mu$, $r e^{i\theta} = \mu(1-\eta)$, найдем, что (при верхнем знаке)

$$(\widetilde{W}_{\pm} f_0, f) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \pi^{-1} \eta \int_{\mathbb{T}} (J R_0(\mu(1 \mp \eta)) f_0, R(\mu(1 \mp \eta)) f) (i\mu)^{-1} d\mu. \quad (6)$$

Для доказательства (6) при нижнем знаке удобно пользоваться разложениями $R_0(\zeta)$ и $R(\zeta)$ в ряды Фурье при $|\zeta| > 1$.

Соотношение (6) играет в унитарном случае роль (2.7.3). Дальнейшее построение теории рассеяния также параллельно

самосопряженному случаю. Так, меняя местами в (6) интегрирование по μ и переход к пределу по ν , получаем определение стационарного ВО $U_{\pm} = U_{\pm}(U, U_0; J)$. При надлежащих предположениях о возмущении $V = UJ - JU_0$ можно установить равенство, аналогичное (2.7.11) $_{\pm}$. Как и в самосопряженном случае, его можно записать в виде

$$U_{\pm}^* U_{\pm} = U_{\pm}^{(0)}, \quad U_{\pm}^{(0)} = U_{\pm}(U_0, U_0; J^* J).$$

Кроме того, при $X \subset \mathbb{T}$ справедливо равенство

$$(E(X)U_- f_0, U_+ g_0) = \int_X \lim_{\eta \rightarrow 0} \pi^{-1} \eta ([J + V R_0(\mu(1 - \eta)^{-1})] f_0, R^*(\mu(1 - \eta)) J R_0(\mu(1 - \eta)) g_0) (i\mu)^{-1} d\mu, \quad (7)$$

отвечающее (2.8.2).

Выделяя в правой части (7) форму ВО $U_+^{(0)}$ или $U_-^{(0)}$, получим два выражения для МР. Положим сейчас

$$T_+(\zeta) = J^* V - V^* R^*(\zeta) V, \quad T_-(\zeta) = V^* J - V^* R(\zeta) V.$$

Будем считать, что операторы $T_{\omega}(\zeta)$, $\omega = \pm$, имеют пределы $T_{\omega}(\mu_{\pm})$, когда $\zeta = \mu(1 \mp \eta)$ и $\eta \rightarrow +0$. Кроме того, предполагаем, что в разложении в прямой интеграл предельные операторы являются интегральными, причем их ядра $t_{\omega}(\nu, \nu'; \mu_{\pm})$ имеют корректный смысл на тройной диагонали $\nu = \nu' = \mu$. Через $u_{\pm}(\mu)$, $\mu \in \hat{\sigma}_0$, обозначаем семейство ограниченных операторов, отвечающих в этом разложении ВО $U_{\pm}^{(0)}$. Аналогично выводу (2.8.9) $_{\pm}$ для МР $S(\mu) = S(\mu; U, U_0; J)$ получаем представления

$$S(\mu) = u_+(\mu) - 2\pi \bar{\mu} t_+(\mu, \mu; \mu_-), \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}_0, \quad (8)_+$$

$$S(\mu) = u_-(\mu) + 2\pi \mu t_-(\mu, \mu; \mu_+), \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}_0. \quad (8)_-$$

В случае $J = I$ матрицу рассеяния $S(\mu)$ можно записать и через ядро оператора $T(\zeta) = V - V R(\zeta) V$. Именно, при учете равенства (1.11.2) из унитарности операторов U_0 и U и соотношения (8) $_{+}$ (или (8) $_{-}$) вытекает, что

$$S(\mu) = I(\mu) - 2\pi \bar{\mu} t(\mu, \mu; \mu_+), \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}_0. \quad (9)$$

Это представление можно, конечно, переписать и в терминах мультипликативного возмущения: $M = U U_0^{-1}$.

Точный смысл соотношениям (8) $_{\pm}$ и (9) придается аналогично самосопряженной теории (см. гл. 5). Именно, нужно

потребовать, чтобы $V = G^*G_0$, причем сомножители G_0 и G удовлетворяли бы по отношению к U_0 и U (вместо H_0 и H) предположениям типа теоремы 5.5.3. Это позволяет, в частности, равенством

$$Z_0(\mu; G_0)\varphi = (\mathcal{F}_0 G_0^* \varphi)(\mu), \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}_0,$$

определить отображения, через которые строятся ядра операторов $T_{\pm}(\zeta)$ и $T(\zeta)$. Здесь $\mathcal{F}_0$ осуществляет унитарное отображение $\mathcal{H}_0^{(a)}$ на соответствующий прямой интеграл, а G_0 предполагается слабо U_0 -гладким (см. определение 5.1.1). В этих терминах реализация соотношения (9) имеет вид

$$S(\mu) = I(\mu) - 2\pi\bar{\mu}Z_0(\mu; G)(I - \tilde{B}(\mu_+))^{-1}Z_0^*(\mu; G_0), \quad (10)$$

где $\tilde{B}(\zeta) = G_0 R(\zeta) G^*$.

В заключение отметим равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} G_0(R_0(\mu(1-\eta)) - R_0^*(\mu(1-\eta)^{-1}))G^* = 2\pi\bar{\mu}Z_0^*(\mu; G_0)Z_0(\mu; G), \quad (11)$$

справедливое для слабо H_0 -гладких операторов G_0 и G . Это равенство прямо вытекает из соотношений (1.2.13) или (1.11.4) и (1.11.6).

§ 3. СТАЦИОНАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ

Настоящий параграф носит вспомогательный характер. Он нужен для изучения в §§ 4 и 6 матриц рассеяния. Здесь представления §§ 2.7 и 2.8 для ВО и оператора рассеяния конкретизируются в применении к предположениям гладкого и ядерного методов. Одновременно проводятся сопоставления этих методов со стационарной схемой гл. 5.

1. Рассмотрим сначала гладкие возмущения. Условия гл. 4 в целом значительно жестче, чем гл. 5. В самом деле, определение (4.3.4) H -гладкости по Като похоже на определение (5.1.2) слабой H -гладкости. Однако первое из них существенно более ограничительно вследствие равномерности оценки (4.3.4) по λ . Далее, согласно определению (4.3.2) при H -гладком по Като операторе G вектор-функции $GR(\lambda \pm i\epsilon)f$

при любых $f \in \mathcal{H}$ принадлежат классам Харди $H_{\pm}^2(\mathfrak{G})$. Поэтому, как уже отмечалось в п. 2 § 4.3, они имеют сильные пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в частности, вытекает, что в условиях гл. 4 справедливы формульные представления для ВО и оператора рассеяния. Так, определение 2.7.2 стационарного ВО теперь корректно на всех элементах $f_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$. Следующее утверждение является прямым следствием теорем 5.2.4, 5.2.8 и 5.5.1.

Теорема 1. Пусть выполнены условия теоремы 4.5.1, f_0, g_0 — произвольные элементы из $\mathcal{H}_0$, f — произвольный элемент из $\mathcal{H}$, а X — какое-либо борелевское множество на $\mathbb{R}$. Тогда для полуторалинейной формы $(W_{\pm}f_0, f)$ ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ справедливо представление (2.7.5), для формы $(W_{\pm}f_0, W_{\pm}g_0)$ — представление (2.7.11) $_{\pm}$, а для формы $(E(X)W_{-}f_0, W_{+}g_0)$ — представления (2.8.2) и (2.8.6).

Поясним, что результаты гл. 5 дают выражения для стационарного ВО $U_{\pm} = U_{\pm}(H, H_0; J)$, который в условиях теоремы 4.5.1 совпадает с сильным нестационарным ВО $W_{\pm}$. Что касается нестационарных ВО, из результатов гл. 5 прямо вытекает существование только слабого ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$. Действительно, в условиях теоремы 4.5.1 операторы G_0 и G являются соответственно слабо H_0 - и H -гладкими и, следовательно, можно сослаться на теорему 5.3.2. В то же время для H -гладкого (по Като) оператора G условие (5.3.3), вообще говоря, не выполняется и, более того, произведение $GR(z)G^*$ не определено даже при $\text{Im } z \neq 0$. Поэтому теорема 4.5.1 не следует из результатов § 5.3 о существовании сильных нестационарных ВО. Впрочем, в случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ (и, общее, при условии (2.1.9)) теорема 4.5.1 вытекает из теоремы 5.3.5.

Аналогичные замечания справедливы и по отношению к «локальной» теореме 4.5.6.

2. При рассмотрении возмущений ядерного типа остановимся вначале на случае $V \in \mathfrak{S}_1$. Существование сильных нестационарных ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ следует сейчас из теоремы 6.2.3. Ее доказательство, данное в § 6.2, основывалось на результатах гл. 5. При этом использовалось, что согласно теореме 6.1.5 любой оператор Гильберта—Шмидта G является слабо H -гладким относительно произвольного самосопряженного оператора H , а согласно следствию 6.1.11 сильные пределы $GR(\lambda \pm i\varepsilon)f$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существуют на

всех элементах $f \in \mathcal{H}$. Поскольку ядерный оператор допускает факторизацию $V = G^*G_0$ на операторы Гильберта—Шмидта, в силу теорем 5.2.4, 5.2.8 и 5.5.1 отсюда вытекает, что при $V \in \mathfrak{S}_1$ справедливы все заключения теоремы 1. Однако в отличие от гладкой теории существование сильных нестационарных ВО также является прямым следствием результатов гл. 5. При этом стационарный ВО $\mathcal{U}_{\pm}^{(0)}$ в (2.8.6) можно заменить на ВО $W_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнено лишь условие (6.4.1). Пусть Λ —какой-либо ограниченный интервал. Как мы только что выяснили, для вспомогательного отождествления $J'_{\Lambda} = JE_0(\Lambda)$ и ВО $W_{\pm}(J'_{\Lambda}) = W_{\pm}(H, H_0; J'_{\Lambda})$ справедливы перечисленные в теореме 1 представления. Для исходного ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(J)$ это дает представления (2.7.5) и (2.7.11) $_{\pm}$, если один из элементов f_0, f или f_0, g_0 финитен. Пусть, например, $f_0 = E_0(\Lambda)f_0$. Тогда $W_{\pm}f_0 = W_{\pm}(J'_{\Lambda})f_0$ и $JR_0f_0 = J'_{\Lambda}R_0f_0$, что сразу приводит к (2.7.5). Для доказательства (2.7.11) $_{\pm}$ нужно учесть, что

$$(W_{\pm}f_0, W_{\pm}g_0) = (W_{\pm}(J'_{\Lambda})f_0, W_{\pm}(J'_{\Lambda})g_0),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)E_0(\Lambda)f_0, JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0) \sim \\ \sim \varepsilon(J'_{\Lambda}R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, J'_{\Lambda}R_0(\lambda \pm i\varepsilon)g_0) \end{aligned}$$

в силу леммы 5.2.1, примененной к набору H_0, H_0, J^*J . Аналогичным образом для доказательства (2.7.5) при $f = E(\Lambda)f$ надо воспользоваться тем, что

$$(W_{\pm}f_0, f) = (W_{\pm}(J'_{\Lambda})f_0, f)$$

и в силу леммы 5.2.1

$$\varepsilon(JR_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)E(\Lambda)f) \sim \varepsilon(J'_{\Lambda}R_0(\lambda \pm i\varepsilon)f_0, R(\lambda \pm i\varepsilon)f).$$

Для справедливости представлений (2.8.2) и (2.8.6) придется требовать, чтобы оба элемента f_0 и g_0 были финитными.

Пусть, наконец, выполнено еще более широкое условие (6.4.2), обеспечивающее существование только слабых ВО $\widetilde{W}_{\pm} = \widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$. При ограниченном Λ рассмотрим отождествление $J''_{\Lambda} = E(\Lambda)JE_0(\Lambda)$. По-прежнему все представления теоремы 1 выполняются для сильного ВО:

$$W_{\pm}(J''_{\Lambda}) = E(\Lambda)\widetilde{W}_{\pm}E_0(\Lambda) = \widetilde{W}_{\pm}E_0(\Lambda) = E(\Lambda)\widetilde{W}_{\pm}. \quad (1)$$

С помощью леммы 5.2.1 отсюда выводится, что представление (2.7.5) для $(\tilde{W}_{\pm} f_0, f)$ справедливо, если один из элементов f_0 или f финитен.

Сложнее обстоит дело с представлениями вида (2.7.11) $_{\pm}$. Далее считаем, что $f_0 = E_0(\Lambda) f_0$. В силу (1) из равенства (2.7.11) $_{\pm}$ для $W_{\pm}(J''_{\Lambda})$ вытекает, что

$$\begin{aligned} (\tilde{W}_{\pm} f_0, \tilde{W}_{\pm} g_0) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi^{-1} \varepsilon (E(\Lambda) J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) g_0) d\lambda. \end{aligned} \quad (2)$$

Спектральная срезка $E_0(\Lambda)$ снята с g_0 с помощью леммы 5.2.1, примененной к паре H_0, H_0 и отождествлению $J^* E(\Lambda) J$. Снятие $E(\Lambda)$ в (2) требует, однако, дополнительных предположений. Например, это возможно при подчиненности H оператору H_0 , что одновременно гарантирует существование сильного ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. В самом деле, достаточно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon | \{ E(X'_r) J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0, J R_0(\lambda \pm i\varepsilon) g_0 \} | d\lambda = o(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $X'_r = \mathbb{R} \setminus X_r$, $X_r = (-r, r)$. Последний интеграл оценивается через

$$\|E(X'_r) J E_0(\Lambda)\| \|J\| \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \|R_0(\lambda \pm i\varepsilon) f_0\| \|R_0(\lambda \pm i\varepsilon) g_0\| d\lambda. \quad (3)$$

Согласно неравенству Шварца и (1.3.11), (1.4.11) интеграл в (3) не превосходит $\|P_0 f_0\| \cdot \|P_0 g_0\|$. Поэтому все выражение (3) стремится при $r \rightarrow \infty$ к нулю в силу леммы 6.4.7.

В представлениях для формы $(E(X) \tilde{W}_{-} f_0, \tilde{W}_{+} g_0)$ приходится считать, что в правых частях (2.8.2) и (2.8.6) роль J играет J''_{Λ} , а роль V — оператор $E(\Lambda) V E_0(\Lambda)$. В частности, $U_{\pm}^{(0)}$ в (2.8.6) нужно заменить на $W_{\pm}(H_0, H_0; J''_{\Lambda}^* J''_{\Lambda})$. Подведем итог нашим рассмотрениям.

Теорема 2.

1) Пусть $V \in \mathfrak{S}_1$. Тогда на всех элементах $f_0, g_0 \in \mathcal{H}_0$, $f \in \mathcal{H}$ для форм $(W_{\pm} f_0, f)$, $(W_{\pm} f_0, W_{\pm} g_0)$ и $(E(X) W_{-} f_0, W_{+} g_0)$ справедливы представления (2.7.5), (2.7.11) $_{\pm}$ и (2.8.2), (2.8.6).

2) Пусть выполнено условие (6.4.1). Тогда представления (2.7.5) и (2.7.11) $_{\pm}$ для форм $(W_{\pm}f_0, f)$ и $(W_{\pm}f_0, W_{\pm}g_0)$ сохраняются, если один из элементов в паре f_0, f и f_0, g_0 финитен. Представления (2.8.2), (2.8.6) для $(E(X)W_{-}f_0, W_{+}g_0)$ справедливы в случае, когда оба элемента f_0, g_0 финитны.

3) Пусть выполнено условие (6.4.2). Тогда представление (2.7.5) для $(\widetilde{W}_{\pm}f_0, f)$ выполняется, если финитен один из элементов f_0, f . Представление (2.7.11) $_{\pm}$ для $(W_{\pm}f_0, W_{\pm}g_0)$ справедливо в случае, когда финитен один из элементов f_0 или g_0 и оператор H подчинен H_0 . Представления (2.8.2), (2.8.6) для $(E(X)\widetilde{W}_{-}f_0, \widetilde{W}_{+}g_0)$ сохраняются, если $f_0 = E_0(\Lambda)f_0$ или $g_0 = E_0(\Lambda)g_0$ при ограниченном Λ , а в правых частях (2.8.2), (2.8.6) операторы J и V заменены соответственно на $E(\Lambda)JE_0(\Lambda)$ и $E(\Lambda)VE_0(\Lambda)$.

§ 4. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ПРИ ГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

1. В теории гладких (по Като) возмущений без дополнительных предположений вряд ли можно рассчитывать на справедливость стационарных представлений для МР. Причина этого в том (ср. с п. 1 § 3), что в условиях теоремы 4.5.1 может нарушаться соотношение (5.3.3). Однако остальные условия теоремы 5.5.3 выполняются. Так, для H_0 -гладкого оператора G_0 справедливы соотношения (5.2.10) $_{\pm}$. Поэтому из теоремы 5.5.3 прямо вытекает

Предложение 1. Пусть оператор G_0 — H_0 -гладкий, оператор G — $|H|^{1/2}$ -ограничен и выполнено условие (5.3.3). Тогда существуют сильные ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, а для соответствующей МР при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ имеют место представления (2.8.9) $_{\pm}$ или (5.5.3) $_{\pm}$.

Аналогичным образом при справедливости условий предложения 1 на каком-либо интервале Λ представления для МР, определяемой через локальные ВО, также будут выполняться при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0 \cap \Lambda$.

2. Более содержательная информация может быть получена в случае $H_0 = \mathcal{H}$, $J = I$, который мы и рассматриваем далее. Пусть опять Λ —какой-либо интервал, оператор H_0

имеет на Λ абсолютно непрерывный спектр постоянной кратности k и фиксировано отображение $\mathcal{F}_0$ пространства $E_0^{(a)}(\Lambda)\mathcal{H}$ на $L_2(\Lambda; \mathfrak{h})$, $\dim \mathfrak{h} = k$. Тогда МР $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0): \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ будет определяться однозначно, а не только с точностью до унитарной эквивалентности. Предположим, что возмущение представлено в виде $V = G^*VG$, где $V \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$, а оператор $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G} - |H_0|^{1/2}$ -ограничен и удовлетворяет на Λ определению 4.4.5 усиленной H_0 -гладкости (с каким-либо показателем $\alpha > 0$). Согласно (5.4.2) это в точности означает, что по операторной норме отображение $Z_0(\lambda; G): \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{h}$ гельдеровски непрерывно (с показателем α) зависит от $\lambda \in \Lambda$. В силу теоремы 4.4.7 отсюда следует, что оператор-функция $B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^*$ непрерывна по норме в полосе $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ вплоть до разреза по Λ .

Далее будем, как и в § 4.6, различать случаи малых (теорема 2) и относительно компактных (теорема 3) возмущений. В условиях этих утверждений существование и полнота локальных ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ установлены соответственно в теоремах 4.6.1 и 4.6.4. Вытекают результаты о волновых операторах и из теорем 5.7.1', 5.8.1, где получено также стационарное представление для МР.

Теорема 2. Пусть оператор G — усиленно H_0 -гладкий на Λ и для $B_0(z) = -VB^{(0)}(z)$ выполнено условие

$$\sup_{\lambda \in \Lambda} \|B_0(\lambda + i0)\| < 1. \quad (1)$$

Тогда для МР $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ при всех $\lambda \in \Lambda$ справедливо представление (5.7.6), $S(\lambda)$ непрерывна по $\lambda \in \Lambda$ и имеет место разложение в ряд

$$S(\lambda) = I - 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} Z_0(\lambda; G) B_0^n(\lambda + i0) V Z_0^*(\lambda; G), \quad (2)$$

сходящийся по операторной норме.

○ При условии (1) оператор (5.7.5) существует и непрерывен по $\lambda \in \Lambda$. Поэтому представление (5.7.6) вытекает из теорем 5.7.1' и 5.8.1. Согласно (1) из (5.7.6) следуют как непрерывность $S(\lambda)$ по λ , так и возможность разложения (2). •

Вводя в рассмотрение константу связи γ , т.е. заменяя V на γV , найдем, что при достаточно малых γ условие (1) всегда будет выполняться. При этом (2) становится степенным рядом по параметру γ . Он представляет собой ряд теории возмущений для МР. В физической литературе такой ряд называется *борновским*.

3. Для компактных операторов $B_0(\lambda \pm i0)$ множество $\mathcal{N}$, где условие (5.7.5) нарушается, состоит из точек λ , для которых уравнение (4.7.1) имеет нетривиальное решение. По теореме 4.7.2 множество $\mathcal{N}$ замкнуто и имеет нулевую меру.

Теорема 3. Пусть оператор G — усиленно H_0 -гладкий на Λ и $B^{(0)}(z) \in \mathfrak{S}_\infty$ при $\text{Im } z \neq 0$. Тогда для МР $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ при всех $\lambda \in \Lambda \setminus \mathcal{N}$ справедливо представление (5.7.6), $S(\lambda)$ непрерывна по $\lambda \in \Lambda \setminus \mathcal{N}$ и

$$S(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_\infty. \quad (3)$$

○ Представление (5.7.6) для МР и ее непрерывность по $\lambda \in \Lambda \setminus \mathcal{N}$ — по-прежнему следствия теоремы 5.8.1. Учтем еще, что в силу равенства (5.7.7) $Z_0(\lambda; G) \in \mathfrak{S}_\infty$. Поэтому соотношение (3) прямо вытекает из (5.7.6). •

Подчеркнем, что в условиях этой теоремы МР непрерывна на составляющих интервалах открытого множества $\Lambda \setminus \mathcal{N}$. Однако при приближении к концам этих интервалов $S(\lambda)$ предела может не иметь. В условиях теорем 2 и 3 непрерывность $S(\lambda)$ по λ можно понимать в квалифицированном смысле — как гильбертовскую непрерывность с показателем $\alpha > 0$.

С помощью представления (5.7.6) можно получить разложение $S(\lambda)$ в шкале $\mathfrak{S}_p, p > 0$.

Теорема 4. Пусть в дополнение к условиям теоремы 3 выполняется включение $B^{(0)}(\lambda + i0) \in \mathfrak{S}_p$. Тогда при любом $l \geq 0$

$$S(\lambda) - I + 2\pi i \sum_{n=0}^l Z_0(\lambda; G) B_0^n(\lambda + i0) \mathcal{V} Z_0^*(\lambda; G) \in \mathfrak{S}_q, \quad q = p(l+2)^{-1}.$$

○ Из (5.7.6) вытекает, что

$$\begin{aligned} S(\lambda) = & I - 2\pi i \sum_{n=0}^l Z_0(\lambda; G) B_0^n(\lambda + i0) \mathcal{V} Z_0^*(\lambda; G) - \\ & - 2\pi i Z_0(\lambda; G) B_0^{l+1}(\lambda + i0) (I - B_0(\lambda + i0))^{-1} \mathcal{V} Z_0^*(\lambda; G). \end{aligned} \quad (4)$$

Учтем теперь, что в силу (5.7.7) $Z_0(\lambda; G) \in \mathfrak{S}_{2p}$. Поэтому согласно предложению 1.6.3 последнее слагаемое в (4) принадлежит искомому классу $\mathfrak{S}_q$. •

В заключение отметим, что предположение об усиленной H_0 -гладкости оператора G используется только для сравнения $S(\lambda)$ при разных λ . Для справедливости остальных утверждений (например, включения (3)) достаточно предположить, что

оператор-функция $B^{(0)}(z)$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ вплоть до разреза по Λ . Впрочем, этим условием можно обойтись и при доказательстве непрерывности $S(\lambda)$. По этому поводу см. п. 4 § 7.

§ 5. ЯДЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Здесь мы обсудим реализацию ядерных операторов в виде интегральных в разложении гильбертова пространства в прямой интеграл. Излагаемые сведения понадобятся в следующем параграфе при изучении МР для ядерных возмущений.

1. Пусть H —произвольный самосопряженный оператор, а (1.5.6)—разложение его абсолютно непрерывного подпространства $\mathcal{H}^{(a)}$ в прямой интеграл. Для ядерного оператора A в $\mathcal{H}$ будем строить ядро оператора PAP . Как и любой оператор Гильберта—Шмидта, ядерный оператор PAP является интегральным (см. п. 5 § 1.6), причем для его ядра величина (1.6.16) конечна. Сейчас, однако, важно приписать ядру $a(\mu, \nu)$ значения на прямом произведении $\Lambda \times \Lambda$, где Λ —какое-либо множество полной меры в $\hat{\sigma}$.

Будем исходить из результатов § 5.4. Оператор $A \in \mathfrak{S}_1$ можно представить в виде (5.4.1), где $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ —оператор Гильберта—Шмидта, а оператор $A: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ ограничен. Согласно теореме 6.1.5 любой оператор Гильберта—Шмидта является слабо H -гладким. Тем самым нужное понимание ядра оператора PAP дается определением 5.4.2. Напомним, что оператор $Z(\lambda; G)$ в равенстве (5.4.6) задается соотношением (5.4.2).

Здесь мы остановимся на некоторых дополнительных свойствах ядра $a(\mu, \nu)$, справедливых при $A \in \mathfrak{S}_1$. Прежде всего отметим, что согласно теореме 6.1.5 оператор $\Delta(\lambda; G)$, равный пределу (5.1.1) или (5.1.4), принадлежит классу $\mathfrak{S}_1$. Поэтому в силу равенства (5.4.4) при $G \in \mathfrak{S}_2$

$$Z(\lambda; G) \in \mathfrak{S}_2, \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}. \quad (1)$$

Далее, согласно следствию 6.1.7 при $G \in \mathfrak{S}_2$, любом $f \in \mathcal{H}$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ существует сильная производная $dGE(\lambda)f/d\lambda$ и сильный предел $G\delta(\lambda, \epsilon)f$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Это позволяет с помощью леммы 5.4.7 восстановить полуторалинейную форму ядра $a(\mu, \nu)$. Таким образом, установлено

Предложение 1. Для любого ядерного оператора A в $\mathcal{H}$ равенством (5.4.6) на некотором квадрате $\Lambda \times \Lambda$ полной в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ меры корректно определяется ядро $a(\mu, \nu)$ оператора PAP . При $\mu, \nu \in \Lambda$ оператор $a(\mu, \nu): \mathfrak{h}(\nu) \rightarrow \mathfrak{h}(\mu)$ является ядерным. Кроме того, при любых $f, g \in \mathcal{H}$ справедливо равенство (5.4.13), причем предел в правой части можно понимать как двойной.

Для оператора $G \in \mathfrak{S}_2$ определению (5.4.2) отображения $Z(\lambda; G): \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{h}(\lambda)$ можно придать несколько более наглядный вид. Для произвольного ортонормированного базиса q_n в $\mathfrak{G}$ рассмотрим разложение

$$G = \sum_n \gamma_n(\cdot, r_n) q_n, \quad (2)$$

где (см. п. 5 § 1.6)

$$\gamma_n = \|G^* q_n\|, \quad \sum \gamma_n^2 < \infty, \quad r_n = \gamma_n^{-1} G^* q_n. \quad (3)$$

Пусть $\tilde{r}_n = \mathcal{F} r_n$. Обозначим через Λ множество точек λ , на котором все функции $\tilde{r}_n(\lambda)$ определены и

$$r^2(\lambda) := \sum_n \gamma_n^2 |\tilde{r}_n(\lambda)|_{\mathfrak{h}(\lambda)}^2 < \infty. \quad (4)$$

Это множество имеет полную меру в $\hat{\sigma}$, так как в силу (3) функция интегрируема по $\hat{\sigma}$. Теперь, подставляя (2) в (5.4.2), получим представление

$$Z(\lambda; G) = \sum_n \gamma_n(\cdot, q_n) \tilde{r}_n(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda. \quad (5)$$

Такой оператор ограничен, так как в силу ортонормированности q_n

$$\|Z(\lambda; G)\psi\|^2 \leq \sum_n |(\psi, q_n)|^2 \sum_n \gamma_n^2 |\tilde{r}_n(\lambda)|_{\mathfrak{h}(\lambda)}^2 = \|\psi\|^2 r^2(\lambda)$$

и правая часть конечна по условию (4).

Исходя из (5), легко дать прямое доказательство соотношения (1). Именно, по определению (5) $Z(\lambda; G)q_n = \gamma_n \tilde{r}_n(\lambda)$. Вычисляя норму Гильберта—Шмидта оператора $Z(\lambda; G)$ с помощью равенства вида (1.6.12), найдем, что при $\lambda \in \Lambda$

$$\|Z(\lambda; G)\|_2^2 = \sum_n |Z(\lambda; G)q_n|^2 = r^2(\lambda) < \infty.$$

Еще проще оператор $Z(\lambda; G)$ строится в случае, когда $\mathfrak{G} = \mathcal{H} = \mathfrak{H}^{(a)}$ и $G \in \mathfrak{S}_2$ реализован как интегральный оператор, ядро $g(\lambda, \mu)$ которого

удовлетворяет условию (1.6.16). Обозначим через Λ множество тех $\lambda \in \Lambda$, где

$$\int_{\hat{\sigma}} |g(\mu, \lambda)|_2^2 d\mu < \infty. \quad (6)$$

Поскольку функция (6) интегрируется по λ , множество $\hat{\sigma} \setminus \Lambda$ имеет нулевую меру. Теперь в согласии с (5.4.2)

$$Z(\lambda; G)f = \int_{\hat{\sigma}} g^*(\mu, \lambda) \tilde{f}(\mu) d\mu, \quad (7)$$

В силу неравенства Шварца при условии (6) этот интеграл сходится для любого $f \in \mathcal{H}$. Кроме того, норма Гильберта—Шмидта оператора $Z(\lambda; G)$ равна квадратному корню из интеграла (6) и, следовательно, конечна для $\lambda \in \Lambda$.

2. Наряду с определением 5.4.2 существуют и другие способы, позволяющие оператору класса $\mathfrak{S}_1$ приписать ядро на измеримом квадрате полной меры. Наиболее естественный из них получается путем аппроксимации ядерного оператора конечномерными. Одномерному оператору $A = (\cdot, u)v$ сопоставляется ядро $a(\mu, \nu) = (\cdot, \tilde{u}(\nu))\tilde{v}(\mu)$, заданное на квадрате $\Lambda \times \Lambda$, где Λ —множество, на котором определены функции $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$. Аналогичным образом строится и ядро конечномерного оператора. В п. 5 § 1.6 соответствие между операторами и ядрами было распространено на класс Гильберта—Шмидта. При этом, однако, ряд (1.6.17) сходилась лишь в метрике (1.6.16), а потому его сумма определялась на множестве полной меры в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$, не имеющем, вообще говоря, структуры прямого произведения. Сейчас мы увидим, что для операторов из $\mathfrak{S}_1$ та же процедура приписывает ядру значения на измеримом квадрате полной меры.

Пусть

$$A = \sum \alpha_n (\cdot, u_n) v_n, \quad (8)$$

где

$$\alpha_n \geq 0, \|u_n\| = \|v_n\| = 1, \sum_n \alpha_n < \infty. \quad (9)$$

Ортонормированность v_n (а также u_n) здесь не предполагается. Ряд (8) сходится по норме $\mathfrak{S}_1$, так что его сумма—ядерный оператор. Для произвольного $A \in \mathfrak{S}_1$ представление вида (8) всегда возможно—каноническое разложение (1.6.3) дает один из таких примеров. Рассмотрим множество Λ , на котором

$$\sum_n \alpha_n |\tilde{u}_n(\lambda)|_{\tilde{h}(\lambda)}^2 < \infty, \quad \sum_n \alpha_n |\tilde{v}_n(\lambda)|_{\tilde{h}(\lambda)}^2 < \infty. \quad (10)$$

При условии (9) множество $\hat{\sigma} \setminus \Lambda$ имеет нулевую меру. На квадрате $\Lambda \times \Lambda$ ядро $a(\mu, \nu)$ можно задать равенством вида (1.6.17), т.е.

$$a(\mu, \nu) = \sum_n \alpha_n \langle \cdot, \tilde{u}_n(\nu) \rangle \tilde{v}_n(\mu). \quad (11)$$

В силу оценок

$$\begin{aligned} |a(\mu, \nu)|_1 &\leq \sum_n \alpha_n |\tilde{u}_n(\nu)| |\tilde{v}_n(\mu)| \leq \\ &\leq \left(\sum_n \alpha_n |\tilde{u}_n(\nu)|^2 \sum_n \alpha_n |\tilde{v}_n(\mu)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (12)$$

и (10) ряд (11) сходится на $\Lambda \times \Lambda$ по ядерной норме. Формула (11) справедлива и в случае, когда u_n и v_n получаются при разложении в ряд (8) оператора PAP (а не A).

Для операторов $A \in \mathfrak{S}_1$ определения (11) и (5.4.6) совпадают друг с другом. В самом деле, для произвольного ортонормированного базиса $\{z_n\}$ запишем оператор (8) в виде

$$A = G^* G_0,$$

где

$$G_0 = \sum_n \gamma_n(\cdot, u_n) z_n, \quad G = \sum_n \gamma_n(\cdot, v_n) z_n, \quad \gamma_n = \alpha_n^{1/2}$$

— операторы Гильберта—Шмидта. Согласно определению 5.4.2 ядро оператора PAP находится по формуле

$$a(\mu, \nu) = Z(\mu; G) Z^*(\nu; G_0). \quad (13)$$

Подставляя сюда выражения (5) для операторов $Z(\cdot; G_0)$ и $Z(\cdot; G)$, вновь приходим к представлению (11) для ядра $a(\mu, \nu)$.

В случае $\mathfrak{G} = \mathcal{H} = \mathfrak{H}^{(a)}$ еще одно выражение для $a(\mu, \nu)$ получается при реализации операторов Гильберта—Шмидта G_0 и G как интегральных операторов с квадратично интегрируемыми ядрами $g_0(\mu, \nu)$ и $g(\mu, \nu)$. Пусть $A = G^* G_0$ и Λ состоит из точек λ , где конечны интеграл (6) и аналогичный интеграл от $|g_0(\mu, \lambda)|_2^2$. Подставляя в (13) выражение (7) для $Z(\mu; G)$ и аналогичное выражение для $Z(\nu; G_0)$, найдем, что

$$a(\mu, \nu) = \int_{\hat{\sigma}} g^*(\lambda, \mu) g_0(\lambda, \nu) d\lambda. \quad (14)$$

Этот интеграл также определяет ядро $a(\mu, \nu)$ оператора A на множестве $\Lambda \times \Lambda$.

Мы показали, что для операторов $A \in \mathfrak{S}_1$ представления (11) и (14) на измеримом квадрате $\Lambda \times \Lambda$ полной меры могут быть получены из общего определения 5.4.2. Тем самым при всех вариантах построения полуторалинейная форма ядра $a(\mu, \nu)$ восстанавливается на $\Lambda \times \Lambda$ соотношениями (1.5.13) или (5.4.13). Отсюда следует, что при $A \in \mathfrak{S}_1$ ядро $a(\mu, \nu)$ оператора PAP определяется однозначно на квадрате $\Lambda \times \Lambda$ (тогда как при $A \in \mathfrak{S}_2$ такое множество полной в $\hat{\sigma} \times \hat{\sigma}$ меры структуры прямого произведения могло не иметь). В частности, при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}$ не зависят от способа построения ядра его диагональные значения $a(\lambda, \lambda)$.

3. Отметим два элементарных утверждения о ядрах операторов из $\mathfrak{S}_1$. Первое из них обобщает хорошо известные свойства интегральных операторов в пространствах L_2 .

Предложение 2. Пусть $A \in \mathfrak{S}_1$ и $a(\mu, \nu)$ — ядро PAP в разложении (1.5.6). Тогда

$$\int_{\hat{\sigma}} |a(\lambda, \lambda)|_1 d\lambda \leq \|PAP\|_1, \quad (15)$$

$$\text{Tr } PAP = \int_{\hat{\sigma}} \text{Tr}_{h(\lambda)} a(\lambda, \lambda) d\lambda. \quad (16)$$

○ Рассмотрим каноническое разложение оператора $PAP = \sum \alpha_n(\cdot, u_n)v_n$, $u_n \in \mathcal{H}^{(a)}$, $v_n \in \mathcal{H}^{(a)}$, и определим ядро $a(\mu, \nu)$ равенством (11). Воспользуемся для него оценкой (12). Полагая в (12) $\mu = \nu = \lambda$, интегрируя по $\lambda \in \hat{\sigma}$ и применяя неравенство Шварца, найдем, что

$$\int_{\hat{\sigma}} |a(\lambda, \lambda)| d\lambda \leq \sum_n \alpha_n.$$

Поскольку α_n — сингулярные числа оператора A , правая часть здесь равна $\|PAP\|_1$.

Далее, согласно (11)

$$\text{Tr}_{h(\lambda)} a(\lambda, \lambda) = \sum_n \alpha_n \langle \tilde{v}_n(\lambda), \tilde{u}_n(\lambda) \rangle.$$

Интегрируя это соотношение по $\lambda \in \hat{\sigma}$, получим, что правая часть равна $\sum \alpha_n(v_n, u_n)$. Этой же сумме равна и левая часть (16). •

С помощью неравенства (15) можно указать еще один способ вычисления диагональных значений ядра. Этот способ не требует предварительного построения ядра на измеримом квадрате полной меры. Рассмотрим какую-либо последовательность конечномерных операторов A_n , сходящихся к A в $\mathfrak{H}_1$. Для A_n корректно определены значения $a_n(\lambda, \lambda)$, причем в силу (15)

$$\int_{\hat{\sigma}} |a_n(\lambda, \lambda) - a_m(\lambda, \lambda)|_1 d\lambda \leq \|A_n - A_m\|_1 \rightarrow 0$$

при $n, m \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что в метрике интеграла в левой части последовательность $a_n(\lambda, \lambda)$ имеет предел, принимаемый за $a(\lambda, \lambda)$. Для этой величины также выполняется неравенство (15).

Следующее утверждение является одним из вариантов равенства Парсеваля.

Предложение 3. Пусть $\mathfrak{R}_H$ — множество элементов $f \in \mathcal{H}^{(a)}$ с конечной величиной (2.5.2). Тогда для любого $A \in \mathfrak{S}_1$ при $f, g \in \mathfrak{R}_H$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (AU(t)f, U(t)g) dt = 2\pi \int_{\hat{\sigma}} \langle a(\lambda, \lambda) \tilde{f}(\lambda), \tilde{g}(\lambda) \rangle d\lambda. \quad (17)$$

○ Будем исходить из какого-либо разложения вида (8). Запишем левую часть (17) в форме

$$\sum_n \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} (U(t)f, u_n)(v_n, U(t)g) dt. \quad (18)$$

В силу неравенства (2.5.3), проведенная здесь перестановка интегрирования по t и суммирование по n оправдывается ссылкой на теорему Фубини. Сомножители $(U(t)f, u_n)$ и $(U(t)g, v_n)$ суть преобразования Фурье от функций $(2\pi)^{1/2} \langle \tilde{f}(\lambda), \tilde{u}_n(\lambda) \rangle$ и $(2\pi)^{1/2} \langle \tilde{g}(\lambda), \tilde{v}_n(\lambda) \rangle$, продолженных нулем вне $\hat{\sigma}$. Поэтому согласно равенству Парсеваля выражение (18) равно

$$2\pi \sum_n \alpha_n \int_{\hat{\sigma}} \langle \tilde{f}(\lambda), \tilde{u}_n(\lambda) \rangle \langle \tilde{v}_n(\lambda), \tilde{g}(\lambda) \rangle d\lambda. \quad (19)$$

При $f, g \in \mathfrak{R}_H$ функции $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ ограничены, так что в (19) имеется абсолютная сходимость. Переставим, наконец, суммирование

по n и интегрирование по λ . В силу (11) сумма по n равна $\langle a(\lambda, \lambda) \tilde{f}(\lambda), \tilde{g}(\lambda) \rangle$. Таким образом, выражение (19) совпадает с правой частью (17). •

§ 6. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ ПРИ ЯДЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В п. 1 выясняется, что при ядерных возмущениях для МР справедливы обычные стационарные представления § 2.8. В п. 2 рассматриваются свойства МР, специфические для ядерных возмущений. Наконец, в п. 3 устанавливается непрерывная зависимость МР от возмущения.

1. Сейчас применяются соображения, уже использованные в п. 2 § 3 при выводе представлений для ВО и оператора рассеяния. Для построения МР нужна еще полученная в § 5 информация о представлении ядерных операторов интегральными.

Будем исходить из теоремы 5.5.3. Пусть оператор $T_{\pm}(z)$ задается формулой (2.8.4) $_{\pm}$. Как и в § 3, предположим вначале, что $V = HJ - JH_0 \in \mathfrak{S}_1$. Тогда в силу теоремы 6.1.9 и следствия 6.1.11 для любой факторизации $V = G^*G_0$ на сомножители класса $\mathfrak{S}_2$ выполняются условия теоремы 5.5.3. Тем самым равенством вида (5.4.6) в разложении в прямой интеграл (2.4.2) корректно определяются ядра $t_{\pm}(\mu, \nu; \lambda + i0)$ операторов $P_0 T_{\pm}(\lambda + i0) P_0$, а для $S(\lambda)$ имеют место оба представления (2.8.9) $_{\pm}$. Напомним, что в точном смысле эти представления реализуются в форме (5.5.3) $_{\pm}$.

Эти представления мало меняются и в более общем случае, когда выполнено лишь условие (6.4.1). Именно, при любом ограниченном интервале Λ оператор $E_0^{(a)}(\Lambda) T_{\pm}(\lambda + i\varepsilon) E_0^{(a)}(\Lambda)$ имеет предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, и ядро предельного оператора корректно определено для п.в. $\mu \in \hat{\sigma}_0$ и п.в. $\nu \in \hat{\sigma}_0$. Переходя к новому отождествлению $J'_\Lambda = JE_0(\Lambda)$, убеждаемся, что представления (2.8.9) $_{\pm}$ сохраняются, если под $t_{\pm}(\lambda, \lambda; \lambda + i0)$ понимать значение в точке $\mu = \nu = \lambda$ ядра оператора $E_0^{(a)}(\Lambda) T_{\pm}(\lambda + i0) E_0^{(a)}(\Lambda)$, где $\lambda \in \Lambda$. Оператор-функция $u_{\pm}(\lambda)$ в (2.8.9) $_{\pm}$ сейчас отвечает в разложении (2.4.2) ВО $W_{\pm}(H_0, H_0; E_0(\Lambda) J^* J E_0(\Lambda))$ или слабому ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$. Разумеется, представления для $S(\lambda)$ не зависят от выбора Λ , если $\Lambda \ni \lambda$.

