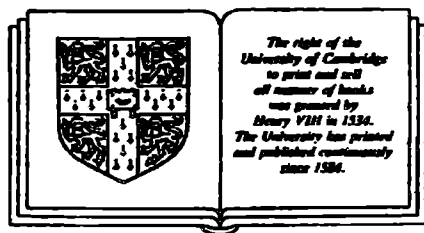


Infinite dimensional Lie algebras

Third edition

VICTOR G. KAC

**Professor of Mathematics
Massachusetts Institute of Technology**



CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

Cambridge

New York Port Chester

Melbourne Sydney

В. Кац

Бесконечномерные алгебры Ли

Перевод с английского

А. И. Молева

под редакцией

В. Л. Попова



Москва «Мир» 1993

Оглавление

От редактора перевода	5
Введение	8
Принятые обозначения	18
Глава 1. Основные определения	20
Глава 2. Инвариантная билинейная форма и обобщенный оператор Казимира	35
Глава 3. Интегрируемые представления алгебр Каца — Муди и группа Вейля	48
Глава 4. Классификация обобщенных матриц Картана	65
Глава 5. Вещественные и мнимые корни	78
Глава 6. Аффиинные алгебры: нормализованная инвариантная форма, система корней и группа Вейля	98
Глава 7. Аффиинные алгебры как центральные расширения алгебр петель	115
Глава 8. Скрученные аффиинные алгебры и автоморфизмы конечного порядка	145
Глава 9. Модули со старшим весом над алгебрами Каца — Муди	165
Глава 10. Интегрируемые модули со старшим весом: формула для характера	191

Гл.	Оглавление	425
Глава 11.	Интегрируемые модули со старшим весом: система весов и унитаризуемость	211
Глава 12.	Интегрируемые модули со старшим весом над аффинными алгебрами. Приложение к тождествам для η -функции. Операторы Сугавары и функции ветвления	238
Глава 13.	Аффинные алгебры, тета-функции и модулярные формы	271
Глава 14.	Главная и однородная вертекс-операторные конструкции базисного представления. Бозонно-фермионное соответствие. Приложение к солитонным уравнениям	316
	Указатель обозначений и определений	378
	Литература	392
	Труды конференций и сборники статей	422

ББК 22.144

К30

УДК 512.5

Кац В.

К30 Бесконечномерные алгебры Ли: Пер. с англ. — М., Мир, 1993. — 425 с., ил.

ISBN 5-03-002574-X

Книга крупного математика (США) является первой в мировой литературе монографией по теории алгебр Каца — Мули, естественно обобщающих полупростые конечномерные алгебры Ли. Приложения включают теорию модулярных форм и η -функций, комбинаторные тождества Макдональда, теорию конечных простых групп (монстр), классические вопросы алгебраической геометрии кривых, иерархию дифференциальных уравнений КДФ, конформную теорию поля, теорию струн. Русский перевод выполнен с 3-го переработанного издания.

Для математиков разных специальностей, физиков-теоретиков, аспирантов и студентов университетов.

К $\frac{1602040000-120}{041(01)-93}$ КБ-7-93-208

ББК 22.144

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-002574-X (русск.)

ISBN 0-521-37215-1 (англ.)

© Cambridge University Press 1990

© перевод на русский язык, Молев А. И., 1993

Предметом этой книги являются алгебры Ли специального вида, общеизвестные в настоящее время под названием алгебр Каца — Му-ди, их структура, представления и приложения. Мне нет здесь нужды ни давать их определения, ни описывать генезис, ни останавливаться на описании структуры книги и содержания ее глав. В. Кац является одним из создателей теории этих алгебр, сделавшим для ее развития, быть может, больше, чем кто-либо другой, и активно работающим в этой области и сейчас. Изложение начинается с основ и заканчивается результатами самого последнего времени. В книге дана обширная библиография. Поэтому те, кто понимает важность предмета, — математики и физики — найдут в ней много ценного для себя. Начинаящему же следует знать, что теория алгебр Каца — Му-ди стала сейчас столь же обычной в математическом обиходе (и столь же необходимой в математическом багаже современного алгебраиста и физика-теоретика), как и классическая теория полупростых алгебр Ли. Так случилось, что я был в числе тех, кто слушал в 1967–1968 гг. доклады автора по его первым работам в этой области. Тогда они были известны лишь небольшой группе математиков. Многие структурные результаты, теория представлений, приложения к комбинаторике и топологии, теории модулярных форм и тета-функций, теории особенностей, математической физике и гамильтоновой механике, теории конечных простых групп и теории солитонов, к квантовой теории поля — все это было еще впереди. То, что алгебры Каца — Му-ди являются фундаментальными, классическими объектами, теперь, я думаю, стало бесспорным фактом. В то же время эта теория сейчас бурно развивается, и, я не сомневаюсь, наблюдатели еще не раз будут иметь основание сказать словами Феликса Клейна¹, что ее разработчики «попали киркой как раз в то самое место породы, где в глубине таится золотой слиток».

Это уже третье английское издание книги. Я помню, что, когда появилось первое ее издание, теория алгебр Каца — Му-ди была уже очень популярна и привлекала к себе многих отечественных математиков. К сожалению, тогда о переводе книги на русский язык вряд ли можно было серьезно думать (а достать каждому желающему английский оригинал в нашей стране было непросто). Теперь, наконец, перевод на русский язык предлагается вниманию читателя. В качестве

¹ Ф. Клейн, Лекции о развитии математики в XIX столетии. I. — М.: Наука, 2-е издание, 1989, с. 44.

некоторого утешения за опоздание можно заметить, что третье издание книги является более полным, чем предыдущие, содержит целый ряд усовершенствований, а также много нового материала, интересного для физиков-теоретиков (особенно для специалистов по квантовой теории поля).

В заключение пользуюсь случаем выразить признательность автору за большое внимание к русскому переводу: он прислал список исправлений, а также ряд небольших изменений и добавлений и любезно прочитал корректуру.

22 марта 1992 г.

В. Л. Попов

*Посвящается моему учителю
Эрнесту Борисовичу Винбергу
с благодарностью и восхищением*

La Nature est un temple où de vivants piliers
Laissent parfois sortir de confuses paroles;
L'homme y passe à travers des forêts de symboles
Qui l'observent avec des regards familiers.
Charles Baudelaire, *Les Fleurs du Mal*¹

И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин.
Осип Мандельштам

Введение

§0.1. Создатели теории Ли рассматривали группу Ли как группу симметрий алгебраического или геометрического объекта; соответствующая алгебра Ли, с их точки зрения, была множеством инфинитезимальных преобразований. Поскольку группа симметрий такого объекта не обязательно конечномерна, С. Ли рассматривал не только проблему классификации подгрупп группы GL_n , но также проблему классификации бесконечномерных групп преобразований.

Задача классификации простых конечномерных алгебр Ли над полем комплексных чисел была решена к концу 19-го в. В. Киллингом и Э. Картаном. (Яркое описание истории этого открытия, одного из самых замечательных во всей математике, можно найти у Хаукинса в Hawkins [1982].) А десять лет спустя Картан классифицировал простые бесконечномерные алгебры Ли векторных полей на конечномерном пространстве.

Начиная с работ Ли, Киллинга и Картана, теория конечномерных групп и алгебр Ли систематически развивалась вглубь и вширь. С другой стороны, работы Картана по простым бесконечномерным алгебрам Ли были фактически забыты до середины шестидесятых годов. Интерес к этой области начал возрождаться с работ Гийемина и Стернберга (Guillemin, Sternberg [1964]) и Зингера и Стернберга (Singer, Sternberg [1965]), которые развили соответствующий алгебраический язык и технику фильтрованных и градуированных алгебр Ли. Им, однако, не удалось найти алгебраического доказательства классификационной теоремы Картана (аналитическое доказательство см. в работе Guillemin, Quillen, Sternberg [1966]). Это было сделано Вейсфайлером [1968], который свел проблему к классификации простых

¹ Бодлер Ш. Цветы зла. — М.: Наука, 1970, с. 20. — Прим. ред.

$\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли конечной «глубины» $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \geq -d} \mathfrak{g}_j$, где $\dim \mathfrak{g}_j < \infty$ и $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ является неприводимым.

§0.2. В настоящее время нет общей теории бесконечномерных групп и алгебр Ли и их представлений. Имеются, однако, четыре класса бесконечномерных групп и алгебр Ли, которые подвергались более или менее интенсивному исследованию. Прежде всего это упомянутые выше алгебры Ли векторных полей и соответствующие группы диффеоморфизмов многообразия. Начиная с работ Гельфанда и Фукса [1969], [1970 A,B], появилось важное направление, имеющее много геометрических приложений, — это теория кохомологий бесконечномерных алгебр Ли векторных полей на конечномерном многообразии. Имеется также довольно большое количество работ, в которых изучаются и классифицируются различные семейства представлений групп диффеоморфизмов многообразия. Возможно, в первый класс следует включить также группы бигеометрических автоморфизмов алгебраического многообразия (см. Шафаревич [1981]).

Второй класс состоит из групп Ли (соответственно алгебр Ли) гладких отображений данного многообразия в конечномерную группу Ли (соответственно алгебру Ли). Другими словами, это группа (соответственно алгебра Ли) матриц над некоторой алгеброй функций, но рассматриваемая над основным полем. (Физики называют некоторые центральные расширения этих алгебр Ли алгебрами токов.) Основным объектом изучения в этом случае были отдельные специальные семейства представлений.

Третий класс состоит из классических групп и алгебр Ли операторов в гильбертовом или банаховом пространстве. В этой области есть довольно большое число разрозненных результатов, касающихся структуры этих групп и алгебр Ли и их представлений. Важную роль в квантовой теории поля играет представление Сигала — Шейла — Вейля (или метаплектическое представление) бесконечномерной симплектической группы.

В этой книге я не буду обсуждать перечисленные выше три класса бесконечномерных алгебр Ли, за исключением тех, которые тесно связаны с алгебрами Ли четвертого класса, рассматриваемого ниже. Читателю, интересующемуся этими тремя классами, следует обратиться к литературе, приведенной в конце книги.

Наконец, четвертый класс бесконечномерных алгебр Ли — это класс так называемых алгебр Каца — Муди, составляющий предмет настоящей книги.

§0.3. Обсудим теперь кратко основные понятия структурной теории алгебр Каца — Муди. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — обобщенная матрица Картана, т. е. целочисленная $n \times n$ -матрица, такая, что $a_{ii} = 2$,

$\bar{a}_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$ и $a_{ij} = 0$ влечет за собой $a_{ji} = 0$. Соответствующая алгебра Каца — Муди $g'(A)$ — это комплексная алгебра Ли с $3n$ образующими e_i, f_i, h_i ($i = 1, \dots, n$) и следующими определяющими соотношениями ($i, j = 1, \dots, n$):

$$(0.3.1) \quad \begin{cases} [h_i, h_j] = 0, & [e_i, f_i] = h_i, & [e_i, f_j] = 0, \text{ если } i \neq j, \\ [h_i, e_j] = a_{ij} e_j, & [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j, \\ (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, & (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \text{ если } i \neq j. \end{cases}$$

(Определение, данное в основном тексте книги (см. гл. 1), отличается от приведенного выше; оно более удобно по целому ряду соображений. Доказательство того факта, что производная алгебра алгебры Ли $g(A)$, определенной в гл. 1, совпадает с алгеброй $g'(A)$, заданной соотношениями (0.3.1), получено Габбером и Кацем (Gabber, Кас [1981]) при условии «симметризуемости»; это доказательство появится в гл. 9.)

Я пришел к рассмотрению этих алгебр, когда пытался понять и обобщить работы Гийемина, Квиллена, Зингера, Стернберга и Вейсфайлера по классификации Картана. Ключевая идея состояла в том, чтобы изучить произвольные простые $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры Ли $g = \bigoplus_j g_j$; но, поскольку таких алгебр Ли слишком много, главным

было требование, чтобы размерность g_j росла не быстрее некоторого полинома от j . (Можно показать, что алгебры Ли конечной глубины удовлетворяют этому условию и что это условие не зависит от градуировки.) Такие алгебры Ли были классифицированы при некоторых технических предположениях (см. Кац [1968 В]). Оказалось, что в дополнение к четырем картановским сериям алгебр Ли полиномиальных векторных полей есть еще один класс бесконечномерных алгебр Ли полиномиального роста, которые называются аффинными алгебрами Ли (более точно, они являются факторами аффинных алгебр Ли по одномерному центру). В то же время Муди (Moody [1968]) независимо начал исследование алгебр Ли $g'(A)$.

Класс алгебр Каца — Муди разбивается на три подкласса. Для их описания удобно предположить, что матрица A неразложима (т. е. не существует разбиения множества $\{1, \dots, n\}$ на два непустых подмножества, таких, что $a_{ij} = 0$, если i принадлежит первому подмножеству, а j — второму; это не ограничивает общности рассмотрения, так как прямая сумма матриц соответствует прямой сумме алгебр Каца — Муди). Тогда есть три взаимно исключающие возможности:

а) Существует вектор θ с целыми положительными координатами, такой, что все координаты вектора $A\theta$ положительны. В этом случае все главные миноры матрицы A положительны и алгебра Ли $g'(A)$ конечномерна.

б) Существует вектор δ с целыми положительными координатами, такой, что $A\delta = 0$. В этом случае все главные миноры матрицы A

неотрицательны и $\det A = 0$; алгебра $g'(A)$ бесконечномерна, но является алгеброй полиномиального роста (более того, она обладает $\mathbb{Z}$ -градуировкой, в которой размерности всех градуировочных подпространств ограничены). Алгебры Ли этого подкласса называются *аффинными алгебрами Ли*.

с) Существует вектор α с целыми положительными координатами, такой, что все координаты вектора $A\alpha$ отрицательны. В этом случае алгебра $g'(A)$ имеет экспоненциальный рост.

Основное достижение теории Киллинга — Картана может быть сформулировано следующим образом: простая конечномерная комплексная алгебра Ли изоморфна одной из алгебр подкласса а). (Заметим, что классификация матриц типов а) и б) является довольно простой задачей.) Факт существования образующих, удовлетворяющих соотношениям (0.3.1), был отмечен Шевалле (Chevalley [1948]) и Хариш-Чандрой (Harish-Chandra [1951]). (Много позже Серр (Serre [1966]) и Кац [1968 В] показали, что эти соотношения являются определяющими.)

Оказалось, что большинство классических понятий теории Киллинга — Картана — Вейля, такие, как подалгебра Картана, система корней, группа Вейля и т. д., может быть перенесено во весь класс алгебр Каца — Муди. При этом открывается ряд новых явлений, которые подробно исследуются в книге (гл. 1–6). Здесь я только отмечу, что $g'(A)$ не всегда обладает ненулевой инвариантной билинейной формой. Такая форма существует в том и только том случае, когда матрица A симметризуема, т. е. для некоторой обратимой диагональной матрицы D матрица DA является симметрической (см. гл. 2).

§0.4. Важное свойство аффинных алгебр Ли состоит в том, что они имеют простую реализацию (см. гл. 7 и 8). Здесь я объясню эту реализацию на примере алгебры Каца — Муди, соответствующей расширенной матрице Картана простой конечномерной комплексной алгебры Ли g . (Все такие матрицы представляют собой «аффинные» обобщенные матрицы Картана; отвечающие им алгебры $g'(A)$ называются нескрученными аффинными алгебрами Ли.) Оказывается, что аффинная алгебра Ли $g'(A)$ получается как центральное расширение с помощью одномерного центра из алгебры Ли полиномиальных отображений окружности в простую конечномерную комплексную алгебру Ли g (это простейший пример алгебры Ли, принадлежащей второму классу, о котором шла речь в §0.2).

Более подробно, рассмотрим какое-нибудь точное конечномерное представление алгебры Ли g . Тогда $g'(A)$ изоморфна алгебре Ли $(C[t, t^{-1}] \otimes g) \oplus Cc$ с операцией коммутирования

$$[(t^m \otimes a) \oplus \lambda c, (t^n \otimes b) \oplus \mu c] = (t^{m+n} \otimes [a, b]) \oplus m\delta_{m,-n}(\operatorname{tr} ab)c,$$

так что Cc есть (1-мерный) центр. Эта реализация позволяет изучать аффинные алгебры Ли с другой точки зрения. В частности, алгебра

векторных полей на окружности (простейшая алгебра первого класса) играет важную роль в теории аффинных алгебр Ли.

Заметим также, что алгебры Ли четвертого класса тесно связаны с аффинными алгебрами Ли бесконечного ранга, которые рассматриваются в гл. 7 и 14.

К сожалению, до сих пор не найдено простой реализации ни для одной неаффинной бесконечномерной алгебры Каца — Муди. Этот вопрос представляется одной из наиболее важных открытых проблем теории.

§0.5. Важное понятие интегрируемого представления со старшим весом отсутствовало в первых работах по алгебрам Каца — Муди (введено Кацем [1974]). Для данной последовательности неотрицательных целых чисел $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *интегрируемым представлением со старшим весом* алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}'(A)$ называется неприводимое представление π_Λ этой алгебры в комплексном пространстве $L(\Lambda)$, которое определяется тем свойством, что существует ненулевой вектор $v_\Lambda \in L(\Lambda)$, удовлетворяющий условиям

$$\pi_\Lambda(e_i)v_\Lambda = 0 \text{ и } \pi_\Lambda(h_i)v_\Lambda = \lambda_i v_\Lambda \quad (i = 1, \dots, n).$$

(Эта терминология объясняется тем, что Λ называется старшим весом, а условия на Λ необходимы и достаточны для того, чтобы можно было проинтегрировать π_Λ и получить представление соответствующей группы.)

Теорема Картана о старшем весе утверждает, что все представления π_Λ комплексной простой конечномерной алгебры Ли конечномерны и каждое конечномерное неприводимое представление эквивалентно одному из π_Λ .

Тот факт, что представления π_Λ конечномерны (наиболее нетривиальная часть теоремы Картана), был доказан Картаном проверкой один за другим всех случаев. Чисто алгебраическое доказательство было найдено много позже Шевалле (Chevalley [1948]) и Хариш-Чандрой (Harish-Chandra [1951]) («трансцендентное» доказательство раньше нашел Г. Вейль). Ретроспективно эта короткая заметка Шевалле предстает как предвестник алгебраизации теории представлений групп Ли. Эта заметка содержит также в зачаточной форме многие основные понятия теории алгебр Каца — Муди.

Алгебраизация теории представлений групп Ли, развитие которой в течение последнего десятилетия было подобно взрыву, началась с работы Бернштейна, Гельфанда и Гельфанда [1971], посвященной модулям Верма (первые нетривиальные результаты об этих модулях были получены Верма (Verma [1968])). В частности, используя модули Верма, Бернштейн, С.И. Гельфанд и И.М. Гельфанд дали прозрачное алгебраическое доказательство формулы Вейля для характеров конечномерных неприводимых представлений конечномерных простых алгебр Ли.

Примерно в то же время Макдональд (Macdonald [1972]) получил свои замечательные тождества. В этой работе он предпринял попытку обобщить тождество Вейля для знаменателя на случай аффинных систем корней. Он обнаружил, что прямое обобщение этой формулы в действительности является ложным. Чтобы спасти положение, ему пришлось добавить некоторые «таинственные» сомножители, которые он смог определить в результате длинных вычислений. Простейший пример тождества Макдональда — это знаменитое тождество Якоби для тройного произведения

$$\prod_{n \geq 1} (1 - u^n v^n) (1 - u^{n-1} v^n) (1 - u^n v^{n-1}) \\ = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m u^{\frac{1}{2}m(m+1)} v^{\frac{1}{2}m(m-1)}.$$

«Таинственные» сомножители, которые не соответствуют аффинным корням, — это $(1 - u^n v^n)$.

После того как появились две упомянутые выше работы, оставалось сделать совсем немного; требовалось лишь положить их на стол рядом друг с другом, чтобы понять, что результат Макдональда есть только верхушка айсберга — теории представлений алгебр Каца — Мули. А именно, оказалось, что, используя упрощенный вариант доказательства Бернштейна — Гельфанда — Гельфанда, можно вывести обобщенную формулу Вейля для формального характера представления π_A произвольной алгебры Каца — Мули $\mathfrak{g}'(A)$, соответствующей симметризуемой матрице A . В случае простейшего одномерного представления π_0 эта формула дает обобщение тождества Вейля для знаменателя. Для аффинной алгебры Ли обобщенное тождество Вейля для знаменателя оказывается эквивалентным тождествам Макдональда. При этом «таинственные» сомножители получают простую интерпретацию: они соответствуют так называемым мнимым корням (которые следует добавить к аффинным корням, чтобы получить все корни аффинной алгебры Ли). Отметим, что простейший пример, тождество Якоби для тройного произведения, оказывается просто обобщенным тождеством для знаменателя для аффинной алгебры Ли, соответствующей матрице $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Изложение этих результатов (полученных Кацем [1974]) можно найти в гл. 10. Главы 9–14 посвящены общей теории представлений со старшим весом и ее приложениям.

Основным инструментом теории представлений со старшим весом является обобщенный оператор Казимира (см. гл. 2). К сожалению, конструкция этого оператора возможна только для случая симметризуемых матриц A . Пока остается открытым вопрос о том, можно ли опустить предположение о симметризуемости матрицы A .

Как только были введены интегрируемые представления со старшим весом, теория алгебр Каца — Мули оторвалась от земли и с

тех пор развивается с возрастающей скоростью. В прошедшее десятилетие выявились тесные связи этой теории со многими областями математики и математической физики, такими, как теория инвариантов, комбинаторика, топология, теория модулярных форм и тета-функций, теория особенностей, конечные простые группы, гамильтонова механика, солитонные уравнения и квантовая теория поля.

§0.6. Эта книга содержит подробное изложение основ теории алгебр Каца — Муди и их интегрируемых представлений. Кроме приложения к упомянутым выше тождествам Макдональда (гл. 12) в книге обсуждаются приложение к классификации автоморфизмов конечно-порядка простых конечномерных алгебр Ли (гл. 8) и связь с теорией модулярных форм и тета-функций (гл. 13). В последней, 14-й главе речь идет о замечательной связи между теорией представлений аффинных алгебр Ли и уравнениями типа Кортевега — де Фриза, обнаруженной школой Кисто.

Обычно теорией алгебр Ли интересуются еще и потому, что она связана с теорией групп, и алгебры Каца — Муди не являются исключением. Недавно появился ряд глубоких результатов о группах, соответствующих алгебрам Каца — Муди. Обсуждение этих результатов потребовало бы написания еще одной книги. Я решил ограничиться небольшими комментариями, относящимися к этому предмету, помещенными в конце некоторых глав.

§0.7. Везде в этой книге основным полем является поле комплексных чисел. Однако все результаты, за исключением, конечно, тех, которые касаются эрмитовых форм и проблем сходимости, могут быть без особых сложностей перенесены на случай произвольного поля характеристики нуля.

§0.8. Мотивировки приводятся в начале каждой главы, которая заканчивается соответствующими библиографическими комментариями. За основным текстом каждой главы следуют упражнения (их общее число превышает 250). Некоторые из них вполне элементарны, другие представляют собой короткое изложение оригинальных работ. Я надеюсь, что эти изложения достаточно подробны для того, чтобы прилежный читатель смог восстановить все доказательства. Квадратные скобки в конце некоторых упражнений содержат указания для их выполнения.

Изложение в книге является практически замкнутым. Хотя я имел в виду читателя, хорошо знающего теорию конечномерных полупростых алгебр Ли, для понимания большей части книги достаточно знания элементов теории алгебр Ли, их обертывающих алгебр и представлений. Например, книги Хамфри Humphreys [1972] или Варадараджана Varadarajan [1984] будет более чем достаточно.

В конце книги приведена довольно обширная библиография. Я надеюсь, что список упомянутых математических работ по теории алгебр Каца — Муди является по крайней мере всюду плотным. Что касается физических работ, то это совсем не так. Выбор ссылок в этом случае был довольно произвольным и часто зависел от того, была ли у меня копия статьи, или от того, обсуждал ли я ее с автором. То же самое относится к ссылкам на работы по другим классам бесконечномерных алгебр Ли.

§0.9. Эта книга основана на лекциях, прочитанных в Массачусетском технологическом институте в 1978, 1980 и 1982 гг. и в Коллеж де Франс в 1981 г. За полезные замечания и поправки к тексту лекций я хотел бы поблагодарить Ф. Арнольда, Р. Колея, Р. Гросса, З. Халлада, М. Хаймана, Г. Хекмана, Ф. Левстейна, А. Роша и Т. Вонгиоклиса. Я благодарен М. Дюфло, Г. Хекману, Б. Купершмидту и Б. Вейсфейлеру, прочитавшим отдельные части рукописи и отметившим ошибки. Я прошу извинения за те ошибки, которые остались. Я искренне благодарю Ф. Роз, Б. Каца и М. Каца, без чьей помощи и поддержки эта книга никогда не увидела бы свет. Хочу также поблагодарить К. Маннинг и К. Макферсон за помощь с языком. При подготовке книги использовался ТрХ Д. Кнута. Наконец, пользуясь случаем, я хотел бы выразить глубокую благодарность Д. Питерсону, сотрудничество с которым оказало огромное влияние не только на эту книгу, но и на большую часть моей математической деятельности в последние несколько лет.

Автору была оказана частичная поддержка со стороны фонда Слоуна и со стороны Национального научного фонда.

Июль 1983, Лиль Адам, Франция

Предисловие ко второму изданию

Наиболее важные добавления отражают последние результаты в теории бесконечномерных групп (среди них некоторые ключевые факты, такие, как предложение 3.8 и упр. 5.19) и в теории солитонов (такие, как упр. 14.37–14.40, которые вскрывают роль алгебры Вирасоро). Наиболее существенное исправление касается доказательства полной приводимости в предложении 9.10. Предыдущее доказательство использовало лемму 9.10b) из первого издания, которая, как показывает упр. 9.15, неверна. Исправленный вариант леммы 9.10b) называется теперь предложением 10.4 и дает характеризацию интегрируемых модулей со старшим весом.

Кроме исправления опечаток и ошибок и добавления нескольких дюжин новых упражнений я обновил список литературы и соответствующие библиографические комментарии. Я хочу поблагодарить тех, кто указал мне ошибки или предложил улучшения, в частности И. Дорфмейстера, Т. Энрайта, Д. Фрида, Э. Гецлера, Е. Гуткина, П. де ля Гарпа, Ш. Кумара, Б. Купершмидта, Ш.-Р. Лу, Д. Питерсона, Л.-Ж. Сантарубена, Дж. Шварца, В. С. Варадараджана, М. Вахимото, З. Вана, К. Ванга, И. Ванга, Б. Вейсфелера, К. Хие, Ю. Ю, Х. Жанга.

Апрель, 1985, Кембридж, Массачусетс

Предисловие к третьему изданию

Это издание значительно отличается от предыдущих. В частности, сделан больший акцент на связи с математической физикой, особенно с конформной теорией поля.

Ниже приводится список наиболее важных усовершенствований и добавлений.

Глава 3. Приведен простейший пример квантованной алгебры Каца — Муди $U_q(sl_2)$ вместе с ее представлениями (упр. 3.23 и 3.34).

Глава 5. Теория гиперболических групп Вейля используется для изучения унимодулярных лоренцевых решеток ранга ≤ 10 (§5.11).

Глава 6. Дается явная конструкция всех корневых и дуальных корневых решеток конечного типа вместе с соответствующей группой Вейля, системами корней и т. д. (§6.7).

Глава 7. Кратко обрисовывается подход к аффинным алгебрам с точки зрения теории поля (§7.7). Приводится явная конструкция всех простых конечномерных алгебр Ли в терминах корневых решеток и «асимметрических функций» на этих решетках (§7.8–7.10).

Глава 8. Дается простое и замкнутое доказательство основного факта, касающегося скрученных аффинных алгебр: эквивариантная алгебра петель $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ зависит только от связной компоненты группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$, содержащей σ (§8.5).

Глава 9. Обсуждаются элементы теории представлений алгебры Вирасоро (§9.14). Приводится свободно-полевая конструкция представлений алгебры Вирасоро и аффинной алгебры типа $A_1^{(1)}$ (упр. 9.17–9.20).

Глава 11. Обсуждается унитаризуемость представлений алгебры Вирасоро (§11.12). Дается набросок теории обобщенных алгебр Каца — Муди (§11.13).

Глава 12. Объясняются основные конструкции конформной теории поля — конструкция Сугавары и косет-конструкция. В этом контексте вводятся общие функции ветвления и вакуумные пары (§12.8–12.13).

Глава 13. Общие функции ветвления изучаются параллельно со струнными функциями. Изучается матрица S модулярных преобразований характеров (в предыдущих изданиях это не было сделано в явном виде). Даются явные оценки порядков всех полюсов и уровней функций ветвления. Изучается высокотемпературная асимптотика характеров и функций ветвления вместе с соответствующей гипотезой положительности. Показывается взаимосвязь ограничений модулярной и конформной инвариантности (§13.8–13.14). Это используется для изучения унитаризируемых представлений алгебры Виассоро и вычисления правил слияния (упр. 13.18–13.26 и 13.34–13.36).

Глава 14. С помощью вычислений с вертексными операторами выводится однородная вертекс-операторная конструкция (§14.8). Строится бесконечное клин-представление (§14.9). С использованием бозонно-фермионного соответствия (§14.10) изучается в целом КП-иерархия (§14.11 и 14.12), а с помощью главной и однородной вертекс-операторных конструкций для $A_1^{(1)}$ описываются КдФ- и НЛШ-иерархии (§14.13). Строится БКП-иерархия (упр. 14.13–14.15). Даются наброски теории бесконечного грассманиана и многообразия флагов и объясняется их связь с КП- и МКП-иерархиями (упр. 14.32, 14.33). Дается схема подхода к КП- и КдФ-иерархиям с точки зрения теории псевдодифференциальных операторов (упр. 14.44–14.51). Обсуждается независимая от выбора базиса теория алгебры и группы Ли типа A_∞ (упр. 14.55–14.58) и из этого обсуждения выводятся некоторые классические теоремы теории алгебраических кривых (упр. 14.59–14.63).

Кроме исправления опечаток и ошибок и добавления около сотни новых упражнений я обновил список литературы и соответствующие библиографические комментарии. Взрыв активности в этой области между вторым и третьим изданиями, в значительной степени благодаря работам физиков в теории струн и конформной теории поля, сделал невозможным составление приемлемо полной библиографии. Я надеюсь, однако, что набор ссылок, составленный для этого издания, по крайней мере отражает все ведущие направления исследования в данной области. Излишне говорить, что каждое предложение моего библиографического комментария могло бы начинаться со слов: «По моему мнению...».

Я хочу поблагодарить тех, кто указал мне ошибки или предложил усовершенствования, в частности Р. Борчердса, Ж. Диксмье, Д. Дюковича, Э. Френкеля, С. Фрейдберга, М. Имбенса, Р. Айера, Р. Кинга, М. Круэля, И. ван де Лера, Ш. Лу, П. Магяра, Г. Руссо, Г. Селигмана, М. Вахимото, З. Вана, Ю. Ю.

Принятые обозначения

$\mathbb{Z}$	множество целых чисел
$\mathbb{Z}_+$	множество целых неотрицательных чисел
$\mathbb{Z}^{\text{odd}}$	множество нечетных целых чисел
$\mathbb{N}$	множество положительных целых чисел
$\mathbb{N}^{\text{odd}}$	множество нечетных положительных целых чисел
$\mathbb{Q}$	множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$	множество вещественных чисел
$\mathbb{R}_+$	множество неотрицательных вещественных чисел
$\mathbb{C}$	множество комплексных чисел
$S^\times$	множество обратимых элементов кольца S
$\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$	вещественная и мнимая части $z \in \mathbb{C}$
$\log z$	для $z \in \mathbb{C}^\times$: $e^{\log z} = z$ и $-\pi \leq \operatorname{Im} \log z < \pi$
z^α	$= e^{\alpha \log z}$ для $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^\times$
$U \oplus V$ или $\bigoplus_\alpha U_\alpha$	прямая сумма векторных пространств
$\sum_\alpha U_\alpha$	сумма подпространств векторного пространства
$\prod_\alpha U_\alpha$	прямое произведение векторных пространств
kS	линейная k -оболочка S ($k = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, или $\mathbb{C}$)
$U \otimes V$	тензорное произведение векторных k -пространств над k ($k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)
U^*	дуальное пространство к векторному k -пространству над k ($k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)
k^n	прямая сумма n экземпляров векторного пространства k ($n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$)
I_V или I_n , или I	тождественный оператор в n -мерном векторном пространстве V
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	спаривание между векторным пространством и дуальным к нему

$ u ^2 = (u u)$	квадрат длины вектора u
$ S $	мощность множества S
$P \bmod Q$	множество представителей классов вычетов абелевой группы P относительно подгруппы Q
$a \equiv b \bmod C$	означает, что $a - b \in C$
$U(\mathfrak{g})$	универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$
$U_0(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})\mathfrak{g}$	идеал аугментации $U(\mathfrak{g})$
$g(v)$ или $g \cdot v$	действие элемента g алгебры или группы Ли на элемент v модуля; считается, что все модули левые, если не указано обратного
$G \cdot v$ или $G(v)$	$= \{g \cdot v g \in G\}$ — орбита v относительно действия группы G
$G \cdot V$ или $G(V)$	объединение орбит элементов множества V
$U \cdot M$	линейная оболочка множества $\{u \cdot v u \in U, v \in M\}$, где U — подпространство в алгебре, а M — подмножество в модуле над этой алгеброй.

Глава 1. Основные определения

§1.0. Центральным объектом нашего изучения является некоторый класс бесконечномерных алгебр Ли, известных как контрагредитные алгебры Ли, алгебры Ли с обобщенной матрицей Картана или алгебры Каца — Муди. Их определение получается довольно прямым «бесконечномерным» обобщением определения полупростых алгебр Ли через матрицу Картана и образующие Шевалле. Небольшая техническая трудность, возникающая в случае $\det A = 0$, преодолевается путем введения «реализации» $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ матрицы A . Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$ есть факторалгебра алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ с образующими e_i, f_i и $\mathfrak{h}$ и определяющими соотношениями (1.2.1) по максимальному идеалу, имеющему с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение. Это определение по сравнению с тем, которое дано во введении, имеет, как мы увидим, некоторые преимущества, а именно становится естественным определение корней и весов, группа Вейля действует на хорошем выпуклом конусе, характеры имеют хорошую область сходимости.

§1.1. Мы начинаем с комплексной $n \times n$ -матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ ранга ℓ и сопоставим ей некоторую комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$.

Матрица A называется *обобщенной матрицей Картана*, если она удовлетворяет условиям

- (C1) $a_{ii} = 2$ для $i = 1, \dots, n$;
- (C2) a_{ij} — неположительные целые числа при $i \neq j$;
- (C3) $a_{ij} = 0$ влечет за собой $a_{ji} = 0$.

Хотя глубокая теория может быть развита только для алгебры Ли, соответствующей обобщенной матрице Картана A , естественно (и удобно) начать с произвольной матрицы A .

Реализацией матрицы A называется тройка $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$, где $\mathfrak{h}$ — комплексное векторное пространство, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ и $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ — занумерованные подмножества в $\mathfrak{h}^*$ и $\mathfrak{h}$ соответственно, удовлетворяющие трем условиям:

- (1.1.1) оба множества Π и $\Pi^\vee$ линейно независимы;
- (1.1.2) $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, n$);
- (1.1.3) $n - \ell = \dim \mathfrak{h} - n$.

Две реализации $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ и $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм векторных пространств $\phi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1$, такой, что $\phi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$ и $\phi^*(\Pi_1) = \Pi$.

Предложение 1.1. Для каждой $n \times n$ -матрицы A существует единственная с точностью до изоморфизма реализация. Реализации матриц A и B изоморфны тогда и только тогда, когда B может быть получена из A перестановкой множества индексов.

Доказательство. Перенумеровав индексы, если это необходимо, мы можем считать, что

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 есть $\ell \times n$ -подматрица ранга ℓ . Рассмотрим следующую $n \times (2n - \ell)$ -матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & I_{n-\ell} \end{pmatrix}.$$

Если положить $\mathfrak{h} = C^{2n-\ell}$, в качестве элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ взять первые n линейных координатных функций, а в качестве $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee$ — строки матрицы C , то мы получим реализацию матрицы A .

Обратно, для данной реализации $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ дополняем Π до базиса с помощью элементов $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n-\ell} \in \mathfrak{h}^*$, так что для некоторой $\ell \times (n - \ell)$ -матрицы B и обратимой $(n - \ell) \times (n - \ell)$ -матрицы D имеем

$$((\alpha_i^\vee, \alpha_j)) = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ A_2 & D \end{pmatrix}.$$

Прибавляя к $\alpha_{n+1}, \dots$ подходящие линейные комбинации $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$, можно добиться, чтобы $B = 0$. Заменяя $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{2n-\ell}$ их линейными комбинациями, можно добиться, чтобы $D = I$. Это доказывает единственность. Вторая часть предложения теперь очевидна. $\square$

Ясно, что если $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ — реализация матрицы A , то $(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ — реализация транспонированной матрицы ${}^t A$.

Для двух матриц A_1 и A_2 и их реализаций $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ и $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ мы можем получить реализацию прямой суммы $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ этих матриц:

$$(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \Pi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2, \Pi_1^\vee \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2^\vee);$$

она называется *прямой суммой* указанных реализаций.

Матрица A (и соответствующая реализация) называется *разложимой*, если после перенумерации индексов (т. е. одновременной перестановки ее строк и столбцов) A разлагается в нетривиальную прямую сумму. Ясно, что путем перенумерации индексов можно разложить A в прямую сумму неразложимых матриц, а соответствующую реализацию — в прямую сумму соответствующих неразложимых реализаций.

По аналогии с конечномерной теорией мы используем следующую терминологию: Π называется *корневым базисом*, $\Pi^\vee$ — *дуальным*

корневым базисом, элементы из Π (соответственно $\Pi^\vee$) называются простыми корнями (соответственно дуальными простыми корнями). Мы также полагаем

$$Q = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i, \quad Q_+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_+\alpha_i.$$

Будем называть Q *корневой решеткой*.

Для $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in Q$ число $\text{ht } \alpha := \sum_i k_i$ называется *высотой* элемента α .

Введем частичное упорядочение $\geq$ на $\mathfrak{h}^*$, полагая $\lambda \geq \mu$, если $\lambda - \mu \in Q_+$.

§1.2. Возьмем $n \times n$ -матрицу $A = (a_{ij})$ над $\mathbb{C}$, и пусть $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ — ее реализация. Сначала мы введем вспомогательную алгебру Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ с образующими e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) и $\mathfrak{h}$ и определяющими соотношениями

$$(1.2.1) \quad \begin{cases} [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee & (i, j = 1, \dots, n), \\ [h, h'] = 0 & (h, h' \in \mathfrak{h}), \\ [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, \\ [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i & (i = 1, \dots, n; h \in \mathfrak{h}). \end{cases}$$

Из единственности реализации A вытекает, что $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ зависит только от A .

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) подалгебру в $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$, порожденную $e_1, \dots, e_n$ (соответственно $f_1, \dots, f_n$). Нашим первым основополагающим результатом является

ТЕОРЕМА 1.2. а) $\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+$ (прямая сумма векторных пространств).

б) $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (соответственно $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) свободно порождается $e_1, \dots, e_n$ (соответственно $f_1, \dots, f_n$).

с) Отображение $e_i \mapsto -f_i, f_i \mapsto -e_i$ ($i = 1, \dots, n$), $h \mapsto -h$ ($h \in \mathfrak{h}$) единственным образом продолжается до инволюции $\tilde{\omega}$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$.

д) Имеет место разложение на корневые подпространства относительно $\mathfrak{h}$:

$$(1.2.2) \quad \tilde{\mathfrak{g}}(A) = \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_+ \\ \alpha \neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_+ \\ \alpha \neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \right),$$

где $\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) | [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}$. Кроме того, $\dim \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} < \infty$ и $\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \subset \tilde{\mathfrak{n}}_{\pm}$ для $\pm\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0$.

е) Среди идеалов $\bar{g}(A)$, имеющих с h тривиальное пересечение, существует единственный максимальный идеал τ . Более того,

$$(1.2.3) \quad \tau = (\tau \cap \bar{n}_-) \oplus (\tau \cap \bar{n}_+) \quad (\text{прямая сумма идеалов}).$$

Доказательство. Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n с базисом $v_1, \dots, v_n$, и пусть λ — линейный функционал на h . Определим действие образующих алгебры Ли $\bar{g}(A)$ на тензорной алгебре $T(V)$ пространства V следующим образом:

$$\alpha) \quad f_i(a) = v_i \otimes a \text{ для } a \in T(V);$$

$$\beta) \quad h(1) = \langle \lambda, h \rangle 1, \text{ и, индукцией по } s,$$

$$h(v_j \otimes a) = -\langle \alpha_j, h \rangle v_j \otimes a + v_j \otimes h(a) \text{ для } a \in T^{s-1}(V), j = 1, \dots, n;$$

$$\gamma) \quad e_i(1) = 0, \text{ и, индукцией по } s,$$

$$e_i(v_j \otimes a) = \delta_{ij} \alpha_i^\vee(a) + v_j \otimes e_i(a) \text{ для } a \in T^{s-1}(V), j = 1, \dots, n.$$

Эти формулы задают представление алгебры Ли $\bar{g}(A)$ на пространстве $T(V)$. Чтобы в этом убедиться, мы должны проверить все соотношения (1.2.1).

Второе соотношение очевидно, поскольку h действует диагонально. Для проверки первого соотношения имеем

$$\begin{aligned} (e_i f_j - f_j e_i)(a) &= e_i(v_j \otimes a) - v_j \otimes e_i(a) \\ &= \delta_{ij} \alpha_i^\vee(a) + v_j \otimes e_i(a) - v_j \otimes e_i(a) = \delta_{ij} \alpha_i^\vee(a) \end{aligned}$$

в силу $\alpha)$ и $\gamma)$.

Для четвертого соотношения получаем

$$\begin{aligned} (h f_j - f_j h)(a) &= h(v_j \otimes a) - v_j \otimes h(a) \\ &= -\langle \alpha_j, h \rangle v_j \otimes a + v_j \otimes h(a) - v_j \otimes h(a) \\ &= -\langle \alpha_j, h \rangle f_j(a) \end{aligned}$$

в силу $\alpha)$ и $\beta)$.

Наконец, третье соотношение доказывается индукцией по s . При $s = 0$ оно, очевидно, выполнено. Для $s > 0$ возьмем $a = v_k \otimes a_1$, где $a_1 \in T^{s-1}(V)$. Имеем

$$\begin{aligned} (h e_j - e_j h)(v_k \otimes a_1) &= h(\delta_{jk} \alpha_j^\vee(a_1)) + h(v_k \otimes e_j(a_1)) \\ &\quad - e_j(-\langle \alpha_k, h \rangle (v_k \otimes a_1) + v_k \otimes h(a_1)) \\ &= \delta_{jk} \alpha_j^\vee(h(a_1)) - \langle \alpha_k, h \rangle v_k \otimes e_j(a_1) \\ &\quad + v_k \otimes h e_j(a_1) \\ &\quad + \langle \alpha_k, h \rangle \delta_{jk} \alpha_j^\vee(a_1) \\ &\quad + \langle \alpha_k, h \rangle v_k \otimes e_j(a_1) \\ &\quad - \delta_{jk} \alpha_j^\vee h(a_1) - v_k \otimes e_j h(a_1) \\ &= \langle \alpha_j, h \rangle \delta_{jk} \alpha_j^\vee(a_1) + v_k \otimes (h e_j - e_j h)(a_1). \end{aligned}$$

Применяя предположение индукции ко второму слагаемому, получаем требуемое.

Теперь мы можем вывести все утверждения теоремы. Используя соотношения (1.2.1), легко показать индукцией по s , что произведение s элементов из множества $\{e_i, f_i \ (i = 1, \dots, n); \mathfrak{h}\}$ лежит в $\tilde{n}_- + \mathfrak{h} + \tilde{n}_+$. Пусть теперь $u = n_- + \mathfrak{h} + n_+ = 0$, где $n_{\pm} \in \tilde{n}_{\pm}$ и $\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}$. Тогда в представлении $T(V)$ имеем $u(1) = n_-(1) + \langle \lambda, \mathfrak{h} \rangle = 0$. Отсюда вытекает, что $\langle \lambda, \mathfrak{h} \rangle = 0$ для любого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и, следовательно, $\mathfrak{h} = 0$.

Далее, используя отображение $f_i \mapsto v_i$, мы получаем, что тензорная алгебра $T(V)$ является ассоциативной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\tilde{n}_-$. Поскольку $T(V)$ — свободная ассоциативная алгебра, она автоматически будет универсальной обертывающей алгеброй $U(\tilde{n}_-)$ для $\tilde{n}_-$, а отображение $n_- \mapsto n_-(1)$ будет каноническим вложением $\tilde{n}_- \rightarrow U(\tilde{n}_-)$. Поэтому $n_- = 0$ и утверждение а) доказано. Более того, по теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта $\tilde{n}_-$ свободно порождается $f_1, \dots, f_n$. Утверждение с) очевидно. Применяя теперь $\tilde{\omega}$, мы получим, что $\tilde{n}_+$ свободно порождается $e_1, \dots, e_n$, доказывая тем самым б).

Используя последние два соотношения из (1.2.1), мы приходим к разложению

$$\tilde{n}_{\pm} = \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_+ \\ \alpha \neq 0}} \tilde{\mathfrak{g}}_{\pm\alpha}.$$

У нас есть также очевидная оценка

$$(1.2.4) \quad \dim \tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \leq n^{|\text{ht } \alpha|}.$$

Это вместе с а) доказывает d).

Чтобы доказать утверждение е), заметим, что для любого идеала $\mathfrak{i}$ в $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ справедливо равенство (см. предложение 1.5 ниже)

$$\mathfrak{i} = \bigoplus_{\alpha} (\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha} \cap \mathfrak{i}).$$

Следовательно, сумма идеалов, имеющих с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение, тоже имеет тривиальное пересечение с $\mathfrak{h}$, и сумма всех идеалов с этим свойством есть единственный максимальный идеал $\mathfrak{r}$, имеющих с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение. Мы получаем, в частности, что (1.2.3) является прямой суммой векторных пространств. Но ясно, что $[f_i, \mathfrak{r} \cap \tilde{n}_+] \subset \tilde{n}_+$. Поэтому $[\tilde{\mathfrak{g}}(A), \mathfrak{r} \cap \tilde{n}_+] \subset \mathfrak{r} \cap \tilde{n}_+$; аналогично, $[\tilde{\mathfrak{g}}(A), \mathfrak{r} \cap \tilde{n}_-] \subset \mathfrak{r} \cap \tilde{n}_-$. Это показывает, что (1.2.3) есть прямая сумма идеалов. $\square$

§1.3. Возьмем снова комплексную $n \times n$ -матрицу A и определим теперь основной объект нашего изучения — алгебру Ли $g(A)$. Пусть $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ — реализация A и $\tilde{g}(A)$ — алгебра Ли с образующими e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) и $\mathfrak{h}$ и определяющими соотношениями (1.2.1). В силу утверждения теоремы 1.2а) естественное отображение $\mathfrak{h} \rightarrow \tilde{g}(A)$ является вложением. Пусть $\mathfrak{t}$ — максимальный идеал в $\tilde{g}(A)$, имеющий с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение (см. теорему 1.2е)). Положим

$$g(A) = \tilde{g}(A)/\mathfrak{t}.$$

Матрица A называется *матрицей Картана* алгебры Ли $g(A)$, а число n — *рангом* последней. Совокупность $(g(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ будем называть *четверкой, ассоциированной с матрицей A* . Две четверки $(g(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ и $(g(A_1), \mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ назовем *изоморфными*, если существует изоморфизм алгебр Ли $\phi: g(A) \rightarrow g(A_1)$, такой, что $\phi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$, $\phi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$ и $\phi^*(\Pi_1) = \Pi$.

Алгебра Ли $g(A)$ называется *алгеброй Каца — Муди*, если ее матрица Картана является обобщенной матрицей Картана.

Мы сохраняем те же обозначения для образов $e_i, f_i, \mathfrak{h}$ в $g(A)$. Подалгебру $\mathfrak{h}$ в $g(A)$ будем называть *подалгеброй Картана*, а элементы e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) — *образующими Шевалле*. В действительности они порождают производную подалгебру $g'(A) = [g(A), g(A)]$. Более того,

$$g(A) = g'(A) + \mathfrak{h}$$

($g(A) = g'(A)$, если и только если $\det A \neq 0$).

Положим $\mathfrak{h}' = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}\alpha_i^\vee$. Тогда $g'(A) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$; $g'(A) \cap \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$, если $\alpha \neq 0$.

Из (1.2.2) вытекает следующее разложение на корневые подпространства относительно $\mathfrak{h}$:

$$(1.3.1) \quad g(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Здесь $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in g(A) \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}$ — *корневое подпространство*, соответствующее α . Заметим, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Число $\text{mult } \alpha := \dim \mathfrak{g}_\alpha$ называется *кратностью* элемента α . В силу (1.2.4) справедлива оценка

$$(1.3.2) \quad \text{mult } \alpha \leq n^{|\text{ht } \alpha|}.$$

Элемент $\alpha \in Q$ называется *корнем*, если $\alpha \neq 0$ и $\text{mult } \alpha \neq 0$. Корень $\alpha > 0$ (соответственно $\alpha < 0$) называется *положительным* (соответственно *отрицательным*). Как вытекает из (1.2.2), каждый корень

является либо положительным, либо отрицательным. Обозначим через Δ , Δ_+ и Δ_- множества всех корней, положительных и отрицательных корней соответственно. Тогда

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_- \quad (\text{дизъюнктное объединение}).$$

Чтобы подчеркнуть зависимость от A , мы будем иногда писать $\Delta(A)$, $Q(A)$, ...

Пусть $\mathfrak{n}_+$ (соответственно $\mathfrak{n}_-$) обозначает подалгебру в $\mathfrak{g}(A)$, порожденную $e_1, \dots, e_n$ (соответственно $f_1, \dots, f_n$). По теореме 1.2а), е) имеем *треугольное разложение*

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \quad (\text{прямая сумма векторных пространств}).$$

Заметим, что $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_+$, если $\alpha > 0$, и $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{n}_-$, если $\alpha < 0$. Другими словами, для $\alpha > 0$ (соответственно $\alpha < 0$) подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ есть линейная оболочка элементов вида $[\dots [[e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}] \dots e_{i_r}]$ (соответственно $[\dots [[f_{i_1}, f_{i_2}], f_{i_3}] \dots f_{i_r}]$), таких, что $\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_r} = \alpha$ (соответственно $= -\alpha$). Отсюда непосредственно следует, что

$$(1.3.3) \quad \mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C}e_i, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C}f_i; \quad \mathfrak{g}_{s\alpha_i} = 0, \quad \text{если } |s| > 1.$$

Поскольку каждый корень либо положителен, либо отрицателен, (1.3.3) влечет за собой следующий важный факт.

ЛЕММА 1.3. Если $\beta \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$, то $(\beta + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta \subset \Delta_+$.

Из теоремы 1.2е) следует, что идеал $\mathfrak{r} \subset \bar{\mathfrak{g}}(A)$ является $\bar{\omega}$ -инвариантным (см. теорему 1.2с)). Поэтому $\bar{\omega}$ индуцирует инволютивный автоморфизм ω алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$, называемый ее *инволюцией Шевалле*. Он определяется равенствами

$$(1.3.4) \quad \omega(e_i) = -f_i, \quad \omega(f_i) = -e_i, \quad \omega(h) = -h, \quad \text{если } h \in \mathfrak{h}.$$

Так как $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, мы получаем

$$(1.3.5) \quad \text{mult } \alpha = \text{mult } (-\alpha).$$

В частности,

$$\Delta_- = -\Delta_+.$$

§1.4. Полезно следующее простое утверждение.

Предложение 1.4. а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ — элементы из $\mathfrak{g}$, и пусть $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset \mathfrak{h}$, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ — линейно независимые множества, такие, что

$$(1.4.1) \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$$(1.4.2) \quad [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, \quad [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i \quad (h \in \mathfrak{h}; i = 1, \dots, n).$$

Предположим, что e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) и $\mathfrak{h}$ порождают $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли и в $\mathfrak{g}$ нет ненулевых идеалов, имеющих с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение. Наконец, положим $A = ((\alpha_i^\vee, \alpha_j))_{i,j=1}^n$, и пусть $\dim \mathfrak{h} = 2n - \text{rang } A$. Тогда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ есть четверка, ассоциированная с матрицей A .

б) Для данных $n \times n$ -матриц A и A' изоморфизм ассоциированных четверок существует в том и только том случае, когда A' может быть получена из A путем перенумерации множества индексов.

Доказательство следует из предложения 1.1 и теоремы 1.2е). $\square$

Следствие 1.4. Четверка, ассоциированная с прямой суммой матриц A_i , изоморфна прямой сумме четверок, ассоциированных с A_i . Система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ является объединением систем корней для $\mathfrak{g}(A_i)$.

Доказательство следует из предложения 1.4а). $\square$

§1.5. Теперь нам понадобятся некоторые сведения о градуировках. Пусть M — абелева группа. Разложение $V = \bigoplus_{\alpha \in M} V_\alpha$ векторного про-

странства V в прямую сумму его подпространств называется его M -градуировкой. Подпространство $U \subset V$ называется градуированным, если $U = \bigoplus_{\alpha \in M} (U \cap V_\alpha)$. Элементы из V_α называются однородными степени α . Следующий факт широко используется в теории представлений.

Предложение 1.5. Пусть $\mathfrak{h}$ — коммутативная алгебра Ли, а V — диагонализруемый $\mathfrak{h}$ -модуль, т. е.

$$(1.5.1) \quad V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda, \quad \text{где } V_\lambda = \{v \in V \mid h(v) = \lambda(h)v \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Тогда любой подмодуль U в V будет градуированным относительно градуировки (1.5.1).

Доказательство. Любой элемент $v \in V$ можно записать в виде $v = \sum_{j=1}^m v_j$, где $v_j \in V_{\lambda_j}$, и существует $h \in \mathfrak{h}$ такой, что числа $\lambda_j(h)$

($j = 1, \dots, m$) попарно различны. Для $v \in U$ имеем

$$h^k(v) = \sum_{j=1}^m \lambda_j (h)^k v_j \in U \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Мы получили систему линейных уравнений с невырожденной матрицей. Следовательно, все элементы v_j лежат в U . $\square$

На градуированном векторном пространстве $V = \bigoplus_{\alpha \in M} V_\alpha$ вводится так называемая *формальная топология*. Для конечного подмножества $F \subset M$ полагаем $V^F = \bigoplus_{\alpha \in M \setminus F} V_\alpha$ и объявляем все подмноже-

ства V^F в V фундаментальной системой окрестностей нуля. Ясно, что пополнением V в формальной топологии является $\prod_{\alpha \in M} V_\alpha$. Замы-

кание подмножества C этого (полного) топологического векторного пространства в формальной топологии называется его *формальным пополнением*.

M -градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ее градуировка как векторного пространства, такая, что $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Например, (1.3.1) является Q -градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$.

Чтобы ввести M -градуировку на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, выбирается ее система образующих, скажем $a_1, \dots, a_n$, и элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in M$, затем каждому образующему a_i присваивается степень: $\deg a_i = \lambda_i$. Это определяет (единственную) M -градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющую условию $\deg a_i = \lambda_i$, если и только если идеал соотношений между a_i является M -градуированным. Если $a_1, \dots, a_n$ — свободная система образующих $\mathfrak{g}$, такая градуировка действительно существует.

Пусть теперь $s = (s_1, \dots, s_n)$ — набор n целых чисел. Полагая

$$\deg e_i = -\deg f_i = s_i \quad (i = 1, \dots, n), \quad \deg h = 0,$$

мы получим $\mathbb{Z}$ -градуировку

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(s),$$

называемую *градуировкой типа s* . Более точно,

$$\mathfrak{g}_j(s) = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где сумма берется по $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in Q$, таким, что $\sum_i k_i s_i = j$. Ясно, что если $s_i > 0$ для всех i , то $\mathfrak{g}_0(s) = \mathfrak{h}$ и $\dim \mathfrak{g}_j(s) < \infty$ ($j \in \mathbb{Z}$).

Особенно важной является *главная градуировка*. Это градуировка типа $1 = (1, \dots, 1)$. В этом случае

$$\mathfrak{g}_j(1) = \bigoplus_{\alpha: \text{ht } \alpha = j} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Заметим, что

$$\mathfrak{g}_0(1) = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{g}_{-1}(1) = \sum_i \mathbb{C} f_i, \quad \mathfrak{g}_1(1) = \sum_i \mathbb{C} e_i;$$

таким образом, $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{j \geq 1} \mathfrak{g}_{\pm j}(1)$.

Следующая простая лемма полезна для вычислений в $\mathfrak{g}(A)$.

ЛЕММА 1.5. Пусть $a \in \mathfrak{n}_+$ и $[a, f_i] = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда $a = 0$. Точно так же, если $a \in \mathfrak{n}_-$ и $[a, e_i] = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$, то $a = 0$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathfrak{n}_+$ такой, что $[a, \mathfrak{g}_{-1}(1)] = 0$. Тогда легко видеть, что $\sum_{j \geq 0} (\text{ad } \mathfrak{g}_1(1))^j (\text{ad } \mathfrak{h})^j a$ является подпространством в $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}(A)$, инвариантным относительно $\text{ad } \mathfrak{g}_1(1)$, $\text{ad } \mathfrak{h}$ и $\text{ad } \mathfrak{g}_{-1}(1)$ (условие на a используется только в последнем случае). Следовательно, если $a \neq 0$, мы получаем ненулевой идеал в $\mathfrak{g}(A)$, который имеет с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение. Это противоречит определению $\mathfrak{g}(A)$. $\square$

Замечание 1.5. Иногда вместо $\mathfrak{g}(A)$ полезно рассмотреть алгебру Ли $\mathfrak{g}'(A)$. Дадим более прямую конструкцию $\mathfrak{g}'(A)$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{g}}'(A)$ алгебру Ли с образующими $e_i, f_i, \alpha_i^\vee$ ($i = 1, \dots, n$) и определяющими соотношениями

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee, \quad [\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee] = 0, \quad [\alpha_i^\vee, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [\alpha_i^\vee, f_j] = -a_{ij} f_j.$$

Пусть Q — свободная абелева группа с образующими $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Введем Q -градуировку $\tilde{\mathfrak{g}}'(A) = \bigoplus_\alpha \tilde{\mathfrak{g}}'_\alpha$, полагая

$$\deg e_i = \alpha_i = -\deg f_i, \quad \deg \alpha_i^\vee = 0.$$

Существует единственный максимальный Q -градуированный идеал $\tau \subset \tilde{\mathfrak{g}}'(A)$, который имеет с $\tilde{\mathfrak{g}}'_0 (= \sum_i \mathbb{C} \alpha_i^\vee)$ тривиальное пересечение.

Тогда

$$\mathfrak{g}'(A) = \tilde{\mathfrak{g}}'(A)/\tau.$$

Заметим, что это определение годится также для бесконечного n .

§1.6. Следующее утверждение является приложением леммы 1.5.

Предложение 1.6. Центр алгебры Ли $g(A)$ или $g'(A)$ есть

$$c := \{h \in \mathfrak{h} \mid \langle \alpha_i, h \rangle = 0 \text{ для всех } i = 1, \dots, n\}.$$

Кроме того, $\dim c = n - l$.

Доказательство. Пусть c лежит в центре и $c = \sum_i c_i$ — разложение относительно главной градуировки. Тогда $[c, g_{-1}(1)] = 0$ влечет за собой $[c_i, g_{-1}(1)] = 0$, и, следовательно, согласно лемме 1.5, $c_i = 0$ для $i > 0$. Аналогично, $c_i = 0$ для $i < 0$. Поэтому $c \in \mathfrak{h}$, и из того, что $[c, e_i] = \langle \alpha_i, c \rangle e_i = 0$, следует $\langle \alpha_i, c \rangle = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Обратно, если $c \in \mathfrak{h}$ и последнее условие выполнено, c коммутирует со всеми образующими Шевалле и поэтому лежит в центре. Наконец, $c \in \mathfrak{h}'$, поскольку в противном случае $\dim c > n - l$, и тогда Π не будет линейно независимым множеством. $\square$

Еще одним приложением леммы 1.5 является

Лемма 1.6. Пусть $I_1, I_2 \subset \{1, \dots, n\}$ — непересекающиеся подмножества, такие, что $a_{ij} = a_{ji} = 0$, если $i \in I_1, j \in I_2$. Пусть $\beta_s = \sum_{i \in I_s} k_i^{(s)} \alpha_i$ ($s = 1, 2$). Предположим, что $\alpha = \beta_1 + \beta_2$ — корень алгебры Ли $g(A)$. Тогда β_1 или β_2 равен нулю.

Доказательство. Пусть $i \in I_1, j \in I_2$. Тогда $[\alpha_i^\vee, e_j] = 0, [\alpha_j^\vee, e_i] = 0, [e_i, f_j] = 0, [e_j, f_i] = 0$. С помощью леммы 1.5 немедленно проверяется, что $[e_i, e_j] = 0, [f_i, f_j] = 0$. Обозначим через $g^{(s)}$ подалгебру в $g(A)$, порожденную e_i, f_i для $i \in I_s$. Мы доказали, что $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ коммутируют. Поскольку g_α лежит в подалгебре, порожденной $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$, мы выводим отсюда, что g_α лежит либо в $g^{(1)}$, либо в $g^{(2)}$. $\square$

§1.7. Мы заканчиваем главу описанием структуры идеалов $g(A)$.

Предложение 1.7. а) $g(A)$ — простая алгебра Ли, если и только если $\det A \neq 0$ и для каждой пары индексов i и j выполнено условие

$$(1.7.1) \quad \text{существуют индексы } i_1, i_2, \dots, i_s, \\ \text{такие, что } a_{i_1 i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_s j} \neq 0.$$

б) Если условие (1.7.1) выполнено, каждый идеал $g(A)$ либо содержит $g'(A)$, либо содержится в центре.

Доказательство. Необходимость условий в а) очевидна. Предположим теперь, что эти условия выполнены, и пусть $\mathfrak{i} \subset g(A)$ — ненулевой идеал. Тогда $\mathfrak{i}$ содержит ненулевой элемент $h \in \mathfrak{h}$. Так как $\det A \neq 0$, то $c = 0$ в силу предложения 1.6 и, следовательно, $[h, e_j] = a e_j \neq 0$ для

некоторого j . Поэтому $e_j \in i$ и $\alpha_j^\vee = [e_j, f_j] \in i$. Теперь из (1.7.1) вытекает, что $e_j, f_j, \alpha_j^\vee \in i$ для всех j . Поскольку $\det A \neq 0$, $\mathfrak{h}$ есть линейная оболочка элементов $\alpha_j^\vee$, и мы получаем $i = \mathfrak{g}(A)$, что доказывает а).

Доказательство б) аналогично. $\square$

§1.8. Упражнения

1.1. Покажите, что если $a_{ij} = 0$ влечет за собой $a_{ji} = 0$, то (1.7.1) эквивалентно неразложимости A .

1.2. Пусть $A' = (a_{ij})_{i,j=1}^{n'}$ — подматрица матрицы A ранга ℓ' . Можно выбрать подпространство $\mathfrak{h}'$ в $\mathfrak{h}$, содержащее $\Pi'^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_{n'}^\vee\}$ размерности $2n' - \ell'$, такое, что $\Pi' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n'}\}|_{\mathfrak{h}'}$ — линейно независимое множество. Тогда $(\mathfrak{h}', \Pi', \Pi'^\vee)$ является реализацией A' . Положим $Q' = \sum_{i=1}^{n'} \mathbb{Z}\alpha_i$, и пусть $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha$ — алгебра Ли, соответствующая A . Тогда

$$\mathfrak{g}(A') \simeq \mathfrak{h}' \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in Q' \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

1.3. Покажите, что если $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ удовлетворяет (1.1.1) и (1.1.2), то $\dim \mathfrak{h} \geq 2n - \ell$.

1.4. Предположим, что A удовлетворяет условию (1.7.1). Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{c}$ проста, если не существует корней α , таких, что $\alpha|_{\mathfrak{h}'} = 0$.

1.5. Покажите, что в любой алгебре Ли $\mathfrak{g}(A)$ справедливы неравенства $\text{mult}(\alpha_i + s\alpha_j) \leq 1$ и $\text{mult} 2(\alpha_i + \alpha_j) \leq 1$.

1.6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Покажите, что $\text{mult}(2\alpha_1 + 3\alpha_2) = 2$ в $\mathfrak{g}(A)$. Проверьте, что для произвольной 2×2 -матрицы A справедливо неравенство $\text{mult}(2\alpha_1 + 3\alpha_2) \leq 2$; найдите условия, когда эта кратность равна 2.

1.7. Определите алгебру Ли $\mathfrak{g}'(A)$ в характеристике $p > 0$, как в замечании 1.5. Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g}'\left(\begin{pmatrix} 2 & \lambda \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ в характеристике 3 является простой алгеброй Ли размерности 10 для любых $\lambda \neq 0, -1$ и что две такие алгебры, соответствующие $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, неизоморфны, за исключением случаев $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\lambda_1 = -\lambda_2 - 1$.

1.8. Прямая сумма векторных пространств $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ называется локальной алгеброй Ли, если заданы билинейные отображения $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \rightarrow \mathfrak{g}_{i+j}$ для $|i|, |j|, |i+j| \leq 1$, удовлетворяющие условию антикоммутативности и тождеству Якоби в том случае, когда они имеют смысл. Докажите, что существует единственная $\mathbb{Z}$ -градуированная

алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$, такая, что $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ является данной локальной алгеброй Ли и $\bigoplus_{i>0} \mathfrak{g}_{\pm i}$ являются свободными алгебрами Ли, построенными на $\mathfrak{g}_{\pm 1}$.

1.9. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ — конечномерная диагонализируемая подалгебра и $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_{\alpha}$ — разложение на корневые подпространства, такое, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. Покажите, что $\deg \mathfrak{g} = (\deg \mathfrak{g})_0 + \text{ad } \mathfrak{g}$, где $(\deg \mathfrak{g})_0$ состоит из эндоморфизмов, сохраняющих разложение на корневые подпространства.

[Выберите элемент $h \in \mathfrak{h}$, такой, что $\langle \alpha, h \rangle \neq 0$ для всех $\alpha \in Q, \alpha \neq 0$. Добавляя к $d \in \deg \mathfrak{g}$ внутреннее дифференцирование, можно предполагать, что $d(h) \in \mathfrak{h}$. Выведите отсюда включения $d(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ и $d(\mathfrak{g}_{\alpha}) \subset \mathfrak{g}_{\alpha}$.]

1.10. Выведите из упр. 1.9, что все дифференцирования алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{c}$ внутренние, если A не содержит нулевых строк.

1.11. Покажите, что ad индуцирует изоморфизм

$$\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{c} \rightarrow \deg \mathfrak{g}'(A),$$

если A — обобщенная матрица Картана и $\alpha|_{\mathfrak{h}'} \neq 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. [Покажите, что никакой корень не совпадает с простым корнем при ограничении на $\mathfrak{h}'$.]

1.12. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая конечномерная алгебра Ли с матрицей Картана A . Тогда выбор подалгебры Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ и корневого базиса $\Pi \subset \mathfrak{h}^*$ задает для $\mathfrak{g}$ четверку, ассоциированную с матрицей A .

1.13. (Это для менее подготовленного читателя.) Докажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{\ell+1}$, состоящая из $(\ell+1) \times (\ell+1)$ -матриц, у которых след равен нулю, с обычной скобкой $[A, B] = AB - BA$, является алгеброй Каца — Мули. Более подробно, пусть E_{ij} ($i, j = 1, \dots, \ell+1$) обозначают стандартный базис в пространстве всех $(\ell+1) \times (\ell+1)$ -матриц. Пусть $\mathfrak{h}$ — пространство всех диагональных матриц со следом, равным нулю. Тогда

$$\alpha_i^\vee = E_{ii} - E_{i+1, i+1} \quad (i = 1, \dots, \ell)$$

образуют базис $\mathfrak{h}$. Определим $\epsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ ($i = 1, \dots, \ell+1$) формулой

$$\epsilon_i(\text{diag}(a_1, \dots, a_{\ell+1})) = a_i.$$

Тогда

$$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (i = 1, \dots, \ell)$$

образуют базис $\mathfrak{h}^*$. Положим

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}, \quad \Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}.$$

В этом случае $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ есть реализация матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В качестве разложения на корневые подпространства относительно $\mathfrak{h}$ получим

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C} E_{ij} \right).$$

Положим $e_i = E_{i,i+1}$, $f_i = E_{i+1,i}$ ($i = 1, \dots, \ell$). Покажите, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ с образующими Шевалле e_i, f_i . Проверьте, что $\{\epsilon_i - \epsilon_j \ (i \neq j)\}$ — множество всех корней, $\{\epsilon_i - \epsilon_j \ (i < j)\}$ — множество положительных корней и $\mathfrak{n}_\pm$ — подалгебры строго верхнетреугольных и нижнетреугольных матриц. Покажите, что отображение $a \mapsto -{}^t a$ является инволюцией Шевалле.

1.14. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$ есть $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли, такая, что любой ее градуированный идеал тривиален, пространство $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ конечномерно и порождает $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_0$ -модули $\mathfrak{g}_{-1}$ и $\mathfrak{g}_1$ неприводимы и контрагredientны. Покажите, что $\mathfrak{g}$ изоморфна некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}(A)$.

1.15. Пусть $\mathfrak{h}'$ и V — два n -мерных комплексных векторных пространства с базисами $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$ и $\{v_1, \dots, v_n\}$ соответственно. Определим отображение $\varphi: \mathfrak{h}' \rightarrow V^*$ формулой $(\varphi(\alpha_i^\vee), v_j) = a_{ij}$. Выберем подпространство $\mathfrak{h}_0$ в V^* , дополнительное к $\varphi(\mathfrak{h}')$, и пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}'$. Определим $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$, полагая $(\alpha_i, h_0 + \sum_j c_j \alpha_j^\vee) = (\alpha_i, h_0) + \sum_j a_{ji} c_j$, и пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Покажите, что $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ есть реализация $A = (a_{ij})$.

1.16. Пусть $\text{Aut}(A)$ — группа перестановок σ множества $\{1, \dots, n\}$, таких, что $a_{ij} = a_{\sigma(i), \sigma(j)}$. Эта группа действует автоморфизмами на $\mathfrak{g}'(A)$ следующим образом: $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $\sigma(f_i) = f_{\sigma(i)}$, $\sigma(\alpha_i^\vee) = \alpha_{\sigma(i)}^\vee$. Используя упр. 1.15, покажите, что это действие продолжается (не канонически) на всю алгебру Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$.

§1.9. Библиографические замечания и комментарии

Изучение алгебр Каца — Муди было начато независимо Кацем [1967, 1968 A, B] и Муди (Moody [1967, 1968, 1969]).

Доказательство утверждения, существенно более общего, чем предложение 1.1, можно найти у Винберга [1971].

Теорему 1.2 следует, вероятно, приписать Шевалле (Chevalley [1948]). В этой двухстраничной заметке (представленной Э. Картаном) Шевалле вводит общий алгебраический подход к построению конечномерных простых алгебр Ли и их конечномерных представлений. Подробное изложение дали Хариш-Чандра (Harish-Chandra [1951]) и Джекобсон (Jacobson [1962]). Доказательство Каца [1968 B] и Муди (Moody [1968]) является простой адаптацией этих результатов.

Материал §1.5 и 1.6 взят из статьи Каца [1968 B].

Из этой же статьи взяты упр. 1.4, 1.8 и 1.14. Несколько другой подход к построению градуированных алгебр Ли был развит Кантором [1968, 1970]. Упражнение 1.7 взято из работы Вейсфейлера — Каца [1971], упр. 1.11 — из работы Бермана Berman [1976], упр. 1.15 и 1.16 — из работы Каца и Питерсона Кас — Peterson [1987].

Остальной материал гл. 1 является весьма стандартным.

Вопрос об изоморфизме алгебр Каца — Муди был выяснен совсем недавно. А именно, как показали Питерсон и Кац (Peterson — Кас [1983]), любые две максимальные ад-диагонализируемые подалгебры в алгебре Каца — Муди сопряжены, и, следовательно, две алгебры Каца — Муди изоморфны, если и только если их матрицы Картана могут быть получены одна из другой перенумерацией множества индексов. Для произвольной $\mathfrak{g}(A)$ этот вопрос остается открытым.

Глава 2. Инвариантная билинейная форма и обобщенный оператор Казимира

§2.0. В этой главе мы вводим два важных инструмента нашей теории — инвариантную билинейную форму и обобщенный оператор Казимира Ω . Оператор Ω является оператором «второго порядка», который в отличие от конечномерной теории не лежит в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ и определен не для всех представлений этой алгебры Ли. Однако Ω определен в так называемых ограниченных представлениях и коммутирует с действием $\mathfrak{g}(A)$. Замечательно, что целый ряд результатов (включая некоторые классические) можно доказать, используя только Ω .

§2.1. Заметим, что если умножить образующие Шевалле на скаляры $e_i \mapsto e_i$, $f_i \mapsto \epsilon_i f_i$ ($i = 1, \dots, n$), где ϵ_i отличны от нуля, то мы получим $\alpha_i^\vee \mapsto \epsilon_i \alpha_i^\vee$, что продолжается до изоморфизма $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ (неоднозначно, если $\det A = 0$), который продолжается до изоморфизма алгебр Ли $\mathfrak{g}(A) \rightarrow \mathfrak{g}(DA)$, где $D = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$.

Матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ называется *симметризуемой*, если существует обратимая диагональная матрица $D = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ и симметрическая матрица $B = (b_{ij})$, такие, что

$$(2.1.1) \quad A = DB.$$

В этом случае матрица B называется *симметризацией* матрицы A и $\mathfrak{g}(A)$ называется *симметризуемой* алгеброй Ли.

Пусть A — симметризуемая матрица с заданным разложением (2.1.1), и пусть $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ — ее реализация. Зафиксируем дополнительное подпространство $\mathfrak{h}''$ к $\mathfrak{h}' = \sum \mathbb{C} \alpha_i^\vee$ в $\mathfrak{h}$ и определим симметрическую билинейную $\mathbb{C}$ -значную форму $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ следующими двумя соотношениями:

$$(2.1.2) \quad (\alpha_i^\vee | h) = \langle \alpha_i, h \rangle \epsilon_i \text{ для } h \in \mathfrak{h}, i = 1, \dots, n;$$

$$(2.1.3) \quad (h' | h'') = 0 \text{ для } h', h'' \in \mathfrak{h}''.$$

Поскольку $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee$ линейно независимы и так как (в силу (2.1.1) и (2.1.2))

$$(2.1.4) \quad (\alpha_i^\vee | \alpha_j^\vee) = b_{ij} \epsilon_i \epsilon_j \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

определение $(\cdot | \cdot)$ является корректным.

ЛЕММА 2.1. а) Ядро ограничения билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}'$ совпадает с $\mathfrak{s}$.

б) Билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ невырождена на $\mathfrak{h}$.

Доказательство. Утверждение а) следует из предложения 1.6. Если теперь для всех $h \in \mathfrak{h}$ имеем $0 = (\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i^\vee | h) = (\sum_{i=1}^n c_i \epsilon_i \alpha_i, h)$, то $\sum_{i=1}^n c_i \epsilon_i \alpha_i = 0$ и, следовательно, $c_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, что доказывает б). $\square$

Так как билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ невырождена, мы имеем изоморфизм $\nu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$, определенный равенством

$$(\nu(h), h_1) = (h | h_1), \quad h, h_1 \in \mathfrak{h},$$

а также индуцированную билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}^*$.

Из (2.1.2) ясно, что

$$(2.1.5) \quad \nu(\alpha_i^\vee) = \epsilon_i \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следовательно, из (2.1.4) мы получаем

$$(2.1.6) \quad (\alpha_i | \alpha_j) = b_{ij} = a_{ij} / \epsilon_i, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

§2.2. Наш следующий основной результат:

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Ли. Зафиксируем разложение (2.1.1) для A . Тогда существует невырожденная симметрическая билинейная $\mathbb{C}$ -значная форма $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}(A)$, такая, что

- $(\cdot | \cdot)$ инвариантна, т. е. $([x, y] | z) = (x | [y, z])$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}(A)$.
- $(\cdot | \cdot)|_{\mathfrak{h}}$ определяется условиями (2.1.2) и (2.1.3) и невырождена.
- $(\mathfrak{g}_\alpha | \mathfrak{g}_\beta) = 0$, если $\alpha + \beta \neq 0$.
- $(\cdot | \cdot)|_{\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}}$ невырождена для $\alpha \neq 0$, и, следовательно, форма $(\cdot | \cdot)$ задает невырожденное спаривание между $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$.
- $[x, y] = (x | y) \nu^{-1}(\alpha)$ для $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, $\alpha \in \Delta$.

Доказательство. Рассмотрим главную $\mathbb{Z}$ -градуировку (см. §1.5)

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$$

и положим $g(N) = \bigoplus_{j=-N}^N g_j$ для $N = 0, 1, \dots$. Определим билинейную симметрическую форму $(\cdot | \cdot)$ на $g(0) = \mathfrak{h}$ с помощью (2.1.2) и (2.1.3) и продолжим ее на $g(1)$ следующим образом:

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} (e_i | f_j) &= \delta_{ij} \epsilon_i \quad (i, j = 1, \dots, n), \\ (g_0 | g_{\pm 1}) &= 0, \quad (g_{\pm 1} | g_{\pm 1}) = 0. \end{aligned}$$

Тогда форма $(\cdot | \cdot)$ на $g(1)$ удовлетворяет условию а), если оба элемента $[x, y]$ и $[y, z]$ лежат в $g(1)$. Действительно, достаточно проверить, что

$$([e_i, f_j] | h) = (e_i | [f_j, h]) \quad \text{для } h \in \mathfrak{h},$$

или, эквивалентно,

$$\delta_{ij} (\alpha_i^\vee | h) = \delta_{ij} \epsilon_i \langle \alpha_j, h \rangle,$$

а это справедливо в силу (2.1.2).

Теперь мы продолжаем $(\cdot | \cdot)$ до билинейной формы на пространстве $g(N)$ с помощью индукции для $N \geq 1$, так что $(g_i | g_j) = 0$, если $|i|, |j| \leq N$ и $i + j \neq 0$, и снова условие а) выполняется, пока $[x, y]$ и $[y, z]$ лежат в $g(N)$. Предположим, что это уже сделано для $g(N-1)$; тогда мы должны определить $(x | y)$ только для $x \in g_{\pm N}, y \in g_{\mp N}$. Мы можем написать $y = \sum_i [u_i, v_i]$, где u_i и v_i — однородные элементы ненулевой степени, лежащие в $g(N-1)$. Тогда $[x, u_i] \in g(N-1)$, и мы положим

$$(2.2.2) \quad (x | y) = \sum_i ([x, u_i] | v_i).$$

Чтобы проверить корректность этого определения, мы докажем, что если $i, j, s, t \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $|i + j| = |s + t| = N$, $i + j + s + t = 0$, $|i|, |j|, |s|, |t| < N$ и $x_i \in g_i, x_j \in g_j, x_s \in g_s, x_t \in g_t$, то мы имеем (в $g(N-1)$)

$$(2.2.3) \quad ([x_i, x_j], x_s | x_t) = (x_i | [x_j, [x_s, x_t]]).$$

Действительно, используя инвариантность $(\cdot | \cdot)$ на $g(N-1)$ и аксиомы алгебры Ли, получаем

$$\begin{aligned} ([x_i, x_j], x_s | x_t) &= ([x_i, x_s], x_j | x_t) - ([x_j, x_s], x_i | x_t) \\ &= ([x_i, x_s] | [x_j, x_t]) + (x_i | [[x_j, x_s], x_t]) \\ &= (x_i | [x_s, [x_j, x_t]]) + [[x_j, x_s], x_t] \\ &= (x_i | [x_j, [x_s, x_t]]). \end{aligned}$$

Если теперь $x = \sum_i [u'_i, v'_i]$, то по определению (2.2.2) и в силу (2.2.3) имеем

$$(x|y) = \sum_i ([x, u_i]|v_i) = \sum_i (u'_i|[v'_i, y]).$$

Следовательно, эта величина не зависит от выбора выражений для x и y .

Из определения ясно, что условие а) выполняется в $\mathfrak{g}(N)$, как только $[x, y]$ и $[y, z]$ лежат в $\mathfrak{g}(N)$. Таким образом, мы построили билинейную форму $(\cdot|\cdot)$ на $\mathfrak{g}$, удовлетворяющую условиям а) и б). Ее ограничение на $\mathfrak{h}$ невырожденно в силу леммы 2.1b). Форма $(\cdot|\cdot)$ также удовлетворяет с), так как для $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $y \in \mathfrak{g}_\beta$ по свойству инвариантности имеем

$$0 = ([h, x]|y) + (x|[h, y]) = (\langle \alpha, h \rangle + \langle \beta, h \rangle)(x|y).$$

Проверка е) стандартна. Для $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, где $\alpha \in \Delta$, и $h \in \mathfrak{h}$ получаем

$$([x, y] - (x|y)\nu^{-1}(\alpha)|h) = (x|[y, h]) - (x|y)\langle \alpha, h \rangle = 0.$$

Теперь е) следует из б).

Из б), с) и е) вытекает, что билинейная форма $(\cdot|\cdot)$ симметрическая.

Если d) не выполняется, то в силу с) форма $(\cdot|\cdot)$ вырожденна. Пусть $\mathfrak{i} = \text{Ker}(\cdot|\cdot)$. Это идеал, и по условию б) мы имеем $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{h} = 0$, что противоречит определению $\mathfrak{g}(A)$. $\square$

§2.3. Предположим, что $A = (a_{ij})$ — симметризуемая обобщенная матрица Картана. Зафиксируем разложение

$$(2.3.1) \quad A = \text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) (b_{ij})_{i,j=1}^n,$$

где ϵ_i — положительные рациональные числа и (b_{ij}) — симметрическая рациональная матрица. Такое разложение всегда существует. Действительно, (2.3.1) эквивалентно системе однородных линейных уравнений и неравенств над $\mathbb{Q}$ с неизвестными ϵ_i^{-1} и b_{ij} :

$$\epsilon_i^{-1} \neq 0; \text{diag}(\epsilon_1^{-1}, \dots, \epsilon_n^{-1})A = (b_{ij}); \quad b_{ij} = b_{ji}.$$

По определению она имеет решение над $\mathbb{C}$. Следовательно, она имеет решение над $\mathbb{Q}$. Мы можем предполагать, что A неразложима. Тогда для любого $1 < j \leq n$ существует последовательность $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k = j$, такая, что $a_{i_s, i_{s+1}} < 0$. Имеем

$$(2.3.2) \quad a_{i_s, i_{s+1}} \epsilon_{i_{s+1}} = a_{i_{s+1}, i_s} \epsilon_{i_s}, \quad (s = 1, \dots, k-1).$$

Следовательно, $\epsilon_j \epsilon_1 > 0$ для всех j , что завершает доказательство.

Из (2.3.2) вытекает также

Замечание 2.3. Если A неразложима, то матрица $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ определяется соотношением (2.3.1) однозначно, с точностью до умножения на константу.

Зафиксируем невырожденную билинейную симметрическую форму $(\cdot | \cdot)$, связанную с разложением (2.3.1) в соответствии с §2.1. Из (2.1.6) вытекает

$$(2.3.3) \quad (\alpha_i | \alpha_i) > 0 \text{ для } i = 1, \dots, n;$$

$$(2.3.4) \quad (\alpha_i | \alpha_j) \leq 0 \text{ для } i \neq j;$$

$$(2.3.5) \quad \alpha_i^\vee = \frac{2}{(\alpha_i | \alpha_i)} \nu^{-1}(\alpha_i).$$

Тем самым мы получаем обычное выражение для обобщенной матрицы Картана:

$$A = \left(\frac{2(\alpha_i | \alpha_j)}{(\alpha_i | \alpha_i)} \right)_{i,j=1}^n.$$

Мы продолжаем билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ с $\mathfrak{h}$ до инвариантной симметрической билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ на всей алгебре Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$. По теореме 2.2 такая форма существует и удовлетворяет всем сформулированным там условиям. Легко показать, что эта форма также единственна (см. упр. 2.2). Билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ на алгебре Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$, которая дается теоремой 2.2 и удовлетворяет (2.3.3), называется *стандартной инвариантной формой*.

§2.4. Пусть A — симметризуемая матрица, $\mathfrak{g}(A)$ — соответствующая алгебра Ли и $(\cdot | \cdot)$ — билинейная форма на $\mathfrak{g}(A)$, заданная теоремой 2.2. По теореме 2.2 d) для данного корня α мы можем выбрать дуальные базисы $\{e_\alpha^{(i)}\}$ и $\{e_{-\alpha}^{(i)}\}$ в $\mathfrak{g}_\alpha$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, т. е. такие базисы, что $(e_\alpha^{(i)} | e_{-\alpha}^{(j)}) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, \text{mult } \alpha$). Тогда для $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ имеем

$$(2.4.1) \quad (x | y) = \sum_i (x | e_{-\alpha}^{(i)}) (y | e_\alpha^{(i)}).$$

Следующая лемма составляет основу для многих вычислений.

ЛЕММА 2.4. Если $\alpha, \beta \in \Delta$ и $z \in \mathfrak{g}_{\beta-\alpha}$, то в $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A)$ имеем

$$(2.4.2) \quad \sum_j e_{-\alpha}^{(j)} \otimes [z, e_\alpha^{(j)}] = \sum_j [e_{-\beta}^{(j)}, z] \otimes e_\beta^{(j)}.$$

Доказательство. Определим билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A)$ равенством $(x \otimes y | x_1 \otimes y_1) = (x | x_1)(y | y_1)$. Возьмем $e \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $f \in \mathfrak{g}_{-\beta}$. Достаточно проверить, что спаривание обеих частей (2.4.2) с $e \otimes f$ дает один и тот же результат. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_j (e_{-\alpha}^{(s)} \otimes [z, e_\alpha^{(s)}] | e \otimes f) &= \sum_j (e_{-\alpha}^{(s)} | e) ([z, e_\alpha^{(s)}] | f) \\ &= \sum_j (e_{-\alpha}^{(s)} | e) (e_\alpha^{(s)} | [f, z]) = (e | [f, z]) \end{aligned}$$

по теореме 2.2а) и (2.4.1). Аналогично

$$\sum_j ([e_{-\beta}^{(s)} | z] \otimes e_\beta^{(s)} | e \otimes f) = \sum_j (e_{-\beta}^{(s)} | [z, e]) (e_\beta^{(s)} | f) = ([z, e] | f).$$

Применяя снова теорему 2.2а), получаем требуемое. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.4. В обозначениях леммы 2.4 имеем

$$(2.4.3) \quad \sum_j [e_{-\alpha}^{(s)}, [z, e_\alpha^{(s)}]] = - \sum_j [[z, e_{-\beta}^{(s)}], e_\beta^{(s)}] \text{ в } \mathfrak{g}_1(A),$$

$$(2.4.4) \quad \sum_j e_{-\alpha}^{(s)} [z, e_\alpha^{(s)}] = - \sum_j [z, e_{-\beta}^{(s)}] e_\beta^{(s)} \text{ в } U(\mathfrak{g}(A)).$$

Доказательство. Применяем к (2.4.2) линейные отображения из $\mathfrak{g}(A) \otimes \mathfrak{g}(A)$ в $\mathfrak{g}(A)$ и в $U(\mathfrak{g}(A))$, определенные формулами $x \otimes y \mapsto [x, y]$ и $x \otimes y \mapsto xy$ соответственно. $\square$

§2.5. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — алгебра Ли, соответствующая матрице A , $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, $\mathfrak{g} = \bigoplus_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$ — разложение на корневые подпространства относительно $\mathfrak{h}$. Назовем $\mathfrak{g}(A)$ -модуль (соответственно $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль) V *ограниченным*, если для любого $v \in V$ имеем $\mathfrak{g}_\alpha(v) = 0$ для всех, за исключением конечного числа, положительных корней α .

Ясно, что любой подмодуль или фактормодуль ограниченного модуля является ограниченным и прямая сумма или тензорное произведение конечного числа ограниченных модулей снова будет ограниченным модулем. Примеры ограниченных модулей будут построены позже (см. упр. 2.9 и гл. 9).

Предположим теперь, что A симметризуема и $(\cdot | \cdot)$ — билинейная форма, заданная теоремой 2.2.

Для ограниченного $\mathfrak{g}(A)$ -модуля V введем линейный оператор Ω на векторном пространстве V , называемый (обобщенным) *оператором Казимира*, следующим образом.

Сначала введем линейную функцию $\rho \in \mathfrak{h}^*$ соотношениями

$$(\rho, \alpha_i^\vee) = \frac{1}{2} a_{ii} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если $\det A = 0$, это не определяет ρ однозначно, и мы выберем любую функцию, удовлетворяющую этим соотношениям. Из (2.1.5) и (2.1.6) следует, что

$$(2.5.1) \quad (\rho | \alpha_i) = \frac{1}{2} (\alpha_i | \alpha_i) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Далее, для каждого положительного корня α мы выбираем базис $\{e_\alpha^{(i)}\}$ в пространстве $\mathfrak{g}_\alpha$, и пусть $\{e_{-\alpha}^{(i)}\}$ — дуальный базис в $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Определим оператор Ω_0 на V равенством

$$\Omega_0 = 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i e_{-\alpha}^{(i)} e_\alpha^{(i)}.$$

Можно легко проверить, что это определение не зависит от выбора базисов (см. упр. 2.7). Поскольку для каждого $v \in V$ только конечное число слагаемых $e_{-\alpha}^{(i)} e_\alpha^{(i)}(v)$ отлично от нуля, Ω_0 определен корректно на V . Пусть $u_1, u_2, \dots$ и $u^1, u^2, \dots$ — дуальные базисы подалгебры $\mathfrak{h}$. Обобщенный оператор Казимира определяется равенством

$$\Omega = 2\nu^{-1}(\rho) + \sum_i u^i u_i + \Omega_0.$$

Справедлива простая формула

$$(2.5.2) \quad \sum_i \langle \lambda, u^i \rangle \langle \mu, u_i \rangle = (\lambda | \mu),$$

это видно из соотношения

$$(2.5.3) \quad \lambda = \sum_i \langle \lambda, u^i \rangle \nu(u_i) = \sum_i \langle \lambda, u_i \rangle \nu(u^i).$$

Выполним еще одно простое вычисление. Для $x \in \mathfrak{g}_\alpha$ имеем

$$\begin{aligned} \left[\sum_i u^i u_i, x \right] &= \sum_i \langle \alpha, u^i \rangle x u_i + \sum_i u^i \langle \alpha, u_i \rangle x \\ &= \sum_i \langle \alpha, u^i \rangle \langle \alpha, u_i \rangle x + x \left(\sum_i u^i \langle \alpha, u_i \rangle + u_i \langle \alpha, u^i \rangle \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(2.5.4) \quad \left[\sum_i u^i u_i, x \right] = x((\alpha | \alpha) + 2\nu^{-1}(\alpha)) \quad \text{для } x \in \mathfrak{g}_\alpha.$$

§2.6. Рассмотрим разложение на корневые подпространства для $U(\mathfrak{g}(A))$ относительно $\mathfrak{h}$:

$$U(\mathfrak{g}(A)) = \bigoplus_{\beta \in Q} U_{\beta}, \text{ где}$$

$$U_{\beta} = \{x \in U(\mathfrak{g}(A)) \mid [h, x] = \langle \beta, h \rangle x \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Положим $U'_{\beta} = U(\mathfrak{g}'(A)) \cap U_{\beta}$, так что $U(\mathfrak{g}'(A)) = \bigoplus_{\beta} U'_{\beta}$. Теперь мы докажем следующую важную теорему:

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Ли.

а) Если V — ограниченный $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль и $u \in U'_{\alpha}$, то

$$(2.6.1) \quad [\Omega_0, u] = -u(2(\rho|\alpha) + (\alpha|\alpha) + 2\nu^{-1}(\alpha)).$$

б) Если V — ограниченный $\mathfrak{g}(A)$ -модуль, то Ω коммутирует с действием $\mathfrak{g}(A)$ на V .

Доказательство. б) немедленно следует из а) и (2.5.4). Если а) выполнено для $u \in U'_{\alpha}$ и $u_1 \in U'_{\beta}$, то оно выполнено также для $uu_1 \in U'_{\alpha+\beta}$. Действительно,

$$\begin{aligned} [\Omega_0, uu_1] &= [\Omega_0, u]u_1 + u[\Omega_0, u_1] \\ &= -u(2(\rho|\alpha) + (\alpha|\alpha) + 2\nu^{-1}(\alpha))u_1 \\ &\quad - uu_1(2(\rho|\beta) + (\beta|\beta) + 2\nu^{-1}(\beta)) \\ &= -uu_1(2(\rho|\alpha) + (\alpha|\alpha) + 2\nu^{-1}(\alpha) \\ &\quad + 2(\alpha|\beta) + 2(\rho|\beta) + (\beta|\beta) + 2\nu^{-1}(\beta)) \\ &= -uu_1(2(\rho|\alpha + \beta) + (\alpha + \beta|\alpha + \beta) + 2\nu^{-1}(\alpha + \beta)). \end{aligned}$$

Следовательно, поскольку $e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, n$) порождают $\mathfrak{g}'(A)$, достаточно проверить (2.6.1) для $u = e_{\alpha_i}$ или $e_{-\alpha_i}$. Применяя (2.4.4) к $z = e_{\alpha_i}$ и используя лемму 1.3, получаем

$$\begin{aligned} [\Omega_0, e_{\alpha_i}] &= 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_s ([e_{-\alpha}^{(s)}, e_{\alpha_i}] e_{\alpha}^{(s)} + e_{-\alpha}^{(s)} [e_{\alpha}^{(s)}, e_{\alpha_i}]) \\ &= 2[e_{-\alpha_i}, e_{\alpha_i}]e_{\alpha_i} + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}} \left(\sum_s [e_{-\alpha}^{(s)}, e_{\alpha_i}] e_{\alpha}^{(s)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_s e_{-\alpha+\alpha_i}^{(s)} [e_{\alpha}^{(s)}, e_{\alpha_i}] \right) \\ &= -2\nu^{-1}(\alpha_i)e_{\alpha_i} = -2(\alpha_i|\alpha_i)e_{\alpha_i} - 2e_{\alpha_i}\nu^{-1}(\alpha_i). \end{aligned}$$

Это совпадает с (2.6.1) для $u = e_{\alpha_i}$ в силу (2.5.1). Аналогично, $[\Omega_0, e_{-\alpha_i}] = 2e_{-\alpha_i}[e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_i}] = 2e_{-\alpha_i}\nu^{-1}(\alpha_i)$, что дает (2.6.1) для $u = e_{-\alpha_i}$ также в силу равенств (2.5.1). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Если в предположениях теоремы 2.6 б) существует $v \in V$, такой, что $e_i(v) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $h(v) = (\Lambda, h)v$ для некоторого $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ и всех $h \in \mathfrak{h}$, то

$$(2.6.2) \quad \Omega(v) = (\Lambda + 2\rho|\Lambda)v.$$

Если, кроме этого, $U(\mathfrak{g}(A))v = V$, то

$$(2.6.3) \quad \Omega = (\Lambda + 2\rho|\Lambda)I_V.$$

Доказательство. Формула (2.6.2) следует из определения Ω и формулы (2.5.2). Формула (2.6.3) следует из (2.6.2) и теоремы 2.6. $\square$

Замечание 2.6. Можно определить Q -градуировку $U(\mathfrak{g}'(A)) = \bigoplus_{\beta \in Q} U'_\beta$ и отображение $\nu^{-1} : Q \rightarrow \mathfrak{h}'$, не используя алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$. (Здесь, как в замечании 1.5, символ Q обозначает свободную абелеву группу с образующими $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.) Действительно, Q -градуировка алгебры $U(\mathfrak{g}'(A))$ индуцируется Q -градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)$, определенной в замечании 1.5. Если A симметризуема, зафиксируем разложение (2.1.1) и определим ν^{-1} как гомоморфизм абелевых групп, такой, что $\nu^{-1}(\alpha_i) = \epsilon_i^{-1} \alpha_i^\vee$ ($i = 1, \dots, n$). Эти определения с таким же успехом работают и при n , равном бесконечности.

§2.7. Пусть A — матрица над $\mathbb{R}$ размера $n \times n$, $(\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \Pi, \Pi^\vee)$ — реализация матрицы A над $\mathbb{R}$, т. е. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ есть векторное пространство размерности $2n - \ell$ над $\mathbb{R}$, так что $(\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \Pi, \Pi^\vee)$ является реализацией A над $\mathbb{C}$.

Определим компактную форму $\mathfrak{k}(A)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ следующим образом. Рассмотрим комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$ как вещественную алгебру Ли. Обозначим ω_0 ее антилинейный автоморфизм, заданный соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_0(e_i) &= -f_i, \\ \omega_0(f_i) &= -e_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ \omega_0(h) &= -h \text{ для } h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Будем называть ω_0 компактной инволюцией алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$. Существование ω_0 доказывается такими же рассуждениями, как те, что были проведены для ω в §1.3. Тогда $\mathfrak{k}(A)$ определяется как неподвижное множество инволюции ω_0 ; это вещественная алгебра Ли, комплексификация которой совпадает с $\mathfrak{g}(A)$. Заметим, что это определение компактной формы совпадает с обычным определением для конечномерного случая.

Теперь пусть A — симметризуемая матрица над $\mathbb{R}$ и $(\cdot | \cdot)$ — стандартная форма на $\mathfrak{g}(A)$. Введем, кроме того, эрмитову форму на $\mathfrak{g}(A)$:

$$(x|y)_0 := -(\omega_0(x)|y).$$

Из теоремы 2.2 вытекают следующие свойства этой формы. Ограничение $(\cdot | \cdot)_0$ на $\mathfrak{g}_\alpha$ невырожденно для любого $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$; $(\mathfrak{g}_\alpha | \mathfrak{g}_\beta)_0 = 0$, если $\alpha \neq \beta$; операторы $\text{ad } u$ и $-\text{ad } \omega_0(u)$ для $u \in \mathfrak{g}(A)$ являются сопряженными друг к другу, т. е. $((u, x|y)_0 = -(x|[\omega_0(u), y])_0$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}(A)$; в частности, ограничение $(\cdot | \cdot)_0$ на $\mathfrak{k}(A)$ есть невырожденная инвариантная $\mathbb{R}$ -билинейная форма. Мы вернемся к изучению эрмитовой формы $(\cdot | \cdot)_0$ после того, как разовьем до определенного уровня теорию представлений.

§2.8. Следующая вариация приведенных выше результатов очень полезна для приложений.

Приложение 2.8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с инвариантной невырожденной билинейной формой $(\cdot | \cdot)$, $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — дуальные базисы (т. е. $(x_i | y_j) = \delta_{ij}$), и пусть V — такой $\mathfrak{g}$ -модуль, что для каждой пары элементов $u, v \in V$ $x_i(u) = 0$ либо $y_i(v) = 0$ для всех i , за исключением конечного числа. Тогда оператор

$$\Omega_2 := \sum_i x_i \otimes y_i$$

определен на $V \otimes V$ и коммутирует с действием $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Мы должны показать, что для каждого $z \in \mathfrak{g}$

$$(2.8.1) \quad \sum_i ([z, x_i] \otimes y_i + x_i \otimes [z, y_i]) = 0.$$

Пусть $[z, x_i] = \sum_j \alpha_{ij} x_j$, $[z, y_i] = \sum_j \beta_{ji} y_j$; беря скалярное произведение первого равенства с y_j и второго с x_j , получаем

$$\alpha_{ij} = ([z, x_i] | y_j), \quad \beta_{ji} = ([z, y_i] | x_j).$$

Используем инвариантность $(\cdot | \cdot)$. Имеем

$$\alpha_{ij} = (z | [x_i, y_j]), \quad \beta_{ji} = (z | [y_i, x_j]).$$

Это означает, что $\alpha_{ij} = -\beta_{ij}$, и (2.8.1) доказано. $\square$

§2.9. Здесь мы рассмотрим наиболее вырожденный пример, алгебру Ли $g(0)$, соответствующую нулевой матрице размера $n \times n$ (включая $n = \infty$). В этом случае $[e_i, e_j] = 0$, $[f_i, f_j] = 0$, $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee$ ($i, j = 1, \dots, n$), так что

$$g(0) = \mathfrak{h} \oplus \sum_i \mathbb{C} e_i \oplus \sum_i \mathbb{C} f_i.$$

Центром $g(0)$ является $\mathfrak{c} = \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \alpha_i^\vee$. Кроме того, $\dim \mathfrak{h} = 2n$ и можно выбрать элементы $d_1, \dots, d_n \in \mathfrak{h}$, такие, что

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{c} + \sum_{i=1}^n \mathbb{C} d_i$$

и

$$[d_i, e_j] = \delta_{ij} e_j, [d_i, f_j] = -\delta_{ij} f_j \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма на базисе $g(0)$ определяется так:

$$(e_i | f_i) = 1, (\alpha_i^\vee | d_i) = 1,$$

все остальные скалярные произведения равны нулю. Заметим, что $\rho = 0$ и оператор Казимира имеет вид

$$\Omega = 2 \sum_i \alpha_i^\vee d_i + 2 \sum_i f_i e_i.$$

Положим $\mathfrak{c}_1 = \sum \mathbb{C}(\alpha_i^\vee - \alpha_j^\vee) \subset \mathfrak{c}$. Тогда алгебра Ли $g'(0)/\mathfrak{c}_1$ является алгеброй Гейзенберга порядка n , т. е. она имеет базис e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$), z , такой, что $[e_i, f_j] = \delta_{ij} z$ ($i, j = 1, \dots, n$), и все остальные коммутаторы равны нулю.

§2.10. Упражнения

2.1. Матрица $A = (a_{ij})$ симметризуема, если и только если

$$a_{ij} = 0 \text{ влечет за собой } a_{ji} = 0 \text{ и}$$

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} = a_{i_2 i_1} a_{i_3 i_2} \dots a_{i_1 i_k} \text{ для всех } i_1, \dots, i_k.$$

2.2. Покажите, что билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ однозначно определяется свойствами а) и б) из теоремы 2.2.

2.3. Пусть $(\cdot | \cdot)$ — невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма на $g(A)$. Покажите, что матрица A симметризуема, $(\cdot | \cdot)|_{\mathfrak{h}}$ определяется формулами (2.1.2) и (2.1.3) для некоторого выбора $\mathfrak{h}''$ и что $(\cdot | \cdot)$ обладает всеми свойствами, сформулированными в теореме 2.2.

[Положите $\epsilon_i = (e_i | f_i)$.]

2.4. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ есть $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли, которая порождается $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$. Покажите, что инвариантная симметрическая билинейная форма на подпространстве $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, такая, что $(\mathfrak{g}_i | \mathfrak{g}_j) = 0$, если $i + j \neq 0$, может быть (однозначно) продолжена до такой формы на всей $\mathfrak{g}$. (Здесь свойство инвариантности считается выполненным в том случае, если оно имеет смысл.)

2.5. Пусть $(\cdot | \cdot)_1$ и $(\cdot | \cdot)_2$ — две невырожденные симметрические инвариантные билинейные формы на $\mathfrak{g}(A)$, и предположим, что A неразложима. Покажите, что существует автоморфизм ϕ алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$, оставляющий на месте элементы $\mathfrak{g}'(A)$ и сохраняющий $\hbar$, такой, что билинейные формы $(x|y)_1$ и $(\phi(x)|\phi(y))_2$ пропорциональны. Покажите, что любые две инвариантные билинейные формы на $\mathfrak{g}'(A)$ пропорциональны.

2.6. Покажите, что присоединенное представление $\mathfrak{g}(A)$ является ограниченным, если и только если $\dim \mathfrak{g}(A) < \infty$.

2.7. Пусть $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — базисы $\mathfrak{n}_+$ и $\mathfrak{n}_-$, дуальные относительно инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{g}(A)$. Покажите, что $\Omega_0 = 2 \sum_i y_i x_i$ не зависит от выбора этих базисов. Докажите аналогичное утверждение для Ω_2 .

2.8. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ — простая конечномерная алгебра Ли. Выберем базис $v_1, \dots, v_d$ в $\mathfrak{g}$, а также дуальный базис $v^1, \dots, v^d$ относительно формы $(\cdot | \cdot)$. Положим $\Omega = \sum_i v_i v^i$. Проверьте, что Ω совпадает с оператором Казимира, определенным в §2.5. Покажите, что ρ есть полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

2.9. Покажите, что $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ -модуль $T(V)$, построенный в доказательстве теоремы 1.2, имеет единственный максимальный подмодуль $J(V)$. Проверьте, что $T(V)/J(V)$ есть неприводимый ограниченный $\mathfrak{g}(A)$ -модуль.

2.10. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — конечномерная алгебра Ли с коммутатором $[\cdot, \cdot]_0$ и невырожденной инвариантной симметрической билинейной формой $(\cdot | \cdot)$. Пусть $\bar{d}$ — дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, такое, что $(\bar{d}(x)|y) = -(x|\bar{d}(y))$ для $x, y \in \mathfrak{g}_0$. Положим $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, где c и d — некоторые символы, и определим скобку $[\cdot, \cdot]$ на $\mathfrak{g}$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} [x, y] &= [x, y]_0 + (\bar{d}(x)|y)c \text{ для } x, y \in \mathfrak{g}_0, \\ [c, x] &= 0 \text{ для } x \in \mathfrak{g}, \quad [d, x] = \bar{d}(x). \end{aligned}$$

Проверьте, что эта скобка задает операцию в алгебре Ли. Продолжим билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ с $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{g}$, полагая

$$(d|d) = (c|c) = 0, \quad (c|d) = 1, \quad (c|\mathfrak{g}_0) = 0, \quad (d|\mathfrak{g}_0) = 0.$$

Покажите, что это невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$.

2.11. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая n -мерная алгебра Ли с невырожденной инвариантной симметрической билинейной формой. Покажите, что либо $\mathfrak{g}$ есть ортогональная прямая сумма $(n-1)$ -мерной и 1-мерной алгебр Ли, либо $\mathfrak{g}$ может быть построена, как в упр. 2.10, из $(n-2)$ -мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

[Пусть $\mathfrak{i}$ — одномерный идеал в $\mathfrak{g}$. Покажите, что $\mathfrak{i}$ лежит в центре (используя тот факт, что коприсоединенные орбиты четномерны). Если $\mathfrak{i}$ изотропен, рассмотрите $\mathfrak{i}^\perp$ и алгебру Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{i}^\perp/\mathfrak{i}$.]

§2.11. Библиографические замечания и комментарии

Теорема 2.2 принадлежит Кацу [1968 В] и Муди (Moody [1968]). Для конечномерных полупростых алгебр Ли этот результат известен благодаря существованию формы Киллинга — Картана, которую нельзя определить в бесконечномерном случае.

Обобщенный оператор Казимира был введен Кацем [1974]. Идея его построения заимствована из физики. Возьмем обычную формулу для оператора Казимира (см. упр. 2.8):

$$\Omega = \sum_{\alpha > 0} \sum_i \left(e_{-\alpha}^{(i)} e_{\alpha}^{(i)} + e_{\alpha}^{(i)} e_{-\alpha}^{(i)} \right) + \sum_i u_i u^i,$$

используя коммутационные соотношения, перепишем ее в виде

$$\Omega = \sum_{\alpha > 0} \nu^{-1}(\alpha) + 2 \sum_{\alpha > 0} \sum_i e_{-\alpha}^{(i)} e_{\alpha}^{(i)} + \sum_i u_i u^i$$

и заменим теперь первое слагаемое, которое не имеет смысла, на «конечную» величину $2\nu^{-1}(\rho)$.

Доказательство теоремы 2.6 взято из работы Кас — Peterson [1984 В].

Некоторые из упражнений, такие, как упр. 2.10 и 2.11, по-видимому, новые. (В настоящем издании в них сделаны упрощения, которые были предложены мне Г. Фавром и Л.-Ж. Сантарубеном.) Остальной материал гл. 2 является довольно стандартным.

Полная система операторов Казимира «высших порядков» построена Кацем (Кас [1984]) с использованием идей статьи Фейгина и Фукса [1983А].

Глава 3. Интегрируемые представления алгебр Каца — Мули и группа Вейля

§3.0. В этой главе мы начинаем систематическое изучение алгебр Каца — Мули. Напомним, что это алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$, соответствующие обобщенным матрицам Картана A . Основной объект главы — это группа Вейля W алгебры Каца — Мули, которая является обобщением классической группы Вейля в конечномерной теории. Однако в отличие от конечномерного случая W бесконечна и объединение W -сдвигов фундаментальной камеры есть выпуклый конус, который не совпадает со всей «вещественной» подалгеброй Картана $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

§3.1. Сделаем сначала несколько замечаний относительно двойственности алгебр Каца — Мули. Пусть A — обобщенная матрица Картана; тогда транспонированная к ней ${}^tA$ также является обобщенной матрицей Картана. Пусть $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ — реализация A ; тогда $(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ будет, очевидно, реализацией ${}^tA$. Поэтому если $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ — четверка, ассоциированная с A , то $(\mathfrak{g}({}^tA), \mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$ — четверка, ассоциированная с ${}^tA$. Алгебры Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$ и $\mathfrak{g}({}^tA)$ называются *дуальными* друг другу.

Заметим, что *дуальная корневая решетка* алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$

$$Q^\vee := \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \alpha_i^\vee$$

является корневой решеткой для $\mathfrak{g}({}^tA)$. Кроме того, обозначим через $\Delta^\vee \subset Q^\vee$ ($\subset \mathfrak{h}^* \subset \mathfrak{h}$) систему корней $\Delta({}^tA)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}({}^tA)$. Она называется *дуальной системой корней* алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$. В противоположность конечномерному случаю между Δ и $\Delta^\vee$ нет естественной биекции.

§3.2. Напомним некоторые хорошо известные результаты о представлениях алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Пусть

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— стандартный базис этой алгебры Ли. Тогда

$$[e, f] = h, \quad [h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f.$$

Индукцией по k легко выводятся следующие соотношения в универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $sl_2(\mathbb{C})$:

$$(3.2.1) \quad [h, f^k] = -2kf^k, \quad [h, e^k] = 2ke^k,$$

$$(3.2.2) \quad [e, f^k] = -k(k-1)f^{k-1} + kf^{k-1}h.$$

ЛЕММА 3.2. а) Пусть V есть $sl_2(\mathbb{C})$ -модуль и $v \in V$ — такой элемент, что

$$h(v) = \lambda v \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Положим $v_j = (j!)^{-1} f^j(v)$. Тогда

$$(3.2.3) \quad h(v_j) = (\lambda - 2j)v_j.$$

Если, кроме того, $e(v) = 0$, то

$$(3.2.4) \quad e(v_j) = (\lambda - j + 1)v_{j-1}.$$

б) Для каждого целого $k \geq 0$ существует единственный, с точностью до изоморфизма, неприводимый $(k+1)$ -мерный $sl_2(\mathbb{C})$ -модуль. В некотором $\mathbb{C}$ -базисе $\{v_j\}_{j=0}^k$ пространства этого модуля действие $sl_2(\mathbb{C})$ имеет вид

$$h(v_j) = (k-2j)v_j, \quad f(v_j) = (j+1)v_{j+1}, \quad e(v_j) = (k+1-j)v_{j-1}.$$

Здесь $j = 0, \dots, k$, и мы считаем, что $v_{k+1} = 0 = v_{-1}$.

Доказательство. Формулы (3.2.3) и (3.2.4) следуют из (3.2.1) и (3.2.2). Пусть теперь V — неприводимый $(k+1)$ -мерный $sl_2(\mathbb{C})$ -модуль и $u \in V$ — собственный вектор преобразования h с собственным значением μ . Из (3.2.1) следует, что если $e^s(u) \neq 0$, то это снова собственный вектор для h с собственным значением $\mu + 2s$. Поскольку V конечномерен, существует $v = e^s(u) \neq 0$, такой, что $e(v) = 0$ и $h(v) = \lambda v$. Положим $v_j = (j!)^{-1} f^j(v)$. Используя еще раз конечномерность V , из (3.2.4) выводим, что λ является целым неотрицательным числом, скажем m , что $\{v_j\}$ линейно независимы для $j = 0, \dots, m$ и $v_{m+1} = 0$. Значит, $m = k$, откуда следует б). $\square$

§3.3. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — алгебра Каца — Мури и e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) — ее образующие Шевалле. Положим $\mathfrak{g}(i) = \mathbb{C}e_i + \mathbb{C}\alpha_i^\vee + \mathbb{C}f_i$; тогда $\mathfrak{g}(i)$ изоморфна $sl_2(\mathbb{C})$ со стандартным базисом $\{e_i, \alpha_i^\vee, f_i\}$.

Теперь мы можем вывести соотношения между образующими Шевалле:

$$(3.3.1) \quad (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \quad (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Мы докажем второе соотношение: тогда для доказательства первого будет достаточно применить инволюцию Шевалле ω (см. (1.3.4)).

Пусть $v = f_j$, $\theta_{ij} = (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j$. Рассмотрим на $\mathfrak{g}(A)$ структуру $\mathfrak{g}_{(i)}$ -модуля, полученную ограничением присоединенного представления. Имеем

$$\alpha_i^\vee(v) = -a_{ij}v; \quad e_i(v) = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Тогда из леммы 3.2а) и свойств (C1) и (C2) матрицы A вытекает, что

$$[e_i, \theta_{ij}] = (1 - a_{ij})(-a_{ij} - (1 - a_{ij}) + 1)(\text{ad } f_i)^{-a_{ij}} f_j = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Ясно также, что e_k коммутирует с θ_{ij} , если $k \neq i$, $k \neq j$ (в силу соотношений (1.2.1)), а также если $k = j$, но $a_{ij} \neq 0$. Наконец, если $k = j$ и $a_{ij} = 0$, то

$$[e_j, \theta_{ij}] = [e_j, [f_i, f_j]] = a_{ji}f_i = 0 \text{ (по свойству (C3))}.$$

Итак, $[e_k, \theta_{ij}] = 0$ для всех k , и осталось применить лемму 1.5. $\square$

§3.4. Теперь нам понадобятся некоторые общие факты о модуле V над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Говорят, что элемент $x \in \mathfrak{g}$ *локально нильпотентен* на V , если для любого $v \in V$ существует положительное целое число N , такое, что $x^N(v) = 0$.

ЛЕММА 3.4. а) Пусть $y_1, y_2, \dots$ — система образующих алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $x \in \mathfrak{g}$ таков, что $(\text{ad } x)^{N_i} y_i = 0$ для некоторых положительных целых чисел N_i , $i = 1, 2, \dots$. Тогда $\text{ad } x$ локально нильпотентен на $\mathfrak{g}$.

б) Пусть $v_1, v_2, \dots$ — система образующих $\mathfrak{g}$ -модуля V , и пусть $x \in \mathfrak{g}$ таков, что $\text{ad } x$ локально нильпотентен на $\mathfrak{g}$ и $x^{N_i}(v_i) = 0$ для некоторых положительных целых чисел N_i , $i = 1, 2, \dots$. Тогда x локально нильпотентен на V .

Доказательство. Поскольку $\text{ad } x$ является дифференцированием $\mathfrak{g}$, справедлива формула Лейбница:

$$(\text{ad } x)^k [y, z] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(\text{ad } x)^i y, (\text{ad } x)^{k-i} z],$$

что доказывает а) индукцией по длине коммутаторов от y_i . Утверждение б) вытекает из формулы (для $\lambda = \mu = 0$)

$$(3.4.1) \quad (x - \lambda - \mu)^k a = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} ((\text{ad } x - \lambda)^s a) (x - \mu)^{k-s}, \quad k \geq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

которая справедлива в любой ассоциативной алгебре. Чтобы доказать (3.4.1), заметим, что $\text{ad } x = L_x - R_x$, где L_x и R_x — операторы левого и правого умножения на x , и что L_x и R_x коммутируют (в силу ассоциативности). Применим теперь биномиальную формулу к $L_x - \lambda - \mu = (\text{ad } x - \lambda) + (R_x - \mu)$. $\square$

Применяя биномиальную формулу к $\text{ad } x = L_x - R_x$, мы получим еще одну полезную формулу (справедливую в любой ассоциативной алгебре):

$$(3.4.2) \quad (\text{ad } x)^k a = \sum_{s=0}^k (-1)^s \binom{k}{s} x^{k-s} a x^s.$$

§3.5. ЛЕММА 3.5. Операторы $\text{ad } e_i$ и $\text{ad } f_i$ локально нильпотентны на $\mathfrak{g}(A)$.

Доказательство. Из соотношений (1.2.1) и (3.3.1) получаем $(\text{ad } e_i)^{|a_i|+1} x = 0 = (\text{ad } f_i)^{|a_i|+1} x$, если x есть e_j или f_j . Кроме этого, $(\text{ad } e_i)^2 h = 0 = (\text{ad } f_i)^2 h$, если $h \in \mathfrak{h}$. Теперь мы можем применить лемму 3.4 а). $\square$

§3.6. Модуль V над $\mathfrak{g}(A)$ называется $\mathfrak{h}$ -диагонализируемым, если $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$, где $V_\lambda = \{v \in V \mid h(v) = (\lambda, h)v \text{ для } h \in \mathfrak{h}\}$. Как обычно, V_λ называется *весовым подпространством*, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ — *весом*, если $V_\lambda \neq 0$, а $\dim V_\lambda$ — *кратностью веса* λ и обозначается $\text{mult}_V \lambda$. Аналогично определяются $\mathfrak{h}'$ -диагонализируемый $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль, его веса и т. д.

Будем называть $\mathfrak{h}$ - (соответственно $\mathfrak{h}'$ -) диагонализируемый модуль над алгеброй Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$ (соответственно $\mathfrak{g}'(A)$) *интегрируемым*, если все e_i и f_i ($i = 1, \dots, n$) локально нильпотентны на V .

Заметим, что по лемме 3.5 алгебра Каца — Муди является интегрируемым модулем относительно присоединенного представления. Следующее важное предложение оправдывает термин «интегрируемый».

Предложение 3.6. Пусть V — интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль.

а) Как $\mathfrak{g}_{(i)}$ -модуль V разлагается в прямую сумму конечномерных неприводимых $\mathfrak{h}$ -инвариантных модулей (следовательно, действие $\mathfrak{g}_{(i)}$ на V может быть «проинтегрировано» до действия группы $SL_2(\mathbb{C})$).

б) Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ — вес модуля V и α_i — простой корень алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$. Обозначим через M множество всех $t \in \mathbb{Z}$, таких, что $\lambda + t\alpha_i$ является весом модуля V , и пусть $m_i = \text{mult}_V(\lambda + t\alpha_i)$. Тогда

(i) M есть замкнутый интервал целых чисел $[-p, q]$, где оба p и q — либо целые неотрицательные числа, либо ∞ и $p - q = (\lambda, \alpha_i^\vee)$, когда оба p и q конечны; если $\text{mult}_V \lambda < \infty$, то p и q конечны;

- (ii) отображение $e_i : V_{\lambda + t\alpha_i} \rightarrow V_{\lambda + (t+1)\alpha_i}$ является вложением для $t \in [-p, -\frac{1}{2}\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle]$; в частности, функция $t \mapsto m_t$ возрастает на этом интервале;
- (iii) функция $t \mapsto m_t$ симметрична относительно точки $t = -\frac{1}{2}\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$;
- (iv) если λ и $\lambda + \alpha_i$ являются весами, то $e_i(V_\lambda) \neq 0$.

Доказательство. В силу (3.2.2) имеем

$$(3.6.1) \quad e_i f_i^k(v) = k(1 - k + \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle) f_i^{k-1}(v) + f_i^k e_i(v) \text{ для } v \in V_\lambda.$$

Отсюда следует, что подпространство

$$U = \sum_{k, m \geq 0} f_i^k e_i^m(v)$$

$(\mathfrak{g}_{(i)} + \mathfrak{h})$ -инвариантно. Так как e_i и f_i локально нильпотентны на V , то $\dim U < \infty$. По теореме Вейля о полной приводимости, примененной к $\mathfrak{g}_{(i)}$ -модулю U , он разлагается в прямую сумму конечномерных $\mathfrak{h}$ -инвариантных неприводимых $\mathfrak{g}_{(i)}$ -модулей (ср. упр. 3.11). Итак, каждый элемент $v \in V$ лежит в прямой сумме конечномерных $\mathfrak{h}$ -инвариантных неприводимых $\mathfrak{g}_{(i)}$ -модулей, что доказывает а).

Для доказательства б) мы используем а) и лемму 3.2b). Положим $U = \sum_{k \in \mathbb{Z}} V_{\lambda + k\alpha_i}$; это $(\mathfrak{g}_{(i)} + \mathfrak{h})$ -модуль, который представляется в виде прямой суммы конечномерных неприводимых $(\mathfrak{g}_{(i)} + \mathfrak{h})$ -модулей. Пусть $p = -\inf M$, $q = \sup M$. Оба p и q неотрицательны, так как $0 \in M$. Теперь все утверждения б) следуют из леммы 3.2b), поскольку $\langle \lambda + t\alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ для $t = -\frac{1}{2}\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle$. $\square$

Очень полезно следующее следствие предложения 3.6b) (i) и (iii).

Следствие 3.6. а) Если λ — вес интегрируемого $\mathfrak{g}(A)$ -модуля V и $\lambda + \alpha_i$ (соответственно $\lambda - \alpha_i$) не является весом, то $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ (соответственно $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$).

б) Если λ — вес V , то $\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i$ тоже его вес, причем той же кратности.

Замечание 3.6. Пусть V — интегрируемый $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль. Тогда ясно, что предложение 3.6 и следствие 3.6 остаются справедливыми, если заменить $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}'$. Кроме того, локальная нильпотентность e_i и f_i на V гарантирует, что V является h_i -диагонализируемым, а значит, и h'_i -диагонализируемым при условии $p < \infty$. Это следует из общего факта, который будет доказан в §3.8.

§3.7. Теперь мы введем важное понятие группы Вейля для алгебры Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ определим *фундаментальное отражение* r_i пространства $\mathfrak{h}^*$ формулой

$$r_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Ясно, что r_i есть отражение, поскольку множеством неподвижных точек для него является $T_i = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0\}$ и $r_i(\alpha_i) = -\alpha_i$.

Подгруппа W в $GL(\mathfrak{h}^*)$, порожденная всеми фундаментальными отражениями, называется *группой Вейля* для $\mathfrak{g}(A)$. Мы будем писать $W(A)$ в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость от A .

Действие r_i на $\mathfrak{h}^*$ индуцирует дуальное фундаментальное отражение $r_i^\vee$ на $\mathfrak{h}$ (для дуальной алгебры $\mathfrak{g}^*(A)$). Следовательно, группы Вейля дуальных алгебр Каца — Мули являются контрагredientными линейными группами, что позволяет нам отождествить их.

Следующее предложение непосредственно вытекает из следствия 3.6b) и леммы 3.5.

Предложение 3.7. а) Пусть V — интегрируемый модуль над алгеброй Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$. Тогда $\text{mult}_V \lambda = \text{mult}_V w(\lambda)$ для каждого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ и $w \in W$. В частности, множество весов V инвариантно относительно W .

б) Система корней Δ для $\mathfrak{g}(A)$ является W -инвариантной, и $\text{mult } \alpha = \text{mult } w(\alpha)$ для любых $\alpha \in \Delta, w \in W$.

Следующий факт понадобится нам позже.

Лемма 3.7. Если $\alpha \in \Delta_+$ и $r_i(\alpha) < 0$, то $\alpha = \alpha_i$. Другими словами, $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ инвариантно относительно r_i .

Доказательство следует из леммы 1.3. □

§3.8. В этом параграфе мы наметим несколько иной подход к группе Вейля. Пусть a — локально нильпотентный оператор в векторном пространстве V . Тогда мы можем определить экспоненту

$$\exp a := I_V + \frac{1}{1!}a + \frac{1}{2!}a^2 + \dots,$$

которая обладает обычными свойствами, в частности,

$$\exp ka = (\exp a)^k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Пусть b — еще один оператор на V , такой, что $(\text{ad } a)^N b = 0$ для некоторого N . В этом случае справедлива известная формула

$$(3.8.1) \quad (\exp a)b(\exp -a) = (\exp(\text{ad } a))(b).$$

Это нетрудно получить с помощью соотношения (3.4.2).

ЛЕММА 3.8. Пусть π — интегрируемое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ в векторном пространстве V . Для $i = 1, \dots, n$ положим

$$r_i^\pi = (\exp f_i)(\exp -e_i)(\exp f_i).$$

Тогда

a) $r_i^\pi(V_\lambda) = V_{r_i(\lambda)},$

b) $r_i^{\text{ad}} \in \text{Aut } \mathfrak{g}(A),$

c) $r_i^{\text{ad}}|_{\mathfrak{h}} = r_i.$

Доказательство. Пусть $v \in V_\lambda$. Тогда $h(r_i^\pi(v)) = \langle \lambda, h \rangle r_i^\pi(v)$, если $\langle \alpha_i, h \rangle = 0$. Поэтому для a) и c) мы должны проверить только, что $\alpha_i^\vee(r_i^\pi(v)) = -\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle r_i^\pi(v)$. Это следует из

$$(3.8.2) \quad (r_i^\pi)^{-1} \alpha_i^\vee r_i^\pi = -\alpha_i^\vee.$$

В силу (3.8.1) достаточно убедиться, что (3.8.2) справедливо для присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$; применяя (3.8.1) еще раз, получаем, что (3.8.2) следует проверить лишь в двумерном естественном представлении этой алгебры Ли. Но в этом представлении

$$\exp f_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(-e_i) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_i^\pi = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и (3.8.2) доказано.

Утверждение b) следует из формулы (3.8.1), примененной к присоединенному представлению. $\square$

Замечание 3.8. Пусть (V, π) — интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль, ядро которого лежит в $\mathfrak{h}$. В силу предложения 3.6 действие подалгебры $\mathfrak{g}(i)$ ($i = 1, \dots, n$) на V может быть проинтегрировано до представления $\pi_i : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow GL(V)$. Группы $\pi_i(SL_2(\mathbb{C}))$ порождают подгруппу G^π в $GL(V)$. Группу G^π можно рассматривать как «бесконечномерную» группу, соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}(A)$. Элементы $r_i^\pi = \pi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ($i = 1, \dots, n$) порождают подгруппу $\widetilde{W}^\pi \subset G^\pi$. Группа $\widetilde{W}^\pi$ содержит абелеву нормальную подгруппу D^π , порожденную $(r_i^\pi)^2$ ($i = 1, \dots, n$), такую, что $W(A) \simeq \widetilde{W}^\pi / D^\pi$.

Мы закончим этот параграф доказательством общего факта, частный случай которого упоминался в §3.6. Говорят, что элемент x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является *локально конечным* в $\mathfrak{g}$ -модуле V , если любой вектор $v \in V$ лежит в x -инвариантном конечномерном подпространстве. Заметим, что локально нильпотентные и диагонализированные элементы локально конечны и что (3.8.1) по-прежнему выполняется, если a локально конечен на V и линейная оболочка операторов $(\text{ad } a)^j b$ конечномерна.

Предложение 3.8. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и V — модуль над $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{g}$ порождается множеством F_V всех ад-локально конечных элементов, которые действуют локально конечно на V . Тогда

а) $\mathfrak{g}$ есть линейная оболочка над $\mathbb{C}$ множества F_V . В частности, если $\mathfrak{g}$ порождается множеством F всех ад-локально конечных элементов, то $\mathfrak{g}$ есть оболочка F .

б) Если $\dim \mathfrak{g} < \infty$, то V является $\mathfrak{g}$ -локально конечным (т. е. любой элемент из V лежит в конечномерном $\mathfrak{g}$ -подмодуле модуля V).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}_V$ обозначает $\mathbb{C}$ -оболочку множества F_V , и пусть $a \in F_V$. Используя (3.8.1), мы получаем, что $\mathfrak{g}_V$ инвариантна относительно автоморфизмов $\exp t(\text{ad } a)$. Так как $\lim_{t \rightarrow 0} ((\exp t \text{ ad } a)b - b)/t = [a, b]$, отсюда следует, что $[a, \mathfrak{g}_V] \subset \mathfrak{g}_V$ и а) доказано. Утверждение б) следует из а) и теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта. $\square$

§3.9. Пусть A — симметризуемая обобщенная матрица Картана и $(\cdot | \cdot)$ — стандартная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}(A)$.

Предложение 3.9. Ограничение билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}^*$ инвариантно относительно W .

Доказательство. Поскольку $|r_i(\alpha_i)|^2 = |-\alpha_i|^2 = |\alpha_i|^2 \neq 0$, достаточно проверить, что $(\lambda | \alpha_i) = 0$ влечет за собой $(r_i(\lambda) | \alpha_i) = 0$. Но $r_i(\lambda) = \lambda$ в силу (2.3.5). $\square$

По поводу обратного утверждения см. упр. 3.3.

§3.10. Вернемся к изучению группы Вейля W для алгебры Каца — Мути $\mathfrak{g}(A)$. Мы начнем со следующей технической леммы.

Лемма 3.10. Если α_i — простой корень и $r_{i_1} \dots r_{i_t}(\alpha_i) < 0$, то существует s ($1 \leq s \leq t$), такое, что

$$(3.10.1) \quad r_{i_1} \dots r_{i_s} \dots r_{i_t} r_i = r_{i_1} \dots r_{i_{s-1}} r_{i_{s+1}} \dots r_{i_t}.$$

Доказательство. Положим $\beta_k = r_{i_{k+1}} \dots r_{i_t}(\alpha_i)$ для $k < t$ и $\beta_t = \alpha_i$. Тогда по условию $\beta_0 < 0$; с другой стороны, $\beta_t > 0$. Следовательно, для некоторого s имеем $\beta_{s-1} < 0$, $\beta_s > 0$. Но $\beta_{s-1} = r_{i_s}(\beta_s)$; поэтому по лемме 3.7 $\beta_s = \alpha_{i_s}$, и мы получаем

$$(3.10.2) \quad \alpha_{i_s} = w(\alpha_i), \text{ где } w = r_{i_{s+1}} \dots r_{i_t}.$$

Но

$$(3.10.3) \quad w(\alpha_i) = \alpha_j \quad (w \in W) \Rightarrow w(\alpha_i^\vee) = \alpha_j^\vee.$$

Действительно, $w = \tilde{w}|_{\mathfrak{h}}$ для некоторого $\tilde{w}$ из подгруппы в $\text{Aut } \mathfrak{g}$, порожденной r_i^{ad} ($i = 1, \dots, n$) (см. §3.8). Применяя $\tilde{w}$ к обеим частям равенства $[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] = \mathbb{C}\alpha_i^\vee$, получаем (по лемме 3.8b))

$$\mathbb{C}w(\alpha_i^\vee) = \mathbb{C}\alpha_i^\vee.$$

Так как $w(\alpha_i)(w(\alpha_i^\vee)) = \langle \alpha_i, \alpha_i^\vee \rangle = 2$, мы приходим к равенству $w(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee$.

Теперь из (3.10.2) и (3.10.3) мы можем сделать вывод, что

$$r_i = wr_iw^{-1}.$$

Умножая обе части этого равенства на $r_{i_1} \dots r_{i_{s-1}}$ слева и на $r_{i_{s+1}} \dots r_i$ справа, завершаем доказательство. $\square$

§3.11. Разложение $w = r_{i_1} \dots r_{i_s} \in W$ называется *приведенным*, если s минимально возможное среди всех представлений элемента $w \in W$ в виде произведения элементов r_i . В этом случае s называется *длиной* элемента w и обозначается через $\ell(w)$. Заметим, что $\det_{\mathfrak{h}} r_i = -1$; поэтому

$$(3.11.1) \quad \det_{\mathfrak{h}} w = (-1)^{\ell(w)} \text{ для } w \in W.$$

Важным следствием леммы 3.10 является

ЛЕММА 3.11. Пусть $w = r_{i_1} \dots r_{i_s} \in W$ — приведенное разложение и α_i — простой корень. Тогда

- a) $\ell(wr_i) < \ell(w)$, если и только если $w(\alpha_i) < 0$.
- b) $w(\alpha_i) < 0$.
- c) (Условие замены) Если $\ell(wr_i) < \ell(w)$, то существует s , такое, что $1 \leq s \leq t$ и

$$r_{i_1} r_{i_{s+1}} \dots r_{i_t} = r_{i_{s+1}} \dots r_{i_t} r_i.$$

Доказательство. По лемме 3.10 (примененной к w) $w(\alpha_i) < 0$ влечет за собой $\ell(wr_i) < \ell(w)$. Если теперь $w(\alpha_i) > 0$, то $wr_i(\alpha_i) < 0$ и, следовательно, $\ell(w) = \ell(wr_i^2) < \ell(wr_i)$, что доказывает а); б) немедленно вытекает из а). Наконец, если $\ell(wr_i) < \ell(w)$, то а) влечет за собой $w(\alpha_i) < 0$, и, применяя лемму 3.10 к w , мы выводим условие замены из (3.10.1), умножая его на $(r_{i_1} \dots r_{i_{s-1}})^{-1}$ слева и на r_i справа. $\square$

§3.12. Теперь мы переходим к изучению геометрических свойств действия группы Вейля. Вспомним определение $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}$ из §2.7. Заметим, что $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ инвариантно относительно W , так как $Q^{\vee} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Множество

$$C = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha_i, h \rangle \geq 0 \text{ для } i = 1, \dots, n\}$$

называется *фундаментальной камерой*, множества $w(C)$, $w \in W$, — *камерами*, а их объединение

$$X = \bigcup_{w \in W} w(C)$$

называется *конусом Титса*. Ясно, что имеются также соответствующие дуальные объекты $C^{\vee}$ и $X^{\vee}$ в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. а) Для $h \in C$ группа $W_h = \{w \in W \mid w(h) = h\}$ порождается фундаментальными отражениями, содержащимися в ней.

б) Фундаментальная камера C является фундаментальной областью для действия W на X , т. е. любая орбита $W \cdot h$ элемента $h \in X$ пересекает C ровно в одной точке. В частности, W действует просто транзитивно на множестве камер.

с) $X = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, h \rangle < 0 \text{ лишь для конечного числа } \alpha \in \Delta_+\}$. В частности, X есть выпуклый конус.

д) $C = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid h - w(h) = \sum_i c_i \alpha_i^{\vee}, \text{ где } c_i \geq 0, \text{ для любого } w \in W\}$.

е) Следующие условия эквивалентны:

- (i) $|W| < \infty$;
- (ii) $X = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$;
- (iii) $|\Delta| < \infty$;
- (iv) $|\Delta^{\vee}| < \infty$.

ф) Если $h \in X$, то $|W_h| < \infty$ тогда и только тогда, когда h — внутренняя точка для X .

Доказательство. Пусть $w \in W$ и $w = r_{i_1} \dots r_{i_r}$ — приведенное разложение элемента w . Возьмем $h \in C$ и предположим, что $h' = w(h) \in C$. Мы имеем $\langle \alpha_{i_s}, h \rangle \geq 0$, и поэтому $\langle w(\alpha_{i_s}), h' \rangle \geq 0$. Но по лемме 3.11б) $w(\alpha_{i_s}) < 0$ и, следовательно, $\langle w(\alpha_{i_s}), h' \rangle \leq 0$. Итак, $\langle w(\alpha_{i_s}), h' \rangle = 0$ и $\langle \alpha_{i_s}, h \rangle = 0$. Значит, $r_{i_s}(h) = h$, и для доказательства а) и б) осталось применить индукцию по $\ell(w)$.

Положим $X' = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, h \rangle < 0 \text{ лишь для конечного числа } \alpha \in \Delta_+\}$. Ясно, что $C \subset X'$, и из §3.7 следует, что X' является r_i -инвариантным. Следовательно, $X' \supset X$. Чтобы доказать обратное включение, возьмем $h \in X'$ и положим $M_h = \{\alpha \in \Delta_+ \mid \langle \alpha, h \rangle < 0\}$. По определению $|M_h|$ конечно. Если $M_h \neq \emptyset$, то $\alpha_i \in M_h$ для некоторого i . Но тогда из леммы 3.7 вытекает, что $|M_{r_i(h)}| < |M_h|$. Индукцией по $|M_h|$ завершаем доказательство с).

Включение $\supset$ в d) очевидно. Мы докажем обратное включение с помощью индукции по $s = \ell(w)$. Формула d) при $\ell(w) = 1$ есть определение C . Пусть теперь $\ell(w) > 1$ и $w = r_{i_1} \dots r_{i_s}$. Имеем $h - w(h) = (h - r_{i_1} \dots r_{i_{s-1}}(h)) + r_{i_1} \dots r_{i_{s-1}}(h - r_{i_s}(h))$. Применяем предположение индукции к первому слагаемому и лемму 3.11b) для $\Delta^\vee$ ко второму. Утверждение доказано.

Теперь докажем e). (i) $\Rightarrow$ (ii), поскольку элемент h' из $W \cdot h$, для которого высота разности $h' - h$ максимальна, лежит в C . Чтобы проверить импликацию (ii) $\Rightarrow$ (iii), возьмем точку h , внутреннюю для C . Тогда $\langle \alpha, -h \rangle < 0$ для всех $\alpha \in \Delta_+$, и, следовательно, $|\Delta| < \infty$ в силу c). Далее, (iii) $\Rightarrow$ (i) вследствие

$$(3.12.1) \quad \{w(\alpha) = \alpha \text{ для } w \in W \text{ и всех } \alpha \in \Delta\} \Rightarrow w = 1.$$

Для проверки (3.12.1) заметим, что если приведенное разложение $w = r_{i_1} \dots r_{i_s}$ нетривиально, то из леммы 3.11b) вытекает, что $w(\alpha_{i_s}) < 0$; получаем противоречие. Тот факт, что (iv) эквивалентно (i), проверяется с использованием дуальной системы корней.

Наконец, для доказательства f) мы можем предположить, что $h \in C$. Тогда f) следует из a), если применить доказанную эквивалентность e) (i) и e) (ii) к действию W_h на $\mathfrak{h}/Ch$. $\square$

Заметим, что в силу предложения 3.12b) группа Вейля W действует просто транзитивно на множестве камер, и, значит, стабилизатор внутренней точки камеры тривиален.

§3.13. Напомним, что группа с образующими $r_1, \dots, r_n$ и определяющими соотношениями

$$(3.13.1) \quad r_i^2 = 1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

называется *группой Кокстера*. Здесь m_{ij} — положительные целые числа или ∞ (мы используем соглашение $x^\infty = 1$ для любого x).

Предложение 3.13. Группа W является группой Кокстера, где m_{ij} даются следующей таблицей:

$a_{ij} a_{ji}$	0	1	2	3	≥ 4
m_{ij}	2	3	4	6	∞

Доказательство. Сначала проверим соотношения (3.13.1). Соотношение $r_i^2 = 1$ очевидно. Далее, подпространство $\mathfrak{t} := \mathbb{R}\alpha_i + \mathbb{R}\alpha_j$ инвариантно относительно r_i и r_j , и матрицы r_i и r_j в базисе α_i, α_j пространства $\mathfrak{t}$ имеют вид $\begin{pmatrix} -1 & -a_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{ji} & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрицей $r_i r_j$ в этом базисе является

$$(3.13.2) \quad \begin{pmatrix} -1 + a_{ij} a_{ji} & a_{ij} \\ -a_{ji} & -1 \end{pmatrix},$$

и мы получаем

$$(3.13.3) \quad \det (r_i r_j - \lambda I) = \lambda^2 + (2 - a_{ij} a_{ji}) \lambda + 1.$$

Отсюда выводим, что $r_i r_j$ имеет бесконечный порядок, если $a_{ij} a_{ji} \geq 4$, и порядок, указанный в таблице, в остальных случаях ($\mathfrak{h}^* = \mathfrak{t} \oplus \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = \langle \lambda, \alpha_j^\vee \rangle = 0\}$, если $a_{ij} a_{ji} \neq 4$).

Теперь мы можем сослаться на общий факт, состоящий в том, что из соотношений (3.13.1) и условия замены (см. лемму 3.11c)) следует, что группа, о которой идет речь, есть группа Кокстера (см. Bourbaki [1968], Ch. IV, по. 1.6). Более прозрачный геометрический подход отмечен в упр. 3.10. $\square$

§3.14. Упражнения

3.1. Пусть A — симметризуемая матрица и $A = DB$ — разложение вида (2.3.1). Покажите, что ${}^t A$ тоже симметризуема; более точно, ${}^t A = D^\vee B^\vee$, где $D^\vee = D^{-1}$, $B^\vee = DBD$. Покажите, что соответствующие стандартные формы на $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ (определенные в §2.1) индуцируют друг друга.

3.2. Пусть e, f, h — стандартный базис в $sl_2(\mathbb{C})$. Покажите, что в обертывающей алгебре выполнено соотношение

$$\left[\frac{e^m}{m!}, \frac{f^n}{n!} \right] = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} \frac{f^{n-j}}{(n-j)!} \binom{h-m-n+2j}{j} \frac{e^{m-j}}{(m-j)!}.$$

Выведите отсюда, что если f локально нильпотентен в $sl_2(\mathbb{C})$ -модуле V , то V^e является h -диагонализируемым.

[Докажите это для $m = 1$ индукцией по n , затем используйте индукцию по m .]

3.3. На $\mathfrak{h}$ существует невырожденная симметрическая W -инвариантная билинейная форма, если и только если A симметризуема. Любая такая форма может быть продолжена с $\mathfrak{h}$ до инвариантной невырожденной симметрической билинейной формы на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}(A)$. Эта форма удовлетворяет всем заключениям теоремы 2.2.

3.4. Пусть V — интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль. Покажите, что

$$(\tau_i^\pi)^2(v) = (-1)^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} v \text{ для } v \in V_\lambda.$$

3.5. Множество Δ_+ однозначно определяется следующими свойствами:

- (i) $\Pi \subset \Delta_+ \subset Q_+$; $2\alpha_i \notin \Delta_+$ для $i = 1, \dots, n$;
- (ii) если $\alpha \in \Delta_+$, $\alpha \neq \alpha_i$, то множество $\{\alpha + k\alpha_i; k \in \mathbb{Z}\} \cap \Delta_+$ представляет собой «струну» $\{\alpha - p\alpha_i, \dots, \alpha + q\alpha_i\}$, где $p, q \in \mathbb{Z}_+$ и $p - q = \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle$;
- (iii) если $\alpha \in \Delta_+ \setminus \Pi$, то $\alpha - \alpha_i \in \Delta_+$ для некоторого i .

3.6. Докажите, что $\ell(w) = |\{\alpha \in \Delta_+ | w(\alpha) < 0\}|$.

3.7. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$ — обобщенная матрица Картана ранга 2, и предположим, что $ab \geq 4$. Покажите, что группа Вейля $W(A)$ является бесконечной диэдральной группой. Пусть $ab > 4$; тогда $(x\alpha_1 + y\alpha_2 | x\alpha_1 + y\alpha_2) = bx^2 - abxy + ay^2$ есть W -инвариантная квадратичная форма на $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ и $X^\vee \cup -X^\vee = \{\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* | (\lambda | \lambda) < 0\} \cup \{0\}$.

3.8. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $W = W(A)$ — соответствующая группа Вейля. Покажите, что отображение $r_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $r_2 \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $r_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ индуцирует изоморфизм $\pi : W \rightarrow PGL_2(\mathbb{Z})$.

[Используйте тот факт, что $PSL_2(\mathbb{Z})$ порождается элементарными матрицами $\pi(r_2)\pi(r_1)$ и $\pi(r_1)\pi(r_3)$.]

3.9. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица из упр. 3.8, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}(A)$ и $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — простые корни. Определим стандартную билинейную форму на $\mathfrak{h}$, полагая $(\alpha_i | \alpha_j) = a_{ij}$. Положим $\gamma_1 = -\alpha_1 - \alpha_2$, $\gamma_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$, $\gamma_3 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$. Кроме того, определим отображение $\mu : \mathfrak{h}^* \rightarrow S_2(\mathbb{C})$ (симметрические 2×2 -матрицы) формулой $\mu(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ и действие $PGL_2(\mathbb{Z})$ на $S_2(\mathbb{C})$, полагая $g(S) = gS(g^t g)$. Проверьте, что μ является W -эквивариантным отображением и $(\alpha | \alpha) = -2\det \mu(\alpha)$ для $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Используя предложение 3.12b), (5.10.2) и упр. 3.8, выведите, что квадратичная форма $ax^2 + bxy + cy^2$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $4ac \geq b^2$ и $a \geq 0$, может быть приведена с помощью $GL_2(\mathbb{Z})$ к единственной квадратичной форме, такой, что $a \geq c \geq b \geq 0$.

3.10. В этом упражнении мы кратко обрисовываем геометрическое доказательство предложения 3.13. Пусть W' — группа Кокстера с образующими r_i ($i = 1, \dots, n$) и соотношениями (3.13.1), и пусть $\pi : W' \rightarrow W$ — канонический гомоморфизм. Построим топологическое пространство $U = W' \times C / (\sim)$, где W' снабжается дискретной топологией, а фундаментальная камера C — метрической топологией и $\sim$ есть следующее отношение эквивалентности: $(w_1, x) \sim (w_2, y) \Leftrightarrow \{x = y \text{ и } w_1^{-1}w_2 \text{ лежит в подгруппе } W', \text{ порожденной теми } r_i, \text{ которые оставляют неподвижным } x\}$. Определим действие W' на U формулой $w(w_1, x) = (ww_1, x)$. Корректность определения очевидна. Покажите, что существует единственное непрерывное W' -эквивариантное отображение $\phi : U \rightarrow X$, такое, что $\phi(1, x) = x$ для $x \in C$ (W' действует на X посредством π). Пусть $Y = \{x | x \text{ неподвижно относительно по крайней мере трех отражений из } W'\}$; положим $X' = X \setminus Y$, $U' = U \setminus \phi^{-1}(Y)$. Покажите, что $\phi' : U' \rightarrow X'$ есть накрывающее отображение. Выведите, что ϕ' является гомеоморфизмом и, следовательно, π — изоморфизм.

3.11. Покажите, что для неприводимого $\mathfrak{h}$ -диагонализируемого модуля над $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ все весовые пространства одномерны. Классифицируйте эти модули, а также те из них, которые являются интегрируемыми. Докажите, что каждый конечномерный $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ -модуль вполне приводим.

[Используйте оператор Казимира и упр. 3.2.]

