Х. Клеменс, Я. Коллар, С. Мори

Многомерная комплексная геометрия

Перевод с английского

В. В. Батырева

под редакцией

В. А. Исковских

МОСКВА «МИР» 1993

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода 5

Введение 8

Лекция 1. Нахождение рациоиальиых кривых в случае отрицательного K_X 15

Лекция 2. Нахождение рациоиальных кривых в случае неполуположительного K_X 24

Лекция 3. Классификация поверхностей 27

Лекция 4. Конус кривых в гладком случае 32

Лекция 5. Введение в программу Мори 40

Лекция 6. Особенности в программе миинмальиых моделей 53

Лекция 7. Расширеиные варианты программы миинмальных моделей 65

Лекция 8. Теоремы об обращении в нуль 70

Лекция 9. Схема доказательства теоремы о конусе 79

Лекция 10. Теорема о свободе от базисных точек 82

Лекция 11. Теорема о конусе 86

Лекция 12. Теорема о рациональности 90

Лекция 13. Теорема о необращенин в нуль 98

Лекция 14. Знакомство с флипами 102

Лекция 15. Особенности экстремальной окрестности 109

Лекция 16. Малые разрешения терминальных особенностей 119

Лекция 17. Кэлеровы структуры иа локально симметрических пространствах 124

Лекция 18. Доказательство теоремы Сэмпсона 129

Лекция 19. Абелевы подалгебры алгебр Ли 133

Лекция 20. Максимальиые вариации структур Ходжа 138

Лекция 21. Подмногообразия в общих гиперповерхностях 145
Лекция 22. Гипотезы о кривых на общей трехмерной квинтике 152
Лекция 23. Подмногообразия общих полных пересечений в грассманианах 159
Лекция 24. Теорема Грюсона—Лазарсфельда—Пескина и лемма Лазарсфельда 165
Литература 172

Дополнение. Структура трехмерных алгебраических многообразий: Введение в программу Мори. *Я. Коллар* 178
1. Введение 178
2. Что такое алгебраическая геометрия? 181
3. Немного сведений о кривых 200
4. Несколько примеров 210
5. Отображения между алгебраическими многообразиями 214
6. Топология алгебраических многообразий 225
7. Векторные расслоения и каноническое расслоение 230
8. Как понимать алгебраические многообразия 246
9. Бирациональная геометрия поверхностей 261
10. Программа Мори: гладкий случай 270
11. Программа Мори: случай многообразий с особенностями 282
12. Флип и флоп 293
13. Более тонкая структурная теория 305
Литература 311

ББК 22.135
К48
УДК 512.7

Клеменс Х., Коллар Я., Мори С.

К48 Многомерная комплексная геометрия: Пер. с англ. — М.: Мир, 1993. — 317 с., ил.

ISBN 5-03-002393-3

Книга написана известными американскими и японским (С. Мори) математиками. (Первый автор знаком нашим читателям по его книге «Мозаика теории комплексных кривых» — М.: Мир, 1984.) Она возникла из курса лекций на научном семинаре. В ней представлены: новые результаты в бирациональной классификации алгебраических многообразий размерности три и выше, проблема описания рациональных кривых, специальные метрики на многообразиях. Все эти темы подробно рассмотрены с историческим анализом их возникновения. Русское издание дополнено обзором Я. Коллара «Структура трехмерных алгебраических многообразий: Введение в программу Мори».

Для всех математиков, желающих глубоко познакомиться с методом многообразий алгебраической геометрии, для аспирантов и студентов университетов.

$К\frac{1602050000-043}{041(01)-93}$ 16—93 ББК 22.135

Редакция литературы по математическим наукам

ISBN 5-03-002393-3 (русск.)

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Содержание этой небольшой книжки концентрируется вокруг программы Мори минимальных моделей алгебраических многообразий. Эта программа зародилась в 1980 г., когда один из авторов книги Мори ввел несколько новых идей в бирациональную теорию многомерных алгебраических многообразий (см. [M1] в списке литературы). Вслед за этим М. Рид [R3] явно сформулировал программу минимальных моделей и начал изучение этнх моделей в размерности 3. С этого времени трехмерные алгебраические многообразия стали предметом исследования многих математиков, что привело к глубоким структуриым теоремам. В частности, Мори (см. [M3]) доказал одну из фундаментальных теорем — теорему существования минимальиых моделей в размерности 3. Отметим, что за цикл блестящих идей и результатов в этом направлении Мори был удостоен Филдсовской медали на Международном конгрессе математиков в Киото в 1990 г.

Предложенный Мори новый подход к бирациональной теории многомерных алгебраических многообразий удачно согласуется с классической бирациональной теорией алгебраических поверхностей, основанной на понятиях минимальной модели поверхности и канонической (или кодаировой) размерности. Иначе говоря, теория Мори в размерности 2 приводит к тем же классическим результатам, но уже с новой точки зрения. В размерности 3 и выше теория Мори доставляет первый шаг в структурной теории многомерных многообразий. Существенным отличием понятия минимальной модели от классического случая поверхностей является тот факт, что такие многомерные модели могут иметь особенности из некоторого допустимого класса, так называемые терминальные особенности. В связи с этим также вводятся и интенсивно изучаются более широкие классы особенностей: канонические и логтерминальные. Другое существенное отличие заключается в том, что для многообразий размерности $d \geq 3$ существуют бирациональные отображения, которые являются изоморфизмами вне коразмерности 2, но не являются изоморфизмами в целом. Это приводит к новым понятиям флопов и флипов (см. лекции 14—15 основной части и разд. 12 добавления).

Среди многих литературных источников, в которых обсуждается программа Мори (см. [Ko 4], [M1], [R3], [W], [KMM] и другие), для русского перевода выбраны записки семинара в Солт Лэйк Сити Клеменса, Коллара и Мори, опубликованные в Asterisque №166, и статья [Ko 4] в качестве дополнения[1).

Первая из этих работ написана ведущими специалистами в этой области (лидерами среди создателей новой теории трехмерных и многомерных многообразий). Она дает идейно отшлифованное, доступное широкому кругу математиков изложение основ программы Мори. Более того, она содержит некоторые упрощения по сравнению с наиболее полным трактатом [KMM], написанным для специалистов; в частности, теорема о конусе доказывается без использования относительного случая. Кроме теории Мори, составляющей основное содержание, в работе Клеменса, Коллара и Мори содержится также изложение двух других тем, обсуждавшихся на семинаре (см. об этом введение авторов). Вторая из этих тем, особенно лекция 22 о рациональных кривых на трехмерной квинтике, представляет значительный интерес для математических физиков в связи с так называемой теорией зеркальной симметрии.

Статья Коллара [Ko 4] написана в виде популярного введения в программу Мори. Она не содержит доказательств трудных теорем, но приводимые примеры, разъяснения идей и наброски доказательств создают очень четкую картину построения новой структурной теории многомерных многообразий. Эта статья доступна для понимания студентам младших курсов и даже школь-

---

1) Недавняя работа В.В. Шокурова [Sh1*] является значительным вкладом в развитие этой проблематики.

никам с углубленным математическим циклом обучения. Математикам, не знакомым с основами алгебраической геометрии, также рекомендуется начинать изучение программы Мори именно с этой статьи. Она легка для чтения и увлекательна.

В целом предлагаемая книга является замечательным введением в одну из центральных областей алгебраической геометрии — классификацию алгебраических многообразий в новом современном ее понимании. Написанная крупными профессионалами с чутким уважительным отношением к читателю, книга будет полезна очень широкому кругу читателей, желающих познакомиться с новыми идеями и результатами современной алгебраической геометрии.

В. Исковских

ВВЕДЕНИЕ

Эта книга возникла как записки семинара, проводившегося в течение июля и августа 1987 года в городе Солт Лэйк Сити в Университете штата Юта (США). Первоначальная цель семинара заключалась в обсуждении следующих трех тем:

1. Недавние достижения в программе классификации трехмерных (и многомерных) многообразий.
2. Существование рациональных кривых и других специальных подмногообразий на алгебраических многообразиях.
3. Существование и свойства специальных метрик на многообразиях.

Мы также надеялись продвинуться дальше и изучить взаимосвязи между этими тремя темами, однако недостаток времени не позволил полностью охватить даже намеченные пункты программы семинара.

Первая часть этой программы была рассмотрена довольно подробно. Центральное место в ней занимает изучение многообразий, канонический класс которых не является численно эффективным. Для гладких трехмерных многообразий этого типа основные результаты получены Мори [M1]; в дальнейшем они были значительно развиты. Первоначальный подход в [M1] является геометрически очень прозрачным и потому излагается здесь довольно подробно. Столь же подробно обсуждаются и последующие его обобщения.

Значительное внимание уделено изучению специальных кривых на гиперповерхностях и рассмотрению нескольких связанных с этим примеров. Большой запас исследованных случаев указывает на то, что, по-видимому, существует очень тесная связь между размерностью Кодаиры трехмерного многообразия (как свойства многообразия в классификационной теории) и существованием рациональных кривых. Эти проблемы очень интересны, но они, кажется, и довольно трудны. Наш вклад в этом направлении ограничивается некоторыми примерами и гипотезами.

Одна из интересных задач, относящаяся ко второй теме, — разобраться с рациональными кривыми, лежащими на гиперповерхности пятой степени (квинтике) в $\mathbf{P}^4$. Оказалось, что даже изучение прямых представляет собой трудную проблему. Мы начали это более полно осознавать только после окончания семинара (см. [J]).

Совсем мало времени оставалось для обсуждения третьей темы. По этой теме была прочитана серия лекций, однако мы не смогли изложить эту важную и интересную тему во всех деталях.

По своему стилю семинар был весьма неформальным. Мы старались поддерживать на нем дискуссионно-проблемную ориентацию. Лекции записывались Клеменсом и отпечатывались к каждому следующему дню. Они составили первый вариант настоящего текста. В течение семинара и после него эти записки были значительно отредактированы, при этом некоторые части сократились, а другие расширились. Во время подготовки рукописи мы старались сохранить первоначальную неформальность стиля докладов.

Помимо трех авторов этих записок, постоянными участниками семинара были Дж. Джименез, Т. Луо и К. Мацуки. К работе нашего семинара в различное время подключались и другие математики. Надеемся, что следующий список охватывает всех участников: Дж. Карлсон, Л. Эйн, М. Хэ, И. Ма, Д. Ортлэнд, С. Пантазис, П. Робертс, Д. Толедо, С. Турнер и Стефан Яо — всем им мы очень благодарны за их вклад в успешную работу семинара.

В особенности мы благодарим тех участников, которые делали доклады. Ниже мы приводим список докладчиков (помимо трех авторов этой книги):

Дж. Карлсон. Максимальные вариации структур Ходжа.

Л. Эйн. Подмногообразия полных пересечений в грассманнах.

Л. Эйн. Теорема Грюсона—Лазарсфельда—Пескина и лемма Лазарсфельда.

К. Мацуки. Теорема о конусе.

К. Мацуки. Теорема о необращении в нуль.

Д. Толедо. Кэлеровы структуры на локально симметрических пространствах.

Д. Толедо. Доказательство теоремы Сэмпсона.

Д. Толедо. Абелевы подалгебры алгебр Ли.

На заключительном этапе редактирования рукописи некоторые доклады были исключены из нее. К этим докладам относятся следующие:

Х. Клеменс. Отображения Абеля—Якоби.

С. Турнер. Эллиптические поверхности в характеристике p.

С. Яо. Эйлерова характеристика многообразия Чжоу.

Эти доклады относятся к темам, для разработки которых нам не хватило времени, поэтому они не вошли в окончательный вариант рукописи.

Наша цель — сделать эти заметки достаточно содержательными, чтобы они были интересны для специалистов, и достаточно доступными, чтобы читатель, имеющий хорошую подготовку по общим основаниям алгебраической геометрии, смог в них разобраться и получить удовольствие от чтения. В начальных лекциях особенно заметен неформальный подход. В них мы уделяем больше внимания геометрической стороне, чем техническим деталям доказательств. Мы надеемся, что подобное неформальное введение в работу Мори [M1] будет полезным. Оно занимает первые две лекции.

В третьей лекции дан обзор классификационной теории поверхностей с точки зрения теории трехмерных многообразий. Это естественным образом приводит к теме следующей лекции, посвященной знакомству с конусом кривых. В лекции 5 уже более детально обсуждаются основные идеи программы Мори, причем особое внимание уделяется флипам, которые представляют, пожалуй, наиболее важное отличие трехмерной геометрии от двумерной. В конце этой лекции приведена сравнительная таблица основных результатов из бирациональной геометрии поверхностей и трехмерных многообразий. Хотя список свойств для этой таблицы и подбирался преднамеренно, их сходство оказалось поразительным.

Лекция 6 несколько менее технична. В ней обсуждаются особенности, естественно возникающие при изучении *гладких* трехмерных многообразий и являющиеся трехмерными обобщениями рациональных двойных точек на поверхностях. Однако структура этих особенностей гораздо более сложна и полностью не изучена.

В лекции 7 теорема о конусе распространяется на случай эквиварнантного действия конечной группы и на относительный случай. В лекции 8 мы даем короткие доказательства некоторых теорем об обращении в нуль, необходимых для доказательства теоремы о конусе. Это непосредственно приводит к следующему большому разделу, посвященному доказательству общей теоремы о конусе, которое дано в лекциях 9 – 13. Здесь приводятся корректные (или по крайней мере претендующие на это) с точки зрения используемой техники доказательства. Доказательство последнего шага в лекции 11 является новым и позволяет избежать рассмотрения довольно техничного относительного случая. По крайней мере для нас это сделало доказательство гораздо более понятным.

В заключении первой части этих лекций обсуждаются флипы и флопы. Если рациональная кривая на трехмерной квинтике может быть стянута, то для нее существует флоп. Таким образом, понимание флопов дает некоторые результаты о рациональных кривых на трехмерных квинтиках в $\mathbf{P}^4$. Наиболее простой вопрос, к которому приводит этот подход, заключается в следующем:

Верно ли, что некоторое кратное гладкой рациональной кривой, имеющей нормальное расслоение $\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(-4)$, *на трехмерной квинтике в* $\mathbf{P}^4$ *является подвижным?*

Это невозможно для прямых, но вполне может случиться для гладких коник на некоторых специальных трехмерных квинтиках в $\mathbf{P}^4$ (после того, как были записаны эти лекции, в [C3] появился отрицательный ответ и для этого случая).

Две лекции посвящены флипам. Лекция 14 представляет собой общее введение, а лекция 15 дает по существу полное локальное описание трехмерных многообразий в окрестности стягиваемой рациональной кривой, имеющей отрицательный индекс пересечения с каноническим классом. Это должно значительно прояснить идеи, содержащиеся в первых семи главах работы Мори [M3], и дать возможность ее читателю после знакомства с некоторыми дополнительными определениями и утверждениями непосредственно перейти к гл. 8. Такое введение к работе [M3] должно дать хорошее представление о том, как продолжается доказательство в ее заключительных главах. Мы надеемся, что это знакомство воодушевит читателя к более подробному изучению полного доказательства. В лекции 16 коротко обсуждаются флопы, которые значительно более просты для понимания, чем флипы, и хорошо изучены.

Лекции 17—20 посвящены изучению кэлеровых структур на римановых локально симметрических пространствах. Они содержат результаты Дж. Карлсона и Д. Толедо, которые дали, опираясь на результаты Иельса и Сэмпсона, унифицированные доказательства некоторых старых и некоторых новых теорем. Вкратце: компактное риманово локально симметрическое пространство имеет кэлерову комплексную структуру тогда и только тогда, когда оно является одним из известных классических пространств, для которых комплексная структура совпадает с ожидаемой. В этих лекциях показан пример применения теории гармонических отображений к комплексной геометрии.

За недостатком времени мы не смогли обратиться к другим проблемам, например к следующему вопросу, которым мы первоначально намеревались заняться:

Существует ли связь между свойствами метрики Кэлера — Эйнштейна в окрестности рациональной кривой на трехмерной квинтике в $\mathbf{P}^4$ *и теорий деформаций этой кривой?*

В последней части лекций изучаются специальные рациональные кривые на общих гиперповерхностях. Коротко основной результат гласит, что общая гиперповерхность достаточно большой степени не содержит кривых небольшого рода. В лекции 21 недавние результаты Клеменса распространяются на случай особых кривых. Эти результаты очень близки к наилучшим, но, к сожалению, они не дают того, что мы хотели получить. Поэтому в лекции 22 мы можем дать лишь гипотетическое обсуждение, касающееся трехмерных квинтик в $\mathbf{P}^4$ и абелевых многообразий. Это направление должно оказаться очень интересным, если его продолжить. Упомянутые выше результаты могут быть распространены на полные пересечения в грассмановых многообразиях. Такие обобщения были получены и представлены Л. Эйном. Он также сделал обзор доказательства оценки Кастельнуово для гладких пространственных кривых, полученного Грюсоном — Лазарсфельдом — Пескиным, которое использовалось в предыдущей лекции.

Замечание. В лекциях 1—3, 21 и 23—24 мы работаем над полем произвольной характеристики, однако в остальных лекциях предполагается, что характеристика поля равна нулю.

Еще раз мы бы хотели выразить благодарность всем, кто внес вклад в успешную работу нашего семинара, включая Ф. Серано-Гарсиа, П. Робертса, Т. Луо и рецензента, которые внесли исправления и улучшили записки этих лекций. Частичная финансовая поддержка была оказана Национальным научным фондом, субсидии DMS-8702680 и DMS-8707320.

Замечания о терминологии

Ниже дан список общепринятых понятий многомерной геометрии, которые, быть может, недостаточно хорошо известны за пределами этой области.

В «добурбакистской» алгебраической геометрии часто использовались отображения, не являющиеся всюду определенными. Они назывались рациональными отображениями. Мы же их будем называть просто **отображениями** и обозначать с помощью пунктирной стрелки $\dashrightarrow$. **Морфизм** — это всюду определенное отображение схем. Его мы будем обозначать непрерывной стрелкой $\longrightarrow$.

Отображение $g: X \dashrightarrow Y$ алгебраических многообразий называется **бирациональным**, если оно устанавливает изоморфизм между открытыми плотными подмножествами в X и Y. Два многообразия называются **бирационально эквивалентными**, если между ними существует бирациональное отображение (заметим, что мы здесь умышленно избегаем старого выражения «бирационально изоморфны», поскольку это приводит к путанице).

Многообразие X размерности n называется **рациональным** (соответственно **линейчатым**), если оно бирационально эквивалентно $\mathbf{P}^n$ (соответственно многообразию $Y \times \mathbf{P}^1$ для некоторого $(n-1)$-мерного многообразия Y).

Многообразие X размерности n называется **унилинейчатым**, если существуют $(n-1)$-мерное многообразие Y и сюръективное в общей точке отображение $f: Y \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow X$. При $n \le 2$ унилинейчатость эквивалентна линейчатости, однако в больших размерностях это уже не так[1].

Дивизор Картье D на схеме V называется **численно эффективным** или, коротко, **nef-дивизором**[2], если его индекс пересечения $C \cdot D$ с любой полной кривой C, содержащейся в V, является неотрицательным. Обычно это понятие используется, только когда V — полное многообразие.

Дивизор Картье D на полном неприводимом многообразии V называется **большим** или **big-дивизором**, если отображение, определяемое линейной системой $|mD|$, при достаточно больших m бирационально.

Q-дивизором называется формальная линейная комбинация вида $D = \sum a_i D_i$, где a_i — рациональные числа, а D_i — неприводимые дивизоры Вейля. Мы называем дивизор эффективным, если все a_i неотрицательны.

Дивизор (или, в более общем случае, Q-дивизор) называется **Q-дивизором Картье**, если некоторое его кратное mD является дивизором Картье. Q-дивизор Картье D называется nef-

[1] Например, гладкая трехмерная квартика унилинейчата, но не линейчата, поскольку ее группа бирациональных автоморфизмов конечна. — *Прим. ред.*

[2] nef — аббревиатура от английского numerical effective. — *Прим. ред.*

(соответственно big-, обильным,...) дивизором, если mD является nef- (соответственно big-, обильным,...) дивизором. Мы будем также употреблять для первых двух понятий термины nef-**Q**-дивизор Картье и big-**Q**-дивизор Картье.

Индексом **Q**-дивизора Картье D называется наименьшее положительное целое число m, для которого mD является дивизором Картье. В этом случае дивизор kD — дивизор Картье, только если m делит k. **Индексом** многообразия X называется индекс (если он определен) канонического дивизора K_X.

Дивизором с нормальными пересечениями на гладком многообразии называется сумма гладких дивизоров, пересекающихся между собой трансверсально.

Лекция 1
Нахождение рациональных кривых в случае отрицательного K_X

(1.1) Эта лекция служит введением в последующие 15 лекций. В ней исследуется такой общий вопрос:

Как рациональные кривые на многообразии влияют на его бирациональную геометрию?

Мы вскоре увидим, что отсутствие рациональных кривых на алгебраических многообразиях влечет за собой некоторые очень полезные следствия. Позднее, возвращаясь к этому, мы покажем, что некоторые трудности бирациональной геометрии многообразия X связаны именно с наличием специальных рациональных кривых на X.

Вот простейший пример из теории поверхностей:

Если X — гладкая собственная поверхность, то существование нетривиального бирационального морфизма $f : X \longrightarrow Y$ на гладкую поверхность Y эквивалентно существованию в X гладкой рациональной кривой с индексом самопересечения -1.

Это утверждение в одну сторону можно легко обобщить следующим образом:

называется **бирациональным**, если оно устанавливает изоморфизм между открытыми плотными подмножествами в X и Y. Два многообразия называются **бирационально эквивалентными**, если между ними существует бирациональное отображение (заметим, что мы здесь умышленно избегаем старого выражения «бирационально изоморфны», поскольку это приводит к путанице).

Многообразие X размерности n называется **рациональным** (соответственно **линейчатым**), если оно бирационально эквивалентно $\mathbf{P}^n$ (соответственно многообразию $Y \times \mathbf{P}^1$ для некоторого $(n-1)$-мерного многообразия Y).

Многообразие X размерности n называется **унилинейчатым**, если существуют $(n-1)$-мерное многообразие Y и сюръективное в общей точке отображение $f : Y \times \mathbf{P}^1 \dashrightarrow X$. При $n \leq 2$ унилинейчатость эквивалентна линейчатости, однако в больших размерностях это уже не так[1].

Дивизор Картье D на схеме V называется **численно эффективным** или, коротко, **nef-дивизором**[2], если его индекс пересечения $C \cdot D$ с любой полной кривой C, содержащейся в V, является неотрицательным. Обычно это понятие используется, только когда V — полное многообразие.

Дивизор Картье D на полном неприводимом многообразии V называется **большим** или **big-дивизором**, если отображение, определяемое линейной системой $|mD|$, при достаточно больших m бирационально.

Q-дивизором называется формальная линейная комбинация вида $D = \sum a_i D_i$, где a_i — рациональные числа, а D_i — неприводимые дивизоры Вейля. Мы называем дивизор эффективным, если все a_i неотрицательны.

Дивизор (или, в более общем случае, Q-дивизор) называется **Q-дивизором Картье**, если некоторое его кратное mD является дивизором Картье. Q-дивизор Картье D называется nef-

---

[1] Например, гладкая трехмерная квартика унилинейчата, но не линейчата, поскольку ее группа бирациональных автоморфизмов конечна. — *Прим. ред.*

[2] nef — аббревиатура от английского numberical effective. — *Прим. ред.*

(соответственно big-, обильным,...) дивизором, если mD является nef- (соответственно big-, обильным,...) дивизором. Мы будем также употреблять для первых двух понятий термины nef-$\mathbb{Q}$-дивизор Картье и big-$\mathbb{Q}$-дивизор Картье.

Индексом $\mathbb{Q}$-дивизора Картье D называется наименьшее положительное целое число m, для которого mD является дивизором Картье. В этом случае дивизор kD — дивизор Картье, только если m делит k. **Индексом** многообразия X называется индекс (если он определен) канонического дивизора K_X.

Дивизором с нормальными пересечениями на гладком многообразии называется сумма гладких дивизоров, пересекающихся между собой трансверсально.

Лекция 1
Нахождение рациональных кривых в случае отрицательного K_X

(1.1) Эта лекция служит введением в последующие 15 лекций. В ней исследуется такой общий вопрос:

Как рациональные кривые на многообразии влияют на его бирациональную геометрию?

Мы вскоре увидим, что отсутствие рациональных кривых на алгебраических многообразиях влечет за собой некоторые очень полезные следствия. Позднее, возвращаясь к этому, мы покажем, что некоторые трудности бирациональной геометрии многообразия X связаны именно с наличием специальных рациональных кривых на X.

Вот простейший пример из теории поверхностей:

Если X — гладкая собственная поверхность, то существование нетривиального бирационального морфизма $f: X \longrightarrow Y$ на гладкую поверхность Y эквивалентно существованию в X гладкой рациональной кривой с индексом самопересечения -1.

Это утверждение в одну сторону можно легко обобщить следующим образом:

(1.2) Предложение. *Пусть X — гладкое многообразие произвольной размерности и $f\colon Y \longrightarrow X$ — произвольный собственный бирациональный морфизм. Тогда для любой точки $x \in X$ ее полный прообраз $f^{-1}(x)$ либо является точкой, либо покрывается рациональными кривыми.*

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай, когда X — поверхность. Последовательными раздутиями точек на X разрешим неопределенности отображения f^{-1}. На каждом шаге разрешения мы получим проективную прямую $\mathbf{P}^1$. Следовательно, прообраз $f^{-1}(x)$ — либо точка, либо доминируется объединением некоторых из этих кривых. Значит, согласно теореме Люрота, каждый отличный от точки прообраз $f^{-1}(x)$ является объединением рациональных кривых.

Общий случай может быть доказан аналогичным способом, если мы знаем, как разрешать неопределенности отображений. Однако для нашей цели достаточен ослабленный вариант разрешения неопределенностей. Так как в дальнейшем утверждение (1.2) будет использоваться только для поверхности X, то в многомерном случае мы дадим лишь набросок его доказательства.

Можно предполагать, что Y является нормальным многообразием. По теореме Ван-дер-Вардена исключительное множество отображения f имеет чистую коразмерность 1. Пусть $E \subseteq Y$ является неприводимой компонентой этого исключительного множества. Пара (Y, E) изоморфна в общей точке $e \in E$ последовательности раздутий с гладкими центрами. Следовательно, в E существует рациональная кривая C, проходящая через e и стягивающаяся в точку при отображении f. Так как рациональная кривая может специализироваться только в объединение рациональных кривых, через каждую точку E проходит рациональная кривая.

(1.3) Следствие. *Пусть $g\colon Z \dashrightarrow X$ — рациональное отображение из гладкого многообразия. Обозначим через $Y \subseteq X \times Z$ замыкание графика отображения g, а через q и p — проекции $X \times Z$ соответственно на X и Z. Если $S \subseteq Z$ состоит* *из тех точек Z, в которых g не является регулярным, то множество $q(p^{-1}S)$ покрывается рациональными кривыми.*

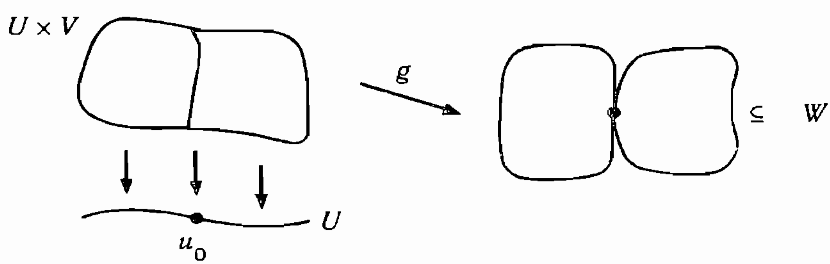
(1.4) Следствие. *Предположим, что существует рациональное отображение $g\colon Z \dashrightarrow X$, где Z — гладкое алгебраическое многообразие, а X является собственным многообразием. Тогда X содержит рациональную кривую.*

Простейшая ситуация, в которой можно применить это следствие, возникает в случае поверхности Z, являющейся семейством кривых. В определенных случаях можно утверждать, что отображение g из (1.4) не может быть всюду регулярным:

(1.5) Лемма о жесткости. *Пусть U, V и W — алгебраические (или комплексные) многообразия. Предположим, что V проективно (компактно), а U связно. Пусть $g: U \times V \longrightarrow W$ — морфизм, и предположим, что $g(\{u_0\} \times V)$ — точка для некоторой точки $u_0 \in U$. Тогда $g(\{u\} \times V)$ является точкой для любой $u \in U$.*

Доказательство см. в [Ко 4] [стр. 178—314 настоящего издания. — *Ред.*]

Лемма о жесткости показывает невозможность следующей геометрической ситуации:



(1.6) Следствие. *Пусть X — полное многообразие, C — гладкая полная кривая, $p \in C$ — ее точка, $g_0: C \longrightarrow X$ — непостоянный морфизм. Предположим, что существует нетривиальное алгебраическое семейство $g_t: C \longrightarrow X$, параметризованное такой кривой D_0 (возможно, неполной), что*

$$g_0(p) = g_t(p)$$

для каждого t. *Тогда* X *содержит рациональную кривую, проходящую через* $g_0(p)$.

Доказательство. Компактифнцируем D_0 до полной кривой D; тогда мы имеем рациональное отображение $g: C \times D \dashrightarrow X$. Еслн кривая C рациональна, то она является нскомой кривой. В противном случае g должно иметь двумерный образ, поскольку нерациональная крнвая C не может иметь однопараметрическое семейство автоморфизмов, оставляющих точку p неподвижной. Мы утверждаем, что g не может быть морфизмом. Предположим протнвное и применим лемму (1.5) с $U = C$, $V = D$ и $W = X$. По условию $g(\{p\} \times D)$ — точка; следовательно, $g(\{q\} \times \times D)$ — точка для любой $q \in C$ по (1.5) н образ $g(C \times D)$ одномерен. Противоречне. Таким образом, g имеет на $\{p\} \times D$ точки неопределенности. Согласно (1.4), X содержит рацнональную кривую. Пользуясь (1.3), мы получаем рациональную крнвую, проходящую через образ $\{p\} \times D$, т. е. через $g_0(p)$.

Важно отметить, что в приведенных выше рассуждениях существенную роль играет алгебраичность, как показывает следующий

(1.7) Пример. Пусть E — эллиптическая кривая, а M — лннейное расслоенне степени ≥ 2 с порождающими сечениями σ и τ. В векторном расслоении $V = M \oplus M$ сеения (σ, τ), $(i\sigma, -i\tau)$, $(\sigma, -\tau)$, $(i\sigma, i\tau)$ являются незавиcнмымн над $\mathbf{R}$ в каждой точке из E и порождают расслоеине на целочисленные решетки L над E. Пусть $X = V/L$, а C — нулевое сечение V/L. Из-за положнтельности расслоення V кривую C можно варьировать в V/L, сохраняя неподвижную точку, однако V/L не содержит рацнональных кривых.

Заключение. *Многообразие деформаций отображения кривой C в многообразие X с фиксированным образом некоторой точки этой кривой не имеет нетривиальных полных подмногообразий*[1].

---

[1] Предполагается, что кривая C не рациональна. — *Прим. ред.*

Теперь мы готовы сформулировать и доказать первый основной результат о существовании рациональных кривых. Он представляет независимый интерес, хотя позже будет рассмотрен его вариант, в некотором смысле более сильный.

(1.8) **Теорема.** *Пусть X — гладкое проективное многообразие, причем его антиканонический класс $-K_X$ является обильным. Тогда X содержит рациональную кривую. Более того, через каждую точку X проходит рациональная кривая D, удовлетворяющая условию*

$$D\cdot(-K_X) \leq 1 + \dim X.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько шагов.

(1.9) Шаг 1. В доказательстве мы собираемся воспользоваться утверждением (1.6); поэтому мы должны найти морфизм $f: C \longrightarrow X$, который можно было бы деформировать. Выберем в X произвольную кривую C. Если мы хотим получить рациональную кривую, проходящую через заданную точку $x \in X$, выберем кривую C также проходящей через x. Пусть p — точка кривой C, отображающаяся в x.

(1.10) Шаг 2. Согласно локальной теории деформаций отображений алгебраических многообразий, пространство деформаций морфизма f кривой C в X имеет размерность не менее

$$h^0(C; f^*T_X) - h^1(C; f^*T_X) = f(C)\cdot c_1(X) + (1 - g(C))\cdot \dim X,$$

где T_X — касательное расслоение к X, $c_1(X) = -K_X$ — первый класс Чженя, а $g(C)$ — род кривой C. Поскольку фиксирование образа точки p в X при деформации f налагает $\dim X$ дополнительных условий, размерность пространства деформаций морфизма $f: C \longrightarrow X$, состоящих из морфизмов, отображающих p в x, уже не менее

$$h^0(C; f^*T_X) - h^1(C; f^*T_X) - \dim X = f(C)\cdot c_1(X) - g(C)\cdot \dim X.$$

Таким образом, существует однопараметрическое семейство деформаций отображения $f: C \longrightarrow X$ с фиксированным образом точки $p \in C$, если число $f(C)\cdot c_1(X) - g(C)\cdot \dim X$ является положительным. В этом случае из (1.6) вытекает существование рациональной кривой в X, проходящей через x. Следует также заметить, что эта часть доказательства проходит также и для кэлеровых многообразий, но, как показывает пример (1.7), уже не годится для прозвольных компактных комплексных пространств.

(1.11) Шаг 3. Теперь мы покажем, как выбрать регулярный морфизм $f: C \longrightarrow X$, чтобы получить неравенство

$$f(C)\cdot c_1(X) - g(C)\cdot \dim X > 0.$$

Для этого мы должны сделать достаточно большим $f(C)\cdot c_1(X)$. Рассмотрим случаи:

(1.11.1) $g(C) = 0$. Если $f(C)\cdot c_1(X) > 0$, то C можно деформировать внутри X. Однако в этом случае C — уже требуемая кривая, проходящая через x.

(1.11.2) $g(C) = 1$. Если $f(C)\cdot c_1(X) > 0$, рассмотрим композицию f с эндоморфизмом умножения на n на кривой C. Получаем

$$(f\circ n)(C)\cdot c_1(X) - \dim X = n^2(f(C)\cdot c_1(X)) - \dim X.$$

Следовательно, некоторое n-листное накрытие кривой C (изоморфное C) деформируется так, что образ некоторой точки в слое над p остается фиксированным.

(1.11.3) $g(C) \geq 2$. Сложность этого случая состоит в том, что при попытке деформировать некоторое неразветвленное m-листное накрытие кривой C мы можем лишь утверждать, что размерность пространства деформаций не меньше

$$m\cdot[f(C)\cdot c_1(X) - g(X)\cdot \dim X] + (m-1)\dim X.$$

Это еще не позволяет добиться ее положительности при больших m, даже если $f(C)\cdot c_1(X) > 0$.

(1.12) Итак, мы столкнулись с некоторой трудностью, поскольку при $g(C) > 1$ кривая C не имеет эндоморфизмов сколь угодно большой степени. Однако есть ситуация, в которой любая кривая имеет такие «эндоморфизмы». А именно, над полем конечной характеристики их роль играет *морфизм Фробениуса*. Далее мы увидим, как перейти от нашей первоначальной ситуации в характеристику p.

(1.13) Шаг 4. Пусть выбрана кривая C в гладком многообразии $X \subseteq \mathbb{P}^n$. Сначала предположим, что и C, и X заданы системами уравнений с *целыми* коэффициентами:

уравнения $h_1(x_0, \ldots, x_n), \ldots, h_r(x_0, \ldots, x_n)$ задают X,

уравнения $q_1(x_0, \ldots, x_n), \ldots, q_s(x_0, \ldots, x_n)$ задают C.

Пусть $\mathbb{F}(p)$ — поле из p элементов, а $\mathbb{F}(p)^\wedge$ — его алгебраическое замыкание. Тогда указанные выше уравнения $\{h_i\}$ и $\{q_j\}$ задают соответственно многообразия X_p и C_p в n-мерном проективном пространстве над полем $\mathbb{F}(p)^\wedge$. Для почти всех p эти многообразия являются гладкими и $\dim C_p = 1$. Отображение

$$(x_0, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_0^p, \ldots, x_n^p)$$

является эндоморфизмом f_p кривой C_p, причем, будучи инъективным в теоретико-множественном смысле, морфизм f_p имеет степень $p^{\dim C}$. Исключая конечное число простых $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, мы можем рассматривать C и X как плоские схемы над оставшейся частью $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Следовательно, числа $c_1(X_p) \cdot C_p$, $g(C_p)$ и $\chi(T_X|_{C_p})$ не зависят от p для почти всех p. Размерность пространства деформаций морфизма

$$f_p^m : C_p \longrightarrow C_p \longrightarrow X_p$$

ограничена снизу числом

$$p^m(C_p \cdot c_1(X_p)) - g(C_p) \cdot \dim X.$$

Поскольку $C_p \cdot c_1(X_p)$ предполагается положительным и для почти всех p не зависит от p, мы можем выбрать m таким, чтобы выражение $p^m(C_p \cdot c_1(X_p)) - g(C_p) \cdot \dim X$ было положительным для почти всех p. Следовательно, для почти всех p существует рациональная кривая $R_p \subseteq X_p$.

(1.14) Теперь предположим, что мы оказались в общей ситуации, и коэффициенты миогочленов h_i, q_j и g_k, определяющие соответственио $X \subseteq \mathbf{P}^n$, $C \subseteq \mathbf{P}^m$ и графнк в $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ отображення C в X, не являются целымн. Эти коэффицненты порождают иекоторое конечно порожденное иад $\mathbf{Z}$ кольцо $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{p}$ — любой максимальный идеал в $\mathfrak{R}$. Тогда $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ — конечиое поле (в противном случае мы бы получилн, что $\mathbf{Q}$ является конечно порожденным кольцом над $\mathbf{Z}$). Таким образом, $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ нзоморфно полю $\mathbf{F}(p^k)$ нз p^k элементов для некоторого простого p. В этом случае морфнзм Фробениуса состоит в возведении в p^k-ю степень однородных координат $(x_0, \ldots, x_n)$ n-мерного проективного пространства над $\mathbf{F}(p^k)$. Остальная часть рассуждений повторяет уже приведенные выше и дает рациональные кривые $R_\mathfrak{p}$ для всех замкнутых точек $\mathfrak{p}$ в некотором открытом по Зарнсскому множестве в Spec $\mathfrak{R}$.

(1.15) Шаг 5. Пусть $c_1(X)$ обилен и X вложено некоторым кратным $mc_1(X)$ антиканоннческого дивизора $c_1(X)$ в проективное пространство. На этом шаге мы хотим заменить $R_\mathfrak{p}$ рациональиой кривой $S_\mathfrak{p}$, для которой

$$c_1(X_\mathfrak{p}) \cdot S_\mathfrak{p} \leq \dim X + 1.$$

Для этого заметим, что прн

$$c_1(X_\mathfrak{p}) \cdot R_\mathfrak{p} > \dim X + 1$$

морфизм из $R_\mathfrak{p}$ в $X_\mathfrak{p}$ имеет по крайней мере двухпараметрнческое семейство деформацнй с двумя фнкснрованными точками. Поскольку $\mathbf{P}^1$ имеет лишь одномерное семейство автоморфнзмов, сохраняющих иеподвижными две точки, образ $R_\mathfrak{p}$ в $X_\mathfrak{p}$ должен деформироваться. Аналогично шагу 2 мы можем построить отображенне $D \times R_\mathfrak{p}$ в $X_\mathfrak{p}$, переводящее $D \times \{q\}$ в x и $D \times \{q'\}$ в x'. Выбирая мнинмальное разрешение Z зтого отображения н стягивая все кривые в слоях морфизма $Z \longrightarrow D$, которые отображаются в точку при морфизме $Z \longrightarrow X$, мы получаем, что либо $R_\mathfrak{p}$ где-то вырождается в сумму двух или более кривых меньшей степени, либо существует морфизм $\mathbf{P}^1$-расслоения над D в многообразие $X_{\mathfrak{p}}$, который переводит одно сечение в x, а другое — в x'.

Последний случай невозможен, поскольку из него следует, что матрица пересечений на группе Нерона—Севери $\mathbf{P}^1$-расслоения является отрицательно определенной[1]. Поэтому, если

$$c_1(X_{\mathfrak{p}})\cdot R_{\mathfrak{p}} > \dim X + 1,$$

мы можем найти рациональную кривую меньшей степени.

(1.16) Шаг 6. На этом шаге мы должны будем вывести существование рациональной кривой на многообразии X над полем характеристики нуль из существования кривых $R_{\mathfrak{p}}$ ограниченной степени для почти всех p (аналогично рассматривается соответствующий общий случай, использующий редукцию по $\mathfrak{p}$ над Spec $\mathfrak{R}$).

Теорема. *Если однородная система алгебраических уравнений с целыми коэффициентами имеет нетривиальные решения в* $\mathbb{F}(p)^{\wedge}$ *для бесконечного множества простых* p, *то она имеет нетривиальное решение в любом алгебраически замкнутом поле.*

Доказательство. Согласно теории исключений, существование общего нетривиального решения системы однородных алгебраических уравнений эквивалентно обращению в нуль некоторого набора определителей матриц, элементы которых являются многочленами с целыми коэффициентами от коэффициентов этих уравнений. Осталось заметить, что определитель обращается в нуль тогда и только тогда, когда он обращается в нуль по модулю бесконечного числа простых p.

В нашей ситуации для почти всех p мы имеем однородные формы

$$((g_p)_0,\ldots,(g_p)_n)$$

[1] Что противоречит теореме об индексе на алгебраической поверхности. —*Прим. ред.*

степени $m(\dim X + 1)$ от переменных t_0, t_1, которые задают отображение $\mathbb{P}^1 \longrightarrow X \subseteq \mathbb{P}^n$, такое, что

$$h_i((g_p)_0,\ldots,(g_p)_n) = 0$$

является тождеством от t_0, t_1 для всех i. Последнее условие может быть выражено в виде системы уравнеинй от коэффициеитов g_k. Поскольку получившаяся система имеет решение для плотного по Зарисскому подмножества простых p, согласно доказанной теореме, она нмеет решение в любом алгебраическн замкнутом поле.

(1.17) Шаг 7. Наконец, осталось заметить, что шагн 2 и 5 позволяют построить рацнональную крнвую степенн ие более $\dim X + 1$ и проходящую через *любую* наперед заданную точку многообразия X. Следовательно, еслн $c_1(X)$ положителен, то X должно покрываться алгебранческнм семейством рациональиых кривых степени $\le \dim X + 1$.

(1.18) *Литература.* Большинство из приведенных результатов прннадлежит Мори [M1]; (1.2) получено Абьянкаром [Ab, предложенне 4]; (1.7) взято из [Bl]. Существование рациональных кривых, проходящих через любую заданную точку, неявно содержится в [M1]. Впервые на это было указано в [Ko1].

Лекцня 2
Нахождение рациональных кривых в случае иеполуположительного K_X

(2.1) Теперь мы ослабнм нашн предположения о миогообразнн X (см. (1.8)). А именно с этого момента мы вместо положнтельности $c_1(X)$ будем предполагать только лишь условие

$$c_1(X) \cdot f(C) > 0$$

для некоторого фиксированного отображения $f\colon C \longrightarrow X$. Мы зафиксируем иекоторое гиперплоское сечение H на X. Если

$$(*) \qquad (f(C)\cdot c_1(X) - g(C)\dim X) > 0.$$

то C имеет деформацию с неподвижной точкой. Согласно (1.6), это семейство деформаций C должно вырождаться в сумму

$$f'(C) + (\text{сумма рациональных кривых})$$

Как и в предыдущей лекции, для получения неравенства (*) мы перейдем в конечную характеристику и рассмотрим композицию f с m-й степенью морфизма Фробениуса. Для $m \gg 0$ [1] мы можем получить вырождение кривой $p^m\cdot f(C_p)$ в сумму вида

$$(**) \qquad C_{p,m} + Z_{p,m},$$

где $Z_{p,m}$—сумма рациональных кривых. Заметим, что отношение

$$(f(C_p)\cdot c_1(X_p))/(f(C)\cdot H_p) = M$$

постоянно для почти всех p, и оно не изменится, если заменить отображение f на его композицию со степенью морфизма Фробениуса. Если

$$(C_{m,p}\cdot c_1(X_p) - g(C_p)\cdot\dim X_p) > 0,$$

мы можем варьировать $C_{m,p}$ с неподвижной точкой (не прибегая к композиции с морфизмом Фробениуса) и получить отщепление рациональной кривой. Если итерировать этот процесс, то на каждом шаге итерации индекс пересечения H_p с компонентой, оставшейся после отщепления рациональных кривых от $C_{m,p}$, уменьшается. Поэтому процесс должен оборваться. Таким образом, мы получаем представление (**), являющееся вырождением первоначальной кривой $p^m\cdot f(C_p)$, где

$$C_{p,m}\cdot c_1(X_p) \le g(C_p)\cdot\dim X_p.$$

Пусть

$$\begin{aligned} a &= C_{p,m}\cdot c_1(X_p),\\ b &= Z_{p,m}\cdot c_1(X_p),\\ c &= C_{p,m}\cdot H_p,\\ d &= Z_{p,m}\cdot H_p. \end{aligned}$$

---

[1] То есть для достаточно больших m. —*Прим. ред.*

Для больших m число $c + d$ велнко, а отношенне числа $a + b$ к $c + d$ является постоянным числом M. Поэтому число $a + b$ также должно быть большим. Но a ограничено, поэтому большим должно быть b.