Пусть теперь выполнено только условие локальной ядерности (6.4.2). Тогда существуют лишь слабые ВО $\widetilde{W}_{\pm} = \widetilde{W}_{\pm}(H, H_0; J)$, и $S(\lambda)$ строится по слабому оператору рассеяния $\widetilde{W}_{+}^{*}\widetilde{W}_{-}$. Обозначим через

$$J_{\Lambda}'' = E(\Lambda)JE_0(\Lambda), \quad V_{\Lambda}'' = HJ_{\Lambda}'' - J_{\Lambda}''H_0, \\ U_{\pm}^{(0)}(\Lambda) = W_{\pm}(H_0, H_0; J_{\Lambda}''^{*}J_{\Lambda}'')$$

и в соответствии с (2.8.4)₊ положим

$$T_{+}(z; \Lambda) = J_{\Lambda}''^{*}V_{\Lambda}'' - V_{\Lambda}''^{*}R(z)V_{\Lambda}''.$$

Аналогичным образом строится и оператор $T_{-}(z; \Lambda)$. Пусть в разложении (2.4.2) оператор $T_{\pm}(\lambda + i0; \Lambda)$ задается ядром $t_{\pm}(\mu, \nu; \lambda + i0; \Lambda)$, а оператор $U_{\pm}^{(0)}(\Lambda)$ действует как умножение на $u_{\pm}(\lambda; \Lambda)$. Тогда по теореме 5.5.3 справедливо представление

$$S(\lambda) = u_{\pm}(\lambda; \Lambda) - 2\pi i t_{\pm}(\lambda, \lambda; \lambda + i0; \Lambda), \quad \text{п.в. } \lambda \in \Lambda. \quad (1)_{\pm}$$

В правой части (1)_± оба слагаемых, вообще говоря, зависят от выбора интервала $\Lambda \ni \lambda$. Предположим теперь дополнительно, что существует сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, а потому и слабый ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^{*}J)$. Тогда при $|X \cap X_0| = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} E(X)JU_0(t)E_0(X_0)P_0 = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$W_{\pm}(H_0, H_0; J_{\Lambda}''^{*}J_{\Lambda}'') = \widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^{*}J)E_0(\Lambda)$$

и, следовательно, $u_{\pm}(\lambda; \Lambda) = u_{\pm}(\lambda)\chi_{\Lambda}(\lambda)$, где $u_{\pm}(\lambda)$ отвечает ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^{*}J)$. Таким образом, при существовании сильного ВО $W_{\pm}(H_0, H_0; J)$ для соответствующей МР справедливо представление (1)_± с $u_{\pm}(\lambda)$ вместо $u_{\pm}(\lambda; \Lambda)$. В этом случае, конечно, и слагаемое $t_{\pm}(\lambda, \lambda; \lambda + i0; \Lambda)$ не зависит от Λ . Опустить Λ здесь, однако, нельзя, так как $T_{\pm}(z)$ и даже $E_0^{(a)}(\Lambda)T_{\pm}(z)E_0^{(a)}(\Lambda)$ операторного смысла могут не иметь.

Наконец, в условиях теоремы 6.5.3 новые представления для МР $S(\lambda)$ могут быть получены с помощью теоремы 2.1 (ПИ). Напомним, что операторы $T_{\pm}(z; \varphi)$ определяются равенствами (2.2)_±, а $t_{\pm}(\mu, \nu; z; \varphi)$ — их ядра в разложении (2.4.2).

Соберем вместе полученные результаты.

Теорема 1. 1) При $V \in \mathfrak{S}_1$ для $S(\lambda)$ справедливы оба представления (2.8.9)_±.

2) При условии (6.4.1) и любом ограниченном интервале Λ представления (2.8.9) $_{\pm}$ сохраняются для п.в. $\lambda \in \Lambda$, если $t_{\pm}(\mu, \nu; \lambda + i0)$ — ядро оператора $E_0^{(a)}(\Lambda)T_{\pm}(\lambda + i0)E_0^{(a)}(\Lambda)$.

3) При условии (6.4.2) справедливы оба представления (1) $_{\pm}$. Если к тому же существует сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, то в (1) $_{\pm}$ $u_{\pm}(\lambda; \Lambda)$ можно заменить на оператор-функцию $u_{\pm}(\lambda)$, отвечающую ВО $\widetilde{W}_{\pm}(H_0, H_0; J^*J)$.

4) В условиях теоремы 6.5.3 для $S(\lambda)$ справедливы представления (2.4) $_{\pm}$.

Следствие 2: При условии (6.4.1) справедливы соотношения

$$S(\lambda) - u_{\pm}(\lambda) \in \mathfrak{S}_1, \quad \text{п.в. } \lambda \in \hat{\sigma}_0. \quad (2)_{\pm}$$

Соотношение (2) $_{\pm}$ сохраняет силу и в предположении (6.4.2), если дополнительно известно, что сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$ существует. Если к тому же $W_{\pm}(H, H_0; J)$ изометричен, то в (2) $_{\pm}$ $u_{\pm}(\lambda) = I(\lambda)$.

○ При условии (6.4.1) $VE_0(\Lambda) = G_{\Lambda}^*G_{0,\Lambda}$, где оба сомножителя принадлежат классу $\mathfrak{S}_2$. Поэтому в силу теоремы 6.1.9 оператор $E_0(\Lambda)T_{\pm}(\lambda + i0)E_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_1$. Теперь включение (2) $_{\pm}$ вытекает из представления (2.8.9) $_{\pm}$ и предложения 5.1. Второе утверждение устанавливается вполне аналогично с помощью представления (1) $_{\pm}$. •

Следствие 3: Пусть для любого ограниченного интервала Λ оператор $VE_0(\Lambda)$ имеет конечный ранг r . Тогда для п.в. $\lambda \in \Lambda$ ранг $S(\lambda) - u_{\pm}(\lambda)$ не превосходит r . Так, в частности, будет, если сам оператор V конечномерен.

○ В силу (5.5) ранг оператора $Z(\lambda, G)$ при п.в. λ не превосходит r , если ранг G равен r . Остается воспользоваться представлением (5.5.3) $_{\pm}$. •

В случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$ стационарные представления для МР справедливы и в условиях теоремы 6.4.15. Именно, верна

Теорема 4. В условиях теоремы 6.4.15 при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ для $S(\lambda)$ имеет место представление (5.7.3) и $S(\lambda) - I(\lambda) \in \mathfrak{S}_1$.

○ При доказательстве теоремы 6.4.15 показано, что в ее условиях выполнены и условия теоремы 5.7.1. Тем самым справедливо представление (5.7.3), где согласно (5.1) операторы

$$Z_0(\lambda; G_0) = Z_0(\lambda; G_0 E_0(\Lambda)), \quad Z_0(\lambda; G) = Z_0(\lambda; G E_0(\Lambda)), \quad \lambda \in \Lambda,$$

принадлежат классу Гильберта—Шмидта. •

2. Обсудим теперь несколько более специальное представление МР, приспособленное именно к теории ядерных возмущений. Пусть ВО $W_{\pm} = W_{\pm}(H, H_0; J)$ существуют. В силу сплетающего свойства ВО для полуторалинейной формы оператора рассеяния справедливо представление

$$\begin{aligned} ([S - W_+^* W_+]f, g) &= ([W_- - W_+]f, W_+g) = \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (V U_0(t)f, U(t)W_+g) dt = \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} (W_+^* V U_0(t)f, U_0(t)g) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Если оператор V ядерный, то и $W_{\pm}^* V \in \mathfrak{S}_1$. Обозначим через $w_{\pm}(\lambda, \mu)$ ядро (см. предложение 5.1) оператора $W_{\pm}^* V P_0$ в разложении в прямой интеграл (2.4.2). В силу предложения 5.3 из равенства (3) следует, что при $f, g \in \mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_{H_0}$

$$([S - W_+^* W_+]f, g) = -2\pi i \int_{\mathfrak{R}_0} \langle \omega_+(\lambda, \lambda) \tilde{f}_0(\lambda), \tilde{g}_0(\lambda) \rangle d\lambda,$$

а потому

$$S(\lambda) = u_+(\lambda) - 2\pi i \omega_+(\lambda, \lambda). \quad (4)_+$$

Совершенно аналогично, рассматривая оператор $S - W_-^* W_- = (W_+ - W_-)^* W_-$, можно показать, что

$$S(\lambda) = u_-(\lambda) - 2\pi i \omega_-^*(\lambda, \lambda). \quad (4)_-$$

Напомним, что $u_{\pm}(\lambda)$ —оператор-функция, отвечающая оператору $W_{\pm}^* W_{\pm} = W_{\pm}(H_0, H_0; J^* J)$.

Представления $(4)_{\pm}$ легко распространяются на случай, когда выполняются лишь условия локальной ядерности. Такое обобщение осуществляется вполне аналогично п. 1. Сформулируем лишь окончательный результат.

Теорема 5.

- 1) При $V \in \mathfrak{S}_1$ для $S(\lambda)$ справедливы оба представления $(4)_{\pm}$.
- 2) При условии (6.4.1) и любом ограниченном интервале Λ эти представления сохраняются для п.в. $\lambda \in \Lambda$, если $\omega_{\pm}(\mu, \nu)$ —ядро оператора $W_{\pm}^* V E_0^{(a)}(\Lambda)$.

3) При условии (6.4.2) обозначим через $\omega_{\pm}(\mu, \nu; \Lambda)$ ядро оператора $\tilde{W}_{\pm}^* E(\Lambda) V E_0^{(a)}(\Lambda) \in \mathfrak{S}_1$. Тогда справедливы оба представления:

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= u_+(\lambda; \Lambda) - 2\pi i \omega_+(\lambda, \lambda; \Lambda), \\ S(\lambda) &= u_-(\lambda; \Lambda) - 2\pi i \omega_-^*(\lambda, \lambda; \Lambda). \end{aligned} \quad \text{п.в. } \lambda \in \Lambda, \quad (5)_{\pm}$$

Если к тому же существует сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, то в (5) $_{\pm}$ $u_{\pm}(\lambda; \Lambda)$ можно заменить на $u_{\pm}(\lambda)$.

Из теоремы 5 вытекают включения (2) $_{\pm}$. Кроме того, представления (4) $_{\pm}$, (5) $_{\pm}$ можно использовать для эффективной оценки ядерной нормы оператора (2) $_{\pm}$.

Теорема 6. Пусть выполнено условие (6.4.2) и существует сильный ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$. Тогда для любого ограниченного интервала Λ

$$\int_{\Lambda} |S(\lambda) - u_{\pm}(\lambda)|_1 d\lambda \leq 2\pi \|J\| \|E^{(a)}(\Lambda) V E_0^{(a)}(\Lambda)\|_1. \quad (6)$$

При $V \in \mathfrak{S}_1$ здесь можно считать $\Lambda = \hat{\sigma}_0$.

○ Применим оценку (5.15) к ядерному оператору $W_{\pm}^* E(\Lambda) V E_0(\Lambda)$ и учтем (5) $_{\pm}$, где $u_{\pm}(\lambda; \Lambda) = u_{\pm}(\lambda)$. Тогда левая часть (6) оценится через $2\pi \|W_{\pm}^* E(\Lambda) V E_0^{(a)}(\Lambda)\|_1$, что не превосходит правой части (6). •

Мы сформулировали оценку (6) в условиях части 3) теоремы 5. Тем самым она справедлива и в условиях ее частей 1) и 2).

Оценку (6) можно, как обычно, скомбинировать с ПИ. Именно, в условиях теоремы 6.5.3 имеет место неравенство

$$\int_{\hat{\sigma}_0} |S(\lambda) - u_{\pm}(\lambda)|_1 |\varphi'(\lambda)| d\lambda \leq 2\pi \|J\| \|\varphi(H)J - J\varphi(H_0)\|_1. \quad (7)$$

Сравнивая оценки (6) и (1.11), сразу получим

Предложение 7. Пусть оба ВО $W_{\pm}(H_1, H_0; J_0)$ существуют и $(HJ_1 - J_1H_1)E_{H_1}(\Lambda) \in \mathfrak{S}_1$ для любого ограниченного интервала $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Тогда при $J = J_1J_0$

$$\begin{aligned} &\int_{\Lambda} |S(\lambda; H, H_0; J) - S(\lambda; H_1, H_0; J_0)|_1 d\lambda \leq \\ &\leq 2\pi \|J_0\|^2 \|J_1\| \|(HJ_1 - J_1H_1)E_{H_1}(\Lambda)\|_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что в (8) оператор $(HJ_1 - J_1H_1)E_{H_1}(\Lambda)$ можно заменить на $E_H(\Lambda)(HJ_1 - J_1H_1)E_{H_1}(\Lambda)$, если дополнительно потребовать существования ВО $W_{\pm}(H, H_1; J_1)$. Кроме того, согласно (7) можно дать оценку интеграла вида (8) через $\|\varphi(H)J_1 - J_1\varphi(H_1)\|_1$.

3. Обсудим теперь непрерывность МР в зависимости от возмущения. Пусть для семейства операторов $H(\gamma)$ выполнено условие

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \|(H(\gamma)J_1 - J_1H_1)E_{H_1}(\Lambda)\|_1 = 0,$$

где Λ — любой ограниченный интервал. Тогда из (8) вытекает, что $S(\lambda; H(\gamma), H_0; J)$ непрерывна при $\gamma \rightarrow 0$ в метрике интеграла в левой части. В силу известной теоремы Ф.Рисса (см. например, [15]) отсюда вытекает, что по некоторой последовательности γ_n для п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow 0} |S(\lambda; H(\gamma_n), H_0; J) - S(\lambda; H_1, H_0; J_0)|_1 = 0. \quad (9)$$

В специальном случае, когда семейство $H(\gamma)$ зависит от параметра γ линейно, соотношение вида (9) справедливо при всех $\gamma \rightarrow 0$. Доказательство такого утверждения требует совсем иной техники. По этому поводу см. п. 4 следующего параграфа.

§ 7. СТРУКТУРА СТАЦИОНАРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

В этом параграфе рассматриваются произвольные операторы, копирующие по своей структуре стационарное представление МР для случая $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, J = I$. Это позволяет многие свойства МР изучить в максимально общей ситуации.

1. Пусть $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{G}$ — абстрактные гильбертовы пространства, а оператор S в $\mathfrak{h}$ имеет вид

$$S = I - 2\pi i \mathcal{Z} \mathcal{V} (I + \mathcal{B} \mathcal{V})^{-1} \mathcal{Z}^*. \quad (1)$$

Предполагается, что

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{G}), \quad (2)$$

а операторы $\mathcal{Z}: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{h}$ и $\mathcal{B}: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$ ограничены и удовлетворяют соотношению

$$2\pi i \mathcal{Z}^* \mathcal{Z} = \mathcal{B} - \mathcal{B}^*. \quad (3)$$

Равенство (3), конечно, требует, чтобы оператор B имел неотрицательную мнимую часть.

Ясно, что представление (5.7.9), полученное в теореме 5.7.1' для МР $S(\lambda; H, H_0)$, имеет вид (1). При этом операторы $Z_0(\lambda; G)$ и $B^{(0)}(\lambda + i0)$ играют соответственно роль Z и B , а соотношение (5.7.7)—роль (3). Напомним, что существование обратного оператора в правой части (5.7.9) в теореме 5.7.1' предполагалось для п.в. λ .

Мы будем считать, что либо обратный оператор в (1) существует в обычном смысле, либо, при дополнительном предположении $B \in \mathfrak{S}_\infty$, этот обратный можно понимать в указанном в п. 3 § 1.6 обобщенном смысле.

Согласно (1) подпространства $\overline{R(Z)}$ и $N(Z^*)$ инвариантны относительно оператора $S = S(Z, B, V)$, причем на $N(Z^*)$ оператор S сводится к единичному. Тем самым при изучении оператора (1) достаточно рассматривать его сужение S' на подпространство $\overline{R(Z)}$. С точностью до унитарной эквивалентности эти операторы не зависят от выбора оператора Z , удовлетворяющего соотношению (3). Именно, верна

Лемма 1. Пусть

$$Z_1 = ((2\pi i)^{-1}(B - B^*))^{1/2}, \quad Z_1 \geq 0. \quad (4)$$

Тогда операторы $S'(Z, B, V)$ и $S'(Z_1, B, V)$ унитарно эквивалентны между собой.

○ Будем исходить из полярного представления (см. п. 1 § 1.6) оператора $Z: Z = F|Z|$, где F —унитарное отображение $\overline{R(|Z|)}$ на $\overline{R(Z)}$. Сравнивая (3) и (4), найдем, что $Z_1 = |Z|$, а потому согласно (1)

$$S'(Z, B, V)F = FS'(Z_1, B, V). \quad \bullet.$$

Дальнейшему исследованию оператора (1) мы предположим одно наблюдение технического характера. Необходимость в нем отпадает, если обратный оператор в (1) существует в обычном смысле.

Лемма 2. При условиях (2) и (3) справедливы соотношения

$$N(I + VB) \cup N(I + VB^*) \subset N(Z),$$

и, следовательно,

$$\overline{R(Z^*)} \subset R(I + BV) \cap R(I + B^*V). \quad (5)$$

○ Пусть, например, $f + \mathcal{V}Bf = 0$. Составим скалярное произведение этого уравнения с элементом Bf и возьмем мнимую часть. Из получившегося равенства $\text{Im}(f, Bf) = 0$ и (3) следует, что $\mathcal{Z}f = 0$. •

Следствие 3: Оператор (1) можно записать в виде

$$S = I - 2\pi i \mathcal{Z}(I + \mathcal{V}B)^{-1} \mathcal{V} \mathcal{Z}^*. \quad (6)$$

○ Пусть P_1 и P_2 — ортогональные проекторы на $R(I + \mathcal{B}\mathcal{V})$ и $R(I + B^*V)$ соответственно. Согласно (5) $P_j \mathcal{Z}^* = \mathcal{Z}^*$, $j = 1, 2$. Поэтому для доказательства (6) достаточно убедиться в том, что

$$(I + \mathcal{V}B)^{-1} \mathcal{V} P_1 = P_2 \mathcal{V}(I + \mathcal{B}\mathcal{V})^{-1}.$$

С этой целью нужно лишь домножить равенство $\mathcal{V}(I + \mathcal{B}\mathcal{V}) = (I + \mathcal{V}B)\mathcal{V}$ на $(I + \mathcal{B}\mathcal{V})^{-1}$ справа, на $(I + \mathcal{V}B)^{-1}$ слева и учесть соотношения (1.6.7). •

2. Мы всегда выводили унитарность МР из изометричности и полноты соответствующих ВО. Однако унитарность МР может быть установлена и на основании ее стационарного представления.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (2) и (3). Тогда оператор (1) унитарен.

○ Проверим, например, что $S^*S = I$. Переходя в (1) к сопряжению, найдем, что

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{-1}(S^*S - I) = & \mathcal{Z}[(I + \mathcal{V}B^*)^{-1} \mathcal{V} - \mathcal{V}(I + \mathcal{B}\mathcal{V})^{-1} - \\ & - 2\pi i(I + \mathcal{V}B^*)^{-1} \mathcal{V} \mathcal{Z}^* \mathcal{V}(I + \mathcal{B}\mathcal{V})^{-1}] \mathcal{Z}^*. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу (1.6.7) и (5)

$$\mathcal{Z}^* = (I + \mathcal{B}\mathcal{V})(I + \mathcal{B}\mathcal{V})^{-1} \mathcal{Z}^*. \quad (8)$$

Подставляя это выражение в правую часть (7), перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} & \mathcal{Z}(I + \mathcal{V}B^*)^{-1} [\mathcal{V}(I + \mathcal{B}\mathcal{V}) - (I + \mathcal{V}B^*)\mathcal{V} - \\ & - 2\pi i \mathcal{V} \mathcal{Z}^* \mathcal{V}(I + \mathcal{B}\mathcal{V})^{-1} \mathcal{Z}^*]. \end{aligned}$$

Согласно (3) оператор в квадратных скобках равен нулю.

Доказательство равенства $SS^* = I$ получается вполне аналогично, если вместо (1) воспользоваться выражением (6) для оператора S , а вместо (8) — равенством

$$\mathcal{Z}^* = (I + B^*V)(I + B^*V)^{-1} \mathcal{Z}^*,$$

также вытекающим из (1.6.7) и (5). •

В силу теоремы 4 спектр оператора (1) лежит на единичной окружности $\mathbb{T}$. Покажем, что для малых операторов B оператор S мало отличается от единичного и, следовательно, его спектр попадает в малую окрестность точки $1 \in \mathbb{T}$. Ввиду приложений к МР операторные нормы в пространстве $\mathfrak{h}$ обозначаем через $|\cdot|$, а в других пространствах (или паре пространств)—через $\|\cdot\|$.

Предложение 5. Пусть $\|\mathcal{V}\|\|B\| =: b < 1/2$. Тогда спектр оператора (1) лежит на дуге $[e^{-i\theta(b)}, e^{i\theta(b)}]$, где $0 < \theta(b) < \pi$ и $\theta(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$.

○ Согласно (3)

$$\pi\|Z\|^2 \leq b\|\mathcal{V}\|^{-1}.$$

Поэтому из определения (1) следует, что

$$|S - I| \leq 2\pi\|Z\|^2\|\mathcal{V}\|(I - \|\mathcal{V}\|\|B\|)^{-1} \leq 2b(1 - b)^{-1}.$$

При $b < 1/2$ правая часть здесь меньше 2. Тем самым спектр S лежит на дуге $[e^{-i\theta(b)}, e^{i\theta(b)}]$, где $\sin(\theta(b)/2) = b(1 - b)^{-1}$, так что $\theta(b) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$. •

Дополнительную информацию о спектре оператора S можно получить для компактных операторов B .

Предложение 6. Пусть $B \in \mathfrak{S}_\infty$. Тогда спектр оператора (1) состоит из собственных чисел, накапливающихся разве лишь к точке 1. Отличные от 1 собственные числа конечнократны.

○ Из (3) следует, что $Z \in \mathfrak{S}_\infty$, а потому в силу (1) $S - I \in \mathfrak{S}_\infty$. Остается воспользоваться следствием 1.11.2. •

3. В качестве применения полученных здесь результатов рассмотрим МР в условиях гл. 5. Будем считать, что $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$, а возмущение V представлено в виде $V = G^*\mathcal{V}G$, где оператор $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$ — $|H_0|^{1/2}$ -ограничен, а $\mathcal{V} = \mathcal{V}^* \in B(\mathfrak{G})$.

При обсуждении МР систематически используется следующее соглашение. Определением § 2.4 МР задается на некотором множестве точек λ полной меры. Без конкретных предположений это множество остается неопределенным. При условиях, обеспечивающих справедливость, например, стационарного представления (5.7.6), естественно считать, что оно состоит из точек λ , для которых все операторы в правой части (5.7.6) корректно определены. Более того, согласно лемме 1 в качестве $Z_0(\lambda; G)$ можно в (5.7.6) взять произвольный оператор,

удовлетворяющий тождеству (5.7.7). При таком соглашении МР определяется при всех λ , в которых существуют пределы $B^{(0)}(\lambda \pm i0)$ и обратный оператор (5.7.5). В условиях теоремы 5.7.1' множество $\mathcal{M}$ таких λ имеет полную меру.

Следующее утверждение прямо вытекает из теорем 5.7.1', 5.8.1 и предложения 6.

Теорема 7. Пусть на борелевском множестве Λ выполнены условия теоремы 5.7.1' и $B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^* \in \mathfrak{S}_\infty$ при $\text{Im } z \neq 0$. Тогда для п.в. $\lambda \in \Lambda$ МР $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ унитарна, $S(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_\infty$ и спектр $S(\lambda)$ состоит из собственных значений, накапливающихся разве лишь к точке 1. Отличные от 1 собственные значения конечнократны.

4. Изучим теперь непрерывность МР $S(\lambda; H(\gamma), H_0)$ по параметру γ для семейства гамильтонианов $H(\gamma) = H_0 + \gamma V$. Чтобы условие вида (5.7.5) выполнялось при всех γ , проще всего потребовать существования у оператор-функции $B^{(0)}(z)$ угловых предельных значений. При сравнении МР для разных γ надо иметь в виду, что они заданы (см. п. 3) на разных множествах $\mathcal{M}(\gamma)$ полной меры. В следующем утверждении МР рассматриваются для малых значений γ . При этом используется, что для некоторого множества полной меры $\mathcal{M}_0$ и каждой точки $\lambda \in \mathcal{M}_0$ найдется такое число $\gamma_0 = \gamma_0(\lambda)$, что $\lambda \in \mathcal{M}(\gamma)$ при всех $\gamma \in (0, \gamma_0)$.

Теорема 8. Пусть $H(\gamma) = H_0 + \gamma V$ и оператор-функция $B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^*$ удовлетворяет на множестве Λ условиям теоремы 5.7.2'. Тогда для п.в. $\lambda \in \Lambda$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |S(\lambda; H(\gamma), H_0) - I| = 0 \quad (9)$$

и, следовательно, спектр МР $S(\lambda; H(\gamma), H_0)$ лежит на дуге $[e^{-i\theta(\gamma)}, e^{i\theta(\gamma)}]$, где $\theta(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Если, кроме того, $\text{Im } B^{(0)}(\lambda + i0) \in \mathfrak{S}_r$ для какого-либо $r < \infty$, то

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |S(\lambda; H(\gamma), H_0) - I|_r = 0. \quad (10)$$

○ В силу локального варианта (см. § 5.8) теоремы 5.7.2'

$$S(\lambda; H(\gamma), H_0) = I - 2\pi i \gamma Z_0(\lambda; G)(I - \gamma B^{(0)}(\lambda + i0))^{-1} Z_0^*(\lambda; G). \quad (11)$$

Через $\mathcal{M}_0$ обозначим множество тех λ , где пределы $B^{(0)}(\lambda + i0)$ существуют. На этом множестве соотношение (9) прямо вытекает из предложения 5, примененного к оператору (11).

При условии $\text{Im } B^{(0)}(\lambda + i0) \in \mathfrak{S}_r$ из (5.7.7) следует, что $Z_0(\lambda, G) \in \mathfrak{S}_{2r}$. Выберем теперь в зависимости от $\lambda \in \mathcal{M}_0$ число γ настолько малым, чтобы $\gamma \|B^{(0)}(\lambda + i0)\| \leq 1/2$. Тогда (11) дает оценку

$$|S(\lambda; H(\gamma), H_0) - I|_r \leq 4\pi\gamma \|Z_0(\lambda; G)\|_{2r}^2,$$

обеспечивающую соотношение (10). •

С помощью теоремы умножения для МР это утверждение распространяется на более общую ситуацию.

Следствие 10: Пусть существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J, \Lambda)$, а для пары $H_1, H(\gamma) = H_1 + \gamma V$ на Λ выполнены условия теоремы 5.7.2'. Тогда для п.в. $\lambda \in \Lambda$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |S(\lambda; H(\gamma), H_0; J) - S(\lambda; H_1, H_0; J)| = 0. \quad (12)$$

Если, кроме того, $\text{Im } GR_{H_1}(\lambda + i0)G^* \in \mathfrak{S}_r$, то

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |S(\lambda; H(\gamma), H_0; J) - S(\lambda; H_1, H_0; J)|_r = 0. \quad (13)$$

○ Поясним, например, (13). Согласно предложению 1.3 величина под знаком предела в (13) оценивается через $\|J\|^2 \times |S(\lambda; H(\gamma), H_1) - I|_r$. Остается воспользоваться соотношением (10). •

В частности, в силу (12), (13) в условиях теоремы 9 при любом γ_1

$$\lim_{\gamma \rightarrow \gamma_1} |S(\lambda; H(\gamma), H_1) - S(\lambda; H(\gamma_1), H_0)|_r = 0,$$

где не исключается значение $r = \infty$, когда $|\cdot|_{\infty}$ превращается в обычную норму.

Применим полученные оценки к ядерной теории. Отметим, что принятое для простоты формулировок условие (5.5.8) мало существенно. Поэтому следующее утверждение прямо вытекает из следствия 10.

Следствие 10. Пусть существуют ВО $W_{\pm}(H, H_0; J)$, а для пары $H_1, H = H_1 + \gamma V$, где $V = G^*G_1$, выполнены условия теоремы 6.4.15. Тогда соотношение (13) при $r = 1$ справедливо для п.в. $\lambda \in R$.

○ Нужно учесть, что, как показано при доказательстве теоремы 6.4.15, в ее условиях выполняются предположения теоремы 5.7.2 при $l = 1$. Кроме того, надо использовать соотношения вида (5.1). •

Изложенные в пп. 3 и 4 сведения о МР можно рассматривать как обобщение результатов § 4 на более абстрактную ситуацию. Используемая здесь методика также по существу та же, что и в § 4.

Аналогично § 4 в условиях этого пункта можно построить и разложение $S(\lambda; H(\gamma), H_0)$ в ряд по степеням γ , но мы не будем на этом останавливаться. Другие приведенные здесь результаты, наоборот, не обсуждались в § 4, хотя они и верны в «гладких» предположениях. Так, соотношение (12) сохраняется, если существуют ВО $W_{\pm}(H_1, H_0; J)$ и оператор-функция $GR_{H_1}(z)G^*$ непрерывна при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ вплоть до разреза по Λ .

В заключение покажем, что в условиях § 4 МР $S(\lambda)$ можно выбрать непрерывной по λ даже в том случае, когда вместо усиленной H_0 -гладкости оператора G выполнено более слабое условие непрерывности оператор-функции $GR_0(z)G^*$. При этом нужно считать, что МР определяется равенством (5.7.6), где $Z_0(\lambda, G)$ — любой оператор, удовлетворяющий соотношению (5.7.7). Положим (ср. с (4))

$$Z_0(\lambda; G) = ((2\pi i)^{-1}(B^{(0)}(\lambda + i0) - B^{(0)}(\lambda - i0)))^{1/2}.$$

В силу неравенства

$$\|A_2^{1/2} - A_1^{1/2}\| \leq C\|A_2 - A_1\|^{1/2}, \quad A_j \geq 0,$$

операторы $Z_0(\lambda; G)$, а потому и (5.7.6), будут непрерывными по λ .

§ 8. СПЕКТР МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Здесь устанавливаются два родственных утверждения о спектре МР для относительно компактных знакоопределенных возмущений. Первое из них состоит в том, что для положительных (отрицательных) возмущений собственные значения МР могут накапливаться в точке $1 \in \mathbb{T}$ только снизу (сверху). Второе утверждает, что при внесении дополнительного положительного (отрицательного) возмущения спектр МР вращается по (против) часовой стрелке.

1. Рассмотрим сначала произвольный оператор вида (7.1). Условия (7.2) и (7.3) по-прежнему предполагаются. При изучении спектра оператора (7.1) удобно ввести в рассмотрение

его мнимую часть:

$$I = (2i)^{-1}(S - S^*).$$

Для этого самосопряженного оператора справедливо представление

$$I = -2\pi \mathcal{Z} \operatorname{Re}[\mathcal{V}(I + B\mathcal{V})^{-1}] \mathcal{Z}^*. \quad (1)$$

Следующее утверждение прямо вытекает из спектральной теоремы и выполняется для произвольного унитарного оператора.

Лемма 1. Если точка $\mu = e^{i\varphi} \in \sigma(S)$, то $\operatorname{Im} \mu = \sin \varphi \in \sigma(I)$. Обратно, если $\lambda = \sin \varphi \in \sigma(I) \subset [-1, 1]$, то по крайней мере одна из точек $e^{i\varphi}$ или $e^{i(\pi-\varphi)}$ принадлежит $\sigma(S)$.

Будем теперь считать оператор $\mathcal{V}$ знакоопределенным. Отметим прежде всего, что случай $\mathcal{V} \geq 0$ сводится к $\mathcal{V} = I$. Для этого нужно лишь перейти к новым операторам $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}\mathcal{V}^{1/2}$ и $\tilde{B} = \mathcal{V}^{1/2}B\mathcal{V}^{1/2}$. Тогда

$$S = I - 2\pi i \tilde{\mathcal{Z}}(I + \tilde{B})^{-1} \tilde{\mathcal{Z}}^*$$

и для $\tilde{\mathcal{Z}}, \tilde{B}$ сохранится равенство вида (7.3). Аналогичным образом случай $\mathcal{V} \leq 0$ сводится к $\mathcal{V} = -I$.

Следующие два утверждения уточняют в знакоопределенном случае предложения 7.5 и 7.6.

Теорема 2. Пусть $\|B\| \cdot \|\mathcal{V}\| < 1$ и $\mathcal{V} \geq 0$ ($\mathcal{V} \leq 0$). Тогда спектр S лежит на замкнутой нижней (верхней) полуокружности.

○ Пусть, например, $\mathcal{V} \geq 0$, так что можно считать $\mathcal{V} = I$. Полагая $g = (I + B)^{-1} \mathcal{Z}^* f$, найдем согласно (1), что

$$\begin{aligned} -(2\pi)^{-1} (If, f) &= \operatorname{Re}((I + B)^{-1} \mathcal{Z}^* f, \mathcal{Z}^* f) = \\ &= \operatorname{Re}((I + B)g, g) \geq \\ &\geq (1 - \|B\|)\|g\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому $I \geq 0$, и, следовательно, искомое утверждение прямо вытекает из леммы 1. •

Теорема 3. Пусть $B \in \mathfrak{S}_\infty$ и $\mathcal{V} \geq 0$ (или $\mathcal{V} \leq 0$). Тогда собственные значения оператора S могут накапливаться к точке 1 разве лишь снизу (сверху).

○ Поскольку 1—единственная точка накопления спектра оператора S , достаточно в силу леммы 1 показать, что собственные значения оператора I могут накапливаться к точке 0 разве лишь слева (справа). Пусть опять $\mathcal{V} \geq 0$, так что можно

считать $\mathcal{V} = I$. Представим компактный оператор $\mathcal{B}$ в виде суммы $\mathcal{B} = K + \mathcal{B}_1$, где K конечномерен, а $\|\mathcal{B}_1\| < 1$, и положим

$$\mathcal{I}_1 = -2\pi \mathcal{Z} \operatorname{Re}(I + \mathcal{B}_1)^{-1} \mathcal{Z}^*.$$

Согласно (1.6.8)

$$(I + \mathcal{B})^{-1} - (I + \mathcal{B}_1)^{-1} = -(I + \mathcal{B})^{-1} K (I + \mathcal{B}_1)^{-1} - P (I + \mathcal{B}_1)^{-1},$$

где P —ортогональный проектор на ядро оператора $I + \mathcal{B}$. Поскольку операторы K и P конечномерны, отсюда вытекает, что и разность

$$\mathcal{I} - \mathcal{I}_1 = -2\pi \mathcal{Z} \operatorname{Re}[(I + \mathcal{B})^{-1} - (I + \mathcal{B}_1)^{-1}] \mathcal{Z}^*$$

конечномерна. В то же время аналогично теореме 2 убеждаемся, что

$$-(2\pi)^{-1}(\mathcal{I}_1 f, f) = ((I + \operatorname{Re} \mathcal{B}_1)g, g) \geq 0, \quad g = (I + \mathcal{B}_1)^{-1} \mathcal{Z}^* f.$$

Таким образом, $\mathcal{I}$ —сумма отрицательного и конечномерного операторов. По спектральной теореме кратность положительного спектра оператора $\mathcal{I}$ конечна. •

2. Вопрос о направлении вращения спектра также рассмотрим сначала в абстрактной постановке. Пусть S_γ —какое-либо семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве, зависящее от параметра $\gamma \geq 0$. Предположим, что

$$S_0 - I \in \mathfrak{S}_\infty \quad (2)$$

и

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} |S_\gamma - S_0| = 0. \quad (3)$$

Согласно (2) спектр оператора S_0 состоит из собственных чисел μ_n , накапливающихся разве лишь к точке $1 \in \mathbb{T}$. В силу предложения 1.11.4 при условии (3) спектр оператора S_γ содержится в объединении дуг $(\mu_n e^{-i\theta(\gamma)}, \mu_n e^{i\theta(\gamma)})$, где $\theta(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Кроме того, на каждой из этих дуг найдется по крайней мере одна точка спектра оператора S_γ .

Поскольку спектр оператора S_0 имеет точку накопления, понятие вращения спектра нуждается в точном определении. Будем говорить, что спектр семейства S_γ вращается в точке $\gamma = 0$ по (против) часовой стрелке, если для каждого μ_n найдутся такие малые числа $\theta_n > 0$ и $\gamma_n > 0$, что при $\gamma \in (0, \gamma_n)$ операторы S_γ не имеют спектра на дуге $(\mu_n, \mu_n e^{i\theta_n})$ (соответственно на

дуге $(\mu_n e^{-i\theta_n}, \mu_n)$). Данное определение не требует компактности операторов $S_\gamma - I$ при $\gamma > 0$. Однако представление о вращении спектра становится более наглядным, если спектр S_γ при $\gamma > 0$ тоже состоит из собственных чисел.

Предположим теперь, что

$$\tilde{S}_\gamma := S_\gamma S_0^{-1} = I - 2\pi i \gamma Z_1 V (I + \gamma B_1 V)^{-1} Z_1^*, \quad (4)$$

где операторы $V = V^*$, Z_1 и B_1 ограничены и

$$2\pi i Z_1^* Z_1 = B_1 - B_1^*. \quad (5)$$

Соотношение (4) копирует стационарное представление для МР, отвечающей малому возмущению (параметр γ имеет смысл константы связи). Таким образом, мы предполагаем, что мультипликативное возмущение $\tilde{S}_\gamma$ оператора S_0 имеет вид (7.1); при этом (5) играет роль (7.3). Согласно теореме 7.4 оператор (4) унитарен. Из предложения 7.5 сразу вытекает, что условие (3) в данном случае автоматически выполняется. Вопрос о направлении вращении спектра решается следующим утверждением:

Теорема 4. *Предположим, что оператор S_0 унитарен и выполнено условие (2). Если в (4) $V \geq 0$ (или $V \leq 0$), то спектр семейства S_γ вращается в точке $\gamma = 0$ по (соответственно против) часовой стрелке.*

○ Пусть, например, $V \geq 0$. Согласно предложению 7.5 и теореме 2 спектр оператора (4) лежит на дуге $[e^{-i\theta(\gamma)}, 1]$, где $\theta(\gamma) > 0$ и $\theta(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Остается воспользоваться следствием 1.11.6 при $U_0 = S_0$, $M = \tilde{S}_\gamma$. •

3. Аналогично индивидуальным собственным числам рассматривается и их произведение-детерминант оператора S_γ . Для конечности детерминанта надо, разумеется, предполагать, что оператор $S_\gamma - I$ — ядерный.

Теорема 5. *Пусть $S_\gamma = \tilde{S}_\gamma S_0$, где S_0 унитарен, $S_0 - I \in \mathfrak{S}_1$, а оператор $\tilde{S}_\gamma$ задается равенством (4) и $Z_1 \in \mathfrak{S}_2$. Тогда при $V \geq 0$ (при $V \leq 0$) число $\text{Det } S_\gamma$ вращается в точке $\gamma = 0$ по (соответственно против) часовой стрелке.*

○ На основании (4) $\tilde{S}_\gamma - I \in \mathfrak{S}_1$ и, следовательно, корректно определен

$$\text{Det } S_\gamma = \text{Det } \tilde{S}_\gamma \cdot \text{Det } S_0. \quad (6)$$

Кроме того, согласно (4)

$$\|\tilde{S}_\gamma - I\|_1 \leq 2\pi\gamma \|\mathcal{Z}_1\|_2^2 \|\mathcal{V}\| (1 - \gamma \|\mathcal{V}\| \|\mathcal{B}_1\|)^{-1}. \quad (7)$$

Поскольку детерминант непрерывен в ядерной норме, отсюда вытекает, что $\text{Det } \tilde{S}_\gamma \rightarrow 1$, а потому $\text{Det } S_\gamma \rightarrow \text{Det } S_0$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Пусть, например, $\mathcal{V} \geq 0$. Собственные значения оператора $\tilde{S}_\gamma$ запишем в виде $\mu_n(\gamma) = e^{-i\varphi_n(\gamma)}$. Согласно теореме 4 можно считать, что $\varphi_n(\gamma) \in [0, \pi]$. При этом условии

$$\varphi(\gamma) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\gamma) \leq 2^{-1}\pi \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(\gamma) - 1| = 2^{-1}\pi \|\tilde{S}_\gamma - I\|_1.$$

Здесь использовано, что $|\mu_n(\gamma) - 1|$ суть s -числа оператора $\tilde{S}_\gamma - I$. Неравенство (7) теперь показывает, что $\varphi(\gamma) \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$. Поскольку $\varphi(\gamma) \geq 0$, отсюда следует, что при достаточно малых $\gamma > 0$ число $\text{Det } \tilde{S}_\gamma = \exp(-i\varphi(\gamma))$ лежит на нижней полуокружности. В силу (6) это означает, что $\text{Det } S_\gamma$ вращается по часовой стрелке. •

4. Вернемся к рассмотрению МР. Сначала обсудим МР в условиях общей стационарной схемы. Будем считать, что выполнены предположения п. 3 § 7. Для возмущения $V = G^*VG$ по определению принимаем, что $V \geq 0$ (или $V \leq 0$), если $\mathcal{V} \geq 0$ (соответственно $\mathcal{V} \leq 0$). Следующее утверждение дополняет теорему 7.7. При учете теорем 5.7.1' и 5.8.1 оно немедленно вытекает из теоремы 3.

Теорема 6. Пусть на борелевском множестве Λ выполнены условия теоремы 5.7.1' и $B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^* \in \mathfrak{S}_\infty$ при $\text{Im } z \neq 0$. Тогда при $\mathcal{V} \geq 0$ (при $\mathcal{V} \leq 0$) на верхней (соответственно нижней) полуокружности спектр МР $S(\lambda; H, H_0)$ состоит из конечного числа собственных значений.