3.12. Пусть $w = r_{i_1} \dots r_{i_l}$ — приведенное разложение $w \in W$. Пусть $\beta \in \Delta_+$ таков, что $w^{-1}(\beta) < 0$; покажите, что последовательность $\beta, r_{i_1}(\beta), r_{i_2}r_{i_1}(\beta), \dots$ содержит единственный простой корень, скажем $\alpha_{j(\beta)}$. Пусть $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; покажите, что

$$\lambda - w(\lambda) = \sum_{\beta: w^{-1}(\beta) < 0} \langle \lambda, \alpha_{j(\beta)}^\vee \rangle \beta.$$

[Используйте тождество $\lambda - w_1 r_i(\lambda) = (\lambda - w_1(\lambda)) + w_1(\lambda - r_i(\lambda))$ и индукцию по l .]

3.13. Покажите, что действие r_i^{ad} на $\mathfrak{g}(A)$ сохраняет каждую инвариантную билинейную форму и коммутирует с инволюцией Шевалле.

3.14. Покажите, что $0 \rightarrow \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{g}'(A) \rightarrow \mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{c} \rightarrow 0$ есть универсальное центральное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{c}$, где A — обобщенная матрица Картана.

[Пусть $\varphi: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{c}$ — эпиморфизм с конечномерным ядром. Тогда $\varphi^{-1}(\mathfrak{c}_i + \mathfrak{f}_i + (\mathfrak{h}'/\mathfrak{c}))$ изоморфна $\tilde{\mathfrak{g}}_i \oplus \tilde{\mathfrak{h}}$, где $\tilde{\mathfrak{g}}_i \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, а $\tilde{\mathfrak{h}}$ коммутативна и вполне приводима на $\mathfrak{g}$. Пусть $\tilde{e}_i, \tilde{\alpha}_i^\vee, \tilde{f}_i \in \tilde{\mathfrak{g}}_i$ — прообразы $e_i, \alpha_i^\vee, f_i$; покажите, что они удовлетворяют соотношениям (1.2.1) и, следовательно, порождают фактор $\mathfrak{g}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)$ по центральному идеалу. Проверьте, что $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма $\mathfrak{g}'$ и центрального идеала из $\tilde{\mathfrak{h}}$.]

3.15. Покажите, что множество внутренних точек конуса X — это $\{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} | \langle \alpha, h \rangle \leq 0 \text{ лишь для конечного числа } \alpha \in \Delta_+\}$.

3.16. Элемент x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *локально конечным*, если $\text{ad } x$ локально конечно на $\mathfrak{g}$. Положим $\mathfrak{g}_{\text{fin}} =$ линейная оболочка $\{x \in \mathfrak{g} | x \text{ локально конечен}\}$. Для $\mathfrak{g}$ -модуля V положим $V_{\text{fin}} = \{v \in V | \dim \sum_{k \geq 0} \mathbb{C} x^k(v) < \infty \text{ для каждого локально конечного элемента } x \text{ из } \mathfrak{g}\}$. Покажите, что $\mathfrak{g}_{\text{fin}}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и V_{fin} есть $\mathfrak{g}$ -подмодуль в V .

3.17. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\text{fin}}$; тогда $\mathfrak{g}$ называется *интегрируемой*. Пусть V есть $\mathfrak{g}$ -модуль, такой, что $V = V_{\text{fin}}$; в этом случае V называется *интегрируемым*. Пусть, далее, G^* — свободная группа с множеством образующих $S := \{x \in \mathfrak{g} | x \text{ локально конечен}\}$.

Для данного интегрируемого представления π алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в V определим представление $I(\pi)$ группы G^* в V , полагая

$$I(\pi)(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \pi(x)^n, \quad x \in S.$$

Пусть N^* — пересечение ядер всех $I(\pi)$, где π пробегает все интегрируемые $\mathfrak{g}$ -модули. Положим $G = G^*/N^*$; обозначим через $\exp x$ образ $x \in S$ при каноническом гомоморфизме $G^* \rightarrow G$. Группа G называется группой, ассоциированной с интегрируемой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Покажите, что если $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, то G есть соответствующая связная односвязная группа Ли и $x \mapsto \exp x$ является экспоненциальным отображением. (Глубокий факт, установленный в работе Peterson — Кас [1983], состоит в том, что приведенное выше определение интегрируемого модуля над алгеброй Каца — Мууди совпадает с данным в §3.6.)

3.18. Докажите, что любая алгебра Каца — Мууди $\mathfrak{g}(A)$ интегрируема. (Как показано в работе Peterson — Кас [1983], ассоциированная группа $G(A)$, построенная в упр. 3.17, является центральным расширением группы, построенной в замечании 3.8.)

3.19. Пусть $\mathfrak{g}$ — интегрируемая алгебра Ли и G — ассоциированная с ней группа. Тогда G действует на пространстве каждого интегрируемого представления V алгебры Ли $\mathfrak{g}$, так что $\exp x$ локально конечен на V для любого x из множества S (определенного в упр. 3.17). Нерешенная задача: пусть V — такой G -модуль, что каждый элемент $\exp t x$ локально конечен на V и представляет собой дифференцируемую функцию по t на любом конечномерном x -инвариантном подпространстве. Покажите, что V может быть «продифференцирован» до интегрируемого $\mathfrak{g}$ -модуля.

3.20. Пусть A — расширенная матрица Картана комплексной связной односвязной¹ алгебраической группы $\overset{\circ}{G}$. Покажите, что группа G , ассоциированная с алгеброй Каца — Мууди $\mathfrak{g}(A)$, является центральным расширением группы $\overset{\circ}{G}(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$.

3.21. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли полиномиальных векторных полей $\sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, таких, что $\sum_i \frac{\partial P_i}{\partial x_i} = \text{const}$. Покажите, что $\mathfrak{g}$ является интегрируемой алгеброй Ли и ассоциированная с ней группа G есть центральное расширение группы бирегулярных автоморфизмов пространства $\mathbb{C}^n$. Покажите, что $\mathfrak{g}$ порождается всеми локально конечными элементами алгебры Ли всех полиномиальных векторных полей.

¹ Полупростой. — Прим. ред.

3.22. Покажите, что группа G^π , описанная в замечании 3.8, зависит, с точностью до изоморфизма, только от $\mathbb{Z}$ -оболочки множества весов представления π . Покажите, что если $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V неприводим, то ядро присоединенного действия $\widetilde{W}^\pi$ на $\mathfrak{g}(A)$ лежит в $\{\pm I_V\}$.

3.23. Пусть q — комплексное число $\neq 0, \pm 1$. Через $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ обозначим ассоциативную алгебру с образующими e, f, a и a^{-1} и определяющими соотношениями

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1, \quad aea^{-1} = q^2e, \quad afa^{-1} = q^{-2}f,$$

$$ef - fe = (a - a^{-1})/(q - q^{-1}).$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$ и V — векторное пространство размерности $(k+1)$ с базисом $v_0, \dots, v_k$. Для $j \in \mathbb{N}$ положим $[j] = (q^j - q^{-j})/(q - q^{-1})$. Покажите, что формулы (мы считаем $v_{-1} = 0, v_{k+1} = 0$) $e(v_i) = \pm[k-i+1]v_{i-1}$, $f(v_i) = [i+1]v_{i+1}$, $a(v_i) = \pm q^{k-2i}v_i$ определяют представление алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ на V . Покажите, что это представление неприводимо, если и только если q не является корнем n -й степени из единицы, где $n \leq k$, и что при этом предположении имеются только два неприводимых $(k+1)$ -мерных $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -модуля. Покажите, что при $q \rightarrow 1$ мы получаем $(k+1)$ -мерное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ (или, скорее, алгебры $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$), описанное в лемме 3.2b).

3.24. Пусть для $s \in \mathbb{Z}$ и $j \in \mathbb{N}$

$$[a; s] = (aq^s - a^{-1}q^{-s})/(q - q^{-1}),$$

$$\left[\begin{smallmatrix} a; s \\ j \end{smallmatrix} \right] = [a; s][a; s-1] \dots [a; s-j+1]/[j]!.$$

Покажите, что в $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ выполняется следующее тождество (которое представляет собой « q -аналог» тождества из упр. 3.2):

$$\left[\frac{e^m}{[m]!}, \frac{f^n}{[n]!} \right] = \sum_{j=1}^{\min(m,n)} \frac{f^{n-j}}{[n-j]!} \left[\begin{smallmatrix} a; -m-n+2j \\ j \end{smallmatrix} \right] \frac{e^{m-j}}{[m-j]!}.$$

3.25. (Открытая проблема.) Классифицируйте все простые $\mathbb{Z}$ -градуированные (конечномерными подпространствами) интегрируемые алгебры Ли.

§3.15. Библиографические замечания и комментарии

Группа Вейля для алгебры Каца — Мууди была введена Кацем [1968 В] и Мууди (Moody [1968]). Изложение §3.6–3.9 соответствует большей частью работе Каца [1968 В]. Важное значение категории интегрируемых модулей было отмечено Френкелем и Кацем (Frenkel — Кас [1980]) и Титсом (Tits [1981]).

Конус Титса был введен Титсом в «симметризуемом» случае. В контексте общих групп, порожденных отражениями, его ввел Винберг [1971] (см. также Looijenga [1980]). Изложение §3.10–3.13 соответствует в основном статье Кас — Peterson [1984 A].

Упражнение 3.2 принадлежит Стейнбергу (Steinberg [1967]) и Бенуасту (Benoist [1967]), упр. 3.8 — Винбергу (см. Пятецкий-Шапиро — Шафаревич [1971]). Упражнение 3.9 взято из работы Feingold — Frenkel [1983], упр. 3.10 — из статьи Винберга [1971]. Упражнение 3.14 было независимо найдено Титсом (Tits [1982]). Упражнения 3.16–3.20 основаны на работах Peterson — Кас [1983], Кас — Peterson [1983] и Кас [1985 B]. Понятие интегрируемой алгебры Ли, по-видимому, новое.

Есть надежда, что можно развить общую теорию интегрируемых алгебр Ли, ассоциированных с ними групп и их интегрируемых представлений (ср. Кас [1985 B], Abe — Takeuchi [1989]). Как показано в работах Peterson — Кас [1983] и Кас — Peterson [1983], [1984 B], [1985 A, B], [1987], в этом направлении можно продвинуться достаточно далеко в случае произвольных алгебр Каца — Мури (некоторые важные предварительные результаты получены в следующих статьях: Кац [1969 B], Moody — Тейо [1972], Marcuson [1975] и Tits [1981], [1982]). Различные аспекты теории групп Каца — Мури можно найти в работах Arabia [1986], Kumar [1985], [1987A], [1988], Kostant — Kumar [1986], [1987], Mathieu [1986C], [1988], [1989A], Slodowy [1985B], Tits [1985], [1987], Bausch — Rousseau [1989] и других.

Алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, построенная в упр. 3.23, является простейшим примером, рассмотренным впервые Кулишом и Решетихиным [1981], «квантованной алгебры Каца — Мури». Такие алгебры введены независимо Дринфельдом (Дринфельд [1985], Drinfeld [1986]) и Джимбо (Jimbo [1985]). Эта новая область, известная как теория квантовых групп, находится в процессе быстрого развития. Упражнение 3.24 принадлежит Кацу (ср. Lusztig [1988]).

Глава 4. Классификация обобщенных матриц Картана

§4.0. Для того чтобы развить теорию систем корней алгебр Каца — Мули, нам необходимо знать некоторые свойства обобщенных матриц Картана. Здесь удобнее работать в несколько более общей ситуации. Если не оговорено противное, мы будем иметь дело с вещественной $n \times n$ -матрицей $A = (a_{ij})$, удовлетворяющей следующим трем условиям:

(m1) A неразложима;

(m2) $a_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$;

(m3) $a_{ij} = 0$ влечет за собой $a_{ji} = 0$.

Заметим, что обобщенная матрица Картана удовлетворяет условиям (m2) и (m3), и мы можем без ограничения общности считать, что (m1) также выполнено.

Мы принимаем следующее обозначение: для вещественного вектора-столбца $u = {}^t(u_1, u_2, \dots)$ будем писать $u > 0$, если все $u_i > 0$, и $u \geq 0$, если все $u_i \geq 0$.

§4.1. Напомним теперь фундаментальный факт из теории линейных неравенств¹:

Система вещественных однородных линейных неравенств $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, t$, имеет решение, если и только если не существует нетривиальной линейной зависимости между λ_i с неотрицательными коэффициентами.

Мы будем использовать несколько иную форму этого утверждения.

ЛЕММА 4.1. Если $A = (a_{ij})$ — произвольная вещественная $m \times s$ -матрица, для которой не существует $u \geq 0$, $u \neq 0$, такого, что $({}^tA)u \geq 0$, то существует $v > 0$, удовлетворяющий условию $Av < 0$.

Доказательство. Положим $\lambda_i = \sum_j a_{ij}x_j$, где x_j образуют стандартный базис пространства, дуального к $\mathbb{R}^s$. Тогда эта лемма является следствием приведенного выше «фундаментального факта» для системы неравенств

$$\begin{cases} -\lambda_i > 0 & (i = 1, \dots, m), \\ x_i > 0 & (i = 1, \dots, s). \end{cases}$$

□

¹ См., например, теорему 4.1 в книге: С. Н. Черников. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968. — Прим. ред.

§4.2. Нам понадобится еще одна лемма.

ЛЕММА 4.2. Если A удовлетворяет (m1)–(m3), то из условий $Au \geq 0$, $u \geq 0$ следует, что либо $u > 0$, либо $u = 0$.

Доказательство. Пусть $Au \geq 0$, $u \geq 0$, $u \neq 0$. Переупорядочим индексы так, чтобы выполнялись соотношения $u_i = 0$ для $i \leq s$ и $u_i > 0$ для $i > s$. Тогда, согласно (m2) и (m3), $Au \geq 0$ влечет за собой $a_{ij} = a_{ji} = 0$ для $i \leq s$ и $j > s$, что противоречит (m1). $\square$

§4.3. Теперь мы можем доказать центральный результат этой главы.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть A — вещественная $n \times n$ -матрица, удовлетворяющая (m1), (m2) и (m3). Тогда для A и ${}^tA$ выполняется одно и только одно из следующих трех условий:

(Fin) $\det A \neq 0$; существует $u > 0$, такой, что $Au > 0$; $Au \geq 0$ влечет за собой $v > 0$ или $v = 0$;

(Aff) $\text{corank } A = 1$; существует $u > 0$, такой, что $Au = 0$; $Au \geq 0$ влечет за собой $Au = 0$;

(Ind) существует $u > 0$, такой, что $Au < 0$; $Au \geq 0$, $v \geq 0$ влекут за собой $v = 0$.

Доказательство. Заменяя v на $-v$, мы получим, что в случаях (Fin) и (Aff) не существует $v \geq 0$, такого, что $Av \leq 0$ и $Av \neq 0$. Поэтому каждое из условий (Fin) и (Aff) несовместимо с (Ind). Поскольку $\text{rank } A$ различен в случаях (Fin) и (Aff), эти условия также исключают друг друга. Теперь мы покажем, что каждая матрица A вместе с ${}^tA$ относится к типу (Fin), (Aff) или (Ind).

Рассмотрим выпуклый конус

$$K_A = \{u \mid Au \geq 0\}.$$

По лемме 4.2 конус K_A может пересекать границу конуса $\{u \mid u \geq 0\}$ только в начале координат; поэтому

$$K_A \cap \{u \mid u \geq 0\} \subset \{u \mid u > 0\} \cup \{0\}.$$

Следовательно, свойство

$$(4.3.1) \quad K_A \cap \{u \mid u \geq 0\} \neq \{0\}$$

может выполняться только в двух случаях:

1) $K_A \subset \{u \mid u > 0\} \cup \{0\}$ или

2) $K_A = \{u \mid Au = 0\}$ есть одномерное подпространство.

Теперь условие 1) эквивалентно (Fin); действительно, $\det A \neq 0$, поскольку K_A не содержит одномерного подпространства. Ясно, что 2) эквивалентно (Aff). Мы доказали также, что из (4.3.1) следует, что не существует $u \geq 0$, для которого $Au \leq 0$, $Au \neq 0$. Из леммы 4.1 вытекает, что если (4.3.1) выполнено, то обе матрицы A и ${}^tA$ относятся к типу (Fin) или (Aff). Если (4.3.1) не выполняется, то A и ${}^tA$ принадлежат типу (Ind) снова в силу леммы 4.1. $\square$

Имея в виду случаи (Fin), (Aff) или (Ind), мы будем говорить, что A относится к *конечному, аффинному или неопределенному типу* соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть A — матрица, удовлетворяющая условиям (m1)–(m3). Тогда A относится к конечному (соответственно аффинному или неопределенному) типу, если и только если существует $\alpha > 0$, такой, что $A\alpha > 0$ (соответственно $= 0$ или < 0).

§4.4. Мы продолжаем исследование свойств матриц конечного и аффинного типов. Напомним, что матрица вида $(a_{ij})_{i,j \in S}$, где $S \subset \{1, \dots, n\}$, называется *главной подматрицей* матрицы $A = (a_{ij})$; мы будем обозначать ее A_S . Определитель главной подматрицы называется *главным минором*.

ЛЕММА 4.4. Если A — матрица конечного или аффинного типа, то любая ее собственная главная подматрица разлагается в прямую сумму матриц конечного типа.

Доказательство. Пусть $S \subset \{1, \dots, n\}$ и A_S — соответствующая главная подматрица. Для вектора u определим u_S таким же образом. Теперь, если существует $u > 0$, такой, что $Au \geq 0$, то $A_S u_S \geq 0$ и $= 0$, только если $a_{ij} = 0$ для $i \in S$, $j \notin S$. Последний случай невозможен, так как A неразложима. Теперь лемма следует из теоремы 4.3. $\square$

§4.5. **ЛЕММА 4.5.** Симметрическая матрица A , удовлетворяющая (m1)–(m3), относится к конечному (соответственно аффинному) типу, если и только если она положительно определена (соответственно положительно полуопределена и имеет ранг $n - 1$).

Доказательство. Если A — положительно полуопределенная матрица, то она относится к конечному или аффинному типу, так как в противном случае существует $u > 0$, такой, что $Au < 0$, и поэтому ${}^tAu < 0$. Случаи (Fin) и (Aff) различаются с помощью ранга.

Пусть теперь A конечного или аффинного типа. Тогда существует $u > 0$, такой, что $Au \geq 0$. Поэтому для $\lambda > 0$ имеем $(A + \lambda I)u > 0$ и, следовательно, $A + \lambda I$ — матрица конечного типа по теореме 4.3. Таким образом, $\det(A + \lambda I) \neq 0$ для всех $\lambda > 0$ и все собственные значения A неотрицательны. $\square$

§4.6. ЛЕММА 4.6. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица конечного или аффинного типа, такая, что $a_{ii} = 2$ и $a_{ij}a_{ji} = 0$ или ≥ 1 . Тогда A симметризуема. Кроме того, если

(4.6.1)

$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_s i_1} \neq 0$ для некоторых различных $i_1, \dots, i_s$ при $s \geq 3$,

то A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -u_1 & 0 & -u_n^{-1} \\ -u_1^{-1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -u_{n-1} \\ -u_n & 0 & -u_{n-1}^{-1} & 2 \end{pmatrix},$$

где $u_1, \dots, u_n$ — некоторые положительные числа, такие, что $u_1 \dots u_n = 1$.

Доказательство. Ясно, что второе утверждение влечет за собой первое (ср. упр. 2.1). Предположим теперь, что (4.6.1) выполнено. Беря наименьшее возможное s в (4.6.1), мы увидим, что существует главная подматрица B в A вида

$$\begin{pmatrix} 2 & -b_1 & 0 & -b'_s \\ -b'_1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -b_{s-1} \\ -b_s & 0 & -b'_{s-1} & 2 \end{pmatrix}.$$

По лемме 4.4 B относится к конечному или аффинному типу, поэтому по теореме 4.3 существует $u > 0$, такой, что $Bu \geq 0$. Заменяя B на матрицу $(\text{diag } u)^{-1} B (\text{diag } u)$, мы можем считать, что ${}^t u = (1, \dots, 1)$. Но тогда из неравенства $Bu \geq 0$ следует, что сумма элементов матрицы B неотрицательна:

$$(4.6.2) \quad 2s - \sum_{i=1}^s (b_i + b'_i) \geq 0.$$

Поскольку $b_i b'_i \geq 1$, имеем $b_i + b'_i \geq 2$; следовательно, в силу (4.6.2) получаем $b_i + b'_i = 2$ и, значит, $b_i = b'_i = 1$ для всех i . Так как в этом случае $\det B = 0$, то из лемм 4.4 и 4.5 вытекает, что $B = A$. $\square$

§4.7. Мы переходим к классификации всех обобщенных матриц Картана конечного и аффинного типов. Для этого удобно ввести так называемые диаграммы Дынкина. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — обобщенная матрица Картана. Мы сопоставим ей граф $S(A)$, называемый *диаграммой Дынкина* для A , следующим образом. Если $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ и $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$, то вершины i и j соединены $|a_{ij}|$ линиями и эти линии снабжаются стрелкой, направленной к i , если $|a_{ij}| > 1$. Если $a_{ij}a_{ji} > 4$, вершины i и j соединяются жирной чертой, снабженной упорядоченной парой целых чисел $|a_{ij}|, |a_{ji}|$.

Ясно, что A неразложима в том и только том случае, когда граф $S(A)$ связан. Заметим также, что A определяется диаграммой Дынкина $S(A)$ и нумерацией ее вершин. Мы будем говорить, что $S(A)$ относится к конечному, аффинному или неопределенному типу, если таковой является A .

Суммируем теперь результаты, полученные выше, для обобщенных матриц Картана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Пусть A — неразложимая обобщенная матрица Картана.

- A — матрица конечного типа, если и только если все ее главные миноры положительны.
- A — матрица аффинного типа, если и только если все ее собственные главные миноры положительны и $\det A = 0$.
- Если A конечного или аффинного типа, то любая собственная поддиаграмма из $S(A)$ представляется в виде объединения (связных) диаграмм Дынкина конечного типа.
- Если A конечного типа, то $S(A)$ не содержит циклов. Если A аффинного типа и $S(A)$ содержит цикл, то $S(A)$ представляет собой цикл $A_i^{(1)}$ из табл. Aff 1.
- A — матрица аффинного типа, если и только если существует $\delta > 0$, такой, что $A\delta = 0$; вектор δ определен однозначно с точностью до постоянного сомножителя.

Доказательство. Чтобы доказать а) и б), заметим, что (по лемме 4.6) если A конечного или аффинного типа, то она симметризуема, т. е. существует диагональная матрица D с положительными элементами на диагонали, такая, что DA — симметрическая матрица (см. §2.3). Теперь а) и б) следуют из леммы 4.5, в) — из леммы 4.4, д) — из леммы 4.6, е) — из теоремы 4.3. $\square$

§4.8. Теперь мы можем перечислить все обобщенные матрицы Картана конечного и аффинного типов.

ТЕОРЕМА 4.8. а) Диаграммы Дынкина всех обобщенных матриц Картана конечного типа перечислены в табл. Fin.

б) Диаграммы Дынкина всех обобщенных матриц Картана аффинного типа перечислены в табл. Aff 1–3 (все они имеют $\ell + 1$ вершин).

с) Числовые метки в табл. Aff 1–3 являются координатами единственного вектора $\delta = {}^t(a_0, a_1, \dots, a_\ell)$, такого, что $A\delta = 0$ и a_i — положительные взаимно простые целые числа.

Доказательство. Сначала мы докажем с). Заметим, что $A\delta = 0$ означает $2a_i = \sum_j m_{ij} a_j$ для всех i , где сумма берется по тем j , которые соединены с i , и если число линий, соединяющих i и j , равно $s > 1$ и стрелка направлена к i , то $m_{ij} = s$; в противном случае $m_{ij} = 1$. Теперь с) доказывается проверкой один за другим всех случаев.

Из с) и предложения 4.7е) следует, что все диаграммы в табл. Aff 1–3 аффинного типа. Поскольку все диаграммы из таблицы Fin являются поддиаграммами диаграмм из табл. Aff 1–3, из предложения 4.7с) выводим, что все диаграммы в табл. Fin конечного типа.

Осталось показать, что если A — матрица конечного (соответственно аффинного) типа, то $S(A)$ встречается в табл. Fin (соответственно Aff). Это легкое упражнение. Мы установим его индукцией по n . Прежде всего из условия $\det A \geq 0$ непосредственно получаем:

(4.8.1) диаграммами конечного типа ранга 2 являются только A_2, C_2 и G_2 ; диаграммами аффинного типа ранга 2 являются только $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$;

(4.8.2) диаграммами конечного типа ранга 3 являются только A_3, B_3, C_3 ; диаграммами аффинного типа ранга 3 являются только $A_2^{(1)}, C_2^{(1)}, G_2^{(1)}, D_3^{(2)}, A_4^{(2)}, D_4^{(3)}$.

Кроме этого, в силу предложения 4.7д) имеем

(4.8.3) если $S(A)$ содержит цикл, то $S(A) = A_\ell^{(1)}$.

Из предложения 4.7 и предположения индукции получаем:

(4.8.4) любая собственная связная поддиаграмма диаграммы $S(A)$ встречается в табл. Fin.

Пусть теперь $S(A)$ — диаграмма конечного типа. Тогда она не встречается в таблицах Aff 1–3, не имеет циклов в силу (4.8.3), каждая ее разветвленная вершина имеет тип D_4 в силу (4.8.2) и (4.8.4) и из (4.8.4) следует, что она имеет не более одной разветвленной вершины. Снова применяя (4.8.4), получим, что если $S(A)$ имеет разветвленную вершину, то она совпадает с D_ℓ, E_6, E_7 или E_8 . Аналогично мы проверяем, что если $S(A)$ не является простым графом (т. е. имеет кратные ребра), то она совпадает с B_ℓ, C_ℓ, F_4 или G_2 . Диаграмма, являющаяся простым графом без циклов и разветвленных вершин, есть A_ℓ .

Пусть $S(A)$ — диаграмма аффинного типа. Благодаря (4.8.3) мы можем считать, что $S(A)$ не имеет циклов. В силу (4.8.4) $S(A)$ получается из диаграммы табл. Fin присоединением к ней одной вершины таким образом, чтобы любая ее поддиаграмма содержалась снова в

табл. Fin. Используя (4.8.1) и (4.8.2), нетрудно увидеть, что таким способом могут получиться только диаграммы из табл. Aff 1–3. $\square$

Зафиксируем раз и навсегда нумерацию вершин диаграмм обобщенных матриц Картана A в приведенных ниже таблицах следующим образом. В табл. Fin вершины нумеруются символами $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$. Каждая диаграмма $X_\ell^{(1)}$ в табл. Aff 1 получается из диаграммы X_ℓ добавлением одной вершины, которую мы занумеруем символом α_0 , сохраняя нумерацию остальных вершин, как в табл. Fin.

ТАБЛИЦА Fin

$$A_\ell \quad \begin{array}{c} \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \qquad \qquad \alpha_{\ell-1} \quad \alpha_\ell \end{array} \quad (\ell + 1)$$

$$B_\ell \quad \begin{array}{c} \circ - \circ - \dots - \circ \Rightarrow \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \qquad \qquad \alpha_{\ell-1} \quad \alpha_\ell \end{array} \quad (2)$$

$$C_\ell \quad \begin{array}{c} \circ - \circ - \dots - \circ \Leftarrow \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \qquad \qquad \alpha_{\ell-1} \quad \alpha_\ell \end{array} \quad (2)$$

$$D_\ell \quad \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad \circ^{\alpha_\ell} \\ \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \qquad \qquad \alpha_{\ell-2} \quad \alpha_{\ell-1} \end{array} \quad (4)$$

$$E_6 \quad \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad \circ^{\alpha_6} \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \end{array} \quad (3)$$

$$E_7 \quad \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad \circ^{\alpha_7} \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \end{array} \quad (2)$$

$$E_8 \quad \begin{array}{c} \qquad \qquad \qquad \circ^{\alpha_8} \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \end{array} \quad (1)$$

$$F_4 \quad \begin{array}{c} \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \end{array} \quad (1)$$

$$G_2 \quad \begin{array}{c} \circ \Rightarrow \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array} \quad (1)$$

ТАБЛИЦА Aff 1

$A_1^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ \\ 1 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \circ \\ 1 \end{array}$
$A_\ell^{(1)} (\ell \geq 2)$	$\begin{array}{c} \circ^1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\ 1 \quad 1 \quad \quad \quad 1 \quad 1 \end{array}$
$B_\ell^{(1)} (\ell \geq 3)$	$\begin{array}{c} \circ^1 \\ \\ \circ - \circ - \dots - \circ \Rightarrow \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad 2 \end{array}$
$C_\ell^{(1)} (\ell \geq 2)$	$\begin{array}{c} \circ \Rightarrow \circ - \dots - \circ \Leftarrow \circ \\ 1 \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$D_\ell^{(1)} (\ell \geq 4)$	$\begin{array}{c} \circ^1 \qquad \qquad \circ^1 \\ \qquad \qquad \\ \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$G_2^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ - \circ \Rightarrow \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array}$
$F_4^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ - \circ - \circ \Rightarrow \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array}$
$E_6^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ^1 \\ \\ \circ^2 \\ \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$E_7^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ^2 \\ \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \end{array}$
$E_8^{(1)}$	$\begin{array}{c} \circ^3 \\ \\ \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 4 \quad 2 \end{array}$

Вершины диаграмм в таблицах Aff 2 и Aff 3 нумеруются символами $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell$. В скобках в таблице Fin стоит $\det A$. Числовые отметки в табл. Aff — это коэффициенты линейной зависимости столбцов матрицы A .

ТАБЛИЦА АЯ 2

$A_2^{(2)}$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_1 \end{smallmatrix}$
$A_{2\ell}^{(2)} (\ell \geq 2)$	$\begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} - \dots - \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_{\ell-1} \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_\ell \end{smallmatrix}$
$A_{2\ell-1}^{(2)} (\ell \geq 3)$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} \alpha_0 \\ \circ \\ \alpha_2 \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_3 \end{smallmatrix} - \dots - \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_{\ell-1} \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_\ell \end{smallmatrix}$
$D_{\ell+1}^{(2)} (\ell \geq 2)$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} - \dots - \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_{\ell-1} \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_\ell \end{smallmatrix}$
$E_6^{(2)}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 3 \\ \circ \\ \alpha_2 \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_3 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_4 \end{smallmatrix}$

ТАБЛИЦА АЯ 3

$D_4^{(3)}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_0 \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ \circ \\ \alpha_1 \end{smallmatrix} \Leftrightarrow \begin{smallmatrix} 1 \\ \circ \\ \alpha_2 \end{smallmatrix}$

§4.9. Мы закончим эту главу следующей характеристикой алгебр Каца — Мули, соответствующих обобщенным матрицам Картана конечного типа (ср. предложение 3.12e)).

Предложение 4.9. Пусть A — неразложимая обобщенная матрица Картана. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) A — обобщенная матрица Картана конечного типа;
- (ii) A — симметризуема и билинейная форма $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{h}_A}$ является положительно определенной;
- (iii) $|W| < \infty$;
- (iv) $|\Delta| < \infty$;
- (v) $\mathfrak{g}(A)$ — простая конечномерная алгебра Ли;
- (vi) существует $\alpha \in \Delta_+$, такой, что $\alpha + \alpha_i \notin \Delta$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. По лемме 4.6 и предложению 4.7 билинейная форма $(\cdot | \cdot)_{\mathfrak{h}_A}$ положительно определена, если A конечного типа; тем самым (i) $\Rightarrow$ (ii). Если (ii) выполнено, то в силу предложения 3.9 группа W содержится в ортогональной группе $O((\cdot | \cdot))$ и поэтому компактна. Поскольку W сохраняет решетку Q , она дискретна. Следовательно,

$|W| < \infty$, что доказывает импликацию (ii) $\Rightarrow$ (iii). Импликация (iii) $\Rightarrow$ (iv) следует из предложения 3.12e); тот факт, что (iv) $\Rightarrow$ (v), вытекает из предложения 1.7a), а в справедливости (v) $\Rightarrow$ (vi) мы убеждаемся, взяв в качестве α корень максимальной высоты. Наконец, пусть $\alpha + \alpha_i \notin \Delta$ для всех i . Следствие 3.6a) влечет за собой неравенство $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ для всех i . Но тогда из теоремы 4.3 следует, что A — матрица конечного или аффинного типа, и в последнем случае $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ для всех i . Но в этом случае $\alpha - \alpha_i \in \Delta_+$ для некоторого i по лемме 1.5. Таким образом, если A аффинного типа, из предложения 3.6b) вытекает, что $\alpha + \alpha_i \in \Delta_+$, — противоречие. Это доказывает последнюю импликацию (vi) $\Rightarrow$ (i). $\square$

Замечание 4.9. Элемент конечной системы корней Δ , удовлетворяющий условию (vi) предложения 4.9, называется *старшим* корнем. Легко видеть, что существует только один такой корень (ср. предложение 6.4 в гл. 6); он задается формулой

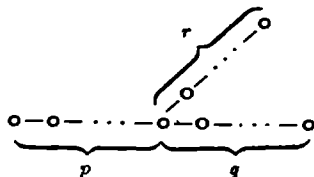
$$\theta = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i,$$

где a_i — отметки расширенной диаграммы Дынкина из табл. Aff 1.

§4.10. Упражнения

4.1. Говорят, что неразложимая обобщенная матрица Картана A является матрицей строго гиперболического типа (соответственно гиперболического типа), если она — матрица неопределенного типа и любая связная собственная поддиаграмма диаграммы $S(A)$ имеет конечный (соответственно конечный или аффинный) тип. Покажите, что $\begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$, где a и b — положительные целые числа, — матрица конечного (соответственно аффинного или строго гиперболического) типа, если и только если $ab \leq 3$ (соответственно $ab = 4$ или $ab > 4$). Покажите, что существует только конечное число гиперболических матриц порядка ≥ 3 и что порядок строго гиперболических (соответственно гиперболических) матриц не превосходит 5 (соответственно 10). (Обратите внимание на отличие от гл. 5, где мы предполагаем, что гиперболические матрицы симметризуемы.)

4.2. Пусть A — матрица типа $T_{p,q,r}$ ($p \geq q \geq r$), т. е. пусть ее диаграмма Дынкина имеет вид



Положим $c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Тогда A конечного (соответственно аффинного или неопределенного) типа, если и только если $c > 1$ (соответственно $c = 1$, $c < 1$). Покажите, что при $c < 1$ матрица A имеет сигнатуру $(++ \dots + -)$. Проверьте, что она гиперболическая, если и только если $(p, q, r) = (4, 3, 3)$, или $(5, 4, 2)$, или $(7, 3, 2)$. Покажите, что $\det A = pq + pr + qr - pqr$.

[Чтобы доказать утверждение о сигнатуре, удалите точку ветвления.]

4.3. Введем следующие диаграммы с n вершинами ($n \geq 5$):

$$E_n (= T_{n-3,3,2}) \quad \circ - \circ - \dots - \circ - \overset{\circ}{\underset{|}{\circ}} - \circ - \circ$$

$$AE_n \quad \circ - \circ - \dots - \circ - \overset{\circ}{\underset{|}{\circ}} - \circ - \circ$$

$$BE_n \quad \circ \Leftarrow \circ - \dots - \circ - \overset{\circ}{\underset{|}{\circ}} - \circ - \circ$$

$$CE_n \quad \circ \Rightarrow \circ - \dots - \circ - \overset{\circ}{\underset{|}{\circ}} - \circ - \circ$$

$$DE_n \quad \circ - \overset{\circ}{\underset{|}{\circ}} - \dots - \circ - \overset{\circ}{\underset{|}{\circ}} - \circ - \circ$$

Покажите, что E_{10} , BE_{10} , CE_{10} и DE_{10} — это все гиперболические матрицы ранга 10. Покажите, что гиперболическая матрица ранга 7, 8 или 9 совпадает с одной из перечисленных: $T_{4,3,3}$, $T_{5,4,2}$, AE_n , BE_n , CE_n , DE_n ($n = 7, 8$ или 9).

4.4. Классифицируйте все (строго) гиперболические матрицы.

4.5. Покажите, что E_{10} — единственная симметрическая гиперболическая матрица с определителем -1 . Покажите, что $\text{diag}(1/2, 1, \dots, 1)(BE_{10})$ — целочисленная симметрическая матрица с определителем -1 .

4.6. Покажите, что если A симметризуемая и гиперболическая, то соответствующая «симметризованная» матрица имеет сигнатуру $(++ \dots + -)$.

4.7. Пусть A — строго гиперболическая матрица. Покажите, что группа $\text{Aut } X$ всех линейных автоморфизмов конуса Титса X действует с компактной фундаментальной областью.

4.8. Пусть A — гиперболическая матрица. Покажите, что если она симметризуема, то X линейно изоморфен верхней полё конуса над единичным шаром. Покажите, что, наоборот, если A — гиперболическая матрица порядка 3, такая, что $\text{Aut } X$ действует транзитивно на множестве внутренних точек X , то она симметризуема.

4.9. Покажите, что вещественный конус Титса X для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ представляет собой пример конуса в $\mathbb{R}^3$, такого, что

$\text{Aut } X$ имеет компактную фундаментальную область, но действует не транзитивно на множестве внутренних точек из X .

4.10. Используя упр. 1.4, покажите, что если A — неразложимая обобщенная матрица Картана, которая не содержится в таблицах Aff, то алгебра Ли $\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{c}$ проста.

4.11. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица. Положим $t_k = \sum_i a_{ik} c_i$, где c_k — ненулевые числа. Проверьте, что

$$\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k = \sum_k \frac{t_k x_k^2}{c_k} - \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_i c_k a_{ik} \left(\frac{x_i}{c_i} - \frac{x_k}{c_k} \right)^2.$$

Предположим, что $a_{ij} \leq 0$ для $i \neq j$. Выведите отсюда, что если существуют положительные числа $c_1, \dots, c_n$, такие, что $t_k = 0$ ($k = 1, \dots, n$), то квадратичная форма $\sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k$ является положи-

тельно полуопределенной. Используйте это для доказательства предложения 4.7е). Установите также, что эта квадратичная форма с неразложимой матрицей A положительно определена, если и только если не существует $c_1 > 0, \dots, c_n > 0$, таких, что $t_k \leq 0$ ($k = 1, \dots, n$).

4.12. Пусть S' и S'' — аффинные диаграммы Дынкина, а A — обобщенная матрица Картана с диаграммой Дынкина

$$S(A) = \boxed{S'} - \circ - \boxed{S''}.$$

Покажите, что $\det A = 0$.

4.13. Покажите, что неразложимая обобщенная матрица Картана аффинна, если и только если она вырождена и все ее главные миноры неотрицательны.

4.14. Покажите, что приведенный ниже список исчерпывает все связанные диаграммы Дынкина обобщенных матриц Картана бесконечного порядка, таких, что любой главный минор конечного порядка положителен.

$$A_\infty \quad \cdots - \circ - \circ - \circ - \cdots$$

$$A_{+\infty} \quad \circ - \circ - \circ - \cdots$$

$$B_\infty \quad \circ \Leftarrow \circ - \circ - \circ - \cdots$$

$$C_\infty \quad \circ \Rightarrow \circ - \circ - \circ - \cdots$$

$$D_\infty \quad \circ - \overset{\circ}{\underset{\circ}{\circ}} - \circ - \circ - \cdots$$

§4.11. Библиографические замечания и комментарии

Теорема 4.3 принадлежит Винбергу [1971], так же как большинство результатов §4.4–4.7. Список аффинных диаграмм появился у Каца [1967] и Муди (Moody [1967]). Обозначения естественно возникают в контексте теории автоморфизмов конечного порядка (Кац [1969 A]), в чем мы убедимся в гл. 8.

Упражнения 4.8 и 4.9 взяты из работы Винберга и Каца [1967], упр. 4.11 — из Bourbaki [1968]. Остальные упражнения довольно стандартны.

Глава 5. Вещественные и мнимые корни

§5.0. В этой главе мы даем точное описание системы корней Δ алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$. Нашим основным инструментом является понятие мнимого корня, которое не имеет аналога в конечномерной теории. В качестве приложения мы выясним структуру групп автоморфизмов целочисленных унимодулярных лоренцевых решеток размерности ≤ 10 .

§5.1. Корень $\alpha \in \Delta$ называется *вещественным*, если существует $w \in W$, такой, что $w(\alpha)$ является простым корнем. Обозначим через Δ^{re} и Δ_+^{re} множества всех вещественных и положительных вещественных корней соответственно.

Пусть $\alpha \in \Delta^{re}$; тогда $\alpha = w(\alpha_i)$ для некоторых $\alpha_i \in \Pi$, $w \in W$. Определим *дуальный* (вещественный) *корень* $\alpha^\vee \in \Delta^{\vee re}$, полагая $\alpha^\vee = w(\alpha_i^\vee)$. Это определение не зависит от выбора представления $\alpha = w(\alpha_i)$. Действительно, мы должны показать, что равенство $u(\alpha_i) = \alpha_j$ влечет за собой $u(\alpha_i^\vee) = \alpha_j^\vee$ для $u \in W$. Но это совпадает с (3.10.3). Таким образом, мы имеем каноническую W -эквивариантную биекцию $\Delta^{re} \rightarrow \Delta^{\vee re}$. Индукцией по $ht \alpha$ легко показать, используя предложение 5.1e), приведенное ниже, что $\alpha > 0$, если и только если $\alpha^\vee > 0$.

Определим отражение r_α относительно $\alpha \in \Delta^{re}$ формулой

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Поскольку $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, это действительно отражение, а так как $r_\alpha = w\tau_i w^{-1}$ при $\alpha = w(\alpha_i)$, то оно лежит в W . Заметим, что r_{α_i} совпадает с фундаментальным отражением τ_i .

Следующее предложение показывает, что вещественные корни обладают всеми «классическими» свойствами.

Предложение 5.1. Пусть α — вещественный корень алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$. Тогда

- a) $\text{mult } \alpha = 1$.
- b) $k\alpha$ является корнем, если и только если $k = \pm 1$.
- c) Если $\beta \in \Delta$, то существуют неотрицательные целые числа p и q , связанные соотношением

$$p - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle,$$

такие, что $\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, если и только если $-p \leq k \leq q$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) Предположим, что A симметризуема, и пусть $(\cdot | \cdot)$ — стандартная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}(A)$. Тогда

- (i) $(\alpha | \alpha) > 0$;
- (ii) $\alpha^\vee = 2\nu^{-1}(\alpha)/(\alpha | \alpha)$;
- (iii) если $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, то $k_i(\alpha_i | \alpha_i) \in (\alpha | \alpha)\mathbb{Z}$.

e) При условии что $\pm\alpha \notin \Pi$, существует i , такой, что

$$|\text{ht } r_i(\alpha)| < |\text{ht } \alpha|.$$

Доказательство. Ясно, что все утверждения a)–d) справедливы, если α — простой корень: a) выполнено по определению, b) — в силу (1.3.3), c) следует из предложения 3.6b), а d) совпадает с (2.3.3) и (2.3.5). Теперь a), b) и c) вытекают из предложения 3.7b), в то время как d)(i) и (ii) — из предложения 3.9. Утверждение d)(iii) следует из того факта, что $\alpha^\vee \in \sum \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$, и формулы

$$(5.1.1) \quad \alpha^\vee = \sum_i \frac{(\alpha_i | \alpha_i)}{(\alpha | \alpha)} k_i \alpha_i^\vee.$$

Наконец, для доказательства e) предположим противное; мы можем считать, что $\alpha > 0$. Но тогда $-\alpha \in C^\vee$, и по предложению 3.12d) для дуальной системы корней $-\alpha + w(\alpha) \geq 0$ при любом $w \in W$. Беря w , такой, что $w(\alpha) \in \Pi$, мы приходим к противоречию. $\square$

Следующая лемма понадобится нам впоследствии.

ЛЕММА 5.1. Предположим, что A симметризуема. Тогда множество всех $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in Q$, таких, что

$$(5.1.2) \quad k_i(\alpha_i | \alpha_i) \in (\alpha | \alpha)\mathbb{Z} \quad \text{для всех } i,$$

является W -инвариантным.

Доказательство. Достаточно проверить, что $r_i(\alpha)$ снова удовлетворяет (5.1.2), т. е. $(k_i - (\alpha | \alpha_i^\vee))(\alpha_i | \alpha_i) \in (\alpha | \alpha)\mathbb{Z}$. Это эквивалентно тому, что

$$(5.1.3) \quad 2(\alpha | \alpha_i) \in (\alpha | \alpha)\mathbb{Z},$$

а последнее вытекает из (5.1.2):

$$2(\alpha | \alpha_i) = \sum_j \frac{2(\alpha_j | \alpha_j)}{(\alpha_j | \alpha_j)} k_j (\alpha_j | \alpha_j) = \sum_j a_{ji} k_j (\alpha_j | \alpha_j) \in (\alpha | \alpha)\mathbb{Z}.$$

$\square$

Пусть A — симметризуемая обобщенная матрица Картана, а $(\cdot|\cdot)$ — стандартная инвариантная билинейная форма (см. §2.3). Тогда для данного вещественного корня α имеем $(\alpha|\alpha) = (\alpha_i|\alpha_i)$, где α_i — один из простых корней. Назовем α *коротким* (соответственно *длинным*) вещественным корнем, если $(\alpha|\alpha) = \min_i (\alpha_i|\alpha_i)$ (соответственно $= \max_i (\alpha_i|\alpha_i)$). Эти определения не зависят от выбора стандартной формы. Заметим, что если A — симметрическая матрица, то все простые корни и, следовательно, все вещественные корни имеют один и тот же квадрат длины. Если она не симметрическая и в $S(A)$ имеется m стрелок, направленных в одну сторону, то имеется ровно $m+1$ простых корней с различными квадратами длин, поскольку стрелка в $S(A)$ направлена к более короткому простому корню. Следовательно, если A — несимметрическая матрица из табл. Fin, то каждый корень либо короткий, либо длинный. Кроме того, если она — несимметрическая матрица из табл. Aff и ее тип — не $A_{2l}^{(2)}$ при $l > 1$, то любой вещественный корень также либо короткий, либо длинный; для типа $A_{2l}^{(2)}$ при $l > 1$ имеются вещественные корни трех различных длин.

В этой главе мы нормализуем $(\cdot|\cdot)$ таким образом, чтобы $(\alpha_i|\alpha_i)$ были взаимно простыми положительными целыми числами для каждой связанной компоненты $S(A)$. Например, если A симметрическая, то $(\alpha_i|\alpha_i) = 1$ для всех i и все вещественные корни короткие (= длинные).

§5.2. Корень α , который не является вещественным, называется *мнимым корнем*. Обозначим через Δ^{im} и Δ_+^{im} множества мнимых и положительных мнимых корней соответственно. По определению

$$\Delta = \Delta^{re} \cup \Delta^{im} \quad (\text{дизъюнктное объединение}).$$

Ясно также, что $\Delta^{im} = \Delta_+^{im} \cup (-\Delta_+^{im})$.

Полезны следующие свойства мнимых корней.

Предложение 5.2. а) Множество Δ_+^{im} является W -инвариантным.

б) Для $\alpha \in \Delta_+^{im}$ существует единственный корень $\beta \in -C^v$ (т. е. $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ для всех i), который W -эквивалентен α .

в) Если A симметризуема и $(\cdot|\cdot)$ — стандартная инвариантная билинейная форма, то корень α мнимый, если и только если $(\alpha|\alpha) \leq 0$.

Доказательство. Так как $\Delta_+^{im} \subset \Delta_+ \setminus \Pi$ и множество $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ инвариантно относительно r_i (по лемме 1.3), то Δ_+^{im} является r_i -инвариантным для всех i и потому W -инвариантным, что доказывает а). Пусть $\alpha \in \Delta_+^{im}$ и β — элемент минимальной высоты в $W \cdot \alpha \subset \Delta_+$. Тогда $-\beta \in C^v$. Из предложения 3.12б) следует, что в орбите $W \cdot \alpha$ содержится только один такой элемент β , откуда вытекает б). Пусть α — мнимый корень; в силу б) мы можем считать, что $-\alpha \in C^v$ (поскольку $(\cdot|\cdot)$ является W -инвариантной). Пусть $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, $k_i \geq 0$;

тогда $\langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_i k_i \langle \alpha | \alpha_i \rangle = \sum_i \frac{1}{2} |\alpha_i|^2 k_i \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ в силу (2.3.3) и (2.3.5). Обратное утверждение следует из предложения 5.1d). $\square$

§5.3. Для $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in Q$ определим носитель α (записывается $\text{supp } \alpha$) как поддиаграмму в $S(A)$, состоящую из вершин i , таких, что $k_i \neq 0$, и всех ребер, соединяющих эти вершины. По лемме 1.6 $\text{supp } \alpha$ связан для каждого корня α . Положим

$$K = \{ \alpha \in Q_+ \setminus \{0\} \mid \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0 \text{ для всех } i \text{ и } \text{supp } \alpha \text{ связан} \}.$$

ЛЕММА 5.3. В обозначениях, введенных выше, $K \subset \Delta_+^{im}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in K$. Положим

$$\Omega_\alpha = \{ \gamma \in \Delta_+ \mid \gamma \leq \alpha \}.$$

Множество Ω_α конечно, и оно непусто, потому что простые корни, которые встречаются в разложении α , лежат в Ω_α . Пусть $\beta = \sum_i m_i \alpha_i$ — элемент максимальной высоты в Ω_α . Из следствия 3.6a) вытекает, что

$$(5.3.1) \quad \text{supp } \beta = \text{supp } \alpha.$$

Сначала мы докажем, что $\alpha \in \Delta_+$. Предположим противное; тогда $\alpha \neq \beta$. По определению

$$(5.3.2) \quad \beta + \alpha_i \notin \Delta_+, \text{ если } k_i > m_i.$$

Пусть A_1 — главная подматрица в A , соответствующая $\text{supp } \alpha$. Если A_1 конечного типа, то $\{ \alpha \in Q_+ \mid \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0 \text{ для всех } i \} = \{0\}$ и доказывать нечего. Если A_1 не является матрицей конечного типа, то по предложению 4.9

$$(5.3.3) \quad P := \{ j \in \text{supp } \alpha \mid k_j = m_j \} \neq \emptyset.$$

Пусть R — связанная компонента поддиаграммы $(\text{supp } \alpha) \setminus P$.

Из (5.3.2) и следствия 3.6a) получаем

$$(5.3.4) \quad \langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0, \text{ если } i \in R.$$

Положим $\beta' = \sum_{i \in R} m_i \alpha_i$. Поскольку $\text{supp } \alpha$ связан, из (5.3.1) и (5.3.4) следует

$$(5.3.5) \quad \langle \beta', \alpha_i^V \rangle \geq 0, \text{ если } i \in R; \quad \langle \beta', \alpha_j^V \rangle > 0 \text{ для некоторого } j \in R.$$

Поэтому по теореме 4.3 R — диаграмма конечного типа.

С другой стороны,

$$\alpha' = \sum_{i \in R} (k_i - m_i) \alpha_i.$$

Так как $\text{supp } \alpha'$ есть связная компонента $\text{supp}(\alpha - \beta)$, мы получаем, что

$$(5.3.6) \quad \langle \alpha', \alpha_i^V \rangle = \langle \alpha - \beta, \alpha_i^V \rangle \text{ для } i \in R.$$

Но $\langle \alpha, \alpha_i^V \rangle \leq 0$, поскольку $\alpha \in K$; следовательно, в силу (5.3.4) и (5.3.6)

$$\langle \alpha', \alpha_i^V \rangle \leq 0 \text{ для } i \in R.$$

Это противоречит тому, что R — диаграмма конечного типа. Итак, мы доказали, что $\alpha \in \Delta_+$.

Но 2α также удовлетворяет всем условиям леммы; значит, $2\alpha \in \Delta_+$ и по предложению 5.1b) $\alpha \in \Delta_+^{im}$. $\square$

§5.4. Лемма 5.3 позволяет получить следующее описание множества мнимых корней.

ТЕОРЕМА 5.4. $\Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} w(K).$

Доказательство. Лемма 5.3 и предложение 5.2a) доказывают включение $\supset$. Обратное включение справедливо в силу предложения 5.2b) и того факта, что $\text{supp } \alpha$ связан для каждого корня α (по лемме 1.6). $\square$

§5.5. Следующее предложение показывает, что свойства мнимых корней существенно отличаются от свойств вещественных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Если $\alpha \in \Delta_+^{im}$ и r — ненулевое (рациональное) число, такое, что $r\alpha \in Q$, то $r\alpha \in \Delta^{im}$. В частности, $p\alpha \in \Delta^{im}$, если $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство. В силу предложения 5.2b) мы можем считать, что $\alpha \in -C^V \cap Q_+$; так как $\alpha \in \Delta$, отсюда следует, что $\text{supp } \alpha$ связан, и поэтому $\alpha \in K$. Значит, и $r\alpha \in K$ для $r > 0$, и по лемме 5.3 $r\alpha \in \Delta^{im}$. $\square$

§5.6. Теперь мы докажем теорему существования для мнимых корней.

ТЕОРЕМА 5.6. Пусть A — неразложимая обобщенная матрица Картана.

а) Если A — матрица конечного типа, то множество Δ^{im} пусто.

б) Если A — матрица аффинного типа, то

$$\Delta_+^{im} = \{n\delta \ (n = 1, 2, \dots)\},$$

где $\delta = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i$, а a_i — отметки на $S(A)$ в табл. Афф.

с) Если A — матрица неопределенного типа, то существует положительный мнимый корень $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, такой, что $k_i > 0$ и $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Напомним (см. гл. 4), что множество $\{\alpha \in Q_+ \mid \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, i = 1, \dots, n\}$ состоит лишь из нуля, если A конечного типа, равно $\mathbb{Z}\delta$, если A аффинного типа, и существует $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, такой, что $k_i > 0$ и $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ для всех i , если A неопределенного типа. Все утверждения следуют теперь из теоремы 5.4. $\square$

§5.7. Из предложения 4.7 следует, что если α есть нуль-корень, т. е. $\alpha \in \Delta(A)$ таков, что $\alpha|_{\mathfrak{h}'} = 0$, то $\text{supp } \alpha$ является диаграммой аффинного типа, которая представляет собой связную компоненту диаграммы $S(A)$, и $\alpha = k\delta$, $k \in \mathbb{Z}$. Мы перейдем теперь к описанию изотропных корней.

Предложение 5.7. Пусть A симметризуема. Корень α изотропен (т. е. $\langle \alpha | \alpha \rangle = 0$), если и только если он W -эквивалентен мнимому корню β , такому, что $\text{supp } \beta$ является поддиаграммой аффинного типа в $S(A)$ (тогда $\beta = k\delta$).

Доказательство. Пусть α — изотропный корень и $(\cdot | \cdot)$ — стандартная билинейная форма. Мы можем считать, что $\alpha > 0$. Тогда $\alpha \in \Delta_+^{im}$ в силу предложения 5.1d) и α будет W -эквивалентен мнимому корню $\beta \in K$, такому, что $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ для всех i в силу предложения 5.2b). Пусть $\beta = \sum_{i \in P} k_i \alpha_i$ и $P = \text{supp } \beta$. Тогда $(\beta | \beta) = \sum_{i \in P} k_i (\beta | \alpha_i) = 0$, где $k_i > 0$ и $(\beta | \alpha_i) = \frac{1}{2} |\alpha_i|^2 \langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ для $i \in P$. Поэтому $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ для всех $i \in P$ и P есть диаграмма аффинного типа. Обратно, если $\beta = k\delta$ — мнимый корень для диаграммы аффинного типа, то $(\beta | \beta) = k^2 (\delta | \delta) = k^2 \sum_i a_i (\delta | \alpha_i) = 0$, поскольку $\langle \delta, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ для всех i . $\square$

§5.8. Теперь мы дадим описание конуса Титса X в терминах мнимых корней.

Предложение 5.8. а) Если A — матрица конечного типа, то $X = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.
 б) Если A — матрица аффинного типа, то

$$X = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \delta, h \rangle > 0\} \cup \mathbb{R}\nu^{-1}(\delta).$$

с) Если A — матрица неопределенного типа, то

$$(5.8.1) \quad \bar{X} = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, h \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in \Delta_+^{im}\},$$

где $\bar{X}$ обозначает замыкание X в метрической топологии пространства $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Доказательство. а) выполняется в силу предложения 3.12е). Если A аффинного типа, то $\Delta^{re} + k\delta = \Delta^{re}$ для некоторого k (см. предложение 6.3d) из гл. 6). Используя предложение 3.12с), мы непосредственно получаем, что

$$\{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \delta, h \rangle > 0\} \subset X \text{ и } \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \delta, h \rangle < 0\} \cap X = \emptyset.$$

Если $\langle \delta, h \rangle = 0$ и $h \notin \mathbb{R}\nu^{-1}(\delta)$, то $\langle \alpha_i, h \rangle < 0$ для некоторого i , что заканчивает доказательство б).

Чтобы доказать с), обозначим через X' правую часть равенства (5.8.1). По предложению 5.2а) X' является W -инвариантным; очевидно также, что $X' \supset C$. Следовательно, $X' \supset X$.

Для доказательства обратного включения достаточно проверить, что если $h \in X'$ и $\langle \alpha_i, h \rangle \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, n$), то существует лишь конечное число положительных вещественных корней γ , таких, что $\langle \gamma, h \rangle < 0$ (см. предложение 3.12с)). Напомним, что по теореме 5.6 с) существует такой элемент $\beta \in \Delta_+^{im}$, что $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ для всех i . Если $\gamma \in \Delta_+^{re}$, то $r_\gamma(\beta) = \beta + s\gamma \in \Delta_+^{im}$, где $s = -\langle \beta, \gamma^\vee \rangle \geq \text{ht } \gamma^\vee$. Так как $h \in X'$, то $\langle \beta + s\gamma, h \rangle \geq 0$. Следовательно, существует лишь конечное число вещественных корней γ , таких, что $\langle \gamma, h \rangle \leq -1$, а это то же самое, что $\langle \gamma, h \rangle < 0$. $\square$

Предложение 5.8 имеет хорошую геометрическую интерпретацию. Определим мнимый конус Z как выпуклую оболочку в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ множества $\Delta_+^{im} \cup \{0\}$. Тогда конусы $\bar{Z}$ и $\bar{X}$ дуальны друг другу:

$$\bar{X} = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha, h \rangle \geq 0 \text{ для всех } \alpha \in \bar{Z}\}.$$

В частности, Z является выпуклым конусом (ср. предложение 3.12с)). Заметим также, что $\bar{Z} \subset -\bar{X}^\vee$. Упражнения 5.10 е) и 5.12 дают другое описание конуса $\bar{Z}$.

В следующем параграфе нам понадобится

ЛЕММА 5.8. *Предельные лучи (в метрической топологии) для множества лучей $\{\mathbb{R}_+\alpha \mid \alpha \in \Delta_+^{re}\}$ лежат в $\bar{Z}$.*

Доказательство. Мы можем считать, что матрица Картана A неразложима. В случае конечного типа доказывать нечего, так как $|\Delta| < \infty$ в силу предложения 4.9. В аффинном случае утверждение следует из описания Δ в гл. 6. В случае матрицы неопределенного типа выберем $\beta \in \Delta_+^{im}$, такой, что $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ для всех i (см. теорему 5.6 с)). Тогда $\langle \beta, \alpha^\vee \rangle \leq -ht \alpha^\vee$ для $\alpha \in \Delta_+^{re}$ и $r_\alpha(\beta) = \beta + k\alpha \in \Delta_+^{im}$, где $k \geq 1$, что доказывает лемму и для этого случая. $\square$

§5.9. Линейно независимое множество корней $\Pi' = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \dots\}$ называется *корневым базисом* системы корней Δ , если каждый корень α может быть записан в виде $\alpha = \pm \sum_i k_i \alpha'_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. Пусть A — неразложимая обобщенная матрица Картана. Тогда любой корневой базис Π' для Δ является W -сопряженным к Π или к $-\Pi$.

Доказательство. Положим $Q'_+ = \sum_i \mathbb{Z}_+ \alpha'_i$. По теореме 5.4 множество лучей, проходящих через $\alpha \in \Delta_+^{im}$, плотно в конусе Z , который является выпуклым. Отсюда следует, что Δ_+^{im} лежит в Q'_+ или в $-Q'_+$, и, изменяя знак, если это необходимо, мы можем считать, что $\Delta_+^{im} \subset Q'_+$. Из леммы 5.8 следует, что множество $\Delta_+ \cap (-Q'_+)$ конечно. Если это множество непусто, оно содержит простой корень α_i . Но тогда $|\Delta_+ \cap (-r_i(Q'_+))| < |\Delta_+ \cap (-Q'_+)|$. После конечного числа таких шагов мы получим $\Delta_+ \subset w(Q'_+)$ для некоторого $w \in W$ и, следовательно, $\Pi = w(\Pi')$. $\square$

Замечание 5.9. Π является W -сопряженным к $-\Pi$, если и только если A — матрица конечного типа.

§5.10. Обобщенная матрица Картана A называется матрицей *гиперболического* типа, если она неразложима, симметризуема, относится к неопределенному типу и каждая собственная связная поддиаграмма в $S(A)$ имеет конечный или аффинный тип.

Заметим, что если A симметризуема, то стандартная инвариантная билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ может быть нормализована таким образом, чтобы $(\alpha_i | \alpha_j)$ были целыми числами. Следовательно, $a = \min_{\alpha \in Q: |\alpha|^2 > 0} |\alpha|^2$ существует и является положительным числом.

ЛЕММА 5.10. Пусть A — обобщенная матрица Картана конечного, аффинного или гиперболического типа и $\alpha = \sum_j k_j \alpha_j \in Q$.

а) Если $|\alpha|^2 \leq a$, то либо α , либо $-\alpha$ лежит в Q_+ .

б) Если α удовлетворяет (5.1.2), то либо α , либо $-\alpha$ лежит в Q_+ .

Доказательство. Предположим противное к а); тогда $\alpha = \beta - \gamma$, где $\beta, \gamma \in Q_+ \setminus \{0\}$ и носители P_1 и P_2 для β и γ не имеют общих вершин. В этом случае

$$(5.10.1) \quad a \geq |\alpha|^2 = |\beta|^2 + |\gamma|^2 + 2(-\beta|\gamma).$$

Есть две возможности: (i) оба P_1 и P_2 конечного типа; (ii) P_1 конечного типа, P_2 аффинного типа и они соединены ребром в $S(A)$. В случае (i) мы имеем $|\beta|^2 \geq a$, $|\gamma|^2 \geq a$ и $(-\beta|\gamma) \geq 0$, что противоречит (5.10.1). В случае (ii) получаем $|\beta|^2 \geq a$, $|\gamma|^2 \geq 0$ и $(-\beta|\gamma) > 0$, что снова противоречит (5.10.1). Утверждение б) доказывается точно так же, если заметить, что $|\beta|^2, |\gamma|^2 \in \mathbb{Z}|\alpha|^2$, поскольку

$$\begin{aligned} |\beta|^2 &= \sum_i k_i^2 |\alpha_i|^2 + \sum_{i < j} k_i k_j 2(\alpha_i |\alpha_j) \\ &= \sum_i k_i (k_i |\alpha_i|^2) + \sum_{i < j} a_{ij} k_j (k_i |\alpha_i|^2) \in \mathbb{Z}|\alpha|^2. \end{aligned}$$

□

Предложение 5.10. Пусть A — обобщенная матрица Картана конечного, аффинного или гиперболического типа. Тогда

а) Множество всех коротких вещественных корней есть

$$\{\alpha \in Q \mid |\alpha|^2 = a = \min_i |\alpha_i|^2\}.$$

б) Множество всех вещественных корней есть

$$\{\alpha = \sum_j k_j \alpha_j \in Q \mid |\alpha|^2 > 0 \text{ и } k_j |\alpha_j|^2 / |\alpha|^2 \in \mathbb{Z} \text{ для всех } j\}.$$

с) Множество всех мнимых корней есть

$$\{\alpha \in Q \setminus \{0\} \mid |\alpha|^2 \leq 0\}.$$

д) Если A — аффинная матрица, то корни с промежуточным квадратом длины m существуют в том и только том случае, когда $A = A_{2\ell}^{(2)}$, $\ell \geq 2$. Множество таких корней совпадает с $\{\alpha \in Q \mid |\alpha|^2 = m\}$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in Q$ таков, что $|\alpha|^2 = a$. Тогда $|w(\alpha)|^2 = a$ для $w \in W$ и, следовательно, по лемме 5.10 а) $w(\alpha) \in \pm Q_+$ для каждого

$w \in W$. Мы можем предполагать, не ограничивая общности, что $\alpha \in Q_+$. Пусть β — элемент минимальной высоты в $(W \cdot \alpha) \cap Q_+$. Так как $(\beta|\beta) = a > 0$, то $(\beta|\alpha_i) > 0$ для некоторого i . Если теперь $\beta \neq \alpha_i$, то $r_i(\beta) \in Q_+$ и $\text{ht}(r_i(\beta)) < \text{ht}(\beta)$, что противоречит выбору β . Таким образом, α является вещественным корнем и утверждение а) доказано. Доказательство d) аналогично.

Согласно предложению 5.1b) (i) и (iii), Δ^{re} лежит в множестве, указанном в b). Обратное включение доказывается так же, как в а), с использованием лемм 5.1 и 5.10 b).

Пусть теперь $\alpha \in Q \setminus \{0\}$ и $|\alpha|^2 \leq 0$. В силу леммы 5.10 мы можем считать, что $\alpha \in Q_+$. Такие же рассуждения, как и выше, показывают, что $W \cdot \alpha \subset Q_+$. Так же, как выше, выберем элемент $\beta \in W \cdot \alpha$ минимальной высоты. Тогда $(\beta, \alpha_i^\vee) \leq 0$ для всех i . Кроме этого, $\text{supp } \beta$ связан, поскольку в противном случае $\beta = \gamma_1 + \gamma_2$, где $\text{supp } \gamma_1$ и $\text{supp } \gamma_2$ представляют собой объединения непересекающихся диаграмм конечного типа; эти объединения также не пересекаются и, более того, не соединены ребром в $S(A)$; тогда $|\beta|^2 = |\gamma_1|^2 + |\gamma_2|^2 > 0$ — противоречие. Итак, $\beta \in K$, и поэтому $\beta \in \Delta^{\text{im}}$ по лемме 5.3; следовательно, $\alpha \in \Delta^{\text{im}}$. Теперь с) вытекает из предложения 5.2с). $\square$

Отметим, что предложения 5.10с) и 5.8с) дают точное описание замыкания конуса Титса в гиперболическом случае:

$$(5.10.2) \quad \overline{X} \cup -\overline{X} = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid (h|h) \leq 0\}.$$

Мы получаем также сформулированное ниже следствие предложения 5.9 и 5.10. Заметим, что автоморфизм σ диаграммы Дынкина $S(A)$ индуцирует автоморфизм корневой решетки Q , заданный формулой $\sigma(\alpha_i) = \alpha_{\sigma(i)}$; обозначим группу всех таких автоморфизмов через $\text{Aut}(A)$. Другой подгруппой в $\text{Aut } Q$ является группа Вейля W . Нетрудно увидеть, что $\sigma r_i \sigma^{-1} = r_{\sigma(i)}$ и $W \cap \text{Aut}(A) = 1$ по лемме 3.11b). Таким образом, $\text{Aut } Q \supset \text{Aut}(A) \ltimes W$.

Следствие 5.10. а) Если A неразложима, то группа всех автоморфизмов решетки Q , сохраняющих Δ , совпадает с $\pm \text{Aut}(A) \ltimes W$.

б) Если A — симметрическая матрица конечного, аффинного или гиперболического типа, то группа всех автоморфизмов решетки Q , сохраняющих $(\cdot|\cdot)$, совпадает с $\pm \text{Aut}(A) \ltimes W$.

Доказательство. Если $\sigma \in \text{Aut } Q$ и $\sigma(\Delta) \subset \Delta$, то $\Pi' := \sigma(\Pi)$ является корневым базисом для Δ . По предложению 5.9 $\pm w(\Pi') = \Pi$ для некоторого $w \in W$, что доказывает а). Утверждение б) следует из а) и предложения 5.10а) и с). $\square$

Замечание 5.10. а) Предположим, что в следствии 5.10 матрица A не является симметрической, но квадрат длины одного из простых корней, скажем α_1 , равен 1, а для всех $\alpha_i \neq \alpha_1$ он равен 2. Тогда

$$\Delta^{\text{re}} = \{\alpha \in Q \mid (\alpha|\alpha) = 1 \text{ или } 2\}.$$

Действительно, в силу предложения 5.10b) единственное дополнительное условие появляется, если $(\alpha|\alpha) = 2$, и в этом случае $k_1 \in 2\mathbb{Z}$; но $(\alpha|\alpha) \equiv k_1^2 \pmod{2}$, а следовательно, $(\alpha|\alpha) = 2$ влечет за собой $k_1 \in 2\mathbb{Z}$. Поэтому в силу следствия 5.10a) заключение следствия 5.10b) по-прежнему выполнено.

б) Из замечания 5.9 следует, что если Λ конечного типа, то в заключении следствия 5.10b) можно опустить $\pm$.

§5.11. В этом параграфе мы применим результаты §5.10 к изучению стандартной лоренцевой решетки Λ_n ($n \geq 3$) с билинейной формой $(\cdot|\cdot)$, которая в некотором $\mathbb{Z}$ -базисе $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ задается формулой

$$(5.11.1) \quad \left| \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i \right|^2 = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2.$$

(Это единственная нечетная унимодулярная целочисленная n -мерная лоренцева решетка.) Сначала мы выберем другой базис в Λ_n :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= v_1 - v_2, \dots, \alpha_{n-2} = v_{n-2} - v_{n-1}, \alpha_{n-1} = v_{n-1}, \\ \alpha_n &= -v_0 - v_1 - v_2 - v_3 \quad (\text{соответственно } \alpha_n = -v_0 - v_1 - v_2), \\ &\text{если } n \geq 4 \quad (\text{соответственно } n = 3). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что Λ_n является корневой решеткой, соответствующей обобщенной матрице Картана $(2(\alpha_i|\alpha_j)/(\alpha_i|\alpha_i))$ с диаграммой Дынкина BE_n следующего вида:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \circ^{\alpha_n} & & & & \\ \circ & - & \circ & - & \dots & - & \circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} \circ & \\ \alpha_n & \end{array}, \quad \text{если } n \geq 5,$$

$$\begin{array}{cccc} \circ & - & \circ & \Rightarrow \circ \Leftarrow \circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc} \circ & \Rightarrow \circ & \Leftarrow \circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array}.$$

Заметим, что в базисе $\{v_i\}$ фундаментальное отражение r_i для $i \leq n-2$ есть транспозиция v_i и v_{i+1} , r_{n-1} — это замена знака у v_{n-1} , а r_n представляется матрицей

$$R_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{если } n \geq 4, \text{ и } R_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_n$ группу всех перестановок векторов $v_1, \dots, v_{n-1}$ с одновременной произвольной заменой знака; тогда группа Вейля W_n

типа BE_n порождается $\overset{\circ}{W}_n$ и R_n . Фундаментальная камера $C_n^\vee \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \otimes \Lambda_n$ группы W_n задается неравенствами

$$k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{n-1} \geq 0, \quad k_0 \geq k_1 + k_2 + k_3 \quad (k_3 = 0, \text{ если } n = 3).$$

Заметим, что $C_n^\vee$ лежит в $L_n^+ := \{\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} x_i v_i \mid x_0 \geq 0, -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \geq 0\}$, верхней половине светового конуса. Таким образом, дуальный конус Титса $X_n^\vee$ лежит в L_n^+ . Заметим также, что $W_n \subset O_{\Lambda_n}^+ := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g \cdot L_n^+ = L_n^+, g \cdot \Lambda_n = \Lambda_n\}$.

Далее, BE_n — гиперболическая диаграмма, если и только если $n \leq 10$. Из §5.10 следует, что для $3 \leq n \leq 10$

$$(5.11.2) \quad \Delta^{im} = \{\alpha \in \Lambda_n \mid (\alpha|\alpha) \leq 0\} \setminus \{0\},$$

$$(5.11.3) \quad \Delta^{re} = \{\alpha \in \Lambda_n \mid (\alpha|\alpha) = 1 \text{ или } 2\}.$$

(Если $n \geq 4$, (5.11.3) следует из замечания 5.10. Для $n = 3$ в силу предложения 5.10b) все $\alpha \in \Lambda_3$, такие, что $(\alpha|\alpha) = 1$, являются корнями, а $\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 \in \Lambda_3$, для которых $(\alpha|\alpha) = 2$, должны удовлетворять дополнительному условию $k_2, k_3 \in 2\mathbb{Z}$; однако это легко следует из равенства $(\alpha|\alpha) = 2k_1(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3)^2 = 2$.) Итак,

$$(5.11.4) \quad \Delta = \{\alpha \in \Lambda_n \mid (\alpha|\alpha) \leq 2\} \setminus \{0\}.$$

Из следствия 5.10a) вытекает, что

$$(5.11.5) \quad W_n = O_{\Lambda_n}^+ \quad \text{для } 3 \leq n \leq 10.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.11. Пусть $3 \leq n \leq 10$. Тогда

а) Все целочисленные решения уравнения

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \quad (\text{соответственно } = 2)$$

образуют W_n -орбиту вектора v_1 , если $n > 3$, и объединение W_n -орбит векторов v_1 и $v_0 + v_1 + v_2$, если $n = 3$ (соответственно образуют объединение W_n -орбит векторов $v_1 + v_2$ и $v_0 + v_1 + v_2 + v_3$, если $n > 3$, и W_n -орбиту вектора $v_1 + v_2$, если $n = 3$).

б) Все целочисленные решения уравнения

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

образуют $\pm W_n$ -орбиту вектора $v_0 + v_1$, если $n \leq 9$, и объединение двух $\pm W_n$ -орбит векторов $v_0 + v_1$ и $3v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_9$, если $n = 10$. $\square$

Мы закончим этот параграф общей конструкцией гиперболических решеток. Пусть $\tilde{Q}$ — корневая решетка, соответствующая обобщенной матрице Картана конечного типа X_ℓ , $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ — простые корни и θ — старший корень (см. замечание 4.9). Нормализуем стандартную инвариантную форму на $\tilde{Q}$ условием $(\theta|\theta) = 2$. Пусть H_2 — двумерная гиперболическая решетка с базисом u_1, u_2 и билинейной формой $(u_1|u_2) = 1$, $(u_1|u_1) = (u_2|u_2) = 0$. Через Q обозначим ортогональную прямую сумму решеток $\tilde{Q}$ и H_2 . Тогда Q является корневой решеткой, соответствующей диаграмме Дынкина X_ℓ^H , которая получается из $X_\ell^{(1)}$ добавлением еще одной вершины α_{-1} , соединенной с вершиной α_0 простым ребром. Это вытекает из следующего выбора базиса в Q :

$$\alpha_{-1} = u_1 + u_2, \quad \alpha_0 = -u_1 - \theta, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_\ell.$$

Решетка Q (соответственно диаграмма X_ℓ^H) называется *каноническим гиперболическим расширением* решетки $\tilde{Q}$ (соответственно диаграммы X_ℓ). При этом

$$(5.11.6) \quad \det X_\ell^H = -\det X_\ell.$$

Заметим, что если $X = A, B, C$ или D , то $X_\ell^H = X E_{\ell+2}$ (ср. упр. 4.3) и $E_6^H = T_{4,3,3}$, $E_7^H = T_{5,4,2}$, $E_8^H = E_{10} = T_{7,3,2}$ (ср. упр. 4.2).

Наиболее интересный пример — это $E_8^H = E_{10}$. Соответствующая корневая решетка Q есть (единственная) четная целочисленная унимодулярная лоренцева 10-мерная решетка. Поскольку E_{10} — диаграмма гиперболического типа, мы можем применить результаты §5.10. В соответствии с ними группа Вейля для E_{10} совпадает с группой автоморфизмов корневой решетки Q , сохраняющих верхнюю половину светового конуса, $\Delta = \{\alpha \in Q \mid (\alpha|\alpha) \leq 2\} \setminus \{0\}$, и т. д.

§5.12. В заключение приведем одно полезное наблюдение. Напомним, что $\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$, где $\mathfrak{r}$ — максимальный идеал, имеющий с $\mathfrak{h}$ тривиальное пересечение. Однако все доказательства в гл. 3, 4 и 5 использовали только тот факт, что

$$(5.12.1) \quad (\text{ad } e_i)^{N_{ij}} e_j = 0 = (\text{ad } f_i)^{N_{ij}} f_j \text{ для всех } i \neq j \text{ и некоторых } N_{ij}.$$

Другими словами,

Предложение 5.12. Пусть $\mathfrak{g}$ — факторалгебра алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ по нетривиальному Q -градуированному идеалу, для которого выполняется (5.12.1). Тогда все утверждения гл. 3, 4 и 5 для $\mathfrak{g}(A)$ справедливы также для алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Отсюда выводится

СЛЕДСТВИЕ 5.12. Пусть g такая же, как в предложении 5.12. Тогда
 а) Система корней у g такая же, как и у $g(A)$, причем кратности вещественных корней равны 1.

б) Если A конечного типа, то $g = g(A)$.

Доказательство. Утверждение а) следует из доказательств предложения 5.1а) и теоремы 5.4, в то время как б) следует из а). $\square$

Замечание 5.12. В гл. 9 мы увидим, что следствие 5.12б) справедливо для произвольной симметризуемой обобщенной матрицы Картана.

§5.13. Упражнения

5.1. Покажите, что для $\alpha \in \Delta^{re}(A)$

$$[g_\alpha, g_{-\alpha}] = C\alpha^\vee.$$

Покажите, что если A — несимметризуемая 3×3 -матрица и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, то $\alpha \in \Delta^{im}(A)$ и $\dim[g_\alpha, g_{-\alpha}] > 1$ (ср. теорему 2.2е)).

5.2. Покажите, что $\dim[g_\alpha, g_{-\alpha}] = 1$ для всех $\alpha \in \Delta(A)$, если и только если A симметризуема.

5.3. Если $\dim g(A) = \infty$, то $|\Delta^{re}| = \infty$.

5.4. Множество $\Delta_+(A)$ однозначно определяется свойствами (i) и (ii) упр. 3.5 и свойством

(iii)' если $\alpha \in \Delta_+$, то $\text{supp } \alpha$ связан.

[Пусть Δ'_+ удовлетворяет (i), (ii) и (iii)'. Тогда $\Delta'_+ \setminus \{\alpha_i\}$ является r_i -инвариантным; поэтому $\Delta_+^{re} \subset \Delta'_+$. Если теперь $\alpha \in \Delta'_+ \setminus \Delta_+^{re}$, то $W(\alpha) \subset \Delta'_+$ и элемент β из $W(\alpha)$ минимальной высоты лежит в K .]

5.5. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметрическая обобщенная матрица Картана. Покажите, что

$$\{\alpha \in Q \setminus \{0\} \mid (\alpha|\alpha) \leq 1\} \supset \Delta.$$

Покажите, что обратное включение справедливо, если и только если A — матрица конечного, аффинного или гиперболического типа.

5.6. Пусть $A = (a_{ij})$ — конечная, аффинная или гиперболическая матрица, $B = (b_{ij})$ — соответствующая «симметризованная» матрица и $B(x) = \sum b_{ij} x_i x_j$ — ассоциированная с ней квадратичная форма. Покажите, что все целочисленные решения уравнения $B(x) = 0$ имеют вид $sw(\delta)$, где $s \in \mathbb{Z}$, $w \in W(A)$ и δ — неделимый мнимый корень $\Delta(A')$, а A' — главная аффинная подматрица в A . (В частности, любое решение равно нулю, если A строго гиперболическая.) Покажите, что если A симметрическая, то все целочисленные решения уравнения $\sum a_{ij} x_i x_j = 2$ имеют вид $w(\alpha_i)$, где $w \in W$, $\alpha_i \in \Pi$.

5.7. Покажите, что подрешетка решетки Λ_n , состоящая из векторов с четной суммой координат, изоморфна корневой решетке типа D_{n-2}^H .

5.8. Покажите, что для корневой решетки типа C_4 группа Вейля W является подгруппой индекса 3 в группе ее автоморфизмов, сохраняющих $(\cdot | \cdot)$.

5.9. Пусть $\alpha \in \Delta_+^{im}$ таков, что $-\alpha \in C^\vee$ и $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0$ для некоторого $i \in \text{supp } \alpha$. Тогда поддиаграмма $\{i \in \text{supp } \alpha \mid \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle = 0\} \subset S(A)$ является объединением диаграмм конечного типа.

[Обозначим через T связную компоненту этой поддиаграммы, и пусть $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$; положим $\beta = \sum_{i \in T} k_i \alpha_i$. Тогда $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ для всех i и > 0 для некоторого $i \in T$.]

В упр. 5.10–5.15 мы предполагаем, что матрица A неразложима.

5.10. Мнимый корень α называется *строго мнимым*, если для каждого $\gamma \in \Delta^{re}$ либо $\alpha + \gamma$, либо $\alpha - \gamma$ является корнем. Обозначим через Δ^{sim} множество строго мнимых корней.

а) Если $\alpha \in \Delta_+$ и $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle < 0$ ($i = 1, \dots, n$), то $\alpha \in \Delta^{sim}$. Выведите отсюда, что если $\alpha \in \Delta^{im}$, $\tau_\gamma(\alpha) \neq \alpha$ для всех $\gamma \in \Delta^{re}$, то $\alpha \in \Delta^{sim}$.

б) Если $\alpha \in \Delta_+^{sim}$ и $\langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ для $i = 1, \dots, n$, то $\alpha + \beta \in \Delta_+$ для каждого $\beta \in \Delta_+$.

с) Если $\alpha \in \Delta_+^{sim}$, $\beta \in \Delta_+^{im}$, то $\alpha + \beta \in \Delta_+^{im}$.

д) Δ_+^{sim} является полугруппой.

е) $\overline{\Delta} = \overline{\mathbb{R}_+ \Delta_+^{sim}}$.

5.11. Пусть $\Lambda_i^\vee$ обозначает линейную функцию на $Q_{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Q$, определенную соотношениями $\langle \Lambda_i^\vee, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ ($j = 1, \dots, n$). Тогда $\overline{\Delta} = \{\alpha \in Q_{\mathbb{R}} \cap -\overline{X}_{\mathbb{R}}^\vee \mid \langle \omega(\Lambda_s^\vee), \alpha \rangle \geq 0 \text{ для всех } \omega \in W \text{ и тех } s = 1, \dots, n, \text{ для которых главная подматрица } (a_{ij})_{i,j \neq s} \text{ относится к неопределенному типу}\}$.

5.12. $\overline{\Delta}$ является выпуклой оболочкой множества предельных точек для $\mathbb{R}_+ \Delta^{re}$.

5.13. Если A — матрица конечного или аффинного типа, $\beta \in \Delta$, $\alpha \in \Delta^{re}$, то «струна» $\{\beta + k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ содержит самое большое пять корней. Покажите, что если A неопределенного типа, то число корней в струне может быть как угодно большим.

5.14. Для $\beta \in \Delta$ и $\alpha \in \Delta^{re}$ струна $\{\beta + k\alpha\}$ содержит самое большое четыре вещественных корней.

5.15. Пусть A — симметризуемая матрица неопределенного типа. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) A гиперболического типа;

(ii) $\bar{X} \cup -\bar{X} = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid (h|h) \leq 0\}$;

(iii) $\bar{Z} = -\bar{X}^{\vee}$;

(iv) $\Delta^{im} = \{\alpha \in Q \setminus \{0\} \mid (\alpha|\alpha) \leq 0\}$.

5.16. Пусть A симметризуема и $(\cdot|\cdot)$ — стандартная форма, и пусть $\alpha, \beta \in \Delta_+^{im}$. Тогда $(\alpha|\beta) \leq 0$.

[Можно считать, что $-\alpha \in C^{\vee}$.]

5.17. Пусть в предположениях упр. 5.16 $(\alpha|\beta) < 0$. Тогда $\alpha + \beta \in \Delta_+^{im}$. [Поскольку конус $X^{\vee}$ выпуклый, мы можем считать, что $-(\alpha + \beta) \in C^{\vee}$. Но $\text{supp } \alpha$ и $\text{supp } \beta$ связны, и, так как $(\alpha|\beta) < 0$, $\text{supp}(\alpha + \beta)$ также связан, и можно применить лемму 5.3.]

5.18. Пусть выполнены условия упр. 5.16. Предположим, что $\alpha + \beta \in \Delta_+^{im}$ и α и β не пропорциональны изотропным корням. Тогда $(\alpha|\beta) < 0$.

[Используйте упр. 5.9.]

5.19. Пусть $\alpha, \beta \in \Delta_+^{re}$ таковы, что $(\alpha, \beta^{\vee}) \geq 0$. Покажите, что $(\beta, \alpha^{\vee}) \geq 0$ и, кроме этого, $(\mathbb{Z}_+\alpha + \mathbb{Z}_+\beta) \cap \Delta = \{\alpha, \beta, \alpha + \beta\} \cap \Delta_+^{re}$.

[Для проверки неравенства $(\beta, \alpha^{\vee}) \geq 0$ можно считать, что α — простой корень; тогда $(\alpha, \beta^{\vee}) > 0$ (соответственно = 0), если и только если $r_{\beta}(\alpha) < 0$ (соответственно = α), что эквивалентно $r_{\beta}(\alpha^{\vee}) < 0$ (соответственно = $\alpha^{\vee}$). Далее, если $m\alpha + n\beta \in \Delta$ для некоторых $m, n \in \mathbb{Z}_+$, то $(m\alpha + n\beta, \beta^{\vee}) \geq 2n$; следовательно, $m\alpha \in \Delta$ и $m \leq 1$; аналогично, $n \leq 1$; в частности, $2(\alpha + \beta)$ не является корнем.]

5.20. Пусть $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in K$ и $\beta = \sum_i m_i \alpha_i \in Q_+$ таковы, что $\alpha - \beta \in Q_+$. Используя тождество

$$(\alpha - \beta|\beta) = \sum_j m_j (k_j - m_j) k_j^{-1} (\alpha|\alpha_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} b_{ij} \left(\frac{m_i}{k_i} - \frac{m_j}{k_j} \right)^2 k_i k_j,$$

покажите, что $(\alpha - \beta|\beta) < 0$, за исключением того случая, когда $(\alpha|\alpha) = 0$ и β пропорционален α .

Остальные упражнения связаны с алгебрами Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$ ранга 2, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}, \text{ где } a, b — \text{положительные целые числа и } a \geq b.$$

Сопоставим алгебре Ли $\mathfrak{g}(A)$ поле $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{ab(ab-4)})$; при $ab \neq 4$ обозначим через $\lambda \mapsto \lambda'$ единственную нетривиальную инволюцию поля $\mathbb{F}$. Зафиксируем симметризацию

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -a & 2a/b \end{pmatrix}$$

матрицы A и соответствующую стандартную форму $(. | .)$ на $\mathfrak{h}^*$, так что $(\alpha_1 | \alpha_1) = 2$, $(\alpha_2 | \alpha_2) = 2a/b$, $(\alpha_1 | \alpha_2) = -a$. Введем следующие числа:

$$\eta = \frac{-ab + \sqrt{ab(ab-4)}}{2b}, \quad \epsilon = -b\eta - 1,$$

$$\epsilon_0 = \epsilon, \text{ если } a \neq b, \text{ и } \epsilon_0 = \eta, \text{ если } a = b.$$

5.21. Предположим, что $ab \neq 4$. Покажите, что в базисе α_1, α_2 пространства $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$

$$C^V = \{(x, y) \mid 2x \geq ay, 2y \geq bx\}.$$

Покажите, что если $ab > 4$, то

$$\bar{X}^V = \{(x, y) \mid -\eta'y \leq x \leq -\eta y\}.$$

5.22. Покажите, что ϵ и ϵ' являются собственными значениями $r_1 r_2$ и

$$(r_1 r_2)^k = \frac{\epsilon^k - \epsilon'^k}{\epsilon - \epsilon'} r_1 r_2 - \frac{\epsilon^{k-1} - \epsilon'^{k-1}}{\epsilon - \epsilon'} I, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Используйте тот факт, что для 2×2 -матрицы a с собственными значениями λ_1 и λ_2 справедливо равенство

$$a^k = \frac{\lambda_1^k - \lambda_2^k}{\lambda_1 - \lambda_2} a - \frac{\lambda_1^k \lambda_2 - \lambda_2^k \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} I.]$$

5.23. Предположим, что $ab \neq 4$. Пусть $xy' + x'y$ — форма следа для поля $\mathbb{F}$. Покажите, что отображение

$$\phi : k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \mapsto k_1 + k_2 \eta$$

есть изометрия решеток Q и $\mathbb{Z}[\eta] \subset \mathbb{F}$, так что фундаментальные отображения r_1 и r_2 для Q индуцируют автоморфизмы решетки $\mathbb{Z}[\eta]$:

$$r_1(\lambda) = -\lambda', \quad r_2(\lambda) = -\epsilon \lambda',$$

и группа из следствия 5.10а) изоморфно отображается в группу, порожденную единицей ϵ_0 , инволюцией $'$ и -1 . Покажите, что

$$\phi(Q_+) = \{x + y\sqrt{ab(ab-4)} \in \mathbb{Z}[\eta] \mid y \geq 0 \text{ и } x \geq 0 \text{ если } y = 0\},$$

$$\phi(\Delta_+^{r^n}) = \{\epsilon^n \eta, \epsilon^{-n}, -\epsilon^{-n} \eta', -\epsilon^{n+1}, \text{ где } n \geq 0\},$$

$$\phi(\Delta^{im}) = \{x \in \mathbb{Z}[\eta] \mid xx' \leq 0, x \neq 0\}.$$

5.24. Покажите, что в случае $a = b = m$, $m \neq 2$, мы имеем $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\sqrt{m^2 - 4})$, $\eta = \epsilon_0$, $\epsilon = \epsilon_0^2$; если вдобавок $m^2 - 4$ в разложении на простые множители не содержит квадратов, за исключением, возможно, сомножителя 4, когда m четно, то $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{m^2 - 4})\mathbb{Z}$ есть кольцо целых элементов поля $\mathbb{F}$. Выведите отсюда, что если выполнены сформулированные выше условия на m , то число $\frac{1}{2}(m + \sqrt{m^2 - 4})$ является фундаментальной единицей кольца целых элементов поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m^2 - 4})$, т. е. ϵ_0 вместе с -1 порождают группу всех целых элементов нормы 1.

5.25. Покажите, что

$$\Delta_+^{re}(A) = \{c_j\alpha_1 + d_{j+1}\alpha_2 \text{ и } c_{j+1}\alpha_1 + d_j\alpha_2 \ (j \in \mathbb{Z}_+)\},$$

где последовательности c_j и d_j определяются следующими рекуррентными формулами при $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} c_{j+2} + c_j &= ad_{j+1}, \\ d_{j+2} + d_j &= bc_{j+1} \end{aligned}$$

и $c_0 = d_0 = 0$, $c_1 = d_1 = 1$.

5.26. Покажите, что все целочисленные решения (x, y) уравнения

$$bx^2 - abxy + ay^2 = a \text{ или } b,$$

такие, что x и y взаимно просты, имеют вид $\pm(c_j, d_{j+1})$ при нечетном j или $\pm(c_{j+1}, d_j)$ при четном j , $j \geq 0$. Проверьте, что другие решения существуют только в том случае, когда правая часть есть a и $a/b = r^2$, где r — целое число > 1 , и эти решения записываются в виде (rx, ry) , причем $bx^2 - abxy + ay^2 = b$.

5.27. Покажите, что

$$\begin{aligned} \Delta_+^{re} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} &= \{j\alpha_1 + (j+1)\alpha_2 \text{ и } (j+1)\alpha_1 + j\alpha_2 \ (j \in \mathbb{Z}_+)\}, \\ \Delta_+^{re} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &= \{2j\alpha_1 + (j+1)\alpha_2 \text{ и } (j+1)\alpha_1 + \tfrac{1}{2}j\alpha_2 \text{ для четных } j \in \mathbb{Z}_+; \\ &\quad j\alpha_1 + \tfrac{1}{2}(j+1)\alpha_2 \text{ и } 2(j+1)\alpha_1 + j\alpha_2 \text{ для нечетных } j \in \mathbb{Z}_+\}. \end{aligned}$$

5.28. Покажите, что

$$\Delta_+^{re} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \{\phi_{2j}\alpha_1 + \phi_{2j+2}\alpha_2 \text{ и } \phi_{2j+2}\alpha_1 + \phi_{2j}\alpha_2 \ (j \in \mathbb{Z}_+)\},$$

где ϕ_j есть j -е число Фибоначчи:

$$\phi_0 = 0, \quad \phi_1 = 1, \quad \phi_{j+2} = \phi_{j+1} + \phi_j \text{ для } j \in \mathbb{Z}_+.$$

§5.14. Библиографические замечания и комментарии

Понятия вещественных и мнимых корней были введены Кацем [1968 В]; в этой работе были доказаны предложения 5.2 и 5.5 и теорема 5.6. (Муди в статье Moody [1968] независимо ввел вещественные корни; он назвал их корнями Вейля.) Лемма 5.3, теорема 5.4 и предложение 5.7 доказаны в статье Каца Кас [1980 А]; изложение §5.1–5.7 и §5.10 соответствует этой статье. Усиление предложения 5.10b) по сравнению с предыдущими изданиями принадлежит Марку Круэлю.

Предложение 5.10c) получено в работе Moody [1979], где он начал детальное изучение гиперболических систем корней. Материал §5.8 был взят из статьи Кас — Peterson [1984 А]. Предложение 5.9 доказано Кацем (Кас [1978 А]). Большинство результатов §5.11 принадлежит Винбергу (см. Винберг [1972] и Vinberg [1975]), им разработан общий алгоритм, позволяющий вычислить подгруппу W , порожденную отражениями, в группе автоморфизмов лоренцевой решетки. В частности, он показал, что W имеет конечный индекс в $\text{Aut } \Lambda_n$, если и только если $n \leq 20$ (Винберг [1972], Vinberg [1975], Винберг — Каплинская [1978]). Напомним, что $H_2 \oplus nE_8$ есть единственная четная унимодулярная решетка (размерности $8n + 2$) (см. Serre [1970]). Для $n = 1$ и 2 их группы автоморфизмов были вычислены Винбергом (Vinberg [1975]), а для $n = 3$ — Конвеем (Conway [1983]). По поводу гиперболических групп отражений см. обзор Винберга [1985].

Как показано в работе Каца Кас [1980 А], для данной симметрической обобщенной матрицы Картана A множество положительных корней $\Delta_+(A)$ характеризует множество размерностей неразложимых представлений графа $S(A)$, снабженного некоторой ориентацией. Кроме того, число абсолютно неразложимых представлений размерности $\alpha \in \Delta_+(A)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ дается полиномом $q^N + a_1 q^{N-1} + \dots + a_N$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, $N = 1 - (\alpha| \alpha)$ (см. Кас [1982 А]). В этих статьях сформулировано несколько гипотез; самая интригующая из них утверждает, что $a_N = \text{mult } \alpha$. Многие из этих проблем (кроме последней гипотезы) были решены Скофилдом (Schofield [1988 А–С]). Рингель (Ringel [1989]) обнаружил связь этой области с квантованными алгебрами Каца — Муди через алгебры Холла.

Природа кратностей корней в неопределенном случае по-прежнему остается загадочной: нет ни одного примера, когда был бы известен точный ответ. Асимптотическое поведение кратностей корней изучено в работе Кас — Peterson [1984 А]; для отдельных случаев верхние оценки найдены в статьях Frenkel [1985] и Borcherds [1986].

Упражнения 5.10 и 5.12 взяты из работы Кас [1978 А], а 5.11

и 5.20 — из работы Кас [1980 A]. Упражнение 5.19 содержится в статье Peterson — Кас [1983]; это одна из ключевых лемм в структурной теории групп, связанных с алгебрами Каца — Мули. В работе Lepowsky — Moody [1979] можно найти подробное исследование систем корней в гиперболическом случае ранга 2 с использованием отображения ϕ ; упр. 5.23 принадлежит тем же авторам. Упражнение 5.28 взято из статьи Feingold [1980]. Остальные упражнения или новые, или стандартные.

Глава 6. Аффинные алгебры: нормализованная инвариантная форма, система корней и группа Вейля

§6.0. Результаты гл. 4 показывают, что алгебра Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$ конечномерна, если и только если все главные миноры матрицы A положительны. Эти алгебры Ли полупросты; более того, они исчерпывают все конечномерные полупростые алгебры Ли. Таким образом, классическая теория Киллинга — Картана простых алгебр Ли есть, в нашей терминологии, теория алгебр Каца — Муди, соответствующих матрицам конечного типа.

В этой главе мы рассматриваем следующий случай, когда A — матрица аффинного типа. Напомним, что это обобщенная матрица Картана A , у которой собственные главные миноры положительны, а $\det A = 0$ (тогда A автоматически неразложима). Алгебра Каца — Муди, соответствующая обобщенной матрице Картана аффинного типа, называется *аффинной* алгеброй (Каца — Муди).

Мы опишем подробно стандартную билинейную форму, систему корней и группу Вейля аффинной алгебры $\mathfrak{g}$ в терминах «подстилающей» простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, мы покажем, что группа Вейля для $\mathfrak{g}$ совпадает с так называемой аффинной группой Вейля для $\mathfrak{g}$; это объясняет термин «аффинная» алгебра.

В конце главы мы дадим явную конструкцию корневой решетки, системы корней и группы Вейля всех простых конечномерных алгебр Ли.

§6.1. Пусть A — обобщенная матрица Картана аффинного типа порядка $\ell + 1$ (и ранга ℓ) и $S(A)$ — ее диаграмма Дынкина из табл. Афф. Пусть, кроме того, $a_0, a_1, \dots, a_\ell$ — числовые отметки диаграммы $S(A)$ в табл. Афф. Если A — матрица типа $A_{2\ell}^{(2)}$, то $a_0 = 2$, в остальных случаях $a_0 = 1$.

Обозначим через $a_i^\vee$ ($i = 0, \dots, \ell$) отметки диаграммы Дынкина $S({}^t A)$ дуальной алгебры; эта диаграмма получается из $S(A)$ обращением всех стрелок и сохранением той же нумерации вершин. Заметим, что во всех случаях

$$(6.1.1) \quad a_0^\vee = 1.$$

Числа

$$h = \sum_{i=0}^l a_i \quad \text{и} \quad h^\vee = \sum_{i=0}^l a_i^\vee$$

называются соответственно *числом Кокстера* и *дуальным числом Кокстера* матрицы A . Эти важные числа приведены ниже:

A	h	$h^\vee$	A	h	$h^\vee$
$A_l^{(1)}$	$l + 1$	$l + 1$	$A_{2l}^{(2)}$	$2l + 1$	$2l + 1$
$B_l^{(1)}$	$2l$	$2l - 1$	$A_{2l-1}^{(2)}$	$2l - 1$	$2l$
$C_l^{(1)}$	$2l$	$l + 1$	$D_{l+1}^{(2)}$	$l + 1$	$2l$
$D_l^{(1)}$	$2l - 2$	$2l - 2$	$E_6^{(2)}$	9	12
$E_6^{(1)}$	12	12	$D_4^{(3)}$	4	6
$E_7^{(1)}$	18	18			
$E_8^{(1)}$	30	30			
$F_4^{(1)}$	12	9			
$G_2^{(1)}$	6	4			

Еще одним важным числом является r , номер табл. Aff r , содержащей A .

Замечание 6.1. Дуальное число Кокстера аффинной матрицы $X_N^{(r)}$ не зависит от r .

Матрица A симметризуема по лемме 4.6. Более того,

$$(6.1.2) \quad A = \text{diag}(a_0 a_0^{\vee-1}, a_1 a_1^{\vee-1}, \dots, a_l a_l^{\vee-1}) B, \quad \text{где } B = {}^t B.$$

Действительно, пусть $\delta = {}^t(a_0, \dots, a_l)$ и $\delta^\vee = {}^t(a_0^\vee, \dots, a_l^\vee)$; если $A = DB$, где D — диагональная обратимая матрица и $B = {}^t B$, то $B\delta = 0$ и, следовательно, ${}^t\delta B = 0$. С другой стороны, ${}^t\delta^\vee A = 0$ влечет за собой $({}^t\delta^\vee)DB = 0$, и мы используем теперь тот факт, что $\dim \ker B = 1$.

§6.2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра, соответствующая матрице A аффинного типа из табл. Aff r , $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, $\Pi = \{\alpha_0, \dots, \alpha_l\} \subset \mathfrak{h}^*$ — множество простых корней, $\Pi^\vee = \{\alpha_0^\vee, \dots, \alpha_l^\vee\} \subset \mathfrak{h}$ — множество дуальных простых корней, Δ — система корней, Q и $Q^\vee$ — корневая и дуальная корневая решетки и т. д. Из предложения 1.6 следует, что центр $\mathfrak{g}(A)$ одномерен и порождается элементом

$$K = \sum_{i=0}^l a_i^\vee \alpha_i^\vee.$$

Элемент K называется *каноническим центральным элементом*.

Напомним определение δ (ср. теорему 5.6):

$$\delta = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i \in Q.$$

Зафиксируем элемент $d \in \mathfrak{h}$, удовлетворяющий условиям

$$\langle \alpha_i, d \rangle = 0 \text{ для } i = 1, \dots, \ell, \quad \langle \alpha_0, d \rangle = 1.$$

(Он определяется с точностью до слагаемого, пропорционального K .) Будем называть d *элементом энергии*. (Этот термин пришел из приложений к физике.) Ясно, что $\alpha_0^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee, d$ образуют базис $\mathfrak{h}$. Заметим, что

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathbb{C}d.$$

Определим невырожденную симметрическую билинейную $\mathbb{C}$ -значную форму $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ следующим образом (ср. (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) и (6.1.1)):

$$(6.2.1) \quad \begin{cases} (\alpha_i^\vee | \alpha_j^\vee) = a_j a_j^{-1} a_{ij} & (i, j = 0, \dots, \ell); \\ (\alpha_i^\vee | d) = 0 & (i = 1, \dots, \ell); \\ (\alpha_0^\vee | d) = a_0; & (d | d) = 0. \end{cases}$$

По теореме 2.2 эта форма может быть однозначно продолжена до билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, так что будут выполнены все условия, сформулированные в этой теореме. С этого момента мы фиксируем эту форму на $\mathfrak{g}$. Ясно, что это стандартная форма. Будем называть ее *нормализованной инвариантной формой*.

Чтобы описать индуцированную билинейную форму на $\mathfrak{h}^*$, определим элемент $\Lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$ соотношениями

$$(\Lambda_0, \alpha_i^\vee) = \delta_{0i} \text{ для } i = 0, \dots, \ell, \quad (\Lambda_0, d) = 0.$$

Тогда $\{\alpha_0, \dots, \alpha_\ell, \Lambda_0\}$ есть базис $\mathfrak{h}^*$ и

$$(6.2.2) \quad \begin{cases} (\alpha_i | \alpha_j) = a_i^\vee a_i^{-1} a_{ij} & (i, j = 0, \dots, \ell); \\ (\alpha_i | \Lambda_0) = 0 & (i = 1, \dots, \ell); \\ (\alpha_0 | \Lambda_0) = a_0^{-1}; & (\Lambda_0 | \Lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Отображение $\nu : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}^*$, определенное формой $(\cdot | \cdot)$, выглядит следующим образом:

$$(6.2.3) \quad a_i^\vee \nu(\alpha_i^\vee) = a_i \alpha_i, \quad \nu(K) = \delta, \quad \nu(d) = a_0 \Lambda_0.$$

Приведем еще несколько простых формул:

$$(6.2.4) \quad (\delta|\alpha_i) = 0 \quad (i = 0, \dots, \ell), \quad (\delta|\delta) = 0, \quad (\delta|\Lambda_0) = 1,$$

$$(6.2.5) \quad (K|\alpha_i^\vee) = 0 \quad (i = 0, \dots, \ell), \quad (K|K) = 0, \quad (K|d) = a_0.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ (соответственно $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$) линейную оболочку над $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) элементов $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee$. Дуальные пространства $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}^*$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$ определяются аналогично. Тогда имеют место разложения в ортогональную прямую сумму подпространств

$$\mathfrak{h} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} \oplus (CK + Cd), \quad \mathfrak{h}^* = \overset{\circ}{\mathfrak{h}}^* \oplus (C\delta + C\Lambda_0).$$

Положим $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} + \mathbb{R}K + \mathbb{R}d$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^* + \mathbb{R}\Lambda_0 + \mathbb{R}\delta$.

Заметим, что ограничение билинейной формы $(\cdot|\cdot)$ на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ (соответственно на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^* + \mathbb{R}\delta$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} + \mathbb{R}K$) является положительно определенным (соответственно положительно полуопределенным с ядрами $\mathbb{R}\delta$ и $\mathbb{R}K$) в силу предложения 4.7a) и b).

Для подмножества S в $\mathfrak{h}^*$ обозначим через $\bar{S}$ ортогональную проекцию S на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}^*$. (Не следует смешивать это со знаком замыкания в метрической топологии.) Справедлива следующая полезная формула для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, такого, что $\lambda(K) \neq 0$:

$$(6.2.6) \quad \lambda - \bar{\lambda} = \langle \lambda, K \rangle \Lambda_0 + \langle 2\lambda, K \rangle^{-1} (|\lambda|^2 - |\bar{\lambda}|^2) \delta.$$

Действительно, $\lambda - \bar{\lambda} = b_1 \Lambda_0 + b_2 \delta$. Беря скалярное произведение с δ , мы получим в силу (6.2.2)–(6.2.4), что $b_1 = \langle \lambda, K \rangle$. Так как $|\lambda|^2 = |\bar{\lambda}|^2 + 2b_1 b_2$, формула проверена. Имеется еще одна полезная формула:

$$(6.2.7) \quad \lambda = \bar{\lambda} + \langle \lambda, K \rangle \Lambda_0 + (\lambda|\Lambda_0) \delta.$$

Определим $\rho \in \mathfrak{h}^*$ соотношениями $\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 1$ ($i = 0, \dots, \ell$) и $\langle \rho, d \rangle = 0$ (ср. §2.5). Тогда (6.2.7) дает

$$(6.2.8) \quad \rho = \bar{\rho} + h^\vee \Lambda_0.$$

§6.3. Обозначим через $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ подалгебру в $\mathfrak{g}$, порожденную e_i и f_i при $i = 1, \dots, \ell$. В силу результатов гл. 1 ясно, что $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ есть алгебра Каца — Муди, соответствующая матрице $\overset{\circ}{A}$, полученной из A удалением 0-й строки и 0-го столбца. Элементы e_i, f_i ($i = 1, \dots, \ell$) — образующие Шевалле для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h} = \overset{\circ}{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, $\overset{\circ}{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ — корневой базис и $\overset{\circ}{\Pi}^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}$ — дуальный корневой базис для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Кроме этого, согласно предложению 4.9, $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\overset{\circ}{A})$ — простая конечномерная алгебра Ли, и ее диаграмма Дынкина $S(\overset{\circ}{A})$ получается из $S(A)$ удалением 0-й вершины.

Множество $\overset{\circ}{\Delta} = \Delta \cap \mathfrak{h}^*$ является системой корней для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$; оно конечно и состоит из вещественных корней (в силу предложения 4.9); $\overset{\circ}{\Delta}_+ = \overset{\circ}{\Delta} \cap \Delta_+$ есть множество положительных корней. Обозначим через $\overset{\circ}{\Delta}_s$ и $\overset{\circ}{\Delta}_\ell$ множества коротких и длинных корней в $\overset{\circ}{\Delta}$ соответственно. Положим $\overset{\circ}{Q} = \mathbb{Z}\overset{\circ}{\Delta}$. Пусть $\overset{\circ}{W}$ — группа Вейля для $\overset{\circ}{\Delta}$.

Напомним, что множества мнимых и положительных мнимых корней $\mathfrak{g}$ имеют вид (теорема 5.6b))

$$\Delta^{im} = \{\pm\delta, \pm 2\delta, \dots\}, \quad \Delta_+^{im} = \{\delta, 2\delta, \dots\}.$$

Следующее предложение описывает множества вещественных корней Δ^{re} и положительных вещественных корней Δ_+^{re} в терминах $\overset{\circ}{\Delta}$ и δ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. а) $\Delta^{re} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}, n \in \mathbb{Z}\}$, если $r = 1$.

б) $\Delta^{re} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_s, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + n\tau\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\}$, если $r = 2$ или 3, а A не является матрицей типа $A_{2\ell}^{(2)}$.

в) $\Delta^{re} = \{\frac{1}{2}(\alpha + (2n-1)\delta) \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_s, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + 2n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\}$, если A является матрицей типа $A_{2\ell}^{(2)}$.

д) $\Delta^{re} + \tau\delta = \Delta^{re}$.

е) $\Delta_+^{re} = \{\alpha \in \Delta^{re} \mid n > 0\} \cup \overset{\circ}{\Delta}_+$.

Доказательство. Ясно, что д) и е) следуют из а), б), в). Доказательство а), б) и в) основано на предложении 5.10. Пусть a и b обозначают квадраты длин коротких и длинных корней соответственно, и пусть $\Delta_s^{re}, \Delta_\ell^{re}$ — множества коротких и длинных вещественных корней.

Сначала предположим, что A не относится к типу $A_{2\ell}^{(2)}$. Тогда $\delta = \alpha_0 + a_1\alpha_1 + \dots$. Если теперь $\alpha = \sum_{i=0}^{\ell} k_i\alpha_i \in \Delta_s^{re}$, то $a = |\alpha|^2 = |\alpha - k_0\delta|^2$

и, следовательно, $\alpha - k_0\delta \in \overset{\circ}{\Delta}_s$ в силу предложения 5.10a), что дает включение C в формуле

$$(6.3.1) \quad \Delta_s^{re} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_s, n \in \mathbb{Z}\}, \text{ если } A \neq A_{2\ell}^{(2)}.$$

Обратное включение также вытекает из предложения 5.10a).

Если $r = 1$, то α_0 — длинный корень и, повторяя предыдущее рассуждение с использованием предложения 5.10b), получаем

$$(6.3.2) \quad \Delta_\ell^{re} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\}, \text{ если } r = 1.$$

Если $r = 2$ или 3 , то α_0 — короткий корень; следовательно, по предложению 5.10b) $\alpha = k_0\alpha_0 + \dots \in \Delta_\ell^{re}$, только если k_0 делится на r . Поэтому в силу предложения 5.10b) имеем

$$(6.3.3) \quad \Delta_\ell^{re} = \{\alpha + nr\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\}, \text{ если } r = 2, 3, A \neq A_{2\ell}^{(2)}.$$

Формулы (6.3.1)–(6.3.3) доказывают а) и б).

Наконец, пусть A типа $A_{2\ell}^{(2)}$. Тогда короткие (соответственно длинные) вещественные корни имеют квадрат длины, равный 1 (соответственно 4), а квадрат длины корней из $\Delta_m^{re} := \Delta^{re} \setminus (\Delta_s^{re} \cup \Delta_\ell^{re})$ равен 2 ($\Delta_m^{re} \neq \emptyset$, если $\ell > 1$). Мы должны показать, что

$$(6.3.4) \quad \Delta_s^{re} = \{\tfrac{1}{2}(\alpha + (2n-1)\delta) \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(6.3.5) \quad \Delta_m^{re} = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_s, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$(6.3.6) \quad \Delta_\ell^{re} = \{\alpha + 2n\delta \mid \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell, n \in \mathbb{Z}\}.$$

В силу предложения 5.10b) $\alpha = k_0\alpha_0 + \dots \in \Delta_\ell^{re}$, только если k_0 делится на 4. Те же самые рассуждения, что и выше, доказывают (6.3.6). Аналогично проверяются (6.3.4) и (6.3.5). $\square$

Отметим, что предложение 6.3 будет также следовать из явной конструкции аффинных алгебр, содержащейся в следующих главах. Заметим, кроме того, что (6.1.1) влечет за собой

$$(6.3.7) \quad Q^\vee = \overset{\circ}{Q}^\vee \oplus \mathbb{Z}K \text{ (ортогональная прямая сумма)}$$

и что (в силу (6.2.1) и (6.2.2)) мы имеем изоморфизм решеток, снабженных билинейными формами

$$(6.3.8) \quad Q^\vee(A) \simeq Q({}^t A).$$

Предостережение. $\overset{\circ}{\Delta} = \overline{\Delta} \setminus \{0\}$ во всех случаях, кроме $A_{2\ell}^{(2)}$; в последнем случае система корней $\overline{\Delta} \setminus \{0\}$ не является приведенной, а $\overset{\circ}{\Delta}$ — соответствующая приведенная система корней.

§6.4. Введем важный элемент

$$\theta = \delta - a_0 \alpha_0 = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i \in \overset{\circ}{Q}.$$

Из формул §6.2 легко вывести, что

$$(6.4.1) \quad |\theta|^2 = 2a_0.$$

Таким образом, $|\theta|^2$ равен квадрату длины длинного корня, если A содержится в табл. Aff 1 или относится к типу $A_{2\ell}^{(2)}$, и равен квадрату длины короткого корня в противном случае. Во всех случаях из предложения 5.10а), б) выводится, что $\theta \in \overset{\circ}{\Delta}_+$. Еще раз, используя формулы §6.2, получаем

$$\theta = a_0 \nu(\theta^\vee), \quad |\theta^\vee|^2 = 2a_0^{-1}, \quad \alpha_0^\vee = \nu^{-1}(\delta - \theta) = K - a_0 \theta^\vee.$$

Кроме того, имеет место

Предложение 6.4. а) Если A — матрица из табл. Aff 1 или типа $A_{2\ell}^{(2)}$, то $\theta \in (\overset{\circ}{\Delta}_+)_\ell$ и θ есть единственный корень в $\overset{\circ}{\Delta}$ максимальной высоты ($= h - a_0$).

б) Если A из табл. Aff 2 или 3 и не относится к типу $A_{2\ell}^{(2)}$, то $\theta \in (\overset{\circ}{\Delta}_+)$, и является единственным корнем в $\overset{\circ}{\Delta}$ максимальной высоты ($= h - 1$).

Доказательство. Легко проверить, что все простые корни в $\overset{\circ}{\Delta}$ с одинаковым квадратом длины являются $\overset{\circ}{W}$ -эквивалентными; следовательно, $\overset{\circ}{\Delta}_\ell$ и $\overset{\circ}{\Delta}_\ell$ есть орбиты $\overset{\circ}{W}$. Кроме этого, $\langle \theta, \alpha_i^\vee \rangle = -a_0 \langle \alpha_0, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ для всех $i = 1, \dots, \ell$. Теперь а) и б) следуют из предложения 3.12б). $\square$

Если не оговорено противное, будем считать, что для матрицы A конечного типа стандартная инвариантная форма $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}(A)$ нормирована условием

$$(6.4.2) \quad (\alpha | \alpha) = 2, \quad \text{если } \alpha \in \Delta_\ell,$$

и будем называть ее *нормализованной инвариантной формой*. Из (6.4.1) и предложения 6.4 выводится

Следствие 6.4. Пусть $\mathfrak{g}$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$. Тогда отношение ограничения на подалгебру $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ нормализованной инвариантной формы на $\mathfrak{g}$ к нормализованной инвариантной форме на $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ равно r . $\square$

Заметим, что Π и $\Pi^\vee$ можно записать следующим образом:

$$\Pi = \{\alpha_0 = a_0^{-1}(\delta - \theta), \alpha_1, \dots, \alpha_\ell\},$$

$$\Pi^\vee = \{\alpha_0^\vee = K - a_0 \theta^\vee, \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee\}.$$

§6.5. Вернемся теперь к изучению группы Вейля W для аффинной алгебры $\mathfrak{g}$. Напомним, что W порождается фундаментальными отражениями $r_0, r_1, \dots, r_\ell$, действие которых на $\mathfrak{h}^*$ задается соотношениями

$$r_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

Поскольку $\langle \delta, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ ($i = 0, \dots, \ell$), мы имеем

$$w(\delta) = \delta \text{ для всех } w \in W.$$

Напомним также, что стандартная инвариантная форма является W -инвариантной.

Обозначим через $\overset{\circ}{W}$ подгруппу в W , порожденную $r_1, \dots, r_\ell$. Так как $r_i(\Lambda_0) = \Lambda_0$ для $i = 1, \dots, \ell$, мы выводим отсюда, что $\overset{\circ}{W}$ действует тривиально на $\mathbb{C}\Lambda_0 + \mathbb{C}\delta$; ясно также, что $\mathfrak{h}^*$ инвариантно относительно $\overset{\circ}{W}$. Мы заключаем, что действие $\overset{\circ}{W}$ на $\mathfrak{h}^*$ является точным, и мы можем отождествить $\overset{\circ}{W}$ с группой Вейля для алгебры Ли $\mathfrak{g}$, также действующей на $\mathfrak{h}^*$. Следовательно (в силу предложения 3.12e)), группа $\overset{\circ}{W}$ конечна.

Вспомним, что для вещественного корня α имеется отражение $r_\alpha \in W$, определенное формулой

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

ЛЕММА 6.5. Пусть $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$ таков, что $\beta := \delta - a\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$ для некоторого a . Тогда

$$r_\alpha r_\beta(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, K \rangle \nu(\beta^\vee) - (\langle \lambda, \beta^\vee \rangle + \frac{1}{2} |\beta^\vee|^2 \langle \lambda, K \rangle) \delta$$

для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Доказательство. Сначала проведем такие вычисления по модулю $\mathbb{C}\delta$:

$$\begin{aligned} r_\alpha r_\beta(\lambda) \bmod \mathbb{C}\delta &= r_\alpha(\lambda + (\lambda|\delta)2a\alpha|a\alpha|^{-2} - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha) \bmod \mathbb{C}\delta \\ &= \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha + \langle \lambda, K \rangle \nu(\beta^\vee) + \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha \bmod \mathbb{C}\delta \\ &= \lambda + \langle \lambda, K \rangle \nu(\beta^\vee) \bmod \mathbb{C}\delta. \end{aligned}$$

Чтобы найти коэффициент при δ , мы используем равенство $|r_\alpha r_\beta(\lambda)|^2 = |\lambda|^2$. □

Применяя лемму 6.5 к $\theta = \delta - a_0\alpha_0 \in \Delta_+ \subset \Delta_+^{\text{re}}$, получаем

$$(6.5.1) \quad r_{\alpha_0} r_\theta(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, K \rangle \nu(\theta^\vee) - (\langle \lambda, \theta^\vee \rangle + \frac{1}{2} |\theta^\vee|^2 \langle \lambda, K \rangle) \delta.$$

Эта формула побуждает нас ввести эндоморфизм t_α векторного пространства $\mathfrak{h}^*$ для $\alpha \in \mathfrak{h}^*$:

$$(6.5.2) \quad t_\alpha(\lambda) = \lambda + \langle \lambda, K \rangle \alpha - ((\lambda|\alpha) + \frac{1}{2}|\alpha|^2 \langle \lambda, K \rangle) \delta.$$

В том случае, когда $m := \langle \lambda, K \rangle \neq 0$, мы можем, используя (6.2.6), переписать это следующим образом:

$$(6.5.3) \quad t_\alpha(\lambda) = m\Lambda_0 + (\bar{\lambda} + m\alpha) + \frac{1}{2m}(|\lambda|^2 - |\bar{\lambda} + m\alpha|^2)\delta.$$

Поскольку $\langle \Lambda_0, K \rangle = 1$, мы, в частности, получаем

$$(6.5.4) \quad t_\alpha(\Lambda_0) = \Lambda_0 + \alpha - \frac{1}{2}|\alpha|^2\delta.$$

Заметим также, что (6.5.2) влечет за собой

$$(6.5.5) \quad t_\alpha(\lambda) = \lambda - (\lambda|\alpha)\delta, \text{ если } \langle \lambda, K \rangle = 0.$$

Теперь мы легко можем вывести свойство аддитивности для t_α :

$$(6.5.6) \quad t_\alpha t_\beta = t_{\alpha+\beta}.$$

Действительно, в силу (6.5.5) достаточно проверить (6.5.6) для $\lambda = \Lambda_0$. А в этом случае, используя (6.5.4) и (6.5.5), получаем $t_\alpha t_\beta(\Lambda_0) = t_\alpha(\Lambda_0 + \beta - \frac{1}{2}|\beta|^2\delta) = t_\alpha(\Lambda_0) + t_\alpha(\beta - \frac{1}{2}|\beta|^2\delta) = \Lambda_0 + \alpha - \frac{1}{2}|\alpha|^2\delta + \beta - \frac{1}{2}|\beta|^2\delta - ((\beta - \frac{1}{2}|\beta|^2\delta)|\alpha)\delta = \Lambda_0 + \alpha + \beta - \frac{1}{2}|\alpha + \beta|^2\delta = t_{\alpha+\beta}(\Lambda_0)$.

Кроме того,

$$(6.5.7) \quad t_{w(\alpha)} = wt_\alpha w^{-1} \text{ для } w \in \overset{\circ}{W}.$$

В самом деле, $wt_\alpha(w^{-1}(\lambda)) = w(w^{-1}(\lambda) + \langle w^{-1}(\lambda), K \rangle \alpha - ((w^{-1}(\lambda)|\alpha) + \frac{1}{2}|\alpha|^2 \langle w^{-1}(\lambda), K \rangle) \delta)$. Справедливость (6.5.7) следует из W -инвариантности $(\cdot|\cdot)$ и из того, что $w(K) = K$.

Теперь мы введем важную решетку $M \subset \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$. Пусть $\mathbb{Z}(\overset{\circ}{W} \cdot \theta^\vee)$ обозначает решетку в $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$, порожденную над $\mathbb{Z}$ (конечным) множеством $\overset{\circ}{W} \cdot \theta^\vee$, и положим $M = \nu(\mathbb{Z}(\overset{\circ}{W} \cdot \theta^\vee))$.

Решетка M описывается следующим образом:

$$(6.5.8) \quad \begin{aligned} M &= \overline{Q} = \overset{\circ}{Q}, \text{ если } A \text{ симметрическая или } r > a_0; \\ M &= \nu(\overline{Q}^\vee) = \nu(\overset{\circ}{Q}^\vee) \text{ в противном случае.} \end{aligned}$$

Действительно, если $r = 1$, то $\theta^\vee$ является коротким корнем в $\overset{\circ}{\Delta}^\vee$, поэтому $\overset{\circ}{W} \cdot \theta^\vee = (\overset{\circ}{\Delta}^\vee)_\theta$. Хорошо известно (ср. упр. 6.9), что в случае конечного типа корневая решетка порождается над $\mathbb{Z}$ короткими корнями; следовательно, в этом случае $M = \nu(\overset{\circ}{Q}^\vee)$; что дает (6.5.8) для $r = 1$. Или, эквивалентно,

$M = \overset{\circ}{Q}$ (соответственно $M = \mathbb{Z}\overset{\circ}{\Delta}_\ell$),
если $r = 1$ и A симметрическая (соответственно несимметрическая).

Аналогично, если $a_0 r = 2$ или 3 , то $\theta^\vee$ является длинным корнем в $\overset{\circ}{\Delta}^\vee$; поэтому $\overset{\circ}{W} \cdot \theta^\vee = (\overset{\circ}{\Delta}^\vee)_\ell$, и мы получаем $M = \overset{\circ}{Q}$. Наконец, для $A_{2\ell}^{(2)}$ имеем $\nu(\theta^\vee) = \frac{1}{2}\theta$; следовательно, $M = \frac{1}{2}\mathbb{Z}\overset{\circ}{\Delta}_\ell$, что эквивалентно (6.5.8) также и в этом случае (см. (6.3.6)). Отметим еще следующий полезный факт:

$$(6.5.9) \quad \overset{\circ}{Q} \supset \nu(\overset{\circ}{Q}^\vee), \text{ если } r = 1, \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{Q} \subset \nu(\overset{\circ}{Q}^\vee), \text{ если } r > 1.$$

Решетка M , рассматриваемая как абелева группа, точно действует на $\mathfrak{h}^*$ по формуле (6.5.2). Мы обозначим соответствующую подгруппу в $GL(\mathfrak{h}^*)$ через T и назовем ее *группой трансляций* (формула (6.6.3) ниже объясняет, почему). Теперь мы можем доказать

Предложение 6.5. $W = \overset{\circ}{W} \ltimes T$.

Доказательство. В силу (6.5.1) $t_\alpha \in W$ для $\alpha = \nu(\theta^\vee)$; следовательно, $t_{w(\alpha)} \in W$ для $w \in \overset{\circ}{W}$ в силу (6.5.7). Теперь из (6.5.6) вытекает, что $t_\alpha \in W$ для всех $\alpha \in M$. Поскольку $\overset{\circ}{W}$ конечна, а M — свободная абелева группа, $\overset{\circ}{W} \cap T = 1$. Из (6.5.7) следует, что T является нормальной подгруппой в W . Наконец, $r_{\alpha_0} = t_{\nu(\theta^\vee)} r_\theta$, и поэтому подгруппа в W , порожденная T и $\overset{\circ}{W}$, содержит все r_i ($i = 0, \dots, \ell$) и, значит, совпадает с W . $\square$

Так как $t_{\nu(\theta^\vee)} = r_{\alpha_0} r_\theta$ и T порождается $wt_{\nu(\theta^\vee)} w^{-1}$ ($w \in \overset{\circ}{W}$), то

$$(6.5.10) \quad \det_{\mathfrak{h}^*} w = 1 \text{ для } w \in T.$$

Замечание 6.5. Вершина i диаграммы $S(A)$ называется *специальной*, если $\theta^{(i)} := \delta - a_i \alpha_i$ является положительным корнем. Например, $i = 0$ — специальная вершина. Обозначим через $W^{(i)}$ подгруппу в W , порожденную всеми r_j ($j \neq i$), и через $M^{(i)}$ — решетку, порожденную над $\mathbb{Z}$ множеством $\nu(W^{(i)}(\theta^{(i)\vee}))$. Тогда такие же соображения, как выше, показывают, что $T = \{t_\alpha \mid \alpha \in M^{(i)}\}$ и $W = W^{(i)} \ltimes T$. Большая часть результатов этой главы останется справедливой, если вместо вершины 0 взять специальную вершину i .

§6.6. Для $s \in \mathbb{R}$ положим

$$\mathfrak{h}_s^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \langle \lambda, K \rangle = s\}.$$

Заметим, что $\mathfrak{h}_0^* = \sum_{i=0}^L \mathbb{R}\alpha_i$; и что гиперплоскости $\mathfrak{h}_s^*$ инвариантны относительно W . Кроме того, действие W на $\mathfrak{h}_0^*$ является точным в силу (3.12.1).

Рассмотрим теперь аффинное пространство $\mathfrak{h}_1^* \bmod \mathbb{R}\delta$. Поскольку действие группы W на $\mathfrak{h}_0^*$ точное, ее действие на $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*/\mathbb{R}\delta \simeq \mathfrak{h}_0^*$, а значит, и на $\mathfrak{h}_1^* \bmod \mathbb{R}\delta$ также является точным.

Аффинное действие W на аффинном пространстве $\mathfrak{h}_1^* \bmod \mathbb{R}\delta$ имеет простой геометрический смысл. Отождествим $\mathfrak{h}_1^* \bmod \mathbb{R}\delta$ с $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$ с помощью проекции; тем самым мы получим изоморфизм из W в подгруппу аффинных преобразований W_{af} пространства $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$. Обозначим этот изоморфизм через af , так что

$$\text{af}(w)(\bar{\lambda}) = \overline{w(\lambda)} \text{ для } \lambda \in \mathfrak{h}_1^*.$$

Теперь мы опишем действие W_{af} на $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*$. Ясно, что

$$(6.6.1) \quad \text{af}(w) = w \text{ для } w \in \mathring{W}.$$

Кроме того,

$$(6.6.2) \quad \text{af}(\tau_{\alpha_0})(\lambda) = \tau_{\theta}(\lambda) + \nu(\theta^{\vee}) \quad (\lambda \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*).$$

В самом деле, если $\mu \in \mathfrak{h}_1^*$, то $\langle \mu, K \rangle = 1$, следовательно, $\langle \mu, \alpha_0^{\vee} \rangle = \langle \mu, K - a_0\theta^{\vee} \rangle = 1 - a_0\langle \mu, \theta^{\vee} \rangle$ и $\tau_{\alpha_0}(\mu) = \mu - (1 - a_0\langle \mu, \theta^{\vee} \rangle)\alpha_0 = \mu + (1 - a_0\langle \mu, \theta^{\vee} \rangle)a_0^{-1}\theta = \mu - \langle \mu, \theta^{\vee} \rangle(\theta^{\vee}) + \nu(\theta^{\vee}) \bmod \mathbb{R}\delta$. Итак, $\text{af}(\tau_{\alpha_0})$ есть отражение относительно гиперплоскости

$$\theta = 1 \text{ (т. е. } \{\lambda \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^* \mid \langle \lambda, \theta \rangle = 1\}).$$

Из (6.6.2) вытекает также, что $\text{af}(t_{\nu(\theta^{\vee})})(\lambda) = \text{af}(\tau_{\alpha_0})(\tau_{\theta}(\lambda)) = \lambda + \nu(\theta^{\vee})(\lambda \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*)$. Поэтому в силу (6.5.6) и (6.5.7) получаем

$$(6.6.3) \quad \text{af}(t_{\alpha})(\lambda) = \lambda + \alpha \text{ для } \lambda \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*, \alpha \in M.$$

Таким образом, группа W_{af} есть не что иное, как так называемая аффинная группа Вейля для $\mathring{\mathfrak{g}}$.

Введем фундаментальный альков

$$C_{af} = \{\lambda \in \mathring{h}_{\mathbb{R}}^* \mid (\lambda|\alpha_i) \geq 0 \text{ для } 1 \leq i \leq \ell \text{ и } (\lambda|\theta) \leq 1\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. а) Для каждой точки из $\mathring{h}_{\mathbb{R}}^*$ существует единственная точка из C_{af} , которая $\tilde{W}$ -эквивалентна ей по модулю M .

б) Стабилизатор каждой точки из C_{af} относительно действия $\tilde{W}$ на $\mathring{h}_{\mathbb{R}}^*/M$ порождается его пересечением с $\{\tau_\theta, \tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_\ell}\}$.

с) Для любого $\lambda \in \mathring{h}_1^*$

$$af(W_\lambda) = (W_{af})_{\bar{\lambda}}$$

и $W_\lambda \cap T = e$, где W_λ обозначает стабилизатор λ .

Доказательство. Рассмотрим проекцию $\pi : \mathring{h}_1^* \rightarrow \mathring{h}_{\mathbb{R}}^*$. Ясно, что она сюръективна и $af(w) \circ \pi = \pi \circ w$ для $w \in W$. Кроме того (ср. §3.12),

$$\pi^{-1}(C_{af}) = C^V \cap \mathring{h}_1^*.$$

Но согласно предложению 3.12b), $C^V \cap \mathring{h}_1^*$ является фундаментальной областью для действия W на $\mathring{h}_1^* \subset X^V$. Вместе с (6.6.1) и (6.6.3) это доказывает а). Из сказанного выше вытекает также, что $af(W_\lambda) = (W_{af})_{\bar{\lambda}}$. Теперь б) следует из предложения 3.12а). Наконец, $W_\lambda \cap T = 1$, так как $af(W_\lambda) = (W_{af})_{\bar{\lambda}}$ не содержит нетривиальных трансляций. $\square$

§6.7. Как мы видели, корневую и дуальную корневую решетки, систему корней и группу Вейля аффинной алгебры можно выразить в терминах соответствующих объектов для «подстилающей» простой конечномерной алгебры Ли.

Для удобства читателя мы приводим ниже явную конструкцию всех этих объектов для всех простых конечномерных алгебр Ли.

Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n -мерное вещественное евклидово пространство со стандартным базисом $v_1, \dots, v_n$ и билинейной формой

$$(v_i|v_j) = \delta_{ij}.$$

Все решетки в дальнейшем будут подрешетками в $\mathbb{R}^n$ с наследуемой билинейной формой $(\cdot|\cdot)$. Все индексы считаются различными.

$$A_\ell : Q = Q^V = \left\{ \sum_i k_i v_i \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid k_i \in \mathbb{Z}, \sum_i k_i = 0 \right\},$$

$$\Delta = \{v_i - v_j\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_1 - v_2, \alpha_2 = v_2 - v_3, \dots, \alpha_\ell = v_\ell - v_{\ell+1}\},$$

$$\theta = v_1 - v_{\ell+1},$$

$$W = \{\text{все перестановки векторов } v_i\}.$$

$$D_\ell : Q = Q^\vee = \left\{ \sum_i k_i v_i \in \mathbb{R}^\ell \mid k_i \in \mathbb{Z}, \sum_i k_i \in 2\mathbb{Z} \right\},$$

$$\Delta = \{\pm v_i \pm v_j\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_1 - v_2, \dots, \alpha_{\ell-1} = v_{\ell-1} - v_\ell, \alpha_\ell = v_{\ell-1} + v_\ell\},$$

$$\theta = v_1 + v_2,$$

$$W = \{\text{все перестановки и замены четного числа знаков у } v_i\}.$$

$$B_\ell : Q = \left\{ \sum_i k_i v_i \in \mathbb{R}^\ell \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Q^\vee = Q(D_\ell),$$

$$\Delta = \{\pm v_i \pm v_j, \pm v_i\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_1 - v_2, \dots, \alpha_{\ell-1} = v_{\ell-1} - v_\ell, \alpha_\ell = v_\ell\},$$

$$\theta = v_1 + v_2,$$

$$W = \{\text{все перестановки и замены знаков у } v_i\} = \text{Aut } Q.$$

$$C_\ell : Q = \frac{1}{\sqrt{2}} Q(D_\ell), \quad Q^\vee = \sqrt{2} Q(B_\ell),$$

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm v_i \pm v_j), \pm \sqrt{2} v_i \right\},$$

$$\Pi = \left\{ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2), \dots, \alpha_{\ell-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{\ell-1} - v_\ell), \alpha_\ell = \sqrt{2} v_\ell \right\},$$

$$\theta = \sqrt{2} v_1,$$

$$W = W(B_\ell).$$

$$G_2 : Q = \frac{1}{\sqrt{3}} Q(A_2), \quad Q^\vee = Q(A_2),$$

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(v_i - v_j), \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(v_i + v_j - 2v_k) \right\},$$

$$\Pi = \left\{ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-v_1 + 2v_2 - v_3), \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(v_1 - v_2) \right\},$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}(v_1 + v_2 - 2v_3),$$

$$W = \pm \{\text{все перестановки } v_i\} = \text{Aut } Q.$$

$$F_4 : Q = \left\{ \sum_i k_i v_i \in \mathbb{R}^4 \mid \text{все } k_i \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. \text{или все } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \right\}, \quad Q^\vee = Q(D_4),$$

$$\Delta = \{\pm v_i, \pm v_i \pm v_j, \frac{1}{2}(\pm v_1 \pm v_2 \pm v_3 \pm v_4)\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_2 - v_3, \alpha_2 = v_3 - v_4, \alpha_3 = v_4,$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 - v_3 - v_4)\},$$

$$\theta = v_1 + v_2,$$

$$W = \text{Aut } Q.$$

$$E_8 : Q = Q^\vee = \{\sum_i k_i v_i \in \mathbb{R}^8 \mid \text{все } k_i \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или все } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \sum_i k_i \in 2\mathbb{Z}\},$$

$$\Delta = \{\pm v_i \pm v_j, \frac{1}{2}(\pm v_1 \pm v_2 \pm \dots \pm v_8) \text{ (четное число минусов)}\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_2 - v_3, \alpha_2 = v_3 - v_4, \alpha_3 = v_4 - v_5,$$

$$\alpha_4 = v_5 - v_6, \alpha_5 = v_6 - v_7, \alpha_6 = v_7 - v_8,$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 - \dots - v_7 + v_8), \alpha_8 = v_7 + v_8\},$$

$$\theta = v_1 + v_2,$$

$$W = \text{Aut } Q.$$

$$E_7 : Q = Q^\vee = \{\sum_i k_i v_i \in \mathbb{R}^8 \mid \text{все } k_i \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или все } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \sum_i k_i = 0\},$$

$$\Delta = \{v_i - v_j, \frac{1}{2}(\pm v_1 \pm \dots \pm v_8) \text{ (четыре минуса)}\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_2 - v_3, \alpha_2 = v_3 - v_4, \alpha_3 = v_4 - v_5,$$

$$\alpha_4 = v_5 - v_6, \alpha_5 = v_6 - v_7, \alpha_6 = v_7 - v_8,$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{2}(-v_1 - v_2 - v_3 - v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8)\},$$

$$\theta = v_2 - v_1,$$

$$W = \text{Aut } Q.$$

$$\bar{E}_6 : Q = Q^\vee = \{k_1 v_1 + \dots + k_6 v_6 + \sqrt{2} k_7 v_7 \in \mathbb{R}^7 \mid \text{все } k_i \in \mathbb{Z}$$

$$\text{или все } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, k_1 + \dots + k_6 = 0\},$$

$$\Delta = \{v_i - v_j (i, j \leq 6), \frac{1}{2}((\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_6 v_6) \pm \sqrt{2} v_7) (\varepsilon_i = \pm 1,$$

$$\sum \varepsilon_i = 0), \pm \sqrt{2} v_7\},$$

$$\Pi = \{\alpha_1 = v_1 - v_2, \alpha_2 = v_2 - v_3, \alpha_3 = v_3 - v_4, \alpha_4 = v_4 - v_5,$$

$$\alpha_5 = v_5 - v_6, \alpha_6 = \frac{1}{2}(-v_1 - v_2 - v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + \sqrt{2}v_7),$$

$$\theta = \sqrt{2}v_7,$$

$$W \times \{\pm 1\} = \text{Aut } Q.$$

Чтобы установить эти факты, мы сначала непосредственно проверяем, что Π есть базис Q над $\mathbb{Z}$ и что матрица $(2(\alpha_i|\alpha_j)/(\alpha_i|\alpha_i))$ является матрицей Картана соответствующего типа. Далее, легко проверить, что $\Delta = \{\alpha \mid (\alpha|\alpha) = 2\}$ для A_ℓ , D_ℓ и E_ℓ и $\Delta =$ (соответственно C) $\{\alpha \mid (\alpha|\alpha) = 1 \text{ или } r\}$ для B_ℓ , G_2 и F_4 (соответственно C_ℓ), где $r = 2$ для B_ℓ, C_ℓ, F_4 и $r = 3$ для G_2 . Из предложения 5.10а), б) вытекает, что Δ есть множество всех корней. Группу Вейля W легко вычислить с помощью следствия 5.10 и замечания 5.9б).

Замечание 6.7. Из предыдущих рассуждений следует, что если A — матрица конечного типа, то $\text{Aut } Q = \text{Aut}(A) \ltimes W$, за исключением случая, когда A типа C_4 . В последнем случае W есть группа индекса 3 в $\text{Aut } Q$ (ср. упр. 5.8).

Мы можем перечислить теперь решетки M для аффинных алгебр¹:

$$X_\ell^{(1)}: M = Q^\vee(X_\ell);$$

$$A_{2\ell-1}^{(2)}: M = Q(D_\ell);$$

$$D_{\ell+1}^{(2)}: M = \sqrt{2}Q(B_\ell);$$

$$E_6^{(2)}: M = Q(D_4);$$

$$D_4^{(3)}: M = Q(A_2);$$

$$A_{2\ell}^{(2)}: M = Q(B_\ell).$$

§6.8. Упражнения

6.1. Проверьте, что квадрат длины $(\alpha|\alpha)$ корня α из $\overset{\circ}{\Delta}_\ell$ (соответственно $\overset{\circ}{\Delta}_s$) равен $2r$ (соответственно $2r/s$, где $s = \max_{a_{ij} \neq 0} a_{ij}/a_{ij}$).

6.2. Пусть $r = 1$. Покажите, что h есть число Кокстера системы корней $\overset{\circ}{\Delta}$ и $h^\vee = \phi(\theta, \theta)^{-1} = 1 + (\overset{\circ}{\rho}|\theta)$, где ϕ — форма Киллинга на $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ и $\overset{\circ}{\rho}$ — полусумма корней из $\overset{\circ}{\Delta}_+$. Покажите, что $\phi(x, y) = 2h^\vee(x|y)$ для $x, y \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$.

[Заметим, что число $\phi(\theta + 2\overset{\circ}{\rho}, \theta)$ является собственным значением оператора Казимира, соответствующего форме Киллинга ϕ , и поэтому равно 1, и используем (6.2.3).]

¹ Здесь $X_\ell = A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell, E_6, E_7, E_8, F_4$ или G_2 . — Прим. ред.

6.3. Пусть A — матрица Картана типа $X_N^{(r)}$ из табл. Aff r , $\ell = \text{rank } A$ и h — число Кокстера. Пусть Δ_0 — конечная система корней типа X_N . Проверьте, что

$$r\ell h = |\Delta_0|.$$

6.4. Пусть A — матрица типа $A_1^{(1)}$, т. е. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\Delta_+ = \{(k-1)\alpha_0 + k\alpha_1, k\alpha_0 + (k-1)\alpha_1, k\alpha_0 + k\alpha_1, \text{ где } k = 1, 2, \dots\}.$$

6.5. Пусть A — матрица типа $A_\ell^{(1)}$, $\ell > 1$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что

$$\Delta_+ = \{k(\alpha_0 + \dots + \alpha_{i-1}) + (k \pm 1)(\alpha_i + \dots + \alpha_{j-1}) + k(\alpha_j + \dots + \alpha_\ell)\},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $0 \leq i \leq j \leq \ell + 1$ и, если $k = 0$, то берется только знак $+$.

6.6. Пусть A — матрица типа $A_2^{(2)}$, т. е. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\Delta_+ = \{4n\alpha_0 + (2n-1)\alpha_1, 4(n-1)\alpha_0 + (2n-1)\alpha_1, (2n-1)\alpha_0 + n\alpha_1, (2n-1)\alpha_0 + (n-1)\alpha_1, 2n\alpha_0 + n\alpha_1; n = 1, 2, \dots\}.$$

6.7. Пусть $s_0, s_1, \dots, s_\ell$ — отражения в векторном пространстве $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ относительно гиперплоскостей $\theta = 1$, $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_\ell = 0$ соответственно и W_a — группа, порожденная $s_0, \dots, s_\ell$. Покажите, что $W_a = \overset{\circ}{W} \ltimes \nu^{-1}(M)$ и отображение $s_i \mapsto \tau_{\alpha_i}$ определяет изоморфизм $\phi: W_a \rightarrow W$. Покажите также, что образом сдвига на $\alpha \in \nu^{-1}(M)$ относительно ϕ является τ_α .

6.8. Пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}^a$ обозначает векторное пространство аффинных линейных функций на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$. Рассмотрим изоморфизм $\psi: \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0^* \rightarrow \overset{\circ}{\mathfrak{h}}^a$, определенный формулами

$$\psi(\alpha_i) = \overline{\alpha_i} \text{ для } i = 1, \dots, \ell; \quad \psi(\delta) = 1.$$

Действие W_a на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$, определенное в упр. 6.7, индуцирует линейное действие $W_a = W$ на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}^a$. Покажите, что морфизм $(\phi, \psi^{-1}): (W_a, \overset{\circ}{\mathfrak{h}}^a) \rightarrow (W, \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_0^*)$ эквивариантен.

6.9. Покажите, что для матрицы A конечного или аффинного типа множество коротких вещественных корней $\Delta_{\ell}^{re}(A)$ порождает решетку Q над $\mathbb{Z}$.

[Множество $Q' = \mathbb{Z}\Delta_{\ell}^{re}$ является W -инвариантным. Мы можем считать, что A не симметрическая. Если $A \neq A_{2\ell}^{(2)}$, то существуют короткий простой корень α и длинный простой корень β , такие, что $(\alpha|\beta) \neq 0$; тогда $r_{\beta}(\alpha) = \alpha + \beta \in Q'$. Следовательно, $\beta \in Q'$ и $\Delta_{\ell}^{re} \subset Q'$. Итак, $\Pi \subset \Delta_{\ell}^{re} \subset Q'$ и $Q = Q'$. В случае $A_{2\ell}^{(2)}$ используются те же соображения.]

6.10. Пусть $r = 1$ и $\gamma \in M$. Покажите, что

$$\ell(t_{\gamma}) = \sum_{\alpha \in \Delta_+} |(\gamma|\alpha)|.$$

[Используйте упр. 3.6.]

6.11. Обозначим через Γ_n решетку в $\mathbb{R}^n$, определенную такими же условиями, как корневая решетка для E_8 в $\mathbb{R}^8$. Покажите, что если n делится на 8, то Γ_n есть четная унимодулярная решетка.

6.12. Покажите, что целочисленная решетка Q (т. е. $(x|y) \in \mathbb{Z}$, если $x, y \in Q$) порождается над $\mathbb{Z}$ своими векторами с квадратом длины 2, если и только если она есть ортогональная прямая сумма корневых решеток типов A_{ℓ} , D_{ℓ} , E_6 , E_7 , E_8 .

6.13. Покажите, что группа всех автоморфизмов пространства $\mathfrak{h}$, сохраняющих билинейную форму $(\cdot|\cdot)$ и оставляющих неподвижным центральный элемент K , есть полупрямое произведение группы всех ортогональных автоморфизмов пространства $\mathfrak{h}$ (оставляющих неподвижными K и d) и группы всех t_{α} , $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

§6.9. Библиографические замечания и комментарии

Изучение аффинных алгебр было начато Кацем [1968 В] и Мууди (Moody [1969]). Материал этой главы довольно стандартный. Изложение основано на статьях Macdonald [1972], Кас [1978 А], Кас — Peterson [1984 А]. «Квадратичное» действие (6.5.2) «объясняет» появление тета-функций в теории аффинных алгебр (см. гл. 12). Упражнение 6.10 принадлежит Хаддаду и Питерсону.

Глава 7. Аффинные алгебры как центральные расширения алгебр петель

§7.0. В этой главе мы подробно опишем «конкретную» конструкцию всех «нескрученных» аффинных алгебр. Оказывается, что такая алгебра $\mathfrak{g}$ может быть полностью реализована в терминах «подстилающей» простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. А именно, ее производная алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ есть универсальное центральное расширение (с одномерным центром) алгебры Ли полиномиальных отображений из $\mathbb{C}^*$ в $\mathfrak{g}$. Соответствующая алгебра «токов» играет важную роль в квантовой теории поля.

В конце главы мы дадим явную конструкцию конечномерных простых алгебр Ли.