(2.2) Лемма. *Пусть* $c > 0$ *и* $d > 0$. *Тогда*

$$(a + b)/(c + d) \le \max \{ a/c,\ b/d \}.$$

Доказательство. Пусть $a' = a/c \le b' = b/d$. Положим $d' = d/c$. Тогда

$$(a' + d'b')/(1 + d') \le b'.$$

(2.3) Если $a/c < M$, то $b/d \ge M$, в противном случае получаем противоречие с леммой (2.2). Если c увеличивается, то, действительно, для больших m мы получаем $a/c < M$. Если же ограннчено c, то должно растн d н отношеине $(a + b)/(c + d)$ должно стремнться к b/d. Итак, для любого заданного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое m, для которого

$$(Z_{p,m} \cdot c_1(X_p))/(Z_{p,m} \cdot H_p) > M - \varepsilon.$$

Теперь лемма (2.2) показывает, что для некоторой неприводимой компоненты E_p цикла $Z_{p,m}$ мы также нмеем неравенство

$$(E_p \cdot c_1(X_p))/(E_p \cdot H_p) > M - \varepsilon. \tag{***}$$

(2.4) Предположим теперь, что

$$(E_p \cdot c_1(X_p)) > \dim X + 1 .$$

Аналогнчно (1.10) мы можем варьировать рациональную крнвую E_p с двумя закрепленнымн точкамн, причем варьнруемая крнвая должна вырождаться в сумму двух или более рациональных кривых. Используя снова лемму (2.2), мы заключаем, что неравенство (***) должно выполняться по крайней мере для одной из компонент E'_p этого вырождения. Если

$$(E'_p \cdot c_1(X_p)) > \dim X + 1,$$

то кривая E'_p также варьируется, и мы можем найти E''_p, для которой выполнено (***) ..., и т. д. Этот процесс не может продолжаться бесконечно, так как на каждом шаге индекс пересечения $E_p \cdot H_p$ уменьшается. Итак, в конце концов мы придем к кривой (снова обозначим ее через E_p), для которой

$$0 < (E_p \cdot c_1(X_p)) \le \dim X + 1.$$

Таким образом,

$$0 < (E_p \cdot H_p) \le (\dim X + 1)/(M - \varepsilon).$$

Поскольку оценка сверху на индекс пересечения не зависит от p, для того чтобы доказать существование рациональной кривой E на комплексном проективном многообразии X, мы можем рассуждать аналогично (1.11). Если $E \cdot c_1(X) > \dim X + 1$, мы можем применить (1.10) несколько раз, пока не найдем кривую E, удовлетворяющую условию

$$E \cdot c_1(X) \le \dim X + 1.$$

(2.5) Замечание. *Это рассуждение не позволяет нам что-нибудь сказать о расположении рациональных кривых на X. Однако другой подход показывает, что через каждую точку C проходит рациональная кривая.*

Мы резюмируем наши результаты в следующей теореме.

(2.6) Теорема. *Пусть X — гладкое проективное многообразие, а H — обильный дивизор на X. Предположим, что существует такая кривая $C \subseteq X$, что*

$$C \cdot (-K_X) \ge \varepsilon(C \cdot H)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда существует рациональная кривая $E \subseteq X$, такая, что

$$\dim X + 1 \ge E \cdot (-K_X) \ge \varepsilon(E \cdot H).$$

(2.7) *Литература.* Все эти результаты содержатся в [M1].

Лекция 3
Классификация поверхностей

(3.1) Теперь мы увидим, как связано существование рациональной кривой с классификационной теорией алгебраических миогообразнй. Мы иачием с замечанний, что любая алгебраическая кривая обладает метрикой постоянной кривизны н что на любом кэлеровом многообразии X первый класс Чженя $c_1(X)$ представляется формой Риччи, ассоцннрованной с кривизной. Следует отметить также, что для алгебраического многообразия $K_X = -c_1(X)$.

Для крнвой X нмеем

$c_1(X) > 0 : X = \mathbf{P}^1$;

$c_1(X) = 0$: X изоморфно фактору $\mathbf{C}$ по решетке;

$c_1(X) < 0$: существует бесконечно много различных топологическнх типов крнвой X.

(3.2) *Принцип классификации поверхностей*

С топологической точкн зрення средн алгебраических поверхностей X преобладают поверхности отрнцательной кривизны в том смысле, что в основном K_X «стремится» быть чнсленно эффектнвиым или даже обнльным. Во многих случаях, используя возможность находить рацнональиую кривую на поверхности X, как только K_X не является nef-дивнзором, мы можем предъявнть список поверхностей, ие являющихся отрицательно искрнвленнымн.

(3.3) Существуют трн возможных способа опнсання понятия отрицательной кривизиы для кэлерова многообразня X:

1) T_X нмеет метрику с отрнцательной кривнзной Рнччн.

2) $\Lambda^{\dim X} T_X = \mathcal{O}(-K_X)$ нмеет метрику с отрицательной кривнзной Риччн (согласно знаменитой теореме Яо, это условие эквивалентио условию 1)).

3) $c_1(X)\cdot C < 0$ для всех кривых C в X.

Заметнм, что нз 2) всегда следует 3), однако, для того чтобы вывести 2) из 3) в случае поверхностей, необходимо показать, что $(c_1(X))^2 > 0$, и, пользуясь крнтернем Накаи — Мойшезона, получнть обнльность K_X . Однако вывод неравенства

$$(c_1(X))^2 > 0$$

из свойства 3) в иекотором смысле иельзя считать удовлетворительным, поскольку он a posteriori использует классификационную теорию поверхностей.

(3.4) Вопрос. *Существует ли многообразие* X, *для которого условие* 3) *не влечет за собой выполнения условия* 2)?

(3.5) Определение. Дивизор D на миогообразни X называется **полуотрицательным**, если $C \cdot D \le 0$ для любых кривых C на X.

(3.6) Проблема. Пусть $c_1(X)$ является полуотрицательным. Существует ли на лннейиом расслоенни $\det T_X$ метрика с отрицательно полуопределениой формой кривнзны?

(3.7) Упражнение. Постройте линейное расслоеиие L на X, такое, что $c_1(X) \cdot C \le 0$ для всех кривых $C \subseteq X$, однако не обладает метрикой, форма кривизны которой всюду меньше нли равна нулю.

(3.8) Попробуем классифицнровать поверхности в соответствнн с указанным выше принцнпом. Сначала допустнм, что $c_1(X)$ не является полуотрицательным. Тогда существует крнвая C на X, для которой $(c_1(X) \cdot C) > 0$. Используя методы предыдущих лекций, мы можем построить отображение

$$f : E \longrightarrow X$$

некоторой рациональиой кривой E, для которого

$$0 < (c_1(X) \cdot f(E)) \le 3 = \dim X + 1.$$

Нам понадобится еще одно условие, которое мы обсудим в следующий раз (см. (4.7)), а нмеино мы потребуем, чтобы в качестве $C = f(E)$ получалась «экстремальная» кривая. Это означает, грубо говоря, что E порождает одномериую грань конуса $NE(X)$ эффективных классов днвизоров на X.

Случай 1: $C^2 < 0$.

Из формулы прнсоединения

$$(*) \qquad C^2 + C \cdot K_X = 2g(X) - 2$$

вытекает едииствеиная возможиость

$$g(X) = 0 \text{ и } C^2 = -1.$$

Таким образом, C является исключительной кривой первого рода, и мы можем стянуть ее в гладкую точку. Стягивая кривую, мы уменьшаем второе число Бетти поверхности X на 1. Поэтому существует лишь конечное число таких стягиваний, и в конце концов мы придем к поверхности, не содержащей экстремальных кривых C с $C^2 < 0$.

Случай 2: $C^2 = 0$.

Из (*) следует, что $g(C) = 0$, и f является вложением. Поскольку $(c_1(X) \cdot C) = 2$, отображение f имеет по крайней мере четырехмерное семейство деформаций (см. неравенство в (1.10)). Однако кривая C имеет лишь трехмерное семейство автоморфизмов, поэтому она является подвижной. Таким образом, X — линейчатая поверхность, а свойство «экстремальности» C влечет за собой неприводимость слоев в получившемся расслоении.

Случай 3: $C^2 > 0$.

В следующей лекции (следствие (4.4)), мы покажем, что из этого условия следует принадлежность класса C *внутренности* конуса $NE(X)$ в пространстве, порожденном элементами $NE(X)$. С другой стороны, класс C порождает грань конуса $NE(X)$. Следовательно, ранг группы Пикара поверхности X равен 1. Пусть H — обильный образующий группы классов дивизоров. Тогда $K_X = -aH$ для некоторого $a > 0$. В оставшейся части рассуждений предположим, что основным полем является поле комплексных чисел. Результат, который будет получен, верен над любым алгебраически замкнутым полем, но его доказательство в общем случае более сложно.

Используя теорему Кодаиры об обращении в нуль, получаем

$$H(X)^{0,1} = H(X)^{0,2} = 0.$$

Таким образом, H является образующим $H^2(X, \mathbb{Z})$ по модулю кручения, и из двойственности Пуанкаре следует, что $H \cdot H = 1$ и $c_2(X) = 3$[1]. По формуле Нётера $c_1(X)^2 = 9$ и $K_X = -3H$.

[1] $c_2(X)$ — второй класс Чженя поверхности X. — *Прим. ред.*

Из теоремы Римана – Роха следует, что $\dim |H| = 2$. Так как $H^2 = 1$, линейная система $|H|$ не имеет базисных точек и, следовательно, определяет морфизм X в $\mathbf{CP}^2$. Этот морфизм имеет степень 1 и разделяет точки, т. е. он является изоморфизмом.

(3.9) Итак, помимо рассмотренных выше поверхностей X имеются только поверхности X с полуотрицательным $c_1(X)$. Перечислим известные результаты, относящиеся к этому последнему случаю.

Случай 1: $c_1(X) \cdot C = 0$ *для всех кривых* $C \subseteq X$.

В этом случае известно, что $\mathcal{O}(12K_X)$ является тривиальным линейным расслоением, а X является либо абелевой поверхностью, либо К3-поверхностью, либо фактором по свободному действию конечной группы на поверхности одного из этих двух типов. Если X является фактором К3-поверхности, то соответствующая группа должна быть равна $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, поскольку эйлерова характеристика структурного пучка К3-поверхности равна 2. В характеристике 2 и 3 существуют и другие случаи.

Случай 2: $c_1(X) \cdot c_1(X) = 0$, *но* $c_1(X) \cdot C \neq 0$ *для некоторой кривой* C.

Можно показать, что в этом случае существует отображение X на кривую D, слоями которого являются эллиптические кривые, причем некоторое кратное $c_1(X)$ является прообразом отрицательного дивизора на D. Другие случаи имеются в характеристике 2 и 3.

Случай 3: $c_1(X) \cdot c_1(X) > 0$.

Может быть показано, что в этом случае для $m \gg 0$ дивизор $-mc_1(X)$ определяет бирациональный морфизм на свой образ в некотором проективном пространстве, причем все стягиваемые кривые при этом морфизме являются рациональными.

(3.10) *Литература.* Приведенные результаты являются классическими. Вопросы, связанные с кривизной, можно найти в [GH]. Более полная информация со списком литературы содержится в [BPV]. Утверждение (3.3) взято из [Y].

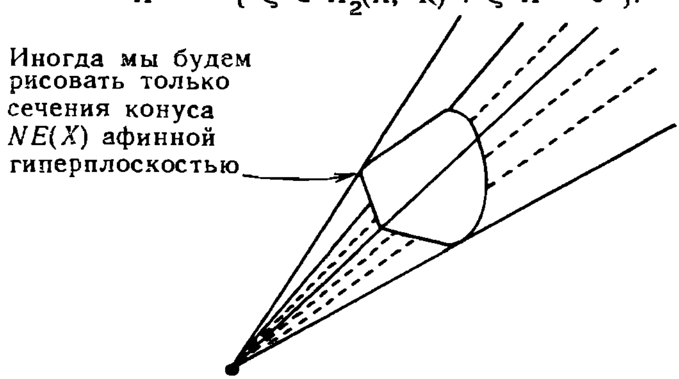
Лекция 4
Конус кривых в гладком случае

(4.1) Теперь наша основная цель заключается в доказательстве теоремы о конусе, из которой помимо всего прочего следует существование экстремальных рациональных кривых, использованных в лекции 3 для классификации поверхностей. Начнем с мотивировок — с определений и примеров.

(4.2) Пусть X — гладкое проективное многообразие, а C — неприводимая кривая на X. Обозначим через $[C]$ класс когомологий в $H_2(X;\ \mathbb{R})$ кривой C. Пусть $NE_{\mathbb{Q}}(X)$ (соответственно $NE(X)$) — подмножества в $H_2(X;\ \mathbb{R})$, состоящее из элементов вида
$$\sum a_i\ [C_i],$$
где C_i — собственные неприводимые кривые на X, $a_i \in \mathbb{Q}$ (соответственно $a_i \in \mathbb{R}$) и $a_i \geq 0$. Множество $NE_{\mathbb{Q}}(X)$, очевидно, является плотным в $NE(X)$.

Для произвольного дивизора D введем обозначение
$$D_{>0} = \{\xi \in H_2(X;\ \mathbb{R}) : \xi\cdot D > 0\}$$
(аналогично определяются множества $D_{\geq 0}$, $D_{<0}$ и $D_{\leq 0}$).

Теперь разберем некоторые примеры для случая поверхности X с гиперплоским сечением H. Замыкание $\langle NE(X)\rangle$ конуса $NE(X)$ принадлежит области $H_{\geq 0}$, и только вершина O этого замыкания принадлежит вещественной гиперплоскости
$$H^{\perp} = \{\ \xi \in H_2(X,\ \mathbb{R}) : \xi\cdot H = 0\ \}.$$



(4.3) Предложение. *Если D — дивизор на поверхности X, удовлетворяющий условию $D^2 > 0$, то по крайней мере одна из двух линейных систем $|nD|$ или $|-nD|$ непуста при $n \gg 0$.*

Доказательство. По теореме Римана — Роха

$$h^0(nD) - h^1(nD) + h^0(K_X - nD) = (n^2/2)D^2 - (n/2)D\cdot K_X + \chi(\mathcal{O}_X),$$
$$h^0(-nD) - h^1(-nD) + h^0(K_X + nD) = (n^2/2)D^2 + (n/2)D\cdot K_X + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Заметим, что при достаточно большом n правая часть каждого из этих равенств — возрастающая функция от n. Однако числа $h^0(K_X - nD)$ и $h^0(K_X + nD)$ не могут одновременно возрастать при $n \longrightarrow \infty$, поскольку сумма соответствующих им дивизоров постоянна и равна $2K_X$.

(4.4) Следствие. *Если $[D] \in \langle NE(X)\rangle$ и $D^2 > 0$, то $[D]$ лежит в конусе $\langle NE(X)\rangle^0$, который состоит из внутренних точек конуса $\langle NE(X)\rangle$ в порождаемом им векторном подпространстве в $H_2(X, \mathbb{R})$.*

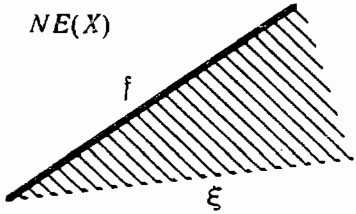
Доказательство. Выберем обильный дивизор H. Согласно предложению (4.3), $H\cdot D > 0$. Если дивизор $D' \in NE_{\mathbb{Q}}(X)$ близок к D, то также $D'^2 > 0$ и $-D'\cdot H < 0$. Для некоторого $m > 0$ класс mD' представлен целым циклом, поэтому мы можем применить предложение (4.3) к mD' и получить, что $mD' \in NE(X)$, т. е. $D' \in NE(X)$. Следовательно, $[D] \in \langle NE(X)\rangle^0$.

(4.5) Лемма. *Если C — неприводимая кривая на X, причем $C^2 \le 0$, то $[C] \in \partial NE(X)$. Если $C^2 < 0$, то класс $[C]$ порождает некоторое ребро конуса $NE(X)$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой неприводимой кривой D выполнено неравенство $D\cdot C < 0$. Тогда $D = C$. Следовательно, конус $NE(X)$ порожден $[C]$ и $NE(X) \cap C_{\ge 0}$.

(4.6) Теперь рассмотрим некоторые примеры.

(4.6.1) Пусть X является $\mathbf{P}^1$-расслоением над кривой рода не менее 2. Тогда $NE(X)$ — конус в $\mathbb{R}^2$. Пусть f обозначает класс когомологий слоя, а ξ — другая образующая этого конуса.



Согласио следствию (4.4), $\xi^2 \leq 0$. Если $\xi^2 < 0$, можно рассмотреть последовательность эффективных кривых D_n, сходящуюся к лучу $\mathbb{R}_{\geq 0}[\xi]$; тогда для $n \gg 0$ будем иметь $D_n^2 < 0$. Существует непрнводимая компонента E_n дивизора D_n, такая, что $E_n^2 < 0$, поэтому, используя лемму (4.5), получаем

$$E_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}[\xi].$$

Если $\xi^2 = 0$, то выберем любой неприводнмый дивизор D, отлнчный от f. Тогда D и f порождают $H_2(X; \mathbb{R})$. Рассмотрнм уравнеиие относнтельно x и y

$$(xf + yD)^2 = 2xy(f \cdot D) + y^2(D \cdot D) = 0.$$

Элемент ξ является решеннем этого уравнення. Более того, ξ—решенне $2x(f \cdot D) + y(D \cdot D) = 0$, поэтому отношение x/y для ξ является рациоиальным числом. В то же время элемент ξ может не быть представим никакнм эффективным $\mathbb{Q}$-днвизором[1]. Используя формулу присоедннения, получаем, что $f \in (K_X)_{<0}$.

(4.6.2) Пусть A—абелева поверхность с обильным дивизором H. Поскольку индекс самопересечения любой кривой на абелевой поверхности неотрнцательный, из предложения (4.3) следует, что конус $\langle NE(X) \rangle$ определяется условиямн $D^2 \geq 0$ и $D \cdot H \geq 0$. Если rk $NS \geq 3$ (т. е. $A = E \times E$ для некоторой эллиптической кривой E), то $\langle NE(X) \rangle$—иекоторый круговой конус.

---

[1] Например, на лннейчатой поверхности с ннвариантом $e < 0$, см. Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия.—М.: Мир, 1981, гл. V, § 2.—*Прим. ред.*

(4.6.3) *Поверхности Дель-Пеццо, характеризуемые свойством обильности* $c_1(X)$.

В этом случае можно показать, что либо $X = \mathbf{P}^2$, либо существует набор рациональных кривых $C_1,\ldots,C_r$, таких, что $C_i^2 \le 0$ и

$$NE(X) = \mathbf{R}_{\geq 0}[C_1] + \ldots + \mathbf{R}_{\geq 0}[C_r].$$

Поэтому, в частности, конус $\langle NE(X)\rangle$ совпадает с $NE(X)$, т.е. он является конусом над некоторым конечным многогранником.

(4.6.4) Пусть поверхность X' является раздутием проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ в 9 базисных точках общего пучка кубических кривых. Выбирая одну из 9 точек в качестве нулевого сечения, мы получаем бесконечную группу, порожденную остальными восемью сечениями. Следовательно, поверхность X' имеет бесконечно много исключительных кривых первого рода, каждая из которых деформируется при общей деформации X', получаемой приведением в общее положение этих 9 точек в $\mathbf{P}^2$. Согласно (4.5), каждая из исключительных кривых порождает некоторое ребро конуса $NE(X)$. Теперь дивизор $-K_X$ представлен единственной эллиптической кривой, проходящей через 9 общих точек, причем $-K_X$ является полуположительным (однако никакое кратное $-K_X$ не является подвижным дивизором). Следовательно, конус $NE(X)$ не является локально конечным в окрестности $K_X^{\perp}$.

Имея в виду приведенные выше примеры, мы можем сформулировать первый результат Мори для многообразий произвольной размерности. Доказательство этого результата более геометрично в гладком случае, поэтому мы рассмотрим этот случай в первую очередь. Доказательство общего случая будет дано в лекции 11.

(4.7) Теорема о конусе. *Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда в X существует набор рациональных кривых C_i $(i \in I)$, удовлетворяющих условию*

$$0 < C_i\cdot(-K_X) \le \dim X + 1,$$

таких, что

(1) $\langle NE(X)\rangle = \sum (\mathbb{R}_{\geq 0})[C_i] + (\langle NE(X)\rangle \cap (K_X)_{\geq 0})$. *Если лучи* $(\mathbb{R}_{\geq 0})[C_i]$ *вместе с множеством* $(\langle NE(X)\rangle \cap (K_X)_{\geq 0})$ *образуют минимальное порождающее множество для конуса* $NE(X)$, *то они называются* **экстремальными лучами** *конуса* $NE(X)$.

(2) *Для любого вещественного* $\varepsilon > 0$ *и обильного дивизора* H *в разложении* (1) *выполнено условие*

$$\langle NE(X)\rangle \cap (K_X + \varepsilon H)_{\leq 0} = (\langle NE(X)\rangle \cap (K_X + \varepsilon H)_{=0}) + \textstyle\sum'(\mathbb{R}_{\geq 0})[C_i],$$

где последняя сумма $\sum'$ *содержит лишь конечное число слагаемых.*

Доказательство. Напомним, что в лекции 2 было показано, что для любого обильного дивизора H и неприводимой кривой C, удовлетворяющей условию $C\cdot K_X < 0$, существует рациональная кривая C', удовлетворяющая неравенствам $0 < C'\cdot(-K_X) \leq \leq \dim X + 1$ и

$$\frac{C'\cdot(-K_X)}{C'\cdot H} \geq \frac{C\cdot(-K_X)}{C\cdot H} - \varepsilon$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Поскольку числитель в левой части неравенства принимает лишь конечное число значений, можно считать, что неравенство выполнено для $\varepsilon = 0$.

Пусть $[C_i]$ $(i \in I)$ — множество всех классов рациональных кривых, удовлетворяющих условию

$$0 < C_i\cdot(-K_X) \leq \dim X + 1.$$

Обозначим через N конус, порожденный $[C_i]$ и

$$\langle NE(X)\rangle \cap (K_X)_{\geq 0}.$$

Выберем рациональный дивизор J, такой, что

$$(\langle NE(X)\rangle \cap (K_X)_{\geq 0}) \subseteq J_{>0} \cup \{0\}.$$

Поскольку множество $\langle NE(X)\rangle$ выпукло, замкнутое множество

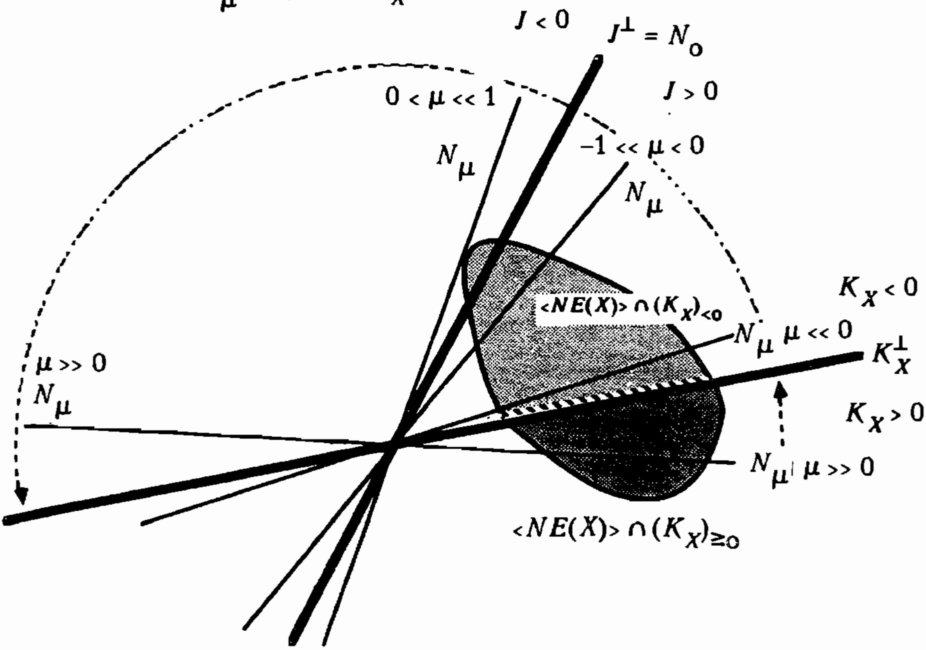
$$\{\ \mu \in \mathbb{R} : (J - \mu K_X)^{\perp} \cap (\langle NE(X)\rangle \cap (K_X)_{\geq 0}) \neq \{0\}\ \}$$

не пересекается с замкнутым множеством

$$\{ \mu \in \mathbb{R} : (J - \mu K_X)^{\perp} \cap (\langle NE(X) \rangle \cap (K_X)_{<0}) \neq \{0\} \}.$$

В приведенной ниже диаграмме изображены различные области и подпространства, которые мы рассматриваем, а также их взаимное расположение:

Вращение гиперплоскости, определяемой дивизором $N_\mu = (J - \mu K_X)$, при изменении μ:

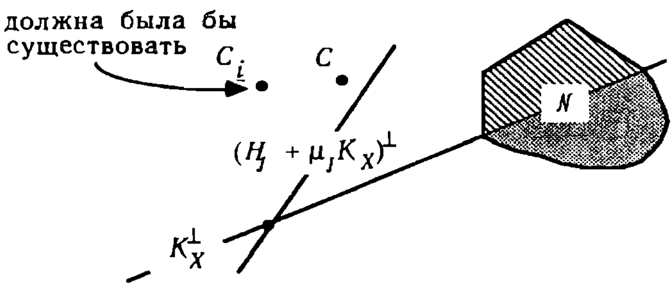


Пусть μ_J — положительное рациональное число, заключенное строго между двумя указанными выше замкнутыми множествами в $\mathbb{R}$. Нам понадобится следующее утверждение:

(4.8) Критерий Клеймана. *Пусть X — гладкое проективное многообразие, а D — произвольный дивизор в X. Дивизор D обилен тогда и только тогда, когда*

$$D_{>0} \supseteq \langle NE(X)\rangle - \{0\}.$$

(4.9) Согласио критерию Клеймана, дивизор $(J - \mu_J K_X)$ обилен; поэтому мы можем в наших расуждениях в иачале доказательства положить $H = H_J = (J - \mu_J K_X)$. Теперь предположим, что $[C] \notin N$. Тогда мы можем таким способом выбрать рациональный дивизор J, чтобы $[C] \in (J_{<0})$ и $N \subseteq (J_{>0})$.



Наши предыдущие рассуждения доказывают существование рациональной кривой C_i, удовлетворяющей иеравенству

$$\frac{C_i \cdot (-K_X)}{C_i \cdot H_J} \geq \frac{C \cdot (-K_X)}{C \cdot H_J} - \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$(H_J - \mu_J K_X)\cdot C_i > 0 \quad \text{и} \quad (H_J - \mu_J K_X)\cdot C < 0,$$

что приводит к противоречию. Таким образом, мы получили утверждение (1) теоремы (4.7).

Второе утверждение этой теоремы непосредственно следует из конечности числа связных семейств кривых C_i, удовлетворяющих условию

$$\lambda(C_i \cdot H) \le C_i \cdot (-K_X) \le \dim X + 1.$$

(4.10) Критерий Клеймана показывает, что гладкое собственное алгебраическое многообразие X является проективным в том и только том случае, если $\langle NE(X)\rangle - \{0\}$ лежит в некотором собственном полупространстве в $H_2(X;\ \mathbf{R})$, т. е. тогда и только тогда, когда конус $\langle NE(X)\rangle$ не содержит прямых. Если многообразие X было поверхностью и стягивание некоторой кривой C, удовлетворяющей условию $C^2 < 0$, привело к гладкой поверхности Y, то этот критерий показывает, что поверхность Y должна быть проективной.

Для трехмерного проективного многообразия имеются случаи, в которых неприводимая кривая C лежит внутри гладкого дивизора D на X, причем $D \cdot C < 0$.

Случай 1. Если пространство $H_2(D;\ \mathbf{R})$ имеет одномерный образ в $H_2(X;\ \mathbf{R})$, то так же, как и в лемме для поверхностей, кривая C должна лежать на ребре конуса $NE(X)$. Стягивание дивизора D в этом случае соответствует проекции из этого ребра. Поэтому многообразие Y, получаемое после этого стягивания, является проективным.

Случай 2. Предположим, что дивизор D является гладкой линейчатой поверхностью, а C — слой этой поверхности, причем $D \cdot C = -1$. Тогда многообразие Y, получающееся после стягивания, является гладким согласно критерию Накано. Поэтому если класс C лежит на ребре грани конуса $NE(X)$, то полученное многообразие будет проективным в силу критерия Клеймана.

(4.11) *Литература.* Пример (4.6.4) старый и принадлежит Нагате [Nag]. Доказательство критерия Клеймана можно найти в [Kl]. Теорема (4.7) взята из [M1].

Лекция 5
Введение в программу Мори

(5.1) Пример. Рассмотрим раздутие

$$g : X \longrightarrow \mathbf{P}^2$$

проективной плоскости $\mathbf{P}^2$ в 12 точках $p_1,\dots,p_{12}$, лежащих на гладкой плоской кубической кривой D. Пусть C обозначает собственный прообраз этой плоской кубики. Тогда $C^2 = -3$, поэтому с помощью аналитического морфизма $f : X \longrightarrow Y$ кривая C может быть стянута в особую точку *аналитической* поверхности Y. Если 12 точек выбраны в общем положении, то поверхность Y не может быть проективной. Действительно, если M—произвольное линейное расслоение на Y, то $L = f^*M$ является дивизором вида

$$g^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(b) + \sum a_i\ E_i\ ,$$

где E_i—исключительная кривая над точкой p_i . Но дивизор

$$(g^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(b) + \sum a_i\ E_i\ )\cdot C$$

на кривой C должен быть линейно эквивалентен 0 (последнее мы будем обозначать через « ≈ 0 ») на C. Следовательно, мы должны были бы получить

$$\mathcal{O}_D(b) + \sum a_i\ p_i \approx 0$$

на кривой D, что, очевидно, не выполнено при общем выборе точек p_i.

Однако если в качестве точек p_i взяты точки пересечения D с кривой Q четвертой степени, то линейная система, определяемая собственным прообразом Q в X, реализует морфизм $f : X \longrightarrow Y$ как отображение в проективное пространство.

Эти примеры показывают, что не существует *численного* критерия стягиваемости кривой в категории проективных многообразий. Важное свойство, с которым мы в дальнейшем встретимся, состоит в том, что для экстремальных лучей такие критерии уже могут существовать. Точное утверждение содержится в следующей теореме.

(5.2) Теорема. *Пусть X — гладкое проективное многообразие. Если R — экстремальный луч, то существует морфизм*

$$f : X \longrightarrow Y$$

на некоторое нормальное многообразие Y, такой, что f стягивает неприводимую кривую D в точку тогда и только тогда, когда класс $[D]$ порождает R. Морфизм f называется **экстремальным стягиванием** *экстремального луча R.*

Доказательство этой теоремы будет дано в лекции 11.

(5.3) Сформулированная теорема полностью характеризует многообразие Y как множество точек. Для того чтобы получить на этом множестве структуру проективного многообразия, найдем $\mathbf{Q}$-дивизор L, такой, что

$$[D]\cdot L = 0,$$

и множество $\langle NE(X)\rangle - (\mathbf{R}_{\geq 0}[D])$ лежит в $L_{>0}$. Согласно критерию Клеймана, дивизор $mL - K_X$ является обильным для $m \gg 0$. Поэтому из теоремы Кодаиры об обращении в нуль получаем, что для $i > 0$

$$H^i(X;\ mL) = 0.$$

Последнее утверждение можно использовать для доказательства *свободы* линейной системы $|mL|$, т. е. отсутствия в ней базисных точек и неподвижных компонент при $m \gg 0$. Эта линейная система задает морфизм $f : X \longrightarrow \mathbf{P}^n$.

Из обильности дивизора $mL - K_X$ также следует, что для всех кривых D, лежащих в слоях морфизма f, выполнено неравенство

$$(-K_X \cdot D) > 0.$$

Позже мы докажем теорему об обращении в нуль (см. теорему (8.8)), из которой следует, что в нашем случае все пучки $R^i f_* \mathcal{O}_X$ высших прямых образов пучка $\mathcal{O}_X$ обращаются в нуль.

(5.4) Именно обращение в нуль $R^1 f_* \mathcal{O}_X$ обеспечивает свойство проективности при стягиваниях. Грубо говоря, это связано с тем, что $R^1 f_* \mathcal{O}_X^*$ инъективно отображается в $R^2 f_* \mathbf{Z}$. В этом случае для того, чтобы доказать, что линейное расслоение на X является прообразом расслоения на многообразии Y, удовлетворяющим условиям теоремы (5.2), мы воспользуемся точиой последовательностью

$$\operatorname{Pic} Y \longrightarrow \operatorname{Pic} X \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_X^* .$$

(5.5) Обозначим через

$$\operatorname{contr}_R : X \longrightarrow Y$$

построенный выше морфизм стягивания экстремального луча R. Для гладкого трехмерного проективного многообразия X имеются следующие типы стягнваний contr_R .

Стягивания исключительных дивизоров

Если $\dim Y = 3$, то морфизм $f = \operatorname{contr}_R$ является бирациональным и существует пять типов его локального поведения в окрестности стягиваемых кривых:

E1) Contr_R стягивает некоторый дивизор на гладкую кривую в Y, ие проходящую через особенности Y;

E2) Contr_R стягивает некоторый дивизор в гладкую точку в Y;

E3) Contr_R стягивает иекоторый дивизор в обыкновеиную двойную точку в Y; эта обыкиовенная двойиая точка локально-аналитически определяется уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$;

E4) Contr_R стягивает некоторый дивизор в особую двойную точку в Y, эта особенность на Y локально-аналитически определяется уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^3 = 0$.

E5) Contr_R стягивает дивизор, изоморфный $\mathbf{CP}^2$, с нормальным расслоением $\mathcal{O}(-2)$ в особую точку кратности 4 в Y; эта особая точка локально-аналитически является фактором $\mathbf{C}^3$ по инволюции

$$(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z).$$

Расслоеиие иа коники

Если $\dim Y = 2$, то морфизм $f = \operatorname{contr}_R$ является расслоением на кривые степени 2 (коники) с гладким общим слоем.

C1) Если f имеет особые слои, то f—«расслоение на коиикн».

C2) Если f не имеет особых слоев, то f—этальное[1] $\mathbf{CP}^1$-расслоение.

Расслоение на поверхности Дель-Пеццо

$\dim Y = 1$, то общий слой морфизма $f = \mathrm{contr}_R$ является поверхностью Дель-Пеццо, поскольку антиканонический дивизор на этом слое обилен и совпадает с ограничением на него дивизора $-K_X$.

Многообразия Фано

Если $\dim Y = 0$, то $-K_X$ является обильным, т. е. X — *многообразие Фано*. Согласно теореме Кодаиры об обращении в нуль, для $i > 0$

$$H^i(X;\ \mathcal{O}_X) = 0.$$

Следовательно, R порождает $H_2(X;\ \mathbf{R})$.

(5.6) Теперь мы в состоянии коротко изложить цель программы Мори. Пусть X—гладкое проективное многообразие. Если канонический дивизор K_X на многообразии X не является численно эффективным (т.е. nef-дивизором), то можно найти некоторый морфизм

$$f = \mathrm{contr}_R : X \longrightarrow Y,$$

называемый морфизмом стягивания экстремального луча или **экстремальным стягиванием.**

В малых размерностях имеются следующие основные случаи.

(5.6.1) $\dim X = 2$.

Если $\dim Y < \dim X$, то для таких поверхностей X имеется полная структурная теория.

Если $\dim Y = \dim X$, то в этом случае поверхность Y снова является гладкой и $\mathrm{rk}\ NS(Y) < \mathrm{rk}\ NS(X)$. Таким образом, можно считать, что поверхность Y «проще», чем X. Короче говоря, либо мы получаем описание поверхности X, либо мы можем упростить ее структуру.

---

[1] То есть локально тривиальное в комплексной топологии. —*Прим. ред.*

(5.6.2) $\dim X = 3$.

Если $\dim Y < \dim X$, то для таких трехмерных многообразий X мы опять имеем почти полную структурную теорию, из которой, в частности, следует, что X покрывается рациональными кривыми.

Если $\dim Y = \dim X$, то в этом случае, к сожалению, многообразие Y может иметь особенности (см. случаи E3, E4, E5). Поэтому далеко не очевидно, что Y «проще», чем X.

(5.7) Следовательно, в высших размерностях мы должны рассматривать особые многообразия. Наша задача заключается в том, чтобы выделить подходящую категорию особенностей, с которой мы будем работать. A priori совсем не очевидно, что может быть найден разумный класс особенностей. Могло оказаться, что морфизмы стягиваний приводят к все более и более плохим особенностям. Правильный класс особенностей будет называться «терминальными» особенностями. В данный момент нам неважно знать их точное определение, которое будет дано позже, мы отметим лишь одно их существенное свойство:

Для терминальных особенностей некоторое кратное канонического дивизора K_X является дивизором Картье, поэтому имеет смысл говорить о численной эффективности K_X.

Далее, мы должны будем доказать существование морфизмов стягивания в этом расширенном классе многообразий с не слишком плохими особенностями.

(5.8) Теорема. *Пусть X — проективное многообразие, имеющее лишь $\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, причем дивизор K_X численно не эффективен. Тогда существует морфизм*

$$f : X \longrightarrow Y,$$

такой, что $-K_X$ обилен относительно f, и выполнено одно из следующих утверждений:

(a) $\dim Y < \dim X$, *и морфизм f — расслоение на $\mathbb{Q}$-многообразия Фано*;

(b) *f — бирациональный морфизм, стягивающий дивизор (дивизориальное стягивание)*;

(c) *f — бирациональный морфизм, стягивающий некоторое* *подмногообразие коразмерности* ≥ 2 (*малое стягивание*).

(5.9) Комментарии

В случае (a) теоремы общий слой морфизма f является алгебраическим многообразием с обильным дивизором $-K_X$. Этот случай дает по крайней мере надежду редуцировать проблему изучения многообразия X к проблеме изучения многообразий меньшей размерности: Y и слоев морфизма f. Более того, слои f имеют очень специальный вид – они являются аналогами $\mathbf{CP}^1$ и поверхностей Дель-Пеццо.

В случае (b) теоремы многообразие Y снова имеет терминальные особенности, т. е. мы остаемся внутри того же класса особенностей, с которого начинали. Более того,

$$\mathrm{rk}\ NS(Y) < \mathrm{rk}\ NS(X).$$

Таким образом, можно считать, что многообразие Y «проще», чем X.

Случай (c) теоремы является новым. Он не может реализоваться для поверхностей из соображений размерности, а также для гладких трехмерных многообразий. В этом случае многообразие Y имеет очень плохую особенность, такую, что никакое кратное дивизора K_Y не является дивизором Картье. Следовательно, выражение «K_Y является nef-дивизором» теряет смысл. Таким образом, мы вышли за пределы рассматриваемого класса многообразий. Для того чтобы продолжить исследование этого случая, мы должны ввести новую операцию, которая называется *флипом*. Эта операция является алгебраическим аналогом следующего преобразования в коразмерности 2.

Вместо того, чтобы стягивать некоторые кривые $\cup C_i \subseteq X$, мы удаляем их из многообразия и компактифицируем

$$X \setminus \cup C_i\ ,$$

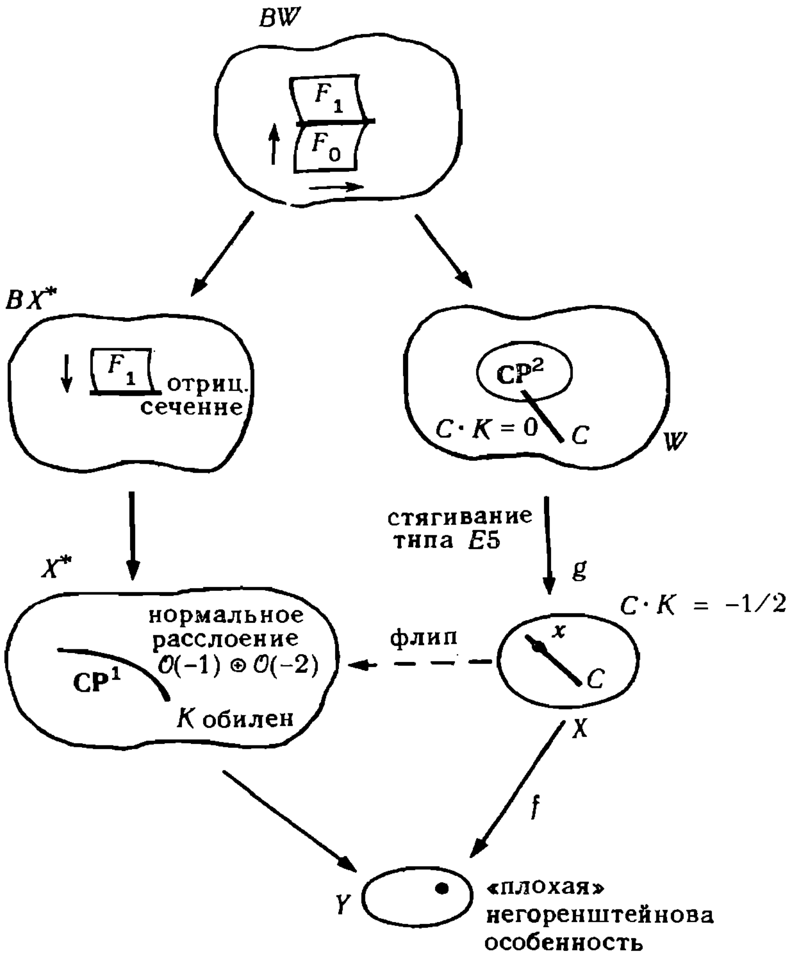
добавляя другое объединение кривых $\cup D_i$ (в данный момент совсем не очевидно, что такая операция существует или является корректно определенной).

Сначала рассмотрим один пример. В этом примере с помощью флипа, который называется *направленным*, мы удаляем кривую $C = \mathbf{CP}^1$ из особого многообразия X и заменяем ее кривой $D = \mathbf{CP}^1$ для того, чтобы получить «улучшенное» многообразие X^*, являющееся в данном случае гладким. Наиболее простое описание имеется для обратиой операции в виде последовательности раздутий

$$X^* \longleftarrow BX^* \longleftarrow BW,$$

после которой выполняется последовательность стягиваний

$$BW \longrightarrow W \longrightarrow X:$$



Этот процесс начинается с гладкого трехмерного многообразия X^*, содержащего гладкую рациональную кривую с нормальным расслоением

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2).$$

Предположим, что эта кривая может быть стянута в «плохую» негоренштейнову[1] особую точку многообразия Y.

Если раздуть эту кривую, мы получим многообразие BX^*, содержащее в качестве исключительного дивизора линейчатую поверхность F_1. Можно теперь раздуть отрицательное сечение на этой поверхности и получить BW. Новый исключительный дивизор будет изоморфен поверхности $F_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Можно стянуть эту поверхность на другую образующую и получить многообразие W. При этом стягивании исключительная кривая на F_1 стянется в точку, а сама поверхность превратится в $\mathbf{CP}^2 \subset W$. Образом F_0 в многообразии W будет кривая C с нормальным расслоением

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1);$$

в частности, $C \cdot K_W = 0$.

Вычислим теперь нормальное расслоение к дивизору $\mathbf{CP}^2$. Поскольку оно должно иметь вид $\mathcal{O}(k)$, достаточно вычислить число k. Последнее можно получить, используя ограничение этого расслоения на прямую, которая не пересекает кривую C. Прообраз этой прямой в BW является некоторым сечением s, не пересекающим F_0, поверхности F_1. Рассмотрим также образ этого сечения s' в многообразии BW^*. Таким образом, нам достаточно вычислить ограничение нормального расслоения к дивизору F_1 в BW^* на общее сечение F_1. Это легкое вычисление дает $k = -2$.

Теперь мы можем стянуть поверхность $\mathbf{CP}^2$ в точку $x \in X$, это стягивание совпадает со стягиванием E5 из (5.5). Полу-

---

[1] Нормальная особая точка называется горенштейновой, если локально в ее окрестности K_X является дивизором Картье. — *Прим. ред.*

чившееся многообразие X локально в x может быть представлено в виде фактора, причем K_X является лишь $\mathbf{Q}$-дивизором Картье. Если

$$g^* K_X \equiv K_W + a \cdot \mathbf{CP}^2,$$

где a — некоторое рациональное число, то, согласно формуле присоединения для $\mathbf{CP}^2$, мы получаем, что $a = 1/2$. Таким образом, $C \cdot K_X = -1/2$.

Нетрудно заметить, что кривая C в многообразии X порождает экстремальный луч, причем C — единственная неприводимая кривая, класс гомологий которой принадлежит этому экстремальному лучу. Следовательно, соответствующий этому экстремальному лучу морфизм стягивает лишь кривую C и приводит к многообразию Y с «плохими» особенностями.

(5.10) Операция в нижнем треугольнике приведенной выше диаграммы может быть следующим образом формализована.

(5.11) Определение. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — экстремальное стягивание, такое, что его исключительное множество E в многообразии X имеет коразмерность не менее 2. Тогда многообразие X^+ вместе с морфизмом

$$f^+ : X^+ \longrightarrow Y$$

будет называться **флипом** стягивания f, если X^+ имеет лишь $\mathbf{Q}$-факториальные терминальные особенности и дивизор K_{X^+} является обильным относительно f^+. Позволяя себе некоторую вольность обозначений, мы будем также называть **флипом** соответствующее рациональное отображение $X \dashrightarrow X^+$, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] & \\ -K_X \ f\text{-обилен} & & Y & & K_{X^+} \ f^+\text{-обилен} \end{tikzcd}$$

(оно является изоморфизмом в коразмерности 1).

Пока не совсем ясно, будет ли после выполнения флипа новое многообразие X^+ «проще», чем многообразие X. В приведенном выше примере это так, поскольку многообразие X было особым, а X^+ уже является гладким. Мы увидим, что и в общем случае флипы приводят к упрощению особенностей.

(5.12) Программа Мори. Эта программа состоит в том, чтобы доказать, что для любого гладкого алгебраического многообразия X можно выполнить последовательность известных бирациональных преобразований и получить многообразие Y (возможно, имеющее терминальные особенности), такое, что выполнено одно из двух условий:

i) многообразие Y имеет структуру расслоения, общий слой которого является $\mathbb{Q}$-многообразием Фано (в частности, Y и X покрываются рациональными кривыми);

ii) канонический дивизор K_Y численно эффективен.