Другими словами, для положительных (отрицательных) возмущений V спектр МР может накапливаться к 1 только снизу (сверху). Приведем теперь гладкий и ядерный варианты этой теоремы.

Теорема 7. Пусть оператор-функция $B^{(0)}(z) \in \mathfrak{S}_\infty$ при $\text{Im } z \neq 0$ и непрерывна по норме вплоть до разреза по интервалу Λ . Тогда при $\lambda \in \Lambda$ для МР $S(\lambda; H, H_0)$ справедливы все заключения теоремы 6.

Теорема 8. Пусть $G(|H_0| + I)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_p$ для какого-нибудь $p < \infty$ и $GE_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_2$ для любого ограниченного интервала Λ . Тогда

при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ для МР $S(\lambda; H, H_0)$ справедливы все заключения теоремы 6.

Разница между результатами этих теорем состоит лишь в том, что в первой из них речь идет о всех $\lambda \in \Lambda$, а во второй — о п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

5. Рассмотрим теперь вопрос о направлении вращения спектра МР $S_\gamma(\lambda) = S(\lambda; H(\gamma), H_0; J)$ для семейства самосопряженных операторов $H(\gamma) = H_1 + \gamma V$, зависящих от параметра $\gamma \geq 0$. Спектральный параметр λ будем считать фиксированным.

Теорема 9. Пусть для некоторого борелевского множества Λ в $W_\pm(H_1, H_0; J, \Lambda)$ существуют, изометричны на $E_0^{(a)}(\Lambda)H_0$, полны и $S(\lambda; H_1, H_0; J) - I \in \mathfrak{S}_\infty$ для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Предположим, что $V = G^*VG$ и оператор-функция $B^{(1)}(z) = G(H_1 - z)^{-1}G^*$ удовлетворяет на Λ условиям теоремы 5.7.2' (для каких-либо l и p). Пусть также на плотном множестве элементов f существуют сильные пределы вектор-функций $G(H_1 - \lambda \pm i\epsilon)^{-1}f$. Тогда для семейства гамильтонианов $H(\gamma) = H_1 + \gamma V$ спектр МР $S(\lambda; H(\gamma), H_0; J)$ для п.в. $\lambda \in \Lambda$ вращается в точке $\gamma = 0$ по (соответственно против) часовой стрелке, если $V \geq 0$ (или $V \leq 0$). Если к тому же $S(\lambda; H_1, H_0; J) - I \in \mathfrak{S}_1$ и $dGE_{H_1}(\lambda)G^*/d\lambda \in \mathfrak{S}_1$ для п.в. $\lambda \in \Lambda$, то такое же заключение справедливо о функции $\text{Det } S(\lambda; H(\gamma), H_0; J)$.

○ В силу теорем 5.7.2' и 5.8.1 в $W_\pm(H(\gamma), H_0)$ при всех $\gamma \geq 0$ существуют, изометричны и полны. Тем самым согласно следствию 1.2

$$S(\lambda; H(\gamma), H_0; J) = S_\gamma^{(+)}(\lambda)S(\lambda; H_1, H_0; J), \quad (8)$$

где оператор $S_\gamma^{(+)}(\lambda)$ унитарно эквивалентен МР $S(\lambda; H(\gamma), H_1)$, а потому для него справедливо представление вида (4). Таким образом, утверждение о направлении вращения спектра прямо вытекает из теоремы 4, примененной к операторам $S_\gamma = S(\lambda; H(\gamma), H_0; J)$, $S_0 = S(\lambda; H_1, H_0; J)$ и $\tilde{S}_\gamma = S_\gamma^{(+)}(\lambda)$. Аналогичным образом, утверждение о направлении вращения $\text{Det } S_\gamma$ вытекает из теоремы 5. •

Отметим, что равенство (8) следует из (1.5)₊. Для доказательства теоремы 9 можно было бы воспользоваться и равенством (1.5)₋, но нам достаточно любого из них. Теорема 9 конкретизируется в применении к гладкому и ядерному методам совершенно аналогично п. 4. В частности, утверждение о

направлении вращения спектра $S(\lambda; H_0 + \gamma V, H_0)$ заведомо выполняется при всех $\gamma \geq 0$, если пара H_0, V удовлетворяет условиям теорем 7 или 8. В условиях теоремы 8 справедливо и утверждение о направлении вращения детерминанта.

§ 9. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ. ОЦЕНКИ СВЕРХУ

1. В этом параграфе мы установим условия справедливости включения

$$S(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_p, \quad p > 0, \quad (1)$$

для МР $S(\lambda) = S(\lambda; H, H_0)$ и получим эффективные оценки соответствующих (квази)норм $|S(\lambda) - I|_p$. Такие оценки представляют интерес прежде всего потому, что в конкретных задачах $|S(\lambda) - I|_2^2$ — основная величина, наблюдаемая в экспериментах по рассеянию. Она называется *сечением рассеяния*. В действительности в определение сечения рассеяния вводится множитель, зависящий от энергии λ и размерности задачи (для оператора Шредингера точное определение см. в п. 4 Введения).

Для сечения рассеяния, проинтегрированного по какому-либо интервалу Λ , эффективная оценка легко получается в рамках ядерных предположений. Именно, из теоремы 6.6 и очевидного неравенства

$$|T|_2^2 \leq |T| |T|_1, \quad T \in \mathfrak{S}_1,$$

прямо вытекает

Теорема 1. *В условиях теоремы 6.6*

$$\int_{\Lambda} |S(\lambda; H, H_0; J) - u_{\pm}(\lambda)|_2^2 d\lambda \leq 4\pi \|J\|^3 \|E^{(a)}(\Lambda) V E_0^{(a)}(\Lambda)\|_1. \quad (2)$$

В частности, при $H_0 = H$, $J = I$ из (2) вытекает оценка для интеграла от $|S(\lambda) - I|_2^2$. В этом параграфе мы дадим оценку для сечения рассеяния при фокусированном λ . Для такой оценки условие $H_0 = H$, $J = I$ оказывается существенным. Зато величина $|S(\lambda) - I|_p$ рассматривается при всех $p > 0$.

2. Нам удобно сначала рассмотреть произвольный оператор (7.1), удовлетворяющий условиям (7.2), (7.3). Кроме того,

предполагается, что либо обратный оператор в (7.1) существует и ограничен, либо $B \in \mathfrak{S}_\infty$. В последнем случае обратный оператор понимается в указанном в п. 3 § 1.6 обобщенном смысле. Установим предварительно условия принадлежности оператора $S - I$ классу $\mathfrak{S}_p$.

Лемма 2. Включение $S - I \in \mathfrak{S}_p$ справедливо, если $Z \in \mathfrak{S}_{2p}$. Кроме того,

$$s_n(S - I) \leq Cn^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

если $s_n(Z) = O(n^{-\alpha/2})$.

○ В силу неравенств (1.6.9), (1.6.11) из (7.1) вытекает, что

$$\|S - I\|_p \leq 2\pi\|\mathcal{V}\| \|Z\|_{2p}^2 \|(I + B\mathcal{V})^{-1}\|. \quad (4)$$

Аналогичным образом оценка (3) получается с помощью неравенств (1.6.5), (1.6.6). •

Следствие 3: Утверждения леммы 1 выполняются, если соответственно $B \in \mathfrak{S}_p$ или $s_n(B) = O(n^{-\alpha})$.

○ Достаточно учесть соотношение (7.3). •

Оценка (4) для нормы $\|S - I\|_p$ мало эффективна, так как, вообще говоря, норма обратного оператора в правой части (4) не контролируется. Лишь для малых возмущений, когда $\|B\| \cdot \|\mathcal{V}\| = b < 1$, из (4) вытекает конкретная оценка:

$$\|S - I\|_p \leq 2\pi(1 - b)^{-1}\|\mathcal{V}\| \|Z\|_{2p}^2 \leq 2(1 - b)^{-1}\|\mathcal{V}\| \|B\|_p. \quad (5)$$

Оказывается, что оценка вида (5) сохраняется и в общем случае. При ее выводе используется предложение 1.6.2, дающее при достаточно больших номерах эффективную оценку для сингулярных чисел обратного оператора.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (7.2), (7.3) и $B \in \mathfrak{S}_p$. Тогда для оператора (7.1) имеет место оценка

$$\|S - I\|_p \leq \kappa_p \|\mathcal{V}\| \|B\|_p, \quad (6)$$

где

$$\kappa_p^p = 2^p \min_{0 < \beta < 1} [\beta^{-p} + 2(1 - \beta)^{-p}]. \quad (7)$$

○ Для любого $\beta \in (0, 1)$ выберем число $N \geq 2$ так, чтобы

$$s_N(B\mathcal{V}) \leq \beta \leq s_{N-1}(B\mathcal{V}). \quad (8)$$

Такой выбор возможен, если $\|B\mathcal{V}\| \geq \beta$; в противном случае полагаем $N = 1$. Обозначим для краткости $A = S - I$ и разобьем

сумму $|A|_p^p$ (см. определение (1.6.10)) на две суммы: Σ_1 и Σ_2 по номерам $n \leq N-1$ и $n \geq N$ соответственно. Согласно (8)

$$\beta^p(N-1) \leq s_{N-1}^p(BV)(N-1) \leq \|BV\|_p^p.$$

Поскольку $|A| \leq 2$ в силу теоремы 7.4, то

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{N-1} s_n^p(A) \leq 2^p(N-1) \leq (2\beta^{-1}\|BV\|_p)^p. \quad (9)$$

Для оценки суммы применим к произведению в правой части (7.1) неравенства (1.6.5) и (1.6.6). Тогда при любом натуральном k

$$s_{N+2k-2}(A) \leq 2\pi\|V\|s_N((I+BV)^{-1})s_k(Z)s_k(Z^*).$$

Согласно предложению 1.6.2 из условия (8) вытекает, что

$$s_N((I+BV)^{-1}) \leq (1-\beta)^{-1},$$

а потому

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} s_{N+2k-2}^p(A) \leq \\ &\leq 2(2\pi)^p(1-\beta)^{-p}\|V\|^p \sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(Z^*Z). \end{aligned} \quad (10)$$

Сумма в правой части есть $\|Z^*Z\|_p^p$ и, следовательно, в силу (3) не превосходит $\pi^{-p}\|B\|_p^p$. Объединяя неравенства (9) и (10), установим оценку (6). Выражение (7) для κ_p находится минимизацией получившейся оценочной постоянной по β . •

3. Применим теперь теорему 4 к оценке сечения рассеяния. В силу теорем 5.7.1' и 5.8.1 в условиях следующего утверждения ВО $W_{\pm}(H, H_0; \Lambda)$ существуют, а для МР $S(\lambda) = S(\lambda, H, H_0)$ имеет место представление (5.7.9). Напомним, что $B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^*$.

Теорема 5. Пусть на борелевском множестве Λ выполнены условия теоремы 5.7.1' и $B^{(0)}(\lambda + i0) \in \mathfrak{S}_p$ для п.в. $\lambda \in \Lambda$. Тогда справедливо включение (1) и

$$|S(\lambda; H, H_0) - I|_p \leq \kappa_p \|V\| \|B^{(0)}(\lambda + i0)\|_p, \quad \text{п.в. } \lambda \in \Lambda, \quad (11)$$

где постоянная κ_p дается равенством (7).

Как и в § 8, условия этой теоремы можно заменить на более конкретные предположения гладкого или ядерного типов. Приведем соответствующие формулировки.

Теорема 6. Пусть $B^{(0)}(z) \in \mathfrak{S}_\infty$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ и оператор-функция $B^{(0)}(z)$ непрерывна по норме вплоть до разреза по интервалу Λ . Предположим также, что $B^{(0)}(\lambda + i0) \in \mathfrak{S}_p$ при $\lambda \in \Lambda$. Тогда для всех $\lambda \in \Lambda_0$, где множество $\Lambda_0 \subset \Lambda$ открыто и $|\Lambda \setminus \Lambda_0| = 0$, имеет место оценка (11).

Напомним, что в условиях теоремы 6 множество $\Lambda \setminus \Lambda_0$ состоит из точек λ , в которых нарушается условие (5.7.5). Поэтому при $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ представление (5.7.6) теряет смысл и МР $S(\lambda)$ вообще не определена. Тем не менее неравенство (11) (с не зависящей от λ оценочной постоянной) сохраняется при приближении к концам составляющих интервалов открытого множества Λ_0 .

Теорема 7. Пусть $GE_0(\Lambda) \in \mathfrak{S}_2$ для любого ограниченного интервала Λ , а $G(|H_0| + I)^{-1/2} \in \mathfrak{S}_r$ для какого-нибудь $r < \infty$. Тогда для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет место оценка (11), где $p \geq 2$ и $p \geq 2^{-1}r$.

○ Нужно лишь показать, что оператор $B^{(0)}(z)$ имеет угловые предельные значения в $\mathfrak{S}_p$ при стремлении z к $\mathbb{R}$. Ясно, что при ограниченном интервале Λ

$$GR_0(z)G^* = G_\Lambda R_0(z)G_\Lambda^* + G_1 E_0(\Lambda')(|H_0| + I)R_0(z)G_1^*, \quad (12)$$

где $G_\Lambda = GE_0(\Lambda)$, $G_1 = G(|H_0| + I)^{-1/2}$, $\Lambda' = \mathbb{R} \setminus \Lambda$. Согласно теореме 6.1.9 и замечанию 6.1.12 первое слагаемое имеет для п.в. $\lambda \in \Lambda$ угловые предельные значения в $\mathfrak{S}_2$. Второе слагаемое в (12) голоморфно зависит от z при $\operatorname{Re} z \in \Lambda$ в классе $\mathfrak{S}_{r/2}$. •

4. Оценка (11) так же, как и «усредненная» оценка (2), линейна по константе связи. Это означает, что для семейства гамильтонианов $H(\gamma) = H_0 + \gamma V$

$$|S(\lambda; H(\gamma), H_0) - I|_p \leq \kappa_p \gamma \|\mathcal{V}\| \|B^{(0)}(\lambda + i0)\|_p,$$

где по-прежнему $B^{(0)}(z) = GR_0(z)G^*$. Как и в § 6, эту оценку можно иногда улучшить за счет применения ПИ. В следующем утверждении рассматривается полуограниченный случай и учитывается неотрицательность возмущения. При этом гамильтониан $H = H_0 + V$ определяется с помощью теоремы 1.10.9

через свою квадратичную форму, заданную на $\mathcal{D}(H_0^{1/2})$. Мы приведем лишь формулировку в терминах гладкой теории.

Теорема 8. Пусть $H_0 \geq cI$, $c > 0$, возмущение $V \geq 0$ и оператор $V^{1/2} - H_0^{1/2}$ -ограничен. Положим

$$L^2 = H_0^{-1/2} V H_0^{-1/2} (I + H_0^{-1/2} V H_0^{-1/2})^{-1}, \quad 0 \leq L \leq I.$$

Предположим, что оператор-функция $K_0(z) = L R_0(z) L \in \mathfrak{S}_\infty$ при $\text{Im } z \neq 0$ и непрерывна по норме вплоть до разреза по интервалу Λ . Пусть также $K_0(\lambda + i0) \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$, при $\lambda \in \Lambda$. Тогда существуют и полны ВО $W_\pm(H, H_0; \Lambda)$, а для соответствующей МР на открытом множестве Λ_0 полной в Λ меры имеет место оценка

$$|S(\lambda) - I|_p \leq \kappa_p \lambda \|K_0(\lambda + i0)\|_p, \quad \lambda \in \Lambda_0, \quad (13)$$

где постоянная κ_p определяется равенством (7).

○ Рассмотрим вспомогательную пару операторов $h_0 = H_0^{-1}$, $h = H^{-1}$. Ясно, что соответствующее возмущение

$$\begin{aligned} v &= h - h_0 = -H_0^{-1} V (H_0 + V)^{-1} = \\ &= -H_0^{-1} V H_0^{-1/2} (I + H_0^{-1/2} V H_0^{-1/2})^{-1} H_0^{-1/2} = -H_0^{-1/2} L^2 H_0^{-1/2} \end{aligned}$$

допускает факторизацию $v = g^* \omega g$, где $g = L H_0^{-1/2}$, а $\omega = -I$. Кроме того, при $\zeta = z^{-1}$ для резольвенты h_0 выполнено $r_0(\zeta) = -z H_0 R_0(z)$, а потому

$$b^{(0)}(\zeta) := g r_0(\zeta) g^* = -z L R_0(z) L = -z K_0(z). \quad (14)$$

Таким образом, для пары h_0, h на множестве $Y = \{\mu \in \mathbb{R} : \mu^{-1} \in \Lambda\}$ справедливы все условия теоремы 6. Она показывает, что существуют ВО $W_\pm(h, h_0; Y)$, а для соответствующей МР

$$|S(\mu; h, h_0) - I|_p \leq \kappa_p \|b^{(0)}(\mu + i0)\|_p.$$

Учтем, далее, что для пары h_0, h и $\varphi(\mu) = \mu^{-1}$ имеет место (см. п. 3 § 4.5) ПИ и, следовательно, согласно (2.6.14) $S(\mu; h, h_0) = S^*(\lambda; H, H_0)$, $\lambda = \mu^{-1}$. Теперь оценка (13) прямо вытекает из равенства (14). •

Подчеркнем, что независимо от величины V «эффективное возмущение» L^2 ограничено по норме единицей. Для трехмерного оператора Шредингера с неотрицательным финитным потенциалом из теоремы 8 можно извлечь (см. [137]) оценку сечения рассеяния, равномерную по константе связи γ .

Отметим, что все результаты этого параграфа легко распространяются (см. [76, 77]) на произвольные симметрично-квазинормированные идеалы.

Глава 8

ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА И ФОРМУЛА СЛЕДА

Основные объекты теории рассеяния (волновые операторы, оператор и матрица рассеяния) относятся к теории возмущений на непрерывном спектре. Понятие функции *спектрального сдвига* (ФСС) выходит за рамки собственно теории рассеяния.

Функция спектрального сдвига возникает в теории ядерных возмущений в связи с интегральным представлением для следа разности функций от операторов H_0 и H . На непрерывном спектре ФСС связана с матрицей рассеяния. Однако в отличие от нее понятие ФСС содержательно как на непрерывном, так и на дискретном спектрах.

Функцию спектрального сдвига для пары самосопряженных (или унитарных) операторов удобно вводить через определитель возмущения для этой пары. Свойства определителей возмущения изучаются в § 1. Теория ФСС для ядерных возмущений самосопряженных операторов строится в §§ 2–4. В §§ 5, 6 эта теория переносится на унитарный случай. В §§ 7–11 мы возвращаемся к самосопряженным операторам. По сравнению с §§ 2–4 в этих параграфах рассматривается более общая ситуация, когда ядерной является лишь разность подходящих функций от H_0 и H .

В этой главе предполагается, что операторы действуют в одном и том же пространстве, а отождествление—единичный оператор.

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВОЗМУЩЕНИЯ

1. Определитель возмущения (ОВ) естественно рассматривать для произвольных замкнутых операторов A_0 и A без предположения об их самосопряженности (или унитарности). Через $\rho(A)$ обозначаем множество регулярных точек оператора A , $R(z) = (A - z)^{-1}$, $R_0(z) = (A_0 - z)^{-1}$, $V = A - A_0$. При $z \in \rho(A_0) \cap \rho(A)$ для этих операторов выполняется резольвентное тождество (1.9.5).

Пусть $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A)$ и $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$ для какой-либо точки $z \in \rho(A_0)$. Тогда в силу тождества Гильберта оператор $VR_0(z)$ будет ядерным при всех $z \in \rho(A_0)$. Определитель возмущения для пары операторов A_0, A вводится равенством

$$\begin{aligned} D(z) &= D_{A/A_0}(z) = \text{Det}[(A - z)(A_0 - z)^{-1}] = \\ &= \text{Det}[I + VR_0(z)], \quad z \in \rho(A_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Из перечисленных в § 1.7 результатов об определителях вида $\text{Det}(I + T)$, где $T \in \mathfrak{S}_1$, прямо вытекают (подробности можно найти в книге [7]) следующие утверждения об ОВ.

1⁰. Функция $D(z)$ определена и голоморфна на множестве $\rho(A_0)$.

Для доказательства достаточно учесть голоморфность оператор-функции $VR_0(z)$ в $\mathfrak{S}_1$.

2⁰. При $(A_1 - A_0)R_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $(A - A_1)R_1 \in \mathfrak{S}_1$

$$D_{A/A_1}(z)D_{A_1/A_0}(z) = D_{A/A_0}(z), \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A_1). \quad (2)$$

В частности,

$$D_{A_0/A}(z)D_{A/A_0}(z) = 1, \quad z \in \rho(A_0) \cap \rho(A), \quad (3)$$

а потому $D_{A/A_0}(z) \neq 0$ при $z \in \rho(A_0) \cap \rho(A)$.

Равенство (2) является прямым следствием (1.7.13). Отметим, что при сделанных предположениях $(A - A_0)R_0 \in \mathfrak{S}_1$.

3⁰. При $z \in \rho(A_0) \cap \rho(A)$

$$D^{-1}(z)D'(z) = \text{Tr}(R_0(z) - R(z)). \quad (4)$$

Действительно, согласно правилу (1.7.10) дифференцирования определителей левая часть (4) равна $\text{Tr}[(I + VR_0)^{-1}VR_0^2]$. В силу (1.7.4) ограниченный оператор R_0 можно под знаком следа переставить местами с ядерным оператором $(I + VR_0)^{-1}VR_0$. Тем самым ввиду резольвентного тождества (1.9.15) оператор под знаком следа есть $R_0 - R$.

Напомним (подробности см. в [7, 11]), что изолированная точка спектра z_1 оператора A называется его *нормальным собственным числом*, если отвечающий ей проектор

$$P = -(2\pi i)^{-1} \int_{|z-z_1|=\delta} R(z) dz$$

конечномерен. Здесь интегрирование ведется по достаточно малой окружности с центром в точке z_1 , проходимой против часовой стрелки. Оператор P проектирует на подпространство из собственных и присоединенных векторов оператора A , отвечающих собственному числу z_1 . Его размерность $k = \dim P$ называется *алгебраической кратностью* z_1 . Подпространство $R(I - P)$ инвариантно относительно A , и оператор $A - z_1 I$ там обратим. В окрестности нормального собственного числа резольвента оператора A допускает разложение в ряд Лорана:

$$R(z) = - \sum_{m=-k}^{\infty} C_m (z - z_1)^m, \quad k = \dim P, \quad \text{Tr } C_{-m} = 0, \quad m \geq 2. \quad (5)$$

Здесь $C_{-1} = P$, $C_{-2} = (A - z_1)P$ и $C_{-m} = C_{-2}^{m-1}$ при $m > 2$. Оператор C_{-2} нильпотентен, $C_{-2}^k = 0$, так что, в частности, $\text{Tr } C_{-2}^{m-1} = 0$ при $m \geq 2$. Для самосопряженных или унитарных операторов P — ортогональный проектор на соответствующее собственное подпространство, а $C_{-2} = 0$.

4°. Пусть z_1 — регулярная точка или нормальное собственное число операторов A_0 и A алгебраических кратностей k_0 и k . Тогда в точке z_1 функция $D(z)$ имеет полюс (или нуль) порядка $k_0 - k$ (порядка $k - k_0$).

В самом деле, согласно (4) и (5) логарифмическая производная $D(z)$ имеет в точке z_1 особенность $(k - k_0)(z - z_1)^{-1}$. Это означает, что сама функция $D(z)$ ведет себя как $(z - z_1)^{k-k_0}$ при $z \rightarrow z_1$.

Отсюда следует, что (ср. с теоремой 1.10.7) собственные значения A могут накапливаться только к точкам спектра оператора A_0 , не являющимся притом его нормальными собственными значениями. Это утверждение, конечно, слабее теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра из-за предположения о ядерности $VR_0(z)$.

5°. Пусть $\|VR_0(z)\|_1 \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ в какой-либо области z . Тогда $D(z) \rightarrow 1$ в той же области.

Достаточно воспользоваться непрерывной зависимостью $\text{Det}(I + T)$ при изменении T в $\mathfrak{S}_1$ и учесть равенство $\text{Det } I = 1$.

6⁰. При $z \in \rho(A_0) \cap \rho(A)$, $z' \in \rho(A_0)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} D^{-1}(z)D(z') &= \text{Det}[I - (I - VR(z))V(R_0(z) - R_0(z'))] = \\ &= \text{Det}[I - (z - z')R_0(z')VR(z)] = \\ &= \text{Det}[I - (z - z')R(z)V(R_0(z'))]. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу мультипликативного свойства (1.7.13) для доказательства первого из этих равенств достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} [I + VR_0(z)][I - (I - VR(z))V(R_0(z) - R_0(z'))] &= \\ &= I + VR_0(z) - V(R_0(z) - R_0(z')) = \\ &= I + VR_0(z'). \end{aligned}$$

Мы учли здесь резольвентное тождество $(I + VR_0)(I - VR) = I$. Применяя еще тождество Гильберта, найдем, что

$$(I - VR(z))V[R_0(z) - R_0(z')] = (z - z')VR(z)R_0(z').$$

Согласно (1.7.11) отсюда вытекает второе равенство (6). Наконец, третье равенство получается из второго при перемене ролей H_0 и H , а также z и z' . При этом надо воспользоваться соотношением (3). Возникающее дополнительное ограничение $z' \in \rho(A)$ снимается вследствие аналитичности обеих частей по $z' \in \rho(A_0)$.

2. Остановимся здесь специально на случаях самосопряженных и унитарных операторов. Для самосопряженных операторов $A_0 = H_0$ и $A = H$ определитель возмущения (1) голоморфен по z и не обращается в нуль в верхней полуплоскости. Для изучения его поведения при $|\text{Im } z| \rightarrow \infty$ нам понадобится элементарная

Лемма 1. Если $VR_0(z_0) \in \mathfrak{S}_1$ для какого-либо $z_0 \in \rho(H_0)$, то

$$\lim_{|\text{Im } z| \rightarrow \infty} \|VR_0(z)\|_1 = 0. \quad (7)$$

○ В силу тождества Гильберта

$$VR_0(z) = VR_0(z_0)K_0(z), \quad (8)$$

где $K_0(z) = I + (z - z_0)R_0(z)$. На основании спектральной теоремы

$$\|K_0^*(z)f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\lambda - z_0}{\lambda - z} \right|^2 d(E_0(\lambda)f, f). \quad (9)$$

Здесь подынтегральная функция равномерно по λ и z ограничена и при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ стремится к нулю при любом фиксированном λ . Следовательно, по теореме Лебега выражение (9) стремится к нулю, т.е. $K_0^*(z) \xrightarrow{s} 0$ при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$. Теперь соотношение (7) для оператора (8) прямо вытекает из леммы 6.1.3. •

Отметим, что лемма 1 сохраняет силу для любого сепарабельного симметрично-квазинормированного идеала.

Лемма 2. Если в самосопряженном случае $VR_0(z_0) \in \mathfrak{S}_1$ для какого-либо $z_0 \in \rho(H_0)$, то

$$\lim_{|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty} D(z) = 1. \quad (10)$$

Если к тому же $V \in \mathfrak{B}$, то

$$\overline{D(z)} = D(\bar{z}). \quad (11)$$

○ В силу леммы 1 соотношение (10) прямо вытекает из свойства 5⁰. Переставляя операторы под знаком детерминанта на основании тождества (1.7.11), найдем, что

$$\overline{\operatorname{Det}(I + VR_0(z))} = \operatorname{Det}(I + R_0(\bar{z})V) = \operatorname{Det}(I + VR_0(\bar{z})).$$

Это дает (11). •

В п. 3 выясняется, что равенство (11) справедливо и без лишнего ограничения $V \in \mathfrak{B}$.

В унитарном случае $A_0 = U_0$, $A = U$ спектральный параметр обозначаем через ζ . Теперь ВО $D(\zeta)$ голоморфен по ζ и не обращается в нуль внутри и вне единичной окружности. Роль леммы 2 играет

Лемма 3. Пусть операторы U_0, U унитарны и $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$. Тогда $D(\zeta) \rightarrow 1$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и

$$\overline{D(\zeta)} = D^{-1}(0)D(\zeta'), \quad \zeta^1 = \bar{\zeta}^{-1}; \quad (12)$$

в частности $|D(0)| = 1$.

○ Поскольку

$$\|VR_0(\zeta)\|_1 \leq \|V\|_1 |\zeta - 1|^{-1},$$

первое утверждение прямо вытекает из свойства 5⁰. Далее, в силу равенств (1.7.12) и (1.7.13)

$$\begin{aligned} \overline{D(\zeta)} &= \operatorname{Det}[(U_0^{-1} - \bar{\zeta})^{-1}(U^{-1} - \bar{\zeta})] = \\ &= \operatorname{Det}[U_0(U_0 - \zeta')^{-1}(U - \zeta')U^{-1}] = \\ &= \operatorname{Det}[(U_0 - \zeta')^{-1}(U - \zeta')] \operatorname{Det}(U^{-1}U_0). \end{aligned}$$

Ввиду (1.7.12) первый сомножитель справа равен $D(\zeta')$, а второй — $D_{U_0/U}(0) = D^{-1}(0)$. Наконец, устремляя в (12) ζ к нулю и учитывая, что $D(\zeta') \rightarrow 1$, получим равенство $|D(0)| = 1$.

3. Обсудим теперь обобщение понятия определителя возмущения на случай операторов, для которых ядерной является лишь разность резольвент. Ограничимся при этом рассмотрением самосопряженных операторов H_0, H . Через

$$U = \mu_1(H - a)(H - \bar{a})^{-1}, \quad U_0 = \mu_1(H_0 - a)(H_0 - \bar{a})^{-1}, \quad (13)$$

$$|\mu_1| = 1, \quad \operatorname{Im} a > 0,$$

обозначим их преобразования Кэли, отвечающие произвольному дробно-линейному отображению

$$\zeta = \mu_1(z - a)(z - \bar{a})^{-1} \quad (14)$$

верхней полуплоскости на единичную окружность. Ясно, что

$$U - U_0 = -2\mu_1 i \operatorname{Im} a [R(\bar{a}) - R_0(\bar{a})] \in \mathfrak{S}_1. \quad (15)$$

Обобщенный ОВ для пары H_0, H можно ввести равенством

$$\tilde{D}_a(z) := D_{U/U_0}(\zeta) = \operatorname{Det}[(H - \bar{a})^{-1}(H - z)(H_0 - z)^{-1}(H_0 - \bar{a})], \quad (16)$$

где ζ и z связаны соотношением (14). От числа μ_1 выражение (16), конечно, не зависит. Прямыми преобразованиями можно проверить, что оператор под знаком Det в (16) равен $I + (z - \bar{a})R(\bar{a})VR_0(z)$, а потому

$$\tilde{D}_a(z) = \operatorname{Det}[I + (z - \bar{a})R(\bar{a})VR_0(z)]. \quad (17)$$

Иногда $\tilde{D}_a(z)$ записывают еще как обычный ОВ для пары $\tilde{H}_0 = R_0(\bar{a})$, $\tilde{H} = R(\bar{a})$:

$$\tilde{D}_a(z) = D_{\tilde{H}/\tilde{H}_0}(\tilde{z}), \quad \tilde{z} = (z - \bar{a})^{-1}.$$

Свойства обобщенных ОВ в существенном те же, что и у обычных. Так, по своему определению (см., например, (17)) функция $\tilde{D}_a(z)$ голоморфна на множестве $\rho(H_0)$ и, во всяком случае, при $\operatorname{Im} z \neq 0$. Согласно (13), (14)

$$\operatorname{Tr}[(U_0 - \zeta)^{-1} - (U - \zeta)^{-1}] = i(2\mu_1 \operatorname{Im} a)^{-1}(z - \bar{a})^2 \operatorname{Tr}[R_0(z) - R(z)].$$

Поскольку в силу (4) это выражение равно $D_{U/U_0}^{-1}(\zeta)D'_{U/U_0}(\zeta)$, то функция $\tilde{D}_a(z)$ также удовлетворяет уравнению (4). Отметим еще соотношение симметрии

$$\overline{\tilde{D}_a(z)} = \tilde{D}_a^{-1}(a)\tilde{D}_a(\bar{z}). \quad (18)$$

Для его доказательства нужно воспользоваться определением (16) и соотношением (12) для $D_{U/U_0}(\zeta)$. Кроме того, нужно учесть равенство $\tilde{D}_a(a) = D_{U/U_0}(0)$, вытекающее из (14).

При разных a функции $\tilde{D}_a(z)$ различаются лишь постоянным множителем, а именно:

$$\tilde{D}_b(z) = \tilde{D}_a^{-1}(\bar{b})\tilde{D}_a(z). \quad (19)$$

Действительно, пусть

$$C_a = (H - \bar{a})^{-1}(H - z)(H_0 - z)^{-1}(H_0 - \bar{a}),$$

$$L_0 = (H_0 - \bar{a})^{-1}(H_0 - \bar{b}), \quad L = (H - \bar{b})^{-1}(H - \bar{a}).$$

Тогда $C_b = LC_aL_0$, причем операторы L_0, L ограничены и ограниченно-обратимы, а $L_0L - I \in \mathfrak{S}_1$. Из равенств (1.7.12), (1.7.13) теперь следует, что

$$\text{Det } C_b = \text{Det}(L_0L)\text{Det } C_a = \text{Det}^{-1}(L^{-1}L_0^{-1})\text{Det } C_a.$$

Поскольку $\text{Det } C_a = \tilde{D}_a(z)$, а $\text{Det}(L^{-1}L_0^{-1}) = \tilde{D}_a(\bar{b})$, отсюда вытекает соотношение (19).

При $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$, когда имеют смысл как обычный, так и обобщенный ОВ, они связаны соотношением

$$\tilde{D}_a(z) = D^{-1}(\bar{a})D(z), \quad (20)$$

являющимся следствием тождества (6) и выражения (17) для обобщенного ОВ. Эту связь иногда удобно использовать для изучения свойств обычных ОВ. Так, с помощью (20) можно дать еще одно доказательство равенства (11), не требующее предположения $V \in \mathfrak{B}$. Именно, подставляя (20) в (18), находим, что

$$\overline{D(\bar{a})}^{-1}\overline{D(z)} = D(a)^{-1}D(\bar{z}).$$

Остается устремить $\text{Im } a$ к бесконечности и учесть соотношение (10).

4. Остановимся еще на некоторых модификациях понятия определителя возмущения. Предположим сейчас, что возмущение представлено в виде произведения $V = G^*G_0$, где сомножители G_0, G удовлетворяют при $\theta_0 \in [1/2, 1]$, $\theta = 1 - \theta_0$, условиям

$$G_0(|H_0| + I)^{-\theta_0} \in \mathfrak{S}_2, \quad G(|H_0| + I)^{-\theta} \in \mathfrak{S}_2. \quad (21)$$

Тогда можно ввести в рассмотрение модифицированный ОВ

$$\check{D}(z) = \text{Det}(I + G_0 R_0(z) G^*).$$

Ясно, что предположения (21) гибче условия $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$. Они могут быть удобнее еще и благодаря тому, что принадлежность классу $\mathfrak{S}_2$ проверять проще, чем ядерность.

Для функций $\check{D}(z)$ сохраняется большинство свойств обычных ОВ. В частности, в самосопряженном случае функция $\check{D}(z)$ по-прежнему голоморфна при $\text{Im } z \neq 0$. Имеет место и выражение (4) для логарифмической производной. В самом деле, согласно (1.7.10)

$$\check{D}^{-1}(z) \check{D}'(z) = \text{Tr}[(I + G_0 R_0(z) G^*)^{-1} G_0 R_0^2(z) G^*].$$

В силу (1.7.4) и (1.9.15) выражение под знаком следа равно

$$R_0(z) G^* [I + G_0 R_0(z) G^*]^{-1} G_0 R_0(z) = R_0(z) - R(z).$$

Пользуясь понятием регуляризованного определителя (1.7.14), можно ввести в рассмотрение и *регуляризованный определитель возмущения*:

$$D_p(z) = \text{Det}_p(I + VR_0(z)), \quad p = 2, 3, \dots$$

Это определение корректно при $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_p$.

Отметим, что в силу равенства (1.7.17) при $VR_0 \in \mathfrak{S}_1$ регуляризованный определитель возмущения выражается через обычный:

$$D_p(z) = D(z) \exp \left[\sum_{k=1}^{p-1} k^{-1} (-1)^k \text{Tr}(VR_0(z))^k \right].$$

Согласно результатам п. 4 § 1.7 на регуляризованные определители переносятся многие свойства обычных определителей. Так, обобщение (4) имеет вид

$$\begin{aligned} D_p^{-1}(z) D_p'(z) &= (-1)^{p-1} \text{Tr}(R(z) (VR_0(z))^p) = \\ &= -\text{Tr} \left[R(z) - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k R_0(z) (VR_0(z))^k \right]. \end{aligned}$$

Его доказательство может быть легко получено с помощью формулы (1.7.18).

§ 2. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА В САМОСОПРЯЖЕННОМ СЛУЧАЕ. ЯДЕРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

1. Функция спектрального сдвига (ФСС) $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, H_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, для пары самосопряженных операторов H_0, H в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ возникает в связи с соотношением

$$\mathrm{Tr}[f(H) - f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) df(\lambda), \quad (1)$$

называемым *формулой следа*. Здесь f — произвольная функция из некоторого подходящего класса, а вещественная функция ξ во всяком случае должна быть локально суммируемой. Если на каком-либо интервале (например, на всей оси $\mathbb{R}$) функция f абсолютно непрерывна, то при интегрировании по этому интервалу df можно, конечно, заменить на $f'(\lambda)d\lambda$. Ясно, что справедливость (1) для любой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ фиксирует ξ с точностью до аддитивной постоянной.

Ввиду спектральной теоремы формально ФСС может быть найдена из равенства

$$\xi(\lambda) = \mathrm{Tr}(E_0(\lambda) - E(\lambda)). \quad (2)$$

Более того, коль скоро $E(\lambda) - E_0(\lambda) \in \mathfrak{S}_1$ для п.в. λ и функция (2) принадлежит $L_1^{(\mathrm{loc})}$, то $f(H) - f(H_0) \in \mathfrak{S}_1$ для любой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и имеет место формула (1). В действительности в теории ядерных возмущений оператор $E(\lambda) - E_0(\lambda)$, как правило, не является ядерным. Причина этого — в негладкости характеристической функции (интервала $(-\infty, \lambda)$). Тем не менее соотношение (1) при некоторой функции ξ оказывается выполненным. При этом ФСС можно построить через определитель возмущения $D_{H/H_0}(z)$. Свойства функции ξ и «объем» класса допустимых функций f зависят от «близости» операторов H_0 и H .

В широких предположениях ФСС связана с матрицей рассеяния $S(\lambda) = S(\lambda, H, H_0)$ формулой Бирмана—Крейна:

$$\mathrm{Det} S(\lambda) = \exp[-2\pi i \xi(\lambda)], \quad \text{a.e. } \lambda \in \sigma_0. \quad (3)$$

В §§ 2–4 мы рассмотрим ФСС в случае ядерных возмущений. В этом параграфе ФСС будет введена в терминах определителя

возмущения и будут изучены ее свойства. Формула следа (1) устанавливается в § 3, а соотношение (3)—в § 4.

2. Пусть $V = H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ и определитель возмущения $D(z) = D_{H/H_0}(z)$ задан равенством (1.1). При $\operatorname{Im} z \neq 0$ функция $D(z)$ голоморфна и $D(z) \neq 0$. Согласно (1.10) условием $\ln D(z) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$ в верхней и нижней полуплоскостях фиксируются однозначные ветви аналитической функции $\ln D(z)$. При этом из (1.11) вытекает, что

$$\ln D(\bar{z}) = \overline{\ln D(z)}.$$

Функция спектрального сдвига строится в следующей теореме М.Г.Крейна:

Теорема 1. При $V \in \mathfrak{S}_1$ имеет место представление

$$\ln D(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\lambda, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad (4)$$

где

$$\xi(\lambda) = \pi^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg D(\lambda + i\varepsilon). \quad (5)$$

Для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ предел в (5) существует и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \|V\|_1, \quad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \operatorname{Tr} V. \quad (7)$$

Кроме того, $\xi(\lambda) \leq k_+$ ($\xi(\lambda) \geq -k_-$) при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, если оператор V имеет лишь k_+ положительных (k_- отрицательных) собственных чисел. В частности, $\xi(\lambda) \geq 0$ (соответственно $\xi(\lambda) \leq 0$) при $V \geq 0$ (при $V \leq 0$).

○ Доказательство этой теоремы разбивается на три этапа. Первый из них состоит в рассмотрении одномерных возмущений, второй—в переходе к возмущениям произвольного конечного ранга, третий—в распространении результатов на общие ядерные возмущения. Предварительно отметим, что, коль скоро представление (4) с функцией $\xi = \bar{\xi} \in L_1(\mathbb{R})$ установлено,

равенство (5) и существование предела в его правой части вытекают из теоремы 1.2.5.