§7.1. Пусть $\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ — алгебра полиномов Лорана от t . Напомним, что вычет полинома Лорана $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k$ (где лишь конечное число коэффициентов c_k отлично от нуля) определяется формулой $\text{Res } P = c_{-1}$. Это линейная функция на $\mathcal{L}$, определенная свойствами

$$\text{Res } t^{-1} = 1, \quad \text{Res } \frac{dP}{dt} = 0.$$

Определим билинейную $\mathbb{C}$ -значную функцию φ на $\mathcal{L}$ формулой

$$\varphi(\dot{P}, Q) = \text{Res } \frac{dP}{dt} Q.$$

Легко проверить два ее свойства:

$$(7.1.1) \quad \varphi(P, Q) = -\varphi(Q, P),$$

$$(7.1.2) \quad \varphi(PQ, R) + \varphi(QR, P) + \varphi(RP, Q) = 0 \quad (P, Q, R \in \mathcal{L}).$$

§7.2. Аффинная алгебра, соответствующая обобщенной матрице Картана типа $X_l^{(1)}$ (из табл. Афф 1), называется *нескрученной аффинной алгеброй*. Здесь мы опишем явную конструкцию этих алгебр Ли. Заметим, что обобщенная матрица Картана A типа $X_l^{(1)}$ (где $X = A, B, \dots, G$) есть так называемая расширенная матрица Картана простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(\overset{\circ}{A})$; здесь $\overset{\circ}{A}$ — матрица

6.9. Покажите, что для матрицы A конечного или аффинного типа множество коротких вещественных корней $\Delta_{\ell}^{re}(A)$ порождает решетку Q над $\mathbb{Z}$.

[Множество $Q' = \mathbb{Z}\Delta_{\ell}^{re}$ является W -инвариантным. Мы можем считать, что A не симметрическая. Если $A \neq A_{2\ell}^{(2)}$, то существуют короткий простой корень α и длинный простой корень β , такие, что $(\alpha|\beta) \neq 0$; тогда $r_{\beta}(\alpha) = \alpha + \beta \in Q'$. Следовательно, $\beta \in Q'$ и $\Delta_{\ell}^{re} \subset Q'$. Итак, $\Pi \subset \Delta_{\ell}^{re} \subset Q'$ и $Q = Q'$. В случае $A_{2\ell}^{(2)}$ используются те же соображения.]

6.10. Пусть $r = 1$ и $\gamma \in M$. Покажите, что

$$\ell(t_{\gamma}) = \sum_{\alpha \in \Delta_+} |(\gamma|\alpha)|.$$

[Используйте упр. 3.6.]

6.11. Обозначим через Γ_n решетку в $\mathbb{R}^n$, определенную такими же условиями, как корневая решетка для E_8 в $\mathbb{R}^8$. Покажите, что если n делится на 8, то Γ_n есть четная унимодулярная решетка.

6.12. Покажите, что целочисленная решетка Q (т. е. $(x|y) \in \mathbb{Z}$, если $x, y \in Q$) порождается над $\mathbb{Z}$ своими векторами с квадратом длины 2, если и только если она есть ортогональная прямая сумма корневых решеток типов A_{ℓ} , D_{ℓ} , E_6 , E_7 , E_8 .

6.13. Покажите, что группа всех автоморфизмов пространства $\mathfrak{h}$, сохраняющих билинейную форму $(\cdot|\cdot)$ и оставляющих неподвижным центральный элемент K , есть полупрямое произведение группы всех ортогональных автоморфизмов пространства $\mathfrak{h}$ (оставляющих неподвижными K и d) и группы всех t_{α} , $\alpha \in \mathfrak{h}^*$.

§6.9. Библиографические замечания и комментарии

Изучение аффинных алгебр было начато Кацем [1968 В] и Муди (Moody [1969]). Материал этой главы довольно стандартный. Изложение основано на статьях Macdonald [1972], Кас [1978 А], Кас — Peterson [1984 А]. «Квадратичное» действие (6.5.2) «объясняет» появление тета-функций в теории аффинных алгебр (см. гл. 12). Упражнение 6.10 принадлежит Хаддаду и Питерсону.

Глава 7. Аффинные алгебры как центральные расширения алгебр петель

§7.0. В этой главе мы подробно опишем «конкретную» конструкцию всех «нескрученных» аффинных алгебр. Оказывается, что такая алгебра $\mathfrak{g}$ может быть полностью реализована в терминах «подстилающей» простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. А именно, ее производная алгебра $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ есть универсальное центральное расширение (с одномерным центром) алгебры Ли полиномиальных отображений из $\mathbb{C}^{\times}$ в $\mathfrak{g}$. Соответствующая алгебра «токов» играет важную роль в квантовой теории поля.

В конце главы мы дадим явную конструкцию конечномерных простых алгебр Ли.

§7.1. Пусть $\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ — алгебра полиномов Лорана от t . Напомним, что вычет полинома Лорана $P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k$ (где лишь конечное число коэффициентов c_k отлично от нуля) определяется формулой $\text{Res } P = c_{-1}$. Это линейная функция на $\mathcal{L}$, определенная свойствами

$$\text{Res } t^{-1} = 1, \quad \text{Res } \frac{dP}{dt} = 0.$$

Определим билинейную $\mathbb{C}$ -значную функцию φ на $\mathcal{L}$ формулой

$$\varphi(P, Q) = \text{Res } \frac{dP}{dt} Q.$$

Легко проверить два ее свойства:

$$(7.1.1) \quad \varphi(P, Q) = -\varphi(Q, P),$$

$$(7.1.2) \quad \varphi(PQ, R) + \varphi(QR, P) + \varphi(RP, Q) = 0 \quad (P, Q, R \in \mathcal{L}).$$

§7.2. Аффинная алгебра, соответствующая обобщенной матрице Картана типа $X_{\ell}^{(1)}$ (из табл. Афф 1), называется *нескрученной аффинной алгеброй*. Здесь мы опишем явную конструкцию этих алгебр Ли. Заметим, что обобщенная матрица Картана A типа $X_{\ell}^{(1)}$ (где $X = A, B, \dots, G$) есть так называемая расширенная матрица Картана простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(\check{A})$; здесь $\check{A}$ — матрица

конечного типа X_i (полученная из A удалением 0-го столбца и 0-й строки).

Рассмотрим алгебру петель

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}) := \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}.$$

Это бесконечномерная комплексная алгебра Ли со скобкой $[,]_0$, заданной соотношением

$$[P \otimes x, Q \otimes y]_0 = PQ \otimes [x, y] \quad (P, Q \in \mathcal{L}, x, y \in \mathfrak{g}).$$

Ее можно отождествить с алгеброй Ли регулярных рациональных отображений $\mathbb{C}^x \rightarrow \mathfrak{g}$, так что элемент $\sum_i (t^i \otimes x_i)$ соответствует отображению $z \mapsto \sum_i z^i x_i$.

Зафиксируем невырожденную инвариантную симметрическую билинейную $\mathbb{C}$ -значную форму $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}$; такая форма существует (например, по теореме 2.2) и единственна с точностью до постоянного множителя. Продолжим эту форму по линейности до $\mathcal{L}$ -значной билинейной формы $(\cdot | \cdot)_t$ на $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, полагая

$$(P \otimes x | Q \otimes y)_t = PQ(x | y).$$

Кроме того, продолжим каждое дифференцирование D алгебры $\mathcal{L}$ до дифференцирования алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$:

$$D(P \otimes x) = D(P) \otimes x.$$

Теперь мы можем определить $\mathbb{C}$ -значный 2-коцикл на алгебре Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$

$$\psi(a, b) = \text{Res} \left(\frac{da}{dt} \mid b \right)_t.$$

Напомним, что $\mathbb{C}$ -значный 2-коцикл на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это билинейная $\mathbb{C}$ -значная функция ψ , удовлетворяющая двум условиям:

$$(\text{Co } 1) \quad \psi(a, b) = -\psi(b, a),$$

$$(\text{Co } 2) \quad \psi([a, b], c) + \psi([b, c], a) + \psi([c, a], b) = 0 \quad (a, b, c \in \mathfrak{g}).$$

Достаточно проверить эти условия для $a = P \otimes x$, $b = Q \otimes y$, $c = R \otimes z$, где $P, Q, R \in \mathcal{L}$ и $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Мы имеем

$$\psi(a, b) = (x | y) \varphi(P, Q).$$

Следовательно, (Со 1) вытекает из (7.1.1) и симметричности $(\cdot|\cdot)$. Свойство (Со 2) следует из (7.1.2), а также из симметричности и инвариантности $(\cdot|\cdot)$. Действительно, левая часть (Со 2) есть

$$([x, y]|z)\varphi(PQ, R) + ([y, z]|x)\varphi(QR, P) + ([z, x]|y)\varphi(RP, Q) \\ = ([x, y]|z)(\varphi(PQ, R) + \varphi(QR, P) + \varphi(RP, Q)) = 0.$$

Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ расширение алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ с помощью одномерного центра, соответствующее коциклу ψ . Более точно, $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}K$ (прямая сумма векторных пространств) и скобка задается формулой

$$(7.2.1) \quad [a + \lambda K, b + \mu K] = [a, b]_0 + \psi(a, b)K \quad (a, b \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Наконец, через $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ обозначим алгебру Ли, которая получается присоединением к $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ дифференцирования d ; оно действует на $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ как $t \frac{d}{dt}$ и аннулирует K (см. §7.3). Другими словами, $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ есть комплексное векторное пространство

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

со скобкой, определенной соотношением $(x, y \in \mathfrak{g}, \lambda, \mu, \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{C})$

$$(7.2.2) \quad [t^m \otimes x \oplus \lambda K \oplus \mu d, t^n \otimes y \oplus \lambda_1 K \oplus \mu_1 d] \\ = (t^{m+n} \otimes [x, y] + \mu \eta t^n \otimes y - \mu_1 \eta t^m \otimes x) \oplus m \delta_{m, -n}(x|y)K.$$

Мы докажем, что $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ является аффинной алгеброй, соответствующей аффинной матрице A типа $X_I^{(1)}$.

§7.3. Здесь мы проверим, что d есть дифференцирование алгебры Ли $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$. Рассмотрим более общую ситуацию; пусть d_s — эндоморфизм пространства $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, определенный следующей формулой:

$$(7.3.1) \quad d_s|_{\mathcal{L}(\mathfrak{g})} = -t^{s+1} \frac{d}{dt}, \quad d_s(K) = 0,$$

так что $d_0 = -d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. d_s является дифференцированием алгебры Ли $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$.

Доказательство. Поскольку $D = d_s$ есть дифференцирование $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, мы выводим отсюда, что

$$D([a + \lambda K, b + \mu K]) = D([a, b]_0) = [D(a), b]_0 + [a, D(b)]_0.$$

Но

$$[D(a), b] = [D(a), b]_0 + \psi(D(a), b)K.$$

Следовательно, необходимо проверить, что

$$(7.3.2) \quad \psi(D(a), b) + \psi(a, D(b)) = 0.$$

Положим $a = P \otimes x$, $b = Q \otimes y$; тогда левая часть (7.3.2) есть

$$\begin{aligned} & (x|y)(\varphi(D(P), Q) + \varphi(P, D(Q))) \\ &= (x|y)(-\varphi(Q, D(P)) + \varphi(P, D(Q))) \\ &= (x|y) \operatorname{Res} \left(-\frac{dQ}{dt} t^{s+1} \frac{dP}{dt} + \frac{dP}{dt} t^{s+1} \frac{dQ}{dt} \right) = 0. \end{aligned}$$

□

Заметим, что

$$\mathfrak{d} := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} d_j$$

является $\mathbb{Z}$ -градуированной подалгеброй в $\operatorname{der} \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ с коммутационными соотношениями

$$[d_i, d_j] = (i - j)d_{i+j}.$$

Это алгебра Ли регулярных векторных полей на $\mathbb{C}^\times$ (= дифференцирований алгебры $\mathcal{L}$).

Алгебра Ли $\mathfrak{d}$ имеет единственное (с точностью до изоморфизма) нетривиальное центральное расширение с помощью одномерного центра, скажем $\mathbb{C}c$; это расширение называется *алгеброй Вирасоро* Vir и определяется следующими коммутационными соотношениями (см. упр. 7.13):

$$(7.3.3) \quad [d_i, d_j] = (i - j)d_{i+j} + \frac{1}{12}(i^3 - i)\delta_{i,-j}c \quad (i, j \in \mathbb{Z}).$$

Полупрямое произведение алгебр Ли $\operatorname{Vir} \ltimes \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, заданное соотношениями (7.3.3), (7.2.1), (7.3.1) и равенством $[c, \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})] = 0$, играет важную роль в теории представлений аффинных алгебр и алгебры Вирасоро, а также в квантовой теории поля.

§7.4. Пусть $\overset{\circ}{\Delta} \subset \overset{\circ}{\mathfrak{h}}^*$ — система корней алгебры Ли $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ — корневой базис, $\{H_1, \dots, H_\ell\}$ — дуальный корневой базис, E_i, F_i ($i = 1, \dots, \ell$) — образующие Шевалле, и пусть θ — старший корень конечной системы корней $\overset{\circ}{\Delta}$ (см. замечание 4.9), а $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta} \cup 0} \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_\alpha$ —

разложение $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ на корневые подпространства. Напомним, что $(\alpha|\alpha) \neq 0$ и $\dim \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_\alpha = 1$ для $\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}$ (мнимых корней нет). Пусть $\overset{\circ}{\omega}$ — инволюция Шевалле алгебры Ли $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Выберем $F_0 \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_\theta$ так, чтобы $(F_0|\overset{\circ}{\omega}(F_0)) = -2/(\theta|\theta)$, и положим $E_0 = -\overset{\circ}{\omega}(F_0)$. Тогда по теореме 2.2е) имеем

$$(7.4.1) \quad [E_0, F_0] = -\theta^\vee.$$

Элементы E_i ($i = 0, \dots, \ell$) порождают алгебру Ли $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, поскольку в присоединенном представлении $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = U(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})(E_0) = U(\overset{\circ}{\mathfrak{n}}_+)(E_0)$ (вспомним, что $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ проста).

Вернемся к алгебре Ли $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$. Ясно, что $\mathcal{CK}$ есть (одномерный) центр алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ и централизатор $\mathfrak{d}$ в $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ есть прямая сумма алгебр Ли $\mathcal{CK} \oplus \mathcal{C}d \oplus (1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}})$. В частности, $1 \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ является подалгеброй в $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$; мы отождествим $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ с этой подалгеброй с помощью отображения $x \mapsto 1 \otimes x$. Далее,

$$\mathfrak{h} := \overset{\circ}{\mathfrak{h}} + \mathcal{CK} + \mathcal{C}d$$

представляет собой $(\ell + 2)$ -мерную коммутативную подалгебру в $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$.

Продолжим $\lambda \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}^*$ до линейной функции на $\mathfrak{h}$, полагая $\langle \lambda, K \rangle = \langle \lambda, d \rangle = 0$, так что $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ отождествляется с подпространством в $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через δ линейную функцию на $\mathfrak{h}$, заданную соотношениями $\delta|_{\overset{\circ}{\mathfrak{h}} + \mathcal{CK}} = 0$, $\langle \delta, d \rangle = 1$. Положим

$$e_0 = t \otimes E_0, \quad f_0 = t^{-1} \otimes F_0,$$

$$e_i = 1 \otimes E_i, \quad f_i = 1 \otimes F_i \quad (i = 1, \dots, \ell).$$

Из (7.4.1) мы получаем, что

$$(7.4.2) \quad [e_0, f_0] = \frac{2}{(\theta|\theta)} K - \theta^\vee.$$

Опишем теперь систему корней и разложение на корневые подпространства алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ относительно $\mathfrak{h}$:

$$\Delta = \{j\delta + \gamma, \text{ где } j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \overset{\circ}{\Delta}\} \cup \{j\delta, \text{ где } j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$$

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{L}(\mathfrak{g})_{\alpha} \right), \text{ где}$$

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g})_{j\delta + \gamma} = t^j \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\gamma}, \quad \mathcal{L}(\mathfrak{g})_{j\delta} = t^j \otimes \overset{\circ}{\mathfrak{h}}.$$

Мы полагаем

$$\Pi = \{\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_{\ell}\},$$

$$\Pi^{\vee} = \{\alpha_0^{\vee} := \frac{2}{(\theta|\theta)}K - 1 \otimes \theta^{\vee}, \alpha_1^{\vee} := 1 \otimes H_1, \dots, \alpha_{\ell}^{\vee} := 1 \otimes H_{\ell}\}.$$

Заметим, что наш элемент θ совпадает с введенным в §6.4 (для $r = 1$). Тогда предложение 6.4а) влечет за собой

$$(7.4.3) \quad A = ((\alpha_j, \alpha_i^{\vee}))_{i,j=0}^{\ell}.$$

Другими словами, $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^{\vee})$ есть реализация аффинной матрицы A , с которой мы начали. (В самом деле, Π и $\Pi^{\vee}$ линейно независимы, т. е. (1.1.1) выполнено, и $2n - \text{rank } A = 2(\ell + 1) - \ell = \ell + 2 = \dim \mathfrak{h}$, т. е. (1.1.3) также выполнено.)

Теперь мы можем доказать нашу первую теорему реализации.

ТЕОРЕМА 7.4. Пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ — комплексная простая конечномерная алгебра Ли и A — ее расширенная матрица Картана. Тогда $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ есть аффинная алгебра Каца — Мули, соответствующая аффинной матрице A , $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, Π и $\Pi^{\vee}$ — корневой и дуальный корневой базисы и $e_0, \dots, e_{\ell}, f_0, \dots, f_{\ell}$ — образующие Шевалле. Другими словами, $(\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^{\vee})$ есть четверка, ассоциированная с A .

Доказательство. Применим предложение 1.4а). Некоторые из условий этого предложения уже проверены. Ясно, что соотношения (1.4.2) выполнены. Что касается (1.4.1), то эти соотношения, очевидно, справедливы при $i, j = 1, \dots, \ell$, так как E_i, F_i ($i = 1, \dots, \ell$) являются образующими Шевалле для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Равенства $[e_0, f_i] = 0$ и $[e_i, f_0] = 0$ для $i = 1, \dots, \ell$ выполнены, поскольку θ есть старший корень для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Вместе с (7.4.2) это доказывает все соотношения (1.4.1).

Далее, в $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ нет идеалов, пересечение которых с $\mathfrak{h}$ тривиально. Действительно, если $\mathfrak{i}$ — ненулевой идеал в $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, такой, что $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{h} = 0$, то в силу предложения 1.5 $\mathfrak{i} \cap \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})_{\alpha} \neq 0$ для некоторого $\alpha \in \Delta$.

Следовательно, $t^j \otimes x \in \mathfrak{i}$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$ и $x \in \mathring{\mathfrak{g}}_\gamma$, $x \neq 0$, $\gamma \in \mathring{\Delta} \cup 0$. Взяв $y \in \mathring{\mathfrak{g}}_{-\gamma}$, такой, что $(x|y) \neq 0$, мы получим $[t^j \otimes x, t^{-j} \otimes y] = j(x|y)K + [x, y] \in \mathfrak{h} \cap \mathfrak{i}$. Так как $[x, y] \in \mathring{\mathfrak{h}}$, мы выводим отсюда, что $j = 0$. Но тогда $\gamma \neq 0$, и поэтому $[x, y]$ содержится в $\mathring{\mathfrak{h}} \cap \mathfrak{i}$ и отличен от нуля. Противоречие.

Наконец, осталось показать, что e_i, f_i ($i = 0, \dots, \ell$) и $\mathfrak{h}$ порождают алгебру Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$. С этой целью мы обозначим через $\hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$ подалгебру в $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$, порожденную этими элементами. Поскольку E_i, F_i ($i = 1, \dots, \ell$) порождают алгебру Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$, мы получаем, что $1 \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$. Кроме того, $t \otimes E_0 \in \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$; так как $[t \otimes x, 1 \otimes y] = t \otimes [x, y]$ для $x, y \in \mathring{\mathfrak{g}}$ и $\mathring{\mathfrak{g}}$ проста, мы получаем, что $t \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$. Поскольку $[t \otimes x, t^k \otimes y] = t^{k+1} \otimes [x, y]$, с помощью индукции по k выводим, что $t^k \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$ для всех $k \geq 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что $t^k \otimes \mathring{\mathfrak{g}} \subset \hat{\mathcal{L}}_1(\mathring{\mathfrak{g}})$ для всех $k < 0$, тем самым завершая доказательство. $\square$

Из теоремы 7.4 немедленно вытекает важное

СЛЕДСТВИЕ 7.4. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — нескрученная аффинная алгебра Ли ранга $\ell + 1$. Тогда кратность каждого мнимого корня в $\mathfrak{g}(A)$ равна ℓ .

Замечание 7.4. Если $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, то алгебра Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ обычно упоминается в литературе как *аффинная алгебра, соответствующая $\mathfrak{g}$, или аффинизация $\mathfrak{g}$.*

§7.5. Можно явно описать также и остальные понятия, введенные в предыдущих главах.

Нормализованная инвариантная форма $(\cdot|\cdot)$ на $\mathfrak{g}$ (введенная в §6.2) может быть описана следующим образом. Возьмем нормализованную инвариантную форму $(\cdot|\cdot)$ на $\mathring{\mathfrak{g}}$ и продолжим ее на всю $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$, полагая

$$(7.5.1) \quad \begin{aligned} (P \otimes x | Q \otimes y) &= (\text{Res } t^{-1} P Q)(x|y) \quad (x, y \in \mathring{\mathfrak{g}}, P, Q \in \mathcal{L}), \\ (CK + Cd | \mathcal{L}(\mathring{\mathfrak{g}})) &= 0, \quad (K|K) = (d|d) = 0, \quad (K|d) = 1. \end{aligned}$$

Ясно, что это невырожденная симметрическая билинейная форма. Для проверки свойства инвариантности рассмотрим единственный нетривиальный случай:

$$([d, P \otimes x] | Q \otimes y) = (d | [P \otimes x, Q \otimes y]).$$

Левая часть этого равенства есть $(t \frac{dP}{dt} \otimes x | Q \otimes y) = (\text{Res } \frac{dP}{dt} Q)(x|y)$, а правая часть совпадает с

$$(d | P Q \otimes [x, y] + (\text{Res } \frac{dP}{dt} Q)(x|y)K) = (\text{Res } \frac{dP}{dt} Q)(x|y).$$

Наконец, ограничение $(\cdot| \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ совпадает с формой, заданной соотношением (6.2.1). Действительно, для обеих форм $(d|d) = 0$, и поэтому достаточно сравнить их на одном элементе. Имеем $(\alpha_0|\alpha_0) = (\delta - \theta|\delta - \theta) = (\theta|\theta) = 2$.

Заметим, что элемент K в $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ является каноническим центральным элементом, а d — элементом энергии.

§7.6. Пусть $\mathring{\mathfrak{g}} = \mathring{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathring{\mathfrak{h}} \oplus \mathring{\mathfrak{n}}_+$ — треугольное разложение (1.3.2) для алгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$. Тогда треугольное разложение для $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ может быть выражено следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}}) &= \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \text{ где} \\ \mathfrak{n}_- &= (t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \otimes (\mathring{\mathfrak{n}}_+ + \mathring{\mathfrak{h}})) + \mathbb{C}[t^{-1}] \otimes \mathring{\mathfrak{n}}_-, \\ \mathfrak{n}_+ &= (t\mathbb{C}[t] \otimes (\mathring{\mathfrak{n}}_- + \mathring{\mathfrak{h}})) + \mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{n}}_+.\end{aligned}$$

Инволюцию Шевалле ω алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ можно записать в терминах инволюции Шевалле $\mathring{\omega}$ алгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$ формулой

$$\omega(P(t) \otimes x + \lambda K + \mu d) = P(t^{-1}) \otimes \mathring{\omega}(x) - \lambda K - \mu d,$$

где $P(t) \in \mathcal{L}$, $x \in \mathring{\mathfrak{g}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. В самом деле, очевидно, $\omega(e_i) = -f_i$, $\omega(f_i) = -e_i$ ($i = 1, \dots, \ell$) и $\omega|_{\mathfrak{h}} = -\text{id}$. Кроме этого, $\omega(e_0) = \omega(t \otimes E_0) = t^{-1} \otimes \mathring{\omega}(E_0) = -t^{-1} \otimes F_0 = -f_0$ и аналогично $\omega(f_0) = -e_0$.

Таким же образом компактная инволюция ω_0 алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$ может быть выражена в терминах компактной инволюции $\mathring{\omega}_0$ алгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$:

$$\omega_0(P(t) \otimes x + \lambda K + \mu d) = \overline{P}(t^{-1}) \otimes \mathring{\omega}_0(x) - \overline{\lambda} K - \overline{\mu} d,$$

где для $P(t) = \sum c_j t^j$ мы полагаем $\overline{P}(t) = \sum \overline{c_j} t^j$ и $\overline{a}$ обозначает комплексно-сопряженное к $a \in \mathbb{C}$. Следовательно, (компактная форма алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathring{\mathfrak{g}})$) = (пространство полиномиальных отображений единичной окружности в компактную форму алгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$) + $i\mathbb{R}K + i\mathbb{R}d$.

И, наконец,

$$\begin{aligned}(P(t) \otimes x | P(t) \otimes x)_0 &= -(P(t) \otimes x | \overline{P}(t^{-1}) \otimes \mathring{\omega}_0(x)) \\ &= \text{Res}(t^{-1} P(t) \overline{P}(t^{-1}))(-x | \mathring{\omega}_0(x)) \\ &= \sum_j |c_j|^2 (x | x)_0.\end{aligned}$$

Можно вывести, что эрмитова форма $(\cdot|\cdot)_0$ положительно определена на подпространстве $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ в $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, используя тот факт, что она положительно определена на $\mathfrak{g}$ (см. замечание 7.9d) ниже). Более общий подход будет рассмотрен в гл. 11.

§7.7. Здесь мы коротко объясним точку зрения физиков на аффинные алгебры. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли с нормализованной инвариантной билинейной формой $(\cdot|\cdot)$, x_i — базис $\mathfrak{g}$, и пусть

$$[x_i, x_j] = \sum_k f_{ij}^k x_k, \text{ где } f_{ij}^k \in \mathbb{C}.$$

Обозначим элемент $t^n \otimes x$ из $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ через $x^{(n)}$. Тогда элементы $x_i^{(n)}$ ($n \in \mathbb{Z}$) и K образуют базис в $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ и подчиняются коммутационным соотношениям (ср. (7.2.1))

$$(7.7.1) \quad [x_i^{(m)}, x_j^{(n)}] = \sum_k f_{ij}^k x_k^{(m+n)} + m\delta_{m,-n}(x_i|x_j)K.$$

Физики сопоставляют элементу $x \in \mathfrak{g}$ производящую функцию

$$x(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{(n)} z^{-n-1},$$

называемую его *током*. Здесь z — формальный параметр. Чтобы написать коммутационные соотношения между токами, необходимо ввести *формальную δ -функцию*:

$$\delta(z_1 - z_2) = z_2^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n.$$

Ее основное свойство состоит в том, что

$$(7.7.2) \quad \text{Res}_{z_1=0} f(z_1) \delta(z_1 - z_2) = f(z_2).$$

Здесь для $f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f_j z^j$ полагают $\text{Res}_{z=0} f(z) = f_{-1}$. Прямая проверка показывает, что

$$(7.7.3) \quad [x(z_1), y(z_2)] = [x, y](z_1) \delta(z_1 - z_2) - K(x|y) \delta'_{z_1}(z_1 - z_2).$$

В этой форме алгебра $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ называется *алгеброй токов*.

Следующая лемма очень полезна для вычислений.

ЛЕММА 7.7. *Справедливы следующие равенства формальных степенных рядов от $z_1^{\pm 1}$ и $z_2^{\pm 1}$ (если обе части имеют смысл):*

$$(7.7.4) \quad f(z_1, z_2)\delta(z_1 - z_2) = f(z_2, z_2)\delta(z_1 - z_2),$$

$$(7.7.5) \quad f(z_1, z_2)\delta'_{z_1}(z_1 - z_2) = f(z_2, z_2)\delta'_{z_1}(z_1 - z_2) - f'_{z_1}(z_1, z_2)|_{z_1=z_2}\delta(z_1 - z_2).$$

Доказательство. Умножаем обе части на z_1^n и проверяем равенство для $\text{Res}_{z_1=0}$, используя (7.7.2). $\square$

Следующее соотношение также легко проверяется:

$$(7.7.6) \quad d_m(x(z)) = z^m \left(z \frac{d}{dz} + (m+1) \right) x(z).$$

Для двух Vir-модулей V и V_1 и последовательности операторов $F_j: V \rightarrow V_1$, $j \in \mathbb{Z}$, производящая функция $F(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} F_j z^{-j-\Delta}$ называется *первичным полем конформного веса Δ* , если

$$[d_m, F(z)] = z^m \left(z \frac{d}{dz} + \Delta(m+1) \right) F(z), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Соотношение (7.7.6) показывает, что токи являются первичными полями веса 1.

§7.8. Как мы видели, (нескрученные) аффинные алгебры могут быть описаны полностью в терминах соответствующих простых конечномерных алгебр Ли.

В этом параграфе мы дадим явную конструкцию простых конечномерных алгебр Ли, соответствующих диаграммам Дынкина с простыми ребрами, т. е. типа A_ℓ , D_ℓ и E_ℓ ($\ell = 6, 7, 8$). Остальные случаи будут рассмотрены в §7.9.

Пусть Q — корневая решетка типа A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ и $(\cdot | \cdot)$ — билинейная симметрическая форма на Q , такая, что (см. §6.7):

$$\Delta = \{ \alpha \in Q \mid (\alpha | \alpha) = 2 \}.$$

Пусть $\varepsilon: Q \times Q \rightarrow \{\pm 1\}$ — функция, удовлетворяющая условию бимультимпликативности

и условию

$$(7.8.2) \quad \varepsilon(\alpha, \alpha) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha|\alpha)} \quad \text{для } \alpha \in Q.$$

(Вспомним, что $(\alpha|\alpha) \in 2\mathbb{Z}$ для $\alpha \in Q$.) Будем называть такую функцию *функцией асимметрии*. Поскольку $(\alpha|\beta) \in \mathbb{Z}$ для $\alpha, \beta \in Q$, заменяя α на $\alpha + \beta$ в (7.8.2), получаем

$$(7.8.3) \quad \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{(\alpha|\beta)} \quad \text{для } \alpha, \beta \in Q.$$

Асимметрическая функция ε может быть построена следующим образом: выберем ориентацию диаграммы Дынкина и положим

$$(7.8.4) \quad \begin{aligned} \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) &= -1, \quad \text{если } i = j \text{ или } \overset{i}{\circ} \rightarrow \overset{j}{\circ}, \\ \varepsilon(\alpha_i, \alpha_j) &= 1 \quad \text{в противном случае, т. е. } \overset{i}{\circ} \overset{j}{\circ} \text{ или } \overset{i}{\circ} \leftarrow \overset{j}{\circ}, \end{aligned}$$

а затем продолжим ее по бимультимпликативности. Ясно, что в этом случае (7.8.2) выполняется для всех $\alpha \in Q$. (Более общо, выберем $\mathbb{Z}$ -базис $\beta_1, \dots, \beta_l$ в Q , положим $\varepsilon(\beta_i, \beta_i) = (-1)^{\frac{1}{2}(\beta_i|\beta_i)}$, $\varepsilon(\beta_i, \beta_j) = (-1)^{(\beta_i|\beta_j)}$, если $i < j$, и $\varepsilon(\beta_i, \beta_j) = 1$, если $i > j$, и продолжим по бимультимпликативности. Таким образом, ε «разбивает симметричность» формы $(\cdot|\cdot)$.)

Пусть теперь $\mathfrak{h}$ — комплексная оболочка Q ; продолжим $(\cdot|\cdot)$ с Q на $\mathfrak{h}$ по билинейности. Мы будем отождествлять $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$ с помощью этой формы. Рассмотрим прямую сумму $\mathfrak{h}$ с одномерными векторными пространствами $\mathbb{C}E_\alpha$, $\alpha \in \Delta$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C}E_\alpha \right).$$

Зададим скобку на $\mathfrak{g}$ формулами

$$(7.8.5) \quad \begin{cases} [h, h'] = 0, & \text{если } h, h' \in \mathfrak{h}, \\ [h, E_\alpha] = (h|\alpha)E_\alpha, & \text{если } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -\alpha, & \text{если } \alpha \in \Delta, \\ [E_\alpha, E_\beta] = 0, & \text{если } \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ [E_\alpha, E_\beta] = \varepsilon(\alpha, \beta)E_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta. \end{cases}$$

Определим симметрическую билинейную форму $(\cdot|\cdot)$ на $\mathfrak{g}$, продолжая ее с $\mathfrak{h}$ следующим образом:

$$(7.8.6) \quad (h|E_\alpha) = 0, \quad \text{если } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta, \quad (E_\alpha|E_\beta) = -\delta_{\alpha, -\beta}, \quad \text{если } \alpha, \beta \in \Delta.$$

Предложение 7.8. Если Q — корневая решетка типа A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ и ε — функция асимметрии на $Q \times Q$, то $\mathfrak{g}$ является простой алгеброй Ли типа A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ соответственно, а $(\cdot|\cdot)$ есть нормализованная инвариантная форма.

Доказательство. Пусть $x, y, z \in \mathfrak{g}$ таковы, что каждый из них либо лежит в $\mathfrak{h}$, либо является одним из E_α . Если один из этих элементов содержится в $\mathfrak{h}$, то тождество Якоби, очевидно, выполнено. Пусть теперь $x = E_\alpha$, $y = E_\beta$, $z = E_\gamma$. Если все $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ не лежат в $\Delta \cup \{0\}$, то снова очевидно, что тождество Якоби выполняется. Итак, мы можем считать, что $\alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\}$.

Заметим, что для $\alpha, \beta \in \Delta$ имеем

$$(7.8.7) \quad \alpha \pm \beta \in \Delta, \text{ если и только если } (\alpha|\beta) = \mp 1,$$

$$(7.8.8) \quad \varepsilon(\alpha, \alpha) = -1, \quad \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{(\alpha|\beta)}.$$

Если $\alpha + \beta = 0$, рассмотрим четыре случая: 1) оба $\alpha \pm \gamma \notin \Delta \cup \{0\}$, 2) $\alpha + \gamma = 0$ или $\alpha - \gamma = 0$, 3) $\alpha + \gamma \in \Delta$, 4) $\alpha - \gamma \in \Delta$; для случаев 1) и 2) тождество Якоби, очевидно, справедливо; в случаях 3) и 4) оно сводится соответственно к условиям $\varepsilon(\gamma, \alpha)\varepsilon(\gamma + \alpha, -\alpha) = (\alpha|\alpha)$ и $\varepsilon(-\alpha, \gamma)\varepsilon(-\alpha + \gamma, \alpha) = (\alpha|\alpha)$, которые выполняются благодаря бимультимпликативности ε , (7.8.7) и (7.8.8). Таким образом, мы можем считать, что все $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$ лежат в Δ , т. е. что $(\alpha|\beta) = (\alpha|\gamma) = (\beta|\gamma) = -1$. Тогда $|\alpha + \beta + \gamma|^2 = 0$; следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (именно в этом месте мы используем положительную определенность $(\cdot|\cdot)$). Тождество Якоби сводится к соотношению

$$\varepsilon(\alpha, \beta)(\alpha + \beta) + \varepsilon(\beta, \gamma)(\beta + \gamma) + \varepsilon(\gamma, \alpha)(\alpha + \gamma) = 0,$$

или

$$\varepsilon(\alpha, \beta)(\alpha + \beta) - \varepsilon(\beta, -\alpha - \beta)\alpha - \varepsilon(-\alpha - \beta, \alpha)\beta = 0;$$

это соотношение справедливо в силу бимультимпликативности ε , (7.8.7) и (7.8.8). Итак, $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли.

Пусть (см. §6.7)

$$\Pi = \Pi^\vee = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}, e_i = E_{\alpha_i}, f_i = -E_{-\alpha_i}.$$

Легко видеть, что $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ есть четверка, ассоциированная с матрицей A типа A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ соответственно, поэтому в силу предложения 1.4а) $\mathfrak{g}$ относится к типу A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ соответственно.

Осталось проверить инвариантность $(\cdot|\cdot)$; это делается прямым вычислением. $\square$

§7.9. В этом параграфе мы дадим явную конструкцию простых конечномерных алгебр Ли, соответствующих диаграммам Дынкина с кратными ребрами, т. е. типа B_ℓ , C_ℓ , F_4 и G_2 .

Рассмотрим следующие корневые решетки $Q(X_N)$ (отвечающие диаграммам с простыми ребрами) и их автоморфизмы $\bar{\mu}$ порядка $r = 2$ или 3 . (Мы используем конструкцию $Q(X_N)$, изложенную в §6.7.)

Случай 1. $Q(D_{\ell+1}) : \bar{\mu}(v_i) = v_i$ для $1 \leq i \leq \ell$, $\bar{\mu}(v_{\ell+1}) = -v_{\ell+1}$;

Случай 2. $Q(A_{2\ell-1}) : \bar{\mu}(v_i) = -v_{2\ell+1-i}$;

Случай 3. $Q(E_6) : \bar{\mu}(v_i) = -v_{7-i}$ для $1 \leq i \leq 6$, $\bar{\mu}(v_7) = v_7$;

Случай 4. $Q(D_4) : \bar{\mu}(\alpha_1) = \alpha_3$, $\bar{\mu}(\alpha_3) = \alpha_4$, $\bar{\mu}(\alpha_4) = \alpha_1$, $\bar{\mu}(\alpha_2) = \alpha_2$.

Здесь через $(.)'$ мы обозначаем нормализованную инвариантную форму на $Q(X_N)$, через Δ' — множество элементов $Q(X_N)$ с квадратом длины 2, через $\Pi' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N\}$ — множество простых корней и т. д. Отметим, что во всех случаях $\bar{\mu}(\Pi') = \Pi'$; следовательно, $\bar{\mu} \in \text{Aut}(X_N)$ является диаграммным автоморфизмом $Q(X_N)$.

Для всех случаев зафиксируем ориентацию диаграммы Дынкина $S(X_N)$, инвариантную относительно $\bar{\mu}$, и пусть $\varepsilon(\alpha, \beta)$ — соответствующая функция асимметрии (определенная соотношениями (7.8.4)). Пусть

$$\mathfrak{g}(X_N) = \mathfrak{h}' \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathbb{C} E'_\alpha \right)$$

— отвечающая ей простая алгебра Ли, построенная в §7.8. Ясно, что автоморфизм $\bar{\mu}$ решетки $Q(X_N)$ индуцирует автоморфизм μ алгебры Ли $\mathfrak{g}(X_N)$, заданный формулами

$$(7.9.1) \quad \mu(\alpha) = \bar{\mu}(\alpha), \quad \mu(E'_\alpha) = E'_{\bar{\mu}(\alpha)}.$$

Этот автоморфизм имеет следующее характеристическое свойство:

$$(7.9.2) \quad \mu(e'_i) = e'_{\bar{\mu}(i)}, \quad \mu(f'_i) = f'_{\bar{\mu}(i)}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Такой автоморфизм называется *диаграммным автоморфизмом алгебры Ли* $\mathfrak{g}(X_N)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta_\ell = \{\alpha = \alpha' \in \Delta' \mid \bar{\mu}(\alpha') = \alpha'\};$$

$$\Delta_s = \{\alpha = r^{-1}(\bar{\mu}(\alpha') + \dots + \bar{\mu}^r(\alpha')) \mid \alpha' \in \Delta', \bar{\mu}(\alpha') \neq \alpha'\};$$

$$\Delta = \Delta_s \cup \Delta_\ell; \quad Q = \mathbb{Z}\Delta;$$

$$E_\alpha^{(j)} = \eta^j E'_{\bar{\mu}(\alpha')} + \dots + \eta^{rj} E'_{\bar{\mu}^r(\alpha')}, \quad \text{где } \eta = \exp 2\pi i/r;$$

$$E_\alpha = E'_\alpha, \text{ если } \alpha \in \Delta_\ell, \quad E_\alpha = E_\alpha^{(0)}, \text{ если } \alpha \in \Delta_s;$$

$$\begin{aligned}
 V^{(j)} &= \bigoplus_{\alpha \in \Delta_s} \mathbb{C} E_\alpha^{(j)}; & \mathfrak{h}^{(j)} &= \{h \in \mathfrak{h}' \mid \mu(h) = \tau^j h\}; \\
 \mathfrak{g}^{(j)} &= \mathfrak{h}^{(j)} + V^{(j)}, & j &= 1, \dots, r-1; \\
 \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}^{(0)}; & \mathfrak{g} &= \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E_\alpha \right).
 \end{aligned}$$

Теперь мы можем сформулировать такой результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9. Пусть $(X_N, r) = (D_{\ell+1}, 2), (A_{2\ell-1}, 2), (E_6, 2)$ или $(D_4, 3)$. Тогда

а) $\mathfrak{g}(X_N) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$ (соответственно $= \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}$), если $r = 2$ (соответственно $r = 3$), где $\mathfrak{g}$ — множество неподвижных точек μ и $\mathfrak{g}^{(1)}$ (соответственно $\mathfrak{g}^{(j)}$, $j = 1$ или 2) — собственное пространство для μ с собственным значением -1 (соответственно $\exp 2\pi i j/3$).

б) $\mathfrak{g}$ является простой алгеброй Ли типа B_ℓ, C_ℓ, F_4 или G_2 соответственно, и ее коммутационные соотношения имеют вид

$$(7.9.3) \left\{ \begin{array}{ll} [h, h'] = 0, & \text{если } h, h' \in \mathfrak{h}, \\ [h, E_\alpha] = (h|\alpha)' E_\alpha, & \text{если } h \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] = -\alpha(\text{соотв. } -\tau\alpha), & \text{если } \alpha \in \Delta_\ell \text{ (соотв. } \alpha \in \Delta_s), \\ [E_\alpha, E_\beta] = 0, & \text{если } \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ [E_\alpha, E_\beta] = (p+1)\varepsilon(\alpha', \beta') E_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \\ \text{где } p \text{ есть максимальное} & \\ \text{положительное целое число,} & \\ \text{такое, что } \alpha - p\beta \in \Delta. & \end{array} \right.$$

с) Нормализованная билинейная форма $(\cdot|\cdot)$ на $\mathfrak{g}$ задается формулами

$$(h|h') = (h|h')'|_{\mathfrak{h}}, \quad (h|E_\alpha) = 0, \quad \text{если } h, h' \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta,$$

$$(E_\alpha|E_\beta) = -\delta_{\alpha, -\beta} \text{ (соотв. } -\tau\delta_{\alpha, -\beta}), \quad \text{если } \alpha, \beta \in \Delta_\ell \text{ (соотв. } \in \Delta_s).$$

д) Δ есть множество корней $\mathfrak{g}$ относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$, Δ_s (соответственно Δ_ℓ) — множество коротких (соответственно длинных) корней, а Q — корневая решетка; $\Delta^\vee = \Delta_\ell \cup \tau\Delta_s$.

е) Множества простых корней Π (занумерованных, как в табл. Fin) имеют следующий вид:

$$\text{Случай 1: } \alpha_1 = \alpha'_1, \dots, \alpha_{\ell-1} = \alpha'_{\ell-1}, \alpha_\ell = \frac{1}{2}(\alpha'_\ell + \alpha'_{\ell+1});$$

$$\text{Случай 2: } \alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \alpha'_{2\ell-1}), \dots, \alpha_{\ell-1} = \frac{1}{2}(\alpha'_{\ell-1} + \alpha'_{\ell+1}), \alpha_\ell = \alpha'_\ell;$$

$$\text{Случай 3: } \alpha_1 = \alpha'_6, \alpha_2 = \alpha'_3, \alpha_3 = \frac{1}{2}(\alpha'_2 + \alpha'_4), \alpha_4 = \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \alpha'_5);$$

Случай 4: $\alpha_1 = \alpha'_2$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}(\alpha'_1 + \alpha'_3 + \alpha'_4)$.

г) Пусть $\Pi_\ell = \Pi \cap \Delta_\ell$, $\Pi_s = \Pi \cap \Delta_s$; тогда $\Pi^\vee = \Pi_\ell \cup \tau \Pi_s$.

г) $[g, g^{(j)}] = g^{(j)}$ и g -модуль $g^{(j)}$ является неприводимым со старшим весом θ_0 ($=$ —младший вес), указанным ниже:

Случай 1: $\theta_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\ell$;

Случай 2: $\theta_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell$;

Случай 3: $\theta_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$;

Случай 4: $\theta_0 = \alpha_1 + 2\alpha_2$.

Доказательство. Утверждения а), с), d), е), f) и г) доказываются прямой проверкой; первая часть б) следует из d), е) и предложения 1.4а). Все коммутационные соотношения (7.9.3), за исключением последнего, очевидны.

Ясно, что если один из $\alpha, \beta \in \Delta$ является длинным корнем и $\alpha + \beta \in \Delta$, то

$$(7.9.4) \quad [E_\alpha, E_\beta] = \varepsilon(\alpha', \beta') E_{\alpha+\beta}$$

и $\alpha - \beta \notin \Delta$; следовательно, последняя формула в б) в этом случае справедлива. Осталось рассмотреть случай, когда оба α и β короткие и $\alpha + \beta \in \Delta$. Пусть сначала $r = 2$; тогда $p = 1$, $\alpha + \beta \in \Delta_\ell$ и мы должны показать, что

$$(7.9.5) \quad [E_\alpha, E_\beta] = 2\varepsilon(\alpha', \beta') E_{\alpha+\beta}.$$

Это вытекает из следующего факта:

$$(7.9.6) \quad \text{если } r = 2 \text{ и } \alpha', \beta' \in \Delta' \setminus \Delta_\ell, \alpha' + \beta' \in \Delta', \text{ то } \alpha' + \bar{\mu}(\beta') \notin \Delta'.$$

Поскольку $\mathbb{Z}$ -оболочка $\alpha', \beta', \bar{\mu}(\alpha')$ и $\bar{\mu}(\beta')$ может быть только одной из корневых решеток $Q(A_n)$, $n = 2, 3$, или 4, достаточно проверить (7.9.6) только в этих случаях, что можно сделать прямым вычислением. Следовательно, $[E_\alpha, E_\beta] = [E'_{\alpha'} + E'_{\bar{\mu}(\alpha')}, E'_{\beta'} + E'_{\bar{\mu}(\beta')}] = \varepsilon(\alpha', \beta') E'_{\alpha'+\beta'} + \varepsilon(\bar{\mu}(\alpha'), \bar{\mu}(\beta')) E'_{\bar{\mu}(\alpha'+\beta')} = 2\varepsilon(\alpha', \beta') E'_{\alpha'+\beta'}$.

Наконец, пусть $r = 3$. Тогда либо $\alpha' + \beta' \in \Delta_s$, $p = 1$ и ровно один из элементов $\alpha' + \bar{\mu}(\beta'), \alpha' + \bar{\mu}^2(\beta')$ лежит в Δ' , либо $\alpha' + \beta' \in \Delta_\ell$, $p = 2$ и ни один из $\alpha' + \bar{\mu}(\beta'), \alpha' + \bar{\mu}^2(\beta')$ не лежит в Δ . И так, в обоих случаях последнее равенство в (7.9.3) выполнено. $\square$

Замечание 7.9. а) (7.8.5) является частным случаем (7.9.3) для $r = 1$, поскольку для диаграмм с простыми ребрами $p = 0$.

b) Коммутационные соотношения (7.9.3) можно продолжить на всю $\mathfrak{g}(X_N)$ следующим образом. Пусть $E_\alpha^{(0)} = E_\alpha = E'_\alpha$, если $\alpha \in \Delta_\ell$, и $\alpha^{(j)} = \eta^j \mu(\alpha') + \dots + \eta^j \mu^r(\alpha')$, если $\alpha \in \Delta_s$. Тогда ($0 \leq i, j \leq r-1$):

$$\begin{aligned} [h^{(i)}, h^{(j)}] &= 0, & \text{если } h^{(i)} \in \mathfrak{h}^{(i)}, h^{(j)} \in \mathfrak{h}^{(j)}, \\ [h^{(i)}, E_\alpha^{(j)}] &= (h^{(i)}|\alpha)' E_\alpha^{(i+j)}, & \text{если } h^{(i)} \in \mathfrak{h}^{(i)}, \alpha \in \Delta, \\ [E_\alpha^{(i)}, E_{-\alpha}^{(j)}] &= -\alpha^{(i+j)} (\text{соотв. } -\alpha), & \text{если } \alpha \in \Delta_s (\text{соотв. } \alpha \in \Delta_\ell), \\ [E_\alpha^{(i)}, E_\beta^{(j)}] &= 0, & \text{если } \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}, \\ [E_\alpha^{(i)}, E_\beta^{(j)}] &= (p+1)\varepsilon(\alpha', \beta') E_{\alpha+\beta}^{(i+j)}, & \text{если } \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \end{aligned}$$

где p такое же, как в (7.9.3).

c) Инволюция Шевалле ω и компактная инволюция ω_0 алгебры Ли $\mathfrak{g}(X_N)$ определяются соотношениями ($\alpha \in \Delta$):

$$\omega(E_\alpha) = E_{-\alpha}, \quad \omega(\alpha) = -\alpha; \quad \omega_0(E_\alpha) = E_{-\alpha}, \quad \omega_0(\alpha) = -\alpha.$$

d) Из c) и предложения 4.9 следует, что эрмитова форма $(\cdot|\cdot)_0$ положительно определена на $\mathfrak{g}(X_\ell)$, если X_ℓ конечного типа.

§7.10. Для приложений в гл. 8 займемся теперь оставшимся диаграммным автоморфизмом:

Случай 5: $Q(A_{2\ell}) : \bar{\mu}(v_i) = -v_{2\ell+2-i}$.

В этом случае не существует $\bar{\mu}$ -инвариантной ориентации; вместо нее мы рассмотрим ориентацию $0 \rightarrow \dots \rightarrow 0$. Тогда диаграммный автоморфизм μ алгебры Ли $\mathfrak{g}(A_{2\ell})$ задается формулами

$$(7.10.1) \quad \mu(\alpha) = \bar{\mu}(\alpha), \quad \mu(E'_\alpha) = (-1)^{1+\text{ht } \alpha} E'_{\bar{\mu}(\alpha)}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta_\ell & (\text{соотв. } \Delta_s) \\ &= \{ \tfrac{1}{2}(\alpha' + \bar{\mu}(\alpha')) \mid \alpha' \neq \bar{\mu}(\alpha') \text{ и } (\alpha'|\bar{\mu}(\alpha'))' = 0 \text{ (соотв. } \neq 0) \}, \\ \Delta &= \Delta_\ell \cup \Delta_s, \\ E_\alpha &= E'_{\alpha'} - (-1)^{\text{ht } \alpha} E'_{\bar{\mu}(\alpha')}, \text{ если } \alpha \in \Delta_\ell, \\ E_\alpha &= \sqrt{2}(E'_{\alpha'} - (-1)^{\text{ht } \alpha} E'_{\bar{\mu}(\alpha')}), \text{ если } \alpha \in \Delta_s, \\ \mathfrak{h} &= \{h \in \mathfrak{h}' \mid \mu(h) = h\}, \quad \mathfrak{h}^{(1)} = \{h \in \mathfrak{h}' \mid \mu(h) = -h\}, \\ \mathfrak{g} &= \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E_\alpha \right), \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= \mathfrak{h}^{(1)} \oplus \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Delta' \\ \alpha \neq \mu(\alpha)}} \mathbb{C}(E'_\alpha + (-1)^{\text{ht } \alpha} E'_{\bar{\mu}(\alpha)}) \right) \oplus \left(\sum_{\substack{\alpha \in \Delta' \\ \alpha = \mu(\alpha)}} \mathbb{C} E_\alpha \right). \end{aligned}$$

Тогда мы получаем следующее продолжение предложения 7.9.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.10. а) $\mathfrak{g}(A_{2\ell}) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$.

б) $\mathfrak{g}$ является простой алгеброй Ли типа B_ℓ , и ее коммутационные соотношения задаются формулами (7.9.3).

в) Нормализованная билинейная форма $(\cdot|\cdot)$ на $\mathfrak{g}$ определяется соотношениями

$$(h|h') = 4(h|h')'|_{\mathfrak{h}}, \quad (h|E_\alpha) = 0, \quad \text{если } h, h' \in \mathfrak{h}, \alpha \in \Delta, \\ (E_\alpha|E_\beta) = -4\delta_{\alpha, -\beta} \text{ (соотв. } -8\delta_{\alpha, -\beta}), \quad \text{если } \alpha \in \Delta_\ell \text{ (соотв. } \in \Delta_s).$$

д) То же утверждение, что в предложении 7.9д) (при $r = 2$).

е) Множество простых корней Π имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha'_1 + \alpha'_{2\ell}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\alpha'_2 + \alpha'_{2\ell-1}), \dots, \quad \alpha_\ell = \frac{1}{2}(\alpha'_\ell + \alpha'_{\ell+1}).$$

ф) Пусть $\Pi_\ell = \Pi \cap \Delta_\ell$, $\Pi_s = \Pi \cap \Delta_s$; тогда $\Pi^\vee = 2\Pi_\ell \cup 4\Pi_s$.

г) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \mathfrak{g}^{(1)}$, и $\mathfrak{g}$ -модуль $\mathfrak{g}^{(1)}$ является неприводимым со старшим весом $(= -\text{младший вес}) \theta_0 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + 2\alpha_\ell$. $\square$

Замечание 7.10. Если положить $E_\alpha^{(0)} = E_\alpha$, $E_\alpha^{(1)} = E'_\alpha + (-1)^{\text{ht } \alpha} E'_{\bar{\mu}(\alpha')}$ при $\alpha \in \Delta_\ell$, $E_\alpha^{(1)} = \sqrt{2}(E'_\alpha + (-1)^{\text{ht } \alpha} E'_{\bar{\mu}(\alpha')})$ при $\alpha \in \Delta_s$, $\Delta_m = \{\alpha \in \Delta' \mid \bar{\mu}(\alpha) = \alpha\}$, $E_\alpha^{(1)} = E'_\alpha$ при $\alpha \in \Delta_m$, то формулы (7.9.3) продолжают таким же образом, как описано в замечании 7.9.

§7.11. Обобщенная матрица Картана бесконечного порядка называется *бесконечной аффинной матрицей*, если каждый из ее главных миноров конечного порядка положителен. В силу теоремы 4.8а) ясно, что полный список бесконечных аффинных матриц имеет следующий вид (см. упр. 4.14):

$$A_\infty, A_{+\infty}, B_\infty, C_\infty \text{ и } D_\infty.$$

Пусть A — бесконечная аффинная матрица и $\mathfrak{g}'(A)$ — соответствующая алгебра Каца — Мули (определенная в замечании 1.5 для бесконечного n). Эти алгебры Ли называются *аффинными алгебрами бесконечного ранга*. Для этих алгебр Каца — Мули $\Delta = \Delta'^e$. Пусть $\alpha \in \Delta_+$; обозначим через $\alpha^\vee$ элемент из $\mathfrak{h}'$, такой, что $\alpha^\vee \in [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ и $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, и положим $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \in \mathfrak{h}' \mid \alpha \in \Delta\}$ — множество дуальных корней. Здесь мы дадим явную конструкцию этих алгебр Ли, которая обобщает обычную конструкцию классических конечномерных алгебр Ли. Мы построим для них некоторые пополнения и их центральные расширения, которые играют важную роль в теории вполне интегрируемых систем (см. гл. 14).

Обозначим через gl_∞ алгебру Ли всех комплексных матриц $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, таких, что число ненулевых элементов a_{ij} конечно, с обычной операцией коммутирования. Эта алгебра Ли действует стандартным образом на пространстве $\mathbb{C}^\infty$ всех векторов-столбцов $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, в которых лишь конечное число a_i отлично от нуля. Пусть $E_{ij} \in gl_\infty$ — матрица, содержащая 1 на i, j -м месте и 0 на всех остальных местах, и пусть $v_i \in \mathbb{C}^\infty$ — вектор-столбец, у которого на i -м месте стоит 1, а на остальных местах — нули, так что

$$E_{ij}(v_j) = v_i.$$

Пусть $A = A_\infty$; тогда $g'(A) = sl_\infty := \{a \in gl_\infty \mid \text{tr } a = 0\}$. Образующие Шевалле для $g'(A)$ имеют вид

$$e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i} \quad (i \in \mathbb{Z}),$$

и

$$\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} \quad (i \in \mathbb{Z})\}$$

есть множество дуальных простых корней. Тогда $\mathfrak{h}'$ состоит из диагональных матриц, а $\mathfrak{p}_+$ и $\mathfrak{p}_-$ — из верхнетреугольных и нижнетреугольных матриц соответственно. Через ϵ_i обозначим линейную функцию на $\mathfrak{h}'$, такую, что $\epsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij}$ ($j \in \mathbb{Z}$). Система корней и корневые подпространства для $g'(A)$, соответствующие ненулевым корням, примут следующий вид:

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_j \quad (i \neq j, i, j \in \mathbb{Z})\}; \quad \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C}E_{ij},$$

$\epsilon_i - \epsilon_j$ является положительным корнем, если и только если $i < j$.

Множество простых корней есть

$$\Pi = \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z})\},$$

а множество положительных дуальных корней —

$$(7.11.1) \quad \Delta_+^\vee = \Pi^\vee \cup \{\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee, \text{ где } i < j, i, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Для случая $A = A_{+\infty}$ описание такое же, с заменой $\mathbb{Z}$ на $\mathbb{Z}_+$.

Оставшиеся аффинные алгебры бесконечного ранга типа X_∞ , где $X = B, C$ или D , являются подалгебрами в алгебре Ли gl_∞ и состоят из матриц, сохраняющих билинейную форму X , т. е.

$$g'(X_\infty) = \{a \in g'(A_\infty) \mid X(a(u), v) + X(u, a(v)) = 0 \text{ для всех } u, v \in \mathbb{C}^\infty\}.$$

Эти билинейные формы определяются равенствами

$$\begin{aligned} B(v_i, v_j) &= (-1)^i \delta_{i, -j} \quad (i, j \in \mathbb{Z}), \\ C(v_i, v_j) &= (-1)^i \delta_{i, -j+1} \quad (i, j \in \mathbb{Z}), \\ D(v_i, v_j) &= \delta_{i, -j+1} \quad (i, j \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Ниже мы описываем образующие Шевалле e_i, f_i ($i \in \mathbb{Z}_+$), множество дуальных простых корней $\Pi^\vee$, систему корней Δ , множество простых корней Π и множество положительных дуальных корней $\Delta_+^\vee$ для $\mathfrak{g}'(A)$, где $A = B_\infty, C_\infty$ или D_∞ . Во всех случаях $\mathfrak{h}'$ состоит из диагональных матриц, а $\mathfrak{p}_+$ и $\mathfrak{p}_-$ — из верхнетреугольных и нижнетреугольных матриц соответственно.

$$\begin{aligned}
 B_\infty : e_0 &= E_{0,1} + E_{-1,0}, \quad e_i = E_{i,i+1} + E_{-i-1,-i}, \\
 f_0 &= 2(E_{1,0} + E_{0,-1}), \quad f_i = E_{i+1,i} + E_{-i,-i-1} \quad (i = 1, 2, \dots); \\
 \Pi^\vee &= \{\alpha_0^\vee = 2(E_{-1,-1} - E_{1,1}), \quad \alpha_i^\vee = E_{i,i} + E_{-i-1,-i-1} \\
 &\quad - E_{i+1,i+1} - E_{-i,-i} \quad (i = 1, 2, \dots)\}; \\
 \Delta &= \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \quad (i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+), \quad \pm \epsilon_i \quad (i \in \mathbb{Z}_+)\}; \\
 \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} &= \mathbb{C}(E_{i,j} - (-1)^{i+j} E_{-j,-i}), \quad i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}; \\
 \Pi &= \{\alpha_0 = -\epsilon_1, \quad \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)\}; \\
 \Delta_+^\vee &= \Pi^\vee \cup \{\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \quad (i < j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+), \\
 &\quad \alpha_0^\vee + 2\alpha_1^\vee + \dots + 2\alpha_i^\vee \\
 &\quad + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \quad (i \leq j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+)\}.
 \end{aligned}$$

Здесь мы считаем, что ϵ_i ограничены на $\mathfrak{h}'$, так что $\epsilon_i = -\epsilon_{-i}$.

$$\begin{aligned}
 C_\infty : e_0 &= E_{0,1}, \quad e_i = E_{i,i+1} + E_{-i,-i+1}, \\
 f_0 &= E_{1,0}, \quad f_i = E_{i+1,i} + E_{-i+1,-i} \quad (i = 1, 2, \dots); \\
 \Pi^\vee &= \{\alpha_0^\vee = E_{00} - E_{11}, \quad \alpha_i^\vee = E_{i,i} + E_{-i,-i} - E_{i+1,i+1} \\
 &\quad - E_{-i+1,-i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)\}; \\
 \Delta &= \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j, \quad \pm 2\epsilon_i \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots)\}; \\
 \mathfrak{g}_{2\epsilon_i} &= \mathbb{C}E_{i,-i+1}, \quad \mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C}(E_{ij} - (-1)^{i+j} E_{-j+1,-i+1}); \\
 \Pi &= \{\alpha_0 = -2\epsilon_1, \quad \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)\}; \\
 \Delta_+^\vee &= \Pi^\vee \cup \{\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \quad (i < j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+), \\
 &\quad 2\alpha_0^\vee + \dots + 2\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \quad (i < j, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+)\}.
 \end{aligned}$$

Здесь также предполагается, что функции ϵ_i ограничены на $\mathfrak{h}'$, так что $\epsilon_i = -\epsilon_{-i+1}$.

$$\begin{aligned}
 D_\infty : e_0 &= E_{0,2} - E_{-1,1}, \quad e_i = E_{i,i+1} - E_{-i,-i+1}, \\
 f_0 &= E_{2,0} - E_{1,-1}, \quad f_i = E_{i+1,i} - E_{-i+1,-i} \quad (i = 1, 2, \dots); \\
 \Pi^\vee &= \{\alpha_0^\vee = E_{0,0} + E_{-1,-1} - E_{2,2} - E_{1,1}, \\
 &\quad \alpha_i^\vee = E_{i,i} + E_{-i,-i} - E_{i+1,i+1} \\
 &\quad - E_{-i+1,-i+1} \quad (i = 1, 2, \dots)\}; \\
 \Delta &= \{\pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \quad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots)\};
 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{g}_{\epsilon_i - \epsilon_j} = \mathbb{C}(E_{ij} - E_{-j+1, -i+1});$$

$$\Pi = \{\alpha_0 = -\epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots)\};$$

$$\Delta_+^\vee = \Pi^\vee \cup \{\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \ (1 \leq i < j),$$

$$\alpha_0^\vee + \alpha_2^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \ (j = 2, 3, \dots),$$

$$\alpha_0^\vee + \alpha_1^\vee + 2\alpha_2^\vee$$

$$+ \dots + 2\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee + \dots + \alpha_j^\vee \ (1 \leq i < j)\}.$$

Как и в предыдущих случаях, мы предполагаем здесь, что функции ϵ_i ограничены на $\mathfrak{h}'$, так что $\epsilon_i = -\epsilon_{-i+1}$.

§7.12. Теперь мы займемся описанием пополнения и его центрального расширения для аффинной алгебры бесконечного ранга. Рассмотрим сначала более общую ситуацию. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ — бесконечная обобщенная матрица Картана, такая, что каждая ее строка (и, следовательно, столбец) содержит лишь конечное число ненулевых элементов. Пусть $\mathfrak{g}'(A) = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}'_{\alpha}$ — соответствующая алгебра Каца

— Муди. Обозначим через $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ подпространство в $\prod_{\alpha} \mathfrak{g}'_{\alpha}$, состоящее из выражений вида $u = \sum_{\alpha} a_{\alpha} e_{\alpha}$, где $a_{\alpha} \in \mathbb{C}$, $e_{\alpha} \in \mathfrak{g}'_{\alpha}$, таких, что

множество $\{j | j = h t \alpha \text{ при } a_{\alpha} \neq 0\}$ конечно. Ясно, что мы можем продолжить скобку с $\mathfrak{g}'(A)$ на $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ по линейности. Алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ содержит $\bar{\mathfrak{h}} := \prod_{i \in I} \mathbb{C} \alpha_i^\vee$, пополненную подалгебру Картана.

Через $\bar{\mathfrak{gl}}_{\infty}$ обозначим алгебру Ли всех комплексных матриц $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, таких, что $a_{ij} = 0$, если число $|i - j|$ достаточно большое, с обычной операцией коммутирования. Она действует стандартным образом на векторном пространстве $\mathbb{C}^{\infty}$ столбцов $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, где все a_i , за исключением конечного числа, равны нулю.

Если A — бесконечная аффинная матрица типа $X_{\infty} = A_{\infty}$ (соответственно B_{∞} , C_{∞} или D_{∞}), то мы будем обозначать $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ через $\bar{\mathfrak{x}}_{\infty}$. Понятно, что $\bar{\mathfrak{x}}_{\infty}$ изоморфна $\bar{\mathfrak{gl}}_{\infty}$ (соответственно подалгебре в $\bar{\mathfrak{gl}}_{\infty}$, состоящей из матриц, сохраняющих билинейные формы B , C или D). *Полненная аффинная алгебра бесконечного ранга*, обозначаемая через $\mathfrak{x}_{\infty}$, есть центральное расширение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{x}}_{\infty}$, которое определяется следующим образом.

На алгебре Ли $\bar{\mathfrak{x}}_{\infty}$ имеется 2-коцикл ψ , заданный соотношениями

$$\psi(E_{ij}, E_{ji}) = 1 = -\psi(E_{ji}, E_{ij}), \text{ если } i \leq 0 \text{ и } j \geq 1,$$

(7.12.1)

$$\psi(E_{ij}, E_{mn}) = 0 \text{ в противном случае.}$$

Легко проверить, что это действительно коцикл (см. упр. 7.17). Тогда, если $A = A_{\infty}$ (соответственно B_{∞} , C_{∞} или D_{∞}), мы положим $r = 1$

(соответственно $\frac{1}{2}$, 1 или $\frac{1}{2}$), и пусть $x_\infty = \bar{x}_\infty \oplus \mathbb{C}K$ — алгебра Ли со скобкой

$$[a \oplus \lambda K, b \oplus \mu K] = (ab - ba) \oplus \tau\psi(a, b)K \quad (a, b \in \bar{x}_\infty; \lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

Элементы $e_i, f_i \in \mathfrak{g}'(X_\infty) \subset x_\infty$ (определенные выше) называются образующими Шевалле для x_∞ , а $\bar{h} = \bar{h} + \mathbb{C}K$ называется подалгеброй Картана. Элементы множества $\tilde{\Pi}^\vee = \{\tilde{\alpha}_0^\vee = \alpha_0^\vee + K, \tilde{\alpha}_i^\vee = \alpha_i^\vee \text{ для } i \neq 0\}$ называются дуальными простыми корнями. Легко увидеть, что выполняются обычные соотношения

$$[\tilde{\alpha}_i^\vee, \tilde{\alpha}_j^\vee] = 0, [e_i, f_j] = \delta_{ij} \tilde{\alpha}_i^\vee, [\tilde{\alpha}_i^\vee, e_j] = a_{ij} e_j,$$

$$[\tilde{\alpha}_i, f_j] = -a_{ij} f_j, (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0.$$

Замечание 7.12. Образующие Шевалле $\{e_i, f_i\}_{i \in I}$ порождают подалгебру $(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{C} \tilde{\alpha}_i^\vee) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha)$ в x_∞ , изоморфную $\mathfrak{g}'(A)$. Это вытекает из следствия 5.11b). Отметим, что главная градуировка $\mathfrak{g}'(A)$ естественным образом продолжается до градуировки x_∞ , называемой ее *главной* градуировкой.

Для канонического центрального элемента справедливы следующие формулы:

$$a_\infty : \quad K = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{\alpha}_i^\vee;$$

$$b_\infty : \quad K = \tilde{\alpha}_0^\vee + 2 \sum_{i \geq 1} \tilde{\alpha}_i^\vee;$$

$$c_\infty : \quad K = \sum_{i \geq 0} \tilde{\alpha}_i^\vee;$$

$$d_\infty : \quad K = \tilde{\alpha}_0^\vee + \tilde{\alpha}_1^\vee + 2 \sum_{i \geq 2} \tilde{\alpha}_i^\vee.$$

§7.13. Упражнения

7.1. Пусть $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ — ее конечномерная диагонализируемая подалгебра и $\mathfrak{p} = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{p}_\alpha$ — разложение на корневые подпространства. Покажите, что любой $\mathbb{C}$ -значный 2-коцикл ψ на $\mathfrak{p}$ эквивалентен коциклу ψ_0 (т. е. $\psi(x, y) - \psi_0(x, y) = f([x, y])$ для некоторого $f \in \mathfrak{p}^*$ и всех $x, y \in \mathfrak{p}$), такому, что $\psi_0(\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta) = 0$ для $\alpha + \beta \neq 0$.

[$\mathfrak{p}$ действует на пространстве всех 2-коциклов естественным образом, так что $\mathfrak{h}$ действует диагональными операторами. Покажите, что собственный вектор с ненулевым собственным значением эквивалентен нулю.]

7.2. Пусть $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли с инвариантной симметрической билинейной $\mathbb{C}$ -значной формой $(\cdot|\cdot)$ и d — дифференцирование $\mathfrak{p}$, такое, что $(d(x)|y) = -(x|d(y))$, $x, y \in \mathfrak{p}$. Покажите, что $\psi(x, y) := (d(x)|y)$ есть 2-коцикл на $\mathfrak{p}$. Пусть $\hat{\mathfrak{p}}'$ — соответствующее центральное расширение. Покажите, что d можно поднять до дифференцирования алгебры Ли $\hat{\mathfrak{p}}$, так что мы получим алгебру Ли $\hat{\mathfrak{p}} = \hat{\mathfrak{p}}' + \mathbb{C}d$.

7.3. Пусть $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли с невырожденной инвариантной билинейной $\mathbb{C}$ -значной формой $(\cdot|\cdot)$. Пусть R — коммутативная ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра с единицей и f — линейный функционал на R . Продолжим форму $(\cdot|\cdot)$ на комплексную алгебру Ли $\bar{\mathfrak{p}} = R \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}$, полагая

$$(r_1 \otimes p_1 | r_2 \otimes p_2) = f(r_1 r_2)(p_1 | p_2).$$

Пусть a — дифференцирование R ; продолжим его до дифференцирования $D = a \otimes 1$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{p}}$. Покажите, что

$$(D(x)|y) = -(x|D(y)),$$

если и только если $f|_{a(R)} = 0$. Примените конструкцию упр. 7.2 к $\bar{\mathfrak{p}}$, где $R = \mathcal{L}$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, $f(r) = \text{Res } r$, $a = \frac{d}{dt}$, и покажите, что получается нескрученная аффинная алгебра Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$.

7.4. Пусть R то же, что в упр. 7.3, и $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Покажите, что

$$\text{der}(R \otimes \mathfrak{g}) = (\text{der } R) \otimes I_{\mathfrak{g}} + R \otimes \text{der } \mathfrak{g}.$$

[Выберем базис r_i в R и запишем $d(1 \otimes x) = \sum_i r_i \otimes d_i(x)$, $x \in \mathfrak{g}$. Покажите, что $d_i \in \text{der } \mathfrak{g}$. Заменяя d на $d - \sum_i r_i \otimes d_i$, мы можем предполагать, что $d(1 \otimes x) = 0$, $x \in \mathfrak{g}$. Взяв вместо $\mathfrak{g}$ ее ассоциативную обертывающую алгебру, получим $d(P \otimes x) = d(P \otimes 1)(1 \otimes x) = (1 \otimes x)d(P \otimes 1)$. Выведите, что $d \in (\text{der } R) \otimes 1$.]

7.5. Выведите из упр. 7.4, что для конечномерной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$\text{der } \mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{d} + \text{ad } \mathcal{L}(\mathfrak{g}).$$

7.6. Пусть $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли с невырожденной инвариантной билинейной формой $(\cdot|\cdot)$ и $u_1, u_2, \dots$ — ее ортонормированный базис. Пусть ψ есть $\mathbb{C}$ -значный 2-коцикл на $\mathfrak{p}$, такой, что для каждого i лишь конечное число чисел $\psi(u_i, u_j)$ отлично от нуля. Покажите, что ψ представляет собой коцикл, описанный в упр. 7.2.

7.7. Докажите, что любой 2-коцикл на алгебре Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ эквивалентен коциклу $\lambda\psi$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и ψ описан в §7.2.

[Используйте действие d_0 на пространстве 2-коциклов и примените упр. 7.6, 7.4, 7.3.]

7.8. Покажите, что $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ есть универсальное центральное расширение алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ (ср. упр. 3.14).

[Используйте упр. 7.7.]

7.9. Покажите, что $\mathbb{C}$ -значный 2-коцикл на комплексной алгебре Ли $\mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_s, t_s^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ — конечномерная простая алгебра Ли, эквивалентен коциклу α_D , где $D = \sum_i P_i \frac{\partial}{\partial t_i}$ и $\sum_i \frac{\partial P_i}{\partial t_i} = 0$, заданному соотношением

$$\alpha_D(P \otimes x, Q \otimes y) = (\text{коэффициент при } (t_1 \dots t_s)^{-1} \text{ в } D(P)Q)(x|y).$$

7.10. Рассмотрим билинейную форму

$$(x|y) = \text{tr}(xy), \text{ если } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \text{ или } \mathfrak{sp}_n, \text{ и}$$

$$(x|y) = \frac{1}{2} \text{tr}(xy), \text{ если } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n, \quad n > 4.$$

Проверьте, что $|\theta|^2 = 2$, так что «нормализованный» коцикл ψ на $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ записывается в виде

$$\psi(a, b) = \text{Res tr} \left(\frac{da}{dt} b \right), \text{ если } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \text{ или } \mathfrak{sp}_n,$$

$$\psi(a, b) = \frac{1}{2} \text{Res tr} \left(\frac{da}{dt} b \right), \text{ если } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n, \quad n > 4.$$

Покажите, что нормализованная стандартная билинейная форма на $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ задается соотношениями

$$(a|b) = \text{постоянный член в } \text{tr}(ab), \text{ если } \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n \text{ или } \mathfrak{sp}_n,$$

$$(a|b) = \frac{1}{2} (\text{постоянный член в } \text{tr}(ab)), \text{ если } \mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n, \quad n > 4.$$

7.11. Пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathbb{C})$. Сохраним все обозначения из упр. 1.13 и добавим знак $\circ$ сверху: $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}, \overset{\circ}{\mathfrak{h}}, \overset{\circ}{\Pi}$ и $\overset{\circ}{\Pi}^\vee$. Имеем $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{L})$. Покажите, что пространство $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{sl}_{\ell+1}(\mathcal{L}) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ со скобкой

$$\begin{aligned} & [a(t) + \lambda K + \mu d, a_1(t) + \lambda_1 K + \mu_1 d] \\ &= (a(t)a_1(t) - a_1(t)a(t) + \mu t \frac{da_1(t)}{dt} - \mu_1 t \frac{da(t)}{dt}) \\ & \quad + \text{Res tr} \left(\frac{da(t)}{dt} a_1(t) \right) K \end{aligned}$$

есть аффинная алгебра типа $A_\ell^{(1)}$. Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0 \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$; продолжим $\epsilon_i \in \mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}$, полагая $\epsilon_i(K) = \epsilon_i(d) = 0$, и определим $\delta \in \mathfrak{h}^*$, как в §7.4. Пусть

$$e_0 = tE_{\ell+1,1}, \quad f_0 = t^{-1}E_{1,\ell+1}, \quad \alpha_0^\vee = K - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i^\vee.$$

Положим $\Pi = \{\alpha_0, \check{\Pi}\}$, $\Pi^\vee = \{\alpha_0^\vee, \check{\Pi}^\vee\}$. Покажите, что $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ есть реализация матрицы (типа $A_\ell^{(1)}$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ если } \ell = 1,$$

и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ если } \ell > 1.$$

Разложение на корневые подпространства для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ имеет вид

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\substack{i,j=1,\dots,\ell+1 \\ i \neq j, s \in \mathbb{Z}}} t^s E_{ij} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ s \neq 0}} t^s \mathfrak{h} \right).$$

Покажите, что $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}(A)$ с образующими Шевалле e_i, f_i ($i = 0, \dots, \ell$). Проверьте, что множество $\{\epsilon_i - \epsilon_j + s\delta \mid (i \neq j, s \in \mathbb{Z}); s\delta \mid (s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})\}$ является системой корней для $\mathfrak{g}(A)$. Покажите, что ее подалгебра $\mathfrak{n}_-$ (соответственно $\mathfrak{n}_+$) состоит из всех матриц из $sl_{\ell+1}(\mathbb{C}[t])$ (соответственно из $sl_{\ell+1}(\mathbb{C}[t^{-1}])$), таких, что элементы, находящиеся на диагонали или под ней (соответственно над ней), делятся на t (соответственно на t^{-1}). Покажите также, что инволюция Шевалле ω для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ определяется по правилу

$$\omega(a(t)) = -(\text{транспонированная матрица к } a(t^{-1})), \text{ если } a(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}), \\ \omega(K) = -K, \quad \omega(d) = -d.$$

7.12. Введем следующий базис в алгебре Ли $sl_2(\mathcal{L})$:

$$L_{3s} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^s & 0 \\ 0 & -t^s \end{pmatrix}, \quad L_{3s+1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & t^s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_{3s-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t^s & 0 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{Z}).$$

Тогда $[L_i, L_j] = c_{ij}L_{i+j}$ ($i, j \in \mathbb{Z}$), где

$c_{ij} = -1, 0$ или 1 , если соответственно $j - i \equiv -1, 0$ или $1 \pmod 3$.

7.13. Покажите, что на алгебре Ли $\mathfrak{d}$ нельзя ввести ненулевую инвариантную билинейную форму. Выведите из упр. 7.1, что любой $\mathbb{C}$ -значный 2-коцикл на $\mathfrak{d}$ эквивалентен коциклу ψ , такому, что $\psi(d_i, d_j) = 0$ при $i + j \neq 0$. Обозначим через C_2° векторное пространство (над $\mathbb{C}$) таких циклов. Покажите, что $\dim C_2^\circ = 2$ и что коциклы ψ_1 и ψ_2 , определенные формулами

$$\psi_1(d_i, d_j) = \delta_{i, -j} j, \quad \psi_2(d_i, d_j) = \delta_{i, -j} j^3,$$

образуют базис C_2° . Выведите отсюда, что Vir является универсальным центральным расширением $\mathfrak{d}$.

7.14. Пусть E_γ ($\gamma \in \Delta$), $\alpha_i^\vee$ ($i = 1, \dots, \ell$) — базис Шевалле конечномерной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е.

$$\begin{aligned} [E_\gamma, E_{-\gamma}] &= \gamma^\vee, \quad [\gamma^\vee, \gamma^\vee] = 0, \quad [\gamma^\vee, E_\beta] = \langle \beta, \gamma^\vee \rangle E_\beta, \\ [E_\beta, E_\gamma] &= n_{\beta, \gamma} E_{\beta+\gamma}, \quad \text{где } n_{\beta, \gamma} \in \mathbb{Z}, \quad n_{\beta, \gamma} = -n_{-\gamma, -\beta}. \end{aligned}$$

(По поводу явного построения такого базиса см. §7.8 и 7.9.) Тогда элементы

$$\begin{aligned} E_{\gamma+k\delta} &= t^k \otimes E_\gamma \quad (k \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Delta), \\ E_{k\delta}^{(i)} &= t^k \otimes \alpha_i^\vee \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, i = 1, \dots, \ell), \\ &\alpha_i^\vee \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad K \text{ и } d \end{aligned}$$

образуют базис $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$. Выписывая все коммутационные соотношения, покажите, что $\mathbb{Z}$ -оболочка этого базиса замкнута относительно коммутирования. Он называется *базисом Шевалле* для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$.

7.15. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли и V — конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль. Мы можем естественным образом определить $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ -модуль $\bar{V} = \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} V$. Зафиксируем $\lambda \in \mathbb{C}$ и зададим действие π аффинной алгебры $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ на $\bar{V}$ по правилу

$$\pi|_{\mathcal{L}(\mathfrak{g})} \text{ остается прежним, } \pi(K) = 0, \quad \pi(d) = t \frac{d}{dt} \otimes 1 + \lambda 1_V.$$

Покажите, что это интегрируемый $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ -модуль.

7.16. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, $(\cdot|\cdot)$ — нормализованная инвариантная форма, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, $\mathring{\Delta}_+$ — система положительных корней, $\mathring{\rho}$ — их полусумма, θ — старший корень. Выберем базис $u_1, \dots, u_\ell$ в $\mathfrak{h}$, а также дуальный к нему базис $u^1, \dots, u^\ell$. Для каждого $\alpha \in \mathring{\Delta}_+$ выберем корневые векторы e_α и $e_{-\alpha}$, такие, что $(e_\alpha|e_{-\alpha}) = 1$. Пусть $\mathring{\Omega}$ — оператор Казимира для $\mathfrak{g}$. Наконец, пусть $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ — нескрученная аффинная алгебра, соответствующая $\mathfrak{g}$, и положим $\rho = h^\vee \Lambda_0 + \mathring{\rho}$ (где $h^\vee$ есть дуальное число Кокстера для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$). Покажите, что

$$(\rho, \alpha_i^\vee) = 1 \quad (i = 0, \dots, \ell)$$

и что оператор Казимира Ω для аффинной алгебры $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ (см. гл. 2) может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= 2d(K + h^\vee) + \mathring{\Omega} \\ &+ 2 \sum_{n \geq 1} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathring{\Delta}} (t^{-n} \otimes e_{-\alpha})(t^n \otimes e_\alpha) + \sum_{i=1}^{\ell} (t^{-n} \otimes u^i)(t^n \otimes u_i) \right\}. \end{aligned}$$

7.17. Пусть $L_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} v_i$ — стандартная решетка в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Определим на $L_n \times L_n$ бимультимпликативную функцию ε , полагая

$$\varepsilon(v_j, v_k) = 1, \text{ если } j \leq k, \text{ и } = -1, \text{ если } j > k.$$

Покажите, что, ограничивая ее на корневые решетки $Q(A_\ell) \subset L_{\ell+1}^\bullet$ и $Q(D_\ell) \subset L_\ell$ (описанные в §6.7), мы получим функции асимметрии.

7.18. Пусть $\frac{1}{2}L_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} u_i$, где $u_i = \frac{1}{2}v_i$; определим на $(\frac{1}{2}L_n) \times (\frac{1}{2}L_n)$ бимультимпликативную функцию ε (продолжающую бимультимпликативную функцию из упр. 7.17) с помощью соотношения

$$\varepsilon(u_j, u_k) = 1, \text{ если } j \leq k, \text{ и } = e^{\frac{\pi i}{4}}, \text{ если } j > k.$$

Покажите, что ее ограничение на корневые решетки $Q(E_8)$ и $Q(E_7) \subset \frac{1}{2}L_8$ дает функции асимметрии. Аналогично, беря решетку $\frac{1}{2}L_6 + \mathbb{Z}u$ в $\mathbb{R}^7$, где $u = \frac{1}{\sqrt{2}}v_7$, и продолжая ε по правилу $\varepsilon(u, u_j) = \varepsilon(u, u) = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $\varepsilon(u_j, u) = 1$, мы получим функцию асимметрии для $Q(E_6)$.

7.19. Пусть $\mathfrak{p}$ — подалгебра в $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ конечной коразмерности, где $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли. Тогда существует ненулевой элемент $Q \in \mathcal{L}$, такой, что $\mathfrak{p} \supset Q\mathcal{L} \otimes \mathfrak{g}$.

[Покажите, что для подпространства V конечной коразмерности в $\mathcal{L}$ пространство V^2 содержит ненулевой идеал алгебры $\mathcal{L}$.]

7.20. Покажите, что присоединенное представление аффинной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathcal{L}) + \mathbb{C}K + \mathbb{C}d$ индуцирует присоединенное представление группы петель $G = SL_n(\mathcal{L})$ на $\mathfrak{g}$, которое задается формулой

$$(\text{Ad } a)(x + \lambda K + \mu d) \\ = (axa^{-1} - \mu ta'a^{-1}) + (\lambda + \text{Res tr}(a'xa^{-1} - \frac{1}{2}\mu t(a'a^{-1})^2)K + \mu d),$$

где $a \in G$, a' обозначает производную a по t , $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathcal{L})$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

[Используйте следующие факты: а) $\text{Ad } a$ сохраняет $(\cdot, \cdot)$; б) $[a, \frac{d}{dt}] = -a'$; в) $(\text{Ad } a)x \equiv axa^{-1} \pmod{\mathbb{C}K}$; д) $(\text{Ad } a)K = K$.]

7.21. Пусть $\overset{\circ}{G}$ — связная односвязная комплексная алгебраическая группа, которая действует точно на конечномерном комплексном векторном пространстве $\overset{\circ}{V}$. Это действие продолжается до действия группы петель $G := \overset{\circ}{G}(\mathcal{L})$ на $V := \mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \overset{\circ}{V}$. Пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли группы $\overset{\circ}{G}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ — ее подалгебра Картана, $\overset{\circ}{Q}^V \subset \overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ — дуальная корневая решетка, и пусть $V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}$ — разложение на весовые подпространства относительно $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$. Для $\gamma \in \overset{\circ}{Q}^V$ определим $t^{\gamma} \in \text{End}_{\mathcal{L}} V$ по правилу

$$t^{\gamma}(v_{\lambda}) = t^{(\lambda, \gamma)} v_{\lambda}.$$

Покажите, что $t^{\gamma} \in G$ и тем самым определяется инъективный гомоморфизм $f: \overset{\circ}{Q}^V \rightarrow G$. Покажите также, что, используя присоединенное действие G на $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$, мы получим

$$f(t^{\gamma}) \cdot (t^k \otimes e_{\alpha}) = t^{k + (\alpha, \gamma)} \otimes e_{\alpha} \quad (e_{\alpha} \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}_{\alpha}), \quad f(t^{\gamma})|_{\mathfrak{h}} = t_{-\gamma}.$$

(Таким образом, мы получаем каноническое вложение группы трансляций T в G .) Аналогично определяется инъективный гомоморфизм $f: \overset{\circ}{P}^V \rightarrow \text{Ad } G$ (где $\overset{\circ}{P}^V = \{h \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}} \mid \langle \alpha, h \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}\}$). Покажите, что действие группы $\tilde{T} := f(\overset{\circ}{P}^V)$ на $\tilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ задается теми же формулами. Покажите, что группа $\tilde{T}$ нормализует W и что $\widetilde{W} := W \ltimes \tilde{T}$ сохраняет $\overset{\circ}{Q}^V$ и $\overset{\circ}{Q}$. Проверьте, что группа $\widetilde{W}_+ = \{w \in \widetilde{W} \mid w(\Delta_+) \subset \Delta_+\}$ действует просто транзитивно на $(\text{Aut } A) \cdot \alpha_0^V$.

7.22. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, а R — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей. Пусть Ω_R^1 обозначает пространство всех формальных дифференциалов над R , т. е. выражений вида $f dg$, где $f, g \in R$, удовлетворяющих соотношению $d(fg) = f dg + g df$. Тогда универсальным центральным расширением комплексной алгебры Ли¹ $R \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ является

$$0 \rightarrow \Omega_R^1/dR \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}_R := \mathfrak{g}_R \oplus (\Omega_R^1/dR) \rightarrow \mathfrak{g}_R \rightarrow 0,$$

где скобка на $\bar{\mathfrak{g}}_R$ определяется по правилу

$$[r_1 \otimes g_1, r_2 \otimes g_2] = r_1 r_2 \otimes [g_1, g_2] + (g_1 | g_2) r_1 dr_2 \mod dR.$$

(Это обобщение упр. 7.9.)

7.23. Пусть $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n z^{-n-2}$ — производящая функция для Vir.

Покажите, что $[d_m, T(z)] = z^m (z \frac{d}{dz} + 2(m+1))T(z) + \frac{m^3-m}{12} z^{m-2} c$. ($T(z)$ называется тензором энергии-импульса. Он является первичным полем, если и только если «конформная аномалия» c равна нулю.)

7.24. Рассмотрим представление алгебры Ли $\mathfrak{d}$ (= представление Vir с $c = 0$) на пространстве $U_{\alpha, \beta}$ «плотностей» вида $P(t)t^\alpha(dt)^\beta$, где α, β — некоторые числа и $P(t) \in \mathcal{L}$. Покажите, что в базисе $v_k = t^{k+\alpha}(dt)^\beta$ это представление выглядит следующим образом:

$$d_n(v_k) = -(k + \alpha + \beta + \beta n)v_{n+k}.$$

Покажите, что $F(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_k z^{-k-\Delta}$, где $F_k: V \rightarrow V_1$, является первич-

ным полем конформного веса Δ , если и только если отображение $F: U_{\Delta-1, 1-\Delta} \otimes V \rightarrow V_1$, определенное формулой $F(v_k \otimes v) = F_k(v)$, есть гомоморфизм Vir-модулей.

7.25. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, соответствующая диаграмме Дынкина с простыми ребрами, построенная в §7.8. Для $\alpha \in \Delta$ положим

$$R_\alpha = (\exp - \text{ad } E_{-\alpha})(\exp - \text{ad } E_\alpha)(\exp - \text{ad } E_{-\alpha}).$$

Покажите, что $R_\alpha|_{\mathfrak{h}} = r_\alpha$, $R_\alpha(E_\beta) = -\varepsilon(\alpha, \beta)E_{r_\alpha(\beta)}$, если $(\alpha|\beta) \neq 0$, и $R_\alpha(E_\beta) = E_\beta$ в противном случае.

7.26. Пусть $\varepsilon(\alpha, \beta)$ есть 2-коцикл на Q со значениями в $\{\pm 1\}$, т. е.

$$\varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\alpha + \beta, \gamma) = \varepsilon(\beta, \gamma)\varepsilon(\alpha, \beta + \gamma) \text{ для } \alpha, \beta \in Q,$$

$$\varepsilon(0, 0) = 1 \text{ (и, следовательно, } \varepsilon(0, \alpha) = \varepsilon(\alpha, 0) = 1 \text{ для } \alpha \in Q);$$

кроме этого, предположим, что

$$\varepsilon(\alpha, -\alpha) = (-1)^{\frac{1}{2}(\alpha|\alpha)} \text{ и } \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\beta, \alpha) = (-1)^{(\alpha|\beta)}, \alpha, \beta \in Q.$$

Тогда предложение 7.8 будет по-прежнему справедливо.

¹ Обозначаемой через $\mathfrak{g}_R$. — Прим. ред.

7.27. Пусть Q — корневая решетка простой алгебры Ли, соответствующей диаграмме Дынкина с простыми ребрами, и пусть $B: Q \times Q \rightarrow \mathbb{Z}$ — билинейная форма, такая, что

$$B(\alpha, \beta) + B(\beta, \alpha) = (\alpha | \beta).$$

Тогда $\varepsilon(\alpha, \beta) = (-1)^{B(\alpha, \beta)}$ является функцией асимметрии. Запишем формулу $B(\alpha, \beta) = (R\alpha | \beta)$. Тогда условия на B эквивалентны тому, что $R(Q) \subset Q^*$ и $R + R^* = I$. Покажите, что если $w \in \text{Aut } Q$ таков, что $Q \subset (1 - w)Q^*$, то $R = 1 - w$ удовлетворяет этим условиям. Покажите, что элемент Кокстера обладает указанным выше свойством.

7.28. Пусть $V = V_- \oplus V_+$ — векторное пространство над $\mathbb{C}$ (вообще говоря, бесконечномерное), представленное как прямая сумма двух подпространств. Пусть $gl_*(V)$ обозначает алгебру Ли эндоморфизмов V , имеющих вид $a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ относительно разложения, указанного выше, где $a_3: V_- \rightarrow V_+$ имеет конечный ранг. Покажите, что

$$f(a, b) := \text{tr}_{V_-} a_2 b_3 - \text{tr}_{V_-} b_2 a_3$$

является 2-коциклом на алгебре Ли $gl_*(V)$. Проверьте, что ограничение этого коцикла на подалгебру эндоморфизмов конечного ранга тривиально. Покажите, что для $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} v_i$, $V_- = \sum_{i > 0} \mathbb{C} v_i$, $V_+ = \sum_{i \leq 0} \mathbb{C} v_i$

коцикл f , ограниченный на gl_∞ , совпадает с коциклом ψ , определенным в §7.12.

7.29. Пусть $V = \mathbb{C}[t, t^{-1}]^n$ — естественный $sl_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$ -модуль. Он продолжается до модуля над алгеброй Ли дифференциальных операторов $\mathfrak{a} = sl_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}, \frac{d}{dt}])$. Положим $V_+ = (t\mathbb{C}[t])^n$, $V_- = (\mathbb{C}[t^{-1}])^n \subset V$. Покажите, что ограничение коцикла f из упр. 7.28 на подалгебру $\mathfrak{a} \subset gl_*(V)$ дается следующей формулой ($\ell, \ell' \in \mathbb{Z}_+$, $m, m' \in \mathbb{Z}$, $a, a' \in gl_n(\mathbb{C})$):

$$f\left(t^{\ell+m}\left(\frac{d}{dt}\right)^\ell \otimes a, t^{\ell'+m'}\left(\frac{d}{dt}\right)^{\ell'} \otimes a'\right) = \delta_{m, -m'} (\text{tr } aa') (-1)^{\ell \ell' \ell'!} \binom{m+\ell}{\ell+\ell'+1}.$$

§7.14. Библиографические замечания и комментарии

За исключением явной формулы для центрального расширения, реализация нескрученных аффинных алгебр Ли была дана Кацем [1968 В] и Мууди (Moody [1969]). Формула для коцикла была известна физикам в течение столь долгого времени, что трудно определить первоисточник. Предложение 7.8 (в том виде, как это сформулировано в упр. 7.26) принадлежит Френкелю и Касу (Frenkel — Кас [1980]).

Алгебра Вирасоро (впервые исследована Вирасоро (Virasoro [1970])) играет ключевую роль в теории струн (см., например, Mandelstam [1974], Schwartz [1973, 1982]). Математики начали развивать теорию представлений алгебры Вирасоро совсем недавно (Кас [1978 В, 1979, 1982 В], Frenkel — Кас [1980], Segal [1981], Фейгин — Фукс [1982, 1983 А, В, 1984 А, В] и др.). Обзор некоторых из этих результатов можно найти в книге Кас — Раина [1987].

Недавно эти вопросы стали предметом внимания физиков в связи со статистической механикой и оживлением в теории струн. Конформно инвариантная теория поля, которая является основой обоих этих замечательных направлений, возникла в работах Белавина, Полякова и Замолодчикова [1984 А, В]. Понятие первичного поля, которое кратко обсуждалось в §7.7, — ключевое понятие этой теории. Обзор недавних достижений в теории струн можно найти в двухтомнике Green — Schwartz — Witten [1987].

Упражнение 7.2 принадлежит Купершмидту (Kupershmidt [1984]) и Цукерману (неопубликовано). Первое известное мне опубликованное доказательство упр. 7.7 и 7.8 содержится в работе Garland [1980]. Упражнение 7.14 принадлежит Гарланду (Garland [1978]). В этой статье Гарланд подробно изучает $\mathbb{Z}$ -форму универсальной обертывающей алгебры для аффинной алгебры Ли. Упражнения 7.28 и 7.29 взяты из работы Кас — Peterson [1981], упр. 7.19 — из работы Coley [1983], упр. 7.20 — из работ Frenkel [1984], Segal [1981] и Кас — Peterson [1984 В] и упр. 7.22 — из работы Kassel [1984]. Оставшаяся часть гл. 7 вполне стандартна.

В последнее время появилось некоторое количество работ, в которых рассматриваются группы, соответствующие аффинным алгебрам. Такая группа является центральным расширением с помощью $\mathbb{C}^\times$ группы полиномиальных (или аналитических и т. д.) отображений $\mathbb{C}^\times$ в комплексную простую конечномерную группу Ли. Соответствующая «компактная форма» есть центральное расширение с помощью окружности группы полиномиальных (или аналитических, или $\mathbb{C}^\infty$ и т. д.) петель на связной односвязной компактной группе Ли. Таким образом, имеется целый ряд групп, соответствующих аффинной алгебре Ли (или некоторому ее пополнению). Группа полиномиальных отображений есть, естественно, минимальная соответствующая группа; она является частным случаем групп, которые рассматривались в §3.15. Различные аспекты теории групп петель можно найти в работах Garland [1980], Frenkel [1984], Pressley [1980], Segal [1981], Atiyah — Pressley [1983], Goodman — Wallach [1984 А], Кас — Peterson [1984 В, 1985 В, 1987], Freed [1985], Pressley — Segal [1986], Mitchell [1987, 1988], Kazhdan — Lusztig [1988], Mickelsson [1987] и др.

Глава 8. Скрученные аффинные алгебры и автоморфизмы конечного порядка

§8.0. Здесь мы опишем реализацию оставшихся «скрученных» аффинных алгебр. Оказывается, она тесно связана с алгеброй Ли эквивариантных полиномиальных отображений из $\mathbb{C}^x$ в простую конечномерную алгебру Ли с действием конечной циклической группы. В качестве побочного результата этой конструкции мы получим удобное описание автоморфизмов конечного порядка простой конечномерной алгебры Ли и, в частности, классификацию симметрических пространств.

§8.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли и σ — ее автоморфизм, удовлетворяющий условию $\sigma^m = 1$ для положительного целого числа m . Положим $\epsilon = \exp \frac{2\pi i}{m}$. Тогда¹ каждое собственное значение σ имеет вид ϵ^j , $j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, и, поскольку σ диагоналируем, получаем разложение

$$(8.1.1) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j,$$

где $\mathfrak{g}_j$ — собственное пространство для σ , соответствующее собственному значению ϵ^j . Ясно, что (8.1.1) является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировкой $\mathfrak{g}$. Обратно, если задана $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировка (8.1.1), то линейное преобразование алгебры Ли $\mathfrak{g}$, которое умножает векторы из $\mathfrak{g}_j$ на ϵ^j , есть автоморфизм σ этой алгебры Ли, удовлетворяющий условию $\sigma^m = 1$.

Пусть $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ — максимальная ад-диагонализируемая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$. Сначала мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 8.1. а) Пусть $(\cdot | \cdot)$ — невырожденная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Тогда $(\mathfrak{g}_i | \mathfrak{g}_j) = 0$, если $i + j \neq \bar{0}$, и $\mathfrak{g}_i$ и $\mathfrak{g}_j$ невырожденно спарены, если $i + j = \bar{0}$.

б) Центрилизатор $\mathfrak{z}$ подалгебры $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ в $\mathfrak{g}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$.

с) $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Для $x \in \mathfrak{g}_i$, $y \in \mathfrak{g}_j$ имеем $(x|y) = (\sigma(x)|\sigma(y)) = \epsilon^{i+j}(x|y)$ (форма $(\cdot | \cdot)$ Aut $\mathfrak{g}$ -инвариантна, будучи кратной форме

¹ Далее через $\bar{s}$ или через $s \bmod m$ обозначается класс вычетов из $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, содержащий $s \in \mathbb{Z}$, а через $\epsilon^{\bar{s}}$ — число ϵ^s (определенное, очевидно, корректно). — Прим. ред.

Киллинга), что доказывает первую часть а). Вторая часть выполнена в силу того, что форма $(\cdot | \cdot)$ невырождена.

Для доказательства б) заметим, что

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

где $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$, $\mathfrak{g}_{\alpha}$ — корневые подпространства относительно $\mathfrak{h}$ и сумма берется по $\alpha \in \Delta$, таким, что $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\bar{0}}} = 0$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{z} = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{s}$ есть σ -инвариантная полупростая подалгебра (= производная подалгебра для $\mathfrak{z}$), пересечение которой с $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ тривиально. Это, в частности, доказывает с). Таким образом, (8.1.1) индуцирует $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировку $\mathfrak{s} = \bigoplus_i \mathfrak{s}_i$, такую, что $\mathfrak{s}_{\bar{0}} = \{0\}$. отождествляя элементы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ с соответствующими целыми числами из множества $N_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ и полагая² $\mathfrak{s}_a = \mathfrak{s}_b$, если $b \in N_m$ и $a \equiv b \pmod{m}$, мы докажем индукцией по n , что³ $\mathfrak{s}_n = \mathfrak{s}_{-n} = 0$.

Нам известно, что $\mathfrak{s}_0 = 0$; пусть $n > 0$ и $x \in \mathfrak{s}_n$. Тогда $(\operatorname{ad} x)^r \mathfrak{s}_i \subset \mathfrak{s}_{nr+i}$. Подберем положительное целое число r так, чтобы выполнялись неравенства $n(r-1) < m-i \leq nr$. Тогда $nr+i = m+t$ при $0 \leq t < n$, и по предположению индукции $\mathfrak{s}_{nr+i} = \mathfrak{s}_t = 0$. Итак, $\operatorname{ad} x|_{\mathfrak{s}}$ нильпотентно; аналогично, $\operatorname{ad} y|_{\mathfrak{s}}$ нильпотентно, если $y \in \mathfrak{s}_{-n}$. Но $[\mathfrak{s}_n, \mathfrak{s}_{-n}] \subset \mathfrak{s}_0 = 0$, так что $\operatorname{ad} x$ и $\operatorname{ad} y$ коммутируют на $\mathfrak{s}$, и в силу нильпотентности $\operatorname{tr}_{\mathfrak{s}}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$. Теперь лемма 8.1а) (примененная к $\mathfrak{s}$) влечет за собой $\mathfrak{s} = 0$, что доказывает б). $\square$

Из леммы 8.1b) следует, что $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ содержит регулярный элемент, скажем x , алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Следовательно, централизатор $\mathfrak{h}$ элемента x в $\mathfrak{g}$ является σ -инвариантной подалгеброй Картана и сумма собственных подпространств оператора $\operatorname{ad} x$ с положительными собственными значениями (условимся, что $a \in \mathbb{C}$ положительно, если $\operatorname{Re} a > 0$ либо если $\operatorname{Re} a = 0$ и $\operatorname{Im} a > 0$) есть максимальная нильпотентная σ -инвариантная подалгебра $\mathfrak{n}_{+}$. Пусть Δ_{+} — соответствующее множество положительных корней. Таким образом, σ индуцирует автоморфизм Δ_{+} ; пусть μ — соответствующий диаграммный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\sigma\mu^{-1} = \exp(\operatorname{ad} h)$, где $h \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Поскольку подалгебры Картана в $\mathfrak{g}$ сопряжены, мы доказали тем самым следующее

Предложение 8.1. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана и $\Pi = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N\}$ — множество простых корней. Пусть $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ таков, что $\sigma^m = 1$. Тогда σ сопряжен с автоморфизмом $\mathfrak{g}$ вида

$$(8.1.2) \quad \mu \exp(\operatorname{ad} \frac{2\pi i}{m} h), \quad h \in \mathfrak{h}_{\bar{0}},$$

² Для любого $a \in \mathbb{Z}$. — Прим. ред.

³ Для любого $n \in \mathbb{Z}$. — Прим. ред.

где μ — диаграммный автоморфизм, сохраняющий $\mathfrak{h}$ и Π' , $\mathfrak{h}_0$ — множество его неподвижных точек в $\mathfrak{h}$ и $(\alpha'_i, h) \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, N$. $\square$

§8.2. Теперь мы сопоставим автоморфизму σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ подалгебру $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ в $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ следующим образом:

$$(8.2.1) \quad \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)_j, \text{ где } \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)_j = t^j \otimes \mathfrak{g}_{-j}.$$

Ясно, что разложение (8.2.1) является $\mathbb{Z}$ -градуировкой $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$.

Заметим, что $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ — это множество неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\sigma}$ алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, определенного по формуле

$$\tilde{\sigma}(t^j \otimes x) = (\epsilon^{-j} t^j) \otimes \sigma(x), \quad (j \in \mathbb{Z}, x \in \mathfrak{g}).$$

Следовательно, $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ можно отождествить с алгеброй Ли эквивалентных отображений (относительно действия $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$)

$$(\mathbb{C}^\times; \text{умножение на } \epsilon^{-1}) \rightarrow (\mathfrak{g}; \text{действие } \sigma).$$

Вспомним алгебру Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}K' \oplus \mathbb{C}d'$, определенную в §7.2 (здесь мы пишем K' и d' вместо K и d из соображений, которые станут ясны позже). Положим

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \oplus \mathbb{C}K' \oplus \mathbb{C}d'.$$

Это подалгебра в $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, которая является множеством неподвижных точек автоморфизма $\tilde{\sigma}$ алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, определенного соотношениями $\tilde{\sigma}|_{\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)} = \tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}(K') = K'$, $\tilde{\sigma}(d') = d'$. Ее производная алгебра Ли есть $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) := \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \oplus \mathbb{C}K'$. Отметим также, что $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, 1, 1) = \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, 1, 1) = \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ и $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, 1, 1) = \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$.

Положим $\deg K' = \deg d' = 0$; вместе с (8.2.1) это задает $\mathbb{Z}$ -градуировку для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$:

$$(8.2.2) \quad \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)_j.$$

§8.3. В следующих параграфах мы будем изучать структуру алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ для произвольного σ .

Здесь мы рассмотрим некоторые очень специальные примеры, позволяющие получить явную конструкцию всех *скрученных* аффинных алгебр, т. е. тех, которые перечислены в табл. Афф 2 и Афф 3.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{C} E'_\alpha)$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N , построенная в §7.8 и 7.9, с нормализованной инвариантной формой $(\cdot | \cdot)$. Пусть $\bar{\mu}$ — автоморфизм ее диаграммы Дынкина порядка r ($= 1, 2$ или 3) и μ — соответствующий диаграммный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Случай 0. Для $X_N = A_\ell, B_\ell, \dots, E_8$ и $r = 1$ пусть $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ — множество простых корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, занумерованное как в табл. Фин. Положим $E_i = E'_{\alpha_i}$, $F_i = -E'_{-\alpha_i}$, $H_i = \alpha_i^\vee$ ($i = 1, \dots, \ell$), $E_0 = E'_{-\theta}$, $F_0 = -E'_\theta$, $H_0 = \theta = \theta_0$.

Случаи 1–5. Пусть теперь $X_N = D_{\ell+1}, A_{2\ell-1}, E_6, D_4$ или $A_{2\ell}$ с таким же упорядочением множества индексов, как в табл. Фин, и пусть $r = 2, 2, 2, 3$ или 2 соответственно (это, очевидно, все возможные случаи при $\mu \neq 1$). Имеются соответствующие $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ -градуировки (описанные в предложениях 7.9а) и 7.10а) в несколько иных обозначениях):

$$(8.3.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1, \text{ если } r = 2, \text{ и } \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2, \text{ если } r = 3;$$

$$(8.3.2) \quad \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{h}_1, \text{ если } r = 2, \text{ и } \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_1 \otimes \mathfrak{h}_2, \text{ если } r = 3.$$

Пусть $\Pi' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_N\} \subset \mathfrak{h}$ — множество простых корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (занумерованное как в табл. Фин), $E'_i = \alpha'_i$, $F'_i = -E'_{-\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, N$) — ее образующие Шевалле и $H'_i = \alpha'^\vee_i$ — простые дуальные корни. Введем следующие элементы $\theta^0 \in \mathfrak{h}$ и E_i, F_i, H_i ($i = 0, \dots, \ell$) из $\mathfrak{g}$:

Случай 1: $X_N = D_{\ell+1}$, $r = 2$:

$$\theta^0 = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_\ell;$$

$$H_i = H'_i (1 \leq i \leq \ell - 1), H_\ell = H'_\ell + H'_{\ell+1}, H_0 = -\theta^0 - \bar{\mu}(\theta^0);$$

$$E_i = E'_i (1 \leq i \leq \ell - 1), E_\ell = E'_\ell + E'_{\ell+1}, E_0 = E'_{-\theta^0} - E'_{-\bar{\mu}(\theta^0)};$$

$$F_i = F'_i (1 \leq i \leq \ell - 1), F_\ell = F'_\ell + F'_{\ell+1}, F_0 = -E'_{\theta^0} + E'_{\bar{\mu}(\theta^0)}.$$

Случай 2: $X_N = A_{2\ell-1}$, $r = 2$:

$$\theta^0 = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_{2\ell-2};$$

$$H_i = H'_i + H'_{2\ell-i} (1 \leq i \leq \ell - 1), H_\ell = H'_\ell, H_0 = -\theta^0 - \bar{\mu}(\theta^0);$$

$$E_i = E'_i + E'_{2\ell-i} (1 \leq i \leq \ell - 1), E_\ell = E'_\ell, E_0 = E'_{-\theta^0} - E'_{-\bar{\mu}(\theta^0)};$$

$$F_i = F'_i + F'_{2\ell-i} (1 \leq i \leq \ell - 1), F_\ell = F'_\ell, F_0 = -E'_{\theta^0} + E'_{\bar{\mu}(\theta^0)}.$$

Случай 3: $X_N = E_6$, $r = 2$:

$$\theta^0 = \alpha'_1 + 2\alpha'_2 + 2\alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 + \alpha'_6;$$

$$H_1 = H'_1 + H'_5, H_2 = H'_2 + H'_4, H_3 = H'_3, H_4 = H'_6, H_0 = -\theta^0 - \bar{\mu}(\theta^0);$$

$$E_1 = E'_1 + E'_6, E_2 = E'_2 + E'_4, E_3 = E'_3, E_4 = E'_5, E_0 = E'_{-\theta^0} - E'_{-\bar{\mu}(\theta^0)};$$

$$F_1 = F'_1 + F'_5, F_2 = F'_2 + F'_4, F_3 = F'_3, F_4 = F'_6, F_0 = -E'_{\theta^0} + E'_{\bar{\mu}(\theta^0)}.$$

Случай 4: $X_N = D_4$, $r = 3$, $\eta = \exp 2\pi i/3$:

$$\theta^0 = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3;$$

$$H_1 = H'_1 + H'_3 + H'_4, H_2 = H'_2, H_0 = -\theta^0 - \bar{\mu}(\theta^0) - \bar{\mu}^2(\theta^0);$$

$$E_1 = E'_1 + E'_3 + E'_4, E_2 = E'_2, E_0 = E'_{-\theta^0} + \eta^2 E'_{-\bar{\mu}(\theta^0)} + \eta E'_{-\bar{\mu}^2(\theta^0)};$$

$$F_1 = F'_1 + F'_3 + F'_4, F_2 = F'_2, F_0 = -E'_{\theta^0} - \eta E'_{\bar{\mu}(\theta^0)} - \eta^2 E'_{\bar{\mu}^2(\theta^0)}.$$

Случай 5: $X_N = A_{2\ell}$, $r = 2$:

$$\theta^0 = \alpha'_1 + \dots + \alpha'_{2\ell};$$

$$H_i = H'_i + H'_{2\ell-i+1} (1 \leq i \leq \ell-1), H_0 = 2(H'_\ell + H'_{\ell+1}), H_\ell = -\theta^0;$$

$$E_i = E'_i + E'_{2\ell-i+1} (1 \leq i \leq \ell-1), E_0 = \sqrt{2}(E'_\ell + E'_{\ell+1}), E_\ell = E'_{-\theta^0}.$$

$$F_i = F'_i + F'_{2\ell-i+1} (1 \leq i \leq \ell-1), F_0 = \sqrt{2}(F'_\ell + F'_{\ell+1}), F_\ell = -E'_{\theta^0}.$$

Пусть $\theta_0 = \frac{1}{r}(\bar{\mu}(\theta^0) + \dots + \bar{\mu}^r(\theta^0))$ в случаях 1-4 и $\theta_0 = \theta^0$ в случае 5. Пусть, кроме того, $\varepsilon = 0$ в случаях 0-4, $\varepsilon = \ell$ в случае 5 и $I = \{0, 1, \dots, \ell\} \setminus \{\varepsilon\}$.

Предложение 8.3. а) Элементы E_i ($i = 0, \dots, \ell$) порождают алгебру Ли $\mathfrak{g}$.

б) Элементы E_i, F_i при $i \in I$ являются образующими Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$, а элементы $\alpha_i = 2H_i/(H_i | H_i)$, $i \in I$, — простыми корнями.

в) $[E_\varepsilon, F_\varepsilon] = H_\varepsilon$, $(E_\varepsilon | F_\varepsilon) = r/a_0$, и $(\theta_0 | \theta_0) = 2a_0/r$, где $a_0 = 1$ в случаях 1-4 и $a_0 = 2$ в случае 5.

д) Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{g}_{-1}$ неприводимо и эквивалентно представлению на $\mathfrak{g}_{-1}$.

е) F_0 (соответственно E_0) есть старший (соответственно младший) вектор $\mathfrak{g}_0$ -модуля $\mathfrak{g}_{-1}$ (соответственно $\mathfrak{g}_{-1}$) веса θ_0 (соответственно $-\theta_0$) (т. е. $\theta_0 + \alpha_i$ не является весом). Типы алгебр Ли $\mathfrak{g}_0$ и разложения $\theta_0 = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i$ перечислены в следующей таблице:

r	$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}_{\bar{0}}$	α_i
2	$A_{2\ell}, \ell \geq 2$	B_ℓ	$\overset{2}{0} - \overset{2}{0} - \dots - \overset{2}{0} \Rightarrow \overset{2}{0}$
2	$A_{2\ell-1}, \ell \geq 3$	C_ℓ	$\overset{1}{0} - \overset{2}{0} - \dots - \overset{2}{0} \Leftarrow \overset{1}{0}$
2	$D_{\ell+1}, \ell \geq 2$	B_ℓ	$\overset{1}{0} - \overset{1}{0} - \dots - \overset{1}{0} \Rightarrow \overset{1}{0}$
2	A_2	A_1	$\overset{2}{0}$
2	E_6	F_4	$\overset{1}{0} - \overset{2}{0} \Rightarrow \overset{3}{0} - \overset{2}{0}$
3	D_4	G_2	$\overset{1}{0} \Rightarrow \overset{2}{0}$

Доказательство непосредственно вытекает из результатов §7.9 и 7.10. $\square$

Замечание 8.3. Полагая $\alpha_\epsilon = -\theta_0$ и $a_\epsilon = 1$, мы можем написать

$$\sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i = 0,$$

где a_i задаются табл. Aff.

Ограничение формы $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}_{\bar{0}} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}_{\bar{0}}$ невырожденно и, следовательно, определяет изоморфизм $\nu: \mathfrak{h}_{\bar{0}} \rightarrow \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$. Пусть $\Delta_{\bar{s}}$ ($s = 0, \dots, r-1$) — множество ненулевых весов подалгебры $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ на $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$, и пусть $\mathfrak{g}_{\bar{s}} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\bar{s}} \cup \{0\}} \mathfrak{g}_{\bar{s}, \alpha}$ — разложение на весовые подпространства. Из предложения 8.2 следует, что $(\alpha | \alpha) \neq 0$, $\dim \mathfrak{g}_{\bar{s}, \alpha} = 1$ и $[\mathfrak{g}_{\bar{s}, \alpha}, \mathfrak{g}_{-\bar{s}, -\alpha}] = \mathbb{C} \nu^{-1}(\alpha)$, если $\alpha \in \Delta_{\bar{s}}$.

Вернемся теперь к алгебре Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu, r)$, которую будем обозначать для краткости через $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$. Положим $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\bar{0}} + \mathbb{C}K' + \mathbb{C}d'$ и определим $\delta \in \mathfrak{h}^*$ формулой $\delta|_{\mathfrak{h}_{\bar{0}} + \mathbb{C}K'} = 0$, $\langle \delta, d' \rangle = 1$. Положим также $e_\epsilon = t \otimes E_\epsilon$, $f_\epsilon = t^{-1} \otimes F_\epsilon$, $e_i = 1 \otimes E_i$, $f_i = 1 \otimes F_i$ ($i \in I$). Имеем

$$[e_i, f_i] = 1 \otimes H_i \quad (i \in I); \quad [e_\epsilon, f_\epsilon] = r\alpha_0^{-1}K' + 1 \otimes H_\epsilon.$$

Опишем систему корней и разложение на корневые подпространства алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ относительно $\mathfrak{h}$:

$$(8.3.3) \quad \Delta = \{j\delta + \gamma, \text{ где } j \in \mathbb{Z}, \gamma \in \Delta_{\bar{s}}, j \equiv s \pmod{r}, s = 0, \dots, r-1\} \\ \cup \{j\delta, \text{ где } j \in \mathbb{Z}, j \neq 0\};$$

$$(8.3.4) \quad \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu) = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_\alpha \right),$$

где

$$(8.3.5) \quad \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_{s\delta+\gamma} = t^s \otimes \mathfrak{g}_{\bar{s}, \gamma}, \quad \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_{s\delta} = t^s \otimes \mathfrak{g}_{\bar{s}, 0}.$$

Положим

$$(8.3.6) \quad \Pi = \{\alpha_i := \delta - \theta_0, \alpha_i \ (i \in I)\},$$

$$(8.3.7) \quad \Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee := \tau a_0^{-1} K' + 1 \otimes H_i, \alpha_i^\vee := 1 \otimes H_i \ (i \in I)\}.$$

Используя предложение 8.3, мы получим, что если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа X_N и r ($= 2$ или 3) — порядок μ , то

$$A = ((\alpha_j, \alpha_i^\vee))_{i,j=0}^\ell$$

— матрица типа $X_N^{(r)}$ и целые числа $a_0, \dots, a_\ell$ — это отметки на диаграмме этой матрицы в табл. Aff 2 и Aff 3.

Теперь мы можем сформулировать вторую теорему реализации. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 7.4.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная простая конечномерная алгебра Ли типа $X_N = D_{\ell+1}, A_{2\ell-1}, E_6, D_4$ или $A_{2\ell}$ и $r = 2, 2, 2, 3$ или 2 соответственно. Пусть μ — диаграммный автоморфизм $\mathfrak{g}$ порядка⁴ r . Тогда алгебра Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ есть (скрученная) аффинная алгебра Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$, соответствующая аффинной матрице A типа $X_N^{(r)}$ из табл. Aff r ($r = 2$ или 3), $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, Δ — система корней, Π и $\Pi^\vee$ — корневой базис и дуальный корневой базис и $e_0, \dots, e_\ell, f_0, \dots, f_\ell$ — образующие Шевалле. Другими словами, $(\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ есть четверка, ассоциированная с A . $\square$

Мы можем суммировать результаты теорем 7.4 и 8.3 следующим образом. Пусть A — аффинная матрица типа $X_N^{(r)}$, $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N и μ — ее диаграммный автоморфизм порядка r ($= 1, 2$ или 3). Тогда алгебра Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ изоморфна аффинной алгебре Ли $\mathfrak{g}(A)$. Отметим, что $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ изоморфна $\mathfrak{g}'(A)$ и $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ изоморфна $\mathfrak{g}'(A)/СК$.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра ранга $\ell + 1$ и A — матрица типа $X_N^{(r)}$. Тогда кратность корня $s\gamma\delta$ для $s \in \mathbb{Z}$ равна ℓ и кратность корня $s\delta$ для $s \in \mathbb{Z}$, $s \not\equiv 0 \pmod r$, равна $(N - \ell)/(r - 1)$.

Доказательство. Если $r = 1$, то $\text{mult } j\delta = \ell$ (для $j \neq 0$) по теореме 7.4. Если $r = 2$ или 3 , то по теореме 8.3 $\text{mult } s\delta$ (для $s \neq 0$) равна кратности

⁴ Для $r = 3$ имеется два таких автоморфизма, эквивалентных друг другу. Мы выберем один из них.

собственного значения $\exp 2\pi i s/\tau$ автоморфизма μ , действующего на $\mathfrak{h}'$, что дает требуемый результат. $\square$

Инволюция Шевалле ω , компактная инволюция ω_0 и треугольное разложение алгебры Ли $\hat{L}(\mathfrak{g}, \mu) \subset \hat{L}(\mathfrak{g})$ соответственно индуцируются с $\hat{L}(\mathfrak{g})$.

Нормализованная инвариантная форма на $\hat{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ задается соотношениями

$$(8.3.8) \quad \begin{aligned} (P \otimes x | Q \otimes y) &= r^{-1} \operatorname{Res}(t^{-1} PQ)(x | y) \quad (x, y \in \mathfrak{g}, P, Q \in \mathcal{L}), \\ (CK' + Cd' | \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)) &= 0, \quad (K' | K') = (d' | d') = 0; \quad (K' | d') = 1, \end{aligned}$$

где $(\cdot | \cdot)$ — нормализованная инвариантная форма на $\mathfrak{g}$. Доказательство такое же, как для (7.5.1).

Легко видеть, что $K = rK'$ есть канонический центральный элемент, а $d = a_0 r^{-1} d'$ — элемент энергии.

Предостережение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0$ изоморфна алгебре Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$, введенной в §6.3, во всех случаях, за исключением $A_{2\ell}^{(2)}$; в последнем случае $\mathring{\mathfrak{g}}$ типа C_ℓ , в то время как $\mathfrak{g}_0$ типа B_ℓ .

§8.4. Здесь мы представляем другое приложение теорем реализации.

Предложение 8.4. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра.

а) Положим $\mathfrak{t} = CK + \sum_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ s \neq 0}} \mathfrak{g}_{s, s}$. Тогда $\mathfrak{t}$ изоморфна бесконечномерной

алгебре Гейзенберга (= алгебре Ли Гейзенберга порядка ∞ ; см. §2.9) с центром CK .

б) Эрмитова форма $(x|y)_0 = -(\omega_0(x)|y)$ положительно полуопределена на $\mathfrak{g}'(A)$, и ее ядро равно CK .

Доказательство. По теореме реализации $\mathfrak{g}'(A)/CK \simeq \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$. Градуировка алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая μ , индуцирует градуировку ее подалгебры Картана $\mathfrak{h}'$ (см. §8.2): $\mathfrak{h}' = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}} \mathfrak{h}'_j$. Мы получаем изомор-

физм

$$\mathfrak{t}/CK \simeq \bigoplus_{\substack{s \in \mathbb{Z} \\ s \neq 0}} \mathfrak{t}^s \otimes \mathfrak{h}'_s.$$

Отсюда вытекает, что $\mathfrak{t}/CK$ — коммутативная подалгебра. Легко видеть, что ограничение коцикла ψ на эту подалгебру невырожденно. Это доказывает а); б) следует из замечания в конце §7.6. $\square$

Подалгебра $\mathfrak{t}$ называется *однородной подалгеброй Гейзенберга* аффинной алгебры $\mathfrak{g}(A)$. Она играет важную роль в теории представлений аффинных алгебр.

§8.5. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, m — положительное целое число и $\epsilon = \exp \frac{2\pi i}{m}$. Пусть $\gamma(t) : \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ — регулярное отображение (мы рассматриваем $\text{Aut } \mathfrak{g}$ как алгебраическую группу над $\mathbb{C}$); можно считать $\gamma(t)$ элементом $\text{Aut } \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ (с поточечным действием $\gamma(t)$ на $a(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$). Элемент $\sigma \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ мы также будем рассматривать как элемент $\text{Aut } \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, полагая $\sigma(t^k \otimes a) = t^k \otimes \sigma(a)$. Следующая лемма вытекает из эквивалентного определения $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ ($\sigma^m = 1$):

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \{a(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \mid \sigma(a(\epsilon^{-1}t)) = a(t)\}.$$

ЛЕММА 8.5. Пусть $\alpha, \beta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ таковы, что $\alpha^m = \beta^m = 1$, и $\gamma(t) \in \text{Aut } \mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Тогда

$$\gamma(t)\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \alpha, m) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \beta, m),$$

если и только если

$$(8.5.1) \quad \beta\gamma(\epsilon^{-1}t) = \gamma(t)\alpha \quad \text{для всех } t \in \mathbb{C}^\times.$$

□

Если $\alpha, \beta \in \text{Aut } \mathfrak{g}$ и $\gamma : \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$ (регулярное отображение) таковы, что (8.5.1) выполнено, мы будем писать $\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$. Следующие соотношения проверяются непосредственно:

$$(8.5.2) \quad \alpha \xrightarrow{\gamma} \beta \text{ влечет за собой } \beta \xrightarrow{\gamma^{-1}} \alpha,$$

$$(8.5.3) \quad \alpha \xrightarrow{\gamma} \beta \xrightarrow{\gamma_1} \beta_1 \text{ влечет за собой } \alpha \xrightarrow{\gamma\gamma_1} \beta_1,$$

в частности,

$$(8.5.4) \quad \alpha \xrightarrow{\gamma} \beta \text{ влечет за собой } \alpha \xrightarrow{g\gamma} g\beta g^{-1} \text{ для } g \in \text{Aut } \mathfrak{g}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. Пусть σ — автоморфизм простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида (8.1.2). Обозначим через t^h регулярное отображение $\mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Aut } \mathfrak{g}$, такое, что t^h на $\mathfrak{g}_\alpha$ есть оператор умножения на $t^{(\alpha, h)}$. Тогда

$$(8.5.5) \quad t^h(\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu, m)) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m).$$

Доказательство немедленно вытекает из леммы 8.5, поскольку $t^h \mu = \mu t^h$. □

Замечание 8.5. Из предложения 8.5 следует, что класс изоморфизма $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ зависит только от связной компоненты группы $\text{Aut } \mathfrak{g}$, содержащей σ . Нетрудно показать, что это утверждение остается справедливым, если $\mathfrak{g}$ заменить на произвольную конечномерную алгебру (не обязательно алгебру Ли).

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 8.5. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N и σ — автоморфизм $\mathfrak{g}$, такой, что $\sigma^m = 1$. Пусть r — наименьшее положительное целое число, такое, что σ^r есть внутренний автоморфизм; тогда $r = 1, 2$ или 3 . Пусть $(\cdot | \cdot)$ — нормализованная инвариантная форма на $\mathfrak{g}$, а μ — диаграммный автоморфизм $\mathfrak{g}$ порядка r . Выберем подалгебру Картана $\mathfrak{h}_0$ для множества $\mathfrak{g}^\sigma$ неподвижных точек σ . Наконец, пусть A — аффинная матрица типа $X_N^{(r)}$. Тогда существует изоморфизм $\Phi: \hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \rightarrow \mathfrak{g}(A)$, такой, что

(i) билинейная форма на $\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$, определенная (8.3.8), индуцирует нормализованную инвариантную форму на $\mathfrak{g}(A)$;

(ii) $\mathbb{Z}$ -градуировка (8.2.2) для $\hat{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ индуцирует $\mathbb{Z}$ -градуировку $\mathfrak{g}(A)$ типа $s = (s_0, \dots, s_\ell)$, где s_j — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие соотношению

$$(8.5.6) \quad r \sum_{j=0}^{\ell} a_j s_j = m;$$

(iii) $\Phi(1 \otimes \mathfrak{h}_0 + \mathbb{C}K' + \mathbb{C}d')$ есть подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$;

(iv) $m\Phi(K')$ — канонический центральный элемент K алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$;

(v) $m^{-1}\Phi(d_0) = a_0^{-1}d + u - \frac{1}{2}(u|u)K$, где d — элемент энергии из $\mathfrak{g}(A)$ и $u \in \mathfrak{h}$ определяется формулой $\langle \alpha_i, u \rangle = r s_i / m$ ($i = 1, \dots, \ell$).

Доказательство. Благодаря предложению 8.1, лемме 8.5 и утверждению (8.5.4) мы можем считать, что σ имеет вид (8.1.2). Заметим, что r делит m (в противном случае $am + br = 1$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Z}$ и, следовательно, $\sigma = (\sigma^r)^b$ был бы внутренним автоморфизмом). В силу предложения 8.5 имеет место изоморфизм

$$t^{\frac{m}{r}h}: L(\mathfrak{g}, \mu, r) \xrightarrow{\sim} L(\mathfrak{g}, \sigma, m).$$

Другими словами, в соответствии с теоремами 7.4 и 8.3 мы получаем изоморфизм, обозначаемый для краткости через φ ,

$$\varphi: \mathfrak{g}'(A)/\mathbb{C}K \xrightarrow{\sim} L(\mathfrak{g}, \sigma, m).$$

С помощью φ^{-1} мы получаем $\mathbb{Z}$ -градуировку типа $s' = (s'_0, \dots, s'_\ell)$ для $\mathfrak{g}'(A)/\mathbb{C}K$, индуцированную $\mathbb{Z}$ -градуировкой (8.2.1) для $L(\mathfrak{g}, \sigma, m)$, где $s'_i = \deg \bar{e}_i = -\deg \bar{f}_i$. Здесь и далее в доказательстве для $x \in \mathfrak{g}'(A)$ мы обозначаем через $\bar{x}$ класс $x + \mathbb{C}K$. Заметим, что $\deg \mathfrak{g}_\delta = \sum_{i=0}^{\ell} a_i s'_i$. С

другой стороны, умножение на t^r увеличивает степень в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ на m . Так как $\deg \bar{h}_0 = 0$ и $\bar{g}_{r,\delta} = t^r \bar{h}_0$, мы выводим, что $\deg \bar{g}_{r,\delta} = m = r \sum_{i=0}^{\ell} a_i s'_i$, и это доказывает (8.5.6) для s' .

Изоморфизм φ^{-1} можно поднять до (единственного) линейного изоморфизма $\Phi' : \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \rightarrow \mathfrak{g}(A)$, который удовлетворяет (iv), (v), если s_i заменить на s'_i , а также следующему условию (и, значит, (iii)):

$$(8.5.7) \quad \Phi'^{-1}(\alpha_i^\vee) = \varphi(\overline{\alpha_i^\vee}) + r(a_i s'_i / a_i^\vee) K' \quad (i = 0, \dots, \ell).$$

Легко проверяется, что это изоморфизм алгебр Ли.

Кроме того, ясно, что $\mathbb{Z}$ -градуировка (8.2.2) для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ индуцирует с помощью изоморфизма Φ' градуировку типа s' для $\mathfrak{g}(A)$. Свойство (i) для Φ' также проверяется непосредственно. Осталось показать, что числа s'_i можно сделать неотрицательными. Для этого выберем $v \in \mathfrak{h}$ (подалгебра Картана $\mathfrak{g}(A)$), такой, что $\langle \alpha_i, v \rangle = s'_i$; заметим, что $\delta(v) = m/r > 0$. Следовательно, по лемме 3.8, предложению 3.12b) и предложению 5.8b) существует $w \in \widehat{W}^{\text{ad}}$ (см. замечание 3.8), такой, что $\langle \alpha_i, w(v) \rangle = s_i \in \mathbb{Z}_+$. Теперь $\Phi = w^{-1} \Phi'$ — требуемый изоморфизм. $\square$

§8.6. Из теоремы 8.5 мы выведем классификацию автоморфизмов конечного порядка простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа X_N . Пусть μ — диаграммный автоморфизм $\mathfrak{g}$ порядка r . Пусть E_i, F_i, H_i ($i = 0, \dots, \ell$) — элементы $\mathfrak{g}$, введенные в §8.3, и $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell$ — корни, соответствующие E_i . Напомним, что элементы E_i ($i = 0, \dots, \ell$) порождают $\mathfrak{g}$ (в силу предложения 8.3a)) и что существует единственная линейная зависимость $\sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i = 0$, где a_i — положительные взаимно простые целые числа (см. замечание 8.3). Напомним также, что вершины диаграммы $X_N^{(r)}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с E_i и a_i представляют собой отметки этой диаграммы.

Для того чтобы получить приложение к автоморфизмам конечного порядка, нам понадобится следующий факт:

ЛЕММА 8.6. Каждый идеал алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ имеет вид $P(t^r) \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$, где $P(t) \in \mathbb{C}$. В частности, максимальный идеал записывается в виде $(1 - (at)^r) \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$, где $a \in \mathbb{C}^\times$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{i}$ — нетривиальный идеал алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ и $x = \sum_{j,s} t^j P_{j,s}(t) \otimes a_{\bar{j},s} \in \mathfrak{i}$, где $0 \leq j < r$, $P_{j,s}(t) \in \mathbb{C}$, $P_{j,s} \neq 0$ и $a_{\bar{j},s} \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}$

линейно независимы. Мы покажем, что $Q(t^r)P_{j,s}(t)\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) \subset i$ для всех $Q(t) \in \mathcal{L}$.

Пусть $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$; мы можем считать, что x является собственным вектором для $\text{ad } \mathfrak{h}_{\bar{0}}$ с весом $\alpha \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$. Если $\alpha \neq 0$, то, взяв $[x, t^j \otimes a_{-\bar{j}}]$, где $a_{-\bar{j}}$ имеет вес $-\alpha$, вместо x , мы сведем задачу к случаю $\alpha = 0$ и $j = 0$, т. е. $a_{\bar{j},s} \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Пусть $\gamma \in \mathfrak{h}_{\bar{0}}^*$ — корень $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$, такой, что $(\gamma, a_{\bar{j},s}) \neq 0$. Тогда элемент $y = [[x, Q(t^r) \otimes e_{\gamma}], e_{-\gamma}] \in i$, где $e_{\pm\gamma}$ есть корневой вектор, соответствующий корню $\pm\gamma$, имеет следующий вид: $y = Q(t^r)(P \otimes h + tP_1 \otimes h_1 + \dots + t^{r-1}P_{r-1} \otimes h_{r-1})$, где $P = P_{j,s}(t)$, $P_i \in \mathcal{L}$, $h \in \mathfrak{h}'$, $h \neq 0$, и $h_i \in \mathfrak{g}_i'$ имеют нулевой вес относительно $\mathfrak{h}$. Поскольку $[y, e_j] \in i$ для всех корневых векторов $e_j \in \mathfrak{g}_{\bar{0}}$, мы заключаем, что $Q(t^r)P \otimes h \subset i$, и поэтому $Q(t^r)P\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) \subset i$.

Для $x \in \mathfrak{g}_{\bar{j}}$ пусть $i_0 = \{p(t) \in \mathcal{L} \mid t^j p(t) \otimes x \in i\}$. Из сказанного выше следует, что i_0 является инвариантным идеалом в $\mathcal{L}$ (относительно преобразования $t \mapsto \eta^{-1}t$), который не зависит от $\bar{j}$ и x , и что $i = i_0\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$. Так как все идеалы в $\mathcal{L}$ главные и i_0 инвариантен, то $i = P\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ для некоторого $P \in \mathbb{C}[t^r, t^{-r}]$. $\square$

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть $s = (s_0, \dots, s_\ell)$ — последовательность неотрицательных взаимно простых целых чисел; положим $m = \tau \sum_{i=0}^{\ell} a_i s_i$. Тогда

а) Соотношения

$$(8.6.1) \quad \sigma_{s,r}(E_j) = e^{2\pi i s_j / m} E_j \quad (j = 0, \dots, \ell)$$

(однозначно) определяют автоморфизм m -го порядка $\sigma_{s,r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

б) С точностью до сопряжения автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ автоморфизмы $\sigma_{s,r}$ исчерпывают все автоморфизмы этой алгебры Ли порядка m .

в) Элементы $\sigma_{s,r}$ и $\sigma_{s',r'}$ сопряжены автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если и только если $r = r'$ и последовательность s может быть преобразована в последовательность s' с помощью автоморфизма диаграммы $X_N^{(r)}$.

Доказательство. Будем использовать теорему 8.5 и накрывающий гомоморфизм $\varphi_\sigma : \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma) \rightarrow \mathfrak{g}$, определенный формулой $t \mapsto 1$, т. е. $\varphi_\sigma(\sum P_i \otimes g_i) = \sum P_i(1)g_i$. Ясно, что

$$\text{Ker } \varphi_\sigma = (1 - t^m)\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma).$$

Для доказательства а) заметим, что разложение на корневые подпространства (8.3.4) для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ индуцирует градуировку

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) = \bar{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)/\text{СК}' = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{L}_{\alpha}.$$

Определим автоморфизм $\bar{\sigma}_s$ алгебры Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ по формуле

$$\bar{\sigma}_s(e_{\alpha}) = \epsilon^{\sum k_i s_i} e_{\alpha}, \text{ если } e_{\alpha} \in \mathcal{L}_{\alpha}, \quad \text{где } \alpha = \sum k_i \alpha_i.$$

Если

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_j$$

— градуировка типа s , то $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_j$ и $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_{j+m}$ лежат в собственном подпространстве $\bar{\sigma}_s$, отвечающем собственному значению $\exp 2\pi i j/m$. Так как $t^r \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_j \subset \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)_{j+m}$, мы получаем, что идеал $(1-t^r)\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ является $\bar{\sigma}_s$ -инвариантным, и, следовательно, $\bar{\sigma}_s$ индуцирует автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со свойствами, описанными в а).

Пусть теперь σ — автоморфизм m -го порядка алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Теорема 8.5 дает изоморфизм

$$\bar{\Phi} : \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu),$$

такой, что $\mathbb{Z}$ -градуировка в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ индуцирует $\mathbb{Z}$ -градуировку типа s в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ и $s_i \in \mathbb{Z}_+$ удовлетворяют (8.5.6). Обозначим через τ_a автоморфизм $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$, соответствующий замене t на at , $a \in \mathbb{C}^{\times}$. Поскольку по лемме 8.6 любой максимальный идеал в $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$ имеет вид $(1-(at)^r)\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu)$, мы получаем следующую коммутативную диаграмму для подходящего автоморфизма ψ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $a \in \mathbb{C}^{\times}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) & \xrightarrow{\bar{\Phi}} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) & \xrightarrow{\tau_a} \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \mu) \\ \varphi_{\sigma} \downarrow & & \varphi_{\mu} \downarrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Следовательно, $\psi\sigma\psi^{-1} = \sigma_{s, r}$, что доказывает б).

Доказательство с) также использует накрывающее отображение. Предположим, что $\sigma = \sigma_{s, r}$ и $\sigma' = \sigma_{s', r'}$ сопряжены, т. е. $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$ для некоторого $\tau \in \text{Aut } \mathfrak{g}$. Заметим, что в силу предложения 8.6b) (см. ниже) $\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ (подалгебра Картана в $\mathfrak{g}^{\mu}$) является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}^{\sigma}$ и $\mathfrak{g}^{\sigma'}$. Поскольку $\tau(\mathfrak{g}^{\sigma}) = \mathfrak{g}^{\sigma'}$, $\tau(\mathfrak{h}_{\bar{0}})$ — еще одна подалгебра Картана в $\mathfrak{g}^{\sigma'}$. Пусть τ_1 — внутренний автоморфизм $\mathfrak{g}^{\sigma'}$, такой, что $\tau_1(\tau(\mathfrak{h}_{\bar{0}})) = \mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Заменяя τ на $\tau_1\tau$, мы можем считать, что

τ оставляет $\mathfrak{h}_0^-$ инвариантной и что множества положительных корней алгебр Ли $\mathfrak{g}^\sigma$ и $\mathfrak{g}^{\sigma'}$ соответствуют друг другу относительно τ (по предложению 5.9, примененному к $\mathfrak{g}^\sigma$). Продолжение $\tilde{\tau}$ автоморфизма τ , заданное формулой $\tilde{\tau}(t^j \otimes a) = t^j \otimes \tau(a)$, является изоморфизмом $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma', m)$, который переводит положительные корни в положительные корни. Следовательно, последовательности s и s' переводятся друг в друга с помощью автоморфизма диаграммы $X_N^{(r)}$. $\square$

Для данной ненулевой последовательности $s = (s_0, \dots, s_\ell)$ неотрицательных целых чисел и числа $r = 1, 2$ или 3 мы будем называть автоморфизм $\sigma_{s,r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, определенный формулой (8.6.1), *автоморфизмом типа* (s, r) . Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j(s; r)$ — соответствующая ему $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировка. Здесь перечислены некоторые ее свойства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. а) r — наименьшее положительное целое число, для которого $\sigma_{s,r}^{(r)}$ является внутренним автоморфизмом.

б) Пусть $i_1, \dots, i_p$ — все индексы, для которых $s_{i_1} = \dots = s_{i_p} = 0$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}_0(s; r)$ изоморфна прямой сумме $(\ell - p)$ -мерного центра и полупростой алгебры Ли, диаграмма Динкина которой является поддиаграммой аффинной диаграммы $X_N^{(r)}$, состоящей из вершин $i_1, \dots, i_p$.

с) Пусть $j_1, \dots, j_n$ — все индексы, для которых $s_{j_1} = \dots = s_{j_n} = 1$. Тогда $\mathfrak{g}_0(s; r)$ -модуль $\mathfrak{g}_1(s; r)$ (соответственно $\mathfrak{g}_{-1}(s; r)$) изоморфен прямой сумме n неприводимых модулей со старшими весами $-\alpha_{j_1}, \dots, -\alpha_{j_n}$ (соответственно $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_n}$).

Доказательство. а) следует из (простого) факта, состоящего в том, что автоморфизм конечного порядка σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является внутренним, если и только если существует подалгебра Картана, каждый элемент которой неподвижен относительно σ . б) непосредственно вытекает из изоморфизма $\mathfrak{g}^\sigma \simeq \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)_0$ и следствия 5.12б). Чтобы доказать с), заметим, что $\mathfrak{g}_0(s; r)$ -модуль $\mathfrak{g}_1(s; r)$ изоморфен $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)_0$ -модулю $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)_1$. Кроме того, используя тождество Якоби, мы получаем, что $\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)_1$ порождается элементами вида $[\dots [e_{i_1}, e_{i_2}], e_{i_3}] \dots e_{i_r}]$, где $s_{i_1} = 1$ и $s_{i_t} = 0$ для $t > 1$. Наконец, использование теоремы Вейля о полной приводимости доказывает с). $\square$

§8.7. Позже нам понадобится следующая переформулировка теоремы 8.5 (которая обобщает теоремы 7.4 и 8.3):

ТЕОРЕМА 8.7. Пусть A — аффинная матрица типа $X_N^{(r)}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N и $(\cdot | \cdot)$ — ее нормализованная инвариантная форма. Пусть μ — диаграммный автоморфизм $\mathfrak{g}$ порядка r и E_i, F_i, H_i ($i = 0, \dots, \ell$) — элементы $\mathfrak{g}$, введенные в § 8.2. Наконец, пусть $\sigma_{s,r}$ — автоморфизм $\mathfrak{g}$ типа $(s; r)$ и $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j(s; r)$ —

соответствующая $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировка, где $m = r \sum_{i=0}^{\ell} a_i s_i$. Определим структуру алгебры Ли на $(\sum_{j \in \mathbb{Z}} t^j \otimes \mathfrak{g}_j(s; r)) \oplus \mathbb{C}K$ с помощью соотношения

$$\begin{aligned} & [(P_1(t) \otimes g_1) + \lambda_1 K, (P_2(t) \otimes g_2) + \lambda_2 K] \\ &= P_1(t)P_2(t) \otimes [g_1, g_2] + \frac{1}{m} (\text{Res } \frac{dP_1(t)}{dt} P_2(t))(g_1 | g_2) K. \end{aligned}$$

Тогда она изоморфна производной аффинной алгебре $\mathfrak{g}'(A)$ с образующими Шевалле $e_i = t^{s_i} \otimes E_i$, $f_i = t^{-s_i} \otimes F_i$ ($i = 0, \dots, \ell$), дуальным корневым базисом $\alpha_i^\vee = (1 \otimes H_i) + (a_i s_i / a_i^\vee m) K$ ($i = 0, \dots, \ell$) и каноническим центральным элементом K . Расширяя эту алгебру Ли с помощью $\mathbb{C}d'$, где $d'(P(t) \otimes g) = \frac{a_0}{m} t \frac{dP(t)}{dt} \otimes g$ и $[d', K] = 0$, мы получим алгебру Ли, изоморфную аффинной алгебре $\mathfrak{g}(A)$ с элементом энергии $d = a_0(d' - H - \frac{1}{2}(H|H)K)$, где $H \in \sum \mathbb{C}H_i$ определяется формулами $\langle \alpha_i, H \rangle = s_i/m$ ($i = 1, \dots, \ell$). Нормализованная инвариантная форма определяется по правилу

$$\begin{aligned} & (P_1(t) \otimes g_1 | P_2(t) \otimes g_2) = r^{-1} (\text{Res } t^{-1} P_1(t) P_2(t))(g_1 | g_2), \\ & (\mathbb{C}K + \mathbb{C}d' | P(t) \otimes g) = 0, \quad (K | K) = 0, \quad (d' | d') = 0 \text{ и } (K | d') = 1. \end{aligned}$$

Наконец, полагая $\deg t = 1$, $\deg g = 0$ для $g \in \mathfrak{g}$ и $\deg K = \deg d' = 0$, мы получим $\mathbb{Z}$ -градуировку типа s . $\square$

Реализация аффинной алгебры типа $X_N^{(r)}$, которую дает теорема 8.7, называется реализацией типа s .

Используя следствие 6.4 и упр. 6.2, получаем

СЛЕДСТВИЕ 8.7. Пусть $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu, r)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$. Тогда $\phi(x, y) = 2\tau h^\vee(x|y)$ для $x, y \in \mathfrak{g}$, где ϕ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$. В частности,

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}} (\lambda | \alpha) (\mu | \alpha) = 2\tau h^\vee(\lambda | \mu) \text{ для } \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*,$$

где $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана для $\mathfrak{g}$ и $\Delta_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}^*$ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

§8.8. Упражнения

В упражнениях 8.1–8.4 мы даем набросок другого доказательства теоремы 8.5.

8.1. Выберем подалгебру Картана $\mathfrak{h}_0$ в $\mathfrak{g}_0$ и положим $\mathfrak{h} = 1 \otimes \mathfrak{h}_0 + \mathcal{C}K' + \mathcal{C}d' \subset \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$. Имеет место разложение на корневые подпространства относительно $\mathfrak{h}$; обозначим через Δ множество корней, а через $\mathcal{L}_{\alpha}$ — корневое подпространство, соответствующее $\alpha \in \Delta$. Через $\bar{\lambda}$ обозначим ограничение $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ на $1 \otimes \mathfrak{h}_0$ и положим $(\lambda|\mu) = (\bar{\lambda}|\bar{\mu})$ для $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Положим также $\Delta^{\circ} = \{\alpha \in \Delta | \bar{\alpha} = 0\}$. Покажите, что $\text{ad } \mathcal{L}_{\alpha}$ локально нильпотентен при условии $\alpha \notin \Delta^{\circ}$.

8.2. Пусть $\alpha \in \Delta \setminus \Delta^{\circ}$. Тогда

- (i) $\dim \mathcal{L}_{\alpha} = 1$ и $(\alpha|\alpha) \neq 0$;
- (ii) для $\beta \in \Delta$ множество $\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\}$ представляет собой струну $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$, где p и q — некоторые неотрицательные целые числа, такие, что $p - q = 2(\alpha|\beta)/(\alpha|\alpha)$.
- (iii) $[\mathcal{L}_{\beta}, \mathcal{L}_{\gamma}] \neq 0$, если $\beta, \gamma, \beta + \gamma \in \Delta, \beta \notin \Delta^{\circ}$.