(5.13) В настоящее время эта программа завершена лишь в размерности 2 и 3, хотя и в этих размерностях еще много осталось недоделанного. Приложения этой программы связаны с возможностью разобраться в самом процессе получения многообразия Y, что позволило бы интерпретировать структурные свойства многообразия X в терминах соответствующих свойств многообразия Y. Более того, предстоит еще много выяснить относительно трехмерных многообразий с численно эффективным каноническим классом и расслоенных пространств, общими слоями которых являются многообразия Фано. Даже в случае, если этот общий слой изоморфен $\mathbb{P}^1$, неизвестно, как узнать, являются ли два таких расслоения бирационально эквивалентными.

(5.14) Теперь мы приведем несколько примеров экстремальных стягиваний в высших размерностях.

i) Если X — гладкое проективное многообразие, а $X \supseteq Z$ — его гладкое неприводимое подмногообразие, то морфизм, являющийся обратным к раздутию $B_Z X \longrightarrow X$, является экстремальным стягиванием.

ii) Пусть V — пространство векторного расслоения

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(-1)$$

ранга k над $\mathbb{P}^n$, а $V^\wedge$ – его проективизация

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}(1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O})$$

(здесь мы придерживаемся терминологии Гротендика[1]).

Если $k \leq n$, то прямая в $\mathbf{P}^n \subseteq V \subseteq V^\wedge$ порождает экстремальный луч в многообразии $V^\wedge$. Соответствующий этому экстремальному лучу морфизм стягивания стягивает $\mathbf{P}^n$ в точку и является изоморфизмом вне $\mathbf{P}^n$. Следовательно, если $k \geq 2$, то исключительное множество *не является дивизором*. Это дает нам примеры малых стягиваний в размерности ≥ 4. Для гладких трехмерных многообразий таких стягиваний не существует.

iii) Пусть Y—пространство ненулевых линейных отображений

$$\mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{C}^n$$

по модулю умножений этих отображений на константу. Тогда многообразие Y является гладким и изоморфным $\mathbf{P}^{n(n+1)-1}$. Пусть X—множество пар (g, L), где $g \in Y$, а L—одномерное подпространство в ядре отображения g. Пусть

$$f : X \longrightarrow Y$$

—естественный морфизм. Этот морфизм будет экстремальным стягиванием. Действительно, X имеет естественный морфизм p на $\mathbf{P}^n$ = (множество одномерных подпространств в $\mathbf{C}^{n+1}$), который задается формулой $p(g, L) = L$. Слоями этого морфизма являются проективные пространства размерности $n^2 - 1$. Следовательно, многообразие X гладко. Введем обозначения

$$F = \{ g : \operatorname{rk} g \leq n - 1 \},$$

$$E = \{ (g, L) : \operatorname{rk} g \leq n - 1 \}.$$

---

[1] То есть берется Proj симметрического произведения $S^*(\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$—заданное векторное расслоение, см. Хартсхорн Р Алгебраическая геометрия.—М.: Мир, 1981, гл. II, § 7.—*Прим. ред.*

Ограничение морфизма p на E превращает E в расслоение над $\mathbf{P}^n$, слой которого над L состоит из проективизации множества вырожденных отображений

$$\mathbf{C}^{n+1}/L \longrightarrow \mathbf{C}^n.$$

Следовательно, E неприводимо. Если $g \in F$, то $f^{-1}(g)$ является проективным пространством размерности $n - \operatorname{rk} g$. Таким образом, для общего элемента $g \in F$ этот слой изоморфен $\mathbf{P}^1$. Если $n \geq 2$, то существует элемент $g \in F$, такой, что

$$\operatorname{rk} g = n - 2 \quad \text{и} \quad f^{-1}(g) = \mathbf{P}^2.$$

Это показывает, что f не может быть обратимым к раздутию некоторого гладкого подмногообразия. В действительности можно показать, что многообразие F является особым в точке g тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} g \leq n - 2$.

(5.15) Сравнение теории поверхностей с теорией трехмерных многообразий

Имеется следующая таблица параллельных результатов:

X — гладкая проективная поверхность	X — гладкое проективное трехмерное многообразие
1) каноническое кольцо $\bigoplus_{m\geq} H^0(X;\ mK_X)$ является конечно порожденным;	1) каноническое кольцо $\bigoplus_{m\geq} H^0(X;\ mK_X)$ является конечно порожденным;
2) $H^0(X;\ mK_X) = 0$ для всех $m > 0$ тогда и только тогда, когда X — линейчатая поверхность;	2) $H^0(X;\ mK_X) = 0$ для всех $m > 0$ тогда и только тогда, когда X — унилинейчатое многообразие;
3) каждый бирациональный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ гладких проективных поверхностей является композицией стягиваний исключительных кривых;	3) каждый бирациональный морфизм $f : X \longrightarrow Y$ гладких проективных трехмерных многообразий является композицией дивизориальных стягиваний и флипов;

4) Пусть (Z, p) – росток особенности на поверхности (не обязательно изолированный). Тогда существуют проективные бирациональные морфизмы f, g, h и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

В этой диаграмме:

K_X является полуобильным относительно f;

K_Y является обильным относительно морфизма g;

X – гладкая поверхность;

поверхность Y имеет лишь рациональные двойные особые точки;

поверхность X однозначно определена и называется **минимальным разрешением**;

поверхность Y однозначно определена и называется **каноническим разрешением**.

4) Пусть (Z, p) – росток особенности на трехмерном многообразии (не обязательно изолированный). Тогда существуют проективные бирациональные морфизмы f, g, h и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

В этой диаграмме:

K_X является полуобильным относительно f;

K_Y является обильным относительно морфизма g;

X имеет $\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, имеющие коразмерность 3;

многообразие Y имеет лишь канонические особенности, имеющие коразмерность 2;

многообразие X определено однозначно вне объединения некоторого набора рациональных кривых и называется **$\mathbb{Q}$-факториальной терминальной модификацией**;

многообразие Y определено однозначно и называется **канонической модификацией**.

В приведенной таблице пучок L на многообразии V мы называем полуобильным (соответственно обильным) относительно морфизма $\phi : V \longrightarrow W$, если существует морфизм (соответственно вложение) $F : V \longrightarrow W \times \mathbf{P}^n$, при котором коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\phi"'] & & W\times\mathbf{P}^n \arrow[dl] \\ & W & \end{tikzcd}$$

и $F^*\mathcal{O}(1) = mL$ для некоторого целого $m > 0$.

(5.16) *Литература.* Пример (5.1) принадлежит Зарисскому [Z], пример (5.5) взят из работы Мори [M1], а (5.9)—из [F]. Список литературы по программе Мори содержится в работах [KMM], [Ko4] и [W]. Пример (5.14.iii) указал нам Л.Эйн.

Лекция 6
Особенности в программе минимальных моделей

(6.1) Пусть X—многообразие размерности больше 1, такое, что mK_X является дивизором Картье. Предположим, что $f : Y \longrightarrow X$—собственный бирациональный морфизм нормального многообразия Y. Обозначим через e общую точку некоторого исключительного относительно f дивизора E. Если E локально определяется уравнением $g = 0$ (как схема), то локально для некоторого рационального числа $a(E)$ выполнено равенство

$$f^*(s) = g^{ma(E)}\,(dy_1\wedge\ldots\wedge dy_n)^{\otimes m},$$

где $ma(E)$—целое число, s—локально порождающее сечение $\mathcal{O}(mK_X)$, а переменные y_i определяют локальную систему координат в точке e. Число $a(E)$ не зависит от выбора f и Y. Точнее говоря, для любых многообразий Y и Y', которые локально изоморфны над X в общих точках исключительных дивизоров E и E', выполнено равенство

$$a(E) = a(E').$$

Если $f : Y \longrightarrow X$—собственный бирациональный морфизм, такой, что K_Y является линейным расслоением (например, если

Y гладко), то mK_Y линейно эквивалентен

$$f^*(mK_X) + \sum ma(E_i)\cdot E_i,$$

где E_i — исключительные дивизоры. Рассматривая дивизоры с точностью до численной эквивалентности, мы можем разделить на m и получить

$$K_Y \equiv f^*(K_X) + \sum a(E_i)E_i.$$

(6.2) Определение. Назовем число $a(E)$ **дискрепантностью** многообразия X в дивизоре E. **Дискрепантностью** всего многообразия X называется число

$$\operatorname{discrep}(X) = \inf\{a(E) : E \text{ — исключительный дивизор для некоторого } f : Y \longrightarrow X\}.$$

Например, если X — гладкое многообразие, то $\operatorname{discrep}(X) = 1$.

(6.3) Утверждение. *Имеем либо*

$$-1 \le \operatorname{discrep}(X) \le 1,$$

либо $\operatorname{discrep}(X) = -\infty$.

Доказательство. Раздутие подмногообразия коразмерности 2, которое пересекает множество гладких точек многообразия X, показывает, что $\operatorname{discrep}(X) \le 1$.

Рассмотрим некоторое разрешение $f : Y \longrightarrow X$, для которого E — исключительный дивизор. Предположим, что $a(E) < -1$; значит, локально в некоторой окрестности общей точки $s \in E$ получаем

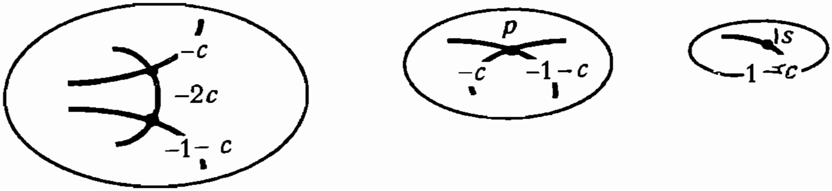
$$K_Y \equiv f^*(K_X) - (1 + c)E, \text{ где } c > 0.$$

Пусть S — общее подмногообразие коразмерности 2 в X, содержащееся в E и проходящее через s. Обозначим через Z множество $B_S Y$. Пусть $g : Z \longrightarrow Y$ — раздутие Y в S и E_S — исключительное многообразие этого раздутия. Тогда

$$(*)\qquad \begin{aligned} K_Z = g^*K_Y + E_S &= g^*f^*(K_X) - (1 + c)g^*E + E_S = \\ &= g^*f^*(K_X) - (1 + c)F + cE_S, \end{aligned}$$

где F — собственный прообраз дивизора E. Пусть P — некоторая компонента пересечения $F \cap E_S$. Если обозначить через W множество $B_P Z$, то дивизор E_P входит в канонический класс

K_W с кратностью $-2c$. В случае поверхностей это видно из следующего рисунка:



Если теперь повторить раздутие уже в точке пересечения собственного прообраза F и E_p, мы получим компоненту с дискрепантностью $-3c$ и т. д.

(6.4) Определение. В зависимости от значения дискрепантности многообразия X мы введем следующие четыре типа особенностей на X:

тип особенностей	discrep(X)
терминальные	> 0
канонические	≥ 0
лог-терминальные	> -1
лог-канонические	≥ -1

(6.5) Предложение. *Пусть $f: Y \longrightarrow X$ — некоторое разрешение особенностей. Если для некоторого числа c $(1 \geq c \geq 0)$ выполнено неравенство $a(E) \geq c$ для любого f-исключительного дивизора E, то* $\operatorname{discrep}(X) \geq c$.

Если исключительное множество морфизма f является дивизором с нормальными пересечениями и для каждого f-исключительного дивизора E выполнено неравенство $a(E) \geq c$ для некоторого числа c $(1 \geq c \geq -1)$, то $\operatorname{discrep}(X) \geq c$.

Доказательство. С помощью вычислений, которые аналогичны использованным выше в (*), получаем, что для $S \subsetneq E$ выполнено неравенство $a(E_S) \geq a(E)$. Для того чтобы сравнить это число с числом $a(E')$ в общей точке e' другого разрешения особенностей $f': Y' \longrightarrow X$, заметим, что существует многообразие Y'', являющееся некоторой последовательностью раздутий многообразия Y, причем некоторый исключительный дивизор на Y'' локально изоморфен (Y', e') в общей точке.

(6.6) Лемма. *Если D — общее гиперплоское сечение X, то*

$$\operatorname{discrep}(X) \le \operatorname{discrep}(D).$$

Доказательство. Утверждение является тривиальным следствием формулы присоединения.

(6.7) Предложение. *Пусть $g : X' \longrightarrow X$ — собственный морфизм. Тогда*

i) $(\deg g)\cdot(\operatorname{discrep}(X) + 1) \ge (\operatorname{discrep}(X) + 1)$;

ii) *если g — этальный морфизм в коразмерности* 1 *на X', то* $\operatorname{discrep}(X') \ge \operatorname{discrep}(X)$.

Доказательство. Утверждение i) следует из коммутативности следующей диаграммы расслоенного произведения:

$$\begin{array}{ccc}
e' \in E' & \longrightarrow & E \\
\cap & h & \cap \\
Y' & \longrightarrow & Y \\
{\scriptstyle f'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\
E' & \longrightarrow & E
\end{array}$$

Для двух дивизоров A и B введем обозначение $A \succ B$, если разность $A - B$ является эффективным дивизором. В окрестности общей точки e' имеем

$$K_{Y'} = f'^*K_{X'} + a(E')E' \succ f'^*g^*K_X + a(E')E' = h^*f^*K_X + a(E')E'.$$

$$K_{Y'} = h^*K_Y + (r-1)E' = h^*f^*K_X + h^*(a(E)E) + (r-1)E' =$$

$$= h^*f^*K_X + (a(E)r + (r-1)E'.$$

Если g — этальный морфизм в коразмерности 1, то знак «$\succ$» превращается в знак равенства. Это дает утверждение ii).

(6.8) Определение. Пусть X — росток нормального многообразия, причем K_X является $\mathbb{Q}$-дивизором Картье индекса m. Тогда

$$\mathcal{O}(mK_X) \approx \mathcal{O}_X.$$

поэтому прообраз X' единичного сечения пучка O_X относительно отображения возведение в m-ю тензорную степень

$$K_X \longrightarrow O_X$$

обладает свойством $K_{X'} = O_{X'}$. Следовательно, росток X' имеет индекс 1. Мы будем называть X' **накрытием индекса 1 для ростка** X' (он корректно определен лишь с точностью до аналитического изоморфизма).

Заметим, что X является этальным накрытием X в коразмерности 1, и дискрепантность многообразия индекса 1 является целым числом. Пользуясь (6.7), получаем

(6.9) Предложение. *Росток многообразия X является лог-терминальным тогда и только тогда, когда он является циклическим фактором канонической особенности по некоторому свободному в коразмерности* 1 *действию.*

(6.10) Предложение. *Пусть X — некоторая поверхность; тогда*

i) *X имеет только терминальные особенности тогда и только тогда, когда X — гладкая поверхность;*

ii) *особенности X канонические тогда и только тогда, когда они являются* **дюваленскими особенностями (DV-особенностями)**, *которые также называются* **рациональными двойными точками**.

Доказательство. Пусть X — росток поверхности. Предположим, что X имеет канонические особенности, пусть $f : Y \longrightarrow X$ — минимальное разрешение этих особенностей. Тогда

$$K_Y = f^* K_X + \sum a_i E_i ,$$

где все $a_i \geq 0$. Если не все коэффициенты a_i равны 0, то существует дивизор E_j, такой, что $K_Y \cdot E_j < 0$, так как

$$K_Y \cdot \sum a_i E_i = (\sum a_i E_i)^2 < 0.$$

Используя формулу присоединения, мы получаем, что кривая E_j должна быть гладкой рациональной кривой с индексом самопересечения −1. Это противоречит минимальности разрешения. Следовательно, $K_Y = f^* K_X$. Опять, используя формулу присоединения, получаем, что все E_i должны быть гладкими рациональными кривыми и иметь индекс самопересечения -2. Нормальные особенности с этим свойством в точности и являются дювалевскими особенностями.

(6.11) Предложение. *Для ростка (X, x) нормальной поверхности следующие условия эквивалентны:*

1) *росток (X, x) имеет лог-терминальные особенности;*

2) *росток (X, x) является фактором $(\mathbb{C}^2, 0)$ по конечной группе, свободно действующей в коразмерности* 1;

3) *росток (X, x) является фактором $(\mathbb{C}^2, 0)$ по действию конечной группы.*

Доказательство. Для любого ростка нормальной поверхности X с $\mathbb{Q}$-дивизором Картье K_X рассмотрим накрытие индекса 1

$$g : X' \longrightarrow X.$$

Покажем, что из 1) следует 2). Мы уже знаем, что, если X имеет лог-терминальные особенности, то X' также имеет лог-терминальные особенности (см. (6.7)). Поскольку $K_{X'}$ является дивизором Картье, дискрепантность X' является целым числом, большим -1. Следовательно, X' имеет лишь канонические особенности. Таким образом, многообразие X' имеет дювалевские особенности и локально представимо в виде фактора $\mathbb{C}^2$ по свободному в коразмерности 1 действию некоторой конечной группы. То есть $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ — универсальное накрытие $X - \{x\}$, что доказывает 2).

Если (X, x) является фактором $(\mathbb{C}^2, 0)$ по действию конечной группы, то неравенство

$$(\deg g)\cdot(\mathrm{discrep}(X) + 1) \geq \mathrm{discrep}(X') + 1$$

показывает, что особенность (X, x) лог-терминальна.

Более тщательный анализ дает:

(6.12) Предложение. *Росток нормальной поверхности является лог-каноническим тогда и только тогда, когда он лог-терминальный или «простой эллиптический», или «параболический», или является фактором одного из этих двух последних* *типов*[1].

Используя неравенство $\operatorname{discrep}(X) \le \operatorname{discrep}(H)$, где H — общее гиперплоское сечение X, а также описание терминальных и канонических особенностей поверхностей, получаем:

(6.13) Следствие. *Если X имеет лишь канонические особенности, то она является горенштейновой в коразмерности* 2.

Если X имеет лишь терминальные особенности, то она гладка в коразмерности 2.

(6.14) Теорема. *Все лог-терминальные особенности являются рациональными, т. е. для любого разрешения особенностей $f: Y \longrightarrow X$ выполнено условие*

$$R^i f_* \mathcal{O}_Y = 0 \text{ для } i > 0.$$

Набросок доказательства для трехмерного случая. Как мы уже видели выше, накрытие X' индекса 1 имеет лишь канонические особенности, следовательно, мы можем свести доказательство к рассмотрению случая, когда многообразие X имеет лишь канонические особенности и K_X является дивизором Картье.

Сначала мы раздуем одномерное подмножество особенностей (если, конечно, оно существует). В своей общей точке это множество локально аналитически изоморфно произведению диска и дюваленской особенности на поверхности. Следовательно, прообраз K_X при раздутии $X'' \longrightarrow X$ равен $K_{X''}$. Предположим, что

$$f: Y \longrightarrow X'' \longrightarrow X$$

является разрешением особенностей X, причем $K_Y = f^* K_X + S$ для некоторого эффективного дивизора Картье S. Согласно рассуждениям, приведенным выше, дивизор S должен лежать в объединении прообразов конечного числа точек в X. Поскольку S — гиперповерхность, она имеет горенштейновы особенности.

---

[1] Особенность называется простой эллиптической, если при ее разрешении вклеивается эллиптическая кривая, и параболической, если при ее разрешении вклеивается кривая рода 1, составленная из неособых рациональных кривых, образующих комбинаторный цикл (см. [S*]). —*Прим. ред.*

Проверим, что $R^1 f_* \mathcal{O}_Y = 0$. Применяя f_* к короткой точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y(S) \longrightarrow \mathcal{O}_S(S) \longrightarrow 0,$$

получаем длинную точную последовательность когомологий

$$\ldots \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_S(S)) \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_Y \longrightarrow R^1 f_* \mathcal{O}_Y(S) \longrightarrow \ldots$$

Если $\mathcal{I}$ — пучок идеалов для S, то, согласно теореме об обращении в нуль Грауэрта—Рименшнайдера (см. теорему 8.8), имеем

$$R^i f_* \mathcal{O}_Y(S) = R^i f_* \omega_Y = 0 \text{ для } i = 1, 2.$$

Таким образом, из приведенной точной последовательности получаем также

$$H^2(\mathcal{O}_S(S)) = H^2(\omega_Y / \mathcal{I}\omega_Y) = 0.$$

Поскольку $\omega_S = \mathcal{O}_S(2S)$, используя двойственность, мы получаем, что $H^0(\mathcal{O}_S(S)) = 0$. Теперь, снова используя длинную точную последовательность, устанавливаем, что $R^1 f_* \mathcal{O}_Y = 0$.

Для того чтобы доказать, что $R^2 f_* \mathcal{O}_Y = 0$, заметим, что в силу относительной теоремы двойственности (она включает в себя спектральную последовательность Лере и двойственность Серра) пучок $R^2 f_* \mathcal{O}_Y$ двойствен пучку $\mathcal{O}_X(K_X) / f_* \mathcal{O}_Y(K_Y)$. Но последний пучок является нулевым, поскольку X имеет лишь канонические особенности (все сечения K_X поднимаются до сечений K_Y).

(6.15) Следствие. *Пусть X имеет лишь канонические особенности и $g : X' \longrightarrow X$ является локальным накрытием индекса I; тогда любая плоская деформация $\{X_s\}$ многообразия X покрывается некоторой деформацией многообразия X'.*

Идея доказательства. Пусть Z — множество точек в X, имеющих индекс больше 1. Тогда ограничение g на дополнение $X \setminus Z$ является циклическим накрытием. С помощью рассуждений типа теоремы Лефшеца доказывается, что фундаментальная группа дополнения $X_s \setminus Z_s$ отображается в фундаментальную группу $X \setminus Z$, причем последняя является ее ретрактом.

(6.16) Следствие. *Если $\mathcal{X}/S$ — плоское семейство, слои ко-*

торого имеют лишь канонические особенности, то

$$\mathcal{O}_X(qK_X) = \mathcal{O}_X \otimes ((\omega_{\mathfrak{X}/S}{}^{\otimes q})^{**})$$

и построение пучка $(\omega_{\mathfrak{X}/S}{}^{\otimes q})^{**}$ *коммутирует с заменой базы.*

Идея доказательства. Это утверждение выражает локальное свойство многообразия X. Согласно (6.15), морфизм $f\colon \mathfrak{X}' \longrightarrow \mathfrak{X}$ коммутирует с заменой базы, следовательно, с этой заменой коммутирует построение пучка $\omega_{\mathfrak{X}'/S}$. Осталось использовать разложение в прямую сумму

$$f_*\omega_{\mathfrak{X}'/S} =$$
$$= (\omega_{\mathfrak{X}/S})^{**} \oplus ((\omega_{\mathfrak{X}/S})^2)^{**} \oplus \ldots \oplus ((\omega_{\mathfrak{X}/S})^{m-1})^{**} \oplus ((\omega_{\mathfrak{X}/S})^{m})^{**},$$

где последнее слагаемое является локально свободным пучком.

Структура трехмерных канонических особенностей

(6.17) Определение. Назовем горенштейнову особенность (Z^n, z) **эллиптической**, если для некоторого (для любого, что равносильно) разрешения особенностей $f\colon Y \longrightarrow Z$ выполнены условия:

(i) $R^i f_*\mathcal{O}_Y = 0$ *для* $0 < i \le n-1$;

(ii) $R^{n-1} f_*\mathcal{O}_Y = \mathbf{C}$.

Используя теорему двойственности (см. (6.14)), можно заменить условие (ii) на эквивалентное

(ii′) $f_*\omega_Y = \mathfrak{m}_{z,Z}\,\omega_Z$.

(6.18) Теорема. *Если* (X, x) — *горенштейнова каноническая особенность, а* H — *общее гиперплоское сечение, проходящее через* x, *то* (H, x) *является либо рациональной, либо эллиптической особенностью.*

Доказательство. Пусть $f\colon Y \longrightarrow Z$ — разрешение особенностей многообразия X, которое индуцирует разрешение особенностей на H, причем схема $f^{-1}(x)$ является некоторым дивизором Картье E, а линейное расслоение $L = f^{-1}\mathfrak{m}_{x,X}$ порождается глобальными сечениями и

$$f^*H = E + L.$$

Согласно формуле присоединения, $\omega_H = \omega_X(H)|_H$. Поэтому если s локально порождает ω_X, а h локально задает H, то вычет рациональной дифференциальной формы (s/h) локально порождает ω_H. Пусть теперь e—локально порождающее сечение для расслоения E, а l—локально порождающее сечение для L. Тогда для элемента $a \in \mathfrak{m}_x$ имеем равенство

$$f^*a \cdot f^*s/f^*h = (f^*a/e)\cdot f^*(s/l).$$

Сечение (f^*a/e) регулярно вдоль E и $f^*(s/l) \in \omega_Y(L)$. Следовательно, вычет $(f^*a \cdot f^*s/f^*h)$ лежит в $\Gamma(\omega_Y(L))$. Применяя f_* к этому сечению, получаем

$$a\cdot(\text{вычет } s/h).$$

Таким образом, любое сечение $\mathfrak{m}_{x,X}\omega_H$ является прямым образом. Итак, $f_*\omega_L = \mathfrak{m}_{x,X}\,\omega_H$ (x—эллиптическая особенность), или $f_*\omega_L = \omega_H$ (x—рациональная особенность).

Теперь мы приведем без доказательства серию результатов в размерности 3.

(6.19) Предложение. *Пусть (S, s)—эллиптическая особенность на поверхности.*

1) *Если* $\operatorname{mult}_s S \geq 3$, *то раздутие в точке* s

$$g : B_s S = B \longrightarrow S$$

имеет лишь дювалевские особенности и

$$\omega_B = g^*\omega_S \otimes g^{-1}\mathfrak{m}_{s,S}.$$

2) *Если* $\operatorname{mult}_s S = 2$, *то некоторое взвешенное раздутие*[1] $g : B \longrightarrow S$ *имеет лишь дювалевские особенности и*

$$\omega_B = (g^*\omega_S \otimes g^{-1}\mathfrak{m}_{s,S})^{**}.$$

(6.20) Следствие. *Пусть (X, x)—трехмерная каноническая особенность, такая, что общее гиперплоское сечение, проходящее через x, имеет эллиптическую особенность в x. Тогда*

1) *если* $\operatorname{mult}_x X \geq 3$, *то раздутие*

[1] Взвешенное раздутие отличается от обычного тем, что в соответствующей алгебре выбирается другая градуировка. — *Прим. перев.*

$$g : B_x X = B \longrightarrow S$$

имеет лишь канонические особенности и $\omega_B = g^*\omega_X$.

2) *если* $\mathrm{mult}_x X = 2$, *то некоторое взвешенное раздутие* $g : B \longrightarrow X$ *имеет лишь канонические особенности и* $\omega_B = g^*\omega_X$.

Грубо говоря, доказательство этого следствия состоит в обращении логической последовательности утверждений в доказательстве (6.18).

(6.21) Следствие. *Пусть* X *— горенштейново трехмерное многообразие, имеющее лишь канонические особенности; тогда существует собственный бимероморфный морфизм* $g : X' \longrightarrow X$, *такой, что для каждой точки* $x' \in X$ *общее гиперплоское сечение* H, *проходящее через* x', *имеет лишь рациональные особенности. Следовательно,* H *— горенштейнова поверхность, имеющая лишь двойные особые точки.*

(6.22) Определение. Трехмерная особенность (X, x) называется **составной дювалевской особенностью** (или *cDV*-точкой), еслн общее гиперплоское сеченне, проходящее через x является поверхностью с дювалевской особенностью в x.

(6.23) Теорема. *Трехмерная особенность является терминальной горенштейновой особенностью тогда и только тогда, когда она является изолированной cDV-точкой.*

Набросок доказательства. Поскольку мы знаем, что терминальная особенность должна быть изолирована, то применяя (6.20), мы довольио легко получаем утверждение теоремы в одну сторону. Если бы общее гиперплоское сечение изолированной особенности имело эллиптическую особенность, то после раздутия мы бы получили нулевую дискрепантность для исключительного дивизора, что противоречит терминальности. Таким образом, если особенность терминальна, то ее общее гиперплоское сечение может иметь лишь дювалевские особенности. Немного позднее в (16.1) мы дадим набросок другого пути для доказательства.

Для особенностей, не являющихся горенштейновыми, мы можем рассмотреть каноническое горенштейново накрытие, и, переходя затем к фактору, прийти к следующей теореме:

(6.24) Теорема. *Если X—трехмерное многообразие, имеющее лишь канонические особенности, то существует проективный бирациональный морфизм $f: Y \longrightarrow X$, для которого выполнено условие $K_Y = f^*K_X$, причем многообразие Y имеет лишь терминальные особенности. Этот морфизм называют* **крепантным** *разрешением особенностей многообразия X.*

Индуктивная конструкция канонических особенностей

(6.25) Теорема. *Если X—трехмерное многообразие, имеющее лишь канонические особенности, то существует последовательность морфизмов*

$$Y = X_q \longrightarrow X_{q-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 = X,$$

такая, что

1) *каждое многообразие X_i при $i \geq 1$ является $\mathbf{Q}$-факториальным и имеет лишь канонические особенности;*

2) *морфизм $X_1 \longrightarrow X$ стягивает лишь конечное число кривых, причем он является изоморфизмом, если X—$\mathbf{Q}$-факториальное многообразие;*

3) *при $i > 1$ морфизм $X_i \longrightarrow X_{i-1}$ стягивает ровно один дивизор и размерность пространства $NE(X_i/X_{i-1})$ равна 1;*

4) *многообразие Y имеет лишь терминальные особенности;*

5) *канонический дивизор K_Y является прообразом K_X, более того, канонический дивизор на каждом промежуточном многообразии X_i является прообразом K_X.*

(6.26) *Литература.* Терминальные и канонические особенности были определены Ридом в [R2], их логарифмические варианты были введены позже в [Ka4]. Утверждения (6.5 - 6.8) можно найти в [R2]. Критерий (6.9) был замечен в [Ka4], а (6.12)—в [Ka1]. Теорема (6.14) в трехмерном случае была доказана Шефердом—Бэрроном [S–B], а в общем случае—Элкикоком [El] и Фленнером [Fl]. Приведенное доказательство принадлежит Шеферду—Бэррону [R5]. Утверждения (6.15–6.16) содержатся в работе Коллара [Ko2]. Описание структуры трехмерных канонических особенностей принадлежит Риду [R1, R2]. Свойство (6.19) было также получено Лофером [L1], а теорема (6.25) есть у Каваматы [Ka5].

Лекция 7
Расширенные варианты программы минимальных моделей

Мы обсудим следующие три варианта расширения программы минимальных моделей:

1) относительный случай;
2) аналитический случай;
3) многообразия с действием группы.

(7.1) Относительный случай. Если X — проективное многообразие, то пространство $N(X)$ определяется как

$$\{\text{группа, порожденная неприводимыми кривыми по модулю численной эквивалентности}\} \otimes \mathbf{R}.$$

С другой стороны, если $f: X \longrightarrow Y$ — проективный морфизм, причем X не обязательно проективно, а Y не обязательно является компактным или алгебраическим многообразием, то можно определить

$$N(X/Y) = \frac{\{\mathbf{Z}\text{-модуль, порожденный неприводимыми кривыми } C, \text{ такими, что } f(C) \text{ — точка}\}}{\{1\text{-циклы } Z, \text{ такие, что } Z \cdot D = 0 \text{ для всех дивизоров Картье } D\}} \otimes \mathbf{R},$$

$NE(X/Y)$ — конус, порожденный классами эффективных кривых в $N(X/Y)$.

Теорема о стягивании и теорема о конусе в этом относительном случае имеют те же самые формулировки, что и в можем рассмотреть каноническое горенштейново накрытие, и, переходя затем к фактору, прийти к следующей теореме:

(6.24) Теорема. *Если X—трехмерное многообразие, имеющее лишь канонические особенности, то существует проективный бирациональный морфизм $f: Y \longrightarrow X$, для которого выполнено условие $K_Y = f^*K_X$, причем многообразие Y имеет лишь терминальные особенности. Этот морфизм называют* **крепантным** *разрешением особенностей многообразия X.*

Индуктивная конструкция канонических особенностей

(6.25) Теорема. *Если X—трехмерное многообразие, имеющее лишь канонические особенности, то существует последовательность морфизмов*

$$Y = X_q \longrightarrow X_{q-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 = X,$$

такая, что

1) *каждое многообразие X_i при $i \geq 1$ является $\mathbb{Q}$-факториальным и имеет лишь канонические особенности;*

2) *морфизм $X_1 \longrightarrow X$ стягивает лишь конечное число кривых, причем он является изоморфизмом, если X—$\mathbb{Q}$-факториальное многообразие;*

3) *при $i > 1$ морфизм $X_i \longrightarrow X_{i-1}$ стягивает ровно один дивизор и размерность пространства $NE(X_i/X_{i-1})$ равна 1;*

4) *многообразие Y имеет лишь терминальные особенности;*

5) *канонический дивизор K_Y является прообразом K_X, более того, канонический дивизор на каждом промежуточном многообразии X_i является прообразом K_X.*

(6.26) *Литература.* Терминальные и канонические особенности были определены Ридом в [R2], их логарифмические варианты были введены позже в [Ka4]. Утверждения (6.5 – 6.8) можно найти в [R2]. Критерий (6.9) был замечен в [Ka4], а (6.12)—в [Ka1]. Теорема (6.14) в трехмерном случае была доказана Шефердом—Бэрроном [S–B], а в общем случае—Элкиком [El] и Фленнером [Fl]. Приведенное доказательство принадлежит Шеферду—Бэррону [R5]. Утверждения (6.15–6.16) содержатся в работе Коллара [Ko2]. Описание структуры трехмерных канонических особенностей принадлежит Риду [R1, R2]. Свойство (6.19) было также получено Лофером [L1], а теорема (6.25) есть у Каваматы [Ka5].

Лекция 7
Расширенные варианты программы минимальных моделей

Мы обсудим следующие три варианта расширения программы минимальных моделей:

1) относительный случай;
2) аналитический случай;
3) многообразия с действием группы.

(7.1) Относительный случай. Если X – проективное многообразие, то пространство $N(X)$ определяется как

$$\{\text{группа, порожденная неприводимыми кривыми по модулю численной эквивалентности}\} \otimes \mathbf{R}.$$

С другой стороны, если $f: X \longrightarrow Y$ — проективный морфизм, причем X не обязательно проективно, а Y не обязательно является компактным или алгебраическим многообразием, то можно определить

$$N(X/Y) = \frac{\{\mathbf{Z}\text{-модуль, порожденный неприводимыми кривыми } C, \text{ такими, что } f(C) - \text{точка}\}}{\{1\text{-циклы } Z, \text{ такие, что } Z \cdot D = 0 \text{ для всех дивизоров Картье } D\}} \otimes \mathbf{R},$$

$NE(X/Y)$ — конус, порожденный классами эффективных кривых в $N(X/Y)$.

Теорема о стягивании и теорема о конусе в этом относительном случае имеют те же самые формулировки, что и в абсолютном случае (и даже то же самое доказательство). В доказательстве теоремы о конусе используется тот факт, что если морфизм $f: X \longrightarrow Y$ стягивает некоторую кривую $C \subsetneq X$ в точку на Y, то он стягивает все кривые из того же класса эквивалентности в *ту же самую* точку на Y.

Если рассматриваемое выше многообразие X является трехмерным и гладким или имеет лишь $\mathbf{Q}$-факториальные терминальные особенности, то последовательность стягиваний над Y приведет нас либо к минимальной модели над Y, либо к расслоению $g' : X' \longrightarrow Z'$ на $\mathbf{Q}$-многообразия Фано, причем в получившейся коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "g'"] \arrow[dr, "f'"'] & & Z' \arrow[dl, "h'"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

отображение g' имеет связные слои, дивизор $-K_{X'}$ является обильным относительно морфизма g' и $\dim Z' < \dim X'$.

Если же морфизм f является бирациональным, то с помощью последовательности дивизориальных стягиваний и направленных флипов мы получим морфизм $f' : X' \longrightarrow Y$, для которого $K_{X'}$ является численно эффективным относительно f'. Аналогично случаю поверхностей из этого вытекает, что $K_{X'}$ полуобилен относительно f' (см. лекцию 3).

«Разложение» бирациональных морфизмов над Y вытекает из следующего предложения.

(7.2) Предложение. *Пусть $g : Z \longrightarrow X$ — собственный бирациональный морфизм над Y нормальных алгебраических (или аналитических) многообразий, таких, что K_Z является $\mathbf{Q}$-дивизором Картье, а X имеет лишь $\mathbf{Q}$-факториальные терминальные особенности. Тогда если K_Z численно эффективен относительно g, то g — изоморфизм.*

(7.3) Аналитический случай. Здесь мы имеем дело с проективным морфизмом $f: X \longrightarrow Y$, где Y — аналитическое пространство, удовлетворяющее слабым предположениям о конечности. Поскольку в этой ситуации справедливы все необходимые теоремы об обращении в нуль (в последующих лекциях мы познакомимся с этими теоремами), мы получаем те же результаты, что и в относительном случае.

(7.4) Многообразия с действием групп. Предположим, что на прективном многообразни X, которое предполагается гладким или имеющим лишь $\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, действует конечная группа G. Тогда для инвариантного коиуса $NE(X)^G$ в пространстве $N(X)^G$ справедливы аналоги теоремы о конусе и теоремы о стягивании. Единственное отличие состоит в том, что G-орбнта экстремального луча является экстремальной гранью в конусе $NE(X)$, поскольку дивизор K_X является G-инварнантным. Таким образом, теорема о стягивании представляет собой утверждение о стягиваниях G-инвариантных экстремальиых граней.

Существуют также и другие приложения теории минимальных моделей для миогообразий с действием групп. Например, предположим, что X — поверхность, определенная над полем k. Мы получим миннмальную модель этой поверхности над k, еслн рассмотрим ее как многообразие с действием группы $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, где K — алгебраическое замыкание поля k. Хотя в действительностн эта группа не является коиечной, ее действие на группе Нерона—Севери многообразия X_K пропускается через действие конечной группы. Поэтому построенне G-минимальной модели осуществляется так же, как и в случае алгебраически замкнутого основного поля.

(7.5) Если X — гладкая комплексная проективная поверхность с действием конечиой группы G, то мы можем получить классификацию всех экстремальных лучей на X тем же способом, что н раньше, с незначительиыми измененнями. Любой G-экстремальный луч порождается 1-циклом вида $C = \sum C_i$, где C_i — неприводнмые рациональные кривые из одной G-орбиты.

1) Еслн $C^2 < 0$, то нетрудно доказать, что все кривые C_i должны быть гладкнми, попарно непересекающимися и имеющимн

индекс самопересечения -1. Таким образом, все кривые C_i могут быть стянуты в гладкие точки, на которых G действует перестановками.

2) Если $C^2 = 0$, то связная компонента C должна состоять либо из пары пересекающихся гладких рациональных кривых с индексом самопересечения -1, либо из одной гладкой рациональной кривой с индексом самопересечения 0.

3) Если $C^2 > 0$, то $N(X)^G = \mathbf{Z}$, антиканонический дивизор $-K_X$ является обильным, и, следовательно, X — поверхность Дель-Пеццо.

(7.6) Теорема. *Пусть трехмерное многообразие X с терминальными особенностями принадлежит классу G-многообразий, являющихся $\mathbf{Q}$-факториальными (т.е. каждый G-инвариантный дивизор Вейля на X является $\mathbf{Q}$-дивизором Картье). Тогда любое такое многообразие X бирационально эквивалентно в категории G-многообразий одному из следующих:*

1) *трехмерному G-многообразию Y из того же класса бирациональной эквивалентности с численно эффективным каноническим дивизором K_Y;*

2) *трехмерному G-многообразию Y из того же класса бирациональной эквивалентности, которое имеет G-морфизм f на некоторое нормальное проективное G-многообразие Z, причем антиканонический дивизор $-K_Y$ является обильным относительно f и $\dim Z < \dim X$.*

(7.7) В заключение мы дадим набросок доказательства (использующего программу минимальных моделей) теоремы Петернелла, утверждающей, что любое гладкое трехмерное пространство Мойшезона Z, не являющееся проективным, содержит рациональную кривую. Первоначальное доказательство было получено еще до завершения программы Мори в размерности 3. Оно потребовало очень изощренных вычислений, использующих лишь существование и структуру экстремальных стягиваний гладких трехмерных многообразий.

Напомним, что в этой ситуации всегда существует гладкое проективное трехмерное многообразие X с бирациональным морфизмом $f: X \longrightarrow Z$[1] Будем применять последовательность бирациональных модификаций f, получающуюся из *абсолютной* программы минимальных моделей, до тех пор, пока на каждом таком шаге сохраняется возможность морфизма в Z. В конце концов мы придем к одной из следующих двух возможностей:

1) Получится минимальное многообразие X'. В этом случае из предложения (7.2) следует, что X' должно быть изоморфно Z (случай линейчатого многообразия по предположению невозможен).

2) Получится экстремальное стягивание $f': X' \longrightarrow X''$, такое, что рациональное отображение $X'' \dashrightarrow Z$ *не является морфизмом*. Поскольку это последнее отображение не является морфизмом, согласно основной теореме Зарисского, по крайней мере один слой морфизма f' не стягивается в точку на многообразии Z. С другой стороны, слои f' покрываются рациональными кривыми. Следовательно, пространство Z должно содержать рациональную кривую.

(7.8) *Литература*. Аналитический вариант (7.3) был разработан Накаямой [Nak]. Первоначальное доказательство теоремы (7.7) содержится в [P], а настоящее доказательство принадлежит Коллару. Остальные результаты лекции взяты из [M3].

---

[1] Мойшезон Б.Г. Об n-мерных компактных комплексных многообразиях, имеющих n алгебраически независимых мероморфных функций. I, II, III. —Изв. АНСССР сер. матем., т. 30, № 3, 1966, с. 621-656. —*Прим. ред.*

Лекция 8
Теоремы об обращении в нуль

(8.1) Общий принцип. *Если когомологии пучка $\mathcal{F}$ возникают из топологических когомологий, то имеется теорема об обращении в нуль типа теоремы Кодаиры.*

Под этим мы понимаем, что для любого обильного линейного расслоения L на X при всех $i < \dim X$ выполнены равенства

$$H^i(X;\ \mathcal{F} \otimes L^{-1}) = 0.$$

(8.2) Проиллюстрируем этот принцип, используя его для доказательства классического случая этой теоремы, в котором X — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.

(8.2.1) Шаг 1.

Когерентный пучок в аналитической топологии является также пучком абелевых групп. Найдем топологически конструктивный пучок $\mathbf{F}$[1] с естественным отображением

$$\mathbf{F} \longrightarrow \mathcal{F},$$

таким, что индуцированное отображение на когомологиях этих пучков является сюръективным. Заметим, что когерентные когомологии когерентного аналитическго пучка совпадают с его когомологиями как пучка абелевых групп. Для пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ достаточно взять постоянный пучок $\mathbf{C}_X$, поскольку из теории Ходжа следует, что естественное отображение

$$H^i(X;\ \mathbf{C}_X) \longrightarrow H^i(X;\ \mathcal{O}_X),$$

индуцированное вложением пучков, является сюръективным.

(8.2.2) Шаг 2.

Предположим, что L^m является очень обильным пучком. Пусть s — общее сечение. Тогда множество нулей D этого сечения является гладким очень обильным дивизором. Рассмотрим диаграмму

---

[1] То есть локально постоянный пучок групп $\mathbf{C}^r$. — *Прим. ред.*

$$
\begin{tikzcd}
Z \subseteq L \arrow[r, "\otimes^m"] \arrow[dr, "p"'] & L \arrow[d] \arrow[r] & L^{\otimes m} \supseteq s(X) \arrow[dl] \\
& X \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}
$$

В этой диаграмме Z является прообразом сечения $s(X)$ в L, а p — m-листным циклическим накрытием многообразия X, разветвленным над дивизором $D \subseteq X$. Согласно теории Ходжа, отображение

$$H^i(Z, \mathbf{C}_Z) \longrightarrow H^i(Z, \mathcal{O}_Z)$$

является сюръективным. Поскольку слои морфизма p имеют размерность нуль, все высшие прямые образы пучков относительно морфизма p равны нулю; поэтому отображение

$$H^i(X;\ p_*\mathbf{C}_Z) \longrightarrow H^i(X;\ p_*\mathcal{O}_Z)$$

также является сюръективным. Действие группы $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ на многообразии Z разлагает последний морфизм в прямую сумму морфизмов, отвечающих собственным подпространствам. Это разложение в собственные подпространства согласовано с формой пересечения на

$$H^*(X;\ p_*\mathbf{C}_Z) = H^*(Z;\ \mathbf{C}_Z)$$

и с двойственностью Пуанкаре.

(8.2.3) Шаг 3.

Пусть ξ — примитивный корень m-й степени из единицы $e^{2\pi i/m}$. Имеется разложение $p_*\mathbf{C}_Z = \oplus\, \mathbb{C}[\xi^r]$, где $\mathbb{C}[\xi^r]$ обозначает локальную систему, в которой оператор монодромии при обходе один раз вокруг D является умножением на ξ^r. Если обозначить через $H^*(X; p_*\mathbf{C}_Z)[\xi^r]$ подпространство в $H^*(X; p_*\mathbf{C}_Z)$, являющееся собственным ξ^r-подпространством относительно действия $\mathbf{Z}_m$, то

$$H^*(X;\ p_*\mathbf{C}_Z)[\xi^r] = H^*(X;\ \mathbb{C}[\xi^r]).$$

Если $r \neq m$, то для вложения $i : (X-D) \longrightarrow X$ естественное отображение $\mathbb{C}[\xi^r] \longrightarrow i_!(\mathbb{C}[\xi^r]\,|_{X-D})$ является изоморфизмом, где $i_!$ обозначает расширение пучка на все многообразие

X, которое имеет нулевые слои над точками дивизора D. Таким образом,

$$H^*(X;\ p_*\mathbb{C}_Z)[\xi^r] = H^*(X;\ \mathbb{C}[\xi^r]) =$$
$$= H^*(X;\ i_!(\mathbb{C}[\xi^r]|_{X-D}) = H^*(X-D;\ \mathbb{C}[\xi^r]|_{X-D}).$$

(8.2.4) Шаг 4.