1-й этап. При $V = \gamma(\cdot, v)v$, $\|v\| = 1$, определитель возмущения равен

$$\begin{aligned} D(z) &= \text{Det}(I + \gamma(\cdot, R_0(\bar{z})v)v) = \\ &= 1 + \gamma(R_0(z)v, v) = \\ &= 1 + \gamma \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - z)^{-1} d(E_0(\lambda)v, v). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть, например, $\gamma > 0$. Тогда

$$\text{Im } D(z) = \gamma \|R_0(z)v\|^2 \text{Im } z > 0$$

в верхней полуплоскости. Кроме того, при $z = iy$, $y \rightarrow +\infty$, для функции (8) выполнено

$$\Gamma(iy) = 1 - (iy)^{-1} \gamma + o(y^{-1}). \quad (9)$$

Это соотношение прямо вытекает из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Рассмотрим теперь голоморфную в верхней полуплоскости функцию $\mathcal{C}(z) = \ln D(z)$. Поскольку $\arg D(z) \rightarrow 0$ при $\text{Im } z \rightarrow \infty$ и $\text{Im } D(z) > 0$, то $0 < \arg D(z) < \pi$ для всех $\text{Im } z > 0$. Далее, из (9) вытекает, что

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \ln D(iy) = i\gamma. \quad (10)$$

Таким образом, функция $\mathcal{C}(z)$ имеет положительную ограниченную мнимую часть $\text{Im } \mathcal{C}(z) = \arg D(z)$ и удовлетворяет условию (1.2.9). Поэтому согласно теореме 1.2.9 и следствию 1.2.10 для $\mathcal{C}(z)$ справедливо представление (4), где функция $\xi(\lambda)$ определяется равенством (5). Предел в (5) существует и, кроме того, $\xi \in L_1(\mathbb{R})$. Из условия $0 < \arg D(z) < \pi$ следует, что $0 \leq \xi(\lambda) \leq 1$. Сравнив теперь равенства (4) и (10), найдем, что интеграл в (7) равен γ . Отсюда вытекают соотношения (6) и (7). На z из нижней полуплоскости представление (4) переносится переходом к комплексному сопряжению. Аналогичным образом, при $\gamma < 0$ выполнено условие $-\pi < \arg D(z) < 0$ и, следовательно, $-1 \leq \xi(\lambda) \leq 0$.

2-й этап. На произвольные конечномерные возмущения доказываемое утверждение распространяется с помощью теоремы

умножения (1.2) определителей возмущения. Пусть

$$V_m = \sum_{l=1}^m \gamma_l(\cdot, v_l) v_l, \quad H_m = H_0 + V_m. \quad (11)$$

Тогда разность $H_m - H_{m-1} = \gamma_m(\cdot, v_m) v_m$ одномерна, и из (1.2) вытекает, что при $H = H_n$

$$\ln D_{H/H_0}(z) = \sum_{m=1}^n \ln D_{H_m/H_{m-1}}(z). \quad (12)$$

Применим к каждому слагаемому в правой части представление (4), уже доказанное для одномерного возмущения. Обозначим соответствующие ФСС через $\xi^{(m)}$ и положим

$$\xi(\lambda) = \xi_n(\lambda) = \sum_{m=1}^n \xi^{(m)}(\lambda), \quad \xi^{(m)} = \xi(H_m, H_{m-1}). \quad (13)$$

Тогда из равенства (12) следует, что для $\ln D_{H/H_0}(z)$ также справедливо представление (4) с ФСС (13). Из (13) ясно, что $-k_- \leq \xi(\lambda) \leq k_+$, а представление (7) для $\text{Tr } V_n$ получается сложением соответствующих «одномерных» равенств. Кроме того, поскольку $\|\xi^{(m)}\|_{L_1} = |\gamma_m|$, то

$$\|\xi_n\|_{L_1} \leq \sum_{m=1}^n \|\xi^{(m)}\|_{L_1} = \|V_n\|_1, \quad (14)$$

что доказывает (6).

3-й этап. Пусть теперь V — произвольный ядерный оператор, представленный рядом (11) с $m = \infty$. Определим ФСС $\xi = \xi(H, H_0)$ бесконечным рядом:

$$\xi(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \xi^{(m)}(\lambda), \quad \xi^{(m)} = \xi(H_m, H_{m-1}). \quad (15)$$

Согласно (14) этот ряд сходится абсолютно в L_1 , причем для функции (15) выполняется неравенство (6). Отсюда следует, что (15) сходится абсолютно и для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Для доказательства представления (4) устроим предельный переход при $n \rightarrow \infty$ в представлении (4) для $\ln D_{H_n/H_0}(z)$. В силу непрерывности определителя в $\mathfrak{S}_1$ при $\|V_n - V\|_1 \rightarrow 0$ выполнено условие $D_{H_n/H_0}(z) \rightarrow D_{H/H_0}(z)$. В правой части (4) интеграл от $\xi_n(\lambda)(\lambda - z)^{-1}$ сходится к интегралу от $\xi(\lambda)(\lambda - z)^{-1}$,

так как по построению $\|\xi_n - \xi\|_{L_1} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Равенство (7) для $\text{Tr } V$ также получается предельным переходом из аналогичного равенства для $\text{Tr } V_n$.

Пусть, наконец, в разложении вида (11) для оператора V лишь k_+ из чисел γ_m положительны. Тогда, как показано на 1-м этапе, в ряде (15) все функции $\xi^{(m)}$ неположительны, кроме k_+ слагаемых, не превосходящих 1 каждое. Отсюда, разумеется, вытекает, что и сумма почти везде сходящегося ряда (15) не превосходит k_+ , т.е. $\xi(\lambda) \leq k_+$. •

Замечание 2. В условиях теоремы 1 для ФСС справедливо представление (15) в виде ряда, составленного из ФСС для одномерных возмущений. Этот ряд сходится абсолютно в $L_1(\mathbb{R})$, а потому и абсолютно для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Замечание 3. Из представления (4) ФСС ξ находится однозначно. Этим, в частности, фиксируется постоянная, с точностью до которой ФСС определяется формулой следа (1), рассматриваемой на классе $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Равносильная нормировка получается вследствие требования $\xi \in L_1(\mathbb{R})$, которое выполняется автоматически, если ξ определена равенством (5).

Замечание 4. Из теоремы 1.2.5 вытекает, что у интеграла (4) существуют граничные значения при $z \rightarrow \lambda \pm i0$ для п.в. λ . Поэтому весь определитель возмущения $D(\lambda \pm i\epsilon)$ (а не только аргумент) имеет предел при $\epsilon \rightarrow 0$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$, причем этот предел не может равняться нулю на множестве положительной меры.

3. Продолжим изучение свойств ФСС. Для нее справедлива «теорема сложения».

Предложение 5. При $H_1 - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $H - H_1 \in \mathfrak{S}_1$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\xi(\lambda; H, H_1) + \xi(\lambda; H_1, H_0) = \xi(\lambda; H, H_0); \quad (16)$$

в частности

$$\xi(\lambda; H, H_0) = -\xi(\lambda; H_0, H).$$

○ Достаточно сложить представления (4) для $\ln D_{H_1/H_0}(z)$ и $\ln D_{H/H_1}(z)$ и применить теорему умножения определителей возмущения (1.2.). Кроме того, надо учесть (см. замечание 3) единственность ξ . •

Сравнивая (16) с оценкой (6), установим непрерывность ФСС в $L_1(\mathbb{R})$ при изменении операторных аргументов в $\mathfrak{S}_1$. Точнее, имеет место

Предложение 6. При $H_1 - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ справедливо неравенство

$$\|\xi(H, H_0) - \xi(H_1, H_0)\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|H - H_1\|_1.$$

В силу предложения 5 отсюда уже вытекает непрерывность ФСС по совокупности переменных, причем

$$\|\xi(H, H_0) - \xi(H_1, H_{0,1})\|_{L_1(\mathbb{R})} \leq \|H - H_1\|_1 + \|H_0 - H_{0,1}\|_1.$$

Аналогичным образом, сравнивая (16) с последним утверждением теоремы 1, получим

Предложение 7. При $H_1 - H_0 \in \mathfrak{S}_1$, $H - H_1 \in \mathfrak{S}_1$ и $H \geq H_1$ для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\xi(\lambda; H, H_0) \geq \xi(\lambda; H_1, H_0). \quad (17)$$

Обсудим теперь поведение ФСС как функции от λ «на дискретном спектре».

Предложение 8. На составляющих интервалах множества $\rho_0 \cap \rho$ общих регулярных точек операторов H_0 и H ФСС $\xi(\lambda)$ принимает постоянные целочисленные значения. Если λ_1 — изолированное собственное число конечной кратности k_0 оператора H_0 и k оператора H , то

$$\xi(\lambda_1 + 0) - \xi(\lambda_1 - 0) = k_0 - k. \quad (18)$$

○ При $\lambda = \bar{\lambda} \in \rho_0 \cap \rho$ определитель возмущения $D(\lambda)$ веществен и не равен нулю. Поэтому значения функции (5) на $\rho_0 \cap \rho$ целочисленны. Кроме того, на каждом из составляющих интервалов открытого множества $\rho_0 \cap \rho$ функция $D(\lambda)$ непрерывна. Тем самым на этих интервалах ФСС $\xi(\lambda)$ также непрерывна, а следовательно, и постоянна. Вычислим теперь скачок $\xi(\lambda)$ при переходе через λ_1 . Согласно свойству 4⁰ § 1 определитель возмущения $D(z)$ имеет в точке λ_1 полюс (или нуль) порядка $k_0 - k$ (соответственно $k - k_0$). Для доказательства (18) нужно лишь применить принцип аргумента и учесть симметрию $D(\bar{z}) = \overline{D(z)}$. •

Предположим, что в некотором интервале (β_1, β_2) спектр σ_0 оператора H_0 дискретен. Тогда в силу теоремы Г. Вейля при $V \in \mathfrak{S}_\infty$ спектр σ оператора H обладает тем же свойством. Впрочем, при $V \in \mathfrak{S}_1$ этот результат вытекает и из свойств (см. п. 1 § 1) функции $D(z)$. Согласно (18) для любых точек $\alpha_1, \alpha_2 \in (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_j \notin \sigma_0 \cup \sigma$, $\alpha_1 < \alpha_2$,

$$\xi(\alpha_2) - \xi(\alpha_1) = \dim E_0((\alpha_1, \alpha_2))\mathcal{H} - \dim E((\alpha_1, \alpha_2))\mathcal{H}. \quad (19)$$

Правая часть здесь равна $\text{Tr}[E_0((\alpha_1, \alpha_2)) - E((\alpha_1, \alpha_2))]$, что оправдывает эвристическую формулу (2) на дискретном спектре. В общем случае можно считать, что левая часть (19) дает «правильную регуляризацию» этого следа.

Если оператор H_0 полуограничен снизу, то $\|VR_0(z)\|_1 \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ в любом секторе $\arg z \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0)$, $\theta_0 > 0$. Поэтому $D(z) \rightarrow 1$ и $\arg D(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$ в таких секторах. Согласно (5) отсюда вытекает, что $\xi(\lambda) = 0$ при достаточно больших по модулю отрицательных λ . Пусть теперь спектр H_0 дискретен левее какой-либо точки β_0 . Тогда при $\lambda < \beta_0$ соотношение (19) определяет саму ФСС:

$$\xi(\lambda) = \dim E_0((-\infty, \lambda))\mathcal{H} - \dim E((-\infty, \lambda))\mathcal{H}, \quad \lambda \notin \sigma_0 \cup \sigma, \quad (20)$$

а не только ее приращение. Аналогичное представление для ФСС справедливо и для полуограниченных сверху операторов H_0 . Если H_0 ограничен, то и ФСС равна нулю при достаточно больших $|\lambda|$.

§ 3. ФОРМУЛА СЛЕДА М.Г.КРЕЙНА

В этом параграфе формула следа (2.1) устанавливается при $V \in \mathfrak{S}_1$. Функция спектрального сдвига определяется при этом равенством (2.5).

1. Для корректного понимания соотношения (2.1) требуется, чтобы

$$f(H) - f(H_0) \in \mathfrak{S}_1. \quad (1)$$

Поэтому проверка включения (1) является составным элементом доказательства формулы следа.

Отметим предварительно, что формула (2.1) тривиально выполняется при $f(\lambda) = 1$, а равенство (2.7) можно рассматривать как формулу следа при $f(\lambda) = \lambda$.

Для распространения (2.1) на достаточно произвольные функции будем исходить из представления (2.4) для логарифма определителя возмущения. Прежде всего проверим (2.1) в частном случае $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-n}$, $\text{Im } z \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$\text{Tr}[R_0(z) - R(z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)(\lambda - z)^{-2} d\lambda, \quad \text{Im } z \neq 0, \quad (2)$$

и, вообще,

$$\operatorname{Tr}[R_0^n(z) - R^n(z)] = n \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)(\lambda - z)^{-n-1} d\lambda, \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad n \geq 1. \quad (3)$$

○ Дифференцируя (2.4) и пользуясь равенством (1.4), получим (2). Дифференцирование под знаком интеграла в (2.4), конечно, законно, так как $\xi \in L_1(\mathbb{R})$. Дальнейшие дифференцирования (2) приводят к (3). Здесь учитывается, что в силу резольвентного тождества все производные $R_0(z) - R(z)$ существуют в $\mathfrak{S}_1$. •

Следующий класс функций, для которых проверяется (2.1), образуется экспонентами $f(\lambda) = \exp(-i\lambda t)$, t —вещественный параметр, когда $f(H) = U(t)$.

Лемма 2 При $f(\lambda) = \exp(-i\lambda t)$ справедливо включение (1) и имеет место формула следа (2.1). Кроме того,

$$\|U(t) - U_0(t)\|_1 \leq |t| \|V\|_1. \quad (4)$$

○ Включение (1) и оценка (4) немедленно следуют из очевидного равенства

$$U(t) - U_0(t) = -iU(t) \int_0^t U^*(s) V U_0(s) ds.$$

Согласно представлению резольвенты (1.4.4)

$$-i(R(\mu + i\varepsilon) - R_0(\mu + i\varepsilon)) = \int_0^\infty (U(t) - U_0(t)) e^{i\mu t - \varepsilon t} dt, \quad \varepsilon > 0,$$

причем в силу (4) интеграл здесь сходится в ядерной норме. Возьмем след от обеих частей этого равенства и учтем, что функция $e^{-\varepsilon t} \operatorname{Tr}(U(t) - U_0(t))$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. По формуле обращения интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(U(t) - U_0(t)) &= \\ &= (2\pi i)^{-1} e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Tr}(R(\mu + i\varepsilon) - R_0(\mu + i\varepsilon)) e^{-i\mu t} d\mu, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Подставим теперь в правую часть выражение (2) и учтем, что при условии $\xi \in L_1(\mathbb{R})$ интегралы по λ и μ сходятся абсолютно.

Следовательно, на основании теоремы Фубини порядок интегрирований можно переставить так, что

$$\begin{aligned} \text{Tr}(U(t) - U_0(t)) &= \\ &= -(2\pi i)^{-1} e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \xi(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{-i\mu t} (\lambda - \mu - i\varepsilon)^{-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

По теореме Коши о вычетах интеграл по μ здесь равен $-2\pi t e^{-\varepsilon t - i\lambda t}$. Поэтому равенство (5) приводит к формуле следа (2.1) для $f(\lambda) = \exp(-i\lambda t)$, $t > 0$. Случай отрицательных t отвечает сопряженному соотношению. •

Из леммы 2 вытекает, что формула следа (2.1) верна для линейных комбинаций экспонент $\exp(-i\lambda t_n)$. Теперь замыканием в подходящей метрике формулу (2.1) можно распространить на достаточно произвольные функции f . При этом нужно, конечно, позаботиться о выполнении включения (1). Для сходимости интеграла в правой части (2.1) при $\xi \in L_1(\mathbb{R})$ естественно считать, что $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$. Известно, однако (см. [80]), что при $H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ последнее условие включения (1) еще не обеспечивает. Поэтому для доказательства (2.1) требуются большие ограничения на f .

Теорема 3. Пусть $V \in \mathfrak{S}_1$, функция f непрерывно дифференцируема, а ее производная допускает представление

$$f'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\lambda t) dm(t), \quad |m|(\mathbb{R}) < \infty, \quad (6)$$

с конечной (комплексной) мерой m . Тогда справедливо включение (1) и для ФСС (2.5) имеет место формула следа (2.1).

○ Из (6) вытекает, что

$$f(\lambda) = f_0 - \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-i\lambda t) - 1)(it)^{-1} dm(t), \quad f_0 = \text{const},$$

и, следовательно, по спектральной теореме

$$f(H) - f(H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (U_0(t) - U(t))(it)^{-1} dm(t). \quad (7)$$

В силу (4) интеграл здесь сходится в ядерной норме, так что справедливо включение (1). Возьмем теперь след от обеих частей (7) и заменим его выражением по формуле (2.1). Это дает равенство

$$\mathrm{Tr}[f(H) - f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} dm(t) \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) \exp(-i\lambda t) d\lambda.$$

На основании теоремы Фубини порядок абсолютно сходящихся интегралов можно переставить. Согласно представлению (6) для f' отсюда вытекает формула (2.1). •

Отметим, что при условии (6) справедлива оценка

$$\|f(H) - f(H_0)\|_1 \leq C \|H - H_0\|_1, \quad C = |m|(\mathbb{R}). \quad (8)$$

Запас функций f , даваемый теоремой 3, достаточно велик. Во всяком случае он содержит класс Шварца $S(\mathbb{R})$ и тем более $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Ясно также, что функция f' удовлетворяет (6), коль скоро f' принадлежит классу Соболева $\mathcal{W}_2^\alpha(\mathbb{R})$ при $2\alpha > 1$. Для таких f' мера m в (6) абсолютно непрерывна и производная dm/dt квадратично интегрируема с весом $(1 + |t|)^{2\alpha}$, а потому и суммируема. Тем самым локально (т.е. на любом ограниченном интервале) заведомо достаточно, чтобы функция f имела две ограниченные производные.

Убывания f на бесконечности условие (6) не требует. Так, представление (6) выполняется для любой периодической функции f' , если ряд из ее коэффициентов Фурье абсолютно сходится. В частности, можно положить $f(\lambda) = \lambda$. Вообще на бесконечности допускается рост, не превосходящий линейного. Например, годятся функции $f(\lambda)$, равные при достаточно больших λ произведению $\lambda^\alpha \ln^\beta \lambda$, где $\alpha < 1$, а β — произвольно. Для такой функции мера m в (6) абсолютно непрерывна, а производная dm/dt имеет при $t \rightarrow 0$ особенность, которая оказывается интегрируемой.

2. В этом пункте, не предполагая ядерности V , обсудим свойства ФСС, вытекающие из справедливости формулы следа. Будем считать, что при любой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ выполняется включение (1) и при некоторой функции $\xi \in L_1^{(\mathrm{loc})}(\mathbb{R})$ имеет место соотношение (2.1). Такая функция ξ фиксируется с точностью до произвольной постоянной. Если к тому же (1) и (2.1) верны хотя бы для одной функции f , у которой пределы на $+\infty$ или

$-\infty$ не существуют, либо существуют, но $f(+\infty) \neq f(-\infty)$, то ξ определяется однозначно.

Выполнение (2.1) для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ накладывает и другие ограничения на ξ . Так, ФСС ξ должна быть постоянной на каждом из составляющих интервалов Λ_n множества $\rho_0 \cap \rho$. Действительно, при $f \in C_0^\infty(\Lambda_n)$ операторы $f(H_0) = f(H) = 0$. Тем самым левая, а потому и правая, части (2.1) равны нулю. Равенство $\xi(\lambda) = \xi_n$ при $\lambda \in \Lambda_n$ следует теперь из леммы Дюбуа—Реймонда. Далее, если операторы H_0 и H ограничены, то значения ξ левее $\beta_1 = \inf\{\sigma_0 \cup \sigma\}$ и правее $\beta_2 = \sup\{\sigma_0 \cup \sigma\}$ обязательно совпадают. В этом легко убедиться, рассматривая $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, равную постоянной f_0 при $\lambda \in [\beta_1, \beta_2]$. Полагая $\xi(\lambda) = \xi_-$, $\lambda < \beta_1$, и $\xi(\lambda) = \xi_+$, $\lambda > \beta_2$, найдем, что правая часть (2.1) равна $(\xi_- - \xi_+)f_0$. Поскольку левая часть (2.1) равна нулю, а f_0 произвольно, это означает, что $\xi_+ = \xi_-$. В полуограниченном случае, когда $\beta_1 > -\infty$, мы всегда считаем, что $\xi_- = 0$.

При улучшении свойств функции ξ интеграл в правой части (2.1) сохраняет смысл и без условия $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$. Например, если на каком-либо сегменте ФСС ξ непрерывна, то достаточно считать, что функция f имеет там ограниченную вариацию. В частности, если конечный промежуток $\Lambda = [\alpha_1, \alpha_2]$ не пересекается с $\sigma_0 \cup \sigma$, то

$$\int_{\Lambda} \xi(\lambda) df(\lambda) = \xi_0[f(\alpha_2) - f(\alpha_1)], \quad (9)$$

где ξ_0 —постоянное значение $\xi(\lambda)$ на Λ .

Это равенство позволяет распространить определение интеграла (2.1) на функции, заданные и достаточно гладкие лишь в окрестности объединения спектров операторов H_0 и H . Будем считать, что множество $\sigma_0 \cup \sigma$ покрыто конечным набором $\Omega = \cup \Omega_n$ непересекающихся интервалов, один или два из которых, возможно, бесконечны, $\Omega_n, n = 1, \dots, N$. Для любой непрерывной на Ω функции f интеграл (2.1) по $\mathbb{R} \setminus \Omega$ определяем равенством (9). При этом, если промежуток $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \Omega$ бесконечен, то можно положить $\xi(\lambda) = 0$ при $\lambda \in \Lambda$ и, следовательно, такой интеграл (9) равен нулю. Другими словами,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) df(\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\tilde{f}(\lambda), \quad (10)$$

где $\tilde{f}$ —какое-либо продолжение f на всю ось, имеющее локально ограниченную вариацию. В частности, можно считать, что $\tilde{f}(\lambda) = 0$ для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Omega$.

Левая часть (2.1) определяется только значениями f в точках спектров σ_0 и σ . При принятом определении интеграла в правой части (2.1) само равенство (2.1) также распространяется на функции, определенные лишь на Ω . Именно, справедлива

Лемма 4. Пусть f задана на Ω и для какого-либо ее продолжения на всю ось выполняется (2.1). Тогда формула следа (2.1) верна и для самой f .

○ Достаточно воспользоваться формулой следа для $\tilde{f}$ и учесть равенство (10). •

Покажем, наконец, что формулу следа (2.1) достаточно проверять для функций f , заданных лишь на Ω . Мы ограничиваемся рассмотрением функций класса C_0^∞ . Следующее утверждение в определенном смысле противоположно лемме 4.

Лемма 5. Пусть при некоторой $\xi_\Omega \in L_1^{(\text{loc})}(\Omega)$ формула следа (2.1) справедлива для всех $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда найдется такая функция $\xi \in L_1^{(\text{loc})}(\mathbb{R})$, что формула следа выполняется для любой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

○ Прежде всего с помощью леммы Дюбуа—Реймонда убедимся, что ξ_Ω постоянна в окрестностях концов Ω_n . Далее заметим, что на каждом из интервалов Ω_n к ξ_Ω можно добавить свою постоянную, не нарушая при этом (2.1) для $f \in C_0^\infty(\Omega)$. При подходящем выборе этих постоянных можно добиться того, что для каждой пары соседних интервалов Ω_n и Ω_{n+1} значения ξ_Ω на обращенных друг к другу концах равны между собой. Продолжим в промежуток между Ω_n и Ω_{n+1} функцию ξ_Ω этой общей постоянной. Построенная таким образом функция ξ постоянна на составляющих интервалах множества $\rho_0 \cap \rho$. Для нее формула (2.1) верна уже при любой $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Действительно, f можно разложить в сумму $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, а $f_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и f_2 отлична от нуля лишь на интервалах постоянства функций ξ . Для f_1 формула (2.1) верна по предположению, а для f_2 очевидно, что обе части (2.1) равны нулю. •

3. Вернемся к рассмотрению ядерных возмущений. Следующее утверждение получается сопоставлением теоремы 3 и леммы 4.

Теорема 6. Пусть f задана на Ω и допускает какое-либо продолжение на $\mathbb{R}$ до функции, удовлетворяющей условиям теоремы 3. Тогда при $V \in \mathfrak{S}_1$ имеет место формула следа (2.1).

Теорема 6 показывает, что вне спектров допустимые функции f могут иметь произвольные сингулярности. Если $\inf \Omega > -\infty$ (или $\sup \Omega < \infty$), то поведение f при $\lambda \rightarrow -\infty$ (при $\lambda \rightarrow +\infty$) также остается произвольным.

Что касается гладкости (локальной) на Ω , то в условиях теоремы 6 функция f с необходимостью непрерывно дифференцируема. Как уже отмечалось в п. 1, существования двух ограниченных производных достаточно для справедливости (2.1). Ослабление последнего требования оказывается содержательной задачей.

Эта задача рассматривалась М.Ш.Бирманом и М.З.Соломяком в [45, 46] и В.В.Пеллером в [72]. Основным элементом при распространении (2.1) на более широкий (по сравнению с теоремой 3) класс функций состоит в проверке для этого класса включения (1). Достаточные, но близкие к необходимым, условия справедливости включения (1) и неравенства (8) были найдены в [72] в терминах принадлежности f некоторому классу Бесова B (точную формулировку для унитарных операторов см. в § 5). Распространение (2.1) на класс B получается подходящей аппроксимацией f гладкими и финитными (или хотя бы удовлетворяющими условиями теоремы 3) функциями f_n .

Несколько иной подход к построению ФСС, расширяющий, в частности, запас допустимых функций, был предложен в работе М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [46]. Этот подход основан на рассмотрении семейства операторов $H_s = H_0 + sV$, $s \in [0, 1]$, и их спектральных мер $E_s = E_{H_s}$. В [45, 46] было показано, что для некоторого достаточно широкого класса функций f в ядерной норме существует непрерывная производная, представимая в виде двойного операторного интеграла (см. § 6.8):

$$\frac{df(H_s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} dE_s(\mu) V dE_s(\lambda).$$

Кроме того,

$$\text{Tr} \frac{df(H_s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(\lambda) d \text{Tr}(E_s(\lambda) V).$$

Интегрируя последнее равенство по $s \in [0, 1]$, для $\text{Tr}[f(H) - f(H_0)]$ получим представление вида (2.1), где, однако, роль $\xi(\lambda)d\lambda$ играет мера $d\Xi(\lambda)$:

$$\Xi(X) = \int_0^1 \text{Tr}(E_s(X) V) ds. \quad (11)$$

Ее абсолютная непрерывность может быть установлена с помощью теоремы 1. Именно, сравнивая два представления $\text{Tr}(U(t) - U_0(t))$ по те-

ореме единственности для интегралов Фурье—Стилтьеса, найдем, что $d\Xi(\lambda) = \xi(\lambda)d\lambda$. При этом (11) дает новое выражение для ФСС.

Отметим еще, что классы, рассматриваемые в [45, 46] и [72], включают функции f , для которых производные f' удовлетворяют условию Гельдера (равномерно на всей оси) с каким-либо положительным показателем и $f' \in L_p(\mathbb{R})$ для какого-либо $p \in [1, \infty)$.

Такие условия справедливости включения (1) и формулы следа (2.1) весьма удобны для проверки. Однако указанный сейчас набор функций не покрывает набора функций из теоремы 3 и не покрывается им.

§ 4. СВЯЗЬ С МАТРИЦЕЙ РАССЕЯНИЯ. ФОРМУЛА БИРМАНА—КРЕЙНА

1. Основной в этом параграфе является

Теорема 1. При $V \in \mathfrak{S}_1$ справедливо соотношение (2.3).

Мы приведем два доказательства этой теоремы. Первое из них, как и доказательство теоремы 2.1, следует «шаговому» методу.

○ Для одномерного возмущения $V = \gamma(\cdot, v)v$, $\|v\| = 1$, матрица рассеяния была в § 6.7 вычислена явно. Именно, в силу равенств (6.7.9), (6.7.10)

$$\begin{aligned} \text{Det } S(\lambda) &= 1 - 2\pi i \gamma D^{-1}(\lambda + i0) |\tilde{v}(\lambda)|^2 = \\ &= D^{-1}(\lambda + i0) D(\lambda - i0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $D(z)$ определяется соотношением (6.7.2) и, следовательно, совпадает с (2.8). Равенства (1.11) и (2.5) показывают, что правая часть (1) есть $\exp(-2\pi i \xi(\lambda))$.

Конечномерное возмущение $V = V_n$ разложим в сумму одномерных операторов $\gamma_l(\cdot, v_l)v_l$, $l = 1, \dots, n$, и воспользуемся обозначением (2.11). Тогда ФСС представляется суммой (2.13). С другой стороны, в силу равенства (7.1.5)₊

$$S(\lambda; H, H_0) = \tilde{S}(\lambda; H, H_{n-1}) \cdots \tilde{S}(\lambda; H_2, H_1) S(\lambda; H_1, H_0), \quad (2)$$

где операторы $\tilde{S}(\lambda, H_m, H_{m-1})$ унитарно эквивалентны (реализация этой эквивалентности зависит от m) матрицам рассеяния $S(\lambda; H_m, H_{m-1})$. Отсюда вытекает, что

$$\text{Det } S(\lambda; H, H_0) = \prod_{m=1}^n \text{Det } S(\lambda; H_m, H_{m-1}).$$

Поэтому соотношение (2.3) для конечномерного случая получается перемножением таких соотношений для одномерных возмущений.

Произвольный оператор $V \in \mathfrak{S}_1$ аппроксимируем в ядерной норме конечномерными операторами V_n . Согласно замечанию 2.2 при $n \rightarrow \infty$ и п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ для ФСС выполнено условие $\xi(\lambda; H_n, H_0) \rightarrow \xi(\lambda; H, H_0)$. Сходимость матриц рассеяния

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} |S(\lambda; H_{n_k}, H_0) - S(\lambda; H, H_0)|_1 = 0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

по некоторой последовательности $\{n_k\}$ вытекает из предложения 7.6.7 (см. соотношение (7.6.9)). Из (3) следует, что

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \text{Det } S(\lambda; H_{n_k}, H_0) = \text{Det } S(\lambda; H, H_0).$$

Тем самым, переходя в равенстве (2.3) для пары $H_0, H_0 + V_{n_k}$ к пределу при $n_k \rightarrow \infty$, получим его для пары $H_0, H_0 + V$. •

Отметим, что в действительности в (3) сходимость имеет место по всем n , а не только по какой-то подпоследовательности $n_k \rightarrow \infty$. Для доказательства заметим, что в силу унитарности операторов $\tilde{S}(\lambda; H_m, H_{m-1})$ из (2) вытекает (ср. с предложением 7.1.3) оценка

$$\begin{aligned} |S(\lambda; H_n, H_0) - S(\lambda; H_k, H_0)|_1 &= \\ &= |\tilde{S}(\lambda; H_n, H_{n-1}) \cdots \tilde{S}(\lambda; H_{k+1}, H_k) - I|_1 \leq \\ &\leq \sum_{m=k+1}^n |\tilde{S}(\lambda; H_m, H_{m-1}) - I|_1, \quad n > k. \end{aligned} \quad (4)$$

Далее, в силу соотношения (2.3) для одномерного возмущения

$$\begin{aligned} |S(\lambda; H_m, H_{m-1}) - I|_1 &= |e^{-2\pi i \xi(\lambda; H_m, H_{m-1})} - 1| \leq \\ &\leq 2\pi |\xi(\lambda; H_m, H_{m-1})|. \end{aligned}$$

Сравнивая это неравенство с (4) и учитывая унитарную эквивалентность операторов $\tilde{S}(\lambda; H_m, H_{m-1})$ и $S(\lambda; H_m, H_{m-1})$, найдем, что

$$|S(\lambda; H_n, H_0) - S(\lambda; H_k, H_0)|_1 \leq 2\pi \sum_{m=k+1}^n |\xi(\lambda; H_m, H_{m-1})|. \quad (5)$$

Поскольку согласно замечанию 2.2 ряд из $\xi(\lambda; H_m, H_{m-1})$ для п.в. λ абсолютно сходится, из неравенства (5) следует, что и последовательность $S(\lambda; H_n, H_0)$ при $n \rightarrow \infty$ имеет для п.в. λ предел в $\mathfrak{S}_1$.

○ Второе доказательство теоремы 1 основано на тождестве

$$\text{Det}[I - (V - VR(z)V)(R_0(z) - R_0(\bar{z}))] = D^{-1}(z)D(\bar{z}), \quad (6)$$

вытекающем при $z' = z$ из (1.6). Перейдем в (6) к пределу при $z = \lambda + i\epsilon$, $\epsilon \rightarrow 0$. Согласно (1.11) и (2.5) правая часть (6) равна

$\exp[-2i \arg D(z)]$ и ее предел равен $\exp[-2\pi i \xi(\lambda)]$. Остается убедиться, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Det}[I - (V - VR(z)V)(R_0(z) - R_0(\bar{z}))] = \\ = \text{Det } S(\lambda), \quad z = \lambda + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть $V = G^*G_0$, где G_0 и G — операторы Гильберта—Шмидта. В силу свойства (1.7.11) детерминант в левой части (7) равен

$$\text{Det}[I - (I - G_0R(z)G^*)G_0(R_0(z) - R_0(\bar{z}))G^*].$$

Согласно теореме 6.1.9 и следствию 6.1.10 оператор $\tilde{B}(\lambda + i\varepsilon) = G_0R(\lambda + i\varepsilon)G^*$ имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ и п.в. λ предел по норме $\mathfrak{S}_2$. Аналогично согласно теореме 6.1.5 и следствию 6.1.6 по норме $\mathfrak{S}_1$ существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_0(R_0(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda - i\varepsilon))G^* = 2\pi i Z_0^*(\lambda; G_0)Z_0(\lambda; G), \quad \text{п.в. } \lambda,$$

причем само это равенство вытекает из (1.5.7).

Напомним (см. п. 1 § 7.5), что операторы $Z_0(\lambda; G_0)$ и $Z_0(\lambda; G)$ действуют из $\mathcal{H}$ в $\mathfrak{h}_0(\lambda)$ и принадлежат классу Гильберта—Шмидта. Таким образом, в силу непрерывной зависимости $\text{Det}(I + A)$ от A при изменении A в норме $\mathfrak{S}_1$ вытекает, что предел в левой части (7) равен

$$\text{Det}[I - 2\pi i(I - \tilde{B}(\lambda + i0))Z_0^*(\lambda; G_0)Z_0(\lambda; G)].$$

Пользуясь опять свойством (1.7.11), перепишем этот определитель в виде

$$\text{Det}[I - 2\pi i Z_0(\lambda; G)(I - \tilde{B}(\lambda + i0))Z_0^*(\lambda; G_0)].$$

Согласно представлению (5.5.7) оператор под знаком последнего определителя равен $S(\lambda)$. •

Подчеркнем еще раз, что ФСС учитывает полные спектры операторов H_0 и H , а матрицу рассеяния можно вычислить непосредственно через $H_0^{(a)}$ и $H^{(a)}$. Вместе с тем соотношение (2.3) не противоречиво, поскольку, например, на дискретном спектре изменение ξ сводится согласно (2.18) лишь к целочисленным скачкам.

Соотношение (2.3) позволяет связать результаты о поведении детерминанта матрицы рассеяния и ФСС для знакоопределенных возмущений. Именно, рассмотрим семейство гамильтонианов $H(\gamma) = H_1 + \gamma V$ при $H_1 - H_0 \in \mathfrak{S}_1$, $V \in \mathfrak{S}_1$ и $V \geq 0$ или $V \leq 0$. В силу теоремы 7.8.9 при увеличении γ точка

$\text{Det } S(\lambda; H(\gamma), H_0) \in \mathbb{T}$ для п.в. λ движется по (против) часовой стрелке, если $V \geq 0$ (если $V \leq 0$). В силу предложения 2.7 ФСС $\xi(\lambda; H(\gamma), H_0)$ возрастает при $V \geq 0$ и убывает при $V \leq 0$. Соотношение (2.3) показывает, что эти два результата эквивалентны друг другу.

2. В приложениях формулу (2.3) часто устанавливают в «продифференцированном» виде. Именно, логарифмируя (2.3) и дифференцируя формально обе части по λ , найдем, что

$$\text{Tr } S^*(\lambda)S'(\lambda) = -2\pi i \xi'(\lambda). \quad (8)$$

В то же время из (1.4) вытекает, что

$$\frac{d}{d\lambda} \arg D(\lambda + i\varepsilon) = \text{Im Tr}(R_0(\lambda + i\varepsilon) - R(\lambda + i\varepsilon)).$$

Сравнивая это равенство с (2.5) и (8), придем к соотношению

$$\begin{aligned} \text{Tr } S^*(\lambda)S'(\lambda) &= 2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im Tr}(R(\lambda + i\varepsilon) - R_0(\lambda + i\varepsilon)) = \\ &= 2\pi i \frac{d}{d\lambda} \text{Tr}(E(\lambda) - E_0(\lambda)). \end{aligned} \quad (9)$$

Поясним, что обратный переход от (9) к (2.3) не верен даже формально. Это связано с тем, что при интегрировании (8) функция $\xi(\lambda)$ восстанавливается лишь с точностью до постоянной.

Оправдание (9) требует существенных дополнительных предположений типа «гладкости». Более того, уже дифференцирование $S(\lambda)$ по λ предполагает, что выбрано отождествление пространств $\mathfrak{h}_0(\lambda)$ в прямом интеграле (2.4.2). Вместе с тем в приложениях к дифференциальным операторам и в модели Фридрихса—Фаддеева обычно реализуют (см. работы В.С.Буслаева и Л.Д.Фаддеева [54] и В.С.Буслаева [52, 53]) именно соотношение (9), а не (2.3). При этом (9) доказывают при всех (а не только при п.в.) λ и, за исключением отдельных особых точек, обе части (9) оказываются непрерывными по λ .

§ 5. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА В УНИТАРНОМ СЛУЧАЕ

В этом и следующем параграфах разработанная в §§ 2–4 теория переносится на унитарные операторы.

1. Пусть U_0, U — унитарные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Формулой следа для пары U_0, U и дифференцируемой функции g на единичной окружности $\mathbb{T}$ называется соотношение

$$\mathrm{Tr}(g(U) - g(U_0)) = \int_{\mathbb{T}} \eta(\mu) dg(\mu), \quad \eta \in L_1(\mathbb{T}). \quad (1)$$

вполне аналогичное (2.1). Мы везде считаем, что единичная окружность $\mathbb{T}$ и каждая ее дуга (μ_1, μ_2) проходятся против часовой стрелки. Вещественная функция $\eta(\mu) = \eta(\mu; U, U_0)$ называется *функцией спектрального сдвига для пары U_0, U* . Иногда формулу (1) преобразуют заменой переменной $\mu = e^{it}$, $t \in (-\pi, \pi]$, и функцию $\tilde{\eta}(t) = \eta(e^{it})$ также называют ФСС.

При принятом всюду в этом параграфе условии $V = U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ построение ФСС можно провести в существенном так же, как и в § 2. Одно из отличий состоит в том, что в унитарном случае ФСС становится многозначной. В самом деле, соотношением (1), где g — произвольная функция из класса $C^\infty(\mathbb{T})$, ФСС η определяется с точностью до произвольного слагаемого. В самосопряженном случае такая неоднозначность устранялась либо условием $\xi \in L_1(\mathbb{R})$, либо требованием справедливости представления (2.4) для $\ln D_{H/H_0}(z)$. Поскольку $1 \in L_1(\mathbb{T})$, условие $\eta \in L_1(\mathbb{T})$ константы не определяет.

Что касается представления вида (2.4) для определителя возмущения, то оно переносится на унитарный случай и имеет вид

$$\ln D_{U/U_0}(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \eta(\mu)(\mu - \zeta)^{-1} d\mu, \quad |\zeta| \neq 1. \quad (2)$$

Здесь, конечно, подразумеваются однозначные при $|\zeta| > 1$ и $|\zeta| < 1$ ветви аналитической функции $\ln D(\zeta)$, $D = D_{U/U_0}$. Такие ветви существуют, поскольку $D(\zeta)$ голоморфна и не равна нулю при $|\zeta| \neq 1$, и определяются заданием $\arg D(\zeta)$ в каких-либо точках $\zeta_1 (|\zeta_1| > 1)$ и $\zeta_2 (|\zeta_2| < 1)$. В самосопряженном случае соотношение (2.4) автоматически фиксирует ветви $\ln D(\zeta)$ в обеих полуплоскостях. В унитарном случае внешность и внутренность единичной окружности играют разную роль. Подобно § 2 в области $|\zeta| > 1$ представление (2) может выполняться лишь, если $\ln D(\zeta) \rightarrow 0$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Это определяет ветвь $\ln D(\zeta)$ при $|\zeta| > 1$, но не устраняет неоднозначность функции η , так как ее изменение на константу значения интеграла (2) при $|\zeta| > 1$ не меняет. Напротив, при $|\zeta| < 1$ заданием ветви $\ln D(\zeta)$ функция

η фиксируется однозначно. Однако представление (2) можно рассматривать для любой из ветвей $\ln D(\zeta)$. При этом, коль скоро (2) выполняется для какой-либо одной ветви $\ln D(\zeta)$, это представление оказывается справедливым и для любой другой ветви, если к η добавить подходящее целое число.

Таким образом, в унитарном случае ФСС определяется лишь с точностью до целочисленного слагаемого. Эта многозначность ФСС принципиально неустранима. Точнее, как мы увидим в следующем параграфе, попытка выделить однозначную ветвь $\eta(U, U_0)$ вступает в противоречие с непрерывностью $\eta(U, U_0)$ по U (или U_0).