8.3. Пусть $\Delta_0 \subset \Delta$ — множество корней в $1 \otimes \mathfrak{g}_0 \subset \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ и Δ_{0+} — подмножество положительных корней в Δ_0 ; положим $\Delta_+ = \Delta_{0+} \cup \{\alpha \in \Delta | (\alpha, d) > 0\}$. Корень $\alpha \in \Delta_+$ называется простым, если он не представляется в виде суммы двух элементов из Δ_+ . Пусть, кроме того, $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ — множество всех простых корней. Тогда

- (i) каждый элемент $\alpha \in \Delta_+$ можно записать в виде $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, где $k_i \in \mathbb{Z}_+$;
- (ii) $\Pi \subset \Delta \setminus \Delta^{\circ}$;
- (iii) $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots$ порождают $\mathfrak{h}_0$ и билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ положительно определена на $\sum_i \mathbb{R}\bar{\alpha}_i$;
- (iv) существует нетривиальная линейная зависимость между $\bar{\alpha}_i$ с неотрицательными коэффициентами;
- (v) для $i \neq j$ имеем $a_{ij} := 2(\alpha_i|\alpha_j)/(\alpha_i|\alpha_i) \in -\mathbb{Z}_+$;
- (vi) если $\alpha \in \Delta_+$ не является простым, то $\alpha - \alpha_i \in \Delta_+$ для некоторого $\alpha_i \in \Pi$.

8.4. Выведите существование изоморфизма Φ .

8.5. Пусть G — связная полупростая комплексная алгебраическая группа и $\tilde{G}$ — группа регулярных отображений $\mathbb{C}^\times \rightarrow G$. Пусть $\alpha \in \text{Aut} G$ таков, что $\alpha^m = 1$; продолжим α до автоморфизма $\tilde{G} \supset G$, полагая $\alpha(\gamma(t)) = \alpha(\gamma(\varepsilon^{-1}t))$. Покажите, что для $g \in G$ существует $\gamma \in \tilde{G}$, такой, что

$$(8.8.1) \quad g = \gamma^{-1} \alpha(\gamma),$$

если и только если

$$(8.8.2) \quad g \alpha(g) \dots \alpha^{m-1}(g) = 1.$$

8.6. Считая доказанным, что любой автоморфизм конечного порядка группы $\tilde{G}$ оставляет инвариантной некоторую ее связную полупростую подгруппу G' максимального ранга (см. Кас — Peterson [1987]), выведите из упр. 8.5, что для $g \in \tilde{G}$ существует $\gamma \in \tilde{G}$, удовлетворяющий (8.8.1), если и только если g удовлетворяет (8.8.2).

8.7. Покажите, что каждый идеал в алгебре Ли $\mathcal{L}(g, \sigma)$ имеет вид $P(t^m) \mathcal{L}(g, \sigma)$, где $P(t) \in \mathbb{C}[t]$. Он является максимальным идеалом, если и только если $P(t) = a + bt$, где $a, b \in \mathbb{C}^\times$.

8.8. Считая доказанным, что все максимальные ад-диагонализируемые подалгебры в алгебре Каца — Мути $\mathfrak{g}$ сопряжены (см. Peterson — Кас [1983]), покажите, что каждая $\mathbb{Z}$ -градуировка $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$, где $\mathfrak{g}_0$ конечномерна, сопряжена с $\mathbb{Z}$ -градуировкой типа s , в которой $s_i \in \mathbb{Z}_+$.

8.9. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли и e_i, f_i ($i = 1, \dots, \ell$) — ее образующие Шевалле. Пусть $\theta = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i$ — разложение старшего корня $\mathfrak{g}$ через простые корни. Определим инволюцию σ_i на $\mathfrak{g}$ по правилу $\sigma_i(e_i) = -e_i$, $\sigma_i(f_i) = -f_i$, $\sigma_i(e_j) = e_j$, $\sigma_i(f_j) = f_j$ для $j \neq i$. Пусть μ — диаграммная инволюция алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Покажите, что каждая инволюция σ на $\mathfrak{g}$ сопряжена с одной из инволюций из следующего списка: а) σ_i для $a_i = 1$; б) σ_i для $a_i = 2$; в) μ ; г) $\mu \circ \sigma_i$ для $a_i = 1$ или 2 и $\mu(i) = i$. Покажите, что $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модуль $\mathfrak{g}_{\bar{1}}$ неприводим, если и только если σ — инволюция типа б), в) или г), и σ — внутренняя инволюция, если и только если она типа а) или б). Покажите, что в случае а) $\mathfrak{g}_{\bar{1}} = V_{-1} \oplus V_1$, где $V_{\pm 1}$ — неприводимые $\mathfrak{g}_{\bar{0}}$ -модули, и $\mathfrak{g} = V_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{\bar{0}} \oplus V_1$ есть $\mathbb{Z}$ -градуировка алгебры Ли $\mathfrak{g}$; покажите, что тем самым мы получили все, с точностью до сопряжения, $\mathbb{Z}$ -градуировки вида $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$.

8.10. Покажите, что автоморфизм σ порядка 2 или 3 простой алгебры Ли определяется (с точностью до сопряжения) классом изоморфизма подалгебры его неподвижных точек. Приведите пример двух несопряженных автоморфизмов порядка 5 алгебры Ли типа A_2 с изоморфными подалгебрами неподвижных точек.

8.11. Покажите, что минимальный порядок регулярного автоморфизма (т. е. автоморфизма с абелевой подалгеброй неподвижных точек) простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен числу Кокстера h ($=$ (высота максимального корня) $+1$). Покажите, что такой автоморфизм сопряжен с автоморфизмом типа $(1, 1, \dots, 1; 1)$. Покажите, что каждый регулярный автоморфизм порядка $h+1$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ сопряжен с автоморфизмом типа $(2, 1, \dots, 1; 1)$.

8.12. Автоморфизм σ порядка m простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *квазирациональным*, если для соответствующей $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировки $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$ справедливы равенства⁵ $\dim \mathfrak{g}_i = \dim \mathfrak{g}_{i+jm}$ при $(i, m) = (j, m)$ или, эквивалентно, характеристический полином автоморфизма σ на $\mathfrak{g}$ имеет рациональные коэффициенты. Покажите, что автоморфизмы типа $(1, 1, \dots, 1; r)$ и $(2, 1, \dots, 1; 1)$ квазирациональны. Классифицируйте все квазирациональные автоморфизмы для A_1 и A_2 с точностью до сопряжения.

8.13. Автоморфизм σ порядка m алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *рациональным*, если σ^k сопряжен σ для каждого k , такого, что k и m взаимно просты. Покажите, что рациональный автоморфизм является квазирациональным. Найдите контрпример к обратному утверждению.

8.14. Покажите, что автоморфизмы из упр. 8.11 рациональны.

8.15. Пусть μ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, заданный формулой

$$\mu(E_{ij}) = -(-1)^{i+j} E_{n+1-j, n+1-i}.$$

Покажите, что μ — диаграммный автоморфизм этой алгебры Ли. Покажите, что подалгебра $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu) \subset \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ является аффинной алгеброй Ли типа $A_n^{(2)}$, а K — каноническим (соответственно удвоенным каноническим) центральным элементом, если $n = 2\ell$ (соответственно $n = 2\ell - 1$). Опишите разложение на корневые подпространства.

⁵ Здесь элементы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ отождествляются с соответствующими целыми числами из множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$. — Прим. ред.

8.16. Введем следующий базис в алгебре Ли $\mathcal{L}(sl_3(\mathbb{C}), \mu)$ ($s \in \mathbb{Z}$):

$$L_{8s} = \begin{pmatrix} t^{2s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t^{2s} \end{pmatrix}, \quad L_{8s+1} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2s} & 0 \\ 0 & 0 & t^{2s} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{8s+2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ t^{2s+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{8s+3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t^{2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & -t^{2s+1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{8s+4} = \begin{pmatrix} t^{2s+1} & 0 & 0 \\ 0 & -2t^{2s+1} & 0 \\ 0 & 0 & t^{2s+1} \end{pmatrix}, \quad L_{8s+5} = \begin{pmatrix} 0 & t^{2s+1} & 0 \\ 0 & 0 & -t^{2s+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_{8s+6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^{2s+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{8s+7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t^{2s+2} & 0 & 0 \\ 0 & t^{2s+2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажите, что $[L_i, L_j] = d_{ij} L_{i+j}$ ($i, j \in \mathbb{Z}$), где $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ зависят от $i, j \bmod 8$; вычислите их.

8.17. Постройте «базис Шевалле» для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \mu)$ (ср. упр. 7.14).

§8.9. Библиографические замечания и комментарии

Реализация «бесцентральных» скрученных аффинных алгебр Ли была дана Кацем [1968 A, B]; там же содержится приложение к классификации симметрических пространств. Приложение к классификации всех автоморфизмов конечного порядка было найдено в работе Каца [1969 A]; подробное изложение соответствующих результатов дано им в книге Хелгасона Helgason [1978]. Приведенное доказательство теоремы 8.5 проще оригинального. Оно получено в результате бесед с Г. Сигалом и Д. Питерсоном⁶.

Упражнения 8.1–8.4 взяты из работы Каца [1969 A] и книги Helgason [1978]. Как отметил Б. Вейсфейлер, упр. 8.6 означает, что $H^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) = \{1\}$; заметим также, что $H^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G) = G^*$. Стейнберг (Steinberg [1965]) доказал, что $H^1(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, G(\mathbb{C}(t))) = 1$. Упражнения 8.12–8.14 взяты из статьи Кас [1978 A].

⁶ Иной подход см. в гл. 4, §4, книги Э. С. Винберга и А. Л. Ойишика «Семинар по группам Ли и алгебраическим группам» (М.: Наука, 1988) (он восходит к работе Ф. Р. Гантмахера "Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group") (Мат. сб., 1939, т. 5 (47), с. 101–146). — Прим. ред.

Левстейн (Levstein [1988]) классифицировал инволюции всех аффинных алгебр. По поводу классификации автоморфизмов конечно-го порядка и сопряженных линейных автоморфизмов см. Bausch — Rousseau [1989], Кас — Peterson [1987], Rousseau [1989].

Имеется интригующая связь между материалом гл. 8 и теорией инвариантов. А именно, для данной $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировки простой алгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$, соответствующей автоморфизму σ порядка m , мы получаем $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_1^-$; соответствующая связная редуктивная линейная группа G , действующая на пространстве $\mathfrak{g}_1^-$, называется σ -группой. Эти группы обладают многими хорошими свойствами (см. Кац [1975], Попов [1976], Винберг [1976], Кас — Попов — Vinberg [1976]), но самое замечательное состоит в том, что σ -группы почти исчерпывают все «хорошие» неприводимые линейные группы⁷ (см. обзор этих теорий в статье Кас [1980 D]). Я полагаю, что это есть проявление глубокой связи между теорией бесконечномерных групп и алгебр Ли и теорией инвариантов. Один аспект такой связи мы уже обсуждали в §5.14.

⁷ В полной мере это утверждение относится только к классу *простых* неприводимых «хороших» линейных групп: в их списке только две группы (а именно, $Spin_{11}$ и $Spin_{13}$) не связаны с автоморфизмами σ (при этом указанную автором конструкцию следует распространить и на полупростые автоморфизмы σ бесконечного порядка); см. подробности в статье Э. Б. Винберга и В. Л. Попова «Теория инвариантов» (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. направления, том 55, М., 1989, с. 137–314). В общем случае «хороших» линейных групп, не связанных с автоморфизмами σ , гораздо больше. — *Прим. ред.*

Глава 9. Модули со старшим весом над алгебрами Каца — Муди

§9.0. В этой главе мы начинаем излагать теорию представлений алгебр Каца — Муди. Здесь мы приводим так называемую категорию $\mathcal{O}$, которая представляет собой, грубо говоря, категорию ограниченных $\mathfrak{h}$ -диагонализуемых модулей (точное определение дано ниже). Мы изучаем «элементарные» объекты этой категории, так называемые модули Верма, и их связь с неприводимыми модулями. Мы обсуждаем проблемы неприводимости и полной приводимости в категории $\mathcal{O}$. Мы находим как приложение теории представлений определяющие соотношения в алгебрах Каца — Муди с симметризуемой матрицей Картана. В конце главы мы рассматриваем категорию $\mathcal{O}$ для бесконечномерной алгебры Гейзенберга и для алгебры Вирасоро.

§9.1. Как и в гл. 1 и 2, мы начнем с произвольной комплексной $n \times n$ -матрицы A и рассмотрим соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$. Напомним ее треугольное разложение:

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Имеет место соответствующее разложение универсальной обертывающей алгебры:

$$(9.1.1) \quad U(\mathfrak{g}(A)) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}_+).$$

Напомним, что $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V называется $\mathfrak{h}$ -диагонализуемым, если он обладает разложением $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ на весовые подпростран-

ства V_λ (см. §3.6). Ненулевой вектор из V_λ называется *весовым вектором веса λ* . Пусть $P(V) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | V_\lambda \neq 0\}$ обозначает множество весов модуля V . Наконец, для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим $D(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* | \mu \leq \lambda\}$.

Категория $\mathcal{O}$ определяется следующим образом. Ее объекты — это $\mathfrak{g}(A)$ -модули V , которые являются $\mathfrak{h}$ -диагонализуемыми, причем соответствующие весовые пространства конечномерны и обладают следующим свойством: существует конечное число элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$, для которых

$$P(V) \subset \bigcup_{i=1}^s D(\lambda_i).$$

Левстейн (Levstein [1988]) классифицировал инволюции всех аффинных алгебр. По поводу классификации автоморфизмов конечно-го порядка и сопряженных линейных автоморфизмов см. Bausch — Rousseau [1989], Кас — Peterson [1987], Rousseau [1989].

Имеется интригующая связь между материалом гл. 8 и теорией инвариантов. А именно, для данной $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировки простой алгебры Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$, соответствующей автоморфизму σ порядка m , мы получаем $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_1$; соответствующая связная редуктивная линейная группа G , действующая на пространстве $\mathfrak{g}_1$, называется σ -группой. Эти группы обладают многими хорошими свойствами (см. Кас [1975], Попов [1976], Винберг [1976], Кас — Popov — Vinberg [1976]), но самое замечательное состоит в том, что σ -группы почти исчерпывают все «хорошие» неприводимые линейные группы⁷ (см. обзор этих теорий в статье Кас [1980 D]). Я полагаю, что это есть проявление глубокой связи между теорией бесконечномерных групп и алгебр Ли и теорией инвариантов. Один аспект такой связи мы уже обсуждали в §5.14.

⁷ В полной мере это утверждение относится только к классу *простых* неприводимых «хороших» линейных групп: в их списке только две группы (а именно, $Spin_{11}$ и $Spin_{13}$) не связаны с автоморфизмами σ (при этом указанию автором конструкции следует распространить и на полупростые автоморфизмы σ бесконечного порядка); см. подробности в статье Э. Б. Винберга и В. Л. Попова «Теория инвариантов» (Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фунд. направления, том 55, М., 1989, с. 137–314). В общем случае «хороших» линейных групп, не связанных с автоморфизмами σ , гораздо больше. — Прим. ред.

Глава 9. Модули со старшим весом над алгебрами Каца — Муди

§9.0. В этой главе мы начинаем излагать теорию представлений алгебр Каца — Муди. Здесь мы приводим так называемую категорию $\mathcal{O}$, которая представляет собой, грубо говоря, категорию ограниченных $\mathfrak{h}$ -диагонализуемых модулей (точное определение дано ниже). Мы изучаем «элементарные» объекты этой категории, так называемые модули Верма, и их связь с неприводимыми модулями. Мы обсуждаем проблемы неприводимости и полной приводимости в категории $\mathcal{O}$. Мы находим как приложение теории представлений определяющие соотношения в алгебрах Каца — Муди с симметризуемой матрицей Картана. В конце главы мы рассматриваем категорию $\mathcal{O}$ для бесконечномерной алгебры Гейзенберга и для алгебры Вирасоро.

§9.1. Как и в гл. 1 и 2, мы начнем с произвольной комплексной $n \times n$ -матрицы A и рассмотрим соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$. Напомним ее треугольное разложение:

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

Имеет место соответствующее разложение универсальной обертывающей алгебры:

$$(9.1.1) \quad U(\mathfrak{g}(A)) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}_+).$$

Напомним, что $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V называется $\mathfrak{h}$ -диагонализуемым, если он обладает разложением $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ на весовые подпростран-

ства V_λ (см. §3.6). Ненулевой вектор из V_λ называется *весовым вектором веса λ* . Пусть $P(V) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | V_\lambda \neq 0\}$ обозначает множество весов модуля V . Наконец, для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим $D(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* | \mu \leq \lambda\}$.

Категория $\mathcal{O}$ определяется следующим образом. Ее объекты — это $\mathfrak{g}(A)$ -модули V , которые являются $\mathfrak{h}$ -диагонализуемыми, причем соответствующие весовые пространства конечномерны и обладают следующим свойством: существует конечное число элементов $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$, для которых

$$P(V) \subset \bigcup_{i=1}^s D(\lambda_i).$$

Морфизмы в $\mathcal{O}$ — это гомоморфизмы $\mathfrak{g}(A)$ -модулей.

Заметим, что (в силу предложения 1.5) любой подмодуль или фактормодуль модуля из категории $\mathcal{O}$ снова лежит в категории $\mathcal{O}$. Кроме того, ясно, что сумма или тензорное произведение конечного числа модулей из $\mathcal{O}$ также лежит в $\mathcal{O}$. Наконец, отметим, что каждый модуль из $\mathcal{O}$ ограничен (см. §2.5).

§9.2. Важные примеры модулей из категории $\mathcal{O}$ — это модули со старшим весом. Модуль V над $\mathfrak{g}(A)$ называется *модулем со старшим весом* $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, если существует ненулевой вектор $v_\Lambda \in V$, такой, что

$$(9.2.1) \quad \mathfrak{n}_+(v_\Lambda) = 0, \quad h(v_\Lambda) = \Lambda(h)v_\Lambda \text{ для } h \in \mathfrak{h} \text{ и}$$

$$(9.2.2) \quad U(\mathfrak{g}(A))(v_\Lambda) = V.$$

Вектор v_Λ называется *старшим вектором* (или *вектором старшего веса*). Заметим, что в силу (9.1.1) условие (9.2.2) можно заменить на

$$(9.2.3) \quad U(\mathfrak{n}_-)(v_\Lambda) = V.$$

Из (9.2.1) и (9.2.3) следует, что

$$(9.2.4) \quad V = \bigoplus_{\lambda \leq \Lambda} V_\lambda, \quad V_\Lambda = \mathbb{C}v_\Lambda, \quad \dim V_\lambda < \infty.$$

Следовательно, модуль со старшим весом лежит в $\mathcal{O}$ и каждые два старших вектора пропорциональны.

Модуль $M(\Lambda)$ над $\mathfrak{g}(A)$ со старшим весом Λ называется *модулем Верма*, если каждый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль со старшим весом Λ является фактормодулем модуля $M(\Lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. а) Для каждого $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ существует единственный с точностью до изоморфизма модуль Верма $M(\Lambda)$.

б) Как $U(\mathfrak{n}_-)$ -модуль $M(\Lambda)$ является свободным модулем ранга 1, порожденным старшим вектором.

с) $M(\Lambda)$ содержит единственный собственный максимальный подмодуль $M'(\Lambda)$.

Доказательство. Если $M_1(\Lambda)$ и $M_2(\Lambda)$ — два модуля Верма, то по определению существует сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}(A)$ -модулей $\psi: M_1(\Lambda) \rightarrow M_2(\Lambda)$. В частности, $\psi(M_1(\Lambda)_\lambda) = M_2(\Lambda)_\lambda$, и, следовательно, $\dim M_1(\Lambda)_\lambda \geq \dim M_2(\Lambda)_\lambda$. Меняя местами $M_1(\Lambda)$ и $M_2(\Lambda)$, мы получим, что ψ — изоморфизм.

Чтобы доказать существование модуля Верма, рассмотрим левый идеал $J(\Lambda)$ в $U(\mathfrak{g}(A))$, порожденный $\mathfrak{n}_+$ и элементами $h - \Lambda(h)$ ($h \in \mathfrak{h}$), и положим

$$M(\Lambda) = U(\mathfrak{g}(A))/J(\Lambda).$$

Умножение на элементы слева в $U(\mathfrak{g}(A))$ индуцирует структуру $U(\mathfrak{g}(A))$ -модуля на $M(\Lambda)$. Ясно, что $M(\Lambda)$ есть $\mathfrak{g}(A)$ -модуль со старшим весом Λ , причем соответствующий старший вектор является образом $1 \in U(\mathfrak{g}(A))$. Если теперь V — модуль над $\mathfrak{g}(A)$ со старшим весом Λ , то аннулятор весового подпространства $V_\Lambda \subset V$ есть левый идеал J_1 , содержащий $J(\Lambda)$. Следовательно, $V \simeq U(\mathfrak{g}(A))/J_1$, и мы имеем эпиморфизм $\mathfrak{g}(A)$ -модулей $M(\Lambda) \rightarrow V$, что доказывает а).

б) следует из явной конструкции $M(\Lambda)$, приведенной выше, и теоремы Пуанкаре — Биркгофа — Витта. в) следует из того, что сумма собственных подмодулей в $M(\Lambda)$ снова является собственным подмодулем (поскольку в силу предложения 1.5 каждый подмодуль в $M(\Lambda)$ градуирован относительно разложения на весовые подпространства и не содержит $M(\Lambda)_\Lambda$). $\square$

Замечание 9.2. Можно получить $M(\lambda)$ также с помощью конструкции индуцированного модуля. Пусть V — левый модуль над алгеброй Ли $\mathfrak{a}$, и предположим, что задан гомоморфизм алгебр Ли $\psi: \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$. Напомним, что индуцированный $\mathfrak{b}$ -модуль определяется формулой

$$U(\mathfrak{b}) \otimes_{U(\mathfrak{a})} V := (U(\mathfrak{b}) \otimes_{\mathbb{C}} V) / \sum_{a, b, v} \mathbb{C}(b\psi(a) \otimes v - b \otimes a(v)),$$

где сумма берется по $b \in U(\mathfrak{b})$, $a \in \mathfrak{a}$, $v \in V$ и действие $\mathfrak{b}$ индуцировано левым умножением в $U(\mathfrak{b})$. Введем $(\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h})$ -модуль $\mathbb{C}_\lambda$, пространством которого является $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{n}_+(1) = 0$, $h(1) = \langle \lambda, h \rangle 1$ для $h \in \mathfrak{h}$. Тогда

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{g}(A)) \otimes_{U(\mathfrak{n}_+ + \mathfrak{h})} \mathbb{C}_\lambda.$$

§9.3. Из предложения 9.2с) следует, что среди модулей со старшим весом Λ существует единственный неприводимый, а именно модуль

$$L(\Lambda) = M(\Lambda)/M'(\Lambda).$$

Ясно, что $L(\Lambda)$ является фактормодулем любого модуля со старшим весом Λ .

Чтобы показать, что $L(\Lambda)$ исчерпывают все неприводимые модули из категории $\mathcal{O}$, а также для некоторых других целей введем следующее понятие. Пусть V — модуль над $\mathfrak{g}(A)$. Вектор $v \in V_\Lambda$ называется *примитивным*, если существует подмодуль U в V , такой, что

$$v \notin U, \quad \mathfrak{n}_+(v) \subset U.$$

В этом случае λ называется *примитивным весом*. Аналогично определяются примитивные векторы и веса для $\mathfrak{g}'(A)$ -модуля. Ясно, что весовой вектор v , для которого $\mathfrak{n}_+(v) = 0$, примитивен.

Предложение 9.3. Пусть V — ненулевой модуль из категории $\mathcal{O}$. Тогда

- а) V содержит ненулевой весовой вектор v , такой, что $p_+(v) = 0$.
 б) Следующие условия эквивалентны:
 (i) V неприводим;
 (ii) V — модуль со старшим весом и любой примитивный вектор в V является вектором старшего веса;
 (iii) $V \simeq L(\Lambda)$ для некоторого $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$.
 в) V порождается своими примитивными векторами как $\mathfrak{g}(A)$ -модуль.

Доказательство. Чтобы доказать а), возьмем максимальный элемент $\lambda \in P(V)$ (относительно упорядочения $\geq$). Тогда в качестве v можно взять весовой вектор веса λ .

Пусть V — неприводимый модуль; тогда весовой вектор v примитивен, если и только если $p_+(v) = 0$. Возьмем примитивный вектор v веса λ . Тогда $U(\mathfrak{g})(v)$ является подмодулем в V ; поэтому $V = U(\mathfrak{g})(v)$, и это модуль со старшим весом λ . В частности, $P(V) \leq \lambda$ и $\dim V_\lambda = 1$. Следовательно, любой примитивный вектор пропорционален v , что доказывает импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii) в б).

Если V — модуль со старшим весом и $U \subset V$ — его собственный подмодуль, то U содержит примитивный вектор в силу а). Это доказывает импликацию (ii) $\Rightarrow$ (iii) и утверждение б).

Пусть V' — подмодуль в V , порожденный всеми примитивными векторами. Если $V' \neq V$, то $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V/V' содержит примитивный вектор v в силу а). Но весовой вектор в V , являющийся прообразом v , представляет собой примитивный вектор. $\square$

Итак, мы имеем биекцию между $\mathfrak{h}^*$ и неприводимыми модулями из категории $\mathcal{O}$, заданную соответствием $\Lambda \mapsto L(\Lambda)$. Отметим, что $L(\Lambda)$ может быть также определен как неприводимый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль, обладающий ненулевым вектором v_Λ , таким, что

$$(9.3.1) \quad p_+(v_\Lambda) = 0 \text{ и } h(v_\Lambda) = \Lambda(h)v_\Lambda \text{ для } h \in \mathfrak{h}.$$

Замечание 9.3. Модуль V из категории $\mathcal{O}$ порождается своими примитивными векторами даже как p_- -модуль. Действительно, весовой вектор $v \in V$ не является примитивным, если и только если $v \in U(p_-)U_0(p_+)v$ (= подмодуль, порожденный $p_+(v)$).

Здесь и далее $U_0(\mathfrak{g})$ обозначает идеал аугментации $\mathfrak{g}U(\mathfrak{g})$ в $U(\mathfrak{g})$.

Имеет место следующая «лемма Шура».

Лемма 9.3. $\text{End}_{\mathfrak{g}(A)} L(\Lambda) = \mathbb{C}I_{L(\Lambda)}$.

Доказательство. Если a — эндоморфизм модуля $L(\Lambda)$ и v_Λ — старший вектор, то в силу предложения 9.3b) $a(v_\Lambda) = \lambda v_\Lambda$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Но тогда $a(u(v_\Lambda)) = \lambda u(v_\Lambda)$ для каждого $u \in U(\mathfrak{g})$; следовательно, $a = \lambda I_{L(\Lambda)}$. $\square$

§9.4. Пусть $L(\Lambda)^*$ — модуль над $\mathfrak{g}(A)$, контрагredientный к $L(\Lambda)$. Тогда $L(\Lambda)^* = \prod_{\lambda} (L(\Lambda)_{\lambda})^*$. Подпространство

$$L^*(\Lambda) := \bigoplus_{\lambda} (L(\Lambda)_{\lambda})^*$$

является подмодулем $\mathfrak{g}(A)$ -модуля $L(\Lambda)^*$. Ясно, что модуль $L^*(\Lambda)$ неприводим и для $v \in (L(\Lambda)_{\Lambda})^*$

$$n_-(v) = 0; \quad h(v) = -\langle \Lambda, h \rangle v \text{ для } h \in \mathfrak{h}.$$

Такой модуль называется *неприводимым модулем с младшим весом* $-\Lambda$. Как и в §9.3, имеет место биекция между $\mathfrak{h}^*$ и неприводимыми модулями с младшим весом: $\Lambda \mapsto L^*(-\Lambda)$.

Обозначим через π_{Λ} действие $\mathfrak{g}(A)$ на $L(\Lambda)$ и введем новое действие π_{Λ}^* на пространстве $L(\Lambda)$ по правилу

$$(9.4.1) \quad \pi_{\Lambda}^*(g)v = \pi_{\Lambda}(\omega(g))v,$$

где ω — инволюция Шевалле на $\mathfrak{g}(A)$. Ясно, что $(L(\Lambda), \pi_{\Lambda}^*)$ есть неприводимый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль с младшим весом $-\Lambda$. По теореме единственности этот модуль можно отождествить с $L^*(\Lambda)$ и спаривание между $L(\Lambda)$ и $L^*(\Lambda)$ задается невырожденной билинейной формой B на $L(\Lambda)$, такой, что

$$(9.4.2) \quad B(g(x), y) = -B(x, \omega(g)(y)) \text{ для всех } g \in \mathfrak{g}(A), x, y \in L(\Lambda).$$

Билинейная форма на $L(\Lambda)$, удовлетворяющая (9.4.2), называется *контравариантной билинейной формой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. Каждый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль $L(\Lambda)$ обладает единственной, с точностью до постоянного множителя, невырожденной контравариантной билинейной формой B . Эта форма является симметрической и $L(\Lambda)$ разлагается в ортогональную прямую сумму весовых подпространств относительно этой формы.

Доказательство. Существование B доказано выше, единственность следует из леммы 9.3. Симметричность вытекает из единственности. Тот факт, что $B(L(\Lambda)_{\lambda}, L(\Lambda)_{\mu}) = 0$, если $\lambda \neq \mu$, следует из (9.4.2) для $g \in \mathfrak{h}$, $x \in L(\Lambda)_{\lambda}$, $y \in L(\Lambda)_{\mu}$. $\square$

Более явный способ ввести контравариантную билинейную форму состоит в следующем. Пусть V — модуль со старшим весом над $\mathfrak{g}(A)$ с фиксированным старшим вектором v_{Λ} . Для $v \in V$ определим его *среднее значение* $\langle v \rangle \in \mathbb{C}$ из формулы

$$v = \langle v \rangle v_{\Lambda} + \sum_{\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}} v_{\Lambda - \alpha}, \text{ где } v_{\Lambda - \alpha} \in V_{\Lambda - \alpha}.$$

Продолжим инволюцию $-\omega$, противоположную инволюции Шевалле, до антиинволюции $\hat{\omega}$ на $U(\mathfrak{g}(A))$. Из (9.1.1) мы непосредственно получаем, что

$$(9.4.3) \quad \langle \hat{\omega}(a)v_\lambda \rangle = \langle av_\lambda \rangle, \quad a \in U(\mathfrak{g}(A)).$$

Отсюда вытекает, что $\langle \hat{\omega}(a)a'v_\lambda \rangle$ симметрично по $a, a' \in U(\mathfrak{g}(A))$; поэтому формула

$$B(av_\lambda, a'v_\lambda) = \langle \hat{\omega}(a)a'v_\lambda \rangle$$

задает корректно определенную симметрическую билинейную форму на V , которая является контравариантной и нормирована условием $B(v_\lambda, v_\lambda) = 1$.

§9.5. Утверждение, лежащее в основании большинства теорем о полной приводимости, содержится в следующей лемме.

ЛЕММА 9.5. Пусть V — модуль над $\mathfrak{g}(A)$ из категории $\mathcal{O}$. Если для любых двух примитивных весов λ и μ модуля V неравенство $\lambda \geq \mu$ влечет за собой $\lambda = \mu$, то модуль V вполне приводим (т. е. V разлагается в прямую сумму неприводимых модулей).

Доказательство. Положим $V^0 = \{v \in V \mid n_+(v) = 0\}$. Это пространство $\mathfrak{h}$ -инвариантно, следовательно, имеет место разложение на весовые пространства $V^0 = \bigoplus_{\lambda \in L} V_\lambda^0$, где все элементы из L являются при-

митивными весами. Пусть $\lambda \in L$ и $v \in V_\lambda^0$, $v \neq 0$. Тогда $\mathfrak{g}(A)$ -модуль $U(\mathfrak{g})(v)$ неприводим (и, значит, изоморфен $L(\lambda)$). Действительно, если это не так, то по предложению 9.3b) $U(\mathfrak{n}_-)(v) \cap V_\mu^0 \neq 0$ для некоторого $\mu < \lambda$. Это противоречит условию леммы. Поэтому $\mathfrak{g}(A)$ -подмодуль V' в V , порожденный V^0 , вполне приводим.

Осталось показать, что $V' = V$. Если это не выполнено, рассмотрим $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V/V' . В этом случае существует весовой вектор $v \in V$ веса μ , такой, что $v \notin V'$, но $e_i(v) \in V'$ и $\neq 0$ для некоторого i . Но тогда, поскольку V — модуль из категории $\mathcal{O}$, существует $\lambda \in L$, такой, что $\lambda \geq \mu + \alpha_i$ и, следовательно, $\lambda > \mu$, что противоречит условию леммы. $\square$

§9.6. К сожалению, модуль $V \in \mathcal{O}$ не всегда обладает композиционным рядом (т. е. последовательностью подмодулей $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots$, такой, что каждый модуль V_i/V_{i+1} неприводим) (см. упр. 10.3 и 10.4). Однако можно иметь дело с некоторой его заменой.

ЛЕММА 9.6. Пусть $V \in \mathcal{O}$ и $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Тогда существуют фильтрация, являющаяся последовательностью подмодулей $V = V_t \supset V_{t-1} \supset \dots \supset V_1 \supset V_0 = 0$, и подмножество $J \subset \{1, \dots, t\}$, такие, что
(i) если $j \in J$, то $V_j/V_{j-1} \simeq L(\lambda_j)$ для некоторого $\lambda_j \geq \lambda$;

(ii) если $j \notin J$, то $(V_j/V_{j-1})_\mu = 0$ для любого $\mu \geq \lambda$.

Доказательство. Пусть $a(V, \lambda) = \sum_{\mu \geq \lambda} \dim V_\mu$. Будем доказывать лемму индукцией по $a(V, \lambda)$. Если $a(V, \lambda) = 0$, то $0 = V_0 \subset V_1 = V$ есть требуемая фильтрация с $J = \emptyset$. Пусть $a(V, \lambda) > 0$. Выберем максимальный элемент $\mu \in P(V)$, такой, что $\mu \geq \lambda$, возьмем весовой вектор $v \in V_\mu$ и положим $U = U(\mathfrak{g})(v)$. Тогда ясно, что U есть модуль со старшим весом. Из предложения 9.2с) следует, что U содержит максимальный собственный подмодуль $\bar{U}$. Имеем

$$0 \subset \bar{U} \subset U \subset V; \quad U/\bar{U} \simeq L(\mu), \quad \mu \geq \lambda.$$

Так как $a(\bar{U}, \lambda) < a(V, \lambda)$ и $a(V/U, \lambda) < a(V, \lambda)$, используем предположение индукции, чтобы получить подходящие фильтрации для $\bar{U}$ и V/U . Комбинируя их вместе, мы найдем требуемую фильтрацию для V . $\square$

Пусть $V \in \mathcal{O}$ и $\mu \in \mathfrak{h}^*$. Зафиксируем $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, такое, что $\mu \geq \lambda$, и построим фильтрацию, определенную в лемме 9.6. Обозначим через $[V : L(\mu)]$ число появлений μ среди $\{\lambda_j | j \in J\}$. Ясно, что $[V : L(\mu)]$ не зависит от фильтрации, представляемой леммой 9.6, и от выбора λ ; это число называется *кратностью* $L(\mu)$ в V . Отметим, что $L(\mu)$ имеет ненулевую кратность в V , если и только если μ является примитивным весом модуля V .

§9.7. Теперь мы введем и будем изучать формальные характеры модулей из $\mathcal{O}$. Для этой цели определим некоторую алгебру $\mathcal{E}$ над $\mathbb{C}$. Элементы из $\mathcal{E}$ — это ряды вида

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} c_\lambda e(\lambda),$$

где $c_\lambda \in \mathbb{C}$ и $c_\lambda = 0$, если λ лежит вне объединения конечного числа множеств вида $D(\mu)$. Сумма двух таких рядов и умножение на число определяются обычным способом. Если мы положим $e(\lambda)e(\mu) = e(\lambda + \mu)$ и продолжим умножение по линейности, то $\mathcal{E}$ станет коммутативной ассоциативной алгеброй; единичным элементом здесь будет $e(0)$. Элементы $e(\lambda)$ называются формальными экспонентами. Они линейно независимы и находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами λ пространства $\mathfrak{h}^*$.

Пусть теперь V — модуль из категории $\mathcal{O}$ и $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$ — его разложение на весовые подпространства. Определим *формальный характер* модуля V формулой

$$\text{ch } V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (\dim V_\lambda) e(\lambda).$$

Очевидно, что $\text{ch } V \in \mathcal{E}$.

Сначала мы докажем следующее

Предложение 9.7. Пусть V — модуль над $\mathfrak{g}(A)$ из категории $\mathcal{O}$. Тогда

$$(9.7.1) \quad \text{ch } V = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} [V : L(\lambda)] \text{ch } L(\lambda).$$

Доказательство. Обозначим через ϕ отображение, которое сопоставляет каждому $V \in \mathcal{O}$ разность $\phi(V) \in \mathcal{E}$ между левой и правой частями формулы (9.7.1). Тогда $\phi(L(\lambda)) = 0$, и для данной точной последовательности модулей $0 \rightarrow V_1 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow 0$ имеем $\phi(V_2) = \phi(V_1) + \phi(V_3)$.

Используя лемму 9.6, мы выводим, что для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ существуют модули $M_1, \dots, M_r \in \mathcal{O}$, такие, что $(M_i)_\mu = 0$ при $\mu \geq \lambda$ и $\phi(V) = \sum_{i=1}^r \phi(M_i)$. В частности, для каждого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ коэффициент при $e(\lambda)$ в $\phi(V)$ равен нулю. $\square$

Вычислим формальный характер модуля Верма $M(\Lambda)$. Используя предложение 9.2b) и теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта, можно построить базис в пространстве $M(\Lambda)_\lambda$ следующим образом. Пусть $\beta_1, \beta_2, \dots$ — все положительные корни алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ и $e_{-\beta_i, i_s}$ — базис $\mathfrak{g}_{-\beta_i}$ ($1 \leq i_s \leq \text{mult } \beta_i = m_i$). Пусть v_Λ — старший вектор $M(\Lambda)$. Тогда векторы

$$e_{-\beta_1, 1}^{n_{1,1}} \dots e_{-\beta_1, m_1}^{n_{1, m_1}} e_{-\beta_2, 1}^{n_{2,1}} \dots e_{-\beta_2, m_2}^{n_{2, m_2}} \dots (v_\Lambda),$$

для которых $(n_{1,1} + \dots + n_{1, m_1})\beta_1 + (n_{2,1} + \dots + n_{2, m_2})\beta_2 + \dots = \Lambda - \lambda$ и $n_{i,j} \in \mathbb{Z}_+$, образуют базис $M(\Lambda)_\lambda$. Поэтому

$$\text{ch } M(\Lambda) = e(\Lambda) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 + e(-\alpha) + e(-2\alpha) + \dots)^{\text{mult } \alpha}.$$

Следовательно,

$$(9.7.2) \quad \text{ch } M(\Lambda) = e(\Lambda) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{-\text{mult } \alpha}.$$

§9.8. Предположим теперь, что A — симметризуемая матрица и $(\cdot, \cdot)$ — билинейная форма на $\mathfrak{g}(A)$, существование которой обеспечивается теоремой 2.2. Тогда обобщенный оператор Казимира Ω действует на каждом модуле из категории $\mathcal{O}$ (см. §2.6).

ЛЕММА 9.8. а) Если V — модуль над $\mathfrak{g}(A)$ со старшим весом Λ , то

$$\Omega = (|\Lambda + \rho|^2 - |\rho|^2)I_V.$$

б) Если V — модуль из категории $\mathcal{O}$ и v — примитивный вектор веса λ , то существует подмодуль $U \subset V$, такой, что $v \notin U$ и

$$\Omega(v) = (|\lambda + \rho|^2 - |\rho|^2)v \pmod{U}.$$

Доказательство непосредственно вытекает из следствия 2.6. $\square$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.8. Пусть V — модуль над $\mathfrak{g}(A)$ со старшим весом Λ . Тогда

$$(9.8.1) \quad \text{ch } V = \sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ |\lambda + \rho|^2 = |\Lambda + \rho|^2}} c_\lambda \text{ch } M(\lambda), \text{ где } c_\lambda \in \mathbb{Z}, c_\Lambda = 1.$$

Доказательство. Используя (9.7.1), получаем, что (9.8.1) достаточно доказать для $V = L(\Lambda)$. Положим $B(\Lambda) = \{\lambda \leq \Lambda \mid |\lambda + \rho|^2 = |\Lambda + \rho|^2\}$ и упорядочим элементы $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ этого множества так, что неравенство $\lambda_i \geq \lambda_j$ влечет за собой $i \leq j$. Тогда из доказательства предложения 9.7 и леммы 9.8а) получаем систему уравнений

$$\text{ch } M(\lambda_i) = \sum_{\lambda_j \in B(\Lambda)} c_{ij} \text{ch } L(\lambda_j).$$

Матрица (c_{ij}) этой системы треугольна с единицами на диагонали. Решая ее, мы докажем (9.8.1). $\square$

§9.9. Теперь, используя оператор Казимира, мы можем исследовать неприводимость и полную приводимость в $\mathcal{O}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.9. Пусть A — симметризуемая матрица.

а) Если $2(\Lambda + \rho|\beta) \neq (\beta|\beta)$ для любого $\beta \in Q_+, \beta \neq 0$, то $\mathfrak{g}(A)$ -модуль $M(\Lambda)$ неприводим.

б) Если V — некоторый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль из категории $\mathcal{O}$, такой, что для любых двух примитивных весов λ и μ модуля V , удовлетворяющих условию $\lambda - \mu = \beta > 0$, справедливо соотношение $2(\lambda + \rho|\beta) \neq (\beta|\beta)$, то V вполне приводим.

Доказательство. Из предложения 9.3б) следует, что если $M(\Lambda)$ не является неприводимым, то существует примитивный вес $\lambda = \Lambda - \beta$,

где $\beta > 0$. Но тогда лемма 9.8a) дает равенство $2(\lambda + \rho|\beta) = (\beta|\beta)$, что доказывает а).

Для доказательства б) мы можем предполагать, что $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V неразложим. Поскольку очевидно, что Ω локально конечен на V , т. е. каждый элемент $v \in V$ лежит в конечномерном Ω -инвариантном подпространстве, мы получаем, что существует $a \in \mathbb{C}$, для которого $\Omega - aI$ локально нильпотентен на V . Следовательно, лемма 9.8b) влечет за собой $|\lambda + \rho|^2 = |\mu + \rho|^2$ для любых двух примитивных весов λ и μ . Теперь б) вытекает из леммы 9.5. $\square$

§9.10. Здесь мы вместо $\mathfrak{g}(A)$ рассмотрим подалгебру $\mathfrak{g}'(A) = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$ в $\mathfrak{g}(A)$. Напомним, что $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A) + \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}' = \sum_i \mathbb{C}\alpha_i^\vee = \mathfrak{g}'(A) \cap \mathfrak{h}$. Вспомним также свободную абелеву группу Q и разложение $U(\mathfrak{g}'(A)) = \bigoplus_{\alpha \in Q} U'_\alpha$ (подробности см. в §2.6).

Модуль V над $\mathfrak{g}'(A)$ называется *модулем со старшим весом* $\Lambda \in (\mathfrak{h}')^*$, если V обладает Q_+ -градуировкой $V = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} V_{\Lambda - \alpha}$, такой, что

$U'_\beta(V_{\Lambda - \alpha}) \subset V_{\Lambda - \alpha + \beta}$, $\dim V_\Lambda = 1$, $h(v) = \Lambda(h)v$ для $h \in (\mathfrak{h}')^*$, $v \in V_\Lambda$ и $V = U(\mathfrak{g}'(A))(V_\Lambda)$. Другими словами, он является ограничением $\mathfrak{g}(A)$ -модуля со старшим весом на $\mathfrak{g}'(A)$. Точно так же, как в §9.2, мы определяем модуль Верма $M(\Lambda)$ над $\mathfrak{g}'(A)$ и показываем, что он содержит единственный собственный максимальный градуированный подмодуль $M'(\Lambda)$. Положим $L(\Lambda) = M(\Lambda)/M'(\Lambda)$. Этот модуль, конечно, представляет собой ограничение неприводимого $\mathfrak{g}(A)$ -модуля на $\mathfrak{g}'(A)$.

ЛЕММА 9.10. $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $L(\Lambda)$ неприводим.

Доказательство. Пусть $V \subset L(\Lambda)$ — ненулевой $\mathfrak{g}'(A)$ -подмодуль. Выберем $v = \sum_{i=1}^m v_i \in V$, такой, что $v_i \in L(\Lambda)_{\lambda_i}$, $v_i \neq 0$ и $\sum_i \text{ht}(\Lambda - \lambda_i)$ минимальна. Если $\lambda_i \neq \Lambda$ для некоторого i , то $e_j(v_{\lambda_i}) \neq 0$ для некоторого j (в силу предложения 9.3b)). Следовательно, $v \in L(\Lambda)_\Lambda$ и $V = L(\Lambda)$. $\square$

Иногда мы будем описывать элемент $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ с помощью его *отметок* $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle$ ($i = 1, \dots, n$). Если $\Lambda, M \in \mathfrak{h}^*$ имеют одни и те же отметки, они могут отличаться только вне $\mathfrak{h}'$. Из леммы 9.10 видно, что ограничения модулей $L(\Lambda)$ и $L(M)$ на $\mathfrak{g}'(A)$ изоморфны как (неприводимые) $\mathfrak{g}'(A)$ -модули и действия элементов $\mathfrak{g}(A)$ на них отличаются на скалярные операторы. Заметим, что

$$(9.10.1) \quad \dim L(\Lambda) = 1, \text{ если и только если } \Lambda|_{\mathfrak{h}'} = 0.$$

Действительно, если $\Lambda|_{\mathfrak{h}'} = 0$, мы можем рассмотреть одномерный $\mathfrak{g}(A)$ -модуль $\mathbb{C}$, который тривиален на $\mathfrak{g}'(A)$, а на $\mathfrak{h}$ определяется по правилу $h \mapsto \langle \Lambda, h \rangle$; из единственности $L(\Lambda)$ (см. §9.3) следует, что $\mathfrak{g}(A)$ -модули $L(\Lambda)$ и $\mathbb{C}$ изоморфны. Вторая часть утверждения, «только если», вытекает из выкладки: $0 = e_i f_i(v) = \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle v$, если v — старший вектор.

Если A — симметризуемая матрица, то $\mathfrak{g}'(A)$ обладает симметрической инвариантной билинейной формой $(\cdot | \cdot)$, которая определяется на $\mathfrak{h}'$ соотношением (2.1.2), а ее ядром является $\mathfrak{s}$ (по теореме 2.2). Положим $(\beta | \gamma) = (\nu^{-1}(\beta) | \nu^{-1}(\gamma))$ для $\beta, \gamma \in Q$ (см. §2.6). Определим, кроме того, $\rho \in (\mathfrak{h}')^*$ по правилу $\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = \frac{1}{2} a_{ii}$ ($i = 1, \dots, n$).

Впоследствии мы будем использовать следующий вариант предложения 9.9 для алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)$, где A может быть бесконечной:

Предложение 9.10. Пусть A — симметризуемая матрица, возможно бесконечная.

a) Если $2\langle \Lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle \neq (\beta | \beta)$ для любого $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$, то $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $M(\Lambda)$ неприводим.

b) Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль, удовлетворяющий следующим трем условиям:

- (i) для каждого $v \in V$ равенство $e_i(v) = 0$ выполняется для всех e_i , за исключением конечного числа;
- (ii) для каждого $v \in V$ существует $k > 0$, такое, что $e_{i_1} \cdots e_{i_s}(v) = 0$ при $s > k$;
- (iii) $V = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{h}')^*} V_\lambda$, где $V_\lambda = \{v \in V | h(v) = \langle \lambda, h \rangle v \text{ для всех } h \in \mathfrak{h}'\}$;
- (iv) если λ и $\mu \in (\mathfrak{h}')^*$ — примитивные веса, такие, что $\lambda - \mu = \beta |_{\mathfrak{h}'}$ для некоторого $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$, то $2\langle \lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle \neq (\beta | \beta)$.

Тогда V вполне приводим, т. е. изоморфен прямой сумме $\mathfrak{g}'(A)$ -модулей вида $L(\Lambda)$, $\Lambda \in (\mathfrak{h}')^*$.

Доказательство. Для доказательства предложения мы применим оператор Ω_0 вместо Ω (см. §2.5). Ясно, что Ω_0 локально конечен на V , если выполнены условия (i) и (ii) п. b). Кроме того, из (2.6.1) вытекает следующий факт. Пусть $v \in V_\lambda$ таков, что $(\Omega_0 - aI_V)^k(v) = 0$ для некоторых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $a \in \mathbb{C}$, и пусть $v' \in U'_{-\beta}(v)$ ($\beta \in Q$); тогда (см. (3.4.1))

$$(9.10.2) \quad (\Omega_0 - (a + 2\langle \lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle - (\beta | \beta))I_V)^k v' = 0.$$

Чтобы доказать a), предположим, что J — собственный ненулевой подмодуль в $M(\Lambda)$. Возьмем ненулевой элемент $v' = \sum_i v_i \in J$, где $v_i \in U'_{-\beta_i}(v)$, v — старший вектор модуля $M(\Lambda)$ и $\beta_i \in Q_+ \setminus \{0\}$ таков, что $\sum_i \text{ht } \beta_i$ минимальна. Тогда $p_+(v_i) = 0$, и поэтому $\Omega_0(v_i) = 0$.

Заметим также, что $\Omega_0(v) = 0$. Применяя (9.10.2) к $V = M(\Lambda)$ и $v' = v_i$, мы приходим к противоречию с предположением в а).

Для доказательства б) положим $V^0 = \{v \in V \mid n_+(v) = 0\}$ и $V' = U(\mathfrak{g}'(A))V^0$. Заметим, что пространство V^0 градуировано относительно разложения (iii). Используя (9.10.2) и (iv), мы покажем, что каждый вектор $v \in V^0 \cap V_\lambda$ порождает $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $L(\lambda)$. Действительно, сначала мы покажем, что $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $U(\mathfrak{g}'(A))(v)$ обладает Q_+ -градуировкой. В противном случае существует линейная комбинация ненулевых векторов $\sum_i v_i = 0$, где $v_i \in U'_{-\beta_i}(v)$, $\beta_i \in Q_+$ и $\beta_i \neq \beta_j$ при $i \neq j$, причем $\sum_i \text{ht } \beta_i$ минимальна. С помощью таких же рассу-

ждений, как при доказательстве а), мы придем к противоречию с (iv). Теперь мы убедимся, что этот модуль неприводим. В силу леммы 9.10 достаточно проверить, что он не имеет Q_+ -градуированных идеалов. В противном случае существует ненулевой вектор $v' \in U'_{-\beta}(v)$, где $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$, такой, что $n_+(v') = 0$. Снова (9.10.2) дает противоречие с (iv). Следовательно, $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль V' вполне приводим.

Теперь мы докажем, что $V' = V$. Предположим противное; тогда существует вектор $v \in V_\lambda \setminus V'$, такой, что $n_+(v) \subset V'$ и $(\Omega_0 - aI_V)^k(v) = 0$ для некоторых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $a \in \mathbb{C}$. Так как очевидно, что $\Omega_0(v) \in V'$, то $a = 0$, и поэтому $\Omega_0^k(v) = 0$. Но тогда существует $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$ и $u \in U'_\beta$, для которого $n_+(u(v)) = 0$ (в силу (ii)). Так как $\Omega_0(u(v)) = 0$, используя еще раз (9.10.2), приходим к противоречию с (iv). $\square$

Следствие 9.10. Пусть A — симметризуемая матрица с неположительными вещественными элементами и V — некоторый $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль, удовлетворяющий условиям (i), (ii) и (iii) предложения 9.10b). Предположим, что для каждого веса λ модуля V справедливы неравенства $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle > 0$ для всех i . Тогда V есть прямая сумма неприводимых $\mathfrak{g}'(A)$ -модулей, которые являются свободными $U(n_-)$ -модулями ранга 1.

Доказательство. Мы можем считать, что $A = (a_{ij})$ — симметрическая матрица (заменяя элементы $\alpha_i^\vee$ на пропорциональные). Для $\beta = \sum_i k_i \alpha_i \in Q_+ \setminus \{0\}$ и веса λ модуля V имеем

$$2\langle \lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle - (\beta|\beta) = 2 \sum_i k_i \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle - \sum_{i \neq j} a_{ij} k_i k_j - \sum_i a_{ii} (k_i^2 - k_i) > 0.$$

Теперь мы применяем утверждение б), а затем а) предложения 9.10. $\square$

§9.11. Здесь мы приведем неожиданное приложение результатов теории представлений, развитой в этой главе, к определяющим соотношениям алгебр Ли $\mathfrak{g}(A)$ с симметризуемой матрицей Картана A . Как и прежде, $(\cdot, \cdot)$ обозначает билинейную форму на $\mathfrak{g}(A)$, задаваемую теоремой 2.2. Пусть $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ — алгебра Ли, введенная в §1.2, так что $\mathfrak{g}(A) = \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau$ и $\tau = \tau_- \oplus \tau_+$. Положим $\tau_\alpha = \tilde{\mathfrak{g}}_\alpha \cap \tau$.

Предложение 9.11. Идеал τ_+ (соответственно τ_-) порождается как идеал в $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (соответственно в $\tilde{\mathfrak{n}}_-$) теми τ_α (соответственно $\tau_{-\alpha}$), для которых $\alpha \in Q_+ \setminus \Pi$ и $2(\rho|\alpha) = (\alpha|\alpha)$.

Доказательство. Определим модуль Верма $\tilde{M}(\lambda)$ над $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ как $U(\tilde{\mathfrak{g}}(A))/\tilde{J}$, где $\tilde{J}$ есть левый идеал, порожденный $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ и $h - \lambda(h)$ ($h \in \mathfrak{h}$) (ср. §9.2). Пусть $\tilde{M}'(\lambda)$ — единственный (собственный) максимальный подмодуль в $\tilde{M}(\lambda)$. Имеет место изоморфизм $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ -модулей

$$(9.11.1) \quad \tilde{M}'(0) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \tilde{M}(-\alpha_i).$$

Это справедливо в силу того, что $\tilde{\mathfrak{n}}_-$ — свободная алгебра Ли (см. теорему 1.2b)), и, следовательно, $U(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$ свободно порождается $f_1, \dots, f_n$. Изоморфизм (9.11.1) дает следующий изоморфизм $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ -модулей:

$$(9.11.2) \quad U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{g}})} \tilde{M}'(0) \simeq U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{g}})} \left(\bigoplus_{i=1}^n \tilde{M}(-\alpha_i) \right) \simeq \bigoplus_{i=1}^n M(-\alpha_i).$$

Здесь и далее мы пишем для краткости $U(\mathfrak{g}), \dots$ вместо $U(\mathfrak{g}(A)), \dots$. Пусть $\pi : \tilde{\mathfrak{g}}(A) \rightarrow \mathfrak{g}(A)$ — канонический гомоморфизм. Определим отображение $\lambda_1 : \tau_- \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\tilde{\mathfrak{g}})} \tilde{M}'(0)$ по правилу $\lambda_1(a) = 1 \otimes a(\tilde{v})$, где $\tilde{v}$ — старший вектор модуля $\tilde{M}(0)$. Это гомоморфизм $\tilde{\mathfrak{g}}$ -модулей; в самом деле, для $x \in \tilde{\mathfrak{g}}, a \in \tau_-$ имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1([x, a]) &= 1 \otimes (xa - ax)\tilde{v} = \pi(x) \otimes a(\tilde{v}) - \pi(a) \otimes x(\tilde{v}) \\ &= \pi(x) \otimes a(\tilde{v}) = x(\lambda_1(a)), \text{ так как } \pi(a) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получаем $\lambda_1([\tau_-, \tau_-]) = 0$, так что мы имеем гомоморфизм $\mathfrak{g}(A)$ -модулей

$$\lambda : \tau_- / [\tau_-, \tau_-] \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M(-\alpha_i)$$

в силу (9.11.2). Более явно λ описывается следующим образом: запишем $a \in \tau_-$ в виде $a = \sum_i u_i f_i$, где $u_i \in U_0(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$; тогда $\lambda(a + [\tau_-, \tau_-]) =$

$\sum_i \pi(u_i)v_i$, где v_i — старший вектор модуля $M(-\alpha_i)$. Докажем, что λ инъективен. Действительно, $\lambda(a + [\tau_-, \tau_-]) = 0$ влечет за собой $\pi(u_i) = 0$ для всех i ; следовательно, $u_i \in \tau_- U_0(\bar{n}_-) \cap \tau_-$. Поэтому $a \in [\tau_-, \tau_-]$ в силу общего факта: для данной алгебры Ли $\mathfrak{n}$ и подалгебры $\tau \subset \mathfrak{n}$

$$(9.11.3) \quad \tau \cap \tau U_0(\mathfrak{n}) = [\tau, \tau].$$

Используя теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта, мы сводим (9.11.3) к другому утверждению для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{t}$:

$$(9.11.4) \quad \tau \cap U_0(\tau)^2 = [\tau, \tau].$$

Для его проверки достаточно рассмотреть алгебру $U(\tau/[\tau, \tau])$, которая представляет собой кольцо полиномов.

В результате мы имеем вложение $\lambda: \tau_-/[\tau_-, \tau_-] \rightarrow \oplus M(-\alpha_i)$ в категории $\mathcal{O}$ модулей над $\mathfrak{g}(A)$. Пусть теперь $-\alpha$ ($\alpha \in Q_+$) — примитивный вес $\mathfrak{g}(A)$ -модуля $\tau_-/[\tau_-, \tau_-]$. Заметим, что $\alpha \notin \Pi$, так как ни один из f_i не лежит в τ . Используя вложение λ , мы заключаем с помощью леммы 9.8, что $|\alpha_i - \alpha|^2 = |\alpha_i + \alpha|^2$ для некоторого i , и поэтому $2(\rho|\alpha) = (\alpha|\alpha)$ (поскольку $2(\rho|\alpha_i) = (\alpha_i|\alpha_i)$). Применяя замечание 9.3, мы выводим, что τ_- порождается как идеал в $\bar{n}_-$ теми $\tau_{-\alpha_i}$ для которых $\alpha \in Q_+ \setminus \Pi$ и $2(\rho|\alpha) = (\alpha|\alpha)$. Это завершает доказательство предложения для τ_- . Утверждение для τ_+ следует из доказанного, если применить инволюцию $\bar{\omega}$ алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}(A)$. $\square$

В случае алгебры Каца — Муди мы получаем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 9.11. Пусть $\mathfrak{g}(A) = \bar{\mathfrak{g}}(A)/\tau$ — алгебра Каца — Муди с симметризуемой матрицей Картана A . Тогда элементы

$$(9.11.5) \quad (\text{ad } e_i)^{1-\alpha_{ij}} e_j, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$$(9.11.6) \quad (\text{ad } f_i)^{1-\alpha_{ij}} f_j, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

порождают идеалы τ_+ и τ_- соответственно.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}_1(A)$ факторалгебру алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ по идеалу, порожденному всеми элементами (9.11.5) и (9.11.6) (эти соотношения выполнены в силу (3.3.1)). Мы имеем индуцированную Q -градуировку $\mathfrak{g}_1(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}'_\alpha$. Пусть $\tau'_\pm$ обозначает образ $\tau_\pm$

в $\mathfrak{g}_1(A)$. Предположим противное к утверждению теоремы: $\tau'_+ \neq 0$ (случай τ'_- получается применением ω). Выберем корень α минимальной высоты среди корней $\alpha \in Q_+ \setminus \{0\}$, такой, что $\tau'_+ \cap \mathfrak{g}'_\alpha \neq 0$, и пусть $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$. Ясно, что $\tau'_+ \cap \mathfrak{g}'_\alpha$ должно входить в любую систему однородных образующих τ'_+ .

Из доказательств §3.8 (которые использовали только соотношения (3.3.1)) следует, что существует $\tilde{r}_i \in \text{Aut } \mathfrak{g}_1(A)$, такой, что $\tilde{r}_i(g'_\alpha) = g'_{r_i(\alpha)}$ и $\tilde{r}_i(r'_+) = r'_+$ для всех i . Следовательно, $\text{ht } r_i(\alpha) \geq \text{ht } \alpha$ для всех $i = 1, \dots, n$, и поэтому $(\alpha|\alpha_i) \leq 0$ для всех i , где $(\cdot|\cdot)$ — стандартная форма. Значит, $(\alpha|\alpha) \leq 0$. Но $2(\rho|\alpha) = 2 \sum_i k_i(\rho|\alpha_i) = \sum_i k_i(\alpha_i|\alpha_i) > 0$, и мы приходим к противоречию с предложением 9.11. $\square$

Из теоремы 9.11 вытекает следующее определение алгебры Каца — Муди в терминах образующих и соотношений. Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметризуемая обобщенная матрица Картана и $(\eta, \Pi, \Pi^\vee)$ — реализация A (см. §1.1). Тогда $\mathfrak{g}(A)$ есть алгебра Ли с образующими e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$), η и определяющими соотношениями:

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} \alpha_i^\vee, \quad [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, \quad [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i, \\ [h, h'] &= 0 \quad (h, h' \in \eta), \quad (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \\ (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j &= 0 \quad (i, j = 1, \dots, n; i \neq j). \end{aligned}$$

Кроме того, $\mathfrak{g}'(A)$ имеет представление, описанное во введении (см. §0.3).

§9.12. Ниже приводятся некоторые другие важные приложения предложения 9.11.

Предложение 9.12. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметризуемая $n \times n$ -матрица, $\mathfrak{g}(A)$ — соответствующая алгебра Ли, Δ_+ — множество положительных корней, $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \eta \oplus \mathfrak{n}_+$ — треугольное разложение и т. д.

а) Если a_{ij} — ненулевые вещественные числа одного знака для всех $i, j = 1, \dots, n$, то $\mathfrak{n}_+$ (соответственно $\mathfrak{n}_-$) есть свободная алгебра Ли с образующими $e_1, \dots, e_n$ (соответственно $f_1, \dots, f_n$).

б) Пусть $L \subset \Delta_+$ обладает следующими свойствами:

- (i) $(\alpha|\beta)$ — ненулевые вещественные числа одного знака для всех $\alpha, \beta \in L$;
- (ii) если $\alpha, \beta \in L$ и $\alpha - \beta \in \Delta_+$, то $\alpha - \beta \in L$.

Пусть $\mathfrak{n}_\pm^L$ — подалгебра в $\mathfrak{n}_\pm$, порожденная $\bigoplus_{\alpha \in L} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$; положим $\eta^L = \sum_{\alpha \in L} C\alpha^{-1}(\alpha)$ и

$$(9.12.1) \quad \mathfrak{g}^L = \mathfrak{n}_-^L \oplus \eta^L \oplus \mathfrak{n}_+^L.$$

Для $\alpha \in L$ положим $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}^0 = \{x \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha} | (x|y) = 0 \text{ для всех } y \in [\mathfrak{n}_\mp^L, \mathfrak{n}_\mp^L]\}$. Пусть I — (возможно, бесконечное) множество, содержащее $\alpha \in L$ с

кратностью $\dim \mathfrak{g}_\alpha^0$; рассмотрим матрицу $B = ((\alpha|\beta))_{\alpha, \beta \in I}$ и соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{g}'(B)$. Тогда $\mathfrak{g}^L$ есть алгебра Ли, изоморфная факторалгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}'(B)$ по центральному идеалу (который лежит в подалгебре Картана в $\mathfrak{g}'(B)$). Кроме того, (9.12.1) индуцировано треугольным разложением для $\mathfrak{g}'(B)$ и $\mathfrak{n}_+^L$ (соответственно $\mathfrak{n}_-^L$) есть свободная алгебра Ли, множеством образующих которой является базис пространства $\bigoplus_{\alpha \in L} \mathfrak{g}_\alpha^0$ (соответственно $\bigoplus_{\alpha \in L} \mathfrak{g}_{-\alpha}^0$).

Доказательство. Сначала мы докажем а). Заменяя элементы дуального корневого базиса на пропорциональные, мы можем считать, что матрица A симметрическая и имеет положительные элементы. Но тогда для $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i \in Q_+$ получаем

$$2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha) = \sum_i a_{ii}(k_i - k_i^2) - \sum_{i \neq j} a_{ij} k_i k_j < 0,$$

если $\alpha \neq 0$ и $\alpha \notin \Pi$. Теперь мы можем применить предложение 9.11.

Для доказательства б) мы можем предполагать, что L конечно. Используя индукцию по $|L|$ и утверждение а), мы доказываем б), а также тот факт, что $(\cdot|\cdot)$ задает невырожденное спаривание между $\mathfrak{n}_+^L$ и $\mathfrak{n}_-^L$. $\square$

Следствие 9.12. а) Пусть A — симметризуемая матрица и $\alpha \in \Delta_+(A)$ — такой элемент, что $(\alpha|\alpha) \neq 0$. Тогда $\bigoplus_{k \geq 1} \mathfrak{g}_{k\alpha}$ есть свободная алгебра Ли, множеством образующих которой является базис пространства $\bigoplus_{k \geq 1} \mathfrak{g}_{k\alpha}^0$, где $\mathfrak{g}_{k\alpha}^0 = \{x \in \mathfrak{g}_{k\alpha} | (x|y) = 0 \text{ для всех } y \text{ из подалгебры, порожденной } \mathfrak{g}_{-\alpha}, \dots, \mathfrak{g}_{-(k-1)\alpha}\}$.

б) Пусть A — обобщенная матрица Картана и $\alpha \in \Delta_+(A)$ — изотропный корень. Тогда $S\nu^{-1}(\alpha) \oplus (\bigoplus_{j \neq 0} \mathfrak{g}_j \alpha)$ есть бесконечная алгебра Ли Гейзенберга.

Доказательство. а) следует из предложения 9.12б), если положить $L = \{k\alpha | k \in \mathbb{Z}_+\}$. Если α является мнимым корнем аффинной алгебры Ли, то б) совпадает с предложением 8.4. Для доказательства б) в общем случае применяем предложение 5.7 и лемму 3.8. $\square$

§9.13. Ниже приводится приложение результатов §9.10 к теории представлений бесконечномерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{s}$ (= алгебра Ли Гейзенберга порядка ∞ ; см. §2.9). Напомним, что это алгебра Ли с базисом p_i, q_i ($i = 1, 2, \dots$) и с коммутационными соотношениями

$$(9.13.1) \quad [p_i, q_i] = c(i = 1, 2, \dots), \text{ все остальные скобки нулевые.}$$

Это нильпотентная алгебра Ли с центром $\mathbb{C}s$.

Хорошо известно, что для любого $a \in \mathbb{C}^\times$ алгебра Ли $\mathfrak{z}$ имеет неприводимое представление σ_a , называемое *представлением канонических коммутационных соотношений*, в пространстве $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ полиномов от бесконечного числа переменных x_i , определенное по правилу

$$\sigma_a(p_i) = a \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \sigma_a(q_i) = x_i, \quad \sigma_a(c) = aI_R.$$

Здесь и далее оператор умножения на полином P обозначается тем же символом. Мы будем обозначать этот $\mathfrak{z}$ -модуль через R_a .

Введем следующие коммутативные подалгебры в $\mathfrak{z}$:

$$\mathfrak{z}_+ = \sum_{j \geq 1} \mathbb{C}p_j; \quad \mathfrak{z}_- = \sum_{j \geq 1} \mathbb{C}q_j.$$

Вектор v в некотором $\mathfrak{z}$ -модуле называется *вакуумным вектором* с *собственным значением* $\lambda \in \mathbb{C}$, если $\mathfrak{z}_+(v) = 0$ и $c(v) = \lambda v$.

Заметим (ср. §2.9), что $\mathfrak{z}$ может рассматриваться как алгебра Ли $\mathfrak{g}'(0)/\mathfrak{t}_1$, где $\mathfrak{t}_1 \subset \mathfrak{t}$ есть центральный идеал, так что $\mathfrak{p}_+$ (соответственно $\mathfrak{p}_-$) отождествляется с $\mathfrak{z}_+$ (соответственно $\mathfrak{z}_-$). Поскольку (R, σ_a) является свободным $U(\mathfrak{z}_-)$ -модулем ранга 1, он представляет собой не что иное, как модуль Верма над $\mathfrak{z}$, причем вектор 1 есть старший вектор = вакуумный вектор. Теперь общее предложение 9.10 дает в нашем частном случае следующий результат, который может рассматриваться как алгебраический вариант теоремы Стоуна — фон Неймана.

ЛЕММА 9.13. а) Пусть V — некоторый $\mathfrak{z}$ -модуль, такой, что $c = aI_V$, где $a \neq 0$, обладающий вакуумным вектором $v_0 \neq 0$, для которого $V = U(\mathfrak{z}_-)(v_0)$. Тогда $\mathfrak{z}$ -модуль V изоморфен R_a .

б) Пусть V — некоторый $\mathfrak{z}$ -модуль, такой, что c диагонализируется с ненулевыми собственными значениями и для каждого $v \in V$ существует N , для которого $p_{i_1} \dots p_{i_n}(v) = 0$ при $n > N$. Тогда V изоморфен прямой сумме $\mathfrak{z}$ -модулей вида $R_a, a \neq 0$.

Доказательство. Мы можем считать в б), что $c = aI_V$ при $a \neq 0$. Модуль V можно рассматривать как $\mathfrak{g}'(0)$ -модуль, для которого $\alpha_i^\vee = aI_V$ при всех i . Но тогда для каждого веса λ и $\beta \in Q$ имеем $\langle \lambda, \nu^{-1}(\beta) \rangle = aht\beta$. Так как $\langle \beta | \beta \rangle = 0$ и $\rho = 0$, получаем $2\langle \lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle = 2aht\beta \neq \langle \beta | \beta \rangle$ для $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$. Теперь а) и б) следуют из предложения 9.10а) и б). $\square$

Следствие 9.13. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{z}$ -модуль, который обладает ненулевым вакуумным вектором с ненулевым собственным значением λ . Тогда $\mathfrak{z}$ -модуль V изоморфен R_λ .

Часто рассматривается расширение алгебры Ли $\mathfrak{s}$ с помощью дифференцирования d_0 , определенного формулами

$$[d_0, q_j] = m_j q_j, \quad [d_0, p_j] = -m_j p_j,$$

где m_j — некоторые положительные целые числа. Алгебра Ли $\mathfrak{a} = (\mathfrak{s} + \mathbb{C}d_0) \oplus \mathfrak{a}_0$, где $\mathfrak{a}_0$ — конечномерный центральный идеал, называется *осцилляционной алгеброй*. Для $b \in \mathbb{C}$ и $\lambda \in \mathfrak{a}_0^*$ мы можем продолжить $\mathfrak{s}$ -модуль R_a до $\mathfrak{a}$ -модуля $R_{a,b,\lambda}$ следующим образом:

$$d_0 \mapsto b + \sum_j m_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad a \mapsto \langle \lambda, a \rangle I \text{ для } a \in \mathfrak{a}_0.$$

Если положить $\mathfrak{s}_0 = \mathbb{C}c + \mathbb{C}d_0 + \mathfrak{a}_0$, то мы будем иметь треугольное разложение

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{s}_- \oplus \mathfrak{s}_0 \oplus \mathfrak{s}_+.$$

Следующее предложение непосредственно вытекает из леммы 9.13.

Предложение 9.13. Пусть V — некоторый $\mathfrak{a}$ -модуль, такой, что $\mathfrak{s}_0$ диагонализирована и c имеет только ненулевые собственные значения.

а) Если существует $v_0 \in V, v_0 \neq 0$, для которого

$$\mathfrak{s}_+(v_0) = 0, \quad U(\mathfrak{s}_-)v_0 = V,$$

то V изоморфен $\mathfrak{a}$ -модулю $R_{a,b,\lambda}$.

б) Если для каждого $v \in V$ существует N , для которого $p_{i_1} \dots p_{i_n}(v) = 0$ при $n > N$, то V изоморфен прямой сумме $\mathfrak{a}$ -модулей $R_{a,b,\lambda}, a \neq 0$.

Заметим, что моном $x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \in R_{a,b,\lambda}$ является собственным вектором для d_0 с собственным значением $\sum_k m_k j_k$. Следовательно, для $\mathfrak{a}$ -модуля $R = R_{a,b,\lambda}$ при $a \neq 0$ имеем

$$(9.13.2) \quad \mathrm{tr}_R q^{d_0} = q^b \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{m_j})^{-1}.$$

Здесь, как обычно, для диагонализированного оператора A на векторном пространстве V с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, учитывая кратности, мы полагаем $\mathrm{tr}_V q^A = \sum_i q^{\lambda_i}$.

Как и в §9.4, легко видеть, что $\mathfrak{s}$ -модуль R_a обладает единственной («контравариантной») билинейной формой B , такой, что $B(1, 1) = 1$, и p_n есть оператор, сопряженный к q_n , при условии, что $a \in \mathbb{R}$. С помощью индукции нетрудно увидеть также, что различные мономы ортогональны относительно B и

$$(9.13.3) \quad B(x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}) = a^{\sum k_i} \prod_j k_j!.$$

Как и в §9.4, B можно записать также в виде

$$(9.13.4) \quad B(P, Q) = \left(P \left(a \frac{\partial}{\partial x_1}, a \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \right) Q(x_1, x_2, \dots) \right) (0).$$

Отметим, наконец, что в $\mathfrak{a}$ -модуле $R_{a,b,\lambda}$ операторы d_0 и $s \in \mathfrak{s}_0$ являются самосопряженными относительно B .

§9.14. Позже будут использоваться следующие основные понятия теории представлений алгебры Вирасоро Vir (см. §7.3), очень похожие на соответствующие понятия для алгебр Каца — Муди.

Определим *треугольное разложение* Vir соотношением

$$\text{Vir} = \text{Vir}_- \oplus \text{Vir}_0 \oplus \text{Vir}_+, \text{ где } \text{Vir}_{\pm} = \bigoplus_{j>0} \mathbb{C} d_{\pm j}, \text{ Vir}_0 = \mathbb{C} c \oplus \mathbb{C} d_0.$$

Для данных $c, h \in \mathbb{C}$ определим Vir -модуль со старшим весом (c, h) с помощью условия, что в нем существует ненулевой вектор $v = v_{c,h}$, такой, что (ср. §9.2):

$$\text{Vir}_+(v) = 0, U(\text{Vir}_-)v = V, d_0(v) = hv, c(v) = cv.$$

(Здесь и далее мы следуем обычной практике физиков обозначать собственное значение центрального элемента той же буквой, надеясь, что это не приведет к путанице.)

Определение модуля Верма $M(c, h)$ над Vir и доказательство его существования и единственности проводятся таким же способом, как в §9.2.

Ясно, что c действует в $M(c, h)$ как cI . Число c называется *конформным центральным зарядом*. Так же как в §9.7, легко проверяется, что элементы

$$(9.14.1) \quad d_{-j_n} \dots d_{-j_2} d_{-j_1}(v_{c,h}), \text{ где } 0 < j_1 \leq j_2 \leq \dots,$$

образуют базис $M(c, h)$. Так как $[d_0, d_{-n}] = n d_{-n}$, мы видим, что d_0 диагонализировано на $M(c, h)$ со спектром $h + \mathbb{Z}_+$ и разложением на собственные подпространства

$$(9.14.2) \quad M(c, h) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} M(c, h)_{h+j},$$

где $M(c, h)_{h+j}$ — линейная оболочка элементов вида (9.14.1), причем $j_1 + \dots + j_n = j$.

Отсюда вытекает, что

$$(9.14.3) \quad \dim M(c, h)_{h+j} = p(j),$$

где $p(j)$ есть классическая функция разбиений. (Таким образом, функция разбиений Костанта для алгебры Вирасоро представляет собой классическую функцию разбиений.) Равенство (9.14.3) можно переписать в виде

$$\mathrm{tr}_{M(c,h)} q^{d_0} := \sum_{\lambda} \dim M(c,h)_{\lambda} q^{\lambda} = q^h \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{-1}.$$

Как и в §9.7, ряд $\mathrm{tr}_V q^{d_0}$ называется *формальным характером* Vir-модуля V .

Так же как в §9.2, показывается, что существует единственный неприводимый Vir-модуль $L(c, h)$ со старшим весом (c, h) .

Инволюция Шевалле ω на Vir определяется по правилу

$$(9.14.4) \quad \omega(d_n) = -d_{-n}, \quad \omega(c) = -c.$$

Контравариантная билинейная форма B на Vir-модуле определяется так же, как в §9.4. Другими словами, это симметрическая билинейная форма, относительно которой d_n и d_{-n} являются сопряженными операторами. Ее существование, единственность и построение устанавливаются и проводятся таким же способом, как и в §9.4.

§9.15. Упражнения

9.1. Покажите, что каждый ненулевой гомоморфизм $M(\lambda_1) \rightarrow M(\lambda_2)$ является вложением.

9.2. Докажите, что для $V \in \mathcal{O}$ существует возрастающая фильтрация (вообще говоря, бесконечная) подмодулей $0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots$, такая, что V_{i+1}/V_i есть модуль со старшим весом.

9.3. Пусть V — модуль со старшим весом Λ . Тогда $\mathrm{ch} V = \sum_{\lambda \leq \Lambda} c_{\lambda} \mathrm{ch} M(\lambda)$, где $c_{\Lambda} = 1$, $c_{\lambda} \in \mathbb{Z}$ и $c_{\lambda} = 0$, если λ не является примитивным весом модуля Верма $M(\mu)$, где μ есть примитивный вес модуля V .

Покажите также, что если $c_{\lambda} \neq 0$, то $[M(\Lambda) : L(\lambda)] \neq 0$.

9.4. Пусть A — обобщенная матрица Картана конечного типа, а $V \in \mathcal{O}$ — конечно порожденный модуль над $\mathfrak{g}(A)$. Покажите, что V обладает рядом Жордана — Гельдера, т. е. фильтрацией подмодулей $V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_s = 0$, такой, что все модули V_i/V_{i+1} неприводимы. Опишите ряд Жордана — Гельдера для модулей Верма над $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

9.5. Пусть $\mathfrak{g}'(0)$ — производная алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}(0)$, соответствующей нулевой $n \times n$ -матрице. Для данных $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ следующие формулы определяют структуру $\mathfrak{g}'(0)$ -модуля на пространстве $V = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$:

$$e_i \rightarrow c_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \rightarrow \text{умножение на } x_i, \quad \alpha_i^{\vee} \rightarrow c_i I_V.$$

Докажите, что $V \simeq M(\Lambda)$, где $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = c_i$ ($i = 1, \dots, n$). Покажите, что V неприводим, если и только если все c_i ненулевые.

9.6. Пусть $M(0)$ — модуль Верма со старшим весом 0 над $\mathfrak{g}(A)$. Тогда если v — старший вектор, то $f_i(v)$ аннулируется n_+ и имеет место вложение $M(-\alpha_i) \subset M(0)$.

9.7. Предположим, что A симметризуема. Покажите, что $M(-\alpha_i)$ является неприводимым модулем, если $2(\rho|\gamma) \neq (\gamma|\gamma)$ для всех ненулевых $\gamma \in Q_+ \setminus \Pi$.

9.8. Используя упр. 9.7, покажите, что если $2(\rho|\gamma) \neq (\gamma|\gamma)$ для всех ненулевых $\gamma \in Q_+ \setminus \Pi$, то подмодуль $\sum_i M(-\alpha_i) \subset M(0)$ представляет собой в действительности прямую сумму $\bigoplus_i M(-\alpha_i)$. Выведите в этом

случае равенство $\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} = 1 - \sum_{i=1}^n e(-\alpha_i)$.

9.9. Применяя упр. 9.8, покажите, что если A симметризуема и $2(\rho|\gamma) \neq (\gamma|\gamma)$ для всех ненулевых $\gamma \in Q_+ \setminus \Pi$, то подалгебра n_+ (соответственно n_-) в $\mathfrak{g}(A)$ является свободной алгеброй Ли с образующими e_i (соответственно f_i) $i = 1, \dots, n$. (Это частный случай предложения 9.11, но указанное здесь доказательство более простое.)

9.10. Докажите, что алгебра Ли с образующими e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) и h и определяющими соотношениями $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h$, $[h, e_i] = e_i$, $[h, f_i] = -f_i$ ($i, j = 1, \dots, n$) проста, и потому $e_1, \dots, e_n$ порождают свободную алгебру Ли.

9.11. Докажите, что если A — неразложимая симметризуемая обобщенная матрица Картана бесконечного типа, то $\mathfrak{g}(A)$ содержит свободную алгебру Ли ранга 2 и, следовательно, имеет экспоненциальный рост, т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \log \dim \mathfrak{g}_j(\mathbb{1})/|j| > 0.$$

9.12. Пусть $\tilde{\mathfrak{p}}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\tilde{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}$. Покажите, что следующая последовательность $\mathfrak{p}$ -модулей является точной:

$$0 \rightarrow \mathfrak{a}/[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \rightarrow U_0(\tilde{\mathfrak{p}})/\mathfrak{a}U_0(\tilde{\mathfrak{p}}) \rightarrow U_0(\mathfrak{p}) \rightarrow 0.$$

9.13. Используя упр. 9.12, постройте следующую точную последовательность $\mathfrak{g}(A)$ -модулей:

$$0 \rightarrow \tau_-/[\tau_-, \tau_-] \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n M(-\alpha_i) \rightarrow M(0) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0,$$

где $\mathbb{C}$ рассматривается как тривиальный модуль.

9.14. Пусть $\mathcal{F}$ — пространство всех функций на $\mathfrak{h}^*$, которые обращаются в нуль вне конечного объединения множеств вида $D(\lambda)$. Тогда можно определить произведение (свертку) двух функций $f, g \in \mathcal{F}$ по правилу $(f * g)(\lambda) = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} f(\mu)g(\lambda - \mu)$. Определим дельта-функцию

$\delta_\lambda(\mu) = \delta_{\lambda, \mu}$. Покажите, что отображение $c(\lambda) \mapsto \delta_\lambda$ задает изоморфизм алгебр $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$.

9.15. Пусть A — аффинная матрица типа $A_1^{(1)}$. Покажите, что $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $M(-\rho)$ имеет неприводимый фактормодуль, который не изоморфен $L(-\rho)$.

[Пусть v — старший вектор модуля $M(-\rho)$. Покажите, что $v - (f_1 f_2 + f_2 f_1)v$ порождает собственный подмодуль в $M(-\rho)$.]

9.16. Предположим, что на $V \in \mathcal{O}$ есть две фильтрации $'$ и $''$, удовлетворяющие условиям леммы 9.6. Тогда существует биекция $\sigma: J' \rightarrow J''$, такая, что $\lambda'_j = \lambda''_{\sigma(j)}$ для всех $j \in J'$. Кроме того, если v_μ — примитивный вектор модуля V , то $\mu = \lambda'_j$, где j есть наименьшее целое число, такое, что $v_\mu \in V'_j$.

9.17. Рассмотрим ассоциативную алгебру a с образующими $\alpha_n (n \in \mathbb{Z})$ и коммутационными соотношениями

$$[\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m, -n}.$$

Пусть V — некоторый a -модуль, такой, что $\alpha_0 \mapsto \mu I$ и $\alpha_n(v) = 0$ для каждого $v \in V$ при всех $n > 0$, за исключением конечного числа. Положим

$$L_0 = (\lambda^2 + \mu^2)/2 + \sum_{j>0} \alpha_{-j}\alpha_j,$$

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_{-j}\alpha_{j+n} + i\lambda n \alpha_n \text{ для } n \neq 0.$$

Покажите, что

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \delta_{m, -n} \frac{m^3 - m}{12} (1 + 12\lambda^2)I,$$

и тем самым получено представление Vir с конформным центральным зарядом $c = 1 + 12\lambda^2$.

9.18. Рассмотрим ассоциативную алгебру b с образующими a_m, a_m^* и b_m ($m \in \mathbb{Z}$) и определяющими соотношениями

$$[a_m^*, a_n] = \delta_{m, -n}, [b_m, b_n] = m\delta_{m, -n},$$

все остальные скобки нулевые.

Пусть V — некоторый $\mathfrak{b}$ -модуль, такой, что $b_0 \mapsto 0$ и для любого $v \in V$ соотношения $a_n(v) = 0$, $a_n^*(v) = 0$ и $b_n(v) = 0$ выполнены при всех $n > 0$, за исключением конечного числа. Используемый ниже символ $\because$ нормального произведения образующих означает, как обычно, что образующие с неотрицательными индексами должны быть переставлены вправо от остальных образующих. Пусть

$$H_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} : a_{n-j} a_j^* :, \quad N = \sum_{j > 0} j a_{-j} a_j^* + \frac{1}{2} \sum_{j > 0} b_{-j} b_j.$$

Для данных чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ положим

$$\pi_{\lambda, \mu}(K) = \frac{1}{2} \mu^2 - 2, \quad \pi_{\lambda, \mu}(d) = -N, \quad \pi_{\lambda, \mu}(e^{(n)}) = a_n,$$

$$\pi_{\lambda, \mu}(f^{(n)}) = (n(\frac{1}{2} \mu^2 - 2) - \lambda) a_n^* - \sum_{j \in \mathbb{Z}} : H_j a_{n-j}^* : - \mu \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j a_{n-j}^*,$$

$$\pi_{\lambda, \mu}(h^{(n)}) = \lambda \delta_{n,0} I + 2H_n + \mu b_n.$$

Покажите, что $\pi_{\lambda, \mu}$ — ограниченное представление аффинной алгебры $\hat{\mathcal{L}}(sl_2(\mathbb{C}))$ на V .

9.19. Если в упр. 9.17 (соответственно 9.18) существует α - (соответственно $\mathfrak{b}$ -) циклический вектор $|0\rangle \in V$, такой, что $a_n|0\rangle = 0$ для $n > 0$ (соответственно $a_n|0\rangle = 0 = b_n|0\rangle$ для $n \geq 0$ и $a_n^*|0\rangle = 0$ для $n > 0$), то характер модуля V совпадает с характером модуля Верма $M(1 + 12\lambda^2, \frac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2))$ (соответственно $M((\frac{1}{2}\mu^2 - \lambda - 2)\Lambda_0 + \lambda\Lambda_1)$), но V не обязательно изоморфен модулю Верма.

9.20. Пусть в упр. 9.18 $b_n = 0$ для всех n и $\mu = 0$. Покажите, что если существует $\mathfrak{b}$ -циклический вектор $|0\rangle \in V$, такой, что $a_n|0\rangle = 0$ для $n \geq 0$ и $a_n^*|0\rangle = 0$ для $n > 0$, то

$$\text{ch } V = e((-\lambda - 2)\Lambda_0 - \lambda\Lambda_1) \prod_{\alpha \in \Delta_{\text{af}}^+} (1 - e(-\alpha))^{-1}.$$

9.21. (Открытая проблема.) Пусть V — неприводимый модуль над алгеброй Вирасоро, такой, что d_0 — диагонализированный оператор, собственные значения которого имеют конечные кратности. Тогда либо эти кратности ≤ 1 (в этом случае V — неприводимый подфактормодуль модуля $U_{\alpha, \beta}$, о котором шла речь в упр. 7.24), либо V — модуль со старшим или младшим весом, т. е. существует $v \neq 0$, такой, что $d_i(v) = 0$ для всех $i > 0$ или для всех $i < 0$.

§9.16. Библиографические замечания и комментарии

Категория $\mathcal{O}$ модулей над конечномерными полупростыми алгебрами Ли была введена и изучена в следующих работах: Бернштейн — Гельфанд — Гельфанд [1971, 1976], Bernstein — Gelfand — Gelfand [1975]. Имеется обширная литература, посвященная этому объекту; обзоры можно найти в книгах Dixmier [1974] и Jantzen [1979, 1983]. Первые нетривиальные результаты о модулях Верма были получены Верма (Verma [1968]). Одним из основных технических инструментов теории является фильтрация Янтцена модуля Верма. Изучение этой фильтрации основано на формуле, полученной Шаповаловым [1972] для определителя контравариантной формы на $M(\lambda)$, поднятой с $L(\lambda)$.

Изучение категории $\mathcal{O}$ и модулей со старшим весом над алгебрами Каца — Муди было начато Кацем [1974]. Ряд результатов был получен в статьях Garland — Lepowsky [1976], Lepowsky [1979], Кас — Kazhdan [1979], Deodhar — Gabber — Кас [1982], Rocha — Wallach [1982], Ku [1988 A–C, 1989 A–B] и других. Снова основным инструментом являются формула для определителя контравариантной формы, доказанная в работе Кас — Kazhdan [1979] (обобщение формулы Шаповалова), и фильтрация Янтцена.

Используя эту технику, Кац (Кас [1978 B, 1979]) начал изучение модулей со старшим весом над алгеброй Вирасоро с вычисления определителя контравариантной формы на модуле Верма $M(c, h)$. Было опубликовано несколько доказательств формулы для определителя, см. Фейгин — Фукс [1982], Thorn [1984], Кас — Wakimoto [1986] и др. Вычисление $\text{ch} L(c, h)$ состоит из двух шагов, основанных на этой формуле. Сначала находятся все возможные включения модулей Верма и все случаи, когда $[M(c, h) : L(c, h')] \neq 0$, с использованием фильтрации Янтцена (см. Кас [1978 B]). Затем показывается, что $[M(c, h) : L(c, h')] \leq 1$. Этот более трудный факт, в котором проявляется специфика алгебры Вирасоро, был сформулирован в качестве гипотезы Кацем (Кас [1982 B]) и доказан Фейгиным и Фуксом ([1983 A, B], Feigin — Fuchs [1984 A, B]). Точные формулы для характеров всех $L(c, h)$ легко выводятся из этих фактов; см. Фейгин — Фукс [1983], Feigin — Fuchs [1984]. (Случаи $c \geq 1$ и $c = 0$ были рассмотрены ранее в работах Кас [1979] и Rocha — Wallach [1983 A].) Используя формулу для определителя, Кац (Кас [1982 B]) доказал, что $L(c, h)$ является унитаризуемым для $c \geq 1, h \geq 0$. Критическая полоса $0 \leq c < 1$ была рассмотрена в статье Friedan — Qiu — Shenker [1985] с помощью детального анализа формулы для определителя; в этой статье найдено (дискретное) множество возможных мест унитаризуемости. Унитаризуемость для этого множества была доказана в работах Goddard — Kent — Olive [1985, 1986], Кас — Wakimoto [1986] и Tsuchia — Kanie [1986 B]. Решение проблемы интегрируемости унитаризуемого модуля $L(c, h)$ содержится в статьях Segal [1981], Неретин [1983] и Goodman — Wallach [1985] (см. книгу Pressley — Segal [1986] на эту тему). В результате остается нерешенной только одна пробле-

ма из тех, что сформулированы в статье Кас [1982 В]; это упр. 9.21. В том случае, когда спектр d_0 прост, эта проблема решена в работе Karlansky — Santaroubane [1985], а в случае унитарного модуля V — в работе Chari — Pressley [1988 В]¹.

Замечательная связь между теорией модулей со старшим весом над алгеброй Вирасоро и конформной теорией поля и статистической механикой была открыта Белаиным, Поляковым и Замолодчиковым (Belavin — Polyakov — Zamolodchikov [1984 А, В]). К настоящему времени конформная теория поля стала огромной областью с большим числом замечательных ответвлений в другие части математики и математической физики; см. обзоры Goddard — Olive [1986], Ginsparg [1988], Furlan — Sotkov — Todorov [1988], Goddard [1989] и многие другие. Основы теории представлений алгебры Вирасоро можно найти в книге Кас — Raina [1987].

Одна из основных проблем теории модулей Верма состоит в вычислении кратностей $[M(\lambda) : L(\lambda')]$. В конечномерном случае Каждан и Люстиг (Kazhdan — Lusztig [1979]) пришли к замечательной гипотезе, которая вскоре после этого была доказана в работах Beilinson — Bernstein [1981] и Brylinski — Kashiwara [1981]. В статье Deodhar — Gabber — Кас [1982] гипотезы Каждана — Люстига были обобщены на произвольные алгебры Каца — Муди. Совсем недавно эти гипотезы были доказаны Касианом и Кашиварой (Casian [1989], Kashiwara [1989]). (Когомологическая интерпретация кратностей (Kazhdan — Lusztig [1980]) была распространена на случай произвольных алгебр Каца — Муди Хаддадом (Haddad [1984]).)

Изложение §9.1–9.8 представляет собой упрощение изложения статьи Deodhar — Gabber — Кас [1982]. Более полное утверждение, чем предложение 9.9а), можно найти в работе Кас — Kazhdan [1979]. Изложение §9.9, 9.10 и 9.12 основано на статье Кас — Peterson [1984 А]. Результаты §9.11, касающиеся определяющих соотношений, принадлежат Габберу и Кацу (Gabber — Кас [1981]). Простое когомологическое доказательство теоремы 9.11 было найдено О. Матье (не опубликовано).

Упражнение 9.2 принадлежит Гарланду и Леповскому (Garland — Lepowsky [1976]). Упражнение 9.4 взято из работы Бернштейн — Гельфанд — Гельфанд [1971]. Упражнения 9.6–9.10 следуют статье Кас [1980 С]. Упражнения 9.12 и 9.13 взяты из работы Gabber — Кас [1981].

Упражнение 9.17 взято из статьи Chodos — Thorn [1974]; его частный случай имеется у Вирасоро (Virasoro [1970]). Упражнения 9.18 и 9.20 принадлежат Вахимото (Wakimoto [1986]). Эти «свободнополевые» конструкции представлений алгебры Вирасоро и аффинной алгебры $\hat{L}(sl_2(\mathbb{C}))$ (и, более общо, $\hat{L}(sl_n(\mathbb{C}))$) играют важную роль и в изучении представлений (Фейгин — Френкель [1988], Feigin —

¹ Полное решение этой проблемы дал недавно Матье в работе Mathieu [1990 В]. — Прим. автора к русск. переводу.

Frenkel [1989 A–C]), и в конформной теории поля (Feigin — Fuchs [1984 A], Dotsenko — Fateev [1984], Felder [1989], Bernard — Felder [1989], Bershadsky — Ooguri [1989], Distler — Qiu [1989] и др.).

Последнее замечание касается упр. 9.10 и 9.11. Основной результат статьи Каца [1968 B] состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ — бес-

конечномерная $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли, удовлетворяющая условиям

- (i) $\lim_{j \rightarrow -\infty} \frac{\log \dim \mathfrak{g}_j}{\log |j|} < \infty$, т. е. $\dim \mathfrak{g}_j$ растет полиномиально при $|j| \rightarrow \infty$;
- (ii) в ней нет нетривиальных градуированных идеалов;
- (iii) $\mathfrak{g}_{-1} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$ порождает $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ неприводим.

Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна либо $\mathfrak{g}'(A)/CK$, где A — аффинная матрица, с градуировкой типа $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, либо одной из простых $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли полиномиальных векторных полей на $\mathbb{C}^n$: W_n , S_n , H_n и K_n .

На самом деле доказано, что алгебра Ли, удовлетворяющая (i)–(iii) и не содержащаяся в этом списке, содержит подалгебру из упр. 9.10 с $n = 2$ и, следовательно, как показано Кацем (Кас [1980 C]), имеет экспоненциальный рост. (Утверждение об экспоненциальном росте в гиперболическом случае ранга 2 другим способом было доказано Мерманом (Meurman [1982]).) Моя гипотеза состоит в том, что если опустить условие (iii), то к списку необходимо будет добавить только «бесцентральную» алгебру Вирасоро $\mathfrak{d}$ (см. §7.3) и ее подалгебру $\mathfrak{d}_+ = \sum_{j \geq -1} \mathbb{C} \mathfrak{d}_j$. Частный случай этой проблемы при условии $\dim \mathfrak{g}_j \leq 1$ был

решен Матье (Mathieu [1986 A]) (в этой работе показано, что в этом случае список состоит из $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли, определенных в упр. 7.12, 7.13 и 8.16). Позже Матье (Mathieu [1986 B]) была решена эта проблема и в случае $\dim \mathfrak{g}_j < \text{const}$. Он показал, что любая $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_j$, имеющая только тривиальные градуированные идеалы, есть либо $\mathfrak{g}'(A)/CK$ с градуировкой типа ε , либо $\mathfrak{d}$, либо $\mathfrak{d}_+$.²

² Совсем недавно Матье (Mathieu [1990 A]) полностью доказал эту гипотезу. — Прим. автора к русск. переводу.

Глава 10. Интегрируемые модули со старшим весом: формула для характера

§10.0. Центральным результатом этой главы является формула для характера интегрируемого модуля со старшим весом $L(\Lambda)$ над алгеброй Каца — Мууди, которая играет ключевую роль в дальнейших рассмотрениях. Мы изучаем также область сходимости характеров, доказываем теорему о полной приводимости и находим разложение в произведение для « q -размерности» $L(\Lambda)$.

§10.1. Пусть $g(A)$ — алгебра Каца — Мууди ранга n и $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана. Положим

$$\begin{aligned} P &= \{\lambda \in \mathfrak{h}^* | \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \dots, n)\}, \\ P_+ &= \{\lambda \in P | \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0 \ (i = 1, \dots, n)\}, \\ P_{++} &= \{\lambda \in P | \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle > 0 \ (i = 1, \dots, n)\}. \end{aligned}$$

Множество P называется *весовой решеткой*, элементы из P (соответственно P_+ или P_{++}) называются *интегральными весами* (соответственно *доминантными* или *регулярными доминантными весами*). Отметим, что P содержит корневую решетку Q .

Пусть V — модуль со старшим весом над $g(A)$ и v — старший вектор. Из лемм 3.4b) и 3.5 следует, что модуль V является интегрируемым, если и только если $f_i^{N_i}(v) = 0$ для некоторого $N_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) (определение интегрируемого модуля см. в §3.6).

ЛЕММА 10.1. $g(A)$ -модуль $L(\Lambda)$ интегрируем, если и только если $\Lambda \in P_+$.

Доказательство. Из формулы (3.2.4) вытекает часть «только если», а также следующая формула:

$$e_i f_i^{\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(v) = 0, \text{ если } \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+,$$

где v — старший вектор. Отсюда следует (поскольку $[e_j, f_i] = 0$ при $j \neq i$), что если вектор $f_i^{\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(v)$ ненулевой, то он является примитивным вектором модуля $L(\Lambda)$, что невозможно (в силу предложения 9.3b)). Поэтому для $\Lambda \in P_+$

$$(10.1.1) \quad f_i^{\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle + 1}(v) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

что доказывает часть «если» утверждения леммы (в силу предшествующего ей замечания). $\square$

Обозначим через $P(\Lambda)$ множество весов $L(\Lambda)$. Ясно, что $P(\Lambda) \subset P$, если $\Lambda \in P$. Следующее предложение вытекает из леммы 10.1 и предложения 3.7а).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. Если $\Lambda \in P_+$, то

$$\text{mult}_{L(\Lambda)} \lambda = \text{mult}_{L(\Lambda)} w(\lambda) \text{ для } w \in W.$$

В частности, $P(\Lambda)$ является W -инвариантным множеством. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Если $\Lambda \in P_+$, то для любого $\lambda \in P(\Lambda)$ имеется единственный W -эквивалентный ему элемент $\mu \in P_+ \cap P(\Lambda)$.

Доказательство. Возьмем $\mu \in W \cdot \lambda$, такой, что $\text{ht}(\Lambda - \mu)$ минимальна; единственность вытекает из леммы 3.12b). $\square$

§10.2. Зададим действие группы Вейля W на комплексном векторном пространстве $\tilde{\mathcal{E}}$ всех (возможно, бесконечных) линейных комбинаций формальных экспонент по правилу

$$w\left(\sum_{\lambda} c_{\lambda} e(\lambda)\right) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} e(w(\lambda)) \quad (w \in W).$$

Пространство $\tilde{\mathcal{E}}$ содержит $\mathcal{E}$ как подпространство. Однако произведение двух элементов $P_1, P_2 \in \tilde{\mathcal{E}}$ не всегда имеет смысл, но если имеет, то $w(P_1 P_2) = w(P_1) w(P_2)$. Предложение 10.1 означает, что

$$(10.2.1) \quad w(\text{ch } L(\Lambda)) = \text{ch } L(\Lambda) \text{ для } w \in W \text{ и } \Lambda \in P_+.$$

Рассмотрим теперь элемент (см. §9.7)

$$R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} \in \mathcal{E}.$$

Зафиксируем элемент $\rho \in \mathfrak{h}^*$, такой, что (ср. §2.5)

$$\langle \rho, \alpha_i^\vee \rangle = 1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для $w \in W$ положим $\epsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$. В силу (3.11.1) имеем

$$\epsilon(w) = \det_{\mathfrak{h}^*} w.$$

Кроме того,

$$(10.2.2) \quad w(e(\rho)R) = \epsilon(w)e(\rho)R \text{ для } w \in W.$$

Действительно, достаточно проверить (10.2.2) для каждого фундаментального отражения r_i . Напомним, что по лемме 3.7 множество $\Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ является r_i -инвариантным, и в силу предложения 3.7 мы имеем $\text{mult } r_i(\alpha) = \text{mult } \alpha$ для $\alpha \in \Delta_+$. Следовательно,

$$\begin{aligned} r_i(e(\rho)R) &= e(\rho - \alpha_i)r_i(1 - e(-\alpha_i))r_i \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} \\ &= e(\rho)e(-\alpha_i)(1 - e(\alpha_i)) \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} \\ &= -e(\rho)R = \epsilon(r_i)e(\rho)R. \end{aligned}$$

§10.3. Начиная с этого места, мы будем предполагать, что обобщенная матрица Картана A симметризуема. Пусть $(\cdot|\cdot)$ — стандартная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}(A)$; вспомним, что $(\alpha_i|\alpha_i) > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Следующее утверждение представляет собой ключевой факт в доказательстве формулы для характера, теоремы о полной приводимости и других результатов.

ЛЕММА 10.3. Пусть $\Lambda, \lambda \in P$ таковы, что $\lambda \leq \Lambda$ и $\Lambda + \lambda \in P_+$. Тогда либо $(\Lambda + \lambda, \alpha_i^\vee) = 0$ для $i \in \text{supp}(\Lambda - \lambda)$, либо $(\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\lambda) > 0$. В частности, если $\Lambda \in P_{++}, \lambda \in P_+$ и $\lambda < \Lambda$, то $(\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\lambda) > 0$.

Доказательство. Мы имеем $\lambda = \Lambda - \beta$, где $\beta = \sum_i k_i \alpha_i$, $k_i \geq 0$. Следовательно,

$$(\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\lambda) = (\Lambda + \lambda|\beta) = \sum_i \frac{1}{2} k_i (\alpha_i|\alpha_i) (\Lambda + \lambda, \alpha_i^\vee).$$

Так как $(\alpha_i|\alpha_i) > 0$ для всех i , отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

§10.4. Теперь мы можем доказать следующий фундаментальный результат нашей теории представлений:

ТЕОРЕМА 10.4. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Каца — Муди и $L(\Lambda)$ — неприводимый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль со старшим весом $\Lambda \in P_+$. Тогда

$$(10.4.1) \quad \text{ch } L(\Lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w)e(w(\Lambda + \rho) - \rho)}{\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}}.$$

Доказательство. Умножая обе части (9.8.1) на $\epsilon(\rho)R$ и используя (9.7.2), мы получаем

$$(10.4.2) \quad \epsilon(\rho)R \operatorname{ch} L(\Lambda) = \sum_{\substack{\lambda \leq \Lambda \\ |\lambda + \rho|^2 = |\Lambda + \rho|^2}} c_\lambda \epsilon(\lambda + \rho),$$

где $c_\lambda = 1$, $c_\lambda \in \mathbb{Z}$. В силу (10.2.1) и (10.2.2) левая часть (10.4.2) является W -антиинвариантной (элемент $L \in \tilde{\mathcal{E}}$ называется W -антиинвариантным, если $w(L) = \epsilon(w)L$). Следовательно, коэффициенты в правой части (10.4.2) обладают свойством

$$(10.4.3) \quad c_\lambda = \epsilon(w)c_\mu, \text{ если } w(\lambda + \rho) = \mu + \rho \text{ для некоторого } w \in W.$$

Рассмотрим такой элемент λ , что $c_\lambda \neq 0$; тогда в силу (10.4.3) имеем $c_{w(\lambda + \rho) - \rho} \neq 0$ для каждого $w \in W$; следовательно, из (10.4.2) вытекает, что $w(\lambda + \rho) \leq \Lambda + \rho$. Пусть $\mu \in \{w(\lambda + \rho) - \rho \mid w \in W\}$ обладает тем свойством, что $\operatorname{ht}(\Lambda - \mu)$ минимальна. Тогда ясно, что $\mu + \rho \in P_+$ и $|\mu + \rho|^2 = |\Lambda + \rho|^2$. Применяя лемму 10.3 к элементам $\Lambda + \rho \in P_{++}$ и $\mu + \rho$, мы выводим, что $\mu = \Lambda$. Итак, $c_\lambda \neq 0$ влечет за собой $\lambda + \rho = w(\Lambda + \rho)$ для некоторого $w \in W$, и в этом случае $c_\lambda = \epsilon(w)$ (см. (10.4.3)).

Но $\Lambda + \rho \in P_{++}$, поэтому в силу предложения 3.12b) равенство $w(\Lambda + \rho) = \Lambda + \rho$ влечет за собой $w = 1$. Следовательно, мы получаем, наконец, что

$$\epsilon(\rho)R \operatorname{ch} L(\Lambda) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \epsilon(w(\Lambda + \rho)),$$

а это есть (10.4.1). □

Теперь положим $\Lambda = 0$ в (10.4.1). Поскольку $L(0)$ есть тривиальный 1-мерный модуль над $\mathfrak{g}(A)$, мы выводим следующее «тождество для знаменателя»:

$$(10.4.4) \quad \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\operatorname{mult} \alpha} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \epsilon(w(\rho) - \rho).$$

Подставляя (10.4.4) в (10.4.1), мы получаем другую форму формулы для характера:

$$(10.4.5) \quad \operatorname{ch} L(\Lambda) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) \epsilon(w(\Lambda + \rho)) / \sum_{w \in W} \epsilon(w) \epsilon(w(\rho)).$$

Конечно, в том случае, когда $\mathfrak{g}(A)$ есть конечномерная (полупростая) алгебра Ли, (10.4.5) представляет собой классическую формулу

Вейля для характера, а формула (10.4.4) — тождество Вейля для знаменателя.

Наконец, заметим, что в доказательстве теоремы 10.4 мы использовали тот факт, что $L(\Lambda)$ — интегрируемый модуль со старшим весом (и нигде не использовали его неприводимость). Этот факт обеспечен соотношениями (10.1.1). Поэтому если V есть $\mathfrak{g}(A)$ -модуль со старшим весом $\Lambda \in P_+$, такой, что (10.1.1) выполнено, то $\text{ch } V$ дается формулой (10.4.1) и, следовательно, $V = L(\Lambda)$. Итак,

$$(10.4.6) \quad L(\Lambda) = M(\Lambda) / \sum_i (U(\mathfrak{n}_-) f_i^{(\Lambda, \alpha_i^\vee)+1} v_\Lambda), \text{ если } \Lambda \in P_+.$$

Это можно сформулировать также в следующем виде:

Следствие 10.4. Пусть A — симметризуемая обобщенная матрица Картана и $\Lambda \in P_+$. Тогда аннулятором в $U(\mathfrak{g}(A))$ старшего вектора $\mathfrak{g}(A)$ -модуля $L(\Lambda)$ является левый идеал, порожденный элементами $e_i, f_i^{(\Lambda, \alpha_i^\vee)+1}$ и $h - \langle \Lambda, h \rangle$, где $i = 1, \dots, n$ и $h \in \mathfrak{h}$. В частности, интегрируемый модуль со старшим весом над $\mathfrak{g}(A)$ автоматически неприводим. $\square$

В конечномерном случае (10.4.6) есть результат Хариш-Чандры. Еще одним следствием является

Предложение 10.4. Пусть A — симметризуемая обобщенная матрица Картана, и пусть $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ таков, что $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+$ для $i = 1, \dots, n$. Тогда $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $L(\Lambda)$ характеризуется теми свойствами, что он неприводим и что существует ненулевой вектор $v \in L(\Lambda)$, для которого

$$(10.4.7) \quad \alpha_i^\vee(v) = \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle v \text{ и } e_i(v) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

В частности, определения $\mathfrak{g}'(A)$ -модуля $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+$, данные во введении и в гл. 9, эквивалентны.

Доказательство. Пусть V — неприводимый $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль, который содержит ненулевой элемент v , удовлетворяющий (10.4.7). Рассматривая градуировку V собственными пространствами для $\alpha_i^\vee$, мы видим, что элемент $f_i^{(\Lambda, \alpha_i^\vee)+1}(v)$ порождает собственный подмодуль в V и, следовательно, равен нулю. Благодаря (10.4.6) мы имеем сюръективный гомоморфизм $\mathfrak{g}'(A)$ -модулей $L(\Lambda) \rightarrow V$. Применение леммы 9.10 завершает доказательство. $\square$

§10.5. Рассмотрим разложение

$$(10.5.1) \quad \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(\alpha))^{-\text{mult } \alpha} = \sum_{\beta \in \mathfrak{h}^*} K(\beta) e(\beta),$$

определяющее функцию K на $\mathfrak{h}^*$, называемую (обобщенной) *функцией разбиения* (K в честь Костанта). Заметим, что $K(\beta) = 0$, если $\beta \notin Q_+$; кроме того, $K(0) = 1$ и $K(\beta)$ для $\beta \in Q_+$ есть число разбиений β в сумму положительных корней, где каждый корень считается с его кратностью. Последнее замечание станет очевидным, если записать формулу (10.5.1) в виде

$$\sum_{\beta \in Q_+} K(\beta) e(\beta) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 + e(\alpha) + e(2\alpha) + \dots)^{\text{mult } \alpha}.$$

Заметим, что (9.7.2) можно переписать следующим образом:

$$(10.5.2) \quad \text{mult}_{M(\Lambda)} \lambda = K(\Lambda - \lambda).$$

Теперь мы продолжим преобразовывать формулу (10.4.1) в терминах функции разбиения. Подставляя (10.5.1) в (10.4.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \leq \Lambda} (\text{mult}_{L(\Lambda)} \lambda) e(\lambda) &= \sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\Lambda + \rho) - \rho) \sum_{\beta \in \mathfrak{h}^*} K(\beta) e(-\beta) \\ &= \sum_{w \in W} \sum_{\beta \in \mathfrak{h}^*} \epsilon(w) K(\beta) e(-\beta + w(\Lambda + \rho) - \rho) \\ &= \sum_{w \in W} \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \epsilon(w) K(w(\Lambda + \rho) - (\lambda + \rho)) e(\lambda). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $e(\lambda)$, мы приходим к формуле для кратности

$$(10.5.3) \quad \text{mult}_{L(\Lambda)} \lambda = \sum_{w \in W} \epsilon(w) K(w(\Lambda + \rho) - (\lambda + \rho)).$$

В конечномерном случае это формула Костанта.

Предостережение. Ряд $e(-\rho) \sum_{\beta} K(\beta) e(\beta)$ не является W -антиинвариантным, хотя он представляет собой элемент, обратный к W -антиинвариантному элементу $e(\rho)R$. Это возможно в силу того, что обращение в $\tilde{\mathcal{E}}$ не единственно.

§10.6. Здесь мы принимаем менее формальную точку зрения на характеры, заменяя формальную экспоненту $e(\lambda)$ функцией e^λ на $\mathfrak{h}$, определенной по правилу $e^\lambda(h) = e^{(\lambda, h)}$ для $h \in \mathfrak{h}$. Введем *характер* ch_V модуля V над $\mathfrak{g}(A)$ из категории $\mathcal{O}$ как функцию

$$h \mapsto \text{ch}_V(h) = \sum_{\lambda \in P(V)} \text{mult}_V(\lambda) e^{(\lambda, h)},$$

определенную на множестве $Y(V)$ элементов $h \in \mathfrak{h}$, таких, что ряд сходится абсолютно. Заметим, что

$$\text{ch}_V(h) = \text{tr}_V \exp h \text{ для } h \in Y(V).$$

Введем некоторые дополнительные обозначения. Определим *комплексифицированный конус Титса* X_C формулой

$$X_C = \{x + iy | x \in X, y \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\}.$$

Положим

$$Y = \{h \in \mathfrak{h} | \sum_{\alpha \in \Delta_+} (\text{mult } \alpha) |e^{-(\alpha, h)}| < \infty\},$$

$$Y_N = \{h \in \mathfrak{h} | \text{Re}(\alpha_i, h) > N \ (i = 1, \dots, n)\} \text{ для } N \in \mathbb{R}_+.$$

Отметим, что Y лежит в X_C (в силу предложения 3.12с)). Мы имеем также

$$(10.6.1) \quad X_C = \bigcup_{w \in W} w(\bar{Y}_0).$$

ЛЕММА 10.6. Пусть V — модуль со старшим весом над $\mathfrak{g}(A)$. Тогда

- а) $Y(V)$ — выпуклое множество;
- б) $Y(V) \supset Y \cap Y_0$;
- в) $Y(V) \supset Y_{\log n}$.

Доказательство. а) очевидно в силу выпуклости функции $|e^\lambda|$. Далее, так как V есть фактормодуль модуля $M(\Lambda)$, из (10.5.2) мы выводим оценку

$$\text{mult}_V \lambda \leq K(\Lambda - \lambda),$$

что дает

$$\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} (\text{mult}_V \lambda) |e^{(\lambda, h)}| \leq |e^{(\Lambda, h)}| \sum_{\beta \in Q_+} K(\beta) |e^{-(\beta, h)}|.$$

Но из (10.5.1) следует, что для $h \in Y_0$

$$\sum_{\beta \in Q_+} K(\beta) |e^{-(\beta, h)}| = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - |e^{-(\alpha, h)}|)^{-\text{mult } \alpha}.$$

Произведение в этой формуле сходится, если $h \in Y$, что доказывает б). Утверждение с) вытекает из б) в силу оценки (1.3.2). $\square$

Для доказательства следующего предложения нам понадобится

Замечание 10.6. Пусть $T \subset X_C$ — открытое выпуклое W -инвариантное множество. Тогда

$$T \subset \text{выпуклая оболочка} \left(\bigcup_{w \in W} w(T \cap Y_0) \right).$$

В самом деле, $T_0 := \bigcup_{w \in W} w(\overline{Y_0} \setminus Y_0)$ нигде не плотно в X_C . Следовательно, каждый элемент $h \in T$ лежит в выпуклой оболочке множества $T \setminus T_0 = \bigcup_{w \in W} w(T \cap Y_0)$. $\square$

Пусть R — выпуклое множество в (вещественном) векторном пространстве. Обозначим множество его внутренних точек в метрической топологии через $\text{Int } R$.

Предложение 10.6. Пусть $g(A)$ — алгебра Каца — Муди и $L(\Lambda)$ — неприводимый $g(A)$ -модуль со старшим весом $\Lambda \in P_+$. Тогда

а) $Y(L(\Lambda))$ есть выпуклое W -инвариантное множество, такое, что его внутренность открыта в $\mathfrak{h}$ и для каждого $x \in \text{Int } X_C$ содержит tx для всех достаточно больших $t \in \mathbb{R}_+$.

б) $\text{ch}_{L(\Lambda)}$ — голоморфная функция на $\text{Int } Y(L(\Lambda))$.

с) $Y(L(\Lambda)) \supset \text{Int } Y$.

д) Ряд $\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\Lambda + \rho)}$ сходится абсолютно на $\text{Int } X_C$ к голоморфной функции и расходится абсолютно на $\mathfrak{h} \setminus \text{Int } X_C$.

е) Если матрица Картана A симметризуема, функция $\text{ch}_{L(\Lambda)}$ может быть продолжена с $Y(L(\Lambda)) \cap X_C$ до мероморфной функции на $\text{Int } X_C$.

Доказательство. Положим $T = \text{Int } Y$; ясно, что T открыто, выпукло (см. доказательство леммы 10.6а)) и W -инвариантно; по лемме 10.6б) мы имеем $Y(L(\Lambda)) \supset Y \cap Y_0$. Далее, из леммы 10.6а) и предложения 10.1 следует, что $Y(L(\Lambda))$ есть выпуклое W -инвариантное множество. Теперь с) вытекает из замечания 10.6.

Чтобы закончить доказательство а), мы должны показать, что $X' := \{x \in \text{Int } X_C | tx \in Y(L(\Lambda)) \text{ для достаточно большого } t \in \mathbb{R}_+\}$

совпадает с $\text{Int } X_C$. Но снова X' есть W -инвариантное и выпуклое множество, и оно содержит Y_0 по лемме 10.6с). Мы опять можем применить замечание 10.6.

Из выпуклости $|e^\lambda|$ следует, что абсолютная сходимость равномерна на компактных множествах, что доказывает б).

Для доказательства d) заметим, что $w(\Lambda + \rho) - (\Lambda + \rho)$ различны для различных $w \in W$ в силу предложения 3.12b). Из доказательства предложения 3.12d) видно, что $(\Lambda + \rho) - w(\Lambda + \rho) \in Q_+$. Следовательно, для $h \in Y_0$

$$\left| \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{(w(\Lambda + \rho) - (\Lambda + \rho), h)} \right| \leq \sum_{\alpha \in Q_+} |e^{-(\alpha, h)}| < \infty.$$

Итак, область абсолютной сходимости ряда, о которой идет речь, содержит Y_0 , и ясно также, что она выпукла и W -инвариантна. Теперь мы применим замечание 10.6. Из него вытекает, что обсуждаемый ряд сходится абсолютно на $\text{Int } X_C$. С другой стороны, пусть $h \in \mathfrak{h} \setminus \text{Int } X_C$. Тогда множество $\Delta_0 := \{\alpha \in \Delta_+^* \mid \text{Re}(\alpha, h) \leq 0\}$ бесконечно в силу предложения 3.12с) и f), и для каждого $\alpha \in \Delta_0$ имеем $|e^{(r_\alpha(\Lambda + \rho), h)}| \geq |e^{(\Lambda + \rho, h)}|$, что доказывает расходимость в h .

Наконец, е) следует из d) и (10.4.5) (или лучше (10.6.1)). $\square$

Более точное описание $Y(L(\Lambda))$ мы дадим в гл. 11.

Обозначим через $\mathcal{O}_c$ полную подкатегорию категории $\mathcal{O}$ модулей V над $\mathfrak{g}(A)$, таких, что $\text{ch } V$ сходится абсолютно на Y_N для некоторого $N > 0$. Через $\mathcal{E}_c$ обозначим подалгебру рядов из $\mathcal{E}$, которые абсолютно сходятся на Y_N для некоторого N . По лемме 10.6 любой модуль со старшим весом лежит в $\mathcal{O}_c$. Имеется гомоморфизм ψ из $\mathcal{E}_c$ в алгебру функций, голоморфных на Y_N для некоторого N , такой, что $\psi : e(\lambda) \mapsto e^\lambda$. Применяя ψ к обеим частям формул (10.4.5) и (10.4.4), мы получаем на Y :

$$(10.6.2) \quad \text{ch}_{L(\Lambda)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\Lambda + \rho)} / \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\rho)},$$

$$(10.6.3) \quad \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult } \alpha} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\rho) - \rho}.$$

§10.7. Здесь мы докажем теорему о полной приводимости.

ТЕОРЕМА 10.7. Пусть A — симметризуемая обобщенная матрица Картана.

а) Предположим, что $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль V удовлетворяет следующим двум условиям:

(10.7.1) для каждого $v \in V$ существует N , такое, что

$$e_{i_1} \cdots e_{i_k}(v) = 0, \text{ если } k > N,$$

(10.7.2) для каждого $v \in V$ и каждого i существует N ,

$$\text{такое, что } f_i^N(v) = 0.$$

Тогда V изоморфен прямой сумме $\mathfrak{g}'(A)$ -модулей $L(\Lambda)$, таких, что $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+$ для всех i .

б) Любой интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V из категории $\mathcal{O}$ изоморфен прямой сумме модулей $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+$.

Доказательство. Благодаря предложению 9.10b) и замечанию 3.6 в случае утверждения а) (соответственно предложению 9.9b) в случае утверждения б)) достаточно проверить, что если λ и μ — примитивные веса и $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$ таков, что $\lambda - \mu = \beta$, то

$$2\langle \lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle \neq (\beta|\beta).$$

Так как модуль V интегрируем, в силу (3.2.4) имеем

(10.7.3) $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) для каждого примитивного веса λ .

Но тогда мы можем записать

$$\begin{aligned} 2\langle \lambda + \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle - (\beta|\beta) &= \langle \lambda + (\lambda - \beta) + 2\rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle \\ &= \langle \lambda + \mu + 2\rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle > 0, \end{aligned}$$

используя (10.7.3) и тот факт, что $\langle \rho, \nu^{-1}(\beta) \rangle > 0$ для всех $\beta \in Q_+ \setminus \{0\}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 10.7. а) $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V из категории $\mathcal{O}$ интегрируем, если и только если он является прямой суммой модулей $L(\Lambda)$ с $\Lambda \in P_+$.

б) Тензорное произведение конечного числа интегрируемых модулей со старшим весом есть прямая сумма модулей $L(\Lambda)$ с $\Lambda \in P_+$.

Теорема 10.7 содержит как частный случай классическую теорему Вейля о полной приводимости для конечномерных представлений полупростых алгебр Ли.

§10.8. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n)$ — последовательность целых чисел. В §1.5 мы ввели $\mathbb{Z}$ -градуировку типа s :

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(s).$$

Ее частным случаем является градуировка типа $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, называемая *главной градуировкой*. Отметим, что если $s_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$), то

$$\dim \mathfrak{g}_j(s) < \infty.$$

Имеется также $\mathbb{Z}$ -градуировка типа s для дуальной алгебры Каца — Мули

$$\mathfrak{g}({}^t A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} {}^t \mathfrak{g}_j(s).$$

Зафиксируем элементы $\lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ и $h^s \in \mathfrak{h}$, удовлетворяющие условиям

$$\langle \lambda_s, \alpha_i^\vee \rangle = s_i, \quad \langle h^s, \alpha_i \rangle = s_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Заметим, что $\lambda_{\mathbf{1}} = \rho$ и $h^{\mathbf{1}} = \rho^\vee$ представляют собой элементы ρ для алгебр Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$ и $\mathfrak{g}({}^t A)$ соответственно.

Предостережение: $\nu(\rho^\vee) \neq 2\rho/(\rho|\rho)$.

При условии что все $s_i > 0$, последовательность s определяет гомоморфизм $F_s : \mathbb{C}[[e(-\alpha_1), \dots, e(-\alpha_n)]] \rightarrow \mathbb{C}[[q]]$ по формуле

$$(10.8.1) \quad F_s(e(-\alpha_i)) = q^{s_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Это называется *специализацией типа s* . Заметим, что

$$(10.8.2) \quad F_s(e(-\alpha)) = q^{(h^s, \alpha)}.$$

Предложение 10.8. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Каца — Мули. Тогда

$$\dim \mathfrak{g}_j(\mathbf{1}) = \dim {}^t \mathfrak{g}_j(\mathbf{1}).$$

Доказательство. Заметим, что обе части тождества (10.4.4) являются элементами алгебры $\mathbb{C}[[e(-\alpha_1), \dots, e(-\alpha_n)]]$. Применяя гомоморфизм $F_{\mathbf{1}}$ к обеим частям этого тождества, получаем

$$(10.8.3) \quad \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\dim \mathfrak{g}_j(\mathbf{1})} = \sum_{w \in W(A)} \epsilon(w) q^{(\rho, \rho^\vee) - (w(\rho), \rho^\vee)}.$$

Аналогично, для $\mathfrak{g}({}^t A)$ имеем

$$(10.8.4) \quad \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\dim {}^t \mathfrak{g}_j(\mathbf{1})} = \sum_{w \in W({}^t A)} \epsilon(w) q^{(\rho^\vee, \rho) - (w(\rho^\vee), \rho)}.$$

Так как $W(A)$ и $W({}^t A)$ — контрагredientные линейные группы, правые части (10.8.3) и (10.8.4) совпадают. $\square$

Сравнивая (10.8.3 и 4), мы выводим также

$$(10.8.5) \quad \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - q^{(\rho^\vee, \alpha)})^{\text{mult } \alpha} = \prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} (1 - q^{(\rho, \alpha)})^{\text{mult } \alpha}.$$

Замечание 10.8. Впоследствии мы будем использовать специализацию типа s , когда некоторые из s_i обращаются в нуль. Тогда F_s определен не везде и мы должны проверять, что F_s определен для данного степенного ряда.

§10.9. Специализация типа **1** называется *главной специализацией*. Следующее предложение дает разложение на множители для главной специализации характера.

Предложение 10.9. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Каца — Мули. Пусть $\lambda \in P_+$; положим $s = (\langle \lambda, \alpha_1^\vee \rangle, \dots, \langle \lambda, \alpha_n^\vee \rangle)$. Тогда

$$(10.9.1) \quad F_1(e(-\lambda) \text{ch } L(\lambda)) = \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\dim {}^t \mathfrak{g}_j(s+1) - \dim {}^t \mathfrak{g}_j(1)}.$$

Доказательство. В силу (10.4.5) имеем

$$(10.9.2) \quad e(-\lambda) \text{ch } L(\lambda) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda + \rho) - (\lambda + \rho))}{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho) - \rho)}.$$

Для $\lambda \in P_{++}$ положим

$$N_\lambda = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\lambda) - \lambda).$$

Заметим, что $N_\lambda \in \mathbb{C}[[e(-\alpha_1), \dots, e(-\alpha_n)]]$ (в силу предложения 3.12b), д)). Далее

$$\begin{aligned} F_1(N_\lambda) &= \sum_{w \in W} \epsilon(w) q^{(\lambda, \rho^\vee) - (w(\lambda), \rho^\vee)} = \sum_{w \in W} \epsilon(w) q^{(\lambda, \rho^\vee - w(\rho^\vee))} \\ &= F_r\left(\sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho^\vee) - \rho^\vee)\right), \end{aligned}$$

где $r = (\langle \lambda, \alpha_1^\vee \rangle, \dots, \langle \lambda, \alpha_n^\vee \rangle)$. Применяя тождество (10.4.4) к $\mathfrak{g}({}^t A)$, получаем

$$F_1(N_\lambda) = F_r\left(\prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}\right).$$

Следовательно,

$$(10.9.3) \quad F_1(N_\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} (1 - q^{(\lambda, \alpha)})^{\text{mult } \alpha}.$$

Таким образом, в силу (10.9.2) и (10.9.3) мы имеем

$$(10.9.4) \quad F_1(e(-\Lambda) \text{ ch } L(\Lambda)) = \prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} \left(\frac{1 - q^{(\Lambda + \rho, \alpha)}}{1 - q^{(\rho, \alpha)}} \right)^{\text{mult } \alpha}.$$

Ясно, что (10.9.4) есть эквивалентная форма (10.9.1). $\square$

§10.10. Пусть $V = \bigoplus_{\lambda \leq \Lambda} V_\lambda$ — модуль над $g(A)$ со старшим весом Λ .

Снова зафиксируем последовательность целых чисел $s = (s_1, \dots, s_n)$. Положим

$$\deg(\Lambda - \sum_i k_i \alpha_i) = \sum_i k_i s_i.$$

Тогда формула

$$V_j(s) = \bigoplus_{\lambda: \deg \lambda = j} V_\lambda$$

определяет градуировку V типа s :

$$V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_j(s).$$

Заметим, что $\dim V_j(s) < \infty$, если все $s_i > 0$. Градуировка типа **1** на V называется *главной градуировкой*. При условии что $\dim V_j(s) < \infty$, имеем

$$F_s(e(-\Lambda) \text{ ch } V) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} (\dim V_j(s)) q^j.$$

Формальный степенной ряд $\sum_{j \geq 0} \dim V_j(\mathbf{1}) q^j$ назовем *q -размерностью* модуля V и обозначим ее через $\dim_q V$. Тогда предложение 10.9 и формулу (10.9.4) можно переформулировать следующим образом (здесь мы используем также предложение 10.8):

Предложение 10.10. Рассмотрим главную градуировку $L(\Lambda) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} L_j(\mathbb{1})$. Тогда в предположениях и обозначениях предложения 10.9 имеем

$$(10.10.1) \quad \dim_q L(\Lambda) = \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\dim \mathfrak{g}_j(s+1) - \dim \mathfrak{g}_j(\mathbb{1})} \\ = \prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} \left(\frac{1 - q^{\langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle}}{1 - q^{\langle \rho, \alpha \rangle}} \right)^{\text{mult } \alpha}.$$

□

Следующее утверждение представляет собой классический результат Вейля.

Следствие 10.10. Пусть A — матрица конечного типа, так что $\mathfrak{g}(A)$ — простая конечномерная алгебра Ли. Пусть $\Lambda \in P_+$. Тогда $L(\Lambda)$ конечномерен и

$$\dim L(\Lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} \langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle / \langle \rho, \alpha \rangle.$$

Доказательство. Устремим q к 1 в (10.10.1) и применим правило Лопиталя. □

§10.11. Упражнения

10.1. Покажите, что

$$\text{ch } L(m\rho) = e(m\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 + e(-\alpha) + \dots + e(-m\alpha))^{\text{mult } \alpha}.$$

[Заменяя $e(-\alpha_i)$ на $e(-(m+1)\alpha_i)$, из (10.4.4) выводим

$$\sum_{w \in W} e(w) e((m+1)w(\rho)) = e((m+1)\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-(m+1)\alpha))^{\text{mult } \alpha}.]$$

10.2. Покажите, что $\rho - w(\rho)$ ($w \in W$) равно сумме всех положительных вещественных корней α , таких, что $w^{-1}(\alpha) < 0$; число таких корней равно $\ell(w)$.

[См. упр. 3.6 и 3.12.]

10.3. Покажите, что $w(\rho) - \rho$ ($w \in W$) — примитивные веса модуля $M(0)$ над алгеброй Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$; выведите, что этот модуль не имеет неприводимых подмодулей, если $\dim \mathfrak{g}(A) = \infty$.

10.4. Пусть ω — инволюция Шевалле для $\mathfrak{g}(A)$ и V — некоторый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль из категории $\mathcal{O}$. Положим $V^\omega = \{f \in V^* \mid f(V_\lambda) = 0 \text{ для всех } \lambda, \text{ за исключением конечного числа}\}$. Алгебра $\mathfrak{g}(A)$ действует на V^ω по правилу $(x \cdot f)(v) = -f(\omega(x) \cdot v)$ ($x \in \mathfrak{g}(A)$, $v \in V$, $f \in V^\omega$). Покажите, что $V^\omega \in \mathcal{O}$, $\text{ch } V = \text{ch } V^\omega$, $L(\lambda) \simeq L(\lambda)^\omega$. Покажите, что $M(0)^\omega$ не имеет собственных максимальных подмодулей, если $\mathfrak{g}(A)$ — бесконечномерная алгебра Каца — Мули.

10.5. Покажите, что присоединенное представление аффинной алгебры Ли не является вполне приводимым.

10.6. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, такого, что $\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = s_i$, пусть F_λ обозначает F_s . Покажите, что $F_\mu(N_\lambda) = F_\lambda(N_\mu)$, $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

10.7. Пусть $A = (a_{ij})$ — симметризуемая обобщенная матрица Картана и $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли с образующими e_i ($i = 1, \dots, n$) и определяющими соотношениями $(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0$ ($i \neq j$). Формулы $\deg e_i = \alpha_i$ задают градуировку $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in Q_+} \mathfrak{n}_\alpha$, где Q_+ — полугруппа, порожденная эле-

ментами α_i в свободной абелевой группе Q с образующими $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Определим автоморфизмы r_i для Q по правилу $r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i$, и пусть W — группа, порожденная $r_1, \dots, r_n$. Продолжим действие W на решетку $Q \oplus \mathbb{Z}\rho$ формулой $r_i(\rho) = \rho - \alpha_i$ и положим $s(w) = \rho - w(\rho)$ для $w \in W$. Покажите, что $s(w)$ есть сумма всех $\alpha \in Q_+$, для которых $\mathfrak{n}_\alpha \neq 0$ и $-w^{-1}(\alpha) \in Q_+$. Покажите, что

$$\prod_{\alpha \in Q_+} (1 - e(\alpha))^{\dim \mathfrak{n}_\alpha} = \sum_{w \in W} e(w) e(s(w)).$$

10.8. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — алгебра Каца — Мули с матрицей Картана $A = \begin{pmatrix} 2 & -a \\ -b & 2 \end{pmatrix}$, где $ab \geq 4$. Для данной пары неотрицательных целых чисел m и n определим последовательности $a_j(m, n)$ и $b_j(m, n)$ ($j \in \mathbb{Z}$) рекуррентными формулами ($j \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} a_{j-1}(m, n) + a_{j+1}(m, n) &= ab_j(m, n) + m, \\ b_{j-1}(m, n) + b_{j+1}(m, n) &= ba_j(m, n) + n \end{aligned}$$

и $a_0(m, n) = a_1(m, n) = b_0(m, n) = b_1(m, n) = 0$. Покажите, что для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, такого, что $\langle \lambda, \alpha_1^\vee \rangle = m$, $\langle \lambda, \alpha_2^\vee \rangle = n$, имеем

$$\sum_{w \in W(A)} e(w) e(w(\lambda) - \lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j e(-a_j(m, n)\alpha_1 - b_{j+1}(m, n)\alpha_2).$$

10.9. Покажите, что если положить $u = e(-\alpha_1)$, $v = e(-\alpha_2)$, то тождество (10.4.4) для $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ превратится в знаменитое тождество Якоби для тройного произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - u^n v^n) (1 - u^{n-1} v^n) (1 - u^n v^{n-1}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m u^{m(m-1)/2} v^{m(m+1)/2},$$

и если $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, то тождество (10.4.4) приобретает вид важного тождества для пятикратного произведения

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - u^{2n} v^n) (1 - u^{2n-1} v^{n-1}) \\ (1 - u^{2n-1} v^n) (1 - u^{4n-4} v^{2n-1}) (1 - u^{4n} v^{2n-1}) \\ = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (u^{3m^2-2m} v^{(3m^2+m)/2} - u^{3m^2-4m+1} v^{(3m^2-m)/2}). \end{aligned}$$

10.10. Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый $A_1^{(1)}$ -модуль, так что $k_i := \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+$ ($i = 1, 2$); положим $s = k_1 + k_2 + 2$. Проверьте, что если $k_1 \neq k_2$, то

$$\prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n-1}) \dim_q L(\Lambda) = \prod_{\substack{n \geq 1 \\ n \not\equiv 0, \pm(k_1+1) \pmod{s}}} (1 - q^n)^{-1}.$$

(Для $(k_1, k_2) = (2, 1)$ или $(3, 0)$ правая часть появляется в знаменитых тождествах Роджерса — Рамануджана.)

В упр. 10.11–10.20 A — матрица конечного типа, так что $\mathfrak{g}(A)$ — простая конечномерная алгебра Ли. Обозначим через θ ее старший корень, и пусть $h = \text{ht } \theta + 1$ — число Кокстера. Пусть G — соответствующая комплексная группа Ли.

10.11. Покажите, что $\{L(\Lambda)\}_{\Lambda \in P_+}$ исчерпывают, с точностью до изоморфизма, все неприводимые конечномерные модули над $\mathfrak{g}(A)$.

10.12. Положим $E = \sum_i e_i$. Определим константы $c_1, \dots, c_n$ из условия $\rho^\vee = \sum_i c_i \alpha_i^\vee$ и положим $H = 2\rho^\vee$ и $F = 2 \sum_i c_i f_i$. Покажите, что $\{E, H, F\}$ образуют стандартный базис в $sl_2(\mathbb{C})$ (это так называемая главная 3-мерная подалгебра). Используя теорию представлений для $sl_2(\mathbb{C})$, покажите, что для $\Lambda \in P_+$ выражение

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} \frac{1 - q^{\langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle}}{1 - q^{\langle \rho, \alpha \rangle}}$$

является полиномом по q с положительными коэффициентами $d_0 = 1, d_1, \dots, d_m$ и что эта последовательность унимодальна, т. е. возрастает до $d_{[m/2]}$ и $d_i = d_{m-i}$.

10.13. Покажите, что последовательности коэффициентов следующих полиномов унимодальны:

a) $\frac{[k+n]!}{[n]![k]!}$, где $[j]! := (1 - q^j)(1 - q^{j-1}) \dots (1 - q)/(1 - q)^j$;

b) $(1 + q)(1 + q^2) \dots (1 + q^n)$.

[Примените упр. 10.12 к k -й симметрической степени естественного представления A_n и спинорного представления B_n .]

10.14. Пусть r — вещественное число, такое, что $|r| \neq 0, 1, \dots, h - 1$ и $L(\Lambda)$ — неприводимый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль со старшим весом $\Lambda \in P_+$. Покажите, что

$$\mathrm{tr}_{L(\Lambda)} \exp(2\pi i \rho^\vee / r) = \prod_{\alpha \in \Delta_+^\vee} \sin \frac{\pi \langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle}{r} / \sin \frac{\pi \langle \rho, \alpha \rangle}{r}.$$

Докажите аналогичную формулу для $\mathrm{tr}_{L(\Lambda)} \exp(2\pi i \nu^{-1}(\rho)/r)$.

10.15. Пусть $m = h$ (соответственно $m = h + 1$) и $L = Q$ (соответственно $L = P$). Для $w \in W \ltimes mL$ положим $\epsilon(w) = \epsilon(w')$, где w' — канонический образ w в W . Покажите, что для $\lambda \in P$ либо $\langle \lambda, \alpha \rangle \equiv 0 \pmod m$ для некоторого $\alpha \in \Delta^\vee$, либо существует единственный элемент $w_\lambda \in W \ltimes mL$, такой, что $w_\lambda(\lambda) = \rho$. Пусть $\Lambda \in P_+$ и $s \in \mathbb{Z}$ взаимно просто с m . В случае $m = h + 1$ предположим, что s делится на $\det A$ (который делит h). Покажите, что

$$\mathrm{tr}_{L(\Lambda)} \exp(2\pi i s \rho^\vee / m) = \begin{cases} 0, & \text{если } \langle \Lambda + \rho, \alpha \rangle \not\equiv 0 \pmod m \\ & \text{для некоторого } \alpha \in \Delta^\vee, \\ \epsilon(w_{\Lambda+\rho}) (= \pm 1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

[Имеем

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr}_{L(\Lambda)} \exp(2\pi i s \rho^\vee / m) \\ &= \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{2\pi i s i(\frac{\Lambda+\rho}{m}, w(\rho^\vee))} / \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{2\pi i s i(\frac{\rho}{m}, w(\rho^\vee))}. \end{aligned}$$

Следовательно, эта величина не меняется (соответственно меняет только знак), когда $\Lambda + \rho$ заменяется на $\Lambda + \rho + m\alpha$ ($\alpha \in L$) (соответственно на $r_j(\Lambda + \rho)$, $j = 1, \dots, \ell$.)]

10.16. Пусть $\sigma_{h+1} = \exp \frac{2\pi i h}{h+1} \rho^\vee \in G$, и пусть C — циклическая группа, порожденная σ_{h+1} . Покажите, что ее порядок равен $h+1$. Пусть $h+1$ — простое целое число. Выведите из упр. 10.15, что G -модуль $L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$) при ограничении на C разлагается в прямую сумму нескольких экземпляров регулярного представления группы C плюс, самое большее, ее 1-мерное или h -мерное представление.

[Покажите, что C определена над $\mathbb{Q}$.]

10.17. Пусть $h+1$ — простое число и $\Lambda \in P_+$. Покажите, что

$$\dim L(\Lambda) \equiv 0 \text{ или } \pm 1 \pmod{h+1}$$

(в частности, $\dim L(\Lambda) \equiv 0$ или $\pm 1 \pmod{7, 13, 19, 31}$, если A — матрица типа G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 соответственно), где 0, 1 или -1 появляются в соответствии с упр. 10.15 (в случае $m = h+1$).

10.18. Для матрицы A типа A_{p-1} , где p — простое число, и элемента $\exp(2\pi i \rho^\vee / p) \in G$ имеют место утверждения, аналогичные упр. 10.16 и 10.17. Кроме того, покажите, что

$$\mathrm{tr}_{L((a-1)\rho)} \exp(2\pi i \rho^\vee / p) = \left(\frac{a}{p}\right) \text{ (символ Лежандра)}.$$

Выведите квадратичный закон взаимности. Вычислите $\mathrm{tr} \sigma_{h+1}$ в спинорном представлении B_ℓ . Выведите, что $2^{\frac{\ell-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{\ell^2-1}{8}} \pmod{\ell}$ для нечетных ℓ .

10.19. Пусть $M \subset \mathfrak{h}^*$ — решетка, порожденная длинными корнями, $\Phi(\cdot)$ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}(A)$, $\nu: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ — соответствующий изоморфизм и $g = \Phi(\theta|\theta)^{-1}$; положим $k = 2$ для типов B_ℓ, C_ℓ, F_4 , $k = 3$ для типа G_2 и $k = 1$ для остальных типов. Покажите, что $\exp 4\pi i \nu^{-1}(\rho)$ — элемент порядка kg , который совпадает с $\exp(2\pi i \rho^\vee / h)$, если $k = 1$. Покажите, что для $\lambda \in P$ либо $2(\lambda|\alpha) \in \mathbb{Z}$ для некоторого $\alpha \in \Delta$, либо существует единственный элемент $w'_\lambda \in W \ltimes gM$, такой, что $w'_\lambda(\lambda) = \nu^{-1}(\rho)$. Выведите, что для $\lambda \in P_+$ справедлива формула

$$\mathrm{tr}_{L(\Lambda)} \exp 4\pi i \nu^{-1}(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Phi(\Lambda + \rho|\alpha) \equiv 0 \pmod{kg} \\ & \text{для некоторого } \alpha \in \Delta, \\ \epsilon(w'_\lambda)_\rho & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

10.20. Покажите, что класс сопряженности элемента $\sigma_h = \exp 2\pi i \rho^\vee / h$ в G состоит из всех элементов σ , таких, что $\mathrm{Ad} \sigma$ сопряжен автоморфизму $\mathfrak{g}(A)$ типа $(1; 1)$. Покажите, что класс сопряженности элемента σ_{h+1} в G состоит из всех регулярных элементов порядка $h+1$ и что $\mathrm{Ad} \sigma_{h+1}$ — автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ типа $(2, 1, \dots, 1; 1)$.

10.21. Пусть R — счетномерная коммутативная ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$ с единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$. Покажите, что любой элемент $x \in \mathfrak{m}$ алгебраический.

[Если x не алгебраический, то элементы $(x - \lambda)^{-1}$ для $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ являются линейно независимыми элементами кольца R .]

10.22. Рассмотрим каноническую фильтрацию $U(\mathfrak{g}(A)) = \bigcup_{j \geq 0} U_j$ универсальной обертывающей алгебры алгебры Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$, и пусть $\text{Gr } U(\mathfrak{g}(A))$ — соответствующая градуированная алгебра. Пусть Ann_A — аннулятор старшего вектора $L(A)$ в $U(\mathfrak{g}(A))$, и пусть $R_A = \text{Gr } U(\mathfrak{g}(A)) / \text{Gr } \text{Ann}_A$. Используя упр. 10.21, покажите, что R_A имеет единственный максимальный идеал, если и только если $A \in P_+$.

10.23. (Открытая проблема.) Классифицируйте неприводимые интегрируемые модули над алгеброй Каца — Мули.

§10.12. Библиографические замечания и комментарии

Теорема 10.4, так же как остальные результаты §10.1–10.5, принадлежит Кацу [1974]; изложение в основном следует этой статье. Формулу (10.4.1) обычно называют формулой Вейля — Каца для характера. Результаты §10.6 принадлежат Кацу и Питерсону (Кас — Peterson [1984 A]) (см. также Looijenga [1980]).

Первый вариант теоремы о полной приводимости (теорема 10.7b) был получен в работе Кас [1978 A]. В приведенной здесь форме теорема 10.7 взята из статьи Кас — Peterson [1984 A]. Отметим, что это усовершенствование играет важную роль в доказательстве теоремы типа Петера — Вейля из работы Кас — Peterson [1983].

Изложение §10.8–10.10 соответствует работе Кас [1978 A]. Прием, использованный в доказательстве предложения 10.9, восходит к Вейлю, и его можно найти во многих учебниках (например, Bourbaki [1975], Jacobson [1962]). Единственным новым моментом является использование дуальной системы корней. Результаты §10.8 и 10.9 были обобщены Вакимото (Wakimoto [1983]).

Упражнения 10.3 и 10.4 взяты из статьи Deodhar — Gabber — Кас [1982], упр. 10.10 — из статьи Lepowsky — Milne [1978]. Это наблюдение в конечном счете привело Каца, Леповского и Уилсона к интерпретации и доказательству тождеств Роджерса — Рамануджана с точки зрения алгебр Ли, как анонсировано на 83-м летнем заседании AMS, 1979, резюме 768-17-1, и на 775-м заседании AMS, 1980, резюме 775-A14 (эти результаты изложены в статье Lepowsky — Wilson [1982]). Дальнейшее развитие этих результатов см. в работах Lepowsky — Wilson [1984], Misra [1984 A, B, 1987, 1989 A, B], Meurman — Primc [1987], Lepowsky — Primc [1985], Primc [1989] и др.

Упражнение 10.12 восходит к Дынкину, упр. 10.13 принадлежит Харсу и Стэнли (см. Stanley [1980]). Тот факт, что $\text{tr}_{L(A)}(\exp 2\pi i \rho^\vee / h)$ и $\text{tr}_{L(A)}(\exp 4\pi i \nu^{-1}(\rho))$ есть 0, 1 или -1 , установлен Костантом (Kostant [1976]) (его доказательство более сложное). Оставшаяся часть

упр. 10.14–10.19 взята из статьи Кас [1981]. Упражнение 10.22 по существу принадлежит Фейгину и Фуксу (Feigin — Fuchs [1989]).

Из теоремы 10.7 следует, что $H^1(g'(A), L(\Lambda)) = 0$ для $\Lambda \in P_+$. Дюфло (не опубликовано) и Кумар (Kumar [1986 A]) показали, что $H^k(g'(A), L(\Lambda)) = 0$, $k \geq 1$, для каждого $\Lambda \in P_+$, $\Lambda \neq 0$. Кумар (Kumar [1984]) показал также, что $H^*(g'(A), \mathbb{C})$ изоморфно когомологиям соответствующей топологической группы $G(A)$; Кац и Питерсон (Кас — Петерсон [1984 B]) до этого вычислили ряд Пуанкаре для $G(A)$.

Комплексифицированный конус Титса $X_{\mathbb{C}}$ связан с теорией особенностей алгебраических поверхностей. Луенга (Looijenga [1980]) построил частичную компактификацию пространства орбит группы $W \ltimes 2\pi i Q^V$, действующей на множестве внутренних точек $X_{\mathbb{C}}$, что играет важную роль в теории деформаций особенностей. Дополнительные сведения о связях теории алгебр и групп Каца — Муди с теорией особенностей можно найти в работах Slodowy [1981, 19845 A, B].

Чари и Прессли (Chari [1986], Chari — Pressley [1987, 1988, 1989]) добились значительного успеха в классификации неприводимых интегрируемых модулей над аффинными алгебрами. В частности, они показали, что такой модуль с конечномерными весовыми подпространствами есть либо $L(\Lambda)$, либо $L^*(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$), либо относится к типу, рассмотренному в упражнении 7.15.