Теперь мы получили все необходимое для завершения доказательства. Поскольку множество $(Z-D)$ является аффинным, оно имеет гомотопический тип веществениного n-мерного CW-комплекса $(n = \dim_{\mathbb{C}} X)$. Таким образом, для $i < n$ имеем равенство

$$0 = H^{2n-i}(Z-D;\ \mathbb{C}) = H^{2n-i}(X-D;\ p_*\mathbb{C}_Z).$$

Используя приведенные выше отождествления и двойственность, получаем

$$0 = H^{2n-i}(X-D;\ \mathbb{C}[\xi^r]|_{X-D}) = H^{2n-i}(X-D;\ p_*\mathbb{C}_Z)[\xi^r],$$

последнее пространство двойственно к $H^i(X;\ p_*\mathbb{C}_Z)[\xi^r]$ при $i < n$ и $r \neq m$. Следовательно, из сюръективности следует

$$H^i(X;\ p_*\mathbb{C}_Z)[\xi^r] = 0 \text{ при } i < n.$$

С другой стороны,

$$H^i(X;\ p_*\mathcal{O}_Z)[\xi^r] = H^i(X;\ p_*\mathcal{O}_Z[\xi^r]).$$

Заметим, что $p_*\mathcal{O}_Z[\xi^r] = L^{-r}$, поскольку дивизор D задается локально в Z уравнением $z^m = g$ для подходящей функции z на L, т. е. для некоторого *сечения* L^{-1}. Это завершает доказательство.

Используя ту же самую основную конструкцию, мы получаем следующий общий результат:

(8.3) Общая теорема об обращении в нуль для линейных расслоений. *Пусть X — гладкое комплексное проективное многообразие, L — линейное расслоение на X, такое, что*

$$c_1(L) = M + \sum a_i D_i,$$

причем выполнены три условия:

1) *M является численно эффективным большим* nef- и big-$\mathbf{Q}$-*дивизором Картье;*

2) *дивизор $\sum D_i$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями*[1] *;*

3) $0 \le a_i < 1$ *и* $a_i \in \mathbf{Q}$ *для всех* i.

Тогда

$$H^i(X;\ L^{-1}) = 0 \text{ для всех } i < \dim X.$$

Доказательство. Сначала мы дадим доказательство в частном случае, когда дивизор M является обильным. Доказательство в этом случае значительно проще, и это основной случай, который мы будем использовать. Выберем положительное целое число m, такое, что $M^{\otimes m}$ является очень обильным дивизором Картье и числа ma_i являются целыми для всех i. Выберем общий дивизор B из линейной системы $M^{\otimes m}$. Тогда B — гладкий дивизор, пересекающий каждый дивизор D_i трансверсально. Дивизор

$$D = B + \sum ma_i D_i$$

является множеством нулей некоторого сечения пучка $L^{\otimes m}$. Снова рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, "p"'] & L \arrow[r, "\otimes^m"] \arrow[d] & L^{\otimes m} \supseteq s(X) \arrow[dl] \\
& X \arrow[ur, bend right, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой Z является прообразом сечения $s(X)$ в L, а p — m-листным циклическим накрытием многообразия X, разветвленным над дивизором $D \subseteq X$. Теперь ход доказательства тот же самый, что и в рассмотренном выше случае, за исключением двух вопросов. Первый связан с особенностями. Пусть $Z\hat{}$ обозначает нормализацию многообразия Z. Вообще говоря, $Z\hat{}$ является особым многообразием, но $Z\hat{} - p^{-1}(D)$ тем не менее

[1] То есть каждая компонента не имет особенностей и все D_i пересекаются нормально (см. определение (8.5) ниже). — *Прим. ред.*

гладко и аффинно; следовательно, оно имеет гомотопический тип вещественного n-мерного комплекса. Особенности $Z^{\wedge}$ являются факторособенностями; поэтому на $Z^{\wedge}$ имеется двойственность Пуанкаре в когомологиях с коэффициентами в $\mathbf{Q}$.

Другой вопрос состоит в том, что для пучка

$$p_*O_Z = O_X \oplus L^{-1} \oplus \ldots \oplus L^{-(m-1)},$$

который содержит L^{-1} в качестве прямого слагаемого, нужно проверить, что при вложении $p_*O_Z \subseteq (p^{\wedge})_*O_Z$ подпучок L^{-1} переходит в некоторое слагаемое $(p^{\wedge})_*O_Z$. Это место, где используется условие 3) утверждения теоремы.

Пусть $e(i) = ma_i$. Предположим, что дивизор D_i локально задается уравнением $f_i = 0$, а дивизор B—уравнением $g = 0$. Тогда локально уравнение для Z имеет вид

$$z^m = g \cdot \Pi f_i^{e(i)},$$

а r-е слагаемое пучка $(p^{\wedge})_*O_Z$ локально порождается элементом

$$z^r / g^a \cdot \Pi f_i^{b(i)},$$

m-я степень которого лежит в O_X. Поэтому, $a = 0$ и $r \cdot e(i) \geq m \cdot b(i)$, т. е. $r \cdot a_i \geq b(i)$. Когда $r = 1$, это означает, что все $b(i) = 0$ согласно условию 3) теоремы. Таким образом, L^{-1} является прямым слагаемым пучка $(p^{\wedge})_*O_Z$, и для обильного пучка M теорема доказана.

Оставшаяся часть доказательства довольно технична. Читатель, который интересуется главным образом приложениями, может пропустить конец этой главы. Нам понадобятся следующие вспомогательные результаты:

(8.4) Лемма. *Пусть X—гладкое многообразие, Z—гладкое подмногообразие коразмерности c. Рассмотрим раздутие $f: Y \longrightarrow X$ многообразия Z в X. Пусть E—исключительный дивизор этого раздутия. Тогда для $0 \leq i \leq c-1$ выполнены равенства*

i) $f_*\omega_Y(-iE) = \omega_X$;

ii) $R^j f_*\omega_Y(-iE) = 0$ *для* $j > 0$.

Доказательство. Поскольку $\omega_Y = f^*\omega_X((c-1)E)$, первое утверждение является тривиальным. Второе утверждение будет доказано с помощью теоремы о формальных функциях. Для простоты обозначений мы проведем вычисление для случая, когда Z—точка. В этом случае $E = \mathbf{P}^{c-1}$ и

$$\omega_Y(-iE)\,|_E = \mathcal{O}_E(i+1-c) = \omega_E(i+1).$$

Следовательно,

$$H^j(E;\ \omega_Y(-iE)(-kE)\,|_E) = 0$$

для $k \geq 0$ и $j > 0$. Если $\mathcal{O}_{kE}$ обозначает структурный пучок окрестности k-го порядка дивизора E, то имеем следующую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \omega_Y(-iE)(-kE)\,|_E \longrightarrow \omega_Y(-iE)\otimes\mathcal{O}_{(k+1)E} \longrightarrow \omega_Y(-iE)\otimes\mathcal{O}_{kE} \longrightarrow 0.$$

Таким образом, обращение в нуль $H^j(E;\ \omega_Y(-iE)(-kE)\,|_E)$ с помощью рассуждения по индукции приводит к обращению в нуль $H^j(\omega_Y(-iE)\otimes\mathcal{O}_{kE})$ для любого $k \geq 0$ и $j > 0$. Согласно теореме о формальных функциях, мы приходим к требуемому результату.

(8.5) Определение

(i) Пусть X—гладкое алгебраическое многообразие, Z—некоторое его подмногообразие, а $\{D_l\}$—набор дивизоров. Мы будем говорить, что Z и $\{D_l\}$ **пересекаются нормально**, если для каждой точки $x \in X$ существует локальная система аналитических координат (x_i), такая, что локально каждый дивизор D_l, проходящий через x, является координатной гиперплоскостью, а многообразие Z является локально пересечением координатных гиперплоскостей (если Z проходит через x). Заметим, что Z может лежать в некотором дивизоре D_l.

(ii) Пусть задан бирациональный морфизм $g: Y \longrightarrow X$ гладких многообразий. Мы будем говорить, что подмногообразие Z в Y и набор дивизоров D_l в X **пересекаются нормально**, если собственный прообраз дивизора D_l и исключительные дивизоры морфизма g пересекаются нормально в Y.

(8.6) Лемма. *Пусть X—гладкое многообразие, Z—его подмногообразие коразмерности c, $f: Y \longrightarrow X$—раздутие Z в X, а E—исключительный дивизор. Предположим, что дивизоры L, M*

и D_i *удовлетворяют условиям* (8.3) *и подмногообразия* Z *и* D_i *пересекаются нормально. Обозначим через* D_i' *собственный прообраз дивизора* D_i. *Тогда существует* $0 \le k \le c-1$, *такое, что для дивизора*

$$f^*(\sum a_i D_i) - kE = \sum a_i D_i' + bE$$

выполнены условия

i) $0 \le b < 0$,

ii) $H^j(Y;\ \omega_Y(-kE)\otimes f^*L) = H^j(X;\ \omega_X\otimes L)$.

Доказательство. Предположим, что среди $\{D_i\}$ дивизоры $D_1, \ldots, D_p$ — это в точности те, которые содержат Z. Поскольку D_i пересекаются трансверсально, $p \le c$. Дивизор E входит в $f^*(\sum a_i D_i)$ с кратностью $a_1 + \ldots + a_p < c$. Положим

$$k = [a_1 + \ldots + a_p],$$

где символ [ ] обозначает целую часть числа. Теперь утверждение ii) вытекает из (8.4) и спектральной последовательности Лере.

(8.7) *Доказательство* (8.3). Выберем произвольный обильный дивизор H. Для больших значений k имеем

$$H^0(kM) \gg H^0(kM|_H).$$

Следовательно, при больших k дивизор kM можно представить в виде суммы $H + B$, где B — некоторый эффективный дивизор. Более того, для каждого положительного $N \ge k$ имеем представление в виде суммы

$$M \equiv N^{-1}(H + (N-k)M) + N^{-1}B,$$

где первое слагаемое обильно, а второе является эффективным дивизором. Выберем число ε таким, чтобы для всех i отношения a_i/ε были целыми числами. Далее, выберем разрешение особенностей $f: Y \longrightarrow X$ с исключительным дивизором $\sum E_i$ и достаточно большое целое число N, такие, что

i) отображение f является композицией раздутий

$$f_i : Y_i \longrightarrow Y_{i-1}$$

с центрами Z_{i-1}, причем Z_{i-1} нормально пересекает D_i (мы полагаем $X = Y_0$ и $Y = Y_n$);

ii) компоненты дивизора $\sum E_i + f^*(B + \sum D_i)$ имеют лишь простые нормальные пересечения;

iii) дивизор $f^*(N^{-1}(H + (N - k)M)) - \sum p_j E_j$ является обильным для некоторых чисел p_j, удовлетворяющих неравенствам $0 < p_j \ll \varepsilon$;

iv) каждая компонента дивизора $f^*N^{-1}B + \sum p_j E_j$ имеет коэффициент меньше ε.

Трудность состоит в том, что исключительные дивизоры, входящие в $f^*(\sum D_i)$, могут иметь коэффициенты больше 1, и мы поэтому не можем применить теорему об обращении в нуль для прообраза дивизора относительно f. Загадочным образом эту трудность удается обойти, если рассмотреть дуальную форму теоремы об обращении в нуль.

Многократно применяя (8.6), мы приходим к существованию линейной комбинации исключительных дивизоров

$$\sum k_j E_j,$$

которая удовлетворяет следующим трем условиям:

i) все коэффициенты k_j являются целыми;

ii) каждая компонента дивизора $f^*\sum a_i D_i - \sum k_j E_j$ входит в него с коэффициентом меньше 1;

iii) $H^i(Y;\ \omega_Y(-\sum k_j E_j) \otimes f^*L) = H^i(X;\ \omega_X \otimes L)$.

Теперь рассмотрим дивизор

$$f^*L - \sum k_j E_j \equiv \{f^*(N^{-1}(H + (N - k)M)) - \sum p_j E_j\} + \\ + f^*N^{-1}B + \sum p_j E_j + f^*\sum a_i D_i - \sum k_j E_j.$$

Каждая компонента дивизора $f^*\sum a_i D_i - \sum k_j E_j$ входит в него с коэффициентом меньше 1, поэтому в силу выбора ε в действительности эти коэффициенты не превосходят $1 - \varepsilon$. Таким образом, дивизор

$$f^*L - \sum k_j E_j$$

может быть записан в виде суммы обильного дивизора и $\mathbb{Q}$-дивизора с нормальными пересечениями и коэффициентами меньше 1. Таким образом, пользуясь уже доказанным случаем, получаем

$$H^j(Y;\ \omega_Y f^*L(-\sum k_j E_j)) = 0 \text{ для } j > 0.$$

Согласно свойству iii) выше, это дает требуемое обращение в нуль: $H^i(X;\ \omega_X \otimes L) = 0$.

(8.8) Следствие. *Пусть $f: Y \longrightarrow X$ — бирациональный морфизм, где Y — гладкое многообразие. Предположим, что линейное расслоение M на Y является численно эффективным. Тогда для $i > 0$ выполнены равенства*

$$R^i f_*(\omega_Y \otimes M) = 0.$$

В частности,

$$R^i f_* \omega_Y = 0.$$

Доказательство. Выберем обильный дивизор H на многообразии X. Применим теорему (8.3) к линейному расслоеинию $L = f^* H \otimes M$ на многообразии Y и затем воспользуемся следующим утверждением.

(8.9) Предложение. *Пусть $f: Y \longrightarrow X$ — некоторый морфизм, а $\mathcal{F}$ — пучок на многообразии Y. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) $H^i(Y;\ \mathcal{F} \otimes f^* L) = 0$ *для любого достаточно обильного пучка L на многообразии X,*

ii) $R^i f_* \mathcal{F} = 0$.

Доказательство. Выберем обильное линейное расслоение L так, чтобы $H^i(X;\ L \otimes R^k f_* \mathcal{F}) = 0$ для всех $i > 0$ и $k \geq 0$. Тогда спектральная последовательность Лере вырождается в члене E_2. Таким образом,

$$H^i(Y;\ \mathcal{F} \otimes f^* L) = H^0(X;\ L \otimes R^i f_* \mathcal{F}).$$

(8.10) *Литература.* Общая теорема об обращении в нуль впервые была доказана Мияокой для случая поверхностей в [Mi], а в общем случае — Каваматой [Ka2] и Фивегом [V]. Частный случай теоремы (8.8) принадлежит Грауэрту и Рименшнайдеру [GR].

Лекция 9
Схема доказательства теоремы о конусе

В лекции 4 была доказана теорема о конусе для гладких многообразий. Теперь мы начнем с формулировок последовательности утверждений, приводящих к доказательству теоремы о конусе в общем случае. Это доказательство использует много различных идей. Даже в гладком случае из него мы получаем результаты, которые не достигаются предыдущими методамн. А именно, оказывается, что любой экстремальный луч можно стянуть. С другой стороны, имеются и слабые стороны у нового метода. Он дает мало информации о кривых, порождающих экстремальный луч, и может применяться лишь в характеристике 0. Мы начнем с небольшой переформулировки теоремы об обращении в нуль, доказанной в лекции 8.

(9.1) Пусть Y — гладкое проективное комплексное многообразие, $\sum d_i D_i$ — некоторый $\mathbb{Q}$-дивизор на Y, записанный в виде суммы *различных* простых дивизоров, а L — линейное расслоение (или дивизор Картье). Назовем **верхней целой частью** $\ulcorner D \urcorner$ дивизора

$$D = L + \sum d_i D_i$$

дивизор

$$L + \sum e_i D_i,$$

где e_i — наименьшее целое число $\geq d_i$.

(9.2) Теорема. *Предположим, что указанный выше дивизор D является большим и численно эффективным, а компоненты соответствующего дивизора $\sum D_i$ неособы и имеют только нормальные пересечения. Тогда $H^i(K_Y + \ulcorner D \urcorner) = 0$ для всех $i > 0$.*

Мы докажем следующий список из четырех основных теорем, завершающийся теоремой о конусе.

(9.3) Теорема о свободе от базисных точек[1]. *Пусть X — проективное многообразие, имеющее лишь канонические особенности, а D есть* nef-*дивизор Картье, причем $aD - K_X$ является* nef- *и* big-$\mathbf{Q}$-*дивизором при некотором $a > 0$. Тогда линейная система $|bD|$ при $b \gg 0$ не имеет базисных точек.*

(9.4) Теорема о необращении в нуль. *Пусть X — гладкое проективное многообразие, D есть* nef-*дивизор Картье, а G — такой $\mathbf{Q}$-дивизор, что $\ulcorner G \urcorner$ — эффективный дивизор. Предположим, что выполнены также следующие условия:*

1) *для некоторого $a > 0$ дивизор $aD + G - K_X$ является обильным;*

2) *дробная часть дивизора G имеет только простые нормальные пересечения.*

Тогда для $m \gg 0$

$$H^0(X, mD + \ulcorner G \urcorner) \neq 0.$$

(9.5) Теорема о рациональности. *Пусть X — проективное многообразие, имеющее лишь канонические особенности, причем K_X не численно эффективен. Для произвольного обильного дивизора Картье H определим число*

$$r = \max\{t \in \mathbf{R} : H + tK_X \text{ является численно эффективным}\}.$$

Тогда r является **рациональным** *числом вида u/v, где*

$$0 < v \leq (\operatorname{index} X)(\dim X + 1).$$

(9.6) Теорема о конусе. *Пусть X — проективное многообразие, имеющее лишь канонические особенности. Тогда*

1) $\langle NE(X) \rangle = (\langle NE(X) \rangle \cap (K_X)_{\geq 0}) + \sum (\mathbf{R}_{\geq 0})[C_i]$

для некоторого набора кривых C_i, удовлетворяющих условию

$$K_X \cdot C_i < 0.$$

Из этой суммы нельзя удалить ни одной из кривых C_i, не нарушая при этом равенства. Лучи $(\mathbf{R}_{\geq 0})[C_i]$ называются **экстремальными лучами** *и они вместе с $(\langle NE(X) \rangle \cap (K_X)_{\geq 0})$ образуют минимальное порождающее множество для конуса $\langle NE(X) \rangle$.*

---

[1] Некоторые новые результаты в этом направлении см. в [Ko5*]. — *Прим. ред.*

2) *Для любого обильного дивизора H и произвольного $\varepsilon > 0$*
$$\langle NE(X)\rangle \cap (K_X + \varepsilon H)_{\le 0} = (\langle NE(X)\rangle \cap (K_X + \varepsilon H)_{=0}) + \sum(\mathbb{R}_{\ge 0})[C_j],$$
где в сумме присутствует лишь конечное число слагаемых.

(9.7) Логическая последовательность доказательства этих теорем имеет следующий вид: теорема о необращении в нуль $\Rightarrow$ теорема о свободе от базисных точек $\Rightarrow$ теорема о рациональности $\Rightarrow$ теорема о конусе. Однако для лучшего понимания мы сначала докажем теорему о свободе от базисных точек, а затем теорему о конусе. Доказательства теоремы о необращении в нуль и теоремы о рациональности используют те же идеи, но они технически сложнее, и будут приведены в конце.

(9.8) Главная стратегия доказательства теоремы о свободе от базисных точек (как и оставшихся двух других теорем) состоит в следующем. Мы рассматриваем разрешение особенностей $f: Y \longrightarrow X$ и гладкие дивизоры F_j, которые являются либо исключительными, либо неподвижными компонентами линейной системы $|aD|$. Будет показано, что среди этих гладких дивизоров можно выделить один дивизор F и некоторую эффективную сумму исключительных дивизоров A', для которых при достаточно большом b выполнены два условия:
$$H^0(F;\ (bf^*D + A')|_F \ne 0 \quad \text{и}$$
$$H^1(Y;\ bf^*D + A' - F) = 0.$$
Первое условие будет следовать из теоремы о необращении в нуль, а второе — из теоремы об обращении в нуль. Имеет место следующая коммутативная диаграмма:
$$\begin{array}{ccc} H^0(X;\ bD) & \longrightarrow & H^0(F;\ (bf^*D)|_F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(Y;\ bf^*D + A') & \longrightarrow & H^0(F;\ (bf^*D + A')|_F) \end{array}$$
Здесь левая вертикальная стрелка — изоморфизм, так как A' — эффективный дивизор. Из этой диаграммы видно, что $f(F)$ не содержится в базисном множестве линейной системы $|bD|$, в то время как $f(F)$ содержится в базисном множестве линейной системы $|aD|$. Это следует из сюръективности отображения

$$H^0(Y, \; bf^*D + A') \longrightarrow H^0(F, \; (bf^*D + A')|_F),$$

что, в свою очередь, получается из обращения в нуль первой группы когомологий в длинной точной последовательности когомологий, ассоциированной с короткой точной последовательностью ограничения на F. Итерация этих рассуждений приводит к исключению базисного множества в достаточно больших кратных линейной системы дивизора D.

(9.9) Поэтому нам необходимо позаботиться об ограничениях $\mathbb{Q}$-дивизоров и их верхних целых частей на гладкий дивизор F в гладком многообразии Y. Мы рассматриваем только ограничения дивизоров вида

$$D = L + \sum d_i D_i,$$

где либо $F \neq D_i$ для всех i, либо $F = D_j$ для некоторого дивизора D_j с целым коэффициентом d_j. В последнем случае перед операцией ограничения мы погружаем $d_j D_j$ в L. В любом из этих случаев мы имеем дело с нормальным пересечением дивизора F и оставшихся исключительных дивизоров и базисных компонент $|aD|$. Поэтому *операция взятия верхней целой части коммутирует с операцией ограничения.*

(9.10) *Литература.* Доказательства этих четырех теорем со временем сильно менялись. Частные случаи для гладких трехмерных многообразий были получены Мори [M1]. Первый общий результат для трехмерных многообразий был доказан Каваматой [Ka3] и дополнен Бенвиинистом [B1] и Ридом [R4]. Теорема о необращении в нуль принадлежит Шокурову [Sh]. Теорема о конусе в произвольной размерности появилась в работе Каваматы [Ka4] и была дополнена в [Ko3].

Лекция 10
Теорема о свободе от базисных точек

(10.1) *Шаг* 1. На этом шаге мы докажем, что $|mD| \neq \varnothing$ для каждого $m \gg 0$. Так же как и в (8.7), из наших предположений относительно X и D следует, что для $N \gg 0$

$aD - K_X \equiv$ (обнльный дивизор) + N^{-1}(неподвижный эффективиый дивизор).

Поэтому мы можем построить разрешение

$$f : Y \longrightarrow X,$$

для которого дивизор $\sum F_j$ имеет простые иормальные пересечения и удовлетворяет следующим условиям:

1) $K_Y \equiv f^* K_X + \sum a_j F_j$, где $a_j \geq 0$;

2) дивизор $f^*(aD - K_X) - \sum p_j F_j$ является обильным для некоторого $a > 0$ при подходящем выборе $0 < p_j \ll 1$.

На многообразии Y

$$f^*(aD - K_X) - \sum p_j F_j =$$
$$= af^*D + (\sum a_j F_j - \sum p_j F_j) - (f^*K_X + \sum a_j F_j) =$$
$$= af^*D + G - K_Y,$$

где $G = \sum(a_j - p_j)F_j$. Из наших предположений следует, что $\ulcorner G \urcorner$ является эффективным f-исключительиым дивизором, поскольку коэффициенты a_j больше 0 только для f-исключительных дивизоров F_j. Дивизор $af^*D + G - K_Y$ является обильным, причем

$$H^0(Y;\ mf^*D + \ulcorner G \urcorner) = H^0(X;\ mD).$$

Теперь мы можем применить теорему о необращении в нуль и получить, что $H^0(X;\ mD) \neq 0$ для всех $m \gg 0$.

(10.2) *Шаг* 2. Выберем некоторое $c > 1$ и обозначим через $B(c)$ приведенное базисное множество линейной системы $|cD|$. Для любых двух положительных целых чисел $a > b$ имеем очевидное включение $B(c^a) \subseteq B(c^b)$. Из свойства нётеровости следует, что последовательность замкнутых подмиожеств $B(c^n)$ стабилизируется, и этот предел мы обозначим через B_c. Таким образом, либо множество B_c непусто для некоторого c, либо можно выбрать взаимно простые числа c и c', для которых оба множества B_c и $B_{c'}$ являются пустыми. В последнем случае выберем целые числа a и b так, чтобы $B(c^a)$ и $B(c'^b)$ были пустыми, и воспользуемся для доказательства свободы от базисного множества линейной системы $|mD|$ при $m \gg 0$ представимостью всех достаточно больших целых чисел m в виде линейной комбинации c^a и c'^b с неотрицательными целыми коэффициентами. Итак, осталось доказать, что предположение о непустоте некоторого множества B_c приводит к противоречию.

Допустим, что B_c непусто, и выберем $m = c^a$, для которого $B_c = B(m)$. Используя линейную систему, полученную из теоремы о необращении в нуль, мы можем рассмотреть раздутие

$$f : Y \longrightarrow X,$$

и получить новое многообразие Y, для которого выполнены условия шага 1 и для некоторого $m > 0$ имеется представление

$$f^*|mD| = |L|(\text{подвижная часть}) + \sum r_j F_j (\text{неподвижная часть}),$$

где $|L|$ не имеет базисных точек. Следовательно,

$$\cup\{ f(F_j) : r_j > 0 \}$$

—базисное множество линейной системы $|mD|$. Заметим, что линейная система $|mD|$ не имеет базисных точек тогда и только тогда, когда базисных точек нет в линейной системе $f^*|mD|$. Последнее свойство эквивалентно тому, что $r_j = 0$ для всех j. Мы получим требуемое противоречие, если найдем некоторую компоненту F_j с коэффициентом $r_j > 0$, такую, что для всех $b \gg 0$ множество $f(F_j)$ не содержится в базисном множестве линейной системы $|bD|$.

(10.3) *Шаг* 3. Для положительного целого числа b и для рационального положительного числа c обозначим через $N(b, c)$ дивизор вида

$$bf^*D - K_Y + \sum(-cr_j + a_j - p_j)F_j \equiv f^*(b - cm - a)D + \\ + c(f^*mD - \sum r_j F_j) + (f^*(aD - K_X) - \sum p_j F_j),$$

где $b \geq cm + a$. Поскольку $f^*(b - cm - a)D$ — численно эффективный дивизор, $|c(f^*mD - \sum r_j F_j)|$ не имеет базисных точек, а $\mathbb{Q}$-дивизор $(f^*(aD - K_X) - \sum p_j F_j)$ обилен, то $N(b, c)$ также является обильным дивизором. Пользуясь обильностью дивизора $N(b, c)$ при $b \geq cm + a$, из теоремы об обращении в нуль получаем

$$H^1(Y, \ulcorner N(b, c) \urcorner + K\ \ ) = 0,$$

где

$$\ulcorner N(b, c) \urcorner = bf^*D - K_Y + \sum \ulcorner -cr_j + a_j - p_j \urcorner F_j.$$

(10.4) *Шаг* 4. Можно так выбрать c и p_j, чтобы для некоторой компоненты $F = F_j$, существовало бы представление дивизора $\sum(-cr_j + a_j - p_j)F_j$ в виде $A - F$, где $\ulcorner A \urcorner$ — эффективный дивизор, не содержащий F в качестве своей компоненты. Выберем число $c > 0$ таким, чтобы

$$\min_j \{-cr_j + a_j - p_j\} = -1.$$

Если указанный минимум достигается для нескольких значений j, то мы «слегка пошевелим» коэффициенты p_j, чтобы добиться единственности такого индекса j. Для полученного в результате индекса j имеем $r_j > 0$ и

$$\ulcorner N(b, c) \urcorner + K_Y = bf^*D + \ulcorner A \urcorner - F.$$

Используя шаг 3, получаем, что отображение

$$H^0(Y, \ulcorner N(b, c) \urcorner + K_Y) \longrightarrow H^0(F, bf^*D + \ulcorner A \urcorner)|_F)$$

сюръективно при $b \geq cm + a$.

Замечание. Если каждый дивизор F_j является компонентой дивизора $\ulcorner A \urcorner$, то $a_j > 0$, а следовательно, дивизор $\ulcorner A \urcorner$ исключителен относительно f.

(10.5) *Шаг* 5. Заметим, что

$$N(b, c)|_F = (bf^*D + A - F - K_Y)|_F = (bf^*D + A)|_F - K_F.$$

Таким образом, мы можем применить теорему о необращении в нуль для дивизора F и получить

$$H^0(F; (bf^*D + \ulcorner A \urcorner)|_F) \neq 0.$$

Следовательно, в пространстве $H^0(Y, bf^*D + \ulcorner A \urcorner)$ существует глобальное сечение, не обращающееся в нуль на дивизоре F. Поскольку дивизор $\ulcorner A \urcorner$ является эффективным и исключительным относительно f,

$$H^0(Y; bf^*D + \ulcorner A \urcorner) = H^0(X; bD) = H^0(Y; bf^*D).$$

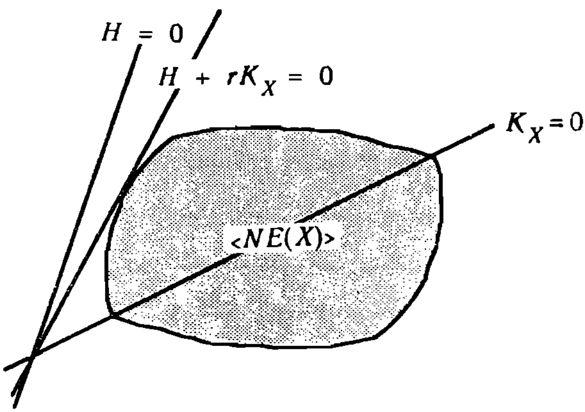
Как и в (9.8), получаем, что для достаточно больших значений b образ $f(F)$ не содержится в базисном множестве линейной системы $|bD|$. Тем самым мы получили требуемое противоречие, завершающее доказательство теоремы об отсутствии базисных точек.

(10.6) *Литература.* Приведенное доказательство почти дословно воспроизводит рассуждения из работы [R4].

Лекция 11
Теорема о конусе

(11.1) Сначала мы дадим неформальное объяснение, каким образом теорема о рациональности используется для получения информации о конусе кривых.

Если ранг группы Пикара многообразия X не менее 2, а H — некоторый обильный дивизор, то в пространстве $N(X)$ мы получаем следующую картину:



Поскольку из теоремы о рациональности следует, что число r является рациональным, для некоторого $m > 0$ кратное $m(H + rK_X)$ является дивизором Картье. Заметим, что дивизор $m(H + rK_X)$ численно эффективен, но не обилен. Следовательно, $(\langle NE(X)\rangle \cap (H + rK_X))$ — грань конуса $\langle NE(X)\rangle$. Выбирая различные обильные дивизоры, мы получаем различные грани конуса $\langle NE(X)\rangle$. Доказательство теоремы о конусе является формальным следствием этого наблюдения. Более точно, теорема о конусе непосредственно следует из теоремы о рациональности и следующего результата.

(11.2) Теорема. *Пусть $N_{\mathbf{Z}}$ — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного ранга, $N_{\mathbf{R}} = N_{\mathbf{Z}} \otimes \mathbf{R}$ — соответствующее векторное пространство над $\mathbf{R}$, а $\langle NE(X)\rangle$ — замкнутый выпуклый конус, не содержащий прямых. Пусть выбран некоторый элемент K двойственного $\mathbf{Z}$-*

модуля $N^*_{\mathbb{Z}}$, *такой, что* $(K\cdot C) < 0$ *для некоторого* $C \in \langle NE(X)\rangle$. *Предположим, что существует положительное число* a, *такое, что для всех* $H \in N^*_{\mathbb{Z}}$, *которые принимают положительные значения на* $\langle NE(X)\rangle - \{0\}$, *число*

$$r = \max\{\, t \in \mathbb{R}\colon\ H + tK \geq 0 \ \textit{на конусе}\ \langle NE(X)\rangle\}$$

является рациональным числом вида u/v, *где* $0 < v \leq a$. *Тогда для некоторого набора* $\xi_i \in N_{\mathbb{Z}}$, *удовлетворяющих условию* $(\xi_i \cdot K) < 0$, *имеется разложение*

$$\langle NE(X)\rangle = (\langle NE(X)\rangle \cap K_{\geq 0}) + \sum(\mathbb{R}_{\geq 0})[\xi_i],$$

причем лучи $(\mathbb{R}_{\geq 0})[\xi_i]$ *не имют точек накопления в области* $K_{<0}$ (*см. п.* 2 *в теореме* (9.6)).

Доказательство теоремы (11.2) и теоремы о конусе

Мы можем предполагать, что канонический дивизор K_X не является nef-дивизором.

(11.3) *Шаг* 1. Предположим, что L—произвольный nef-дивизор, не являющийся обильным, причем пересечение $L^{\perp}$ с $(\langle NE(X)\rangle \cap K_{\geq 0})$ состоит лишь из 0. Введем обозначение

$$F_L = L^{\perp} \cap \langle NE(X)\rangle.$$

Согласно критерию Клеймана, $F_L \neq \{0\}$. Пусть H – произвольный обильный дивизор Картье. Для натурального числа ν пусть

$$r_L(\nu, H) = \max\{t \in \mathbb{R}\colon\ \nu L + H + (t/e)K_X \ \text{численно эффективен}\},$$

где $e = ((\operatorname{index} X)(\dim X + 1))!$. Согласно теореме о рациональности, $r_L(\nu, H)$—неотрицательное целое число. Более того, поскольку L есть nef-дивизор, $r_L(\nu, H)$—неубывающая функция от ν. Так как для $\xi \in F_L$ выполнено неравенство

$$r_L(\nu, H) \leq e(H\cdot\xi) / (-K_X\cdot\xi),$$

то при $\nu \geq \nu_0$ функция $r_L(\nu, H)$ принимает постоянное значение $r_L(H)$. Заметим, что оба дивизора L и

$$\nu_0 eL + eH + r_L(H)K_X$$

являются nef-дивизорами и не обильны. Поэтому, рассматривая дивизор

$$D(\nu L, H) = \nu eL + eH + r_L(H)K_X,$$

мы получаем, что

$$0 \neq F_{D(\nu L, H)} \subseteq F_L \quad \text{при } \nu \geq \nu_0.$$

(11.4) *Шаг* 2. Мы утверждаем, что если $\dim F_L > 1$, то можно найти обильный дивизор H, такой, что

$$\dim F_{D(\nu L, H)} < \dim F_L.$$

Для доказательства этого факта выберем обильные дивизоры H_i, которые образуют базис пространства $N(X)^*$. Если $\dim F_L > 1$, то из линейной независимости дивизоров

$$\nu L + H_i + (r_L(H_i)/e)K_X$$

следует, что все они одновременно не могут обращаться тождественно в нуль на F_L. Последовательно повторяя рассуждения для меньших граней, получаем, что для каждого L существует дивизор L', такой, что

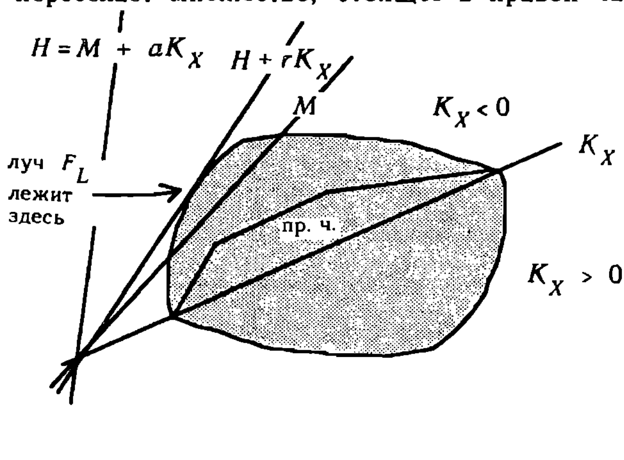
$$F_L \supset F_{L'} \quad \text{и} \quad \dim F_{L'} = 1.$$

(11.5) *Шаг* 3. Теперь мы утверждаем, что

$$\langle NE(X)\rangle = (\langle NE(X)\rangle \cap (K_X)_{\geq 0}) + \langle \sum F_L\rangle,$$

где слагаемые в сумме соответствуют тем дивизорам L, для которых $\dim F_L = 1$ (напомним, что символ $\langle\ \rangle$ обозначает замыкание).

Будем доказывать это утверждение от противного. Предположим, что правая часть требуемого равенства на самом деле меньше. Тогда существует дивизор M, такой, что гиперплоскость $M^{\perp}$ пересекает множество, стоящее в левой части равенства, и не пересекает множество, стоящее в правой части:



Прямое применение теоремы о рациональности к числу r из приведениого выше рисунка дает противоречие, если воспользоваться шагом 2.

(11.6) *Шаг* 4. Теперь мы покажем, что лучи F_L не могут накапливаться в области $(K_X)_{<0}$.

Пусть $\{H_i\}$ — множество обильных дивизоров Картье, которое вместе с K_X образует базис пространства $N(X)^*$. Для каждой одномериой грани F_L и номера i одиого из выбранных дивизоров выберем число $\nu(i)$, для которого

$$F_{D(\nu(i)L,\, H(i))} = F_L.$$

Тогда для образующего ξ луча F_L и для всех i имеем

$$(*) \qquad (H(i)\cdot\xi) \,/\, (-K_X\cdot\xi) = (\text{целое число})/e.$$

Если лучи F_L где-то накапливаются в области $(K_X)_{<0}$, то точки проективизации

$$(N(X) - \{0\})/\mathbf{R}^*$$

конуса $N(X)$, которые соответствуют этим лучам, должны накапливаться в аффинной карте $U \subseteq (N(X) - \{0\})/\mathbf{R}^*$, которая определяется условием $K_X \neq 0$. Однако равенство $(*)$ исключает эту возможность, поскольку отображение

$$\xi \in U \longrightarrow ((H(i)\cdot\xi) \,/\, (-K_X\cdot\xi))_i$$

определяет аффинную систему координат.

(11.7) *Шаг* 4. Наконец, для каждой одномерной грани F_L теорема о рациональности и теорема о свободе от базисных точек показывают, что существует морфизм, стягивающий в точности F_L. Следовательно,

$$F_L = (\mathbf{R}_{\geq 0})[C]$$

для некоторой кривой C. Поэтому мы получаем

$$\langle NE(X)\rangle = (\langle NE(X)\rangle \cap K_{X\geq 0}) + \sum(\mathbf{R}_{\geq 0})[C_i],$$

и теорема о конусе доказана.

(11.8) *Литература.* Приведенное доказательство теоремы о конусе является новым. Оно возникло из совместных обсуждений проблемы Я. Колларом, Т. Луо, К. Мацуки и С. Мори.

Лекция 12
Теорема о рациональности

(12.1) Доказательство теоремы о рациональности

Шаг 1. Пусть Y—гладкое проективное многообразие, $\{D_i\}$—конечное множество дивизоров Картье, A—дробный дивизор с простыми нормальными пересечениями, причем $\ulcorner A \urcorner$—эффективный дивизор. Рассмотрим многочлен Пуанкаре

$$P(u_1, \dots, u_k) = \chi(\sum u_i D_i + \ulcorner A \urcorner).$$

Предположим, что для некоторых значений u_i дивизор $\sum u_i D_i$ численно эффективен, а дивизор

$$\sum u_i D_i + A - K_Y$$

обилен. Тогда для достаточно больших целых чисел m дивизор

$$\sum m u_i D_i + A - K_Y$$

по-прежнему остается обильным, и, согласно теореме об обращении в нуль,

$$H^i(\sum m u_i D_i + \ulcorner A \urcorner) = 0 \quad \text{при } i > 0,$$

а пучок

$$\mathcal{O}(\sum m u_i D_i + \ulcorner A \urcorner)$$

имеет ненулевое сечение согласно теореме о необращении в нуль. Следовательно,

$$\chi(\sum m u_i D_i + \ulcorner A \urcorner) \neq 0.$$

Таким образом, многочлен $P(u_1, \dots, u_k)$ не равен тождественно нулю, и его степень не больше размерности пространства Y.

(12.2) *Шаг* 2.

Предложение. *Пусть r — некоторое действительное число.*

a) *Предположим, что ненулевой многочлен $P(x, y)$, имеющий* *степень не более n, обращается в нуль для всех достаточно больших целых решений (x, y) неравенства*

$$0 < ay - rx < \varepsilon$$

для некоторого положительного целого числа a и некоторого положительного ε. Тогда r — рациональное число.

b) *Пусть число r удовлетворяет условиям п.* a); *тогда в записи r в виде несократимой дроби знаменатель этой дроби не превосходит $a(n+1)/\varepsilon$.*

Доказательство. a) Предположим, что r — иррациональное число. Тогда на плоскости (x, y) по обе стороны от прямой

$$ay - rx = 0$$

существует бесконечно много целых точек, находящихся на расстоянии менее $\varepsilon/(n+2)$ от этой прямой. Поэтому существует решение (x', y'), имеющее большие целые координаты, для которого выполнены неравенства

$$0 < ay' - rx' < \varepsilon/(n+2).$$

Согласно условию, целые точки

$$(2x', 2y'),\ldots,((n+1)x', (n+1)y')$$

также являются решениями. Следовательно, линейный многочлен

$$y'x - x'y$$

делит P, поскольку P и $y'x - x'y$ имеют $n+1$ общих нулей. Выберем меньшее ε и повторим наши рассуждения. После того как мы повторим это $n+1$ раз, получим противоречие.

b) Теперь предположим, что u/v — несократимая запись числа r. Для заданного j обозначим через (x', y') целое решение уравнения

$$ay - rx = aj/v.$$

(Заметим, что для любого целого j такое решение существует.) Тогда

$$a(y' + ku) - r(x' + akv) = aj/v$$

для всех k. Поэтому, аналогично рассуждениям, проведенным выше, если

$$aj/v < \varepsilon,$$

то $(ay - rx) - (aj/v)$ делит многочлен P. Следовательно, мы можем получить самое большее n таких значений для j. Таким образом,

$$a(n + 1)/v \geq \varepsilon.$$

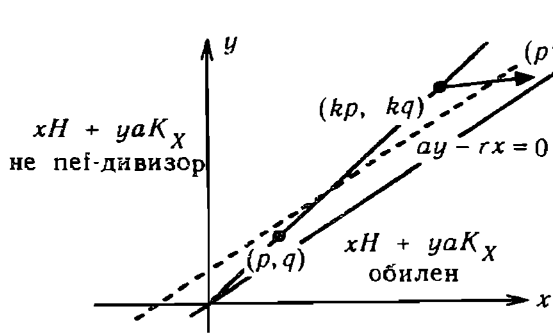
(12.3) *Шаг* 3. Пусть ε — некоторое положительное число, а H — обильный дивизор Картье. Выберем целое число a так, чтобы aK_X также был дивизором Картье. Предположим, что K_X не является численно эффективным и положим

$$r = \max\{\, t \in \mathbf{R} : \ H + tK_X \text{ численно эффективен} \,\}.$$

Для каждой пары (p, q) обозначим через $\Lambda(p, q)$ базисное множество линейной системы $|pH + qaK_X|$, рассматриваемое как приведенная подсхема в X. Если $|pH + qaK_X| = \varnothing$, то полагаем $\Lambda(p, q) = X$.

(12.4) Утверждение. *Для достаточно больших значений p и q, удовлетворяющих неравенству $0 < aq - rp < \varepsilon$, множество $\Lambda(p, q)$ не зависит от p и q. Мы будем обозначать это множество через Λ_0.*

Доказательство. Рассмотрим следующую диаграмму из дивизоров на X:



Поскольку вектор из (kp, kq) в (p', q') принадлежит конусу обильных дивизоров, то когда его длина достигает некоторого фиксированного размера, он попадает в область очень обильных дивизоров.

Из этой диаграммы следует, что $\Lambda(p', q') \subsetneq \Lambda(p, q)$, а это доказывает требуемое утверждение в силу свойства нётеровости для алгебраических многообразий.

(12.5) Для достаточно больших значений p и q линейная система $|pH + qaK_X|$ не может быть свободна от базисных точек, поскольку дивизор $pH + qaK_X$ не является численно эффективным. Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ состоит из пар (p, q), удовлетворяющих неравенству

$$0 < aq - rp < 1$$

и условию $\Lambda(p, q) = \Lambda_0$. Заметим, что множество $\mathcal{I}$ содержит все достаточно большие пары (p, q), удовлетворяющие лишь неравенству $0 < aq - rp < 1$.

(12.6) *Шаг* 4. Предположим, что X имеет лишь канонические особенности. Пусть $g : Y \longrightarrow X$ — разрешение особенностей, для которого множество исключительных дивизоров E_i состоит из компонент с простыми нормальными пересечениями. Мы можем выбрать положительные числа ε_i так, чтобы дивизор

$$-E = -\sum \varepsilon_i E_i$$

был обильным относительно g. Пусть $A = \sum a_i E_i$ — эффективный $\mathbf{Q}$-дивизор, такой, что $A \equiv K_Y - g^* K_X$. Положим, $D_1 = g^* H$, $D_2 = g^*(aK_X)$. Рассмотрим многочлен

$$P(x, y) = \chi(xD_1 + yD_2 + \ulcorner A \urcorner).$$

Поскольку D_1 является nef- и big-дивизором, то, согласно теореме Римана—Роха, многочлен P не может быть тождественно равен нулю. Поскольку дивизор A' эффективен и исключителен относительно g, получаем

$$H^0(Y; pD_1 + qD_2 + \ulcorner A \urcorner) = H^0(X, pH + qaK_X).$$

(12.7) *Шаг* 5. Предположим, что утверждение теоремы о рациональности *не верно*, и число r не является рациональным. Если $0 < aq - rp < 1$, то дивизор

$$xD_1 + yD_2 + A - K_Y$$

численно эквивалентен прообразу обильного $\mathbf{Q}$-дивизора

$$xH + (ay - 1)K_Y.$$

Таким образом, для $1 \gg \delta > 0$ дивизор

$$xD_1 + yD_2 + A - K_Y - \delta E$$

обилен, причем $\ulcorner A - \delta E \urcorner = \ulcorner A \urcorner$. Следовательно, согласно теореме об обращении в нуль,

$$H^i(Y; xD_1 + yD_2 + \ulcorner A \urcorner) = 0 \text{ при } i > 0.$$

Согласно шагу 2, должна существовать сколь угодно большая пара (p, q), удовлетворяющая неравенству $0 < aq - rp < 1$, для которой

$$P(p, q) = H^0(Y, pD_1 + qD_2 + \ulcorner A \urcorner) \neq 0,$$

поскольку в противном случае многочлен $P(x, y)$ имел бы «слишком много нулей», что влекло бы за собой *рациональность* числа r для многообразия X и дивизора H. Таким образом, линейная система $|pH + qaK_X|$ непуста для всех пар (p, q) из множества $\mathcal{I}$, введенного в (12.5).