2. В этом пункте мы установим представление (2) при некоторой вещественной функции $\eta \in L_1(\mathbb{T})$. Напомним, что в силу леммы 1.3 при $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ определитель возмущения $D(\zeta) = D_{U/U_0}(\zeta) \rightarrow 1$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и удовлетворяет соотношению симметрии (1.12). Ветвь $\ln D(\zeta)$ при $|\zeta| > 1$ зададим условием $\arg D(\zeta) \rightarrow 0$, $|\zeta| \rightarrow \infty$, а при $|\zeta| < 1$ ветвь $\ln D(\zeta)$ выберем произвольно. Для любой такой ветви

$$\ln D(\bar{\zeta}^{-1}) = \overline{\ln D(\zeta)} + \ln D(0). \quad (3)$$

В теории унитарных операторов возмущение естественно (см. § 1.11) вводить мультипликативно (слева или справа). Именно, наряду с V рассмотрим оператор $N = VU_0^{-1}$. Тогда мультипликативное (левое) возмущение $M = I + N = UU_0^{-1}$ является унитарным оператором. Поскольку к тому же $N \in \mathfrak{S}_1$, то по спектральной теореме для некоторой ортонормированной последовательности φ_m и $P_m = (\cdot, \varphi_m)\varphi_m$ справедливо разложение

$$N = \sum_{m=1}^{\infty} \tau_m P_m, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |\tau_m| = \|V\|_1 < \infty. \quad (4)$$

Спектр $1 + \tau_m = e^{i\theta_m}$ оператора M лежит на единичной окружности и может накапливаться только к точке 1. Положим

$$U_n = (I + \tau_n P_n)U_{n-1} = \left(I + \sum_{m=1}^n \tau_m P_m \right) U_0. \quad (5)$$

Из (4) следует, что $\|U_n - U\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для доказательства существования ФСС мы воспользуемся опять «шаговым» методом. При этом нам нужно обеспечить сходимость соответствующих рядов из $\eta(U_n, U_{n-1})$ в $L_1(\mathbb{T})$, что

требует правильной нормировки этих функций. Одна из возможных нормировок ФСС фиксируется условием

$$\int_{\mathbb{T}} \eta(\mu; U, U_0) \mu^{-1} d\mu = i \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m, \quad \theta_m \in (-\pi, \pi], \quad (6)$$

где $e^{i\theta_m}$ — собственные значения оператора UU_0^{-1} . При такой нормировке оказывается, что $\eta(U_0, U_0) = 0$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\eta(e^{it}; U, U_0)| dt \leq \sum_{m=1}^{\infty} |\theta_m|. \quad (7)$$

Поскольку $2|\theta_m| \leq \pi|\tau_m|$ при $\theta_m \in (-\pi, \pi]$, для $V \in \mathfrak{S}_1$ ряды в (6) и (7) сходятся.

Роль теоремы 2.1 в теории возмущений унитарных операторов играет следующее утверждение:

Теорема 1. При $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ имеет место представление (2), где

$$\eta(\mu) = \pi^{-1} \lim_{r \rightarrow 1-0} \arg D(r\mu) - (2\pi)^{-1} \arg D(0), \quad (8)$$

причем предел в (8) существует для п.в. $\mu \in \mathbb{T}$ и $\eta \in L_1(\mathbb{T})$. Если оператор UU_0^{-1} имеет лишь конечное число собственных значений на открытой верхней (нижней) полуокружности, то для п.в. $\mu \in \mathbb{T}$ функция η полуограничена сверху (снизу).

○ Заметим прежде всего, что в силу теоремы 1.2.11 из представления (2) с функцией $\eta = \bar{\eta} \in L_1(\mathbb{T})$ вытекает, что существует предел в правой части (8). Кроме того, согласно первой формуле обращения (1.2.15) и соотношению $|D(0)| = 1$ функция η восстанавливается равенством (8). Само представление (2) с $\eta = \bar{\eta} \in L_1(\mathbb{T})$ достаточно установить при $|\zeta| < 1$. Тогда, сравнивая равенства (1.2.14) и (3), найдем, что и при $|\zeta| > 1$ функция $\ln D(\zeta)$ совпадает с интегралом в правой части (2).

Доказательство (2) при $|\zeta| < 1$ начнем опять с рассмотрения одномерного возмущения $N = \tau(\cdot, \psi)\psi$, $\tau = e^{i\theta} - 1$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, $\|\psi\| = 1$, когда (ср. с (2.8))

$$D(\zeta) = \text{Det}[I + \tau(\cdot, U_0^* R_0(\bar{\zeta})\psi)\psi] = 1 + \tau(R_0(\zeta)U_0\psi, \psi), \\ R_0(\zeta) = (U_0 - \zeta)^{-1}.$$

Это равенство можно записать в виде

$$D(\zeta) = 1 + 2^{-1}\tau + 2^{-1}\tau\Psi(\zeta) = e^{i\theta/2}[\cos(\theta/2) + i\sin(\theta/2)\Psi(\zeta)],$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(\zeta) &= ((U_0 + \zeta)(U_0 - \zeta)^{-1}\psi, \psi), \\ \operatorname{Re} \Psi(\zeta) &= (1 - |\zeta|^2) \|(U_0 - \zeta)^{-1}\psi\|^2 > 0.\end{aligned}\quad (9)$$

Поскольку $D(0) = 1 + \tau = e^{i\theta}$, ветвь $\arg D(\zeta)$ можно фиксировать условием $\arg D(0) = \theta \in (-\pi, \pi]$. Убедимся, что функция $\arg D(\zeta)$ ограничена при $|\zeta| < 1$. Обозначим $\Phi(\zeta) = e^{-i\theta/2} D(\zeta)$. Для этой функции

$$\arg \Phi(\zeta) = \arg D(\zeta) - 2^{-1} \arg D(0), \quad \arg \Phi(0) = \theta/2 \quad (10)$$

и

$$\operatorname{Im} \Phi(\zeta) = \sin(\theta/2) \cdot \operatorname{Re} \Psi(\zeta).$$

В силу (9) $\operatorname{Im} \Phi(\zeta) > 0$ при $\theta \in (0, \pi]$, а потому в этом случае $0 < \arg \Phi(\zeta) < \pi$. Аналогично $\operatorname{Im} \Phi(\zeta) < 0$ и $-\pi < \arg \Phi(\zeta) < 0$ при $\theta \in (-\pi, 0)$. Теперь ограниченность $\arg D(\zeta)$ вытекает из соотношения (10). Таким образом, функция $\ln D(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям следствия 1.2.13. Поэтому при $|\zeta| < 1$ имеет место представление (2) с функцией η , определяемой равенством (8). Согласно (10), при принятой нормировке справедливы неравенства $0 \leq \eta(\mu) \leq 1$, если $\theta \in [0, \pi]$, и $-1 \leq \eta(\mu) \leq 0$, если $\theta \in (-\pi, 0)$. Наконец, при $\zeta = 0$ соотношение (2) показывает, что интеграл в левой части (6) равен $i\theta$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что интеграл в (7) равен $|\theta|$.

Для произвольного $V \in \mathfrak{S}_1$ рассмотрим разложение оператора N в ряд (4) и воспользуемся обозначением (5). Поскольку операторы U_m и U_{m-1} различаются на одномерный, то, как уже показано, для $\ln D_{U_m/U_{m-1}}(\zeta)$ справедливо представление (2) с ФСС $\eta^{(m)} = \eta(U_m, U_{m-1})$. По построению

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\eta^{(m)}(e^{it})| dt = \sum_{m=1}^{\infty} |\theta_m| \leq 2^{-1} \pi \|V\|_1 < \infty. \quad (11)$$

Положим

$$\eta(\mu) = \sum_{m=1}^{\infty} \eta^{(m)}(\mu). \quad (12)$$

Ввиду (11) это ряд сходится абсолютно в $L_1(\mathbb{T})$ и, следовательно, для п.в. $\mu \in \mathbb{T}$. Равенство (6) является следствием соответствующих равенств для каждой из функций $\eta^{(m)}$ в отдельности.

Убедимся, что для функции (12) выполняется соотношение (2), если ветвь $\ln D(\zeta)$ фиксировать условием

$$\arg D(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала определитель $D_n = D_{U_n/U_0}$, отвечающий конечномерному возмущению. В этом случае функция $\eta_n = \eta(U_n, U_0)$ состоит лишь из первых n слагаемых в (12). Согласно теореме умножения определителей (1.2) при условии (13) $\ln D_n(\zeta)$ есть сумма $\ln D_{U_m/U_{m-1}}(\zeta)$ по $m = 1, \dots, n$. Поэтому представление (2) для $\ln D_n$ получается прямым суммированием представлений для $\ln D_{U_m/U_{m-1}}$. В общем случае (2) устанавливается с помощью аппроксимации $\ln D(\zeta)$ функциями $\ln D_n(\zeta)$. Именно, $D_n(\zeta) \rightarrow D(\zeta)$ для любого $|\zeta| < 1$, так как $\|U_n - U\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поскольку, кроме того, согласно (13) $\arg D_n(0) \rightarrow \arg D(0)$, то и $\ln D_n(\zeta) \rightarrow \ln D(\zeta)$ при $n \rightarrow \infty$. Учтем еще, что $\eta_n \rightarrow \eta$ в $L_1(\mathbb{T})$. Тем самым в представлении (2) для $\ln D_n(\zeta)$ при любом $\zeta, |\zeta| < 1$, можно перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$. Это завершает проверку соотношения (2) (при всех $|\zeta| \neq 1$).

Пусть теперь оператор UU_0^{-1} имеет лишь k_+ собственных чисел на верхней полуокружности (точка 1 из нее исключается, а точка -1 включается). Наше рассмотрение одномерного случая показывает, что тогда в ряде (12) для $\eta(\mu; U, U_0)$ все члены не положительны, кроме k_+ слагаемых, не превосходящих 1 каждое. Поскольку этот ряд сходится почти везде, то и его сумма $\eta(\mu; U, U_0) \leq k_+$ для п.в. $\mu \in \mathbb{T}$. Это неравенство, доказанное для специальной нормировки (6), в инвариантных терминах означает лишь, что ФСС полуограничена сверху. Случай, когда спектр UU_0^{-1} конечен на нижней полуокружности, рассматривается, разумеется, вполне аналогично. •

Замечание 2. Функцию спектрального сдвига можно, конечно, выразить и через предельные значения $\arg D(\zeta)$ при приближении к $\mathbb{T}$ из области $|\zeta| > 1$. Именно, согласно (1.2.15)

$$\begin{aligned} \eta(\mu) &= -\pi^{-1} \lim_{r \rightarrow 1+0} \arg D(r\mu) + (2\pi)^{-1} \arg D(0) = \\ &= (2\pi)^{-1} \left[\lim_{r \rightarrow 1-0} \arg D(r\mu) - \lim_{r \rightarrow 1+0} \arg D(r\mu) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Замечание 3. При доказательстве теоремы 1 была построена функция η , удовлетворяющая нормировке (6). Такая

ФСС единственна и удовлетворяет к тому же неравенству (7). Соотношения (6), (7) можно записать и в форме, аналогичной (2.7), (2.6). Определим (например, по спектральной теореме) ветвь $\ln M = i \arg M$ унитарного оператора M условием $\arg \mu \in (-\pi, \pi]$. Тогда в терминах мультипликативного возмущения $M = UU_0^{-1}$ соотношения (6), (7) переписуются в виде

$$\int_{\mathbb{T}} \eta(\mu; U, U_0) \mu^{-1} d\mu = \operatorname{Tr} \ln M, \quad (15)$$

$$\|\eta(U, U_0)\|_{L_1(\mathbb{T})} \leq \|\ln M\|_1 \leq 2^{-1} \pi \|V\|_1. \quad (16)$$

При последней оценке мы учли неравенство $2|\theta_m| \leq \pi |e^{i\theta_m} - 1|$. Кроме того, для этой ветви

$$-k_- \leq \eta(\mu) \leq k_+, \quad (17)$$

где k_+ — число собственных значений M на верхней полуокружности $(1, -1]$, а k_- — на нижней полуокружности $(-1, 1)$.

Отметим еще, что, как и в самосопряженном случае, в унитарном — справедливы дополнения к теореме 1, аналогичные замечаниям 2.2 и 2.4.

3. На дискретном спектре поведение ФСС η вполне аналогично самосопряженному случаю. Именно, из второго равенства (14) вытекает, что при $\mu \in \rho(U_0) \cap \rho(U) \cap \mathbb{T}$ функция $\eta(\mu)$ принимает лишь целочисленные значения и постоянна на каждом из составляющих интервалов этого множества. Найдем скачок $\eta(\mu_1 + 0) - \eta(\mu_1 - 0)$ ФСС при переходе против часовой стрелки через изолированное собственное число μ_1 оператора U_0 (оператора U) конечной кратности k_0 (кратности k). Согласно второму равенству (14) величина $2\pi(\eta(\mu_1 + 0) - \eta(\mu_1 - 0))$ равна приращению $\arg D(\zeta)$ при обходе (как всегда, против часовой стрелки) вокруг точки μ_1 . На основании принципа аргумента и свойства 4⁰ § 1 отсюда следует, что

$$\eta(\mu_1 + 0) - \eta(\mu_1 - 0) = k_0 - k. \quad (18)$$

Для ФСС η можно, конечно, выписать и аналог равенства (2.20).

Если не оговорено особо, ФСС $\eta(U, U_0)$ считается определенной лишь с точностью до произвольного целого числа. Многозначность ФСС всегда надо иметь в виду при рассмотрении различных соотношений для ФСС. Так, из теоремы умножения

определителей возмущения (1.2) вытекает, что при $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $U - U_1 \in \mathfrak{S}_1$ справедливы равенства

$$\eta(U, U_1) + \eta(U_1, U_0) = \eta(U, U_0), \quad \eta(U_0, U) = -\eta(U, U_0). \quad (19)$$

понимаемые по модулю целых чисел. Представление (12) в виде абсолютно сходящегося в $L_1(\mathbb{T})$ ряда сохраняет силу для любой ветви η ; при этом в правой части надо считать, что за исключением конечного числа членов функции $\eta^{(m)}$ нормированы так, как указано в теореме 1. Аналогичным образом, по модулю 2π сохраняется и равенство (6). Обсуждение непрерывности $\eta(U, U_0)$ по U (ср. с предложением 2.6) мы отложим до следующего параграфа.

4. Перейдем теперь к выводу формулы следа (1). С помощью рядов Фурье эта формула получается даже проще, чем в самосопряженном случае. Прежде всего, дифференцируя представление (2) по ζ и пользуясь равенством (1.4), найдем, что на унитарный случай переносится лемма 3.1. Другими словами, формула (1) выполняется при $g(\mu) = (\mu - \zeta)^{-n}$, $|\zeta| \neq 1$, $n = 1, 2, \dots$. В частности, полагая $\zeta = 0$, установим (1) при $g(\mu) = \mu^{-n}$. Переходя к комплексному сопряжению, получим (1) и при $g(\mu) = \mu^n$. Таким образом, верна

Лемма 4. При $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ представление (1) для $\text{Tr}(U^n - U_0^n)$ справедливо при всех целых n .

Для распространения (1) на более широкий класс функций g нам понадобится

Лемма 5. При любом целом n верна оценка

$$\|U^n - U_0^n\|_1 \leq |n| \|U - U_0\|_1. \quad (20)$$

○ Ввиду неравенства

$$\begin{aligned} \|U^{n+1} - U_0^{n+1}\|_1 &= \|U^n(U - U_0) + (U^n - U_0^n)U_0\|_1 \leq \\ &\leq \|U - U_0\|_1 + \|U^n - U_0^n\|_1 \end{aligned}$$

для натуральных n (20) получается индукцией по n . На отрицательные n оценка (20) переносится переходом к сопряженным операторам. •

Теорема 6. Пусть $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$, а функция g непрерывно дифференцируема и $g'(\mu)$, $|\mu| = 1$, разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. Тогда оператор $g(U) - g(U_0)$ ядерный, и для ФСС (8) имеет место формула следа (1).

○ Разложим функцию g в ряд Фурье

$$g(\mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \mu^m, \quad \text{где} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |m \alpha_m| < \infty \quad (21)$$

по условию теоремы. Аппроксимируя $g(\mu)$ конечными отрезками $g_n(\mu) = \sum_{m=-n}^n \alpha_m \mu^m$ этого ряда, найдем, что

$$\|g(U) - g(U_0) - [g_n(U) - g_n(U_0)]\|_1 \leq \sum_{|m|>n} |\alpha_m| \|U^m - U_0^m\|_1.$$

Из (20) и (21) следует, что правая часть здесь стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и, в частности, что $g(U) - g(U_0) \in \mathfrak{S}_1$. Ясно также, что $g'_n(\mu) \rightarrow g'(\mu)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\mu \in \mathbb{T}$.

В силу леммы 4 формула (1) справедлива для $g(\mu) = \alpha_m \mu^m$, m —целое, и следовательно, для всех конечных сумм таких функций. Тем самым (1) выполняется для аппроксимаций g_n функции (21). В то же время обе части соотношения (1) для g_n сходятся при $n \rightarrow \infty$ к соответствующим объектам для g . •

Как и в самосопряженном случае, при дальнейшем расширении класса допустимых функций g центральным является вопрос о ядерности разности $g(U) - g(U_0)$. Соответствующие классы функций аналогичны классам функций на вещественной прямой из § 3, но описываются проще. Так, результаты статьи В.В.Пеллера [72] показывают, что $g(U) - g(U_0) \in \mathfrak{S}_1$, если

$$\int_{-t_0}^{t_0} \sup_{x \in (-\pi, \pi]} |g(e^{i(x+t)}) - 2g(e^{ix}) + g(e^{i(x-t)})| |t|^{-2} dt < \infty \quad (22)$$

(для какого-нибудь $t_0 > 0$). Функции из этого класса Бесова приближаются в метрике (22) гладкими функциями, так что и формула следа (1) легко распространяется на весь этот класс. На унитарные операторы переносится и подход работ М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [45, 46]. В частности, как из [72], так и из [45, 46], следует справедливость (1) для функций g , производные g' которых удовлетворяют условию Гельдера с каким-либо положительным показателем.

5. Связь ФСС с матрицей рассеяния дается соотношением

$$\text{Det } S(\mu; U, U_0) = \exp[-2\pi i \eta(\mu; U, U_0)], \quad \text{п.в. } \mu \in \hat{\sigma}(U_0), \quad (23)$$

которое также устанавливается вполне аналогично самосопряженному случаю. Отметим предварительно, что, хотя ФСС определяется с точностью до целочисленного слагаемого, эта

неопределенность не влияет на правую часть (23). На унитарный случай непосредственно переносится, например, второе доказательство теоремы 4.1.

Действительно, из (1.6) вытекает тождество

$$\text{Det}[I - (V - VR(\zeta)V)(R_0(\zeta) - R_0(\zeta'))] = D^{-1}(\zeta)D(\zeta'), \quad \zeta' = \bar{\zeta}^{-1}, \quad (24)$$

$R = R_U$, $R_0 = R_{U_0}$, играющее роль (4.6). Положим здесь $\zeta = r\mu$ и перейдем к пределу при $r \rightarrow 1 - 0$. Поскольку в силу леммы 1.3 $|D(\zeta)| = |D(\zeta')|$, то правая часть (24) равна $\exp[i \arg D(r^{-1}\mu) - i \arg D(r\mu)]$. Согласно (14) это выражение сходится к $\exp(-2\pi i \eta(\mu))$.

Покажем, что левая часть (24) сходится к $\text{Det} S(\mu)$. Рассмотрим факторизацию $V = G^*G_0$ на операторы Гильберта—Шмидта. Нам понадобятся сейчас аналоги результатов § 6.1 для унитарного случая. Переходом к преобразованиям Кэли они получаются совершенно элементарно. Действительно, пусть некоторая точка $\mu_1 \in \mathbb{T}$ не является собственным числом оператора U . Тогда найдется самосопряженный оператор H , через который U выражается соотношением (1.13). В его терминах

$$\tilde{B}(\zeta) := G_0 R_U(\zeta) G^* = (2i\mu_1 \text{Im } a)^{-1} (z - \bar{a}) G_0 (I + (z - \bar{a}) R_H(z)) G^*,$$

где z и ζ связаны равенством (1.14). Из теоремы 1.6.9 и следствия 1.6.10 теперь вытекает, что оператор $\tilde{B}(\zeta)$ при $\zeta = r\mu$ и $r \rightarrow 1 - 0$ для п.в. $\mu \in \mathbb{T}$ имеет предел в $\mathfrak{S}_2$. Совершенно аналогично с помощью теоремы 1.6.5 и следствия 1.6.6 убеждаемся, что оператор $G_0 (R_{U_0}(\zeta) - R_{U_0}(\zeta')) G^*$ при $\zeta = r\mu$ и $r \rightarrow 1 - 0$ для п.в. $\mu \in \mathbb{T}$ имеет предел в $\mathfrak{S}_1$. Кроме того, этот предел равен правой части (7.2.11). Отметим, что, как и в самосопряженном случае, операторы $Z_0(\mu; G_0)$ и $Z_0(\mu; G)$ принадлежат классу Гильберта—Шмидта. Теперь, пользуясь возможностью перестановки операторов под знаком детерминанта (см. равенство (1.7.11)) и непрерывностью детерминанта в $\mathfrak{S}_1$, найдем, что предел левой части (24) равен

$$\text{Det}[I - 2\pi \bar{\mu} Z_0(\mu; G)(I - \tilde{B}(\mu_+)) Z_0^*(\mu; G_0)].$$

В силу представления (7.2.10) оператор в квадратных скобках есть $S(\mu)$. Таким образом, установлена

Теорема 7. При $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ справедливо равенство (23).

§ 6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ПО ОПЕРАТОРНОМУ ПАРАМЕТРУ МНОГОЗНАЧНОСТЬ

В предыдущем параграфе ФСС $\eta(\mu; U, U_0)$ определялась с точностью до произвольного целого числа. Обсуждение ее непрерывности по параметру U (при фиксированном U_0 и $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$) требует выделения однозначной ветви $\eta(\mu; U, U_0)$. Локально задача о построении однозначной и непрерывной ФСС оказывается разрешимой. Однако на всем множестве операторов U , отличающихся от U_0 на ядерный, требование непрерывности ФСС с необходимостью приводит к многозначной функции. Эта функция зависит не только от U_0 и U , но и от пути, их соединяющего. Ее многозначность имеет примерно тот же характер, как и в случае функции $\ln z$ комплексной переменной z .

1. При доказательстве теоремы 5.1 однозначная ветвь ФСС выделялась условием (5.6), допускающим также запись (5.15). В этом параграфе мы будем пользоваться этим условием лишь при $\|U - U_0\| < 2$, когда оператор UU_0^{-1} не имеет собственных чисел, равных -1. Именно, примем

Определение 1. Пусть $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $\|U - U_0\| < 2$. Тогда ветвь ФСС, удовлетворяющую условию (5.6), будем называть регулярной и обозначать через $\eta_r(U, U_0)$.

Обсудим свойства регулярной ветви. Отметим прежде всего, что $\eta_r(U_0, U_0) = 0$ и в силу неравенства (5.16) функция $\eta_r(U, U_0)$ сходится в $L_1(\mathbb{T})$ к нулю при $\|U - U_0\|_1 \rightarrow 0$. Кроме того, для регулярной ветви справедливо неравенство (5.17), где $k_+(k_-)$ — число собственных значений оператора UU_0^{-1} , лежащих на открытой верхней (нижней) полуокружности. Разумеется, неравенство (5.17) становится содержательным лишь, если одно из чисел k_+ или k_- конечно.

Перенос на регулярные ветви первого соотношения (5.19) требует дополнительных предположений. При этом нам понадобится элементарная

Лемма 2. Пусть точка -1 не принадлежит спектрам унитарных операторов U и U' . Фиксируем ветвь логарифма условием $\arg \mu \in (-\pi, \pi)$. Тогда справедлива оценка

$$\|\ln U' - \ln U\|_1 \leq C\|U' - U\|_1,$$

причем число C зависит лишь от расстояния точки -1 до спектров U и U' .

○ Представим $\ln U$ (и $\ln U'$) интегралом Рисса:

$$\ln U = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \ln \zeta (U - \zeta)^{-1} d\zeta,$$

где простой замкнутый контур Γ охватывает спектр оператора U и не содержит точку нуль внутри себя. Тогда в силу резольвентного тождества

$$\|\ln U' - \ln U\|_1 \leq (2\pi)^{-1} \int_{\Gamma} |\ln \zeta| \| (U - \zeta)^{-1} \| \| (U' - \zeta)^{-1} \| |d\zeta| \cdot \|U - U'\|_1.$$

Остается учесть, что подынтегральная функция ограничена числом, зависящим лишь от Γ . •

Предложение 3. Пусть $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$, $\|U_1 - U_0\| < 2$ и величина $\|U - U_1\|_1$ достаточно мала. Тогда

$$\eta_r(U, U_1) + \eta_r(U_1, U_0) = \eta_r(U, U_0). \quad (1)$$

Кроме того,

$$\eta_r(U, U_0) = -\eta_r(U_0, U). \quad (2)$$

○ При условии $\|U_1 - U_0\| + \|U - U_1\| < 2$ операторы UU_0^{-1} , UU_1^{-1} , $U_1U_0^{-1}$ не имеют собственных чисел, равных -1 . Тем самым все слагаемые в (1) корректно определены. Ввиду (5.19) соотношение (1) заведомо выполняется по модулю целых чисел. Поэтому нужно лишь убедиться, что интегралы от $\eta_r(\mu; U, U_1)$ и от $\eta_r(\mu; U, U_0) - \eta_r(\mu; U_1, U_0)$ по $\mu^{-1}d\mu$, $\mu \in \mathbb{T}$, различаются по модулю меньше, чем на 2π . Первый из этих интегралов согласно (5.16) не превосходит $2^{-1}\pi\|U - U_1\|_1$, а второй согласно (5.15) равен $\text{Tr}[\ln(UU_0^{-1}) - \ln(U_1U_0^{-1})]$. В силу леммы 2 этот след оценивается через $C\|U - U_1\|_1$. Таким образом, при достаточно малой величине $\|U - U_1\|_1$ каждый из двух рассматриваемых интегралов меньше, например, π .

Вновь в силу (5.19) для доказательства (2) достаточно проверить, что интегралы по $\mu^{-1}d\mu$, $\mu \in \mathbb{T}$, от левой и правой частей совпадают. Это вытекает из равенства (5.6), так как операторы UU_0^{-1} и U_0U^{-1} сопряжены друг другу. •

Сравнивая предложение 3 с неравенством (5.16) для пары U_1, U , получим

Предложение 4. Пусть $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $\|U_1 - U_0\| < 2$. Тогда

$$\lim_{\|U - U_1\|_1 \rightarrow 0} \|\eta_r(U, U_0) - \eta_r(U_1, U_0)\|_{L_1(\mathbb{T})} = 0.$$

Кроме того, $\eta_r(U, U_0) \geq \eta_r(U_1, U_0)$ (или $\eta_r(U, U_0) \leq \eta_r(U_1, U_0)$), если $\text{Im}(UU_1^{-1}) \geq 0$ (соответственно $\text{Im}(UU_1^{-1}) \leq 0$) и величина $\|U - U_1\|_1$ достаточно мала.

Как и в самосопряженном случае (см. § 2), из предложения 3 легко извлечь непрерывность $\eta_r(U, U_0)$ по совокупности аргументов. Для избежания лишних оговорок мы, однако, считаем второй аргумент фиксированным.

2. Обсудим теперь сформулированную в преамбуле к параграфу задачу о построении однозначной непрерывной ветви ФСС $\eta(U, U_0)$. В точных терминах она ставится следующим образом:

Задача 5. Пусть U_1 — фиксированный унитарный оператор, а $\mathcal{L} = \mathcal{L}(U_1)$ — множество унитарных операторов, отличающихся от U_1 на ядерный. Множество $\mathcal{L}(U_1)$ является (полным) метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(U, U') = \|U - U'\|_1.$$

Предположим, что $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$. Можно ли построить ФСС $\eta(\cdot; U, U_0)$, непрерывно в $L_1(\mathbb{T})$ зависящую от $U \in \mathcal{L}(U_1)$?

Решение задачи 5 аналогично построению однозначной непрерывной скалярной функции $f(x)$. Предполагается, что f определена на метрическом пространстве X с точностью до целого числа и локально допускает выделение однозначной непрерывной ветви. Задачу о согласовании таких локальных ветвей естественно рассматривать отдельно на каждой связной компоненте $X_0 \subset X$. На X_0 может существовать не более одной ветви функции f , принимающей в какой-либо точке $x_0 \in X_0$ заданное значение. В остальных точках $x \in X_0$ функцию f можно построить, например, с помощью непрерывного продолжения f вдоль кривых, соединяющих x_0 и x . Такая функция будет, вообще говоря, зависеть от выбора кривой. Однозначность f эквивалентна отсутствию в X_0 замкнутых кривых, непрерывное продолжение вдоль которых приводит к не равному нулю приращению f .

Та же схема применяется при рассмотрении ФСС. Установим прежде всего единственность однозначной непрерывной ФСС на любом связном подмножестве $\mathcal{L}$.

Лемма 6. Пусть $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $\mathcal{M}$ — какое-либо связное подмножество $\mathcal{L}(U_1)$, содержащее U_1 . Предположим, что две ФСС $\eta_j(U, U_0)$, $j = 1, 2$, однозначны и непрерывны в $L_1(\mathbb{T})$ по $U \in \mathcal{M}$. Тогда при условии $\eta_1(U_1, U_0) = \eta_2(U_1, U_0)$ эти функции совпадают при всех $U \in \mathcal{M}$.

○ Коль скоро разность $\eta_2 - \eta_1$ не зависит от μ , то

$$\begin{aligned} n(U, U_0) &:= \eta_2(\mu; U, U_0) - \eta_1(\mu; U, U_0) = \\ &= (2\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{T}} (\eta_2(\mu; U, U_0) - \eta_1(\mu; U, U_0)) \mu^{-1} d\mu. \end{aligned}$$

Тем самым целочисленная функция $n(U, U_0)$ непрерывна по $U \in \mathcal{M}$. Ввиду связности $\mathcal{M}$, отсюда следует, что $n(U, U_0) = n(U_1, U_0) = 0$ при всех $U \in \mathcal{M}$. •

Наряду с множеством $\mathcal{L}(U_1)$, мы рассматриваем его подмножество $\mathcal{L}_0(U_1)$, состоящее из тех операторов $U \in \mathcal{L}(U_1)$, для которых $\|U - U_1\| < 2$. Убедимся, что оба множества $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_0$ связны.

Лемма 7. Любой оператор $U \in \mathcal{L}(U_1)$ (оператор $U \in \mathcal{L}_0(U_1)$) можно соединить с U_1 непрерывной (в $\mathfrak{S}_1$) кривой $\Gamma = \{U(s)\}$, $0 \leq s \leq 1$, принадлежащей множеству $\mathcal{L}(U_1)$ (множеству $\mathcal{L}_0(U_1)$).

○ Пусть $M = UU_1^{-1} = \sum e^{i\theta_m} P_m$, где $\theta_m \in (-\pi, \pi]$. Тогда можно, например, положить $M(s) = \sum e^{i\theta_m s} P_m$ и $U(s) = M(s)U_1$. Ясно, что $U(s)$ унитарны, $U(0) = U_1$, $U(1) = U$. В силу неравенства

$$\|M(s) - M(s')\|_1 \leq \sum |\theta_m| |s - s'|$$

семейство $U(s)$ непрерывно в $\mathfrak{S}_1$ зависит от $s \in [0, 1]$ и $U(s) - U_1 \in \mathfrak{S}_1$. Кроме того, $\|U(s) - U_1\| \leq \|U - U_1\|$, так что $U(s) \in \mathcal{L}_0(U_1)$ при $U \in \mathcal{L}_0(U_1)$. •

Таким образом, задача 5 может иметь лишь одно решение. Однако, как мы увидим в следующем пункте, в действительности задача 5 решения не имеет. В то же время на множестве $\mathcal{L}_0(U_1)$ аналогичная задача легко решается.

Теорема 8. Пусть $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$ и задано значение ФСС при $U = U_1$. Тогда на множестве $\mathcal{L}_0(U_1)$ однозначная непрерывная ФСС $\eta(U, U_0)$ существует, единственна и строится по формуле

$$\eta(U, U_0) = \eta_\pi(U, U_1) + \eta(U_1, U_0). \quad (3)$$

○ При заданном значении $\eta(U_1, U_0)$ единственность прямо вытекает из лемм 6 и 7. В то же время предложение 4 показывает, что функция (3) непрерывна на $\mathcal{L}_0(U_1)$ и принимает значение $\eta(U_1, U_0)$ при $U = U_1$. •

3. На всем множестве $\mathcal{L}(U_1)$ непрерывную по U ФСС можно построить, если ее значение $\eta(U, U_0)$ связывать с кривой $\Gamma \in \mathcal{L}(U_1)$, соединяющей операторы U_1 и U . При этом используется

Лемма 9. Пусть $U_1 - U_0 \in \mathfrak{S}_1$, $U(0) = U_1$, $U(1) = U$ и семейство $U(s) - U_1$ непрерывно в $\mathfrak{S}_1$ по $s \in [0, 1]$. Тогда существует и притом единственная ФСС $\eta(\cdot; U(s), U_0)$, непрерывно в $L_1(\mathbb{T})$ зависящая от $s \in [0, 1]$ и принимающая заданное значение $\eta(\cdot; U_1, U_0)$ при $s = 0$.

○ Единственность такой ФСС прямо вытекает из леммы 6. Для доказательства ее существования рассмотрим при каждом $s_0 \in [0, 1]$ такую окрестность Ω_{s_0} , что $\|U(s) - U_{s_0}\| < 1$ при $s \in \Omega_{s_0}$. Тогда $U(s'') \in \mathcal{L}_0(U(s'))$ для любых $s', s'' \in \Omega_{s_0}$. По лемме Гейне—Бореля отрезок $[0, 1]$ покрывается конечным числом интервалов Ω_{s_i} . На каждом из них существование непрерывной функции $\eta(U(s), U_0)$ следует из теоремы 8. •

Отметим, что благодаря параметризации кривой в лемме 9 допускается наличие у Γ точек пересечения.

Теперь зависящее от $\Gamma = \{U(s)\}$ значение ФСС можно определить равенством $\eta_\Gamma(U, U_0) := \eta(U(1), U_0)$. Если $\Gamma \subset \mathcal{L}_0(U_1)$, то ФСС $\eta(U, U_0)$ задается формулой (3) и, следовательно, от Γ не зависит. В общем случае такая зависимость есть. Именно, для семейства операторов $U(s)$, ($U(0) = U(1) = U_1$) ФСС $\eta(\cdot; U(s), U_0)$, изменяясь непрерывно по s , в точке $s = 1$ может по сравнению с $s = 0$ приобрести приращение, кратное целому числу. Приведем такой пример для случая $U_0 = U_1$ и одномерного возмущения.

Пример 10. Пусть $U(s) = U_0(I + \tau(s)P)$, где $\tau(s) = e^{2\pi i s} - 1$, а P —одномерный ортогональный проектор, так что $U(0) = U(1) = U_0$. Тогда при $s = 0$ и $s = 1$ обе ФСС $\eta(\cdot; U(0), U_0)$ и $\eta(\cdot; U(1), U_0)$ равны целочисленным постоянным. Будем считать, что при $s = 0$ ФСС равна нулю. Из (5.6) вытекает, что по модулю целых чисел справедливо равенство

$$(2\pi i)^{-1} \int_{\mathbb{T}} \eta(\mu; U(s), U_0) \mu^{-1} d\mu = s. \quad (4)$$

Поскольку левая часть непрерывна по $s \in [0, 1]$ и равна нулю при $s = 0$, в действительности равенство (4) является точным. Поэтому $\eta(\mu; U(1), U_0) = 1$, тогда как $\eta(\mu; U(0), U_0) = 0$.

Этот пример становится совсем наглядным в частном случае $U_0 = I$, $U(s) = I + \tau(s)P$, когда согласно (5.18)

$$\eta(\mu; U(s), U_0) = \begin{cases} 1, & \mu \in (1, \exp(2\pi is)), \\ 0, & \mu \in (\exp(2\pi is), 1). \end{cases}$$

При возрастании s дуга $(1, \exp(2\pi is))$, где $\eta(\mu) = 1$, заполняет все большую часть единичной окружности $\mathbb{T}$ и при $s = 1$ получаем, что $\eta(\mu; U(1), U_0) = 1$ для всех $\mu \in \mathbb{T}$.

Пример 10 показывает, что задача 5 решения не имеет. Таким образом, в унитарном случае попытка глобального определения непрерывной по U ФСС $\eta(U, U_0)$ приводит к многозначной функции.

§ 7. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА В САМОСОПРЯЖЕННОМ СЛУЧАЕ. РЕЗОЛЬВЕНТНО СРАВНИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. В этом параграфе мы построим ФСС для пары самосопряженных операторов H_0 и H при условии

$$R(z) - R_0(z) \in \mathfrak{S}_1, \quad z \in \rho(H_0) \cap \rho(H). \quad (1)$$

Напомним, что в силу тождества (6.4.8) это условие выполняется для всех регулярных точек одновременно. Согласно равенству (1.15) преобразования Кэли U_0 и U операторов H_0 и H различаются на ядерный оператор. В п. 3 § 6.5 такая связь между операторами H_0, H и U_0, U была использована для доказательства существования ВО в унитарном случае. Здесь, напротив, мы применяем результаты §§ 5, 6 для построения ФСС в самосопряженном случае.

Пусть преобразования Кэли $U_0 = U_0(a)$ и $U = U(a)$ операторов H_0 и H определяются равенством (1.13). Поскольку $U - U_0 \in \mathfrak{S}_1$, в силу результатов § 5 существует ФСС $\eta(\mu) = \eta(\mu; U, U_0)$, $\mu \in \mathbb{T}$. Будем пока считать ее определенной с точностью до произвольной постоянной.

Мы будем рассматривать весь набор преобразований Кэли по двум причинам. Во-первых, для того, чтобы можно было

убедиться в независимости Φ СС от выбора конкретного преобразования. Во-вторых, при исследовании свойств Φ СС иногда удобно считать величину $\text{Im } a$ достаточно большой. Впрочем, зависимость различных объектов от параметра a , $\text{Im } a > 0$, в обозначениях, как правило (a от μ_1 , $|\mu_1| = 1$, —никогда) не отражается.

Для функции f на $\mathbb{R}$ рассмотрим функцию g на $\mathbb{T}$, такую, что

$$f(\lambda) = g(\mu), \quad (2)$$

$$\mu = \mu_1(\lambda - a)(\lambda - \bar{a})^{-1}. \quad (3)$$

Тогда, разумеется, $f(H_0) = g(U_0)$ и $f(H) = g(U)$. Предположим, что для функции g справедлива формула следа (5.1). Проведем в ее правой части замену переменной (3) и положим

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \eta(\mu; U, U_0). \quad (4)$$

Это дает для $\text{Tr}(f(H) - f(H_0))$ представление (2.1). Для функции (4)

$$2 \text{Im } a \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| |\lambda - a|^{-2} d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} |\eta(e^{it})| dt, \quad (5)$$

т.е. при условии (1) Φ СС интегрируема по $\mathbb{R}$ лишь с весом $(\lambda^2 + 1)^{-1}$:

$$\xi \in L_1(\mathbb{R}; (\lambda^2 + 1)^{-1}). \quad (6)$$

Нетрудно привести конкретные условия на f , при которых соответствующая функция g удовлетворяет предположениям § 5. При пересчете надо иметь в виду, что $\mu \rightarrow \mu_1$ в направлении против (по) часовой стрелки, когда $\lambda \rightarrow +\infty$ ($\lambda \rightarrow -\infty$). Поэтому условия на $g(\mu)$ при $\mu \rightarrow \mu_1$ равносильны предположениям относительно $f(\lambda)$ на бесконечности. Вне произвольной окрестности точки μ_1 функция $g(\mu)$ имеет ту же локальную гладкость, что и функция $f(\lambda)$. Отметим соотношения между производными

$$\begin{aligned} (\lambda - \bar{a})^2 f'(\lambda) &= 2i\mu_1 \text{Im } a g'(\mu), \\ (\lambda - \bar{a})^2 ((\lambda - \bar{a})^2 f'(\lambda))' &= -(2\mu_1 \text{Im } a)^2 g''(\mu), \end{aligned} \quad (7)$$

получаемые дифференцированием равенства (2).

Для обоснования формулы следа (2.1) будем считать, что функция f имеет две локально ограниченные производные, причем

$$(\lambda^2 f'(\lambda))' = O(|\lambda|^{-1-\epsilon}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (8)$$

при каком-либо $\varepsilon > 0$. Из (8) следует, что функция $\lambda^2 f'(\lambda)$, а потому и $f(\lambda)$, имеют пределы при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. В силу (2), (7) это означает, что соответствующая функция $g(\mu)$ дважды дифференцируема при $\mu \neq \mu_1$,

$$|g''(\mu)| \leq C|\mu - \mu_1|^{-1+\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad (9)$$

и существуют пределы $g'(\mu)$ и $g(\mu)$ при $\mu \rightarrow \mu_1$ с обеих сторон. Чтобы пределы с разных сторон совпали друг с другом, нужно предположить, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda), \quad \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \lambda^2 f'(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 f'(\lambda). \quad (10)$$

Тогда функция $g(\mu)$ будет непрерывно дифференцируемой на $\mathbb{T}$, причем согласно (9) $g'(\mu)$ будет удовлетворять условию Гельдера с показателем ε . Как отмечалось в конце § 5, при таких условиях на g имеет место формула следа (5.1). Тем самым установлена

Теорема 1. *Предположим, что для пары самосопряженных операторов H_0, H выполнено условие (1). Пусть η — ФСС для их преобразований Кэли (1.13), а ФСС ξ определяется равенством (4). Тогда для ξ выполняется соотношение (6), а формула следа (2.1) верна для любой функции f , имеющей две локально ограниченные производные и удовлетворяющей при $|\lambda| \rightarrow \infty$ условиям (8) и (10).*

В условиях теоремы 1 функция $g(\mu)$ удовлетворяет предположениям теоремы 5.6, если в (8) $\varepsilon = 1$. Действительно, согласно (9) $g''(\mu)$ будет ограниченной функцией и, следовательно, $g'' \in L_2(\mathbb{T})$. Тем самым для ряда Фурье (5.21) выполняется условие $\sum |\alpha_m|^2 m^4 < \infty$, а потому $\sum |\alpha_m m| < \infty$. Это означает, что $g'(\mu)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Запас функций в теореме 1 достаточно широк. Разумеется, он содержит все функции класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$, а также все функции $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-n}$, $\text{Im } z \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому при условии (1) равенства (3.2) и (3.3) сохраняются. Вместе с тем из формулы следа (2.1) ФСС ξ определяется лишь с точностью до постоянной, остающейся произвольной из-за первого равенства (10). Поскольку функция $(\lambda^2 + 1)^{-1}$ интегрируема, не фиксируется эта постоянная и соотношением (6). Таким образом, в отличие от §§ 2–4 в условиях теоремы 1 к ФСС можно добавлять произвольное число. Из формулы следа вытекает также, что при

$V \in \mathfrak{S}_1$ ФСС (2.5) совпадает с точностью до постоянной с ФСС (4), определяемой через преобразования Кэли операторов H_0 и H .