Недавнее замечательное достижение Кумара и Матье (Kumar [1987 A] [Mathieu [1987]]) состоит в доказательстве формулы Демазюра для характера в случае произвольной алгебры Каца — Муди с использованием геометрии многообразий Шуберта. (В конечномерном случае этот результат принадлежит Демазюру (Demazure [1974]) и Андерсену (Andersen [1985]).) Следствием этого является формула Вейля — Каца для произвольной (не обязательно симметризуемой) алгебры Каца — Муди.

Интегрируемый модуль $L(\Lambda)$ над симметризуемой алгеброй Каца — Муди $g(A)$ может быть деформирован в модуль над квантованной алгеброй Каца — Муди $U_q(g(A))$, при этом он остается неприводимым для общего значения q (Lusztig [1988]).

Замечание по терминологии. Интегрируемые модули со старшим весом в литературе иногда называются стандартными модулями. Я возражаю против этого термина, так как, во-первых, он не несет никакой информации, а во-вторых, он уже используется в теории представлений групп Ли для совсем других представлений. Кроме того, теория модулярно инвариантных представлений Каца — Вакимото (Кас — Wakimoto [1988 B, 1989 A]) показывает, что не только интегрируемые модули $L(\Lambda)$ представляют интерес.

Глава 11. Интегрируемые модули со старшим весом: система весов и унитаризуемость

§11.0. В этой главе мы подробно опишем множество весов $P(\Lambda)$ интегрируемого модуля $L(\Lambda)$ со старшим весом над алгеброй Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$. Мы установим существование и положительную определенность эрмитовой формы на $L(\Lambda)$, инвариантной относительно компактной формы $\mathfrak{k}(A)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$. Наконец, мы изучим разложение $L(\Lambda)$ относительно различных подалгебр из $\mathfrak{g}(A)$ и получим точное описание области сходимости ряда $\text{ch}_{L(\Lambda)}$. В конце главы мы даем изложение теории обобщенных алгебр Каца — Мули.

§11.1. Зафиксируем $\Lambda \in P_+$. Из результатов гл. 3 легко выводится следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Пусть $\lambda \in P(\Lambda)$, $\alpha \in \Delta^+$ и $m_t = \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda + t\alpha)$. Тогда

а) Множество чисел $t \in \mathbb{Z}$, таких, что $\lambda + t\alpha \in P(\Lambda)$, представляет собой интервал $\{t \in \mathbb{Z} \mid -p \leq t \leq q\}$, где p и q — неотрицательные целые числа и

$$p - q = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle.$$

б) Для $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ отображение $e_\alpha : L(\Lambda)_{\lambda+t\alpha} \rightarrow L(\Lambda)_{\lambda+(t+1)\alpha}$ инъективно, если $-p \leq t < \frac{1}{2}(q-p)$; в частности, функция $t \mapsto m_t$ возрастает на этом интервале.

с) Функция $t \mapsto m_t$ симметрична относительно $t = \frac{1}{2}(q-p)$.

д) Если λ и $\lambda + \alpha$ — веса, то $\mathfrak{g}_\alpha(L(\Lambda)_\lambda) \neq 0$.

Доказательство. В силу леммы 10.1 и результатов §3.6 предложение справедливо для простого корня α . Применяя предложение 3.7а), мы выводим, что оно выполнено для произвольного вещественного корня α . □

§11.2. Зафиксируем $\Lambda \in P_+$. Напомним, что $P(\Lambda)$ является W -инвариантным (в силу предложения 10.1).

Элемент $\lambda \in P$ называется *невырожденным относительно Λ* , если либо $\lambda = \Lambda$, либо $\lambda < \Lambda$ и для каждой связной компоненты S носителя $\text{supp}(\Lambda - \lambda)$ справедливо соотношение

$$(11.2.1) \quad S \cap \{i \mid \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0\} \neq \emptyset.$$

упр. 10.14–10.19 взята из статьи Кас [1981]. Упражнение 10.22 по существу принадлежит Фейгину и Фуксу (Feigin — Fuchs [1989]).

Из теоремы 10.7 следует, что $H^1(\mathfrak{g}'(A), L(\Lambda)) = 0$ для $\Lambda \in P_+$. Дюфло (не опубликовано) и Кумар (Kumar [1986 A]) показали, что $H^k(\mathfrak{g}'(A), L(\Lambda)) = 0$, $k \geq 1$, для каждого $\Lambda \in P_+$, $\Lambda \neq 0$. Кумар (Kumar [1984]) показал также, что $H^*(\mathfrak{g}'(A), \mathbb{C})$ изоморфно когомологиям соответствующей топологической группы $G(A)$; Кац и Питерсон (Кас — Peterson [1984 B]) до этого вычислили ряд Пуанкаре для $G(A)$.

Комплексифицированный конус Титса $X_{\mathbb{C}}$ связан с теорией особенностей алгебраических поверхностей. Луенга (Looijenga [1980]) построил частичную компактификацию пространства орбит группы $W \ltimes 2\pi i Q^V$, действующей на множестве внутренних точек $X_{\mathbb{C}}$, что играет важную роль в теории деформаций особенностей. Дополнительные сведения о связях теории алгебр и групп Каца — Мути с теорией особенностей можно найти в работах Slodowy [1981, 1984 A, B].

Чари и Прессли (Chari [1986], Chari — Pressley [1987, 1988, 1989]) добились значительного успеха в классификации неприводимых интегрируемых модулей над аффинными алгебрами. В частности, они показали, что такой модуль с конечномерными весовыми подпространствами есть либо $L(\Lambda)$, либо $L^*(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$), либо относится к типу, рассмотренному в упражнении 7.15.

Недавнее замечательное достижение Кумара и Матье (Kumar [1987 A] [Mathieu [1987]]) состоит в доказательстве формулы Демазюра для характера в случае произвольной алгебры Каца — Мути с использованием геометрии многообразий Шуберта. (В конечномерном случае этот результат принадлежит Демазюру (Demazure [1974]) и Андерсену (Andersen [1985]).) Следствием этого является формула Вейля — Каца для произвольной (не обязательно симметризуемой) алгебры Каца — Мути.

Интегрируемый модуль $L(\Lambda)$ над симметризуемой алгеброй Каца — Мути $\mathfrak{g}(A)$ может быть деформирован в модуль над квантованной алгеброй Каца — Мути $U_q(\mathfrak{g}(A))$, при этом он остается неприводимым для общего значения q (Lusztig [1988]).

Замечание по терминологии. Интегрируемые модули со старшим весом в литературе иногда называются стандартными модулями. Я возражаю против этого термина, так как, во-первых, он не несет никакой информации, а во-вторых, он уже используется в теории представлений групп Ли для совсем других представлений. Кроме того, теория модулярно инвариантных представлений Каца — Вакимото (Кас — Wakimoto [1988 B, 1989 A]) показывает, что не только интегрируемые модули $L(\Lambda)$ представляют интерес.

Глава 11. Интегрируемые модули со старшим весом: система весов и унитаризуемость

§11.0. В этой главе мы подробно опишем множество весов $P(\Lambda)$ интегрируемого модуля $L(\Lambda)$ со старшим весом над алгеброй Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$. Мы установим существование и положительную определенность эрмитовой формы на $L(\Lambda)$, инвариантной относительно компактной формы $\mathfrak{k}(A)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$. Наконец, мы изучим разложение $L(\Lambda)$ относительно различных подалгебр из $\mathfrak{g}(A)$ и получим точное описание области сходимости ряда $\text{ch}_{L(\Lambda)}$. В конце главы мы даем изложение теории обобщенных алгебр Каца — Мули.

§11.1. Зафиксируем $\Lambda \in P_+$. Из результатов гл. 3 легко выводится следующее утверждение:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. Пусть $\lambda \in P(\Lambda)$, $\alpha \in \Delta^+$ и $m_i = \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda + i\alpha)$. Тогда

а) Множество чисел $t \in \mathbb{Z}$, таких, что $\lambda + t\alpha \in P(\Lambda)$, представляет собой интервал $\{t \in \mathbb{Z} \mid -p \leq t \leq q\}$, где p и q — неотрицательные целые числа и

$$p - q = \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle.$$

б) Для $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ отображение $e_\alpha : L(\Lambda)_{\lambda+t\alpha} \rightarrow L(\Lambda)_{\lambda+(t+1)\alpha}$ инъективно, если $-p \leq t < \frac{1}{2}(q-p)$; в частности, функция $t \mapsto m_t$ возрастает на этом интервале.

в) Функция $t \mapsto m_t$ симметрична относительно $t = \frac{1}{2}(q-p)$.

г) Если λ и $\lambda + \alpha$ — веса, то $\mathfrak{g}_\alpha(L(\Lambda)_\lambda) \neq 0$.

Доказательство. В силу леммы 10.1 и результатов §3.6 предложение справедливо для простого корня α . Применяя предложение 3.7а), мы выводим, что оно выполнено для произвольного вещественного корня α . □

§11.2. Зафиксируем $\Lambda \in P_+$. Напомним, что $P(\Lambda)$ является W -инвариантным (в силу предложения 10.1).

Элемент $\lambda \in P$ называется *невырожденным относительно Λ* , если либо $\lambda = \Lambda$, либо $\lambda < \Lambda$ и для каждой связной компоненты S носителя $\text{supp}(\Lambda - \lambda)$ справедливо соотношение

$$(11.2.1) \quad S \cap \{i \mid \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0\} \neq \emptyset.$$

ЛЕММА 11.2. Каждый вес λ модуля $L(\Lambda)$ над $\mathfrak{g}(A)$ невырожден относительно Λ .

Доказательство. Предположим, что $\lambda \in P(\Lambda) \setminus \{\Lambda\}$. Пусть S — связанная компонента $\text{supp}(\Lambda - \lambda)$. Обозначим через $\mathfrak{n}_-(S)$ подалгебру в $\mathfrak{n}_-$, порожденную f_i , такими, что $i \in S$. Тогда

$$(11.2.2) \quad L(\Lambda)_\lambda \subset U(\mathfrak{n}_-(S))L(\Lambda)_\Lambda.$$

Если (11.2.1) ложно, то $\mathfrak{n}_-(S)L(\Lambda)_\Lambda = 0$ для некоторого S и, следовательно, в силу (11.2.2) $L(\Lambda)_\lambda = 0$ — противоречие. $\square$

Теперь мы можем явно описать множество весов $\mathfrak{g}(A)$ -модуля $L(\Lambda)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.2. Пусть $\Lambda \in P_+$. Тогда

a) $P(\Lambda) = W \cdot \{\lambda \in P_+ | \lambda \text{ невырожден относительно } \Lambda\}$.

b) Если $\{i | \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0\} \subset S(A)$ есть дизъюнктивное объединение диаграмм конечного типа, то

$$P(\Lambda) = W \cdot \{\lambda \in P_+ | \lambda \leq \Lambda\}.$$

Доказательство. Включение $\subset$ в а) и б) вытекает из следствия 10.1 и леммы 11.2. Обратное включение в б) следует из а). В самом деле, если $\lambda \in P_+$ и $\lambda = \Lambda - \beta$, где $\beta \in Q_+$, то $\langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \leq 0$ для i , такого, что $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0$, откуда вытекает, что λ невырожден относительно Λ в предположениях б).

Осталось показать, что если $\mu = \Lambda - \alpha \in P_+$, где $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$, $k_i \geq 0$, $\sum_i k_i > 0$ и $S \cap \{i | \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0\} \neq \emptyset$ для каждой связанной компоненты S в $\text{supp } \alpha$, то $\mu \in P(\Lambda)$. Пусть

$$\Omega_\alpha = \{\gamma \in Q_+ | \gamma \leq \alpha \text{ и } \Lambda - \gamma \in P(\Lambda)\}.$$

Множество Ω_α конечно, и объединение носителей его элементов имеет непустое пересечение с каждой связанной компонентой $\text{supp } \alpha$. Пусть $\beta = \sum_i m_i \alpha_i$ — элемент максимальной высоты в Ω_α . Из предложения 11.1а) следует, что

$$(11.2.3) \quad \text{supp } \beta = \text{supp } \alpha.$$

Предположим, что $\beta \neq \alpha$. Тогда

$$(11.2.4) \quad \Lambda - \beta - \alpha_i \notin P(\Lambda), \text{ если } k_i > m_i.$$

Положим $S = \{j \in S(A) | k_j = m_j\}$. Пусть R — связная компонента множества $(\text{supp } \alpha) \setminus S$. Поскольку $\mu \in P_+$, из (11.2.4) и предложения 11.1а) выводим, что

$$(11.2.5) \quad \langle \beta, \alpha_i^\vee \rangle \geq \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \text{ и } \langle \alpha, \alpha_i^\vee \rangle \leq \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle, \text{ если } i \in R.$$

Положим

$$\beta' = \sum_{i \in R} m_i \alpha_i, \quad \alpha' = \sum_{i \in R} (k_i - m_i) \alpha_i.$$

Тогда из (11.2.3 и 5) вытекает, что

$$(11.2.6) \quad \langle \beta', \alpha_i^\vee \rangle \geq 0, \text{ если } i \in R,$$

$$(11.2.7) \quad \langle \alpha', \alpha_i^\vee \rangle \leq 0, \text{ если } i \in R.$$

Из (11.2.7) следует, что R , а значит, и $S(A)$ не конечного типа. В частности, для каждого $\lambda \in P(\Lambda)$ существует α_i , такое, что $\lambda - \alpha_i \in P(\Lambda)$. (В противном случае $\dim L(\Lambda) < \infty$ и $\dim \mathfrak{g}(A) < \infty$.) Следовательно, $S \neq \emptyset$, и, используя свойства μ , мы можем выбрать компоненту R так, чтобы она не была связной компонентой в $\text{supp } \alpha$. Но в этом случае в дополнение к (11.2.6) имеет место неравенство $\langle \beta', \alpha_j^\vee \rangle > 0$ для некоторого $j \in R$. Значит, R — диаграмма конечного типа. Противоречие. $\square$

§11.3. Мы продолжаем изучать геометрические свойства множества весов $P(\Lambda)$ для $\Lambda \in P_+$.

Предложение 11.3. а) $P(\Lambda)$ совпадает с пересечением $\Lambda + Q$ с выпуклой оболочкой орбиты $W \cdot \Lambda$.

б) Если $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ таковы, что $\lambda - \mu \in Q$ и μ лежит в выпуклой оболочке $W \cdot \lambda$, то $\text{mult}_{L(\Lambda)}(\mu) \geq \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda)$.

Доказательство. Сначала мы докажем индукцией по $\text{ht}(\Lambda - \lambda)$, что вес λ модуля $L(\Lambda)$ лежит в выпуклой оболочке орбиты $W \cdot \Lambda$. Если $\lambda = \Lambda$, доказывать нечего. Если $\lambda < \Lambda$, существует i , такой, что $\lambda + \alpha_i \in P(\Lambda)$. Возьмем максимальное s , для которого $\mu := \lambda + s\alpha_i \in P(\Lambda)$. Тогда μ лежит в выпуклой оболочке орбиты $W \cdot \Lambda$ по предположению индукции; так как λ лежит в интервале $[\mu, r_i(\mu)]$ (по предложению 11.1), он также лежит в выпуклой оболочке орбиты $W \cdot \Lambda$.

Пусть теперь $\lambda = \sum_w c_w w(\Lambda) \in \Lambda + Q$, где $c_w \geq 0$ и $\sum_w c_w = 1$. Тогда

$$(11.3.1) \quad \Lambda - \lambda = \sum_w c_w (\Lambda - w(\Lambda)) \in Q_+.$$

Заменяя λ на $w(\lambda)$ с минимальной $\text{ht}(\Lambda - \lambda)$, мы можем считать, что $\lambda \in P_+$. Наконец, из (11.3.1) видно, что λ невырожден относительно Λ . Следовательно, в силу предложения 11.2а) $\lambda \in P(\Lambda)$, что доказывает а).

Для доказательства б) мы можем считать, что $\lambda \in P_+$. Тогда, применяя а) к $L(\lambda)$, получаем $\mu \in P(\lambda)$. Будем доказывать б) индукцией по $\text{ht}(\lambda - \mu)$. Если $\lambda = \mu$, доказывать нечего. Если это не так, то $\mu + \alpha_i \in P(\lambda)$ для некоторого i . Пусть $s > 0$ обладает тем свойством, что $\mu + s\alpha_i \in P(\lambda)$, но $\mu + (s+1)\alpha_i \notin P(\lambda)$. В силу а) $\mu + s\alpha_i$ лежит в выпуклой оболочке орбиты $W \cdot \lambda$ и в $P(\Lambda)$. Следовательно, по предположению индукции $\text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda) \leq \text{mult}_{L(\Lambda)}(\mu + s\alpha_i)$. С другой стороны, μ лежит в интервале $[\mu + s\alpha_i, r_i(\mu + s\alpha_i)]$, и поэтому $\text{mult}_{L(\Lambda)}(\mu + s\alpha_i) \leq \text{mult}_{L(\Lambda)}(\mu)$ в силу предложения 11.1б), с). Комбинируя эти неравенства, получаем б). $\square$

§11.4. До конца этой главы мы будем предполагать, что A — симметризуемая обобщенная матрица Картана; зафиксируем стандартную билинейную форму $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}(A)$.

Предложение 11.4. Пусть $\Lambda \in P_+$ и $\lambda, \mu \in P(\Lambda)$. Тогда

а) $(\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\mu) \geq 0$ и равенство достигается, если и только если $\lambda = \mu \in W \cdot \Lambda$.

б) $|\Lambda + \rho|^2 - |\lambda + \rho|^2 \geq 0$ и равенство достигается, если и только если $\lambda = \Lambda$.

Доказательство. Так как и $(\cdot | \cdot)$, и $P(\Lambda)$ являются W -инвариантными, мы можем считать в доказательстве а), что $\lambda \in P_+$. Так как $\beta := \Lambda - \lambda$ и $\beta_1 := \Lambda - \mu$ лежат в Q_+ , то $(\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\mu) = (\Lambda|\beta) + (\lambda|\beta_1) \geq 0$ (ср. с доказательством леммы 10.3). В случае равенства получаем $(\Lambda|\beta) = (\lambda|\beta_1) = 0$. Так как λ невырожден относительно Λ (по лемме 11.2), то $\beta = 0$, т. е. $\lambda = \Lambda$. Но тогда $(\Lambda|\beta_1) = 0$, и из тех же соображений $\mu = \Lambda$, что доказывает а).

Для доказательства б) запишем

$$(\Lambda + \rho|\Lambda + \rho) - (\lambda + \rho|\lambda + \rho) = ((\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\lambda)) + 2(\Lambda - \lambda|\rho) \geq 0,$$

поскольку $(\Lambda|\Lambda) - (\lambda|\lambda) \geq 0$ в силу а) и $\Lambda - \lambda \in Q_+$. Ясно, что равенство выполняется, если и только если $\Lambda = \lambda$. $\square$

§11.5. Пусть V — некоторый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль. Эрмитова форма H на V называется **контравариантной**, если

$$H(g(x), y) = -H(x, \omega_0(g)(y)) \text{ для всех } g \in \mathfrak{g}(A), x, y \in V.$$

Например, эрмитова форма $(\cdot | \cdot)_0$ на $\mathfrak{g}(A)$ контравариантна (см. §2.7).

ЛЕММА 11.5. Пусть $\Lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Тогда $\mathfrak{g}(\Lambda)$ -модуль $L(\Lambda)$ обладает единственной, с точностью до постоянного множителя, невырожденной контравариантной эрмитовой формой. Относительно этой формы $L(\Lambda)$ разлагается в ортогональную прямую сумму весовых подпространств.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{g}(A)_{\mathbb{R}}$ вещественную подалгебру в $\mathfrak{g}(A)$, порожденную e_i, f_i и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, и пусть $L(\Lambda)_{\mathbb{R}} = U(\mathfrak{g}(A)_{\mathbb{R}})v_{\Lambda}$. Тогда H является эрмитовым продолжением B (см. предложение 9.4) с $L(\Lambda)_{\mathbb{R}}$ на $L(\Lambda)$. $\square$

Как в §9.4, легко видеть, что формула

$$(11.5.1) \quad H(gv_{\Lambda}, g'v_{\Lambda}) = \langle \hat{\omega}_0(g)g'v_{\Lambda} \rangle,$$

где $g, g' \in U(\mathfrak{g}(A))$ и $\hat{\omega}_0$ есть продолжение $-\omega_0$ до антилинейной антиинволюции на $U(\mathfrak{g}(A))$, определяет контравариантную эрмитову форму на $L(\Lambda)$ (при условии, что $\Lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$), нормализованную равенством $H(v_{\Lambda}, v_{\Lambda}) = 1$.

Заметим, что по определению операторы g и $-\omega_0(g)$ являются сопряженными операторами на $L(\Lambda)$ относительно H . Таким образом, компактная форма $\mathfrak{k}(A)$ представлена на $L(\Lambda)$ кососопряженными операторами.

Модуль $L(\Lambda)$ над $\mathfrak{g}(A)$ называется *унитаризуемым*, если эрмитова форма H , определенная формулой (11.5.1), положительно определена.

§11.6. Мы переходим к доказательству положительности формы $(\cdot | \cdot)_0$ на $\mathfrak{n}_- + \mathfrak{n}_+$ и формы H на $L(\Lambda)$. Сначала мы докажем неравенство

$$(11.6.1) \quad 2(\rho|\alpha) > (\alpha|\alpha), \text{ если } \alpha \in \Delta_+ \setminus \Pi.$$

Если $\alpha \in \Delta_+^{im}$, это ясно, поскольку в этом случае $(\alpha|\alpha) \leq 0$, но $(\rho|\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$. Если $\alpha \in \Delta_+^{re} \setminus \Pi$, то $\alpha^{\vee} \in (\Delta_+^{\vee})^{re} \setminus \Pi^{\vee}$ и, следовательно, $2(\rho|\alpha)/(\alpha|\alpha) = \langle \rho, \alpha^{\vee} \rangle > 1$. Это вместе с соотношением $(\alpha|\alpha) > 0$ влечет за собой (11.6.1).

По аналогии с «частичным» оператором Казимира Ω_0 определим оператор Ω_1 на $\mathfrak{n}_-$ формулой

$$\Omega_1(x) = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i [e_{-\alpha}^{(i)}, [e_{\alpha}^{(i)}, x]_-] \quad (x \in \mathfrak{n}_-).$$

Здесь, как и раньше, $\{e_{\alpha}^{(i)}\}$ и $\{e_{-\alpha}^{(i)}\}$ — дуальные базисы корневых подпространств $\mathfrak{g}_{\alpha}$ и $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ относительно билинейной формы $(\cdot | \cdot)$ и знак «минус» в индексе обозначает проекцию на $\mathfrak{n}_-$ относительно треугольного разложения. Теперь мы готовы доказать ключевую лемму.

ЛЕММА 11.6. Если $\alpha \in \Delta_+$ и $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, то

$$\Omega_1(x) = (2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha))x.$$

Доказательство. Мы вычислим в $M(0)$ выражение $\Omega_0 x(v)$, где v — вектор старшего веса, двумя различными способами. В силу (2.6.1) имеем

$$(11.6.2) \quad \Omega_0 x(v) = (2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha))x(v).$$

С другой стороны, по определению Ω_0

$$\begin{aligned} \Omega_0 x(v) &= 2 \sum_{\beta \in \Delta_+} \sum_i e_{-\beta}^{(i)} e_{\beta}^{(i)} x(v) \\ &= 2 \sum_{\beta \in \Delta_+} \sum_i e_{-\beta}^{(i)} [e_{\beta}^{(i)}, x](v). \end{aligned}$$

Полагая $S = \{\beta \in \Delta_+ | \beta < \alpha\}$, мы можем записать

$$\begin{aligned} \Omega_0 x(v) &= 2 \sum_{\beta \in S} \sum_i e_{-\beta}^{(i)} [e_{\beta}^{(i)}, x](v) \\ &= \sum_{\beta \in S} \sum_i ([e_{-\beta}^{(i)}, [e_{\beta}^{(i)}, x]] + [e_{\beta}^{(i)}, x] e_{-\beta}^{(i)} + e_{-\beta}^{(i)} [e_{\beta}^{(i)}, x])(v). \end{aligned}$$

Используя (2.4.4), получаем

$$\Omega_0 x(v) = \sum_{\beta \in S} \sum_i [e_{-\beta}^{(i)}, [e_{\beta}^{(i)}, x]](v).$$

Сравнивая это с (11.6.2), приходим к равенству

$$((2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha))x)(v) = \sum_{\beta \in \Delta_+} \sum_i [e_{-\beta}^{(i)}, [e_{\beta}^{(i)}, x]](v).$$

Поскольку $M(0)$ — свободный $U(\mathfrak{n}_-)$ -модуль (см. предложение 9.2b)), отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

§11.7. Теперь мы в состоянии доказать следующий фундаментальный результат:

ТЕОРЕМА 11.7. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Каца — Мули. Тогда

а) Ограничение эрмитовой формы $(\cdot | \cdot)_0$ на каждое корневое подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ ($\alpha \in \Delta$) положительно определено, т. е. $(\cdot | \cdot)_0$ положительно определена на $\mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{n}_+$.

б) Каждый интегрируемый модуль со старшим весом $L(\Lambda)$ над $\mathfrak{g}(A)$ унитаризуем. Обратно, если $L(\Lambda)$ унитаризуем, то $\Lambda \in P_+$.

Доказательство. Сначала докажем а). Используя ω_0 , достаточно показать, что $(\cdot | \cdot)_0$ положительно определена на $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ при $\alpha \in \Delta_+$. Мы сделаем это индукцией по $\text{ht } \alpha$. Случай $\text{ht } \alpha = 1$ очевиден в силу (2.2.1). В остальных случаях положим $S = \{\beta \in \Delta_+ | \beta < \alpha\}$ и, используя предположение индукции, выберем для каждого $\beta \in S$ ортонормированный базис $\{e_{-\beta}^{(i)}\}$ в $\mathfrak{g}_{-\beta}$ относительно $(\cdot | \cdot)_0$. Тогда, полагая $e_\beta^{(i)} = -\omega_0(e_{-\beta}^{(i)})$, приходим к равенству $(e_\beta^{(i)} | e_{-\beta}^{(j)}) = \delta_{ij}$. Теперь применим лемму 11.6 для этого выбора $e_\beta^{(i)}$ и $e_{-\beta}^{(i)}$ (выбор для $\beta \in \Delta_+ \setminus S$ произвольный). При $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ получаем

$$\begin{aligned} (2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha))(x|x)_0 &= (\Omega_1(x)|x)_0 \\ &= \sum_{\beta \in S} \sum_i ([e_{-\beta}^{(i)}, [e_\beta^{(i)}, x]]|x)_0 \\ &= \sum_{\beta \in S} \sum_i ([e_\beta^{(i)}, x]|[e_{-\beta}^{(i)}, x])_0. \end{aligned}$$

По предположению индукции последняя сумма неотрицательна; используя (11.6.1), получим неравенство $(x|x)_0 \geq 0$. Так как $(\cdot | \cdot)_0$ невырождена на $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, мы выводим отсюда, что она положительно определена, тем самым доказывая а).

Используя лемму 11.5, мы видим, что для доказательства б) достаточно проверить, что ограничение H на $L(\Lambda)_\lambda$ положительно определено. Мы сделаем это с помощью индукции по $\text{ht}(\Lambda - \lambda)$. Пусть $\lambda \in P(\Lambda) \setminus \{\Lambda\}$ и $v \in L(\Lambda)_\lambda$. Благодаря а) мы можем выбрать базис $\{e_\alpha^{(i)}\}$ в $\mathfrak{g}_\alpha$, такой, что $\{-\omega_0(e_\alpha^{(i)})\}$ — дуальный (относительно $(\cdot | \cdot)_0$) базис в $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Тогда

$$\Omega = 2\nu^{-1}(\rho) + \sum_i u_i u^i - 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i \omega_0(e_\alpha^{(i)}) e_\alpha^{(i)}$$

и, следовательно,

$$(11.7.1) \quad \Omega(v) = (\lambda + 2\rho|\lambda)v - 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i \omega_0(e_\alpha^{(i)}) e_\alpha^{(i)}(v).$$

Вычисляя $H(\Omega(v), v)$ двумя различными способами с использованием следствия 2.6 и (11.7.1) и приравнявая результаты, получаем

$$(|\Lambda + \rho|^2 - |\lambda + \rho|^2)H(v, v) = 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_i H(e_\alpha^{(i)}(v), e_\alpha^{(i)}(v)).$$

По предположению индукции правая часть неотрицательна. Используя предложение 11.4b), выводим, что $H(v, v) \geq 0$. Так как H невырождена на $L(\Lambda)_\lambda$, мы заключаем, что она положительно определена.

Чтобы доказать обратное утверждение, заметим, что в силу (3.2.4)

$$\begin{aligned} 0 \leq H(f_i^k v_\Lambda, f_i^k v_\Lambda) &= H(f_i^{k-1} v_\Lambda, e_i f_i^k v_\Lambda) \\ &= k(\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle + 1 - k)H(f_i^{k-1} v_\Lambda, f_i^{k-1} v_\Lambda) \\ &= \dots = \prod_{j=1}^k j(\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle + 1 - j). \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+$. □

Предостережение. Ограничение $(\cdot | \cdot)_0$ на $\mathfrak{h}$ и даже на $\mathfrak{h}'$ есть, вообще говоря, неопределенная эрмитова форма: матрица $((\alpha_i^\vee | \alpha_j^\vee)_0)$ представляет собой симметризацию матрицы A . В действительности она положительно определена (соответственно положительно полуопределена) на $\mathfrak{h}'$, если и только если A — матрица конечного (соответственно аффинного) типа.

Как только что было отмечено, если A — матрица конечного типа, то ограничение $(\cdot | \cdot)_0$ на $\mathfrak{h}$ положительно определено, и, следовательно, используя теорему 11.7а), мы получаем, что эрмитова форма $(\cdot | \cdot)_0$ положительно определена на $\mathfrak{g}(A)$, так что $\mathfrak{g}(A)$ обладает положительно определенной $\mathfrak{k}(A)$ -инвариантной эрмитовой формой. Таким образом, теорема 11.7 является обобщением классического результата конечномерной теории.

§11.8. Из теоремы 11.7b) мы выведем еще один результат о полной приводимости. Для этого мы докажем сначала следующую лемму:

ЛЕММА 11.8. Пусть $h \in \text{Int } X_C$. Тогда для любого $r \in \mathbb{R}$ число собственных значений (с учетом кратностей) λ для h в $L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$), таких, что $\text{Re } \lambda > r$, конечно.

Доказательство. Это вытекает из предложения 10.6d). □

Предложение 11.8. Пусть $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}(A)$ — некоторая ω_0 -инвариантная подалгебра, нормализуемая элементом $h \in \text{Int } X_{\mathbb{C}}$ (т. е. $[h, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$). Тогда относительно $\mathfrak{a}$ модуль $L(\Lambda)$ ($\Lambda \in P_+$) разлагается в ортогональную (относительно H) прямую сумму неприводимых h -инвариантных подмодулей.

Доказательство. Положим $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} + \mathbb{C}h$. По теореме 11.7b) и лемме 11.8 $L(\Lambda)$ разлагается в ортогональную прямую сумму конечномерных собственных подпространств для h . Используя теорему 11.7b) и ω_0 -инвариантность $\mathfrak{a}_1$, получаем, что для каждого $\mathfrak{a}_1$ -подмодуля $V \subset L(\Lambda)$ подпространство $V^\perp$ также является $\mathfrak{a}_1$ -подмодулем и $L(\Lambda) = V \oplus V^\perp$. Следовательно, $L(\Lambda)$ разлагается в ортогональную прямую сумму неприводимых $\mathfrak{a}_1$ -модулей.

Пусть $U \subset L(\Lambda)$ — неприводимый $\mathfrak{a}_1$ -подмодуль. Осталось показать, что U остается неприводимым при ограничении на $\mathfrak{a}$. Пусть U_λ обозначает собственное подпространство для h в U с собственным значением λ , и пусть λ_0 — собственное значение для h с максимальной вещественной частью. Пусть, кроме того, $\mathfrak{a}^\lambda$ обозначает собственное подпространство для $\text{ad } h$ в $\mathfrak{a}$ с собственным значением λ ; через $\mathfrak{a}_0$ (соответственно $\mathfrak{a}_+$ или $\mathfrak{a}_-$) мы обозначим сумму всех $\mathfrak{a}^\lambda$ с $\text{Re } \lambda = 0$ (соответственно > 0 или < 0). Тогда $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_+$, и ясно, что U_{λ_0} есть неприводимый $\mathfrak{a}_0$ -модуль и что $\{x \in U_\lambda | \mathfrak{a}_+(x) = 0\} = 0$, если $\text{Re } \lambda < \text{Re } \lambda_0$. Следовательно, U — неприводимый $\mathfrak{a}$ -модуль. $\square$

§11.9. Зафиксируем $\alpha \in \Delta_+$ и положим

$$\mathfrak{n}_\pm^{(\alpha)} = \bigoplus_{j \geq 1} \mathfrak{g}_{\pm j\alpha}, \quad \mathfrak{g}^{(\alpha)} = \mathfrak{n}_-^{(\alpha)} \oplus \mathbb{C}\nu^{-1}(\alpha) \oplus \mathfrak{n}_+^{(\alpha)}.$$

Тогда $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}(A)$ (по теореме 2.2e).

Из предложения 5.1 и результатов гл. 3 следует, что если α — вещественный корень, то $\mathfrak{g}^{(\alpha)} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и модуль $L(\Lambda)$ при ограничении на $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ разлагается в прямую сумму неприводимых конечномерных модулей. Если α — мнимый корень, то $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ является бесконечномерной алгеброй Ли, как описано в §9.12. Теперь мы можем описать ограничение $L(\Lambda)$ на $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ для $\alpha \in \Delta_+^{im}$.

Предложение 11.9. Пусть $\alpha \in \Delta_+^{im}$ и $\Lambda \in P_+$. Введем два подпространства в $L(\Lambda)$:

$$L(\Lambda)_0^{(\alpha)} = \bigoplus_{\lambda: \langle \lambda | \alpha \rangle = 0} L(\Lambda)_\lambda, \quad L(\Lambda)_+^{(\alpha)} = \bigoplus_{\lambda: \langle \lambda | \alpha \rangle > 0} L(\Lambda)_\lambda.$$

а) Рассматриваемый как $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$ -модуль, $L(\Lambda)$ разлагается в прямую сумму подмодулей: $L(\Lambda) = L(\Lambda)_0^{(\alpha)} \oplus L(\Lambda)_+^{(\alpha)}$.

b) $L(\Lambda)_0^{(\alpha)} = \{x \in L(\Lambda) | g^{(\alpha)}(x) = 0\}$.

c) $L(\Lambda)_+^{(\alpha)}$ — свободный $U(n_-^{(\alpha)})$ -модуль, порожденный базисом подпространства $\{x \in L(\Lambda)_+^{(\alpha)} | n_+^{(\alpha)}(x) = 0\}$.

d) $g^{(\alpha)}$ -модуль $L(\Lambda)$ вполне приводим.

Доказательство. Напомним, что в силу предложения 9.12b) мы можем рассматривать $g^{(\alpha)}$ как факторалгебру алгебры Ли $g'(B)$. Используя предложение 11.8, разложим $L(\Lambda)$ в прямую сумму $\mathfrak{h}$ -инвариантных неприводимых $g^{(\alpha)}$ -подмодулей. Каждый из этих подмодулей, очевидно, порождается ненулевым вектором $v_\lambda \in L(\Lambda)_\lambda$, таким, что $n_+^{(\alpha)}(v_\lambda) = 0$. Если $(\lambda|\alpha) = 0$, то Cv_λ является $g^{(\alpha)}$ -инвариантным в силу (9.10.1). Если $(\lambda|\alpha) > 0$, то Cv_λ порождает модуль Верма над $g^{(\alpha)}$ в силу предложения 9.10 а).

Чтобы закончить доказательство, заметим, что

$$(11.9.1) \quad (\lambda|\alpha) \geq 0, \text{ если } \lambda \in P(\Lambda) \text{ и } \alpha \in \Delta_+^{im}.$$

Действительно, следствие 10.1 и W -инвариантность Δ_+^{im} позволяют нам считать, что $\lambda \in P_+$. Но в этом случае неравенство (11.9.1) очевидно. $\square$

Из утверждений а), b) и c) предложения 11.9 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 11.9. Пусть $\alpha \in \Delta_+^{im}$ и $\Lambda \in P_+$. Пусть λ — вес $g(A)$ -модуля $L(\Lambda)$. Тогда либо

a) $(\lambda|\alpha) = 0$, и в этом случае $\lambda - k\alpha$ не является весом для $L(\Lambda)$ при $k \neq 0$; либо

b) $(\lambda|\alpha) \neq 0$, и в этом случае $(\lambda|\alpha) > 0$ и справедливы такие утверждения:

- (i) множество $t \in \mathbb{Z}$, таких, что $\lambda - t\alpha \in P(\Lambda)$, представляет собой интервал $[-p, +\infty)$, где $p \geq 0$ и $t \mapsto \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda - t\alpha)$ — неубывающая функция на этом интервале;
- (ii) если $x \in g_{-\alpha}$, $x \neq 0$, то $x : L(\Lambda)_{\lambda-t\alpha} \rightarrow L(\Lambda)_{\lambda-(t+1)\alpha}$ является инъекцией.

c) Если $\lambda \in P_{++}$ и v — весовой вектор веса λ , то отображение $n_- \rightarrow L(\Lambda)$, определенное по правилу $n \mapsto n(v)$, инъективно.

§11.10. Здесь мы используем результаты предыдущего параграфа для точного описания области сходимости $\text{ch}_{L(\Lambda)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.10. Пусть A — неразложимая симметризуемая обобщенная матрица Картана и $L(\Lambda)$ — неприводимый $g(A)$ -модуль со старшим весом $\Lambda \in P_+$, таким, что $\langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \neq 0$ для некоторого i . Тогда область $Y(L(\Lambda)) \subset \mathfrak{h}$ абсолютной сходимости ряда $\text{ch}_{L(\Lambda)}$ открыта и совпадает с множеством

$$Y = \{h \in \mathfrak{h} \mid \sum_{\alpha \in \Delta_+} (\text{mult } \alpha) |e^{-(\alpha, h)}| < \infty\}.$$

Доказательство. В силу предложения 10.6с) достаточно показать, что $Y(L(\Lambda)) \subset Y$ и что Y открыто.

Включение, о котором идет речь, очевидно, если A — матрица конечного типа. Если A аффинного типа, то

$$(11.10.1) \quad Y = \{h \in \mathfrak{h} \mid \text{Re}(\delta, h) > 0\}.$$

Это следует из описания системы корней $\Delta(A)$, которое дается в предложении 6.3, и того факта, что кратности корней ограничены (числом ℓ) в силу следствий 7.4 и 8.3. Отсюда вытекает требуемое включение, поскольку $\text{mult}_{L(\Lambda)}(\Lambda - s\delta) \neq 0$ для всех $s \in \mathbb{Z}_+$ в силу следствия 11.9b(i). Наконец, если A — матрица неопределенного типа, то по теореме 5.6с) существует $\alpha \in \Delta_+^{im}$, такой, что $\text{supp } \alpha = S(A)$ и $(\alpha, \alpha_i^\vee) < 0$ для всех i . Но тогда $\Lambda - \alpha \in P(\Lambda)$ в силу предложения 11.2a). Кроме того, по предложению 11.1b) и следствию 11.9с) для каждого ненулевого $v \in L(\Lambda)_{\Lambda - \alpha}$ отображение $\psi : \mathfrak{n}_- \rightarrow L(\Lambda)$, определенное по формуле $\psi(y) = y(v)$, инъективно. Это завершает доказательство включения $Y(L(\Lambda)) \subset Y$.

Чтобы убедиться, что Y открыто, заметим, что

$$(11.10.2) \quad \alpha \in \Delta^{im} \text{ влечет за собой } \{h \in \text{Int } X \mid \alpha(h) = 0\} = \emptyset.$$

Это ясно, поскольку мы можем считать, что $h \in C$, и тогда применить предложение 3.12a) и f). Используя предложение 5.1a), мы видим, что Y есть область сходимости бесконечного произведения $B := \prod_{\alpha \in \Delta_+^{im}} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult } \alpha}$.

Для $h \in \text{Int } X$ рассмотрим мероморфную функцию $f(z) = B(zh)^{-1}$. В силу стандартного свойства рядов Дирихле с положительными коэффициентами (см., например, Serre [1970]) множество $\{t \in \mathbb{R} \mid th \in Y\}$ сходимости ряда, полученного после раскрытия произведения $B(zh)^{-1}$, представляющего $f(z)$, есть открытый сегмент $(c, +\infty)$. Отсюда следует, что если $th \in Y$, то $(t - \epsilon)h \in Y$ для некоторого $\epsilon > 0$. Но соображения, использованные в доказательстве предложения 10.6a), показывают, что Y выпукло и что с каждым h' оно содержит $t'h'$ для достаточно большого $t' > 0$. Следовательно, $Y \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ открыто в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, так что $Y = (Y \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}) + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ открыто в $\mathfrak{h}$.

□

§11.11. В этом параграфе мы выведем формулу специализации тождества для знаменателя (10.4.4). Пусть $\mathfrak{h}_0$ — подпространство в $\mathfrak{h}$, такое, что

$$(11.11.1) \quad \mathfrak{h}_0 \cap \text{Int } X_{\mathbb{C}} \neq \emptyset.$$

Пусть $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ обозначает отображение ограничения $\mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}_0^*$; через p обозначим гомоморфизм $\mathcal{E}$ в пополненную групповую алгебру для $\mathfrak{h}_0^*$, определенный по правилу $p(e(\lambda)) = e(\bar{\lambda})$. Положим

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \bar{\alpha} = 0\}, \quad \Delta_{0+} = \Delta_0 \cap \Delta_+, \quad R_0 = \prod_{\alpha \in \Delta_{0+}} (1 - e(-\alpha)).$$

В силу предложения 3.12 множество Δ_0 конечно; следовательно, $\Delta_0 \subset \Delta^{\text{re}}$. Ясно, что Δ_0 удовлетворяет обычным аксиомам для конечной системы корней (см. [Bourbaki 1968]). Обозначим через V_0 (конечную) подгруппу в W , порожденную отражениями r_α ($\alpha \in \Delta_0$), и пусть ρ_0 (соответственно $\rho_0^\vee$) — полусумма корней из Δ_{0+} (соответственно $\Delta_{0+}^\vee$). Определим полином $D(\lambda)$ на $\mathfrak{h}^*$ формулой

$$D(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_{0+}} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle / \langle \rho_0, \alpha^\vee \rangle.$$

ЛЕММА 11.11. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$p\left(R_0^{-1} \sum_{w \in W_0} \epsilon(w) e(w(\lambda))\right) = D(\lambda) e(\bar{\lambda}).$$

Доказательство. Пусть $\Pi_0 \subset \Delta_{0+}$ — множество простых корней системы корней Δ_0 . Определим гомоморфизм $F : \mathbb{C}[e(-\alpha); \alpha \in \Pi_0] \rightarrow \mathbb{C}[q]$ по правилу $F(e(-\alpha)) = q$ для всех $\alpha \in \Pi_0$. Тогда

$$(11.11.2) \quad p(f) = \lim_{q \rightarrow 1} F(f), \quad F(e(-\alpha)) = q^{\langle \rho_0^\vee, \alpha \rangle}.$$

Но в силу (10.9.3)

$$(11.11.3) \quad F\left(\sum_{w \in W_0} \epsilon(w) e(w(\lambda) - \lambda)\right) = \prod_{\alpha \in \Delta_{0+}} (1 - q^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}).$$

Формулы (11.11.2) и (11.11.3) вместе с (10.8.5) доказывают лемму. $\square$

Теперь мы можем вывести формулу специализации

$$(11.11.4) \quad \prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Delta_0} (1 - e(-\bar{\alpha}))^{\text{mult } \alpha} = \sum_{w \in W_0 \setminus W} \epsilon(w) D(w(\rho)) e(\overline{w(\rho)} - \bar{\rho}).$$

Здесь и далее $W_0 \setminus W$ обозначает множество представителей левых классов смежности W_0 в W . В самом деле, для обе части (10.4.4) на R_0 , мы выводим, что левая часть (11.11.4), с заменой $\bar{\alpha}$ на α , имеет вид

$$R_0^{-1} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho) - \rho) = \sum_{v \in W_0 \setminus W} \epsilon(v) \left(R_0^{-1} \sum_{u \in W_0} \epsilon(u) e(u(v(\rho)) - \rho) \right).$$

Применяя p и используя лемму 11.11, мы получаем (11.11.4).

Теперь мы рассмотрим очень частный случай тождества (11.11.4). Зафиксируем последовательность неотрицательных целых чисел $s = (s_1, \dots, s_n)$, такую, что поддиаграмма $\{i \in S(A) | s_i = 0\} \subset S(A)$ представляет собой объединение диаграмм конечного типа. Зафиксируем элемент $h^s \in \mathfrak{h}$, для которого:

$$\langle \alpha_i, h^s \rangle = s_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Подпространство $\mathbb{C}h^s$ в $\mathfrak{h}$ удовлетворяет условию (11.11.1) в силу предложения 3.12.

Определим $\lambda \in (\mathbb{C}h^s)^*$ условием $\langle \lambda, h^s \rangle = 1$ и положим $q = e(-\lambda)$. Тогда $p(e(-\alpha_i)) = q^{s_i}$ ($i = 1, \dots, n$). Иными словами, p есть не что иное, как специализация типа s . Теперь (11.11.4) можно переписать в виде

$$(11.11.5) \quad \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\dim \mathfrak{g}_j(s)} = \sum_{w \in W^s} \epsilon(w) D_s(w(\rho)) q^{(\rho - w(\rho), h^s)}.$$

Здесь $D_s(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_{s,+}} \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle / \langle \rho_s, \alpha^\vee \rangle$, где $\Delta_{s,+} = \{\alpha \in \Delta_+ | \langle \alpha, h^s \rangle = 0\}$ и ρ_s — полусумма корней из $\Delta_{s,+}$; W^s — система представителей левых смежных классов по подгруппе W_s , порожденной r_α , $\alpha \in \Delta_{s,+}$, в W , так что $W = W_s W^s$; $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j(s)$ есть $\mathbb{Z}$ -градуировка алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$ типа s .

§11.12. В этом параграфе мы обсудим проблему унитаризуемости для осцилляторной алгебры и алгебры Вирасоро (ср. §9.13 и 9.14).

Контравариантная эрмитова форма H на α -модуле (соответственно Vir-модуле) V — это эрмитова форма, относительно которой операторы p_n и q_n сопряжены, а операторы c и $a \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{R}}$ самосопряжены (соответственно d_n и d_{-n} сопряжены, а s самосопряжен). Как и в §11.5, ясно, что α -модуль $R_{a,b,\lambda}$ (соответственно Vir-модуль $L(c, h)$) обладает контравариантной эрмитовой формой, если и только если $a, b \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathfrak{a}_{0\mathbb{R}}^*$ (соответственно $c, h \in \mathbb{R}$), и что эта форма однозначно определяется условием

$$H(1, 1) = 1 \quad (\text{соответственно } H(v_{c,h}, v_{c,h}) = 1).$$

Напомним, что модуль называется унитаризуемым, если H положительно определена.

Из (9.13.3) непосредственно вытекает, что α -модуль $R_{a,b,\lambda}$ унитаризуем, если и только если $a > 0$.

Проблема унитаризуемости для Vir-модулей $L(c, h)$ весьма нетривиальна. Здесь мы ограничимся лишь несколькими простыми замечаниями (которые будут использованы в гл. 12).

Предложение 11.12. а) Если Vir-модуль $L(c, h)$ унитаризуем, то $h \geq 0$ и $c \geq 0$.

б) Если $V = L(0, h)$ унитаризуем, то $h = 0$ и, следовательно, V — тривиальный одномерный Vir-модуль.

с) Пусть V — унитаризуемый Vir-модуль, такой, что d_0 диагонализуем, причем его собственные подпространства конечномерны, а спектр ограничен снизу. Тогда V разлагается в ортогональную прямую сумму унитаризуемых Vir-модулей $L(c, h)$ и спектр оператора d_0 неотрицателен.

Доказательство. Пусть v — вектор старшего веса унитаризуемого Vir-модуля $L(c, h)$. Тогда $H(d_{-1}(v), d_{-1}(v)) = H(v, d_1 d_{-1}(v)) = H(v, 2d_0(v)) + H(v, d_{-1}d_1(v)) = 2h$. Следовательно, унитаризуемость влечет за собой $h \geq 0$. Рассмотрев $H(d_{-j}(v), d_{-j}(v))$ при $j \rightarrow \infty$, аналогично получаем, что $c \geq 0$, и а) доказано.

Чтобы доказать б), рассмотрим подпространство U_n в $L(0, h)$, натянутое на $d_{-2n}(v)$ и $d_{-n}^2(v)$. Так как H положительно определена на U_n , то $\det_{U_n} H \geq 0$, что после простого вычисления дает $4n^3 h^2 (8h - 5n) \geq 0$ для всех целых $n > 0$. Отсюда следует, что $h = 0$.

Для доказательства с) заметим, что если U есть Vir-подмодуль модуля V , то он градуирован относительно разложения на собственные пространства для d_0 (в силу предложения 1.5), следовательно, $V = U \oplus U^\perp$. Поскольку $U^\perp$, ортогональное дополнение к U , очевидно, также является Vir-подмодулем, мы выводим отсюда, что V есть ортогональная прямая сумма унитаризуемых неприводимых Vir-модулей

U_i , таких, что d_0 диагонализирuem на U_i , причем его спектр ограничен снизу. Таким образом, U_i суть модули со старшим весом $L(c, h)$ и положительность спектра оператора d_0 на V следует из а). $\square$

§11.13. В заключение этой главы мы дадим набросок теории обобщенных алгебр Каца — Муди. Это алгебра Ли $\mathfrak{g}(A)$, соответствующая вещественной $n \times n$ -матрице $A = (a_{ij})$, удовлетворяющей условиям (ср. §1.1):

(C1') или $a_{ii} = 2$, или $a_{ii} \leq 0$;

(C2') $a_{ij} \leq 0$, если $i \neq j$, и $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, если $a_{ii} = 2$;

(C3') $a_{ij} = 0$ влечет за собой $a_{ji} = 0$.

Пусть Π^{re} (соответственно Π^{im}) = $\{\alpha_i \in \Pi \mid a_{ii} = 2 \text{ (соответственно } \leq 0)\}$, W — подгруппа группы $GL(\mathfrak{h}^*)$, порожденная фундаментальными отражениями r_i , для которых $\alpha_i \in \Pi^{\text{re}}$ (ср. §3.7), и пусть $C = \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid \langle \alpha_i, h \rangle \geq 0, \text{ если } a_{ii} = 2\}$, $C^{\vee} = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle \geq 0, \text{ если } a_{ii} = 2\}$.

Как и в §3.3,

$$(11.13.1) \quad (\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, (\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0, \quad \text{если } a_{ii} = 2 \text{ и } i \neq j;$$

$$(11.13.2) \quad [e_i, e_j] = 0, [f_i, f_j] = 0, \quad \text{если } a_{ij} = 0.$$

$\mathfrak{h}$ -диагонализирuemый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль V называется интегрируемым, если e_i и f_i локально нильпотентны при $a_{ii} = 2$.

Все результаты гл. 3 остаются справедливыми, с очевидными поправками, для обобщенных алгебр Каца — Муди: следует принимать во внимание лишь те i , для которых $a_{ii} = 2$.

Разбирать случай тех i , когда $a_{ii} \leq 0$, помогает следующая

ЛЕММА 11.13.1. Пусть V — интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль, $a_{ii} \leq 0$, для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ выполняется условие $\langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle < 0$ и $v \in V_{\lambda}$ — ненулевой вектор, для которого $f_i(v) = 0$. Тогда $e_i^j(v) \neq 0$ для всех $j = 1, 2, \dots$

Доказательство. Это следует из формулы (ср. (3.6.1)):

$$f_i e_i^j(v) = -j(\langle \lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle + \frac{1}{2}(j-1)a_{ii})e_i^{j-1}(v).$$

$\square$

СЛЕДСТВИЕ 11.13.1. Если $\alpha_{ii} \leq 0$, $\alpha \in \Delta_+ \setminus \{\alpha_i\}$ и $\text{supp}(\alpha + \alpha_i)$ связан, то $\alpha + j\alpha_i \in \Delta_+$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Мы можем считать, что $\alpha - \alpha_i \notin \Delta_+$. Заметим, что $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0$ для всех j . Так как $\text{supp}(\alpha + \alpha_i)$ связан, то $\langle \alpha, \alpha_i \rangle < 0$ и применяем лемму 11.13.1. $\square$

Все результаты гл. 4 справедливы для обобщенных алгебр Каца — Муди, за исключением того, что существует одна дополнительная аффинная матрица — нулевая 1×1 -матрица (ср. §2.9).

Чтобы описать множество корней Δ , положим

$$\Delta^\pi = W(\Pi^\pi), \quad \Delta^{im} = \Delta \setminus \Delta^\pi,$$

$$K = \{\alpha \in Q_+ \mid \alpha \in -C^\vee \text{ и } \text{supp } \alpha \text{ связан}\} \setminus \bigcup_{j \geq 2} j\Pi^{im}.$$

Тогда

$$(11.13.3) \quad \Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} w(K).$$

Доказательство то же самое, что и для теоремы 5.4, с использованием следствия 11.13.1. Все остальные результаты гл. 5 справедливы для обобщенных алгебр Каца — Муди с очевидными поправками.

В дальнейшем в этом параграфе мы будем считать, что $\mathfrak{g}(A)$ — обобщенная алгебра Каца — Муди с симметризуемой матрицей Картана.

ТЕОРЕМА 11.13.1. $\mathfrak{g}(A)$ есть алгебра Ли с образующими e_i, f_i ($i = 1, \dots, n$) и определяющими соотношениями (1.2.1), (11.13.1) и (11.13.2).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}_1(A)$ — факторалгебра алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ по идеалу, порожденному всеми левыми частями соотношений (11.13.1) и (11.13.2), и пусть Δ_1 — множество корней алгебры Ли $\mathfrak{g}_1(A)$. Рассуждения, доказывающие лемму 1.6, показывают, что носитель любого элемента $\alpha \in \Delta_1$ связан, и, поскольку Δ_1 является W -инвариантным, мы получаем, используя (11.13.3), что $\Delta_1 = \Delta$. Теперь теорема следует из предложения 9.11 и следующей леммы 11.13.2b). $\square$

ЛЕММА 11.13.2. а) Пусть $\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$, причем k_i — положительные целые числа и $\alpha \in -C^\vee$. Тогда $2(\rho \mid \alpha) \geq (\alpha \mid \alpha)$, причем равенство выполняется, если и только если $(\alpha_i \mid \alpha_i) \leq 0$ и $(\alpha_i \mid \alpha_j) = 0$ при $i \neq j$ и $i, j \in I$ и $(\alpha_i \mid \alpha_i) = 0$ при $k_i > 1$.

б) Имеет место неравенство (11.6.1).

Доказательство. $2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha) = \sum_i k_i(\alpha_i|\alpha_i - \alpha)$. Если $\alpha_i \in \Pi^e$, то $(\alpha_i|\alpha_i) > 0$ и $(\alpha_i|-\alpha) \geq 0$; поэтому $k_i(\alpha_i|\alpha_i - \alpha) > 0$. Если $\alpha_i \in \Pi^{im}$, то $k_i(\alpha_i|\alpha_i - \alpha) > 0$, поскольку $\alpha - \alpha_i \in Q_+$. Следовательно, $2(\rho|\alpha) - (\alpha|\alpha) \geq 0$, и если равенство выполнено, то все α_i при $i \in I$ лежат в Π^{im} и удовлетворяют условию $(\alpha_i|\alpha_i - \alpha) = 0$. Это завершает доказательство а).

Для доказательства б) заметим, что мы можем строго уменьшать $(\rho|\alpha)$ с помощью фундаментальных отражений, оставляя α положительным, до тех пор пока либо $\alpha \in \Pi$, либо $\alpha \in -C^V$. Во втором случае $\alpha \in \Pi^{im}$ в силу а), поскольку $\text{supp } \alpha$ связан. $\square$

Из леммы 11.13.2б) видно, что теорема 11.7а) справедлива для обобщенных симметризуемых алгебр Каца — Муди. Оказывается, что они характеризуются этим свойством. Более точно, пусть A — симметризуемая матрица, возможно бесконечная, но счетная, удовлетворяющая $(C1')$ – $(C3')$, и $g'(A)$ — соответствующая алгебра, т. е. фактор-алгебра алгебры Ли, определенной в замечании 1.5, по соотношениям (11.13.1) и (11.13.2). Пусть $\mathfrak{c}$ ($\subset \mathfrak{h}'$) — центр $g'(A)$ и $\mathfrak{g}$ — центральное расширение $g'(A)/\mathfrak{c}$ (явно описанное в работе Borcherds [1989A]). Определим $\mathbb{Z}$ -градуировку алгебры Ли $\mathfrak{g}$, полагая $\deg(\text{центр}) = 0$, $\deg e_i = -\deg f_i = s_i$, где s_i есть набор положительных целых чисел с конечным числом повторений. Тогда $\mathfrak{g}$ обладает следующими свойствами:

(g1) $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$; есть $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра Ли, $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0$ и $\dim \mathfrak{g}_j < \infty$;

(g2) $\mathfrak{g}$ обладает антилинейной инволюцией ω , совпадающей с -1 на $\mathfrak{g}_0$, для которой $\omega(\mathfrak{g}_m) = \mathfrak{g}_{-m}$;

(g3) $\mathfrak{g}$ обладает инвариантной билинейной формой $(\cdot | \cdot)$, такой, что $(\mathfrak{g}_i | \mathfrak{g}_j) = 0$, если $i + j \neq 0$;

(g4) эрмитова форма $(x | y)_0 = -(\omega(x) | y)$ положительно определена на $\mathfrak{g}_j$, если $j \neq 0$.

ТЕОРЕМА 11.13.2. Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условиям (g1)–(g4), может быть получена из обобщенной алгебры Каца — Муди $g'(A)$ описанным выше способом.

Доказательство. Рассуждения, доказывающие предложение 9.12b), показывают, что $\mathfrak{g}$ может быть получена из некоторой алгебры $g'(B)$, как описано выше, где B — симметрическая матрица. Из доказательства теоремы 11.7а) следует, что выполнено неравенство (11.6.1). Отсюда вытекает, что DB удовлетворяет условиям $(C1')$ – $(C3')$ для обратимой диагональной матрицы D (подробности см. в статье Borcherds [1988]). $\square$

Теперь мы займемся изучением $\mathfrak{g}(\Lambda)$ -модулей $L(\Lambda)$, где Λ удовлетворяет условию

$$(11.13.4) \quad \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_+, \text{ если } a_{ii} = 2, \langle \Lambda, \alpha_i^\vee \rangle \geq 0; \text{ для всех } i.$$

Обозначим через P_+ множество таких Λ .

ЛЕММА 11.13.3. Предложение 11.4 справедливо для обобщенной алгебры Каца — Мули.

Доказательство. Доказательство части а) предложения 11.4 для обобщенной алгебры Каца — Мули не требует никаких изменений. Часть б) доказывается иначе. Пусть $\lambda \in P(\Lambda)$. Ясно, что $(\lambda | \alpha_i) \geq 0$ для всех $\alpha_i \in \Pi^{im}$. Мы можем действовать на λ фундаментальными отражениями, каждый раз строго увеличивая $|\lambda + \rho|^2$; до тех пор пока $\lambda \in C^\vee$, так что мы можем считать, что $(\lambda | \alpha_i) \geq 0$ для всех $\alpha_i \in \Pi^\vee$. Итак,

$$(\lambda | \alpha_i) \geq 0 \text{ для всех } \alpha_i \in \Pi.$$

Если $\lambda \neq \Lambda$, то пусть $i \in \text{supp}(\Lambda - \lambda)$. Если $\alpha_i \in \Pi^\vee$, то, разумеется, $(\alpha_i | \Lambda + \lambda + 2\rho) > 0$. Если $\alpha_i \in \Pi^{im}$, то $(\alpha_i | \Lambda + \lambda + 2\rho) = (\alpha_i | \Lambda) + (\alpha_i | \lambda + \alpha_i) \geq 0$, поскольку $(\Lambda | \alpha_i) \geq 0$ и $\lambda + \alpha_i = \Lambda - \beta$, где $\beta \in Q_+$. Следовательно, $(\Lambda - \lambda | \Lambda + \lambda + 2\rho) \geq 0$, что эквивалентно $|\Lambda + \rho|^2 - |\lambda + \rho|^2 \geq 0$. Равенство влечет за собой $(\Lambda | \alpha_i) = 0$ для любого $i \in \text{supp}(\Lambda - \lambda)$, т. е. $\Lambda = \lambda$. $\square$

В силу леммы 11.13.3 ясно, что теорема 11.7б) справедлива для обобщенных симметризуемых алгебр Каца — Мули.

Наконец, мы получим формулу для характера.

ТЕОРЕМА 11.13.3. Пусть $\Lambda \in P_+$ и $S_\Lambda = e(\Lambda + \rho) \sum_j \varepsilon(s) e(-s)$, где s пробегает все суммы элементов из Π^{im} и $\varepsilon(s) = (-1)^m$, если s есть сумма m различных попарно перпендикулярных элементов, перпендикулярных Λ , и $\varepsilon(s) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\text{ch } L(\Lambda) = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) w(S_\Lambda) / e(\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}.$$

Доказательство. Используя рассуждения §10.4, мы получаем, что

$$(11.13.5) \quad e(\rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} \text{ch } L(\Lambda) = \sum_{\lambda} c_\lambda e(\lambda + \rho),$$

где обе части антиинвариантны относительно W , c_λ — целые числа и $\lambda \in \Lambda - Q_+$ удовлетворяет условию $|\lambda + \rho|^2 = |\Lambda + \rho|^2$.

Пусть S_Λ — сумма членов правой части (11.13.5), для которых $\lambda + \rho \in C^V$. Если $\lambda + \rho \notin \text{Int } C^V$, то $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e(w(\lambda + \rho)) = 0$; следовательно, правая часть (11.13.5) равна $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) w(S_\Lambda)$, и остается вычислить S_Λ .

Если $e(\lambda + \rho)$ входит в S_Λ , запишем $\lambda = \Lambda - \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$, где k_i — положительные целые числа. Тогда из равенства $|\lambda + \rho|^2 = |\Lambda + \rho|^2$ вытекает, что

$$\sum_{i \in I} k_i (\Lambda | \alpha_i) + \sum_{i \in I} k_i (\lambda + 2\rho | \alpha_i) = 0.$$

Но $(\Lambda | \alpha_i) \geq 0$ и $(\lambda + 2\rho | \alpha_i) \geq 0$ (второе неравенство доказывается таким же способом, как в лемме 11.13.3). Отсюда следует, что

$$(11.13.6) \quad (\Lambda | \alpha_i) = 0 \quad \text{и} \quad (\lambda + 2\rho | \alpha_i) = 0.$$

Так как $(\lambda + \rho | \alpha_i) \geq 0$ и $(\rho | \alpha_i) > 0$ для $\alpha_i \in \Pi^m$, то $\alpha_i \in \Pi^{im}$ для $i \in I$. Второе равенство в (11.13.6) можно записать в виде

$$\sum_{i \in I} (k_i - \delta_{ij}) (\alpha_i | \alpha_j) = 0, \quad j \in I.$$

Следовательно, $(\alpha_i | \alpha_j) = 0$ для $i, j \in I$, за исключением случая, когда $i = j$ и $k_i = 1$.

Если $e(\Lambda - \sum_i k_i \alpha_i)$ входит в $\text{ch } L(\Lambda)$, то $(\Lambda | \alpha_i) \neq 0$ для некоторого i ; следовательно, единственными числами в правой части (11.13.5), дающими вклад в S_Λ , являются те, которые получаются из $e(\Lambda + \rho) \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}$. Пусть $(\alpha_i | \alpha_j) = 0$ для $i \neq j$; тогда

коэффициент при $e(\Lambda + \rho - \sum k_i \alpha_i)$ в этом выражении равен 0, если некоторые из k_i больше 1, и $(-1)^{\sum k_i}$ в противном случае. $\square$

Поскольку $\text{ch } L(0) = 1$, мы получаем

Следствие 11.13.2. Пусть $S = e(\rho) \sum_s \varepsilon(s) e(s)$, где s пробегает все суммы элементов из Π^{im} и $\varepsilon(s) = (-1)^m$, если s есть сумма m различных попарно перпендикулярных элементов, и $\varepsilon(s) = 0$ в противном случае. Тогда

$$\prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} = e^{-\rho} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) w(S).$$

$\square$

§11.14. Упражнения

11.1. Покажите, что если $\Lambda \in P_+$ и $\lambda \in P(\Lambda) \setminus \{\Lambda\}$, то

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w) \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda + \rho - w(\rho)) = 0.$$

(Эта формула позволяет вычислять $\text{mult}_{L(\Lambda)}$ индукцией по $\text{ht}(\Lambda - \lambda)$.)

[Перепишите (10.4.5), умножая на знаменатель, в виде

$$\sum_{\lambda} e(\lambda) \sum_{w \in W} \epsilon(w) \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda + \rho - w(\rho)) = \sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\Lambda + \rho) - \rho)$$

и заметьте, что в силу предложения 11.4 равенство $\lambda + \rho = w(\Lambda + \rho)$ влечет за собой $\lambda = \Lambda$.]

11.2. Если A — матрица конечного, аффинного или строго гиперболического типа и $\Lambda \in P_+$, то каждый доминантный вес $\lambda \leq \Lambda$ невырожден относительно Λ .

11.3. Покажите, что если $\Lambda \in P_+$, то $P(\Lambda) \cap P_+ = \{\lambda \in P \mid \lambda \geq w(\lambda) \text{ для каждого } w \in W \text{ и } \lambda \text{ невырожден относительно } \Lambda\}$.

11.4. Покажите, что если $\Lambda \in P_+$, то множество асимптотических лучей для множества лучей, проходящих через $\{\Lambda - \mu \mid \mu \in P(\Lambda)\}$, лежит в $\bar{Z}$.

[Используйте упр. 3.12 и лемму 5.8.]

11.5. Пусть $\Lambda, \Lambda', \dots \in P_+$. Покажите, что $U(\mathfrak{g}(A))$ -подмодуль, порожденный $v_{\Lambda} \otimes v_{\Lambda'} \otimes \dots$ в $\mathfrak{g}(A)$ -модуле $V = L(\Lambda) \otimes L(\Lambda') \otimes \dots$, совпадает с собственным подпространством оператора Ω , соответствующим собственному значению $c_{\Lambda+\Lambda'+\dots}$, где $c_M := |M + \rho|^2 - |\rho|^2$. Кроме того, $c_{\Lambda+\Lambda'+\dots} > c_M$ для каждого M , такого, что $L(M) \subset V$.

11.6. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — бесконечномерная алгебра Каца — Мули и $\Lambda, M \in P_+$, $\Lambda|_{\mathfrak{h}'} \neq 0$. Покажите, что $L(\Lambda) \otimes L(M) \not\subset L(0)$.

11.7. Пусть $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j$ есть $\mathbb{Z}$ -градуировка типа $(\delta_{1,i}, \dots, \delta_{n,i})$ симметризуемой алгебры Каца — Мули $\mathfrak{g}(A)$. Докажите, что $\mathfrak{g}_0$ -модуль $\mathfrak{g}_{-1}$ изоморфен $\mathfrak{g}_0$ -модулю $L(-\alpha_i)$.

[См. доказательство предложения 8.6с.)]

11.8. Пусть A — симметризуемая обобщенная матрица Картана и $\alpha \in \Delta^{\text{im}}$. Покажите, что существует

$$\psi(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \text{mult } n\alpha}{n}.$$

Покажите, что $\psi(\alpha) = 0$, если и только если $(\alpha|\alpha) = 0$, и что $\psi(\alpha) > 0.48$, если $(\alpha|\alpha) \neq 0$. Покажите, что $Y \subset \text{Int } X_{\mathbb{C}}$ совпадает с $\text{Int } X_{\mathbb{C}}$, если и только если A есть прямая сумма матриц конечного и аффинного типов.

11.9. Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^0$ — алгебры Каца — Мули с симметризуемыми матрицами Картана. Пусть $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^0$ — их подалгебры Картана, W и W^0 — их группы Вейля и т. д. Пусть $\pi: \mathfrak{g}^0 \rightarrow \mathfrak{g}$ — гомоморфизм, такой, что

$$\pi(\mathfrak{h}^0) \subset \mathfrak{h}, \quad \pi(\text{Int } X_C^0) \cap \text{Int } X_C \neq \emptyset, \quad (\pm\Pi) \cap \pi^*(Z) = \emptyset.$$

Пусть, кроме того, $\Lambda \in P_+$. Покажите, что $\mathfrak{g}$ -модуль $L(\Lambda)$ изоморфен как $\mathfrak{g}^0$ -модуль прямой сумме интегрируемых модулей со старшим весом $L^0(\mu)$ с конечными кратностями, которые мы обозначим через $(\Lambda: \mu)$. Для $\mu = w(\mu' + \rho^0) - \rho^0$, где $w \in W^0$ и $\mu' \in P_+^0$, положим $(\Lambda: \mu) = \epsilon(w)(\Lambda: \mu')$; для всех остальных $\mu \in \mathfrak{h}^{0*}$ положим $(\Lambda: \mu) = 0$. Определим Δ_0 , W_0 , ρ_0 , $D(\lambda)$ и т. д. для $\mathfrak{h}^0$, как в §11.11. Покажите, что

$$\begin{aligned} & \pi^* \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+ \setminus \Delta_{0+}} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha} \right) \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^{0*}} (\Lambda: \mu) e(\mu) \\ &= \sum_{w \in W_0 \setminus W} \epsilon(w) D(w(\Lambda + \rho)) e(\pi^*(w(\Lambda + \rho) - \rho)) \prod_{\alpha \in \Delta_+^0} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}. \end{aligned}$$

11.10. Пусть $\mathfrak{m}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}_-$ (соответственно $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}_+$) имеет конечную коразмерность в $\mathfrak{g}(A)$, и пусть $\Lambda \in P_+$. Покажите, что $\dim\{v \in L(\Lambda) | \mathfrak{m}(v) = 0\} < \infty$ (соответственно $\dim L(\Lambda)/\mathfrak{m}L(\Lambda) < \infty$).

[Пусть $U_+ = \langle \exp t a e_i | t \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n \rangle$. Покажите, что $\bigcup_i U_+(e_i)$ порождает $\mathfrak{n}_+$.]

11.11. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — симметризуемая алгебра Каца — Мули. Положим

$$R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}, \quad F = -\log R.$$

Зафиксируем ортонормированный базис $\{u_i\}$ в $\mathfrak{h}$ и определим дифференцирования ∂_i алгебры $\mathcal{E}$ по правилу $\partial_i(e(\lambda)) = \langle \lambda, u_i \rangle e(\lambda)$. Покажите, что

$$(\partial_i F)^2 - \partial_i^2 F = R^{-1} \partial_i^2 R, \quad \sum_i \partial_i^2 R = (\rho | \rho) R.$$

Выведите отсюда, что

$$\sum_i ((\partial_i F)^2 - \partial_i^2 F) = (\rho | \rho).$$

11.12. Для $\beta \in Q_+$ положим $c_\beta = \sum_{n \geq 1} n^{-1} \text{mult}(\beta/n)$. Используя упр.

11.11, покажите, что в предположениях этого упражнения имеет место соотношение

$$(\beta|\beta - 2\rho)c_\beta = \sum_{\substack{\beta', \beta'' \in Q_+ \\ \beta' + \beta'' = \beta}} (\beta'|\beta'')c_{\beta'}c_{\beta''}.$$

(Эта формула позволяет нам вычислять кратности корней индукцией по высоте благодаря (11.6.1). Заметим, что если $\beta \in K$, то в силу упр. 5.20 все слагаемые в правой части неположительны.)

11.13. Рассмотрим следующую обобщенную матрицу Картана порядка m , где $m \geq 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Положим $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m \in \Delta(A)$. Покажите, что

$$\text{mult } \beta = 2^{m-2} - (m-1).$$

11.14. Пусть $A: V_1 \rightarrow V_2$ и $B: V_2 \rightarrow V_1$ — линейные отображения конечномерных пространств. Покажите, что $\text{tr } AB = \text{tr } BA$. Пусть V — модуль из категории $\mathcal{O}$ над алгеброй Каца — Мули с симметризуемой матрицей Картана. Покажите, что для $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ и $e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, таких, что $(e_\alpha|e_{-\alpha}) = 1$,

$$\text{tr}_{V_\lambda} e_{-\alpha} e_\alpha = \sum_{j \geq 1} (\lambda + j\alpha|\alpha) \dim V_{\lambda+j\alpha}.$$

Пусть V — модуль со старшим весом Λ . Выведите следующее обобщение формулы Фрейденшталя:

$$(|\Lambda + \rho|^2 - |\lambda + \rho|^2) \dim V_\lambda = 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} \sum_{j \geq 1} (\text{mult } \alpha)(\lambda + j\alpha|\alpha) \dim V_{\lambda+j\alpha}.$$

11.15. Пусть

$$V = \bigoplus_{i=1}^n L(\Lambda_i),$$

где $\Lambda_i \in P_+$ удовлетворяет условию $\langle \Lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$ ($j = 1, \dots, n$). Покажите, что группа, соответствующая $\mathfrak{g}(A)$ -модулю V , является центральным расширением каждой группы G^n , построенной в замечании 3.8.

11.16. Покажите, что если модуль $L(\Lambda)$ над обобщенной алгеброй Каца — Муди унитаризуем, то $\Lambda \in P_+$.

11.17. Пусть $\Lambda, \Lambda' \in P_+$ и $\sigma \in W$ обладают следующим свойством: $M := \sigma(\Lambda) + \Lambda' \in P_+$. Покажите, что

$$\text{mult}_{L(\Lambda)}(M + \rho - w(\Lambda' + \rho)) = \delta_{1, w}.$$

Проверьте, что кратность $L(M)$ в $L(\Lambda) \otimes L(\Lambda')$ равна 1.

[Используйте предложение 11.4 и явную формулу для кратности: кратность $L(M)$ в $L(\Lambda) \otimes L(\Lambda')$ равна

$$\sum_{w \in W} \varepsilon(w) \text{mult}_{L(\Lambda)}(M + \rho - w(\Lambda' + \rho)).]$$

11.18. Используя упр. 9.17, покажите, что Vir-модуль $L(c, h)$ при $c \geq 1$ и $h \geq (c - 1)/24$ унитаризуем.

11.19. Покажите, что множество неподвижных точек диаграммного автоморфизма обобщенной алгебры Каца — Муди является центральным расширением обобщенной алгебры Каца — Муди.

11.20. Докажите аналог следствия 10.4 для обобщенных алгебр Каца — Муди.

11.21. Пусть $g(A)$ — обобщенная алгебра Каца — Муди. Покажите, что $\Delta_+ = \Delta_+(A)$ есть подмножество в $Q_+ \setminus \{0\}$, определенное следующими свойствами:

- (i) $\alpha_i \in \Delta_+$, $2\alpha_i \notin \Delta_+$, $i = 1, \dots, n$;
- (ii) если $\alpha \in \Delta_+$, $\alpha_i \in \Pi^{im}$ и $\text{supp}(\alpha + \alpha_i)$ связан, то $\alpha + \alpha_i \in \Delta_+$;
- (iii) если $\alpha \in \Delta_+$, $\alpha_i \in \Pi^e$ и $\alpha \neq \alpha_i$, то $[\alpha, r_i(\alpha)] \cap Q_+ \subset \Delta_+$;
- (iv) если $\alpha \in \Delta_+$, то $\text{supp } \alpha$ связан.

11.22. Пусть $g'(A)$ — обобщенная матрица Каца — Муди. Покажите, что $U(g'(A))$ -модуль

$$\bigoplus_{\Lambda \in P_+} L(\Lambda)$$

точен. [Используйте упр. 11.20 для доказательства того, что $U(n_-)$ действует точно. Тогда $0 < H(u_- v_\Lambda, u_- v_\Lambda) = \langle \omega_0(u_-) u_- v_\Lambda \rangle$ для некоторого $\Lambda \in P_+$, зависящего от $u_- \in U(n_-)$. Следовательно, $U(n_+)$ также действует точно.]

§11.15. Библиографические замечания и комментарии

Предложение 11.2 было сформулировано без доказательства в работе Кас — Peterson [1984A]. Предложения 11.3 и 11.4 принадлежат Кацу и Питерсону (Кас — Peterson [1984A]). Конечно, предложение 11.4 в конечном случае — стандартный факт. Предложение 11.3a) для конечномерного случая принадлежит Стейнбергу (см. Bourbaki [1975]). По-видимому, предложение 11.3b) не было раньше известно даже в конечномерном случае.

Лемма 11.6 и теорема положительности 11.7 принадлежат Кацу и Питерсону (Кас — Peterson [1984B]). Доказательство теоремы 11.7b) представляет собой прямое обобщение доказательства Гарланда (Garland [1978]) для аффинного случая (как только установлена справедливость теоремы 11.7a). Теорема 11.7 важна, поскольку она позволяет применять мощные методы гильбертовых пространств, см., например, Goodman — Wallach [1984A], Кас — Peterson [1984B]. (Заметим, что гильбертово пополнение $L(\Lambda)$ есть пространство унитарного представления «компактной формы» группы, соответствующей алгебре Каца — Муди.) В работах Jakobsen — Кас [1985, 1989] классифицированы унитаризуемые модули со старшим весом над аффинными алгебрами для всех естественных выборов антилинейных инволюций и «подалгебр Бореля»; оказалось, что имеется по существу только одно новое семейство унитаризуемых представлений со старшим весом, а именно семейство представлений алгебры Ли отображений окружности с положительно-конечной мерой в $su(n, 1)$. Имеется интересная связь этих представлений при $n = 1$ с представлениями, построенными в упр. 9.20 (ср. Bernard — Felder [1989], Feigin — Frenkel [1989B]).

Материал §11.9–11.11 взят из статьи Кас — Peterson [1984A]. Доказательство предложения 11.12b) взято из работы Goddard — Olive [1986]. Большая часть §11.13 (касающаяся обобщенных алгебр Каца — Муди) заимствована из статьи Borcherds [1988 A]. Новыми являются описание системы корней и теорема 11.13.1 (что заполняет небольшой пробел в этой статье).

Упражнение 11.1 в конечномерном случае принадлежит Рака. Упражнения 11.4, 11.8 и 11.9 взяты из работы Кас — Peterson [1984A], упр. 11.5 и 11.6 — из работы Кас — Peterson [1983]. Упражнение 11.10 принадлежит Питерсону и Кацу (Peterson — Кас [1983]). Это свойство имеет важные приложения к конформной теории поля. Аналогичное свойство «допустимости» играет значительную роль в теории представлений p -адических групп.

Упражнения 11.11, 11.12 и 11.14 принадлежат Питерсону (Peterson [1982, 1983]). Приведенные здесь доказательства были сообщены мне Питерсоном. Эти рекуррентные формулы для кратности очень удобны для вычислений корневых и весовых кратностей. Другая формула для корневых кратностей, которая также является формальным след-

ствием тождества (10.4.4), была найдена раньше Берманом и Муди (Bergman — Moody [1979]).

Упражнение 11.13 взято из статьи Кас [1983A]. Оно дает некоторое нетривиальное свидетельство в пользу гипотезы, упомянутой в §5.13. Упражнение 11.15 взято из статьи Peterson — Кас [1983], упр. 11.17 — из статьи Кас — Wakimoto [1986]. Это частный случай гипотезы Партасарати — Рао — Варадараджана, доказанной недавно Кумаром и Матье (Kumar [1988], Mathieu [1988]). Упражнение 11.19 взято из работы Borchers [1988 A]. Множество корней, о которых идет речь в упр. 11.21, имеют отношение к колчанам с одновершинными петлями (Кас [1983]).

Кратности всех корней для алгебры Каца — Муди неопределенного типа не известны явно ни в одном случае (в некоторых случаях точные формулы известны для корней небольшого уровня, см., например, Feingold — Frenkel [1983], Кас — Moody — Wakimoto [1988]). Тем не менее Борчердсу (Borchers [1989 B, C]) удалось найти корневые кратности некоторых обобщенных алгебр Каца — Муди, тесно связанных с простой группой Монстром, и использовать это для установления свойств модулярности Монстра.

Ниже приведены вычисления корневых кратностей, сделанные на компьютере Р. Гроссом с использованием рекуррентной формулы Питерсона. Здесь $(k_1, k_2, \dots)$ обозначает корень $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots$. Мы можем считать, что $\alpha \in -C^V$ и что

$$(\alpha | \alpha) := \frac{1}{2} \sum a_{ij} k_i k_j \neq 0.$$

Если A — симметрическая матрица ранга 2, мы можем предполагать, что $k_1 \geq k_2$, поскольку в этом случае $\text{mult}(k_1, k_2) = \text{mult}(k_2, k_1)$. В таблице H_2 (соответственно H_3) перечислены все такие корни для $k_1 \leq 21$ (соответственно $k_1 \leq 14$). Часть таблицы H_3 была вычислена в работе Feingold — Frenkel [1983].

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ТАБЛИЦА H_2

α	$-(\alpha \alpha)$	$\text{mult } \alpha$	α	$-(\alpha \alpha)$	$\text{mult } \alpha$
(1, 1)	1	1	(15, 11)	149	23750
(2, 2)	4	1	(16, 11)	151	25923
(3, 2)	5	2	(13, 12)	155	30865
(3, 3)	9	3	(14, 12)	164	45271
(4, 3)	11	4	(13, 13)	169	55853
(4, 4)	16	6	(15, 12)	171	60654
(5, 4)	19	9	(16, 12)	176	74434
(6, 4)	20	9	(17, 12)	179	84121
(5, 5)	25	16	(18, 12)	180	87547
(6, 5)	29	23	(14, 13)	181	91257
(7, 5)	31	27	(15, 13)	191	135861
(6, 6)	36	39	(14, 14)	196	165173
(7, 6)	41	60	(16, 13)	199	185526
(8, 6)	44	73	(17, 13)	205	233487
(9, 6)	45	80	(15, 14)	209	271860
(7, 7)	49	107	(18, 13)	209	271702
(8, 7)	55	162	(19, 13)	211	292947
(9, 7)	59	211	(16, 14)	220	409725
(10, 7)	61	240	(15, 15)	225	492420
(8, 8)	64	288	(17, 14)	229	569358
(9, 8)	71	449	(18, 14)	236	732180
(10, 8)	76	600	(16, 15)	239	815214
(11, 8)	79	720	(19, 14)	241	874650
(12, 8)	80	758	(20, 14)	244	972117
(9, 9)	81	808	(21, 14)	245	1006994
(10, 9)	89	1267	(17, 15)	251	1242438
(11, 9)	95	1754	(16, 16)	256	1476973
(12, 9)	99	2167	(18, 15)	261	1752719
(10, 10)	100	2278	(19, 15)	269	2298090
(13, 9)	101	2407	(17, 16)	271	2458684
(11, 10)	109	3630	(20, 15)	275	2808958
(12, 10)	116	5130	(21, 15)	279	3207547
(11, 11)	121	6559	(22, 15)	281	3426450
(13, 10)	121	6555	(18, 16)	284	3783712
(14, 10)	124	7554	(17, 17)	289	4456255
(15, 10)	125	7936	(19, 16)	295	5411212
(12, 11)	131	10531	(20, 16)	304	7217527
(13, 11)	139	15204	(18, 17)	305	7453376
(12, 12)	144	19022	(21, 16)	311	9005900
(14, 11)	145	19902			

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ТАБЛИЦА H_3

α	$-(\alpha \alpha)$	$\text{mult } \alpha$	α	$-(\alpha \alpha)$	$\text{mult } \alpha$	α	$-(\alpha \alpha)$	$\text{mult } \alpha$
(2, 2, 1)	1	2	(8, 8, 4)	16	297	(13, 13, 3)	30	6818
(3, 3, 1)	2	3	(10, 10, 2)	16	297	(10, 12, 5)	31	8326
(3, 4, 2)	3	5	(8, 9, 3)	17	385	(11, 12, 4)	31	8322
(4, 4, 1)	3	5	(10, 11, 2)	17	385	(10, 12, 6)	32	10111
(4, 4, 2)	4	7	(9, 9, 3)	18	490	(11, 13, 4)	32	10108
(5, 5, 1)	4	7	(11, 11, 2)	18	490	(12, 12, 4)	32	10107
(4, 5, 2)	5	11	(8, 9, 4)	19	627	(13, 14, 3)	32	10096
(6, 6, 1)	5	11	(11, 12, 2)	19	626	(10, 13, 6)	33	12266
(5, 5, 2)	6	15	(8, 10, 4)	20	792	(14, 14, 3)	33	12246
(7, 7, 1)	6	15	(9, 9, 4)	20	792	(11, 12, 5)	34	14821
(5, 6, 2)	7	22	(9, 10, 3)	20	792	(11, 12, 6)	35	17892
(8, 8, 1)	7	22	(12, 12, 2)	20	791	(12, 15, 5)	35	17893
(5, 6, 3)	8	30	(8, 10, 5)	21	1002	(12, 13, 4)	35	17886
(6, 6, 2)	8	30	(10, 10, 3)	21	1002	(14, 15, 3)	35	17861
(9, 9, 1)	8	30	(12, 13, 2)	21	1001	(11, 13, 5)	36	21525
(6, 6, 3)	9	42	(13, 13, 2)	22	1253	(12, 12, 6)	36	21526
(6, 7, 2)	9	42	(9, 10, 4)	23	1574	(12, 14, 4)	36	21514
(10, 10, 1)	9	42	(10, 11, 3)	23	1574	(13, 13, 4)	36	21515
(7, 7, 2)	10	56	(13, 14, 2)	23	1571	(11, 13, 6)	38	30993
(11, 11, 1)	10	56	(9, 10, 5)	24	1957	(11, 14, 6)	39	37083
(6, 7, 3)	11	77	(9, 11, 4)	24	1957	(12, 13, 5)	39	37080
(7, 8, 2)	11	77	(10, 10, 4)	24	1957	(13, 14, 4)	39	37053
(12, 12, 1)	11	77	(11, 11, 3)	24	1956	(11, 14, 7)	40	44258
(6, 8, 4)	12	101	(14, 14, 2)	24	1953	(13, 13, 5)	40	44247
(7, 7, 3)	12	101	(10, 10, 5)	25	2434	(14, 14, 4)	40	44217
(8, 8, 2)	12	101	(14, 15, 2)	25	2429	(13, 15, 4)	40	44219
(13, 13, 1)	12	101	(9, 11, 5)	26	3007	(12, 13, 6)	41	52753
(8, 9, 2)	13	135	(11, 12, 3)	26	3005	(12, 14, 5)	41	52741
(14, 14, 1)	13	135	(9, 12, 6)	27	3712	(13, 13, 6)	42	62719
(7, 8, 3)	14	176	(10, 11, 4)	27	3713	(12, 14, 6)	44	88255
(9, 9, 2)	14	176	(12, 12, 3)	27	3710	(13, 14, 5)	44	88230
(7, 8, 4)	15	231	(10, 12, 4)	28	4557	(12, 14, 7)	45	104456
(8, 8, 3)	15	231	(11, 11, 4)	28	4557	(14, 14, 5)	45	104415
(9, 10, 2)	15	231	(10, 11, 5)	29	5593	(12, 15, 6)	45	104450
(7, 9, 4)	16	297	(12, 13, 3)	29	5587	(13, 14, 6)	47	145513
			(11, 11, 5)	30	6826	(13, 14, 7)	48	171355
						(14, 14, 6)	48	171337
						(14, 14, 7)	49	201527

Глава 12. Интегрируемые модули со старшим весом над аффинными алгебрами.

Приложение к тождествам для η -функции. Операторы Сугавары и функции ветвления

§12.0. В последних трех главах мы развивали теорию представлений произвольных алгебр Каца — Мули. Далее мы будем заниматься частным случаем аффинных алгебр.

Мы покажем, что тождество для знаменателя (10.4.4) для аффинных алгебр есть не что иное, как знаменитые тождества Макдональда. Исторически это было первым приложением теории представлений алгебр Каца — Мули. Основная идея очень проста: интересное тождество получается вычислением характера интегрируемого представления двумя различными способами и приравниванием результатов. В частности, тождества Макдональда выводятся с помощью тривиального представления. Кроме того, мы покажем, что специализации (11.11.5) тождества для знаменателя превращаются в тождества для q -рядов модулярных форм, причем простейшими являются тождества Макдональда для степеней η -функции Дедекинда.

Мы более подробно изучим структуру системы весов интегрируемого модуля со старшим весом над аффинной алгеброй. Это позволит нам записать его характер в различных формах и получить важное тождество для тета-функций. Это тождество включает в себя классические тета-функции и некоторые модулярные формы, называемые струнными функциями, которые являются по существу производящими функциями для кратностей весов в «струнах». Кроме того, мы рассмотрим функции ветвления, являющиеся обобщением струнных функций, когда вместо подалгебры Картана рассматривается общая редуктивная подалгебра.

Наконец, мы введем один из наиболее мощных инструментов конформной теории поля, конструкцию Сугавары и косет-конструкцию в связи с изучением общих правил ветвления.

В следующей главе все это будет соединено с теорией модулярных форм и тета-функций.

§12.1. Пусть $g(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ (здесь $X = A, B, C, D, E, F$ или G ; $r = 1, 2$ или 3 ; N как в таблице Aff r). Мы

сохраним обозначения гл. 6. Поскольку кратности корней $g(A)$ известны (из следствия 8.3), мы можем явно выписать тождество для знаменателя (10.4.4).

Вспомним, что левая часть (10.4.4) равна

$$R_{\text{left}} = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}.$$

Введем следующие полиномы от x (ср. предложение 6.3):

$$L(x) = (1 - x)^\ell \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}} (1 - xe(\alpha)) \text{ для } A \text{ типа } X_\ell^{(1)};$$

$$L(x) = (1 - x)^s (1 - x^r)^{\ell-s} \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_s} (1 - xe(\alpha)) \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell} (1 - x^r e(\alpha))$$

для A типа $X_N^{(r)}$ при $\alpha_0 r = 2$ или 3 , где $s = \frac{N - \ell}{r - 1}$;

$$L(x) = (1 - x)^\ell \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_s} (1 - xe(\alpha)) \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_\ell} (1 - xe(\frac{1}{2}(\delta - \alpha)))(1 - x^2 e(\alpha))$$

для матриц A типа $A_{2\ell}^{(2)}$.

Положим $\overset{\circ}{R} = \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} (1 - e(-\alpha))$. Тогда в силу предложения 6.3 и следствия 8.3 имеем

$$(12.1.1) \quad R_{\text{left}} = \overset{\circ}{R} \prod_{n \geq 1} L(e(-n\delta)).$$

С другой стороны, правая часть (10.4.4) равна

$$R_{\text{right}} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e(w(\rho) - \rho),$$

где ρ определено в §6.2. В силу предложения 6.5 мы можем записать $w = ut_\alpha$, где $u \in \overset{\circ}{W}$, $\alpha \in M$. Используя равенства $\langle \rho, K \rangle = h^\vee$ и $|\rho|^2 = |\bar{\rho}|^2$, из (6.5.3) выводим

$$(12.1.2) \quad ut_\alpha(\rho) - \rho = u(\bar{\rho} + h^\vee \alpha) - \bar{\rho} + \frac{1}{2h^\vee} (|\bar{\rho}|^2 - |\bar{\rho} + h^\vee \alpha|^2) \delta.$$

Следовательно, мы получаем

$$(12.1.3) \quad R_{\text{right}} = e\left(\frac{|\bar{\rho}|^2}{2h^\vee}\delta\right) \sum_{\alpha \in M} \left(\sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) e(w(\bar{\rho} + h^\vee \alpha) - \bar{\rho}) \right) \\ \times e\left(-\frac{1}{2h^\vee} |\bar{\rho} + h^\vee \alpha|^2 \delta\right).$$

Сравнивая (12.1.1) и (12.1.3), выводим

$$(12.1.4) \quad e\left(-\frac{|\bar{\rho}|^2}{2h^\vee}\delta\right) \overset{\circ}{R} \prod_{n \geq 1} L(e(-n\delta)) \\ = \sum_{\alpha \in M} \left(\sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) e(w(\bar{\rho} + h^\vee \alpha) - \bar{\rho}) \right) e\left(-\frac{1}{2h^\vee} |\bar{\rho} + h^\vee \alpha|^2 \delta\right).$$

Это тождества Макдональда.

Пример 12.1. Пусть A — матрица типа $A_1^{(1)}$. Тогда $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1\}$, $\Delta_+ = \{(n-1)\alpha_0 + n\alpha_1, n\alpha_0 + (n-1)\alpha_1, n\alpha_0 + n\alpha_1 \ (n = 1, 2, \dots)\}$, $\text{mult } \alpha = 1$ для $\alpha \in \Delta_+$, $M = \mathbb{Z}\alpha_1$, $\bar{\rho} = \frac{1}{2}\alpha_1$, $(\alpha_1|\alpha_1) = 2$, $h^\vee = 2$ и $\overset{\circ}{W} = \{\pm 1\}$. Положим $u = e(-\alpha_0)$, $v = e(-\alpha_1)$. Тогда, используя выражение для R_{left} в (10.4.4) и выражение (12.1.3) для R_{right} , получаем

$$(12.1.5) \quad \prod_{n \geq 1} (1 - u^n v^n) (1 - u^{n-1} v^n) (1 - u^n v^{n-1}) \\ = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j u^{\frac{1}{2}j(j+1)} v^{\frac{1}{2}j(j-1)}.$$

Это одна из форм тождества Якоби для тройного произведения.

Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим

$$(12.1.6) \quad \overset{\circ}{\chi}(\lambda) = \frac{\sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) e(w(\lambda + \bar{\rho}) - \bar{\rho})}{\prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} (1 - e(-\alpha))}.$$

Заметим, что если $(\lambda, \alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_+$ для $i = 1, \dots, \ell$, то $\overset{\circ}{\chi}(\lambda)$ есть не что иное, как формальный характер $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ -модуля $\overset{\circ}{L}(\bar{\lambda})$ (где $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ — простая конечномерная алгебра Ли с системой корней $\overset{\circ}{\Delta}$). Деля обе части (12.1.4) на $\overset{\circ}{R}$, мы получим другую форму тождества Макдональда:

$$(12.1.7) \quad e\left(-\frac{|\bar{\rho}|^2}{2h^\vee}\delta\right) \prod_{n \geq 1} L(e(-n\delta)) = \sum_{\alpha \in M} \overset{\circ}{\chi}(h^\vee \alpha) e\left(-\frac{1}{2h^\vee} |\bar{\rho} + h^\vee \alpha|^2 \delta\right).$$

Рассмотрим теперь частный случай нескрученной аффинной алгебры $\mathfrak{g}$ типа $X_\ell^{(1)}$. В этом случае $\mathring{\mathfrak{g}}$ — алгебра типа X_ℓ . Напомним, что имеет место «странная» формула Фрейденшталя — де Фриза

$$(12.1.8) \quad \frac{|\bar{\rho}|^2}{2h^\vee} = \frac{\dim \mathring{\mathfrak{g}}}{24}.$$

Позже (см. формулу (12.3.7)) мы докажем гораздо более общую «очень странную» формулу. Вспомним также, что M есть решетка, порожденная над $\mathbb{Z}$ длинными корнями $\mathring{\mathfrak{g}}$. Полагая $q = e(-\delta)$, мы можем переписать (12.1.7) в виде

$$(12.1.9) \quad q^{\dim \mathring{\mathfrak{g}}/24} \prod_{n \geq 1} ((1 - q^n)^\ell \prod_{\alpha \in \mathring{\Delta}} (1 - q^n e(\alpha))) = \sum_{\alpha \in M} \mathring{\chi}(h^\vee \alpha) q^{|\bar{\rho} + h^\vee \alpha|^2/2h^\vee}.$$

§12.2. Специализация типа $(1, 0, \dots, 0)$ называется *базисной специализацией*; мы обозначим ее через F . Отметим, что

$$(12.2.1) \quad F(e(-\alpha)) = q^{(\alpha, d)}.$$

В частности, $F(e(\alpha)) = 1$, если $\alpha \in \mathring{\Delta}$. Следовательно, по лемме 11.11 получаем

$$(12.2.2) \quad F(\mathring{\chi}(\lambda)) = \mathring{d}(\lambda), \text{ где } \mathring{d}(\lambda) = \prod_{\alpha \in \mathring{\Delta}_+^\vee} \langle \lambda + \bar{\rho}, \alpha \rangle / \langle \bar{\rho}, \alpha \rangle.$$

Введем произведение Эйлера

$$(12.2.3) \quad \varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

и η -функцию Дедекинда

$$(12.2.4) \quad \eta = q^{1/24} \varphi(q).$$

Применяя F к обеим частям (12.1.9) и используя равенство $\dim \mathring{\mathfrak{g}} = \ell + |\mathring{\Delta}|$, мы получаем тождества Макдональда для η -функции

$$(12.2.5) \quad \eta^{\dim \mathring{\mathfrak{g}}} = \sum_{\alpha \in M} \mathring{d}(h^\vee \alpha) q^{|\bar{\rho} + h^\vee \alpha|^2/2h^\vee}.$$

§12.3. Здесь мы выведем обобщение тождества (12.2.5), используя произвольную специализацию типа s . Мы сохраняем обозначения §8.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N , μ — ее диаграммный автоморфизм порядка r и $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_j$ — соответствующая $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ -градуировка. Введем элементы E_i, F_i, H_i ($i = 0, \dots, \ell$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, как и в §8.2.

Для данной ненулевой последовательности неотрицательных целых чисел $s = (s_0, \dots, s_\ell)$ положим $m = r \sum_{i=0}^{\ell} a_i s_i$ (где a_i даны в табл. Aff r).

Пусть $\epsilon = \exp \frac{2\pi i}{m}$. Напомним определение автоморфизма $\sigma_{s,r}$ типа $(s; r)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\sigma_{s,r}(E_j) = \epsilon^{s_j} E_j, \quad \sigma_{s,r}(F_j) = \epsilon^{-s_j} F_j, \quad \sigma_{s,r}(H_j) = H_j.$$

Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_{\bar{j}}(s; r)$ — соответствующая $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировка. Положим

$$d_{\bar{j}}(s; r) = \dim \mathfrak{g}_{\bar{j}}(s; r) \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

где $\bar{j} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ обозначает класс вычетов, содержащий j . В силу последнего утверждения теоремы 8.7 имеет место

ЛЕММА 12.3. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ и $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(s)$ — ее $\mathbb{Z}$ -градуировка типа s . Тогда

$$\dim \mathfrak{g}_j(s) = d_{\bar{j}}(s; r).$$

□

Следовательно, левая часть (11.11.5) равна

$$(12.3.1) \quad R_{\text{left}} = \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{d_{\bar{j}}(s; r)}.$$

Напомним, что правая часть (11.11.5) есть

$$R_{\text{right}} = \sum_{w \in W^s} \epsilon(w) D_s(w(\rho)) q^{(\rho - w(\rho), h^*)}.$$

Мы перепишем R_{right} в терминах алгебры Ли $\mathring{\mathfrak{g}}$. Пусть Δ_s — подмножество в $\mathring{\Delta}$, состоящее из линейных комбинаций корней из множества $\{\alpha_i | s_i = 0 \ (i = 0, \dots, \ell)\}$. Пусть W_s — подгруппа группы Вейля W , порожденная отражениями в корнях из Δ_s . Пусть $\mathring{W}^s$ — множество представителей левых классов смежности в W по $W_s T$, так

что $W = W, T\dot{W}^s$. Мы можем выбрать $W^s = T\dot{W}^s$. Тогда множество $\{t_\alpha w\}$, где $\alpha \in M$, $w \in \dot{W}^s$, есть множество представителей левых классов смежности по W_s в W . Используя (6.2.8) и (6.5.3), мы получаем

$$(12.3.2) \quad t_\alpha w(\rho) = h^\vee \Lambda_0 + w(\bar{\rho}) + h^\vee \alpha - \left(\frac{h^\vee}{2}(\alpha|\alpha) + (w(\bar{\rho})|\alpha)\right)\delta.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \langle \rho - t_\alpha w(\rho), h^s \rangle \\ &= \langle \bar{\rho}, h^s \rangle - \langle w(\bar{\rho}), h^s \rangle - h^\vee \langle \alpha, h^s \rangle + \frac{m}{r} \left(\frac{h^\vee}{2}(\alpha|\alpha) + (w(\bar{\rho})|\alpha) \right). \end{aligned}$$

Определим $\gamma_s \in \mathfrak{h}_0^*$ формулой

$$(12.3.3) \quad (\gamma_s|\alpha_i) = r s_i / m \quad (i = 1, \dots, \ell).$$

Тогда последнюю формулу можно переписать в виде

$$(12.3.4) \quad \langle \rho - t_\alpha w(\rho), h^s \rangle = \frac{m}{2h^\vee r} (|h^\vee \alpha + w(\bar{\rho}) - h^\vee \gamma_s|^2 - |\bar{\rho} - h^\vee \gamma_s|^2).$$

Используя (12.3.1) и (12.3.4), из (11.11.5) мы выводим следующее тождество:

$$\begin{aligned} (12.3.5) \quad & q^{\frac{m}{2h^\vee r} |\bar{\rho} - h^\vee \gamma_s|^2} \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{d_j(s; r)} \\ &= \sum_{w \in W_s^*} \epsilon(w) \sum_{\alpha \in M} D_s(w(\bar{\rho}) + h^\vee \alpha) q^{\frac{m}{2h^\vee r} |w(\bar{\rho}) + h^\vee (\alpha - \gamma_s)|^2}. \end{aligned}$$

Отметим, что тождество для η -функции (12.2.5) является частным случаем этого тождества для $s = (1, 0, \dots, 0)$, $r = 1$.

Как и в этом частном случае, можно выразить первый сомножитель в левой части (12.3.5) полностью в терминах $d_j(s; r)$. А именно, имеет место следующая «очень странная формула», являющаяся обобщением «странной формулы» (12.1.8):

$$(12.3.6) \quad \frac{m}{2h^\vee r} |\bar{\rho} - h^\vee \gamma_s|^2 = \frac{m}{24} \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{4m} \sum_{j=1}^{m-1} j(m-j) d_j(s; r).$$

Доказательство этой формулы использует тождество (12.3.5) и некоторые элементы теории модулярных форм. Оно будет дано в гл. 13.

§12.4. Напомним, что центр аффинной алгебры $\mathfrak{g}(A)$ одномерен и порождается каноническим центральным элементом (см. §6.2):

$$K = \sum_{i=0}^{\ell} a_i^{\vee} \alpha_i^{\vee}.$$

Ясно, что K действует на $\mathfrak{g}(A)$ -модуле $L(\Lambda)$ как скалярный оператор $(\Lambda, K)I_{L(\Lambda)}$. В частности, $(\Lambda, K) = \langle \lambda, K \rangle$ для каждого $\lambda \in P(\Lambda)$. Число

$$(12.4.1) \quad k := \langle \Lambda, K \rangle = \sum_{i=0}^{\ell} a_i^{\vee} \langle \Lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle$$

называется *уровнем* веса $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ или модуля $L(\Lambda)$.

Если $\Lambda \in P_+$, то его уровень является неотрицательным целым числом; он равен нулю, если и только если все отметки $\langle \Lambda, \alpha_i^{\vee} \rangle$ веса Λ равны нулю. Следовательно, в силу (9.10.1) интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль $L(\Lambda)$ имеет уровень 0, если и только если $\dim L(\Lambda) = 1$; если модуль $L(\Lambda)$ интегрируем и $\dim L(\Lambda) \neq 1$, то его уровень есть положительное целое число.

Заметим, что уровень ρ равен

$$(12.4.2) \quad \langle \rho, K \rangle = \sum_{i=0}^{\ell} a_i^{\vee} = h^{\vee},$$

дуальному числу Кокстера.

Пусть Λ_i ($i = 0, \dots, \ell$) — *фундаментальные веса*:

$$\langle \Lambda_i, \alpha_j^{\vee} \rangle = \delta_{ij}, \quad j = 0, \dots, \ell, \quad \text{и} \quad \langle \Lambda_i, d \rangle = 0.$$

Заметим, что

$$(12.4.3) \quad \Lambda_i = \bar{\Lambda}_i + a_i^{\vee} \Lambda_0,$$

где $\bar{\Lambda}_0 = 0$ и $\bar{\Lambda}_1, \dots, \bar{\Lambda}_{\ell}$ суть фундаментальные веса алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим также, что

$$(12.4.4) \quad P_+ = \sum_{i=0}^{\ell} \mathbb{Z}_+ \Lambda_i + \mathbb{C}d.$$

Ясно, что уровень веса Λ из P_+ равен 1, если и только если $\Lambda \equiv \Lambda_i \pmod{\mathbb{C}d}$ и i таков, что $a_i^{\vee} = 1$; в частности, уровень веса Λ_0 всегда равен 1. Взглянув на таблицы Aff, мы увидим, что если матрица A симметрическая или $r > 1$, то

$$(12.4.5) \quad \text{уровень}(\Lambda_i) = 1 \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad i \in (\text{Aut } S(A)) \cdot 0.$$

Наконец, полезно следующее наблюдение, которое вытекает из предложений 3.12b) и 5.8b):

ЛЕММА 12.4. Если $\operatorname{Re}(\lambda, K) > 0$, то $(W \cdot \lambda) \cap \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \operatorname{Re}(\mu, \alpha_i^\vee) \geq 0 \text{ для всех } i\}$ состоит из единственного элемента. В частности, если $\lambda \in P$ имеет положительный уровень, то множество $P_+ \cap W \cdot \lambda$ состоит из единственного элемента. $\square$

Пусть P^k (соответственно P_+^k) = $\{\lambda \in P$ (соответственно P_+) $\mid \langle \lambda, K \rangle = k\}$.

§12.5. Здесь собраны некоторые факты о системе весов $P(\Lambda)$ интегрируемого модуля $L(\Lambda)$ над аффинной алгеброй $\mathfrak{g}(A)$, которые были доказаны раньше в общем контексте алгебр Каца — Мули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.5. Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый модуль положительного уровня k над аффинной алгеброй. Тогда

a) $P(\Lambda) = W \cdot \{\lambda \in P_+ \mid \lambda \leq \Lambda\}$.

b) $P(\Lambda) = (\Lambda + Q) \cap$ выпуклая оболочка $W \cdot \Lambda$.

c) Если $\lambda, \mu \in P(\Lambda)$ и μ лежит в выпуклой оболочке $W \cdot \lambda$, то $\operatorname{mult}_{L(\Lambda)} \mu \geq \operatorname{mult}_{L(\Lambda)} \lambda$.

d) $P(\Lambda)$ лежит в параболоиде $\{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid |\bar{\lambda}|^2 + 2k(\lambda \mid \Lambda_0) \leq |\Lambda|^2, \langle \lambda, K \rangle = k\}$; пересечение $P(\Lambda)$ с границей этого параболоида есть $W \cdot \Lambda$.

e) Для $\lambda \in P(\Lambda)$ множество $t \in \mathbb{Z}$, таких, что $\lambda - t\delta \in P(\Lambda)$, есть интервал $[-p, +\infty)$, где $p \geq 0$ и $t \mapsto \operatorname{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda - t\delta)$ — неубывающая функция на этом интервале. Более того, если $x \in \mathfrak{g}_{-\delta}$, $x \neq 0$, то отображение $x : L(\Lambda)_{\lambda - t\delta} \rightarrow L(\Lambda)_{\lambda - (t+1)\delta}$ инъективно.

f) Положим $\mathfrak{n}_-^{(\delta)} = \bigoplus_{n>0} \mathfrak{g}_{-n\delta}$; тогда $L(\Lambda)$ — свободный $U(\mathfrak{n}_-^{(\delta)})$ -модуль.

Доказательство. a) следует из предложения 11.2b), в то время как b) и c) — частные случаи предложения 11.3a) и b); d) следует из предложения 11.4a) и формулы (6.2.7); e) вытекает из следствия 11.9b); f) — частный случай предложения 11.9c). $\square$

§12.6. Мы продолжаем изучение системы весов $P(\Lambda)$ интегрируемого модуля $L(\Lambda)$ положительного уровня k над аффинной алгеброй.

Вес $\lambda \in P(\Lambda)$ называется **максимальным**, если $\lambda + \delta \notin P(\Lambda)$. Обозначим через $\max(\Lambda)$ множество всех максимальных весов модуля $L(\Lambda)$. Ясно, что $\max(\Lambda)$ является W -инвариантным множеством (поскольку $P(\Lambda)$ является W -инвариантным, а δ неподвижно относительно W), и, значит, в силу следствия 10.1 максимальный вес W -эквивалентен единственному доминантному максимальному весу. С другой стороны, из предложения 12.5e) следует, что для каждого $\mu \in P(\Lambda)$ существуют единственный $\lambda \in \max(\Lambda)$ и единственное неотрицательное

целое число n , такие, что $\mu = \lambda - n\delta$, т. е. имеет место соотношение (12.6.1)

$$P(\Lambda) = \bigcup_{\lambda \in \max(\Lambda)} \{\lambda - n\delta | n \in \mathbb{Z}_+\} \quad (\text{дизъюнктное объединение}).$$

Следующее утверждение содержит описание доминантных максимальных весов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.6. *Отображение $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ определяет биекцию из $\max(\Lambda) \cap P_+$ в $kC_{\alpha_f} \cap (\bar{\Lambda} + \bar{Q})$. В частности, множество доминантных максимальных весов $L(\Lambda)$ конечно.*

Доказательство. Непосредственно применяется предложение 12.5. $\square$

Следующая лемма явно описывает систему весов некоторых особенно важных модулей со старшим весом.

ЛЕММА 12.6. *Пусть A — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$, где $X = A, D$ или E . Пусть $\Lambda \in P_+$ — вес уровня 1. Тогда*

$$(12.6.2) \quad \max(\Lambda) = W \cdot \Lambda = T \cdot \Lambda,$$

$$(12.6.3) \quad P(\Lambda) = \{\Lambda_0 + \tfrac{1}{2} |\Lambda|^2 \delta + \alpha - (\tfrac{1}{2} |\alpha|^2 + s)\delta,$$

$$\text{где } \alpha \in \bar{\Lambda} + \bar{Q}, s \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Доказательство. Так как $\text{уровень}(\Lambda) = 1$, то Λ совпадает с фундаментальным весом $\Lambda_i \bmod C\delta$. Используя (12.4.5), легко увидеть, что i является специальной вершиной и, следовательно, $W \cdot \Lambda_i = T \cdot \Lambda_i$ (см. замечание 6.5). Поэтому из (12.6.1) и (12.6.2) следует (12.6.3) с использованием (6.5.2) и (6.2.6).

Чтобы доказать (12.6.2), вспомним, что $T = \{t_\alpha | \alpha \in \bar{Q}\}$ (см. §6.5). Пусть $\lambda \in \max(\Lambda)$; имеем $\lambda = \Lambda - \beta$, где $\beta \in Q$. Поскольку $\beta = \bar{\beta} \bmod C\delta$, получаем $t_{\bar{\beta}}(\lambda) = \Lambda \bmod C\delta$ в силу (6.5.2). Это доказывает (12.6.2). $\square$

§12.7. Пусть $\Lambda \in P_+$. Из предложения 11.10 и (11.10.1) следует, что $\text{ch}_{L(\Lambda)}$ абсолютно сходится к голоморфной функции в области

$$Y = \{h \in \mathfrak{h} | \text{Re}\langle \delta, h \rangle > 0\}.$$

В действительности Y является областью сходимости ряда $\text{ch}_{L(\Lambda)}$, если $\text{уровень}(\Lambda) > 0$. Отметим также, что для любого модуля V

со старшим весом над аффинной алгеброй ch_Y абсолютно сходится в области Y_0 (см. лемму 10.6b)).

Для $\lambda \in \text{max}(\Lambda)$ введем производящий ряд

$$a_\lambda^\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda - n\delta) e^{-n\delta}.$$

Этот ряд сходится абсолютно в области Y , поскольку он мажорируется $e^{-\Lambda} \text{ch}_{L(\Lambda)}$.

Так как $W_\lambda \cap T = 1$ для $\lambda \in P(\Lambda)$ (см. предложение 6.6с)) и $W(\delta) = \delta$, используя (12.6.1), мы выводим

$$(12.7.1) \quad \text{ch}_{L(\Lambda)} = \sum_{\lambda \in \text{max}(\Lambda)} e^\lambda a_\lambda^\Lambda = \sum_{\substack{\lambda \in \text{max}(\Lambda) \\ \lambda \bmod T}} \left(\sum_{t \in T} e^{t(\lambda)} \right) a_\lambda^\Lambda.$$

Эта простая формула сводит вычисление характера модуля $L(\Lambda)$ к вычислению функций a_λ^Λ . Следующий случай особенно прост.

ЛЕММА 12.7. Пусть A и Λ такие же, как в лемме 12.6. Тогда

$$e^{-\frac{1}{2}|\Lambda|^2\delta} \text{ch}_{L(\Lambda)} = a_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} \sum_{\gamma \in \overline{Q} + \overline{\Lambda}} e^{\Lambda_0 + \gamma - \frac{1}{2}|\gamma|^2\delta}.$$

Доказательство. Используем (12.6.3) и тот факт, что каждая функция a_λ^Λ является W -сопряженной к $a_\lambda^\Lambda = a_{\Lambda_0}^{\Lambda_0}$ благодаря (12.4.5) и лемме 12.6. $\square$

Функция $a_{\Lambda_0}^{\Lambda_0}$ будет явно вычислена в конце этой главы.

Мы приступаем к переписыванию формул для характера (10.4.5) и (12.7.1) в терминах тета-функций. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, такого, что уровень $(\lambda) = k > 0$, положим

$$(12.7.2) \quad \Theta_\lambda = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2k}\delta} \sum_{t \in T} e^{t(\lambda)}, \quad A_\lambda = \sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \varepsilon(w) \Theta_{w(\lambda)}.$$

Используя (6.5.3), получаем

$$(12.7.3) \quad \Theta_\lambda = e^{k\Lambda_0} \sum_{\gamma \in M + k^{-1}\overline{\Lambda}} e^{-\frac{1}{2}k|\gamma|^2\delta + k\gamma},$$

что представляет собой классическую тета-функцию (подробности см. в гл. 13). Ясно, что этот ряд абсолютно сходится на Y к голоморфной функции. Отметим также, что Θ_λ зависит только от $\lambda \bmod kM + \mathbb{C}\delta$.

Используя тета-функции, мы можем переписать тождество для знаменателя (10.4.4) в еще одной форме. Напомним, что $(\rho, K) = h^\vee$ (дуальное число Кокстера) и $\rho = \bar{\rho} + h^\vee \Lambda_0$ (формула (6.2.8)). С помощью разложения $W = \overset{\circ}{W} \ltimes T$ получаем

$$\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\rho) - \rho} = e^{-\rho} \sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) \sum_{\alpha \in M} e^{i_\alpha w(\rho)} = e^{-\rho + \frac{|p|^2}{2k^\vee} \delta} A_\rho.$$

Следовательно, (10.4.4) можно переписать в виде

$$(12.7.4) \quad A_\rho = \sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) \Theta_{h^\vee \Lambda_0 + w(\bar{\rho})} = e^{h^\vee \Lambda_0 + \bar{\rho} - \frac{|p|^2}{2k^\vee} \delta} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult } \alpha}.$$

Для $\Lambda \in P_+^k$ введем число

$$(12.7.5) \quad m_\Lambda = \frac{|\Lambda + \rho|^2}{2(k + h^\vee)} - \frac{|\rho|^2}{2h^\vee}.$$

Из соображений, которые станут ясны позже, мы назовем это число *модулярной аномалией* веса Λ и введем *нормализованный характер*

$$\chi_\Lambda = e^{-m_\Lambda \delta} \text{ch}_{L(\Lambda)}.$$

Для веса $\lambda \in P(\Lambda)$ введем число

$$(12.7.6) \quad m_{\Lambda, \lambda} = m_\Lambda - \frac{|\lambda|^2}{2k}.$$

Ясно, что $m_{\Lambda, \lambda}$ — рациональное число.

Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ положим

$$(12.7.7) \quad c_\lambda^\Lambda = e^{-m_{\Lambda, \lambda} \delta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda - n\delta) e^{-n\delta}.$$

Точно так же, как ряд a_λ^Λ , этот ряд абсолютно сходится к голоморфной функции на Y . Заметим, что $c_\lambda^\Lambda = e^{-m_{\Lambda, \lambda} \delta} a_\lambda^\Lambda$, если $\lambda \in \text{max}(\Lambda)$.

Функция c_λ^Λ называется *струнной функцией* от $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. При этом

$$(12.7.8) \quad c_{w(\lambda)}^\Lambda = c_\lambda^\Lambda \text{ для } w \in W.$$

Так как $W = \overset{\circ}{W} \ltimes T$, используя (6.5.2), получаем

$$(12.7.9) \quad c_{w(\lambda) + k\gamma + a\delta}^\Lambda = c_\lambda^\Lambda \text{ для } \lambda \in \mathfrak{h}^*, w \in \overset{\circ}{W}, \gamma \in M, a \in \mathbb{C}.$$

Отметим также, что

$$(12.7.10) \quad c_\lambda^A = c_\lambda^{A+a\delta} \text{ для } a \in \mathbb{C}.$$

Используя разложение $W = \overset{\circ}{W} \ltimes T$ и (12.7.2), мы можем переписать формулу для характера (10.4.5) в виде

$$(12.7.11) \quad \chi_\Lambda = A_{\Lambda+\rho}/A_\rho.$$

С другой стороны, в силу (12.7.1) и определений Θ_λ и c_λ^A имеем

$$\chi_\Lambda = \sum_{\substack{\lambda \in P^k \bmod C\delta \\ \lambda \bmod T}} c_\lambda^A \Theta_\lambda.$$

Используя (12.7.9), мы можем переписать это в виде

$$(12.7.12) \quad \chi_\Lambda = \sum_{\lambda \in P^k \bmod (kM+C\delta)} c_\lambda^A \Theta_\lambda.$$

Сравнивая (12.7.11) и (12.7.12), получаем тождество для тета-функции

$$(12.7.13) \quad A_{\Lambda+\rho} = A_\rho \sum_{\lambda \in P^k \bmod (kM+C\delta)} c_\lambda^A \Theta_\lambda.$$

Мы будем использовать это важное тождество в следующей главе для изучения и вычисления струнных функций.

§12.8. Обратимся теперь к конструкции Сугавары. Для простоты мы рассмотрим только случай нескрученной аффинной алгебры $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}'(X_\ell^{(1)})$, оставляя общий случай в качестве упражнения (см. упр. 12.20). Напомним, что $\mathfrak{g}' = \tilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}}) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \overset{\circ}{\mathfrak{g}} + \mathbb{C}K$ с коммутационными соотношениями

$$(12.8.1) \quad [x^{(m)}, y^{(n)}] = [x, y]^{(m+n)} + m\delta_{m,-n}(x|y)K.$$

Здесь $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_ℓ , $(x|y)$ — нормализованная (соотношением (6.4.2)) инвариантная билинейная форма на $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ и $x^{(n)}$ обозначает $t^n \otimes x$ ($n \in \mathbb{Z}$, $x \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$).

Пусть $\{u_i\}$ и $\{u^i\}$ — дуальные базисы алгебры Ли $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, т. е. $(u_i | u^j) = \delta_{ij}$. Напомним, что

$$\overset{\circ}{\Omega} = \sum_i u_i u^i,$$

оператор Казимира для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, не зависит от выбора этих дуальных базисов. В частности, $\sum_i u_i u^i = \sum_i u^i u_i$. Это доказывает полезную формулу

$$(12.8.2) \quad \sum_i [u_i^{(m)}, u^{i(n)}] = m \delta_{m,-n} (\dim \overset{\circ}{\mathfrak{g}}) K.$$

Кроме того, отметим, что

$$(12.8.3) \quad \Omega = 2(K + h^\vee)d + \overset{\circ}{\Omega} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i u_i^{(-n)} u^{i(n)}$$

есть оператор Казимира для аффинной алгебры

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(X_\ell^{(1)}) = \mathfrak{g}' + \mathbb{C}d, \text{ где } [d, x^{(n)}] = nx^{(n)}.$$

Поскольку Ω не зависит от выбора дуальных базисов $\{u_i\}$ и $\{u^i\}$, мы можем проверить это утверждение для специального выбора этих базисов. Рассмотрим разложение на корневые подпространства $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} = \overset{\circ}{\mathfrak{h}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}} \mathbb{C}e_\alpha)$, где $(e_\alpha | e_{-\alpha}) = 1$, и выберем дуальные базисы $h_1, \dots, h_\ell$

и $h^1, \dots, h^\ell$ в $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$. Тогда $\overset{\circ}{\Omega} = \sum_i h_i h^i + \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}} e_{-\alpha} e_\alpha$. Пользуясь тем, что

$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = \nu^{-1}(\alpha)$ (см. теорему 2.2e)) и $2\overset{\circ}{\rho} = \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} \alpha$, мы получим $\overset{\circ}{\Omega}$ в

виде, данном в §2.5:

$$\overset{\circ}{\Omega} = \sum_{i=1}^{\ell} h_i h^i + 2\nu^{-1}(\overset{\circ}{\rho}) + 2 \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} e_{-\alpha} e_\alpha.$$

Следовательно, в силу (6.2.5), (6.2.8) и §7.4 формулу (12.8.3) для Ω можно преобразовать к тому же виду, который имеет Ω в определении из §2.5 (см. упр. 7.16).

Для проведения вычислений удобно ввести *ограниченное пополнение* $U_c(\mathfrak{g}')$ универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}')$. Рассмотрим категорию всех ограниченных $\mathfrak{g}'$ -модулей, т. е. модулей V , таких, что для любого $v \in V$ выполняется равенство $x^{(j)}(v) = 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ и всех $j \gg 0$ (ср. §2.5). Рассмотрим все ряды $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ с $u_j \in U(\mathfrak{g}')$, такими, что $u_j(v) = 0$ для любого ограниченного $\mathfrak{g}'$ -модуля V и любого $v \in V$ при всех u_j , за исключением конечного числа. отождествим

два таких ряда, если они представляют один и тот же оператор в каждом ограниченном $\mathfrak{g}'$ -модуле. Таким образом, мы получаем алгебру $U_c(\mathfrak{g}')$, которая содержит $U(\mathfrak{g}')$ (поскольку $\bigoplus_{\lambda \in P_+} L(\lambda)$ является точным

$U(\mathfrak{g}')$ -модулем в силу упр. 11.22) и действует в каждом ограниченном $\mathfrak{g}'$ -модуле. Отметим, что дифференцирования d_n (см. §7.3) продолжаются с $U(\mathfrak{g}')$ до дифференцирований $U_c(\mathfrak{g}')$.

Теперь мы введем операторы Сугавары T_n ($n \in \mathbb{Z}$):

$$(12.8.4) \quad \begin{aligned} T_0 &= \sum_i u_i u^i + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i u_i^{(-n)} u^{i(n)}, \\ T_n &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_i u_i^{(-m)} u^{i(m+n)}, \quad \text{если } n \neq 0. \end{aligned}$$

В силу (12.8.2) эти операторы содержатся в $U_c(\mathfrak{g}')$. Заметим также, что они не зависят от выбора дуальных базисов в $\mathfrak{g}$.

Имеет место следующая основная лемма.

ЛЕММА 12.8. а) Для $x \in \mathfrak{g}$ и $n, m \in \mathbb{Z}$

$$[x^{(m)}, T_n] = 2(K + h^\vee) m x^{(m+n)}.$$

б) Пусть V — ограниченный $\mathfrak{g}$ -модуль и $v \in V$ обладает тем свойством, что $p_+(v) = 0$ и $h(v) = \langle \lambda, h \rangle v$ для некоторого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Тогда

$$T_0(v) = (\bar{\lambda} | \bar{\lambda} + 2\bar{\rho})v.$$

Доказательство. а) Будем проводить вычисления в полупрямом произведении $\mathfrak{d} \ltimes U_c(\mathfrak{g}')$. Отметим сначала, что

$$(12.8.5) \quad T_0 = -2(K + h^\vee)d + \Omega.$$

Прямая проверка с использованием (12.8.2) показывает, что

$$T_j = \frac{1}{j} [d_j, T_0], \quad \text{если } j \neq 0.$$

Теперь, используя теорему 2.6 и (12.8.5), получаем

$$[x^{(m)}, T_0] = [x^{(m)}, 2(K + h^\vee)d_0] = 2(K + h^\vee) m x^{(m)}.$$

Наконец, для $j \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} [x^{(m)}, T_j] &= \frac{1}{j} [x^{(m)}, [d_j, T_0]] = \\ &= 2(K + h^\vee) \left(\frac{1}{j} [m x^{(m+j)}, T_0] + \frac{1}{j} [d_j, m x^{(m)}] \right) = 2(K + h^\vee) m x^{(m+j)}. \end{aligned}$$

b) непосредственно вытекает из (12.8.5) и (2.6.3). $\square$

Теперь мы можем вычислить $[T_m, T_n]$. Следует быть аккуратным с тем, чтобы оставаться в алгебре $U_c(\mathfrak{g}')$. Можно считать, что $m > n$. Пусть сначала $m+n \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} [T_m, T_n] &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_i [u_i^{(-j)} u^{i(m+j)}, T_n] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_i \left(u_i^{(-j)} [u^{i(m+j)}, T_n] + [u_i^{(-j)}, T_n] u^{i(m+j)} \right) \\ &= 2(K + h^\vee) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_i \left((m+j) u_i^{(-j)} u^{i(m+j+n)} - j u_i^{(-j+n)} u^{i(m+j)} \right) \end{aligned}$$

по лемме 12.8. Заменяя j на $j+n$ во втором слагаемом, получаем

$$(12.8.6) \quad [T_m, T_n] = 2(K + h^\vee) \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_i (m-n) u_i^{(-j)} u^{i(m+n+j)}.$$

Итак, при условии, что $m+n \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$,

$$(12.8.7) \quad [T_m, T_n] = 2(K + h^\vee)(m-n)T_{m+n}.$$

Аналогичное вычисление показывает, что (12.8.7) справедливо, когда $m+n \neq 0$, но $m=0$ или $n=0$.

Пусть теперь $m+n=0$, $m>0$. Тогда правая часть (12.8.6) не лежит в $U_c(\mathfrak{g}')$. Будем рассуждать следующим образом. Так как $\hat{\Omega}$ не зависит от выбора дуальных базисов, то $\sum_i u_i^{(-j)} u^{i(j+m)} = \sum_i u_i^{(j+m)} u^{i(-j)}$, когда $m \neq 0$. Следовательно, мы можем записать (здесь и далее мы опускаем знак суммирования по i , но считаем, что оно производится)

$$T_m = \sum_{j \geq 0} u_i^{(-j)} u^{i(j+m)} + \sum_{j > 0} u_i^{(-j+m)} u^{i(j)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} [T_m, T_{-m}] &= 2(K + h^\vee) m \hat{\Omega} \\ &\quad + 2(K + h^\vee) \sum_{j > 0} ((j+m) u_i^{(-j)} u^{i(j)} - j u_i^{(-j-m)} u^{i(j+m)} \\ &\quad + j u_i^{(-j+m)} u^{i(j-m)} + (m-j) u_i^{(-j)} u^{i(j)}) \\ &= 2(K + h^\vee) (m T_0 + \sum_{j > 0} j u_i^{(-j+m)} u^{i(j-m)} \\ &\quad - \sum_{j > 0} j u_i^{(-j-m)} u^{i(j+m)}). \end{aligned}$$

Заменяя j на $j + m$ в первой сумме и $-j$ на $j - m$ во второй, получаем

$$\begin{aligned}
 [T_m, T_{-m}] &= 2(K + h^\vee)(mT_0 + \sum_{j>-m} (j+m)u_i^{(-j)}u^{i(j)} + \sum_{j>m} (m-j)u_i^{(-j)}u^{i(j)}) \\
 &= 2(K + h^\vee)(2mT_0 + \sum_{j=-m+1}^{-1} (j+m)u_i^{(-j)}u^{i(j)} \\
 &\quad - \sum_{j=1}^{m-1} (m-j)u_i^{(-j)}u^{i(j)}) \\
 &= 2(K + h^\vee)(2mT_0 + \sum_{j=0}^{m-1} j(m-j)[u^{i(j)}, u_i^{(-j)}]) \\
 &= 2(K + h^\vee)(2mT_0 + \sum_{j=0}^{m-1} j(m-j)(\dim \mathfrak{g})K)
 \end{aligned}$$

в силу (12.8.2). Поскольку $\sum_{j=0}^{m-1} j(m-j) = (m^3 - m)/6$, объединяя с (12.8.7), приходим к окончательной формуле

$$(12.8.8) \quad [T_m, T_n] = 2(K + h^\vee)((m-n)T_{m+n} + \delta_{m,-n} \frac{m^3 - m}{6} (\dim \mathfrak{g})K).$$

Непосредственно из (12.8.8) и леммы 12.8 получаем

СЛЕДСТВИЕ 12.8. Пусть V — ограниченный $\mathfrak{g}'$ -модуль, такой, что K есть скалярный оператор kI , $k \neq -h^\vee$. Пусть

$$(12.8.9) \quad L_n = \frac{1}{2(k + h^\vee)} T_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$(12.8.10) \quad c(k) = \frac{k(\dim \mathfrak{g})}{k + h^\vee},$$

$$(12.8.11) \quad h_\Lambda = \frac{(\Lambda + 2\rho|\Lambda)}{2(k + h^\vee)}, \quad \text{если } V = L(\Lambda).$$

а) Если положить

$$d_n \mapsto L_n, \quad c \mapsto c(k),$$

то V тем самым продолжается до модуля над $\mathfrak{g}' + \text{Vir}$ (полупрямая сумма, определенная в §7.3). В частности, V продолжается до модуля над $\mathfrak{g}$ ($= \mathfrak{g}' + \mathbb{C}d$), если положить $d \mapsto -L_0$.

б) Если V есть $\mathfrak{g}$ -модуль $L(\Lambda)$, то $L_0 = h_\Lambda I - d$. □

Число $c(k)$ называется *конформной аномалией* $\mathfrak{g}'$ -модуля V , а число h_Λ — *вакуумной аномалией модуля* $L(\Lambda)$. Используя «странную»

формулу (12.1.8), из (12.7.5), (12.8.10) и (12.8.11) получаем следующее простое соотношение между модулярной, конформной и вакуумной аномалиями для $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ уровня k :

$$(12.8.12) \quad m_\Lambda = h_\Lambda - \frac{1}{24}c(k).$$

Еще одно полезное свойство операторов Сугавары указывает следующее предложение:

Предложение 12.8. Пусть V — ограниченный $\mathfrak{g}'$ -модуль с невырожденной контравариантной эрмитовой формой (см. §11.5). Тогда операторы T_n и T_{-n} сопряжены относительно этой формы.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{k}$ — компактная форма алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. множество неподвижных точек инволюции ω_0 . Тогда ограниченная на $\mathfrak{k}$ билинейная форма $(\cdot | \cdot)$ отрицательно определена (см. теорему 11.7а)). Значит, мы можем выбрать базис $\{v_j\}$ в $\mathfrak{k}$, такой, что $(v_i | v_j) = -\delta_{ij}$. Пусть $u_j = \sqrt{-1}v_j$; это ортонормированный базис в $\mathfrak{g}$, для которого $\omega_0(u_j) = -u_j$, следовательно, $\omega_0(u_j(n)) = -u_j(-n)$. Отсюда непосредственно получаем доказательство. $\square$

Замечание 12.8. Пусть $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с положительно определенной билинейной формой $(\cdot | \cdot)$. Пусть $\mathfrak{g}$ — его комплексификация; продолжим $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{g}$ по билинейности. Если рассматривать $\mathfrak{g}$ как абелеву алгебру Ли, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$, $\mathring{\Delta} = \emptyset$, $\mathring{Q} = 0$, $\mathring{Q}^\vee = 0$, $\mathring{P} = \mathfrak{h}^*$, $\mathring{W} = \{1\}$, $\mathring{\rho} = 0$. Положим также $h^\vee = 0$. Тогда все утверждения этого параграфа (и их доказательства) справедливы и в этом случае. В частности, конформная аномалия

$$c(k) = \dim \mathfrak{g}$$

не зависит от k , вакуумная аномалия h_Λ равна $\frac{(\Lambda|\Lambda)}{2k}$, где k = уровень(Λ) $\neq 0$, и мы положим

$$m_\Lambda = h_\Lambda - \frac{1}{24}c(k).$$

Наконец, если $L(\Lambda)$, $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$, есть $\mathfrak{g}$ -модуль уровня $k \neq 0$, то $\text{ch}_{L(\Lambda)} = e^\Lambda / \varphi(e^{-\delta})^{\dim \mathfrak{g}}$, где φ определено в (12.2.3); следовательно,

$$(12.8.13) \quad \chi_\Lambda := e^{-m_\Lambda \delta} \text{ch}_{L(\Lambda)} = e^{-\frac{|\Lambda|^2}{2k} \delta + \Lambda} / \eta^{\dim \mathfrak{g}},$$

здесь $\eta = e^{-\delta/24} \varphi(e^{-\delta})$. Модуль $L(\Lambda)$ унитаризуем, если и только если $\Lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$ и k — положительное вещественное число. Это вытекает из (9.13.1).

§12.9. Мы продолжим приведенную выше конструкцию на случай редуktивной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (здесь будет удобнее использовать это обозначение вместо $\mathfrak{g}_0$). Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму идеалов:

$$(12.9.1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)} \oplus \mathfrak{g}_{(1)} \oplus \mathfrak{g}_{(2)} \oplus \dots,$$

где $\mathfrak{g}_{(0)}$ есть центр $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{g}_{(i)}$ при $i \geq 1$ простые. Зафиксируем на $\mathfrak{g}$ невырожденную инвариантную билинейную симметрическую форму $(\cdot | \cdot)$, так что (12.9.1) является ортогональным разложением. Мы будем считать, что ограничение $(\cdot | \cdot)$ на каждое слагаемое $\mathfrak{g}_{(i)}$ при $i \geq 1$ есть нормализованная инвариантная форма и что $\mathfrak{g}_{(0)}$ и ограниченная на $\mathfrak{g}_0$ форма $(\cdot | \cdot)$ такие же, как в замечании 12.8. Будем называть такую форму нормализованной инвариантной формой на $\mathfrak{g}$.

Пусть

$$\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \geq 0} \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_{(i)}), \quad \text{где } \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_{(i)}) = \mathcal{L}(\mathfrak{g}_{(i)}) + \mathbb{C}K_i.$$

Положим также (ср. §7.3)

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) + \mathbb{C}d, \quad \text{где } d|_{\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_{(i)})} = -t \frac{d}{dt}, \quad d(K_i) = 0.$$

Алгебры Ли $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ и $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ называются аффинными алгебрами, соответствующими редуktивной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Подалгебры $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_{(i)})$ (соответственно $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_{(i)}) + \mathbb{C}d$) называются компонентами алгебры Ли $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ (соответственно $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$).

Отметим, что $\mathfrak{c} = \mathfrak{g}_{(0)} + \sum_{i \geq 1} \mathbb{C}K_i$ есть центр $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ и $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$. Как и прежде, отождествим $\mathfrak{g}$ с подалгеброй $1 \otimes \mathfrak{g}$. Пусть $\bar{\mathfrak{h}}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_+$ — треугольное разложение для $\mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{h}} + \mathfrak{c} + \mathbb{C}d$ называется подалгеброй Картана алгебры Ли $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$. Треугольное разложение

$$\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

определяется таким же способом, как в §7.6. Для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ обозначим (как прежде) его ограничение на $\bar{\mathfrak{h}}$ через $\bar{\lambda}$. Как и прежде, определим $\delta \in \mathfrak{h}^*$ по правилу

$$\delta|_{\bar{\mathfrak{h}}+\mathfrak{c}} = 0, \quad \langle \delta, d \rangle = 1.$$

Для данного $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ обозначим (как и прежде) через $L(\Lambda)$ неприводимый $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ -модуль, обладающий ненулевым вектором v_Λ , таким, что

$p_+(v_\Lambda) = 0$ и $h(v_\Lambda) = \langle \Lambda, h \rangle v_\Lambda$ для $h \in \mathfrak{h}$. Используя единственность $L(\Lambda)$, легко получить, что

$$(12.9.2) \quad L(\Lambda) = \bigotimes_{i \geq 0} L(\Lambda_{(i)}),$$

где $\Lambda_{(i)}$ обозначает ограничение Λ на $\mathfrak{h}_{(i)} := \mathfrak{h} \cap \hat{L}(\mathfrak{g}_{(i)})$ и $L(\Lambda_{(i)})$ есть $\hat{L}(\mathfrak{g}_{(i)})$ -модуль со старшим весом $\Lambda_{(i)}$.

Назовем k_i , собственное значение оператора K_i на $L(\Lambda)$, i -м уровнем веса Λ и положим $k = (k_0, k_1, \dots)$. Пусть $c(k) = \sum_i c(k_i)$, $h_\Lambda = \sum_i h_{\Lambda_{(i)}}$, $m_\Lambda = \sum_i m_{\Lambda_{(i)}}$. В силу (12.9.2) $\text{ch}_{L(\Lambda)} = \prod_i \text{ch}_{L(\Lambda_{(i)})}$ и

$$(12.9.3) \quad \chi_\Lambda := e^{-m_\Lambda \delta} \text{ch}_{L(\Lambda)} = \prod_i \chi_{\Lambda_{(i)}}.$$

Пусть V — ограниченный $\tilde{L}(\mathfrak{g})$ -модуль, такой, что k_i действует как $k_i I$ и $k_i \neq -h_i^\vee$ (где $h_i^\vee$ есть дуальное число Кокстера для $\tilde{L}(\mathfrak{g}_{(i)})$). Пусть $T_n^{(i)}$ — операторы Сугавары для $\tilde{L}(\mathfrak{g}_{(i)})$, и пусть $(n \in \mathbb{Z})$

$$(12.9.4) \quad L_n^{(i)} = \frac{1}{2(k_i + h_i^\vee)} T_n^{(i)}, \quad L_n^g = \sum_i L_n^{(i)}.$$

Операторы L_n^g называются *операторами Вирасоро* для $\mathfrak{g}$ -модуля V . Если положить $d_n \mapsto L_n^g$, $c \mapsto c(k)$, то тем самым V продолжается до модуля над $\tilde{L}(\mathfrak{g}) + \text{Vir}$. Отметим также, что имеет место следующая полезная формула (ср. (12.8.5)):

$$(12.9.5) \quad L_0^g = \sum_i \frac{\Omega_i}{2(k_i + h_i^\vee)} - d,$$

где Ω_i — оператор Казимира для $\hat{L}(\mathfrak{g}_{(i)})$.

§12.10. В оставшейся части этой главы $\mathfrak{g}$ — редуктивная конечномерная алгебра Ли с нормализованной инвариантной формой $(\cdot | \cdot)$, а $\hat{\mathfrak{g}}$ — ее редуктивная подалгебра, такая, что ограничение $(\cdot | \cdot)|_{\hat{\mathfrak{g}}}$ невырожденно. Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}_{(i)}$ и $\hat{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{i \geq 0} \hat{\mathfrak{g}}_{(i)}$ — разложения (12.9.1) для $\mathfrak{g}$ и $\hat{\mathfrak{g}}$. Пусть, кроме того, $(\cdot | \cdot)$ — нормализованная инвариантная форма на $\hat{\mathfrak{g}}$, совпадающая с $(\cdot | \cdot)$ на $\hat{\mathfrak{g}}_{(0)}$. В силу единственности инвариантной билинейной формы на простой алгебре Ли для $x, y \in \hat{\mathfrak{g}}_{(s)}$, $s \geq 1$ имеем

$$(x_{(r)} | y_{(r)}) = j_{s,r}(x | y),$$

где $x(r)$ обозначает проекцию x на $\mathfrak{g}(r)$, а j_{sr} — (положительное) число, не зависящее от x и y ; положим $j_{0r} = 1$. Числа j_{sr} ($s, r \geq 0$) называются *индексами Дынкина*.

Гомоморфизм вложения $\psi: \dot{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{g}$ индуцирует очевидным образом гомоморфизм вложения $\mathcal{L}(\dot{\mathfrak{g}}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Он однозначно поднимается до гомоморфизма $\tilde{\psi}: \tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, если положить $\tilde{\psi}(K_s) = \sum_r j_{sr} K_r$, который, в свою очередь, продолжается до гомоморфизма $\hat{\psi}: \hat{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) \rightarrow \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, если положить $\hat{\psi}(d) = d$. Здесь и далее поставленная сверху точка указывает на объект, соответствующий $\dot{\mathfrak{g}}$.

Пусть V — ограниченный $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ -модуль, такой, что K_i действует как $k_i I$, $k_i \neq -h_i^\vee$. Применяя $\hat{\psi}$, мы можем рассматривать его как $\hat{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ -модуль, причем $\hat{K}_i$ действует как $\hat{k}_i I$, где

$$(12.10.1) \quad \hat{k}_s = \sum_i j_{si} k_i.$$

Мы будем считать, что $\hat{k}_i \neq -h_i^\vee$. Пусть (см. (12.9.4))

$$L_n^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}} = L_n^{\mathfrak{g}} - L_n^{\dot{\mathfrak{g}}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12.10. а) Операторы $L_n^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}}$ коммутируют с $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$.

б) Отображение $d_n \mapsto L_n^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}}$, $c \mapsto c(k) - \dot{c}(\hat{k})$ определяет представление Vir на V .

Доказательство. а) непосредственно вытекает из леммы 12.8. Далее,

$$\begin{aligned} [L_m^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}}, L_n^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}}] &= [L_m^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}}, L_n^{\mathfrak{g}}] \quad (\text{поскольку } L_n^{\dot{\mathfrak{g}}} \in U_c(\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}}))) \\ &= [L_m^{\mathfrak{g}}, L_n^{\mathfrak{g}}] - [L_m^{\dot{\mathfrak{g}}}, L_n^{\mathfrak{g}}] \\ &= [L_m^{\mathfrak{g}}, L_n^{\mathfrak{g}}] - [L_m^{\dot{\mathfrak{g}}}, L_n^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}} + L_n^{\dot{\mathfrak{g}}}] \\ &= [L_m^{\mathfrak{g}}, L_n^{\mathfrak{g}}] - [L_m^{\dot{\mathfrak{g}}}, L_n^{\dot{\mathfrak{g}}}] \quad (\text{поскольку } L_m^{\dot{\mathfrak{g}}} \in U_c(\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}}))). \end{aligned}$$

□

Vir -модуль, определенный в предложении 12.10, называется *косетным Vir-модулем*.

Выберем подалгебры Картана $\bar{\mathfrak{h}}$ и $\dot{\mathfrak{h}}$ в $\mathfrak{g}$ и $\dot{\mathfrak{g}}$ так, чтобы $\dot{\mathfrak{h}} \subset \bar{\mathfrak{h}}$. Выберем, кроме того, треугольное разложение $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}}_- \oplus \bar{\mathfrak{h}} \oplus \bar{\mathfrak{n}}_+$; тогда имеет место индуцированное треугольное разложение $\dot{\mathfrak{g}} = \dot{\mathfrak{n}}_- \oplus \dot{\mathfrak{h}} \oplus \dot{\mathfrak{n}}_+$, где $\dot{\mathfrak{n}}_{\pm} = \bar{\mathfrak{n}}_{\pm} \cap \dot{\mathfrak{g}}$. Имеем соответствующие треугольные разложения $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$, $\hat{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) = \dot{\mathfrak{n}}_- + \dot{\mathfrak{h}} + \dot{\mathfrak{n}}_+$ и т. д.; кроме этого, $\psi(\dot{\mathfrak{h}}) \subset \mathfrak{h}$, $\psi(\dot{\mathfrak{n}}_+) \subset \mathfrak{n}_+$ и т. д.

Пусть $P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda|_{\mathfrak{h} \cap \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}_{(i)})} \subset P_{+(i)} \text{ для } i \geq 1, \lambda|_{\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{(0)}} \text{ веществен и } \langle \lambda, K_0 \rangle > 0\}$ — множество доминантных интегральных весов для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$. Положим $P_+^k = \{\lambda \in P_+ \mid \lambda(K_i) = k_i \ (i = 0, 1, \dots)\}$.

Зафиксируем $\Lambda \in P_+^k$. Применяя (12.9.2), теорему 11.7 и §11.12, мы видим, что $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ -модуль $L(\Lambda)$ унитаризуем. Отсюда в силу предложения 11.8 следует, что, рассматриваемый как $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ -модуль, модуль $L(\Lambda)$ разлагается в прямую сумму $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ -модулей $\tilde{L}(\lambda)$ с $\lambda \in \dot{P}_+^k$. Так как собственные подпространства оператора d на $L(\Lambda)$ конечномерны, мы получаем, что кратность вхождения $\tilde{L}(\lambda)$ в это разложение конечна. Мы обозначим эту кратность через $\text{mult}_\Lambda(\lambda; \mathfrak{g})$.

§12.11. Следующее понятие будет играть важную роль впоследствии. Пара $M \in P_+^k$ и $\mu \in P(M)|_{\mathfrak{h}} \cap \dot{P}_+^k$, такая, что $h_M = \dot{h}_\mu$, называется *вакуумной парой уровня k* (ср. предложение 12.12b) ниже). Обозначим через R_k множество всех вакуумных пар уровня k .

Предложение 12.11. Пусть $(M; \mu) \in R_k$. Тогда

$$(12.11.1) \quad \text{mult}_M(\mu; \mathfrak{g}) = \sum_{\substack{\tilde{\mu} \in P(M) \\ \tilde{\mu}|_{\mathfrak{h}} = \mu}} \text{mult}_{L(M)}(\tilde{\mu}) > 0.$$

В частности, $(M; \mu) \in R_k$, если и только если $h_M = \dot{h}_\mu$ и $\text{mult}_M(\mu; \mathfrak{g}) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\mu} \in P(M)$ обладает тем свойством, что $\tilde{\mu}|_{\mathfrak{h}} = \mu$. Пусть v — ненулевой вектор из $L(M)_{\tilde{\mu}}$. Мы должны показать, что $\dot{n}_+(v) = 0$. В противном случае существует $\beta \in \dot{Q}_+ \setminus \{0\}$, для которого $\text{mult}_M(\mu + \beta; \mathfrak{g}) > 0$. Но тогда

$$\begin{aligned} \dot{h}_{\mu+\beta} - \dot{h}_\mu &= \sum_i \frac{|\mu(i) + \beta(i) + \dot{\rho}(i)|^2 - |\mu(i) + \dot{\rho}(i)|^2}{2(k_i + \dot{h}_i^\vee)} \\ &= \sum_i \frac{((\mu(i) + \beta(i)) + \mu(i) + 2\dot{\rho}(i) | \beta(i))}{2(k_i + \dot{h}_i^\vee)} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $h_M < \dot{h}_{\mu+\beta}$, что противоречит предложению 12.12b) из §12.12. $\square$

Замечание 12.11. Пусть $M \in P_+$. Поскольку модуль $L(M)$ вполне приводим относительно $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$, из (12.9.5) видно, что $L_0^{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}}$ диагонализирован на $L(M)$. Из доказательства предложения 12.12b) ясно, что его спектр неотрицателен. Каждое из его собственных подпространств

является $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ -инвариантным (в силу предложения 12.10а)). Наконец, его нулевое собственное подпространство (вакуумное пространство) разлагается в прямую сумму $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ -модулей $\dot{L}(\mu)$, таких, что $(M; \mu)$ — вакуумная пара с кратностями, которые даются формулой (12.11.1).