(12.8) *Шаг* 6. Для пары $(p, q) \in \mathcal{I}$ выберем разрешение особенностей

$$f : Y \longrightarrow X,$$

такое, что на Y существует дивизор $\sum F_j$ с простыми нормальными пересечениями, удовлетворяющий следующим условиям:

a) $K_Y = f^*K_X + \sum a_j F_j$ для некоторых неотрицательных рациональных чисел a_j.

b) $f^*(pH + (qa - 1)K_X) - \sum p_j F_j$ — обильный дивизор для достаточно малых положительных чисел p_j (этого можно добиться, поскольку дивизор $pH + (qa - 1)K_X$ обилен);

c) $|f^*(pH + qaK_X)| = |L| + \sum r_j F_j$, где первое слагаемое—линейная система, свободная от базисного множества, а $\sum r_j F_j$—неподвижная часть линейной системы, причем r_j—положительные целые числа.

(12.9) *Шаг* 8. Пусть выбрана некоторая пара $(p, q) \in \mathcal{I}$, для которой выполнены условия (12.8). Как и выше, мы можем выбрать рациональные числа $c > 0$ и $p_j > 0$, такие, что

$$\sum(-cr_j + a_j - p_j)F_j = A' - F,$$

причем A' не содержит F и $\ulcorner A' \urcorner$ — эффективный дивизор. Анализируя коэффициенты, видим, что дивизор F отображается в некоторую компоненту B базисного множества $\Lambda(p, q)$ линейной системы $|pH + qaK_X|$.

Рассмотрим дивизор

$$N(p',q') = f^*(p'H + q'aK_X) + A' - F - K_Y \equiv$$

$$\equiv f^*((p'-(1+c)p)H + (q'-(1+c)q)aK_X)$$

$$+ f^*((1+c)pH + (1+c)qaK_X)$$

$$+ \sum(-cr_j + a_j - p_j)F_j - K_Y \equiv$$

$$\equiv cL + f^*((p'-(1+c)p)H + (q'-(1+c)q)aK_X) +$$

$$+ f^*(pH + (qa-1)K_X) - \sum p_j F_j,$$

где $|cL|$ — линейная система, не имеющая базисных точек,

$$f^*(pH + (qa-1)K_X) - \sum p_j F_j \text{ — обильный дивизор,}$$

а

$$f^*((p'-(1+c)p)H + (q'-(1+c)q)aK_X)$$

— численно эффективный дивизор для достаточно больших p' и q', удовлетворяющих неравенству

$$(q'-(1+c)q)a \le r(p'-(1+c)p).$$

Заметим, что последнее неравенство выполнено для достаточно больших p' и q', удовлетворяющих неравенству

$$aq' - rp' \le aq - rp.$$

В этом случае дивизор $N(p',q')$ обилен. Следовательно, согласно теореме об обращении в нуль, отображение

$$H^0(Y; f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A' \urcorner) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^0(F; (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A' \urcorner)|_F)$$

сюръективно.

(12.10) *Шаг* 8. Согласно формуле присоединения, ограничение дивизора

$$f^*(p'H + q'aK_X) + A' - F - K_Y$$

на дивизор F равно

$$(f^*(p'H + q'aK_X) + A')|_F - K_F.$$

Используя те же рассуждения, что и в шаге 1, получаем, что многочлен Пуанкаре

$$\chi(F; (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A' \urcorner)|_F)$$

не может быть равен тождественно нулю. С другой стороны, дивизор

$$(f^*(p'H + q'aK_X) + A')|_F - K_F$$

обилен, поэтому

$$\chi(F;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A'\urcorner)|_F\ ) =$$
$$= h^0(F,\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A'\urcorner)|_F\ ).$$

Следовательно, если применить пункт a) шага 2 к многочлену Пуанкаре на дивизоре F, где $\varepsilon = aq - rp$, то получим существование сколь угодно больших по значению пар $(p',\ q')$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < aq' - rp' \le aq - rp$$

и

$$h^0(F;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A'\urcorner)|_F\ ) \neq 0.$$

(12.11) *Шаг* 9. Теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы получить противоречие. Согласно предположению, $\Lambda(p,\ q) = \Lambda_0$. Для рассматриваемых на предыдущем шаге пар имеем сюръективное отображение

$$H^0(Y;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A\urcorner)) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^0(F;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A'\urcorner)|_F\ ) \neq 0.$$

Следовательно, дивизор F не является компонентой базисного множества линейной системы $|(f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A\urcorner)|$. Поскольку дивизор $\ulcorner A\urcorner$ эффективен и исключителен относительно f, то

$$H^0(Y;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A\urcorner)) = H^0(X;\ p'H + q'aK_X) \neq 0.$$

Пользуясь теми же рассуждениями, что и в (9.8), из последнего равенства получаем, что $f(F)$ не содержится в $\Lambda(p',\ q')$. Следовательно, $\Lambda(p',\ q')$ является собственным подмножеством в $\Lambda(p,\ q) = \Lambda_0$, что дает требуемое противоречие.

(12.12) *Шаг* 10. Теперь мы уже установили рациональность r. Допустим, что не выполнено утверждение b) теоремы о рациональности, касающееся знаменателя числа r. Мы получим противоречие тем же самым методом.

Пользуясь п. b) утверждения шага 2 для $\varepsilon = 1$, с помощью рассуждений шага 5 мы можем получить существование сколь угодно большой пары (p, q), удовлетворяющей условиям

$$0 < aq - rp < 1,$$

$$P(p, q) = H^0(Y;\ pD_1 + qD_2 + \ulcorner A \urcorner) \neq 0,$$

поскольку в противном случае многочлен $P(x, y)$ «слишком часто» обращался бы в нуль. Таким образом,

$$|pH + qaK_X| \neq 0 \text{ для } (p, q) \in \mathcal{I} \text{ (см. (12.5)).}$$

Выберем пару $(p, q) \in \mathcal{I}$, для которой значение $aq - rp$ максимально, и обозначим его через d/v. Воспользуемся разрешением особенностей шага 6. Если выполены неравенства

$$0 < aq' - rp' \leq d/v,$$

то, аналогично предыдущему, получаем

$$\chi(F;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A' \urcorner)|_F) =$$

$$= h^0(F;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A' \urcorner)|_F).$$

Используя опять п. b) шага 2, получаем существование пары (p', q'), удовлетворяющей неравенствам

$$0 < aq' - rp' < 1 \quad (\varepsilon = 1),$$

для которой

$$h^0(F;\ (f^*(p'H + q'aK_X) + \ulcorner A' \urcorner)|_F) \neq 0.$$

В этом случае автоматически выполнено неравенство

$$aq' - rp' \leq d/v = aq - rp.$$

Теперь требуемое противоречие получается из шагов 7 – 9, что завершает доказательство теоремы о рациональности.

(12.13) Использование многочлена Пуанкаре в доказательстве теоремы о рациональности близко по идее к его применению для доказательства следующего классического результата об ограниченности индекса K_X.

Предположим, что гладкое проективное многообразие X имеет размерность n и его антиканонический класс $-K_X$ обилен. Пусть $K_X = mH$, где $-H$ – некоторый обильный дивизор. Многочлен Пуанкаре $\chi(\nu H)$ для дивизора H может иметь самое большее n нулей; поэтому для некоторого $1 \le \nu \le n+1$ он принимает ненулевое значение. Однако

$$\chi(\nu H) = \pm h^n(\nu H) = \pm h^0(K_X - \nu H).$$

Значит, $m \le n + 1$.

(12.14) *Литература.* Доказательство теоремы взято из работы Кавамата [Ka4], причем использованы упрощения и добавления Коллара [Ko3] (см. также [KMM, 4.1]).

Лекция 13
Теорема о необращении в нуль

(13.1) Доказательство теоремы о необращении в нуль

Сначала заметим, что в условии этой теоремы мы можем предполагать, что дивизор D численно не эквивалентен нулю. В противном случае

$$h^0(X;\ mD + \ulcorner G \urcorner) = \chi(mD + \ulcorner G \urcorner) = \chi(\ulcorner G \urcorner) = h^0(X;\ \ulcorner G \urcorner) \ne 0,$$

что дает требуемое утверждение теоремы.

(13.2) Выберем некоторую гладкую точку $x \in X$, не лежащую в носителе дивизора G. В приводимой ниже конструкции отображения f мы будем в первую очередь раздувать эту точку. Мы утверждаем, что можно выбрать целые положительные числа $q_0 \ge a$ и $e(q)$ для каждого $q \ge q_0$, такие, что

i) дивизор $(e(qD + G - K_X) - K_X)$ является обильным для всех $e \ge e(q)$;

ii) для любого $k > 0$ существует некоторая константа $e(q, k)$, такая, что для всех $e \ge e(q, k)$, для которых $e(qD + G - K_X)$ — дивизор Картье, в линейной системе $|e(qD + G - K_X)|$ существует некоторый дивизор $M(q, e)$, имеющий в точке x кратность больше, чем $ek \dim X$.

Для того чтобы доказать это утверждение, положим $d = \dim X$ и рассмотрим число

$$(qD + G - K_X)^d = ((q - a)D + aD + G - K_X)^d.$$

Поскольку D — nef-дивизор, то $\mathbb{Q}$-дивизор

$$D + \varepsilon(\text{обильный дивизор})$$

является обильным. Переходя к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$, получаем, что для любого подмногообразия Z размерности d' выполнено неравенство $D^{d'} \cdot Z \geq 0$. Следовательно,

$$(qD + G - K_X)^d = ((q - a)D + aD + G - K_X)^d \geq$$
$$\geq (q - a)D\cdot(aD + G - K_X)^{d-1}.$$

Существует некоторая кривая C, пересекающаяся положительно с D, такая, что 1-цикл $(p(aD + G - K_X))^{d-1}$ для некоторого p представим в виде суммы C и эффективного 1-цикла. Таким образом, $D\cdot(aD + G - K_X)^{d-1} > 0$. Следовательно, правая часть в неравенстве выше стремится к бесконечности при увеличении q. Используя формулу Римана—Роха и теорему об обращении в нуль (см. условие i) выше и (9.2)), получаем

$$h^0(e(qD + G - K_X)) \geq (1/d\,!)(qD + G - K_X)^d e^d + O(e^{d-1}).$$

С другой стороны, свойство дивизора $M(q, e)$ иметь в точке x кратность более, чем dek, определяется в линейной системе

$$|e(qD + G - K_X)|,$$

самое большее, $(1/d\,!)\cdot(dk)^d\cdot e^d + O(e^{d-1})$ условиями. Поскольку $(qD + G - K_X)^d \longrightarrow \infty$, когда $q \longrightarrow \infty$, размерность линейной системы будет больше, чем количество условий. Это доказывает требуемое утверждение.

(13.3) Лемма. *Пусть многообразие X и дивизор $G = \sum g_i G_i$ удовлетворяют условиям* (9.4). *Рассмотрим произвольный собственный бирациональный морфизм $f\colon Y \longrightarrow X$, где Y — гладкое многообразие. Пусть*

$$K_Y + f^*G \equiv f^*K_X + \sum b_j F_j,$$

где F_j — различные дивизоры. Выберем положительное число δ. Тогда если $g_i > -1 + \delta$ для всех i, то $b_j > -1 + \delta$ для всех j.

Доказательство. Утверждение доказывается тем же самым способом, что и вторая часть предложения (6.5). Достаточно проверить его для одного раздутия с гладким центром. В этом случае оно сводится к простому вычислению.

(13.4) Пусть $f = f(q, e)\colon Y \longrightarrow X$ — некоторое разрешение особенностей дивизора $M(q, e)$, причем получившийся дивизор $\sum F_j \in Y$ имеет простые нормальные пересечения (его компоненты не обязательно являются исключительными). Предположим, что f стягивает дивизор, являющийся раздутим $B_x X$ точки $x \in X$, причем выполнены следующие условия:

a) $K_Y + f^*G \equiv f^*K_X + \sum b_j F_j$, где $b_j > -1$ (см. (13.3));

b) для выбранных подходящим образом чисел $0 < p_j \ll 1$ дивизор

$$(1/2)f^*(aD + G - K_X) - \sum p_j F_j$$

является обильным;

c) $f^*M(q, e) = \sum r_j F_j$, где индексу $j = 0$ соответствует исключительный дивизор раздутия точки x.

(13.5) Положим

$$N(b, c) = bf^*D + \sum (-cr_j + b_j - p_j)F_j - K_Y .$$

Как и в рассуждениях, проведенных выше, мы хотели бы сделать дивизор $N(b, c)$ обильным. Проведем ряд преобразований:

$$\begin{aligned} N(b, c) &= bf^*D + \sum (-cr_j + b_j - p_j)F_j - K_Y \equiv \\ &\equiv bf^*D - cef^*(qD + G - K_X) - \sum p_j F_j + f^*G - f^*K_X = \\ &= (b - a)f^*D + (1 - ce)f^*(aD + G - K_X) - \sum p_j F_j = \\ &= \{(b - a)f^*D\} + \{(1/2 - ce)f^*(aD + G - K_X)\} + \\ &\qquad + \{ (1/2)f^*(aD + G - K_X) - \sum p_j F_j \}. \end{aligned}$$

Заметим, что в последнем из полученных выражений при $b \geq a$ и $ce \leq 1/2$ первые два слагаемых являются nef-дивизорами, а третье — обильный дивизор. Следовательно, в этом случае $N(b, c)$ обилен.

(13.6) В утверждении (13.2) выберем $k = 2$ и

$$c = \min \{(1 + b_j - p_j)/r_j\},$$

где минимум выбирается среди тех значений индекса j, для которых $r_j > 0$. В этом случае $c > 0$. Как и в проведенных выше рассуждениях, мы можем «слегка пошевелить» p_j так, чтобы этот минимум достигался лишь для одного значения j' индекса j. Положим $F = F_{j'}$. Согласно выбору дивизора F_0, имеем

$$b_0 = d - 1, \quad r_0 \geq dek.$$

Следовательно,

$$c \leq (1 + (d - 1) - p_0) \ / \ 2de < 1/2e.$$

Таким образом, $ce < 1/2$. Поэтому при $b \geq a$ дивизор $N(b, c)$ является обильным.

(13.7) Оставшаяся часть доказательства повторяет рассуждения из доказательств теоремы об отсутствии базисных точек и теоремы о рациональности. Рассмотрим дивизор

$$N(b, c) = bf^*D + A - F - K_Y .$$

Заметим, что коэффициент $(-cr_j + b_j - p_j)$ при F_j в выражении для дивизора A не превосходит b_j. Следовательно, $\ulcorner G \urcorner - f_*(\ulcorner A \urcorner)$ — эффективный дивизор. Таким образом, получаем

$$H^0(Y;\ bf^*D + \ulcorner A \urcorner) \subseteq H^0(X;\ bD + \ulcorner G \urcorner).$$

Так как $N(b, c)$ обилен, то, кроме того,

$$H^1(Y;\ bf^*D + \ulcorner A \urcorner - F) = H^1(Y;\ bf^*D + \ulcorner A - F \urcorner) = 0.$$

Из этого равенства следует, что для доказательства $H^0(X;\ bD + \ulcorner G \urcorner) \neq 0$ достаточно установить соотношение $H^0(Y;\ (bf^*D + \ulcorner A \urcorner)\,|_F) \neq 0$. Это последнее соотношение можно доказать с помощью индукции по размерности многообразия X. Предполагая уже доказанной теорему о необращении в нуль для многообразий размерности меньше, чем $\dim X$, и применяя предположение индукции к дивизору F, мы завершаем доказательство теоремы.

(13.8) Таким образом, завершено доказательство первого этапа программы Мори, который показывает, что для любого проективного многообразия X с каноническими особенностями и численно неэффективным каноническим классом K_X в конусе Мори существует экстремальный луч и стягивающий этот луч морфизм. Следующий этап состоит в установлении существования флипов. До сих пор известно доказательство этого утверждения лишь в размерности 3. Более того, полученное доказательство в размерности 3 слишком сложно для того, чтобы привести его в лекциях в полном объеме, однако мы постараемся обсудить его основные идеи, опуская технические трудности.

(13.9) *Литература.* Доказательство взято из работы Шокурова [Sh].

Лекция 14
Знакомство с флипами

(14.1) Теперь мы возвратимся к программе минимальных моделей в размерности три, которая обсуждалась в лекции 5. Мы еще не обсудили одно из понятий этой программы, введенное в (5.11), которое называется флипом. Предстоит доказать два утверждения:

1) существование флипов;

2) обрыв флипов.

Мы начнем с обсуждения последнего.

(14.2) Напомним, что в определении трехмерного многообразия X с терминальными особенностями мы используем некоторое разрешение

$$f : Y \longrightarrow X,$$

для которого

$$K_Y = f^*K_X + \sum a_i E_i\ ,\ a_i > 0.$$

Определим **сложность** $d(X)$ многообразия X как количество коэффициентов a_i, для которых $a_i < 1$. Сложность не зависит от выбора разрешения Y. Оказывается, что при флипах сложность *уменьшается*; поэтому любая последовательность флипов должна обрываться.

(14.3) Теорема. *Если диаграмма*

$$-K_X \quad f\text{-обилен} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & X^+ \arrow[dl, "f^+"] \\ & Z & \end{tikzcd} \qquad K_{X^+} \quad f^+\text{-обилен}$$

является флипом, то $d(X^+) < d(X)$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g^+"] & \\ X & & X^+ \end{tikzcd}$$

—одновременное разрешение особенностей многообразий X и X^+. Тогда

$$K_Y = g^*K_X + \sum a_iE_i \quad \text{и} \quad K_Y = (g^+)^*K_{X^+} + \sum b_iE_i\,.$$

Выберем достаточно большое целое число r так, чтобы rK_{X^+} был относительно f^+ очень обильным дивизором Картье. Выберем также общий дивизор $D^+ \in |rK_{X^+}|$. Тогда для подъема $D' = (g^+)^*D^+$ на Y имеет место включение

$$D' + \sum rb_iE_i \in |rK_Y|.$$

Пусть D обозначает образ дивизора D' в X. Так как $D \in |rK_X|$ и K_X является f-отрицательным, дивизор D должен содержать объединение C кривых, стягиваемых отображением f. Поэтому полный прообраз g^*D содержит в качестве компонент все дивизоры E_i и

$$D' + \sum rb_i\, E_i = rK_Y = g^*D + \sum ra_i\, E_i =$$

$$= D' + \sum c_i\, E_i + \sum ra_i\, E_i\,,$$

где $c_i > 0$ для каждого i.

Следовательно, неравенство $a_i < b_i$ выполняется для каждого i. Мы можем выбрать многообразие Y таким способом, чтобы оно доминировало над раздутием кривых C^+ в X^+, все ассоциированные исключительные дивизоры которого будут иметь коэффициенты $b_i = 1$. Таким образом, сложность уменьшится по крайней мере на единицу.

(14.4) Теорема о флипе[1] . *Пусть* $f : X \longrightarrow Z$ *является собственным бирациональным морфизмом нормальных трехмерных многообразий, причем выполняются следующие условия*: X *имеет только терминальные особенности, отображение* f *не стягивает дивизоров и* $-K_X$ *обилен относительно* f. *Тогда существует такой собственный бирациональный морфизм* $f^+ : X^+ \longrightarrow Z$, *что* X^+ *имеет только терминальные особенности,* f^+ *не стягивает дивизоров и* K_{X^+} *будет обильным относительно* f^+:

$$-K_X \quad f\text{-обилен} \qquad \begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow & X^+ \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle f^+} & \\ & Z & \end{array} \qquad K_{X^+} \quad f^+\text{-обилен}$$

(14.5) Стратегия доказательства в общих чертах состоит в следующем:

(14.5.1) Работая в категории аналитических многообразий, мы последовательно можем стянуть компоненты кривых, которые стягиваются морфизмом f. Тем самым доказательство теоремы о флипе сведется к доказательству ее «локального» варианта, в котором многообразие X заменяется своим ростком вдоль неприводимой кривой C с условием $C \cdot K_X < 0$. Этот аналитический росток называется также **экстремальной окрестностью**. Заметим, что любой флип может быть представлен в виде композиции последовательности таких аналитических флипов.

(14.5.2) В предыдущей ситуации

$$R^1 f_* \omega_X = R^1 f_* \mathcal{O}_X = 0.$$

Если многообразие X является гладким, эти равенства следуют из утверждения (8.8). В нашем случае имеются особеиности, и

[1] Более общий результат получен недавно Шокуровым [Sh1*]. —*Прим. ред.*

по этой причине непосредственно применить (8.8) нельзя. Тем не менее проходит по существу то же самое доказательство.

(14.5.3) Мы утверждаем, что кривая C гладкая и рациональная. Согласно (14.5.2), $R^1 f_* \mathcal{O}_X = 0$. Поэтому, применяя f_* к короткой точиой последовательиости

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

получаем $H^1(\mathcal{O}_X / \mathcal{I}) = 0$ и $C = \mathbf{CP}^1$.

(14.5.4) Мы утверждаем, что X должно обязательно иметь особенности на кривой C. Предположим, что X—гладкое многообразие; тогда

$$h^0(C;\ f^*T_V) - h^1(C;\ f^*T_V) > 3,$$

поскольку $C \cdot K_X < 0$. Согласно (1.2), кривая C деформируется, что противоречит тому, что C – исключительное множество.

(14.5.5) Теперь мы покажем, что многообразие X не может иметь более двух особых точек на кривой C с индексом больше 1 (см. (6.8)). Для того чтобы показать это, мы воспользуемся чисто топологическими рассуждениями.

Если термниальная особенность $(U,\ p)$ размерности три имеет индекс m, то $\pi_1(U \setminus \{p\}) = \mathbf{Z}_m$, так как особенность $(U,\ p)$ является фактором гиперповерхностной особенности по действию группы $\mathbf{Z}_m$ (здесь U обозначает подходящую малую окрестность p).

Будем исследовать локальную топологию в окрестности $\mathbf{CP}^1$. Предположим, что существуют три особые точки P, Q и R индекса больше 1 и i, j, k—соответствующие индексы. Для простоты допустим, что X имеет факторособенности в P, Q, R, а в остальных точках гладкое. Тогда множество $X \setminus \{P,\ Q,\ R\}$ нмеет гомотопический тип двумерной сферы S^2 с тремя вырезанными на ней малыми открытыми дисками и приклеенными вместо этих дисков тремя линзовыми пространствами L_i, L_j, L_k. Важным является то обстоятельство, что граница выреза на сфере отождествляется с образующим элементом π_1 соответствующего линзового пространства. Получаем

$$\pi_1(X \setminus \{P,\ Q,\ R\}) = \langle\alpha,\beta,\gamma\rangle/\{\alpha\beta\gamma = 1,\ \alpha^i = 1,\ \beta^j = 1,\ \gamma^k = 1\}.$$

Факт из алгебры. Данная фундаментальная группа имеет конечную факторгруппу G, в которой порядки элементов α, β и γ соответственно равны i, j и k.

Ядро гомоморфизма из π_1 в G определяет конечное накрытие Галуа X^* многообразия $X \setminus \{P, Q, R\}$. Добавляя конечное число точек над P, Q и R, многообразие X^* можно пополнить до связного накрывающего пространства $X^\wedge$ многообразия X. Но тогда многообразие $X^\wedge$ является гладким и $C^\wedge \cdot K_X{}^\wedge < 0$. Как показано выше в (14.5.4), это приводит к противоречию. Доказательство в случае четырех и более особых точек очень похоже на приведенное. Заметим, что если имеются только две особые точки, то фундаментальная группа в приведенных выше рассуждениях обычно является тривиальной.

(14.5.6) Теперь рассмотрим стягивание

$$f : (X, C) \longrightarrow (Z, p).$$

Пусть $\mathcal{G}$ — пучок идеалов, радикал которого является пучком $\mathcal{I}$ идеалов кривой C. Применяя f_* к последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{G} \longrightarrow 0$$

и к этой же последовательности, умноженной тензорно на ω_X, а также используя (14.5.2), получаем

$$(*) \qquad H^1(\mathcal{O}_X/\mathcal{G}) = 0 \text{ и } H^1(\omega_X/\mathcal{G}\omega_X) = 0.$$

В (14.5.3) мы уже видели одно важное следствие этих обращений в нуль. Оказывается, что эти условия также налагают сильные ограничения на возможные особенности и глобальные свойства экстремальной окрестности. Пусть $\mathcal{I}$ обозначает пучок идеалов кривой C. Нам понадобятся в дальнейшем еще два результата.

$$(14.5.7) \qquad \omega_X/\mathcal{I}\omega_X = \mathcal{O}(-1) \oplus (\text{пучок кручения}).$$

Из (14.5.6) мы знаем, что группа H^1 этого пучка нулевая, следовательно, свободная от кручения часть этого пучка имеет степень не менее -1. С другой стороны, имеется естественное отображение

$$\beta : (\omega_X/\mathcal{I}\omega_X)^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{O}_C(mK_X),$$

являющееся инъективным в общей точке. Так как линейное расслоение в правой части имеет отрицательную степень, то $\deg(\omega_X/\mathcal{I}\omega_X) < 0$. В качестве следствия этих рассуждений мы получаем, что

$$-1 \le C\cdot K_X < 0.$$

(14.5.8) $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus$ (пучок кручения), где числа a, $b \ge -1$.

Заметим, что в длинной точной последовательности когомологий, ассоциированной с точной последовательстья пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

отображенне $H^0(\mathcal{O}/\mathcal{I}^2) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}/\mathcal{I})$ является сюръективным и $H^1(\mathcal{O}/\mathcal{I}^2) = 0$. Таким образом, $H^1(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = 0$.

(14.5.9) Основная часть в доказательстве существования флипов состоит в сложных технических рассуждениях, доказывающих существование такого дивизора Вейля $E \in |-2K_X|$, что двойное накрытие

$$p : W \longrightarrow X$$

с ветвлением в E имеет только канонические особенности. В этом случае канонический класс многообразия W, который равен $K_W = p^*K_X + (1/2)p^*E$, является тривиальным. Мы оказались в ситуации, когда к W можно применить флоп, описываемый следующей диаграммой:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & W^+ \arrow[dl, "f^+"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

K_W f-тривиален $\qquad$ K_{W^+} f^+-тривиален

В этой диаграмме D является некоторым дивизором, а D^+ — его собственным образом, причем дивизор $-D$ обилен относительно f, а дивизор D^+ обилен относительно f^+. Для флопов уже имеются теоремы о существовании и обрыве последовательности флопов.

Требуемый флип X^+ неприводимой кривой C получается с помощью факторизации W^+ по инволюции, индуцированной инволюцией на W.

(14.6) В большинстве случаев удается найти такой дивизор D из линейной системы $|-K_X|$, что D имеет только дювалевские особенности. В терминологии Рида такой дивизор D называется *дювалевским слоном*. Предполагается, что дювалевский слон всегда существует. Используя явное описание терминальных особенностей, можно легко доказать, что из существования дювалевского слона следует существование указанного выше двойного накрытия $W \longrightarrow X$.

Для того чтобы объяснить, почему общий дивизор Вейля в $|-K_X|$ должен был бы иметь только дювалевские особенности, мы рассмотрим случай, когда все особенности X являются простыми, т. е. циклическими факторами терминальных особенностей. В этом случае все они имеют вид $\mathbf{C}/\mu_r$, где образующий элемент ξ группы μ_r корней r-й степени из единицы действует по правилу

$$(x, \ y, \ z) \longrightarrow (\xi x, \ \xi^{-1}y, \ \xi^a z)$$

с взаимно простыми числами a и r. На накрывающем циклическую факторособенность пространстве $\mathbf{C}^3$ мы имеем

$$-K_{\mathbf{C}^3} = \mathcal{O}(dx \wedge dy \wedge dz)^{-1}.$$

Если положить $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, то действие ξ на ω определяется правилом $\omega \longrightarrow \xi^a \omega$. Поэтому сечение z/ω спускается на фактор и локально задает $-K_X$ в виде дивизора Вейля D. Особенности дивизора D являются факторособенностями $\mathbf{C}^2$ по действию

$$(x, \ y) \longrightarrow (\xi x, \ \xi y^{-1}).$$

Следовательно, они являются дювалевскими особенностями, вложенными в $\mathbf{C}^3$ посредством отображения $(xy, \ x^2, \ y^2)$.

(14.7) *Литература.* Утверждение 14.3 принадлежит В.В. Шокурову [Sh], 14.4 — Мори [M3], а 14.5 — Мори и Бенвинисту [B2]. Идея рассмотрения двойного накрытия появилась в работе Каваматы [Ka5]. [Более общий случай существования лог-флипов изучен недавно В.В. Шокуровым [Sh1*]. — *Ред.*]

Лекция 15
Особенности экстемальной окрестности

(15.1) Цель этой лекции теперь состоит в освоении п. (14.5.9) доказательства теоремы о флипе, а именно, мы постараемся дать набросок классификации особых точек, возникающих в экстремальных окрестностях. При этом мы коснемся всех важных технических приемов, используемых в разделах 2 – 7 работы Мори [M3]. Таким образом, просмотрев некоторые определения и теоремы в этих разделах, читатель смог бы приступить к последним двум частям статьи, составляющим ее стержень.

(15.2) Пусть X – экстремальная окрестность, содержащая единственную экстремальную рациональную кривую C, и p – ее точка. Мы собираемся дать классификацию троек (X, C, p). Для иллюстрации предположим, что многообразие X имеет факторособенность в p. Как мы уже видели, сама кривая C является гладкой, и по этой причине можно было бы предположить, что информация о (X, p) уже однозначно определяется этой тройкой. Однако это далеко не так. Перед тем как привести некоторые примеры, мы введем одно обозначение, которое далее будет использоваться.

(15.3) Обозначение. Пусть $\mathbf{Z}_m$ – циклическая группа порядка m. Зафиксируем некоторый первообразный корень ξ m-й степени из 1. Предположим, что $\mathbf{Z}_m$ действует линейно на $\mathbf{C}^n$, а координатные функции являются собственными функциями относительно этого действия, т.е. элемент $l \in \mathbf{Z}_m$ действует на координату x_i по правилу

$$l(x_i) = \xi^{a(i)} x_i .$$

В этом случае мы будем говорить, что $\mathbf{Z}_m$ действует на $\mathbf{C}^n$ с весами

$$(a(1), \dots, a(n)).$$

Аналогично если f—многочлен от n переменных, являющийся собственной функцией относительно этого действия, то мы будем говорить, что группа Z_m действует на f с некоторым весом, который мы обозначим через $\mathrm{wt}(f)$.

(15.4) Пример. Пусть Z_m действует на координаты

$$(x_1, x_2, x_3)$$

с весами $(1, a, m-a)$. Пусть $V \subseteq \mathbf{C}^3$ — мономиальная кривая, являющаяся образом отображения

$$t \longrightarrow (t^{km+1}, t^a, t^{m-a}).$$

Тогда $\mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_m$ имеет в нуле терминальную особенность, а $V/\mathbf{Z}_m$ является ростком гладкой крнвой в окрестности этой особенности.

Если вернуться назад к проблеме отыскания хорошего дивизора в линейной системе $|-K_X|$, то видно, что условие $\{x_1 = 0\}$ высекает такой дивизор по крайней мере локально. Теперь предположим, что упомянутая выше особенность является единственной в некоторой экстремальной окрестности X. Один из способов отыскания хорошего дивизора D в линейной системе $|-K_X|$ состоит в нахождении некоторого дивизора, трансверсального к кривой C так, чтобы он был глобальным дивизором в некоторой достаточно малой окрестности этой кривой. Дивизор D принадлежит линейной системе $|-K_X|$, если он имеет правильный индекс пересечения с кривой C. В нашем случае этот индекс легко вычисляется:

$$D \cdot C = k + (1/m).$$

С другой стороны,

$$-1 \le C \cdot K_X < 0.$$

Таким образом, в любом случае обязательно $k = 0$.

Это показывает, что мы должны очень тщательно анализировать положение кривой C по отношению к особенностям многообразия X.

(15.5) Предложение. *Предположим, что группа $\mathbf{Z}_m$ действует на $\mathbf{C}^3$ с весами (a_i), и пусть $V \subseteq \mathbf{C}^n$ является ростком неприводимой кривой, инвариантной относительно $\mathbf{Z}_m$. Предполо-*

жим, что $V / \mathbf{Z}_m$ — гладкое многообразие. Тогда после подходящей $\mathbf{Z}_m$-инвариантной замены координат V становится мономиальной кривой. Иначе говоря, эта кривая будет образом отображения $t \longrightarrow (t^{b(i)})$ для некоторых $(b(i))$.

Доказательство. Можно считать, что $\mathbf{Z}_m$ действует точно на V. Группа $\mathbf{Z}_m$ действует также на нормализации $V\^{}$ кривой V. Пусть t — локальный параметр на $V\^{}$, являющийся собственной функцией относительно $\mathbf{Z}_m$. Тогда поле $\mathbf{Z}_m$-инвариантных функций на $V\^{}$ порождается элементом t^m. Поскольку $V/\mathbf{Z}_m$ — гладкое многообразие, отображение $V\^{}/\mathbf{Z}_m \longrightarrow V/\mathbf{Z}_m$ является изоморфизмом. Поэтому каждая $\mathbf{Z}_m$-инвариантная регулярная функция на $V\^{}$ также регулярна и на V. Для каждого i мы можем записать

$$x_i = t^{b(i)} g_i(t),$$

где g_i являются $\mathbf{Z}_m$-инвариантными многочленами с ненулевыми свободными членами. Поскольку g_i $\mathbf{Z}_m$-инвариантны, то они являются ограничениями обратимых $\mathbf{Z}_m$-инвариантных функций h_i на $\mathbf{C}^n$. Теперь мы можем ввести новые координаты по правилу

$$y_i = x_i \sqrt[m]{h_i}.$$

Очевидно, что в этой новой координатной системе V является мономиальной кривой.

(15.6) Обозначения. Пусть тройка (X, C, p) определяет экстремальную окрестность точки p. Обозначим через $(X^\#, C^\#, p^\#)$ построенное в (6.8) накрытие индекса 1. Группа $\mathbf{Z}_m$ действует на этом накрытии, и фактором по этому действию является (X, C, p). Вообще говоря, кривая $C^\#$ не обязательно неприводима, но мы будем это предполагать, поскольку рассмотрение общего случая не требует дополнительных идей.

Как уже мы видели, каждая трехмерная терминальная особенность является фактором гладкой точки или двойной точки на гиперповерхности. По этой причине мы всегда можем предполагать, что тройка $(X^\#, C^\#, p^\#)$ вложена в $\mathbf{C}^4$ и задана уравнением $\Phi = 0$, где Φ определяет в начале координат гладкую или двойную точку.

Используя предыдущие рассуждения, мы можем так выбрать координатную систему на $\mathbf{C}^4 \supseteq X^{\#}$, чтобы $C^{\#}$ стала мономиальной кривой. Для любой регулярной функции f на $X^{\#}$ через $\operatorname{ord} f$ обозначим порядок нуля f на нормализации кривой $C^{\#}$. Значения $\operatorname{ord} f$ для всевозможных f образуют полугруппу, которую мы обозначим через $\operatorname{ord} C^{\#}$. Если $\operatorname{ord} x_i = a_i$, то эта полугруппа по сложению порождена числами a_i. Если $a_i - m$ принадлежит полугруппе $\operatorname{ord} C^{\#}$, то можно найти такой одночлен M от координат x_i, который имеет порядок $a_i - m$, и ввести новую координату $x_i - M$. Следовательно, всегда можно предполагать, что $a_i - m$ не лежит в $\operatorname{ord} C^{\#}$.

Заметим, что порядок x_i зависит только от $C^{\#}$, в то время как выбор веса функции зависит от выбора образующего группы $\mathbf{Z}_m$. Ясно, что мы можем выбрать этот образующий так, чтобы

$$\operatorname{ord} x_i \equiv \operatorname{wt} x_i \ (\bmod\ m) \text{ для всех } i.$$

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что такой выбор образующего сделан.

(15.7) Определение. Будем называть **нормализованной** любую локальную систему координат, удовлетворяющую упомянутым выше условиям.

(15.8) Трехмерные терминальные особенности являются специальными факторами гладких или двойных точек, и их полный список известен. Мы не будем принимать во внимание конечный набор исключений и сосредоточимся только на основных сериях, для которых мы можем выбрать координаты x_i так, чтобы выполнялись следующие условия для их порядков a_i:

$$a_2 + a_3 \equiv 0 \ (\bmod\ m), \ (a_1 a_2 a_3,\ m) = 1, \ a_4 \equiv 0 \ (\bmod\ m)$$

$$\operatorname{wt}(\Phi) \equiv 0 \ (\bmod\ m).$$

Заметим, что $m \in \operatorname{ord} C^{\#}$, поскольку C — гладкая кривая и накрытие $C^{\#} \longrightarrow C$ имеет степень m. Как было отмечено выше, $a_4 = m$.

Перейдем теперь к определениям двух простейших локальных инвариантов, введенных Мори для оценки вклада особенности (X, C, p) в экстремальную окрестность.

(15.9) Определение. (i) Пусть дана тройка (X, C, p) и m — индекс X в точке p. Существует, как мы видели, естественное отображение

$$\beta:\ (\omega_X / \mathcal{I}\omega_X)^{\otimes m} \longrightarrow \mathcal{O}_C(mK_X).$$

Определим число $w_p = m^{-1}$[длина коядра β] (первоначально в работе Мори это число обозначалось через $w_p(0)$).

(ii) Мы можем определить естественные отображения

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \times \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \times \omega_C \longrightarrow \omega_C \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \omega_X / \mathcal{I}\omega_X \longrightarrow \mathrm{gr}^0(\omega_X)$$

формулой

$$x \times y \times z du \longrightarrow z dx \wedge dy \wedge du,$$

где $\mathrm{gr}^0(\omega_X)$ — локально свободная часть пучка $\omega_X / \mathcal{I}\omega_X$.

Это, в свою очередь определяет гомоморфизм

$$\alpha:\ \Lambda^2(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\otimes\omega_C \longrightarrow \mathrm{gr}^0(\omega_X).$$

Положим

$$i_p = [\text{ длина коядра } \alpha\ ]$$

(это число в работе Мори обозначено через $i_p(1)$).

Из результатов предыдущей лекции следует

(15.10) Предложение.

(i) $\sum w_p < 1$;

(ii) $\sum i_p \leq 3$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из (14.5.7), поскольку

$$m\sum w_p = -m \deg \mathrm{gr}^0(\omega_X) + \deg \mathcal{O}_C(mK_X).$$

Вторая часть получается из определения и (14.5.8).

Полученный результат показывает, что локальные инварианты особенностей в совокупностн определяют некоторый глобальный инвариант, что накладывает ограничения на возможные особенности экстремальной окрестности. Далее мы собираемся вычислить или по крайней мере оценить упомянутые выше инварианты для троек (X, C, x).

Вычисление w_p :

(15.11) Поскольку $X^{\#}$ является гиперповерхностной особенностью, заданной уравнением Φ, локальный образующий дуализирующего пучка на $X^{\#}$ определяется формулой

$$\sigma = (\partial\Phi / \partial x_1)^{-1} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = \operatorname{Res} \Phi^{-1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4,$$

где Res — отображение вычета Пуанкаре. Очевидно, что σ является собственным вектором относительно $\mathbb{Z}_m$ с весом

$$\operatorname{wt}(\sigma) \equiv \sum a_i \pmod m.$$

Таким образом, из $\mathbb{Z}_m$-инвариантности σ^m следует, что этот элемент при спуске дает локальный образующий пучка $\mathcal{O}_C(mK_X)$. Для получения локального образующего пучка $\operatorname{gr}^{\mathrm{o}}(\omega)$ мы должны найти инвариантное сечение дуализирующего пучка на $X^{\#}$. Мы можем его искать в виде $M\sigma$, где M — одночлен. В этом случае элемент $M^m \sigma^m$ является локальным образующим пучка $\operatorname{gr}^{\mathrm{o}}(\omega)^m$; поэтому

$$w_p = m^{-1} \dim (\mathcal{O}_C(mK_X) / M^m \sigma^m \mathcal{O}_C(mK_X)).$$

Следовательно, мы получаем

$$w_p = m^{-1} \operatorname{ord} M.$$

Если обозначить через $\hat{a}$ остаток от деления целого числа a на m, то для рассматриваемой серии терминальных особенностей имеем

$$\operatorname{wt}(\sigma) = \hat{a}_1.$$

Таким образом, для введенного выше одночлена M выполнено сравнение

$$\operatorname{ord} M + \hat{a}_1 \equiv 0 \pmod m.$$

Если мы примем во внимание условие $w_p < 1$, то получим уравнение вида

$$\sum b_i a_i + \hat{a}_1 = m.$$

Следовательно, $b_4 = 0$, причем одно из чисел b_2 или b_3 также равно 0, например b_3. Поэтому

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 + \hat{a}_1 = m.$$

Это показывает, что a_1 или a_2 меньше m. Значит, кривая $C^{\#}$ не может быть сколь угодно сложной.

Вычисление i_p

(15.12) Мы уже имеем один локальный образующий пучка $\mathrm{gr}^0(\omega)$, а именно $M\sigma$. Если t — локальный параметр на нормализации $C^{\#}$, являющийся собственной функцией относительно $\mathbb{Z}_m$, то $dt^m = dx_4$ — локальный образующий пучка ω_C. Пусть $\mathcal{I}^{\#}$ обозначает идеал кривой $C^{\#}$ в $\mathbb{C}^4$, а $\mathcal{I}^{\#}_{\{0\}}$ — множество $\mathbb{Z}_m$-инвариантных функций в $\mathcal{I}^{\#}$ (здесь для любого пучка $\mathcal{F}$ с $\mathbb{Z}_m$-действием $\mathcal{F}_{\{0\}}$ обозначает подпучок инвариантных сечений пучка $\mathcal{F}$). Локальные образующие локально свободной части пучка $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ поднимаются до элементов f и g пучка $\mathcal{I}^{\#}_{\{0\}}$. Таким образом, $f\wedge g\wedge dt^m$ является локальным образующим $\Lambda^2(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\otimes\omega_C$.

Мы можем установить следующее соотношение между $M\sigma$ и образом $f\wedge g\wedge dt^m$ в $\mathrm{gr}^0(\omega)$:

$$df\wedge dg\wedge dx_4 = \operatorname{Res}\Phi^{-1}d\Phi\wedge df\wedge dg\wedge dx_4 =$$

$$= \operatorname{Res}\Phi^{-1}\partial(\Phi, f, g)/\partial(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4 =$$

$$= M^{-1}\,\partial(\Phi, f, g)/\partial(x_1, x_2, x_3)\, M\sigma,$$

где $\partial(\ ,\ ,\ )/\partial(\ ,\ ,\ )$ — якобиан. Таким образом,

$$i_p = m^{-1}(-\operatorname{ord} M + \operatorname{ord}\partial(\Phi, f, g)/\partial(x_1, x_2, x_3)).$$

В рассматриваемом случае Φ является также элементом из $\mathcal{I}^{\#}_{\{0\}}$, поэтому после упрощения получаем

$$m\cdot i_p \geq -\operatorname{ord} M + \operatorname{ord}\partial(h, f, g)/\partial(x_1, x_2, x_3),$$

где f, g, h порождают локально свободную часть пучка $\mathcal{I}^{\#}_{\{0\}}/\mathcal{I}^{\#\,2}_{\{0\}}$. Убедиться, что это не зависит от выбора f, g и h, — простое упражнение.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат:

(15.13) Теорема. *Пусть дана тройка (X, C, p), где (X, p) — трехмерная терминальная особенность, а C — росток гладкой кривой, проходящей через точку p с инвариантами $w_p < 1$ и $i_p \leq 3$; тогда выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *полугруппа* $\operatorname{ord} C^{\#}$ *порождена двумя элементами, т.е. является планарной;*

(ii) $3 \in \operatorname{ord} C^{\#}$, *так что кратность* $C^{\#}$ *в точке* $p^{\#}$ *не более* 3.

(15.14) Замечания. (i) Из этой теоремы вытекает, в частности, что для экстремальной окрестности (X, C, p) особенность кривой $C^{\#}$ не является слишком сложной. Мы докажем это свойство только для основной серии особенностей, хотя утверждение имеет место в общем случае. Доказательство в оставшихся случаях очень простое.

(ii) В действительности для экстремальной окрестности (X, C, p) полугруппа $\operatorname{ord} C^{\#}$ всегда порождается двумя элементами, но доказательство этого факта требует рассмотрения нового инварианта.

(15.15) *Доказательство.* Мы уже заметили, что из неравенства $w_p < 1$ следует равенство

$$b_1a_1 + b_2a_2 + \hat{a}_1 = m.$$

Если $a_1 < m$, то оно сводится к равенству

$$(b_1 + 1)a_1 + b_2a_2 = m.$$

Мы утверждаем, что в этом случае полугруппа $\operatorname{ord} C^{\#}$ порождена a_1 и a_2. Действительно, поскольку $a_4 = m$, элемент a_4 является линейной комбинацией a_1 и a_2. Далее, так как $a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod m$, то для некоторого $c \geq 0$ мы можем записать

$$a_3 = (b_1 + 1)a_1 + (b_2 - 1)a_2 + cm.$$

Таким образом, a_3 — также линейная комбинация a_1 и a_2, если $b_2 > 0$. Если же $b_2 = 0$, то a_1 делит m. Из взаимной простоты m и a_1 следует, что $a_1 = 1$, и в этом случае $\operatorname{ord} C^{\#}$ порождается 1.

Следовательно, нам осталось рассмотреть только случай $a_1 > m$. Заметим, что в этом случае тождество

$$b_1a_1 + b_2a_2 + \hat{a}_1 = m$$

сводится к

$$ba_2 + \hat{a}_1 = m.$$

Можно также записать

$$a_1 = cm + \hat{a}_1 \qquad \text{(для некоторого } c > 0),$$

$$a_3 = km - a_2 \qquad \text{(для некоторого } k > 0).$$

Заметим, что $a_2 < m$ и $a_4 = m$. Мы хотим доказать, что эти условия вместе с неравенством $i_p \le 3$ влекут за собой то, что a_2 или a_3 не больше 3.

Рассмотрим неравенство для i_p :

$$mi_p \ge -\operatorname{ord} M + \operatorname{ord} \partial(h, f, g)/\partial(x_1, x_2, x_3),$$

где f, g, h порождают локально свободную часть пучка $\mathcal{G}^{\#}_{\{0\}}/\mathcal{G}^{\#\,2}_{\{0\}}$.