2. Согласно (4) свойства ФСС ξ выводятся из соответствующих результатов о ФСС η . При этом нам понадобится уточнить нормировку ξ . Если функция $\eta_a = \eta(U(a), U_0(a))$ фиксирована равенством (5.6), то и связанная с ней соотношением (4) функция ξ_a при данном a (и μ_1) определяется однозначно. В силу (1.15) и (5) для этой функции из (5.16) вытекает неравенство

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_a(\lambda)| |\lambda - a|^{-2} d\lambda \leq \pi \|R(a) - R_0(a)\|_1. \quad (11)$$

Аналогичным образом, соотношение (5.15) показывает, что

$$2i \operatorname{Im} a \int_{-\infty}^{\infty} \xi_a(\lambda) |\lambda - a|^{-2} d\lambda = \operatorname{Tr} \ln[U(a)U_0^{-1}(a)]. \quad (12)$$

В этом пункте будем считать, что, как принято в § 5, ФСС η_a , а следовательно и ξ_a , определены по модулю целых чисел. Такую ФСС ξ_a можно выразить через обобщенный определитель возмущения (1.16) пары H_0, H . Именно, из второго равенства (5.14) следует, что

$$\xi_a(\lambda) = (2\pi)^{-1} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arg \tilde{D}_a(\lambda + i\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arg \tilde{D}_a(\lambda - i\varepsilon) \right], \quad (13)$$

причем пределы в правой части существуют для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Для согласования с определениями § 5 здесь надо считать, что $\arg \tilde{D}_a(\bar{a}) = 0$, а в верхней полуплоскости ветвь аргумента выбирается произвольным образом. Обратно, $\ln \tilde{D}_a(z)$ также находится по ФСС ξ_a . Для этого нужно лишь провести в (5.2) замену переменной (3). Согласно (4) отсюда вытекает представление

$$\ln \tilde{D}_a(z) = (z - \bar{a}) \int_{-\infty}^{\infty} \xi_a(\lambda) (\lambda - z)^{-1} (\lambda - \bar{a})^{-1} d\lambda. \quad (14)$$

Поскольку для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ формула следа (2.1) верна при всех ФСС ξ_a , для разных a эти функции могут различаться лишь на постоянную. Убедимся, что соотношением (4) они

определяются с точностью до целого числа. С этой целью нужно показать, что по модулю целых чисел функции ξ_a от a (и от μ_1) не зависят. Воспользуемся соотношением (1.19) между обобщенными определителями возмущения, отвечающими различным преобразованиям Кэли. Из него следует, что

$$\tilde{D}_b(z)\tilde{D}_b^{-1}(\bar{z}) = \tilde{D}_a(z)\tilde{D}_a^{-1}(\bar{z}),$$

а потому согласно (13) ФСС ξ_a и ξ_b могут различаться лишь на целое число.

При принятой сейчас нормировке ξ сохраняется и связь ФСС с матрицей рассеяния. В самом деле, в силу принципа инвариантности (см. замечание 6.5.6) матрицы рассеяния $S(\lambda; H, H_0)$ и $S(\mu; U, U_0)$ совпадают или, по крайней мере, унитарно эквивалентны. Поэтому их определители равны и, следовательно, соотношение (2.3) прямо вытекает из соотношений (4) и (5.23). В свою очередь, (2.3) вновь показывает, что по модулю целых чисел ФСС не зависит от параметров a и μ_1 . Сформулируем теперь полученные результаты.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 ФСС η_a фиксирована с точностью до целого числа. Тогда определенная равенством (4) ФСС $\xi = \xi_a$ по модулю целых чисел от a (и от μ_1) не зависит. При п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ для нее справедливо равенство (13), а при п.в. $\lambda \in \hat{\sigma}_0$ — равенство (2.3).

При условии (1) многие свойства ФСС те же, что и в случае ядерных возмущений. Например, не меняется ее поведение на дискретном спектре. Именно, согласно определению (4) и результатам § 5 при регулярных λ значения $\xi(\lambda)$ целочисленны, а при переходе через собственные значения операторов H_0 и H скачок ξ находится по формуле (2.18). Поэтому справедлива и формула (2.19). Если операторы H_0 и H полуограничены снизу, то при принятой нормировке $\xi(\lambda) = 0$ для $\lambda < \inf\{\sigma_0 \cup \sigma\}$ сохраняется равенство (2.20). В полуограниченном случае формула следа (2.1) верна при единственном условии (8), где $\lambda \rightarrow +\infty$.

Из первого равенства (5.19) прямо следует, что при $R_{H_1}(z) - R_{H_0}(z) \in \mathfrak{S}_1$, $R_H(z) - R_{H_1}(z) \in \mathfrak{S}_1$, $\text{Im } z \neq 0$, имеет место «теорема сложения» (2.16). В отличие от предложения 2.5 теперь, однако, обе части (2.16) определены по модулю целых чисел, так что и само равенство (2.16) надо понимать по этому модулю.

3. Непрерывность ФСС $\xi(H, H_0)$ по параметру H (при фиксированном H_0) обсудим по отношению к метрике, отвечающей (1). Пусть H_1 —какой-либо самосопряженный оператор. Множество всех самосопряженных операторов, резольвентно сравнимых с ним, обозначим через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(H_1)$. Это множество становится метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(H, H') = 2|\operatorname{Im} a| \|R_H(a) - R_{H'}(a)\|_1, \quad \rho = \rho_a. \quad (15)$$

Метрики (15), конечно, зависят от a , $\operatorname{Im} a \neq 0$, но в силу тождества (6.4.8) при различных a они эквивалентны друг другу. Согласно (1.15)

$$\begin{aligned} \rho_a(H, H') &= \|U(a) - U'(a)\|_1, \\ 2|\operatorname{Im} a| \|R_H(a) - R_{H'}(a)\| &= \|U(a) - U'(a)\|, \end{aligned} \quad (16)$$

где U' —преобразование Кэли оператора H' . Поэтому при изучении непрерывности $\xi(H, H_0)$ можно воспользоваться результатами § 6 об унитарных операторах. Однако по сравнению с унитарным случаем сейчас возникают дополнительные тонкости. Они обусловлены тем, что преобразование Кэли устанавливает взаимно однозначное соответствие самосопряженных операторов лишь с теми унитарными операторами, у которых в фиксированной точке μ_1 нет собственного числа. Тем не менее локальная непрерывная ветвь ФСС по-прежнему легко строится.

Теорема 3. Пусть самосопряженные операторы H_0 и H_1 резольвентно сравнимы и задано определенное значение $\xi(H_1, H_0)$, а a —какое-либо комплексное число с $\operatorname{Im} a > 0$. Тогда на множестве $\mathcal{L}_{0,a}(H_1)$ операторов $H \in \mathcal{L}(H_1)$, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\operatorname{Im} a \|R_H(a) - R_{H_1}(a)\| < 1, \quad (17)$$

можно указать однозначную ветвь ФСС $\xi(H, H_0)$, непрерывную по $H \in \mathcal{L}(H_1)$ в метрике $L_1(\mathbb{R}; (\lambda^2 + 1)^{-1})$. Кроме того, при $H = H_1$ функция $\xi(H, H_0)$ принимает заданное значение $\xi(H_1, H_0)$.

○ Согласно (16) при условии (17) построенная в начале п. 2 функция $\xi_a(H, H_1)$ связана равенством (4) с регулярной ветвью $\eta_r(U(a), U_1(a))$ ФСС. Положим (ср. с (6.3))

$$\xi(H, H_0) = \xi_a(H, H_1) + \xi(H_1, H_0). \quad (18)$$

Непрерывность этой функции в $L_1(\mathbb{R}; (\lambda^2 + 1)^{-1})$ при изменении H в $\mathcal{L}(H_1)$ вытекает из равенств вида (5) и (16). •

Из теоремы 3 вытекает, что локально ФСС $\xi(H, H_0)$ можно выбрать непрерывной по совокупности аргументов H_0 и H .

Совершенно аналогично унитарному случаю в условиях теоремы 3 можно убедиться (см. далее доказательство леммы 5), что на содержащей H_1 связной компоненте $\mathcal{L}_{0,a}(H_1)$ непрерывная ветвь ФСС $\xi(H, H_0)$ заданием своего значения при $H = H_1$ выделяется единственным образом. Мы не знаем, является ли множество $\mathcal{L}_{0,a}(H_1)$ связным. Тем самым в отличие от теоремы 6.8 мы ничего не говорим о единственности на всем множестве $\mathcal{L}_{0,a}(H_1)$. В частности, не исключается, что ФСС (18) зависит от параметра a . Однако для близких a такой зависимости заведомо нет. Этот результат нам понадобится в п. 1 § 8. Подчеркнем, что в следующем утверждении через $\xi_a(H, H_0)$ обозначается ФСС, связанная с ФСС $\eta_r(U(a), U_0(a))$ соответствующих преобразований Кэли равенством (4).

Лемма 4. Если $H \in \mathcal{L}_{0,a}(H_0)$ и величина $|b - a|$ достаточно мала, то $H \in \mathcal{L}_{0,b}(H_0)$ и $\xi_b(H, H_0) = \xi_a(H, H_0)$.

○ Включение $H \in \mathcal{L}_{0,b}(H_0)$ вытекает из непрерывности левой части (17) по параметру a . Поэтому корректно определена ФСС $\xi_b(H, H_0)$, совпадающая с $\xi_a(H, H_0)$ по модулю целых чисел. Равенство $\xi_b(\lambda) = \xi_a(\lambda) + n(b)$, где $n(b)$ — целое и $n(a) = 0$, проинтегрируем по $\mathbb{R}$ с весом $|\lambda - b|^{-2}$. Тогда согласно (12)

$$2\pi i n(b) = \text{Tr} \ln[U(b)U_0^{-1}(b)] - 2i \text{Im} b \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda - b|^{-2} \xi_a(\lambda) d\lambda. \quad (19)$$

В силу непрерывности $U(b) - U_0(b)$ в $\mathfrak{S}_1$ и $U_0(b)$ в $\mathfrak{B}$ оператор-функция $U(b)U_0^{-1}(b)$ также будет непрерывной в $\mathfrak{S}_1$ по b . Поэтому из леммы 6.2 вытекает, что первое слагаемое в правой части (19) непрерывно зависит от b . Кроме того, интеграл в (19) также очевидно будет непрерывной функцией b (при фиксированном a).

Таким образом, согласно (19) целочисленная функция $n(b)$ постоянна, и, следовательно, равна нулю. •

4. Как и в унитарном случае, нетрудно установить существование и единственность продолжения ФСС $\xi(H, H_0)$ вдоль любой непрерывной кривой. Следующее утверждение по формулировке и доказательству вполне аналогично лемме 6.9.

Лемма 5. Пусть операторы H_0 и H_1 резольвентно сравнимы, а семейство самосопряженных операторов $H(s)$ непре-

равно в $\mathcal{L}(H_1)$ зависит от $s \in [0, 1]$, $H(0) = H_1$, $H(1) = H$. Тогда существует и притом единственная ФСС $\xi(H(s), H_0)$ непрерывно в $L_1(\mathbb{R}; (\lambda^2 + 1)^{-1})$ зависящая от $s \in [0, 1]$ и принимающая заданное значение $\xi(H_1, H_0)$ при $s = 0$.

○ С помощью леммы Гейне—Бореля существование такой ФСС прямо выводится из теоремы 3. Для доказательства единственности рассмотрим разность

$$\xi_2(\lambda; H(s), H_0) - \xi_1(\lambda; H(s), H_0) =: n(s)$$

двух разных ФСС. Проинтегрировав по $\lambda \in \mathbb{R}$ с весом $(\lambda^2 + 1)^{-1}$, найдем, что левая часть получившегося равенства непрерывна по s . Поскольку к тому же функция $n(s)$ целочисленна, то $n(s) = n(0) = 0$. •

Непрерывным продолжением вдоль кривых ФСС $\xi(H, H_0)$ определяется на содержащей H_1 связной компоненте пространства $\mathcal{L}(H_1)$. Мы не можем утверждать, что эта компонента исчерпывает $\mathcal{L}(H_1)$. Покажем, однако, что и на связной компоненте построенная таким образом ФСС будет многозначной. С этой целью достаточно указать замкнутую кривую $H(s)$ в $\mathcal{L}(H_0)$, $H(0) = H(1) = H_0$, на которой ФСС приобретает нетривиальное (но, разумеется, кратное целому числу) приращение.

Пример 6. Пусть, как и в примере 6.10, $U(s) = U_0(I + \tau(s)P)$. Тогда можно положить

$$H(s) = i(I + U(s))(I - U(s))^{-1},$$

коль скоро операторы $U(s)$ не имеют собственных чисел, равных 1. В этом случае приращение $\xi(H(s), H_0)$ на отрезке $[0, 1]$ равно приращению $\eta(U(s), U_0)$ и, следовательно, равно 1. Остается указать такое U_0 , при котором ни один из операторов $U(s)$ не имеет единичного собственного числа.

Пусть $\mathcal{H} = L_2(0, 2\pi)$, U_0 —умножение на $\exp(ix)$, $P = (\cdot, \psi)\psi$, $U = U_0(I + \tau P)$. Тогда уравнение $Uf = f$ равносильно тому, что $f + \tau(f, \psi)\psi = U_0^{-1}\psi$, или

$$\tau\psi(x) \int_0^{2\pi} \overline{\psi(y)} f(y) dy = (e^{-ix} - 1)f(x).$$

Отсюда следует, что $f(x) = c(e^{-ix} - 1)^{-1}\psi(x)$, а потому включение $f \in L_2(0, 2\pi)$ требует, чтобы

$$\int_0^{2\pi} |e^{ix} - 1|^{-2} |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

Это условие заведомо нарушается, если функция ψ непрерывна, но не обращается в нуль хотя бы на одном из концов. Так, в частности, будет при $\psi(x) = (2\pi)^{-1/2}$.

Отметим, что в этом примере оператор U вообще не имеет собственных значений, если функция $\psi(x)$ непрерывна и $\psi(x) \neq 0$ при $x \in [0, 2\pi]$.

§ 8. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА В САМОСОПРЯЖЕННОМ СЛУЧАЕ. УТОЧНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В §§ 2–4 мы построили ФСС для ядерных возмущений, а в § 7—для резольвентно сравнимых операторов. В настоящем параграфе мы рассмотрим промежуточную ситуацию.

1. Дополнительные по сравнению с (7.1) условия будем формулировать в терминах поведения функции $\|R(z) - R_0(z)\|_1$ при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$. В связи с этим заметим предварительно, что в силу тождества (6.4.8) уже при одном условии (7.1) эта функция заведомо ограничена на бесконечности.

Прежде всего предположим, что при каком-либо фиксированном $\kappa \in \mathbb{R}$ и при всех $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ имеет место неравенство

$$\alpha \|R(a) - R_0(a)\| < 1, \quad a = \kappa + i\alpha. \quad (1)$$

Через $\xi_a(H, H_0)$ обозначим ФСС, связанную с регулярной ветвью ФСС $\eta_r(U(a), U_0(a))$ соотношением (7.4). В силу теоремы 7.3 эта функция непрерывна на множестве $\mathcal{L}_{0,a}(H_0)$. Кроме того, в силу леммы 7.4 при различных α эти функции совпадают друг с другом, т.е. $\xi_a(H, H_0) =: \xi(H, H_0)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (7.1) и (1). Тогда при любом $\tau \in (-1, 1)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda; H, H_0)| (1 + |\lambda - \kappa|)^{-\tau-1} d\lambda \leq \\ \leq C(\tau, \alpha_0) \int_{\alpha_0}^{\infty} \alpha^{-\tau} \|R(\kappa + i\alpha) - R_0(\kappa + i\alpha)\|_1 d\alpha, \end{aligned} \quad (2)$$

когда скоро правая часть конечна.

○ Будем исходить из неравенства (7.11). Домножая его на $\alpha^{-\tau}$ и интегрируя по интервалу (α_0, ∞) , найдем, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \int_{\alpha_0}^{\infty} \alpha^{-\tau} [(\lambda - \kappa)^2 + \alpha^2]^{-1} d\alpha \leq \\ \leq \frac{\pi}{2} \int_{\alpha_0}^{\infty} \alpha^{-\tau} \|R(\kappa + i\alpha) - R_0(\kappa + i\alpha)\|_1 d\alpha. \end{aligned}$$

Для доказательства (2) остается учесть, что в левой части интеграл по α оценивается снизу через $c(\tau, \alpha_0)(1 + |\lambda - \kappa|)^{-\tau-1}$. •

Ясно, что при различных κ интегралы в левой части (2) сходятся одновременно. Таким образом, в условиях теоремы 1 ФСС

$$\xi \in L_1(\mathbb{R}; (1 + |\lambda|)^{-\tau-1}). \quad (3)$$

Аналогичным образом можно из результатов § 7 вывести, что $\xi \in L_1(\mathbb{R})$ при $V \in \mathfrak{S}_1$. Действительно,

$$\|R(i\alpha) - R_0(i\alpha)\|_1 \leq \|V\|_1 \alpha^{-2},$$

так что условие (1) (например, при $\kappa = 0$) заведомо выполнено. Неравенство (7.11) теперь показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| (\lambda^2 + \alpha^2)^{-1} d\lambda \leq 2^{-1} \pi \|V\|_1 \alpha^{-2}.$$

Поскольку $(\lambda^2 + \alpha^2)^{-1} \geq (2\alpha^2)^{-1}$ при $|\lambda| \leq \alpha$, отсюда следует, что

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \pi \|V\|_1.$$

В силу произвольности α это неравенство означает, что $\xi \in L_1(\mathbb{R})$. Кроме того, справедливо неравенство вида (2.6), хотя и с худшей оценочной постоянной.

2. Понятие определителя возмущения (1.1) имеет смысл при условии $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$. Обсудим возможность представления его логарифма $\ln D(z)$ в виде (2.4). Согласно лемме 1.2 в случае $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$ ветвь логарифма можно фиксировать условием $\arg D(z) \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow \infty$. Кроме того, при достаточно больших α_0 и всех κ справедливо неравенство (1). Поэтому корректно определена (см. п. 1) не зависящая от a ФСС $\xi(H, H_0)$. При одном условии $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$ правая часть (2) конечна лишь

для $\tau > 0$ и, следовательно, (3) выполняется лишь для $\tau > 0$. Этого немного не хватает для вывода представления (2.4), так как для корректного определения правой части (2.4) требуется, чтобы τ равнялось 0. Тем не менее представление (2.4) оказывается справедливым, если включение (3) при $\tau = 0$ предположить отдельно. Отметим, что в силу (2) такое включение обеспечивается требованием конечности при $\tau = 0$ интеграла в правой части (2).

Предложение 2. Пусть $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, и, кроме того, включение (3) выполнено при $\tau = 0$. Тогда для $\ln D(z)$ справедливо представление (2.4).

○ Ряду равенства симметрии (1.11), представление (2.4) достаточно проверить при $\operatorname{Im} z < 0$. Будем исходить из представления (7.14) для обобщенного определителя возмущения $\ln \tilde{D}_a(z)$. Напомним, что ветвь этой функции фиксируется условием $\ln \tilde{D}_a(\bar{a}) = 0$. На основании соотношений (1.20) и (3), где $\tau = 0$, представление (7.14) можно преобразовать к виду

$$\ln D(z) - \ln D(\bar{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)(\lambda - z)^{-1} d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda)(\lambda - \bar{a})^{-1} d\lambda.$$

Устремим здесь $\operatorname{Im} a$ к бесконечности. Тогда $\ln D(\bar{a}) \rightarrow 0$ в силу леммы 1.2, а второй интеграл в правой части стремится к нулю в силу теоремы Лебега. В пределе получаем (2.4). •

3. Укажем сейчас удобные условия, позволяющие выделить однозначную ветвь ФСС. Пример 7.6 показывает, что одного условия резольвентной сравнимости для этого недостаточно, т.е. множество $\mathcal{L}(H_1)$ является слишком широким. В то же время в § 2 однозначная и непрерывная функция $\xi(H, H_0)$ была построена на множестве операторов H , отличающихся от H_1 на ядерный. Сейчас мы установим обобщение этого результата.

Обозначим через $\mathcal{L}_1(H_1) = \mathcal{L}_{1,a}(H_1)$ подмножество тех $H \in \mathcal{L}(H_1)$, для которых $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_1)$ и при каком-либо фиксированном a

$$\|VR_1(a)\| < 1, \quad V = H - H_1, \quad R_1 = R_{H_1}, \quad \operatorname{Im} a \neq 0. \quad (4)$$

Напомним (см. п. 3 § 1.10), что при симметричности V на $\mathcal{D}(H_1)$ и условии (4) оператор H , определенный на $\mathcal{D}(H_1)$ равенством $Hf = H_1f + Vf$, самосопряжен на $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_1)$. Поскольку неравенства (4) для a и $\bar{a}$ равносильны друг другу, можно, не ограничивая общности, считать $\operatorname{Im} a > 0$.

На основании леммы 7.5 единственность ФСС вытекает из связности рассматриваемого множества самосопряженных операторов.

Лемма 3. Множество $\mathcal{L}_{1,a}(H_1)$ связно.

○ При $H \in \mathcal{L}_{1,a}(H_1)$, $V = H - H_1$ и $s \in [0, 1]$ операторы $H(s) = H_1 + sV$ самосопряжены на $\mathcal{D}(H_1)$ и для пары $H_1, H(s)$ выполнено условие (4). Остается проверить, что операторы $H(s) \in \mathcal{L}(H_1)$ и непрерывно в этой метрике зависят от s . Обозначая $R^{(s)} = R_{H(s)}(a)$, запишем резольвентное тождество

$$\begin{aligned} R^{(s_2)} - R^{(s_1)} &= -(s_2 - s_1)R^{(s_2)}VR^{(s_1)} = \\ &= (s_2 - s_1)[R^{(s_2)}(H - a)](R - R_1)[(H_1 - a)R^{(s_1)}]. \end{aligned}$$

Сомножитель $R - R_1 \in \mathfrak{S}_1$ и не зависит от s . Поэтому нужно лишь убедиться, что операторы $(H(s_1) - a)R^{(s_2)}$ ограничены равномерно по s_1 и s_2 . Вновь с помощью резольвентного тождества найдем, что

$$\begin{aligned} (H(s_1) - a)R^{(s_2)} &= I + (s_1 - s_2)VR^{(s_2)} = \\ &= I + (s_1 - s_2)VR_1(I + s_2VR_1)^{-1}. \end{aligned}$$

При $s_j \in [0, 1]$ равномерная оценка для нормы правой части вытекает из условия (4). •

В силу резольвентного тождества и очевидной оценки $|\operatorname{Im} a| \|R(a)\| \leq 1$ при условии (4) выполняется и неравенство (7.17), т.е.

$$\mathcal{L}_{1,a}(H_1) \subset \mathcal{L}_{0,a}(H_1).$$

Поэтому существование однозначной непрерывной ФСС прямо вытекает из теоремы 7.3. Таким образом, установлена

Теорема 4. Пусть самосопряженные операторы H_0 и H_1 резольвентно сравнимы и задано определенное значение $\xi(H_1, H_0)$, а a — какое-либо комплексное число с $\operatorname{Im} a \neq 0$. Тогда на множестве операторов $H \in \mathcal{L}_{1,a}(H_1)$ существует однозначная непрерывная в $L_1(\mathbb{R}; (\lambda^2 + 1)^{-1})$ ветвь ФСС $\xi(H, H_0)$. При заданном значении $\xi(H_1, H_0)$ такая ФСС единственна.

§ 9. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Функция спектрального сдвига резольвентно сравнимых операторов H_0 и H вводилась в § 7 через из преобразования

Кэли. Возможно и определение ФСС через другие функции от операторов, что позволяет отказываться от условия резольвентной сравнимости. В общей обстановке этот вопрос рассматривается в § 11. Остановимся здесь на полуограниченном случае. За счет сдвига на постоянную операторы H_0 и H можно считать положительно определенными. В этом случае естественное обобщение условия (7.1) дается соотношением

$$H^{-\tau} - H_0^{-\tau} \in \mathfrak{S}_1, \quad (1)$$

где τ —какое-либо не равное нулю вещественное число.

При рассмотрении дробных степеней положительных операторов часто используется интегральное представление, вытекающее (подробности см. в [4]) из спектральной теоремы. Именно, для $A = A^* > 0$ при любом $\theta \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} A^\theta &= \pi^{-1} \sin \pi \theta \int_0^\infty t^{\theta-1} A(A+t)^{-1} dt, \\ A^{-\theta} &= \pi^{-1} \sin \pi \theta \int_0^\infty t^{-\theta} (A+t)^{-1} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

2. Построение ФСС проводится сейчас по схеме § 7. При этом роль преобразований Кэли U_0 и U операторов H_0 и H играют операторы $h_0 = H_0^{-\tau}$ и $h = H^{-\tau}$. На основании теоремы 2.1 при условии (1) ФСС для пары h_0, h существует, принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ и равна нулю при $\lambda \leq 0$. Для исходной пары H_0, H ФСС определим равенствами

$$\xi(\lambda; H, H_0) = -\operatorname{sgn} \tau \xi(\lambda^{-\tau}; H^{-\tau}, H_0^{-\tau}), \quad \lambda \geq 0, \quad (3)$$

$$\xi(\lambda; H, H_0) = 0, \quad \lambda \leq 0. \quad (4)$$

В силу неравенства (2.6) функция абсолютно интегрируема по $\mathbb{R}_+$ с весом $\lambda^{-\tau-1}$, т.е. выполняется соотношение (8.3).

Предположим теперь, что для какой-либо функции $g(\mu)$ формула следа (2.1) справедлива для пары h_0, h , т.е.

$$\operatorname{Tr}[g(h) - g(h_0)] = \int_0^\infty \xi(\mu; h, h_0) dg(\mu).$$

Проводя в правой части замену $\mu = \lambda^{-\tau}$, найдем, что для пары H_0, H и ФСС (3), (4) формула следа (2.1) справедлива, если

$f(\lambda) = g(\mu)$. В частности, формула (2.1) заведомо верна при $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что если соотношение (1) выполнено при двух разных значениях τ , то соответствующие ФСС (3) равны друг другу. Кроме того, если (1) справедливо при $\tau = 1$, то с точностью до аддитивной постоянной ФСС (3), (4) совпадает с ФСС (7.4).

Уточним теперь класс допустимых функций f . Будем исходить из указанных в конце § 3 условий справедливости формулы следа для операторов с ядерной разностью. В случае $\tau > 0$ операторы h_0 и h ограничены, а «особая точка» $\lambda = \infty$ переходит при замене переменных $\mu = \lambda^{-\tau}$ в точку $\mu = 0$. Чтобы функция $g'(\mu)$ была гельдеровски непрерывной, достаточно потребовать существования у $g(\mu)$ двух производных при $\mu > 0$, а также оценку $|g''(\mu)| \leq C\mu^{-1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, при $\mu \rightarrow +0$. В терминах исходной функции f это означает, что для какого-нибудь $\varepsilon > 0$

$$|(\lambda^{\tau+1} f'(\lambda))'| \leq C\lambda^{-1-\varepsilon}, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (5)$$

В случае $\tau < 0$ помимо равномерной гельдеровской непрерывности функции $g'(\cdot)$ нужно обеспечить включение $g' \in L_p(\mathbb{R}_+)$ для какого-нибудь $p < \infty$. Оба эти условия выполняются, если функция g имеет две производные, причем $|g'(\mu)| \leq C\mu^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, при $\mu \rightarrow \infty$, а $g''(\mu)$ равномерно ограничена. В терминах f достаточно предположить, что

$$\begin{aligned} |f'(\lambda)| &\leq C\lambda^{-\tau-1-\varepsilon}, \\ |(\lambda^{\tau+1} f'(\lambda))'| &\leq C\lambda^{-\tau-1}, \end{aligned} \quad \varepsilon > 0, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (6)$$

Сформулируем теперь полученные результаты.

Теорема 1. Пусть для положительно определенных операторов H_0 и H при каком-либо вещественном числе $\tau \neq 0$ выполнено условие (1). Определим ФСС равенствами (3), (4). Для нее справедливо соотношение (8.3). Предположим, что функция f имеет две локально ограниченные производные. Тогда при $\tau > 0$ формула следа (2.1) справедлива, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется условие (5). При $\tau < 0$ формула (2.1) справедлива, если для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются условия (6).

3. Теорема 1 дополняет и уточняет теорему 7.1 в полуограниченном случае. При $\tau = 1$ соотношение (8.3) сводится к (7.6), а условие (6)—к (7.8). При $\tau > 1$ операторы H_0 и H не являются, вообще говоря, резольвентно сравнимыми. При

этом информация о поведении ФСС уменьшается, а условия относительно функций f становятся более жесткими. Случай $\tau \in (-1, 1)$ занимает промежуточное положение между случаями $V \in \mathfrak{S}_1$ и (7.1). Информация о ξ и условия относительно f также имеют промежуточный характер. Наконец, при $\tau < -1$ ФСС убывает на бесконечности быстрее, чем при $V \in \mathfrak{S}_1$, а класс допустимых функций f шире (в отношении поведения на бесконечности), чем в § 3.

Таким образом, при увеличении в условии (1) параметра τ утверждение теоремы 1 становится более слабым. Это не удивительно, так как и само условие (1) при этом ослабевает. Это вытекает из следующего элементарного утверждения:

Предложение 2. Если включение (1) справедливо при каком-либо τ_1 , то оно выполняется при всех $\tau \geq \tau_1$.

○ Если $\tau_1 > 0$, то операторы $h_{0,1} = H_0^{-\tau_1}$ и $h_1 = H^{-\tau_1}$ ограничены. Поэтому из тождества

$$h_1^2 - h_{0,1}^2 = h_1(h_1 - h_{0,1}) + (h_1 - h_{0,1})h_{0,1}$$

вытекает, что $h_1^2 - h_{0,1}^2 \in \mathfrak{S}_1$. Повторяя это рассуждение, установим, что $h_1^m - h_{0,1}^m \in \mathfrak{S}_1$, $m = 2^n$, при всех целых n . С помощью теоремы 1.6.4 теперь убеждаемся, что $h_1^\alpha - h_{0,1}^\alpha \in \mathfrak{S}_1$ при всех $\alpha \geq 1$. Это означает, что (1) выполняется при $\tau \geq \tau_1 > 0$.

В случае $\tau_1 < 0$ проверим прежде всего включение (1) для $|\tau| < |\tau_1|$. Из представлений (2) вытекает, что для операторов $h_{0,1} = H_0^{-\tau_1}$, $h_1 = H^{-\tau_1}$ при $\theta \in (-1, 1)$

$$h_1^\theta - h_{0,1}^\theta = \pi^{-1} \sin \pi \theta \int_0^\infty t^\theta [(h_{0,1} + t)^{-1} - (h_1 + t)^{-1}] dt. \quad (7)$$

В силу резольвентного тождества

$$(h_1 + t)^{-1} - (h_{0,1} + t)^{-1} = -(h_1 + t)^{-1}(h_1 - h_{0,1})(h_{0,1} + t)^{-1} \quad (8)$$

подынтегральная функция в (7) непрерывна в $\mathfrak{S}_1$ при $t > 0$, а ее норма в $\mathfrak{S}_1$ не превосходит

$$t^\theta \|h_1 - h_{0,1}\|_1 \|(h_1 + t)^{-1}\| \|(h_{0,1} + t)^{-1}\|. \quad (9)$$

Функция $\|(h_1 + t)^{-1}\|$ при $\tau_1 < 0$ ограничена (в нуле) и убывает как t^{-1} при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, функция (9) интегрируема по $\mathbb{R}$ и в силу (7) $h_1^\theta - h_{0,1}^\theta \in \mathfrak{S}_1$. Это означает, что (1) выполняется при всех $|\tau| < |\tau_1|$. Для распространения (1) на

$\tau \geq -\tau_1 > 0$ остается воспользоваться уже доказанной частью предложения 2. •

4. Вернемся к рассматривавшейся в п. 1 § 8 задаче об уточнении теоремы 7.1 в терминах поведения функции $\|R(z) - R_0(z)\|_1$ на бесконечности. В теореме 8.1 были изучены свойства ФСС. Покажем сейчас, что в полуограниченном случае, ставя условия при $z \rightarrow -\infty$, можно расширить запас допустимых функций f . Прежде всего приведем для $\tau \in (-1, 1)$ условия справедливости включения (1). Операторы H_0 и H по-прежнему считаем положительно определенными.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (7.1) и при некотором $\tau \in (-1, 1)$

$$\int_0^{\infty} s^{-\tau} \|R(-s) - R_0(-s)\|_1 ds < \infty. \quad (10)$$

Тогда справедливо включение (1).

○ Из представлений (2) вытекает (ср. с (7)), что

$$H^{-\tau} - H_0^{-\tau} = \pi^{-1} \sin \pi \tau \int_0^{\infty} s^{-\tau} [R(-s) - R_0(-s)] ds. \quad (11)$$

В силу (10) правая часть (11) принадлежит $\mathfrak{S}_1$. •

Отметим, что условие (10) содержательно только при $s \rightarrow \infty$. Объединив лемму 3 с теоремой 1, сразу получим следующее утверждение:

Теорема 4. Пусть выполнены условия (7.1) и (10), где $\tau \in (-1, 1)$ и $\tau \neq 0$. Определим ФСС равенствами (3), (4). Тогда формула следа справедлива на классе функций f , указанном для данного τ в теореме 1.

§ 10. ФУНКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА ПРИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

В § 2 было показано, что при $V = H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $\pm V \geq 0$ ФСС для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству $\pm \xi(\lambda; H, H_0) \geq 0$. В этом параграфе мы установим обобщение этого результата на достаточно широкий класс возмущений.

При одном условии (7.1) понятие знакоопределенности возмущения $V = H - H_0$ смысла не имеет. Поэтому сама постановка задачи о знаке ФСС требует дополнительных предположений. Мы рассмотрим два варианта понимания знакоопределенности V . В п. 1 предполагается некоторая подчиненность V оператору H_0 . В п. 2 и 3 обсуждается полуограниченный случай, когда гамильтонианы сравниваются в терминах их квадратичных форм. Результаты о полуограниченном случае непосредственно применимы к многомерному (в любой размерности) оператору Шредингера.

При принятых в этом параграфе условиях на всем множестве рассматриваемых гамильтонианов H выделяется однозначная и непрерывная (в подходящем смысле) ветвь ФСС. Это позволяет говорить о знаке ФСС. Для произвольной ветви отсюда вытекает ее полуограниченность.

1. В этом пункте мы опираемся на конструкцию построения гамильтониана H , изложенную в § 1.10. При рассмотрении знакоопределенных возмущений естественны симметричные условия, когда $\theta_0 = \theta = 1/2$. Именно, пусть $V = G^*VG$, где V — самосопряженное сжатие во вспомогательном пространстве $\mathfrak{G}$, а $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{G}$. Предположим, что оператор G определен на $\mathcal{D}(|H_1|^{1/2})$ и при каком-либо a удовлетворяет оценке

$$\delta = \|G|H_1 - a|^{-1/2}\| < 1, \quad \text{Im } a \neq 0. \quad (1)$$

Отметим, что оценки (1) для a и $\bar{a}$ равносильны друг другу.

Согласно предложению 1.10.4 при условии (1) существует и (единственен) самосопряженный оператор H , отвечающий сумме $H_1 + V$ в смысле определения 1.9.2. Для его резольвенты справедливы различные тождества § 1.9, где надо положить $G_0 = VG$. Как и в § 7.8, считаем, что $V \geq 0$ ($V \leq 0$), если $V \geq 0$ ($V \leq 0$).

Будем предполагать, что

$$GR_1(z) \in \mathfrak{S}_2, \quad z \in \rho(H_1). \quad (2)$$

Тогда в силу тождества (1.9.15) резольвенты операторов H_1 и H различаются на ядерный оператор, т.е. $H \in \mathcal{L}(H_1)$. Через $\mathcal{L}_2^\pm = \mathcal{L}_{2,a}^{(\pm)}(H_1)$ обозначаем множество тех H , для которых выполнены условия (1), (2) и $\pm V \geq 0$. Рассматриваемые сейчас множества, конечно, аналогичны множеству операторов $\mathcal{L}_1$, на

котором ФСС строилась в п.3 § 8. Теперь, однако, дополнительно делается предположение о знаке возмущения. Множества $\mathcal{L}_2^{(\pm)}$ связны. Действительно, для возмущения $V_s = sV$, $s \in [0, 1]$, и $G_s = s^{1/2}G$ очевидно выполнены условия вида (1), (2). Поэтому $H(s) = H_1 + sV \in \mathcal{L}_2^{(\pm)}$, и в силу (1.9.15) кривая $H(s)$ непрерывна по $s \in [0, 1]$ в метрике $\mathcal{L}(H_1)$. Детальное доказательство этого факта может быть получено аналогично лемме 8.3.

Одновременно с доказательством неравенства (2.17) (или противоположного) выясняется, что на множестве $\mathcal{L}_2^{(\pm)}$ выполняется условие (7.17). Согласно теореме 7.3 это и выделяет однозначную непрерывную ветвь ФСС. Кроме того, из связности $\mathcal{L}_2^{(\pm)}$ вытекает, что заданием значения $\xi(H_1, H_0)$ ФСС фиксируется на $\mathcal{L}_{2,a}^{(\pm)}(H_1)$ единственным образом.

Теорема 1. Пусть самосопряженные операторы H_0 и H_1 резольвентно сравнимы и задано определенное значение $\xi(H_1, H_0)$, а a — какое-либо комплексное число с $\operatorname{Im} a \neq 0$. Тогда на множестве операторов $H \in \mathcal{L}_{2,a}^{(\pm)}(H_1)$ существует и единственна однозначная непрерывная в $L_1(\mathbb{R}; (\lambda^2 + 1)^{-1})$ ветвь ФСС $\xi(H, H_0)$, причем

$$\pm(\xi(\lambda; H, H_0) - \xi(\lambda; H_1, H_0)) \geq 0, \quad \text{п.в. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

○ Для корректного определения ФСС надо прежде всего проверить неравенство (7.17). Вместо резольвент $R(a)$ и $R_1(a)$ нам удобнее сейчас работать с преобразованием Кэли $U = U(a)$ и $U_1 = U_1(a)$, $\operatorname{Im} a > 0$, операторов H и H_1 . Для доказательства (7.17) нужно показать, что -1 не является собственным значением оператора UU_1^{-1} . Тогда согласно теореме 7.3 ФСС определяется равенством (7.18), где $\xi_a(H, H_1)$ связана с регулярной ветвью $\eta_r(U, U_1)$ соотношением вида (7.4). Отсюда следует, что неравенство (3) эквивалентно тому, что $\pm\eta_r(U, U_1) \geq 0$. В силу замечания 5.3 (см. неравенство (5.17)) или предложения 6.4 для доказательства последних неравенств достаточно показать, что

$$\pm \operatorname{Im}(UU_1^{-1}) \geq 0, \quad H \in \mathcal{L}_2^{(\pm)}(H_1). \quad (4)$$

Пусть для определенности $H \in \mathcal{L}_2^{(+)}(H_1)$. Заменяя, если нужно, G на $\mathcal{V}^{1/2}G$, можно считать $\mathcal{V} = I$. Вычислим оператор UU_1^{-1} . Применяя резольвентное тождество, найдем, что

при $R_1 = R_1(\bar{a})$, $R = R(\bar{a})$, $a = \kappa + i\alpha$,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 U &= I - 2i\alpha R = I - 2i\alpha R_1 + 2i\alpha R V R_1 = \\ &= \bar{\mu}_1 U_1 + 2i\alpha R V R_1,\end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned}U U_1^{-1} &= I + 2i\alpha R V R_1 (I + 2i\alpha R_1^*) = I + 2i\alpha R V R_1^* = \\ &= I + 2i\alpha R_1 (V - V R V) R_1^*.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно (1.9.14) при $V = G^* G$

$$U U_1^{-1} = I + 2i\alpha (G R_1(a))^* (I + G R_1(\bar{a}) G^*)^{-1} (G R_1(a)). \quad (5)$$

Отсюда вытекает, что при $g = (I + G R_1(\bar{a}) G^*)^{-1} G R_1(a) f$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(U U_1^{-1} f, f) &= 2\alpha \operatorname{Re}([I + G R_1(\bar{a}) G^*] g, g) \geq \\ &\geq 2\alpha(1 - \delta^2) \|g\|^2.\end{aligned} \quad (6)$$

в силу условия (1). Поскольку $\delta < 1$, это доказывает (4).

Осталось проверить, что -1 не является собственным числом оператора $U U_1^{-1}$. В противном случае при $U U_1^{-1} f = -f$ из (6) следует, что $g = 0$. В то же время согласно (5)

$$U U_1^{-1} f = f + 2i\alpha (G R_1(a))^* g$$

и, следовательно, $U U_1^{-1} f = f$ при $g = 0$. Вместе с исходным предположением $U U_1^{-1} f = -f$ это показывает, что $f = 0$. •

Несколько огрубляя полученное утверждение, можно сформулировать его без выделения ветви ФСС. Именно, при $H_1 \in \mathcal{L}(H_0)$ и $H \in \mathcal{L}_{2,a}^{(\pm)}(H_1)$ левая часть (3) полуограничена снизу.

В теореме 1 условие (1) опустить нельзя. В следующем примере выполняются все предположения теоремы 1, за исключением (1). Впрочем, оператор $|V|^{1/2} H_0^{-1/2}$ остается в нем ограниченным.