§12.12. Для $\Lambda \in P_+^k$ и $\lambda \in \dot{\mathfrak{h}}^*$ положим

$$b_\lambda^\Lambda(\dot{\mathfrak{g}}) = e^{-(m_\Lambda - \dot{m}_\lambda)\delta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \text{mult}_\Lambda(\lambda - n\delta; \dot{\mathfrak{g}}) e^{-n\delta}.$$

Этот ряд абсолютно сходится к голоморфной функции на $\dot{Y}$, называемой *функцией ветвления*.

Отметим, что струнные функции представляют собой, по сути дела, частный случай функций ветвления:

$$(12.12.1) \quad c_\lambda^\Lambda = b_\lambda^\Lambda(\dot{\mathfrak{h}}) \eta^{-\ell}.$$

Это следует из (12.8.13).

Функции ветвления имеют простой с точки зрения представлений смысл. Чтобы объяснить его, положим

$$U(\Lambda, \lambda) = \{v \in L(\Lambda) \mid \dot{n}_+(v) = 0 \text{ и } h(v) = \langle \lambda, h \rangle v \text{ для } h \in \dot{\mathfrak{h}}\}.$$

Заметим, что в силу предложения 12.10 подпространство $U(\Lambda, \lambda)$ является подмодулем косетного Vir-модуля (где $c = c(k) - \dot{c}(\dot{k})$). Сравнивая следствие 12.8b) с (12.8.12), мы получаем следующую интерпретацию функций ветвления:

$$(12.12.2) \quad b_\lambda^\Lambda(\dot{\mathfrak{g}}) = \text{tr}_{U(\Lambda, \lambda)} q^{L_0^{\dot{\mathfrak{g}}, \dot{\mathfrak{h}}} - \frac{1}{24}(c(k) - \dot{c}(\dot{k}))},$$

где $q = e^{-\delta}$.

Таким образом, мы получили следующее разложение модуля $L(\Lambda)$ относительно $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}}) \oplus \text{Vir}$ (прямая сумма алгебр Ли):

$$(12.12.3) \quad L(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \dot{P}_+^k \bmod C\dot{\delta}} \dot{L}(\lambda) \otimes U(\Lambda, \lambda),$$

из чего непосредственно вытекает соотношение для нормализованных характеров:

$$(12.12.4) \quad \chi_\Lambda = \sum_{\lambda \in \dot{P}_+^k \bmod C\dot{\delta}} \dot{\chi}_\lambda b_\lambda^\Lambda(\dot{\mathfrak{g}}).$$

Теперь мы можем доказать следующее важное предложение.

Предложение 12.12. а) Модуль $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+$, рассматриваемый как косетный Vir-модуль, разлагается в ортогональную прямую сумму унитаризуемых неприводимых модулей со старшим весом.

б) Если $\Lambda \in P_+$ и $\text{mult}_\Lambda(\lambda; \dot{g}) \neq 0$, то $h_\Lambda \geq \dot{h}_\lambda$.

с) Если $k_0 \geq 0$ и $k_i \in \mathbb{Z}_+$ для $i > 0$, то $c(k) \geq \dot{c}(k)$.

Доказательство. В силу предложения 12.8 косетный Vir-модуль $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+$, унитаризуем, следовательно, все $U(\Lambda, \lambda)$ унитаризуемы. Далее, все собственные подпространства оператора $L_0^{\dot{g}, \dot{g}}$ на $U(\Lambda, \lambda)$ конечномерны и его спектр ограничен снизу. Теперь а) следует из (12.2.3) и предложения 11.12с).

Пусть $v \in L(\Lambda)$ — вектор старшего веса $\dot{L}(\dot{g})$ -подмодуля $\dot{L}(\lambda)$ модуля $L(\Lambda)$. Используя следствие 12.8б), получаем

$$L_0^{\dot{g}, \dot{g}}(v) = (h_\Lambda - \dot{h}_\lambda)v.$$

б) и с) следуют теперь из предложения 11.12. $\square$

Теперь если $\dot{g}$ полупроста, то ясно, что сумма в (12.12.3) конечна. Разумеется, это не так в общем случае, как мы видели на примере $\dot{g} = \bar{h}$. Мы преобразуем эту сумму в конечную, используя тот же прием, что в §12.7. Для этого мы будем предполагать, что

$$(12.12.5) \quad \dot{g}_{(0)} \cap \bar{Q}^\vee \text{ порождает } \dot{g}_{(0)} \text{ над } \mathbb{C},$$

где $\bar{Q}^\vee \subset \bar{h}$ — дуальная корневая решетка для $\dot{g}$. Введем решетку $M_0 = \dot{\nu}^{-1}(\dot{g}_{(0)} \cap \bar{Q}^\vee)$, которая является подрешеткой решетки M .

Пусть $\dot{h}' = \bigoplus_{i \geq 1} \dot{h}_{(i)}$. Тогда $\dot{h} = \dot{h}_{(0)} + \dot{h}'$, $\dot{h}_{(0)} \cap \dot{h}' = \mathbb{C}d$, следовательно, $\dot{h}^* = \dot{h}_{(0)} + \dot{h}'^*$ и $\dot{h}_{(0)}^* \cap \dot{h}'^* = \mathbb{C}\dot{b}$. Для данного $\lambda \in \dot{h}^*$ имеет место разложение

$$(12.12.6) \quad \lambda = \lambda_{(0)} + \lambda^{(1)}, \text{ где } \lambda_{(0)} \in \dot{h}_{(0)}^*, \lambda^{(1)} \in \dot{h}'^*,$$

которое единственно, с точностью до прибавления слагаемого, кратного $\dot{b}$.

В силу (12.9.3) и (12.8.3) для $\lambda \in \dot{P}_+^{\dot{g}}$ имеем

$$(12.12.7) \quad \dot{\chi}_\lambda = \dot{\chi}_{\lambda_{(1)}}(e^{\lambda_{(0)}} - \frac{|\lambda_{(0)}|^2}{2k} \dot{b} / \eta^{\ell_0}), \text{ где } \ell_0 = \dim \dot{g}_{(0)}.$$

Здесь $\dot{\chi}_{\lambda_{(1)}} = \prod_{i \geq 1} \dot{\chi}_{\lambda_{(i)}}$ — нормализованный характер $\dot{L}(\dot{g}')$ -модуля $\dot{L}(\lambda^{(1)})$, где $\dot{g}'$ — производная алгебра для $\dot{g}$.

Ясно, что для $\alpha \in \dot{M}_0$

$$i_\alpha(\dot{\chi}_{\lambda(1)}) = \dot{\chi}_{\lambda(1)} \text{ и } b_{i_\alpha(\lambda)}^\Lambda = b_\lambda^\Lambda.$$

Используя это, мы можем переписать (12.12.3) в виде

$$(12.12.8) \quad \chi_\Lambda = \sum_{\lambda \in \dot{P}_+^k \bmod (\mathbb{C}\dot{i} + \dot{k}_0 \dot{M}_0)} b_\lambda^\Lambda(\dot{\theta}) \dot{\chi}_{\lambda(1)} (\dot{\Theta}_{\lambda(0)}^\circ / \eta^{\ell_0}),$$

где $\dot{\Theta}_{\lambda(0)}^\circ = e^{-\frac{|\lambda(0)|^2}{2k_0}} \dot{i} \sum_{\alpha \in \dot{M}_0} e^{i_\alpha(\lambda)}$ есть тета-функция, соответствующая

решетке $\dot{M}_0$. Ясно, что сумма справа конечна. Соотношение (12.12.8) является обобщением тождества для тета-функции (12.7.3). Оно будет использовано в следующей главе для изучения функций ветвления.

§12.13. Мы применим здесь развитую технику для вычисления функций a_Λ^Λ уровня 1 для аффинных алгебр типа $X_N^{(r)}$, где $X = A, D$ или E (ср. с леммой 12.7). Для этого мы используем следующее хорошо известное соотношение:

$$(12.13.1) \quad \dim g(X_N) = N(h^\vee + 1), \text{ если } X = A, D \text{ или } E.$$

Напомним также, что

$$(12.13.2) \quad a_\Lambda^\Lambda = 1 + a_1 q + \dots, \text{ где } q = e^{-\delta}.$$

Рассмотрим косетный Vir-подмодуль $U(\Lambda, \Lambda)$ в $L(\Lambda)$ (для случая скрученных алгебр надо использовать упр. 12.20). Справедлива следующая формула для его конформного центрального заряда:

$$(12.13.3) \quad c(1) - \dot{c}(1) = \frac{\dim g(X_N)}{h^\vee + 1} - N = 0.$$

Следовательно, в силу предложения 11.12b) и c) косетный Vir-модуль $U(\Lambda, \Lambda)$ тривиален. Сравнивая (12.13.2) с (12.12.2), получаем

$$b_\Lambda^\Lambda(\dot{h}) = 1.$$

В свою очередь, сравнивая это с (12.13.2) и (12.12.1) в случае нескрученных алгебр (соответственно с упр. 12.20 и 12.21 в случае скрученных алгебр) и используя лемму 12.7, мы выводим

Предложение 12.13. Пусть $\Lambda \in P_+^1$. Тогда для аффинных алгебр типа $X_N^{(r)}$, где $X = A, D$ или E ,

$$(12.13.4) \quad a_\Lambda^\Lambda = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-n\delta})^{-\text{mult } n\delta},$$

$$(12.13.5) \quad \text{mult}_{L(\Lambda)} \lambda = p^A((|\Lambda|^2 - |\lambda|^2)/2), \quad \text{где}$$

$$\sum_j p^A(j) q^j := \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{-\text{mult } n\delta},$$

$$(12.13.6) \quad e^{-\frac{1}{2}|\Lambda|^2\delta} \text{ch}_{L(\Lambda)} = \sum_{\gamma \in \bar{Q} + \bar{\Lambda}} e^{\Lambda_0 + \gamma - \frac{1}{2}|\gamma|^2\delta} / \prod_{n \geq 1} (1 - e^{-n\delta})^{\text{mult } n\delta}.$$

□

Замечание 12.13. Если A — матрица типа $A_\ell^{(1)}$, $D_\ell^{(1)}$, $E_\ell^{(1)}$ или $A_{2\ell}^{(2)}$, то $\sum_j p^A(j) q^j = \varphi(q)^{-\ell}$, так что $p^A(j)$ есть число разбиений j на це-

лые положительные части ℓ различных цветов; в частности, $p^{A_r^{(r)}}(j) = p(j)$ ($r = 1$ или 2) есть классическая функция разбиений.

Между прочим, используя (12.13.3) и предложение 11.12b), мы получаем $h_\Lambda = \dot{h}_\Lambda$, поэтому справедливо

Следствие 12.13. В предположениях предложения 12.13

$$(\Lambda | \Lambda) h^\vee = 2(\rho | \Lambda).$$

§12.14. Упражнения

12.1. Покажите, что если положить $q = e(-\delta)$, $z = e(-\alpha_0)$ в (12.1.4) для $g(A)$ типа $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$, то мы получим классические тождества для тройного и пятикратного произведения (являющиеся альтернативной формой тождеств из упр. 10.9):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^n z^{-1})(1 - q^{n-1} z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{1}{2}m(m-1)} z^m,$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^{n-1} z)(1 - q^n z^{-1})(1 - q^{2n-1} z^2)(1 - q^{2n-1} z^{-2})$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(3m^2+m)} (z^{3m} - z^{3m-1}).$$

12.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли ранга ℓ , $\Phi(x, y)$ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра Картана, $\hat{\Delta}$ — система корней, M_P — решетка, порожденная $\{\alpha/\Phi(\alpha, \alpha), \alpha \in \hat{\Delta}\}$, $\hat{\Delta}_+$ — множество положительных корней, $\bar{\rho}$ — их полусумма. Выведите из (12.2.3) тождество

$$\eta^{\dim \mathfrak{g}} = \sum_{\gamma \in M_P} d(\gamma) q^{\Phi(\gamma + \bar{\rho}, \gamma + \bar{\rho})}.$$

12.3. В обозначениях упр. 12.2 пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ — множество простых корней, h — число Кокстера для $\mathfrak{g}$ и M_Q обозначает решетку, порожденную $\{h\alpha, \alpha \in \hat{\Delta}\}$. Выведите из (12.1.7) следующее тождество:

$$\prod_{i=1}^{\ell} \eta(q^{h\Phi(\alpha_i, \alpha_i)})^{h+1} = \sum_{\gamma \in M_Q} d(\gamma) q^{\Phi(\gamma + \bar{\rho}, \gamma + \bar{\rho})}$$

[Используйте формулу $\sum_{i=1}^{\ell} \Phi(\alpha_i, \alpha_i) = \ell/h$.]

12.4. Покажите, что для автоморфизмов алгебры Ли sl_2 типа $(s, 1; 1)$, где $s = 0, 1, 2, 3$, тождество (12.3.5) превращается соответственно в классические тождества

$$\varphi(q)^3 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (4n+1) q^{2n^2+n} \quad (\text{Якоби}),$$

$$\varphi(q)^2/\varphi(q^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \quad (\text{Гаусс}),$$

$$\varphi(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{(3n^2+n)/2} \quad (\text{Эйлер}),$$

$$\varphi(q^2)^2/\varphi(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{2n^2+n} \quad (\text{Гаусс}).$$

12.5. Пусть W — группа Вейля аффинной алгебры. Покажите, что если $W = \hat{W}W_1$, где W_1 есть множество представителей минимальной длины левых смежных классов в W по $\hat{W}$, то $\overline{w(\rho)} - \bar{\rho} \in \bar{P}_+$ для $w \in W_1$. Покажите, что $W_1 = \{w \in W \mid \hat{\Delta}_+ \subset w(\Delta_+^-)\}$.

[Используйте лемму 3.11а.]

12.6. Сохраним обозначения упр. 12.2 и отождествим $\mathfrak{h}$ с $\mathfrak{h}^*$ с помощью формы Киллинга. Пусть $\bar{P}_+$ — множество доминантных интегральных весов, и пусть $\hat{L}(\lambda)$ обозначает неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль со

старшим весом $\lambda \in \bar{P}_+$. Докажите тождество

$$\begin{aligned} q^{\dim \mathfrak{g}/24} \prod_{n \geq 1} ((1 - q^n)^\ell \prod_{\alpha \in \mathring{\Delta}} (1 - q^n e(\alpha))) \\ = \sum_{\lambda \in \bar{P}_+} \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} (\exp 4\pi i \bar{\rho}) \text{ch } \mathring{L}(\lambda) q^{\Phi(\lambda + \bar{\rho}, \lambda + \bar{\rho})}. \end{aligned}$$

[Рассмотрите разложение $W = \mathring{W}W_1$ из упр. 12.5. Мы можем записать (ср. §12.1)

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} e(w) e(w(\rho) - \rho) / \mathring{R} &= \sum_{w \in W_1} e(w) \text{ch } \mathring{L}(w(\rho) - \bar{\rho}) e(\bar{\rho} - \rho) \\ &= q^{-\Phi(\bar{\rho}, \bar{\rho})} \sum_{w \in W_1} e(w) \text{ch } \mathring{L}(\lambda) q^{\Phi(\lambda + \bar{\rho}, \lambda + \bar{\rho})}, \end{aligned}$$

где $q = e(-\delta)$ и $\lambda = \overline{w(\rho)} - \bar{\rho} \in \bar{P}_+$ в силу упр. 12.5. Заметим, что $\overline{w(\rho)} = \text{af}(w)(\bar{\rho})$ (см. §6.6). Теперь мы можем использовать упр. 10.19, чтобы получить равенство $e(w) = \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} (\exp 4\pi i \rho)$.]

12.7. Сохраним обозначения упр. 12.6. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ — простые корни алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и s — число коротких корней в этом множестве. Пусть k — отношение квадратов длин длинных и коротких корней, и пусть $\mathring{\Delta}_s, \mathring{\Delta}_\ell$ — множества всех коротких и длинных корней. Пусть, кроме того, $\bar{\rho}^\vee$ — полусумма положительных дуальных корней и h — число Кокстера для $\mathfrak{g}$. Положим $a = h(h+1) \sum_{i=1}^{\ell} \Phi(\alpha_i, \alpha_i)$. Докажите следующее тождество:

$$\begin{aligned} q^{a/24} \prod_{n \geq 1} ((1 - q^n)^s (1 - q^{kn})^{\ell-s} \prod_{\alpha \in \mathring{\Delta}_s} (1 - q^n e(\alpha)) \prod_{\alpha \in \mathring{\Delta}_\ell} (1 - q^{kn} e(\alpha))) \\ = \sum_{\lambda \in \bar{P}_+} \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} (\exp 2\pi i \bar{\rho}^\vee / h) \text{ch } \mathring{L}(\lambda) q^{\Phi(\lambda + \bar{\rho}, \lambda + \bar{\rho})}. \end{aligned}$$

[Доказательство такое же, как для упр. 12.6. Используйте упр. 10.15 для $m = h$ и указание из упр. 12.3.]

12.8. Покажите, что тождества упр. 12.2 и 12.3 могут быть записаны в виде

$$\eta^{\dim \mathfrak{g}} = \sum_{\lambda \in \bar{P}_+} \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} (\exp 4\pi i \bar{\rho}) \dim \mathring{L}(\lambda) q^{\Phi(\lambda + \bar{\rho}, \lambda + \bar{\rho})},$$

$$\prod_{i=1}^{\ell} \eta(q^{h\Phi(\alpha_i, \alpha_i)})^{h+1} = \sum_{\lambda \in \bar{P}_+} \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} \exp(2\pi i \bar{\rho}^\vee / h) \dim \mathring{L}(\lambda) q^{\Phi(\lambda + \bar{\rho}, \lambda + \bar{\rho})}.$$

В частности, случай $\mathring{\mathfrak{g}} = s\ell_2$ дает еще одну форму тождества Якоби:

$$\varphi(q)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)/2}.$$

12.9. Сохраним обозначения упр. 12.2 и 12.3. Пусть $s = (s_0, \dots, s_\ell)$ — множество неотрицательных целых чисел, не все из которых равны нулю. Положим $m = s_0 + \sum_{i=1}^{\ell} a_i s_i$, где a_i определяются из условия, что $\sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i$ есть старший корень. Определим $h_i \in \mathfrak{h}$ формулой $\langle \alpha_i, h_i \rangle = s_i/m$ для $i = 1, \dots, \ell$ и положим $\sigma_i = \exp 2\pi i h_i$. Докажите тождество

$$q^{\dim \mathring{\mathfrak{g}}/24} \prod_{n \geq 1} \det_{\mathring{\mathfrak{g}}} (1 - q^n \sigma_i) = \sum_{\alpha \in M} \chi_{g_\alpha}^0(\sigma_i) q^{|\bar{\rho} + g\alpha|^2},$$

где $\chi_{\lambda}^0(\sigma_i) = \left(\sum_{w \in \check{W}} \epsilon(w) e^{w(\lambda + \bar{\rho})} / \sum_{w \in \check{W}} \epsilon(w) e^{w(\bar{\rho})} \right) (-2\pi i h_i).$

[Примените следующую специализацию формулы (12.1.7):

$$\Phi_s(e(-\alpha_0)) = q, \quad \Phi_s(e(-\alpha_i)) = e^{2\pi i s_i/m} \quad (i = 1, \dots, \ell).]$$

12.10. Выведите из упр. 12.6 другую форму тождества из упр. 12.9:

$$q^{\dim \mathring{\mathfrak{g}}/24} \prod_{n \geq 1} \det_{\mathring{\mathfrak{g}}} (1 - q^n \sigma_i) = \sum_{\lambda \in \bar{P}_+} \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} (\exp 4\pi i \bar{\rho}) \text{tr}_{\mathring{L}(\lambda)} (\sigma_i) q^{\Phi(\lambda + \bar{\rho}, \lambda + \bar{\rho})}.$$

12.11. Пусть $\mathring{\mathfrak{g}}$ — простая конечномерная алгебра Ли и $\mathfrak{g}' = \tilde{L}(\mathring{\mathfrak{g}})$ (см. §7.2). В данном неприводимом конечномерном $\mathring{\mathfrak{g}}$ -модуле $\mathring{L}(\lambda)$ для ненулевого комплексного числа b мы можем задать структуру $\mathfrak{g}'$ -модуля $\mathring{L}(\lambda; b)$, полагая $K \mapsto 0$, $t^j \otimes x \mapsto b^j x$ ($x \in \mathring{\mathfrak{g}}$). Покажите, что все неприводимые конечномерные $\mathfrak{g}'$ -модули имеют вид $\mathring{L}(\lambda_1; b_1) \otimes \dots \otimes \mathring{L}(\lambda_n; b_n)$, где все b_i различны. Покажите, что все неприводимые интегрируемые $\mathbb{C}[t] \otimes \mathring{\mathfrak{g}}$ -конечные $\mathfrak{g}'$ -модули имеют вид $F \otimes L(\Lambda)$, где F — неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}'$ -модуль и $\Lambda \in P_+$.

12.12. Сохраним обозначения упр. 12.11. Каждый интегрируемый $\mathfrak{g}'$ -модуль со старшим весом уровня $\frac{1}{2}$ может быть построен следующим образом. Возьмем $\mathfrak{g}$ -модуль $\tilde{L}(\lambda)$ с $(\lambda, \theta^\vee) \leq k$ и рассмотрим его как $\mathfrak{g}'_+ := \mathbb{C}K + (\mathbb{C}[t] \otimes \mathfrak{g})$ -модуль, полагая $K \mapsto kI$, $t^j \otimes \mathfrak{g} \mapsto 0$, если $j > 0$. Тогда $\mathfrak{g}'$ -модуль $U(\mathfrak{g}') \otimes_{U(\mathfrak{g}'_+)} \tilde{L}(\lambda)$ имеет единственный максимальный подмодуль, этот подмодуль порожден элементом $(F_0^{(-1)})^{k-(\lambda, \theta^\vee)+1} \otimes v_\lambda$, и фактор по нему является интегрируемым $\mathfrak{g}'$ -модулем со старшим весом $k\Lambda_0 + \lambda$.

12.13. Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый $A_1^{(1)}$ -модуль положительного уровня. Покажите, что $\text{mult}_{L(\Lambda)}(\Lambda - n\delta) \geq p(n)$, где $p(n)$ — классическая функция разбиений.

12.14. Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый $A_1^{(1)}$ -модуль; положим $s = (\Lambda, \alpha_0^\vee)$, $r = (\Lambda, \alpha_1^\vee)$. Покажите, что все доминантные максимальные веса $L(\Lambda)$ есть либо $\Lambda - j\alpha_0$, где $0 \leq j \leq [s/2]$, либо $\Lambda - j\alpha_1$, где $0 \leq j \leq [r/2]$.

12.15. Докажите, что все веса $A_1^{(1)}$ -модуля $L(\Lambda_0)$ имеют вид

$$\Lambda_0 - k^2\alpha_0 - (k^2 - k)\alpha_1 - s\delta, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{Z}_+.$$

12.16. Получите следующее разложение тензорного квадрата $A_1^{(1)}$ -модуля $L(\Lambda_0)$:

$$L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0) = \sum_{n \geq 0} a_n L(2\Lambda_0 - n\delta) + \sum_{n \geq 0} b_n L(2\Lambda_0 - \alpha_0 - n\delta),$$

где a_n и b_n могут быть определены из уравнения

$$\sum_{n \geq 0} a_n q^{2n} + \sum_{n \geq 0} b_n q^{2n+1} = \prod_{n \geq 1} (1 + q^{2n-1}).$$

[Используйте главную специализацию для определения a_n и b_n .]

12.17. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра, пусть $\Lambda \in P_+^k$ таков, что $(\Lambda, d) = 0$, и пусть $L(\Lambda) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} L(\Lambda)_j$ — градуировка типа $(1, 0, \dots, 0)$

(базисная градуировка). Тогда $L(\Lambda)_j$ — собственное подпространство для d , соответствующее собственному значению $-j$, и, следовательно, $\mathfrak{g}$ -инвариантно. Для $\lambda \in \check{P}_+$ положим

$$\Phi_{\Lambda, \lambda}(q) = \sum_{n \geq 0} (\text{кратность } \tilde{L}(\lambda) \text{ в } L(\Lambda)_{-n}) q^n,$$

где $\overset{\circ}{L}(\lambda)$ обозначает интегрируемый $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ -модуль со старшим весом λ . Покажите, что

$$\Phi_{\Lambda, \lambda}(q) = q^{-\sigma_{\Lambda}} \sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) q^{\frac{1}{2}|\lambda + \bar{\rho} - w(\bar{\rho})|^2} c_{\Lambda_0 + \lambda + \bar{\rho} - w(\bar{\rho})}^{\Lambda}.$$

Покажите, что для матрицы A типа $X_N^{(r)}$, где $X = A, D$ или E , имеет место соотношение

$$\Phi_{\Lambda_0, \lambda}(q) = q^{\frac{1}{2}|\lambda|^2} \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} (1 - q^{(\lambda + \bar{\rho}|\alpha)}) / \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\text{mult } j\delta}, \text{ если } \lambda \in M,$$

и $\Phi_{\Lambda_0, \lambda}(q) = 0$, если $\lambda \notin M$. Более общо, если $k = 1$ и Λ — единственный максимальный вес в $P(\Lambda) \cap P_+$, то

$$\Phi_{\Lambda, \lambda}(q) = a_{\Lambda}^{\Lambda}(q) q^{\frac{1}{2}(|\lambda|^2 - |\bar{\Lambda}|^2)} \prod_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} (1 - q^{(\lambda + \bar{\rho}|\alpha)}), \text{ если } \lambda \in \bar{\Lambda} + M,$$

и $\Phi_{\Lambda, \lambda}(q) = 0$ в противном случае.

12.18. Покажите, что функция разбиений $K(\alpha)$ для $A_1^{(1)}$ задается формулой

$$K(k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j p^{(3)}((j+1)k_0 - jk_1 - \frac{1}{2}j(j+1)),$$

где $p^{(3)}(j)$ определяется из соотношения

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} p^{(3)}(j) q^j = \varphi(q)^{-3}.$$

[Покажите, что для $\alpha = k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1$ справедливо соотношение $K(\alpha) + K(\tau_1(\alpha + \rho) - \rho) = p^{(3)}(k_0)$.]

12.19. Сохраним обозначения упр. 7.21 и замечания 3.8. Пусть (V, π) — интегрируемый модуль со старшим весом положительного уровня k над аффинной алгеброй $\mathfrak{g}(A)$, где A — расширенная матрица Картана для $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$. Покажите, что группа G^{π} , построенная в замечании 3.8, является центральным расширением $\varphi: G^{\pi} \rightarrow G$ группы G (из упр. 7.21) с помощью S^{π} . Покажите, что если положить $T^{\pi} := \varphi^{-1}(f(\overset{\circ}{Q}^{\vee})) \cap \widetilde{W}^{\pi}$, то мы получим центральное расширение

$$1 \rightarrow \{\pm I_V\} \rightarrow T^{\pi} \xrightarrow{\varphi} T \simeq \overset{\circ}{Q}^{\vee} \rightarrow 1.$$

Покажите, что если $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in T^n$ удовлетворяют условиям $\varphi(\tilde{\alpha}) = \alpha$, $\varphi(\tilde{\beta}) = \beta$, то

$$\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\beta}^{-1} = (-1)^{k(\alpha|\beta)}I_V.$$

12.20. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N и $\mathfrak{g} = \oplus \mathfrak{g}_j(s; r)$ — ее $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировка типа $(s; r)$. Рассмотрим реализацию типа s аффинной алгебры $\mathfrak{g}'(X_N^{(r)})$, задаваемую теоремой 8.7:

$$\mathfrak{g}'(X_N^{(r)}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} t^j \otimes \mathfrak{g}_j(s; r) \oplus \mathbb{C}K,$$

и используем обозначения этой теоремы. Выберем базис $u_{i,-j}$ в $\mathfrak{g}_{-j}(s; r)$ и дуальный базис $u^{i,j}$ в $\mathfrak{g}_j(s; r)$ и определим оператор

$$L_0^{g;s} = \frac{1}{2r(k+h^\vee)} \sum_i \left(u_{i;0}^{(0)} u^{i;0(0)} + 2 \sum_{n>0} u_{i,-n}^{(-n)} u^{i;\bar{n}(n)} \right) - H + rk \frac{(H|H)}{2} + \left(\frac{\dim \mathfrak{g}}{24} - \frac{|\rho|^2}{2h^\vee r} \right) \frac{k}{k+h^\vee}.$$

Для $j \in \mathbb{Z}$, $j \neq 0$, положим

$$L_j^{g;s} = \frac{1}{mj} [d_{mj}, L_0^{g;s}].$$

Покажите, что $[x^{(n)}, L_j^{g;s}] = nx^{(n+mj)}$ и что

$$[L_i^{g;s}, L_j^{g;s}] = (i-j)L_{i+j}^{g;s} + \delta_{i,-j} \frac{i^3 - i}{12} \dim \mathfrak{g}(X_N) \frac{k}{k+h^\vee}.$$

12.21. В предположениях упр. 12.20 пусть $\dot{\mathfrak{g}}$ — простая или абелева подалгебра в $\mathfrak{g}$, инвариантная относительно автоморфизма $\sigma_{s,r}$, и пусть $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_{s,r}$ — индуцированный автоморфизм алгебры $\dot{\mathfrak{g}}$, так что $r \sum \dot{\alpha}_i \dot{s}_i = m$ ($\dot{s}_i$ не обязательно взаимно просты). Пусть $L_j = L_j^{g;s} - L_j^{\dot{g};\dot{s}}$. Покажите, что L_i коммутируют с $\tilde{L}(\dot{\mathfrak{g}}, \dot{\sigma}, m)$ и что они удовлетворяют коммутационным соотношениям Вирасоро с центральным зарядом $c(k) - \dot{c}(\dot{k})$.

12.22. Применяя упр. 12.21 к $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h}$, $k = 1$, получите следующую формулу:

$$\frac{\dim \mathfrak{g}(X_N)}{24} - \frac{|\rho|^2}{2h^\vee r} = \frac{(r+1)(h^\vee+1)(N-\ell)}{24r}.$$

12.23. Покажите, что

$$b_\lambda^A(\mathfrak{h}) = c_\lambda^A q^R \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{\text{mult } n\delta},$$

где $R = \ell (= |\bar{\rho}|^2/2h^\vee(h+1))$, если $r = 1$, и $R = |\bar{\rho}|^2/2h^\vee(h^\vee+1)$, если $r > 1$.

12.24. Покажите, что для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$ -модуля $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+^*$, справедлива формула

$$\mathrm{tr}_{L(\Lambda)} q^{L_0 - c(k)/24} = \frac{\sum_{\gamma \in M} d(\bar{\Lambda} + (k + h^\vee)\gamma) q^{|\bar{\Lambda} + (k + h^\vee)\gamma|^2/2(k + h^\vee)}}{\eta^{\dim \mathfrak{g}}}.$$

§12.15. Библиографические замечания и комментарии

Тожества (12.1.4), (12.1.9) и (12.2.5) принадлежат Макдональду (Macdonald [1972]). Его доказательство (12.1.4), которое дано в рамках аффинных систем корней ($= \Delta^\infty$), весьма длинно и не объясняет «таинственных» сомножителей, соответствующих мнимым корням. (Эти сомножители получили объяснение в работах Кац [1974] и Moody [1975].) Эти тождества были раньше получены Дайсоном (Dyson [1972]) в классическом случае, но он не заметил связи с системами корней. Тожества (12.3.5) были получены Кацем (Кас [1978 A]) и Леповским (Lepowsky [1979]).

Изучение рядов a_λ^Λ было начато в работах Feingold — Lepowsky [1978] и Кас [1978 A]. Лемма 12.6 для $r = 1$ доказана Кацем (Кас [1978 A]); приведенное доказательство взято из статьи Frenkel — Кас [1980]. Тот факт, что струнные функции s_λ^Λ являются модулярными формами, отмечен в работе Кас [1980 B]. Это наблюдение было навеяно «фантазиями на тему монстра» Конвея и Нортон (Conway — Norton [1979]).

Изложение §12.4–12.7 в основном следует статье Кас — Peterson [1984 A].

Конструкция операторов T_n восходит к Сугаваре (Sugawara [1968]). В изложении §12.8 использованы работы Wakimoto [1986], Кас — Raina [1987] и Кас — Wakimoto [1988 A].

Предложение 12.10 принадлежит Годдарду, Кенту и Оливу (Goddard — Kent — Olive [1985]). Эта косет-конструкция была использована в работе Goddard — Kent — Olive [1986] (и независимо в работах Кас — Wakimoto [1986] и Tsuchiya — Kanie [1986 B]) для доказательства унитаризуемости дискретной серии представлений алгебры Вирасоро. Эта конструкция играла важную роль в недавних продвижениях в конформной теории поля.

Изложение §12.9–12.12 соответствует статьям Кас — Wakimoto [1988 A, 1989 A]. Результаты §12.13 были получены в работах Кас [1978 A] и Кас — Peterson [1984 A] более сложным методом.

Упражнения 12.2 и 12.3 принадлежат Макдональду (Macdonald [1972]). Форма тождеств Макдональда, приведенная в упр. 12.8, принадлежит Костанту (Kostant [1976]) (его доказательство более сложно). Упражнение 12.9 принадлежит Макдональду (не опубликовано). Упражнения 12.13 и 12.16 взяты из статьи Кас [1978 A], упр. 12.17 —

из статей Кас [1980 В] и Кас — Peterson [1984 А], упр. 12.18 — из статей Кас — Peterson [1980, 1984 А]. Частный случай упр. 12.19 рассмотрен в работе Frenkel — Кас [1980]; общий случай может быть получен с использованием формулы для центрального расширения через ручной символ (описанный в статье Garland [1980]). Упражнения 12.20–12.24 взяты из работы Кас — Wakimoto [1988 А].

Глава 13. Аффинные алгебры, тета-функции и модулярные формы

§13.0. Мы начнем эту главу с изложения теории тета-функций. Используя классические свойства преобразований для тета-функций, мы покажем, что линейная оболочка нормализованных характеров данного уровня инвариантна относительно действия $SL_2(\mathbb{Z})$. Применяя тождества для тета-функций (12.7.13) и (12.12.8), мы покажем, что струнные функции и функции ветвления являются модулярными формами, и найдем закон преобразования для этих форм. Кроме этого, используя теорию модулярных форм, мы докажем «очень странную» формулу (12.3.6), которая, в свою очередь, используется вместе с конструкцией Сугавары для нахождения верхней границы для порядков полюсов во всех каспах для струнных функций и функций ветвления. Затем мы изучаем «высокотемпературный предел» характеров, а также струнных функций и функций ветвления. Все это применяется к нахождению точных формул для кратностей весов и правил ветвления для интегрируемых модулей со старшим весом.

§13.1. Мы будем развивать теорию тета-функций в рамках следующего общего подхода. (Имея в виду приложения к аффинным алгебрам, мы используем те же обозначения, что и в предыдущих главах.)

Пусть ℓ — положительное целое число и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ — векторное пространство размерности $(\ell + 2)$ над $\mathbb{R}$ с невырожденной симметрической билинейной формой $(\cdot, \cdot)$ индекса $(\ell + 1, 1)$. Мы будем отождествлять $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ с $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ с помощью этой формы. Зафиксируем $\mathbb{Z}$ -решетку M в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ранга ℓ , положительно определенную и целочисленную (т. е. $(a|b) \in \mathbb{Z}$ для всех $a, b \in M$). Зафиксируем вектор $\delta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, такой, что $(\delta|\delta) = 0$ и $(\delta|M) = 0$.

Положим $\mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} M \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\mathring{\mathfrak{h}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}$ и продолжим $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ по линейности. Для $\lambda \in \mathfrak{h}$ обозначим через $\bar{\lambda}$ ортогональную проекцию λ на $\mathring{\mathfrak{h}}$. Пусть

$$Y = \{v \in \mathfrak{h} \mid \operatorname{Re}(\delta|v) > 0\}.$$

Для $\alpha \in \mathring{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ пусть t_{α} обозначает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{h}$, определенный по правилу (ср. (6.5.2))

$$t_{\alpha}(v) = v + (v|\delta)\alpha - \left((v|\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha|\alpha)(v|\delta)\right)\delta.$$

из статей Кас [1980 В] и Кас — Peterson [1984 А], упр. 12.18 — из статей Кас — Peterson [1980, 1984 А]. Частный случай упр. 12.19 рассмотрен в работе Frenkel — Кас [1980]; общий случай может быть получен с использованием формулы для центрального расширения через ручной символ (описанный в статье Garland [1980]). Упражнения 12.20–12.24 взяты из работы Кас — Wakimoto [1988 А].

Глава 13. Аффинные алгебры, тета-функции и модулярные формы

§13.0. Мы начнем эту главу с изложения теории тета-функций. Используя классические свойства преобразований для тета-функций, мы покажем, что линейная оболочка нормализованных характеров данного уровня инвариантна относительно действия $SL_2(\mathbb{Z})$. Применяя тождества для тета-функций (12.7.13) и (12.12.8), мы покажем, что струнные функции и функции ветвления являются модулярными формами, и найдем закон преобразования для этих форм. Кроме этого, используя теорию модулярных форм, мы докажем «очень странную» формулу (12.3.6), которая, в свою очередь, используется вместе с конструкцией Сугавары для нахождения верхней границы для порядков полюсов во всех каспах для струнных функций и функций ветвления. Затем мы изучаем «высокотемпературный предел» характеров, а также струнных функций и функций ветвления. Все это применяется к нахождению точных формул для кратностей весов и правил ветвления для интегрируемых модулей со старшим весом.

§13.1. Мы будем развивать теорию тета-функций в рамках следующего общего подхода. (Имея в виду приложения к аффинным алгебрам, мы используем те же обозначения, что и в предыдущих главах.)

Пусть ℓ — положительное целое число и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ — векторное пространство размерности $(\ell + 2)$ над $\mathbb{R}$ с невырожденной симметрической билинейной формой $(\cdot | \cdot)$ индекса $(\ell + 1, 1)$. Мы будем отождествлять $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ с $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^+$ с помощью этой формы. Зафиксируем $\mathbb{Z}$ -решетку M в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ ранга ℓ , положительно определенную и целочисленную (т. е. $(a|b) \in \mathbb{Z}$ для всех $a, b \in M$). Зафиксируем вектор $\delta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, такой, что $(\delta|\delta) = 0$ и $(\delta|M) = 0$.

Положим $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} M \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{h}$ и продолжим $(\cdot | \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ по линейности. Для $\lambda \in \mathfrak{h}$ обозначим через $\overset{\circ}{\lambda}$ ортогональную проекцию λ на $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$. Пусть

$$Y = \{v \in \mathfrak{h} \mid \operatorname{Re}(\delta|v) > 0\}.$$

Для $\alpha \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ пусть i_{α} обозначает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{h}$, определенный по правилу (ср. (6.5.2))

$$i_{\alpha}(v) = v + (v|\delta)\alpha - ((v|\alpha) + \tfrac{1}{2}(\alpha|\alpha)(v|\delta))\delta.$$

Отметим, что автоморфизм t_α характеризуется свойствами а) $t_\alpha(\delta) = \delta$; б) $t_\alpha(v) = v + (v|\delta)\alpha \bmod \mathbb{C}\delta$ и в) $(\cdot|\cdot)$ является t_α -инвариантной. Отсюда следует, что $t_\alpha t_\beta = t_{\alpha+\beta}$.

Для $\alpha \in \mathring{h}_\mathbb{R}$ пусть $p_\alpha(v) = v + 2\pi i\alpha$, $v \in \mathfrak{h}$. Все преобразования p_α и t_β ($\alpha, \beta \in \mathring{h}_\mathbb{R}$) пространства $\mathfrak{h}$ порождают группу N , называемую группой Гейзенберга. Более явно, $N = \mathring{h}_\mathbb{R} \times \mathring{h}_\mathbb{R} \times i\mathbb{R}$ с законом умножения

$$(\alpha, \beta, u)(\alpha', \beta', u') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta', u + u' + \pi i((\alpha|\beta') - (\alpha'|\beta))).$$

Действие N на $\mathfrak{h}$ дается формулой

$$(13.1.1) \quad (\alpha, \beta, u)(v) = t_\beta(v) + 2\pi i\alpha + (u - \pi i(\alpha|\beta))\delta,$$

так что $(\alpha, 0, 0)(v) = p_\alpha(v)$, $(0, \beta, 0)(v) = t_\beta(v)$, $(0, 0, u)(v) = v + u\delta$ и Y является N -инвариантным.

Обозначим через $N_\mathbb{Z}$ подгруппу в N , порожденную всеми $(\alpha, 0, 0)$, $(0, \beta, 0)$ при $\alpha, \beta \in M$ и $(0, 0, u)$ при $u \in 2\pi i\mathbb{Z}$. Тогда

$$N_\mathbb{Z} = \{(\alpha, \beta, u) \in N \mid \alpha, \beta \in M, u + \pi i(\alpha|\beta) \in 2\pi i\mathbb{Z}\}.$$

§13.2. Зафиксируем неотрицательное целое число k . *Тета-функция степени k* — это голоморфная функция F на области Y , такая, что для всех $v \in Y$ выполнены следующие два условия:

$$(T1) \quad F(n \cdot v) = F(v) \text{ для всех } n \in N_\mathbb{Z},$$

$$(T2) \quad F(v + a\delta) = e^{ka} F(v) \text{ для всех } a \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\widetilde{T}h_k$ обозначает пространство (над $\mathbb{C}$) всех тета-функций степени k . Тогда

$$\widetilde{T}h = \bigoplus_{k \geq 0} \widetilde{T}h_k$$

есть градуированная ассоциативная $\mathbb{C}$ -алгебра, называемая алгеброй тета-функций.

Чтобы получить примеры тета-функций, рассмотрим $M^* = \{\lambda \in \mathring{h}_\mathbb{R} \mid (\lambda|\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ для всех } \alpha \in M\}$ — решетку, дуальную к M . Пусть для положительного целого числа k

$$P_k = \{\lambda \in \mathfrak{h} \mid (\lambda|\delta) = k \text{ и } \bar{\lambda} \in M^*\}.$$

Для данного $\lambda \in P_k$ определим классическую тета-функцию степени k с характеристикой $\bar{\lambda}$ с помощью ряда

$$(13.2.1) \quad \Theta_\lambda = e^{-\frac{(\lambda|\lambda)}{2k}\delta} \sum_{\alpha \in M} e^{t_\alpha(\lambda)}.$$

Или, эквивалентно, возьмем $\lambda' \equiv \lambda \pmod{\mathbb{C}\delta}$, такой, что $(\lambda'|\lambda') = 0$, и положим

$$\Theta_\lambda = \sum_{\alpha \in M} e^{i\alpha(\lambda')}.$$

Заметим, что это есть в точности функция, определенная формулой (12.7.2) (которая естественно возникает в теории аффинных алгебр). Как в §12.7, мы можем переписать Θ_λ в другой форме:

$$(13.2.2) \quad \Theta_\lambda = e^{k\Lambda_0} \sum_{\gamma \in M+k^{-1}\bar{\lambda}} q^{\frac{1}{2}k(\gamma|\gamma)} e^{k\gamma}$$

Как и прежде, q обозначает $e^{-\delta}$ и $\Lambda_0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ — единственный изотропный вектор, такой, что

$$(\Lambda_0|\delta) = 1 \quad \text{и} \quad (\Lambda_0|M) = 0.$$

Ясно, что ряд (13.2.2) сходится абсолютно на Y к голоморфной функции; с помощью (13.2.1) (или (13.2.2)) легко убедиться, что Θ_λ удовлетворяет (T1) и (T2) и, следовательно, является тета-функцией степени k . Заметим также, что

$$(13.2.3) \quad \Theta_{\lambda+k\alpha+a\delta} = \Theta_\lambda \quad \text{для } \alpha \in M, a \in \mathbb{C}.$$

Выберем ортонормированный базис $v_1, \dots, v_\ell$ в $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^\circ$ и введем координаты на $\mathfrak{h}$ с помощью формулы

$$(13.2.4) \quad v = 2\pi i \left(\sum_{s=1}^{\ell} z_s v_s - \tau \Lambda_0 + u\delta \right),$$

так что мы часто будем писать (τ, z, u) , где $z = \sum_{s=1}^{\ell} z_s v_s \in \mathfrak{h}^\circ$, $\tau, u \in \mathbb{C}$,

вместо $v \in \mathfrak{h}$. Тогда $Y = \{(\tau, z, u) \mid z \in \mathfrak{h}^\circ; \tau, u \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \tau > 0\}$, и мы можем переписать Θ_λ в классической форме:

$$(13.2.5) \quad \Theta_\lambda(\tau, z, u) = e^{2\pi i k u} \sum_{\gamma \in M+k^{-1}\bar{\lambda}} e^{\pi i k \tau (\gamma|\gamma) + 2\pi i k (\gamma|z)}$$

(где $(\gamma|z) = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i z_i$, $\gamma = \sum_{i=1}^{\ell} \gamma_i v_i$). Заметим также, что в этих координатах $q = e^{-\delta} = e^{2\pi i \tau}$.

Пусть $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\}$ — верхняя полуплоскость Пуанкаре. Отметим, что голоморфная функция от $\tau \in \mathcal{H}$ лежит в $\widetilde{T}h_0$. Обратно, если $F \in \widetilde{T}h_0$, то F не зависит от u и является периодической по z для каждого фиксированного $\tau \in \mathcal{H}$ с периодами из $M + \tau M$. Поскольку $\mathfrak{h}/(M + \tau M)$ компактно, мы устанавливаем, что F есть функция от τ . Таким образом, доказана

ЛЕММА 13.2. $\widetilde{Th}_0$ есть алгебра голоморфных функций от $\tau \in \mathcal{H}$. $\square$

Следующая формула умножения очень полезна для приложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.2. Пусть Θ_λ и Θ_μ — классические тета-функции степени m и n соответственно. Тогда

$$\Theta_\lambda \Theta_\mu = \sum_{\alpha \in M \bmod (m+n)M} \Theta_{\lambda+\mu+n\alpha} \psi_\alpha,$$

где

$$\psi_\alpha = \sum_{\gamma \in (m+n)M} q^{[n\bar{\lambda} - m\bar{\mu} - mn(\alpha+\gamma)]^2 / 2mn(m+n)}.$$

Доказательство. Мы можем считать, что $|\lambda|^2 = |\mu|^2 = 0$. Тогда

$$\Theta_\lambda = \sum_{\alpha \in M} e^{t_\alpha(\lambda)}, \quad \Theta_\mu = \sum_{\beta \in M} e^{t_\beta(\mu)} \quad \text{и}$$

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda \Theta_\mu &= \sum_{\alpha, \gamma \in M} e^{t_\gamma(\lambda+t_\alpha(\mu))} \\ &= \sum_{\alpha \in M} q^{-|\lambda+t_\alpha(\mu)|^2/2(m+n)} \Theta_{\lambda+t_\alpha(\mu)} \\ &= \sum_{\alpha \in M \bmod (m+n)M} \Theta_{\lambda+t_\alpha(\mu)} \sum_{\gamma \in (m+n)M} q^{-|\lambda+t_\alpha(\mu)+\gamma|^2/2(m+n)} \\ &= \sum_{\alpha \in M \bmod (m+n)M} \Theta_{\lambda+\mu+n\alpha} \sum_{\gamma \in (m+n)M} q^{[n\bar{\lambda} - m\bar{\mu} + n\bar{\alpha} + \gamma]^2/2mn(m+n)}. \end{aligned}$$

$\square$

§13.3. Пусть D — оператор Лапласа, соответствующий форме $(\cdot|\cdot)$. В координатах (13.2.4) имеем

$$(13.3.1) \quad D = \frac{1}{4\pi^2} \left(2 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \tau} - \sum_{s=1}^l \left(\frac{\partial}{\partial z_s} \right)^2 \right).$$

Поскольку $D(e^\lambda) = (\lambda|\lambda)e^\lambda$, из (13.2.1) выводим, что

$$(13.3.2) \quad D(\Theta_\lambda) = 0.$$

Положим $Th_0 = \mathbb{C}$, $Th_k = \{F \in \widetilde{Th}_k \mid D(F) = 0\}$ для $k > 0$, $Th = \bigoplus_{k \geq 0} Th_k$. Отметим, что подпространство (над $\mathbb{C}$) Th в $\widetilde{Th}$ не является подкольцом (см. предложение 13.2).

Предложение 13.3. Множество $\{\Theta_\lambda \mid \lambda \in P_k \bmod (kM + C\delta)\}$ является $\mathbb{C}$ -базисом в Th_k (соответственно $\widetilde{Th}_0$ -базисом в $\widetilde{Th}_k$), если $k > 0$.

Доказательство. Пусть $F \in \widetilde{Th}_k$. Используя равенство $F(p_\alpha(v)) = F(v)$ для $\alpha \in M$ и (T2), мы можем для фиксированного τ разложить F в ряд Фурье

$$F = e^{k\Lambda_0} \sum_{\gamma \in M^*} a_\tau(\gamma) e^\gamma.$$

Применяя (T1), получаем, что $a_\tau(\gamma) e^{-\pi i k^{-1} \tau(\gamma/\tau)}$ зависит только от $\gamma \bmod kM$. Отсюда вытекает, что

$$(13.3.3) \quad F = \sum_{\lambda \in P_k \bmod kM + C\delta} c_\lambda(\tau) \Theta_\lambda.$$

Далее, зафиксируем положительное вещественное число a ; тогда для $\alpha \in k^{-1}M^*$

$$\Theta_\lambda(2\pi i \alpha + a\Lambda_0) = e^{2\pi i(\bar{\lambda}|\alpha)} \sum_{\gamma \in M + k^{-1}\bar{\lambda}} e^{-\frac{1}{2}k(\gamma|\tau)a}.$$

Поскольку характеры группы $(k^{-1}M^*)/M$ линейно независимы, мы получаем, что

$$(13.3.4) \quad \{\Theta_\lambda(a, z, 0) \mid \lambda \in P_k \bmod kM + C\delta\} \text{ — линейно независимое множество над } \mathbb{C}, \text{ где } \Theta_\lambda \text{ рассматриваются как функции от } z.$$

Это завершает доказательство линейной независимости Θ_λ над $\mathbb{C}$ и над $\widetilde{Th}_0$.

Наконец, если $D(F) = 0$, то, применяя (13.3.2), из (13.3.3) мы получаем, что

$$0 = D(F) = \frac{ik}{\pi} \sum_{\lambda} (dc_\lambda/d\tau) \Theta_\lambda.$$

Используя (13.3.4), получаем $dc_\lambda/d\tau = 0$, следовательно, Θ_λ порождают Th_k над $\mathbb{C}$. $\square$

Пример 13.3. Пусть $M = \mathbb{Z}\alpha$ — одномерная решетка с билинейной формой, нормализованной условием $(\alpha|\alpha) = 2$. Тогда $M^* = \frac{1}{2}M$ и следующие классические тета-функции образуют базис Th_m :

$$\Theta_{n,m}(\tau, z, u) := e^{\frac{2\pi i m u}{2\tau}} \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{n}{2m}} e^{2\pi i m (k^2 \tau + k z)}, \quad n \in \mathbb{Z} \bmod 2m\mathbb{Z}.$$

§13.4. Напомним некоторые элементарные факты о группе $SL_2(\mathbb{R})$ и ее дискретных подгруппах. Доказательства можно найти в книге Кнорр [1970].

Группа $SL_2(\mathbb{R})$ действует на $\mathcal{H}$ по правилу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Для каждого положительного целого числа n определим *главную конгруэнц-подгруппу*

$$\Gamma(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{n}, \quad b \equiv c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$$

и подгруппу

$$\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{n} \right\}.$$

Еще одной важной подгруппой является

$$\Gamma_\theta = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid ac \text{ и } bd \text{ четные} \right\}.$$

Все эти подгруппы имеют конечный индекс в $\Gamma(1) = SL_2(\mathbb{Z})$.

Положим $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

(13.4.1) S и T порождают $\Gamma(1)$; S и T^2 порождают Γ_θ ,

(13.4.2) T , $(T^r)^c$ и $-I$ порождают $\Gamma_0(r)$ для $r = 2$ и 3 .

Напомним, что метаблектическая группа $Mp_2(\mathbb{R})$ является двулистным накрытием группы $SL_2(\mathbb{R})$, определяемым следующим образом: $Mp_2(\mathbb{R}) = \{(A, j) \mid A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \text{ и } j \text{ — голоморфная функция от } \tau \in \mathcal{H}, \text{ такая, что } j^2 = c\tau + d\}, \text{ с законом умножения } (A, j)(A_1, j_1) = (AA_1, j(A_1 \cdot \tau)j_1(\tau))$. Группа $Mp_2(\mathbb{R})$ действует на $\mathcal{H}$ с помощью естественного гомоморфизма $Mp_2(\mathbb{R}) \rightarrow SL_2(\mathbb{R})$. Положим

$$\begin{aligned} Mp_2(\mathbb{Z}) \text{ (соотв. } Mp_2^\theta(\mathbb{Z})) \\ = \{(A, j) \in Mp_2(\mathbb{R}) \mid A \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ (соотв. } \in \Gamma_\theta)\}. \end{aligned}$$

Кроме этого, определим действие группы $Mp_2(\mathbb{R})$ на Y (фактически $SL_2(\mathbb{R})$ -действие):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot (\tau, z, u) = \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}, u - \frac{c(z|z)}{2(c\tau + d)} \right),$$

где $z \in \mathbb{H}$, $\tau \in \mathcal{H}$, $u \in \mathbb{C}$.

Ясно, что группы N и $SL_2(\mathbb{R})$ точно действуют голоморфными автоморфизмами пространства Y . Можно проверить, что $Mp_2(\mathbb{R})$ нормализует N ; а именно

$$(13.4.3) \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, j \right) (\alpha, \beta, u) \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, j \right)^{-1} = (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta, u).$$

Следовательно, мы имеем действие группы $G := Mp_2(\mathbb{R}) \ltimes N$ на Y .

Прямой проверкой доказывается.

ЛЕММА 13.4. Нормализатор подгруппы $N_{\mathbb{Z}}$ в подгруппе $Mp_2(\mathbb{R})$ группы G есть $Mp_2(\mathbb{Z})$, если решетка M четная (т. е. все $(\gamma|\gamma)$ четные для $\gamma \in M$), и $Mp_2^0(\mathbb{Z})$, если M нечетная (т. е. не является четной). $\square$

Наконец, определим (правое) действие G на голоморфных функциях на Y формулой $((A, j) \in Mp_2(\mathbb{R}), n \in N)$:

$$F|_{(A,j)}(\tau, z, u) = j((\tau))^{-\ell} F(A \cdot (\tau, z, u)), \quad F|_n(v) = F(n(v)).$$

(В этом месте использование $Mp_2(\mathbb{R})$ вместо $SL_2(\mathbb{R})$ необходимо для того, чтобы получить действие.) Ясно, что

$$(13.4.4) \quad D(F)|_n = D(F|_n) \quad \text{для } n \in N.$$

Докажем теперь важное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.4. а) $\widetilde{Th}|_{(A,j)} = \widetilde{Th}$, если решетка M четная и $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ или если решетка M нечетная и $A \in \Gamma_\theta$.

б) $Th|_{(A,j)} = Th$, если решетка M четная и $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ или если решетка M нечетная и $A \in \Gamma_\theta$.

Доказательство. а) непосредственно вытекает из леммы 13.4 и (13.4.4).

В силу предложения 13.3, чтобы вывести б) из а), достаточно проверить, что

$$D(\Theta_\lambda|_{(T,1)}) = 0, \quad D(\Theta_\lambda|_{(S,j)}) = 0.$$

Первое равенство очевидно. Второе немедленно вытекает из следующей простой формулы (вспомним, что $j^2 = \tau$):

$$D(j^{-\ell} e^{2\pi i k(u - |\gamma - z|^2/2\tau)}) = 0, \quad \text{где } \gamma \in \mathfrak{h}.$$

$\square$

Приведем также два простых свойства преобразований классических тета-функций степени k , которые непосредственно следуют из определений:

$$(13.4.5) \quad \Theta_\lambda|_{(\alpha,0,0)} = e^{2\pi i(\alpha|v)} \Theta_\lambda \quad \text{для } \alpha \in k^{-1}M^*;$$

$$(13.4.6) \quad \Theta_\lambda|_{(0,\alpha,0)} = \Theta_{\lambda - k\alpha} \quad \text{для } \alpha \in k^{-1}M^*.$$

Имеет место следствие предложения 13.3 и формулы (13.4.5).

СЛЕДСТВИЕ 13.4. Функция Θ_λ (определенная в (13.2.1)) характеризуется среди голоморфных функций на Y свойствами (T1), (T2), (13.3.2) и (13.4.5). $\square$

§13.5. Обозначим через $n = n(M)$ наименьшее положительное целое число, такое, что $nM^* \subset M$ и $n(\gamma|\gamma) \in 2\mathbb{Z}$ для всех $\gamma \in M^*$.

Теперь мы в состоянии доказать закон преобразования, который восходит к Якоби.

ТЕОРЕМА 13.5. Пусть $\lambda \in P_k$. Тогда

(13.5.1)

$$\Theta_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u - \frac{(z|z)}{2\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}\ell} |M^*/kM|^{-\frac{1}{2}} \\ \times \sum_{\mu \in P_k \bmod (kM + C\delta)} e^{-\frac{2\pi i}{k}(\bar{\lambda}|\mu)} \Theta_\mu(\tau, z, u);$$

(13.5.2)

$$\Theta_\lambda(\tau + 1, z, u) = e^{\pi i |\lambda|^2/k} \Theta_\lambda(\tau, z, u).$$

Кроме того, если $A \in \Gamma(kn)$ (соответственно $\Gamma(kn) \cap \Gamma_\theta$), когда решетка M четная (соответственно нечетная), то

$$(13.5.3) \quad \Theta_\lambda|_{(A,j)} = v(A, j; k) \Theta_\lambda,$$

где $v(A, j; k) \in \mathbb{C}$ и $|v(A, j; k)| = 1$.

Доказательство. Пользуясь тем, что

$$\Theta_\lambda|_g = (\Theta_{k\Lambda_0}|_{(0, -k^{-1}\bar{\lambda}, 0)})|_g = (\Theta_{k\Lambda_0}|_g)|_{g^{-1}(0, -k^{-1}\bar{\lambda}, 0)_g}$$

для $g \in G$, мы получаем, что в силу (13.4.6) достаточно доказать теорему для $\bar{\lambda} = 0$. Заметим также, что при замене $(\cdot| \cdot)$ на $k(\cdot| \cdot)$ тета-функция $\Theta_\lambda(\tau, z, u)$ степени k переходит в тета-функцию $\Theta_{k^{-1}\lambda}(\tau, z, ku)$ степени 1. Следовательно, мы можем (и будем) считать, что $\lambda = \Lambda_0$.

В силу предложения 13.4b) мы можем записать для $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ (соответственно $\in \Gamma_\theta$), если M четная (соответственно нечетная):

$$(13.5.4) \quad \Theta_{\Lambda_0}|_{(A,j)} = \sum_{\mu \in M^* \bmod M} f(\mu) \Theta_{\Lambda_0 + \mu}, \quad \text{где } f(\mu) \in \mathbb{C}.$$

Зафиксируем $\alpha \in M^*$. Поскольку в силу (13.4.5) имеет место равенство $\Theta_{\Lambda_0}|_{(\alpha, 0, 0)} = \Theta_{\Lambda_0}$, из (13.4.3) получаем

$$\Theta_{\Lambda_0}|_{(A, j)} = \Theta_{\Lambda_0}|_{(A, j)} |(A, j)^{-1}(\alpha, 0, 0)(A, j) = \Theta_{\Lambda_0}|_{(A, j)} |(d\alpha, -c\alpha, 0).$$

Следовательно, применяя $(A, j)^{-1}(\alpha, 0, 0)(A, j)$ к обеим частям (13.5.4), благодаря (13.4.5) и (13.4.6) получим

$$\Theta_{\Lambda_0}|_{(A, j)} = \sum_{\mu \in M^* \bmod M} f(\mu) e^{\pi i (dc(\alpha|\alpha) + 2d(\alpha|\mu))} \Theta_{\Lambda_0 + \mu + c\alpha}.$$

Если $A = S$, то, сравнивая это с (13.5.4), мы приходим к равенству $f(\mu + \alpha) = f(\mu)$ для всех $\alpha, \mu \in M^*$ и, следовательно,

$$(13.5.5) \quad \Theta_{\Lambda_0}|_{(S, j)} = v(S, j) \sum_{\mu \in M^* \bmod M} \Theta_{\Lambda_0 + \mu}, \quad \text{где } v(S, j) \in \mathbb{C}.$$

Если $A \in \Gamma(r)$, то $f(\mu) = f(\mu + c\alpha) = f(\mu) e^{2\pi i(\alpha|\mu)}$ для всех $\alpha, \mu \in M^*$. Значит, $f(\mu) = 0$, если $\mu \notin M$. Это завершает доказательство (13.5.3). Тот факт, что $|v(A, j; m)| = 1$, вытекает из следствия 13.5 ниже. (13.5.2) очевидно.

Далее, как было объяснено в начале доказательства, из (13.5.5) вытекает, что (13.5.1) выполняется с точностью до постоянного множителя $v(S, j) \in \mathbb{C}$. Чтобы вычислить эту константу, заметим, что $(S, j)^8 = I$ и что строки матрицы преобразования (S, j) в базисе $\{\Theta_\lambda\}$ попарно ортогональны. Отсюда следует, что эта матрица унитарна. Непосредственно получаем, что $|v(S, j)| = |M^*/kM|^{-\frac{1}{2}}$. Наконец, пользуясь тем, что $\Theta_\lambda(0, i, 0) > 0$, из (13.5.5) выводим равенство $v(S, j) = (-i)^{\frac{1}{2}e} |v(S, j)|$. $\square$

Поскольку матрица преобразования (S, j) в базисе $\{\Theta_\lambda\}$ унитарна и матрица преобразования (T, j) (соответственно (T^2, j)) для четной (соответственно для нечетной) M является (диагональной) унитарной, используя (13.4.1), мы приходим к следующему полезному результату.

Следствие 13.5. Матрица преобразования из $Mp_2(\mathbb{Z})$ (соответственно $Mp_2^0(\mathbb{Z})$) для четной (соответственно для нечетной) M в базисе $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda \in P_k \bmod kM + c\delta}$ унитарна.

Пример 13.5. Теорема 13.5 дает следующий закон преобразования для тета-функций $\Theta_{n, m}$ из примера 13.3:

$$(13.5.6) \quad \begin{aligned} & \Theta_{n, m} \left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u + \frac{z^2}{2\tau} \right) \\ &= (-i\tau)^{\frac{1}{2}} (2m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n' \in \mathbb{Z} \bmod 2m\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi i n n'}{m}} \Theta_{n', m}(\tau, z, u). \end{aligned}$$

§13.6. Здесь мы приведем краткий список некоторых фактов о модулярных формах, которые будут использованы впоследствии.

Зафиксируем подгруппу Γ конечного индекса в $\Gamma(1)$, характер $\chi: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^\times$, удовлетворяющий условию $|\chi(A)| = 1$ для $A \in \Gamma$, и вещественное число k . Тогда функция $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *модулярной формой веса k и характера χ для Γ* , если f — голоморфная функция на $\mathcal{H}$ и $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \chi(A)(c\tau+d)^{-k}f(\tau)$ для всех $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ и $\tau \in \mathcal{H}$.

Пусть f — такая модулярная форма. Тогда, поскольку Γ имеет конечный индекс в $\Gamma(1)$, $T^s \in \Gamma$ для некоторого положительного целого числа s и, следовательно, $f(\tau+s) = e^{2\pi i C} f(\tau)$ для некоторого $C \in \mathbb{R}$. Положим

$$F(e^{2\pi i \tau/s}) = e^{-2\pi i C \tau/s} f(\tau).$$

Тогда F является корректно определенной голоморфной функцией от $z = e^{2\pi i \tau/s}$ в проколотом диске $0 < |z| < 1$. Следовательно, F разлагается в ряд Лорана $F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, абсолютно сходящийся при $0 < |z| < 1$. Поэтому имеет место разложение Фурье

$$f(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i(n+C)\tau/s} \quad \text{для } \tau \in \mathcal{H}.$$

Назовем f *мероморфной* в $i\infty$, если $a_n = 0$ для $n \ll 0$, *голоморфной* в $i\infty$, если $a_n \neq 0$ влечет за собой $n + C \geq 0$, и *обращающейся в нуль* в $i\infty$, если $a_n \neq 0$ влечет за собой $n + C > 0$. Если f голоморфна в $i\infty$, мы скажем, что *значение f в $i\infty$ равно a_{-C}* (интерпретируется как 0, если $C \notin \mathbb{Z}$). Если $n_0 = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$, положим $r = |(n_0 + C)/s|$ и скажем, что f имеет *нуль* (соответственно *полюс*) *порядка r в $i\infty$* , если $n_0 + C \geq 0$ (соответственно ≤ 0).

Касп подгруппы Γ конечного индекса в $SL_2(\mathbb{Z})$ — это ее орбита в $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$, где $a/0$ интерпретируется как $i\infty$ для $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Так как $\Gamma(1)$ действует транзитивно на $\mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$, множество каспов подгруппы Γ конечно. Иногда мы будем говорить о каспе $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{i\infty\}$ подгруппы Γ ; имеется в виду орбита элемента α относительно Γ . Например, $\Gamma(1)$ имеет один касп $i\infty$, Γ_θ имеет два каспа: $i\infty$ и -1 , и $\Gamma_0(k)$ для простого k имеет два каспа: $i\infty$ и 0 .

Пусть f — такая же функция, как и выше, и рассмотрим касп α для Γ . Пусть $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)$ обладает тем свойством, что $B(i\infty) = \alpha$. Тогда $f_0(\tau) := (c\tau + d)^{-k} f(B\tau)$ является модулярной формой веса k и некоторого характера χ_0 для $B^{-1}\Gamma B$. Скажем, что f *мероморфна*, *голоморфна* или *имеет нуль* или *полюс порядка r в α* , если f_0 мероморфна, голоморфна или имеет нуль или полюс порядка r в $i\infty$. Мы будем говорить, что f является *R -сингулярной*, если порядки ее полюсов во всех каспах $\leq R$.

Модулярная форма веса k и характера χ для Γ называется *мероморфной модулярной формой*, *голоморфной модулярной формой* или

каска-формой, если она мероморфна, голоморфна или обращается в нуль во всех касках подгруппы Γ соответственно.

Голоморфная модулярная форма веса 0 является константой. Это позволяет отождествлять модулярные формы. Далее, как обычно, q будет обозначать $e^{2\pi i\tau}$.

Используя различные специализации классических тета-функций, мы можем строить модулярные формы. Действительно, для данной голоморфной функции F на Y и $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ определим голоморфную функцию $F^{\alpha, \beta}(\tau)$ на $\mathcal{H}$ по формуле

$$(13.6.1) \quad F^{\alpha, \beta}(\tau) := (F|_{(\alpha, \beta, 0)})(\tau, 0, 0) = F(\tau, -\alpha + \tau\beta, -\frac{1}{2}(\beta| - \alpha + \tau\beta)).$$

Например,

$$(13.6.2) \quad \Theta_{\lambda}^{\alpha, \beta}(\tau) = e^{\pi i k(\alpha|\beta)} \sum_{\gamma \in M + k^{-1}\bar{\lambda} - \beta} e^{2\pi i k(\alpha|\gamma)} q^{k|\gamma|^2/2}$$

Кроме того, ясно, что в силу (13.4.3)

$$(13.6.3) \quad (F|_{(A, j)})^{\alpha, \beta}(\tau) = F^{a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta}(\tau)|_{(A, j)},$$

где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, j \in Mp(2, \mathbb{R})$.

Частным случаем этого является

$$(13.6.4) \quad (F|_{(S, j)})^{\alpha, \beta}(\tau) = F^{-\beta, \alpha}(\tau)|_{(S, j)}.$$

Теперь легко доказать следующее

Предложение 13.6. Для данных положительных целых чисел s и m положим

$$\mathcal{F}_{m, s} = \{\Theta^{\alpha, \beta}(\tau) \mid \Theta \in Th_m, s\alpha \in M, s\beta \in M\}.$$

Тогда каждая функция из $\mathcal{F}_{m, s}$ является голоморфной модулярной формой веса $\frac{1}{2}\ell$ для $\Gamma(mn) \cap \Gamma(s)$ (соответственно $\Gamma(mn) \cap \Gamma_{\theta} \cap \Gamma(s)$), если решетка M четная (соответственно нечетная).

Доказательство. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(mn)$ (соответственно $\Gamma(mn) \cap \Gamma_{\theta}$). Тогда по теореме 13.5 и (13.6.3)

$$v(A)\Theta_{\lambda}^{\alpha, \beta}(\tau) = \Theta_{\lambda}^{a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta} \left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) (c\tau + d)^{-\frac{\ell}{2}},$$

где $u(A) \in \mathbb{C}$, $|u(A)| = 1$. С другой стороны, в силу (13.6.2)

$$\Theta_{\lambda}^{\alpha, \beta}(\tau) = \pm \Theta_{\lambda}^{a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta}(\tau), \quad \text{если} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(s).$$

Итак, каждая функция из $\mathcal{F}_{m,s}$ обладает требуемыми свойствами преобразований.

Кроме того, из (13.6.2) ясно, что $\mathcal{F}_{m,s}|_{(\Gamma^{\epsilon}, j)} = \mathcal{F}_{m,s}$ для $\epsilon = 1$ или 2 в соответствии с тем, является M четной или нечетной. Используя это, а также (13.6.4) и (13.4.1), мы заключаем, что линейная оболочка $\mathcal{F}_{m,s}$ инвариантна относительно $Mp_2(\mathbb{Z})$, если M четна. Поскольку все функции из $\mathcal{F}_{m,s}$ голоморфны в каспе $i\infty$, мы выводим из леммы 13.12 в §13.12, что все они являются голоморфными модулярными формами при условии, что M четна. Общий случай сводится к рассмотренному с помощью замены переменных $\tau \rightarrow 2\tau$. $\square$

Следствие 13.6. Пусть M — некоторая $\mathbb{Z}$ -решетка ранга ℓ и $(\cdot, \cdot)$ — положительно определенная $\mathbb{Q}$ -значная билинейная форма на M . Пусть $\epsilon : M \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение, постоянное на классах смежности по некоторой подрешетке конечного индекса, и $a \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Тогда

$$f(\tau) = \sum_{\gamma \in M} \epsilon(\gamma) q^{|\gamma + a|^2}$$

есть голоморфная модулярная форма веса $\frac{1}{2}\ell$ для некоторой главной конгруэнц-подгруппы $\Gamma(N)$ и некоторого ее характера.

Доказательство. Заменяя M на подрешетку конечного индекса, мы можем считать, что $\epsilon(\gamma) = 1$. Кроме того, поскольку замена $(\cdot, \cdot)$ на $\frac{1}{k}(\cdot, \cdot)$ соответствует замене $\Gamma(N)$ на $\Gamma(kN)$, мы можем считать, что M — целочисленная решетка. Но тогда $f(\tau) = \Theta_{\Lambda_0}^{0, -a}$. $\square$

Приведем наиболее известные примеры голоморфных модулярных форм:

$$f_{n,m}(\tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{m(j+n/2m)^2}, \quad g_{n,m}(\tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{m(j+n/2m)^2},$$

где $m, n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $m > 0$. Так как $f_{n,m}(\tau) = \Theta_{n,m}(\tau, 0, 0)$, из (13.5.6) при условии, что $n \in \mathbb{Z}$, получаем

$$(13.6.5) \quad f_{n,m}(-\tau^{-1}) = \left(\frac{-i\tau}{2m} \right)^{1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z} \bmod 2m\mathbb{Z}} e^{i\pi kn/m} f_{k,m}(\tau).$$

(В действительности (13.5.6) влечет за собой (13.6.5) только для целых m ; для полуцелых m необходимо в примере 13.3 взять $(\alpha|\alpha) = 1$.) Поскольку $g_{n,m} = f_{n,4m} - f_{n+2m,4m}$, из (13.6.5) выводим, что если $m, n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, то

$$(13.6.6) \quad g_{n,m}(-\tau^{-1}) = \left(\frac{-i\tau}{2m}\right)^{1/2} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq k < m - \frac{1}{2}}} (2 \cos \frac{(2k+1)n}{2m}) g_{k+\frac{1}{2},m}(\tau).$$

Частным случаем этой формулы является формула

$$(13.6.7) \quad g_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(-\tau^{-1}) = (-i\tau)^{1/2} g_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\tau).$$

Теперь мы рассмотрим некоторые примеры модулярных форм, определяемых с помощью бесконечных произведений, и среди них η -функцию Дедекинда

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau / 12} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \quad \tau \in \mathcal{H}.$$

Отправной точкой для нас является тождество (12.7.4) для аффинной алгебры $A_1^{(1)}$. Используя (12.1.5) и сведения из примеров 12.1 и 13.3, мы можем переписать его в виде (мы полагаем $\alpha = \alpha_1$):

$$(13.6.8) \quad \begin{aligned} & (\Theta_{1,2} - \Theta_{-1,2})(\tau, z, u) \\ &= e^{2\pi i (\frac{1}{2}\tau - \frac{1}{2}(z|\alpha) - 2u)} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)(1 - q^{n-1} e^{2\pi i (z|\alpha)})(1 - q^n e^{-2\pi i (z|\alpha)}). \end{aligned}$$

Заметим, что для $m, r \in \mathbb{Z}$, $m > 0$,

$$g_{m/2-r, m/2}(\tau) = (\Theta_{1,2} - \Theta_{-1,2})^{0, \frac{1}{2m} r \alpha}(m\tau).$$

Следовательно, из (13.6.8) получаем (вспомним, что $(\alpha|\alpha) = 2$)

$$(13.6.9) \quad g_{m/2-r, m/2}(\tau) = q^{(2r-m)^2/8m} \prod_{j \geq 1} (1 - q^{mj})(1 - q^{mj-(m-r)})(1 - q^{mj-r}).$$

Частный случай для $m = 3$, $r = 1$ — это тождество Эйлера

$$(13.6.10) \quad \eta(\tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{\frac{3}{2}(j+\frac{1}{2})^2} \quad (= g_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(\tau)).$$

Сравнивая это с (13.6.7), получаем классическое функциональное уравнение для η -функции

$$(13.6.11) \quad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau).$$

Используя (13.4.1), мы выводим, что $\eta(\tau)$ является голоморфной касп-формой веса $\frac{1}{2}$ для $\Gamma(1)$ с характером χ_η , таким, что $\chi_\eta^{24} = 1$. Отметим, что $\chi_\eta(S) = e^{-\pi i/4}$, $\chi_\eta(T) = e^{\pi i/12}$.

§13.7. Применим теорию тета-функций к аффинным алгебрам. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ и M — решетка, введенная в §6.5.

Поскольку по определению $M = \mathbb{Z}(\overset{\circ}{W} \cdot \theta^\vee)$ и $(\theta^\vee | \theta^\vee) = 2a_0^{-1}$ (см. §6.4), мы видим, что решетка M всегда целочисленна; кроме того, она четна, если и только если тип исходной аффинной алгебры не $A_{2\ell}^{(2)}$. Используя сведения о конечных системах корней, приведенные в §6.7, легко вычислить для этой решетки константу $n = n(M)$, введенную в §13.5; она находится в следующей таблице:

$\gamma(A)$	ℓ	$n = n(M)$
$A_\ell^{(1)}$	нечетное	$2(\ell + 1)$
	четное	$\ell + 1$
$B_\ell^{(1)}, D_\ell^{(1)}, A_{2\ell-1}^{(2)}$	нечетное	8
	$2 \parallel \ell$	4
	$4 \mid \ell$	2
$C_\ell^{(1)}, E_7^{(1)}, D_{\ell+1}^{(2)}$		4
$E_6^{(1)}, G_2^{(1)}, D_4^{(3)}$		3
$F_4^{(1)}, A_{2\ell}^{(2)}, E_6^{(2)}$		2
$E_8^{(1)}$		1

Зафиксируем положительное целое число k . Используя (6.1.1), мы можем записать (ср. §10.1 и 12.4):

$$P^k = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \text{уровень}(\lambda) = k, \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \text{ для } \alpha \in \overset{\circ}{Q}^\vee\}.$$

Вспомним также определение из §13.2:

$$P_k = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \text{уровень}(\lambda) = k, (\lambda | \alpha) \in \mathbb{Z} \text{ для } \alpha \in M\}.$$

Применяя (6.5.8) и (6.5.9), получаем

$$(13.7.1) \quad P_k \supset P^k,$$

$$(13.7.2) \quad P_k = P^k, \quad \text{если } r = 1 \text{ или } a_0 = 2.$$

ЛЕММА 13.7. Пусть Θ_λ , $\lambda \in P_k$, — классическая тета-функция, соответствующая решетке M . Если $A \in \Gamma(kn)$, то

$$\Theta_\lambda|_{(A,j)} = v(A, j; k) \Theta_\lambda,$$

где $v(A, j; k) \in \mathbb{C}$, $|v(A, j; k)| = 1$.

Доказательство. Поскольку $n = 2$ есть единственный случай, когда M нечетна, и так как $\Gamma_\theta \subset \Gamma(2k)$, лемма следует из теоремы 13.5. $\square$

Определим пространство *антиинвариантных* классических тета-функций степени k по правилу

$$(13.7.3) \quad Th_k^- = \{F \in Th_k \mid F(w(v)) = \epsilon(w)F(v) \text{ для } w \in \overset{\circ}{W}, v \in \mathfrak{h}\}.$$

Используя предложение 6.5 и (6.5.10), мы видим, что пространство Th_k^- состоит из голоморфных функций F на Y , обладающих такими четырьмя свойствами:

$$(T1^-) \quad F(w(\lambda)) = \epsilon(w)F(\lambda) \text{ для } w \in W;$$

$$(T2^-) \quad F(\lambda + 2\pi i\alpha) = F(\lambda) \text{ для } \alpha \in M;$$

$$(T3^-) \quad F(\lambda + a\delta) = e^{ka}F(\lambda) \text{ для } a \in \mathbb{C};$$

$$(T4^-) \quad DF = 0.$$

Для данного $\lambda \in P_k$ введем антиинвариантную классическую тета-функцию степени k и характеристики $\tilde{\lambda}$:

$$(13.7.4) \quad A_\lambda = \sum_{w \in \overset{\circ}{W}} \epsilon(w) \Theta_{w(\lambda)}.$$

В силу (13.7.3), предложения 6.5 и (6.5.10) имеем

$$(13.7.5) \quad A_\lambda = e^{-\frac{(\lambda|\lambda)}{2k}\delta} \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\lambda)}.$$

Положим $P_{k+} = P_+ \cap P_k$, $P_{k++} = P_{++} \cap P_k$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.7. а) Множество $\{A_\lambda \mid \lambda \in P_{k++} \bmod \mathbb{C}\delta\}$ является $\mathbb{C}$ -базисом в Th_k^- .

б) Если $\lambda \in P_{++}$, то

$$A_\lambda|_{(S,j)} = (-i)^{\frac{1}{2}\ell} |M^*/kM|^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{\mu \in P_{k++} \bmod \mathbb{C}\delta} \sum_{w \in \dot{W}} \epsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k}(w(\bar{\lambda})|\bar{\mu})} A_\mu;$$

$$A_\lambda(\tau+1, z, u) = e^{\pi i |\bar{\lambda}|^2/k} A_\lambda(\tau, z, u).$$

Доказательство. В силу предложения 13.3 множество $\{A_\lambda \mid \lambda \in P_k\}$ порождает Th_k^- . Благодаря лемме 12.4 и предложению 6.5 мы имеем

$$(13.7.6) \quad P_m \bmod (mM + \mathbb{C}\delta) = \bigcup_{w \in \dot{W}} w(P_{k+} \bmod \mathbb{C}\delta) \quad (\text{дизъюнктивное объединение}).$$

Но ясно, что справедливо соотношение

$$(13.7.7) \quad A_\mu = 0, \text{ если } r_i(\mu) = \mu \text{ для некоторого } i.$$

Следовательно, в силу (13.7.6) множество $\{A_\lambda \mid \lambda \in P_{k++} \bmod \mathbb{C}\delta\}$ порождает Th_k^- . Эти A_λ линейно независимы по предложению 13.3 и (13.7.6), что доказывает а).

По теореме 13.5

$$A_\lambda|_{(S,j)} = (-i)^{\frac{1}{2}\ell} |M^*/kM|^{-\frac{1}{2}} \times \sum_{\mu \in P_k \bmod (kM + \mathbb{C}\delta)} \left(\sum_{w \in \dot{W}} \epsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k}(w(\bar{\lambda})|\bar{\mu})} \right) \Theta_\mu.$$

Это вместе с (13.7.6) и (13.7.7) доказывает б). $\square$

§13.8. Мы приступим теперь к доказательству следующего ключевого результата:

ЛЕММА 13.8. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_l^{(1)}$ или $A_{2l}^{(2)}$. Тогда

а) $Th_k^- = 0$, если $k < h^\vee$ и $Th_{h^\vee}^- = \mathbb{C}A_\rho$;

б) $A_\rho|_{(S,j)} = (-i)^{\frac{1}{2}\ell + |\bar{\Delta}_+|} A_\rho$.

Доказательство. а) следует из (13.7.2) и предложения 13.7а). Из а) и предложения 13.7б) получаем

$$A_\rho|_{(S,j)} = (-i)^{\frac{1}{2}\ell} |M^*/h^\vee M|^{-\frac{1}{2}} c A_\rho, \text{ где } c = \sum_{w \in \dot{W}} \epsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k}(w(\bar{\rho})|\bar{\rho})}.$$

В силу следствия 10.5 $|c| = |M^*/h^\vee M|^{\frac{1}{2}}$. С другой стороны, тождество (10.4.4), примененное к $\hat{\mathfrak{g}}$, дает

$$c = \prod_{\alpha \in \hat{\Delta}_+} \left(-2i \sin \frac{\pi(\bar{\rho}|\alpha)}{h^\vee} \right).$$

Отсюда следует, что $i^{|\hat{\Delta}_+|} c$ есть положительное вещественное число, и тем самым доказательство закончено. $\square$

Из доказательства леммы 13.8 следует полезное тождество

$$(13.8.1) \quad \prod_{\alpha \in \hat{\Delta}_+} 2 \sin \frac{\pi(\bar{\rho}|\alpha)}{h^\vee} = |M^*/h^\vee M|^{1/2},$$

так как

$$(13.8.2) \quad (\bar{\rho}|\alpha) \leq (\bar{\rho}|\theta) < h^\vee.$$

Напомним формулу для нормализованного характера (см. (12.7.11)) для $\Lambda \in P_+^k$:

$$\chi_\Lambda(\tau, z, u) := q^{m_\Lambda} \text{ch}_{L(\Lambda)} = A_{\Lambda+\rho}/A_\rho.$$

Отметим, что частным случаем формулы (12.12.2) для $\hat{\mathfrak{g}} = 0$ является

$$(13.8.3) \quad \chi_\Lambda(\tau, z, u) = e^{2\pi i k u} \text{tr}_{L(\Lambda)} e^{2\pi i z} q^{L_0^g - \frac{1}{24}c(k)}, \quad \text{если } \mathfrak{g}(A) = \hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}).$$

Из предложения 13.7b) вместе с (13.7.2) и леммой 13.8b) непосредственно вытекает важный закон преобразования для нормализованных характеров.

ТЕОРЕМА 13.8. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_\ell^{(1)}$ или $A_{2\ell}^{(2)}$ и $\Lambda \in P_+^k$. Тогда

$$a) \quad \chi_\Lambda\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u - \frac{(z|z)}{2\tau}\right) = \sum_{\Lambda' \in P_+^k \bmod \mathbb{C}\delta} S_{\Lambda, \Lambda'} \chi_{\Lambda'}(\tau, z, u), \quad \text{где}$$

$$S_{\Lambda, \Lambda'} = i^{|\hat{\Delta}_+|} |M^*/(k + h^\vee)M|^{-\frac{1}{2}} \sum_{w \in \hat{W}} \varepsilon(w) e^{-\frac{2\pi i(\bar{\Lambda} + \bar{\rho}|w(\bar{\Lambda}' + \bar{\rho}))}{k + h^\vee}},$$

$$\chi_\Lambda(\tau + 1, z, u) = e^{2\pi i m_{\bar{\Lambda}}} \chi_\Lambda(\tau, z, u).$$

б) Линейная оболочка системы $\{\chi_\Lambda\}_{\Lambda \in P_+^k \bmod C\delta}$ инвариантна относительно следующего действия группы $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$(13.8.4) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(\tau, z, u) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{z}{c\tau + d}, u - \frac{c(z|z)}{2(c\tau + d)}\right).$$

□

Матрица

$$S_{(k)} := (S_{\Lambda, \Lambda'})_{\Lambda, \Lambda' \in P_+^k \bmod C\delta}$$

обладает несколькими замечательными свойствами. Прежде всего очевидно, что

$$(13.8.5) \quad {}^t S_{(k)} = S_{(k)}.$$

Далее, из следствия 13.5 вытекает, что

$$(13.8.6) \quad S_{(k)} \text{ — унитарная матрица,}$$

и из (13.8.5) и (13.8.6) мы получаем, что

$$(13.8.7) \quad S_{(k)}^{-1} = \overline{S}_{(k)} \text{ (комплексно сопряженная).}$$

Для $\Lambda \in P_+^k$ положим

$${}^t \Lambda = k\Lambda_0 + {}^t \overline{\Lambda} + \langle \Lambda, d \rangle \delta,$$

где ${}^t \overline{\Lambda}$ — старший вес $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ -модуля, контрагredientного $\overset{\circ}{L}(\overline{\Lambda})$. Тогда

$$(13.8.8) \quad S_{(k)}^2 = (\delta_{\Lambda, {}^t \Lambda})_{\Lambda \in P_+^k \bmod C\delta}.$$

Это немедленно следует из равенства $S^2 \cdot f(\tau, z, u) = f(\tau, -z, u)$. Наконец, полагая для $\lambda \in \overline{P}_+$

$$\overset{\circ}{\chi}_\lambda(e^y) = \text{tr}_{\overset{\circ}{L}(\lambda)} e^y, \quad y \in \overline{\mathfrak{h}},$$

и используя формулу Вейля для характера, мы можем переписать формулу для $S_{\Lambda, \Lambda'}$ в виде

где

$$(13.8.10) \quad a(\Lambda) (= S_{\Lambda, k\Lambda_0}) = |M^*/(k + h^\vee)M|^{-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \check{\Delta}_+} 2 \sin \frac{\pi(\bar{\Lambda} + \bar{\rho}|\alpha)}{k + h^\vee}.$$

Замечание 13.8. В силу (13.8.2) $a(\Lambda)$ является положительным числом, так как $(\bar{\Lambda}|\alpha) \leq k$, если $\alpha \in \check{\Delta}_+$.

Между прочим отметим, что (13.8.6) дает следующее обобщение (13.8.1):

$$(13.8.11) \quad \sum_{\Lambda \in P_+^k \bmod C\delta} a(\Lambda)^2 = 1.$$

Пример 13.8. Если $\mathfrak{g}(A)$ имеет тип $A_1^{(1)}$, то

$$S_{(k-j)\Lambda_0 + j\Lambda_1, (k-j')\Lambda_0 + j'\Lambda_1} = \left(\frac{2}{k+2} \right)^{1/2} \sin \frac{\pi(j+1)(j'+1)}{k+2}.$$

§13.9. К сожалению, $P_k \neq P^k$ в остальных случаях, т. е. когда $a_0 = 1$ и $r = 2$ или 3. В результате лемма 13.8 и теорема 13.8 в этих случаях не выполняются. Покажем теперь, как с ними справиться.

Для матрицы A типа $X_N^{(r)} = A_{2\ell-1}^{(2)}, D_{\ell+1}^{(2)}, E_6^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$ пусть A' будет матрицей типа $X_{N'}^{(r')} = D_{\ell+1}^{(2)}, A_{2\ell-1}^{(2)}, E_6^{(2)}$ и $D_4^{(3)}$ соответственно. Пусть $\bar{A}'_j = (a_j/a_j^\vee)\bar{\Lambda}_j$ (соответственно $= (a_{\ell+1-j}/a_{\ell+1-j}^\vee)\bar{\Lambda}_{\ell+1-j}$), если $A = A_{2\ell-1}^{(2)}$ или $D_{\ell+1}^{(2)}$ (соответственно $= E_6^{(2)}$ или $D_4^{(3)}$). Пусть, кроме того,

$$\Lambda'_i = \bar{A}'_i + a_i^\vee \Lambda_0 \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad \Lambda'_0 = \Lambda_0, \quad \rho' = \sum_{i=0}^{\ell} \Lambda'_i, \quad k' = k, \quad P' = \sum_{i=0}^{\ell} \mathbb{Z}\Lambda'_i +$$

$C\delta$, $M' = \check{Q}^\vee$, $W' = W$. Тогда P' есть множество интегральных весов для $\mathfrak{g}(A')$ и т. д., и аналогом (13.7.2) является равенство

$$(13.9.1) \quad P_k = P'^k.$$

Обозначим через $\Theta'_\lambda, A'_\lambda, \chi'_\lambda$ соответствующие функции для $\mathfrak{g}(A')$. То-

гда формулу (13.5.1) и предложение 13.7b) можно переписать в виде

(13.9.2)

$$\Theta_{\lambda}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u - \frac{(z|z)}{2\tau}\right) = (-i\tau)^{\ell/2} |M^*/kM|^{-\frac{1}{2}} \\ \times \sum_{\mu \in P'^k \bmod kM'} e^{-2\pi i(\bar{\lambda}|\bar{\mu})} \Theta'_{\lambda}\left(\frac{\tau}{r}, \frac{z}{r}, u\right),$$

(13.9.3)

$$A_{\lambda}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u - \frac{(z|z)}{2\tau}\right) = (-i\tau)^{\ell/2} |M^*/kM|^{-\frac{1}{2}} \\ \times \sum_{\mu \in P'_{++}^k \bmod C\delta} \sum_{w \in \dot{W}} \varepsilon(w) e^{-2\pi i(w(\bar{\lambda})|\bar{\mu})} A_{\mu}\left(\frac{\tau}{r}, \frac{z}{r}, u\right).$$

Точно так же, как для леммы 13.8b), мы выводим

$$(13.9.4) \quad A_{\rho}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u - \frac{(z|z)}{2\tau}\right) = (-i\tau)^{\ell/2} (-i)^{|\dot{\Delta}|+1} |M'/M|^{-\frac{1}{2}} A'_{\rho'}\left(\frac{\tau}{r}, \frac{z}{r}, u\right)$$

и следующий аналог формулы (13.8.1):

$$(13.9.5) \quad \prod_{\alpha \in \dot{\Delta}_{\downarrow}^{\vee}} 2 \sin \frac{\pi(\bar{\rho}|\alpha)}{h^{\vee}} = |M^*/h^{\vee} M'|^{1/2}, \quad \text{если } a_0 r = 2 \text{ или } 3.$$

Из (13.9.3) и (13.9.4) выводится аналог теоремы 13.8.

ТЕОРЕМА 13.9. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ при $r > 1$, $a_0 = 1$, и пусть $\Lambda \in P_+^k$. Тогда

а) $\chi_{\Lambda}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}, u - \frac{(z|z)}{2\tau}\right) = \sum_{\Lambda' \in P'_{++}^k \bmod C\delta} S_{\Lambda, \Lambda'} \chi'_{\Lambda'}\left(\frac{\tau}{r}, \frac{z}{r}, u\right)$, где

$$S_{\Lambda, \Lambda'} = i^{|\dot{\Delta}|+1} |M^*/(k + h^{\vee})M|^{-\frac{1}{2}} |M'/M|^{\frac{1}{2}} \sum_{w \in \dot{W}} \varepsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k+\bar{h}^{\vee}}(w(\bar{\Lambda}+\bar{\rho})|\bar{\Lambda}' + \bar{\rho}')}, \\ \chi_{\Lambda}(\tau + 1, z, u) = e^{2\pi i m \bar{\Lambda}} \chi_{\Lambda}(\tau, z, u).$$

б) Линейная оболочка системы $\{\chi_{\Lambda}\}_{\Lambda \in P_{++}^k \bmod C\delta}$ инвариантна относительно $\Gamma_0(r)$ с действием (13.8.4).

Доказательство. Поскольку ${}^tT = ST^{-1}S^{-1}$, используя (13.4.2), мы видим, что а) влечет за собой б). $\square$

Чтобы рассматривать ниже все случаи в единой форме, для $r = 1$ или $a_0 = 2$ положим $A' = A$, $\Lambda_i = \Lambda'_i$, $P = P'$, $M = M'$, $\rho = \rho'$ и т. д., и пусть $r' = 1$.

§13.10. Теперь мы можем доказать закон преобразования для струнных функций для произвольных аффинных алгебр, а также для функций ветвления в случае нескрученных алгебр. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, положим для $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g})$

$$S_{\Lambda, \Lambda'} = \prod_{j \geq 1} S_{\Lambda_{(j)}, \Lambda'_{(j)}}.$$

Если $\dot{\mathfrak{g}}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, удовлетворяющая условию теоремы 13.10b) ниже, положим

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\lambda_{(0)}, \lambda'_{(0)}} &= |\dot{M}_0^* / \dot{k}_0 \dot{M}_0|^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi i (\bar{\lambda}_{(0)} | \bar{\lambda}'_{(0)})' / \dot{k}_0}, \\ \dot{S}_{\lambda, \lambda'} &= \prod_{j \geq 0} \dot{S}_{\lambda_{(j)}, \lambda'_{(j)}}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 13.10. а) Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра ранга $\ell + 1$ и $\bar{\Lambda} \in P_+^k$. Тогда

$$c_{\bar{\Lambda}}^{\Lambda}(-\frac{1}{\tau}) = |M^* / kM|^{-1/2} (-i\tau)^{-\ell/2} \sum_{\substack{\Lambda' \in P_+^{k'} \bmod C\delta \\ \lambda' \in P_+^{k'} \bmod (kM' + C\delta)}} S_{\Lambda, \Lambda'} e^{2\pi i (\bar{\Lambda} | \bar{\lambda}') / k} c_{\lambda'}^{\Lambda'}(\frac{\tau}{r}).$$

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая конечномерная алгебра Ли с подалгеброй Картана $\bar{\mathfrak{h}}$ и дуальной корневой решеткой $\bar{Q}^V \subset \bar{\mathfrak{h}}$, и пусть $\dot{\mathfrak{g}}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$, такая, что ее центр $\dot{\mathfrak{g}}_{(0)}$ порождается над $\mathbb{C}$ решеткой $\dot{M}_0 := \bar{Q}^V \cap \dot{\mathfrak{g}}_{(0)}$. Пусть, кроме того, $\Lambda \in P_+^k$, где $k = (k_1, k_2, \dots)$, $k_i > 0$. Тогда

$$(13.10.1) \quad b_{\bar{\Lambda}}^{\Lambda}(-\frac{1}{\tau}; \dot{\mathfrak{g}}) = \sum_{\substack{\Lambda' \in P_+^{k'} \bmod C\delta \\ \lambda' \in P_+^{k'} \bmod (C\delta + \dot{k}_0 \dot{M}_0)}} S_{\Lambda, \Lambda'} \bar{S}_{\lambda, \lambda'} b_{\lambda'}^{\Lambda'}(\tau; \dot{\mathfrak{g}}).$$

Доказательство. Мы докажем б). Доказательство а) точно такое же (з случае нескрученных алгебр а) есть частный случай б)).

Рассмотрим векторы-столбцы

$$\bar{\chi}(\tau, z, u) = (\chi_{\Lambda})_{\Lambda \in P_+^k \bmod C\delta}, \quad \dot{\bar{\chi}}(\tau, z, u) = (\dot{\chi}_{\lambda})_{\lambda \in P_+^{k'} \bmod (C\delta + \dot{k}_0 \dot{M}_0)},$$

где $\dot{\chi}_{\lambda} = \dot{\chi}_{\lambda_{(0)}} (\dot{\Theta}_{\lambda_{(0)}}^0 / \eta(\tau)^{\ell_0})$ (см. (12.12.8)), и матрицу функций ветвления

$$B(\tau) = (b_{\lambda}^{\Lambda}(\tau; \dot{\mathfrak{g}}))_{\substack{\Lambda \in P_+^k \bmod C\delta \\ \lambda \in P_+^{k'} \bmod (C\delta + \dot{k}_0 \dot{M}_0)}}$$

Тогда соотношение (12.12.8) можно переписать в матричной форме:

$$(13.10.2) \quad \overline{\chi}(\tau, z, u) = B(\tau) \dot{\overline{\chi}}(\tau, z, u), \quad z \in \dot{\mathfrak{h}}.$$

Применим преобразование S к обеим частям (13.10.2), используя теорему 13.8а) и (13.5.1):

$$S_{(k)} \overline{\chi}(\tau, z, u) = B(-\frac{1}{\tau}) \dot{S}_{(k)} \dot{\overline{\chi}}(\tau, z, u).$$

Подставляя выражение (13.10.2) для $\overline{\chi}$ в это уравнение, мы получаем

$$S_{(k)} B(\tau) \dot{\overline{\chi}}(\tau, z, u) = B(-\frac{1}{\tau}) \dot{S}_{(k)} \dot{\overline{\chi}}(\tau, z, u).$$

Поскольку функции $\{\dot{\chi}_\lambda\}_{\lambda \in P_+^k \bmod (C\delta + k_0 M_0)}$ линейно независимы (см. предложения 13.7а) и 13.3), мы выводим, что $S_{(k)} B(\tau) = B(-\frac{1}{\tau}) \dot{S}_{(k)}$, а это в силу (13.8.5) эквивалентно

$$(13.10.3) \quad B(-\frac{1}{\tau}) = S_{(k)} B(\tau) \overline{S}_{(k)},$$

и б) доказано. $\square$

Замечание 13.10. Условия на $\mathfrak{g} \supset \dot{\mathfrak{g}}$ в теореме 13.10b) означают просто, что $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли замкнутой редуктивной подгруппы в полупростой группе Ли, соответствующей $\mathfrak{g}$.

Так как очевидно, что

$$(13.10.4) \quad \begin{aligned} c_\lambda^\Lambda(\tau + 1) &= e^{2\pi i m_{\Lambda, \lambda}} c_\lambda^\Lambda(\tau), \\ b_\lambda^\Lambda(\tau + 1; \dot{\mathfrak{g}}) &= e^{2\pi i (m_\Lambda - \dot{m}_\lambda)} b_\lambda^\Lambda(\tau; \dot{\mathfrak{g}}), \end{aligned}$$

теорема 13.10 влечет за собой

Следствие 13.10. а) Если $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра и $k \in \mathbb{Z}_+$, то линейная оболочка всех странных функций c_λ^Λ при $\Lambda \in P_+^k$ инвариантна относительно (проективного) действия подгруппы $\Gamma_0(r')$

$$(13.10.5) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(\tau) = (c\tau + d)^{t/2} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

б) В предположениях теоремы 13.10b) для данного $k \in \mathbb{Z}_+$ линейная оболочка всех функций ветвления $b_\lambda^\Lambda(\dot{\mathfrak{g}})$ при $\Lambda \in P_+^k \bmod C\delta$ инвариантна относительно действия группы $SL_2(\mathbb{Z})$

$$(13.10.6) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(\tau) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right).$$

Доказательство. а) для $r' = 1$ и б) следуют из теоремы 13.10, (13.10.4) и (13.4.1). а) для $r' > 1$ доказывается такими же рассуждениями, как в доказательстве теоремы 13.9. $\square$

§13.11. В этом параграфе $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ и ранга $\ell + 1$. Мы дадим здесь доказательство «очень странной» формулы. Для данных $\alpha, \beta \in \check{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}$ определим соответствующую специализацию $f^{\alpha, \beta}$ для A_ρ следующим образом. Положим

$$\Delta^{\alpha, \beta} = \{\gamma \in \Delta \mid (\gamma | \Lambda_0 + \beta) = 0 \text{ и } (\gamma | \alpha) \in \mathbb{Z}\}.$$

Легко видеть, что $\Delta^{\alpha, \beta}$ есть конечная приведенная система корней и что

$$\Delta_+^{\alpha, \beta} := \{\gamma \in \Delta^{\alpha, \beta} \mid \bar{\gamma} \in \check{\Delta}_+ \cup \frac{1}{2}\check{\Delta}_+\}$$

есть множество положительных корней. Вспоминая определение (13.6.1), полагаем

$$f^{\alpha, \beta}(\tau) := \left(A_\rho \prod_{\gamma \in \Delta_+^{\alpha, \beta}} (1 - e^{-\gamma})^{-1} \right)^{\alpha, \beta}(\tau).$$

ЛЕММА 13.11.1. Пусть $\alpha, \beta \in \sum_{j=1}^{\ell} \mathbb{Q}\alpha_j$. Тогда $f^{\alpha, \beta}(\tau)$ является модулярной формой веса $\frac{1}{2}(\ell + |\Delta_+^{\alpha, \beta}|)$ для $\Gamma(n)$ при некотором n .

Доказательство. Оно аналогично доказательству предложения 13.6 с использованием формулы

$$(13.11.1) \quad f^{\alpha, \beta}(\tau) = \lim_{\substack{\alpha' \rightarrow \alpha \\ \beta' \rightarrow \beta}} \frac{A_\rho(\tau, -\alpha + \tau\beta, \frac{1}{2}(\beta|\alpha - \tau\beta))}{\prod_{\gamma \in \Delta_+^{\alpha, \beta}} 2\pi i(-\gamma|(\alpha - \alpha') + \tau(\beta - \beta'))},$$

где α', β' обладают тем свойством, что $\Delta^{\alpha', \beta'} = \emptyset$. □

Нам понадобится еще один факт.

ЛЕММА 13.11.2. Пусть $b_1, b_2, \dots$ — периодическая последовательность целых чисел с периодом m , такая, что $b_j = b_{m-j}$ для $j = 1, \dots, m-1$. Пусть $b = \sum_{j=1}^m b_j$. Для $c \in \mathbb{C}$ положим

$$f_c(\tau) = q^c \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^j)^{b_j}.$$

Тогда $f_c(\tau)$ является модулярной формой (для $\Gamma(n)$ при некотором n), если и только если

$$(13.11.2) \quad c = \frac{bm}{24} - \frac{1}{4m} \sum_{j=1}^{m-1} j(m-j)b_j.$$

Доказательство. Напомним, что функции $g_{n,r}(\tau)$, заданные формулой (13.6.9), — модулярные формы. Легко видеть, что если s дается формулой (13.11.2), то $f_s(\tau)$ можно представить как конечное произведение функций вида $g_{m,r}(\tau)$ ($1 \leq r \leq m-1$) и степени $\eta(m\tau)$; следовательно, $f_s(\tau)$ — модулярная форма. Обратно, если $f_{s'}(\tau)$ — модулярная форма, то $q^{c-c'}$ — также модулярная форма; отсюда следует, что $s = s'$. $\square$

Теперь мы готовы доказать «очень странную» формулу (12.3.6).

Доказательство (12.3.6). Заметим, что f^{0,γ_s} есть не что иное, как специализация типа s для $A_p \prod_{\substack{\gamma \in \Delta_+ \\ (\gamma|A_0 + \gamma_s) = 0}} (1 - e^{-\gamma})^{-1}$. Следовательно,

полагая $e^{2\pi i \tau} = q_1^{m/r}$, мы получаем (используя (12.3.1)) равенство

$$(13.11.3) \quad f^{0,\gamma_s}(\tau) = q_1^{\frac{p}{2rk^v}|\bar{\rho} - h^v \gamma_s|^2} \prod_{j \geq 1} (1 - q_1^j)^{d_j(s;r)}.$$

Но f^{0,γ_s} — модулярная форма по лемме 13.11.1. Используя (13.11.3), мы применяем лемму 13.11.2, чтобы закончить доказательство. $\square$

Имеет место важное следствие «очень странной» формулы.

Следствие 13.11. а) Для произвольной аффинной алгебры типа $X_N^{(r)}$

$$(13.11.4) \quad \frac{|\rho|^2}{2h^v} = \frac{\dim g(X_N')}{24a_0}.$$

б) Если $r > 1$ и $a_0 = 1$, то

$$(13.11.5) \quad \frac{|\rho^v|^2}{2h^v} = \frac{|\rho'|^2}{2h^v} = \frac{\dim g(X_N)}{24r}.$$

Доказательство. Классическая «странная» формула (13.11.4) для $r = 1$ является частным случаем «очень странной» формулы для $s = 0$, так как $|\bar{\rho}|^2 = |\rho|^2$. Формула (13.11.5) для $|\rho^v|^2/2h^v$ следует из нее, так как ρ для A — это то же самое, что ρ^v для ${}^tA$, и h^v для $X_N^{(r)}$ не зависит от r . Остальные формулы проверяются друг за другом с использованием «очень странной» формулы для $s = 0$. $\square$

Следующая теорема также может быть выведена из «очень странной» формулы, но мы дадим другое доказательство, более простое.

Для формулировки теоремы нам нужно ввести такое подмножество в множестве $\{0, 1, \dots, \ell\}$:

$$J = \{j \mid a_j \text{ (соотв. } a_j^\vee) = 1, \text{ если } r = 1 \text{ (соотв. } r > 1)\} \\ (= (\text{Aut } S(A)) \cdot 0).$$

ТЕОРЕМА 13.11. Пусть $\Lambda \in P_+^k$. Тогда

$$(13.11.6) \quad 2k(\Lambda|\rho) \geq h^\vee(\Lambda|\Lambda),$$

и равенство выполняется, если и только если $\Lambda = k\Lambda_j \bmod C\delta$ при $j \in J$.

Доказательство. Неравенство (13.11.6) эквивалентно неравенству

$$|\frac{\rho}{h^\vee} - \frac{\Lambda}{k}|^2 \leq |\frac{\rho}{h^\vee}|^2,$$

которое следует из

$$(13.11.7) \quad |\frac{\bar{\rho}}{h^\vee} - z|^2 \leq |\frac{\bar{\rho}}{h^\vee}|^2, \text{ если } z \in C_{\text{af}}.$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что

$$0 \leq (\alpha|z) \leq 1, \text{ если } z \in C_{\text{af}} \text{ для всех } \alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+.$$

Следовательно, в случае $r = 1$, используя следствие 8.7, получаем

$$0 \geq \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} ((\alpha|z)^2 - (\alpha|z)) = h^\vee(z|z) - 2(\bar{\rho}|z),$$

что является эквивалентной формой (13.11.7). Равенство имеет место, если и только если $(\alpha|z) = 0$ или 1 для всех $\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+$, что означает $z = \bar{\Lambda}$, с $a_s = 1$; тем самым теорема в случае $r = 1$ доказана.

В случае $a_0 = 1$ и $r > 1$, применяя следствие 8.7, мы получаем (заметим, что $\phi(z, z) = 2r \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} (\alpha|z)^2 + 2 \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_{+r}} (\alpha|z)^2$) соотношение

$$0 \geq r \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+} ((\alpha|z)^2 - (\alpha|z)) + \sum_{\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_{+r}} ((\alpha|z)^2 - r(\alpha|z)) \\ = rh^\vee(z|z) - 2r(\bar{\rho}|z);$$

это совпадает с (13.11.7). Мы имеем равенство тогда и только тогда, когда $\langle z, \alpha^\vee \rangle = 0$ или 1 для всех $\alpha \in \overset{\circ}{\Delta}_+$, что означает $z = \bar{\Lambda}$, с $a_s^\vee = 1$, и теорема доказана и в этом случае. В оставшемся случае $A_{2\ell}^{(2)}$ непосредственно проверяется, что (13.11.7) выполняется и равенство имеет место только для $z = 0$ (или можно использовать аналогичные рассуждения, взяв вместо $\overset{\circ}{\Pi}$ множество $\Pi \setminus \{\alpha_\ell\}$). $\square$

Предложение 13.11. Пусть $\Lambda \in P_+^k$, $k > 0$ и $\lambda \in P(\Lambda)$. Тогда

$$(13.11.8) \quad m_{\Lambda, \lambda} \geq -\frac{|\rho|^2}{2h^\vee} \frac{k}{k+h^\vee}$$

и равенство выполняется, если и только если $\Lambda = k\Lambda_i \bmod C\delta$ и $a_i = 1$ (соответственно $a_i^\vee = 1$) в случае $r = 1$ (соответственно $r > 1$) и $\lambda = w(\Lambda)$, $w \in W$.

Доказательство. Согласно определению (12.7.6) для $m_{\Lambda, \lambda}$, (13.11.8) означает, что

$$\frac{|\Lambda + \rho|^2 - |\rho|^2}{k+h^\vee} \geq \frac{|\lambda|^2}{k}.$$

В силу предложения 11.4 достаточно доказать это для $\lambda = \Lambda$, а в этом случае доказываемое неравенство эквивалентно (13.11.6). Случаи равенства вытекают из предложения 11.4 и теоремы 13.11. $\square$

Отметим, что неравенство (13.11.8) в случ нескрученных алгебр является частным случаем предложения 12.1 с).

§13.12. Теперь мы найдем уровни и верхние границы порядков полюсов во всех каспах для струнных функций и функций ветвления. Для этого нам понадобится

Лемма 13.12. а) Пусть V — пространство модулярных форм веса k , инвариантное относительно (проективного) действия (13.10.5) при $\ell = -2k$. Предположим, что все функции из V имеют полюсы порядка $\leq R$ в $i\infty$. Тогда порядки полюсов этих функций во всех каспах $\leq R$ (т. е. все функции из V являются R -сингулярными).

б) Пусть $f(\tau)$ — модулярная форма целого (соответственно полуцелого) веса для некоторой главной конгруэнц-подгруппы и некоторого характера. Предположим, что $f(\tau + n) = f(\tau)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$. Тогда $f(\tau)$ — модулярная форма для $\Gamma(n)$ с тривиальным характером (соответственно с характером, принимающим значения ± 1).

Доказательство. Ясно, что а) справедливо, поскольку $SL_2(\mathbb{Z})$ действует транзитивно на множестве каспов. Относительно доказательства б) см., например, Schoenberg [1973].

Теорема 13.12. а) Пусть $g(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ и ранга $\ell + 1$ и $\Lambda \in P_+^k$, $k > 0$. Пусть

$$s = \text{НОК}\{k, h^\vee, k + h^\vee, n\}.$$

Тогда все струнные функции $c_\lambda^\Lambda(\tau)$ являются модулярными формами веса $-\frac{1}{2}\ell$ для группы $\Gamma(s)$ с характером, принимающим значения $(\pm 1)^\ell$. Кроме того, все они R -сингулярны, где

$$R = \frac{\dim \mathfrak{g}(X'_{N'})}{24a_0} \frac{k}{k + h^\vee}.$$

б) В предположениях и обозначениях теоремы 13.10 пусть

$$s = \text{НОК}\{k_i + h_i^\vee, n_i, \dot{k}_i + \dot{h}_i^\vee \ (i \geq 1), \dot{k}_0, \dot{n}_0 := n(\dot{M}_0), \dot{n}_i \ (i \geq 1), 24\}.$$

Тогда все функции ветвления $b_\lambda^\Lambda(\tau; \mathfrak{g})$ являются модулярными формами веса 0 для группы $\Gamma(s)$ с тривиальным характером. Кроме того, все они $(c(k) - \dot{c}(\dot{k}))/24$ -сингулярны.

Доказательство. Для доказательства а) используем тождество (12.7.13). В силу леммы 13.7 из этого тождества следует, что функция

$$F := \sum_{\lambda \in P_+^\Lambda \bmod (kM + \mathbb{C}\delta)} c_\lambda^\Lambda(\tau) \Theta_\lambda$$

обладает свойством преобразования: $F(A \cdot (\tau, z, u)) = C(A)F(\tau, z, u)$, где $C(A) \in \mathbb{C}$ и $|C(A)| = 1$ для $A \in \Gamma(nh^\vee) \cap \Gamma(n(k + h^\vee))$. Поскольку сумма в F берется по подмножеству из $P_+^\Lambda \bmod (kM + \mathbb{C}\delta)$ (см. 13.7.1), применяя предложение 13.3 и снова лемму 13.7, мы убеждаемся, что c_λ^Λ — модулярные формы веса $-\frac{1}{2}\ell$ для группы $\Gamma(nh^\vee) \cap \Gamma(n(k + h^\vee)) \cap \Gamma(nk)$, и применяем лемму 13.12а).

Чтобы завершить доказательство а), заметим, что $m_{\Lambda, \lambda} \geq -R$ в силу следствия 13.11 и предложения 13.11; значит, порядок полюса в $i\infty$ для всех c_λ^Λ не превосходит R . Если $r = 1$ или $a_0 = 2$, мы выводим, что все c_λ^Λ являются R -сингулярными в силу следствия 13.10а) и леммы 13.12б). В остальных случаях доказательство аналогично, с использованием теоремы 13.10а), следствия 13.11б) и того факта, что $\Gamma_0(2)$ и $\Gamma_0(3)$ имеют только два каспа, $i\infty$ и 0.

Те же рассуждения, что и выше, с использованием (12.12.8) вместо (12.7.13), доказывают, что $b_\lambda^\Lambda(\tau; \mathfrak{g})$ — модулярные формы веса 0 для $\Gamma(s)$ с тривиальным характером. Все они $(c(k) - \dot{c}(\dot{k}))/24$ -сингулярны, так как в силу (12.8.12) предложение 12.12б) влечет за собой

$$m_\Lambda - \dot{m}_\lambda \geq -\frac{1}{24}(c(k) - \dot{c}(\dot{k})).$$

□

Отметим, что теорема 13.12 говорит о существовании подходящего целого числа b , зависящего только от $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ и k , такого, что первые b коэффициентов функции ветвления определяют всю функцию.

§13.13. В этом параграфе мы изучаем асимптотическое поведение характеров при $\beta := -it \downarrow 0$ для аффинной алгебры типа $X_N^{(r)}$ и ранга $\ell + 1$. Мы будем писать $f(\beta) \sim g(\beta)$, если $\lim_{\beta \downarrow 0} f(\beta)/g(\beta) = 1$.

Прежде всего из определений получаем

$$(13.13.1) \quad \Theta_\lambda(-(i\beta)^{-1}, z, -i\beta(z|z)/2) \sim 1 \text{ или } 0$$

в зависимости от того, $\lambda \in \Lambda_0 + kM + \mathbb{C}\delta$ или нет, где $k = \text{уровень}(\lambda)$,

$$(13.13.2) \quad \eta(-1/i\beta)^{-1} \sim e^{\pi/12\beta}.$$

Теперь, $S^{-1}(i\beta, -i\beta z, 0) = (-(i\beta)^{-1}, z, -i\beta(z|z)/2)$; следовательно, применяя $(S, \tau^{1/2})$ к обеим частям (13.5.1), мы получаем

$$(13.13.3) \quad \Theta_\lambda(i\beta, -i\beta z, 0) = |M^*/kM|^{-1/2} \beta^{-\ell/2} \times \sum_{\mu \in P_k \bmod (kM + \mathbb{C}\delta)} e^{\frac{-2\pi i}{k}(\bar{\lambda}|\bar{\mu})} \Theta_\mu(-(i\beta)^{-1}, z, -i\beta(z|z)/2).$$

Поэтому в силу (13.13.1) мы имеем

$$(13.13.4) \quad \Theta_\lambda(i\beta, -i\beta z, 0) \sim |M^*/kM|^{-1/2} \beta^{-\ell/2}.$$

Аналогично, из (13.6.11) и (13.13.2) выводим

$$(13.13.5) \quad \eta(i\beta)^{-1} \sim \beta^{1/2} e^{\pi/12\beta}.$$

Пусть $R_+ = \overset{\circ}{\Delta}_+$, если $r = 1$ или $a_0 = 2$, и $R_+ = \overset{\circ}{\Delta}_+^\vee$ в противном случае. Асимптотика A_λ дается следующим предложением:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.13. Пусть $\lambda \in P_{k++}$. Тогда

$$(13.13.6) \quad A_\lambda(i\beta, -i\beta z, 0) \sim b(\lambda, z) \beta^{-\ell/2} e^{-\frac{\pi \lambda^\vee \dim g(X_N)}{12\beta k r}},$$

где

$$(13.13.7) \quad b(\lambda, z) = |M^*/kM|^{-1/2} b(\rho, z) \prod_{\alpha \in R_+} 2 \sin \pi \frac{(\bar{\lambda}|\alpha)}{k},$$

$$(13.13.8) \quad b(\rho, z) = |M^r/M|^{-1/2} \prod_{\alpha \in R_+} 2 \sin \pi (z|\alpha).$$

Доказательство. Из (13.13.3) получаем равенство

$$A_{\lambda}(i\beta, -i\beta z, 0) = |M^*/kM|^{-1/2} \beta^{-\ell/2} \\ \times \sum_{\substack{w \in \tilde{W} \\ \mu \in P_{\lambda} \\ \mu \text{ регулярно}}} \varepsilon(w) \sum_{\substack{\mu \in P_{\lambda} \bmod (kM + \mathbb{C}\delta) \\ \mu \text{ регулярно}}} e^{-2\pi i (w(\bar{\lambda})|\bar{\mu})/k} \Theta_{\mu}(-(i\beta)^{-1}, z, -i\beta(z|z)/2).$$

Мы можем брать только регулярные μ (т. е. такие, что $\tilde{W}_{\mu} = 1$), поскольку нерегулярные μ дают нулевой вклад (ср. (13.7.7)). Подставляя в явное выражение (13.2.5) для Θ_{λ} , мы получаем равенство

$$(13.13.9) \quad A_{\lambda}(i\beta, -i\beta z, 0) = |M^*/kM|^{-1/2} \beta^{-\ell/2} e^{\pi k \beta(z|z)} \\ \times \sum_{w \in \tilde{W}} \varepsilon(w) \sum_{\substack{\mu \in P_{\lambda} \bmod (kM + \mathbb{C}\delta) \\ \mu \text{ регулярно}}} \sum_{\gamma \in M + \frac{\bar{\gamma}}{k}} e^{-2\pi i (w(\bar{\lambda})|\bar{\mu}) - \frac{\pi k |\gamma|^2}{\beta} + 2\pi i k(\gamma|z)}.$$

Чтобы закончить доказательство, нам понадобится

ЛЕММА 13.13. Пусть $\mu \in M^k$ регулярен и $\xi = \rho$, если $r = 1$ или $a_0 = 2$, и $\xi = \rho^{\vee}$ в противном случае. Тогда $|\mu|^2 \geq |\bar{\xi}|^2$ и равенство выполняется, если и только если $\mu = \sigma(\bar{\rho})$, $\sigma \in \tilde{W}$.

Доказательство. Мы рассмотрим случай, когда $r = 1$ или $a_0 = 2$; тогда $\bar{\xi} = \bar{\rho}$. (В остальных случаях $\xi = \rho^{\vee}$ и доказательство аналогично.) В этом случае $M = \tilde{Q}^{\vee}$ (см. (6.5.8)); следовательно, $M^* = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z} \bar{\Lambda}_i$.

Пусть $\sigma \in \tilde{W}$, причем $\sigma^{-1}(\mu) \in \bar{P}_{++}$. Тогда $\sigma^{-1}(\mu) = \sum_{i=1}^{\ell} b_i \bar{\Lambda}_i = \sum_{i=1}^{\ell} b'_i \alpha_i^{\vee}$, где $b_i, b'_i > 0$, $b_i \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$|\mu|^2 - |\bar{\rho}|^2 = |\sigma^{-1}(\mu)|^2 - |\bar{\rho}|^2 = (\sigma^{-1}(\mu) - \bar{\rho} | \sigma^{-1}(\mu) + \bar{\rho}) \\ = \sum_{i=1}^{\ell} (b_i - 1) (\bar{\Lambda}_i | \sigma^{-1}(\mu) + \bar{\rho}).$$

Это завершает доказательство, поскольку $\sigma^{-1}(\mu) + \bar{\rho}$ есть линейная комбинация $\alpha_i^{\vee}$ ($i = 1, \dots, \ell$) с положительными коэффициентами. $\square$

Окончание доказательства предложения 13.13. В силу леммы 13.13 из (13.13.9) вытекает, что асимптотическое поведение $A_{\lambda}(i\beta, -i\beta z, 0)$

при $\beta \downarrow 0$ определяется членами с $\gamma = \sigma(\bar{\xi})/k$, $\bar{\mu} = \sigma(\bar{\xi})$, $\sigma \in \dot{W}$. Итак, при $\beta \downarrow 0$

$$\begin{aligned} A_{\lambda}(i\beta, -i\beta z, 0) &\sim |M^{\circ}/kM|^{-1/2} \beta^{-L/2} e^{-\pi|\bar{\xi}|^2/k\beta} \\ &\times \sum_{w \in \dot{W}} \varepsilon(w) \sum_{\sigma \in \dot{W}} e^{-\frac{2\pi i}{k}(\sigma w(\lambda)|\bar{\xi})} e^{-2\pi i(\sigma(\bar{\xi})|z)} \\ &= |M^{\circ}/kM|^{-1/2} \beta^{-c/2} e^{-\pi|\bar{\xi}|^2/k\beta} \\ &\times \left(\sum_{w \in \dot{W}} \varepsilon(w) e^{-\frac{2\pi i}{k}(w(\bar{\xi})|\lambda)} \right) \left(\sum_{\sigma \in \dot{W}} \varepsilon(w) e^{2\pi i(\sigma(\bar{\xi})|z)} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, из тождества Вейля для знаменателя и «странных формул» (13.11.4) и (13.11.5) мы получаем асимптотику (13.13.6). Формула (13.13.8) эквивалентна тождеству (13.8.1) в случаях, когда $r = 1$ или $a_0 = 2$. В остальных случаях она эквивалентна тождеству (13.9.5). $\square$

Непосредственным следствием предложения 13.13 является асимптотика характеров. Для $\Lambda \in P_+^k$

$$(13.13.10) \quad \chi_{\Lambda}(i\beta, -i\beta z, 0) \sim a(\Lambda) e^{\pi c(k)/12r\beta},$$

где (ср. (13.8.10))

$$(13.13.11) \quad a(\Lambda) = |M^{\circ}/(k + h^{\vee})M'|^{-1/2} \prod_{\alpha \in R_+} 2 \sin \pi \frac{(\bar{\Lambda} + \bar{\rho}|\alpha)}{k + h^{\vee}},$$

$$(13.13.12) \quad c(k) = \frac{k \dim \mathfrak{g}(X_N)}{k + h^{\vee}}.$$

Замечание 13.13. Пусть $z \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{\circ}$, и рассмотрим «гамильтониан» $H = -d - z$. Тогда

$$(13.13.13) \quad \text{ch}_{L(\Lambda)}(i\beta, -i\beta z, 0) = \text{tr}_{L(\Lambda)} e^{-2\pi\beta H},$$

следовательно, (13.13.10) имеет следующую интерпретацию:

$$(13.13.14) \quad \text{tr}_{L(\Lambda)} e^{-2\pi\beta H} \sim a(\Lambda) e^{\pi c(k)/12r\beta} \quad \text{при } \beta \downarrow 0.$$

По аналогии со статистической механикой $\beta = \frac{1}{T}$, где T — температура. Таким образом, (13.13.13) есть «статистическая сумма», а (13.13.14) — ее «высокотемпературный предел». Замечательно, что этот предел не зависит от z .

§13.14. Теперь мы готовы изучить асимптотическое поведение струнных функций и функций ветвления.

Рассмотрим множество R_k вакуумных пар уровня k (см. §12.11). Если $(\Lambda; \lambda) \in R_k$, то ясно, что $(\Lambda + a\delta; \lambda + a\delta + k_0\gamma) \in R_k$ для любого $a \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \dot{M}_0$. Такие пары называются эквивалентными. Обозначим множество всех классов эквивалентности через $\tilde{R}_k$. Это конечное множество. Здесь и далее в случае функций ветвления мы сохраняем предположения и обозначения теоремы 13.10b); в случае струнных функций мы имеем $k_0 = k$ и $\dot{M}_0 = M$.

Вообще говоря, множество $\tilde{R}_k$ устроено очень сложно, но для струнных функций ответ совсем простой. А именно, вспоминая определение J в §13.11, в силу предложения 13.11 и (12.4.5) получаем

$$(13.14.1) \quad \tilde{R}_k = \{(k\Lambda_j; k\Lambda_j) \mid j \in J\} \text{ в случае струнных функций.}$$

ТЕОРЕМА 13.14. а) В предположениях теоремы 13.10а)

$$c_\lambda^\Lambda(i\beta) \sim |J| |\bar{P}/M|^{-1} |M^*/M|^{1/2} a(\Lambda) (\beta/k)^{c/2} e^{\pi c(k)/12r\beta}.$$

б) В предположениях теоремы 13.10b) пусть

$$d(\Lambda, \lambda) = \sum_{(\Lambda'; \lambda') \in \tilde{R}_k} S_{\Lambda, \Lambda'} \bar{S}_{\lambda, \lambda'} \text{mult}_{\Lambda'}(\lambda'; \dot{g}).$$

Тогда имеет место одна из двух возможностей:

$$(i) \quad d(\Lambda, \lambda) = 0 \text{ и } \lim_{\beta \downarrow 0} b_\lambda^\Lambda(i\beta; \dot{g}) / e^{\pi(c(k) - \dot{c}(k))/12\beta} = 0,$$

(ii) $d(\Lambda, \lambda)$ — положительное вещественное число и

$$b_\lambda^\Lambda(i\beta; \dot{g}) \sim d(\Lambda, \lambda) e^{\pi(c(k) - \dot{c}(k))/12\beta}.$$

Доказательство. Сначала докажем б). По определению функции ветвления из §12.12 и поскольку это сходящийся ряд для $\text{Im } \tau > 0$, мы имеем

$$(13.14.2) \quad b_{\lambda'}^{\Lambda'}(-\frac{1}{i\beta}; \dot{g}) \sim e^{-2\pi(m_{\Lambda'} - \dot{m}_{\lambda'})/\beta} \text{mult}_{\Lambda'}(\lambda'; \dot{g}),$$

если $\text{mult}_{\Lambda'}(\lambda'; \dot{g}) \neq 0$, но $\text{mult}_{\Lambda'}(\lambda' + n\delta; \dot{g}) = 0$ для $n > 0$. Заменяя τ на $-\frac{1}{\tau}$ в (13.10.1) и используя предложение 12.12b), мы видим, что главный член $b_\lambda^\Lambda(\tau; \dot{g})$ при $\tau \rightarrow 0$ дается слагаемыми, соответствующими парам $(\Lambda'; \lambda')$ из $\tilde{R}_k$. Таким образом, в силу (12.8.12) получаем

$$\lim_{\beta \downarrow 0} b_\lambda^\Lambda(i\beta; \dot{g}) / e^{\pi(c(k) - \dot{c}(k))/12\beta} = d(\Lambda, \lambda).$$

Поскольку левая часть есть положительное вещественное число, если таковым является β , это завершает доказательство b).

Мы могли бы доказать а) таким же способом, явно вычисляя $d(\Lambda, \lambda)$. Однако мы дадим другое доказательство, в большей степени проясняющее суть дела. Заметим, что если $\lambda \in P(\Lambda)$, то по предложению 12.5 существует $p \in \mathbb{Z}_+$, такое, что $\Lambda - p\delta \in [W(\lambda)]$, где скобки $[]$ обозначают выпуклую оболочку. Тогда $\Lambda - (n+p)\delta \in [W(\lambda - n\delta)]$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, и так как, кроме того, $\lambda - n\delta \in [W(\Lambda - n\delta)]$ для всех $n \in \mathbb{Z}_+$, то в силу предложения 12.5

$$\text{mult}_\Lambda(\Lambda - n\delta) \leq \text{mult}_\Lambda(\lambda - n\delta) \leq \text{mult}_\Lambda(\Lambda - (n+p)\delta)$$

для всех $n \in \mathbb{Z}_+$. Это влечет за собой для $\beta > 0$

$$(13.14.3) \quad c_\lambda^\Lambda(i\beta) \sim c_\Lambda^\Lambda(i\beta), \quad \text{если } \lambda \in P(\Lambda).$$

Рассматривая тождество для тета-функции (12.7.13) при $\beta \downarrow 0$, мы получаем, используя (13.14.3), (13.13.4) и (13.13.10),

$$(13.14.4) \quad a(\Lambda) e^{\pi c(k)/12\tau\beta} \sim b_\Lambda |M^*/kM|^{-1/2} \beta^{-\ell/2} c_\lambda^\Lambda(i\beta),$$

где $b_\Lambda = \#\{\lambda \in P_1^k \bmod (kM + C\delta) \mid \lambda \equiv \Lambda \bmod Q\}$. Доказательство а) вытекает теперь из (13.14.4) и следующей простой формулы:

$$(13.14.5) \quad b_\Lambda = a_0 |\dot{Q}^{v^*}/kM| / |\dot{Q}^{v^*}/\dot{Q}|.$$

□

Ясно, что

$$d(k\Lambda_0, k\dot{\Lambda}_0) = \sum_{(\Lambda', \lambda') \in \tilde{R}_k} a(\Lambda') \dot{a}(\lambda') \text{mult}_{\Lambda'}(\lambda'; \dot{g}) > 0,$$

поскольку $(k\Lambda_0, k\dot{\Lambda}_0) \in \tilde{R}_k$. С другой стороны, не известно ни одного примера, когда $\dot{L}(\lambda) \subset L(\Lambda)$, но $d(\Lambda, \lambda) = 0$. Естественно предположить, что таких примеров не существует. Я хотел бы предложить даже более сильную гипотезу.

ГИПОТЕЗА 13.14. Если $(\Lambda'; \lambda') \in R_k$ и $\text{mult}_\Lambda(\lambda; \dot{g}) \neq 0$, то $S_{\Lambda, \Lambda'} \bar{S}_{\lambda, \lambda'} \geq 0$.

Пусть $(\Lambda; \lambda) \rightarrow$ вакуумная пара; тогда в силу (13.14.2)

$$b_\lambda^\Lambda(-\frac{1}{i\beta}; \dot{g}) \sim e^{\pi(c(k) - \dot{c}(k))/12\beta} \text{mult}_\Lambda(\lambda; \dot{g}).$$

Отсюда и из теоремы 13.14 при $\beta \downarrow 0$ мы выводим следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.14. Вектор $(\text{mult}_\Lambda(\lambda; \mathfrak{g}))_{(\Lambda; \lambda) \in \tilde{R}_k}$ является собственным вектором матрицы $(S_{\Lambda, \Lambda'} \bar{S}_{\lambda, \lambda'})_{(\Lambda; \lambda), (\Lambda'; \lambda') \in \tilde{R}_k}$ с собственным значением 1. $\square$

Отметим, что если гипотеза 13.14 справедлива, то в силу теории Фробениуса — Перрона предложение 13.14 однозначно определяет этот вектор, так как $\text{mult}_{k\Lambda_0}(k\Lambda_0; \mathfrak{g}) = 1$.

Мы закончим эту главу очень частным случаем изложенного, который важен в теории струн. Пусть, как в теореме 13.10b), $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}$. Непосредственно проверяется, что $c(k) - \dot{c}(k)$ — строго возрастающая функция от k при $k \in \mathbb{N}$ (см. Schellekens — Warner [1986] и Baas — Bouwknegt [1987]). Следовательно, в силу предложения 12.12c) равенство $c(k) = \dot{c}(k)$ возможно, только если $k = 1$. В этом случае $\mathfrak{g}$ называется конформной подалгеброй в $\mathfrak{g}$. Из (13.13.10) вытекает, что $\hat{L}(\mathfrak{g})$ -модуль $L(\Lambda)$, $\Lambda \in P_+^k$, $k > 0$, рассматриваемый как $\hat{L}(\mathfrak{g})$ -модуль, разлагается в конечную сумму

$$(13.14.6) \quad L(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \dot{P}_+^k} \text{mult}_\Lambda(\lambda; \mathfrak{g}) \dot{L}(\lambda),$$

если и только если $c(k) = \dot{c}(k)$ и $\mathfrak{g}$ полупроста (тогда обязательно $k = 1$). Взглянув на асимптотику характеров при $\beta \downarrow 0$ в (13.14.6), мы получаем из (13.13.10)

$$(13.14.7) \quad a(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \dot{P}_+^k} a(\lambda) \text{mult}_\Lambda(\lambda; \mathfrak{g}).$$

Итак, число $a(\Lambda)$ (вообще говоря, иррациональное) играет роль размерности. Оно называется *асимптотической размерностью* модуля $L(\Lambda)$.

Наконец, отметим, что в силу предложения 11.12b) косетный Vir-модуль тривиален, если $c(k) = \dot{c}(k)$; следовательно,

$$(13.14.8) \quad \text{mult}_\Lambda(\lambda; \mathfrak{g}) \neq 0 \Rightarrow (\Lambda; \lambda) \in R_k, \quad \text{если } c(k) = \dot{c}(k),$$

и мы можем использовать предложение 13.14 для вычисления этих кратностей.

§13.15. Упражнения

13.1. Покажите, что $\theta_{(\ell)}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^\ell} e^{\pi i n^2 \tau}$ (где $n^2 = \sum n_i^2$) есть голоморфная модулярная форма веса $\frac{1}{2}\ell$ для Γ_θ с характером ν_ℓ , таким, что $\nu_\ell(T^2) = 1$, $\nu_\ell(S) = e^{-\pi i \ell/4}$. Используя тождество Гаусса (упр. 12.4), покажите, что $\theta_{(1)}(\tau) = \frac{\eta^2((\tau+1)/2)}{\eta(\tau+1)}$.

13.2. Пусть

$$f_1(\tau) = q^{-1/48} \prod_{j \in \mathbb{Z}_+} (1 + q^{j+1/2}) = e^{-\pi i/24} \frac{\eta(\frac{1}{2}(\tau+1))}{\eta(\tau)} = \frac{\eta(\tau)^2}{\eta(\tau/2)\eta(2\tau)},$$

$$f_2(\tau) = q^{-1/48} \prod_{j \in \mathbb{Z}_+} (1 - q^{j+1/2}) = \frac{\eta(\tau/2)}{\eta(\tau)},$$

$$f_3(\tau) = q^{1/24} \prod_{j \in \mathbb{Z}_+} (1 + q^{j+1}) = \frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)}.$$

Покажите, что это модулярные формы веса 0 для $\Gamma(48)$ с тривиальным характером. Проверьте, что $f_1(-1/\tau) = f_1(\tau)$, $f_2(-1/\tau) = \sqrt{2}f_3(\tau)$, и убедитесь, что линейная оболочка функций f_1 , f_2 и f_3 инвариантна относительно действия (13.10.6) группы $SL_2(\mathbb{Z})$.

13.3. Пусть $d_1, d_2, \dots$ — некоторая m -периодическая последовательность целых чисел. Положим

$$(13.15.1) \quad n_k = \sum_{j|k} d_j \mu\left(\frac{k}{j}\right) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где μ — классическая функция Мёбиуса ($\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^s$, если n есть произведение s различных простых чисел, $\mu(n) = 0$ в противном случае). Предположим, что

$$(13.15.2) \quad (t, m) = (s, m) \text{ влечет за собой } d_t = d_s.$$

Покажите, что тогда $n_k = 0$, если не выполнено условие $k|m$. Докажите обратное утверждение.

[Если существует простое число p , такое, что $k = p^t k_1$, p не делит k_1 , p^t не делит m , то

$$n_k = \sum_{a|k_1} \pm (d_{p^t a} - d_{p^{t-1} a}) = 0.]$$

13.4. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли ранга ℓ , Φ — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Картана, Δ — система корней, Δ_+ — подмножество положительных корней и ρ — их полусумма, $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ — множество простых корней, $-\alpha_0 = \sum_{i=1}^{\ell} a_i \alpha_i$ — старший корень, а W — группа Вейля. Пусть M — решетка, порожденная длинными корнями. Пусть $s = (s_0, s_1, \dots, s_\ell)$ — последовательность неотрицательных целых чисел; положим $m = s_0 + \sum_{i=1}^{\ell} a_i s_i$. Определим

$\lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ соотношением $\Phi(\lambda_s, \alpha_i) = s_i/2m$ ($i = 1, \dots, \ell$). Пусть $\Delta_{s,+} = \Delta_+ \cap \mathbb{Z}\{\alpha_i \mid s_i = 0 \text{ } (i = 0, \dots, \ell)\}$, W_s — подгруппа в W , порожденная отражениями в корнях $\alpha \in \Delta_{s,+}$, и ρ_s — полусумма элементов из $\Delta_{s,+}$. Положим $D_s(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_{s,+}} (\lambda|\alpha)/(\rho_s|\alpha)$ для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Пусть e_j, f_j ($j = 1, \dots, \ell$) — образующие Шевалле для $\mathfrak{g}$. Определим автоморфизм σ_s алгебры Ли $\mathfrak{g}$ формулами

$$\sigma_s(e_j) = e^{2\pi i s_j/m}, \quad \sigma_s(f_j) = e^{-2\pi i s_j/m} f_j \quad (j = 1, \dots, \ell).$$

Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j$ — соответствующая $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -градуировка, и положим $d_j(s) = \dim \mathfrak{g}_j$. Покажите, что (ср. (12.3.6))

$$\begin{aligned} (13.15.3) \quad q^{\|\rho - \lambda_s\|^2} \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{d_j} \\ = \sum_{w \in W_s \setminus W} \epsilon(w) \sum_{\alpha \in \frac{1}{2}M} D_s(w(\rho) + \alpha) q^{m\|w(\rho) + \alpha - \lambda_s\|^2}, \end{aligned}$$

и докажете «очень странную» формулу

$$(13.15.4) \quad \|\rho - \lambda_s\|^2 = \frac{1}{24} \dim \mathfrak{g} - \frac{1}{4m^2} \sum_{j=1}^{m-1} j(m-j) d_j(s).$$

Здесь и далее $\|\lambda\|^2$ обозначает $\Phi(\lambda, \lambda)$.

13.5. В обозначениях упр. 13.4 покажите, что

$$\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(1 - e^{4\pi i \rho}) = d h^{\vee \ell},$$

где d — определитель матрицы Картана для $\mathfrak{g}$ и $h^{\vee} = \|\alpha_0\|^{-2}$.

13.6. В обозначениях упр. 13.3 и 13.4 предположим, что последовательность $d_j = d_j(s)$ удовлетворяет условию (13.15.2), т. е. автоморфизм σ_s квазирационален (см. упр. 8.12). Определим n_k соотношением (13.15.1). Выведите из упр. 13.3 и 13.4, что

$$\prod_{k \mid m} \eta(k\tau)^{n_k} = \text{правая часть (13.15.3)}.$$

Покажите, что

$$m\|\rho - \lambda_s\|^2 = \frac{1}{24} \sum_{k \mid m} k n_k.$$

13.7. Пусть σ_s — квазирациональный автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и n_h определяются соотношением (13.15.1). Покажите, что

$$\det_{\mathfrak{g}}(1 - q\sigma) = \prod_{j|m} (1 - q^j)^{n_{-j}/j}.$$

Выведите отсюда тождества другого типа для η -функции, используя упр. 12.10 и «странную» формулу.

В упр. 13.8–13.12 $\mathfrak{g}$ — аффинная алгебра с симметрической матрицей Картана, так что $\mathring{\mathfrak{g}}$ — алгебра Ли типа A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ .

13.8. Пусть $\mathring{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(1; 1)$ — градуировка, соответствующая автоморфизму типа $(1; 1)$, пусть $d_j = \dim \mathfrak{g}_j(1; 1)$, и пусть n_h определяются формулой (13.15.1). Покажите, что $n_1 = \ell + 1$, $n_h = -1$, $n_i = 0$, если i не делит h , $n_i = -n_j = \pm 1$ или 0, если $ij = h$ и $i \neq 1$.

[Используйте лемму 14.2d].

13.9. Покажите, что применение специализации Φ_1 в упр. 12.9 дает следующее тождество:

$$\sum_{\gamma \in \mathring{Q}} q^{\|h\gamma + \bar{\rho}\|^2 - \|\bar{\rho}\|^2} = \varphi(q^h)^\ell \prod_{j|h} \varphi(q^j)^{n_{-j}/j}.$$

13.10. Используя (14.2.8), выведите из (10.10.1), что

$$F_1(e(-\Lambda_0)L(\Lambda_0)) = \dim_{\mathfrak{g}} L(\Lambda_0) = \varphi(q)^\ell \prod_{j|h} \varphi(q^j)^{-n_j}.$$

13.11. Примените главную специализацию к формуле из леммы 12.7, чтобы вывести соотношение

$$F_1(e(-\Lambda_0)L(\Lambda_0)) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \text{mult}(\Lambda_0 - j\delta) q^j \right) \sum_{\gamma \in \mathring{Q}} q^{\|h\gamma + \bar{\rho}\|^2 - \|\bar{\rho}\|^2}.$$

13.12. Выведите из упр. 13.8–13.11 формулу

$$\sum_{j \geq 0} \text{mult}_{L(\Lambda_0)}(\Lambda_0 - j\delta) q^j = \varphi(q)^{-\ell}.$$

Используя тот же метод, дайте другое доказательство формулы (12.13.4).

13.13. Рассмотрим аффинную алгебру типа $X_N^{(r)}$. Пусть

$$G(r) = \exp \frac{\pi i r \dim \mathfrak{g}(X'_{N'})}{12(a+1)} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{\text{mult } n\delta},$$

где $a = h$, если $r = 1$, и $a = h^\vee$, если $r > 1$. Проверьте следующую таблицу:

$g(A)$	$G(\tau)$
$X_\ell^{(1)}$ или $A_{2\ell}^{(2)}$	$\eta(\tau)^\ell$
$A_{2\ell-1}^{(2)}$	$\eta(\tau)^{\ell-1}\eta(2\tau)$
$D_{\ell+1}^{(2)}$	$\eta(\tau)\eta(2\tau)^{\ell-1}$
$E_6^{(2)}$	$\eta(\tau)^2\eta(2\tau)^2$
$D_4^{(3)}$	$\eta(\tau)\eta(3\tau)$

13.14. Пусть $\Lambda \in P_+$, причем $(\Lambda, d) = 0$. Тогда разложение $L(\Lambda)$ на собственные подпространства относительно $a_0^{-1}d$ имеет вид

$$(13.15.5) \quad L(\Lambda) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} L(\Lambda)_{-j},$$

где $L(\Lambda)_{-j}$ — собственное подпространство с собственным значением $-j$. Покажите, что $\dim L(\Lambda)_{-j} < \infty$ и что (13.15.5) есть базисная градуировка модуля $L(\Lambda)$, т. е. градуировка типа $(1, 0, \dots, 0)$. При условии, что A — симметрическая аффинная матрица, покажите, что

$$q^{-\ell/24} \sum_{j \geq 0} (\dim L(\Lambda_0)_{-j}) q^j = \eta(\tau)^{-\ell} \sum_{\gamma \in M} q^{\frac{1}{2}|\gamma|^2}.$$

В частности, в случае $g = E_8$ правая часть есть $(qj(\tau))^{\frac{1}{2}}$, где $j(\tau)$ — знаменитый модулярный инвариант, генератор поля модулярных форм веса 0 для $SL_2(\mathbb{Z})$.

13.15. Обобщите упр. 13.14 на случай скрученных аффинных алгебр.

13.16. Покажите, что для $B_\ell^{(1)}$ все $\Lambda \in P_+ \bmod C\delta$ уровня 1 исчерпываются Λ_0 , Λ_1 и Λ_ℓ . Покажите, что с точностью до W -эквивалентности все струнные функции уровня 1 есть

$$c_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} = c_{\Lambda_1}^{\Lambda_1}, \quad c_{\Lambda_1}^{\Lambda_0} = c_{\Lambda_0}^{\Lambda_1} \quad \text{и} \quad c_{\Lambda_\ell}^{\Lambda_\ell}.$$

Покажите, что (ср. упр. 13.2)

$$(13.15.6) \quad c_{\Lambda_\ell}^{\Lambda_\ell} = \eta(\tau)^{-\ell-1}\eta(2\tau) = \eta(\tau)^{-\ell}f_3(\tau),$$

$$(13.15.7) \quad c_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} - c_{\Lambda_1}^{\Lambda_0} = \eta(\tau)^{-\ell-1}\eta(\tfrac{1}{2}\tau) = \eta(\tau)^{-\ell}f_2(\tau),$$

$$(13.15.8) \quad c_{\Lambda_0}^{\Lambda_0} + c_{\Lambda_1}^{\Lambda_0} = \eta(\tfrac{1}{2}\tau)^{-1}\eta(\tau)^{2-\ell}\eta(2\tau)^{-1} = \eta(\tau)^{-\ell}f_1(\tau).$$

$[A(\tau) := \eta(\tau)^{\ell+1}\eta(2\tau)^{-1}c_{\Lambda_\ell}^{\Lambda_\ell}]$ голоморфна в каспах $i\infty$ и 0 для $\Gamma_0(2)$ и, следовательно, постоянна. Это влечет за собой (13.15.6). Формула (13.15.7) выводится из (13.15.6) с помощью замены τ на $-\frac{1}{\tau}$ и с использованием теоремы 13.10а). Формула (13.15.8) следует из (13.15.7), если заменить τ на $\tau + 1$.]

13.17. Покажите, что для гиперболической алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$, где A — матрица из упр. 3.8,

$$\text{mult}(k\alpha_1 + k\alpha_2 + \alpha_3) = p(k).$$

[Используйте упр. 11.7 и упр. 13.12 для $\mathfrak{g}$ типа $A_1^{(1)}$.]