Поскольку $\mathcal{G}^{\#}_{\{0\}}$ — множество инвариантных элементов в идеале мономиальной кривой и

$$a_4 = m,$$

простое рассуждение показывает, что в $\mathcal{G}^{\#}_{\{0\}}$ существует базис, состоящий из элементов вида

$$x_4^{\,e}(N - x_4^{(\operatorname{ord} N)/m}),$$

где N — одночлен от переменных x_1, x_2, x_3, такой, что m делит $\operatorname{ord} N$. Мы можем выбрать одночлены от переменных x_1, x_2, x_3, которые обозначим через F, G и H, такие, что

$$f = F - x_4^{(\operatorname{ord} F)/m}, \qquad g = G - x_4^{(\operatorname{ord} G)/m},$$

$$h = H - x_4^{(\operatorname{ord} H)/m}$$

порождают локально свободную часть $\mathcal{G}^{\#}_{\{0\}}/\mathcal{G}^{\#\,2}_{\{0\}}$.

Очевидно, что

$$\operatorname{ord} \partial(h, f, g)/\partial(x_1, x_2, x_3) = \operatorname{ord} F + \operatorname{ord} G + \operatorname{ord} H - a_1 - a_2 - a_3.$$

Теперь неравенство для i_p превращается в следующее:

$m(c + k + 4) \ge \min\{\operatorname{ord} F + \operatorname{ord} G + \operatorname{ord} H$: F, G и H — одночлены от x_1, x_2, x_3, порядок которых делится на m, причем ни один из них не делит другой$\}$.

Следовательно, мы должны найти такие многочлены наименьших порядков. Поскольку порядок x_2x_3 делится на m, мы можем рассматривать одночлены следующего вида:

x_2x_3, который имеет порядок km;

$x_1^e x_2^d$, где наименьшим порядком является $\operatorname{ord} x_1x_2^d = (c+1)m$;

$x_1^e x_3^d$, где все одночлены имеют достаточно большой порядок;

x_2^m (соответственно x_3^m) с порядком ma_2 (соответственно ma_3).

Если потратить 15 минут для вычисления порядков различных членов, можно увидеть, что при $\min\{a_i\} \geq 3$ единственный способ выбора для удовлетворения второго неравенства состоит в следующих возможностях для F, G, H :

$$x_2x_3,\ x_1x_2^b \text{ и } x_2^m \text{ (соответственно } x_3^m\text{)}.$$

Необходимым условием также является то, что a_2 или a_3 не более 3. Если $\operatorname{ord} C^\#$ содержит 2, то $\operatorname{ord} C^\#$ порождается 2 и наименьшим ее нечетным элементом. Таким образом мы снова оказываемся в ситуации (i). В противном случае $\operatorname{ord} C^\#$ содержит 3, что и требовалось доказать.

(15.16) Мори пришлось рассматривать бесконечно много локальных инвариантов. Одна часть из них использовалась для получения дополнительных ограничений на изолированные особенности экстремальной окрестности, другая — для обнаружения взаимодействия различных особенностей в одной и той же окрестности. Неравенства $\sum w_p < 1$ и $\sum i_p \leq 3$ являются простейшими. Например, первое неравенство показывает, что в одной экстремальной окрестности может существовать, самое большее, одна точка индекса 2. Второе неравенство может быть использовано в доказательстве существования, самое большее, трех особых точек в одной экстремальной окрестности.

(15.17) *Литература.* Классификация трехмерных терминальных особенностей принадлежит Риду [R3], В. И. Данилову [D], Моррисону – Стевенсу [MS] и Мори [M2]. Хорошее изложение имеется в [R5]. Все остальные результаты с некоторыми упрощениями взяты из [M3].

Лекция 16
Малые разрешения терминальных особенностей

В этой лекции мы обсудим более детально описание терминальных горенштейновых особенностей трехмерных многообразий, их малые разрешения и связь с флопами. По сравнению с флипами флопы гораздо более легки для понимания. Сначала мы закончим доказательство (6.23).

(16.1) Теорема. *Трехмерная горенштейнова особенность является терминальной тогда и только тогда, когда она является составной дювалевской особенностью (т. е. cDV-точкой).*

Набросок доказательства. Утверждение в одну сторону уже обсуждалось в (6.23). Предположим теперь, что (X, x) — изолированная cDV-точка, не являющаяся гладкой. Пусть

$$f\colon B \longrightarrow X$$

обозначает раздутие X в точке x, а E — исключительное множество (проективизированный касательный конус в x). Поскольку x — двойная точка, формула присоединения дает

$$K_B = f^*K_X + E.$$

Мы утверждаем, что B имеет только рациональные особенности. Если мы это покажем, то все доказано. Действительно, из рациональности особенностей следует, что для разрешения $g\colon Y \longrightarrow B$ выполнено $g_*\omega_Y = \omega_B$. Так как сечение K_X переходит в сечение пучка K_B, обращающееся в нуль на E, то

$$K_Y = g^*f^*K_X + F + E',$$

где E' обозначает собственный прообраз, а F содержит *каждый* исключительный дивизор разрешения g, поскольку все они лежат над дивизором E.

Доказательство того, что B имеет только рациональные особенности, состоит в следующем. Поскольку (X, x) является cDV-точкой, существуют такие локальные аналитические координаты, что X задается уравнением

$$(*) \qquad p(x, y, z) + tq(x, y, z, t) = 0,$$

рассматривать одночлены следующего вида:

x_2x_3, который имеет порядок km;

$x_1^e x_2^d$, где наименьшим порядком является $\operatorname{ord} x_1x_2^d = (c+1)m$;

$x_1^e x_3^d$, где все одночлены имеют достаточно большой порядок;

x_2^m (соответственно x_3^m) с порядком ma_2 (соответственно ma_3).

Если потратить 15 минут для вычисления порядков различных членов, можно увидеть, что при $\min\{a_i\} \geq 3$ единственный способ выбора для удовлетворения второго неравенства состоит в следующих возможностях для F, G, H :

$$x_2x_3,\ x_1x_2^b \text{ и } x_2^m \text{(соответственно } x_3^m\text{)}.$$

Необходимым условием также является то, что a_2 или a_3 не более 3. Если $\operatorname{ord} C^{\#}$ содержит 2, то $\operatorname{ord} C^{\#}$ порождается 2 и наименьшим ее нечетным элементом. Таким образом мы снова оказываемся в ситуации (i). В противном случае $\operatorname{ord} C^{\#}$ содержит 3, что и требовалось доказать.

(15.16) Мори пришлось рассматривать бесконечно много локальных инвариантов. Одна часть из них использовалась для получения дополнительных ограничений на изолированные особенности экстремальной окрестности, другая — для обнаружения взаимодействия различных особенностей в одной и той же окрестности. Неравенства $\sum w_p < 1$ и $\sum i_p \leq 3$ являются простейшими. Например, первое неравенство показывает, что в одной экстремальной окрестности может существовать, самое большее, одна точка индекса 2. Второе неравенство может быть использовано в доказательстве существования, самое большее, трех особых точек в одной экстремальной окрестности.

(15.17) *Литература.* Классификация трехмерных терминальных особенностей принадлежит Риду [R3], В. И. Данилову [D], Моррисону–Стевенсу [MS] и Мори [M2]. Хорошее изложение имеется в [R5]. Все остальные результаты с некоторыми упрощениями взяты из [M3].

Лекция 16
Малые разрешения терминальных особенностей

В этой лекции мы обсудим более детально описание терминальных горенштейновых особенностей трехмерных многообразий, их малые разрешения и связь с флопами. По сравнению с флипами флопы гораздо более легки для понимания. Сначала мы закончим доказательство (6.23).

(16.1) Теорема. *Трехмерная горенштейнова особенность является терминальной тогда и только тогда, когда она является составной дювалевской особенностью* (*т. е. cDV-точкой*).

Набросок доказательства. Утверждение в одну сторону уже обсуждалось в (6.23). Предположим теперь, что (X, x) — изолированная cDV-точка, не являющаяся гладкой. Пусть

$$f\colon B \longrightarrow X$$

обозначает раздутие X в точке x, а E — исключительное множество (проективизированный касательный конус в x). Поскольку x — двойная точка, формула присоединения дает

$$K_B = f^* K_X + E.$$

Мы утверждаем, что B имеет только рациональные особенности. Если мы это покажем, то все доказано. Действительно, из рациональности особенностей следует, что для разрешения $g\colon Y \longrightarrow B$ выполнено $g_* \omega_Y = \omega_B$. Так как сеченне K_X переходит в сечеяие пучка K_B, обращающееся в нуль на E, то

$$K_Y = g^* f^* K_X + F + E',$$

где E' обозначает собственный прообраз, а F содержит *каждый* исключительный дивизор разрешения g, поскольку все они лежат над дивизором E.

Доказательство того, что B имеет только рациональные особенности, состоит в следующем. Поскольку (X, x) является cDV-точкой, существуют такие локальные аналитические координаты, что X задается уравнением

$$(*) \qquad p(x, y, z) + tq(x, y, z, t) = 0,$$

где форма $p(x, y, z)$ определяет двойную точку, а общий дивизор H определяется уравнением $t = 0$. Заменяя в (*) параметр t на εt, мы получаем плоское семейство над аффинной прямой с параметром ε. В силу равнократности раздутие прямой $\{(0, \varepsilon)\}$ является плоским. Над точкой $\varepsilon = 0$ из анализа возможных уравнений следует, что все особенности раздутия являются рациональными. С другой стороны, все слои над $\varepsilon \neq 0$ изоморфны. Так как рациональность особенностей является открытым условием, все соседние особенности также должны быть рациональными.

Малые разрешения терминальных особенностей

(16.2) Предложение. *Пусть X—нормальная трехмерная особенность, а $f: Y \longrightarrow X$—собственный морфизм, стягивающий лишь конечное число кривых. Предположим, что Y имеет лишь канонические особенности и K_Y является f-тривиальным. Тогда*

(i) *из терминальности особенностей Y следует терминальность особенностей X;*

(ii) *из горенштейновости особенностей Y следует горенштейновость особенностей X;*

Доказательство. Выберем H на X таким образом, чтобы $mK_Y + f^*H$ являлся численно эффективным дивизором Картье, а $(m-1)K_Y + f^*H$ был бы nef- •н big-дивизором. В этой ситуации справедлива теорема (9.3) об отсутствии базисных точек, поэтому линейная система $|n(mK_Y + f^*H)|$ не имеет базисных точек для достаточно больших n. Используя это свойство для двух достаточно больших чисел n и $n+1$, мы заключаем, что mK_Y должен быть прообразом некоторого линейного расслоения на X. Но из-за отсутствия исключительных дивизоров это расслоение должно совпадать с mK_X. Из этого непосредственно вытекают теперь оба утверждения.

(16.3) Следствие. *Пусть $f: Y \longrightarrow X$—морфизм компактных трехмерных многообразий, который стягивает только одну неприводимую кривую C. Предположим, что Y гладкое и $C \cdot K_Y = 0$. Тогда $C = \mathbf{CP}^1$ и нормальный пучок $N_{C/Y}$ изоморфен одному из следующих трех: $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$, $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)$ или $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-3)$.*

Доказательство. Согласно (16.2), многообразие X имеет только терминальные особенности, которые являются рациональными. Таким образом, $R^1 f_* \mathcal{O}_Y = 0$. Как мы уже видели в (14.5.6), из этого свойства следует, что $H^1(\mathcal{O}_C) = 0$, т. е. $C = \mathbf{CP}^1$. Аналогично, $H^1(\mathcal{O}/\mathcal{I}^2) = 0$, где $\mathcal{I}$ — пучок идеалов кривой C. Следовательно, $H^1(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = 0$, откуда вытекает требуемое утверждение, поскольку $N_{C/Y} = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$, где $a + b = -C \cdot K_Y - 2$.

(16.4) Предложение. *Пусть f: $Y \longrightarrow X$ — малое стягивание, где Y — гладкое трехмерное многообразие. а X имеет лишь составные дювалевские особенности. Тогд*

1) $K_Y = f^* K_X$;

2) *если H — общий дивизор, содержащий особые точки X, то $f^* H$ — нормальная поверхность и $f^* H \longrightarrow H$ — ее частичное разрешение.*

Доказательство. Первое утверждение получается немедленно, поскольку K_Y и $f^* K_X$ — линейные расслоення, совпадающие в коразмерности 1. Далее,

$$K_{f^*H} = K_Y + f^*H\,|_{f^*H} = f^*(K_X + H\,|_H) = f^*K_H.$$

Если g: $H' \longrightarrow f^*H$ — нормализация поверхности H, то

$$\omega_{H'} = (\text{ идеал кондуктора })g^*\omega_{f^*H}.$$

С другой стороны, $\omega_{H'} \geq (fg)^*\omega_{f^*H}$, так как H имеет дювалевские особенности. Следовательно, f^*H — нормальная поверхность. Пусть $h : H'' \longrightarrow f^*H$ — ее минимальное разрешение. Из свойства минимального разрешения любой нормальной горенштейновой особенности на поверхности следует, что $h^*\omega_{f^*H} \geq \omega_{H''}$. С другой стороны, имеем обратное включение $\omega_{H''} \geq h^*\omega_{f^*H} = h^*f^*\omega_H$, так как H имеет дювалевские особенности. Из полученного равенства следует, что f^*H также имеет только дювалевские особенности.

(16.5) Частичное разрешение дювалевских особенностей и их деформаций дает способ построения примеров малых стягиваний. Начнем с частичного разрешения дювалевской особенности $f : H' \longrightarrow H$, которое стягивает единственную гладкую рациональную кривую C в точку $x \in H$. Рассмотрим гладкую деформацию H' с гладким объемлющим пространством Y. Оказывается, что f продолжается до отображения $Y \longrightarrow X$ (которое мы также обозначим через f), где X — пространство деформаций H. Теперь X может иметь особенность вдоль кривой, но так как версальность является открытым свойством, существует деформация поверхности H', такая, что соответствующая деформация поверхности H в X является гладкой.

(16.6) Теорема. *Предположим, что C стягивается в изолированную особую точку $x \in X$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *C имеет нормальное расслоение вида $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-3)$;*

2) *$f^{-1}\mathfrak{m}_{x,X}$ не порождает идеал кривой C в X в общей точке этой кривой;*

3) *$f^{-1}\mathfrak{m}_{x,H'}$ не порождает идеал C в H' в общей точке этой кривой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}$ — идеал кривой C в Y. Если $N_{C/Y}$ изоморфно

$$\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \text{ (или соответственно } \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-2)),$$

то

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1) \text{ (или соответственно, } \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)).$$

Таким образом,

$$H^1(C, \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}) = H^1(C, S^n(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)) = 0.$$

Следовательно, отображение

$$H^0(\mathcal{O}/\mathcal{I}^{n+1}) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}/\mathcal{I}^n)$$

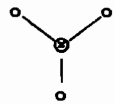
сюръективно для всех n.

Итак, мы получаем две формальные функции, определяющие кривую C. По теореме о формальных функциях заключаем, что существуют две функции, определенные в окрестности C на Y, которые порождают идеал $\mathcal{I}$ в общей точке кривой C. Эти функции являются прообразами элементов из $\mathfrak{m}_{x,X}$, так как X по определению является нормальным многообразием. Следовательно, из 2) вытекает 1).

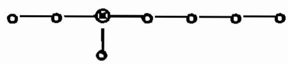
Утверждения 2) и 3) эквивалентны, поскольку поверхность H' сама определяется прообразом элемента из $\mathfrak{m}_{x,X}$. Наконец, если C имеет нормальное расслоение $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-3)$, то идеал кривой C даже в $\mathcal{O}/\mathcal{I}^2$ не порождается $f^{-1}\mathfrak{m}_{x,X}$.

(16.7) Заметим, что приведенное выше доказательство дает некоторый инвариант для кривых типа (1,–3), а именно длину $\mathcal{O}_Y/f^{-1}\mathfrak{m}_{x,X}$. Рассмотрим примеры:

(16.7.1) D_4—особенность на H, где помеченные светлыми кружками исключительные кривые на H' стягиваются, а инвариант длины равен 2:



(16.7.2) E_8—особенность на H, где помеченные светлыми кружками исключительные кривые на H' стягиваются, а инвариант длины равен 6:



Другой взгляд на флопы

(16.8) Предположим, что $f\colon Y \longrightarrow X$—малое стягивание трехмерных многообразий в горенштейнову терминальную особенность (X,x) с неприводимым слоем $f^{-1}(x) = C$. Тогда x является cDV-точкой, и ее уравнение может быть записано в подходящих координатах в виде

$$x^2 + q(y, z, t) = 0,$$

причем $C \cdot K_Y = 0$. Предположим, что существует дивизор Вейля D, для которого $C \cdot D < 0$. Рассмотрим инволюцию ι в шаре в $\mathbb{C}^3$, заданную формулой

$$(x, y, z, t) \longrightarrow (-x, y, z, t),$$

и расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd} Y^+ \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "f^+"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "\iota"] & Y \end{tikzcd}$$

Пусть $D^+ = (\iota')^{-1}(D)$; тогда $f^+(D^+) \equiv -f(D)$, так как $f(D) + \iota f(D) \equiv 0$. Таким образом, рациональное отображение $(f^+)^{-1}f : Y \dashrightarrow Y^+$ (не нужно его путать с $(\iota')^{-1}$) является D-флопом над X. Флоп

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "f"'] & & Y^{+} \arrow[dl, "f^{+}"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

является изоморфизмом вне C (соответственно вне $(\iota')^{-1}(D)$).

(16.9) Если $f: Y \longrightarrow X$ — малое стягивание, а X имеет трехмерные терминальные особенности, не обязательно горенштейновы, то мы можем взять накрытие индекса 1 над X, применить указанную выше конструкцию к накрытию, а затем снова перейти к фактору. Это дает требуемый флоп.

(16.10) *Литература.* Теорема (16.1) принадлежит Риду [R2], приведенное доказательство взято из [KS]. Утверждение (16.3) доказано Лофером [L2]; предложение (16.4) также имеется в [R2]. Теорема существования флопов для трехмерных многообразий с терминальными особенностями принадлежит Риду [R3], пп. (16.6), (16.7) — Коллару, а доказательство в пп.(16.8), (16.9) — Мори.

Недавно Стевенс в своей работе «On canonical singularities as total spaces of deformations» (preprint, Hamburg) доказал, что изолированная горенштейнова особенность является терминальной, если ее гиперплоское сечение является рациональной особенностью. Он также доказал, что X имеет канонические особенности, если mK_X является дивизором Картье и общий член линейной системы $|-K_X|$ имеет рациональные особенности.

Лекция 17

Кэлеровы структуры на локально симметрических пространствах

Теперь мы познакомимся с совсем другим аспектом теории Ходжа кэлеровых многообразий, а именно со связью между теорией Ходжа и гармоническими отображениями. Возможное соотношение между этими объектами возникнет из исследования отображения периодов для семейств подмногообразий в алгебраических многообразиях.

(17.1) Определения. Пусть G — полупростая группа Ли, не имеющая компактных факторгрупп, а K — максимальная компактная подгруппа группы G. Например,

17.1.1. $G = SL(n, \mathbf{R})$, $K = SO(n)$,

17.1.2. $G = SO(p, q)$, $K = SO(p) \times SO(q)$.

Инволюция Картана на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G дает ее разложение в собственные подпространства с собственными значениями $+1$ и -1:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

Так как эта инволюция лежит в нормализаторе K, она индуцирует некоторую инволюцию на факторе $Y = G/K$, действующую умножением на -1 на касательное пространство $\mathfrak{p}$ к Y в точке $\{K\}$. С помощью сопряжения для каждого $y \in Y$ получаем некоторую инволюцию, оставляющую неподвижной точку y и действующую умножением на -1 на касательном пространстве к y. Форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ разлагается в сумму отрицательно определенной формы на $\mathfrak{k}$ и положительно определенной формы на $\mathfrak{p}$, снабжая при этом Y инвариантной метрикой, для которой все упомянутые выше инволюции являются изометриями. Такое многообразие Y называется *симметрическим пространством.* Для скобки Ли имеем следующие включения:

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k} \text{ и } [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}.$$

Тензор кривизны в точке $\{K\}$ определяется равенством

$$R(X, Y)Z = -[[X, Y], Z].$$

В примере 1) выше инволюция Картана является просто умножением на -1 и транспонированием, $\mathfrak{p}$ — множество симметрических матриц размера $n \times n$ со следом нуль, а Y — множество положительно определенных матриц с определителем 1 (это в точности утверждение, что каждая обратимая матрица имеет единственное полярное разложение в произведение положительно определенной и ортогональной матриц).

В примере 2) разложение Картана имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} B & A \\ {}^tA & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{bmatrix},$$

где B и C — кососимметрические матрицы.

Для следующей теоремы нам необходимо потребовать, чтобы $Y = G/K$ имело «некомпактный тип», т. е. G и K были бы такими, как описано выше. В этом случае все секционные кривизны G/K неположительны. Наконец, мы должны также предположить, что Y *не является* эрмитовым симметрическим пространством.

(17.2) Теорема. *Пусть Y удовлетворяет условиям, приведенным выше, а Γ — дискретная подгруппа G со свободным левым действием на Y, причем $\Gamma\backslash Y$ — компакт. Пусть*

$$f\colon M \longrightarrow \Gamma\backslash Y$$

— некоторое непрерывное отображение из кэлерова многообразия M. Тогда f гомотопно несюръективному отображению (в случае $\dim M = \dim Y$ это эквивалентно тому, что фундаментальный цикл $\Gamma \setminus Y$ не лежит в образе $H_*(M)$).

(17.3) Дальнейшее будет посвящено некоторым идеям, используемым в доказательстве этой теоремы. Сначала, заметим, что из теоремы в качестве немедленного следствия получается отсутствие на $\Gamma\backslash Y$ кэлеровой структуры. В действительности мы можем сформулировать более сильное утверждение в виде следующей гипотезы.

(17.4) Гипотеза. *Пусть G/K и Γ удовлетворяют указанным выше условиям; тогда Γ не может быть фундаментальной группой никакого кэлерова многообразия.*

Эта гипотеза доказана для $G = SO(n, 1)$ при $n > 2$ (см. [CT]).

(17.5) Заметим, что пример (17.1.2) тесно связан с другим примером, в котором пространство $\Gamma\backslash Y$ является пространством периодов, возникающих из поляризованных структур Ходжа, ассоциированных с примитивной частью второй группы когомологий алгебраических поверхностей:

(17.5.1) $G = SO(2p, q)$, $K = U(p) \times SO(q)$,

$$\Gamma = SO(2p, q) \cap GL(2p + q, \mathbf{Z}).$$

В этом случае G/K является комплексным многообразием, поскольку оно может быть реализовано в качестве локально замкнутого подмногообразия многообразия $(p, p+q)$-флагов (F^2, F^1) в комплексификации вещественного пространства V с невырожденной билинейной симметрической формой сигнатуры $(2p, q)$. Однако факторпространство $\Gamma\backslash Y$ не является компактным.

(17.6) Если в предыдущем примере заменить группу G на ортогональную группу квадратичной формы

$$Q = |x|^2 - \sqrt{2}|y|^2$$

на пространстве $\mathbf{R}^{2p+q}$, а группу Γ заменить на

$$SO(Q) \cap GL(2p+q, \text{ (кольцо целых поля } \mathbf{Q}(\sqrt{2}))),$$

то факторпространство $\Gamma\backslash Y$ будет компактным. Если σ обозначает сопряжение в поле $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, то отображение

$$\gamma \longrightarrow (\gamma, \gamma^{\sigma})$$

определяет вложение группы Γ в качестве дискретной подгруппы в группу $SO(Q) \times SO(Q)$. Можно показать, что фактор по образу группы Γ является компактом; поэтому, рассматривая отображение, индуцированное проекцией Γ на первый сомножитель $SO(Q) \times SO(Q)$, мы получаем компактность фактора $\Gamma\backslash Y$. Если не выполнено ни одно из равенств $p = 2$ или $q = 2$, то комплексное многообразие $\Gamma\backslash Y$ не обладает кэлеровой структурой, оно даже не обладает псевдокэлеровой структурой, заключающейся в существовании неопределенной метрики с замкнутой кэлеровой формой.

(17.7) Набросок доказательства теоремы (17.2)

(17.7.1) Первая составляющая часть – это теорема Иилса и Сэмпсона, которая утверждает, что любое непрерывное отображение из одного компактного риманова многообразия в другое компактное риманово многообразие с неположительной секционной кривизной гомотопно *гармоническому отображению*. Напомним, что отображение $\phi: M \longrightarrow N$ называется гармоническим, если оно дает локальный минимум *функционала энергии*

$$\int_M |d\phi|^2 dV_M = E(\phi),$$

где норма под интегралом индуцирутся метрикой на N. Таким образом, с этого момента мы будем предполагать, что в утверждении теоремы отображение f является гармоническим (в этих условиях нам уже не нужно предполагать компактность $\Gamma\backslash Y$).

(17.7.2) Второе утверждение, используемое в доказательстве, —это другая теорема Сэмпсона об отображениях

$$f: M \longrightarrow \Gamma\backslash Y$$

компактных кэлеровых многообразий M. Заметим, что дифференциал df любого такого отображения f переводит голоморфное касательное пространство $T_{1,0}(M)|_x$ в точке x в комплексифицированное касательное пространство многообразия $\Gamma \backslash Y$ в точке $f(x)$. Последнее векторное пространство может быть отождествлено с комплексифицированной алгеброй Ли $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$, возникающей из левого действия G на многообразии Y. Результат Сэмпсона состоит в том, что в действительности образ пространства $T_{1,0}(M)|_x$ относительно дифференциала отображения f лежит в *абелевом* подпространстве из $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$, т. е.

$$[df, df] \equiv 0.$$

(В этом утверждении допускается наличие у $\Gamma\backslash Y$ евклидовых факторов. Доказательство сформулированной теоремы Сэмпсона, использующее тождества типа тождества Бохнера, будет дано позже.)

(17.7.3) Завершающий этап доказательства теоремы (7.2) использует следующую оценку размерности абелевых подпространств в $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$:

Теорема. *Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не имеет факторов, изоморфных $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$. Тогда для любой абелевой подалгебры $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ выполнено неравенство*

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{a} \leq (1/2)\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{p}^{\mathbf{C}}.$$

Более того, равенство имеет место только в том случае, когда $Y = G/K$ —эрмитово симметрическое пространство, а алгебра $\mathfrak{a}$ соответствует касательному пространству типа (1, 0) *одной из стандартных симметрических структур на* $\Gamma\backslash Y$.

(17.8) *Литература.* Общее введение в теорию симметрических пространств имеется в [H]. Теорема (17.2) принадлежит Карлсону и Толедо [CT]. Доказательства утверждений этапов (17.7.1), (17.7.2) и (17.7.3) содержатся соответственно в [ES], [Sa] и [CT].

Лекция 18
Доказательство теоремы Сэмпсона

Теперь мы докажем теорему Сэмпсона, которая использовалась в (17.7.2).

(18.1) Обозначения. Пусть задано некоторое отображение

$$f : M \longrightarrow N = \Gamma\backslash G/K,$$

обозначим через $T(X)$ касательное расслоение к многообразию X. Рассмотрим расслоение $f^*T(N)^{\mathbf{C}}$ над многообразием M, снабженное метрикой, индуцированной римановой метрикой на N. С этой метрикой ассоциирована связность

$$\nabla : \Gamma(f^*T(N)^{\mathbf{C}}) \longrightarrow \Gamma(T^*(M) \otimes f^*T(N)^{\mathbf{C}}).$$

Пусть $\nabla = \nabla' + \nabla''$ — разложение связности ∇, индуцированное разложением кокасательного расслоения

$$T(M) = T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M).$$

Тогда тензор кривизны R определяется формулой

$$-R(X, Y)s = \nabla_X \circ \nabla_Y(s) - \nabla_Y \circ \nabla_X(s) - \nabla_{[X,Y]}(s).$$

(18.2) Теорема. *Пусть многообразия M и N удовлетворяют приведенным выше условиям; тогда f — гармоническое отображение, если и только если выполнены два следующих условия:*

(i) *для любых X и Y из $T^{1,0}(M)$ имеем $R(X, Y) \equiv 0$ (поэтому также $R(X, Y) \equiv 0$ для X, Y из $T^{0,1}(M)$);*

(ii) *дифференциал*

$$df : T^{1,0}(M) \longrightarrow f^*T(N)^{\mathbf{C}}$$

является голоморфным отображением голоморфных векторных расслоений, где голоморфная структура на $f^*T(N)^{\mathbf{C}}$ определена так, чтобы оператор ∇'' превратился в оператор $\bar\partial$ (из условия (i) следует, что такие голоморфные структуры существуют).

Доказательство. Уравнение Эйлера—Лагранжа определенного в предыдущей лекции функционала энергии E для гармонической функции f имеет вид

$$|df|^2 = \mathrm{tr}({}^t(df)\cdot df);$$

поэтому мы получаем следующую формулу в вариациях для локального минимума функционала:

$$\tau(f)_x = \mathrm{tr}(\nabla df)_x = \sum \nabla_{X(i)} df(X(i))\,|_x = 0$$

для точки $x \in X$ и некоторого ортогонального базиса $\{X(i)\}$ касательного пространства $T(M)_x$. (Напомним, что df является сечением расслоения $T^*(M) \otimes f^*T(N)$, имеющего связность, индуцированную римановыми связностями на $T^*(M)$ и $f^*T(N)$. С интуитивной точки зрения функционал энергии $E(\phi)$ измеряет отклонение отображения ϕ от изометрии.)

(18.3) Доказательство теоремы будет получено с помощью ковариантных дифференцирований формы $f^*(g_N)$, где g_N — метрика на многообразии N. Поскольку M — кэлерово многообразие, эти ковариантные дифференцирования согласованы с разложением формы $f^*(g_N)$ на $(p,\ q)$ компоненты. Говоря точнее, требуемый результат получается из следующей коммутативной диаграммы ковариантных дифференцирований, ограниченной на компоненту типа (2,0) формы $f^*(g_N)$:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(S^2T^*M) \arrow[d, "\nabla"] & & \\
\Gamma(T^*M \otimes S^2T^*M) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, "L"] & \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes S^2T^*M) \arrow[dr, "L\otimes L"] & \\
\Gamma(T^*M) \arrow[r, "\nabla"] \arrow[rr, bend right, "d^*"'] & \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \arrow[r, "L"] & \Gamma(R)
\end{tikzcd}$$

Здесь ∇ — обозначает ковариантное дифференцирование, а L — свертку, индуцированные кэлеровой метрикой на M.

Применим композицию отображений в приведенной выше диаграмме к форме $f^*(g_N)$ для гармонического отображения f. Получим выражение вида

$$\|\nabla df\|^2 + \mathrm{Ricci}_M(\ldots) - \mathrm{R}_N(\ldots),$$

где «(...)» обозначают некоторые выражения, от которых вычисляются кривизна Риччи многообразия M и кривизна расслоения $f^*T(N)$. Поскольку это выражение лежит в образе d^*, интеграл от него по многообразию M равен нулю. Однако отсюда можно извлечь не слишком много информации, поскольку это выражение состоит из слагаемых противоположных знаков.

(18.4) С другой стороны, если применить композицию отображений из диаграммы к (0,2)-компоненте формы $f^*(g_N)$, то член, содержащий кривизну Риччи, пропадет, и мы получаем выражение

$$\|\nabla'' d' f\|^2 - \sum\sum \langle R(Z(i)'', Z(j)'')df(Z(i)''), df(Z(j)'')\rangle,$$

где символ $''$ обозначает (0,2)-компоненту, а $d'f$ — ограничение df на подпространство $T^{1,0}(M)$. В этом случае снова после интегрирования по всему многообразию M мы получим нуль. Обращение в нуль первого слагаемого соответствует второму утверждению теоремы Сэмпсона, а обращение в нуль второго члена — первому утверждению. Вычислим теперь ковариантиую производную полного тензора $f^*(g_N)$:

$$\begin{aligned}\nabla_Z f^*(g_N)(X, Y) &= d_Z(f^*(g_N)(X, Y)) - f^*(g_N)(\nabla_Z X, Y) - \\ &\qquad - f^*(g_N)(X, \nabla_Z Y) = \\ &= \langle\nabla_Z(df(X)), df(Y)\rangle + \langle df(X), \nabla_Z(df(Y))\rangle - \\ &\qquad - f^*(g_N)(\nabla_Z X, Y) - f^*(g_N)(X, \nabla_Z Y) = \\ &= \langle(\nabla_Z df)(X), df(Y)\rangle + \langle df(X), \nabla_Z(df)(Y)\rangle.\end{aligned}$$

(Предупреждение: символ ∇_Z иногда используется для обозначения связности на $S^2T^*(M)$, иногда — связности на $f^*T(M)$, иногда — связности на $T^*(M) \otimes f^*T(N)$. Все зависит от того, на какие векторы действует оператор ∇_Z .) Поэтому

$$\begin{aligned}\nabla_W\nabla_Z f^*(g_N)(X, Y) &= \langle\nabla_W\nabla_Z df(X), df(Y)\rangle + \langle\nabla_W df(X), \nabla_Z df(Y)\rangle + \\ &\quad + \langle\nabla_Z df(X), \nabla_W df(Y)\rangle + \langle df(X), \nabla_W\nabla_Z(df)(Y)\rangle.\end{aligned}$$

Если использовать нормальные координаты в точке p и ортонормированный базис $\{X(i)\}$ для $T(m)$, такой, что в точке p выполнено условие $[X(i), X(j)] = 0$, то приведенная выше формула и формула Эйлера—Лагранжа

$$\sum \nabla_{X(i)} df(X(i)) = 0$$

применяется к вычислению образа в точке p формы $f^*(g_N)$ относительно композиции отображений из приведенной выше диаграммы (18.3):

$$\sum\sum \nabla_{X(j)}\nabla_{X(i)} f^*(g_N)(X(i),\ X(j)) =$$

$$= \sum\sum <\nabla_{X(j)} df(X(i),\ \nabla_{X(i)} dfX(j))> +$$

$$+ \sum\sum <df(X(i),\ \nabla_{X(j)}\nabla_{X(i)} dfX(j))> =$$

$$= \|\nabla df\|^2 + \sum\sum <df(X(i),\ \nabla_{X(j)}\nabla_{X(i)} dfX(j))> -$$

$$- \sum\sum <df(X(i),\ \nabla_{X(i)}\nabla_{X(j)} dfX(j))> =$$

$$= \|\nabla df\|^2 - \sum\sum <df(X(i),\ R^{\otimes}(X(j),\ X(i))dfX(j))>.$$

Здесь символ $R^{\otimes}$ обозначает кривизну связности в расслоении

$$T^*(M) \otimes f^*T(N).$$

Поскольку кривизна тензорного произведения двух расслоений относительно соответствующей связности тензорного произведения удовлетворят правилу Лейбница, в итоге мы получаем

$$\sum\sum \nabla_{X(j)}\nabla_{X(i)} f^*(g_N)(X(i),\ X(j)) =$$

$$= \|\nabla df\|^2 + \sum\sum <df(X(i),\ df(R(X(j),\ X(i))X(j))> -$$

$$- \sum\sum <df(X(i),\ R_N(dfX(j),\ dfX(i))(dfX(j))>.$$

(Изменение знака во втором члене обусловлено переходом от кокасательного расслоения к касательному.)

(18.5) Теперь заметим, что ковариантная производная ∇_Z коммутирует с разложением на комплексные типы $(p,\ q)$ для форм из $S^2T^*(M)$, поскольку M—кэлерово многообразие. Заменим ортонормированный базис $\{X(i)\}$ на стандартный эрмитов базис $\{Z(i)',\ Z(i)''\}$, задающий разложение в прямую сумму

$$T^{1,0}(M) \oplus T^{0,1}(M).$$

Применяя композицию отображений в (18.3) к (0,2)-компоненте формы $f^*(g_N)$, получаем

$$\sum\sum <\nabla_{Z(j)''}\ df(Z(i)'),\ \nabla_{Z(i)''}\ dfZ(j)')> +$$

$$+ \sum\sum <df(Z(i)'',\ df(R_M(Z(j)'',Z(i)'')Z(j)'')> -$$

$$- \sum\sum <df(Z(i)'',R_N(dfZ(j)'',dfZ(i)'')(dfZ(j)'')>.$$

Используя для R_M тождества, вытекающие из кэлеровости, получаем, что член, содержащий R_M, равен нулю. Пользуясь определением R_N, преобразуем предыдущее выражение к виду

$$\sum\sum \langle\nabla_{Z(j)''}\, df(Z(i)'),\ \nabla_{Z(i)''}\, dfZ(j)'\rangle + $$
$$+ \sum\sum \langle df(Z(i)'',\ [[dfZ(j)'',\ dfZ(i)''], dfZ(j)'']\rangle.$$

Теперь, применяя тождество для формы Киллнига

$$\langle [X,\ Y],\ Z]\rangle + \langle Y,\ [X,\ Z]\rangle = 0,$$

преобразуем выражение к требуемому виду

$$\sum\sum \langle\nabla_{Z(j)''}\, df(Z(i)'),\ \nabla_{Z(i)''}\, dfZ(j)'\rangle + $$
$$+ \sum\sum \langle[df(Z(j)'',\ dfZ(i)''],\ [[dfZ(j)'', dfZ(i)'']]\rangle.$$

(18.6) *Литература.* Приведенное доказательство является некоторым видоизменением первоначального доказательства из [Sa]. Формула Бохнера, не содержащая тензор Риччи, впервые получена Сиу в его работе [Si].

Лекция 19
Абелевы подалгебры алгебр Ли

Теперь мы хотим обсудить доказательство последнего шага в программе, описанной в лекции 17.

(19.1) Теорема. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая вещественная алгебра Ли. Обозначим через $\mathfrak{p}$ собственное подпространство, соответствующее собственному значению* −1 *инволюции Картана* (*см.* (17.1)). *Если W — абелева подалгебра комплексифицированной алгебры $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$, то*

$$\dim_{\mathbf{C}} W \le (1/2)\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{p}.$$

Более того, если $\mathfrak{g}$ не имеет факторов, изоморфных $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$, то равенство возможно лишь в случае, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли инфинитезимальных изометрий эрмитова симметрического пространства, а W — касательное пространство типа (1,0), *связанное с естественной симметрической комплексной структурой.*

Отметим, что для простоты изложения мы будем рассматривать лишь случай, когда $\mathfrak{g}$ — простая алгебра (доказательство теоремы в общем случае не содержит новых идей).

Перечислим основные этапы доказательства (19.1).

(19.2) Предположим, что W — максимальное абелево подпространство в $\mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$. Сначала мы сведем доказательство к случаю $W \cap \overline{W} = 0$. Предположим, что

$$\mathfrak{a} = W \cap \overline{W} \neq 0$$

(напомним, что символ $\overline{}$ означает комплексное сопряжение). Тогда $\mathfrak{a}$ содержится в касательном пространстве $\mathfrak{t}$ к максимальному плоскому подпространству в G/K.

(19.3) Из теории корней для вещественных полупростых групп Ли вытекает, что действие $\mathfrak{t}$ на алгебре

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

обладает следующими свойствами:

Существует конечное число корней $\{\alpha\}$ и элементов $X_\alpha \in \mathfrak{k}$, $Y_\alpha \in \mathfrak{p}$, таких, что для всех $X \in \mathfrak{t}$ выполнены равенства

$$[X, X_\alpha] = \alpha(X)Y_\alpha, \quad [X, Y_\alpha] = \alpha(X)X_\alpha.$$

(19.4) Обозначим через $\mathfrak{k}_\alpha$ одномерное подпространство, порожденное X_α, а через $\mathfrak{p}_\alpha$ — одномерное подпространство, порожденной Y_α. Тогда

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{t} + \sum \mathfrak{p}_\alpha.$$

Рассмотрим подмножество $\{\beta\} \subseteq \{\alpha\}$, состоящее из корней, обращающихся в нуль на $\mathfrak{a}$. Поскольку эти корни порождают подпространство в вещественном пространстве, размерность которого равна коразмерности $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$,

$$\#\{\beta\} + \dim \mathfrak{a} \leq \#\{\alpha\}.$$

(19.5) Используя максимальность W, можно показать, что подпространство $\mathfrak{p}'$, ортогональное к $(\mathfrak{t} + \sum \mathfrak{p}_\beta)$ относительно формы Киллинга, снова является симметрическим пространством того же самого (некомпактного) типа. Это следует из замкнутости рассматриваемого подпространства относительно операции $[[\ ,\ ],\ ]$. Поскольку $(\mathfrak{t} + \sum \mathfrak{p}_\beta)$ является централизатором $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{p}$,

$$W \subseteq (\mathfrak{k} + \sum \mathfrak{p}_\beta)^{\mathbf{C}};$$

поэтому $W = \mathfrak{a} \oplus W'$, где $W' = (\mathfrak{p}' \cap W)$. Заметим, что теперь уже

$$W' \cap (W')^- = 0.$$

Предположим, что мы доказали неравенство

$$\dim_{\mathbf{C}} W' \leq (1/2)\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{p}'.$$

Тогда получаем требуемое неравенство

$$\dim_{\mathbf{C}} W \leq (1/2)\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{p},$$

поскольку коразмерность $\mathfrak{p}'$ в $\mathfrak{p}$ не менее $2\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{a}$. Заметим, что предыдущее неравенство может превратиться в равенство, только если $\mathfrak{a} = 0$.

(19.6) Теперь, поскольку мы можем предполагать, что $W \cap W^- = 0$, требуемое неравенство

$$\dim_{\mathbf{C}} W \leq (1/2)\dim_{\mathbf{R}} \mathfrak{p}$$

уже выполняется автоматически. Нам осталось только показать, что в случае равенства G/K является эрмитовым симметрическим пространством, причем $W = \mathfrak{p}_{(1,0)}$ или $W = \mathfrak{p}_{(0,1)}$. Условия

$$W \cap W^- = 0 \text{ и } W \oplus W^- = \mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$$

показывают, что W задает на $\mathfrak{p}$ комплексную структуру J.

(19.7) Приведем ряд эквивалентных условий, из которых вытекает, что G/K является эрмитовым симметрическим пространством:

i) $J \in K$, т. е. умножение на i индуцируется некоторым элементом группы K в ее присоединенном представлении;

ii) J является изометрией относительно формы Киллинга;

iii) W является инвариантным подпространством для присоединенного представления группы K;

iv) W является изотропным подпространством относительно формы Киллинга.

(19.8) Мы завершим доказательство теоремы, если покажем, что J является изометрией при $\operatorname{rank}(G/K)>1$, W является изотропным подпространством относительно формы Киллинга при $\operatorname{rank}(G/K)=1$.

(19.8.1) $\operatorname{rank}(G/K)>1$: Пусть $\mathfrak{t}$ — максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{p}$. Нетрудно доказать, что $J(\mathfrak{t})$ также является абелевой подалгеброй. С другой стороны, группа G действует транзнтивно на множестве максимальных абелевых подалгебр в $\mathfrak{p}$, поэтому существует элемент $k\in K$, такой, что $\operatorname{Ad}(k)J$ переводит $\mathfrak{t}$ в себя. Теперь можно показать, что преобразование $\operatorname{Ad}(k)J$ должно переставлять множество «особых» гиперплоскостей в $\mathfrak{t}$, соответствующих корням. Из неприводимости системы корней следует, что среди этих гиперплоскостей существуют

$$\dim\mathfrak{t}+1$$

гиперплоскостей, находящихся в общем положении. Следовательно, на подпространстве $\mathfrak{t}$ преобразование $\operatorname{Ad}(k)J$ должно быть умножением на скаляр. Из последнего свойства можно получить, что преобразование $\operatorname{Ad}(k)J$ является умножением на скаляр на всей алгебре $\mathfrak{p}$. Таким образом,

$$\langle JX, JY\rangle = m\langle X, Y\rangle$$

для всех X и Y из $\mathfrak{p}$. Поскольку $J^2=-1$, имеем $m=1$.

(19.8.2) $\operatorname{rank}(G/K)=1$: В этом случае мы докажем, что подпространство W является изотропным относительно формы $\langle\ ,\ \rangle$. Напомним, что G/K имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда группа K действует транзитивно на множестве

$$S(\mathfrak{p}) = \{\, X\in\mathfrak{p} : \langle X, X\rangle = 1 \,\}.$$

Из этого свойства следует, что комплексифицированная группа $K^{\mathbf{C}}$ действует транзитивно на множестве

$$\{\, X\in\mathfrak{p}^{\mathbf{C}} : \langle X, X\rangle = 1 \,\}.$$

Поэтому орбита относительно $K^{\mathbf{C}}$ любого элемента $X\in\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$, удовлетворяющего условию $\langle X, X\rangle\neq 0$, имеет коразмерность 1 в пространстве $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$. Выберем теперь некоторый элемент $X \in W$. Обозначим через $\mathfrak{c}$ централизатор X в $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$. Пользуясь равенством

$$<[X, Y], Z> = -<Y, [X, Z]>,$$

получаем, что $Y \in \mathfrak{c}$ тогда и только тогда, когда элемент Y ортогонален $[\mathfrak{k}^{\mathbf{C}}, X]$. Поскольку мы имеем дело со случаем, для которого $\dim W \geq 2$, коразмерность орбиты X в $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ относительно $K^{\mathbf{C}}$ должна быть не менее 2. Таким образом, $<X, X> = 0$.

Заметим, что из доказанной теоремы вытекает следующий результат:

(19.9) Теорема Сиу о жесткости. *Если G/K — неприводимое эрмитово симметрическое пространство, не являющееся гиперболически плоским, а M — компактное кэлерово многообразие, имеющее гармоническое отображение*

$$f : M \longrightarrow N = \Gamma\backslash G/K,$$

причем $\operatorname{rank}_x f = \dim N$ *в некоторой точке $x \in M$, то f является либо голоморфным, либо антиголоморфным отображением.*

Набросок доказательства. Согласно результату Сэмпсона, дифференциал отображения df является отображением голоморфных касательных расслоений; поэтому он имеет максимальный ранг вне собственного комплексно-аналитического подмногообразия M'. Выше мы показали, что $\mathfrak{p}_{(1,0)}$ и $\mathfrak{p}_{(0,1)}$ являются в $\mathfrak{p}^{\mathbf{C}}$ единственными абелевыми подпространствами, имеющими максимальный ранг. Поэтому образ отображения $d''f$ должен совпадать с одним из этих двух подпространств. Пользуясь аналитическим продолжением на M' получаем, что f — голоморфное или антиголоморфное отображение на всем многообразии M.