Пример 2. Пусть H_0 — положительный оператор с дискретным спектром и такой, что $H_0 \in \mathfrak{S}_1$. Тогда при $H = -H_0$ разность $H^{-1} - H_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$, $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$ и $H \leq H_0$. Функция спектрального сдвига $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, H_0)$ для этой задачи полностью определяется формулой (2.20). Считая $\xi(0) = 0$, найдем, что $\xi(\lambda) \geq 0$ при всех λ и $\xi(\lambda) \rightarrow +\infty$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. В то же время для отрицательного возмущения ФСС должна была бы быть полуограниченной сверху.

Как и в случае ядерных возмущений (см. конец п. 1 § 4), результат теоремы 1 о знаке ФСС связан с направлением вращения детерминанта матрицы рассеяния. Действительно, в условиях теоремы 1 для семейства операторов $H(\gamma) = H_1 + \gamma V$, где $V = H - H_1$, $\gamma \in [0, 1]$, при п.в. λ корректно определен $\text{Det } S(\lambda; H(\gamma), H_0)$, причем в силу теоремы 7.2 сохраняется соотношение (2.3). Поэтому в рассматриваемой обстановке результат теоремы 1 о возрастании (убывании) ФСС для знака плюс (знака минус) при увеличении γ эквивалентен результату теоремы 7.8.9 о направлении вращения детерминанта.

2. Рассмотрим теперь полуограниченный случай. За счет сдвига на постоянную операторы H_0 и H можно опять считать положительно определенными. Следуя обычной терминологии (см., например, [4]), знакоопределенность возмущения будем в этом случае понимать в смысле квадратичных форм. По определению, неравенство $H_2 \geq H_1$ означает, что $\mathcal{D}(H_2^{1/2}) \subset \mathcal{D}(H_1^{1/2})$ и

$$\|H_2^{1/2} f\| \geq \|H_1^{1/2} f\|, \quad f \in \mathcal{D}(H_2^{1/2}).$$

Отметим, что при $H_2 \geq H_1$ для обратных операторов выполнено противоположное неравенство: $H_1^{-1} \geq H_2^{-1}$.

В условиях следующего утверждения ФСС была построена в § 9. Подчеркнем, что резольвентная сравнимость операторов H_0 и H сейчас не предполагается.

Теорема 3. Пусть при каком-либо $\tau \neq 0$ выполнено включение (9.1). Тогда при $H \geq H_0$ (при $H \leq H_0$) для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство $\xi(\lambda; H, H_0) \geq 0$ (соответственно $\xi(\lambda; H, H_0) \leq 0$).

При $\tau = 1$ (когда операторы резольвентно сравнимы) теорема 3 является прямым следствием теоремы 2.1, примененной к паре операторов H_0^{-1}, H^{-1} , и соотношений (9.3), (9.4). В силу предложения 9.2 случай $\tau < 1$, $\tau \neq 0$, сводится к $\tau = 1$. Таким образом, содержательным является лишь рассмотрение значений параметра $\tau > 1$. В этом случае редукцией к теореме 2.1 обойтись не удастся. Причина этого в том, что при $\tau > 1$ из условия $H \geq H_0$, вообще говоря, не вытекает, что для операторов $h = H^{-\tau}$, $h_0 = H_0^{-\tau}$ будет $h \leq h_0$.

Напомним, что в § 2 изучение знака ФСС основывалось на представлении (2.15) в виде ряда по ФСС для одномерных возмущений. При $V \in \mathfrak{S}_1$ этот ряд был абсолютно сходящимся в

$L_1(\mathbb{R})$. В приводимом далее доказательстве теоремы 3 похожие соображения применяются к паре ограниченных положительных операторов $A_0 = H_0^{-1}$, $A = H^{-1}$. При условии

$$A^\tau - A_0^\tau \in \mathfrak{S}_1 \quad (7)$$

можно показать, что оператор $A - A_0$ компактен. Пусть α_m — каким-либо образом занумерованные (например, в порядке убывания абсолютных величин) собственные числа $A - A_0$. Через ψ_m обозначим отвечающие α_m собственные векторы $A - A_0$. Положим

$$A_n = A_0 + \sum_{m=1}^n \alpha_m(\cdot, \psi_m) \psi_m. \quad (8)$$

Согласно теореме 9.1 при условии (7) ФСС определяется соотношениями

$$\xi(\lambda; A, A_0) = \xi(\lambda^\tau; A^\tau, A_0^\tau), \quad \lambda \geq 0, \quad (9)$$

и $\xi(\lambda; A, A_0) = 0$ при $\lambda \leq 0$. Подчеркнем, что условие $A_0 \geq A$ (или $A \geq A_0$) сейчас не предполагается. Установим для этой ФСС разложение вида (2.15). Доказательство следующего утверждения откладывается до п. 3.

Теорема 4. Пусть для некоторой пары положительных ограниченных операторов A_0, A при каком-либо $\tau > 1$ выполнено условие (7). Тогда оператор $A - A_0$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ для любого $p > \tau$, а ФСС допускает представление в виде ряда

$$\xi(\lambda; A, A_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi(\lambda; A_n, A_{n-1}), \quad (10)$$

сходящегося в L_1 с весом λ^{l-1} , где l — ближайшее к τ натуральное нечетное число, большее τ .

Поясним, что в теореме 4 речь идет о пространстве L_1 по некоторому конечному промежутку $(-c, c)$. Поэтому весовая функция λ^{l-1} ограничена, но обращается в нуль при $\lambda \rightarrow 0$. Тем самым для больших l утверждение о сходимости становится слабее. При отрицательных λ из теоремы 4 следует, что ряд (10) сходится к нулю. Для знакоопределенных возмущений $A - A_0$ операторы $A_n \geq 0$ при всех n , и, следовательно, все слагаемые в правой части (10) равны нулю при $\lambda \leq 0$. Подчеркнем также, что в отличие от § 2 в теореме 4 абсолютной сходимости не утверждается.

Для вывода из (10) информации о знаке ФСС $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; A, A_0)$ нужно учесть, что в силу теоремы 2.1 при $\pm \alpha_n \geq 0$ справедливо неравенство $0 \leq \pm \xi(\lambda; A_n, A_{n-1}) \leq 1$. Поэтому теорема 4 имеет

Следствие 5. Пусть в условиях теоремы 4 оператор $A - A_0$ имеет лишь конечное число k_+ положительных (k_- отрицательных) собственных значений. Тогда $\xi(\lambda) \leq k_+$ (соответственно $\xi(\lambda) \geq -k_-$) для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом ряд (10) сходится абсолютно в L_1 с весом $\lambda^{(l-1)}$ и, следовательно, для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Отсюда прямо вытекает теорема 3. Нужно лишь воспользоваться тем, что в силу соотношений (9.3) и (9)

$$\xi(\lambda; H, H_0) = -\xi(\lambda^{-1}; A, A_0)$$

и $A \geq A_0$ (и $A \leq A_0$) при $H \leq H_0$ (при $H \geq H_0$).

3. Установим теперь теорему 4. Ее доказательству предположим два технических утверждения общего характера.

Лемма 6. В условиях теоремы 4 при любом $s \geq 0$

$$A^s(A - A_0) \in \mathfrak{S}_r, \quad (11)$$

где $r > \tau(s+1)^{-1}$, или $s \leq \tau - 1$, и $r = 1$, если $s > \tau - 1$.

○ Положим $A_0^\tau = h_0$, $A^\tau = h$, $\tau^{-1} = \theta$, $s\tau^{-1} = \alpha$. Не ограничивая общности, можно считать $\alpha < 1$. Будем исходить из соотношения (9.7). Домножим его слева на h^α и обозначим

$$\Omega(t) = h^\alpha(h+t)^{-1}(h-h_0)(h_0+t)^{-1}.$$

Для оценки $\Omega(t)$ учтем очевидные неравенства

$$\|(h+t)^{-1}\| \leq t^{-1}, \quad \|h^\alpha(h+t)^{-\alpha}\| \leq 1. \quad (12)$$

Поскольку $h - h_0 \in \mathfrak{S}_1$ в силу первого из них $\|\Omega(t)\|_1 \leq Ct^{-2}$. Тем самым интеграл от $t^\theta \Omega(t)$ по $t \in [1, \infty]$ сходится в ядерной норме для любых $\alpha \geq 0$ и $\theta \in (0, 1)$. При $t \leq 1$ с помощью второго неравенства (12) найдем, что

$$\|\Omega(t)\|_1 \leq Ct^{\alpha-2}. \quad (13)$$

Поэтому при $\alpha + \theta > 1$ интеграл от $t^\theta \Omega(t)$ по промежутку $(0, 1)$ также сходится в $\mathfrak{S}_1$. В этом случае

$$h^\alpha(h^\theta - h_0^\theta) \in \mathfrak{S}_r \quad (14)$$

при $r = 1$. В случае $\alpha + \theta \leq 1$ интеграл по промежутку $(0, 1)$ сходится лишь в более слабой метрике. Оценивая норму оператора (9.8) через $2t^{-1}$, найдем, что $\|\Omega(t)\| \leq Ct^{-1}$. В силу (13) отсюда вытекает, что

$$\|\Omega(t)\|_r^r \leq \|\Omega(t)\|_1 \|\Omega(t)\|^{r-1} \leq Ct^{\alpha-r-1}.$$

Следовательно, включение (14) выполняется при $\alpha + \theta r > 1$. В исходных обозначениях это означает, что включение (11) справедливо при $r = 1$, если $s > \tau - 1$, и при $r > \tau - s$, если $s \leq \tau - 1$.

Утверждение о случае $s \leq \tau - 1$ можно усилить, интерполируя его между двумя крайними значениями $s_1 = 0$ и $s_2 = \tau - 1$. С этой целью рассмотрим голоморфную в полосе $s_1 < \operatorname{Re} s < s_2$ оператор-функцию $\Phi(s) = A^s(A - A_0)$. Эта функция равномерно ограничена по операторной норме, а на граничных прямых $\operatorname{Re} s = s_j$ ее значения принадлежат классам $\mathfrak{S}_{r_j}$, где r_1 и r_2 —любые числа, большие τ и 1 соответственно. Следовательно, согласно теореме 1.6.4 для любого $s \in [s_1, s_2]$ включение $\Phi(s) \in \mathfrak{S}_r$ справедливо при $r > \tau(s + 1)^{-1}$. •

Лемма 7. Пусть A, A_0 и A_n —ограниченные операторы и $A \geq 0$. Обозначим через r_t какую-либо непрерывную функцию параметра $t \geq 1$, удовлетворяющую условиям $r_t \geq 1$ и

$$r_{t+s}^{-1} \leq r_t^{-1} + r_s^{-1}. \quad (15)$$

Предположим, что при $l = 1$ справедливы включения

$$A^s(A^l - A_0^l) \in \mathfrak{S}_{r_{l+s}}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Тогда эти включения выполняются при всех натуральных l (и всех s). Кроме того, из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^s(A^l - A_n^l)\|_{r_{l+s}} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

для $l = 1$ следует, что эти соотношения выполняются для всех натуральных l (и всех s).

○ Пользуясь индукцией по l , оправдаем переход от l к $l + 1$. Применим очевидное тождество

$$\begin{aligned} A^s(A^{l+1} - A_0^{l+1}) &= A^{s+1}(A^l - A_0^l) + A^s(A - A_0)A^l - \\ &\quad - A^s(A - A_0)(A^l - A_0^l). \end{aligned} \quad (18)$$

Первое слагаемое в правой части принадлежит классу $\mathfrak{S}_{r_{l+s+1}}$ по индукционному предположению. Рассмотрим второе. По условию оператор $A^{s+l}(A - A_0)$, а потому и сопряженный к нему $(A - A_0)A^{s+l}$, принадлежат классу $\mathfrak{S}_{r_{l+s+1}}$. В силу теоремы 1.6.4, примененной к оператор-функции $A^{s+l-z}(A - A_0)A^z$ в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq s + l$, тому же классу $\mathfrak{S}_{r_{l+s+1}}$ принадлежит и

оператор $A^s(A - A_0)A^l$. При оценке третьего слагаемого в правой части (18) воспользуемся предложением 1.6.3. Поскольку по условию $A^s(A - A_0) \in \mathfrak{S}_{r,s+1}$ и $A^l - A_0^l \in \mathfrak{S}_{r_l}$, из (15) следует, что их произведение принадлежит $\mathfrak{S}_{r_l+s+1}$. Доказательство соотношения (17) проводится вполне аналогично. Надо опять воспользоваться индукцией по l , а тождество (18) применить к паре A, A_n . •

Замечание 8. Фактически для доказательства (16) и (17) при каких-либо $l > 1$ и $s = s_0$ достаточно потребовать их выполнения при $l = 1$ и $0 \leq s \leq l - 2$, $s_0 \leq s \leq s_0 + l - 1$. Отметим еще, что считать в лемме 7 число s целым не обязательно.

Теперь нетрудно доказать теорему 4.

○ Из леммы 6 для случая $s = 0$ сразу вытекает, что $A - A_0 \in \mathfrak{S}_r$ при любом $r > \tau$. Поэтому операторы (8) корректно определены. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^l - A_n^l\|_1 = 0. \quad (19)$$

Выберем параметр $\varepsilon > 0$, так, чтобы $l \geq \tau + \varepsilon$, и положим $r_\sigma = (\tau + \varepsilon)\sigma^{-1}$ для $\sigma \leq \tau + \varepsilon$ и $r_\sigma = 1$ для $\sigma \leq \tau + \varepsilon$. Такая функция заведомо удовлетворяет условию (15). На основании леммы 6 при любом $s \geq 0$ справедливо включение $A^s(A - A_0) \in \mathfrak{S}_{r,s+1}$. Обозначим через P_n ортогональный проектор на подпространство, натянутое на векторы $\psi_1, \dots, \psi_n$. Тогда $P_n \rightarrow I$ сильно при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, в силу леммы 6.1.3 при всех $s \geq 0$ операторы

$$A^s(A - A_n) = A^s(A - A_0)(I - P_n)$$

сходятся к нулю по норме класса $\mathfrak{S}_{r,s+1}$. Теперь соотношение (19) вытекает из леммы 7. Установим, наконец, разложение (10). Согласно предложению 2.6 из (19) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\mu; A^l, A_0^l) - \xi(\mu; A_n^l, A_0^l)| d\mu = 0.$$

Проведем здесь замену переменной $\mu = \lambda^l$ и учтем, что при $\tau = l$ справедливо равенство (9). Кроме того, аналогичное равенство справедливо (при п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$) для пары A_0, A_n . Для доказательства разложения (10) остается заметить, что в силу предложения 2.5 ФСС $\xi(\lambda; A_n, A_0)$ равна сумме ФСС $\xi(\lambda; A_m, A_{m-1})$ по $m = 1, \dots, n$. •

З а м е ч а н и е 9. В условиях следствия 5 можно считать, что l — ближайшее к τ натуральное число, большее τ , т.е. от нечетности l можно отказаться. Действительно, при доказательстве теоремы 4 нечетность l требовалась при замене $\mu = \lambda^l$ из-за того, что вообще говоря, операторы A_n при всех n могли иметь нетривиальные отрицательные части. Поэтому нужно лишь заметить, что в условиях следствия 5 при достаточно больших n будет $A_n \geq 0$.

§ 11. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СДВИГА

1. Остановимся здесь на случае, когда условие резольвентной сравнимости (7.1) нарушается. Как и для полуограниченных операторов (см. § 9), дальнейшее расширение условий справедливости формулы следа (2.1) может быть достигнуто с помощью предварительного построения ФСС для подходящих функций от операторов H_0 и H . В самом деле, пусть для заданной пары самосопряженных операторов H_0 и H при какой-либо вещественной функции φ операторы $h_0 = \varphi(H_0)$ и $h = \varphi(H)$ корректно определены и имеет место включение

$$\varphi(H) - \varphi(H_0) \in \mathfrak{S}_1. \quad (1)$$

Тогда по теореме 2.1 для новой пары h_0, h существует ФСС $\xi(\mu; h, h_0)$, строящаяся через определитель возмущения $D_{h/h_0}(\zeta)$ по формуле вида (2.5). При этом для любой функции g из указанных в § 3 (например, в теореме 3.3) классов справедливо представление вида (2.1) для $\text{Tr}[g(h) - g(h_0)]$. В терминах исходной пары это означает, что верна

Лемма 1. Пусть выполнено соотношение (1), а функция g удовлетворяет условиям теоремы 3.3. Тогда для функции $f(\lambda) = g(\varphi(\lambda))$ имеет место представление

$$\text{Tr}[f(H) - f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\mu; h, h_0) dg(\mu). \quad (2)$$

Преобразование соотношения (2) к виду (2.1) требует дополнительных предположений. Примем

У с л о в и е 2. Пусть спектры σ_0 и σ операторов H_0 и H покрыты конечным объединением Ω непересекающихся интервалов (один или два из которых, возможно, бесконечны) $\Omega_n, n =$

$1, \dots, N$, а функция φ задана и достаточно гладкая (скажем, дважды непрерывно дифференцируема) на Ω . Пусть на каждом из Ω_n производная $\varphi'(\lambda)$ сохраняет знак (и не обращается в нуль), и функция $\varphi(\lambda)$ взаимно однозначна на всем множестве Ω . Кроме того, функцию φ предполагаем ограниченной.

Через $\varphi(\Omega) = \bigcup \varphi(\Omega_n)$ обозначим образ множества Ω при отображении φ , а через $\psi: \varphi(\Omega) \mapsto \Omega$ — отображение, обратное к φ . В интеграле (2) по области $\varphi(\Omega)$ можно провести замену переменной $\mu = \varphi(\lambda)$. Тогда (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} \text{Tr}[f(H) - f(H_0)] &= \int_{\Omega} \xi(\lambda; H, H_0) d\varphi(\lambda) + \\ &+ \int_{\mathbb{R} \setminus \varphi(\Omega)} \xi(\mu; h, h_0) dg(\mu), \end{aligned} \quad (3)$$

где ФСС

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \text{sgn } \varphi'(\lambda) \xi(\varphi(\lambda); \varphi(H), \varphi(H_0)), \quad \lambda \in \Omega. \quad (4)$$

Ясно, что на каждом из интервалов Ω_n коэффициент $\text{sgn } \varphi'(\lambda) = \pm 1$ постоянен, а функция (4) локально интегрируема. Отметим еще оценку

$$\int_{\Omega} |\xi(\lambda; H, H_0)| |\varphi'(\lambda)| d\lambda \leq \|\varphi(H) - \varphi(H_0)\|_1,$$

прямо вытекающую из неравенства (2.6).

Ранее условия справедливости соотношений (2) и (3) формулировались в терминах функции g переменной $\mu = \varphi(\lambda)$. Будем теперь исходить из функции f переменной λ . При выводе для нее формулы следа мы одновременно укажем условия того, что второй интеграл в правой части (3) пропадает и, следовательно, (3) преобразуется к обычному виду (2.1). Пусть вначале $f \in C_0^\infty(\Omega)$, а функция $g(\mu) = f(\psi(\mu))$ при $\mu \in \varphi(\Omega)$ и продолжена нулем на всю прямую. Дифференцируя равенство $g(\mu) = f(\lambda)$, найдем, что

$$\begin{aligned} g'(\mu) &= \varphi'(\lambda)^{-1} f'(\lambda), \\ g''(\mu) &= \varphi'(\lambda)^{-1} (\varphi'(\lambda)^{-1} f'(\lambda))'. \end{aligned} \quad \mu = \varphi(\lambda), \quad (5)$$

Поэтому $g \in C_0^2(\varphi(\Omega))$ и, следовательно, функция g удовлетворяет условиям теоремы 3.3. Кроме того, интеграл в (3) по $\mathbb{R} \setminus \varphi(\Omega)$ равен нулю. Тем самым из (3) прямо вытекает

Лемма 3. Пусть функция φ удовлетворяет условию 2 и выполняется включение (1). Определим ФСС равенством (4). Тогда при $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место формула (2.1).

2. Отложим расширение запаса допустимых в (2.1) функций f до следующего пункта. Как пояснялось в п. 2 § 3, это требует согласования значений ξ на различных интервалах Ω_n . Необходимость в таком согласовании, конечно, отпадает, если Ω состоит только из одного интервала, а также в некоторых других (см. п. 4) случаях.

Условия относительно поведения f на бесконечности также систематически обсуждаются в следующем пункте. Здесь, конечно, содержательной является лишь ситуация, когда множество $\sigma_0 \cup \sigma$ не ограничено по крайней мере с одной стороны.

Для ФСС (4) сохраняется связь (2.3) с матрицей рассеяния $S(\lambda; H, H_0)$. Действительно, по теореме 6.5.3 в условиях леммы 3 для ВО справедлив принцип инвариантности. В терминах матриц рассеяния из него следует (см. § 2.6), что (при естественном соответствии прямых интегралов) $S(\lambda; H, H_0) = S(\varphi(\lambda); h, h_0)$, если $\varphi'(\lambda) > 0$ и $S(\lambda; H, H_0) = S^*(\varphi(\lambda); h, h_0)$, если $\varphi'(\lambda) < 0$. Поэтому нужно лишь воспользоваться равенством (2.3) для операторов h_0, h в точке $\varphi(\lambda)$.

Определение ФСС формулой (4) не зависит, конечно, от конкретного выбора функции φ . Точнее, пусть две функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют условию 2 и для них выполняется соотношение (1). Тогда при $f \in C_0^\infty(\Omega)$ формула следа (2.1) верна для двух ФСС ξ_1 и ξ_2 , построенных по φ_1 и φ_2 . На основании леммы Дюбуа—Реймонда отсюда вытекает, что на каждом интервале Ω_n разность $\xi_1 - \xi_2$ постоянна (но может зависеть от n). Более того, в силу равенства вида (2.3)

$$\exp(-2\pi i \xi_1(\lambda)) = \exp(-2\pi i \xi_2(\lambda))$$

и, следовательно, величина $\xi_1 - \xi_2$ обязательно целочисленна. В частности, имеет место следующее утверждение. В нем ФСС для пар H_0, H и $\varphi(H_0), \varphi(H)$ определяются независимо друг от друга через детерминанты $D_{H/H_0}(z)$ и $D_{h/h_0}(\zeta)$.

Лемма 4. Пусть $H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$, а функция φ удовлетворяет условию 2 и выполняется включение (1). Тогда ФСС для пар H_0, H и $\varphi(H_0), \varphi(H)$ связаны соотношением (4) с точностью до функции, принимающей постоянные целочисленные значения на интервалах Ω_n .

3. Согласование значений ФСС на различных интервалах Ω_n осуществляется с помощью процедуры, использованной при доказательстве леммы 3.5. Будем считать, что интервалы $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ занумерованы в направлении слева направо. В силу предложения 2.8, примененного к паре h_0, h , функция (4) принимает в окрестностях конечных концов Ω_n постоянные целочисленные значения. Поэтому, изменяя значения ФСС на каждом из Ω_n на свою целочисленную постоянную a_n , можно добиться того, что значения ФСС

$$\xi(\lambda; H, H_0) = \operatorname{sgn} \varphi'(\lambda) \xi(\varphi(\lambda); \varphi(H), \varphi(H_0)) + a_n, \quad \lambda \in \Omega_n, \quad (6)$$

на обращенных друг к другу концах Ω_n и Ω_{n+1} будут при всех $n = 1, \dots, N-1$ равны друг другу. Теперь нужно лишь продолжить ξ на промежуток между Ω_n и Ω_{n+1} этой общей постоянной. Приведенная процедура определяет ФСС с точностью до целочисленной постоянной, общей уже для всей прямой. В частности, в полуограниченном случае, когда $\beta_1 = \inf(\sigma_0 \cup \sigma) > -\infty$, можно, как всегда, считать, что $\xi(\lambda) = 0$ при $\lambda < \beta_1$. Получившаяся ФСС принимает на составляющих интервалах множества $\rho_0 \cap \rho$ постоянные целочисленные значения, а на абсолютно непрерывном спектре для нее сохраняется связь (2.3) с матрицей рассеяния.

Теперь мы можем заняться расширением запаса допустимых функций. Прежде всего отметим, что в лемме 3 вместо бесконечной дифференцируемости f достаточно предположить, что f имеет две ограниченные производные. Соответствующая функция $g(\mu) = f(\lambda)$, продолженная нулем на область $\mathbb{R} \setminus \varphi(\Omega)$, будет по-прежнему удовлетворять условиям теоремы 3.3. В силу леммы 3.5 проведенное нами согласование значений ФСС на различных интервалах Ω_n автоматически распространяет (2.1) на все функции f , являющиеся дважды дифференцируемыми на Ω и финитными на бесконечности.

Условия относительно f на бесконечности существенно зависят от свойств функции φ и требуют специального обсуждения. Заметим предварительно, что в силу ограниченности и монотонности функции φ ее производная $\varphi'(\lambda)$ будет суммируемой на бесконечности. Предположим, что при $\lambda \rightarrow \pm\infty$, $\lambda \in \Omega$, для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} |(\varphi'(\lambda)^{-1} f'(\lambda))'| &\leq C |\lambda|^{-1-\varepsilon}, \\ |(\varphi'(\lambda)^{-1} f'(\lambda))'| &\leq C |\varphi'(\lambda)| |\varphi(\lambda) - \varphi(\pm\infty)|^{-1+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из первой из них следует, что функция $\varphi'(\lambda)^{-1}f'(\lambda)$ имеет конечный предел при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Тем самым функция $f'(\lambda)$ интегрируема и, следовательно, $f(\lambda)$ сходится к конечному пределу при $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Согласно (5) это означает, что $g(\mu)$ и $g'(\mu)$ стремятся к конечным пределам при $\mu \rightarrow \mu_{\pm} = \varphi(\pm\infty)$. Эти пределы соответственно равны

$$f_{\pm} = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} f(\lambda), \quad \tilde{f}_{\pm} = \lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \varphi'(\lambda)^{-1}f'(\lambda). \quad (8)$$

Кроме того, вторая оценка (7) показывает, что

$$|g''(\mu)| \leq C|\mu - \mu_{\pm}|^{-1+\epsilon}.$$

Поэтому функция $g'(\mu)$ оказывается гельдеровски непрерывной с показателем ϵ в соответствующей односторонней окрестности точки $\mu_{\pm}$.

Для получения формулы следа (2.1) будем исходить из соотношения (3). Вначале будем предполагать, что функция $f(\lambda)$ отлична от нуля только в окрестностях $+\infty$ и $-\infty$. Это означает, что $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [\gamma_1, \gamma_N]$, где $\gamma_1 \in \Omega_1$, $\gamma_N \in \Omega_N$. Тогда и функция $g(\mu) = f(\lambda)$ будет отличной от нуля только в окрестностях точек μ_+ и μ_- . Нам придется порознь рассмотреть случаи $\mu_+ = \mu_-$ и $\mu_+ \neq \mu_-$.

В первом из них интервалы $\varphi(\Omega_1)$ и $\varphi(\Omega_N)$ разделены лишь точкой $\mu_+ = \mu_-$. Поэтому приходится требовать (ср. с теоремой 7.1), чтобы пределы слева и справа функций g и g' совпадали друг с другом. Тогда функция g будет дифференцируемой в двусторонней окрестности точки $\mu_+ = \mu_-$, а ее производная будет удовлетворять условию Гельдера с показателем $\epsilon > 0$. В терминах функции f нужно предполагать, что на бесконечности выполнены условия согласования $f_+ = f_-$ и $\tilde{f}_+ = \tilde{f}_-$. При таких предположениях справедливо соотношение (3), где ФСС $\xi(\lambda; H, H_0)$ определяется равенством (4), а второй интеграл в правой части равен нулю. Это дает формулу (2.1). Пусть теперь ФСС задается равенством (6). Тогда в правой части (2.1) появится дополнительное слагаемое $(a_1 - a_N)f_{\pm}$, т.е.

$$\text{Tr}[f(H) - f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) df(\lambda) + (a_1 - a_N)f_{\pm}. \quad (9)$$

Произвольную функцию f , удовлетворяющую условиям (7), (8), разложим в сумму $f = f_1 + f_2$, где f_1 финитна на бесконечности, а $f_2(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [\gamma_1, \gamma_N]$. Для первой из них верна формула следа (2.1), а для второй — соотношение (9). Поэтому для

их суммы f также справедливо соотношение (9). Учтем теперь, что в (9) левая часть и интеграл в правой части инвариантны относительно замены $f(\lambda)$ на $f(\lambda) + f_0$, где f_0 — произвольная постоянная. Следовательно, из (9) вытекает, что с необходимостью $a_1 = a_N$. Таким образом, (9) сводится к формуле следа (2.1). Подчеркнем, что ФСС осталась неопределенной с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

В случае $\mu_+ \neq \mu_-$ некоторые односторонние окрестности μ_+ и μ_- состоят из регулярных точек операторов h_0 и h . В них ФСС $\xi(\mu; h, h_0)$ принимает постоянные значения. Предположим, например, что эти окрестности имеют вид $(\mu_- - \varepsilon, \mu_-)$, $(\mu_+, \mu_+ + \varepsilon)$, а функция $\xi(\mu; h, h_0)$ равна там ξ_- и ξ_+ . Пусть опять $f(\lambda)$ удовлетворяет условиям (7) и равна нулю при $\lambda \in [\gamma_1, \gamma_N]$. Тогда функция $g(\mu)$ непрерывна вместе со своей производной в правой окрестности точки μ_- и в левой окрестности точки μ_+ . На промежутки $(\mu_- - \varepsilon, \mu_-)$ и $(\mu_+, \mu_+ + \varepsilon)$ продолжим $g(\mu)$ с сохранением гладкости таким образом, чтобы $g(\mu) = 0$ при $\mu \leq \mu_- - \varepsilon/2$ и $\mu \geq \mu_+ + \varepsilon/2$. Для такой функции g справедливо соотношение (3), причем интегралы от $\xi(\mu; h, h_0)g'(\mu)$ по промежуткам $(\mu_- - \varepsilon, \mu_-)$ и $(\mu_+, \mu_+ + \varepsilon)$ равны соответственно $\xi_-g(\mu_-)$ и $-\xi_+g(\mu_+)$, где $g(\mu_{\pm}) = f_{\pm}$. Будем теперь считать, что ФСС определяется равенством (6). Тогда из (3) вытекает соотношение

$$\text{Tr}[f(H) - f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) df(\lambda) + (a_1 + \xi_-)f_- - (a_N + \xi_+)f_+. \quad (10)$$

Раскладывая опять f в сумму функций, одна из которых финитна на бесконечности, а вторая равна нулю при $\lambda \in [\gamma_1, \gamma_N]$, убедимся, что это соотношение сохраняется и без предположения $f(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [\gamma_1, \gamma_N]$. Как и в случае $\mu_+ = \mu_-$, из (10) следует, что с необходимостью

$$a_1 + \xi_- = a_N + \xi_+ =: \xi_0. \quad (11)$$

Переходя теперь к новой ФСС $\xi(\lambda) - \xi_0$ (это не противоречит принятому согласованию), получим обычную запись (2.1) формулы следа. Поскольку при $\mu_+ \neq \mu_-$ допускается, что $f(+\infty) \neq f(-\infty)$, ФСС определяется формулой следа однозначно.

В полуограниченном случае $\beta_1 = \inf\{\sigma_0 \cup \sigma\} > -\infty$, ФСС также однозначно фиксируется условием $\xi(\lambda) = 0$ для $\lambda < \beta_1$, и

значения пределов f_+ и $\tilde{f}_+$ остаются произвольными. Сформулируем, наконец, окончательный результат.

Теорема 5. Пусть функция φ удовлетворяет условию 2 и выполняется включение (1). Определим на Ω_n ФСС $\xi(\lambda)$ равенством (6), а числа a_n подберем так, чтобы распространенная на промежутки из $\mathbb{R} \setminus \varphi(\Omega)$ функция $\xi(\lambda)$ была там постоянна и непрерывна. Кроме того, в случае, когда множество $\sigma_0 \cup \sigma$ не ограничено с обеих сторон и $\varphi(+\infty) \neq \varphi(-\infty)$, заменим такую ФСС $\xi(\lambda)$ на $\xi(\lambda) - \xi_0$, где ξ_0 определяется соотношением (11). Предположим, что функция f дважды дифференцируема на Ω , причем вторая производная локально ограничена, и выполняются оценки (7) на $+\infty(-\infty)$, если множество $\sigma_0 \cup \sigma$ не ограничено сверху (снизу). Кроме того, если $\sigma_0 \cup \sigma$ не ограничено с обеих сторон и $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty)$, то нужно дополнительно предполагать, что $f_+ = f_-$ и $\tilde{f}_+ = \tilde{f}_-$. Тогда имеет место формула следа (2.1).

Условия относительно $f(\lambda)$ на бесконечности определяются только поведением при $|\lambda| \rightarrow \infty$ функции $\varphi(\lambda)$. Пусть, например, $\varphi(\lambda) = \lambda^{-\tau}$ (τ — натуральное нечетное число) при достаточно больших $|\lambda|$. Тогда условия (7) сводятся к одной оценке (9.5), однако требуется, чтобы она выполнялась при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Кроме того, нужны еще условия согласования (8), где $\varphi'(\lambda) = -\tau\lambda^{-\tau-1}$. При $\tau = 1$ они сводятся, конечно, к (7.10).

4. Проиллюстрируем теорему 5 на простых примерах. В приложениях чаще всего рассматривается случай, когда операторы H_0 и H имеют общую регулярную точку, например $\lambda = 0$. Тогда условию 2 удовлетворяет функция $\varphi(\lambda)$, равная $\lambda^{-\tau}$ (τ натурально и нечетно) при всех λ . При этом множество Ω состоит из двух интервалов $\Omega_1 = (-\infty, -\varepsilon)$ и $\Omega_2 = (\varepsilon, \infty)$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$. Пусть выполнено включение (9.1), а ФСС $\xi(\lambda) = \xi(\lambda; H, H_0)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ определена равенством (9.3). Поскольку $\xi(\mu; h, h_0) = 0$ при достаточно больших $|\mu|$, ФСС $\xi(\lambda) = 0$ в двусторонней окрестности точки нуль, так что дополнительного согласования значений $\xi(\lambda)$ на Ω_1 и Ω_2 не требуется. Как и в полуограниченном случае, функция $\xi(\lambda)$ удовлетворяет соотношению (8.3). Формула следа (2.1) верна, если f удовлетворяет условиям (9.5) и (8). В частности, годятся функции $f(\lambda) = (\lambda - z)^{-s}$, $z \in \rho_0 \cap \rho$, если целое $s \geq \tau$.

При $\tau = 1$ полученный результат вытекает, конечно, из теоремы 7.1, где регулярность точки $\lambda = 0$ не предполагалась. По сравнению с этой теоремой здесь дается несколько иной способ

построения ФСС. Отметим еще, что без изменений рассматривается и случай, когда $\varphi(\lambda) = \lambda^{-\tau}$ при $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) = -|\lambda|^{-\tau}$ при $\lambda < 0$, а τ —произвольное положительное число.

Предположим теперь, что включение (1) выполняется для функции $\varphi(\lambda)$, равной $\lambda^{-\tau} + \varphi_0$ при $\lambda > 0$ и $\lambda^{-\tau}$ при $\lambda < 0$; здесь τ —по-прежнему нечетно. В этом случае условие (9.5) на бесконечности сохраняется, но при $\varphi_0 \neq 0$ равенств $f_+ = f_-$ и $\tilde{f}_+ = \tilde{f}_-$ требовать не нужно.

Если спектры операторов H_0 и H покрывают всю ось, то в качестве функции φ удобно взять $\varphi(\lambda) = \arctg(\lambda^\tau)$ при каком-либо нечетном τ . Если для нее выполнено включение (1), то формула следа (2.1) справедлива для функций f , удовлетворяющих при $|\lambda| \rightarrow \infty$ условию (9.5). Поскольку $\varphi(+\infty) \neq \varphi(-\infty)$, пределы $f_\pm$ и $\tilde{f}_\pm$ остаются произвольными.

Ранее предполагали, что функция $\varphi(\lambda)$, при которой справедливо включение (1), ограничена. Если $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то и допустимые функции $f(\lambda)$ могут стремиться к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$. Например, согласно теореме 3.3 годятся функции $f(\lambda)$, равные $\varphi(\lambda)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, при достаточно больших λ .

5. В теории рассеяния весьма удобны (см. § 6.4) предположения локального характера. В работе Л.С.Коплиенко [61] получены и локальные признаки существования ФСС. По сравнению с условиями существования и полноты волновых операторов они несколько более ограничительны. Тем не менее из локальных признаков по-прежнему удастся получить новые эффективные условия глобального характера. Так, в [61] установлено существование ФСС и описан класс допустимых функций f при условии, что

$$(R(z) - R_0(z))R_0^k(z) \in \mathfrak{S}_1, \quad \text{Im } z \neq 0,$$

для какого-нибудь $k \geq 0$ и, кроме того, первый сомножитель (разность резольвент) принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при каком-либо $p < \infty$.

Возможно и перенесение теории ФСС на случай пары пространств. Так, в работе [62] Л. С. Коплиенко получил обобщение теоремы 9.1. Роль включения (9.1) играет теперь условие $H^{-\tau}J - JH_0^{-\tau} \in \mathfrak{S}_1$, τ —натуральное число. Кроме того, потребовались предположения об операторе J :

$$(J^*J - I)H_0^{-\tau} \in \mathfrak{S}_1, \quad H^{-\tau}(JJ^* - I) \in \mathfrak{S}_1. \quad (12)$$

При этих условиях в [62] доказано существование ФСС $\xi = \xi(H, H_0; J)$, такой, что имеет место формула следа для пары пространств

$$\text{Tr}[f(H) - Jf(H_0)J^*] + \text{Tr}[(J^*J - I)f(H_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) f'(\lambda) d\lambda. \quad (13)$$

Для функции $\xi(\lambda)$ по-прежнему выполняется соотношение (8.3), а при нормировке $\xi(0) = 0$ сохраняется и связь (2.3) с матрицей рассеяния $S(\lambda; H, H_0; J)$. Допустимые в (13) функции f должны удовлетворять условию (9.5) (при $|\lambda| \rightarrow \infty$), а также $f(\lambda) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Кроме того, в [62] показано, что при дополнительном предположении о существовании ограниченного оператора J^{-1} левую часть (13) можно заменить на

$$\text{Tr}[f(H) - Jf(H_0)J^{-1}].$$

Вместо (12) при этом достаточно предположить, что $(J^*J - I)H_0^{-\tau} \in \mathfrak{S}_\infty$, а условие $f(\lambda) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ можно опустить.

Обобщение теории на случай не ядерных возмущений исследовалось в статье Л.С.Коплиенко [63] (см. также статью Найдхардта [128]). При условии $V \in \mathfrak{S}_2$ в [63] установлено существование такой функции $\xi_2(\lambda)$, что для некоторого класса функций f имеет место формула

$$\text{Tr}(f(H_0 + V) - f(H_0) - df(H_0 + \varepsilon V)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \xi_2(\lambda) f''(\lambda) d\lambda.$$

При этом оператор в левой части является ядерным.

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Не стремясь к полноте библиографии, мы старались тем не менее выделить наиболее существенные работы. Отмечены также работы, определившие изложение основного текста книги. На подборе литературы не могли, конечно, не отразиться и личные вкусы автора. Большое число дополнительной литературы можно найти в подробной библиографии к книге Х.Баумгертеля и М.Волленберга [30], где, однако, многие статьи не аннотированы. Литературным указаниям по главам предпослел краткий исторический обзор общего характера.

Начало построения теории рассеяния можно, по-видимому, связывать с работой К.Фридрихса [96]. В ней изучено возмущение оператора умножения интегральным оператором с гладким и малым ядром. Метод, разработанный Фридрихсом в связи с построением теории возмущений для этой модели, фактически оказался близким к стационарному подходу в теории рассеяния. Впрочем, понятий теории рассеяния в то время не было.

Нестационарное определение волновых операторов (ВО) на формальном уровне было дано К.Меллером [126]. Еще раньше, минуя ВО, оператор рассеяния вводился в работах Дж.Уилера [139] и В.Гейзенберга [101]. Стационарное представление для матрицы рассеяния появилось в физической литературе в работах Б.Липпмана и Дж.Швингера [125] и М.Геллмана и М.Гольдбергера [98.]

Первое математическое доказательство существования (и унитарности) ВО было получено К.Фридрихсом [97] в рам-

ках предложенной им ранее модели. Это потребовало уточнения смысла предельного перехода в определении ВО. Работа К.Фридрихса в значительной мере определила дальнейшее развитие теории рассеяния.

Большое число новых важных понятий и соображений было внесено в теорию рассеяния в связи с исследованием дифференциальных операторов. В одномерном случае разложение по собственным функциям непрерывного спектра было построено еще в классической статье Г.Вейля [138]. Принципиально труднее многомерный случай. Здесь решающий прорыв произошел уже в пионерской работе А.Я.Повзнера [73]. В ней установлено существование решений задачи рассеяния для уравнения Шредингера. Построение таких решений основывается в [73] на предварительном исследовании с помощью альтернативы Фредгольма интегрального уравнения для резольвенты оператора Шредингера. Это позволило отказаться от принятого в [97] условия малости возмущения. В [74] А.Я.Повзнером доказана теорема разложения по решениям задачи рассеяния. По существу эта теорема эквивалентна построению стационарных ВО и доказательству их изометричности и полноты. Т.Икебе установил в [104], что в этой задаче существуют и нестационарные ВО, совпадающие со стационарными.

Объединить подходы К.Фридрихса и А.Я.Повзнера удалось О.А.Ладыженской и Л.Д.Фаддееву [68] и Л.Д.Фаддееву [79]. В [68, 79] установлены существование и полнота ВО в модели Фридрихса, но без условия малости возмущения. Аксиоматизация развитого в [73, 74, 68, 79] подхода привела к созданию унитарно-инвариантной теории гладких возмущений. В связи с гладким методом в теории рассеяния отметим в первую очередь работы Т.Като [109, 112].