13.18. Пусть $\lambda \in P_{++}^k$. Используя предложение 13.2, покажите, что

$$A_\lambda \Theta_{\Lambda_0} = \sum_{\mu \in P_{++}^{k+1} \bmod C\delta} \varphi_{\lambda, \mu}^{(k)} A_\mu,$$

где

$$\varphi_{\lambda, \mu}^{(k)}(\tau) = \sum_{w \in \dot{W}} \varepsilon(w) \sum_{\gamma \in M} q^{\frac{1}{2}k(k+1)|\gamma + (k+1)^{-1}w(\mu) - k^{-1}\lambda|^2}.$$

13.19. Выведите из упр. 13.18, что для аффинной алгебры типа $X_N^{(r)}$, $X = A, D$ или E ,

$$\chi_\Lambda \chi_{\Lambda_0} = \sum_{\mu \in P_{++}^{k+1} \bmod C\delta} \left(\varphi_{\lambda, \mu}^{(k)}(\tau) / G(\tau) \right) \chi_\mu,$$

где $G(\tau)$ определено в упр. 13.13, так что имеет место следующая формула для функций ветвления для разложения в тензорное произведение $\mathfrak{g}(X_N^{(r)})$ -модуля $L(\Lambda) \otimes L(\Lambda_0)$:

$$b_\mu^{\Lambda, \Lambda_0}(\tau) = \varphi_{\lambda, \mu}^{(k)}(\tau) / G(\tau).$$

13.20. Пусть $\dot{\mathfrak{g}}$ — простая конечномерная алгебра Ли, и пусть $\dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g} := \dot{\mathfrak{g}} \oplus \dot{\mathfrak{g}}$ — диагональное вложение. Рассмотрим $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ -модуль $L(\Lambda') \otimes L(\Lambda'')$, где $L(\Lambda')$ и $L(\Lambda'')$ — интегрируемые $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$ -модули уровней k' и k'' соответственно. Покажите, что косетный Vir-модуль имеет конформную аномалию

$$c(k', k'') = (\dim \dot{\mathfrak{g}}) \left(\frac{k'}{k' + h^\vee} + \frac{k''}{k'' + h^\vee} - \frac{k' + k''}{k' + k'' + h^\vee} \right),$$

где $h^\vee$ — дуальное число Кокстера для $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$, и что

$$L_0^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{(\Lambda' | \Lambda' + 2\delta)}{k' + h^\vee} + \frac{(\Lambda'' | \Lambda'' + 2\delta)}{k'' + h^\vee} - \frac{\Omega}{k + k' + h^\vee} \right),$$

где Ω — оператор Казимира для $\hat{\mathcal{L}}(\dot{\mathfrak{g}})$.

19.21. Выведите следующее разложение $g' \left(A_1^{(1)} \right) \oplus \text{Vir}$ -модулей $(j, k \in \mathbb{Z}_+, j \leq k)$:

$$\begin{aligned} & L((k-j)\Lambda_0 + j\Lambda_1) \otimes L(\Lambda_0) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq s \leq k+2 \\ s \equiv 0 \pmod{2}}} L((k+1-s)\Lambda_0 + s\Lambda_1) \otimes \tilde{L}(c(k), h_{j+1, s+1}^{(k)}), \end{aligned}$$

где

$$c^{(k)} = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}, \quad h_{r,s}^{(k)} = \frac{((k+3)r - (k+2)s)^2 - 1}{4(k+2)(k+3)},$$

и $\tilde{L}(c^{(k)}, h_{r,s}^{(k)})$ есть Vir-модуль положительной энергии, такой, что $c = c^{(k)}$, наименьшее собственное значение оператора L_0 равно $h_{r,s}^{(k)}$ и имеет кратность 1 и $\text{tr}_{\tilde{L}(c^{(k)}, h_{r,s}^{(k)})} q^{d_0 - c^{(k)}/24} = \varphi_{r,s}^{(k)}$, где

$$\varphi_{r,s}^{(k)} = \frac{1}{\eta} (f_{r(k+3)-s(k+2), (k+2)(k+3)} - f_{r(k+3)+s(k+2), (k+2)(k+3)}).$$

19.22. Установите, что Vir-модуль $L(c^{(k)}, h_{r,s}^{(k)})$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $1 \leq s \leq r \leq k+1$ унитаризуем и, полагая

$$\chi_{r,s}^{(k)} = \text{tr}_{L(c^{(k)}, h_{r,s}^{(k)})} q^{d_0 - c^{(k)}/24},$$

можно получить следующее покоэффициентное неравенство для q -разложений:

$$(13.15.9) \quad \chi_{r,s}^{(k)} \leq \varphi_{r,s}^{(k)}.$$

19.23. Покажите, что (см. упр. 13.2)

$$f_1 = \varphi_{1,1}^{(1)} + \varphi_{2,1}^{(1)}, \quad f_2 = \varphi_{1,1}^{(1)} - \varphi_{2,1}^{(1)}, \quad f_3 = \varphi_{2,2}^{(1)}.$$

19.24. Пусть $\delta = 0$ или $1/2$, и пусть Cl_δ обозначает ассоциативную алгебру с образующими ψ_j , $j \in \mathbb{Z} + \delta$, и определяющими соотношениями

$$\psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = \delta_{ij}.$$

Пусть V_δ обозначает неприводимый Cl_δ -модуль, обладающий ненулевым вектором $|0\rangle$, таким, что

$$\psi_j |0\rangle = 0 \quad \text{для } j > 0.$$

Пусть

$$L_n = -\frac{1}{2} \sum_{j \in \delta + \mathbb{Z}} j \psi_j \psi_{n-j} \quad \text{для } n \neq 0,$$

$$L_0 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} - \delta \right) + \sum_{j \in \delta + \mathbb{Z}_+} j \psi_{-j} \psi_j.$$

Покажите, что $[\psi_m, L_n] = (m+n/2)\psi_{m+n}$ и что отображение $d_n \mapsto L_n$ определяет представление алгебры Vir в V_δ с $c = \frac{1}{2}$.

13.25. Покажите, что элементы

$$\psi_{j_1} \cdots \psi_{j_s} \psi_{j_1} |0\rangle \quad \text{при } 0 \geq j_1 > j_2 > \cdots > j_s$$

образуют базис в V_6 . Определим эрмитову форму на V_6 , объявляя эти элементы ортогональными с квадратом длины 1 (соответственно 2), если $j_1 < 0$ (соответственно $j_1 = 0$). Покажите, что ψ_j и ψ_{-j} — сопряженные операторы и что V_6 — унитаризуемый Vir-модуль. Докажите, что

$$\text{tr}_{V_6} q^{L_0-1/48} = 2f_3, \quad \text{tr}_{V_{1/2}} q^{L_0-1/48} = f_1.$$

13.26. Пусть V_6^+ (соответственно V_6^-) обозначает линейную оболочку элементов четной (соответственно нечетной) степени. Считая доказанным, что Vir-модуль $L(\frac{1}{2}, h)$ при $h \neq 0, \frac{1}{2}$ или $\frac{1}{16}$ не является унитаризуемым (доказательство см. в Кас — Raina [1987]), покажите, что $V_6^+ \simeq L(\frac{1}{2}, 0)$, $V_6^- \simeq L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $V_0^+ \simeq V_0^- \simeq L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16})$ (ср. упр. 13.22). Проверьте, что $\chi_{r,s}^{(1)} = \varphi_{r,s}^{(1)}$ для $1 \leq s \leq r \leq 2$. (Из работ Feigin — Fuchs [1984 А, В] следует, что это верно для всех Vir-модулей из упр. 13.22.)

13.27. Выведите из теоремы 13.10b) следующую формулу преобразования ($1 \leq b \leq a \leq k+1$):

$$\varphi_{a,b}^{(k)}(-\frac{1}{\tau}) = (8/(k+2)(k+3))^{\frac{1}{2}} \times \sum_{1 \leq s \leq r \leq k+1} (-1)^{(a+b)(r+s)} \sin \frac{\pi ar}{k+2} \sin \frac{\pi bs}{k+3} \varphi_{r,s}^{(k)}(\tau).$$

13.28. Выведите следующее разложение $\mathfrak{g}(E_8^{(1)})$ -модуля (рассматриваемого как $\mathfrak{g}(E_8^{(1)}) \oplus$ Vir-модуль):

$$L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0) = L(2\Lambda_0) \otimes L(\frac{1}{2}, 0) + L(\Lambda_7) \otimes L(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + L(\Lambda_1) \otimes L(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}).$$

13.29. Покажите, что $a(\sigma \cdot \Lambda) = a(\Lambda)$ для любого $\sigma \in \text{Aut } S(A)$. Установите, что для матрицы A типа $X_N^{(r)}$ при $X = A, D$ или E (см. §13.14)

$$a(\Lambda) = |J|^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{если } \Lambda \in P_+^1.$$

13.30. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли ранга ℓ , соответствующая диаграмме Дынкина с простыми ребрами, и пусть $\hat{\mathfrak{g}}$ — ее подалгебра, порожденная элементами $E_i, F_i, i \in \{0, 1, \dots, \ell\} \setminus \{j\}$ (см. §8.2). Покажите, что $\hat{L}(\mathfrak{g})$ -модуль $L(\Lambda)$ уровня 1, рассматриваемый как $\hat{L}(\hat{\mathfrak{g}})$ -модуль, разлагается в прямую сумму a_j неприводимых слагаемых следующим образом:

$$L(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda \in P_+^1 \cap P(\Lambda)} \hat{L}(\lambda).$$

19.31. Напомним, что имеет место сюръективное отображение $\psi: M^* \rightarrow \text{Aut } S(X_\ell^{(1)})$. Покажите, что

$$e^{2\pi i(\bar{\lambda}|\alpha)} S_{\Lambda, M} = S_{\Lambda, \psi(\alpha)(M)}.$$

Проверьте, что матрица $S_{(1)}$ в случае диаграммы Дынкина с простыми ребрами представляет собой таблицу характеров группы M^*/M , деленную на $|J|^{1/2}$.

19.32. Покажите, что для диагонального вложения $\dot{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g} := \dot{\mathfrak{g}} \oplus \dot{\mathfrak{g}}$

$$\tilde{R}_{k', k''} = \{k' \Lambda_j, k'' \Lambda_j; (k' + k'') \Lambda_j \mid j \in J\},$$

и поэтому гипотеза 13.14 в этом случае справедлива. Выведите, используя упр. 13.31, что

$$b_{\Lambda}^{\Lambda', \Lambda''}(i\beta) \sim |M^*/Q| a(\Lambda') a(\Lambda'') a(\Lambda) e^{\pi(i(k') - i(k'') - i(k' + k''))/12\beta}.$$

19.33. Покажите, что для $0 < z < 1$

$$\prod_{n \geq 1} (1 - e^{-2\pi n\beta - 2\pi iz})(1 - e^{-2\pi(n-1)\beta + 2\pi i}) \sim -ie^{\pi iz} e^{-\pi(z^2 - z + 1/6)/\beta}.$$

Проверьте, что для $z \in \text{Int } C_M$ и $r = 1$

$$A_\rho(i\beta, -z, 0) \sim \beta^{-\ell/2} (-i)^{|\bar{\Delta}|} e^{-\pi h^\vee |z - \bar{\rho}/h^\vee|^2/\beta}.$$

Убедитесь также, что для $\lambda, \mu \in P_+^k$

$$\chi_\lambda(i\beta, -\frac{\bar{\mu} + \bar{\rho}}{k + h^\vee}, 0) \sim S_{\lambda, \mu} e^{\frac{\pi h^\vee}{\beta} |\frac{\bar{\mu} + \bar{\rho}}{k + h^\vee} - \frac{\bar{\rho}}{h^\vee}|^2}.$$

19.34. Пусть I — конечное множество с выделенным элементом 0 и V — конечномерное векторное пространство с базисом $\{\chi_\lambda\}$, занумерованным элементами $\lambda \in I$. Пусть S — обратимый оператор на V , такой, что все элементы 0-й строки его матрицы $(S_{\lambda, \mu})$ ненулевые. Покажите, что существуют единственные операторы ϕ'_λ и ϕ''_λ на пространстве V , занумерованные элементами $\lambda \in I$ и обладающие следующими тремя свойствами:

- (i) ϕ'_λ диагонален в базисе $\{\chi_\lambda\}$,
- (ii) $\phi''_\lambda(\chi_0) = \chi_\lambda$,
- (iii) $\phi''_\lambda = S\phi'_\lambda S^{-1}$.

Покажите, что (для ' и ") $\phi_\lambda \phi_\mu = \sum_\nu N_{\lambda\mu}^\nu \phi_\nu$ (числа $N_{\lambda\mu}^\nu$ называются коэффициентами слияния), где

$$(13.15.10) \quad \frac{S_{\lambda\epsilon}}{S_{0\epsilon}} \frac{S_{\mu\epsilon}}{S_{0\epsilon}} = \sum_\nu N_{\lambda\mu}^\nu \frac{S_{\nu\epsilon}}{S_{0\epsilon}},$$

или, эквивалентно,

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_\epsilon \frac{S_{\lambda\epsilon} S_{\mu\epsilon} (S^{-1})_{\nu\epsilon}}{S_{0\epsilon}}.$$

13.35. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли, $\bar{\mathfrak{h}}$ — ее подалгебра Картана, $\bar{\Delta} \subset \bar{\mathfrak{h}}$ — система корней, $\bar{\Delta}_+$ — подмножество положительных корней, $\bar{\rho}$ — их полусумма, θ — старший корень, $h^\vee$ — дуальное число Кокстера, $\bar{Q}^\vee$ — дуальная корневая решетка, $M = \nu(\bar{Q}^\vee)$ для нормализованной инвариантной формы $(\cdot, \cdot)$, $\bar{P}_+ \subset \bar{\mathfrak{h}}$ — множество доминантных весов и $\bar{P}_+^k = \{\lambda \in \bar{P}_+ \mid (\lambda | \theta^\vee) \leq k\}$. Для данного $\lambda \in \bar{P}_+$ либо $r_\alpha(\lambda + \bar{\rho}) = \lambda + \bar{\rho} \bmod (k + h^\vee)M$ для некоторого $\alpha \in \bar{\Delta}$ и мы полагаем $\varepsilon(\lambda) = 0$, либо существуют единственный $w \in \bar{W}$ и единственный $\tilde{\lambda} \in \bar{P}_+^k$, такие, что $w(\lambda + \bar{\rho}) \equiv \tilde{\lambda} + \bar{\rho} \bmod (k + h^\vee)M$, и тогда мы положим $\varepsilon(\lambda) = \varepsilon(w)$. Пусть теперь в упр. 13.34 $I := \bar{P}_+^k$ и $S_{\lambda\mu} := S_{\lambda + k\lambda_0, \mu + k\lambda_0}$. Покажите, что коэффициенты слияния, определенные (13.15.10), задаются формулой

$$N_{\lambda\mu}^\nu = \sum_{\substack{\tau \in P_+^{2k} \\ \tilde{\tau} = \nu}} \varepsilon(\tau) \text{mult}_{\lambda \otimes \mu} \nu,$$

где $\text{mult}_{\lambda \otimes \mu} \nu$ обозначает кратность $\bar{L}(\nu)$ в $\bar{L}(\lambda) \otimes \bar{L}(\mu)$. Покажите, что $N_{\lambda\mu\nu} := N_{\lambda\mu}^{\tilde{\nu}}$ симметричен по всем трем индексам.

13.36. Покажите, что для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ ($i, j, s \in \mathbb{Z}_+ = \bar{P}_+$)

$$N_{ij}^s = \begin{cases} 1, & \text{если } |i - j| \leq s \leq i + j, \ i + j + s \in 2\mathbb{Z} \text{ и } \leq 2k, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

13.37. (Открытая проблема.) Покажите, что для алгебры Каца — Муди из упр. 3.8

$$\text{mult } \alpha \leq p(1 - (\alpha | \alpha)),$$

где $(\alpha | \alpha)$ определяется соотношением $(\alpha_i | \alpha_j) = \frac{1}{2} a_{ij}$, а $p(n)$ — классическая функция разбиений (ср. с табл. H_3 в §11.15).

13.38. (Открытая проблема.) Если $\lambda \in \dot{P}_+ \cap P(\Lambda)|_h$, то $b_\lambda^A(\dot{g}) \neq 0$.

13.39. (Открытая проблема.) Если $L(\Lambda)$ — неприводимый модуль со старшим весом над аффинной алгеброй, то для $z \in \text{Int}(C_{af})$

$$\text{tr}_{L(\Lambda)} e^{2\pi\beta(d+z)} \sim D\beta^w e^{\pi G/12\beta}$$

для некоторых положительных вещественных чисел D и G (называемых асимптотической размерностью и ростом модуля $L(\Lambda)$ соответственно) и неотрицательного вещественного числа w (называемого весом модуля $L(\Lambda)$).

§13.16. Библиографические замечания и комментарии

Теория тета-функций — это обширный предмет, берущий начало в трудах Якоби и Римана. Трактовка части теории, представленная в §13.1–13.5, нестандартна; она основана на идеях Каца и Питерсона (Кас — Peterson [1984 A]). Чтобы получить представление о других темах теории тета-функций, см. Mumford [1983, 1984].

Изложение §13.7–13.14 соответствует в основном статьям Кас — Peterson [1984 A] и Кас — Wakimoto [1988 A]. Некоторые из результатов этих параграфов были известны раньше. Так, лемма 13.8b (исключая случай $A_{2l}^{(2)}$) принадлежит Луенге (Looijenga [1976]), который использовал ее для того, чтобы получить доказательство тождеств Макдональда с помощью теории тета-функций. Независимое доказательство тождеств Макдональда, также с помощью тета-функций, можно найти в работе Bernstein — Schwartzman [1978]. Ван Аш (Van Asch [1976]) был первым, кто использовал свойства модулярных функций для доказательства специализированных тождеств Макдональда.

Модулярная инвариантность характеров и функций ветвления и в особенности матрицы $S_{(\frac{1}{2})}$ (вычисленные в работе Кас — Peterson [1984 A]) играли основополагающую роль в недавнем развитии конформной теории поля, см. Cardy [1986], Gepner — Witten [1986], Capelli — Itzykson — Zuber [1987], Verlinde [1988] и многие другие. Частный случай «очень странной» формулы, приведенный в упр. 13.6, был доказан в работе Кас [1978 A] тем же способом, что и (12.3.6). Важные случаи «очень странной» формулы были найдены раньше Макдональдом (Macdonald [1972]). Упражнения 13.8–13.12 принадлежат Кацу (Кас [1978A]). Упражнение 13.12 в случае $A_1^{(1)}$ было получено прежде в статье Feingold — Lepowsky [1978]. Упражнение 13.16 взято из работы Кас — Peterson [1984 A]. Формула из упр. 13.17 была доказана в статье Feingold — Frenkel [1983] более сложным методом.

Упражнение 13.14 взято из статьи Кас [1980 B]. Она тесно связана с работой Конвея и Нортон (Conway — Norton [1979]), которые предположили, что должен существовать «естественный» градуированный модуль над группой-монстром, такой, что соответствующая

производящая функция есть $qj(\tau)$. В работе Кас [1980 E] такой модуль был построен для централизатора инволюции монстра по аналогии с конструкцией Френкеля и Каца (Frenkel — Kac [1980]). Френкелю, Леповскому и Мерману (Frenkel — Lepowsky — Meurman [1984, 1989]) (см. также Borcherds [1986]) удалось продолжить модификацию этой конструкции на весь монстр, переоткрыв конструкцию Грисса (Griess [1982]) для действия монстра на 196883-мерной коммутативной неассоциативной алгебре. Честно говоря, хотя связь теории представлений аффинных алгебр с теорией модулярных форм вполне ясна, подобная связь с монстром остается таинственной.

Явное выражение для всех струнных функций известно только для простейшей аффинной алгебры типа $A_1^{(1)}$ (см. Кас — Peterson [1980, 1984 A]). После длинных вычислений они оказались некоторыми специфическими «неопределенными» модулярными формами, которые были открыты Гекке около 1925 г. Другое выражение для этих струнных функций было найдено в работах Distler — Qiu [1989] и рядом других авторов с использованием свободно-полевой конструкции, описанной в упр. 9.18. Открытая проблема, сформулированная в упр. 13.19 в предыдущих изданиях, была решена в статье Кас — Wakimoto [1988 A]. Упражнение 13.18 взято из работы Кас — Wakimoto [1988 B]. Упражнения 13.21 и 13.22 были найдены независимо в работах Goddard — Kent — Olive [1986] и Кас — Wakimoto [1986]. Неравенство (13.15.9) на самом деле является равенством, что следует из статьи Feigin — Fuchs [1984 A, B]. Как показано в работе Friedan — Qiu — Shenker [1985], Vir-модуль $L(c, h)$ при $c < 1$, который не содержится в списке упр. 13.22, не является унитаризуемым. Унитаризуемые Vir-модули $L(c, h)$ при $c \geq 1$ — это те, для которых $h \geq 0$ (Кас [1982 B]). Упражнения 13.24–13.26 хорошо известны. Упражнение 13.27 взято из статьи Cappelli — Itzykson — Zuber [1987 A], упр. 13.28 — из статьи Кас — Wakimoto [1986], упр. 13.29–13.32 — из статьи Кас — Wakimoto [1988 A] и упр. 13.33 — из статьи Кас — Wakimoto [1989 A]. Упражнение 13.34 является формализацией работы Verlinde [1988].

Как показано в работах Кас — Wakimoto [1988 B, 1989], класс модулей $L(\lambda)$ со свойствами модулярной инвариантности гораздо шире, чем класс интегрируемых модулей. Вероятно, они соответствуют некоторой неунитарной конформной теории поля и связаны с теорией квантовой гравитации (Knizhnik — Polyakov — Zamolodchikov [1988]). Старшие веса λ всех этих модулей лежат в «положительном» полупространстве $\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \text{Re}(\lambda, K) > -h^\vee\}$ (см. список в статье Кас — Wakimoto [1989 A]) и на критической гиперплоскости $\{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid (\lambda, K) = -h^\vee\}$. Несколько авторов изучали модули $L(\lambda)$, соответствующие весу λ , лежащему на критической гиперплоскости; см. Wakimoto [1986], Hayashi [1988], Ku [1988 B], Маликов [1989], Feigin — Frenkel [1989 A] (эти модули модулярно инвариантны, если и только если $(\lambda + \rho, \alpha^\vee) \notin \mathbb{N}$ для всех $\alpha \in \Delta_+^\vee$). Наконец, Люстигом (Lusztig

[1989 С]) была обнаружена, по крайней мере гипотетическая, связь между модулями из «отрицательного» полупространства для аффинной алгебры Каца — Муди и модулями над соответствующей квантованной алгеброй Каца — Муди конечного типа, когда q — корень из единицы.

Глава 14. Главная и однородная вертекс-операторные конструкции базисного представления.

Бозонно-фермионное соответствие.

Приложение к солитонным уравнениям

§14.0. Модуль со старшим весом $L(\Lambda_0)$ над аффинной алгеброй $\mathfrak{g}(A)$ называется ее *базисным представлением*. В этой главе мы явно построим базисное представление в терминах некоторых дифференциальных операторов (бесконечного порядка) от бесконечного числа переменных, называемых вертексными операторами. Аналогичным образом мы построим представления аффинных алгебр бесконечного ранга. В случае $A = A_\infty$ эта конструкция представляет собой по существу бозонно-фермионное соответствие в двумерной квантовой теории поля.

Эти реализации применяются для построения так называемых солитонных решений иерархий дифференциальных уравнений с частными производными; среди них содержатся знаменитые уравнения КдФ, КП и НЛШ.

§14.1. Пусть $\mathfrak{g}(A)$ — аффинная алгебра типа $X_N^{(r)}$ и ранга $\ell + 1$ (из табл. Aff r). Напомним, что $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}'(A) + \mathbb{C}d$, где $\mathfrak{g}'(A)$ — производная подалгебра, порожденная образующими Шевалле e_i, f_i ($i = 0, \dots, \ell$), и d — элемент энергии. Напомним, кроме того, что центр $\mathfrak{g}'(A)$ совпадает с центром $\mathfrak{g}(A)$ и порождается каноническим центральным элементом K (см. гл. 6). Пусть $\bar{\mathfrak{g}}(A) = \mathfrak{g}'(A)/\mathbb{C}K$, так что мы имеем точную последовательность

$$(14.1.1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}K \rightarrow \mathfrak{g}'(A) \xrightarrow{\pi} \bar{\mathfrak{g}}(A) \rightarrow 0.$$

Напомним, что соотношения $\deg e_i = -\deg f_i = 1$ ($i = 0, \dots, \ell$) определяют главную градуировку $\mathfrak{g}'(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}'_j(\mathbb{1})$; она индуцирует глав-

ную градуировку $\bar{\mathfrak{g}}(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_j(\mathbb{1})$, так что $\dim \bar{\mathfrak{g}}_j(\mathbb{1}) = \dim \mathfrak{g}'_j(\mathbb{1})$ для $j \neq 0$.

Элемент

$$\bar{e} = \sum_{i=0}^{\ell} \pi(e_i) \in \bar{\mathfrak{g}}_1(\mathbb{1})$$

называется *циклическим элементом* алгебры Ли $\bar{g}(A)$. Пусть $\bar{s} = \{x \in \bar{g} \mid [x, \bar{e}] = 0\}$ — централизатор $\bar{e}$ в $\bar{g}(A)$. Ясно, что $\bar{s}$ градуирован относительно главной градуировки алгебры Ли $\bar{g}(A)$:

$$\bar{s} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \bar{s}_j.$$

Подалгебра $s = \pi^{-1}(\bar{s})$ называется *главной подалгеброй* в $g'(A)$ (или в $g(A)$). Она градуирована относительно главной градуировки алгебры Ли $g'(A)$:

$$s = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} s_j.$$

Заметим, что

$$(14.1.2) \quad \dim s_j = \dim \bar{s}_j \text{ для } j \neq 0,$$

$$(14.1.3) \quad s_0 = \mathbb{C}K.$$

Последнее соотношение очевидно в силу предложения 1.6.

Ненулевые целые числа из набора, содержащего j с кратностью $\dim s_j$, называются *экспонентами* аффинной алгебры $g(A)$. Мы вычислим эти экспоненты ниже.

§14.2. Займемся изучением главной подалгебры s , используя явную конструкцию $\bar{g}(A)$, которая обсуждалась в гл. 8.

Пусть g — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N и μ — ее диаграммный автоморфизм порядка r ($= 1, 2$ или 3).

Пусть E_i, F_i, H_i ($i = 0, \dots, \ell$) — элементы алгебры Ли g , введенные в §8.2. Используя результаты §6.2, мы видим, что

$$(14.2.1) \quad \sum_{i=0}^{\ell} a_i^\vee H_i = 0,$$

где $a_i^\vee$ — отметки диаграммы для транспонированной аффинной матрицы типа $X_N^{(r)}$ из табл. Aff. Напомним, что элементы E_i ($i = 0, \dots, \ell$) порождают алгебру Ли g .

Пусть a_i — отметки диаграммы для аффинной матрицы $X_N^{(r)}$. Целое число $h^{(r)} = r \sum_{i=0}^{\ell} a_i$ называется r -м *числом Кокстера* для g . По теореме 8.6a) соотношения

$$\deg E_i = -\deg F_i = 1, \quad \deg H_i = 0 \quad (i = 0, \dots, \ell)$$

задают $\mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}$ -градуировку

$$(14.2.2) \quad \mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j(\mathbf{1}; r),$$

называемую r -главной градуировкой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Элемент

$$E = \sum_{i=0}^{\ell} E_i$$

называется r -циклическим элементом этой алгебры Ли. Обозначим через $S^{(r)}$ централизатор E в $\mathfrak{g}$. Он градуирован относительно r -главной градуировки:

$$S^{(r)} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}} S_j^{(r)}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.2. а) $\dim \mathfrak{g}_j(\mathbf{1}; r) = \ell + \dim S_j^{(r)}$ ($j \in \mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}$).

б) $S^{(r)}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$.

с) Подпространства $S_i^{(r)}$ и $S_j^{(r)}$ ортогональны (соответственно невырожденно спарены) относительно невырожденной инвариантной билинейной формы на $\mathfrak{g}$, если $i + j \neq 0$ (соответственно $i + j = 0$).

Доказательство. Используя автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида $E_i \mapsto \lambda_i E_i$, $F_i \mapsto \lambda_i^{-1} F_i$, мы получаем, что r -циклический элемент E сопряжен кратному произвольного элемента вида $\sum_{i=0}^{\ell} c_i E_i$, где все $c_i \neq 0$.

Поэтому достаточно доказать лемму для одного из таких элементов, скажем E' . Пусть $E' = \sum_{i=0}^{\ell} \sqrt{a_i} E_i$. Положим $F' = -\omega_0(E')$, где ω_0 —

компактная инволюция $\mathfrak{g}$; тогда $F' = \sum_{i=0}^{\ell} \sqrt{a_i} F_i$, и мы имеем

$$[E', F'] = \sum_{i=0}^{\ell} a_i^\vee H_i = 0$$

в силу (14.2.1). Следовательно, $\text{ad } E'$ коммутирует с сопряженным к нему оператором $\text{ad } F'$ относительно (положительно определенной) эрмитовой формы $(\cdot | \cdot)_0$ (введенной в §2.7). Поэтому E — полупростой элемент, ортогональное дополнение $B = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}} B_j$ к $S^{(r)}$ в $\mathfrak{g}$ является $\text{ad } E$ -инвариантным и ограничение $\text{ad } E$ на B обратимо. Поскольку

$[E, B_j] \subset B_{j+1}$, мы заключаем, что $\dim B_j = \ell$ ($= \dim B_0$) для всех $j \in \mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}$, что доказывает а).

Из а) мы выводим

$$(14.2.3) \quad \dim \mathfrak{g} = \dim S^{(r)} + h^{(r)}\ell.$$

Но легко проверить, что

$$(14.2.4) \quad \dim \mathfrak{g} - h^{(r)}\ell = N.$$

Сравнивая (14.2.3) и (14.2.4), получаем

$$(14.2.5) \quad \dim S^{(r)} = N = \text{rank } \mathfrak{g}.$$

Так как $S^{(r)}$ — централизатор полупростого элемента E , то (14.2.5) доказывает б).

Первая часть с) следует из леммы 8.1; вторая часть теперь вытекает из того факта, что ограничение невырожденной инвариантной билинейной формы на любую подалгебру Картана невырожденно. $\square$

Неубывающая последовательность целых чисел $m_1^{(r)} \leq m_2^{(r)} \leq \dots$ из интервала $[1, h^{(r)} - 1]$, в которой j появляется с кратностью $\dim S_j^{(r)}$, называется набором r -экспонент для $\mathfrak{g}$. Они обладают следующими свойствами.

ЛЕММА 14.2. а) Число r -экспонент равно $N = \text{rank } \mathfrak{g}$ и

$$1 = m_1^{(r)} < m_2^{(r)} \leq \dots < m_N^{(r)} = h^{(r)} - 1.$$

$$\text{б) } m_j^{(r)} + m_{N-j+1}^{(r)} = h^{(r)}.$$

с) Если i и j имеют один и тот же наибольший общий делитель с $h^{(r)}$, то i и j имеют одинаковую кратность среди экспонент.

д) $\dim \mathfrak{g}_j(\mathbb{1}; r) = \ell +$ (кратность j среди r -экспонент).

е) Пусть $r = 1$, так что $N = \ell$. Обозначим через c_j число корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ высоты j . Тогда

$$(14.2.6) \quad \dim \mathfrak{g}_j(\mathbb{1}; 1) = c_j + c_{h^{(1)}-j} \quad \text{для } 1 \leq j \leq h^{(1)} - 1;$$

$$(14.2.7) \quad c_j + c_{h^{(1)}+1-j} = \ell \quad \text{для } 1 \leq j \leq h^{(1)};$$

$$(14.2.8) \quad \dim \mathfrak{g}_j(2, 1, \dots, 1; 1) = \ell \quad \text{для всех } j.$$

ф) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли типа $A_{2\ell}$. Тогда

$$(14.2.9) \quad \dim \mathfrak{g}_j(2, 1, \dots, 1; 2) = \ell \quad \text{для всех } j.$$

Доказательство. Из предложения 14.2б) следует, что число экспонент равно N . Ясно, что 1 появляется среди экспонент с кратностью 1. Теперь а) и б) вытекают из предложения 14.2с). Часть д) следует из предложения 14.2а) и определений.

Для доказательства остальных утверждений используется

Подлемма 14.2. Автоморфизмы σ типа $(1, 1, \dots, 1; r)$ или $(2, 1, \dots, 1; 1)$ рациональны, т. е. σ^s сопряжен σ , если порядок автоморфизма σ и число s взаимно просты. В частности, эти автоморфизмы квазирациональны (определение см. в упр. 8.12).

Доказательство. Пусть σ — автоморфизм типа $(1, \dots, 1; r)$. Тогда его порядок есть $h^{(r)}$ и размерность множества его неподвижных точек равна ℓ . Элемент σ^s , где s и $h^{(r)}$ взаимно просты, обладает теми же самыми свойствами. Но теорема 8.6 показывает, что существует единственный, с точностью до сопряжения, автоморфизм с этими свойствами. Доказательство для σ типа $(2, 1, \dots, 1; 1)$ аналогично и использует (12.4.3). $\square$

Утверждение с) леммы 14.2 следует из d) и подлеммы. Для доказательства е) рассмотрим автоморфизм $\sigma_{h^{(1)}} = \sigma_{1,1}$ (соответственно $\sigma_{h^{(1)}+1} = \sigma_{(2,1,\dots,1;1)}$) порядка $h^{(1)}$ (соответственно $h^{(1)}+1$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для $m = h^{(1)}$ (соответственно $= h^{(1)}+1$) имеем

$$(14.2.10) \quad \sigma_m(E_j) = \left(\exp \frac{2\pi i}{m} \right) E_j, \quad \sigma_m(F_j) = \left(\exp -\frac{2\pi i}{m} \right) F_j.$$

Это влечет за собой (14.2.6) и

$$(14.2.11) \quad \dim \mathfrak{g}_j(2, 1, \dots, 1; 1) = c_j + c_{h^{(1)}+1-j} \text{ для } 1 \leq j \leq h^{(1)}.$$

Если $h^{(1)}+1$ — простое число, то в силу подлеммы все собственные подпространства автоморфизма $\sigma_{h^{(1)}+1}$ имеют одинаковую размерность ℓ ; это вместе с (14.2.11) доказывает (14.2.7) и (14.2.8) для исключительной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, поскольку для $\mathfrak{g}$ типа G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 соответственно $h^{(1)}+1 = 7, 13, 13, 19, 31$ является простым числом. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра классического типа A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ или D_ℓ , равенство (14.2.7) проверяется прямым вычислением; это дает (14.2.8), если воспользоваться (14.2.11), тем самым доказывая е). Наконец, f) проверяется непосредственно. $\square$

Применяя лемму 14.2, легко вычислить r -экспоненты. Например, если j и $h^{(r)}$ взаимно просты, то j есть r -экспонента кратности 1 по лемме 14.2a) и с) (это охватывает все исключительные алгебры Ли, кроме E_6 , $r = 1$; в последнем случае следует проверить, что 2 не является экспонентой). Полный список r -экспонент приведен в табл. E_0 .

Замечание 14.2. Числа $m_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, \ell$) — это обычные экспоненты, а $h^{(1)}$ — обычное число Кокстера для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ типа X_ℓ . В самом деле, сравнивая лемму 14.2d) с (14.2.6), получаем

$$c_j + c_{h^{(1)}-j} = \ell + (\text{кратность } j \text{ среди экспонент}),$$

что является одним из определений экспонент и числа Кокстера для $\mathfrak{g}$. Отметим также, что все r -экспоненты имеют простую кратность, за одним исключением: $\mathfrak{g} = D_\ell$, где ℓ четно и $r = 1$; в этом случае $\ell - 1$ имеет кратность 2.

ТАБЛИЦА E_0

$\mathfrak{g}$	r	$h(r)$	$m_1^{(r)}, m_2^{(r)}, \dots, m_N^{(r)}$
A_ℓ	1	$\ell + 1$	$1, 2, 3, \dots, \ell$
B_ℓ	1	2ℓ	$1, 3, 5, \dots, 2\ell - 1$
C_ℓ	1	2ℓ	$1, 3, 5, \dots, 2\ell - 1$
D_ℓ	1	$2\ell - 2$	$1, 3, 5, \dots, 2\ell - 3, \ell - 1$
E_6	1	12	$1, 4, 5, 7, 8, 11$
E_7	1	18	$1, 5, 7, 9, 11, 13, 17$
E_8	1	30	$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$
F_4	1	12	$1, 5, 7, 11$
G_2	1	6	$1, 5$
$A_{2\ell}$	2	$4\ell + 2$	$1, 3, 5, \dots, 2\ell - 1, 2\ell + 3, \dots, 4\ell + 1$
$A_{2\ell-1}$	2	$4\ell - 2$	$1, 3, 5, \dots, 4\ell - 3$
$D_{\ell+1}$	2	$2\ell + 2$	$1, 3, 5, \dots, 2\ell + 1$
D_4	3	12	$1, 5, 7, 11$
E_6	2	18	$1, 5, 7, 11, 13, 17$

§14.3. Вернемся теперь к аффинной алгебре $\mathfrak{g}'(A)$ типа $X_N^{(r)}$. По теореме 8.7

$$(14.3.1) \quad \bar{\mathfrak{g}}(A) \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \mathfrak{g}_{j \bmod h(r)}(\mathbb{1}; r)),$$

где изоморфизм определяется по правилу

$$(14.3.2) \quad \pi(e_i) \mapsto t \otimes E_i, \quad \pi(f_i) \mapsto t^{-1} \otimes F_i \quad (i = 0, \dots, \ell).$$

Кроме того, (14.3.1) является главной градуировкой алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}(A)$. Следовательно,

$$(14.3.3) \quad \bar{e} = t \otimes E \text{ есть циклический элемент для } \bar{\mathfrak{g}}(A),$$

$$(14.3.4) \quad \bar{s}_j = t^j \otimes S_j^{(r)} \bmod h(r) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Наконец, отметим, что

$$h^{(r)} = rh,$$

где h — число Кокстера для $\mathfrak{g}'(A)$.

Следующее утверждение вытекает теперь из предложения 14.2.

Предложение 14.3. а) $\dim \mathfrak{g}_j(\mathbf{1}) = \ell + \dim \mathfrak{g}_j$ для $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

б) $\bar{\mathfrak{g}}$ есть коммутативная подалгебра в $\bar{\mathfrak{g}}(A)$.

с) Набором экспонент для $\mathfrak{g}'(A)$ является

$$\{m_s^{(r)} + jh^{(r)}, \text{ где } s = 1, \dots, N, j \in \mathbb{Z}\}.$$

□

Из предложения 14.3а) и предложения 10.8 выводится

Следствие 14.3. Дуальные аффинные алгебры имеют одни и те же экспоненты. □

Используя табл. E_0 , мы немедленно получаем список экспонент всех аффинных алгебр как наборов всех целых чисел, удовлетворяющих условиям, приведенным в табл. E .

ТАБЛИЦА E

$A_\ell^{(1)}$	$i \not\equiv 0 \pmod{\ell+1}$
$B_\ell^{(1)}$	$i \equiv 1 \pmod{2}$
$C_\ell^{(1)}$	$i \equiv 1 \pmod{2}$
$D_\ell^{(1)}$	$i \equiv 1 \pmod{2}, i \equiv \ell-1 \pmod{2\ell-2}$
$E_6^{(1)}$	$i \equiv \pm 1, \pm 4, \pm 5 \pmod{12}$
$E_7^{(1)}$	$i \equiv \pm 1, \pm 5, \pm 7, 9 \pmod{18}$
$E_8^{(1)}$	$i \equiv \pm 1, \pm 7, \pm 11, \pm 13 \pmod{30}$
$F_4^{(1)}$	$i \equiv \pm 1 \pmod{6}$
$G_2^{(1)}$	$i \equiv \pm 1 \pmod{6}$
$A_{2\ell}^{(2)}$	$i \equiv 1 \pmod{2}$, такое, что $i \not\equiv 0 \pmod{2\ell+1}$
$A_{2\ell-1}^{(2)}$	$i \equiv 1 \pmod{2}$
$D_{\ell+1}^{(2)}$	$i \equiv 1 \pmod{2}$
$D_4^{(3)}$	$i \equiv \pm 1 \pmod{6}$
$E_8^{(2)}$	$i \equiv \pm 1 \pmod{6}$

Отметим, что кратности экспонент равны 1, за исключением случая $A = D_\ell^{(1)}$, ℓ четно, когда кратность экспонент $(\ell-1)(2s+1)$ ($s \in \mathbb{Z}$) равна 2.

Наконец, вспомним, что по теореме 8.7 $\mathfrak{g}'(A)$ может быть построена как центральное расширение алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}(A)$ с помощью СК:

$$(14.3.5) \quad \mathfrak{g}'(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} (t^j \otimes \mathfrak{g}_{j \bmod h^{(r)}}(\mathbf{1}; r)) \oplus \mathbb{C}K,$$

со скобкой

$$(14.3.6) \quad [P_1(t) \otimes g_1, P_2(t) \otimes g_2] \\ = P_1(t)P_2(t) \otimes [g_1, g_2] \oplus \frac{1}{hr} \left(\text{Res} \frac{dP_1(t)}{dt} P_2(t) \right) (g_1 | g_2) K,$$

где $(\cdot | \cdot)$ — нормализованная инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, а h — число Кокстера для $\mathfrak{g}(A)$.

§14.4. Вспоминая определение бесконечномерной алгебры Гейзенберга (§9.13), получаем следующую простую лемму.

ЛЕММА 14.4. Главная подалгебра $\mathfrak{z}$ в $\mathfrak{g}'(A)$ изоморфна бесконечной алгебре Гейзенберга.

Доказательство. Предложение 14.3b) влечет за собой $[s_i, s_j] \subset \text{СК}$ для всех $i, j \in \mathbb{Z}$. В силу предложения 14.2c) и формулы (14.3.6) имеем $[s_i, s_j] = 0$ для $i \neq -j$ и $[a, s_{-i}] = \text{СК}$ для любого $a \in s_i$, $a \neq 0$, что доказывает предложение. $\square$

Теперь мы в состоянии сделать первый шаг в «главной конструкции» базисного представления.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.4. Пусть $\mathfrak{g}'(A)$ — аффинная алгебра, где A — матрица типа $X_N^{(r)}$ при $X = A, D$ или E , и пусть $\mathfrak{z}$ — главная подалгебра в $\mathfrak{g}'(A)$. Тогда базисный $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль $L(\Lambda_0)$, рассматриваемый как $\mathfrak{z}$ -модуль, остается неприводимым.

Доказательство. Пусть $L(\Lambda_0) = \bigoplus_{j \geq 0} L(\Lambda_0)_j$ — главная градуировка модуля $L(\Lambda_0)$, и пусть $\dim_q L(\Lambda_0) = \sum_{j \geq 0} \dim L(\Lambda_0)_j q^j$ есть его q -размерность (см. §10.10). Тогда по предложению 10.10

$$(14.4.1) \quad \dim_q L(\Lambda_0) = \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{\dim^t \mathfrak{g}_j(2, 1, \dots, 1) - \dim \mathfrak{g}_j(1)}.$$

Но алгебры $\mathfrak{g}^t(A)$, о которых идет речь, есть в точности алгебры из табл. Aff 1 или $A_{2\ell}^{(2)}$. Следовательно, благодаря (14.2.8) и (14.2.9) мы имеем

$$(14.4.2) \quad \dim^t \mathfrak{g}_j(2, 1, \dots, 1) = \ell \text{ для всех } j \neq 0.$$

Кроме того, в силу предложения 14.2 и формулы (14.3.4)

$$(14.4.3) \quad \dim \mathfrak{g}_j(1) = \ell + \dim s_j.$$

Подставляя (14.4.2) и (14.2.3) в (14.4.1), получаем

$$(14.4.4) \quad \dim_{\mathfrak{g}} L(\Lambda_0) = \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{-\dim \mathfrak{s}_j}.$$

С другой стороны, $\mathbb{Z}$ -градуировка $\mathfrak{s} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{s}_j$ индуцирует $\mathbb{Z}$ -градуировку $U(\mathfrak{s}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} U(\mathfrak{s})_j$; положим $U_j = U(\mathfrak{s})_{-j}(v_0)$, где $v_0 \in L(\Lambda_0)_{\Lambda_0}$ — ненулевой вектор. Тогда

$$(14.4.5) \quad U_j \subset L(\Lambda_0)_j.$$

Но по лемме 9.13а) $\mathfrak{s}$ -модуль $U = \bigoplus_{j \geq 0} U_j$ изоморфен представлению канонических коммутационных соотношений; следовательно,

$$(14.4.6) \quad \sum_{j \geq 0} (\dim U_j) q^j = \prod_{j \geq 1} (1 - q^j)^{-\dim \mathfrak{s}_j}.$$

Сравнивая (14.4.4) с (14.4.6), мы получаем равенство в (14.4.5) для всех j . Таким образом, $\mathfrak{s}$ -модуль $L(\Lambda_0) = U$ неприводим. $\square$

§14.5. Предложение 14.4 позволяет отождествить ограничение базисного представления на главную подалгебру с представлением канонических коммутационных соотношений. Чтобы продолжить его на всю алгебру Ли $\mathfrak{g}(A)$, нам понадобится некоторая лемма о дифференциальных операторах.

Пусть $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ — алгебра полиномов от бесконечного числа переменных x_i , и пусть $\hat{R} = \mathbb{C}[[x_1, x_2, \dots]]$ — алгебра формальных степенных рядов (т. е. алгебра всех линейных комбинаций (конечных) мономов от x_i или, другими словами, формальное пополнение алгебры R (см. §1.5)). *Дифференциальный оператор* на R — это (вообще говоря, бесконечная) сумма вида

$$\sum_{r \geq 0} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r} P_{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_r}}, \text{ где } P_{i_1 \dots i_r} \in \hat{R}.$$

Дифференциальный оператор определяет линейное отображение $D : R \rightarrow \hat{R}$ (в действительности каждое такое линейное отображение может быть однозначно реализовано как дифференциальный оператор). Частным случаем является умножение на $P \in R$. Еще один пример — это оператор T_λ , определенный формулой

$$(T_\lambda f)(x_1, x_2, \dots) = f(x_1 + \lambda_1, x_2 + \lambda_2, \dots).$$

Заметим, что

$$(14.5.1) \quad T_\lambda = \exp \sum_{i \geq 1} \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

по формуле Тейлора.

ЛЕММА 14.5. Пусть $D: R \rightarrow \hat{R}$ — линейное отображение.

а) Если $[x_i, D] = \lambda_i D$, $i = 1, 2, \dots$, то $D = D(1) \exp(-\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i})$.

б) Если $[\frac{\partial}{\partial x_i}, D] = \mu_i D$, $i = 1, 2, \dots$, то $D(1) = c \exp \sum_i \mu_i x_i$, $c \in \mathbb{C}$.

с) Если $[x_i, D] = \lambda_i D$ и $[\frac{\partial}{\partial x_i}, D] = \mu_i D$, $i = 1, 2, \dots$, то $D = c \exp(\sum_i \mu_i x_i) \exp(-\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i})$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.

Доказательство. а) Заменяем D на DT_λ ; тогда наше утверждение эквивалентно следующему: если $[x_i, D] = 0$, $i = 1, 2, \dots$, то $D = D(1)$. Но $D(f) = D(1)f$ для всех $f \in R$, что легко проверяется индукцией по полной степени f .

б) Заменяем D на $\exp(-\sum \mu_i x_i) D$; тогда наше утверждение эквивалентно следующему: если $[\frac{\partial}{\partial x_i}, D] = 0$, $i = 1, 2, \dots$, то $D(1) = \text{const}$.

Это очевидно: $[\frac{\partial}{\partial x_i}, D] = 0$ влечет за собой $\frac{\partial}{\partial x_i}(D(1)) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, и, значит, $D(1) = \text{const}$.

Часть с) следует из а) и б). □

Операторы вида $\left(\exp \sum_j \lambda_j x_j\right) \left(\exp -\left(\sum_j \mu_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)\right)$ называются *вертексными операторами*. Они были открыты физиками в теории струн.

§14.6. В этом параграфе мы построим в терминах дифференциальных операторов от бесконечного числа переменных базисное представление $L(\Lambda_0)$ аффинной алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)$ с матрицей Картана A типа $X_N^{(r)}$, где или $r = 1$ и A симметрическая, или $r > 1$. Эта конструкция называется *главной реализацией* базисного представления.

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_N , пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j(\mathbb{1}; r)$ — ее r -главная градуировка, $E \in \mathfrak{g}_{\mathbb{1}}(\mathbb{1}, r)$ есть

r -циклический элемент и $S^{(r)} = \bigoplus_j S_j^{(r)}$ — централизатор E в $\mathfrak{g}$ (см.

§14.2). В соответствии с предложением 14.2b) $S^{(r)}$ является подалгеброй Картана в $\mathfrak{g}$ (градуированной r -главной градуировкой). Пусть $\Delta \subset S^{(r)*}$ — множество корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно $S^{(r)}$. Для $\beta \in \Delta$ выберем ненулевой корневой вектор $A_\beta \in \mathfrak{g}$ и разложим его относительно главной градуировки:

$$A_\beta = \sum_j A_{\beta, j} \quad (\text{суммирование по } j \in \mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}).$$

Так как $S^{(r)} \cap \mathfrak{g}_0(\mathbf{1}; r) = 0$, подпространство $\mathfrak{g}_0(\mathbf{1}; r) \left(= \sum_{j=1}^l \mathbb{C} H_j \right)$ является линейной оболочкой элементов $A_{\beta, 0}$, $\beta \in \Delta$. Поэтому можно выбрать ℓ корневых векторов $A_{\beta_1}, \dots, A_{\beta_\ell}$ относительно $S^{(r)}$, соответствующих некоторым корням $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in (S^{(r)})^*$, так что их проекции на $\mathfrak{g}_0(\mathbf{1}; r)$ будут образовывать базис этого пространства.

Поскольку $\text{ad } E$ — невырожденный оператор на $\mathfrak{g}/S^{(r)}$, сдвигающий индуцированную градуировку на $\bar{\mathbf{1}}$, образы элементов $A_{\beta, j}$ в $\mathfrak{g}/S^{(r)}$ линейно независимы. Для всех β и j

$$[E, A_{\beta, j}] = \langle \beta, E \rangle A_{\beta, j+1} \text{ при } \langle \beta, E \rangle \neq 0.$$

Пусть T_j ($j = 1, \dots, N$) — базис в $S^{(r)}$, такой, что $T_j \in S_{m_j(r)}^{(r)}$ и $(T_i | T_{N+1-j}) = h \delta_{ij}$ для всех $i, j = 1, \dots, N$ (см. предложение 14.2с)). Положим

$$(14.6.1) \quad \lambda_{\beta j} = \langle \beta, T_j \rangle.$$

Тогда, очевидно,

$$(14.6.2) \quad [T_k, A_{\beta, j}] = \lambda_{\beta k} A_{\beta, j+m_k(r)}$$

(здесь $j + m_k(r)$ рассматривается как элемент из $\mathbb{Z}/h^{(r)}\mathbb{Z}$).

Заметим, что в силу (14.2.4) все элементы $A_{\beta, j}$ и T_k образуют базис в $\mathfrak{g}$, поскольку они линейно независимы. Заметим также, что $(A_{\beta, j} | T_k) = 0$.

Будем использовать теперь «главную» реализацию алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)$, определенную (14.3.5) и (14.3.6). Отображение

$$(14.6.3) \quad e_i \mapsto t \otimes E_i, \quad f_i \mapsto t^{-1} \otimes F_i, \quad a_i^\vee \mapsto H_i + (a_i/a_i^\vee h)K$$

осуществляет изоморфизм с этой реализацией.

Пусть $E_+ = \{b_1, b_2, \dots\}$ — последовательность положительных экспонент алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$, расположенных в неубывающем порядке. Введем следующий базис в главной подалгебре $\mathfrak{a}$:

$$K, p_i = t^{b_i} \otimes T_{i'}, \quad q_i = b_i^{-1} t^{-b_i} \otimes T_{N+1-i'},$$

где $i = 1, 2, \dots$. Здесь и далее i' определяется как элемент из $\{1, \dots, N\}$, сравнимый с $i \bmod N$. В силу (14.3.6) имеем

$$(14.6.4) \quad [p_i, q_j] = \delta_{ij} K \text{ для всех } i, j = 1, 2, \dots$$

Степени этих элементов в главной градуировке задаются соотношением

$$(14.6.5) \quad \deg p_i = b_i = -\deg q_i.$$

Предположим теперь, что $g(A)$ — аффинная алгебра одного из типов, перечисленных в начале параграфа, и пусть $L(\Lambda_0)$ — ее базисный модуль. Поскольку $L(\Lambda_0)$ имеет уровень 1, элемент K представляется тождественным оператором. В силу предложения 14.4 и следствия 9.13 мы можем отождествить $L(\Lambda_0)$ с пространством $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$; при этом K действует как тождественное преобразование, p_i — как $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и q_i — как умножение на x_i ($i = 1, 2, \dots$). Из (14.6.5) следует, что соотношения

$$(14.6.6) \quad \deg x_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

(вместе с равенством $\deg PQ = \deg P + \deg Q$) определяют главную градуировку на $L(\Lambda_0)$.

Чтобы продолжить реализацию базисного представления s на всю алгебру Ли $g'(A)$, мы продолжим очевидным образом отождествление $L(\Lambda_0)$ с R до отождествления $\hat{L}(\Lambda_0)$ с $\hat{R}$, где $\hat{L}(\Lambda_0)$ обозначает формальное пополнение модуля $L(\Lambda_0)$ по его главной градуировке (т. е. $\hat{L}(\Lambda_0) = \prod_j L(\Lambda_0)_j$). Пусть $\prod_\alpha g_\alpha$ — формальное пополнение алгебры Ли $g(A)$. Это пространство не является алгеброй Ли, однако присоединенное действие $g(A)$ может быть продолжено на него очевидным способом. Введем следующие элементы этого пополнения, зависящие от параметра $z \in \mathbb{C}^\times$:

$$X^\beta(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} (t^j \otimes A_{\beta, j}), \quad \beta \in \Delta.$$

Тогда $X^\beta(z)$ отображает $L(\Lambda_0)$ в $\hat{L}(\Lambda_0)$.

ЛЕММА 14.6. Оператор $X^\beta(z) : R \rightarrow \hat{R}$ действует как вертексный оператор

$$(14.6.7) \quad \begin{aligned} \Gamma^\beta(z) = \langle \Lambda_0, A_{\beta, 0} \rangle & \left(\exp \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\beta, j} z^{b_j} x_j \right) \\ & \times \left(\exp - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_{\beta, N+1-j} b_j^{-1} z^{-b_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Используя (14.6.2) и (14.3.6), запишем

$$\begin{aligned} [p_s, X^\beta(z)] &= [t^{b_s} \otimes T_s, \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} (t^j \otimes A_{\beta, j})] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} t^{j+b_s} \otimes [T_s, A_{\beta, j}] \\ &= \lambda_{\beta_s} z^{b_s} \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j-b_s} t^{j+b_s} \otimes A_{\beta, j+b_s} \\ &= \lambda_{\beta_s} z^{b_s} X^\beta(z). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$[q_s, X^\beta(z)] = \lambda_{\beta, N+1-s} b_s^{-1} z^{-b_s} X^\beta(z).$$

Теперь лемма следует из леммы 14.5. $\square$

Разложим вертексный оператор $\Gamma^\beta(z)$, определенный формулой (14.6.7), по степеням z :

$$\Gamma^\beta(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Gamma_{\beta, j} z^j.$$

Тогда $\Gamma_{\beta, j}$ являются дифференциальными операторами бесконечного порядка, которые отображают $R = L(\Lambda_0)$ в себя. Поскольку все элементы $A_{\beta, j}$ и T_s образуют базис в $\mathfrak{g}$, мы можем переформулировать лемму 14.6 в следующем виде.

ТЕОРЕМА 14.6. Пусть $\mathfrak{g}'(A)$ — аффинная алгебра, такая, что A — либо симметрическая матрица (из табл. Афф 1), либо матрица из табл. Афф 2 или 3. Положим $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Тогда тождественный оператор, операторы $x_j, \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2, \dots$) и $\Gamma_{\beta, i, j}$ ($i = 1, \dots, \ell; j \in \mathbb{Z}$) образуют базис подалгебры Ли алгебры дифференциальных операторов, сохраняющих R . Эта подалгебра изоморфна $\mathfrak{g}'(A)$, и ее представление на R эквивалентно базисному представлению алгебры Ли $\mathfrak{g}'(A)$.

Реализация базисного представления, которая дается теоремой 11.6, называется *главной вертекс-операторной конструкцией*.

§14.7. Мы выпишем явные формулы для главной вертекс-операторной конструкции в случае аффинной алгебры $\mathfrak{g}'(A)$ типа $A_{n-1}^{(1)}$ ($n \geq 2$). Здесь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ и $(x|y) = \text{tr } xy$. Пусть $E_{i, j}$ ($i, j = 1, \dots, n$) обозначает $n \times n$ -матрицу, у которой на i, j -м месте стоит 1, а на остальных местах 0. Пусть

$$\begin{aligned} E_0 &= E_{n1}, & E_i &= E_{i, i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ F_0 &= E_{1n}, & F_i &= E_{i+1, i} \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ H_0 &= E_{nn} - E_{11}, & H_i &= E_{ii} - E_{i+1, i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Если положить $\deg E_{ij} = j - i$ для $i \neq j$ и $\deg D = 0$ для диагональной матрицы D со следом нуль, то на $\mathfrak{g}$ будет задана 1-главная $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -градуировка. Положим

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} E_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

и пусть S — централизатор E в $\mathfrak{g}$. Тогда S есть подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$ с базисом

$$T_j = E^j \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

При этом $\deg T_j = j \bmod n$ и

$$(T_i | T_{n-j}) = n \delta_{ij} \text{ для } i, j = 1, \dots, n-1.$$

Для двух различных корней n -й степени из единицы, ϵ и η , определим $n \times n$ -матрицы

$$A_{(\epsilon, \eta)} = (\epsilon^i \eta^{-j})_{i,j=1}^n.$$

Тогда $A_{(\epsilon, \eta)} \in \mathfrak{g}$ являются корневыми векторами относительно S :

$$[T_i, A_{(\epsilon, \eta)}] = (\epsilon^i - \eta^i) A_{(\epsilon, \eta)} \text{ для } i = 1, \dots, n-1.$$

Пусть $A_{(\epsilon, \eta), j}$ — однородные компоненты вектора $A_{(\epsilon, \eta)}$. Элементы T_k вместе с однородными компонентами вектора $A_{(\epsilon, 1)}$ образуют базис в $\mathfrak{g}$. В обозначениях (14.6.1)

$$\lambda_{(\epsilon, \eta), j} = \epsilon^j - \eta^j \text{ для } j = 1, \dots, n-1.$$

Будем использовать главную реализацию $\mathfrak{g}'(A)$:

$$\mathfrak{g}'(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \mathfrak{g}_{j \bmod n}(\mathbb{1}; 1)) \oplus \mathbb{C}K,$$

со скобкой

$$[a(t) \oplus \lambda K, b(t) \oplus \mu K] = a(t)b(t) - b(t)a(t) \oplus \frac{1}{n} \left(\text{Res tr } \frac{da(t)}{dt} b(t) \right) K.$$

Кроме того, $h = n$ и $E_+ = \{j \in \mathbb{Z}_+ \mid j \not\equiv 0 \bmod n\}$. Для $m = 1, 2, \dots$, $m \not\equiv 0 \bmod n$, положим

$$p_m = t^m T_{m'}, \quad q_m = m^{-1} t^{-m} T_{n-m'}.$$

Мы можем использовать эту более простую, чем применялась выше в общем случае, нумерацию, потому что нет экспонент кратности больше чем 1. Мы имеем

$$[p_\ell, q_m] = \delta_{\ell m} K$$

для всех $\ell, m > 0$, не делящихся на n .

Отождествим пространство базисного представления с пространством полиномов

$$R = \mathbb{C}[x_m; m \in \mathbb{Z}_+, m \not\equiv 0 \pmod n].$$

Тогда 1 является старшим вектором, и равенства $\deg x_m = m$ задают главную градуировку на R . Для $i = 1, \dots, n-1$ положим

$$X^{(\epsilon, \eta)}(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} t^j A_{(\epsilon, \eta), j}.$$

Тогда K, p_m, q_m ($m \in \mathbb{Z}_+, m \not\equiv 0 \pmod n$) и однородные компоненты $t^j A_{(\epsilon, 1), j}$ в $X^{(\epsilon, 1)}(z)$ образуют базис в $\mathfrak{g}'(A)$. По лемме 14.6 и теореме 14.6 базисное представление σ для $\mathfrak{g}'(A)$ на R задается формулами

$$\sigma(K) = 1,$$

$$\sigma(p_m) = \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad \sigma(q_m) = x_m \quad (m \in \mathbb{Z}_+, m \not\equiv 0 \pmod n),$$

$$\sigma(t^j A_{(\epsilon, \eta), j}) = \text{коэффициент при } z^{-j} \text{ в}$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon - \eta} \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m (\epsilon^m - \eta^m) x_m \right) \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m} (\eta^{-m} - \epsilon^{-m}) \frac{\partial}{\partial x_m} \right).$$

Действительно, чтобы вычислить $\langle \Lambda_0, A_{(\epsilon, \eta), 0} \rangle$ в (14.6.7), заметим, что

$$\alpha_0^\vee = (E_{nn} - E_{11}) + \frac{1}{n} K, \quad \alpha_i^\vee = (E_{ii} - E_{i+1, i+1}) + \frac{1}{n} K \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Следовательно, $A_{(\epsilon, \eta), 0} = \sum_{j=1}^{n-1} ((\epsilon/\eta) + (\epsilon/\eta)^2 + \dots + (\epsilon/\eta)^j) \alpha_j^\vee - \frac{\epsilon/\eta}{1 - \epsilon/\eta} K$.

Так как $\langle \Lambda_0, \alpha_i^\vee \rangle = \delta_{0, i}$ и $\langle \Lambda_0, K \rangle = 1$, мы получаем $\langle \Lambda_0, A_{(\epsilon, \eta), 0} \rangle = \frac{\epsilon}{\epsilon - \eta}$.

§14.8. Теперь мы займемся однородной вертекс-операторной конструкцией. Эта конструкция основана на рассмотрении однородной подалгебры Гейзенберга $\mathfrak{t}$, см. §8.4 (вместо однородной подалгебры Гейзенберга $\mathfrak{g}$ в главной вертекс-операторной конструкции). Уже неверно, что $L(\Lambda_0)$ неприводим как $\mathfrak{t}$ -модуль. Тем не менее можно доказать некоторый аналог предложения 14.4 (см. упр. 14.6) и далее продолжать в духе доказательства в главном случае. Этот путь позволяет «открыть» конструкцию. Более короткий путь доказать, что эта конструкция «работает», — это применить некоторые вычисления с вертексными операторами (что привычнее для физиков). Здесь мы будем использовать последний метод, отсылая читателя к упр. 14.5–14.7, в которых изложен первый. Для простоты мы не будем рассматривать случай скрученных алгебр.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in \Delta} C E_{\alpha} \right)$ — простая конечномерная алгебра Ли типа A_{ℓ} , D_{ℓ} или E_{ℓ} с коммутационными соотношениями, определяемыми (7.8.5). Пусть $(\cdot | \cdot)$ — нормализованная инвариантная форма на $\mathfrak{g}$ (определенная (7.8.6)). И пусть

$$\hat{L}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g} + \mathbb{C}K + \mathbb{C}d$$

— соответствующая аффинная алгебра типа $A_{\ell}^{(1)}$, $D_{\ell}^{(1)}$ или $E_{\ell}^{(1)}$.

Рассмотрим комплексную коммутативную ассоциативную алгебру

$$(14.8.1) \quad V = S\left(\bigoplus_{j \in \mathbb{C}} (\mathfrak{t}^j \otimes \mathfrak{h})\right) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[Q],$$

где S обозначает симметрическую алгебру, а $\mathbb{C}[Q]$ — групповую алгебру корневой решетки $Q \subset \mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}(X_{\ell})$. Пусть $\alpha \mapsto e^{\alpha}$ обозначает вложение $Q \subset \mathbb{C}[Q]$. Как и прежде, $u^{(n)}$ будет обозначать $t^n \otimes u$ ($n \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathfrak{g}$). Для $n > 0$, $u \in \mathfrak{h}$ обозначим через $u(-n)$ оператор умножения на $u^{(-n)}$ в V . Для $n \geq 0$, $u \in \mathfrak{h}$ обозначим через $u(n)$ дифференцирование алгебры V , определенное формулой

$$(14.8.2) \quad u(n)(v^{(-m)} \otimes e^{\alpha}) = n\delta_{n,-m}(u|v) \otimes e^{\alpha} + \delta_{n,0}(\alpha|u)v^{(-m)} \otimes e^{\alpha}.$$

Выбирая дуальные базисы u_i и u^i в $\mathfrak{h}$, определим оператор D_0 на V по формуле

$$(14.8.3) \quad D_0 = \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{1}{2} u_i(0) u^i(0) + \sum_{n \geq 1} u_i(-n) u^i(n) \right).$$

Кроме того, для $\alpha \in Q$ определим оператор знака c_{α} :

$$(14.8.4) \quad c_{\alpha}(f \otimes e^{\beta}) = \varepsilon(\alpha, \beta) f \otimes e^{\beta}.$$

Наконец, для $\alpha \in \Delta \subset Q$ введем вертексный оператор

$$(14.8.5) \quad \Gamma_\alpha(z) = \left(\exp \sum_{j \geq 1} \frac{z^j}{j} \alpha(-j) \right) \left(\exp - \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \alpha(j) \right) e^\alpha z^{\alpha(0)} c_\alpha.$$

Здесь z рассматривается как переменная. Разлагая его по степеням z ,

$$\Gamma_\alpha(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Gamma_\alpha^{(j)} z^{-j-1},$$

мы получим последовательность операторов $\Gamma_\alpha^{(j)}$ на V . Теперь мы можем сформулировать результат.

ТЕОРЕМА 14.8. *Отображение $\sigma : \hat{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End } V$, заданное формулами*

$$\begin{aligned} K &\mapsto 1, \\ u^{(n)} &\mapsto u(n) \quad \text{для } u \in \mathfrak{h}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ E_\alpha^{(n)} &\mapsto \Gamma_\alpha^{(n)} \quad \text{для } \alpha \in \Delta, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ d &\mapsto -D_0, \end{aligned}$$

определяет базисное представление аффинной алгебры $\hat{L}(\mathfrak{g})$ на V .

Доказательство. Сначала мы проверим, что это отображение задает представление. Поскольку $E_\alpha(z) \mapsto \Gamma_\alpha(z)$, в соответствии с (7.7.3) и (7.7.4) нам необходимо проверить следующие соотношения (все остальные соотношения тривиальны):

$$(14.8.6) \quad [D_0, \Gamma_\alpha(z)] = (z \frac{d}{dz} + 1) \Gamma_\alpha(z),$$

$$(14.8.7) \quad [\Gamma_\alpha(z_1), \Gamma_{-\alpha}(z_2)] = -\alpha(z_1) \delta(z_1 - z_2) + \delta'_{z_1}(z_1 - z_2),$$

$$(14.8.8) \quad [\Gamma_\alpha(z_1), \Gamma_\beta(z_2)] = \varepsilon(\alpha, \beta) \Gamma_{\alpha+\beta}(z_1) \delta(z_1 - z_2), \text{ если } \alpha + \beta \in \Delta.$$

Соотношение (14.8.6) вытекает из соотношений

$$(14.8.9) \quad [D_0, u(n)] = -nu(n), \quad [D_0, e^\gamma] = -\frac{1}{2}(\gamma|\gamma)e^\gamma,$$

которые очевидны. Чтобы проверить (14.8.7) и (14.8.8), для $\gamma \in \Delta$ положим

$$\Gamma_\gamma^\pm(z) = \exp \sum_{j \geq 1} \frac{\gamma(\pm j)}{\mp j} z^{\mp j}, \quad \Gamma_\gamma^0(z) = e^\gamma z^{\gamma(0)} c_\gamma.$$

Тогда

$$(14.8.10) \quad \Gamma_{\alpha}^{-}(z_1)\Gamma_{\beta}^{+}(z_2) = \Gamma_{\beta}^{+}(z_2)\Gamma_{\alpha}^{-}(z_1) \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)},$$

$$(14.8.11) \quad \Gamma_{\alpha}^0(z_1)\Gamma_{\beta}^0(z_2) = e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} z_1^{(\alpha|\beta)} c_{\alpha} c_{\beta} \varepsilon(\alpha, \beta).$$

Здесь и далее под $(1 - z_2/z_1)^m$, $m \in \mathbb{Z}$, мы подразумеваем разложение в степенной ряд по z_2/z_1 . Вторая из этих формул тривиальна, а первая, рассматриваемая как тождество формальных степенных рядов по $z_1^{\pm 1}$ и $z_2^{\pm 1}$, вытекает из следующих двух фактов:

$$(14.8.12) \quad e^A e^B = e^B e^A e^{[A, B]} \text{ для двух операторов } A \text{ и } B, \\ \text{таких, что } [A, B] \text{ коммутирует с } A \text{ и } B;$$

$$(14.8.13) \quad \exp\left(-\sum_{j \geq 1} x^j / j\right) = 1 - x.$$

Следующая формула является непосредственным следствием (14.8.10) и (14.8.11):

$$(14.8.14) \quad \Gamma_{\alpha}(z_1)\Gamma_{\beta}(z_2) = \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{(\alpha|\beta)} z_1^{(\alpha|\beta)} \varepsilon(\alpha, \beta) \\ \times \left(\exp \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} (\alpha(-j)z_1^j + \beta(-j)z_2^j)\right) \left(\exp - \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} (\alpha(j)z_1^{-j} + \beta(j)z_2^{-j})\right) \\ \times e^{\alpha+\beta} z_1^{\alpha(0)} z_2^{\beta(0)} c_{\alpha} c_{\beta}.$$

Используя (14.8.14), мы получаем для $\alpha \in \Delta$ равенство

$$(14.8.15) \quad [\Gamma_{\alpha}(z_1), \Gamma_{-\alpha}(z_2)] = \delta'_{z_1}(z_1 - z_2) \\ \times \left(\exp \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(-j)}{j} (z_1^j - z_2^j)\right) \left(\exp - \sum_{j \geq 1} \frac{\alpha(j)}{j} (z_1^{-j} - z_2^{-j})\right) \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{\alpha(0)}$$

Здесь мы пользовались тем, что

$$(14.8.16) \quad \delta(z_1 - z_2) = z_2^{-1} \left(1 - \frac{z_1}{z_2}\right)^{-1} + z_1^{-1} \left(1 - \frac{z_2}{z_1}\right)^{-1},$$

и поэтому

Применяя (7.7.5) к (14.8.15), мы доказываем (14.8.7). Доказательство (14.8.8) аналогично. Итак, σ — представление $\hat{L}(\mathfrak{g})$ на V .

Кроме того, из (14.8.9) следует, что

$$\mathrm{tr}_V q^{D_0} = \sum_{\gamma \in Q} q^{(\gamma|\gamma)/2} / \varphi(q)^\ell.$$

Сравнивая это с (12.13.6), мы видим, что σ — базисное представление со старшим вектором $1 \otimes 1$. $\square$

§14.9. Базисное представление аффинной алгебры бесконечного ранга типа A_∞ (и B_∞) может быть построено с использованием одного из двух подходов, которые обсуждались в §14.6 и 14.8. В этом и следующем параграфах мы обсудим еще один подход, имеющий фундаментальное значение для математической физики. Обычно это называют бозонно-фермионным соответствием.

Бесконечное выражение вида

$$i_1 \wedge i_2 \wedge i_3 \wedge \dots,$$

где $i_1, i_2, \dots$ — целые числа, такие, что

$$i_1 > i_2 > i_3 > \dots \text{ и } i_n = i_{n-1} - 1 \text{ для } n \gg 0,$$

называется *полубесконечным мономом*. Пусть F — комплексное векторное пространство с базисом, состоящим из всех полубесконечных мономов, и пусть $H(\cdot, \cdot)$ обозначает эрмитову форму на F , относительно которой этот базис является ортонормированным.

Определим разложение *по зарядам*

$$F = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} F^{(m)},$$

обозначая через

$$|m\rangle = \underline{m} \wedge \underline{m-1} \wedge \underline{m-2} \wedge \dots$$

вакуумный вектор заряда m , а через $F^{(m)}$ — линейную оболочку всех полубесконечных мономов *заряда* m , т. е. тех, которые отличаются от $|m\rangle$ только в конечном числе мест.

Данному полубесконечному моному $\varphi = i_1 \wedge i_2 \wedge \dots$ заряда m мы сопоставим разбиение $\lambda^\varphi = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0\}$, полагая $\lambda_1 = i_1 - m$, $\lambda_2 = i_2 - (m-1), \dots$. Ясно, что это биективное соответствие между множеством всех полубесконечных мономов данного заряда m и множеством всех разбиений Par (т. е. множеством всех финитных

невозрастающих последовательностей неотрицательных целых чисел). Определим *энергию* φ как размер разбиения λ^φ , $|\lambda^\varphi| := \sum_i \lambda_i$. Пусть

$F_j^{(m)}$ обозначает линейную оболочку всех полубесконечных мономов заряда m и энергии j .

Имеем разложение по энергиям

$$(14.9.1) \quad F^{(m)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} F_j^{(m)}.$$

Из проведенного выше обсуждения следует, что

$$\dim F_j^{(m)} = p(j),$$

следовательно,

$$(14.9.2) \quad \dim_q F^{(m)} := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim F_j^{(m)} q^j = 1/\varphi(q).$$

Для $j \in \mathbb{Z}$ введем операторы *вклинивания* и *сокращения* ψ_j и ψ_j^* на F с помощью формул

$$\begin{aligned} \psi_j(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots) &= \begin{cases} 0, & \text{если } j = i_s \text{ для некоторого } s, \\ (-1)^s i_1 \wedge \dots \wedge i_s \wedge i_{s+1} \wedge \dots, & \text{если } i_s > j > i_{s+1}, \end{cases} \\ \psi_j^*(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots) &= \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq i_s \text{ для всех } s, \\ (-1)^{s+1} i_1 \wedge i_2 \wedge \dots \wedge i_{s-1} \wedge i_{s+1} \wedge \dots, & \text{если } j = i_s. \end{cases} \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что операторы ψ_j и ψ_j^* сопряжены относительно эрмитовой формы $H(\cdot, \cdot)$ и удовлетворяют соотношениям

$$(14.9.3) \quad \psi_i \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i = \delta_{ij}, \quad \psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0, \quad \psi_i^* \psi_j^* + \psi_j^* \psi_i^* = 0.$$

Таким образом, операторы ψ_j и ψ_j^* порождают клиффордову алгебру Cl. Ясно, что Cl-модуль F неприводим и

$$\psi_j |0\rangle = 0 \text{ для } j \leq 0, \quad \psi_j^* |0\rangle = 0 \text{ для } j > 0.$$

Замечание 14.9. Напомним, что для данного векторного пространства V с симметрической билинейной формой $(\cdot, \cdot)$ соответствующая *клиффордова алгебра* определяется следующим образом:

$$\text{Cl } V = T(V)/J,$$

где $T(V)$ — тензорная алгебра над V и J — ее двусторонний идеал, порожденный элементами вида $x \otimes y - (x|y)(x, y \in V)$. Для

данного максимального изотропного подпространства U в V алгебра $Cl V$ имеет единственный неприводимый модуль F_U , называемый *спинорным модулем*, который обладает ненулевым вектором $|0\rangle$, таким, что $U|0\rangle = 0$. Алгебра Cl есть клиффордова алгебра, соответствующая пространству $V = \sum_i \mathbb{C}\psi_i + \sum_i \mathbb{C}\psi_i^*$ с симметрической билинейной формой $(\psi_i|\psi_j^*) = \delta_{ij}$, все остальные произведения равны нулю и F является спинорным модулем, соответствующим подпространству $U = \sum_{i \leq 0} \mathbb{C}\psi_i + \sum_{i > 0} \mathbb{C}\psi_i^*$.

Все наши дальнейшие вычисления основаны на коммутационных соотношениях, вытекающих из (14.9.3):

$$(14.9.4) \quad [\psi_i \psi_j^*, \psi_k] = \delta_{kj} \psi_i; \quad [\psi_i \psi_j^*, \psi_k^*] = -\delta_{ki} \psi_j^*.$$

Вложение $r: gl_\infty \rightarrow Cl$, определенное формулой

$$r(E_{ij}) = \psi_i \psi_j^*,$$

задает представление r алгебры Ли gl_∞ на F и тем самым ее представление r_m на gl_∞ на $F^{(m)}$ для каждого $m \in \mathbb{Z}$. Отметим, что представление r унитаризуемо для антилинейной инволюции $a \mapsto -{}^t \bar{a}$ в gl_∞ в том смысле, что $r({}^t \bar{a})$ и $r(a)$ — сопряженные операторы относительно эрмитовой формы H для всех $a \in gl_\infty$.

Легко проверить, что gl_∞ действует на F «дифференцированиями», т. е. для $a = (a_{ij}) \in gl_\infty$

$$(14.9.5) \quad r(a)(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots) = a \cdot i_1 \wedge i_2 \wedge \dots + i_1 \wedge a \cdot i_2 \wedge \dots + \dots,$$

где $a \cdot j = \sum_i a_{ij} i$. Здесь (и далее) мы используем обычные правила внешней алгебры для того, чтобы выразить правую часть (14.9.5) в терминах полубесконечных мономов. Таким образом, F может рассматриваться как бесконечное обобщение обычной внешней алгебры. Из этих соображений r обычно называется *бесконечным клим-представлением*.

gl_∞ есть алгебра Ли группы

$$GL_\infty = \{a = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a \text{ обратима и все } a_{ij} - \delta_{ij} \text{ равны нулю, за исключением конечного их числа}\}.$$

Соответствующее действие R группы GL_∞ на F задается формулой

$$(14.9.6) \quad R(g)(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots) = g \cdot i_1 \wedge g \cdot i_2 \wedge \dots,$$

т. е. (14.9.5) и (14.9.6) связаны соотношением

$$(14.9.7) \quad \exp r(a) = R(\exp a), \quad a \in gl_\infty.$$

Используя стандартные вычисления во внешней алгебре, мы получаем следующую формулу для представления R_m группы GL_∞ на $F^{(m)}$:

(14.9.8)

$$R_m(g)(\underline{i}_1 \wedge \underline{i}_2 \wedge \dots) = \sum_{j_1 > j_2 > \dots} (\det g_{j_1, j_2, \dots}^{i_1, i_2, \dots}) \underline{j}_1 \wedge \underline{j}_2 \wedge \dots, g \in GL_\infty,$$

где $g_{j_1, j_2, \dots}^{i_1, i_2, \dots}$ обозначает матрицу, расположенную на пересечении строк $j_1, j_2, \dots$ и столбцов $i_1, i_2, \dots$ матрицы g .

Ясно, что представление r_m неприводимо. Кроме того,

$$r_m(E_{ij})|m\rangle = 0, \quad \text{если } i < j \text{ или } i = j > m,$$

$$r_m(E_{jj})|m\rangle = |m\rangle, \quad \text{если } j \geq m.$$

Итак, как sl_∞ -модуль $F^{(m)}$ изоморфен $L(\Lambda_m)$, где Λ_m — фундаментальный вес, определяемый, как обычно, формулой $\langle \Lambda_m, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{mj}$ (обозначения, касающиеся gl_∞ , $\bar{a}_\infty$ и т. д., см. в §7.11).

Представление r_0 алгебры Ли gl_∞ на $F^{(0)}$ называется *базисным представлением*.

Модуль $F^{(m)}$ над gl_∞ не продолжается на $\bar{a}_\infty$, так как, например,

$$r_0(\text{diag}(\dots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots))|0\rangle = (\lambda_0 + \lambda_{-1} + \dots)|0\rangle,$$

что представляет собой, вообще говоря, расходящийся ряд. Чтобы избежать этой неприятности, модифицируем представление r , полагая

$$\hat{r}(E_{ij}) = \begin{cases} \psi_i \psi_j^*, & \text{если } i \neq j \text{ или } i + j > 0, \\ \psi_j^* \psi_i, & \text{если } i + j \leq 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что это продолжается по линейности до представления $\hat{r}$ пополненной аффинной алгебры бесконечного ранга a_∞ на F с $r = 1$ (определение см. в §7.11). Тем самым для каждого $m \in \mathbb{Z}$ мы получаем неприводимое представление $\hat{r}_m$ алгебры Ли a_∞ на $F^{(m)}$.

Как в §14.1, назовем

$$\bar{e} = \sum_i \pi(e_i) \in \bar{x}_\infty$$

циклическим элементом алгебры Ли $\bar{x}_\infty$ и обозначим через $\bar{e}$ его централизатор в $\bar{x}_\infty$. Здесь $\pi: x_\infty \rightarrow \bar{x}_\infty$ — канонический гомоморфизм. Подалгебра $\mathfrak{g} = \pi^{-1}(\bar{e})$ называется *главной подалгеброй* в x_∞ .

В случае a_∞ имеем

$$\bar{e} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i, i+1},$$

следовательно, элементы $\bar{e}^j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i, i+j}$ ($j \in \mathbb{Z}$) образуют базис в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Используя (7.12.1), непосредственно убеждаемся, что

$$\psi(\bar{e}^m, \bar{e}^n) = m\delta_{m, -n}.$$

Таким образом, $\mathfrak{g} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}s_m + \mathbb{C}K$, где $\pi(s_m) = \bar{e}^m$ и $[s, K] = 0$ с коммутационными соотношениями

$$(14.9.9) \quad [s_m, s_n] = m\delta_{m, -n}K,$$

т. е. $\mathfrak{g}$ — осцилляторная алгебра. Сравнивая (14.9.2) с (14.9.9) таким же способом, как в §14.4, мы получаем следующее

Предложение 14.9. Рассматриваемые как $\mathfrak{g}$ -модули a_∞ -модули $F^{(m)}$ неприводимы.

§14.10. Операторы ψ_j и ψ_j^* называются свободными фермионами. Бозонизация состоит во введении свободных бозонов

$$\alpha_n = \hat{r}(s_n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Или, в явном виде,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{j+n}^*, \quad \text{если } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \alpha_0 &= \sum_{j > 0} \psi_j \psi_j^* - \sum_{j \leq 0} \psi_j^* \psi_j. \end{aligned}$$

В силу (14.9.9)

$$(14.10.1) \quad [\alpha_m, \alpha_n] = m\delta_{m, -n}.$$

Заметим также, что

$$(14.10.2) \quad \alpha_0|_{F^{(m)}} = mI$$

и что α_m и α_{-m} — сопряженные операторы.

Физики назвали бы F фермионным пространством Фока. Введем теперь бозонное пространство Фока

$$B = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots; q, q^{-1}],$$

которое является алгеброй полиномов от переменных $x_1, x_2, \dots$ и q, q^{-1} . Зададим представление r^B осцилляторной алгебры $\mathfrak{s}$ на B формулами

$$r^B(s_m) = \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad r^B(s_{-m}) = mx_m, \quad \text{если } m > 0;$$

$$r^B(s_0) = q \frac{\partial}{\partial q}, \quad r^B(K) = 1.$$

Тогда по предложению 14.9 и в силу единственности канонических коммутационных соотношений (следствие 9.13) существует (единственный) изоморфизм $\mathfrak{s}$ -модулей

$$\sigma: F \xrightarrow{\sim} B,$$

такой, что $\sigma(|m\rangle) = q^m$. Отметим, что $\sigma(F^{(m)}) = B^{(m)} := q^m \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$.

Отображение σ переводит эрмитову форму $H(\cdot, \cdot)$ на F в эрмитову форму $H_B(\cdot, \cdot)$ на B и разложение по энергиям (14.9.1) для F — в разложение по энергиям для B . В явной форме они задаются следующим предложением.

Предложение 14.10.

а) $H_B(q^m P(x), q^n Q(x)) = \delta_{mn} \overline{P} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \right) Q(x) \Big|_{x=0}.$

б) Энергия $q^m x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots$ равна $j_1 + 2j_2 + \dots$.

Доказательство. а) следует из (9.13.4); б) следует из простого наблюдения, что оператор $\psi_i \psi_j^*$ увеличивает энергию на $i - j$ (таким образом, разложение по энергиям есть не что иное, как главная градуировка). $\square$

Используя σ , мы можем также перевести оператор умножения на q из B на F , получая (единственный) оператор на F , который мы снова обозначим через q , такой, что

$$q|m\rangle = |m+1\rangle, \quad q\psi_i = \psi_{i+1}q \quad (m, i \in \mathbb{Z}).$$

(Второе равенство вытекает из первого и соотношения $q\alpha_i = \alpha_i q$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.) Заметим, что q и q^{-1} — сопряженные операторы.

Фермионизация состоит в восстановлении фермионов ψ_i и ψ_i^* в терминах бозонов α_i . Чтобы сделать это, введем (как прежде) производящие функции (фермионные поля):

$$\psi(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j \psi_j, \quad \psi^*(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} \psi_j^*.$$

Введем также операторы

$$\Gamma_+(z) = \exp \sum_{n \geq 1} \frac{z^{-n}}{n} \alpha_n, \quad \Gamma_-(z) = \exp \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} \alpha_{-n}.$$

Как и прежде, мы рассматриваем z как формальный параметр, так что $\Gamma_{\pm}(z)$ рассматривается как производящая функция операторов $\Gamma_n^{\pm}$ на F :

$$\Gamma_{\pm}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \Gamma_n^{\pm} z^{\mp n}.$$

Поскольку $\Gamma_0^{\pm} = 1$, мы можем рассмотреть производящие функции $\Gamma_{\pm}(z)^{-1}$. Отметим, что $\Gamma_+(z)$ и $\Gamma_-(z)$ — сопряженные операторы в том смысле, что Γ_n^+ и Γ_{-n}^- есть сопряженные операторы на F . Заметим также, что в бозонной картине

$$(14.10.3) \quad \Gamma_+(z) = \exp \sum_{n \geq 1} \frac{z^{-n}}{n} \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \Gamma_-(z) = \exp \sum_{n \geq 1} z^n x_n.$$

Наконец, разбиению $\lambda \in \text{Par}$ поставим в соответствие *полином Шура* $S_{\lambda}(x)$ обычным способом. Сначала определим элементарные полиномы Шура $S_m(x)$ с помощью производящей функции

$$(14.10.4) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_m(x) z^m = \exp \sum_{n \geq 1} z^n x_n \quad (= \prod_{n \geq 1} e^{z^n x_n}).$$

Имеем

$$S_m(x) = 0 \text{ для } m < 0, \quad S_0(x) = 1 \quad \text{и} \\ S_m(x) = \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots = m} \frac{x_1^{k_1} x_2^{k_2}}{k_1! k_2!} \dots \quad \text{для } m > 0.$$

Для $\lambda = \{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots\} \in \text{Par}$ положим

$$S_{\lambda}(x) = \det(S_{\lambda_i + j - i}(x))_{1 \leq i, j \leq |\lambda|}.$$

Здесь и далее x обозначает $(x_1, x_2, \dots)$.

Теперь мы можем сформулировать бозонно-фермионное соответствие.

ТЕОРЕМА 14.10. а) Справедливы формулы

$$\begin{aligned}\psi(z) &= z^{\alpha_0} q \Gamma_-(z) \Gamma_+(z)^{-1}, \\ \psi^*(z) &= q^{-1} z^{-\alpha_0} \Gamma_-(z)^{-1} \Gamma_+(z).\end{aligned}$$

б) Если $\varphi \in F^{(m)}$ — полубесконечный моном, то

$$\sigma(\varphi) = q^m S_{\lambda^*}(x).$$

Доказательство. Чтобы доказать а), мы непосредственно проверим следующие соотношения для операторов на F :

$$[\alpha_j, \psi(z)] = z^j \psi(z), \quad [\alpha_j, \psi^*(z)] = -z^j \psi^*(z).$$

Первое из этих равенств переходит на B в следующие:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \sigma\psi(z)\sigma^{-1}\right] &= z^j (\sigma\psi(z)\sigma^{-1}), \\ [x_j, \sigma\psi(z)\sigma^{-1}] &= \frac{z^{-j}}{j} (\sigma\psi(z)\sigma^{-1}).\end{aligned}$$

Значит, по лемме 14.5 оператор

$$\sigma\psi(z)\sigma^{-1} : B^{(m)} \rightarrow B^{(m+1)}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma\psi(z)\sigma^{-1} &= C_m(z) q \Gamma(z), \quad \text{где} \\ \Gamma(z) &= \left(\exp \sum_{j \geq 1} z^j x_j \right) \left(\exp \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right).\end{aligned}$$

Но коэффициент при $|m+1\rangle$ в $\psi(z)|m\rangle$ равен z^{m+1} , поэтому $C_m(z) = z^{m+1}$. Это доказывает первую из двух формул в а). Доказательство второй аналогично.

Чтобы доказать б), положим $g(y) = \exp \sum_{j \geq 1} y_j \bar{e}^j$, где $y_1, y_2, \dots$ — некоторые комплексные числа, и вычислим

$$(14.10.5) \quad \sigma(R_m(g(y)) \dot{i}_1 \wedge \dot{i}_2 \wedge \dots) = R_m^B(g(y)) P(x),$$

где $P(x) = \sigma(\dot{i}_1 \wedge \dot{i}_2 \wedge \dots)$. Мы получим результат, сравнивая коэффициент при вакуумном векторе $|m\rangle$ (= среднее значение на вакууме), который мы обозначим через $F(y)$, для обеих частей (14.10.5).

Мы должны сначала разобраться с небольшой технической проблемой, поскольку $g(y)$ не лежит в GL_∞ . Однако он лежит в группе

$$\widetilde{GL}_\infty = \{a = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a \text{ обратима и все } a_{ij} - \delta_{ij} \text{ при } i \geq j \text{ равны нулю, за исключением конечного их числа}\}.$$

Соответствующая алгебра Ли есть

$$\widetilde{gl}_\infty := \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid \text{все } a_{ij} \text{ при } i \geq j, \text{ за исключением конечного числа, равны нулю}\}.$$

Представления R и r продолжаются с GL_∞ (соответственно gl_∞) на $\widetilde{GL}_\infty$ (соответственно $\widetilde{gl}_\infty$), и формулы (14.9.7) и (14.9.8) по-прежнему справедливы.

Так как $R_m^B(g(y)) = \exp \sum_{j \geq 1} y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, мы получаем

$$F(y) = \left(\exp \sum_{j \geq 1} y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) P(x) \Big|_{x=0} = P(x+y) \Big|_{x=0}.$$

Таким образом, из вычислений в бозонной картине получаем

$$(14.10.6) \quad F(y) = P(y).$$

С другой стороны, по определению

$$g(y) = \exp \sum_{j \geq 1} \bar{e}^j y_j = \sum_{m \geq 0} S_m(y) \bar{e}^m.$$

Последнее выражение есть матрица a с матричными элементами $a_{mn} = S_{n-m}(y)$. Теперь мы можем выразить коэффициент при $|m\rangle$ в разложении $\sigma_m(R(a)(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots))$ из (14.9.8), что дает $\det a_{m, m-1, m-2, \dots}^{i_1, i_2, i_3, \dots}$. Легко видеть, что это есть $S_{i_1-m, i_2-(m-1), \dots}(y)$. Сравнивая полученный результат с (14.10.6), завершаем доказательство. $\square$

Как следствие (14.9.8) и теоремы 14.10b) мы получаем формулу для действия GL_∞ на $B^{(m)}$:

$$(14.10.7) \quad R_m^B(a) S_\lambda = \sum_{\mu \in \text{Par}} \left(\det a_{\mu_1+m, \mu_2+m-1, \dots}^{\lambda_1+m, \lambda_2+m-1, \dots} \right) S_\mu.$$

Другим следствием теоремы 14.10 является вертекс-операторная конструкция для gl_∞ - и a_∞ -модуля $L(\Lambda_m)$.

СЛЕДСТВИЕ 14.10. Пусть r_m (соответственно $\hat{r}_m$) обозначает представление алгебры Ли gl_∞ (соответственно a_∞) на $L(\Lambda_m)$. Тогда $L(\Lambda_m)$ можно отождествить с пространством $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$, так что

$$(14.10.8) \quad \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} z_1^i z_2^{-j} r_m(E_{ij}) = \frac{(z_1/z_2)^m}{1-z_2/z_1} \Gamma(z_1, z_2),$$

$$(14.10.9) \quad \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} z_1^i z_2^{-j} \hat{r}_m(E_{ij}) = \frac{1}{1-z_2/z_1} ((z_1/z_2)^m \Gamma(z_1, z_2) - 1),$$

где

$$(14.10.10)$$

$$\Gamma(z_1, z_2) = \left(\exp \sum_{j \geq 1} (z_1^j - z_2^j) x_j \right) \left(\exp \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z_1^{-j} - z_2^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right).$$

Доказательство. Заметим, что на $F^{(m)}$

$$(14.10.11) \quad \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} z_1^i z_2^{-j} r_m(E_{ij}) = \psi(z_1) \psi^*(z_2).$$

Отметим также, что в силу (14.8.12) и (14.8.13)

$$(14.10.12) \quad \Gamma_+(z_1)^{-1} \Gamma_-(z_2)^{-1} = \Gamma_-(z_2)^{-1} \Gamma_+(z_2)^{-1} (1 - z_2/z_1)^{-1}.$$

Применяя теорему 14.10b к (14.10.11) и используя (14.10.12), (14.10.2) и (14.10.3), получаем (14.10.8).

В случае $\hat{r}_m$ мы видим из (7.12.1), что нам следует просто вычесть $\sum_{i \leq 0} (z_1/z_2)^i = (1 - z_2/z_1)^{-1}$ из правой части (14.10.8), чтобы получить правую часть (14.10.9). $\square$

Замечание 14.10. Из доказательства теоремы 10.12b) следует, что бозонно-фермионное соответствие $\sigma: F \rightarrow B$ может быть явно построено следующим образом. Пусть $H(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j \alpha_j$, и пусть $\varphi_m(a)$ обозна-

чает коэффициент при $|m\rangle$ в $a \in F$ в полубесконечном мономиальном базисе. Тогда

$$\sigma(v) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m(e^{H(x)} v) q^m.$$

§14.11. Мы объясним теперь, как применяется теория представлений, развитая в предыдущих параграфах, к построению решений солитонных уравнений. Отправной точкой является следующее тривиальное наблюдение:

Замечание 14.11. Рассмотрим представление группы G на векторном пространстве V и вектор $v_0 \in V$. Пусть Ω_1 — оператор на V , коммутирующий с действием G , и предположим, что v_0 удовлетворяет уравнению

$$(14.11.1) \quad \Omega_1 v = \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда любой элемент орбиты $G \cdot v_0$ удовлетворяет этому уравнению.

В этом параграфе мы применим данное наблюдение к группе GL_∞ , действующей диагонально на $F \otimes F$, $v_0 = |0\rangle \otimes |0\rangle$ и

$$\Omega_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \otimes \psi_j^*.$$

Ясно, что $\Omega_1 v_0 = 0$; с помощью (14.9.4) непосредственно проверяется, что Ω_1 коммутирует с gl_∞ и, следовательно, с GL_∞ . Итак, в силу замечания 14.11 любой элемент τ орбиты $GL_\infty|0\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(14.11.2) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j(\tau) \otimes \psi_j^*(\tau) = 0.$$

ЛЕММА 14.11. Орбита $GL_\infty|0\rangle$ есть множество всех ненулевых решений $\tau \in F^{(0)}$ уравнения (14.11.2).

Доказательство. Запишем $\tau = \tau_0 + \sum_{j=1}^N c_j \tau_j$ как линейную комбинацию полубесконечных мономов τ_i , среди которых τ_0 имеет наибольшую энергию. Если среди τ_i при $i \geq 1$ существует моном, скажем τ_2 , вида

$$(14.11.3) \quad \tau_0(E_{ij})\tau_0 \text{ при } i < j,$$

мы можем уничтожить член $c_2 \tau_2$, заменяя τ на $R_0(\exp -c_2 E_{ij})\tau$. Применяя эту процедуру конечное число раз, мы приходим к элементу вида $\tau_0 + \varphi$, где ни один из полубесконечных мономов, содержащихся в φ , не равен τ_0 и не имеет вида (14.11.3). Так как $\tau_0 + \varphi$ удовлетворяет (14.11.2), отсюда следует, что $\varphi = 0$. Поскольку $\tau_0 \in GL_\infty|0\rangle$, мы получаем, что $\tau \in GL_\infty|0\rangle$. $\square$

Используя бозонно-фермионное соответствие $\sigma : F \rightarrow B$, мы можем рассматривать (14.11.2) как уравнение на $\tau \in B^{(0)} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Перепишем его в более явной форме, используя теорему 14.10а). По определению (14.11.2) можно записать как

$$(14.11.4) \quad z^0\text{-член выражения } \psi(z)\tau \otimes \psi^*(z)\tau = 0.$$

Изоморфизм $\sigma : F^{(0)} \xrightarrow{\sim} B^{(0)} = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ продолжается до изоморфизма

$$\sigma \otimes \sigma : F^{(0)} \otimes F^{(0)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x'_1, x'_2, \dots; x''_1, x''_2, \dots].$$

Мы можем перевести (14.11.4) в бозонную картину, используя теорему 14.10а) и (14.10.3), и получить

$$(14.11.5) \quad \text{Res}_{z=0} \left(\exp \sum_{j \geq 1} z^j (x'_j - x''_j) \right) \times \left(\exp \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \left(\frac{\partial}{\partial x'_j} - \frac{\partial}{\partial x''_j} \right) \right) \right) \tau(x') \tau(x'') = 0.$$

Если ввести новые переменные

$$(14.11.6) \quad x_j = \frac{1}{2}(x'_j + x''_j), \quad y_j = \frac{1}{2}(x'_j - x''_j),$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j} + \frac{\partial}{\partial x''_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial x'_j} - \frac{\partial}{\partial x''_j},$$

последнее уравнение примет вид

$$\text{Res}_{z=0} \left(\exp 2 \sum_{j \geq 1} z^j y_j \right) \left(\exp \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \right) \tau(x+y) \tau(x-y) = 0.$$

Раскрывая экспоненты с помощью производящей функции (14.10.4) для элементарных полиномов Шура и беря z^{-1} -член, мы получим

$$(14.11.7) \quad \sum_{j \geq 0} S_j(2y) S_{j+1}(-\bar{\partial}_y) \tau(x+y) \tau(x-y) = 0,$$

где $\bar{\partial}_y$ обозначает $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y_3}, \dots \right)$.

Для данного полинома $P(x_1, x_2, \dots)$, зависящего от конечного числа переменных x_j , и двух C^∞ -функций $f(x)$ и $g(x)$ обозначим через $P(D_1, D_2, \dots) f \cdot g$ выражение

$$P \left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}, \dots \right) f(x_1 + u_1, x_2 + u_2, \dots) g(x_1 - u_1, x_2 - u_2, \dots) \Big|_{u=0}.$$

Уравнение $P(D) f \cdot g = 0$ называется *билинейным уравнением Хироты*. Например, если $P = x_1^n$, то из формулы Лейбница мы получим

$$D_1^n f \cdot g = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} \frac{\partial^{n-k} g}{\partial x_1^{n-k}}.$$

Заметим, что $Pf \cdot f \equiv 0$, если и только если $P(x) = -P(-x)$. Это называется тривиальным билинейным уравнением Хироты.

Мы перепишем теперь уравнение (14.11.7) в билинейной форме Хироты, используя следующий прием, основанный на формуле Тейлора:

$$(14.11.8) \quad \begin{aligned} P(\tilde{\partial}_y)\tau(x+y)\tau(x-y) &= P(\tilde{\partial}_u)\tau(x+y+u)\tau(x-y-u)|_{u=0} \\ &= P(\tilde{\partial}_u)\left(\exp \sum_{j \geq 1} y_j \frac{\partial}{\partial u_j}\right)\tau(x+u)\tau(x-u)|_{u=0}. \end{aligned}$$

Получаем

$$(14.11.9) \quad \sum_{j \geq 0} S_j(2y)S_{j+1}(-\tilde{D})\left(\exp \sum_{i \geq 1} y_i D_i\right)\tau \cdot \tau = 0.$$

Здесь $\tilde{D}$ обозначает $(D_1, \frac{1}{2}D_2, \frac{1}{3}D_3, \dots)$.

Если мы разложим (14.11.9) в ряд Тейлора по переменным $y_1, y_2, \dots$, то каждый коэффициент этого ряда должен аннулироваться, и тем самым возникает нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными в билинейной форме Хироты. Эта система уравнений называется КП-иерархией¹.

Например, коэффициент при y_r представляет собой следующее билинейное уравнение Хироты ($r \geq 1$):

$$(14.11.10)_r \quad (2S_{r+1}(-\tilde{D}) - D_1 D_r)\tau \cdot \tau = 0.$$

Используя явную формулу для $S_m(x)$, данную в §14.10, мы видим, что билинейное уравнение Хироты (14.11.10)_r тривиально для $r = 1$ и 2, тогда как (14.11.10)₃ после отбрасывания нечетных мономов (дающих тривиальный вклад) и умножения на 12 приобретает вид

$$(14.11.11) \quad (D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3)\tau \cdot \tau = 0.$$

Это есть уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП) в форме Хироты. А именно, если положить

$$(14.11.12) \quad u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \tau; \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = t,$$

то уравнение (14.11.11) запишется в своей классической форме

$$(14.11.13) \quad \frac{3}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right).$$

Чтобы построить полиномиальные решения КП-иерархии, заметим, что любой полубесконечный моном заряда 0 лежит в орбите $GL_\infty|0\rangle$ и, значит, удовлетворяет (14.11.2). Применяя теорему 14.10b), мы получаем следующий замечательный результат:

¹ «КП» — от «Кадомцев — Петвиашвили»; см. ниже формулу (14.11.11). — Прим. ред.

Приложение 14.11.1. Все полиномы Шура $S_\lambda(x)$ являются решениями КП-иерархии. $\square$

Решения другого типа, так называемые солитонные решения, строятся с использованием вертексного оператора $\Gamma(z_1, z_2)$ (см. (14.10.10)). Пусть $u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_N$ — некоторые переменные. Под выражениями вида $(u_j - u_i)^k, (u_j - v_i)^k$ и т. д. при $i < j$ мы будем понимать разложение в формальный степенной ряд по биномиальной формуле $u_j^k(1 - u_i/u_j)^k, u_j^k(1 - v_i/u_j)^k$ и т. д.

Пусть $\tau(x_1, x_2, \dots)$ — формальный степенной ряд. Тогда, используя (14.8.13), индукцией по N мы выводим следующую формулу:

(14.11.14)

$$\begin{aligned} & \Gamma(u_N, v_N) \dots \Gamma(u_1, v_1) \tau(x_1, x_2, \dots) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(u_j - u_i)(v_j - v_i)}{(u_j - v_i)(v_j - u_i)} \left(\exp \sum_k \sum_{j=1}^N (u_j^k - v_j^k) x_k \right) \\ & \quad \times \tau \left(\dots, x_k - \sum_{j=1}^N \frac{1}{k} (u_j^{-k} - v_j^{-k}), \dots \right). \end{aligned}$$

В частности, $\Gamma(u, v)^2 \tau(x) = 0$, так что

$$(14.11.15) \quad \exp a \Gamma(u, v) = 1 + a \Gamma(u, v), \quad a \in \mathbb{C}.$$

Для данных комплексных чисел $a_1, \dots, a_N, u_1, \dots, u_N$ и $v_1, \dots, v_N$, таких, что $u_i \neq v_j$, если $i \neq j$, положим

$$\tau_{a_1, \dots, a_N; u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N}(x) = (1 + a_N \Gamma(u_N, v_N)) \dots (1 + a_1 \Gamma(u_1, v_1)) \cdot 1.$$

Поскольку 1 является решением КП-иерархии и $\Gamma(u, v)$ лежит в пополнении gl_∞ в силу следствия 14.10, мы получаем

Предложение 14.11.2. Функция

$$\begin{aligned} & \tau_{a_1, \dots, a_N; u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N}(x) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq r \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq N}} \prod_{\nu=1}^r a_{j_\nu} \prod_{1 \leq \nu < \mu \leq r} \frac{(u_{j_\nu} - u_{j_\mu})(v_{j_\nu} - v_{j_\mu})}{(u_{j_\nu} - v_{j_\mu})(v_{j_\nu} - u_{j_\mu})} \\ & \quad \times \exp \sum_{k \geq 1} \sum_{\nu=1}^r (u_{j_\nu}^k - v_{j_\nu}^k) x_k \end{aligned}$$

является решением КП-иерархии. $\square$

Эта τ -функция $\tau_{a_1, \dots, a_N; u_1, \dots, u_N; v_1, \dots, v_N}(x)$ называется N -солитонным решением КП-иерархии. Конечно, с точки зрения одного уравнения (14.11.13) переменные $x_4, x_5, \dots$ являются произвольными параметрами; N -солитонное решение τ , или, точнее, $u(x) = 2 \frac{\partial^2 \log \tau}{\partial x_1^2}$, описывает взаимодействие N волн в течение времени x_3 в мелкой воде на плоскости с координатами x_1 и x_2 .

Например, 1-солитонное решение

$$u(x, y, t) = (2 \log \tau_{1;a,b}(x, y, t))_{xx}$$

классического КП-уравнения (14.11.13) принимает вид

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2}(a-b)^2 \left[\operatorname{ch} \frac{1}{2} ((a-b)x + (a^2 - b^2)y + (a^3 - b^3)t + \operatorname{const}) \right]^{-2}.$$

§14.12. Здесь мы исследуем, что дает замечание 14.11 в применении к произвольной главной вертекс-операторной конструкции. Начнем с некоторых общих замечаний, касающихся произвольной симметризуемой алгебры Каца — Муди $\mathfrak{g}(A)$. Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый модуль со старшим весом над $\mathfrak{g}(A)$ и v_Λ — вектор старшего веса. Напомним, что $L(\Lambda)$ обладает (единственной) положительно определенной эрмитовой контравариантной формой H , такой, что $H(v_\Lambda, v_\Lambda) = 1$ (см. теорему 11.7b)). Эта форма определяет положительно определенную эрмитову форму на тензорном произведении $L(\Lambda) \otimes L(\Lambda)$, если принять $H(u \otimes v, u' \otimes v') = H(u, u')H(v, v')$. Тогда мы имеем ортогональную прямую сумму модулей

$$(14.12.1) \quad L(\Lambda) \otimes L(\Lambda) = L_{\text{high}} \oplus L_{\text{low}},$$

где L_{high} , старшая компонента, есть $\mathfrak{g}(A)$ -подмодуль, порожденный вектором $v_\Lambda \otimes v_\Lambda$, и L_{low} — его ортогональное дополнение. Заметим, что L_{high} изоморфен $L(2\Lambda)$ по теореме о полной приводимости (следствие 10.7).

Пусть G — группа автоморфизмов модуля $L(\Lambda)$, порожденная однопараметрическими группами $\exp t e_i$ и $\exp t f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где e_i, f_i — образующие Шевалле. Обозначим через V_Λ орбиту v_Λ относительно G , а через $\widehat{V}_\Lambda$ — ее формальное пополнение (см. §1.5).

Наконец, пусть Ω — обобщенный оператор Казимира (§2.5), и пусть Ω_2 — оператор на $L(\Lambda) \otimes L(\Lambda)$, введенный в §2.8, который коммутирует с $\mathfrak{g}(A)$. Теперь мы можем сформулировать результат.

Предложение 14.12. а) Если $v \in V_\Lambda$, то

$$(14.12.2) \quad v \otimes v \in L_{\text{high}};$$

$$(14.12.3) \quad \Omega(v \otimes v) = 4(\Lambda + \rho|A)v \otimes v;$$

$$(14.12.4) \quad \Omega_2(v \otimes v) = (\Lambda|A)v \otimes v.$$

б) Условия (14.12.2)–(14.12.4) на $v \in L(\Lambda)$ эквивалентны. (В действительности любой ненулевой вектор $v \in L(\Lambda)$, удовлетворяющий (14.12.3), лежит в V_Λ ; см. Peterson — Кас [1983].)

Доказательство. Если $v = v_\Lambda$, то условия (14.12.2) и (14.12.3) очевидны, а (14.12.4) становится ясным, если мы выберем

$$(14.12.5) \quad \Omega_2 = \sum_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} \sum_i e_\alpha^{(i)} \otimes e_{-\alpha}^{(i)},$$

где $e_\alpha^{(i)}$ — базисы в $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, такие, что $(e_\alpha^{(i)} | e_{-\alpha}^{(j)}) = \delta_{ij}$. Это влечет за собой а).

Непосредственно проверяется, что уравнения (14.12.3) и (14.12.4) на $v \in L(\Lambda)$ эквивалентны. Эквивалентность (14.12.2) и (14.12.3) вытекает из следующей леммы (поскольку L_{low} есть прямая сумма модулей $L(\Lambda')$ с $\Lambda' < 2\Lambda$):

ЛЕММА 14.12.1. Пусть $\Lambda, \Lambda' \in P_+$. Если $\Lambda > \Lambda'$, то

$$(\Lambda + 2\rho|\Lambda) - (\Lambda' + 2\rho|\Lambda') > 0.$$

Доказательство. $|\Lambda + \rho|^2 - |\Lambda' + \rho|^2 = (\Lambda + \Lambda' + 2\rho|\Lambda - \Lambda') > 0$. $\square$

Пусть теперь $L(\Lambda_0) = \mathbb{C}[x_j; j \in E_+]$ — главная вертекс-операторная конструкция базисного представления для аффинной алгебры. Тогда $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0)$ может рассматриваться как пространство полиномов от двух наборов переменных, $\mathbb{C}[x'_j, x''_j; j \in E_+]$. Введем новые переменные x_j и y_j , $j \in E_+$, с помощью (14.11.6), так что $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0) = \mathbb{C}[x_j, y_j; j \in E_+]$. Тогда главная подалгебра $\mathfrak{g}$ действует на $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0)$ следующим образом:

$$p_j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad q_j \mapsto 2x_j, \quad K \mapsto 2.$$

Заметим, что в силу (9.13.4) и предложения 14.4 справедлива формула для контравариантной эрмитовой формы на $L(\Lambda_0)$:

$$(14.12.6) \quad H(P, Q) = \overline{P}(\dots, \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \dots) Q(\dots, x_j, \dots)(0), \quad j \in E_+.$$

Теперь мы готовы к тому, чтобы переписать уравнение (14.12.2) в терминах билинейных уравнений Хироты.

ЛЕММА 14.12.2. $\tau \otimes \tau \in L_{\text{high}}$, если и только если

$$P(\dots, \frac{1}{2j} D_j, \dots) \tau \cdot \tau = 0$$

для всех $P(y) \in \mathbb{C}[y_j; j \in E_+] \cap L_{\text{low}} \subset L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0)$.

Доказательство. Применяя лемму 9.13b) к $\mathfrak{s}$ -модулю L_{low} , получим

$$(14.12.7) \quad L_{\text{low}} = (L_{\text{low}} \cap \mathbb{C}[y_j; j \in E_+]) \otimes \mathbb{C}[x_j; j \in E_+].$$

Следовательно, $\tau \otimes \tau \in L_{\text{high}}$, если и только если

$$(14.12.8) \quad H\left(\sum_i Q_i(x) P_i(y), \tau(x') \tau(x'')\right) = 0,$$

где $Q_i \in \mathbb{C}[x_j; j \in E_+]$ произволен и $P_i \in \mathbb{C}[y_j; j \in E_+] \cap L_{\text{low}}$. Используем (14.12.6), чтобы записать условие (14.12.8) в эквивалентной форме:

$$\sum_i \bar{Q}_i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2j} \frac{\partial}{\partial x_j}, \dots\right) \bar{P}_i\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{1}{2j} \frac{\partial}{\partial y_j}, \dots\right) \tau(x+y) \tau(x-y) \Big|_{y=0, x=0} = 0,$$

где P и Q те же, что и выше. Так как это справедливо для произвольных Q_i и поскольку подпространство $\mathbb{C}[y] \cap L_{\text{low}}$ инвариантно относительно комплексного сопряжения, мы получаем требуемое. $\square$

Элементы из пространства

$$Hir := \mathbb{C}[y_j; j \in E_+] \cap L_{\text{low}}$$

называются *полиномами Хироты*, а элементы из формального пополнения $\hat{V}_{\Lambda_0}$ в $\mathbb{C}[[x_j; j \in E_+]]$ орбиты 1 называются *τ -функциями*. Таким образом, чтобы получить приложения предложения 14.12 к УрЧП, мы должны суметь явно построить две вещи: а) четные полиномы Хироты; б) τ -функции.

Обозначим через $H_k \subset \mathbb{C}[y_j; j \in E_+]$ пространство полиномов Хироты главной степени k , так что $Hir = \bigoplus_k H_k$ (напомним, что главная степень определяется по формуле $\deg y_j = j$). В силу формул (14.12.7) и (14.12.1) имеем

$$(14.12.9) \quad \begin{aligned} \dim_q Hir &:= \sum_{k=0}^{\infty} (\dim H_k) q^k \\ &= ((\dim_q L(\Lambda_0))^2 - \dim_q L(2\Lambda_0)) \prod_{k \in E_+} (1 - q^k). \end{aligned}$$

(Напомним, что $\dim_q L(\Lambda)$ можно вычислить с помощью предложения 10.10.)

Применим формулу (14.12.9) к аффинной алгебре бесконечного ранга типа A_{∞} . Формула (10.10.1) в этом случае может быть записана в следующем замечательном виде:

$$(14.12.10) \quad \dim_q L(\Lambda_{s_1} + \dots + \Lambda_{s_n}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (1 - q^{s_i - s_j + j - i}) / \varphi(q)^n,$$

где $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$ — произвольные целые числа. В частности,

$$\dim_q L(\Lambda_0) = \varphi(q)^{-1}, \quad \dim_q L(2\Lambda_0) = (1 - q)\varphi(q)^{-2}.$$

Следовательно, $\dim_q \text{Hir} = q\varphi(q)^{-1}$, т. е.

$$(14.12.11) \quad \dim H_k = p(k - 1).$$

Обозначим через $P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}(D)$ коэффициент при мономе $y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots$ в (14.11.9). Легко видеть, что

$$(14.12.12) \quad P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}(y) \in \text{Hir}_{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + 1}.$$

С другой стороны, заметим, что

$$\Omega_2 = \Omega_1^* \Omega_1.$$

Значит, уравнение (14.11.2) влечет за собой (14.12.4). Обратно, если v удовлетворяет (14.12.4), то $H(\Omega_1^* \Omega_1(v \otimes v), (v \otimes v)) = 0$; поэтому $H(\Omega_1(v \otimes v), \Omega_1(v \otimes v)) = 0$ и v удовлетворяет (14.11.2). Отсюда следует, что полиномы $P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}(y)$ порождают Hir по предложению 14.12b). Сравнивая (14.12.11) и (14.12.12), приходим к следующему результату:

ТЕОРЕМА 14.12. Билинейные уравнения Хироты $P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots}(D)\tau \cdot \tau = 0$ образуют базис КП-иерархии билинейных уравнений Хироты. $\square$

Отметим, что для $j \leq 3$ (соответственно $j = 4$) число тривиальных уравнений Хироты равно $p(j - 1)$ (соответственно $p(3) - 1$). Следовательно, (14.11.11) есть нетривиальное уравнение Хироты наименьшей главной степени.

§14.13. Самый знаменитый пример, уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), появляется в контексте главной вертекс-операторной конструкции базисного представления аффинной алгебры $\mathfrak{g}$ типа $A_1^{(1)}$. Напомним базисную реализацию этой алгебры:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} &= sl_2(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) + \mathbb{C}K + \mathbb{C}d, \\ [a(t), b(t)] &= a(t)b(t) - b(t)a(t) + (\text{Res}_{t=0} \frac{da}{dt})K, \\ [\mathfrak{g}, K] &= 0, \quad [d, a(t)] = t \frac{da(t)}{dt}.\end{aligned}$$

Вспомним также главную вертекс-операторную конструкцию $\mathfrak{g}$ -модуля $L(\Lambda_0)$ (ср. §14.6 и упр. 14.12):

$$\begin{aligned}L(\Lambda_0) &= \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots], \\ H_j &\mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad H_{-j} \mapsto jx_j, \quad j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}, \\ K &\mapsto 1, \quad 2d - \frac{1}{2}A_0 \mapsto - \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} jx_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ A(z) &:= \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^{-j} A_j \mapsto \frac{1}{2}(\Gamma(z) - 1),\end{aligned}$$

где

$$H_{2j+1} = t^j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{2j} = t^j \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{2j+1} = t^j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\Gamma(z) = \left(\exp 2 \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} z^j x_j \right) \left(\exp -2 \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Выберем следующие дуальные базисы в $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}& \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} H_{2j+1}, \frac{1}{\sqrt{2}} A_j, K, d \right\} \quad \text{и} \\ & \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} H_{-2j-1}, \frac{1}{\sqrt{2}} A_{-j}, d, K \right\}, \quad j \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

и возьмем соответствующий оператор Ω_2 на $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0)$. Тогда вычисления, аналогичные проведенным в §14.11, показывают, что урав-

нение (14.12.4) эквивалентно следующей иерархии билинейных уравнений Хироты:

(14.13.1)

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n(4y_1, 0, 4y_3, 0, \dots) S_n\left(-\frac{2}{1}D_1, 0, -\frac{2}{3}D_3, 0, \dots\right) - 8 \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} j y_j D_j \right) \times \left(\exp \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} y_j D_j \right) \tau \cdot \tau = 0.$$

С другой стороны, формула (14.12.9) в этом случае дает (ср. упр. 14.3)

$$(14.13.2) \quad \dim_q \text{Hir} = \prod_{j \geq 1} (1 - q^{2j-1})^{-1} - \prod_{j \geq 1} (1 - q^{4j-2})^{-1}.$$

Ясно, что все уравнения Хироты нечетной главной степени тривиальны. Кроме того, в силу (14.13.2) $\dim H_2 = 0$ и $\dim H_4 = 1$. Посмотрев на коэффициент при $y_1 y_3$ в (14.13.1), мы обнаружим, что единственным билинейным уравнением Хироты (наименьшей) главной степени 4 является

$$(14.13.3) \quad (D_1^4 - 4D_1 D_3) \tau \cdot \tau = 0.$$

Такая же замена функций и переменных в соответствующем билинейном уравнении Хироты, как в (14.11.2) (кроме того, что здесь нет x_2), приводит к уравнению Кортевега — де Фриза

$$(14.13.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

N -солитонные решения для КдФ-иерархии (14.13.1) строятся таким же способом, как для КП-иерархии. Ответ дается формулой

$$\tau_{a_1, \dots, a_N; u_1, \dots, u_N}(x_1, x_3, \dots) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq N \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq N}} \prod_{\nu=1}^r a_{j_\nu} \prod_{1 \leq \nu < \mu \leq r} \frac{(u_{j_\nu} - u_{j_\mu})^2}{(u_{j_\nu} + u_{j_\mu})^2} \exp 2 \sum_{\substack{k \geq 1 \\ k \text{ неч.}}} \sum_{\nu=1}^r u_{j_\nu}^k x_k.$$

Функция $2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \log \tau_{a_1, \dots, a_N; u_1, \dots, u_N}(x)$ описывает взаимодействие N волн в течение времени x_3 в узком канале с координатой x_1 .

В частности, 1-солитонное решение $u(x, t) = 2(\log \tau_{1;a}(x, t))_{xx}$ описывает отдельную волну:

$$u(x, t) = 2a[\text{ch}(ax + a^3 t + \text{const})]^{-2}.$$

На самом деле все эти результаты для КДФ-иерархии можно вывести из соответствующих результатов для КП-иерархии, используя так называемую процедуру редукции. Это сводится к тому, чтобы положить $v_i = -u_i$. Теоретико-представленческий смысл этой процедуры объясняется в упр. 14.11 и 14.12.

Еще один знаменитый пример, нелинейное уравнение Шрёдингера (НЛШ), связан с однородной вертекс-операторной конструкцией того же базисного представления той же аффинной алгебры $\mathfrak{g}$ типа $A_1^{(1)}$. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и выберем следующие дуальные базисы алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\{t^n \alpha, t^n e, t^n f, K, d\} \text{ и } \{\tfrac{1}{2} t^{-n} \alpha, t^{-n} f, t^{-n} e, d, K\}.$$

Имеем $Q = \mathbb{Z}\alpha$, $(\alpha|\alpha) = 2$, $\varepsilon(m\alpha, n\alpha) = (-1)^{mn}$, так что $c_{\pm\alpha}(f \otimes e^{n\alpha}) = (-1)^n$. Полагая $q = e^\alpha$, отождествим $\mathbb{C}[Q]$ с $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Итак, однородная вертекс-операторная конструкция может быть описана следующим образом:

$$\begin{aligned} L(\Lambda_0) &= \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots; q, q^{-1}], \\ \alpha^{(n)} &\mapsto 2 \frac{\partial}{\partial x_n} \quad \text{и} \quad \alpha^{(-n)} \mapsto n x_n \quad \text{для} \quad n > 0, \quad \alpha^{(0)} \mapsto 2q \frac{\partial}{\partial q}, \\ K &\mapsto 1, \quad d \mapsto - \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right)^2 - \sum_{n \geq 1} n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}; \\ E(z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} E^{(n)} z^{-n-1} \mapsto \Gamma_+(z), \quad F(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} F^{(n)} z^{-n-1} \mapsto \Gamma_-(z), \end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{\pm}(z) = \left(\exp \pm \sum_{j \geq 1} z^j x_j \right) \left(\exp \mp 2 \sum_{j \geq 1} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) q^{\pm 1} z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}} c_{\pm\alpha}$$

(заметим, что $z^{\pm 2q \frac{\partial}{\partial q}}(q^n) = z^{\pm 2n} q^n$).

Беря оператор Ω_2 на $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0)$, соответствующий указанному выше выбору дуальных базисов, и проводя вычисление по аналогии с §14.11, мы получим, что уравнение (14.12.4) эквивалентно иерархии

билинейных уравнений Хироты для $\tau = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \tau_s(x) q^s$ ($m, n \in \mathbb{Z}$):

(14.13.5)

$$\begin{aligned} & \left((m-n)^2 + 2 \sum_{j \geq 1} j y_j D_j \right) \left(\exp \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right) \tau_m \cdot \tau_n \\ & + (-1)^{m-n} \sum_{j \geq 1} S_j(2y) S_{j+2m-2n-2}(-2\tilde{D}) \left(\exp \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right) \tau_{m-1} \cdot \tau_{n+1} \\ & + (-1)^{m-n} \sum_{j \geq 1} S_j(-2y) S_{j-2m+2n-2}(2\tilde{D}) \left(\exp \sum_{s \geq 1} y_s D_s \right) \tau_{m+1} \cdot \tau_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что эта иерархия инвариантна относительно сдвига $m \mapsto m + r$, $n \mapsto n + r$, $r \in \mathbb{Z}$. Посмотрим на коэффициент при y_1^s и ограничимся случаем $m - n = 0, -1$ или 1 . Для $s = 0$ или 1 мы получим тривиальные уравнения, тогда как для $s = 2$ получаются следующие уравнения на функции $\tau_n(x)$, $\tau_{n-1}(x)$ и $\tau_{n+1}(x)$:

$$(14.13.6) \quad \begin{cases} D_1^2 \tau_n \cdot \tau_n + 2 \tau_{n-1} \tau_{n+1} = 0, \\ (D_1^2 + D_2) \tau_n \cdot \tau_{n+1} = 0, \\ (D_1^2 + D_2) \tau_{n-1} \cdot \tau_n = 0. \end{cases}$$

Если положить $x = x_1$, $t = x_2$, $q(x, t) = \tau_1/\tau_0$, $q^*(x, t) = \tau_{-1}/\tau_0$, $u(x, t) = \log \tau_0$, то уравнения (14.13.6) перейдут соответственно в уравнения

$$u_{xx} = -qq^*, \quad -q_t + q_{xx} + 2qu_{xx} = 0, \quad q_t^* + q_{xx}^* + 2q^*u_{xx} = 0.$$

Исключая u , мы приходим к НЛШ-системе уравнений в частных производных на функции q и q^* :

$$(14.13.7) \quad \begin{cases} q_t = q_{xx} - 2q^2 q^*, \\ q_t^* = -q_{xx}^* + 2qq^{*2}. \end{cases}$$

Заметим, что, налагая ограничение

$$q^*(x, it) = \pm \overline{q(x, it)} := g(x, t),$$

мы получим классическое нелинейное уравнение Шрёдингера для функции g :

$$(14.13.8) \quad ig_t = -g_{xx} \pm 2|g|^2 g.$$

Для любой последовательности знаков, скажем $++-\dots$, и чисел $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2, \dots \in \mathbb{C}^*$, таких, что $|z_1| < |z_2| < \dots$, мы можем построить решение НЛШ-иерархии (14.13.5)

$$\begin{aligned} & \tau_{a_1, a_2, \dots; z_1, z_2, \dots}^{++-\dots}(x, q) \\ & = \dots (1 + a_3 \Gamma_-(z_3)) (1 + a_2 \Gamma_+(z_2)) (1 + a_1 \Gamma_+(z_1)) 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Доказательство того, что это решение, аналогично доказательству из §14.11 для КП-иерархии.

§14.14. Упражнения

14.1. Покажите, что предложение 14.4, лемма 14.6 и теорема 14.6 будут справедливы, если заменить Λ_0 на $\Lambda \in P_+^1$.

14.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли ранга ℓ , h — ее число Кокстера и E_0 — набор экспонент. Для положительного целого числа j пусть c_j обозначает число корней $\mathfrak{g}$ высоты j и M_j — число появлений j в E_0 . Проверьте следующие их свойства:

$$c_j = c_{j-1} - M_{j-1}, \quad M_j = M_{h-j}.$$

Индукцией по j выведите формулы (ср. с леммой 14.2e))

$$c_j + c_{h-j} = \ell + M_j,$$

$$c_j + c_{h+1-j} = \ell,$$

$$c_j + c_{h+2-j} = \ell - M_{j-1}.$$

14.3. Пусть A — матрица аффинного типа, такая, что ${}^t A = X_\ell^{(1)}$, и $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли типа X_ℓ . Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль уровня 1. Выведите из упр. 14.2 следующие формулы для q -размерностей (ср. (14.4.4)):

$$\dim_q L(\Lambda) = \prod_{j \in E_0} \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} (1 - q^{j+n h})^{-1},$$

$$\dim_q L(2\Lambda) = \prod_{j \in E_0} \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} (1 - q^{j+n h})^{-1} (1 - q^{j+1+n(h+2)})^{-1}.$$

Используя эти формулы, перепишите (14.12.9) в более явной форме:

$$\dim_q \text{Hir} = \prod_{j \in E_0} \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} (1 - q^{j+n h})^{-1} - \prod_{j \in E_0} \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} (1 - q^{j+1+n(h+2)})^{-1}.$$

14.4. Покажите, что главная вертекс-операторная конструкция базисного $\mathfrak{g}'(A)$ -модуля $L(\Lambda_0)$, даваемая теоремой 14.6, продолжается на полупрямое произведение $\mathfrak{g}'(A) \rtimes \text{Vir}$, если положить

$$d_0 \mapsto \frac{1}{h(r)} \sum_{j \in E_+} \alpha_{-j} \alpha_j + \frac{1}{4h(r)^2} \sum_{j \in E_0} j(h^{(r)} - j),$$

$$d_n \mapsto \frac{1}{2h(r)} \sum_{j \in E} \alpha_{nh(r)-j} \alpha_j,$$

где для $j \in E_+$ мы полагаем $\alpha_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $\alpha_{-j} = jx_j$. При этом конформный центральный заряд равен N .

В упр. 14.5–14.7 мы обсуждаем другой подход к однородной вертекс-операторной конструкции базисного представления σ .

14.5. Пусть T^σ — группа, введенная в упр. 12.19 (действующая на пространстве $L(\Lambda_0)$), и пусть $\epsilon : \dot{Q}^\vee \times \dot{Q}^\vee \rightarrow \{\pm 1\}$ — функция асимметрии. Покажите, что $T^\sigma \simeq \dot{Q}^\vee \times \{\pm 1\}$ с умножением

$$(\alpha, a)(\beta, b) = \epsilon(\alpha, \beta)(\alpha + \beta, ab), \quad \alpha, \beta \in \dot{Q}^\vee, \quad a, b \in \{\pm 1\}.$$

14.6. Пусть $\mathfrak{g}'(A)$ — аффинная алгебра, причем либо $r = 1$ и A симметрическая, либо $r = 2$ или 3 . Пусть $\tilde{\mathfrak{t}} = \text{СК} \oplus (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_j \delta)$. Используя предложение 12.13, покажите, что в $L(\Lambda_0)$ нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов из $\sigma(\tilde{\mathfrak{t}})$ и T^σ .

14.7. Предположим теперь, что A — симметрическая аффинная матрица, так что $\dot{A}$ имеет тип A_ℓ , D_ℓ или E_ℓ . Тогда $\dot{Q}^\vee$ можно отождествить с корневой решеткой $\dot{Q}$ для $\mathfrak{g}(\dot{A})$ с помощью отождествления их базисов $\alpha_i^\vee \leftrightarrow \alpha_i$, сохраняющего билинейную форму $(\cdot, \cdot)$; пусть $\dot{\Delta} \subset \dot{Q}$ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}(\dot{A})$. Напомним, что $\dot{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g}(\dot{A}) = \dot{\mathfrak{h}} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta}} \mathbb{C} E_\alpha)$ с коммутационными соотношениями (7.8.5). Выберем

$t_\gamma^\sigma \in T^\sigma$ с образом $\gamma \in \dot{Q}$, такие, что $t_\beta^\sigma t_\gamma^\sigma = \epsilon(\beta, \gamma) t_{\beta+\gamma}^\sigma$, $\beta, \gamma \in \dot{Q}$. Напомним, что $\mathfrak{g}'(A) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \dot{\mathfrak{g}} \oplus \text{СК}$ и $\tilde{\mathfrak{t}} = \text{СК} \oplus (\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (t^j \otimes \dot{\mathfrak{h}}))$. Положим

$\mathfrak{t}_\pm = \bigoplus_{j > 0} (t^{\pm j} \otimes \dot{\mathfrak{h}})$, так что $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_- \oplus \text{СК} \oplus \mathfrak{t}_+$ есть однородная подалгебра Гейзенберга. Используя упр. 14.6, покажите, что $L(\Lambda_0)$, рассматриваемый как $(T^\sigma, \tilde{\mathfrak{t}})$ -модуль, можно отождествить с пространством

$V := \mathbb{C}[\dot{Q}] \otimes_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{t}_-) \text{ со следующим действием } T^\sigma \text{ и } \tilde{\mathfrak{t}}:$

$$t_\beta^\sigma (e^\gamma \otimes P) = \epsilon(\beta, \gamma) e^{\beta+\gamma} \otimes P,$$

$$\sigma(t^k \otimes h) = h(k), \quad \sigma(K) = I.$$

Проверьте, что

$$\begin{cases} [t^k \otimes h, \hat{E}_\gamma(z)] = (\gamma, h) z^k \hat{E}_\gamma(z), & h \in \dot{\mathfrak{h}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ t_\alpha^{\text{ad}} \cdot \hat{E}_\gamma(z) = z^{-(\alpha, \gamma)} \hat{E}_\gamma(z), & \alpha \in \dot{Q}^\vee. \end{cases}$$

Выведите однородную вертекс-операторную конструкцию базисного представления $\mathfrak{g}'(A)$. Пусть $\{u_i\}$ и $\{u^i\}$ — дуальные базисы алгебры

Ли⁰. Введем следующие операторы на пространстве V : D_0 по формуле (14.8.3) и

$$(14.14.1) \quad D_m = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^L u_i(-j) u_i(j+m) \text{ для } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Покажите, что отображение $d_i \mapsto D_i$, $c \mapsto \ell I$ продолжает $g'(A)$ -модуль V до $g'(A) \rtimes \text{Vir}$ -модуля.

14.8. Пусть Q — произвольная четная решетка и $\mathfrak{h}$ — ее комплексная оболочка. Введем пространство V по формуле (14.8.1) и операторы $u(n)$ для $u \in \mathfrak{h}$ и $n \in \mathbb{Z}$ с помощью соотношения (14.8.2). Пусть D_n — операторы на V , определенные формулами (14.8.3) и (14.14.1). Покажите, что они образуют представление алгебры Вирасоро на V с конформным центральным зарядом $c = \dim \mathfrak{h}$. Пусть $\varepsilon: Q \times Q \rightarrow \{\pm 1\}$ — функция асимметрии и c_γ , $\gamma \in Q$ — соответствующие операторы знака на V . Для $\gamma \in Q$ определим вертексный оператор $\Gamma_\gamma(z)$ по формуле (14.8.5). Покажите, что это первичное поле конформного веса $\frac{1}{2}(\gamma|\gamma)$. Докажите формулу

$$(14.14.2) \quad \Gamma_{\gamma_N}(z_N) \dots \Gamma_{\gamma_1}(z_1)(1 \otimes 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \varepsilon(\gamma_i, \gamma_j)(z_i - z_j)^{(\gamma_i|\gamma_j)} \\ \times \left(\prod_{i=1}^N \exp \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{z_i^j}{j} \gamma_i(-j) \right) \exp \sum_{i=1}^N \gamma_i,$$

где под $(z_i - z_j)^m$ мы подразумеваем разложение в степенной ряд $(-z_j)^m (1 - z_i/z_j)^m$.

14.9. В доказательстве теоремы 14.8 выведите, что σ есть базисное представление из (14.14.2) (избегая тем самым использования формулы для характера).

14.10. Уравнение (14.12.4) эквивалентно системе уравнений вида $P = 0$, где $P \in S^2(L^*(\Lambda))$; покажите, что эти P порождают идеал функций из $S(L^*(\Lambda))$, обращающихся в нуль на V_Λ .

[Пусть c_M обозначает собственное значение оператора Казимира Ω на $L(M)$. Покажите, что $(\Omega - c_{\Lambda})v^s = \frac{1}{2}s(s-1)((\Omega - c_{2\Lambda})v^2)v^{s-2}$. Теперь используйте лемму 14.12.]

14.11. Зафиксируем $n > 0$. Пусть $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^n$. отождествим $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}^n$ с $\mathbb{C}^\infty = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} v_j$, полагая

$v_{n k + i} = t^{-k} \otimes \bar{v}_i$. Это дает вложение $gl_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \rightarrow \bar{a}_\infty$. Покажите, что таким образом полученная подалгебра состоит из всех матриц

$(c_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \in \bar{a}_\infty$, таких, что $c_{i+n,j+n} = c_{ij}$. Покажите, что ограничение центрального расширения $a_\infty \rightarrow \bar{a}_\infty$ на эту подалгебру изоморфно $\tilde{\mathcal{L}}(gl_n) := gl_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}K$ со скобкой

$$[A(t), B(t)] = A(t)B(t) - B(t)A(t) \oplus \left(\text{Res tr } \frac{dA(t)}{dt} B(t) \right) K.$$

Покажите, что фундаментальный a_∞ -модуль $L(\Lambda_s)$ остается неприводимым при ограничении на $\tilde{\mathcal{L}}(gl_n)$.

14.12. Рассмотрим вертекс-операторную конструкцию фундаментального a_∞ -модуля $L(\Lambda_s)$, $s = 0, \dots, n-1$, на пространстве $\mathbb{C}[x_j; j = 1, 2, \dots]$. Покажите, что подпространство $\mathbb{C}[x_j; j \not\equiv 0 \pmod n]$ инвариантно относительно аффинной алгебры $\tilde{\mathcal{L}}(sl_n) := \{A(t) + \mathbb{C}K \mid A(t) \in \mathcal{L}(gl_n), \text{tr } A(t) = 0\}$ типа $A_{n-1}^{(1)}$, рассматриваемой как подалгебра в a_∞ . Покажите, что мы получаем главную вертекс-операторную конструкцию $\tilde{\mathcal{L}}(sl_n)$ -модуля $L(\Lambda_s)$, задаваемую формулами

$$\left(E_{n1}^{(1)} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}^{(0)} \right)^j \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \text{ (соответственно } -jx_{-j}),$$

если $j > 0$ (соответственно < 0), $j \not\equiv 0 \pmod n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-k-nm} \left(\sum_{j=k+1}^n \varepsilon^{-j} E_{j-k,j}^{(m)} + \sum_{j=1}^k \varepsilon^{-j} E_{j-k+n,j}^{(m+1)} \right) \\ \mapsto \frac{\varepsilon^{s+1}}{\varepsilon-1} \Gamma(\varepsilon z, z) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}, \end{aligned}$$

где ε пробегает все корни n -й степени из 1, отличные от 1.

Выведите, что τ -функция для КП-иерархии является τ -функцией для $A_{n-1}^{(1)}$ -иерархии, если и только если τ не зависит от x_j при $j \equiv 0 \pmod n$. Выведите также, что множество всех решений уравнения (14.2.4) в $L(\Lambda_s)$ есть $\mathcal{V}_{\Lambda_0} \cup \{0\}$.

14.13. Рассмотрим клиффордову алгебру Cl_B с образующими ϕ_i , $i \in \mathbb{Z}$, и определяющими соотношениями

$$\phi_i \phi_j + \phi_j \phi_i = (-1)^i \delta_{i,-j},$$

и ее неприводимый модуль V с вакуумным вектором $|0\rangle$, подчиненным условиям

$$\phi_i |0\rangle = 0 \text{ для } i < 0.$$

Введем нейтральное фермионное поле

$$\phi(z) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \phi_i z^i$$

и оператор q на V , определенный соотношениями

$$q|0\rangle = \phi_0|0\rangle, \quad q\phi_i = \phi_i q.$$

Имеем $q^2 = \frac{1}{2}$. Введем нейтральные бозоны λ_n , $n \in \mathbb{Z}^{\text{odd}}$, по формуле

$$\lambda_n = \frac{1}{2} \sum_{j \geq 1} (-1)^{j+1} \phi_j \phi_{-j-n};$$

покажите, что

$$[\lambda_m, \lambda_n] = \frac{1}{2} m \delta_{m, -n}.$$

Пусть $\sigma = \sigma_B : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots; q]/(q^2 - \frac{1}{2})$ — изоморфизм векторных пространств, такой, что

$$\begin{aligned} \sigma|0\rangle &= 1, \sigma\phi_0|0\rangle = q, \\ \sigma\lambda_m\sigma^{-1} &= \frac{\partial}{\partial x_m}, \quad \sigma\lambda_{-m}\sigma^{-1} = \frac{1}{2} m x_m \quad \text{для } m \in \mathbb{N}^{\text{odd}}. \end{aligned}$$

Покажите, что

$$\sigma\phi(z)\sigma^{-1} = q \left(\exp \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} x_j z^j \right) \left(\exp -2 \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Отображение σ называется бозонно-фермионным соответствием типа B . В явном виде,

$$\sigma(v) = \varphi_0(e^{H_B(x)}v) + \varphi_1(e^{H_B(x)}v)q,$$

где $H_B(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} x_n \lambda_n$ и $\varphi_0(a)$ (соответственно $\varphi_1(a)$) есть коэффициент при $|0\rangle$ (соответственно при $q|0\rangle$) в a .

14.14. Пусть $F_{ij} = (-1)^j E_{ij} - (-1)^i E_{-j, -i}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, $(i, j) \neq (0, 0)$, — стандартный базис алгебры Ли so_∞ . Покажите, что отображение

$$\rho(F_{ij}) = \phi_i \phi_{-j}$$

задает неприводимый so_∞ -модуль на пространстве V_0 (соответственно V_1) четных (соответственно нечетных) элементов из V , который изоморфен $L(\Lambda_0)$. Имеем $\sigma = \sigma_0 \oplus \sigma_1 : V_0 \oplus V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_3, \dots] \oplus q\mathbb{C}[x_1, x_3, \dots]$, где σ — бозонно-фермионное соответствие типа B . Покажите, что отображение

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(F_{ij}) &= \begin{cases} \phi_i \phi_{-j}, & \text{если } i \neq j \text{ или } i = j > 0, \\ \phi_i \phi_{-j} - \frac{1}{2} I, & \text{если } i = j < 0, \end{cases} \\ \hat{\rho}(K) &= 1 \end{aligned}$$

продолжается по линейности до b_∞ -модуля $L(\Lambda_0)$. Покажите, что отображение $\sigma_0 : V_0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[x_1, x_3, \dots]$ осуществляет эквивалентность представления $\hat{\rho}$ и вертекс-операторной конструкции для b_∞ :

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} z_1^i z_2^{-j} F_{ij} \mapsto \frac{1}{2} \frac{1 - z_2/z_1}{1 + z_2/z_1} (\Gamma_B(z_1, z_2) - 1),$$

$$\text{где } \Gamma_B(z_1, z_2) = \left(\exp \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} (z_1^j + z_2^j) x_j \right) \left(\exp -2 \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} \frac{z_1^{-j} - z_2^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

14.15. Покажите, что оператор

$$\Omega_1^B = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \phi_j \otimes \phi_{-j}$$

на $V \otimes V$ коммутирует с b_∞ . Покажите, что уравнение

$$\Omega_1^B(\tau \otimes \tau) = \phi_0(\tau) \otimes \phi_0(\tau), \quad \tau \in V_0,$$

перенесенное с V_0 на $\mathbb{C}[x_1, x_3, \dots]$ с помощью σ_0 , дает так называемую ВКР-иерархию билинейных уравнений Хироты

$$\sum_{j \geq 1} S_j(2y_1, 0, 2y_3, \dots) S_j\left(-\frac{2}{1} D_1, 0, -\frac{2}{3} D_3, \dots\right) \left(\exp \sum_{s \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} y_s D_s \right) \tau \cdot \tau = 0.$$

Покажите, что уравнением наименьшей главной степени этой иерархии является

$$(D_1^6 - 5D_1^3 D_3 - 5D_3^2 + 9D_1 D_5) \tau \cdot \tau = 0.$$

Постройте солитонные решения ВКР-иерархии.

14.16. Для данного $n > 0$ покажите, что подалгебра $\{(c_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \oplus \mathbb{C}K \in b_\infty$, причем $c_{i+n,j+n} = c_{ij}\}$ изоморфна аффинной алгебре $\mathfrak{g}'(A)$, где A — матрица типа $A_{2\ell}^{(2)}$ (соответственно $D_{\ell+1}^{(2)}$), если $n = 2\ell + 1$ (соответственно $n = 2\ell$). Рассмотрим реализацию базисного представления b_∞ на пространстве $\mathbb{C}[x_j; j \text{ положительное и нечетное}]$. Покажите, что подпространство $\mathbb{C}[x_j; j \not\equiv 0 \pmod n]$ инвариантно относительно $\mathfrak{g}'(A)$, представляя собой главную вертекс-операторную конструкцию ее базисного представления. Покажите, что соответствующими вертексными операторами являются (ϵ — корень n -й степени из единицы, $\epsilon \neq 1$)

$$\left(\exp \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} (1 - \epsilon^j) z^j x_j \right) \left(\exp -2 \sum_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} (1 - \epsilon^{-j}) \frac{z^{-j}}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

14.17. Покажите, что разложение по энергиям (главная градуировка) модуля $F^{(s)}$ задается соотношением: $\deg(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots) = (\text{сумма тех } j > s, \text{ которые встречаются в множестве } \{i_1, i_2, \dots\}) - (\text{сумма тех } j \leq s, \text{ которые в этом множестве не встречаются})$. Приравнявая q -размерности, выведите тождество Эйлера

$$\varphi(q)^{-1} = 1 + \sum_{k \geq 1} q^{k^2} / (1-q)^2 \dots (1-q^k)^2.$$

Пусть H — оператор энергии на F , т. е. $H|_{F_j^{(n)}} = jI$, и пусть α_0 — оператор заряда (см. §14.10). Вычисляя в бозонной и фермионной картинах $\text{tr}_F q^H z^{\alpha_0}$, еще раз выведите тождество Якоби для тройного произведения:

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} (1 + zq^n)(1 + z^{-1}q^{n-1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} z^j q^{j(j+1)/2} / \varphi(q).$$

14.18. Используя бозонно-фермионное соответствие, покажите, что

$$S_\lambda(\hat{\partial}) S_\mu(x)|_{x=0} = \delta_{\lambda\mu}.$$

14.19. Пусть x_∞ , где $x = b, c$ или d , — пополненная аффинная алгебра бесконечного ранга типа X_∞ (см. §7.11). Назовем

$$\bar{e} := \sum_i \pi(e_i) \in \bar{x}_\infty$$

циклическим элементом алгебры Ли $\bar{x}_\infty$, и пусть $\bar{s}$ — централизатор $\bar{e}$ в $\bar{x}_\infty$. Тогда $\bar{s}$ градуирована относительно главной градуировки: $\bar{s} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \bar{s}_j$. Подалгебра $\mathfrak{s} = \pi^{-1}(\bar{s})$ называется *главной подалгеброй* в x_∞ .

Покажите, что $\dim \mathfrak{s}_j = \dim \bar{\mathfrak{s}}_j = 1$ для нечетных j , $= 0$ для ненулевых четных j и $\mathfrak{s}_0 = \mathbb{C}K$. Покажите, что $\bar{e} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} E_{i,i+1}$ для $\bar{b}_\infty$ или $\bar{c}_\infty$, $\bar{e} =$

$E_{0,2} - E_{-1,1} + \sum_{i \geq 1} E_{i,i+1} - \sum_{i \leq -1} E_{i,i+1}$ для $\bar{d}_\infty$ и $\{\bar{e}^j\}_{j \in \mathbb{Z}^{\text{odd}}}$ образуют базис

в $\bar{\mathfrak{s}}$ в случаях $\bar{b}_\infty$ и $\bar{c}_\infty$, $\{\bar{e}^j\}_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} \cup \{(\bar{e}^*)^j\}_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}}$ образуют базис в $\bar{\mathfrak{s}}$ в случае $\bar{d}_\infty$. Для b_∞, c_∞ или d_∞ положим $r = \frac{1}{2}, 1$ или $\frac{1}{2}$ соответственно. Введем следующие элементы алгебры Ли $\bar{x}_\infty$:

$$p_j = \bar{e}^j, \quad q_j = \frac{1}{r} \bar{e}^{-j} \quad (j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}).$$

Тогда в x_∞ выполняются коммутационные соотношения

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} K \quad (i, j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}).$$

Покажите, что в случаях b_∞ и d_∞

$$\dim_q L(\Lambda_0) = \prod_{j \in \mathbb{N}^{\text{odd}}} (1 - q^j)^{-1},$$

и выведите, что $L(\Lambda_0)$ остается неприводимым при ограничении на $\mathfrak{s}$.

14.20. Покажите, что для фундаментального c_∞ -модуля $L(\Lambda_s)$ ($s = 0, 1, \dots$)

$$\dim_q L(\Lambda_s) = (1 - q^{2s+2})/\varphi(q).$$

Обозначим через $\rho_s : F^{(-s-2)} \rightarrow F^{(-s)}$ ($s \in \mathbb{Z}_+$) отображение, состоящее во внешнем умножении на $\sum_{j \geq 0} -j \wedge j + 1$. Покажите, что ρ_s — инъективный гомоморфизм c_∞ -модулей. Убедитесь, что c_∞ -модули $L(\Lambda_s)$ и $F^{(-s)}/\rho_s(F^{(-s-2)})$ изоморфны.