(19.10) *Литература.* Теорема (19.1) доказана в [CT], а теорема (19.9) — в [Si].

Лекция 20
Максимальные вариации структур Ходжа

Теперь мы обсудим один результат о вариациях структур Ходжа, тесно связанный с результатами о гармонических отображениях, изложенными в лекциях 17—19.

(20.1) Геометрическая модель вариации структуры Ходжа возникает из аналитического семейства $\{X_s : s \in S\}$ кэлеровых многообразий. После локального выбора некоторого базиса в когомологиях $H^*(X_s, \mathbf{Z})$ разложение Ходжа

$$H^k(X_s) = \sum_{p+q=k} H^{p,q}$$

определяет непрерывное семейство разложений *фиксированного* комплексного векторного пространства $H = H^k(X_s)$ в прямую сумму. С другой стороны, убывающая фильтрация

$$F^p = \sum_{p' \geq p} H^{p', k-p'}$$

задает голоморфно варьируемое семейство подпространств в H. Как мы увидим ниже, семейство $\{F^p(X_s)\}$ локально определяется с помощью некоторого голоморфного отображения S в произведение грассмановых многобразий. Образ этого отбражения лежит в некотором локально замкнутом комплексно-аналитическом подмногообразии D этого произведения грассманианов. Многообразие D является комплексным многообразием и однородным пространством.

(20.2) Перед тем как ввести понятия в общем случае, мы проиллюстрируем их для случая поляризованных структур Ходжа веса 2. Если задано комплексное векторное пространство H размерности $2p+q$ с целочисленнной структурой, т. е. целочисленной симметрической билинейной формой $\langle\,,\,\rangle$ сигнатуры $(2p, q)$, то можно определить пространство D, состоящее из всевозможных фильтраций

$$\{F^0 = H,\ F^1,\ F^2,\ F^3 = 0\},$$

где $\dim F^1 = p + q$, $\dim F^2 = p$, причем относительно формы

$<,>$ выполнены следующие условия:

(20.2.1) $(F^p)^\perp = F^{3-p}$;

(20.2.2) подпространства

$$H^{p,2-p} = F^p \cap (F^{2-p})^-$$

задают некоторое разложенне в прямую сумму пространства H (здесь символ «$^-$» означает комплексное сопряжение);

(20.2.3) на пространстве $H^{p,q}$, где $p+q=2$, эрмитова форма $-<i^{p-q}(\ ), (\ )^->$ является положительно определенной.

(20.3) Всевозможные структуры Ходжа $H \in D$ можно рассматривать в виде точек однородного пространства

$$SO(2p, q) / U(p)\times SO(q) = G/V.$$

Комплексифицированная алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbf{C}}$ группы G имеет разложение в прямую сумму

$$\mathfrak{g}^{\mathbf{C}} = \oplus\, \mathfrak{g}^{-p,p},$$

где $\mathfrak{g}^{-p,p}$ — подпространство, состоящее из элементов этой алгебры, переводящих каждое подпространство $H^{p',q'}$ в $H^{p'-p,q'+p}$.

Если рассматривать сумму $\oplus\,\mathfrak{g}^{-p,p}$ только по положительным числам p, то мы получим голоморфное касательное пространство в некоторой точке из D. Это пространство мы будем обозначать через $\mathfrak{g}^-$. Выбирая базис из векторов единичной длины в пространстве $H^{2,0}$, сопряженный к нему базис в $H^{0,2}$ и некоторый ортонормированный базис в $H^{1,1}$, мы получаем для формы $<,>$ матрицу вида

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p & q & p \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \\ p \end{array} \end{array},$$

а для пространства $\mathfrak{g}^-$ — представление в виде

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} p & q & p \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ Y & Z & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \\ p \end{array} \end{array},$$

где $Z = {}^tX$ — матрица рамера $p \times q$, а Y — кососимметрическая матрица размера $p \times p$, причем подпространство $\mathfrak{g}^{-2,2}$ определяется условиями $X=0$, $Z=0$, а подпространство $\mathfrak{g}^{-1,1}$ — условием $Y=0$.

(20.4) Гриффитсом было доказано, что семейство поверхностей $\{X_s\}_{s\in S}$ локально индуцирует аналитическое отображение базы этого семейства $f: S \longrightarrow D$, которое называется отображением периодов. Более того, он доказал, что это отображение является горизонтальным, т. е.

$$dF^p/ds \subseteq F^{p-1}.$$

С помощью вычислений в произвольной точке отсчета $H \in D$ можно показать, что отображение f будет горизонтальным тогда и только тогда, когда его дифференциал df принимает значения в подпространстве $\mathfrak{g}^{(-1,1)}$.

(20.5) Определение. Назовем **локальной вариацией поляризованных структур Ходжа** веса 2 любое аналитическое горизонтальное отображение

$$f: S \longrightarrow D$$

комплексного многообразия S (здесь мы уже не предполагаем, что S является базой некоторого семейства поверхностей).

Из приведенного выше матричного представления для $\mathfrak{g}^-$ мы можем показать, что условие горизонтальности отображения f выполняется автоматически тогда и только тогда, когда $p=1$ (в этом случае D является эрмитовым симметрическим пространством).

Мы хотим изучить следующий вопрос:

Насколько большим может быть ранг дифференциала df?

Для получения ответа на этот вопрос мы отметим следующее свойство:

(20.6) Лемма. *Образ $df(T_o{}^{1,0}S)$ в голоморфном касательном пространстве к D может быть отождествлен с подпространством $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^{(-1,1)}$, удовлетворяющим условию*

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{g}^{(-1,1)}.$$

Можно подумать, что это утверждение следует из условия интегрируемости касательных векторных полей интегрального подмногообразия. Однако следует различать операцию коммутатора векторных полей на D и операцию коммутатора левоинвариантных векторных полей на группе Ли, и необходимо также *выбрать* то отождествление, которое будет использоваться. Поэтому утверждение нуждается в доказательстве.

Доказательство. Пусть

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ Y & {}^tX & 0 \end{bmatrix}$$

— некоторый элемент пространства $\mathfrak{g}^-$. Рассмотрим отображение, переводящее ξ в $e^{\xi}F_o^*$, где F_o^* — некоторая фиксированная фильтрация отсчета. Это отображение определяет локальную систему координат в окрестности W фильтрации отсчета, а отображение n, переводящее $e^{\xi}F_o^*$ в e^{ξ}, определяет подъем окрестности W в группу. Пусть $\omega = n^{-1}dn$ — ассоциированная форма Маурэра — Картана. Положим

$$\mathfrak{a} = f^*\omega(T_o^{1,0}S).$$

Согласно ее построению, форма ω принимает значения в подпространстве $\mathfrak{g}^{(-1,1)}$, т. е. в множестве матриц вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ 0 & {}^tX & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь рассмотрим прообраз относительно f условия интегрируемости $d\omega - \omega\wedge\omega = 0$ и вычислим его значение на паре касательных векторных полей U и V:

$$U(f^*\omega(V)) - V(f^*\omega(U) - f^*\omega([U, V]) - [f^*\omega(U), f^*\omega(V)] = 0.$$

Поскольку первые три члена лежат в подпространстве $\mathfrak{g}^{(-1,1)}$, там же должен лежать и последний член. Это доказывает требуемое утверждение.

Теперь, пользуясь доказанным результатом, мы можем доказать основное свойство подпространства $\mathfrak{a}$.

(20.7) Лемма. *Если $\mathfrak{a}$ — касательное пространство к вариации структуры Ходжа, отождествленное с подпространством в $\mathfrak{g}^{(-1,1)}$ указанным выше способом, то*

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0.$$

Иначе говоря, касательные пространства к вариациям структур Ходжа являются абелевыми.

Доказательство. Из формальных свойств коммутатора матриц следует, что

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{g}^{(-2,2)} .$$

Согласно предыдущей лемме,

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{g}^{(-1,1)}.$$

Поскольку подпространства $\mathfrak{g}^{(-1,1)}$ и $\mathfrak{g}^{(-2,2)}$ пересекаются по нулю, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Доказанное свойство $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0$ возникло как некоторое усиление аналогичного условия для инфинитезимальных вариаций структур Ходжа.

Теперь рассмотрим следствия полученного результата. Если записать горизонтальный касательный вектор в виде

$$N(X) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & p \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ X & 0 & 0 \\ 0 & {}^tX & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ p \\ q \\ p \end{array},$$

то условие абелевости подпространства $\mathfrak{a}$ будет иметь вид

$$(*) \qquad {}^tX \cdot X' - {}^tX' \cdot X = 0,$$

где $N(X)$, $N(X') \in \mathfrak{a}$. Докажем следующую лемму:

(20.8) Лемма. *Пусть $\mathfrak{a}$ — подпространство матриц размера $q \times p$, удовлетворяющих условию* (*). *Тогда*

$$\dim \mathfrak{a} \leq (1/2)pq.$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}$ — стандартный базис пространства $\mathbf{C}^p$, а $\{f_j\}$ — стандартный базис в $\mathbf{C}^q$. Рассмотрим комплексную билинейную форму (,), определяемую формулой $f_i \cdot f_j = \delta_{ij}$. Определим подпространства

$$\mathfrak{a}_j = \{X \in \mathfrak{a} : \ X(e_i) = 0 \text{ для всех } i \leq j\},$$

где $\mathfrak{a}_0$ — пространство всех $q \times p$-матриц. Тогда подпространства $\{\mathfrak{a}_j : 0 \leq j \leq p\}$ образуют убывающую фильтрацию в $\mathfrak{a}$.

Определим также подпространства

$$S_j = \mathfrak{a}_j/\mathfrak{a}_{j+1} = \mathfrak{a}_j(e_{j+1}) \subseteq \mathbf{C}^q.$$

получаем

$$\mathfrak{a} \cong \oplus \mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1} \cong \oplus S_i.$$

Для того чтобы завершить доказательство, положим $s_i = \dim S_i$ и заметим следующее:

(20.9.1) подпространства S_i и S_j ортогональны для $i < j$, поскольку для $X \in \mathfrak{a}_i$, $Y \in \mathfrak{a}_j$ выполнено равенство

$${}^tX(e_{i+1}) \cdot Y(e_{j+1}) - {}^tY(e_{i+1}) \cdot X(e_{j+1}) = 0;$$

(20.9.2) для любого набора $S_1, \ldots, S_k$ взаимно ортогональных подпространств в $\mathbf{C}^q$ при $k > 1$ выполнено неравенство

$$\sum s_j \leq (1/2)kq.$$

Для того чтобы доказать это неравенство, заметим, что при $i < j$ выполняется неравенство $s_i + s_j \leq q$, поскольку $S_i \subseteq S_j^{\perp}$ и $\dim S_i + \dim S_i^{\perp} = q$. Следовательно,

$$\sum_{i<j} (s_i + s_j) \leq (1/2)k(k-1)q$$

и

$$\sum_{i<j} (s_i + s_j) \leq (k-1) \sum s_i.$$

Из этих неравенств вытекает утверждение леммы.

Таким образом, мы установили следующее свойство:

(20.10) Теорема. *Пусть D — пространство периодов поляризованных структур Ходжа веса 2 и*

$$f : S \longrightarrow D$$

— локальная вариация структур Ходжа. Тогда

$$\operatorname{rank} f \leq (1/2)h^{2,0}h^{1,1}.$$

Если число $h^{1,1}$ является четным и $h^{2,0} > 2$, то, как мы увидим ниже, приведенное неравенство является строгим. Однако нельзя утверждать, что все вариации содержатся в вариациях ранга $(1/2)h^{2,0}h^{1,1}$. Рассмотрим один пример.

(20.11) Теорема. *За исключением трех случаев, вариации структур Ходжа, возникающие из семейства гладких гиперпо-*

верхностей размерности $n \geq 2$ фиксированной степени, являются максимальными.

Заметим, что для поверхностей степени d в $\mathbf{CP}^3$ число

$$(1/2)h^{2,0}h^{1,1}$$

с ростом d растет как d^6, а размерность пространства вариаций — как d^3.

(20.12) Для того чтобы получить строгое неравенство, положим $q = 2q'$. Пусть V — максимальное изотропное подпространство в $\mathbf{C}^q$ относительно билинейной формы (,). Тогда размерность V равна q'. В пространстве V можно выбрать базис, состоящий из строчек

$$\{(1, i, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, i, \dots, 0) \dots \text{и т.д.}\}.$$

Получаем

$$\mathbf{C}^q = V \oplus V^-,$$

а множество $\{N(X) : X \in \operatorname{Hom}(\mathbf{C}^q, V)\}$ является абелевым подпространством в $\mathfrak{g}^{-1,1}$. В действительности легко показать, что соответствующая вариация структуры Ходжа индуцирована гомоморфизмом групп

$$SU(p, q') \longrightarrow SO(2p, 2q').$$

Более того, такой вид имеют все вариации максимальной размерности, если число $h^{1,1}$ является четным и $h^{2,0} > 2$.

(20.13) Оценку сверху на размерность вариаций структур Ходжа можно рассматривать как аналог оценок на размерность образа гармонических отображений из кэлерова многообразия в одно из симметрических многообразий некомпактного типа, введенных в лекциях 17 – 19. Более того, усиленную оценку на размерность вариаций структур Ходжа можно рассматривать как аналог теоремы Сиу о жесткости. В действительности мы можем привести еще больше доводов в пользу этой аналогии. Один из них заключается в следующем:

(20.14) Пусть $D = G/V$, где V — компактная подгруппа в G. Выберем некоторую максимальную компактную подгруппу K, содержащую группу V. Положим $D_0 = G/K$. Тогда подгруппа $\Gamma \subseteq G$, состоящая из целочисленных изометрий относительно формы

$\langle\ ,\ \rangle$, является дискретной и имеется естественное отображение

$$\pi : \Gamma\backslash D \longrightarrow \Gamma\backslash D_0$$

со слоем K/V.

(20.15) Теорема. *Если M — комплексное многообразие, а*

$$f : M \longrightarrow \Gamma\backslash D$$

— вариация поляризованных структур Ходжа веса 2, то композиция $\pi\circ f$ является гармоническим отображением.

Иногда выполняется и обратное утверждение. Например, если D_0 — кватернионное гиперболическое пространство, то все отображения в $\Gamma\backslash D_0$ ранга больше 2 поднимаются до вариаций структур Ходжа.

(20.16) Замечание. Усиленные оценки на ранг вариации структуры Ходжа произвольного веса недавно были получены в совместной работе Карлсона, Каспарян и Толедо. Для случая структур Ходжа веса 2 эти оценки следующим образом усиливают приведенную выше оценку при нечетном $h^{1,1}$:

$$\operatorname{rank} f \le (1/2)h^{2,0}(h^{1,1} - 1) + 1,$$

где предполагается, что $h^{2,0} > 1$.

(20.17) *Литература.* Оценка (20.10) принадлежит Карлсону [Ca]. Доказательство теоремы (20.11) содержится в [CD], а теоремы (20.15) — в [CT].

Лекция 21
Подмногообразия в общих гиперповерхностях

(21.1) Мы будем теперь изучать многообразия над произвольным алгебраически замкнутым основным полем. Для двух проективных многообразий X и Y рассмотрим конечный в общей точке морфизм

$$f : X \longrightarrow V \subseteq Y,$$

где V — некоторое подмногообразие в Y. Мы потребуем, чтобы образ $f(X)$ содержался в множестве гладких точек многообра-

10-1663

зий V и Y. В этом случае глобальные сечения нормального пучка, заданного формулой

$$N_{f,V} = f^*T_V \,/\, T_X ,$$

определяют пространство деформаций первого порядка для всевозможных отображений $f : X \longrightarrow Y$, имеющих в качестве своего образа фиксированное подмногообразие $V \subseteq Y$. Типичным примером для наших оценок размерности пространства деформаций является случай, когда X—рациональная кривая, а V—общая гиперповерхность степени m в $\mathbb{P}^n$. Если обозначить через τ длину подпучка кручения в $N_{f,V}$, а через c—число

$$\operatorname{rank} (N_{f,V} \,/\, (\text{образ } H^0(N_{f,V} \otimes O_X)),$$

получаем неравенство

$$c \geq (m - (n + 1)) + ((2 + \tau)/(\deg f)).$$

Таким образом, чем более положительным является каноническое расслоение на V, тем труднее в V найти рациональную кривую.

(21.2) Будем развивать эту идею в общем случае. Предположим, что мы имеем дело со случаем, когда нормальный пучок $N_{f,Y}$ к морфизму f в многообразии Y имеет достаточно много сечений, таких, что они порождают пучок $f^*N_{V,Y}$. Тогда мы получаем сюръективный морфизм локально свободных пучков

$$\Psi : H^0(N_{f,Y}) \otimes O_X \longrightarrow f^*N_{V,Y} ,$$

индуцированный естественным отображением нормальных пучков. Обозначим через $\mathcal{K}$ ядро этого отображения. Тогда $\mathcal{K}$—локально свободный пучок на X. Кроме того, имеется естественный морфизм коротких точных последовательностей пучков

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & H^0(N_{f,Y}) \otimes O_X & \longrightarrow & f^*N_{V,Y} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \\
0 & \longrightarrow & N_{f,V} & \longrightarrow & N_{f,Y} & \longrightarrow & f^*N_{V,Y} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

С интуитивной точки зрения пучок $\mathcal{K}$ выделяет в пучке $N_{f,V}$ те нормальные направления к V, в которых возможно деформировать морфизм f в Y.

Введем обозначение

$$\mathcal{L} = \det f^*N_{V,Y} \,.$$

(21.3) Лемма. *Пучок $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$ порождается глобальными сечениями.*

Доказательство. Пусть задан некоторый вектор $\sigma(x)$ в геометрическом слое пучка $\mathcal{K}$ в некоторой точке $x \in X$. Тогда $\sigma(x)$ определяет единственное сечение τ_0 пучка

$$H^0(N_{f,Y}) \otimes \mathcal{O}_X \,,$$

имеющее значение $\sigma(x)$ в точке x. Выберем сечения τ_i таким способом, чтобы их образы $\Psi(\tau_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ порождали геометрический слой пучка $f^*N_{V,Y}$ в точке x. Тогда формула

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \det(\Psi(\tau_0)\ldots\Psi(\tau_{i-1})\Psi(\tau_{i+1})\ldots\Psi(\tau_r))\tau_i$$

дает требуемое в лемме глобальное сечение пучка $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}$, не обращающееся в нуль в точке x.

(21.4) Лемма. *Пусть $\mathcal{G}$—образ $\mathcal{K}$ в $N_{f,V}$. Тогда точная последовательность*

$$0 \longrightarrow N_{f,V}/\mathcal{G} \longrightarrow N_{f,Y}/\mathcal{G} \longrightarrow f^*N_{V,Y} \longrightarrow 0$$

расщепляется.

Доказательство. Поскольку отображение Ψ сюръективно, утверждение леммы немедленно следует из коммутативной диаграммы в п. (21.2).

(21.5) Рассмотрим более общий случай, когда многообразие V является полным пересечением s трансверсально пересекающихся подмногообразий $V_1, V_2, \ldots, V_s$ в некотором проективном многообразии W и отображение

$$f : X \longrightarrow V \subseteq W$$

имеет образ $f(X)$, принадлежащий множеству гладких точек многообразий V, V_i и W. Введем обозначение

$$Y_i = \bigcap_{j \neq i} V_j$$

и потребуем, чтобы для всех i отображение

$$\Psi_i : H^0(N_{f,Y_i}) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow f^*N_{V,Y_i} = f^*N_{V_i,W}$$

было сюръективным. Тогда, используя предыдущие рассуждения, мы получаем, что для каждого $i = 1,\dots, r$ существует пучок $\mathcal{K}_i$ и следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \oplus \mathcal{K}_i \arrow[r] \arrow[d] & \oplus H^0(N_{f,Y_i}) \otimes \mathcal{O}_X \arrow[r] \arrow[d] & \oplus f^*N_{V,Y_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_{f,V} \arrow[r] & N_{f,W} \arrow[r] & f^*N_{V,W} \arrow[r] & 0 . \end{tikzcd}$$

Пусть

$$\mathcal{L}_i = \det f^*N_{V,Y_i} = \det f^*N_{V_i,W},$$

и предположим, что $\mathcal{L}$—такое линейное расслоение на X, что для каждого i и каждой точки $x \in X$ существует сюръективный в x морфизм

$$\mathcal{L}_i \longrightarrow \mathcal{L}.$$

В этом случае, как и в лемме (21.3) выше, мы делаем вывод, что пучки $\mathcal{K}_i \otimes \mathcal{L}$ порождаются глобальными сечениями. Кроме того, полагая $\mathcal{S} = \oplus \mathcal{S}_i$, мы снова получаем расщепляющуюся точиую последовательность, приведенную в лемме (21.4).

(21.6) Пусть $\mathcal{S}_0$—подпучок в $N_{f,V}$, порожденный глобальными сечениями $N_{f,V}$. Очевидно, $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_0$. Согласно формуле присоединения,

$$f^*c_1(W) = c_1(X) + c_1(N_{f,W}) =$$
$$= c_1(X) + f^*c_1(N_{V,W}) + c_1(N_{f,V}/\mathcal{S}) + c_1(\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) + c_1(\mathcal{S}_0),$$

значит,

$$f^*c_1(V) = c_1(X) + c_1(N_{f,V}/\mathcal{S}) + c_1(\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) + c_1(\mathcal{S}_0).$$

Поскольку пучок $(\mathcal{S}/\mathcal{S}_0)\otimes\mathcal{L}$ порожден глобальными сечениями и $N_{f,V}/\mathcal{S}$ является факторпучком пучка $N_{f,W}$, пучок $\mathcal{S}_0$ также порожден глобальными сечениями. Далее мы будем использовать приведенное выше равенство для случая, когда $N_{f,W}$ является «полуположительным», чтобы получить *оценку снизу* на ранг пучка $\mathcal{S}/\mathcal{S}_0$, что, следовательно, даст нам *верхнюю оценку* ранга пучка $\mathcal{S}_0$.

(21.7) В качестве примера использования формулы из (21.6) рассмотрим случай, когда X—кривая. Обозначим через τ длину подпучка кручения в $N_{f,V}$. Следуя терминологии [C2], мы будем называть пучок на кривой X **полуположительным**, если он не имеет факторов отрицательной степени.

(21.8) **Теорема.** *Пусть кривая X имеет морфизм*

$$f : X \longrightarrow V \subseteq W,$$

удовлетворяющий условиям (21.5). *Если пучок $N_{f,W}$ является полуположительным, а пучок $\mathcal{L}$ является кратным каждого пучка $\mathcal{L}_i$ и линейная система $|\mathcal{L}|$ свободна от базисных точек, то*

$$\operatorname{rank}(\mathcal{S}/\mathcal{S}_0)\cdot(\deg \mathcal{L}) \geq (\deg f^*K_V) + (2 - 2g) + \tau,$$

где K_V обозначает каноническое расслоение на V, а g — род кривой X.

Доказательство. Неравенство в утверждении теоремы получается из формулы в (21.6), если использовать тот факт, что $c_1(X) = 2 - 2g$, где g — род X, $c_1(\mathcal{S}_0) \geq \tau$ и, согласно лемме (21.4), $c_1(N_{f,V}/\mathcal{S}) \geq 0$.

(21.9) Для того чтобы привести пример использования этой теоремы, мы рассмотрим случай, когда X — рациональная кривая, W — общая гиперповерхность степени m в $\mathbf{P}^{n+m}$, а V — подмногообразие, высекаемое в W общим линейным подпространством размерности n. (Полуположительность пучка $N_{f,W}$ доказана в [C2].) Поскольку X — рациональная кривая, получаем формулу

$$B_{f,V} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(a_{n-2}),$$

где $B_{f,V}$ обозначает локально свободную часть пучка $N_{f,V}$ и

$$\sum a_j = -(\deg f^*K_V) - 2.$$

Из полуположительности пучка $N_{f,V}/\mathcal{S}$ следует, что образ при вложении локально свободной части пучка $\mathcal{S}/\mathcal{S}_0$ в сумму

$$\sum \{ \mathcal{O}(a_j) : a_j < 0 \}$$

не может отображаться в нуль при проекции на любое слагаемое. Следовательно, получаем неравенства

$$a_j \geq -(\deg \mathcal{L}), \text{ при } j = 1,\ldots,r.$$

(21.10) Если нас интересуют рациональные кривые на общей гиперповерхности степени m в $\mathbf{P}^n$, то теорема (21.8) утверждает, что

$$\operatorname{rank}(\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) \geq (m - (n + 1)) + ((2 + \tau)/(\deg f).$$

В частности, для того чтобы получить существование рациональных кривых, нужно потребовать, чтобы число m не превосходило $2n - 2$.

(21.11) В заключение мы приведем одну лемму, показывающую, каким образом существование рациональной кривой степени d на общей гиперповерхности степени m в $\mathbf{P}^n$ влияет на распределение рациональных кривых степени d на общих гиперповерхностях степени m в проективных пространствах высших размерностей.

Лемма. *Предположим, что V является общей гиперповерхностью в $\mathbf{P}^n$ степени $m \geq (n + 1)$.*

a) *Если $m \geq 2n - 1$, то V не содержит рациональных кривых.*

b) *Если $m = 2n - 2$ и V содержит рациональную кривую степени d, то общая гиперповерхность Z в $\mathbf{P}^m$ степени m покрывается деформациями этой рациональной кривой, и каждая получившаяся таким способом рациональная кривая порождает проективное подпространство размерности не более n.*

c) *Если $m = 2n - 2 - k$ и V содержит семейство рациональных кривых степени d, покрывающих подмногообразие размерности $k + 1$, то общая гиперповерхность Z в $\mathbf{P}^m$ степени m покрывается деформациями этого семейства рациональных кривых, и каждая получившаяся таким способом рациональная кривая порождает проективное подпространство размерности не более n.*

Доказательство. Предположим, что V содержит рациональную крнвую
$$f : X \longrightarrow V.$$
Пусть W—общая гиперповерхность степенн m в $\mathbf{P}^{m+n}$. Согласно [C2], пучок $N_{f,W}$ полуположителен. Свойство деформируемости морфизма f относительно любой деформации линейного сечения V многоообразия W показывает, что во всех проведенных выше рассуждениях мы можем заменить пространство
$$H^0(N_{f,Y_i})$$
на его подпространство R_i, состоящее нз сечений, возникающих из деформаций пары (V, Y_i), т. е. получающихся из де-

формации кривой f, согласованной с каждой геометрической деформацией гиперповерхности V в Y_i. В этом случае формула (21.6) показывает, что

$$\mathrm{rank}\ (\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) \geq (m - (n + 1)) + ((2 + \tau)/(\deg f).$$

Поскольку $\mathrm{rank}\ (\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) \leq n - 2$, мы получаем, что $m \leq 2n - 2$, причем если $m \leq 2n - 2$, то обязательно

$$(\deg f) \geq (2 + \tau) \text{ и } \mathrm{rank}\ (\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) = n - 2.$$

Для завершения доказательства п. b) представим многообразие V в виде пересечения гиперплоских сечений V_i в W и запишем пучок $f^*N_{V,W}$ в виде прямой суммы указанного в (21.5) вида. Пользуясь общим положением многообразий V и W, а также тем свойством, что V и W являются общими гиперповерхностями, получаем, что для каждого из $n - 2$ значений индекса i соответствующие подпучки $\mathcal{S}_i$ в $N_{f,V}$ должны порождать некоторый подпучок $\mathcal{S}'$ ранга $n - 2$. Это показывает, что для общей гиперповерхности Z степени $2n - 2$ в $\mathbf{P}^{2n-2}$ пучок $N_{f,Z}$ в общей точке порождается глобальными сечениями, получающимися из геометрических деформаций пары (f, V) в W. С другой стороны, последние деформации получаются из деформаций n-мерных линейных подпространств в $\mathbf{P}^{m+n}$, которые с точностью до деформаций первого порядка лежат в $\mathbf{P}^{2n-2}$. Поскольку пара (f, V) и рассматриваемые деформации предполагаются общими, они должны лежать в $\mathbf{P}^{2n-2}$ с точностью до деформации любого порядка, т. е. они получаются из геометрических деформаций пары (f, V) в Z.

Аналогичным способом получается доказательство п. c). По предположению

$$\mathrm{rank}\ (\mathcal{S}/\mathcal{S}_0) \leq (n - 2 - k).$$

Согласно приведенной выше формуле, должно иметь место равенство. Каждый выбор одного из $n - 2 - k$ значений для индекса i снова дает нам пучок $\mathcal{S}_i$, а в сумме они порождают в $\mathcal{S}/\mathcal{S}_0$ подпучок максимального ранга.

(21.12) *Литература.* Большинство из приведенных результатов для случая вложенных подмногообразий взято из [C2]. Их обобщения на случай многообразий с особенностями принадлежат Клеменсу.

Лекция 22
Гипотезы о кривых на общей трехмерной квинтике

Теперь мы приведем серию гипотез о трехмерных многообразиях V с тривиальным каноническим классом K_V, представителем которых является гиперповерхность пятой степени (квинтика) в $\mathbf{CP}^4$. Мы начнем со следующей гипотезы.

(22.1) Гипотеза. *Общая гиперповерхность пятой степени в* $\mathbf{CP}^4$ *имеет лишь конечное число рациональных кривых фиксированной положительной степени.*

Замечание. С. Кац показал, что на общей трехмерной квинтике существует изолированная рациональная кривая любой положительной степени. Он также доказал эту гипотезу для небольших степеней и вычислил количество коник (609 250). Классическим результатом является тот факт, что на общей трехмерной квинтике имеется 2875 прямых[1].

Мы хотим сформулировать некоторое следствие предыдущей гипотезы, которое само является гипотезой. В дальнейшем V будет обозначать гладкую трехмерную квинтику.

(22.2) Гипотеза. *Если квинтика V является общей, то она не покрывается эллиптическими кривыми.*

(22.3) Перед тем как обсуждать эти гипотезы, мы заметим, что ни одно проективное трехмерное комплексное многообразие V с тривиальным K_V не покрывается рациональными кривыми. Это утверждение легко следует из формулы присоединения, однако мы дадим другой способ его доказательства, который будет полезен для дальнейшего.

Доказательство. Допустим, что на самом деле V может быть

[1] Трехмерная квинтика — это одно из многообразий в серии трехмерных многообразий с тривиальным каноническим классом, представляющих интерес для математической физики в связи с теорией зеркальной симметрии. Число нормальных рациональных кривых на общей трехмерной квинтике вычислено Эллинсрудом и Стрёме. Оно равно 317206375. — *Прим. ред.*

покрыто рациональными кривыми. Тогда получаем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & V \\ \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

в которой $\mathcal{F}$—гладкая проективная поверхность, q—доминантный морфизм, а p—собственный плоский морфизм, имеющий в качестве слоев рациональные кривые. Если H обозначает общее гиперплоское сечение V, то, рассматривая расслоенное произведение над p с $q^{-1}(H)$ и разрешая особенности, которые могут при этом возникнуть на поверхности $q^{-1}(H)$, мы можем предполагать, что в приведенной выше диаграмме расслоение p имеет сечение s, удовлетворяющее условию

$$q(s(\mathcal{F})) = H.$$

Поскольку форма пересечений в когомологиях $H^3(V;\ \mathbf{Q})$ невырожденна и q является конечным в общей точке морфизмом, естественное отображение

$$q^* : H^3(V;\ \mathbf{Q}) \longrightarrow H^3(\mathcal{E};\ \mathbf{Q})$$

инъективно (здесь мы пользуемся невырожденностью формы пересечения на образе). Пространство $H^3(\mathcal{E};\ \mathbf{Q})$ можно исследовать с помощью спектральной последовательности Лере для морфизма p. Поскольку все слои этого морфизма являются объединениями рациональных кривых, получаем $R^1p_*\mathbf{Q} = 0$. Так как образ пространства $H^3(\mathcal{F};\ R^0p_*\mathbf{Q})$ в $H^3(\mathcal{E};\ \mathbf{Q})$ при морфизме ограничения изоморфно отображается на $H^3(s(\mathcal{F});\ \mathbf{Q})$, он пересекает подпространство $q^*H^3(V;\ \mathbf{Q})$ по нулевому вектору. С другой стороны, при этом же морфизме ограничения подпространство $q^*H^3(V;\ \mathbf{Q})$ отображается в нуль, поскольку $H^3(H;\ \mathbf{Q}) = 0$. Таким образом, все пространство $q^*H^3(V;\ \mathbf{Q})$ порождено $H^1(\mathcal{F};\ R^2p_*\mathbf{Q})$. По двойственности из этого следует, что отображение

$$q_*p^* : H_1(\mathcal{F};\ \mathbf{Q}) \longrightarrow H_3(V;\ \mathbf{Q})$$

является сюръективным. Но это противоречит тому, что образ аннулируется пространством $H^{3,0}(V) \neq 0$.

Докажем следующее утверждение:

(22.4) Предложение. *Общая трехмерная гиперповерхность пятой степени покрывается кривыми рода* 2.

Доказательство. Грассманово многообразие проективных плоскостей, являющихся сечениями многообразия $V \subseteq \mathbf{P}^4$, имеет размерность 6. Для каждой фиксированной плоскости P и выбранных на этой плоскости четырех точек p_j в общем положении множество квинтик, касающихся плоскости P в каждой точке p_j, является линейным пространством коразмерности 12 в пространстве всех квинтик. Следовательно, множество пар вида (P, V), где плоскость P четырежды касается квинтики V, имеет коразмерность $12 - (4\cdot 2) = 4$. Если доказать, что для *некоторой* пары (P, V) при фиксированном V плоскость P имеет двумерное множество деформаций, то тем самым будет показано, что для общей квинтики V существует двумерное семейство плоских кривых пятой степени с четырьмя особыми точками, т. е. будет найдено требуемое двумерное семейство кривых рода 2. Например, пусть V задается уравнением вида

$$F(x_0,\dots,x_4) = f(x_0,x_1,x_2) + x_3\cdot g(x_0,x_1,x_2) + x_4\cdot h(x_0,x_1,x_2) = 0,$$

где многочлен f определяет уравнение плоской кривой пятой степени с четырьмя двойными точками, а g и h — общие уравнения для плоских кривых четвертой степени, проходящих через точки p_j.

Для плоскости

$$x_3 = x_4 = 0,$$

рассмотрим ее деформацию, определяемую формулами

$$x_3 = \alpha(x_0,x_1,x_2), \quad x_4 = \beta(x_0,x_1,x_2).$$

Непосредственно проверяется, что требуемое условие касания для этих деформаций плоскости сводится к утверждению, что плоские кривые с уравнением

$$f(x_0,x_1,x_2) + \alpha(x_0,x_1,x_2)\cdot g(x_0,x_1,x_2) + \beta(x_0,x_1,x_2)\cdot h(x_0,x_1,x_2) = 0,$$

имеют 4 квадратичные особенности и локальную коразмерность 4. Стало быть, общая квинтика V содержит двупараметрическое семейство кривых рода 2. Если бы такое общее семейство кривых рода 2 на V заметало лишь дивизор D, то отображение этого дивизора в пучок гиперплоскостей в $\mathbf{P}^4$ было бы четырехлистным накрытием, что невозможно, поскольку в случае конечности отображения в двойственное многообразие дважды двойственное многообразие совпадает с исходным. Таким образом, полученное семейство покрывает все V.

(22.5) В заключение мы возвратимся к гипотезе (22.2). Из гипотезы (22.1) вытекает следующее:

Шаг 1 . Допустим, что многообразие V покрывается эллиптическими кривыми. Тогда, как и выше, существует диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & V \\ \mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

Снова, пользуясь при необходимости заменой базы, мы можем предполагать, что морфизм p имеет сечение s, образ которого относительно морфизма q отображается в общую гиперповерхность $H \subseteq V$. Мы также можем предполагать, раздувая при необходимости точки на $\mathcal{F}$, что модулярное отображение

$$j : \mathcal{F} \longrightarrow (\mathcal{M}_1)^{\wedge} = \mathbf{CP}^1$$

в компактификацию пространства модулей $\mathcal{M}_1$ алгебраических кривых рода 1 является морфизмом.

Шаг 2 . Используя гипотезу (22.2), мы можем предполагать, что дивизор H выбран таким способом, что он пересекает *трансверсально* каждую рациональную кривую из счетного множества этих кривых, лежащих на V. Это означает, что композиция $(q \circ s)$ отображает дивизор $j^{-1}(\infty)$ в нульмерное множество в V. Если бы отображение j не было постоянным, то с помощью рассуждений из лекции 1 мы бы получили «исчезающую кривую» вида

$$(q \circ s)(j^{-1}(t))$$

при переходе к пределу $t \longrightarrow \infty$. Таким образом, отображение j должно быть постоянным.

Существуют два способа дальнейших исследований. Один из них глобальный, другой — локальный. Мы начнем с глобальных свойств.

Шаг 3. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbf{P}^N$, параметризующее все гиперповерхности пятой степени (квинтики), имеющие, самое большее, обыкновенные двойные изолированные особые точки. Тогда дополнение к U в $\mathbf{P}^N$ имеет коразмерность не меньше 2. Если общая квинтика покрывается эллиптическими кривыми, то существует семейство, покрывающее универсальную квинтику над U. Как мы уже видели, общая квинтика покрывается семейством деформаций одной и той же эллиптической кривой, причем эта кривая может меняться в зависимости от выбора квинтики. Если в действительности имеет место такое изменение эллиптической кривой в зависимости от выбора квинтики, то на подмножестве коразмерности 1 в U эта кривая вырождается в рациональную кривую. Следовательно, квинтика, возможно, имеющая обыкновенные двойные особые точки, должна покрываться рациональными кривыми. Однако последнее противоречит (22.3), поскольку наличие обыкновенных двойных особых точек не влияет на рассуждения, использующие формулу присоединения. Таким образом, все трехмерные квинтики покрываются одной и той же эллиптической кривой.

Шаг 4. Обозначим через $\mathcal{V}/U$ универсальную квинтику, и пусть
$$q : (\mathcal{F}/U)\times E \longrightarrow \mathcal{V}/U$$
является покрывающим семейством эллиптических кривых, где многообразие $\mathcal{F}/U$ представляет собой в общей точке семейство поверхностей. С помощью подходящих раздутий подмногообразий в $(\mathcal{F}/U)\times E$ мы можем получить многообразие Z с морфизмом
$$Z \longrightarrow (\mathcal{F}/U)\times E,$$
композиция которого с отображением q дает регулярное отображение на $\mathcal{V}/U$. Обозначим через U' открытое подмножество в U, на котором отображения
$$g : Z \longrightarrow U \text{ и } h : \mathcal{V} \longrightarrow U$$
являются гладкими. Таким образом, имеются две вариации структур Ходжа над U' и естественное вложение
$$R^3h_*\mathbf{C}_{\mathcal{V}} \longrightarrow R^3g_*\mathbf{C}_Z .$$
Вариация структур Ходжа $R^3g_*\mathbf{C}_Z$ расщепляется следующим образом в прямую сумму вариаций структур Ходжа:

Одна компонента этой суммы получается из вариации, связанной с многообразием $(\mathcal{F}/U)\times E$. Эта вариация имеет вес 2 и состоит из пучка $R^2p_*\mathbb{C}_{\mathcal{F}}$, возникающего из пространств когомологий H^2, соответствующих поверхностям в $\mathcal{F}/U$, тензорно умноженного на постоянную вариацию одномерных когомологий $H^1(E,\ \mathbb{C})$. Другие компоненты прямой суммы получаются в процессе раздутий, приводящих к многообразию Z. В этом процессе на каждом шаге в каждом слое происходит раздутие точки или гладкой кривой. В первом случае пространство H^3 не меняется, а во втором его размерность возрастает на размерность якобиана раздуваемой кривой. Таким образом, мы получили вариации структур Ходжа веса 3, в которых содержатся только два нетривиальных подрасслоения Ходжа.

Шаг 5 . Поскольку представление группы монодромии в пучке $R^3h_*\mathbb{C}_{\mathcal{V}}$ является неприводимым, этот пучок отображается на одно из описанных выше слагаемых пучка $R^3g_*\mathbb{C}_Z$. Используя предыдущие рассуждения, мы также получаем, что единственной возможностью для такого отображения является вложение

$$R^3h_*\mathbb{C}_{\mathcal{V}} \longrightarrow R^2p_*\mathbb{C}_{\mathcal{F}} \otimes H^1(\mathcal{E};\ \mathbb{C}).$$

Этот последний случай также невозможен, поскольку левая часть в отображении имеет вырождение с нетривиальным членом $\mathbb{W}^6$ весовой фильтрации, но очевидно, что правая часть не имеет такого вырождения. Это завершает доказательство.

Более локальный подход к доказательству состоит в следующем:

Шаг 3′. С помощью дополнительной замены базы мы можем получить доминантное рациональное отображение

$$q\ :\ \mathcal{F}\times E \longrightarrow V.$$

Если в действительности q является морфизмом, то, как и выше, пространство $H^3(V,\ \mathbb{Q})$ должно инъективно отображаться в сумму

$$H^2(\mathcal{F}) \otimes H^1(E) + H^1(\mathcal{F}) \otimes H^2(E)$$

(здесь мы снова воспользовались отсутствием слагаемого вида $H^3(\mathcal{F}) \otimes H^0(E)$, поскольку $H^3(H) = 0$).

Шаг 4′. Подпространство $q^*H^3(V;\ \mathbb{Q})$ не может целиком лежать в слагаемом $H^2(\mathcal{F}) \otimes H^1(E)$, поскольку, как и раньше, последнее имеет тип $(2,1) + (1,2)$. На самом деле эти два подпространства могут пересекаться только по нулевому вектору, так как ограничение формы пересечения на подпространство $q^*H^3(V;\ \mathbf{Q})$ невырожденно. Заметим, что если q не является всюду определенным, то это утверждение может быть слегка видоизменено, но рассуждения по существу остаются теми же самыми; поэтому мы по-прежнему будем предполагать, что q—морфизм.

Шаг 5′. Пусть V варьируется в проективном пространстве $\mathcal{P}$, параметризующем все квинтики в $\mathbf{C}P^4$. Тогда каждому многообразию V соответствует эллиптическая кривая E_V. Обозначим через $\mathcal{D}$ дивизор в $\mathcal{P}$, вдоль которого соответствующие эллиптические кривые E_V не меняются. Следовательно, первые и вторые производные вдоль дивизора $\mathcal{D}$ для отображения периодов переводят пространство $H^{3,0}(V)$ в подпространство $H^1(E)^\perp$. Обозначим через $S_n^{\ d}$ множество однородных форм степени d от n переменных. С помощью теории Гриффитса, описывающей посредством вычетов когомологии гиперповерхностей, сформулированное свойство первых и вторых производных вдоль дивизора $\mathcal{D}$ приводит нас к гиперплоскости $H \subsetneq S_5^{\ 5}$, такой, что

1) H содержит $\partial F/\partial x_j$, $j = 0,\dots,4$ для общей формы F пятой степени;

2) $H \cdot H$ лежит в гиперплоскости пространства $S_5^{\ 10}$.

Однако последнее невозможно в силу следующих лемм:

(22.6) Лемма. *Предположим, что собственное подпространство* $W \subsetneq S_n^{\ d}$ *состоит из форм, не имеющих общих нулей. Пусть* $k = \operatorname{codim}(W, S_n^{\ d}) \leq d + 1$. *Тогда*

$$S_n^{\ k} \cdot W = S_n^{\ k+n}.$$

(22.7) Лемма. *Пусть* $d = n$ *и* H—*гиперплоскость в* $S_n^{\ n}$, *для которой кондуктор* $W = [H : S_n^{\ 1}] \subsetneq S_n^{\ n-1}$ *состоит из форм, не имеющих общих нулей. Тогда*

$$H \cdot H = S_n^{\ 2n}.$$

Доказательство. Имеем

$$W = [H:S_n^1] = \cap \{ [H:P] : P \subseteq S_n^1 \} \subseteq S_n^{n-1}.$$

Следовательно, codim $W \leq n$. Согласно лемме (22.6), получаем $S_n^n \cdot W = S_n^{2n-1}$. Поэтому, снова пользуясь леммой (22.6), приходим к

$$H \cdot H \geq W \cdot S_n^1 \cdot H = W \cdot S_n^{n+1} = S_n^{2n}.$$

(22.8) *Литература.* Результат Каца опубликован в [Kat]. Гипотеза (22.1) впервые возникла в [C1]. Следствие (22.2), которое вытекает из гипотезы (22.1), появилось в процессе обсуждения, в котором участвовали Клеменс, Коллар и Мори. Другой (локальный) способ завершения доказательства (22.2), представленный выше, был указан нам Вуазен. Лемма (22.6) является частным случаем теоремы 2.16 из [G], а лемма (22.7) принадлежит Вуазен. Мы благодарны ей за разрешение использовать ее неопубликованные результаты. Теория вычетов Гриффитса для гиперповерхностей в прективиых пространствах нзложена в [CGGH].

Лекция 23
Подмногообразия общих полных пересечений в грассманианах

(23.1) Теперь мы дадим некоторое обобщение результатов о кривых, полученных в лекции 21. Рассмотрим следующую ситуацию:

V есть $(n+1)$-мерное комплексное векторное пространство;

G — грассманово многообразие r-мерных факторпространств пространства V;

$X \subseteq G$ — многообразне, являющееся полным пересечением типа $(m_1, \ldots, m_k)$ k дивизоров;

H_X — неприводимое открытое подмножество в схеме Гильберта, параметризующей все неприводимые подмногообразия в X, являющиеся полными пересечениями типа $(m_1,\dots,m_k)$;

$Z_X = \{(Z, x) : Z \in H_X,\ x \in Z\}$.

Рассмотрим естественные отображения

$$\begin{tikzcd} Z \subseteq Z_X \arrow[r, "F"] \arrow[d] & X \subseteq G \\ z \in H_X = p^{-1}(X) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{Z} \arrow[r, "F"] \arrow[d] & G \\ \mathcal{H} \arrow[d, "p"] & \\ X \in \mathcal{Y} & \end{tikzcd}$$

где $\mathcal{Y}$—пространство, параметризующее полные пересечения указанного типа.