В существенно более сложной обстановке подход работ [68, 79] был использован Л.Д.Фаддеевым при построении в [22] теории рассеяния для системы трех попарно взаимодействующих частиц. Характерная особенность трехчастичного гамильтониана состоит в том, что его суммарный потенциал не убывает на бесконечности в конфигурационном пространстве системы. Возмущение таким потенциалом не является даже относительно компактным. Это приводит к тому, что полнота ВО нарушается (теория рассеяния становится многоканальной), а правильный учет появляющихся дополнительных каналов рассеяния тре-

бует качественно новых соображений. По этому поводу см. книгу [14].

Ядерный подход к теории возмущений непрерывного спектра возник в рамках абстрактной теории операторов. Первоначально он развивался независимо от гладких методов и от потребностей приложений. Теорема о существовании (и полноте) ВО при ядерном возмущении была получена в работах Т.Като и М.Розенблюма [106, 107, 136]. Разработка ядерного метода до уровня, на котором оказались возможны применения к теории дифференциальных операторов, осуществлялась в работах С. Куроды, М.Ш.Бирмана, самого Като и многих других. Прежде всего отметим работы М.Ш.Бирмана, где был найден принцип инвариантности [38, 39] и развита локальная техника [40]. Первым ядерную теорию к дифференциальным операторам—к оператору Шредингера—применял, по-видимому, С.Курода [118, 119]. Очень широкий класс дифференциальных операторов рассмотрен М.Ш.Бирманом в [41] на основе аппарата, разработанного им в [39, 40].

Дальнейшие литературные и исторические примечания будут даны по главам.

ГЛАВА 1

Материал этой главы является стандартным. Наряду с литературой, указанной в основном тексте, отметим книги М.Данфорда и Дж.Шварца [9] и Ф.Рисса и Б.Секефальви-Надя [19], в которых можно найти много дополнительного материала. Сделаем также несколько конкретных примечаний.

В связи с классификацией спектра в § 3 заметим, что возможно (и в некоторых вопросах естественно) дальнейшее разбиение абсолютно непрерывного спектра на компоненты. По этому поводу см. статью Дж.Аврона и Б.Саймона [88].

Трудно указать точных авторов результатов § 8 об обращении голоморфной оператор-функции. Теорема 2 об обращении внутри области аналитичности, по-видимому, принадлежит И.П.Гохбергу (см. [7]). Теорема 3 об обращении вплоть до границы в явной форме приведена в статье С. Куроды [120].

Построение самосопряженного оператора через его резольвенту (см. § 10) часто применяется в том или ином контексте. В качестве одной из первых работ, где использовался этот прием, отметим заметку В.А.Явряна [81].

Теория возмущений унитарных операторов была развита М.Г.Крейном, но, по-видимому, не публиковалась.

ГЛАВА 2

В рамках абстрактной теории операторов основные понятия теории рассеяния были сформулированы в связи с исследованием возмущений ядерного типа. Вначале рассматривался случай $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$, $J = I$. Точное определение ВО было дано в статье [106] Т.Като, заметившим необходимость введения проектора на абсолютно непрерывное подпространство. Кроме того, в [106] изучены элементарные свойства ВО.

Обобщение понятий на случай пары пространств также предложено Т.Като [110]. Такое обобщение имеет принципиальный характер, поскольку до некоторой степени выводит теорию рассеяния за рамки теории возмущений. Например, введение нетривиального отождествления полезно в многоканальных задачах [82, 92]. Идея связывать ВО с интервалом спектральной оси (локальные ВО) принадлежит М.Ш.Бирману [40], причем им же указаны и локальные условия существования таких ВО.

Абстрактное определение матрицы рассеяния предложено в работе М.Ш.Бирмана и М.Г.Крейна [43].

Условие существования ВО из § 5 получено Дж.Куком [91], рассматривавшим ВО для оператора Шредингера. Предположения о потенциале уточнялись в [100, 105].

Принцип инвариантности (ПИ) обнаружен М.Ш.Бирманом [38, 39] в связи с признаками ядерного типа. В существенном его рассмотрения были стационарными. Сам термин, «принцип инвариантности» ввел Т.Като [108], который получил его нестационарное доказательство. В связи с расширением запаса допустимых функций укажем заметку А.Ю.Константинова [59]. Отметим, что ПИ устанавливается и в условиях типа признака Кука—см. [90] и т.3 курса [18].

Стационарные унитарно-инвариантные представления для основных объектов теории рассеяния появились (при $J = I$) в контексте ядерного подхода в статьях М.Ш.Бирмана и С.Б.Энтиной [49]. Несколько иные, но формульно эквивалентные представления получались [79] и в рамках модели Фридрихса—Фаддеева. Позднее в «аксиоматических» схемах формульные представления были отделены от конкретных

условий их справедливости. Обобщение на произвольные J достигается с помощью результатов [50]. По этому поводу см. примечания к гл.5.

ГЛАВА 3

Использованный в п.2 § 1 прием введения вспомогательного отождествления J называется иногда приемом Купша—Сандаса [116]. В вопросе о существовании ВО он позволяет «срезать» сингулярности возмущения. Материал § 2 заимствован из заметки [83]. Изложение в § 4 связи теорий рассеяния для уравнений первого и второго порядков по времени следует статье М.Ш.Бирмана [39].

Теорема 5.1 об абсолютной форме ПИ для абелевых ВО принадлежит М.Волленбергу [130, 140, 141], но приведенное в § 5 доказательство отличается от оригинального. В связи с этим подчеркнем, что в § 5 теорема 5.1 выводилась из теоремы 5.2, не относящейся собственно к теории рассеяния. Теорема 5.2, по-видимому, ранее не публиковалась. Доказательство Волленберга можно найти в монографии [30].

ГЛАВА 4

Как уже отмечалось, доказательство существования и полноты ВО для возмущения оператора умножения интегральным оператором с гладким ядром было дано К.Фридрихсом [96, 97] в предположении малости ядра. Общая теория построена Л.Д.Фаддеевым в [79], где разработана техника обращения с сингулярными интегралами. Термин «модель Фридрихса» введен Л.Д.Фаддеевым. Наше изложение в §§ 1, 2 довольно близко следует [79]. Впрочем, рассмотрение случая, когда показатель гильбертовской непрерывности ядра меньше или равен $1/2$, в литературе найти не удалось. С оригинальным методом К.Фридрихса и развивающими его работами (отметим, например, статьи П.Рейто [134, 135]) можно познакомиться по книге [25].

Понятие гладкости относительно самосопряженного оператора введено Т.Като [109, 111]. Ему же принадлежит теорема 5.1 о существовании ВО для относительно гладких возмущений. Обобщение теории Като на локальные ВО найдено Р.Лавином [123].

Коммутаторные условия гладкости предлагались в статьях Т.Като [111] и Р.Лавина [122—124]. Приведенная в тексте теорема 4.1 установлена А.Ф.Вакуленко [55]. Несколько иной тип условий гладкости, также формулируемый в терминах коммутаторов, получен в работах Е.Мурра [127] и П.Перри, И.Сигала, Б.Саймона [132]. Этот тип особенно удобен в многочастичных задачах.

Понятие усиленной H_0 -гладкости и изложенный в § 6 метод проверки H -гладкости для относительно компактных возмущений появились в результате анализа более конкретных методов работ А.Я.Повзнера [73, 74] и Л.Д.Фаддеева [79]. Заслуга правильной аксиоматизации подходов этих работ принадлежит в основном Т.Като и С.Куроде [109, 112, 114, 120]. Наше изложение, по-видимому, ближе всего к более поздним статьям С.Куроде [121]. В применении к оператору Шредингера похожий подход был развит также С.Агмоном [84]. В этом контексте упомянем и лекции С.Куроде [33].

ГЛАВА 5

Общая стационарная схема построения теории рассеяния появилась в результате сопоставления работ по ядерным [49, 40, 37] и гладким [73, 74, 79] методам. Иногда описанное в гл.5 направление называют условным или аксиоматическим. Фактически «продвинутая» аксиоматизация гл.5 возникла в тех же работах С.Куроде [120] и Т.Като и С.Куроде [114], где развивался более конкретный метод § 4.6.

Техника [120, 114] основана на факторизации возмущения, применявшейся в ядерной теории. Близкие к [120, 114] результаты получены также Дж.Хоулендом [102] и П.Рейто [135]. Однако в [102, 135] условия на возмущение формулировались в терминах вспомогательного банахова пространства. Такой прием по существу эквивалентен факторизационной технике, но относительно ближе к модели Фридрихса—Фаддеева.

В литературе можно найти большое число, в той или иной мере близких друг к другу, изложений аксиоматической схемы. В дополнение к уже цитированным отметим еще работу Т.Като и С.Куроде [115] и книгу Х.Баумгертеля и М.Волленберга [30]. Обобщение аксиоматической теории рассеяния на случай пары пространств было дано В.Г.Дейчем [58].

Наше изложение основано на статье М.Ш. Бирмана и

Д.Р. Яфаева [50], где подробно разработаны формульные представления для ВО, оператора и матрицы рассеяния. Кроме того, в [50] условия существования сильных нестационарных ВО отделены от условий их изометричности, что существенно в случае пары пространств.

ГЛАВА 6

В рамках абстрактной теории операторов рассмотрение ядерных возмущений занимает центральное место. Многие понятия и положения теории рассеяния возникли именно в связи с разработкой ядерного метода.

Его история такова. Для конечномерного возмущения существование волновых операторов установлено Т.Като [106], а при ядерной разности $H - H_0$ и дополнительном предположении об абсолютной непрерывности H_0 и H — М.Розенблумом [136]. От последнего ограничения отказался опять Т.Като [107], завершивший тем самым в 1957 г. доказательство теоремы 2.1. В работах Т.Като и М.Розенблума стационарный метод комбинировался с нестационарным. Одномерное возмущение рассматривалось стационарными средствами с учетом явной связи (см. § 7) между резольвентами операторов H_0 и H . Переход к конечномерным возмущениям осуществлялся на основании теоремы умножения ВО. Наконец, при аппроксимации произвольного ядерного оператора конечномерными использовалась нестационарная лемма 3.1 (Розенблума).

Обобщение теоремы Като—Розенблума на случай пары пространств и произвольного отождествления J (теорема 2.3) было получено Д.Пирсоном [131] лишь в 1978 г. Метод Пирсона—чисто нестационарный; стационарное доказательство теоремы 2.3 найдено в [50]. Введение операторного «параметра» J сделало теорему Като—Розенблума значительно более гибкой. Это позволило легко получать из нее удобные для приложений признаки существования ВО, в том числе—локальные. Использованный в §§ 4, 5 прием перехода к вспомогательному отождествлению уже применялся в т.3 курса [18].

До появления статьи [131] обобщения теоремы Като—Розенблума, необходимые для применения в теории дифференциальных операторов, получались без введения вспомогательного отождествления J . При этом использовалась стационарная техника, разработанная М.Ш.Бирманом и С.Б.Энтиной [49],

а в локальном варианте—М.Ш.Бирманом [40]. В частности, в [49] установлена теорема 1.9, служащая аналитической основой стационарного метода в теории ядерных возмущений. Это позволило получить чисто стационарное доказательство теоремы Като—Розенблюма и найти в [49, 40] ее естественные обобщения. Особенно удобными оказались локальные признаки [40] существования (и полноты) ВО. В [40] выделено понятие подчиненности операторов и установлено, что на его основе можно переходить от локальных ВО к глобальным. Полученные в [49, 40] результаты включили в себя различные более ранние обобщения теоремы Като—Розенблюма (см., например, статью С. Куроды [119]).

Другая группа удобных для применений признаков существования ВО получалась с помощью ПИ. Так, в работе М.Ш.Бирмана и М.Г.Крейна [43] было впервые установлено существование ВО при ядерной разности резольвент. Попутно в [43] была найдена связь с теорией рассеяния для унитарных операторов. Обобщение результата [43] на случай, когда ядерна лишь разность степеней резольвент, получено Т.Като [108]. Доказательство можно найти в книге [11].

Первые признаки существования ВО при наличии нетривиального отождествления J были установлены в работе А.А.Белопольского и М.Ш.Бирмана [37], где стационарная техника [40] перенесена на случай пары пространств. Существование сильных нестационарных ВО связывалось в [37] и статье М.Ш.Бирмана [42] с вопросом об их изометричности. Из-за этого существование (и полноту) ВО в [37, 42] удавалось проверить лишь при некоторых условиях относительно J . Впрочем, эти условия всегда выполняются в приложениях.

Материал § 6 заимствован из статьи [51]. Результаты § 7 об одномерном возмущении принадлежат Н.Ароншайну [86] и В.Донохью [93]. Впервые двойные операторные интегралы Стильеса появились в работе Ю.Л.Далецкого и С.Г.Крейна [57]. Систематически аппарат таких интегралов разработан в статьях М.Ш.Бирмана и М.З.Соломьяка [45, 48].

В заключение отметим, что, помимо литературы, указанной в предисловии, метод ядерных возмущений излагается также в монографиях Т.Като [11] и К.Путнама [35].

Оправдание стационарных представлений для матрицы рассеяния (МР) в рамках гладких предположений дано Л. Д. Фаддеевым [79], а в рамках ядерных предположений — М. Ш. Бирманом и С. Б. Энтиной [49]. В [49] получен и необходимый для этого вспомогательный материал, составивший § 5.

Включение $S(\lambda) - I \in \mathfrak{S}_1$, справедливое в теории ядерных возмущений, было обнаружено в работе М. Ш. Бирмана и М. Г. Крейна [43]. Там же получена оценка вида (6.6) для интеграла от $|S(\lambda) - I|_1$. В применении к оператору Шредингера (и вне ядерных предположений) похожие оценки были установлены в работах В. Амрейна и О. Пирсона [85] и В. Энсса и Б. Саймона [95]. Эффективные «поточечные» оценки § 9 для $|S(\lambda) - I|_p$ получены в статьях [76, 77, 137], где можно найти также их реализацию для оператора Шредингера.

В условиях ядерной теории в работе [43] было показано, что в случае знакоопределенных возмущений собственные значения МР накапливаются к точке 1 только с одной стороны. На более широкий класс возмущений (но также ядерного типа) это утверждение распространялось в статьях Л. С. Коплиенко [143] и С. Ю. Ротфельда [75]. В рамках ядерной теории направление вращения (при изменении константы для знакоопределенных возмущений) спектра МР изучалось в работе М. Ш. Бирмана и М. Г. Крейна [44], а в рамках гладких предположений — в работе Т. Като [113]. В изложении этих вопросов в § 8 мы, следуя [142], основываемся только на структуре стационарного представления МР. Поэтому полученные результаты автоматически справедливы и в гладких, и в ядерных предположениях.

Понятие функции спектрального сдвига (ФСС) впервые возникло (на формальном уровне) у И. М. Лифшица [69] в связи с квантовой теорией кристаллов. Общая теория ФСС построена М. Г. Крейном [64, 65] для возмущений ядерного типа. Сравнительно подробное изложение этой теории можно найти в лекциях М. Г. Крейна [66]. В работах М. Г. Крейна рассматривались случаи $H - H_0 \in \mathfrak{S}_1$ и $R(z) - R_0(z) \in \mathfrak{S}_1$, а также ядерные возмущения унитарных операторов. Случай $VR_0(z) \in \mathfrak{S}_1$ изучался в работах В. А. Явряна [81], М. Г. Крейна

и В. А. Явряна [67]. При условиях (в том числе локальных) более общих, чем $R(z) - R_0(z) \in \mathfrak{S}_1$, ФСС была построена Л. С. Коплиенко [60, 61].

Связь ФСС с матрицей рассеяния была обнаружена в работе М. Ш. Бирмана и М. Г. Крейна [43].

Результаты о знаке ФСС для знакоопределенных возмущений получены в уже цитированных работах М. Г. Крейна и Л. С. Коплиенко.

ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютно непрерывная часть оператора, 37
Альтернатива Фредгольма аналитическая, 64
Амплитуда рассеяния, 15

Возмущение

— граничным условием, 125
— интегральным оператором, 157
— — типа Фурье, 269
— малое, 156, 186
— мультипликативное, 136
— одномерное, 271
— относительно компактное, 229
— унитарного оператора, 83
— ядерное, 240

Волна плоская, 15

— сферическая, 15

Волновой оператор, 89

— абелев, 99

— в унитарном случае, 176, 264

— локальный, 97, 229

— — слабый, 97

— полный, 101

— J -полный, 134

— сильный, 89

— слабый, 96

— стационарный, 119

— частично изометрический, 90, 93

Гладкость оператора

— по Като, 166

— — локальная, 171, 174

— слабая, 193

Гладкость слабая оператора Гильберта – Шмидта, 239

Группа унитарная, 41

— слабая сходимость к нулю, 44

Детерминант, 60
— регуляризованный, 62

Идеал

— γ_p , 55
— симметрично-нормированный, 54
— симметрично-квазинормированный, 55

Интеграл

— двойной операторный, 280
— Коши от векторной функции, 239
— Коши — Стильтьеса, 30
— прямой гильбертовых пространств, 45
— Пуассона, 31

Классы Харди, 29

Лемма

— Розенблюма, 244
— Фату о предельном переходе в неравенствах, 27

Матрица рассеяния, 107

— для унитарных операторов, 291
— при гладких возмущениях, 296
— при ядерных возмущениях, 305
— спектр при знакоопределенных возмущениях, 316
Модель Фридрихса — Фадеева, 147

Непрерывная зависимость от возмущения

— волнового оператора, 250
— оператора рассеяния, 250, 251

Неравенство

— Вейля — Фан Сюя, 53
— Хайнца, 52

Носитель меры, 23

— борелевский, 23
— минимальный, 25

Обращение оператор-функции, 64, 66, 68

Оператор

— Гильберта — Шмидта, 55
— дифференциальный первого порядка, 107
— интегральный, 48, 212
— компактный, 51, 59
— конечномерный, 52

- обратный к фредгольмову, 53
- ограниченный относительно другого оператора, 68
- отождествления, 88
- рассеяния, 106
- сопряженный, 69
- умножения, 39
- фредгольмов, 53
- Фурье, 58
- Шредингера, 19
- ядерный, 55
- — интегральный, 299
- Определитель возмущения, 329
- для унитарных операторов, 332
- модифицированный, 335
- обобщенный, 333
- ,интегральное представление, 337, 353

Подпространство

- абсолютно непрерывное, 35
- сингулярное, 3

Подход

- нестационарный, 175
- стационарный, 117

Подчиненность операторов, 257

Полнота волнового оператора, 101

- локального, 105

J -полнота волнового оператора, 134

Поляризационное тождество, 35

Полярное разложение, 52

Предельные значения резольвенты

- в теории ядерных возмущений, 237
- связь со спектральной мерой, 43

Представление стационарное

- для волнового оператора, 120, 158, 200, 292, 294
- для матрицы рассеяния, 124, 220, 221, 289, 310
- для оператора рассеяния, 193, 218

Признак Кука существования волновых операторов, 109

Признаки существования и полноты волновых операторов

- при гладких возмущениях, 176, 178, 183, 185
- при ядерных возмущениях, 253, 256, 258, 260, 261, 262, 263

Принцип инвариантности, 111, 116, 210, 211

- для абелевых волновых операторов, 141
- для матриц рассеяния, 114, 115
- для операторов рассеяния, 114

- при гладких возмущениях, 181
- при ядерных возмущениях, 241
- Пространство двойственное, 50

Равенство Парсеваля для вектор-функций, 118

Резольвента, 42

Резольвентно сравнимые операторы, 262

Самосопряженный оператор

- , метод построения Фридрихса, 80
- отвечающий формальной сумме, 71, 72
- , построение через резольвенту, 77
- Связь стационарного и нестационарного подходов, 205, 207
- Сечение рассеяния, 21, 322
- Сингулярный непрерывный спектр, 37
- , изменение при одномерном возмущении, 276, 278
- , неустойчивость, 243
- , условия отсутствия, 157, 190
- След ядерного оператора, 59
- Спектр
- абсолютно непрерывный, 37
- компактного оператора, 59
- матрицы рассеяния, 314
- простой, 39
- самосопряженного оператора, 35
- , сердцевина, 38
- сингулярный, 37
- существенный, 37
- точечный, 37
- Спектральный тип максимальный, 37
- Сплетающее свойство, 91

Теорема

- Адамара о трех прямых, 34
- Вейля – фон Неймана – Куроды, 241
- Витали о предельном переходе под знаком интеграла, 27
- единственности, Лузина – Привалова, 29
- Като – Розенблюма, 239, 240
- —, стационарное доказательство, 241
- —, нестационарное доказательство, 243
- Лебега о разложении меры, 23
- Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, 27
- Лидского, 59
- о сохранении суммарной кратности спектра, 86

- о сходимости в L_1 интеграла Пуассона, 31
- о трех прямых для оператор-функций, 57
- Пирсона, 240
- —, стационарное доказательство, 241
- —, нестационарное доказательство, 243
- Радона – Никодима, 23
- разложения по собственным функциям, 224
- умножения
- — для волновых операторов, 94
- — для матриц рассеяния, 286
- — для операторов рассеяния, 284
- Фату об интегралах Пуассона, 31

Уравнение

- второго порядка по времени, 138
- резольвентное, 70
- Шредингера нестационарное, 12

Формула

- Бирмана – Крейна, 349
- Стоуна, 43
- следа, 336
- — в унитарном случае, 361
- — для полуограниченных операторов, 382
- — для резольвентно сравнимых операторов, 369
- — при ядерном возмущении, 345

Функция

- допустимая, 113
- производящая, 24

Функция спектрального сдвига, 336

- в унитарном случае, 355
- для знакоопределенных возмущений, 337, 382, 384
- для полуограниченных операторов, 378
- для резольвентно сравнимых операторов, 367
- при ядерном возмущении, 337

Числа сингулярные компактного оператора, 52

Эквивалентность

- отождествлений, 94
- , унитарная абсолютно непрерывных частей, 102

Элементы финитные относительно самосопряженного оператора, 51

Ядро интегрального оператора, 48, 214

УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ

Монографии

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1966.
2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.—Киев: Наукова думка, 1965.
3. Березин Ф.А., Шубин М.А. Уравнение Шредингера.—М.: Изд-во МГУ, 1983.
4. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
5. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения.—М.: Физматгиз, 1963.
6. Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций.—М.: ИЛ, 1963.
7. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.—М.: Наука, 1965.
8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.—М.: Наука, 1967.
9. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 1, 2, 3.—М.: Мир, 1962, 1966, 1974.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах.—М.: Наука, 1967.
11. Като Т. Теория возмущения линейных операторов.—М.: Мир, 1972.
12. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния.—М.: Мир, 1972.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика.—М.: Физматгиз, 1963.
14. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.—М.: Наука, 1985.
15. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной.—М.: Наука, 1974.
16. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц.—М.: Мир, 1969.

17. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций.—М.: Гостехиздат, 1950.
18. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1, 2, 3, 4.—М.: Мир, 1977, 1978, 1982, 1982.
19. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу.—М.: Мир, 1979.
20. Секефальви-Надь Б., Фойаш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Мир, 1970.
21. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 5.—М.: Физматгиз, 1959.
22. Фаддеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц.—Труды МИАН. 1963. Т. 69.
23. Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А. Лекции по квантовой механике для студентов-математиков.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.—М.: Физматгиз, 1959.
25. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Мир, 1969.
26. Халмош П. Теория меры.—М.: ИЛ, 1958.
27. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2.—М.: Мир, 1986.
28. Amrein W.O. Non-relativistic quantum dynamics.—Dordrecht, Holland: D.Reidel Publ. Comp., 1981.
29. Amrein W.O., Jauch J.M., Sinha K.B. Scattering theory in quantum mechanics.—Reading, Massachusetts; W.A.Benjamin, Inc., 1977.
30. Baumgartel H., Wollenberg M. Mathematical scattering theory.—Berlin: Akademie-Verlag, 1983.
31. Birman M.S., Solomjak M.Z. Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space.—Dordrecht, Holland: D.Reidel Publ.Cjnp., 1987.
32. Cycon H.L., Froese R.G., Kirsch W., Simon B. Schrodinger operators with application to quantum mechanics and global geometry.—Berlin-Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1987.
33. Kuroda S.T. An introduction to scattering theory.—Aarhus Universitet: Lecture Notes Series. 1978. No. 51.
34. Perry P.A. Scattering theory by the Enss method.—Harwood: Math. Reports.—1983. v. 1.—P. 1.
35. Putnam C.R. Commutation properties of Hilbert space operators and related topics.—Berlin—Heidelberg-New-York: Springer-Verlag, 1967.
36. Simon B. Trace ideals and their applications.—Cambridge Univ. Press: London Math. Soc. Lecture Notes, Series 35, 1979.

Статьи

37. Белополюский А.Л., Бирман М.Ш. Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств // Изв.АН СССР. Сер.мат.—1968.—Т. 32, N 5.—С. 1162—1175.
38. Бирман М.Ш. Об условиях существования волновых операторов // Докл. АН СССР. Сер. мат.—1962.—Т. 143, N 3.—С. 506—509.

39. Бирман М.Ш. Об условиях существования волновых операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1963.—Т. 27, N 4.—С. 883—906.
40. Бирман М.Ш. Локальный признак существования волновых операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1968.—Т. 32, N 4.—С. 914—942.
41. Бирман М.Ш. Задачи рассеяния для дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прил.—1969.—Т. 3, вып. 3.—С. 1—16.
42. Бирман М.Ш. Признак существования полных волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств // Проблемы матем. физики.—Л., Изд-во ЛГУ.—1970.—Вып. 4.—С. 22—26.
43. Бирман М.Ш., Крейн М.Г. К теории волновых операторов и операторов рассеяния // Докл. АН СССР. Сер. мат.—1962.—Т. 144, N 3.—С. 475—478.
44. Бирман М.Ш., Крейн М.Г. Некоторые вопросы теории волновых операторов и операторов рассеяния // Материалы и совм. сов.-амер. симпозиуму по уравнениям с частными производными.—Новосибирск, 1963.
45. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Двойные операторные интегралы Стильтеса, I, II, III // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1966, 1967, 1973.—Вып. 1, 2, 6.—С. 33—67, 26—60, 27—53.
46. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Замечания о функции спектрального сдвига // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1972.—Т. 27.—С. 33—46.
47. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // Успехи матем. наук.—1977.—Т. 32, Вып. 1.—С. 17—84.
48. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Операторное интегрирование, возмущения и коммутаторы // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1989.—Т. 170.—С. 34—66.
49. Бирман М.Ш., Энтина С.Б. Стационарный подход к абстрактной теории рассеяния // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1967.—Т. 31, N 2.—С. 401—430.
50. Бирман М.Ш., Яфаев Д.Р. Общая схема в стационарной теории рассеяния // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1987.—Вып. 12.—С. 89—117.
51. Бирман М.Ш., Яфаев Д.Р. О ядерном методе в теории потенциального рассеяния // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1989.—Т. 171.—С. 12—35.
52. Буслаев В.С. Формулы следов и некоторые асимптотические оценки ядра резольвенты для оператора Шредингера в трехмерном пространстве // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1966.—Вып. 1.—С. 82—101.
53. Буслаев В.С. Спектральные тождества и формула следа в модели Фридрихса // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1970.—Вып. 4.—С. 48—60.
54. Буслаев В.С., Фаддеев Л.Д. О формулах следов для дифференциального оператора Штурма—Лиувилля // Докл. АН СССР. Сер. мат.—1960.—Т. 132, N 1.—С. 13—16.
55. Вакуленко А.Ф. Об одном варианте коммутаторных оценок в спектральной теории // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1987.—Т. 163.—С. 29—36.

56. Гольдштейн И.Я., Молчанов С.А., Пастур Л.А. Типичный одномерный оператор Шредингера имеет чисто точечный спектр // Функциональный анализ и его приложения.—1977.—Т. 11, N 1.—С. 1—10.
57. Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г. Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и приложение к теории возмущений // Тр. сем. по функц. анализу, Воронеж.—1956.—Т. 1.—С. 81—105.
58. Дейч В.Г. Стационарный локальный метод в теории рассеяния для пары пространств // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1973.—Вып. 6.—С. 76—90.
59. Константинов А.Ю. Принцип инвариантности волновых операторов // Докл. АН СССР. Сер. мат.—1985.—Т. 281, N 5.—С. 1041—1044.
60. Коплиенко Л.С. К теории функции спектрального сдвига // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1971.—Вып. 5.—С. 62—79.
61. Коплиенко Л.С. Локальные признаки существования функции спектрального сдвига // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1977.—Т. 73.—С. 102—117.
62. Коплиенко Л.С. Формула следа в абстрактной теории рассеяния для пары пространств // Проблемы матем. физики.—Л.: Изд-во ЛГУ.—1979.—Вып. 9.—С. 41—53.
63. Коплиенко Л.С. О формуле следа для возмущений неядерного типа // Сиб. матем. журн.—1984.—Т. 25, N 5.—С. 62—71.
64. Крейн М.Г. О формуле следов в теории возмущений // Матем. сб.—1953.—Т. 33, N 3.—С. 597—626.
65. Крейн М.Г. Об определителях возмущения и формуле следов // Докл. АН СССР. Сер. матем.—1962.—Т. 144, N 2.—С. 268—273.
66. Крейн М.Г. О некоторых новых исследованиях по теории возмущений // Первая летняя матем. школа, Киев.—1963.—С. 104—183.
67. Крейн М.Г., Яврян В.А. О функциях спектрального сдвига, возникающих при возмущении положительного оператора // J. Oper. Theory.—1981.—V. 6.—P. 155—191.
68. Ладьженская О.А., Фаддеев Л.Д. К теории возмущений непрерывного спектра // Докл. АН СССР. Сер. матем.—1958.—Т. 120, N 6.—С. 1187—1190.
69. Лифшиц И.М. Об одной задаче теории возмущений // Успехи матем. наук.—1952.—Т. 7, вып. 1.—С. 171—180.
70. Набоко С.Н. О граничных задачах аналитических оператор-функций с положительной мнимой частью // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1987.—Т. 157.—С. 55—69.
71. Павлов Б.С., Петрас С.В. О сингулярном спектре слабо возмущенного оператора умножения // Функциональный анализ и его приложения.—1970.—Т. 4, вып. 2.—С. 54—61.
72. Пеллер В.В. Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряженных операторов // Функциональный анализ и его приложения.—Т. 19, вып. 2.—С. 37—51.
73. Повзнер А.Я. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta + q$ // Матем. сб.—1953.—Т. 32, N 1.—С. 109—156.
74. Повзнер А.Я. О разложении по собственным функциям уравнения

- Шредингера // Докл. АН СССР, Сер. матем.—1955.—Т. 104, N 3.—С. 360—363.
75. Ротфельд С.Ю. О спектральных свойствах матрицы рассеяния. I // Изв. ВУЗов—1972.—N 3.—С. 52—60; II// Проблемы матем. физики, ЛГУ.—1974.—Вып. 7.—С. 135—149.
 76. Соболев А.В., Яфаев Д.Р. О спектральных свойствах матрицы рассеяния // Функци. анализ и его прил.—1989.—Т. 23, Вып. 3.—С. 88—89.
 77. Соболев А.В., Яфаев Д.Р. Спектральные свойства абстрактной матрицы рассеяния // Труды МИАН.—1990.—Т. 188.—С. 125—149.
 78. Суслов А.В. Об одной теореме Исмагилова // Проблемы матем. физики, ЛГУ.—1979.—Вып. 9.—С. 142—145.
 79. Фаддеев Л.Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра // Труды МИАН.—1964.—Т. 73.—С. 292—313.
 80. Фарфаровская Ю.Б. Пример липшицевой функции от самосопряженного оператора, дающей неядерные приращения при ядерном возмущении // Зап. научн. семин. ЛОМИ.—1972.—Т. 30.—С. 146—153.
 81. Яврян В.А. О некоторых возмущениях самосопряженных операторов // Докл. АН Арм. ССР.—1964.—Т. 38, N 1.—С. 3—7.
 82. Яфаев Д.Р. К теории многоканального рассеяния в паре пространств // Теор. матем. физ.—1978.—Т. 37, N 1.—С. 48—57.
 83. Яфаев Д.Р. К теории рассеяния в паре пространств // Функци. анализ и его прил.—1986.—Т. 20, вып. 2.—С. 94—95.
 84. Agmon S. Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa.—1975.—V. 2, Ser. 4.—P. 151—218.
 85. Amrein W., Pearson O. A time dependent approach to the total scattering cross-section // J.Phys.A.—1979.—V. 12, N 4.—P. 1469—1492.
 86. Aronszajn N. On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm—Liouville equations // Amer. J.Math.—1957.—V. 79.—P. 597—610.
 87. Asano K. Notes on Hilbert transforms of vector valued functions in the complex plane and their boundary values // Proc. Japan Acad., Ser.A, Math. Sci.—1967.—V. 43.—P. 572—577.
 88. Avron J., Simon B. Transient and recurrent spectrum // J.Funct. Anal.—1981.—V. 43.—P. 1—31.
 89. Carey P.W., Pincus J.D. Unitary equivalence modulo the trace class for self-adjoint operators // Amer. J.Math.—1976.—V. 98.—P. 481—514.
 90. Chandler C., Gibson A. Invariance principle for scattering with long-range (and other) potentials. // Indiana Univ., Math.J.—1976.—V. 25.—P. 433—460.
 91. Cook J.M. Convergence to the Moller wave matrix // J.Math. Phys.—1957.—V.36.—P. 82—87.
 92. Deift P.A., Simon B. A time-dependent approach to the completeness of multiparticle quantum systems // Comm. Pure Appl. Math.—1977.—V. 30.—P. 573—583.
 93. Donoghue W.F. On the perturbation of spectra // Comm. Pure Appl. Math.—1965.—V. 18.—P. 559—579.
 94. Enss V. Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering // Comm. Math. Phys.—1978.—V. 61.—P. 285—291.
 95. Enss V., Simon B. Finite total cross-sections in nonrelativistic quantum mechanics // Comm. Math. Phys.—1980.—V. 76.—P. 117—209.

96. Friedrichs K.O. Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators // Math. Ann.—1938.—V. 115.—P. 249—272.
97. Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra // Comm. Pure Appl. Math.—1948.—V. 1.—P. 361—406.
98. Gell-Mann M., Goldberger M.L. The formal theory of scattering // Phys. Rev.—1953.—V. 91.—P. 398—408.
99. Ginibre J. La méthode "dépendant du temps" dans le problème de la complétude asymptotique // Publ. IRMA (Strasbourg).—1979.—RCP 25, 29.—P. 1—66.
100. Hack M.N. On the convergence to the Moller wave operators // Nuovo Gimento.—1958.—V. 9.—P. 731—733.
101. Heisenberg W. Die «beobachtbaren Größen» in der Theorie der Elementarteilchen // Z.Phys.—1943.—V. 120.—P. 513—538.
102. Howland J.S. Banach space techniques in the perturbation theory of self-adjoint operators with continuous spectra // J.Math. Appl.—1967.—V. 20.—P. 22—47.
103. Howland J.S. On the Kato-Rosenblum theorem // Pacif.J.Math.—1986.—V. 123, N 2.—P. 329—335.
104. Ikebe T. Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their application to scattering theory // Arch. Ration. Mech. Anal.—1960.—V. 5.—P. 1—34; Erratum: Remarks on the orthogonality of eigenfunctions for the Schrödinger operator in $\mathbb{R}^n$ // J.Fac.Sci., Tokyo Univ., Sect.I—1970.—V. 17.—P. 355—361.
105. Jauch J.M. Theory of the scattering operator // Helv. Phys. Acta.—1958.—V. 31.—P. 127—158.
106. Kato T. On finite-dimensional perturbations of selfadjoint operators // J.Math. Soc. Japan.—1957.—V. 9.—P. 239—249.
107. Kato T. Perturbation of continuous spectra by trace class operators // Proc. Japan Acad.—1957.—V. 33.—P. 260—264.
108. Kato T. Wave operators and unitary equivalence // Pacif. J.Math.—1965.—V. 15.—P. 171—180.
109. Kato T. Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators // Math. Ann.—1966.—V. 162.—P. 258—279.
110. Kato T. Scattering theory with two Hilbert spaces // J.Funct. Anal.—1967.—V. 1.—P. 342—369.
111. Kato T. Smooth operators and commutators // Studia Math.—1968.—V. 31.—P. 535—546.
112. Kato T. Some results on potential scattering // Proc. Intern. Conference on Funct. Anal. and Related Topics, Univ. of Tokyo Press, Tokyo.—1969.—P. 206—215.
113. Kato T. Monotonicity theorems in scattering theory // Hadronic J.—1978.—V. 1.—P. 134—154.
114. Kato T., Kuroda S.T. Theory of simple scattering and eigenfunction expansions // In: Browder F.E. (ed.), Funct. Anal. and Related Fields, Springer, Berlin-Heidelberg-New-York.—1970.—P. 99—131.
115. Kato T., Kuroda S.T. The abstract theory of scattering // Rocky Mountain J.Math.—1971.—V. 1.—P. 127—171.
116. Kupsch J., Sandhas W. Moller operators for scattering on singular potentials // Comm. Math. Phys.—1966.—V. 2.—P. 147—154.

117. Kuroda S.T. On a theorem of Weyl-von Neumann // *Proc. Japan Acad.*—1958.—V. 34.—P. 11—15.
118. Kuroda S.T. On the existence and the unitarity property of the scattering operator // *Nuovo Cimento.*—1959.—V. 12.—P. 431—454.
119. Kuroda S.T. Perturbation of continuous spectra by unbounded operators // *J. Math. Soc. Japan*: I.—1959.—V. 11.—P. 247—262; II—1960.—V. 12.—P. 243—257.
120. Kuroda S.T. An abstract stationary approach to perturbation of continuous spectra and scattering theory // *J.d'Anal. Math.*—1967.—V. 20.—P. 57—117.
121. Kuroda S.T. Scattering theory for differential operators // *J. Math. Soc. Japan.*—1973.—V. 25; I Operator theory.—P. 75—104; II. Selfadjoint elliptic operators.—P. 222—234.
122. Lavine R. Absolute continuity of Hamiltonian operators with repulsive potentials // *Proc. Amer. Math. Soc.*—1969.—V. 22.—P. 55—60.
123. Lavine R. Commutators and scattering theory: I. Repulsive interactions; II. A class of one body problems // *Comm. Math. Phys.*—1971.—V. 20.—P. 301—323; *Indiana Univ. Math. J.*—1972.—V. 21.—P. 643—656.
124. Lavine R. Completeness of the wave operators in the repulsive N-body problem // *J. Math. Phys.*—1973.—V. 14.—P. 376—379.
125. Lippmann B.A., Schwinger J. Variational principles for scattering processes // *Phys. Rev.*—1950.—V. 79.—P. 469—480.
126. Moller C. General properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles. I. // *Danske Vid. Selsk. Mat.—Fys. Medd.*—1945.—V. 23, N 1.—P. 1—48.
127. Mourre E. Absence of singular spectrum for certain self-adjoint operators // *Comm. Math. Phys.*—1981.—V. 78.—P. 391—400.
128. Neidhardt H. Spectral shift function and Hilbert—Schmidt perturbation: extensions of some work of L.S.Koplienko // *Math. Nachr.*—1988.—V. 138.—P. 7—25.
129. Neumann J. Charakterisierung des Spectrums eines Integral-operators // *Actualites Sci. Ind.*—1935.—V. 229.—P. 38—55.
130. Obermann P., Wollenberg M. Abel wave operators: II. Wave operators for functions of operators // *J. Funct. Anal.*—1978.—V. 30.—P. 48—59.
131. Pearson D.B. A generalization of the Birman trace theorem // *J. Funct. Anal.*—1978.—V. 28.—P. 182—186.
132. Perry P.A., Sigal I.M., Simon B. Spectral analysis of N-body Schrödinger operators // *Ann. Math.*—1981.—V. 114.—P. 519—567.
133. Putnam R. On the spectra of unitary halfscattering operators // *Quart. Appl. Math.*—1962/63.—V. 20.—P. 85—88.
134. Rejto P.A. On gentle perturbations. I, II // *Comm. Pure Appl. Math.*—1963.—V. 16.—P. 279—303;—1964.—V. 17.—P. 257—292.
135. Rejto P.A. On partly gentle perturbations. I, II, III // *J. Math. Anal. Appl.*—1967.—V. 17.—P. 435—462;—1967.—V. 20.—P. 145—187;—1969.—V. 27.—P. 21—67.
136. Rosenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence // *Pacif. J. Math.*—1957.—V. 7.—P. 997—1010.
137. Sobolev A.V., Yafaev D.R. On the quasi-classical limit of the total scattering cross-section in nonrelativistic quantum mechanics // *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*—1986.—V. 44, N 2.—P. 195—210.

138. Weyl H. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann.—1910.—V. 68.—P. 220—269.
139. Wheeler J.A. On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure // Phys. Rev.—1937.—V. 52.—P. 1107—1122.
140. Wollenberg M. The invariance principle for wave operators // Pacif. J.Math.—1975.—V. 59.—P. 303—315.
141. Wollenberg M. On the invariance principle of scattering theory with two Hilbert spaces // Math. Nachr.—1977.—V. 79.—P. 265—269.
142. Yafaev D.R. On some spectral properties of the scattering matrix // Proc. Int. Conference on Integral Equations and Inverse Problems.—Bulgaria.—1989.
143. Коплиенко Л.С. О спектре матрицы рассеяния. // Изв. вузов. Математика.—1971.—N 5.—С. 54—61.

Учебное издание

Яфас Дмитрий Рауэлевич

Математическая теория рассеяния
Общая теория

Редактор *Т.В. Мызникова*

Компьютерный набор *С.Л. Кизяк*

Верстка *О.М. Перуновская*

Художественный редактор *Е.И. Егорова*

Технический редактор *А.В. Борщева*

Корректор *К.Я. Герловина*

ИБ N 4281

Издание подготовлено в *AMS-TEX*

Лицензия ЛР N 040050 от 05.08.91 г.

Подписано в печать 14.10.94. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,64. Усл. кр.-отт. 24,81. Уч.-изд. л.
22,7. Тираж 500 экз. Заказ 1003.

Издательство СПбГУ. 199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Участок оперативной полиграфии типографии Издательства СПбГУ.
199061, С.-Петербург, Средний пр., 41.