14.21. Определим подгруппу P в GL_∞ соотношением

$$P = \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a_{ij} = 0 \text{ для } j \leq 0 \text{ и } i > 0\}.$$

Это — нормализатор весового пространства $L(\Lambda_0)_{\Lambda_0}$. Группа Σ_∞ всех финитных перестановок множества $\mathbb{Z}$ имеет естественное вложение в GL_∞ (по правилу $\sigma(v_j) = v_{\sigma(j)}$). Обозначим через Σ_- (соответственно Σ_+) подгруппу в Σ_∞ , состоящую из перестановок, которые оставляют неподвижными все $j \leq 0$ (соответственно $j > 0$). Пусть U_+ (соответственно U_-) обозначает подгруппу в GL_∞ всех верхнетреугольных (соответственно нижнетреугольных) матриц с единицами на диагонали. Для правого смежного класса $w \in \Sigma_\infty/\Sigma_+ \times \Sigma_-$ положим $P_w^\pm = U_\pm \cap (\cap_{u \in w} uU_\mp u^{-1})$; P_w^+ есть конечномерная подгруппа в U_+ . Покажите, что $G = \bigcup_w P_w^\pm wP$ — дизъюнктное объединение, где w пробегает $\Sigma_\infty/\Sigma_+ \times \Sigma_-$, и что представление справа единственно.

14.22. Выведите из упражнения 14.21, что имеет место разложение в дизъюнктное объединение

$$SL_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}]) = \bigcup SL_n(\mathbb{C}[t^{\pm 1}]) \operatorname{diag}(t^{k_1}, \dots, t^{k_n}) SL_n(\mathbb{C}[t]),$$

где $k_1 \leq \dots \leq k_n$ — целые числа и $\sum k_i = 0$. (Разложения такого типа называются *разложениями Бруа и Биркгофа* для $+$ и $-$ соответственно.)

14.23. Рассмотрим верхнеугольную матрицу $g(z) \in \widetilde{GL}_\infty$, введенную в §14.10, и пусть $C \in GL_\infty$, $w \in \Sigma_\infty$. Покажите, что в обозначениях §14.10 для $v = Cw|0$ имеем

$$F_v(z) = \det(g(z)C)_{0, \dots, m}^{i_0, \dots, i_m}.$$

Установите, что в главной реализации базисного a_∞ -модуля в пространстве $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$ орбита $GL_\infty \cdot 1$ вместе с 0 содержит все полиномы вида

$$(14.14.3) \quad \det(g(x)C)_{0, \dots, m}^{i_0, \dots, i_m},$$

где $C \in GL_\infty$. Покажите, что, кроме того, каждый полином из $GL_\infty \cdot 1$ может быть однозначно представлен в виде (14.14.3), причем $i_0 < \dots < i_m$ и $C \in P_w$, где $w \nmid 0 = \pm i_0 \wedge \dots \wedge i_m \wedge | - m - 1$ и m достаточно большое. Тем самым мы получаем все полиномиальные решения КП-иерархии. Используя главную подалгебру, покажите, что если $P(x_1, x_2, \dots)$ лежит в $GL_\infty \cdot 1$, то его «сдвиг» $P(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \dots)$, где $c_i \in \mathbb{C}$, также лежит в $GL_\infty \cdot 1$.

14.25. Покажите, что имеется естественная биекция между множеством $\Sigma_\infty / \Sigma_- \times \Sigma_+$ и множеством всех разбиений. А именно, для данного $w \in \Sigma_\infty$ пусть m — наибольшее целое число, такое, что $w(m) = m$; расположим все $w(j)$ при $j \leq m$ в убывающем порядке $j_m > j_{m+1} > \dots$ и положим $b_0 = j_m - m$, $b_1 = j_{m-1} - (m-1), \dots$. Тогда $b_0 \geq b_1 \geq \dots$ — соответствующее разбиение.

14.26. Для двух разбиений b и b' определим *косой полином Шура* $S_{b/b'}(x) = S_{b'}(\partial_x)S_b(x)$; в частности, $S_{b/\{0\}}(x) = S_b(x)$ — полином Шура. Покажите, что $S_{b/b'}(z)$ есть, с точностью до знака, коэффициент при $w'(\{0\})$ в $g(z)w(\{0\})$, где δ и b' — разбиения, соответствующие w и w' .

14.27. Пусть V — векторное пространство размерности n над $\mathbb{C}$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$), и пусть $\Lambda V = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} \Lambda^k V$ — грассманова алгебра над V .

Обозначим через V_k множество всех разложимых элементов $\Lambda^k V$ (т. е. элементов вида $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$, где $v_i \in V$). Обозначим через $\beta_k : V_k \setminus \{0\} \rightarrow \text{Gr}_{n,k}$ каноническое отображение в грассманиан $\text{Gr}_{n,k}$ подпространств размерности k пространства V , определенное по формуле $\beta_k(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \sum_j C v_j$. Элемент $v \in V$ определяет оператор вклинивания на ΛV :

$$v(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots) = v \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \dots,$$

а элемент $f \in V^*$ определяет оператор сокращения:

$$f(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots) = \langle f, v_1 \rangle v_2 \wedge v_3 \wedge \dots - \langle f, v_2 \rangle v_1 \wedge v_3 \wedge \dots + \dots$$

Покажите, что операторы вклинивания (соответственно сокращения) антикоммутируют и $vf + fv = \langle f, v \rangle$. Выведите, что операторы вклинивания и сокращения порождают клиффордову алгебру на $V \oplus V^*$ с билинейной формой

$$(v \oplus f | v' \oplus f') = \langle v, f' \rangle + \langle f, v' \rangle.$$

Выберем базисы $\{e_i\}$ в V и $\{e_i^*\}$ в V^* , такие, что $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$, и пусть $\Omega_1 = \sum_{j=1}^n e_j \otimes e_j^*$ — оператор на $\Lambda V \otimes \Lambda V$. Покажите, что Ω_1 коммутирует с действием $GL(V)$ на ΛV и $\tau \in \Lambda^k V$ является разложимым элементом, если и только если

$$(14.14.4) \quad \Omega_1(\tau \otimes \tau) = 0.$$

Покажите, что уравнение (14.14.4), записанное в базисе $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ ($i_1 < i_2 < \cdots < i_k$) для $\Lambda^k V$, дает классические соотношения Пюккера. Выведите из упр. 14.10, что соотношения Пюккера порождают идеал соотношений в V_k . Покажите, что равенство

$$(14.14.5) \quad \Omega_1(\tau \otimes \tau') = 0, \quad \tau \in \Lambda^k V, \tau' \in \Lambda^r V, k \geq r,$$

эквивалентно тому, что $\beta_k(\tau) \supset \beta_r(\tau')$. Покажите, что равенства (14.14.5) порождают идеал соотношений многообразия (называемого *аффинным многообразием флагов*)

$$\mathcal{V} := \{(\tau_1, \dots, \tau_n) \in \mathcal{V}_1 \times \cdots \times \mathcal{V}_n \mid \beta_k(\tau_k) \supset \beta_r(\tau_r) \text{ для } k > r\}.$$

14.28. Положим $x_j = \frac{1}{j}(\epsilon_1^j + \cdots + \epsilon_N^j)$. Покажите, что $S_k(x_1, x_2, \dots)$ равен следу матрицы $\text{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ в $GL_N(\mathbb{C})$ -модуле $S^k(\mathbb{C}^N)$ (и, следовательно, по Шуру $S_b(x)$ является следом этой матрицы в $GL_N(\mathbb{C})$ -модуле, соответствующем разбиению b ; см., например, Macdonald [1979]).

14.29. отождествим $\mathbb{C}^\infty$ с $\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}^n$, как в упр. 14.11. Это дает вложение группы $T := \{\text{diag}(t^{k_1}, \dots, t^{k_n}) \mid k_i \in \mathbb{Z}, \sum k_i = 0\}$ в группу всех перестановок множества $\mathbb{Z}$. Для $g \in T$ существует перестановка $w \in \Sigma_\infty$, такая, что $g = wg'$, где g' — перестановка $\mathbb{Z}$, которая оставляет инвариантным множество неположительных целых чисел. Пусть b — разбиение, соответствующее w , и положим $s_g = S_b$; покажите, что с точностью до знака, полином s_g не зависит от выбора w . Пусть $\mathfrak{g}$ — аффинная алгебра типа $A_{n-1}^{(1)}$; отождествим базисный $\mathfrak{g}$ -модуль с подпространством $\mathbb{C}[x_j; j \not\equiv 0 \pmod n]$ в $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots]$. Пусть G — соответствующая группа и $\mathcal{V} = G \cdot 1$ — орбита вектора старшего веса. Покажите, что $s_g \in \mathcal{V}$ ($g \in T$), т. е. s_g — полиномиальное решение $A_{n-1}^{(1)}$ -иерархии. Пусть $P \subset G$ — прообраз $SL_n(\mathbb{C}[t])$ относительно канонического гомоморфизма $G \rightarrow SL_n(\mathbb{C}[t, t^{-1}])$. Используя разложение Брюа (см. упр. 14.21), покажите, что

$$\mathcal{V} = \bigcup_{g \in T} P \cdot s_g \quad (\text{дизъюнктное объединение}).$$

14.30. Сохраним обозначения упр. 14.29. Пусть $n = 2$; для $k \in \mathbb{Z}$ обозначим через s_k полном s_g с $g = \text{diag}(t^k, t^{-k})$. Покажите, что $s_k = S_{\{2k-1, \dots, 1\}}$, если $k > 0$, и $s_k = S_{\{-2k, -2k-1, \dots, 1\}}$, если $k \leq 0$. Покажите, что $\dim(\mathbb{Z}_+(s_k) + \mathbb{C}s_k) = k+1 = \dim P \cdot s_k$. Докажите, что все полиномиальные решения КдФ-иерархии имеют вид

$$(14.14.6) \quad c_0 s_{\{k, k-1, \dots, 1\}}(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \dots), \text{ где } c_i \in \mathbb{C}.$$

[Проективизация множества $P \cdot s_k$ изоморфна $\mathbb{C}^k$. Мы имеем инъективное отображение $f: \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$, определенное формулой $f((c_1, \dots, c_k)) = s_k(x_1 + c_1, x_2 + c_2, \dots)$ и такое, что $\dim f(\mathbb{C}^k) = k$. Проверьте, что f — изоморфизм.]

14.31. Покажите, что полином $S_{\{2,1\}} = \frac{1}{3}x_1^3 - x_3$ является решением $A_{n-1}^{(1)}$ -иерархии для $n \geq 4$, но не все полиномы из множества $P \cdot S_{\{2,1\}}$ имеют вид (14.14.6).

14.32. Определим бесконечный грассманиан Gr следующим образом. Рассмотрим бесконечномерное пространство $\mathbb{C}^\infty = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}v_j$ и его подпространства $\mathbb{C}_k^\infty = \bigoplus_{j \leq k} \mathbb{C}v_j$. Обозначим через Gr (соответственно Gr_n) множество всех подпространств U в $\mathbb{C}^\infty$, таких, что $U \supset \mathbb{C}_k^\infty$ (соответственно $U \supset \mathbb{C}_k^\infty$ и $\dim U/\mathbb{C}_k^\infty = n - k$) для $k \ll 0$. Тогда $\text{Gr} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \text{Gr}_n$ (дизъюнктное объединение) и GL_∞ действует транзитивно на каждом Gr_n . Пусть

$$\mathcal{V}_n = \{\tau \in F^{(n)} \mid \Omega_1(\tau \otimes \tau) = 0\} \quad (= GL_\infty|n) \cup \{0\}$$

(см. §14.11), и обозначим через $\beta_n: \mathcal{V}_n \setminus \{0\} \rightarrow \text{Gr}_n$ отображение, определенное по правилу $\beta_n(i_1 \wedge i_2 \wedge \dots) = \bigcup_j \mathbb{C}v_{i_j}$, которое является GL_∞ -эквивариантным и сюръективным, причем его слоями являются $\mathbb{C}^*$. Докажите бесконечномерные аналоги всех фактов, сформулированных в упр. 14.27.

14.33. Покажите, что уравнение

$$\Omega_1(\tau \otimes \tau') = 0, \quad \tau \in F^{(k+n)}, \quad \tau' \in F^{(k)}, \quad n \geq 0,$$

при перенесении на B эквивалентно иерархии билинейных уравнений Хироты (называемой n -й МКР-иерархией):

$$(14.14.7) \quad \sum_{j \geq 0} S_j(2y) S_{j+n+1}(-\tilde{D}) \left(\exp \sum_{r \geq 1} y_r D_r \right) \tau \cdot \tau' = 0.$$

Выведите из упр. 14.32, что множество всех полиномиальных решений, рассматриваемых с точностью до постоянного множителя, для КП-иерархии естественно параметризуется грассманианом Gr , а для объединения всех n -х МКР-иерархий — бесконечным многообразием флагов

$$\mathcal{F} = \{\dots \supset U_1 \supset U_0 \supset U_{-1} \supset \dots \mid U_j \in \text{Gr}_j\}.$$

14.34. Обозначим через $P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, n}(D)$ коэффициент при мономе $y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \dots$ в (14.14.7). Пусть $L_{\text{high}}^{(n)}$ обозначает старшую компоненту gl_∞ -модуля $B^{(k+n)} \otimes B^{(k)}$, $L_{\text{low}}^{(n)}$ — его ортогональное дополнение, $\text{Hir}^{(n)} = L_{\text{low}}^{(n)} \cap \mathbb{C}[y]$ и $\text{Hir}^{(n)} = \bigoplus_j \text{Hir}_j^{(n)}$ — главную градуировку (ср. §14.12). Покажите, что полиномы $P_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, n}(y)$ образуют

базис пространства $H_{|\lambda|+n+1}^{(n)}$, так что $\dim H_j^{(n)} = p(j - n - 1)$. Покажите, что $2P_{0;1}(x) = x_1^2 - x_2$ и, следовательно, $(D_1^2 - 2D_2)\tau' \cdot \tau = 0$ есть уравнение наименьшей степени первой МКР-иерархии. Покажите, что, используя замену переменных и функций (14.11.12), а также $v(x, y, t) = \log(\tau'/\tau)$, мы получим формулу

$$u = v_y - v_x^2 - v_{xx},$$

называемую преобразованием Миуры.

14.95. Покажите, что полином Хироты $P(y)$ является нечетным, если и только если $P(y) \in \Lambda^2(L(\Lambda_0))$, и что любой нечетный полином является полиномом Хироты.

[Используйте тот факт, что $2y_j = x'_j - x''_j$.]

14.96. Покажите, что для операторов L_n , введенных в упр. 9.17, справедливо соотношение (ср. упр. 7.24)

$$[L_n, \psi_k] = (-n/2 - k + i\lambda n)\psi_{k-n}.$$

14.97. Покажите, что для КП-иерархии формальное пополнение пространства Hir инвариантно относительно вертексного оператора

$$Z(u, v) = \left(\exp \sum_k (u^k - v^k) y_k \right) \left(\exp -\frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{k} (u^{-k} - v^{-k}) \frac{\partial}{\partial y_k} \right) + \left(\exp -\sum_k (u^k - v^k) y_k \right) \left(\exp \frac{1}{2} \sum_k \frac{1}{k} (u^{-k} - v^{-k}) \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

14.98. Положим $a_{-k} = 2^{-\frac{1}{2}} k y_k$ и $a_k = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial y_k}$ для $k > 0$, и пусть $L_{n;0}$ обозначают операторы на пространстве $V = \mathbb{C}[y_1, y_2, \dots]$, введенные в упр. 9.17 при $\lambda = \mu = 0$. Пусть

$$Z(u) = \lim_{v \rightarrow u} \left(1 - \frac{v}{u} \right)^{-2} (Z(u, v) - 2),$$

где $Z(u, v)$ — вертексный оператор, введенный в упр. 14.37. Покажите, что $Z(u) = \sum_j u^{-j} L_{j;0}$ и поэтому подпространство Hir в V полиномов Хироты для КП-иерархии и его ортогональное дополнение $Hir^\perp$ инвариантны относительно операторов Вирасоро $L_{j;0}$, $j \in \mathbb{Z}$.

14.99. Используя бозонно-фермионное соответствие, перенесите действие операторов $L_{k;0}$, определенных в упр. 14.38, на $F^{(0)}$ и покажите, что элементы этого пространства, аннулируемые всеми $L_{k;0}$ при $k > 0$, являются линейными комбинациями элементов $\underline{n} \Lambda \underline{n} - \underline{1} \Lambda \dots \underline{1} \Lambda \underline{1} \mid -n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Для $n = 0, 1, 2, \dots$ пусть $Q_n(y)$ обозначает полином Шура $S_{\{n, \dots, n\}}(y)$, где n повторяется n раз. Покажите, что если полином $P(y)$ аннулируется всеми $L_{k;0}$ при $k > 0$, то $P(y)$ является линейной комбинацией $Q_n(y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

14.40. Выведите из упр. 14.39, что полиномы $Q_n(\bar{y})$, $n = 1, 2, \dots$, являются полиномами Хироты для КП-иерархии. (Для $n = 2$ мы тем самым перекрываем полином из (14.11.11).)

14.41. Покажите, что $Hir^\perp$ неприводимо относительно Vir и что Hir разлагается в прямую сумму неприводимых Vir -модулей, порожденных векторами (старшего веса) $Q_n(y)$, $n = 1, 2, \dots$.

14.42. Выведите из упр. 14.39, что векторы старшего веса в a_∞ -модуле $L(\Lambda_0) \otimes L(\Lambda_0)$ являются скалярными кратными полиномами $Q_n(y)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

14.43. Пусть $L(\Lambda)$ — интегрируемый модуль со старшим весом над a_∞ ($\Lambda = \sum_i k_i \Lambda_i$, где k_i — неотрицательные целые числа и все они, за исключением конечного числа, равны нулю). Пусть $\lambda = \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ — такая последовательность, что $k_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$ и $\lambda_i = 0$ для достаточно большого i , и пусть h_i — длины крюков (бесконечной) диаграммы Юнга для λ . Покажите, что $\dim_q L(\Lambda) = \prod_i (1 - q^{h_i})^{-1}$.

В упр. 14.44–14.51 мы обсуждаем подход к КП- и КдФ-иерархиям с точки зрения псевдодифференциальных операторов.

14.44. (Формальный) псевдодифференциальный оператор — это выражение вида

$$P(x, \partial) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(x) \partial^j,$$

где $a_j(x)$ — формальный степенной ряд по x и $a_j(x) = 0$ для $j \gg 0$. Умножение псевдодифференциальных операторов определяется исходя из соотношения

$$\partial^j \cdot b(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{j}{k} \frac{d^k b}{dx^k} \partial^{j-k}.$$

Покажите, что, таким образом, псевдодифференциальные операторы образуют ассоциативную алгебру Ψ . Покажите, что Ψ обладает антиинволюцией $*$, определенной условиями

$$b(x)^* = b(x), \quad \partial^* = -\partial.$$

14.45. Обозначим через U_+ (соответственно U_-) пространство выражений вида (формальные осциллирующие функции)

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(x) z^j e^{zx} \quad (\text{соответственно } \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j(x) z^j e^{-zx}),$$

где $a_j(x)$ — формальные степенные ряды по x и $a_j(x) = 0$ для $j \gg 0$. Покажите, что имеется представление алгебры Ψ на пространстве U_+

(соответственно U_-), определенное условием $(b(x)\partial^j)e^{zx} = b(x)z^j e^{zx}$ (аналогично для U_-). Для $P = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \partial^j \in \Psi$ пусть

$$P_+ = \sum_{j \geq 0} a_j \partial^j, \quad P_- = \sum_{j < 0} a_j \partial^j.$$

Покажите, что если $P(x, \partial), Q(x, \partial) \in \Psi$ таковы, что

$$\text{Res}_{z=0}(P(x', z)e^{x'z}Q(x'', -z)e^{-x''z}) = 0,$$

то $(PQ^*)_+ = 0$.

14.46. Рассмотрим теперь псевдодифференциальные операторы вида $P(x, \partial)$, где $x = (x_1, x_2, \dots)$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x_1}$ и $x_2, x_3, \dots$ — некоторые параметры, и обозначим $\sum_{j \geq 1} z^j x_j$ через $z \cdot x$. Пусть $\Gamma(x, z) = e^{z \cdot x} \Gamma_+(z)^{-1}$,

$\Gamma^*(x, z) = e^{-z \cdot x} \Gamma_+(z)$ (см. (14.10.3)). Для ненулевого формального степенного ряда $\tau(x)$ введем соответствующую волновую функцию

$$w(x, z) = \Gamma(x, z)\tau(x)/\tau(x) := \hat{w}(x, z)e^{z \cdot x}$$

и сопряженную волновую функцию

$$w^*(x, z) = \Gamma^*(x, z)\tau(x)/\tau(x) := \hat{w}^*(x, z)e^{-z \cdot x},$$

где $\hat{w}(x, z) = 1 + w_1(x)z^{-1} + w_2(x)z^{-2} + \dots$, $\hat{w}^*(x, z) = 1 + w_1^*(x)z^{-1} + w_2^*(x)z^{-2} + \dots$. Мы можем записать

$$w(x, z) = P e^{z \cdot x}, \quad w^*(x, z) = Q e^{-z \cdot x},$$

где $P = 1 + w_1(x)\partial^{-1} + \dots$, $Q = 1 - w_1^*\partial^{-1} + w_2^*\partial^{-2} - \dots$. Заметим, что уравнение (14.11.5) для КП-иерархии может быть записано в виде

$$(14.14.8) \quad \text{Res}_{z=0} w(x', z)w^*(x'', z) = 0.$$

Выведите из упражнения 14.45, что если τ является решением КП-иерархии, то $Q = (P^*)^{-1}$.

14.47. Покажите, что $\tau(x)$ определяется с точностью до постоянной функции ее волновой функцией, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x_n} \log \tau = -\text{Res}_{z=0} z^n \left(\sum_{j \geq 1} z^{-j-1} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \log \hat{w}(x, z).$$

14.48. Пусть $L := P\partial P^{-1} = \partial + u_1(x)\partial^{-1} + \dots$, и пусть $B_n = (L^n)_+$. Покажите, что $B_0 = 1$, $B_1 = \partial$, $B_2 = \partial^2 + 2u_1$, $B_3 = \partial^3 + 3u_1\partial + 3u_2 + 3u_{1x_1}$ и что $2u_1 = (\log \tau)_{x_1 x_1}$.

Докажите, что из уравнения (14.14.8) вытекает

$$(14.14.9) \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = [B_n, L], \quad n = 1, 2, \dots$$

[Примените $\frac{\partial}{\partial x_n} - B_n$ к (14.14.8) и воспользуйтесь тем, что $(\frac{\partial}{\partial x_n} - B_n)\psi(x, z) = (\frac{\partial P}{\partial x_n} + (L^n)_- P)e^{z \cdot x}$, чтобы из упр. 14.45 получить

$$(14.14.10) \quad \frac{\partial P}{\partial x_n} = -(P \partial P^{-1})_- P \quad (\text{уравнение Сато}).$$

Дифференцируя $LP = P\partial$ по x_n и используя (14.14.10), получаем (14.14.9).]

14.49. Покажите, что (14.14.9) влечет за собой

(14.14.11)_{m,n}

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_n} - B_n, \frac{\partial}{\partial x_m} - B_m \right] = 0 \quad (\text{уравнение Захарова — Шабата}).$$

Покажите, что (14.14.11)_{2,3} есть классическое КП-уравнение (14.11.13) на функцию $u = 2u_1$.

14.50. Зафиксируем целое число $n \geq 2$. Покажите, что следующие условия эквивалентны:

a) $\tau(x)$ не зависит от x_{jn} , $j \in \mathbb{N}$,

b) $\frac{\partial \psi}{\partial x_{jn}} = z^{nj} \psi$,

c) P не зависит от x_{jn} , $j \in \mathbb{N}$,

d) L^n — дифференциальный оператор, т. е. $(L^n)_- = 0$. Покажите, что если решение τ для КП-иерархии не зависит от x_n , то оно не зависит от всех x_{jn} , $j \in \mathbb{N}$.

14.51. Пусть $n = 2$. Условие d) упр. 14.50 превращается в $L^2 = \partial^2 + 2u(x) =: S$, где $x = (x_1, x_3, \dots)$, так что (14.14.9) сводится к

$$(14.14.12); \quad \frac{\partial S^{1/2}}{\partial x_{2j+1}} = [(S^{j+1/2})_+, S^{1/2}].$$

Покажите, что (14.14.12)₁ есть классическое КдФ-уравнение (14.13.4).

14.52. Рассмотрим подсистему НЛШ-иерархии (ср. (14.13.6)):

$$D_1^2 \tau_n \cdot \tau_n + 2\tau_{n-1} \tau_{n+1} = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Покажите, что если положить $u_n(x) = (\log \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n})(x, c_2, c_3, \dots)$, то эта система перейдет в классическую решетку Toda:

$$(u_n)_{xx} = e^{u_n - u_{n-1}} - e^{u_{n+1} - u_n}.$$

14.53. Выведите следующую явную форму решения

$$\tau_{a_1, \dots, a_N; x_1, \dots, x_N}^{+, \dots, +}(x, q) = \sum \tau_n(x) q^n$$

НЛШ-иерархии (см. §14.13):

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N} f_{i_1, \dots, i_n}(x), \quad \text{если } 0 < n \leq N, \\ &= 1, \quad \text{если } n = 0, \text{ и } = 0 \text{ в противном случае, где} \\ f_{i_1, \dots, i_n}(x) &= \prod_{1 \leq p < q \leq n} (z_{i_p} - z_{i_q})^2 a_{i_1} \dots a_{i_n} z_{i_1} \dots z_{i_n} \\ &\quad \times \exp \sum_{k \geq 1} x_k (z_{i_1}^k + \dots + z_{i_n}^k). \end{aligned}$$

14.54. Выведите формулу для n -й производной δ -функции

$$\delta_{z_1}^{(n)} = n[z_2^{-n-1}(1 - z_1/z_2)^{-n-1} + (-1)^n z_1^{-n-1}(1 - z_2/z_1)^{-n-1}].$$

В упр. 14.55–14.63 мы наметим более инвариантный подход к аффинной алгебре типа A_∞ , соответствующей группе и бесконечному грассманиану, а также приложение этого подхода к алгебраической геометрии кривых.

14.55. Пусть V — векторное пространство. Два подпространства A и B в V называются *соизмеримыми* (это записывается $A \sim B$), если $\dim A/(A \cap B) < \infty$ и $\dim B/(A \cap B) < \infty$. Покажите, что это отношение эквивалентности. Определим *относительную размерность* A и B формулой:

$$\dim A - \dim B = \dim A/(A \cap B) - \dim B/(A \cap B).$$

Покажите, что это определение корректно.

14.56. Пусть $\text{End}(V, A) = \{g \in \text{End } V \mid gA + A \sim A\}$. Покажите, что это подалгебра в (ассоциативной) алгебре $\text{End } V$. Пусть $gl(V, A)$ — соответствующая алгебра Ли и $GL(V, A) = \text{End}(V, A)^\times$ — соответствующая группа. Покажите, что

$$GL(V, A) = \{g \in (\text{End } V)^\times \mid gA \sim A\}.$$

Покажите, что отображение $\deg : GL(V, A) \rightarrow \mathbb{Z}$, определенное формулой $\deg(g) = \dim A - \dim gA$, является гомоморфизмом в аддитивную группу $\mathbb{Z}$. Пусть $GL(V, A)^0$ обозначает ядро $\deg$. Определим грассманиан

$$\text{Gr}(V, A) = \{U \subset V \mid U \sim A\},$$

и пусть $\text{Gr}_n = \{U \in \text{Gr}(V, A) \mid \dim U - \dim A = n\}$. Покажите, что $GL(V, A)^0$ действует транзитивно на Gr_n . Покажите, что, взяв $V = \mathbb{C}^\infty$ и $A = \mathbb{C}_0^\infty$, мы получим грассманиан, рассмотренный в упр. 14.32, и что $\bar{a}_\infty$ есть подалгебра Ли $gl(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}_0^\infty)$.

14.57. Пусть $\text{End}_{\text{fin}} A = \{g \in \text{End } A \mid \dim gA < \infty\}$, $gl_{\text{fin}} A$ — соответствующая алгебра Ли и $GL_{\text{fin}}(A) = \{1 + g \mid g \in \text{End}_{\text{fin}} A, 1 + g \text{ обратим}\}$ — соответствующая группа. Выберем проекцию $\pi: V \rightarrow A$ и положим

$$\widetilde{\text{End}}(V, A) = \{(g, f) \in \text{End}(V, A) \oplus \text{End } A \mid \pi g \pi - f \in \text{End}_{\text{fin}} A\}.$$

Покажите, что это алгебра, не зависящая от π . Докажите, что

$$(14.14.13) \quad 0 \longrightarrow \text{End}_{\text{fin}} A \xrightarrow{i_2} \widetilde{\text{End}}(V, A) \xrightarrow{p_1} \text{End}(V, A) \longrightarrow 0,$$

где i_2 есть вложение во второе слагаемое, а p_1 — проекция на первое слагаемое, является точной последовательностью ассоциативных алгебр. Рассматривая сечение $\text{End}(V, A) \rightarrow \widetilde{\text{End}}(V, A)$, определенное по правилу $g \mapsto (g, \pi g \pi)$, покажите, что соответствующая алгебра Ли $\widetilde{gl}(V, A)$ изоморфна векторному пространству $gl(V, A) \oplus gl_{\text{fin}} A$ со скобкой

$$[(g, f), (g', f')] = ([g, g'], [f, f'] + \Psi_A^\pi(g, g')),$$

где $\Psi_A^\pi(g, g') = [\pi g \pi, \pi g' \pi] - \pi[g, g']\pi$. Факторизуя по подпространству элементов с нулевым следом, мы получим из (14.14.13) центральное расширение алгебры Ли $gl(V, A)$

$$(14.14.14) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \widehat{gl}(V, A) \rightarrow gl(V, A) \rightarrow 0$$

с 2-коциклом $\psi_A^\pi(g, g') = \text{tr}_V([\pi, g]g')$. Покажите, что (14.14.14) дает центральное расширение, которое обсуждалось в §7.12 и упр. 7.28. Рассмотрим группу $\widetilde{GL}(V, A) = \widetilde{\text{End}}(V, A)^\times$ и вложение $GL_{\text{fin}}(A) \rightarrow \widetilde{GL}(V, A)$, заданное формулой $f \mapsto (1, f)$. Покажите, что тем самым мы получаем точную последовательность групп

$$1 \rightarrow GL_{\text{fin}}(A) \rightarrow \widetilde{GL}(V, A) \rightarrow GL(V, A) \rightarrow 1.$$

Факторизуя по подгруппе элементов с определителем 1, получим центральное расширение

$$(14.14.15) \quad 1 \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \widehat{GL}(V, A) \rightarrow GL(V, A) \rightarrow 1.$$

Положим $\widetilde{GL}(V, A)^\circ = \{(g, f) \in \widetilde{GL}(V, A) \mid g \in GL(V, A)^\circ\}$.

14.58. Пусть $\bar{A}_\infty = \{a = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}} \mid a \text{ обратима и } a_{ij} - \delta_{ij} = 0 \text{ для } |i - j| \gg 0\} \subset GL(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}_0^\infty)$ — группа, соответствующая алгебре Ли $\bar{a}_\infty$, и пусть $\bar{A}_\infty^\circ = \bar{A}_\infty \cap GL(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}_0^\infty)^\circ$. Формулы (14.9.4) продолжают до представления $\bar{a}_\infty$ (соответственно $\bar{A}_\infty$) на клиффордовой алгебре Cl дифференцированиями (соответственно автоморфизмами),

которое мы обозначим через p (соответственно P). Покажите, что формула

$$\hat{r}(g, f)x|0\rangle = p(g)x|0\rangle + xr(g - f)|0\rangle$$

задает представление алгебры Ли $\hat{gl}(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}_0^\infty)$ на F , которое переносится на $\hat{gl}(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}_0^\infty) \supset a_\infty$, и тем самым получается представление $\hat{r}$, построенное в §14.9. Покажите, что формула

$$\hat{R}_0(g, f)x|0\rangle = (P(g)x)R_0(gf^{-1})|0\rangle$$

определяет представление группы $GL(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C}_0^\infty)^0$ на $F^{(0)}$, которое переходит в проективное представление группы $\bar{A}_\infty^0$ на $F^{(0)}$, так что $\beta_0(\bar{A}_\infty^0|0\rangle) = \text{Gr}_0$.

14.59. Пусть V — векторное пространство и K — подпространство в V . Для подпространства D в V пусть $H^0(D) = D \cap K$ и $H^1(D) = \frac{V}{D+K}$. Предполагая, что последние два подпространства конечномерны, положим $\chi(D) = \dim H^0(D) - \dim H^1(D)$. Для двух соизмеримых подпространств D_1 и D_2 в V докажите «абстрактную теорему Римана — Роха»:

$$\chi(D_1) - \chi(D_2) = \dim D_1 - \dim D_2.$$

14.60. Пусть X — гладкая алгебраическая кривая. Для точки $p \in X$ пусть A_p обозначает формальное пополнение локального кольца в p , и пусть K_p — его поле частных. Пусть $V_X = \prod_{p \in X}' K_p$ — пространство *аделей* на X (все, за исключением конечного числа, компоненты f_p адела лежат в A_p). Для данного дивизора $D = \sum_{p \in X} k_p p$ пусть $A(D) = \{(f_p)_p \in V_X \mid \nu_p(f_p) \geq -k_p\}$. Покажите, что $\deg D = \dim A(D) - \dim A(\emptyset)$.

14.61. Пусть K — поле рациональных функций на X и $K = \{(f)_p \mid f \in K\} \subset V_X$ — подпространство *главных аделей*. Покажите, что

$$H^i(X, \mathcal{O}_x(D)) = H^i(A(D)), \quad i = 0, 1.$$

Выведите из упр. 14.59 «легкую часть» классической теоремы Римана — Роха.

14.62. Покажите, что $\psi_A^\pi(g, g') = \psi_A(g, g')$ для коммутирующих $g, g' \in gl(V, A)$ не зависит от выбора π , что $\psi_A(g, g') = \psi_{A'}(g, g')$, если $A \sim A'$, и $\psi_A(g, g') = 0$, если $\dim A < \infty$ или $\dim V/A < \infty$. Покажите, что если $g, g' \in gl(V, A) \cap gl(V, B)$ и $gg' = g'g$, то справедлива «абстрактная теорема о вычетах»:

$$\psi_A(g, g') + \psi_B(g, g') = \psi_{A+B}(g, g') + \psi_{A \cap B}(g, g').$$

14.63. Рассматривая f и $g \in \mathcal{K}$ как операторы умножения в V_X , покажите, что $\psi_{A_p}(f, g) = \text{Res}_p gdf$. Выведите из упр. 14.62 классическую теорему о вычетах:

$$\sum_{p \in X} \text{Res}_p gdf = 0, \quad g, f \in \mathcal{K}.$$

§14.15. Библиографические замечания и комментарии

Исключительная роль базисного представления в теории аффинных алгебр была отмечена Кацем в работе Кас [1978A]. Известно довольно много явных конструкций этого представления. Первая — главная вертекс-операторная конструкция, полученная в работе Кас — Kazhdan — Lepowsky — Wilson [1981]. В простейшем случае $A_1^{(1)}$ эта конструкция была ранее найдена в работе Lepowsky — Wilson [1978]. Вторая — однородная вертекс-операторная конструкция, полученная Френкелем и Кацем (Frenkel — Кас [1980]) и, в другой форме, Сигалом (Segal [1981]). Третья — спин-реализация, найденная независимо Френкелем (Frenkel [1981]), а также Кацем и Питерсоном (Кас — Peterson [1981]). Четвертая — бесконечное клин-представление, найденное Кацем и Питерсоном (Кас — Peterson [1981]). В работе Кас — Peterson [1985 C] развит общий подход, который сопоставляет каждому элементу w конечной группы Вейля $\overset{\circ}{W}$ (или, более общо, $\text{Aut } \overset{\circ}{Q}$) вертекс-операторную конструкцию базисного представления, так что для $w = 1$ (соответственно $w = \text{элемент Кокстера}$) получается однородная (соответственно главная) конструкция; для $w = -1$ получается конструкция Френкеля, Леповского и Мермана (Frenkel — Lepowsky — Meurman [1984]). Изложение этого подхода, основанное на вычислениях с вертексными операторами, позже было дано Леповским (Lepowsky [1985]). Дальнейшие конструкции базисного представления — это реализация представления в терминах пространства путей в работе Date — Jimbo — Kuniba — Miwa — Okado [1989A], данная в рамках статистических моделей на решетке, и конструкция базиса из стандартных мономов в работе Lakshmibai — Sheshadri [1989], данная в контексте геометрической теории бесконечномерных многообразий флагов.

Конструкция интегрируемых модулей больших уровней в рамках исчисления вертексных операторов обсуждалась в работах Lepowsky — Wilson [1984], Lepowsky — Primc [1985], Meurman — Primc [1987], Misra [1989A], Frenkel — Lepowsky — Meurman [1989]. Имеются по крайней мере три явные конструкции всех интегрируемых модулей над $A_L^{(1)}$: конструкция на основе исчислений вертексных операторов (Primc [1989]), конструкция в терминах пространства путей (Date — Jimbo — Kuniba — Miwa — Okado [1989B]) и конструкция базиса стандартных мономов (Lakshmibai — Sheshadri [1989] и Lakshmibai [1989]).

Вертекс-операторная конструкция базисных представлений аффинных алгебр типа, отличного от $A-D-E$, изучалась в работах Goddard — Nahm — Olive — Schwimmer [1986], Bernard — Thierry — Mieg [1987 B], Misra [1989 A] и других.

Изложение §14.1, 14.3–14.7 близко соответствует статье Кас — Kazhdan — Lepowsky — Wilson [1981]. §14.2 взят из работы Кас [1978 A]. Результаты §14.2 в случае $r = 1$ принадлежат Костанту (Kostant [1959]). Его доказательство длинное, но не использует проверку одного за другим всех случаев (14.2.4). Теорема 14.8 принадлежит Френкелю и Кацу (Frenkel — Кас [1980]), но изложение в §14.8 несколько иное, ближе по духу к подходу физиков. Вертексные операторы $\Gamma_\alpha(z)$ и операторы Вирасоро D_m играют решающую роль в дуальной теории струн (см. обзоры Mandelstam [1974], Schwartz [1973], [1982]). Работа Frenkel — Кас [1980] связывает эту теорию с теорией представлений аффинных алгебр. Физикам удалось использовать это в бурном развитии теории струн, начатом в 1984 г. (см. Gross — Harvey — Martinec — Rohm [1985 B] и книгу Green — Schwartz — Witten [1987]). Отметим, что, используя вертексные операторы $\Gamma_\alpha(z)$, Френкель (Frenkel [1985]) и Годдард и Олив (Goddard — Olive [1985 A]) построили некоторые (приводимые) представления (неаффинных) алгебр Каца — Мули.

Начиная с первой в этой области работы Skyrme [1971] (см. также Mandelstam [1975]), бозонно-фермионное соответствие играло все более важную роль в двумерной квантовой теории поля. Позже оно стало важной составной частью работы школы Киото по КП-иерархии. Замечательная связь теории солитонных уравнений с бесконечным грассманианом была обнаружена Сато (Sato [1981]) и развита в рамках теории представлений аффинных алгебр в работах Date — Jimbo — Kashiwara — Miwa [1981, 1982 A, B, 1983 A, B].

Бесконечное клин-представление было построено в более инвариантных терминах Кацем и Питерсоном (Кас — Peterson [1981]) и с успехом использовано в теории представлений алгебры Вирасоро (Фейгин — Фукс [1982]). Теорема 14.10 принадлежит Дате, Дзимбо, Кашиваре и Миве, которые использовали спинорный формализм. Изложение §14.9 и 14.10 соответствует работам Кас — Peterson [1986] и Кас — Raina [1987]. Подход, развитый в §14.11–14.13, принадлежит Кацу и Вакимото (Кас — Wakimoto [1989 A]). Уравнение (14.11.9) для КП-иерархии впервые появилось в статье Date — Jimbo — Kashiwara — Miwa [1981]; предложение 14.11.2 также принадлежит этим авторам. Явные формулы для уравнений Хироты в случае КП-иерархии были найдены Лу (Lu [1989 A]). Тот факт, что все полиномы Шура являются решениями КП-иерархии (предложение 14.11.1), был обнаружен Сато (Sato [1981]) и стал отправной точкой для этого направления исследования.

Первая часть упр. 14.2 принадлежит Костанту (Kostant [1959]), а его последняя часть и упр. 14.3 — Кацу и Вакимото (Кас —

Wakimoto [1989 A]). Упражнения 14.5–14.8 взяты из работы (Frenkel — Кас [1980]).

Упражнение 14.10 взято из статьи Кас — Peterson [1983]; конечномерный случай принадлежит Костанту. В случае $GL_n(\mathbb{C})$ -модуля $\Lambda^k \mathbb{C}^n$ уравнение (14.13.3) есть не что иное, как классические соотношения Плюккера (см. упр. 14.27). Это уравнение играет ключевую роль в теории бесконечномерных групп, развитой в работе Peterson — Кас [1983]. Основной результат этой статьи состоит в том, что множество решений (14.13.3) на самом деле совпадает с $V_\Lambda \cup \{0\}$ (ср. с леммой 14.11). Этот результат имеет много важных приложений к структурной теории алгебр Каца — Мули; например, теорема о сопряженности подалгебр Картана является его легким следствием.

Упражнения 14.13–14.16 взяты из работ Date — Jimbo — Kashiwaga — Miwa [1982 A, B]. Общая процедура редукции обсуждается в статье тех же авторов [1982 B], а ВКР-иерархия — в статье [1982 A]. Приведенный здесь подход к ВКР-иерархии соответствует статье Кас — Peterson [1986]; его дальнейшее развитие можно найти в работе You [1989].

Отметим, что формула во введении статьи Date — Jimbo — Kashiwaga — Miwa [1981] дает только «большую» клетку в «разложении Биркгофа», а не множество всех полиномиальных решений. Множество всех решений вместе с его разложением Брюа описано в упр. 14.23. Различные аспекты теории бесконечных многообразий флагов, а также разложений Брюа и Биркгофа (см. упр. 14.21 и 14.22) можно найти в работах Garland — Raghunathan [1975], Pressley [1980], Lusztig [1983], Tits [1981], [1982], Кас — Peterson [1983], [1984 B], [1985 A], [1987], Peterson — Кас [1983], Atiyah — Pressley [1983], Goodman — Wallach [1984 A], Freed [1985], Pressley — Segal [1986], Kazhdan — Lusztig [1988], Kostant — Kumar [1986], [1987], Kumar [1984], [1985], [1987 A], [1988], Lakshmibai [1989], Lakshmibai — Seshadri [1989], Mathieu [1986 C], [1987], [1988], Arabia [1986] и других.

Упражнения 14.30–14.34 взяты из статьи Кас — Peterson [1986]. Большую пользу принесли мне также лекции М. Кашивары и обсуждения с ним. Адлер и Мозер (Adler — Moser [1978]) изучали некоторые полиномы, связанные с КдФ-уравнением, нашли их степени и рекуррентную формулу, однако явную формулу им найти не удалось.

Упражнение 14.38 принадлежит Кацу, Уено и Ямаде (см. Yamada [1985]; тот факт, что Vir действует на Hir в случае КП, в качестве гипотезы был сформулирован в работе Wakimoto — Yamada [1983]). Описание особых векторов для алгебры Вирасоро, приведенное в упр. 14.39, в гипотетической форме было предложено Голдстоуном и доказано Сигалом (Segal [1981]) более сложным способом. Упражнение 14.42, по-видимому, новое.

Для данного представления группы G на векторном пространстве V и векторов $v \in V$, $v^* \in V^*$ функция $f_{v,v^*}(g) = \langle g \cdot v, v^* \rangle$ на G называется *матричным коэффициентом*. Хорошо известно (см. например,

Виленкин [1965]), что многие специальные функции могут рассматриваться как матричные коэффициенты, ограниченные на некоторое подмножество в G , и большую часть свойств этих функций можно вывести из этого факта. Упражнение 14.26 показывает, что косые функции Шура — это специальные функции, соответствующие базисному представлению GL_∞ . В результате многие свойства этих функций можно сформулировать в теоретико-групповой интерпретации. Систематическое изучение матричных коэффициентов групп, соответствующих алгебрам Каца — Мули, было начато в работе Кас — Peterson [1983].

В статье Segal — Wilson [1985] дана теоретико-групповая интерпретация так называемых квазипериодических решений уравнений КдФ-типа с помощью клин-представления.

Все представления, построенные в этой главе, связаны, в некотором смысле, с проективной прямой. Представление, связанное с эллиптической кривой, изучено в работе Date — Jimbo — Kashiwara — Miwa [1983B]. Представления, соответствующие алгебраическим кривым, рассмотрены Чередником [1983 A, B].

Имеется большое количество статей по приложениям теории аффинных алгебр к вполне интегрируемым гамильтоновым системам. Приведены некоторые из них: Adler — van Moerbeke [1980 A, B], [1982], Лезнов — Савельев — Смирнов [1981], Leznov — Saveliev [1983], Mikhailov — Olshanetsky — Perelomov [1981], Reiman — Semenov — Tjan-Shanskii [1979], [1981], Ueno — Takasaki [1984], Goodman — Wallach [1984 B].

Дринфельд и Соколов [1981], [1984] были, вероятно, первыми, кто заметил связь между аффинными алгебрами и уравнениями КдФ-типа. Каждой вершине диаграммы Дынкина для аффинной алгебры Ли они сопоставили иерархию УрЧП типа КдФ, которая дает единое объяснение большому количеству разбросанных результатов в этой области. В работе Wilson [1984] предложен общий подход к построению решений этих иерархий уравнений.

Упражнения 14.44–14.51 взяты в основном из работ Дате, Дзимбо, Кашивары и Мивы, упр. 14.52 — из работы ten Kroode — Bergvelt [1986] и упр. 14.53 — из работы Кас — Wakimoto [1989 A]. Упражнения 14.55–14.58 используют материал из работ Кас — Peterson [1981], Arbarello — De Concini — Кас [1989], Pressley — Segal [1986]. Упражнение 14.61 восходит к Шевалле (Chevalley [1951]). Упражнения 14.62 и 14.63 принадлежат Тейту (Tate [1968]). Аналогичный подход был использован в работе Arbarello — De Concini — Кас [1989] для доказательства «абстрактного закона взаимности» и вывода из него классического закона взаимности Вейля.

Указатель обозначений и определений

Глава 1

§1.1.	$(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$	обобщенная матрица Картана
	Π	реализация матрицы A
	$\Pi^\vee$	неразложимая матрица
	$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$	корневой базис
	$\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_n^\vee$	дуальный корневой базис
	Q	простые корни
	Q_+	дуальные простые корни
	$ht \alpha$	корневая решетка
	$\geq$	высота $\alpha \in Q$
§1.2.	$\tilde{g}(A)$	частичное упорядочение на $\mathfrak{h}^*$
	$\tilde{n}_-$ и $\tilde{n}_+$	
	$\tilde{t}$	
§1.3.	$\mathfrak{g}(A)$	алгебра Ли, соответствующая A
	A	матрица Картана алгебры Ли
	n	$\mathfrak{g}(A)$
	$(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$	ранг алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$
	$\mathfrak{g}(A)$	четверка, ассоциированная с A
	$\mathfrak{h}$	алгебра Каца — Муди
	$e_i, f_i (i = 1, \dots, n)$	подалгебра Картана
	$\mathfrak{g}'(A)$	образующие Шевалле
	$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'(A)$	производная алгебра для $\mathfrak{g}(A)$
	$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha$	разложение на корневые подпространства
	$\mathfrak{g}_\alpha$	корневое подпространство, соответствующее $\alpha \in Q$
	$\text{mult } \alpha$	кратность элемента $\alpha \in Q$
	Δ	множество корней
	Δ_+ и Δ_-	множества положительных и отрицательных корней
	$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$	треугольное разложение

- ω инволюция Шевалле
 §1.5. $V = \bigoplus_{\alpha \in M} V_{\alpha}$ M -градуированное векторное пространство
 $U = \bigoplus U \cap V_{\alpha}$ градуированное подпространство
 $v \in V_{\alpha}$ однородный элемент
 $g(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} g_j(s)$ формальная топология на V
 $g(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} g_j(1)$ формальное пополнение V
 $g'(A)$ градуировка типа s
 $g(A) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} g_j(1)$ главная градуировка
 §1.6. $\mathfrak{c}$ (прямое определение)
 §1.8. $\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ центр $g(A)$ или $g'(A)$
 Глава 2 локальная алгебра Ли
 §2.1. B симметризуемая матрица
 $\nu : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$ симметризация матрицы A
 §2.2. $(\cdot | \cdot)$ симметризуемая алгебра Ли $g(A)$
 §2.3. $(\cdot | \cdot)$ инвариантная симметрическая
 §2.5. $(\cdot | \cdot)$ билинейная форма
 стандартная инвариантная форма
 ограниченный $g(A)$ - или $g'(A)$ -модуль
 Ω обобщенный оператор Казимира
 Ω_0
 ρ
 §2.6. $U(g(A)) = \bigoplus_{\beta \in Q} U_{\beta}$
 $U(g'(A)) = \bigoplus_{\beta \in Q} U'_{\beta}$
 §2.7. $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ компактная форма алгебры
 $\mathfrak{k}(A)$ Ли $g(A)$
 ω_0 компактная инволюция
 $(x|y)_{\mathfrak{g}} = -(\omega_0(x)|y)$
 §2.8. Ω_2
 §2.9. алгебра Ли Гейзенберга порядка n

Глава 3

- §3.1. $\mathfrak{g}({}^t A)$ дуальная алгебра Каца — Муди
 $Q^\vee$ дуальная корневая решетка
 $\Delta^\vee$ дуальная система корней
- §3.4. локально нильпотентный элемент
- §3.6. V $\mathfrak{h}$ - или $\mathfrak{h}'$ -диагонализируемый модуль
 V_λ весовое подпространство
 λ вес
 $\text{mult}_V \lambda$ кратность веса λ
интегрируемый $\mathfrak{g}(A)$ - или $\mathfrak{g}'(A)$ -модуль
- §3.7. τ_i ($i = 1, \dots, n$) фундаментальные отражения
 W группа Вейля
- §3.8. G^π группа, соответствующая интегрируемому $\mathfrak{g}(A)$ -модулю π
 $\widetilde{W}^\pi$
 D^π
- §3.11. $w = r_{i_1} \dots r_{i_\ell}$ локально конечный элемент
 $\ell(w)$ приведенное разложение
длина w
- §3.12. C фундаментальная камера
 $w(C)$ камера
 $X = \bigcup w(C)$ конус Титса
 $C^\vee$ дуальная фундаментальная камера
 $X^\vee$ дуальный конус Титса
- §3.13. группа Кокстера
- §3.14. интегрируемая алгебра Ли

Глава 4

- §4.3. A матрица конечного, аффинного или неопределенного типа
- §4.7. $S(A)$ диаграмма Дынкина для A
- §4.8. $a_0, \dots, a_\ell$ отметки диаграммы Дынкина
 $S(A)$ в табл. Aff
- $\delta = {}^t(a_0, a_1, \dots, a_\ell)$
- §4.9. θ старший корень

Глава 5

- §5.1. Δ^{re} множество вещественных корней
 Δ_+^{re} множество положительных вещественных корней
 $\alpha^\vee$ дуальный вещественный корень
 r_α отражение в $\alpha \in \Delta^{re}$
 длинные и короткие вещественные корни
- §5.2. Δ^{im} множество мнимых корней
 Δ_+^{im} множество положительных мнимых корней
- §5.3. $\text{supp } \alpha$ носитель $\alpha \in Q$
- §5.6. $\delta = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i$
- §5.7. нуль-корень
- §5.8. Z мнимый конус
- §5.9. корневой базис
- §5.10. A матрица гиперболического типа
- §5.11. Λ_n лоренцева решетка
- §5.13. Δ^{sim} строго мнимые корни

Глава 6

- §6.0. аффинная алгебра
- §6.1. $a_0^\vee, \dots, a_\ell^\vee$
 h и $h^\vee$ число Кокстера и дуальное число Кокстера
- §6.2. r A принадлежит табл. Aff r
 K канонический центральный элемент
 d элемент энергии
 $(\cdot | \cdot)$ нормализованная инвариантная форма на аффинной алгебре
- §6.3. Λ_0
 $\overset{\circ}{h}$
 $\bar{\lambda}$ или $\bar{S}$ проекция $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ или $S \subset \mathfrak{h}^*$ на $\overset{\circ}{h}^*$
 $\overset{\circ}{g}$
 $\overset{\circ}{\Delta}$

	$\overset{\circ}{Q}$	
	$\Delta_I^{re}, \Delta_I^{re}$	множества коротких и длинных вещественных корней
§6.4.	$\theta = \delta - a_0 \alpha_0$ $(\cdot \cdot)$	нормализованная инвариантная форма на конечномерной алгебре
§6.5.	$\overset{\circ}{W}$ t_α M T	группа трансляций специальная вершина $S(A)$
§6.6.	W_{af} C_{af}	аффинная группа Вейля фундаментальный альков
§6.8	$\phi(x, y)$	форма Киллинга целочисленная решетка
Глава 7		
§7.1.	$\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ $\text{Res } P(t)$	алгебра полиномов Лорана вычет $P(t) \in \mathcal{L}$ в $t = 0$
§7.2.	$\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ ψ $\tilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ $\hat{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$	нескрученная аффинная алгебра алгебра петель 2-коцикл на $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ центральное расширение $\mathcal{L}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$ реализация нескрученной аффин- ной алгебры
§7.3.	$\mathfrak{d} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} d_j$ Vir $\text{Vir} \ltimes \tilde{\mathcal{L}}(\overset{\circ}{\mathfrak{g}})$	алгебра Ли регулярных векторных полей на $\mathbb{C}^\times$ алгебра Вирасоро полупрямое произведение Vir и аффинной алгебры
§7.4	E_0 и F_0	
§7.7	$x^{(n)}$ $x(z)$ $\delta(z_1 - z_2)$	$t^n \otimes x$ ток формальная δ -функция первичное поле конформный вес

§7.8.	$\varepsilon(\alpha, \beta)$	функция асимметрии
§7.9.	μ	диаграммный автоморфизм
§7.11.	$A_\infty, A_{+\infty}, B_\infty, C_\infty, D_\infty$ gl_∞	бесконечные аффинные матрицы
§7.12.	$\bar{a}_\infty, \bar{b}_\infty, \bar{c}_\infty, \bar{d}_\infty$ $a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$	пополненные аффинные алгебры бесконечного ранга
§7.13.	$\overset{\circ}{G}(\mathcal{L})$ $T(z)$	группа петель, соответствующая $\overset{\circ}{G}$ тензор энергии-импульса

Глава 8

§8.2.	$\mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma, m) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (v^j \otimes \mathfrak{g}_{j \bmod m})$ $\tilde{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$ $\hat{\mathcal{L}}(\mathfrak{g}, \sigma, m)$	реализация скрученной аффинной алгебры
§8.3	θ_0 и θ^0	
§8.4.	$\mathfrak{k}$	однородная подалгебра Гейзенберга
§8.5.	$\alpha \xrightarrow{\gamma} \beta$	
§8.6.	$\sigma_{s,k}$ φ_σ	автоморфизм типа $(s; k)$ накрывающий гомоморфизм
§8.7.		реализация типа s для аффинной алгебры
§8.8.		квазирациональный автоморфизм рациональный автоморфизм

Глава 9

§9.1.	$P(V)$ $v \in V_\lambda, v \neq 0$ $D(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \mu \leq \lambda\}$ $\mathcal{O}$	множество весов $\mathfrak{g}(A)$ -модуля V весовой вектор веса λ категория (некоторых) $\mathfrak{g}(A)$ -модулей
§9.2.		модуль со старшим весом старший вес
	v_Λ	старший вектор (вектор старшего веса)
	$M(\Lambda)$	модуль Верма со старшим весом Λ

	$M'(\Lambda)$	единственный собственный максимальный подмодуль $M(\Lambda)$
	$U(\mathfrak{b}) \otimes_{U(\mathfrak{a})} V$	индуцированный модуль
§9.3.	$L(\Lambda)$	неприводимый модуль со старшим весом Λ
		примитивный вектор
		примитивный вес
§9.4.	$L^*(\Lambda)$	неприводимый модуль с младшим весом $-\Lambda$
	B	контравариантная билинейная форма на $L(\Lambda)$
	$\langle v \rangle$	среднее значение v
§9.6.	$[V : L(\mu)]$	кратность $L(\mu)$ в V
§9.7.	$e(\lambda)$	формальная экспонента
	$\mathcal{E}$	
	$\text{ch } V$	формальный характер
§9.10.		модуль со старшим весом над $\mathfrak{g}'(A)$
	$(\Lambda, \alpha_i^\vee)$	отметка веса Λ
§9.11.	$\widetilde{M}(\lambda)$	
§9.13.	$\mathfrak{s}$	бесконечномерная алгебра Гейзенберга
	R_a	представление канонических коммутационных соотношений
	$\mathfrak{a}$	вакуумный вектор
	$\text{tr}_V q^A$	осцилляторная алгебра
§9.14.	$\text{Vir} = \text{Vir}_- \oplus \text{Vir}_0 \oplus \text{Vir}_+$	треугольное разложение Vir
	$M(c, h)$ и $L(c, h)$	
	c	конформный центральный заряд
	$\text{tr}_V q^{d_0}$	формальный характер Vir -модуль V
Глава 10		
§10.1.	P	весовая решетка
	P_+	множество доминантных интегральных весов
	P_{++}	множество регулярных доминантных интегральных весов

- $P(\Lambda)$ множество весов $\mathfrak{g}(A)$ -модуля $L(\Lambda)$
 §10.2. $\tilde{\mathcal{E}}$
 $R = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 - e(-\alpha))^{\text{mult } \alpha}$
 $\epsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$
 §10.5. $K(\lambda)$ (обобщенная) функция разбиения
 §10.6. e^λ
 ch_V характер $\mathfrak{g}(A)$ -модуля V
 $Y(V)$ область сходимости ch_V
 X_C комплексифицированный конус Титса
 $Y = \{h \in \mathfrak{h} \mid \sum_{\alpha \in \Delta_+} (\text{mult } \alpha) |e^{-\langle \alpha, h \rangle}| < \infty\}$
 §10.8. $\mathfrak{g}(A) = \oplus \mathfrak{g}_j(\mathbf{1})$ главная градуировка алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$
 F_s специализация типа s
 §10.9. $F_{\mathbf{1}}$ главная специализация
 §10.10. $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_j(s)$ градуировка типа s для V
 $V = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} V_j(\mathbf{1})$ главная градуировка модуля V
 $\dim_q V = \sum_{j \geq 0} \dim V_j(\mathbf{1}) q^j$ q -размерность
 §10.11. V^w
- Глава 11
 §11.5. $H(.,.)$ контравариантная эрмитова форма на $\mathfrak{g}(A)$ -модуле унитаризуемый $\mathfrak{g}(A)$ -модуль
 §11.6. Ω_1
 §11.9. $\mathfrak{g}^{(\alpha)}$
 §11.11. $D(\lambda)$ и $D_s(\lambda)$
 §11.13. Π^{re} и Π^{im}
 S_Λ обобщенная алгебра Каца — Муди
- Глава 12
 §12.1. $\overset{\circ}{\chi}_\lambda$
 §12.2. F базисная специализация
 $\overset{\circ}{d}(\lambda)$

- $\varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ эйлерово произведение
 η η -функция Дедекинда
 §12.4. $\langle \Lambda, K \rangle$ уровень веса $\Lambda \in P_+$ или модуля $L(\Lambda)$
 Λ_i фундаментальные веса
 $P^{\pm}, P_+^{\pm}$
 §12.6. $\max(\Lambda)$ максимальный вес
 множество максимальных весов модуля $L(\Lambda)$
 §12.7. $a_{\lambda}^{\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \text{mult}_{L(\Lambda)}(\lambda - n\delta) e^{-n\delta}$
 Θ_{λ} классическая тета-функция
 A_{λ}
 m_{Λ} модулярная аномалия веса Λ
 χ_{Λ} нормализованный характер
 $m_{\Lambda, \lambda}$
 c_{λ}^{Λ} струнная функция
 §12.8. $U_c(\mathfrak{g}')$ тождество для тета-функции
 ограниченное пополнение универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g}')$
 T_n операторы Сугавары
 $c(k)$ конформная аномалия
 h_{Λ} вакуумная аномалия
 §12.9. $\Lambda_{(i)}$ i -й уровень
 $k_{(i)}$
 $L_n^{\mathfrak{g}}$ операторы Вирасоро
 §12.10. $j_{s,r}$ индексы Дынкина
 $L_n^{\mathfrak{g}, \dot{\mathfrak{g}}}$ косетные операторы Вирасоро
 $\text{mult}_{\Lambda}(\lambda; \dot{\mathfrak{g}})$ кратность вхождения $\dot{L}(\lambda)$ в $L(\Lambda)$
 §12.11. вакуумная пара
 §12.12. $b_{\lambda}^{\Lambda}(\dot{\mathfrak{g}})$ функция ветвления
 $U(\Lambda, \lambda)$
 §12.14. T^{π} базисная градуировка

Глава 13

- §13.1. N группа Гейзенберга
 $N_{\mathbb{Z}}$
- §13.2. $\widetilde{Th} = \bigoplus_{m \geq 0} \widetilde{Th}_m$ алгебра тета-функций
 $P_k = \{\lambda \in \mathfrak{h} | (\lambda | \delta) = k, \bar{\lambda} \in M^*\}$
 Θ_λ классическая тета-функция
 $\mathcal{H}$ верхняя полуплоскость
- §13.3. D оператор Лапласа
 $Th = \bigoplus_{m \geq 0} Th_m$ пространство классических тета-функций
- §13.4. $\Gamma(n)$ главная конгруэнц-подгруппа
 $\Gamma_0(n)$
 Γ_θ
 $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $Mp_2(\mathbb{R})$ метаплектическая группа
 $G = Mp_2(\mathbb{R}) \ltimes N$
- §13.5. $n = n(M)$ наименьшее положительное целое число, такое, что $nM^* \subset M$ и $n(\gamma|\gamma) \in 2\mathbb{Z}$ для всех $\gamma \in M^*$
- §13.6. модулярная форма веса k и характера χ
касп
мероморфная модулярная форма
голоморфная форма
 $\mathcal{R}$ -сингулярная модулярная форма
касп-форма
- §13.7. $F^{\alpha, \beta}(\tau)$
 $q = e^{2\pi i \tau}$
 $f_{n, m}(\tau)$
 $g_{n, m}(\tau)$
 Th_m^- антиинвариантные классические тета-функции степени m
- §13.8. A_λ
 P_+^k
 P_{++}^k
 $S(k) = (S_{\Lambda, \Lambda'})_{\Lambda, \Lambda' \in P_+^k \bmod C\delta}$

	Λ	
	$a(\Lambda)$	
§13.9.	A'	
	Λ'_j	
	ρ'	
	P'	
	P'_k	
	M'	
	W'	
	Θ'_λ	
	A'_λ	
	χ'_λ	
	c'_λ	
§13.11.	$f_J^{\alpha, \beta}(\tau) = (\text{Aut } S(A)) \cdot 0$	
§13.13.	$\beta = -i\tau$	
	$f(\beta) \sim g(\beta)$	
	R_+	
	$a(\Lambda)$	асимптотическая размерность
	$c(k)$	
§13.14.	$\tilde{R}_k$	множество классов эквивалентности вакуумных пар
	$d(\Lambda, \lambda)$	конформная подалгебра
§13.15.	f_1, f_2, f_3	
	$\mu(n)$	классическая функция Мёбиуса
	$j(\tau)$	модулярный вариант
	$c^{(k)}$	
	$h_{r,s}^{(k)}$	
	$\chi_{r,s}^{(k)}$ и $\varphi_{r,s}^{(k)}$	
	Cl_δ	клиффордова алгебра
	V_δ	Cl_δ -модуль
	$N_{\lambda\mu}^\nu$	коэффициенты слияния
Глава 14		
§14.0.	$L(\Lambda_0)$	базисное представление аффинной алгебры $\mathfrak{g}(A)$
§14.1.	$\bar{e}$	циклический элемент алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}(A)$
	$\mathfrak{z}$	главная подалгебра в $\mathfrak{g}(A)$

	$\dim \mathfrak{g}_j$	экспоненты аффинной алгебры $\mathfrak{g}(A)$
§14.2.	$\hbar^{(r)}$	r -е число Кокстера простой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$
	$\mathfrak{g} = \bigoplus_j \mathfrak{g}_j(1; k)$	r -главная градуировка алгебры Ли $\mathfrak{g}$
	E	r -циклический элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$
§14.5.	$m_1^{(r)} \leq \dots \leq m_N^{(r)}$	r -экспоненты алгебры Ли $\mathfrak{g}$
§14.6.		дифференциальный оператор
		вертексный оператор
		главная вертекс-операторная конструкция
		главная реализация алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$
	E_+	последовательность положительных экспонент алгебры Ли $\mathfrak{g}(A)$
§14.8.	$\Gamma^\theta(z)$	вертексные операторы для $\mathfrak{g}(A)$
		однородная вертекс-операторная конструкция
	$\Gamma_\alpha(z)$	вертексный оператор
§14.9.	$i_1 \wedge i_2 \wedge \dots$	полубесконечный моном
	F	фермионное пространство Фока
	$ m\rangle$	заряд
	Par	вакуумный вектор заряда m
		множество всех разбиений
		энергия
	ψ_j	оператор вклинивания
	ψ_j^*	оператор сокращения
	$\text{Cl } V$	клиффордова алгебра
		спинорный модуль
	r (соотв. R или $\hat{r}$)	бесконечное клин-представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}_\infty$ (соотв. GL_∞ или $\mathfrak{a}_\infty$)
	$\bar{e} \in \bar{\mathfrak{a}}_\infty$	циклический элемент
	$s \subset \mathfrak{a}_\infty$	главная подалгебра
§14.10.	α_n	свободные бозоны
	B	бозонное пространство Фока

	$S_\lambda(x)$	полином Шура
	σ	бозонно-фермионное соответствие
	$\Gamma_+(z)$ и $\Gamma_-(z)$	
	$\Gamma(z_1, z_2)$	вертексный оператор для a_∞
§14.11.	$\Omega_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \otimes \psi_j^*$	
	$P(D)f \cdot g$	билинейное уравнение Хироты
		КП-иерархия
	$\frac{3}{4}u_{yy} = (u_t - \frac{3}{2}uu_x - \frac{1}{y}u_{xxx})_x$	уравнение Кадомцева — Петвиашвили
		N -солитонное решение КП-иерархии
§14.12.	L^{high}	старшая компонента $L(\Lambda) \otimes L(\Lambda)$
	L^{low}	ортогональное дополнение к L^{high}
	G	группа, порожденная $\exp te_i, \exp tf_i$
	$\mathcal{V}_\Lambda$	G -орбита старшего вектора v_Λ
	$\hat{\mathcal{V}}_\Lambda$	формальное пополнение орбиты $\mathcal{V}_\Lambda$
	$Hir = \bigoplus_j H_j$	пространство полиномов Хироты
		τ -функция
§14.13.	$u_t = \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}$	уравнение Кортевега — де Фриза
		КдФ-иерархия
	$ig_t = -g_{xx} \pm 2 g ^2g$	нелинейное уравнение Шрёдингера
		НЛШ-иерархия
§14.14.	D_m	операторы Вирасоро
	ϕ_i	нейтральные фермионы
	Cl_B	
	λ_n	нейтральные бозоны
	σ_B	бозонно-фермионное соответствие
		типа В
		ВКР-иерархия
	Σ_∞	группа финитных перестановок
		множества $\mathbb{Z}$
		разложения Брюа и Биркгофа
	$S_{b/b'}(x)$	косые полиномы Шура
	$Gr_{n,k}$	грассманиан
		соотношения Плюккера
	Gr, Gr_k	бесконечные грассманианы
		МКР-иерархия

$\mathcal{F}$	бесконечное многообразие флагов
$Z(u, v)$	преобразование Миуры
Ψ	алгебры псевдодифференциальных операторов
$w(x, z)$	волновая функция
L	уравнение Сато
	уравнение Захарова — Шабата
	решетка Toda
$A \sim B$	соизмеримые подпространства
$\dim A - \dim B$	относительная размерность
$\text{End}(V, A)$	
$gl(V, A)$	
$GL(V, A)$ и $GL(V, A)^0$	
$\text{End}_{\text{fin}} A$	
$\widetilde{\text{End}}(V, A)$	
$GL_{\text{fin}}(A)$	
$\widetilde{GL}(V, A)$ и $\widetilde{GL}(V, A)^0$	
$\overline{A}_{\infty}^0$	
$H^0(D)$ и $H^1(D)$	
V_X	адели на алгебраической кривой X

Abe, E., Morita, J. [1988] Some Tits systems with affine Weyl groups in Chevalley groups over Dedekind domains, preprint.

Abe, E., Takeuchi, M. [1989] Groups associated with some types of infinite-dimensional Lie algebras, preprint.

Adler, M., Moser, J. [1978] On a class of polynomials connected with the Korteweg — de Vries equation, *Comm. Math. Phys.* 61 (1978), 1–30.

Adler, M., van Moerbeke, P. [1980A] Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves, *Advances in Math.* 38 (1980), 267–317.

[1980B] Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory, *Advances in Math.* 38 (1980), 318–379.

[1982] Kowalevsky's asymptotic method, Kac — Moody Lie algebras and regularization, *Comm. Math. Phys.* 83 (1982), 83–106.

[1989] The Toda lattice, Dynkin diagrams, singularities and abelian varieties, preprint.

Alvares-Gaumé, L., Bost, J.-B., Moore, G., Nelson, P., Vafa, C. [1987] Bosonization on higher genus Riemann surfaces, *Comm. Math. Phys.* 112 (1987), 503–552.

Andersen, H. H. [1985] Schubert varieties and Demazure's character formula, *Invent. Math.* 79(1985), 611–618.

Andrews, G. E. [1976] The theory of partitions, "Encyclopedia of Math.", vol. 2, 1976. [Имеется перевод: Эндриус Г. Теория разбиений. — М.: Наука, 1982.]

[1984] Hecke modular forms and the Kac — Peterson identities, *Trans. Amer. Math. Soc.* 283 (1984), 451–458.

[1986] q -series: their development and application in analysis, number theory, combinatorics, physics, and computer algebra, *Regional Conf. Ser. in Math.* 66, AMS, 1986.

Anick, D. [1983] The smallest Ω -irrational CW-complex, *J. Pure Applied Algebra* 28 (1983), 213–222.

Arabia, A. [1986] Cohomologie T-équivariante de G/B pour un groupe G de Kac — Moody, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 302, Série I, No. 17* (1986).

Arbarello, E., De Concini, C. [1987] Another proof of a conjecture of S. P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces, *Duke Math. J.* 54 (1987), 163–178.

¹ При переводе работы, первоначально опубликованные на русском языке, вынесены в отдельный список в конце списка литературы.

Arbarello, E., De Concini, C., Kac, V. G., Procesi C. [1988] Moduli spaces of curves and representation theory, *Comm. Math. Phys.* 117 (1988), 1–36.

Arbarello, E., De Concini, C., Kac, V. G. [1989] The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves, *Proceedings of the 1987 conference in Maine, Proc. Symposia in Pure Math.* 49, 1989, 171–190.

Arcuri, R. C., Gomes, J. F., Olive, D. I. [1987] Conformal subalgebras and symmetric spaces, *Nucl. Phys.* B285 (1987), 327–339.

Atiyah, M. F., Pressley, A. N. [1983] Convexity and loop groups, in: *Arithmetic and Geometry, Progress in Math* 36, 33–64, Birkhäuser, Boston, 1983.

Bais, F. A., Bouwknegt P. G. [1987] A classification of subgroup truncations of the bosonic string, *Nucl. Phys.* B279.

Bais, F. A., Bouwknegt, P., Schoutens, K., Surridge, M. [1988A] Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac — Moody algebras using higher order Casimir invariants, *Nucl. Phys.* B304 (1988) 348–370.

[1988B] Coset construction for extended Virasoro algebras, *Nucl. Phys.* B304 (1988), 371–391.

Bardaki, K., Halpern, M. [1971] New dual quark models, *Phys. Rev.* D3 (1971), 2493–2506.

Bausch, J., Rousseau, G. [1989] Algebres de Kac — Moody affine (automorphismes et formes reelles), *Institut E. Cartan* 11, 1989.

Beilinson, A., Bernstein, I. N. [1981] Localization de g -modules, *C. R. Acad. Sci. Paris* 292 (1981), 15–18.

Beilinson, A. A., Manin Yu. I., Schechtman, V. V., [1987] Sheaves of Virasoro and Neveu — Schwarz algebras, *Lecture Notes Math.* 1289, Springer-Verlag, 1987, 52–66.

Beilinson, A. A., Schechtman, V. V. [1988] Determinant bundles and Virasoro algebra, preprint.

Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Zamolodchikov, A. B. [1984A] Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions, *J. Stat. Phys.* 34, (1984), 763–774.

[1984B] Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys.* B241 (1984), 333–380.

Benoist, Y. [1986] n -coinvariants des g -modules n -localement nilpotents, preprint.

Berman, S. [1976] On derivations of Lie algebras, *Canad. J. Math.* 27 (1976), 174–180.

[1989] On generators and relations for certain involutory subalgebras of Kac — Moody Lie algebras, *Comm. Alg.* 17(12) (1989), 3165–3185.

Berman, S., Lee, Y. S., Moody, R. V. [1989] The spectrum of a Coxeter transformation, affine Coxeter transformations, and the defect map, *J. Algebra* 121 (1989), 339–357.

Berman, S., Pianzola, A. [1987] Generators and relations for real forms of some Kac — Moody Lie algebras, *Comm. Alg.* 15(5) (1987), 935–959.

Berman, S., Moody, R. V. [1979] Multiplicities in Lie algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 76 (1979), 223–228.

Bernard, D. [1987] String characters from Kac — Moody automorphisms, *Nuclear Phys.* B288 (1987), 628–648.

[1988] On the Wess — Zumino — Witten models on the torus, *Nucl. Phys.* B303 (1988), 77–93.

[1989] Towards generalized Macdonald's identities, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World. Sci., 1989, 467–482.

Bernard, D., Felder, G. [1989] Fock representation and BRST cohomology in $SL(2)$ current algebra, preprint.

Bernard, D., Thierry-Mieg, J. [1987A] Bosonic Kac — Moody string theories, *Phys. Letters B*, 185 (1987), 65–72.

[1987B] Level one representation of the simple affine Kac — Moody algebras in their homogeneous gradations, *Comm. Math. Phys.* 111 (1987), 181–246.

Bernstein, I. N., Gelfand, I. M., Gelfand, S. I. [1975] Differential operators on the basic affine space and a study of γ -modules, Lie groups and their representations. Summer school of the Bolyai János Math. Soc., Gelfand, I. M. (ed.), pp. 21–64. New York: Division of Wiley and Sons, Halsted Press, 1975.

Bershadsky, M., Ooguri, H. [1989] Hidden $SL(n)$ symmetry in conformal field theories, preprint.

Bien, F. [1989] Global representations of the diffeomorphism group of the circle, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Sci., 1989, 89–107.

Bilal, A., Gervais, J.-L. [1989] Conformal theories with nonlinearly extended Virasoro symmetries and Lie algebra classification, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Sci., 1989, 483–526.

Borcherds, R. [1986] Vertex algebras, Kac — Moody algebras, and the Monster, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 83(1986), 3068–3071.

[1988A] Generalized Kac — Moody algebras, *J. Algebra*, 115 (1988), 501–512.

[1988B] Vertex algebras I, preprint.

[1989A] Central extensions of generalized Kac — Moody algebras, *J. Algebra*.

[1989B] The Monster Lie algebra, preprint.

Borcherds, R. E., Conway, J. H., Queen, L., Sloane, N. J. A. [1984] A Monster Lie algebra? *Advances in Math.* 53 (1984), 75–79.

Bott, R. [1977] On the characteristic classes of groups of diffeomorphisms, *Enseign. Math.* (1977), 23, 3–4, 209–220.

Bourbaki, N. [1968] Groupes et algèbres de Lie, Ch. 4-6, Hermann, Paris, 1968. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, гл. IV-VI. — М.: Мир, 1972.]

[1975] Groupes et algèbres de Lie, Ch. 7-8, Hermann, Paris, 1975. [Имеется перевод: Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, гл. VII, VIII. — М.: Мир, 1978.]

Bouwknegt, P. [1989] Extended Conformal Algebras from Kac — Moody Algebras, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci. 1989, 527-555.

Bowick, M. J., Rajeer, S. R. [1987] String theory as the Kähler geometry of loop space, Phys. Rev. Lett. 58 (1987), 535-538.

Boyer, R. P. [1980] Representation theory of the Hilbert — Lie group $U(H)_2$, Duke Math. J. 47 (1980), 325-344.

[1988] Representation theory of $U_1(H)$, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 97-104.

[1989] Representation theory of $U(\infty)$, Proc. of Symposia in Pure Math.

Brylinski, J.-L. [1988] Representations of loop groups, Dirac operators on loop space and modular forms, preprint.

[1989] Loop groups and noncommutative theta functions, preprint.

Brylinski, J.-L., Kashiwara, M. [1981] Kazhdan — Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math. 64 (1981), 387-410.

Cappelli, A., Itzykson, C., Zuber, J. B. [1987A] Modular invariant partition functions in two dimensions, Nucl. Phys. B280(1987), 445-460.

[1987B] The $A-D-E$ classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories, Comm. Math. Phys. 113 (1987), 1-26.

Cardy, J. [1986] Operator content of two-dimensional conformally invariant theories, Nucl. Phys. B270 (1986), 186-204.

Carey, A. L., Palmer, J. [1985] Infinite complex spin groups, preprint.

Carey, A. L., Rijsenaars, S. N. M. [1987] On fermion gauge groups, current algebras, and Kac — Moody algebras, Acta Applicandas Math. 10 (1987), 1-86.

Casian, L. [1989] Formules de multiplicité de Kazhdan — Lusztig dans le case de Kac — Moody, preprint.

Chari, V. [1985] Annihilators of the Verma modules of Kac — Moody Lie algebras, Invent. Math. 81 (1985), 47-58

[1986] Integrable representations of affine Lie algebras, Invent. Math. 85 (1986), 317-335.

Chari, V., Pangovan, S. [1984] On the Harish-Chandra homomorphism for infinite-dimensional Lie algebras, J. Algebra 90 (1984), 476-490.

Chari, V., Pressley, A. N. [1986] New unitary representations of loop groups, Math. Ann. 275 (1986), 87-104.

[1987] A new family of irreducible, integrable modules for affine Lie algebras, Math. Ann. 277 (1987), 543-562.

[1988A] Integrable representations of twisted affine Lie algebras, *J. Algebra* 113 (1988), 438–464.

[1988B] Unitary representations of the Virasoro algebra and a conjecture of Kac, preprint.

[1989] Integrable Representations of Kac — Moody Algebras: Results and Open Problems, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci. 1989, 3–24.

Chau, L.-L. [1983] Chiral fields, self-dual Yang — Mills fields as integrable systems and the role of Kac — Moody algebra, Brookhaven Lab., preprint.

Chevalley, C. [1948] Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leur représentations, *C. R.*, 227 (1948), 1136–1138.

[1951] Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, *Math. Surveys* 6, AMS, New York, 1951.

Chodos, A., Thorn, C. [1974] Making the massless string massive, *Nucl. Phys.* B72(1974), 509–522.

Coleman, A. J. [1958] The Betti numbers of the simple Lie groups, *Can. J. Math.* 10 (1958), 349–356.

[1989] Killing and the Coxeter transformation of Kac–Moody algebras, *Invent. Math.* 95 (1989), 447–477.

Coleman, A. J., Howard, M. [1989] Root multiplication for general Kac — Moody algebras, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 11 (1989), 15–18.

Coley, R. [1983] On subalgebras of finite codimension in affine Lie algebras, MIT, preprint.

Conway, J. H. [1983] The automorphism group of the 26-dimensional even unimodular Lorentzian lattice, *J. Algebra* 80 (1983), 159–163.

Conway, J. H., Norton, S. P. [1979] Monstrous moonshine, *Bull. London Math. Soc.*, 11 (1979), 308–339.

Dadok, J., Kac, V. G. [1985] Polar representations, *J. Algebra*, 92 (1985), 504–524.

Date, E., Jimbo, M., Kashiwara, M., Miwa, T. [1981] Operator approach to the Kadomtsev — Petviashvili equation. Transformation groups for soliton equations III, *J. Phys. Soc. Japan*, 50 (1981), 3806–3812.

[1982A] A new hierarchy of soliton equations of KP-type. Transformation groups for soliton equations IV, *Physics* 4D (1982), 343–365.

[1982B] Transformation groups for soliton equations. Euclidean Lie algebras and reduction of the KP hierarchy, *Publ. RIMS, Kyoto University*, 18 (1982), 1077–1110.

[1983A] Transformation groups for soliton equations, in *Proceedings of RIMS symposium* (ed. M. Jimbo, T. Miwa), 39–120, World Sci., 1983.

[1983B] Landau — Lifshitz equation: solitons, quasi-periodic solutions and infinite-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A.: Math. gen.* 16 (1983), 221–236.

Date, E., Jimbo, M., Miwa, T. [1983] Method for generating discrete soliton equations III, J. Phys. Soc. Japan 52 (1983), 388–393.

Date, E., Jimbo, M., Kuniba, A., Miwa, T., Okada, M. [1987] Exactly solvable SOS models: Local height probabilities and theta function identities, Nucl. Phys. B290 [FS20] (1987), 231–273.

[1988] Exactly solvable SOS models. II: Proof of the star-triangle relation and combinatorial identities. Adv. Stud. Pure Math. 16, Kinokuniya-Academic, 1988.

[1989A] Path space realization of the basic representation of $A_n^{(1)}$, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 108–123.

[1989B] Chemins, diagrammes de Maya et représentations de $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, (1989), 129–132.

[1989 C] Paths, Maya diagrams and representations of $\hat{\mathfrak{sl}}(r, \mathbb{C})$, Adv. Stud. Pure Math. 19.

[1989D] One-dimensional configuration sums in vertex models and affine Lie algebra characters, Lett. Math. Phys. 17 (1989), 69–77.

De Concini, C., Kac, V. G., Kahdan, D. A. [1989] Boson-fermion correspondence over $\mathbb{Z}$, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys., World Sci., 1989, 124–137.

Demazure, M. [1974] Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Ann. Sci. Ec. Nort. Sup. 7 (1974), 53–88.

Deodhar, V. V. [1982] On the root system of a Coxeter group, Commun. in Algebra 10 (6) (1982), 611–630.

Deodhar, V. V., Gabber, O., Kac, V. G. [1982] Structure of some categories of representations of infinite-dimensional Lie algebras, Advances in Math. 45 (1982) 92–116.

Deodhar, V. V., Kumarasan, S. [1986] A finiteness theorem for affine Lie algebras, J. Algebra 103 (1986), 403–426.

Distler, J., Qiu, Z. [1989] BRS cohomology and Feigin — Fuchs representation of Kac — Moody and parafermionic theories, preprint.

Dixmier, J. [1974] Algèbres enveloppantes, Paris: Gauthier-Villars, 1974. [Имеется перевод: Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.]

Dolan, L. [1984] Kac — Moody algebras and exact solvability in hadronic physics, Physics Reports 109 (1984), 1–94.

[1985] Why Kac — Moody algebras are interesting in physics, in: Lectures in Applied Math. 21, 1985, 307–324.

Dolan, L., Duff, M. J. [1984] Kac — Moody symmetries in Kaluza — Klein theories, Phys. Rev. Lett. 52 (1984), 14–20.

Drinfeld, V. G. [1986] Quantum groups, ICM proceedings, Berkeley, 1987, 798–820. [Имеется расширенный вариант доклада автора: Дринфельд В. Г. Квантовые группы. — В сб.: Дифф. геометрия, группы

Ли и механика, VIII. Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 155, с. 18–49. — Л.: Наука, 1986.]

Dotsenko, V. S., Fateev, V. A. [1984] Conformal algebra and multipoint correlation function in 2D statistical models, Nucl. Phys. B240 (1984), 312–348.

Dyson, F. [1972] Missed opportunities, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 635–652.

Eichler, M. [1966] Introduction to the theory of algebraic numbers and functions, Academic Press, New York, 1966.

Fateev, V. A., Lukyanov, S. L. [1988] The models of two-dimensional conformal quantum field theory with $\mathbb{Z}_n$ symmetry, Int. J. Mod. Phys. A3 (1988), 507–520.

Fateev, V. A., Zamolodchikov, A. B. [1987] Conformal quantum field theory models in two dimensions having $\mathbb{Z}_3$ symmetry, Nucl. Phys. B280 (1987), 644–660.

Feigin, B. L., Fuchs, D. B. [1984A] Representations of the Virasoro algebra, preprint.

[1984B] Verma modules over the Virasoro algebra, in: Lecture Notes in Math. 1060, Springer-Verlag, 1984, 230–245.

[1989] Cohomology of some nilpotent subalgebras of the Virasoro and Kac — Moody Lie algebras, preprint.

Feigin, B. L., Frenkel, E. V. [1989A] Representations of affine Kac — Moody algebras and bosonization, preprint.

[1989B] Representations of affine Kac — Moody algebras, bosonisation and resolutions, preprint.

[1989C] Affine Kac — Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, preprint.

Feigin, B. L., Tsygan, B. L. [1988] Riemann — Roch theorem and Lie algebra cohomology, preprint.

Feingold, A. J. [1980] A hyperbolic GCM Lie algebra and the Fibonacci numbers, Proc. Amer. Math. Soc., 80 (1980), 379–385.

Feingold, A. J., Frenkel, I. B. [1983] A hyperbolic Kac — Moody algebra and the theory of Siegel modular forms of genus 2, Math. Ann. 263 (1983), 87–144.

[1985] Classical affine algebras, Advances in Math. 56 (1985), 117–172.

Feingold, A. J., Lepowsky, J. [1978] The Weyl — Kac character formula and power series identities, Adv. Math. 29 (1978), 271–309.

Felder, G. [1989] BRST approach to minimal models, Nucl. Phys. B317 (1989), 215–236.

Felder, G., Fröhlich, J., Keller, G. [1989] On the structure of unitary conformal field theory. I. Existence of conformal blocks, ETH preprint.

Felder, G., Gawedzki, K., Kupiainen, A. [1988] Spectra of Wess — Zumino — Witten models with arbitrary simple groups, Commun. Math. Phys. 117 (1988), 127–158.

Fialowski, A. [1984] Deformations of nilpotent Kac — Moody algebras, *Studia Sci. Math. Hung.* 19 (1984).

Freed, D. S. [1985] Flag manifolds and Kaehler geometry, in: *Infinite-dimensional groups with applications*, MSRI publ. 4, Springer-Verlag, 1985, 83–124.

Frenkel, I. B. [1981] Two constructions of affine Lie algebra representations and boson-fermion correspondence in quantum field theory, *J. Funct. Analysis* 44 (1981), 259–327.

[1982] Representations of affine Lie algebras, Hecke modular forms and Korteweg — de Vries type equations, in: *Lecture Notes in Math.* 933, Springer-Verlag 1982, 71–110.

[1984] Orbital theory for affine Lie algebras, *Invent. Math.* 77 (1984), 301–352.

[1985] Representations of Kac — Moody algebras and dual resonance models, in: *Lectures in Applied Math.* 21, 1985, 325–354.

[1986] Beyond affine Lie algebras, *ICM Berkeley*, 1986, 821–839.

Frenkel, I. B., Garland, H., Zuckerman, G. J. [1986] Semi-infinite cohomology and string theory, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 83 (1986), 8442–8448.

Frenkel, I. B., Jing, N. [1988] Vertex representations of quantum affine algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci., USA* 85 (1988), 9373–9377.

Frenkel, I. B., Kac, V. G. [1980] Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models, *Invent. Math.* 62 (1980), 23–66.

Frenkel, I. B., Lepowsky, J., Meurman, A. [1984] A natural representation of the Fischer — Griess Monster with the modular function J as character, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 81 (1984), 3256–3260.

[1989] Vertex operator algebras and the Monster, *Academic Press*, 1989.

Friedan, D., Martinec, E., Shenker, S. [1986] Conformal invariance, supersymmetry and string theory, *Nucl. Phys.* B271 (1986), 93–130.

Friedan, D., Qiu, Z., Shenker, S. [1985] Conformal invariance, unitarity, and two-dimensional critical exponents, *MSRI publ.* 3, Springer-Verlag, 1985, 419–449.

[1986] Details of the non-unitarity proof, *Comm. Math. Phys.* 107 (1986), 535–542.

Friedan, D., Shenker, S. [1987] The analytic geometry of two-dimensional conformal field theory, *Nucl. Phys.* B281, (1987), 509–545.

Furlan, F., Sotkov, G. M., Todorov, I. T. [1988] Two-dimensional conformal quantum field theory, *Rivista del Nuovo Cimento*.

Gabber, O., Kac, V. G. [1981] On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 5 (1981), 185–189.

Garland, H. [1975] Dedekind's η -function and the cohomology of infinite-dimensional Lie algebras, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 72 (1975), 2493–2495.

[1978] The arithmetic theory of loop algebras, *J. Algebra* 53 (1978), 480–551.

[1980] The arithmetic theory of loop groups, Publ. Math. IHES 52 (1980), 5–136.

Garland, H., Lepowsky, J. [1976] Lie algebra homology and the Macdonald — Kac formulas, Invent. Math. 34 (1976), 37–76.

Garland, H., Raghunathan, M. S. [1975] A Bruhat decomposition for the loop space of a compact group: a new approach to results of Bott, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 72 (1975), 4716–4717.

Gawedzki, K. [1987] Topological actions in two-dimensional quantum field theories, IHES preprint.

[1988] Conformal field theory, IHES preprint.

[1989] Wess — Zumino — Witten conformal field theory, IHES preprint.

Gawedzki, K., Kupianen, A. [1988] G/H conformal field theory from gauged WZW model, IHES preprint.

[1989] Coset construction from functional integrals, Helsinki preprint.

Gepner, D. [1987A] New conformal field theories associated with Lie algebras and their partition functions, Nucl. Phys. B290 (1987), 10–24.

[1987B] On the spectrum of 2D-conformal field theories, Nucl. Phys. B287 (1987), 111–130.

Gepner, D., Witten, E. [1986] String theory on group manifold, Nucl. Phys. B278 (1986), 493–549.

Ginsparg, P. [1988] Applied conformal field theory, Les Houches 1988.

Goddard, P. [1989] Meromorphic conformal field theory, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 556–587.

Goddard, P., Kent, A., Olive, D. [1985] Virasoro algebras and coset space models, Phys. Lett. B 152 (1985), 88–93.

[1986] Unitary representations of the Virasoro and Super-Virasoro algebras, Comm. Math. Phys. 103 (1986), 105–119.

Goddard, P., Nahm, W., Olive, D. [1985] Symmetric spaces, Sugawara's energy momentum tensor in two dimensions and free fermions, Phys. Lett. B 160 (1985), 111–116.

Goddard, P., Nahm, W., Olive, D., Schwimmer, A. [1986] Vertex operators for non-simply-laced algebras, Comm. Math. Phys. 107 (1986), 179–212.

Goddard, P., Olive, D. [1985 A] Algebras, lattices and strings, MSRI publ. 3, 1985, 51–96.

[1985B] Kac — Moody algebras, conformal symmetry and critical exponents, Nucl. Phys. B257 (1985), 226–250.

[1986] Kac — Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics, Int. J. Mod. Phys. A1 (1986), 303–414.

Goddard, P., Olive, D., Waterson, G., Superalgebras, symplectic bosons and the Sugawara construction, Comm. Math. Phys. 112, (1987), 591–611.

Goodman, R., Wallach, N. [1984A] Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle, *J. für reine und angewandte Math.* 347 (1984), 69–133.

[1984B] Classical and quantum mechanical systems of Toda-lattice type, *Comm. Math. Phys.* 84 (1984), 177–217.

[1985] Projective unitary positive-energy representations of $\text{Diff}(S^1)$, *J. Funct. Analysis* (1985).

Green, M. B., Schwarz, J. H. [1984] Anomaly cancellations in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and superstring theory, *Phys. Lett.* 149B, 117–125.

Green, M. B., Schwarz, J. H., Witten, E. [1987] *Superstring theory*, Cambridge University Press, 1987. [Имеется перевод: Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн, тт. 1, 2. — М.: Мир, 1990.]

Griess, R. [1982] The Friendly Giant, *Invent. Math.* 69 (1982), 1–102.

Gross, D. J., Harvey, J. A., Martinec, E., Rohm, R. [1985A] The heterotic string, *Phys. Rev. Lett.* 54 (1985), 502–505.

[1985B] Heterotic string theory I. The free heterotic string, *Nucl. Phys.* B256 (1985), 253–300.

[1986] Heterotic string theory II. The interacting heterotic string, *Nucl. Phys.* B267 (1985), 75–100.

Guillemin, V. W. [1968] A Jordan — Hölder decomposition for a certain class of infinite-dimensional Lie algebras, *J. Diff. Geom.* 2 (1968), 313–345.

[1970] Infinite-dimensional primitive Lie algebras, *J. Diff. Geom.* 4 (1970), 257–282.

Guillemin, V. W., Kostant, B., Sternberg, S. [1988] Jesse Douglas's solution to the Plateau problem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*

Guillemin, V. W., Quillen, D., Sternberg, S. [1966] The classification of the complex primitive infinite pseudogroups, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 55 (1966), 687–690.

Guillemin, V. W., Sternberg, S. [1964] An algebraic model of transitive differential geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 70 (1964), 16–47.

Haddad Z. [1984] Infinite-dimensional flag varieties, *Dissertation MIT*, 1984.

Haefliger, A. [1976] Sur la cohomologie de l'algèbre de Lie de champs de vecteurs, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 9 (1976), 503–532.

Harish-Chandra [1951] On some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), 28–96.

de la Harpe, P. [1972] Classical Banach — Lie algebras and Banach — Lie groups of operators on Hilbert space, *Lecture Notes in Math.* 285, Springer-Verlag, 1972.

Hayashi, T. [1988] Sugawara operators and Kac — Kazhdan conjecture, *Invent. Math.* 94 (1988), 13–52.

Hawkins, T. [1982] Wilhelm Killing and the structure of Lie algebras, *Archive for history of exact sciences*, 26 (1982), 127–192.

Helgason, S. [1978] Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, 1978. [Имеется перевод первого издания: Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.]

Hiller, H. [1982] Geometry of Coxeter groups, Pitman, Boston, 1982.

Hiramatsu, T. [1988] Theory of automorphic forms of weight 1, Adv. Ser. in Pure Math. 13 (1988), 503–584.

Hasegawa, K. [1988] Dual pairs of spinors, preprint.

Hoegh-Kron, R., Torresani, B. [1986] Classification and construction of quasisimple Lie algebras, preprint.

Humphreys, J. E. [1972] Introduction to Lie algebras and representation theory, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1972.

Imbens, H.-J. [1989] Drinfeld — Sokolov hierarchies and τ -functions, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 352–368.

Itzykson, C., Zuber, J.-B. [1986] Two-dimensional conformal invariant theories on a torus, Nucl. Phys. B275 (1986), 580–600.

Iwahori N., Matsumoto H. [1965] On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups, Publ. Math. IHES 25 (1965), 5–48.

Jacobson, N. [1962] Lie algebras, Interscience, New York, 1962. [Имеется перевод: Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.]

Jakobsen, H. P., Kac, V. G. [1985] A new class of unitarizable highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, in: Non-linear equations in field theory, Lecture Notes in Physics 226, Springer-Verlag, 1985, 1–20. II. J. Funct. Anal. 82 (1989), 69–90.

Jantzen, J. C. [1979] Moduln mit einem höchsten Gewicht, Lecture Notes in Math. 750, Springer-Verlag, 1979.

[1983] Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983.

Jimbo, M. [1985] A q -difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang — Baxter equation, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 63–69.

Jimbo, M., Miwa, T. [1983] Solitons and infinite-dimensional Lie algebras, Publ. RIMS 19 (1983), 943–1001.

[1984] Irreducible decomposition of fundamental modules for $A_\ell^{(1)}$ and $C_\ell^{(1)}$, and Hecke modular forms, Adv. Stud. Pure Math. 4 (1984), 97–119.

[1985] On a duality of branching rules for affine Lie algebras, Adv. Stud. Pure Math. 6 (1985), 17–65.

Jimbo, M., Miwa, T., Okado, M. [1986] Solvable lattice models with broken $\mathbb{Z}_N$ -symmetry and Hecke's indefinite modular forms, Nucl. Phys. B 275 (1986), 517–545.

[1987A] Solvable lattice models whose states are dominant integral weights of $A_{n-1}^{(1)}$. Lett. Math. Phys. 14 (1987), 123–131.

[1987B] An $A_{n-1}^{(1)}$ family of solvable lattice models. *Mod. Phys. Lett. B1* (1987), 73–79.

[1988A] Local state probabilities of solvable lattice models. An $A_{n-1}^{(1)}$ family, preprint RIMS 594, Kyoto Univ., Nucl. Phys. B300 [FS22] (1988), 74–108.

[1988B] Symmetric tensors of the $A_{n-1}^{(1)}$ family, in: *Algebraic analysis*, Academic Press, 1988.

Julia, B. [1982] Gravity, supergravity and integrable systems, ENS preprint.

[1983] Infinite-dimensional groups acting on (super)-gravity phase spaces, ENS preprint.

[1985] Kac — Moody symmetry of gravitation and supergravity theories, in: *Lectures in Applied Math.* 21, 1985, 355–374.

Kac, V. G. [1977] Lie superalgebras, *Advances in Math.* 26, No. 1 (1977), 8–96.

[1978A] Infinite-dimensional algebras, Dedekind's η -function, classical Möbius function and the very strange formula, *Advances in Math.* 30 (1978), 85–136.

[1978B] Highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, in *Proceeding of ICM*, 299–304, Helsinki, 1978.

[1979] Contravariant form for infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, in: *Lecture Notes in Physics* 94, Springer-Verlag, 1979, 441–445.

[1980A] Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* 56 (1980), 57–92.

[1980B] An elucidation of "Infinite-dimensional algebras... and the very strange formula." $E_8^{(1)}$ and the cube root of the modular invariant j , *Advances in Math.* 35 (1980), 264–273.

[1980C] On simplicity of certain infinite-dimensional Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 2 (1980), 311–314.

[1980D] Some remarks on nilpotent orbits, *J. Algebra* 64 (1980), 190–213.

[1980E] A remark on the Conway — Norton conjecture about the "Monster" simple group, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 77 (1980), 5048–5049.

[1981] Simple Lie groups and the Legendre symbol, in: *Lecture Notes in Math.* 848, Springer-Verlag 1981, 110–124.

[1982A] Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II, *J. Algebra* 78 (1982), 141–162.

[1982B] Some problems on infinite-dimensional Lie algebras and their representations, in: *Lecture Notes in Math.* 933, Springer-Verlag, 1982, 117–126.

[1983] Montecatini lectures on invariant theory, in: *Lecture Notes in Math.* 996, Springer-Verlag, 1983, 74–108.

[1984] Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 81 (1984), 645–647.

[1985A] Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of algebraic groups, *Invent. Math.* 80 (1985), 69–79.

[1985B] Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras, in: *Infinite-dimensional groups with applications*, MSRI publ. 4, Springer-Verlag, 1985, 167–216.

[1986] Highest weight representations of conformal current algebras, *Symposium on Topological and Geometrical methods in Field theory*, Espoo, Finland, 1986. World Sci., 1986, 3–16.

[1988] Modular invariance in mathematics and physics, *Address at the centennial of the AMS*, 1988.

Kac, V. G., Kazhdan, D. A. [1979] Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras, *Advances in Math.* 34 (1979), 97–108.

Kac, V. G., Kazhdan, D. A., Lepowsky, J., Wilson, R. L. [1981] Realization of the basic representation of the Euclidean Lie algebras, *Advances in Math.* 42 (1981), 83–112.

Kac, V. G., van de Leur, J. [1987] Super boson-fermion correspondence, *Ann. de L'Institut Fourier*, 37 (1987), 99–137.

[1989A] Super boson-fermion correspondence of type B, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Sci., 1989, 369–406.

[1989B] On classification of superconformal algebras, in: *Strings 88*, World Sci., 1989, 77–106.

Kac, V. G., Moody, R. V., Wakimoto, M. [1988] On E_{10} , *Proceedings of the 1987 conference on differential-geometrical methods in physics*, Kluwer, 1988, 109–128.

Kac, V. G., Peterson, D. H. [1980] Affine Lie algebras and Hecke modular forms, *Bull. Amer. Math. Soc.* 3 (1980), 1057–1061.

[1981] Spin and wedge representations of infinite-dimensional Lie algebras and groups, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 78 (1981), 3308–3312.

[1983] Regular functions on certain infinite-dimensional groups, in: *Arithmetic and Geometry*, 141–166, *Progress in Math.* 36, Birkhäuser, Boston, 1983.

[1984A] Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms, *Advances in Math.* 53 (1984), 125–264.

[1984B] Unitary structure in representations of infinite-dimensional groups and a convexity theorem, *Invent. Math.* 76 (1984), 1–14.

[1985A] Defining relations of certain infinite-dimensional groups, in: *Proceedings of the Cartan conference*, Lyon 1984, *Astérisque*, 1985, *Numero hors serie*, 165–208.

[1985B] Generalized invariants of groups generated by reflections, in: *Proceedings of the Conference Giornate di Geometria*, Rome 1984. *Progress in Math.* 60, Birkhäuser, 1985, 231–250.

[1985C] 112 constructions of the basic representation of the loop group of E_8 , Proceedings of the conference "Anomalies, geometry, topology" Argonne, 1985. World Sci., 1985, 276-298.

[1986] Lectures on the infinite wedge representation and the MKP hierarchy, seminaire de Math. Superieures, Les Presses de L'Université de Montréal, 102 (1986), 141-186.

[1987] On geometric invariant theory for infinite-dimensional groups, in: Lecture Notes in Math. 1271, 1987, 109-142.

Kac, V. G., Popov, V. L., Vinberg, E. B. [1976] Sur les groupes linear algebriques dont l'algebre des invariants est libre, C. R. Acad. Sci. Paris, 283 (1976), 875-978.

Kac, V. G., Raina, A. K. [1987] Bombay lectures on highest weight representations, World Sci., Singapore, 1987.

Kac, V. G., Todorov, I. T. [1985] Superconformal current algebras and their unitary representations, Comm. Math. Phys., 102 (1985), 337-347.

Kac, V. G., Wakimoto, M. [1986] Unitarizable highest weight representations of the Virasoro, Neveu-Schwartz and Ramond algebras, in: Proceedings of the Symposium on conformal groups and structures, Clausal, 1985. Lecture Notes in Physics 261 (1986), 345-372.

[1988A] Modular and conformal invariance constraints in representation theory of affine algebras, Advances in Math. 70 (1988), 156-234.

[1988B] Modular invariant representations of infinite-dimensional Lie algebras and superalgebras, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 85 (1988), 4956-4960.

[1989A] Exceptional hierarchies of soliton equations, Proceedings of the 1987 conference on theta functions in Maine, Proc. Symposia in Pure Math. 49, 1989, 191-237.

[1989B] Classification of modular invariant representations of affine algebras, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 138-177.

Kaplansky, I., Santharoubane, L.-J. [1985] Harish-Chandra modules over the Virasoro algebra, in: Infinite-dimensional groups with applications, MSRI series, Springer-Verlag, 1985, 217-232.

Kashiwara, M. [1989] Kazhdan — Lusztig conjecture for symmetrizable Kac — Moody Lie algebra, preprint.

Kashiwara, M., Tanisaki T. [1989] Kazhdan — Lusztig conjecture for symmetrizable Kac — Moody Lie algebra. II. Intersection cohomologies of Schubert varieties, Progress in Math. 92, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 159-196.

Kassel, C. [1984] Kaehler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra, J. Pure Applied Algebra 34 (1984), 265-275.

Kawamoto, N., Namikawa, Y., Tsuchiya, A., Yamada, Y. [1988] Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, Comm. Math. Phys. 116 (1988), 247-308.

Kazhdan, D. A., Lusztig, G. [1979] Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, *Invent. Math.* 53 (1979), 165–184.

[1980] Schubert varieties and Poincaré duality, *Proc. Symp. in Pure Math. of AMS*, 36 (1980), 185–203.

[1988] Fixed point varieties on affine flag manifolds, *Israel J. Math.* 62 (1988), 129–168.

Kirillov, A. A. [1982] Infinite-dimensional Lie groups, their orbits, invariants and representations. The geometry of moments, in: *Lecture Notes in Math.* 970, Springer-Verlag, 1982, 101–123.

Kirillov, A. N., Reshetikhin, N. Yu. [1989] Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 285–339.

Knizhnik, V. G., Zamolodchikov, A. B. [1984] Current algebra and Wess — Zumino model in two dimensions, *Nucl. Phys.* B247 (1984), 83–103.

Knizhnik, V. G., Polyakov, A. M., Zamolodchikov, A. B. [1988] Fractal structure in 2D quantum gravity, *Mod. Phys. Lett.* A3 (1988), 819–826.

Knopp, M. [1970] *Modular functions in analytic number theory*, Markham Publishing Co., Chicago, 1970.

Kostant, B. [1959] The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group, *Amer. J. Math.* 81 (1959), 973–1032.

[1976] On Macdonald's η -function formula, the Laplacian and generalized exponents, *Advances in Math.* 20 (1976), 179–212.

[1985] The McKay correspondence, the Coxeter element and representation theory, *Asterisque*, hors series, 1985, 209–255.

Kostant, B., Kumar, S. [1986] The nil Hecke ring and cohomology of G/B for a Kac — Moody group G , *Advances in Math.* 62 (1986), 187–237.

[1987] T -equivariant K -theory of generalized flag varieties, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 84 (1987), 4351–4354.

Kostant, B., Sternberg, S. [1987] Symplectic reduction, BRS cohomology and infinite-dimensional Clifford algebras, *Ann. of Physics* 176 (1987), 49–113.

[1988] The Schwartzian derivative and hyperbolic geometry, *Lett. Math. Phys.*

Ku, J.-M. [1987A] The Jantzen filtration of a certain class of verma modules, *Proc. Amer. Math. Soc.* 99 (1987), 35–40.

[1987B] Local submodules and the multiplicities of irreducible subquotients in category $\mathcal{O}$, *J. Algebra* 106 (1987), 403–412.

[1988A] On the uniqueness of embeddings of Verma modules defined by the Shapovalov form, *J. Algebra* 118 (1988), 85–101.

[1988B] Structure of the Verma module $M(-\rho)$ over Euclidean Lie algebras, *J. Algebra*.

[1988C] Relative version of Weyl — Kac character formula, *J. Algebra*.

[1989A] The structure of Verma modules over the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Trans. Amer. Math. Soc.

[1989B] Projection principle in Verma modules, Trans. Amer. Math. Soc.

Kumar, S. [1984] Geometry of Schubert cells and cohomology of Kac — Moody Lie algebras, J. Diff. Geometry 20 (1984), 389–431.

[1985] Rational homotopy theory of flag varieties associated to Kac — Moody groups, in Infinite-dimensional groups with applications, MSRI publ. 4, Springer-Verlag, 1985.

[1986A] A homology vanishing theorem for Kac — Moody algebras with coefficients in the category $\mathcal{O}$, J. Algebra 102 (1986), 444–462.

[1986B] Non-representability of cohomology classes by bi-invariant forms (gauge and Kac — Moody groups), Comm. Math. Phys. 106 (1986), 177–181.

[1987A] Demazure character formula in arbitrary Kac — Moody setting, Invent. Math. 89 (1987), 395–423.

[1987B] Extension of the category $\mathcal{O}^g$ and a vanishing theorem for the Ext function for Kac — Moody algebras, J. Algebra 108 (1987), 472–491.

[1988] A connection of equivariant K -theory with the singularity of Schubert varieties, preprint.

[1989] Existence of certain components in the tensor product of two integrable highest weight modules for Kac — Moody algebras, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 25–38.

Kupershmidt, B. A. [1984] Isotopic Lie algebras and matrix Lax equations, Algebras, Groups and Geometries 1 (1984), 144–153.

Lakshmibai, V., [1989] Schubert varieties in $\widehat{SL}_n$, preprint.

Lakshmibai, V., Seshadri, C. S. [1989] Standard monomial theory for $\widehat{SL}_2$, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 178–234.

Langlands [1988] On unitary representations of the Virasoro algebra, in: Infinite-dimensional Lie algebras and their applications, World Sci., 1988, 141–159.

Lepowsky, J. [1978] Lie algebras and combinatorics, in: Proceedings of ICM, Helsinki 1978.

[1979] Generalized Verma modules, loop space cohomology and Macdonald-type identities, Ann. Sci. École Norm. Sup. 12 (1979), 169–234.

[1985] Calculus of twisted vertex operators, Proc. Natl. Acad. Sci. USA.

Lepowsky, J., Milne, S. [1978] Lie algebraic approaches to classical partition identities, Advances in Math. 29 (1978), 15–59.

Lepowsky, J., Moody, R. V. [1979] Hyperbolic Lie algebras and quasi-regular cusps on Hilbert modular surfaces, Math. Ann. 245 (1979), 63–88.

Lepowsky, J., Primc, M. [1985] Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, Contemporary Math. 46, AMS, Providence, 1985.

Lepowsky, J., Wilson, R. L. [1978] Construction of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Comm. Math. Phys.* 62 (1978), 43–53.

[1981] A new family of algebras underlying the Rogers — Ramanujan identities and generalizations, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* (1981), 7254–7258.

[1982] A Lie theoretic interpretation and proof of the Rogers–Ramanujan identities, *Advances in Math.* 45 (1982), 21–72.

[1984] The structure of standard modules, I: Universal algebras and the Rogers — Ramanujan identities, *Invent. Math.* 77 (1984), 199–290. II. The case $A_1^{(1)}$, principal gradation, *Invent. Math.* 79 (1985), 417–442.

Lerche, W., Schellerens, A. N. Warner, N. P. [1989] Lattices and strings, *Phys. Reports* 177 (1989), 1–140.

Levstein, F. [1988] A classification of involutive automorphisms of an affine Kac — Moody Lie algebra, *J. Algebra* 114 (1988), 489–518.

Leznov, A. N., Saveliev, M. V. [1983] Two-dimensional exactly and completely integrable dynamical systems, *Comm. Math. Phys.* 89 (1983), 59–75.

Li, S.-P., Moody, R. V., Nicolescu, M., Patera, J. [1986] Verma bases for representations of classical simple Lie algebras, *J. Math. Phys.* 27 (1986), 668–677.

Looijenga, E. [1976] Root systems and elliptic curves, *Invent. Math.* 38 (1976), 17–32.

[1980] Invariant theory for generalized root systems, *Invent. Math.* 61 (1980), 1–32.

Lusztig, G. [1983] Singularities, character formulas and a q -analog of weight multiplicities, *Astérisque*, 101–102 (1983), 208–239.

[1984] Cells in affine Weyl groups, *Proc. of International Symposium on algebraic groups*, Katata, Japan, 1984.

[1988] Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, *Adv. Math.* 70 (1988) 237–249.

[1989A] Modular representations and quantum groups, *Contemporary Math.* 82 (1989), 59–77.

[1989B] On quantum groups, preprint.

[1989C] Quantum groups at roots of 1, preprint.

Lu, S.-R. [1989A] Explicit equations of the KP and MKP hierarchies, *Proc. Symposia in Pure Math.* 49, 1989, 101–105.

[1989B] On modular invariant partition functions in non-unitary theories, *Phys. Lett. B* 218 (1989) 46–50.

[1989C] Some results on modular invariant representations, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Sci., 1989, 235–253.

Macdonald, I. G. [1972] Affine root systems and Dedekind's η -function, *Invent. Math.* 15 (1972), 91–143. [Имеется перевод: Макдональд И. Г.]

Аффинные системы корней и η -функция Дедекинда. — Математика, т. 16, вып. 4, 1972, с. 3–49.]

[1979] Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford University Press, 1979. [Имеется перевод: Макдональд И. Симметрические функции и многочлены Холла. — М.: Мир, 1985.]

Mandelstam, S. [1974] Dual resonance models, Physics Rep. 13 (1974), 259–353.

[1975] Soliton operators for the quantized Sine — Gordon equation, Phys. Rev. D 11 (1975), 3026–3030.

Marcuson, R. [1975] Tits' system in generalized non-adjoint Chevalley groups, J. Algebra 34 (1975), 84–96.

Mathieu, O. [1986A] Sur un problème de V. G. Kac: La classification de certain algèbres de Lie graduées simples, J. Algebra 102 (1986), 505–536.

[1986B] Classification des algèbres de Lie graduées simples de croissance ≤ 1 , Invent. Math. 86 (1986), 371–426.

[1986C] Formule de Demazure — Weil et theoreme de Borel — Weil — Bott pour les algèbres de Kac — Moody générales, C. R. Acad. Sci. Paris 303 (1986), 391–394.

[1987] Classes canonique de variétés de Schubert et algèbres affine, C. R. Acad. Sci. Paris 305 (1987), 105–108.

[1988] Formules de caractères pour les algèbres de Kac — Moody générales, Astérisque 159–160, 1988.

[1989A] Construction d'un groupe de Kac — Moody et applications, Compositio Math. 69 (1989), 37–60.

[1989B] Frobenius action on the B -cohomology, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 39–51.

[1990A] Classification of simple graded Lie algebras of finite growth, preprint.

[1990B] Classification of Harish-Chandra modules over the Virasoro Lie algebra, preprint.

Mathur, S. D., Mukhi, S., Sen, A. [1988] On the classification of rational conformal field theories, Phys. Lett. B 213 (1988), 303–308.

Meurman, A. [1982] Characters of rank two hyperbolic Lie algebras as functions at quasiregular cusps, J. Algebra 76 (1982), 494–504.

Meurman, A., Primc, M. [1987] Annihilating ideals of standard modules of $sl(2, \mathbb{C})^\sim$ and combinational identities, Advances in Math., 64 (1987), 177–240.

Mickelsson, J. [1985] Representations of Kac — Moody algebras by step algebras, J. Math. Phys. 26 (1985), 377–382.

[1987] Kac — Moody groups, topology of the Dirac determinant bundle and fermionization, Comm. Math. Phys. 110 (1987), 173–183.

[1989] Current algebra in 3 + 1 space-time dimensions, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 254–272.

Mickelsson, J., Rajeev, S. [1988] Current algebras in $d + 1$ dimensions and determinant bundles over infinite-dimensional Grassmannians, *Comm. Math. Phys.* 116 (1988), 365–390.

Mikhailov, A. V., Olshanetsky, M. A., Perelomov, A. M. [1981] Two-dimensional generalized Toda lattice, *Comm. Math. Phys.* 79 (1981), 473–488.

Misra, K. C. [1984A] Structure of certain modules for $A_n^{(1)}$ and the Rogers — Ramanujan identities, *J. Algebra* 88 (1984), 196–227.

[1984B] Structure of some standard modules for $C_n^{(1)}$, *J. Algebra* 90 (1984), 385–409.

[1987] Basic representations of some affine Lie algebras and generalized Euler identities, *J. Austral. Math. Soc. (Ser. A)* 42 (1987), 296–311.

[1989A] Realization of the level two standard $sl(2k + 1, \mathbb{C})^{\sim}$ -modules, preprint.

[1989B] Realization of the level one standard $\tilde{C}_{2k+1}$ -modules, preprint.

Mitchell, S. A. [1987] A Bott filtration on a loop group, Seattle preprint.

[1988] Quillen's theorem on buildings and the loops on a symmetric space, *L'Enseignement Math.* 34 (1988), 123–166.

Mitzman, D. [1985] Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras, *Contemporary Math.* 40, 1985.

Moody, R. V. [1967] Lie algebras associated with generalized Cartan matrices, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 217–221.

[1968] A new class of Lie algebras, *J. Algebra* 10 (1968), 211–230.

[1969] Euclidean Lie algebras, *Canad. J. Math.* 21 (1969), 1432–1454.

[1975] Macdonald identities and Euclidean Lie Algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 48 (1975), 43–52.

[1979] Root systems of hyperbolic type, *Advances in Math.* 33 (1979), 144–160.

[1982] A simplicity theorem for Chevalley groups defined by generalized Cartan matrices, preprint.

Moody, R. V., Pianzola, A. [1988] On infinite root systems, preprint.

Moody, R. V., Teo, K. L. [1972] Tits systems with crystallographic Weyl groups, *J. Algebra* 21 (1972), 178–190.

Moody, R. V., Yokonuma, T. [1982] Root systems and Cartan matrices, *Canad. J. Math.* 34 (1982), 63–79.

Moore, G., Seiberg, N. [1988] Polynomial equations for conformal field theories, *Phys. Lett.* 212B (1988), 451–460

[1989] Classical and quantum conformal field theory, Princeton preprint.

Moreno, C. J., Rocha-Caridi, A. [1987] Rademacher-type formulas for the multiplicities of irreducible highest weight representations of affine Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* 16 (1987), 292–296

Morita, J. [1979] Tits' systems in Chevalley groups over Laurent polynomial rings, *Tsukuba Math. J.* 3 (1979), 41–51.

[1984] Conjugacy classes of three-dimensional simple Lie subalgebras of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, University of Tsukuba, preprint.

[1987] Commutator relations in Kac — Moody groups, Proc. Japan Acad. 63A (1987), 21–22.

Morita, J., Rehman, U. [1989A] Symplectic K_2 of Laurent polynomials, associated Kac — Moody groups and Witt rings, preprint.

[1989B] A Matsumoto type theorem for Kac — Moody groups, preprint.

Morita, J., Wakimoto, M. [1987] A Lie algebraic approach to the Diophantine equation $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = y^2$ ($n \leq 9$), Jap. J. Math. 13 (1987), 163–167.

Mulase, M. [1984] Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties, J. Diff. Geometry 19 (1984), 403–430.

[1989] Infinite-dimensional Grassmannians, vector bundles on curves and commuting differential operators, preprint.

Mumford, D. [1983] Tata lectures on theta I, Progress in Math. 28, Birkhäuser, Boston, 1983.

[1984] Tata lectures on theta II, Progress in Math. 43, Birkhäuser, Boston, 1984.

Okamoto, K., Sakurai, T. [1982A] On a certain class of irreducible unitary representations of the infinite-dimensional rotation group II, Hiroshima Math. J. 13 (1982).

[1982B] An analogue of Peter — Weyl theorem for the infinite-dimensional unitary group, Hiroshima Math. J. 12 (1982), 529–542.

Paunov, R. R., Todorov, I. T. [1989] Local extensions of the $U(1)$ current algebra and their positive energy representations, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 588–604.

Peterson, D. H. [1982] Affine Lie algebras and theta functions, in Lecture Notes in Math. 933, Springer-Verlag 1982, 166–175.

[1983] Freudenthal-type formulas for root and weight multiplicities, preprint.

Peterson, D. H., Kac, V. G. [1983] Infinite flag varieties and conjugacy theorems, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 80 (1983), 1778–1782.

Pickrell, D. [1987] Measures on infinite-dimensional Grassmann manifolds, J. Funct. Anal. 70 (1987), 323–356.

Post, G. F. [1986A] Pure Lie algebraic approach to the modified KdV equation, J. Math. Phys. 27 (1986), 678–681.

[1986B] Lie algebraic approach to τ -functions and its equations, Lett. Math. Phys. 11 (1986), 253–257.

[1987] On the τ -functions of $A_2^{(2)}$, J. Math. Phys. 28 (1987), 1691–1696.

Pressley, A. N. [1980] Decompositions of the space of loops on a Lie group, Topology 19 (1980), 65–79.

Pressley, A. N., Segal, G. B. [1986] Loop groups and their representations, Oxford University Press, 1985. [Имеется перевод: Прессли Э., Сигал Г. Группы петель. — М.: Мир, 1990.]

Previato, E., Wilson, G. [1989] Vector bundles over curves and solutions of the KP equations, preprint.

Primc, M. [1989] Standard representations of $A_n^{(1)}$, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., Singapore, 1989, pp. 273–284.

Reiman, A. G., Semenov-Tjan-Shanskii, M. A. [1979] Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations, Invent. Math. 54 (1979), 81–100.

[1981] Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations II, Invent. Math. 63 (1981), 423–432.

Ringel, C. M. [1989] Hall algebras and quantum groups, preprint.

Rocha, A., Wallach, N. R. [1982] Projective modules over graded Lie algebras, Math. Z. 180 (1982), 151–177.

[1983A] Highest weight modules over graded Lie algebras: Resolutions, filtrations and character formulas, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), 133–162.

[1983B] Characters of irreducible representations of the Lie algebra of vector fields on the circle, Invent. Math. 72 (1983), 57–75.

Rousseau, G. [1989] Almost split K -forms of Kac — Moody algebras, in: Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys. 7, World Sci., 1989, 70–88.

Saito, K. [1985] Extended affine root systems I (Coxeter transformations), Publ. RIMS, 21 (1985), 75–179.

[1988] Extended affine root systems II (Flat invariants), RIMS-633, preprint.

Sato, M. [1981] Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifolds, RIMS Kokyuroku 439 (1981) 30–46.

Schellekens, A. N., Warner, N. P. [1986] Conformal subalgebras of Kac — Moody algebras, Phys. Rev. D 34 (1986), 3092–4010.

[1987] Anomalies, characters and strings, Nucl. Phys. B 287 (1987), 317–340.

Schoenberg, B. [1973] Elliptic modular forms, Springer-Verlag, 1973.

Schoefeld, A. H. [1988A] Subspaces in general position of a vector space, preprint.

[1988B] The internal structure of real Schur representations, preprint.

[1988C] Generic representations of quivers, preprint.

Schwarz, J. H. [1973] Dual resonance theory, Physics Rep. 8 (1973), 269–335.

[1982] Superstring theory, Physics Rep. 83 (1982), 223–322.

[1989] Superconformal symmetry and superstring compactification, preprint.

Segal, G. [1981] Unitary representations of some infinite-dimensional groups, *Comm. Math. Phys.* 80 (1981), 301–342.

[1988] The definition of conformal field theory, in: *Differential geometrical methods in theoretical physics*, Kluwer Acad. Publ., 1988, 165–172.

Segal, G., Wilson, G. [1985] Loop groups and equations of KdV type, *Publ. IHES* 61 (1985), 5–65. [Имеется перевод: Сигал Г., Вильсон Дж. Группы петель и уравнения типа КдФ. — В кн.: Прессли Э., Сигал Г. Группы петель. — М.: Мир, 1990.]

Seligman, G. B. [1986] Kac — Moody modules and generalized Clifford algebras, *Proc. Canad. Math. Soc. Summer Meeting*, 1986.

Sen, C. [1984] The homology of Kac — Moody Lie algebras with coefficients in a generalized Verma module, *J. Algebra* 90 (1984), 10–17.

Serre, J.-P. [1966] *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, New York and Amsterdam, 1966. [Имеется перевод: В кн.: Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.]

[1970] *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970. [Имеется перевод предыдущего издания: Серр Ж.-П. Курс арифметики. — М.: Мир, 1972.]

Shiota T. [1986] Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, *Invent. Math.* 83 (1986), 332–382.

[1989] Prym varieties and soliton equations, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups*, *Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Sci., 1989, 407–448.

Shue, J. R. [1960] Hilbert space methods in the theory of Lie algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95 (1960), 69–80.

[1961] Cartan decomposition for L^* algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 (1961), 333–349.

Singer, I. M., Sternberg, S. [1965] On infinite groups of Lie and Cartan, *J. Analyse Math.* 15 (1965), 1–114.

Skyrme, T. H. R. [1971] Kinks and the Dirac equation, *J. Math. Phys.* 12 (1971), 1735–1743.

Slodowy, P. [1981] Chevalley groups over $\mathbb{C}((t))$ and deformations of simply elliptic singularities, *RIMS Kokyuroku* 415, 19–38, Kyoto University, 1981.

[1985A] A character approach to Looijenga's invariant theory for generalized root systems, *Compositio Math.* 55 (1985), 3–32.

[1985B] An adjoint quotient for certain groups attached to Kac — Moody algebras, in: *Infinite-dimensional groups with applications*, MSRI publ. 4, Springer-Verlag, 1985, 307–334.

[1986A] Beyond Kac — Moody algebras, and inside, *Canadian Math. Soc. Conference Proc.* 5 (1986), 361–371.

[1986B] On the geometry of Schubert varieties attached to Kac — Moody Lie algebras, *Canadian Math. Soc. Conference Proc.* 6 (1986), 405–442.

Stanley, R. [1980] Unimodal sequences arising from Lie algebras, in: Young day proceedings, Marcel Dekker, 1980, 127–136.

Steinberg, R. [1965] Regular elements of semisimple algebraic groups, Publ. IHES 25 (1965), 281–377.

[1967] Lecture on Chevalley groups, Yale University, 1967.

Stratila, S. [1982] Some representations of $U(\infty)$, Proc. Symp. in Pure Math. 38 (1982) 515–520.

Sugawara, H. [1968] A field theory of currents, Phys. Rev. 176 (1968), 2019–2025.

Takasaki, K. [1983] A new approach to self-dual Yang — Mills equations, RIMS-459, preprint.

Tate, J. [1968] Residues of differentials on curves, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 1 (1968), 149–159.

Taubes, C. H. [1988] S^1 actions and elliptic genera, Harvard preprint.

ten Kroode, A. D. E., Bergvelt, M. J. [1986] The homogeneous realization of the basic representation of $A_1^{(1)}$ and the Toda lattice, Lett. Math. Phys. 12 (1986), 139–147.

Thierry-Mieg J. T. [1985] Remarks concerning the $E_8 \times E_8$ and D_{16} string theories, Phys. Lett. 156B (1985), 199–202.

[1986] Anomaly cancellation and fermionization in 10, 18 and 26 dimension, preprint.

[1987] BRS analysis of Zamolodchikov's spin 2 and 3 current algebra, preprint.

Tits, J. [1981] Résumé de cours, Annuaire du Collège de France 1980–81, Collège de France, Paris, 75–87.

[1982] Résumé de cours, Annuaire du Collège de France 1981–82, Collège de France, Paris, 91–106.

[1985] Groups and group functors attached to Kac — Moody data, in Lecture Notes in Math. 1111, Springer-Verlag, 1985.

[1987] Uniqueness and presentation of Kac — Moody groups over fields, J. Algebra 105 (1987), 542–573.

Thorn, C. B. [1984] Computing the Kac determinant using dual model techniques and more about the no-ghost theorem, Nucl. Phys. B 248 (1984), 551–569.

Todorov, I. T. [1985] Current algebra approach to conformal invariant two-dimensional models, Phys. Lett. 153B (1985), 77–81.

[1988] Finite temperature 2-dimensional QFT models of conformal current algebra, in: Infinite-dimensional Lie algebras and quantum field theory, World Sci., 1988, 97–123.

Tsuchiya, A., Kanie, Y. [1986A] Fock representations of the Virasoro algebra. Intertwining operators, Nagoya University, Publ. RIMS, Kyoto University, 22 (1986) 259–327.

[1986B] Unitary representations of the Virasoro algebra, Duke Math. J. 53 (1986), 1013–1046.

[1987] Unitary representations of the Virasoro algebra and branching law of representations of affine Lie algebras, preprint.

[1988] Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid group, Adv. Stud. Pure Math. 16 (1988), 297–372.

Tsuchiya, A., Ueno, K., Yamada, Y. [1989] Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, Adv. Stud. Pure Math. 19 (1989), 495–595.

Ueno, K. [1983] Infinite-dimensional Lie algebras acting on chiral fields and the Riemann-Hilbert problem, Publ. RIMS, Kyoto University 19 (1983), 59–82.

Ueno, K., Nakamura, Y. [1983] Infinite-dimensional Lie algebras and transformation theories for non-linear field equations, in: Proceedings on non-linear integrable systems (ed. Jimbo, M. and Miwa, T.), World Sci., 1983, 241–272.

Ueno, K., Takasaki, K. [1984] Toda lattice hierarchy, Adv. Studies in Pure Math. (1984).

Ueno, K., Yamada, H. [1986] A supersymmetric extension of non-linear integrable systems, in: Topological and geometrical methods in field theory, World Sci., 1986, 59–72.

Vafa, C., Warner, N. P. [1989] Catastrophe theory and the classification of conformal theories, Phys. Lett. 218B (1989), 51–60.

Van Asch, A. [1976] Modular forms and root systems, Math. Ann. 222 (1976), 145–170.

Varadarajan, V. S. [1984] Lie groups, Lie algebras and their representations, Springer-Verlag, 1984.

Vergne, M. [1977] Seconde quantification et groupe symplectique, C. R. Acad. Sci. (Paris) 285A (1977), 191–194.

Verlinde, E. [1988] Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, Nucl. Phys. B 300 (1988), 360–375.

Verma, D.-N. [1968] Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 160–166.

Vershik, A. M., Gelfand, I. M., Graev, M. I. [1980] Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group, Compositio Math. 42 (1980), 217–243.

Vinberg E. B. [1975] Some arithmetical discrete groups in Lobachevskii spaces, in: “Discrete subgroups of Lie groups,” Oxford University Press, 1975, pp. 323–348.

Virasoro, M. A. [1970] Subsidiary conditions and ghosts in dual resonance models, Phys. Rev. D1 (1970), 2933–2936.

Wakimoto, M. [1983] Two formulae for specialized characters of Kac — Moody Lie algebras, Hiroshima University, preprint.

[1984A] Basic representations of extended affine Lie algebras, Hiroshima University, preprint.

[1984B] Virasoro algebras and highest weight modules of affine Lie algebras, Hiroshima University, preprint.

[1986] Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$, *Comm. Math. Phys.* 104 (1986), 605–609.

Wakimoto, M., Yamada, H. [1983] Irreducible decompositions of Fock representations of the Virasoro algebra, *Letters Math. Phys.* 7 (1983), 513–516.

Warner, N. P. [1989] Lectures on $N=2$ superconformal theories and singularity theory, MIT preprint.

Wilson, G. [1982] The affine Lie algebra $C_2^{(1)}$ and an equation of Hirota and Satsuma, *Phys. Lett. A*.

[1984] Habillage et fonctions τ , *C. R. Acad. Sci. Paris* 299 (1984), 587–590.

[1985A] Infinite-dimensional Lie groups and algebraic geometry in soliton theory, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 315 (1985), 393–404

[1985B] Algebraic curves and soliton equations, in: *Geometry to-day, Progress in Math.* 60, 1985, 303–329.

Witten, E. [1984] Non-abelian bosonization in two dimensions, *Comm. Math. Phys.* 92 (1984), 455–472.

[1986] Physics and geometry, *Proc. of ICM, Berkeley*, 1986.

[1989A] Quantum field theory, Grassmannians, and algebraic curves, *Commun. Math. Phys.* 113 (1988), 529–600.

[1988B] Coadjoint orbits of the Virasoro group, *Comm. Math. Phys.* 114 (1988), 1–53.

[1988C] Free fermions on an algebraic curve, in: *Proc. Symposia in Pure Math.* 48, 1988.

[1989A] Quantum field theory and the Jones polynomial, in: *Braid group, knot theory and statistical mechanics, Adv. Ser. in Math. Phys.* 9, World Sci., 1989, 239–329.

[1989B] Geometry and quantum field theory, Address at the centennial of the AMS, 1989.

[1989C] The central charge in three dimensions, preprint.

Yamada, H. [1985] The Virasoro algebra and the KP hierarchy, in: *Infinite-dimensional groups with applications*, MSRI series 4, Springer-Verlag, 1985, 371–380.

You, Y.-C. [1989] Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups, in: *Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Adv. Ser. in Math. Phys.* 7, World Sci., 1989, 449–466.

Zamolodchikov, A. B. [1984] Conformal bootstrap in two dimensions, preprint.

* * *

Вейлинсон А. А. [1980] Вычеты и адели. — Функц. анализ и его прил., т. 14, вып. 1, 1980, с. 44–45.

Белавин А. А., Дринфельд В. Г. [1982] О решениях классического уровня Янга — Бакстера для простых алгебр Ли. — Функц. анализ и его прил., т. 16, вып. 3, 1982, с. 1–29.

Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. [1971] Структура представлений, порожденных векторами старшего веса. — Функц. анализ и его прил., т. 5, вып. 1, 1971, с. 1–9.

[1976] Об одной категории $\mathfrak{g}$ -модулей. — Функц. анализ и его прил., т. 10, вып. 2, 1976, с. 1–8.

Бернштейн И. Н., Шварцман О. В. [1978] Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических кокстеровых групп. — Функц. анализ и его прил., т. 12, вып. 4, 1978, с. 79–80.

Бейсфейлер Б. Ю. [1968] Бесконечномерные фильтрованные алгебры Ли и их связь с градуированными алгебрами Ли. — Функц. анализ и его прил., т. 2, вып. 1, 1968, с. 94–95.

Вейсфейлер Б. Ю., Кац В. Г. [1971] Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики p . — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, 1971, с. 762–788.

Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И. [1973] Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций. — Успехи матем. наук, т. 28, вып. 5, 1973, с. 87–132.

[1975] Представления группы диффеоморфизмов. — Успехи матем. наук, т. 30, вып. 6, 1975, с. 3–50.

[1983] Коммутативная модель представлений группы токов $SL(2, R)^X$, связанная с унитарной подгруппой. — Функц. анализ и его прил., т. 17, вып. 2, 1983, с. 70–72.

Вершик А. М., Керов С. В. [1982] Характеры и факторпредставления бесконечномерной унитарной группы. — ДАН СССР, т. 267, 1982, с. 272–276.

Виленкин Н. Я. [1965] Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.

Винберг Э. Б. [1971] Дискретные линейные группы, порожденные отражениями. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, 1971, с. 1072–1112.

[1972] О группах единиц некоторых квадратичных форм. — Матем. сб., т. 87, 1972, с. 18–36.

[1976] Группа Вейля градуированной алгебры Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 40, 1976, с. 488–526.

[1985] Гиперболические группы отражений. — Успехи матем. наук, т. 40, вып. 1, 1985, с. 29–66.

Винберг Э. Б., Каплинская И. М. [1978] О группах $O_{18,1}(Z)$ и $O_{19,1}(Z)$. — ДАН СССР, т. 238, 1978, с. 1273–1275.

Винберг Э. Б., Кац В. Г. [1967] Квазиоднородные конусы. — Матем. заметки, т. 1, вып. 3, 1967, с. 347–354.

Гельфанд И. М., Фукс Д. Б. [1968] Когомологии алгебры Ли вектор-

ных полей на окружности. — Функц. анализ и его прил., т. 2, вып. 4, 1968, с. 92–93.

[1969] Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия. — Функц. анализ и его прил., т. 3, вып. 3, 1969, с. 32–52.

[1970A] Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия. II. — Функц. анализ и его прил., т. 4, вып. 2, 1970, с. 23–32.

[1970B] Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, 1970, с. 322–337.

Дринфельд В. Г. [1985] Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга — Бакстера. — ДАН СССР, т. 283, 1985, с. 1060–1064.

[1987] Новая реализация янгианов и квантованных аффинных алгебр. — ДАН СССР, т. 296, 1987, с. 13–17.

[1989] О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа. — Алгебра и анализ, т. 1, вып. 2, 1989, с. 30–46.

Дринфельд В. Г., Соколов В. В. [1981] Уравнения типа Кортвега — де Фриза и простые алгебры Ли. — ДАН СССР, т. 258, 1981, с. 11–16.

[1984] Алгебры Ли и уравнения типа Кортвега — де Фриза. — В сб.: ВИНТИ. Совр. пробл. матем., т. 24, 1984, с. 81–180.

Замолотчиков А. Б. [1985] Бесконечные дополнительные симметрии в двумерной конформной теории поля. — Теор. и матем. физика, т. 65, 1985, с. 347–359.

Зельманов Е. И. [1984] Алгебры Ли с конечной градуировкой. — Матем. сб., т. 124, 1984, с. 353–392.

Исмагилов Р. С. [1971] Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов окружности. — Функц. анализ и его прил., т. 5, вып. 3, 1971, с. 45–53.

[1975] Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. — Матем. сб., т. 98, 1975, с. 55–71.

[1976] Об унитарных представлениях группы $C_0^\infty(X, G)$, $G = SU_2$. — Матем. сб., т. 100, 1976, с. 117–131.

[1980] Вложение группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру, в полупрямое произведение и ее унитарные представления. — Матем. сб., т. 113, 1980, с. 81–97.

Кантор И. Л. [1968] О бесконечномерных простых градуированных алгебрах Ли. — ДАН СССР, т. 179, 1968, с. 534–537.

[1970] Градуированные алгебры Ли. — Труды сем. по вект. и тенз. анализу, т. 15, 1970, с. 227–266.

Кац В. Г. [1967] Простые градуированные алгебры Ли конечного роста. — Функц. анализ и его прил., т. 1, вып. 4, 1967, с. 82–83.

[1968A] Градуированные алгебры Ли и симметрические пространства. — Функц. анализ и его прил., т. 2, вып. 2, 1968, с. 93–94.

[1968B] Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 32, 1968, с. 1323–1367.

[1969A] Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли. — Функц. анализ и его прил., т. 3, вып. 3, 1969, с. 94–96.

[1969B] Алгебраическое определение компактных групп Ли. — Труды МИЭМ, т. 5, 1969, с. 36–47.

[1974] Бесконечномерные алгебры Ли и η -функция Дедекинда. — Функц. анализ и его прил., т. 8, вып. 1, 1974, с. 77–78.

[1975] К вопросу об описании пространства орбит линейных алгебраических групп. — Успехи матем. наук, т. 30, вып. 6, 1975, с. 173–174.

Кириладов А. А. [1973] Представления бесконечномерной унитарной группы. — ДАН СССР, т. 212, 1973, с. 288–290.

[1974A] Унитарные представления группы диффеоморфизмов и некоторых ее подгрупп. — Препринт ИПМ N 82. — М.: 1974.

[1974B] Представления некоторых бесконечномерных групп Ли. — Вестник МГУ, сер. матем., т. 29, вып. 1, 1974, с. 75–83.

[1987] Кэлерова структура на K -орбитах группы диффеоморфизмов окружности. — Функц. анализ и его прил., т. 21, вып. 2, 1987, с. 42–45.

Кириллов А. А., Юрьев Д. В. [1987] Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \text{Diff}_+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$. — Функц. анализ и его прил., т. 21, вып. 4, 1987, с. 35–46.

Концевич М. Л. [1987] Алгебра Вирасоро и пространства Тейхмюллера. — Функц. анализ и его прил., т. 21, вып. 21, 1987, с. 78–79.

Кричевер И. М., Новиков С. П. [1987A] Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов. — Функц. анализ и его прил., т. 21, вып. 2, 1987, с. 46–63.

[1987B] Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского. — Функц. анализ и его прил., т. 21, вып. 4, 1987, с. 47–61.

[1989] Алгебры типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях. — Функц. анализ и его прил., т. 23, вып. 1, 1989, с. 24–40.

Кулиш П. П., Решетихин Н. Ю. [1981] Квантовая линейная задача для уравнения синус-Гордон и высшие представления. — В сб.: Вопросы кв. теории поля и стат. физики. 2. Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 101, с. 101–110. — Л.: Наука, 1981.

Лезнов А. Н., Савельев М. В., Смирнов Ю. Ф. [1981] Теория представлений и интегрирование нелинейных динамических систем. — Теор. и матем. физика, т. 48, 1981, с. 3–12.

Маликов Ф. Г. [1989] Особые векторы в модулях Верма над аффинными алгебрами. — Функц. анализ и его прил., т. 23, вып. 1, 1989, с. 76–77.

Маликов Ф. Г., Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б. [1986] Особые векторы в модулях Верма над алгебрами Каца — Муди. — Функц. анализ и его прил., т. 20, вып. 2, 1986, с. 25–37.

Неретин Ю. А. [1983] Унитарные представления группы диффеоморфизмов окружности со старшим весом. — Функц. анализ и его прил., т. 17, вып. 3, 1983, с. 85–86.

[1987] О комплексной поделке, содержащей группу диффеоморфизмов окружности. — Функц. анализ и его прил., т. 21, вып. 2, 1987, с. 82–83.

Ольшанский Г. И. [1978] Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p, \infty)$, $SO_0(p, \infty)$, $Sp(p, \infty)$ и соответствующих групп движений. — Функц. анализ и его прил., т. 12, вып. 3, 1978, с. 32–44.

[1980] Конструкция унитарных представлений бесконечномерных классических групп. — ДАН СССР, т. 250, 1980, с. 284–288.

[1982] Сферические функции и характеры на группе $U(\infty)^X$. — Успехи матем. наук, т. 37, вып. 2, 1982, с. 217–218.

[1983] Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Р. Хау. — ДАН СССР, т. 269, 1983, с. 33–36.

Попов В. Л. [1976] Представления со свободным модулем ковариантов. — Функц. анализ и его прил., т. 10, вып. 3, 1976, с. 91–92.

Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р. [1971] Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, 1971, с. 530–572.

Решетихин Н. Ю. [1989] Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связей. — Алгебра и анализ, т. 1, вып. 2, 1989, с. 169–188.

Рудаков А. Н. [1969] Группы автоморфизмов бесконечномерных алгебр Ли. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, 1969, с. 748–764.

[1974] Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли картановского типа. — Изв. АН СССР, сер. матем., т. 38, 1974, с. 835–866.

[1975] Неприводимые представления бесконечномерных алгебр Ли типов S и H . — Изв. АН СССР, т. 39, 1975, с. 496–511.

Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. [1986] Гамильтонов подход в теории солитонов. — М.: Наука, 1986.

Фейгин В. Л. [1984] Полубесконечные гомологии алгебр Ли Каца — Муди и Вирасоро. — Успехи матем. наук, т. 39, вып. 2, 1984, с. 195–196.

Фейгин В. Л., Френкель Э. В. [1988] Семейство представлений аффинных алгебр Ли. — Успехи матем. наук, т. 43, вып. 5, 1988, с. 227–228.

Фейгин В. Л., Фукс Д. Б. [1982] Кососимметрические инвариантные дифференциальные операторы на прямой и модули Верма над алгеброй Вирасоро. — Функц. анализ и его прил., т. 16, вып. 2, 1982, с. 47–63.

[1983А] Операторы Казимира в модулях над алгеброй Вирасоро. — ДАН СССР, т. 269, 1983, с. 1057–1060.

[1983В] Модули Верма над алгеброй Вирасоро. — Функц. анализ и его прил., т. 17, вып. 3, 1983, с. 91–92.

Фейгин Б. Л., Цыган Б. Л. [1983] Когомологии алгебр Ли обобщенно-якобиевых матриц. — Функци. анализ и его прил., т. 17, вып. 2, 1983, с. 86–87.

Фукс Д. Б. [1984] Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. — М.: Наука, 1984.

Цыган Б. Л. [1983] Гомологии матричных алгебр над кольцами и гомологии Хохшильда. — Успехи матем. наук, т. 38, вып. 2, 1983, с. 217–218.

Чередник И. В. [1983А] Об определении τ -функций для обобщенных аффинных алгебр Ли. — Функци. анализ и его прил., т. 17, вып. 3, 1983, с. 93–95.

[1983В] О групповой интерпретации функций Бейкера и τ -функций. — Успехи матем. наук, т. 38, вып. 6, 1983, с. 133–134.

Шаповалов Н. Н. [1972] Об одной билинейной форме на универсальной обертывающей алгебре комплексной полупростой алгебры Ли. — Функци. анализ и его прил., т. 6, вып. 4, 1972, с. 65–70.

Шафаревич И. Р. [1981] О некоторых бесконечномерных группах II, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 45, 1981, с. 214–226.

Труды конференций и сборники статей

Jimbo, M., Miwa, T., eds., Non-linear integrable systems — classical theory and quantum theory (Proceedings of RIMS symposium in Kyoto, May 1981), World Sci. 1983.

Winter, D., ed., Lie algebras and related topics (Proceedings of the conference at Rutgers University, May 1981), Lecture Notes in Math 933, Springer-Verlag, 1982.

Lepowsky, J., Mandelstam, S., Singer, I. M., eds., Vertex operators in mathematics and physics (Proceedings of the conference at the MSRI, Berkeley CA, November 1983), MSRI publ. 3, Springer-Verlag, 1985.

Kac, V. G., ed., Infinite-dimensional groups with applications (Proceedings of the conference at the MSRI, Berkeley CA, May 1984), MSRI publ. 4, Springer-Verlag, 1985.

Britten, D. J., Lemire, F. M., Moody, R. V., eds., Lie algebras and related topics (Proceedings of a conference in Windsor, July 1984), CMS conference proceedings 5, Amer. Math. Soc., 1986.

Bardeen, W. A., White, A. R., eds., Symposium on anomalies, geometry, topology (Proceedings of the conference at Argonne National Laboratory, University of Chicago, March 1985), World Sci., 1985.

Hietarinta, J., Westerholm, J., eds., Topological and geometrical methods in field theory (Symposium in Espoo, Finland, June 1986), World Sci., 1986.

Kass, S. N., ed., Infinite-dimensional Lie algebras and their applications (Proceedings of the conference at Montreal University, May 1986), World Sci., 1988.

Yau, S. T., ed., Mathematical aspects of string theory (Proceedings of the conference at University of California, San Diego, July 1986), Adv. Ser. in Math. Phys. 1, World Sci., 1987.

Doebner, H. D., Hennig, J. D., Palev, T. D., eds., Infinite-dimensional Lie algebras and quantum field theory (Proceedings of the Varna summer school, 1987), World Sci., 1988.

Bleuler, K., Werner, M., eds., Differential geometrical methods in physics (Proceedings of a conference in Como, Italy, August 1987) Series C: 250, Kluwer Acad. Publ., 1988.

Goddard, P., Olive, D., eds., Kac-Moody and Virasoro algebras (a reprint volume for physicists) Adv. Ser. in Math. Phys. 3, World Sci., 1988.

Itzykson, C., Saleur, H., Zuber, J.-B., eds., Conformal invariance and applications to statistical mechanics, World Sci., 1988.

Gates, S. J., Preitschopf, C. R., Siegel, W., eds., Strings 88 (Proceedings of a conference at University of Maryland, May 1988), World Sci., 1989.

Kac, V. G., ed., *Infinite-dimensional Lie algebras and groups* (Proceedings of a conference in Lumini, Marseille, July 1988), *Adv. Ser. in Math. Physics* 7, World Sci., 1989.

Yang, C. N., Ge, M. L., eds., *Braid group, knot theory and statistical mechanics*, *Adv. Ser. in Math. Physics* 9, World Sci., 1989.

Gunning, R. C., Ehrenpries, L., eds., *Theta functions*, Bowdoin, 1987, *Proceedings of Symposia in Pure Math.* 49, Amer. Math. Soc., 1989.

Brezin, E., Zinn-Justin, J., eds., *Fields, strings and critical phenomena*, Les Houches XLIX, Elsevier Sci. Publ., 1989.