(23.2) Теорема. *Пусть* $m = \sum m_i$. *Обозначим через* m_0 *наименьшее целое число* s, *такое, что*

$$h^0(K_Z \otimes \mathcal{O}(s)) \neq 0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) *пучок* $N_{Z/X} \otimes \mathcal{O}_Z(1)$ *порожден глобальными сечениями*;

b) $\operatorname{codim}_X F(Z_X) \geq m + m_0 - n - 1$.

(23.3) Следствие. a) *Если* $m \geq \dim X + n + 1$, *то каждое такое многообразие* Z *имеет общий тип.*

b) *Если* $m \geq \dim X + n$, *то каждое такое многообразие* Z *имеет ненулевой геометрический род.*

Утверждение леммы получается из равенства
$$h^0(K_Z \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0,$$
поскольку Z не является многообразием общего типа.

Например, можно взять в качестве G проективное пространство $\mathbb{CP}^n$, а в качестве X—общую гиперповерхность степени $m \geq 2m - 1$. Тогда многообразие X не содержит рациональных кривых.

(23.4) *Доказательство теоремы.* Начнем доказательство с конструкции резольвенты Кошуля для пучка идеалов, определяющего график морфизма

$$f : Z \longrightarrow G$$

в грассманово многообразие G.

Пусть задан морфизм $f : Z \longrightarrow G$, а Γ—график этого морфизма в произведении $Z \times G$. Обозначим через π и p естественные проекции $Z\times G$ на Z и G соотвественно. Имеем следующую диаграмму отображений:

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r] \arrow[dr] & V\times G \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[dl] & & S \arrow[r] \arrow[dr] & V\times G \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[dl] \\ & Z \arrow[rrrr, "f^*"] & & & & V & \end{tikzcd}$$

В этой диаграмме S—универсальное подрасслоение, а Q—универсальное факторрасслоение тривиального расслоениея $V\times G$. Полагая $\mathcal{E}=\pi^*S_1\otimes p^*Q^*$, мы получаем резольвенту структурного пучка графика отображения f:

$$\ldots \longrightarrow \Lambda^2\mathcal{E} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{E} \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{O}_{Z\times G} \longrightarrow \mathcal{O}_\Gamma \longrightarrow 0,$$

где

$$\partial_0(\sigma\otimes\xi)=\xi(\sigma),$$

$$\partial_1(\sigma\otimes\xi\wedge\sigma'\otimes\xi')=\xi(\sigma)\sigma'\otimes\xi'-\xi'(\sigma')\sigma\otimes\xi.$$

Можно применить эту конструкцию к случаю отображения

$$f: Z\longrightarrow \mathbb{P}(V)=\mathbf{P}^n.$$

В этом случае точная последовательность Эйлера

$$(*)\qquad 0\longrightarrow \Omega^1_{\mathbf{P}^n}\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}\longrightarrow 0$$

показывает, что

$$S=\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(1) \text{ и } Q=\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(1).$$

Умножим теперь резольвенту Кошуля, приведенную выше, тензорно на пучок $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(m)$ и применим к получившемуся комплексу функтор π_*. С помощью этой операции мы получим из комплекса пучков на $Z\times\mathbf{P}^n$ комплекс пучков на Z. Поскольку пучки высших прямых образов

$$R^i\pi_* = H^i(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(m-k)\otimes\Lambda^k(f^*\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(1)))$$

при $i>0$ обращаются в нуль, точность комплекса сохранится. Таким образом, мы получим длинную точиую последовательность вида

$$\ldots\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(m-1)\otimes f^*\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(1)) \xrightarrow{\partial_0'}$$

$$\longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(m))\otimes\mathcal{O}_Z\longrightarrow\mathcal{O}_Z(m)\longrightarrow 0.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ пучок, являющийся образом отображения ∂_0'. Так как пучок $\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(2)$ порожден глобальнымн сечениями вида $x_i dx_j - x_j dx_i$, то

1) пучок $\mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_Z(1)$ порожден глобальными сечениями.

Предположим, что образ отображения $f: Z \longrightarrow \mathbf{P}^n$ лежит в подмногообразии $X \subseteq \mathbf{P}^n$, причем отображение

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(m)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_X(m))$$

является сюръективным. Обозначим через Q ядро отображения

$$H^0(\mathcal{O}_X(m))\otimes\mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Z(m).$$

Тогда, пользуясь леммой о змее, получаем, что

2) пучок $Q\otimes\mathcal{O}_Z(1)$ порожден глобальными сечениями.

В действительности, используя лемму Лазарсфельда, которая будет доказана в следующей лекции, мы можем получить несколько более сильный результат в случае, если Z — кривая. Этот результат получается нз более тщательного изучения пучка $f^*\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(1)$ в случае инъективного в общей точке отображения $f: Z \longrightarrow \mathbf{P}^n$. Пусть $\mathcal{F}$ — пучок, определенный выше, d — степень отображения f, а n_0 — размерность линейного подпространства в $\mathbf{P}^n$, порожденного $f(Z)$.

(23.5) Лемма. *Существует линейное расслоение $\mathcal{L}$ степени $d - n_0 + 1$, такое, что пучок*

$$\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}$$

является полуположительным.

Доказательство. Из точной последовательности (*) получаем

$$f^*\Omega^1_{\mathbf{P}^n}(1) = (n - n_0)\mathcal{O}_Z\oplus\mathcal{M}.$$

Тогда из леммы Лазарсфельда следует, что для $n_0 - 1$ точек общего положения на кривой Z существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(\textstyle\sum p_j)\otimes\mathcal{O}_Z(-1) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \oplus\, \mathcal{O}_Z(-p_j) \longrightarrow 0.$$

Введем обозначение $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Z(-\sum p_j)\otimes\mathcal{O}_Z(1)$. Поскольку сечения пучка $\mathcal{L}$ не имеют базисных точек, пучок $\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_Z(-p_j)$ для каждого j имеет сечение. Таким образом, пучок $\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}$ является средним членом короткой точной последовательности, крайние члены которой полуположительны.

(23.6) Лемма. $K_G = \mathcal{O}_G(-n-1)$.

Доказательство. Умножим точную последовательность

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

тензорно на пучок Q^*. Поскольку $\Omega^1{}_G = S \otimes Q^*$ и $Q \otimes Q^*$ является самодвойственным пучком (следовательно, он имеет тривиальную старшую внешнюю степень), $K_G = \Lambda^{r(n+1)}(V \otimes Q^*)$. Осталось воспользоваться равенством

$$\Lambda^r Q^* = \mathcal{O}_G(-1).$$

(23.7) Теперь мы закончим доказательство теоремы (23.2), сформулированной в начале лекции. Имеем отображения

$$\begin{array}{ccccc} Z \subseteq Z_X & \xrightarrow{F} & X \subseteq G \\ \downarrow \quad \downarrow & & \\ z \in H_X = p^{-1}(X) & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{F} & G \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \\ \mathcal{H} & & \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ X \in \mathcal{G} & & \end{array}$$

где $\mathcal{G}$ — пространство, параметризующее полные пересечения указанного выше типа. Начнем с рассмотрения коммутативной диаграммы из точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_Z & \longrightarrow & T_{\mathcal{Z}}|_Z & \longrightarrow & h^*T_{\mathcal{H}}|_Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\cong} & & \downarrow{dF} & & \downarrow{\phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & T_Z & \longrightarrow & T_G|_Z & \longrightarrow & N_{Z/G} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\psi} & & \\ & & & & & & N_{Z/G}|_Z & & \end{array}$$

Заметим, что композиция $\psi \circ \phi$ является в точности прямой суммой отображений

$$H^0(\mathcal{O}_X(m_i)) \otimes \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_Z(m_i),$$

рассмотренных выше. Если мы обозначим ядро этой композиции через Q, то получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & h^*T_{\mathcal{H}}|_Z & \longrightarrow & N_{X/G}|_Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\cong} & & \\ 0 & \longrightarrow & N_{Z/X} & \longrightarrow & N_{Z/G} & \longrightarrow & N_{X/G}|_Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

в которой, согласно 2), пучок $Q \otimes \mathcal{O}_Z(1)$ порождается глобальными сечениями. Таким образом, пользуясь рассуждениями из двух лемм в лекции 21, получаем, что пучок $N_{Z/X} \otimes \mathcal{O}_Z(1)$ также порождается глобальными сечениями. Это дает утверждение п. a) теоремы.

(23.8) Теперь рассмотрим отображение

$$h^*T_{H_X}|_Z \longrightarrow N_{Z/X}$$

и обозначим через E_1 и E_2 соответственно образ и кообраз этого отображения по модулю кручения. Если $e_i = \operatorname{rank} E_i$, то $e_2 = \operatorname{codim}_X F(Z_X)$—число, оценку которого нужно получить в п. b) теоремы. Вне замкнутого подмножества коразмерности 2 имеем равенство

$$\Lambda^{e_1+e_2} N_{Z/X} \approx \Lambda^{e_1} E_1 \otimes \Lambda^{e_2} E_2,$$

или

$$\Lambda^{e_1+e_2} N_{Z/X} \approx \Lambda^{e_1} E_1 \otimes \Lambda^{e_2} E_2 \approx \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D')(-e_2),$$

где D и D' —эффективные дивизоры. С другой стороны,

$$\Lambda^{e_1+e_2} N_{Z/X} \approx K_X^{-1} \otimes K_Z \approx \mathcal{O}(-m+n+1) \otimes K_Z.$$

Поэтому, если m_0—наименьшее целое число, для которого $h^0(K_Z \otimes \mathcal{O}(m_0)) \neq 0$, то

$$m_0 \leq e_2 - m + n + 1.$$

Тем самым доказательство завершено.

(23.9) Поскольку сформулированная ранее лемма утверждает, что даже «менее положительное» расслоение $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ порождается глобальными сечениями в случае, если Z является вложенной кривой C степени d, то мы получаем в этом случае соответствующую более сильную оценку:

(23.10) **Теорема.** *Пусть C—гладкая кривая на общем полном пересечении X в грассмановом многообразии. Тогда*

$$\operatorname{codim}_X F(Z_X) \geq (1/(d - n_0 + 1))[(2 - 2g) + (m - n + 1)d],$$

где, как и выше, число n_0 обозначает размерность линейной оболочки кривой C.

(23.11) В заключение для кривых небольшой степени $d \le \min\{m_i\} + n_0 - 1$ мы покажем, что схема Гильберта H_C является гладкой в точке, соответствующей кривой C, если $H^1(N_{C/G}) = 0$ (заметим, что это условие всегда выполнено для рациональных кривых).

Доказательство. Нам достаточно доказать, что

$$H^1(N_{C/X}) = 0.$$

Это свойство будет немедленно вытекать из точной последовательности для нормальных расслоений, если мы покажем, что отображение

$$H^0(N_{C/G}) \longrightarrow H^0(N_{X/G}|_C)$$

является сюръективным. Поскольку многообразие X, в котором лежит C, является общим, пространство $H^0(N_{C/G})$ отображается сюръективно на образ

$$H^0(N_{X/G}) = \oplus H^0(\mathcal{O}_X(m_i))$$

в $H^0(N_{X/G}|_C)$. Но по теореме Грюсона—Лазарсфельда—Пескина, которая будет доказана в следующей лекции, отображения

$$H^0(\mathcal{O}_X(m_i)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(m_i))$$

сюръективны при $m_i \ge d - n_0 + 1$.

(23.12) *Литература.* Эти результаты содержатся в [E].

Лекция 24
Теорема Грюсона–Лазарсфельда–Пескина и лемма Лазарсфельда

Эта лекция посвящена доказательству следующей теоремы:

(24.1) Теорема. *Пусть $C \subseteq \mathbf{P}^n$ — гладкая кривая степени d, не лежащая ни в какой гиперплоскости. Тогда отображение*

$$H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}(a)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}(a))$$

является сюръективным при $a \ge d - n + 1$.

Доказательство. Пусть L^{n-3} есть $(n-3)$-мерное подпространство общего положения в $\mathbf{P}^n$. Обозначим через $\mathbf{P}\hat{}$ раздутие $\mathbf{P}^n$ вдоль L^{n-3}. Тогда многообразие $\mathbf{P}\hat{}$ может быть представлено в виде расслоения на проективные пространства над $\mathbf{P}^2$. Более точно,

$$\mathbf{P}\hat{} = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \oplus (n-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}).$$

Имеем следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd} C \subseteq \mathbf{P}\hat{} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathbf{P}^2 \\ C \subseteq \mathbf{P}^n & \end{tikzcd}$$

Введем следующие обозначения для расслоений

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}\hat{}}(a,b) = h^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(a) \otimes f^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(b).$$

В этих обозначениях $\mathcal{O}_{\mathbf{P}\hat{}}(1,0)$, например, является тавтологическим линейным расслоением, т. е.

$$f_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}\hat{}}(1,0) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \oplus (n-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}.$$

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_C(1,0) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}\hat{}}(1,0) \longrightarrow \mathcal{O}_C(1,0) \longrightarrow 0.$$

Заметим, что $\mathcal{O}_C(1,0) = \mathcal{O}_C(0,1)$, поскольку C не пересекает подпространство L. Применим к этой точной последовательности функтор f_*. Согласно формуле проекции, получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \oplus (n-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \longrightarrow f_*\mathcal{O}_C \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) \longrightarrow 0,$$

поскольку из-за того, что ни один слой морфизма не содержит более 2 точек кривой C, выполнено равенство $R^1\mathcal{E}(1) = 0$. С помощью явного выписывания локального базиса для пучка $f_*\mathcal{I}_C(1,0)$, можно доказать, что этот пучок локально свободен. Пользуясь определением, получаем, что сюръективное отображение в точной последовательности $(*)$ имеет следующий вид:

$$(a, (a_3, \ldots, a_n)) \longrightarrow (a + a_3X_3 + \ldots + a_n X_n).$$

Поэтому, чтобы доказать теорему, достаточно показать, что

$$H^1(\mathcal{E}(b)) = 0$$

при $b \geq d - n + 1$.

(24.2) Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \oplus (n-2)\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1) \longrightarrow f_*\mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

полученную из последовательности (*) выше. Из этой последовательности следует, что

$$\operatorname{rank} \mathcal{E} = n - 1 \text{ и } \det \mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(n-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-d).$$

Построим теперь резольвенту градуированного модуля

$$M = \bigoplus_{a \geq 0} H^0(f_*\mathcal{O}_C(a)),$$

над градуированным кольцом $S = k[X_0, X_1, X_2]$:

$$\ldots \longrightarrow S \oplus S(-1)^{r-2} \oplus T_1{}' \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

где $r + 1$ — размерность пространства $H^0(\mathcal{O}_C(1))$. Заметим, что первое слагаемое S отображается на константы и линейную оболочку X_0, X_1, X_2. Положим $T = T \oplus S(-1)^{r-n}$, тогда мы получим следующую коммутативную диаграмму из когерентных пучков на $\mathbf{P}^2$:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-1)^{(n-2)} \arrow[r] \arrow[d] & f_*\mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}_2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)^{(n-2)} \oplus \mathcal{J}_1 \arrow[r] \arrow[d] & f_*\mathcal{O}_C \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{J}_1 \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{J}_1 & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, в частности, пучок $\mathcal{J}_2$ является локально свободным и, согласно построению, для всех a

$$H^1(\mathcal{J}_2(a)) = 0.$$

Это означает, что пучок $\mathcal{J}_2$ должен быть прямой суммой линейных расслоений, поскольку его ограничение на прямую является расщепляющимся линейным расслоением, и индуцированный изоморфизм из суммы $\mathcal{O}(n_i)$ на $\mathcal{J}_2|_l$ (l — прямая) должен получаться из некоторого морфизма пучков на всей проективной плоскости $\mathbf{P}^2$, являющегося изоморфизмом вне некоторого множества коразмерности не менее 2.

(24.3) Таким образом, мы свели доказательство к исследованию ядра эпиморфизма

$$\mathcal{I}_2 \longrightarrow \mathcal{I}_1$$

сумм линейных расслоений из приведенной выше диаграммы. Существует стандартный способ для исследования ядра эпиморфизма

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

векторных расслоений над многообразием X, имеющих соответственно ранги a и b. Это так называемый комплекс Эгона — Норткотта, являющийся аналогом резольвенты Кошуля:

$$\longrightarrow \Lambda^{b+3}\mathcal{A} \otimes S^2\mathcal{B}^* \longrightarrow \Lambda^{b+2}\mathcal{A} \otimes S^1\mathcal{B}^* \longrightarrow \Lambda^{b+1}\mathcal{A} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A} \otimes \det\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes \det\mathcal{B} \longrightarrow 0,$$

где отображение ∂ имеет вид

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_{b+1} \longrightarrow \sum (-1)^j \alpha_j D_j,$$

а D_j — определитель отображения $\phi(\alpha_k)$ при $k \neq j$. Для того чтобы доказать точность этого комплекса, мы будем рассуждать следующим образом:

Пусть $\mathcal{O}(1)$ — расслоение гиперплоских сечений для морфизма $f : \mathbf{P}(\mathcal{B}) \longrightarrow X$. Канонический морфизм

$$f^*\mathcal{A} \longrightarrow f^*\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{O}(1)$$

индуцирует резольвенту Кошуля

$$(*) \qquad \ldots \longrightarrow \Lambda^3 f^*\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \Lambda^2 f^*\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(-1) \longrightarrow f^*\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0.$$

Применим к этому комплексу f_* и заметим, что пучки $R^i f_*$ обращаются в нуль, за исключением случая $i = 0$ для пучков $f^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{O}(1)$, а также $i = b$ для пучков $\Lambda^{j+1} f^*\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(-j)$ при $j \geq b$. Пользуясь формулой проекции и двойственностью Серра, получаем

$$R^b f_*(\Lambda^{j+1} f^*\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}(-j)) = \Lambda^{j+1}\mathcal{A} \otimes R^b f_*\mathcal{O}(-j) =$$
$$= \Lambda^{j+1}\mathcal{A} \otimes (f_*\mathcal{O}(j) \otimes \omega_{\mathbf{P}(\mathcal{B})/X})^* = \Lambda^{j+1}\mathcal{A} \otimes (f_*\mathcal{O}(j-b) \otimes \det\mathcal{B})^*.$$

Таким образом, комплекс Эгона — Норткотта получается из спектральной последовательности, ассоциированной с двойным комплексом, получающимся из инъективной резольвенты (∗).

(24.4) Используя комплекс Эгона—Норткотта в качестве резольвенты для пучка $\mathcal{E}$, получаем

$$\ldots \longrightarrow \Lambda^{t'+2}\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_1^* \otimes (\Lambda^{t'}\mathcal{F}_1)^* \xrightarrow{\ \partial\ } \Lambda^{t'+1}\mathcal{F}_2 \otimes (\Lambda^{t'}\mathcal{F}_1)^* \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Обозначим через Q ядро отображения ∂. Поскольку пучки $\mathcal{F}_i$ являются суммами линейных расслоений, для всех b имеем инъективные отображения

$$H^1(\mathcal{E}(b)) \longrightarrow H^2(Q(b)).$$

Заметим, что из обращения в нуль H^3 для любого когерентного пучка на $\mathbb{P}^2$ при любых b вытекает сюръективность отображения

$$H^2(\Lambda^{t'+2}\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_1^* \otimes (\Lambda^{t'}\mathcal{F}_1)^*(b)) \longrightarrow H^2(Q(b)).$$

Доказательство будет закончено, если мы покажем, что при $b \geq d - n + 1$ выполнено равенство

$$H^2(\Lambda^{t'+2}\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_1^* \otimes (\Lambda^{t'}\mathcal{F}_1)^*(b)) = 0.$$

(24.5) Для доказательства последнего утверждения представим пучки $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ в виде

$$\mathcal{F}_1 = \oplus\, \mathcal{O}(a_i), \quad i = 1, \ldots, t',$$
$$\mathcal{F}_2 = \oplus\, \mathcal{O}(b_j), \quad j = 1, \ldots, t'',$$

и заметим, что из построения резольвенты вытекают неравенства

$$a_i \leq -1 \text{ для всех } i = 1, \ldots, t',$$
$$b_j \leq -2 \text{ для всех } j = 1, \ldots, t''.$$

С другой стороны,

$$\Lambda^{t''}\mathcal{F}_2 \otimes (\Lambda^{t'}\mathcal{F}_1)^* = \Lambda^e\mathcal{E} = \mathcal{O}(-n + 2 - d),$$

где $t'' - t' = \operatorname{rank}\mathcal{E} = n - 1$. Остаток доказательства состоит из элементарных арифметических вычислений. Доказывается, что при $b \geq d - n + 1$ степень любого слагаемого пучка

$$\Lambda^{t'+2}\mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{F}_1^* \otimes (\Lambda^{t'}\mathcal{F}_1)^*(b)$$

не меньше -2, следовательно, $H^2 = 0$.

Следует отметить, что оценка в доказанной теореме является точной. Соответствующий пример доставляет кривая степени d в $\mathbf{P}^{d-1}$. Утверждение теоремы также справедливо в случае, если предполагать лишь приведенность и неприводимость кривой C, однако доказательство в этом случае становится более сложным.

(24.6) Осталось доказать лемму Лазарсфельда, которую мы использовали.

Лемма. *Предположим, что неприводимая кривая C_0 порождает проективное пространство $\mathbf{P} = \mathbf{P}^n$. Положим*

$$\mathcal{M} = f^*\Omega^1_{\mathbf{P}}(1).$$

Тогда для $n-1$ точек общего положения p_j на кривой C_0 имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(\textstyle\sum p_j) \otimes \mathcal{O}_Z(-1) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \oplus\, \mathcal{O}_Z(-p_j) \longrightarrow 0.$$

Доказательство. Пусть C — нормализация кривой C_0. Обозначим через D сумму $\sum p_j$. Пусть $\mathcal{L}$ обозначает прообраз пучка $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ относительно естественного отображения C в $\mathbf{P}$. Имеем точную последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O}_C^{\oplus n+1} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0.$$

Выберем некоторое линейное подпространство L размерности $n-2$ в $\mathbf{P}$, пересекающее кривую C_0 в точности в точках p_j. Рассмотрим проекцию кривой C_0 на $\mathbf{P}^1$ с центром в L. Утверждение леммы следует теперь из возникающей коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & V \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \oplus\mathcal{O}(-p_j) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^{\oplus(n-1)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}|_D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(24.7) Мы завершим эту лекцию примером, показывающим полезность доказанной леммы. Пусть $\mathcal{L}$—некоторое линейное расслоение на гладкой кривой C, причем $d = \deg \mathcal{L} \geq g(C)$. Предположим, что

$$h^0(\mathcal{L}) = r+1 \text{ и } h^1(\mathcal{L}) = \delta > 0.$$

Допустим, что мы хотим получить оценку сверху на локальную размерность множества W^r_d, состоящего из линейных расслоений степени d на C, имеющих индекс специальности не менее δ. Положим $V = H^0(\mathcal{L})$. Умножим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

тензорно на пучок $K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}$, применим функтор глобальных сечений и рассмотрим начальные члены получающейся длинной точной последовательности когомологий

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{M} \otimes K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow H^0(\mathcal{L}) \otimes H^0(K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) \longrightarrow H^0(K_C).$$

Последнее из приведенных выше отображений называется *отображением Петри*, и его образ лежит в аннуляторе касательного пространства к многообразию W^r_d в точке $\mathcal{L}$. Таким образом, мы получим желаемый результат, если оценим размерность $H^0(\mathcal{M} \otimes K_C \otimes \mathcal{L}^{-1})$. Для этого умножим тензорно на $K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}$ точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(\textstyle\sum p_j) \otimes \mathcal{O}_C(-1) \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \oplus\, \mathcal{O}_C(-p_j) \longrightarrow 0$$

и перейдем к глобальным сечениям. Мы получим точную последовательность когомологий

$$0 \to H^0(K_C \otimes \mathcal{L}^{-2}(D)) \to H^0(\mathcal{M} \otimes K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) \to \oplus\, H^0(K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}(-p_j)) \to 0.$$

Поскольку $d \geq g$, мы получаем неравенство

$$h^0(\mathcal{M} \otimes K_C \otimes \mathcal{L}^{-1}) \leq (r-1)(\delta - 1).$$

Таким образом, аннулятор касательного пространства многообразия W^r_d в точке $\mathcal{L}$ имеет размерность не менее

$$(r+1)\delta-(r-1)(\delta+1).$$

(24.8) Существует некоторый вариант леммы Лазарсфельда для векторных расслоений $\mathcal{E}$, связанных с точными последовательностями вида

$$0\longrightarrow \mathcal{M}\longrightarrow V\otimes\mathcal{O}_C\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow 0,$$

для которых отображение

$$f:\mathbf{P}(\mathcal{E})\longrightarrow\mathbf{P}(V)$$

инъективно в общей точке. Обозначим через m ранг $\mathcal{M}$. С помощью тех же рассуждений, что и выше, получаем точную последовательность

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_C(\Sigma p_i)\otimes\det\mathcal{E}^{-1}\longrightarrow\mathcal{M}\longrightarrow\oplus\,\mathcal{O}_C(-p_i)\longrightarrow 0.$$

Применяя эту последовательность к расслоению струй первого порядка, ассоциированому с линейным раслоением $\mathcal{L}$, рассмотренным выше, получаем оценку сверху на локальную размерность пространства $\mathcal{W}^r_d$, состоящего из пар вида $(C,\mathcal{L})$, $\mathcal{L}\in W^r_d$.

(24.9) *Литература.* Теорема Грюсона — Лазарсфельда — Пескина содержится в [GLP], а лемма Лазарсфельда — в [GL].

Литература

[Ab] Abhyankar S.S. On the valuations centered in a local domain, Amer. J. Math. **78** (1956), 321–348.

[BPV] Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces, Springer, 1984.

[B1] Benveniste X. Sur l'anneau canonique de certaines varietes de dimension trois, Inv. Math. **73** (1983), 157–164.

[B2] ———— Sur le cone des 1-cycles effectifs en dimension 3, Math. Ann. **272** (1985), 257–265.

[Bl] Blanchard M.A. Sur les varietes analytiques complexes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **73** (1956), 157–202.

[Ca] Carlson J. Bounds on the dimension of a variation of Hodge structure, Trans. A.M.S. **294** (1986), 45–64.

[CD] Carlson J., Donagi R. Hypersurface variations are maximal, Inv. Math. **89** (1987), 371–374.

[CGGH] Carlson J., Green M., Griffiths P., Harris J. Infinitesimal variations of Hodge structures (I), Compositio Math. **50** (1983), 109–205.

[CT] Carlson J., Toledo D. Harmonic mappings of Kǎhler manifolds to locally symmetric spaces.

[C1] Clemens H. Some results on Abel–Jacobi mappings. Topics in transcendental algebraic geometry, Princenton Univ. Press, 1984, pp. 289–304.

[C2] ——— Curves on generic hypersurfaces, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 629–636.

[C3] ——— The infinitesimal Abel–Jacobi mapping and the $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(-4)$ curve, Preprint, Univ. of Utah, 1988.

[D] Данилов В.И. Бирациональная геометрия трехмерных торических многообразий. Известия АН СССР, сер. матем., 1982, т. 46, № 5, с. 971–982.

[ES] Eells J., Sampson J. Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[E] Ein L. Subvarieties of genetic complete intersections, Inv. Math. **94** (1988), 163–170.

[El] Elkik R. Rationalitê des singularitês canoniques, Inv. Math. **64** (1981), 1–6.

[Fl] Flenner H. Rational singularities, Arch. Math. (Basel) **36** (1981), 35–44.

[F] Francia P. Some remarks on minimal models, Comp. Math. **40** (1980), 301–313.

[G] Green M. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, II, J. Diff. Geom. **20**

$$(r+1)\delta-(r-1)(\delta+1).$$

(24.8) Существует некоторый вариант леммы Лазарсфельда для векторных расслоений $\mathcal{E}$, связанных с точными последовательностями вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

для которых отображение

$$f : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbf{P}(V)$$

инъективно в общей точке. Обозначим через m ранг $\mathcal{M}$. С помощью тех же рассуждений, что и выше, получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(\Sigma p_j) \otimes \det\mathcal{E}^{-1} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \oplus\, \mathcal{O}_C(-p_j) \longrightarrow 0.$$

Применяя эту последовательность к расслоению струй первого порядка, ассоциированному с линейным раслоением $\mathcal{L}$, рассмотренным выше, получаем оценку сверху на локальную размерность пространства $\mathcal{W}^r_d$, состоящего из пар вида $(C, \mathcal{L})$, $\mathcal{L} \in W^r_d$.

(24.9) *Литература.* Теорема Грюсона—Лазарсфельда—Пескина содержится в [GLP], а лемма Лазарсфельда—в [GL].

Литература

[Ab] Abhyankar S.S. On the valuations centered in a local domain, Amer. J. Math. **76** (1956), 321–348.

[BPV] Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces, Springer, 1984.

[B1] Benveniste X. Sur l'anneau canonique de certaines varietes de dimension trois, Inv. Math. **73** (1983), 157–164.

[B2] ——— Sur le cone des 1-cycles effectifs en dimension 3, Math. Ann. **272** (1985), 257–265.

[Bl] Blanchard M.A. Sur les varietes analytiques complexes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **73** (1956), 157–202.

[Ca] Carlson J. Bounds on the dimension of a variation of Hodge structure, Trans. A.M.S. **294** (1986), 45–64.

[CD] Carlson J., Donagi R. Hypersurface variations are maximal, Inv. Math. **89** (1987), 371–374.

[CGGH] Carlson J., Green M., Griffiths P., Harris J. Infinitesimal variations of Hodge structures (I), Compositio Math. **50** (1983), 109–205.

[CT] Carlson J., Toledo D. Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces.

[C1] Clemens H. Some results on Abel–Jacobi mappings. Topics in transcendental algebraic geometry, Princenton Univ. Press, 1984, pp. 289–304.

[C2] --------- Curves on generic hypersurfaces, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 629–636.

[C3] --------- The infinitesimal Abel–Jacobi mapping and the $\mathcal{O}(2)\oplus\mathcal{O}(-4)$ curve, Preprint, Univ. of Utah, 1988.

[D] Данилов В.И. Бирациональная геометрия трехмерных торических многообразий. Известия АН СССР, сер. матем., 1982, т. 46, № 5, с. 971–982.

[ES] Eells J., Sampson J. Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[E] Ein L. Subvarieties of genetic complete intersections, Inv. Math. **94** (1988), 163–170.

[El] Elkik R. Rationalitê des singularitês canoniques, Inv. Math. **64** (1981), 1–6.

[Fl] Flenner H. Rational singularities, Arch. Math. (Basel) **36** (1981), 35–44.

[F] Francia P. Some remarks on minimal models, Comp. Math. **40** (1980), 301–313.

[G] Green M. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, II, J. Diff. Geom. **20**

(1984), 279–289.

[GH] Criffiths P., Harris J. Principles of Algebraic Geometry, John Wiley and Sons, Inc., 1978. [Имеется перевод: Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. — М.: Мир, 1982.]

[GL] Green M., Lazarsfeld R. A simple proof of Petri's theorem on canonical curves. Geometry Today, Birhäuser, Boston, 1985, pp. 129–142.

[GLP] Gruson L., Lazarsfeld R., Peskine C. On a theorem of Castelnuovo and equations defining space curves, Inv. Math. **72** (1983), 491–506.

[GR] Grauert H., Riemenschneider O. Verschwindungssätze für Annalische Kogomologiegruppen auf Komplexen Räumen, Inv. Math. **11** (1970), 263–292.

[H] Helgason S. Differential geometry, Lie groups and Simmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[Л] Jimenes J. Thesis, Univ. of Utah, 1989.

[Kat] Katz S. On the finiteness of rational curves on quintic threefolds, Comp. Math. **60** (1986), 151–162.

[Ka1] Kawamata Y. On singularities in classification theory of algebraic varieties, Math. Ann. **251** (1980), 51–55.

[Ka2] ——— A generalization of Kodaira—Ramanujam's vanishing theorem, Math. Ann. **261** (1982), 43–46.

[Ka3] ——— On the finiteness of generators of a pluricanonical ring of a threefold of general type, Amer. J. Math. **106** (1984), 1503–1512.

[Ka4] ——— The cone of curves of algebraic varieties, Ann. of Math. **119** (1984), 603–633.

[Ka5] ——— Crepant blowing ups of three dimensional canonical singularities and its applications to degenerations of surfaces, Ann. of Math. **127** (1988), 93–163.

[KMM] Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the manimal model problem, Alg. Geom. Sendai (T. Oda ed.) Adv. Studies in Pure Math. **10**, Kinokuniya — North-Holland, 1987, pp. 283–360.

[Kl] Kleiman S. Toward a numerical theory of ampleness, Ann. of Math. **84** (1966), 293–344.

[Ko1] Kollar J. (Коллар Я.) Многомерные многообразия Фано большого индекса. — Вестник МГУ, сер. матем., 1981, № 3, с. 31–34.

[Ko2] ——— Toward moduli of singular varieties, 1983, неопубликовано.

[Ko3] ——— The cone theorem, Ann. of Math. **120** (1984), 1–5.

[Ko4] ——— The structure of algebraic threefolds: An introduction to Mori's program, Bull. A.M.S. **17** (1987), 211–273. [Имеется перевод: Коллар Я. Структура трехмерных алгебраических многообразий: Введение в программу Мори. — См. стр. 178–314 настоящего издания.]

[Ko5*] Effective base point freenees, University of Utah, preprint, 1992.

[KS] Kollar J., Sheperd-Barron N. Threefolds and deformations of surface singularities, Inv. Math.

[L1] Laufer H. Minimally elliptic singularities, Amer. J. Math. **99** (1977), 1257–1295.

[L2] ——— On $\mathbf{CP}^1$ as an exeptional set. Recent developments in several complex variebles, Ann. Math. Studies **100**, Princenton Univ. Press, 1980, pp. 261–275.

[Mi] Miyaoka Y. On the Mamford — Ramanujam vanishing theorem on a surface, Geometrie Algebrique, Angers 1979; Sijthoff and Nordhoff, 1980, pp. 239–247.

[M1] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math. **116** (1982), 133–176.

[M2] ——— On 3-dimensional terminal singulari–

ties, Nagoya Math. J. **98** (1985), 43–66.

[M3] ——————— Flip theorem and the existence of minimal models for threefolds, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 117–253.

[MS] Morrison D., Stevens G. Terminal quotient singularities in dimension 3 and 4, Proc. A.M.S. **90** (1984), 15–20.

[Nag] Nagata M. On rational surfaces I–II. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto **32** (1960), 351–370; **33** (1960), 271–293. [Имеется перевод: Нагата М. О рациональных поверхностях, I, II. —Математика, 8:1, 1964, с. 55–71; 8:4, 1984, с. 75–94.]

[Nak] Nakayama N. The lower semi-continuity of the plurigenera of complex varieties. Alg. geom, Sendai (T. Oda ed.). Adv. Studies in Pure Math. **10**, Kinokuniya—North-Holland, 1987, pp. 551–590.

[P] Peternell T. Rational curves on a Moishezon 3-fold. Complex Analysis and Algebraic Geometry. Springer Lect. Notes **1194** (1986).

[R1] Reid M. Elliptic Gorenstein singularities of surfaces, Preprint, Univ. of Warwick (1976).

[R2] ——————— Canonical threefolds. Geometrie Algebrique, Angers 1979; Sijthoff and Nordhoff, 1980, pp. 273–310.

[R3] ——————— Minimal models of canonical threefolds. Algebraic varieties and analytic varieties, Adv. Studies in Pure Math. **1**, Kinokuniya—North-Holland, 1983 , 131–180.

[R4] ——————— Projective morphisms according to Kawamata, Preprint, Univ. of Warwick, 1983 .

[R5] ——————— Young person's guide to canonical singularities. Algebraic Geometry Bowdoin 1985, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), 345–416.

[S*] Saito K. Einfach-elliptische Singularitätaten, Inv. Math. **23** (1974) № 3–4, 289–325.

[Sa] Sampson J. Applications of harmonic maps to Kahler geometry, Contemp. Math. **49** (1986), 125–133.

[S–B] Shepherd-Barron N. Some questions on singularities in 2 and 3 dimensions. University of Warwick, 1980, неопубликовано.

[Sh] Шокуров В.В. Теорема о необращении в нуль. — Изв. АН СССР, сер. матем., 1985, т. 49, с. 635–651.

[Sh1*] ——————— Трехмерные логперестройки. — АН СССР, сер. матем., 1992, т. 56, № 1, с. 105–201.

[Si] Siu Y.-T. Complex analiticity of harmonic maps and strong rigidity of complex Kahler manifolds, Ann. of Math. **112** (1980), 73–111.

[V] Viehweg E. Vanishing theorems, J. r.u.a. Math. **335** (1982), 1–8.

[W] Wilson P.M.H. Towards birational classification of algebraic varieties, Bull. London Math. Soc. **19** (1987), 1–48.

[Y] Yau S.T. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge—Ampère equation, I. Comm. Pure and Appl. Math. **XXXI** (1978), 339–411.

[Z] Zariski O. The theorem of Riemann—Roch for high multiple of an effective didvisor on an algebraic surface, Ann. of Math. **76** (1962), 560–615.

Дополнение

Структура трехмерных алгебраических многообразий: Введение в программу Мори[1)]

Я. Коллар

1. Введение

Цель статьи — представить элементарное введение в современную структурную теорию многомерных алгебраических многообразий. «Введение», по-видимому, не совсем то слово, поскольку эта статья больше похожа на путеводитель, описывающий красоты долгого морского путешествия, в котором не упоминается, что первая половина пути должна быть потрачена на тяжелую работу в кочегарке. Внимательное чтение путеводителей может служить некоторой компенсацией отсутствия легких путей достижения цели.

При столь ограниченной цели мы будем предъявлять к знаниям читателя очень низкие требования. Как правило, геометрический подход будет преобладать над алгебраическим. Например, мы ничего не используем из алгебры. Это вынуждает в качестве компенсации излагать результаты из топологии и теории функций комплексных переменных в несколько большем объеме, чем обычно практикуется в учебниках по основам алгебраической геометрии. Тем не менее кроме нескольких более трудных теорем, используемых в отдельных примерах, от читателя требуется знание лишь основных определений и теорем.

Исторически в алгебраической геометрии постоянно изменялось соотношение между ее геометрической и алгебраической сторонами. Первым важным шагом было подробное изучение Риманом алгебраических кривых. Он опирался на геометрию и анализ и разработал вполне удовлетворительную структурную теорию. Несколько позже немецкая школа, возглавляемая Максом Нётером, ввела в эту область алгебру, и проблемы, возникающие в алгебраической геометрии, повлияли в дальнейшем

---

1) Kollár J. The structure of algebraic threefolds: An introduction to Mori's program. — Bull. of AMS, v.17, № 2, October 1987, pp.211—273.

на развитие коммутативной алгебры, в особенности на работы Эмми Нётер и Крулля.

В течение того же самого периода времени итальянская школа Кастельнуово, Энриквеса и Севери исследовала геометрию алгебраических поверхностей и получила удовлетворительную структурную теорию. Однако работе итальянских геометров не хватало гильбертовой строгости, и это стало подрывать к ней доверие. Зачастую попытки изучения трехмерных алгебраических многообразий приводили учеников итальянской школы к неверным выводам, и ни одно из доказательств глубоких результатов не удовлетворяло даже их собственным стандартам.

Было предпринято несколько попыток подвести под алгебраическую геометрию твердые основания. После существенных продвижений, полученным Ван дер Варденом, эта работа была завершена Вейлем и Зарисским с помощью систематического использования коммутативной алгебры. Хорошим проявлением этого стиля является выросший из попытки написать вводную главу к планируемому учебнику по алгебраической геометрии двухтомный трактат «Коммутативная алгебра», написанный Зарисским и Самюэлем.

Построение оснований алгебраической геометрии с помощью коммутативной алгебры было далее продолжено Нагатой. Кульминацией этого подхода стал неоконченный magnum opus «Элементы алгебраической геометрии» Гротендика. В его изложении коммутативная алгебра и алгебраическая теория чисел стали разделами алгебраической геометрии как ее частные случаи. Свидетельством успеха этой точки зрения является доказательство Фальтингса гипотезы Морделла.

К концу шестидесятых годов работа по созданию оснований алгебраической геометрии была большей частью завершена, и внимание было перенесено на более классические проблемы. Прежде всего была переработана и дополнена теория кривых и поверхностей. Однако структурная теория трехмерных многообразий выглядела неподатливой.

В 1972 г. Иитака предложил несколько интересных гипотез, относящихся к многомерным многообразиям. Следуя этой программе, Уэно в 1977 г. получил первую структурную теорему о трехмерных многообразиях. Стало, однако, очевидным, что возможности этого подхода ограниченны. Наиболее шатким блоком являлось отсутствие в высших размерностях хорошего аналога, так называемых минимальных моделей для алгебраических поверхностей.

Существенный прорыв произошел в 1980 г., когда Мори ввел несколько новых идей и завершил первый основной шаг в направлении доказательства существования минимальных моделей многомерных алгебраических многообразий. Тогда же Рид определил и исследовал минимальные модели в предположении, что они существуют, а также указал различные способы их использования. С этого времени трехмерные алгебраические многообразия стали интенсивно исследоваться, что недавно завершилось доказательством глубоких структурных теорем.

Цель данной статьи состоит в том, чтобы дать доступный обзор этих результатов.

Разделы 2—5 представляют собой короткое введение в алгебраическую геометрию. В разд. 6 обсуждается топология алгебраических многообразий с точки зрения теории Мори. Классический подход заключался в исследовании алгебраических многообразий с помощью их подмногообразий коразмерности 1. Фундаментальное наблюдение теории Мори состоит в том, что следует изучать также и одномерные подмногообразия. Оказывается, что это связано с некоторыми простыми топологическими свойствами алгебраических многообразий. После некоторого дополнительного вводного материала в разд. 8 дано общее изложение основной цели структурной теории и стратегии ее достижения. В разд. 9 дан набросок того, как можно осуществить намеченную программу для поверхностей. Раздел 10 посвящен программной статье Мори. Полученные в этой статье результаты достаточны для завершения структурной теории поверхностей, но в общем случае они дают лишь первый шаг. В размерности 3 программа Мори приводит к изучению некоторых многообразий с особенностями. Эти результаты Мори, переработанные для более общей ситуации, представлены в разд. 11.

Последний оставшийся шаг, теорема о флипе, обсуждается в разд. 12. Заключительный раздел посвящен дальнейшим исследованиям.

Поскольку эта статья рассчитана на широкую читательскую аудиторию, я не вижу оснований для приведения ссылок на технические научные статьи. Вместо этого в конце статьи я даю библиографию с короткими аннотациями, которая должна удовлетворить потребности большинства читателей.

Часть этой статьи была написана, когда я пользовался гостеприимством Политехнической школы (Франция). Финансовую поддержку мне оказал также Фонд национальной науки.

Предварительный вариант этой статьи был распространен осенью 1986 г. На некоторые ошибки, неточности и опечатки обратили мое внимание Р. Фридман, Л. Ламперт, К. Мацуки, Т. Ода, М. Рид, Г. Россн, Е. Шимицу, Г. Тиян. Х. Клеменс и Ш. Мори указали на несколько концептуальных проблем в представленном варианте работы, что привело в дальнейшем к пересмотру содержания. Всем им я очень благодарен за внимание и помощь.

2. Что такое алгебраическая геометрия?

2.1. Исходный пункт. После того как Декарт ввел систему координат на плоскости, стало ясно, что простые и хорошо изученные геометрические объекты (например, прямые и коники) можно задать также с помощью простых полиномиальных уравнений (сответственно линейных и квадратичных). Это навело на мысль, что в качестве следующего шага можно было бы попробовать изучать кривые, заданные многочленами более высокой степени. Уже Ньютон глубоко изучал плоские кубики. Однако существовали две проблемы, которые приводили к громоздкости результатов. Первая из них заключалась в отсутствии бесконечно удаленных точек. Две различные прямые, как правило, пересекаются в одной точке, но бывают случаи, когда они параллельны. Оказывается, очень удобно в последнем случае считать, что эти прямые пересекаются в бесконечно удаленной точке. Это обстоятельство приводит к введению понятия проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Другая проблема возникает уже для многочленов от одной переменной. Корни достаточно простых многочленов могут оказатся расположенными вдали от вещественной оси на комплексной плоскости. Даже когда с вещественной точки зрения ситуация не предвещает ничего плохого, объяснение некоторых явлений можно получить, только изучая их над $\mathbb{C}$. Таким, например, является вопрос, почему ряд Тейлора бесконечно дифференцируемой вещественной функции $(1 + x^2)^{-1}$ отказывается быть всюду сходящимся? По этой причине мы заменим поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ на поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ и получим комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$. Однако нет также причины ограничиваться размерностью 2, поэтому мы вводим следующее определение:

2.2. Определение проективного пространства $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим множество наборов по $n + 1$ одновременно не равных нулю комплексных чисел. Для ненулевого комплексного числа λ отождествим два набора

$$(x_0: \ldots :x_n) \quad \text{и} \quad (\lambda x_0: \ldots :\lambda x_n).$$

Тогда получившиеся классы эквивалентности наборов будут составлять комплексное проективное пространство. Набор $(0: \ldots :0)$ исключается.

Пусть

$$U_i = \{(x_0:\ldots:x_n) \in \mathbb{C}P^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Тогда отображение $\phi_i : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n$, заданное формулой

$$(y_1,\ldots,y_n) \longrightarrow (y_1: \ldots : y_i :1:y_{i+1}: \ldots : y_n),$$

отображает аффинное пространство $\mathbb{C}^n$ взаимно однозначно на открытое множество U_i. Поскольку набор $(0: \ldots :0)$ не принадлежит $\mathbb{C}P^n$, множества U_i образуют его покрытие и задают топологию на $\mathbb{C}P^n$ с помощью отображений ϕ_i, используя обычную топологию на $\mathbb{C}^n$. Нетрудно показать, что тем самым комплексное проективное пространство CP^n превращается в $2n$-мерное вещественное компактное многообразие. Несмотря на это, мы будем учитывать его комплексную размерность и будем говорить, что C^n и CP^n являются n-мерными. Обычное понятие размерности будет относиться к вещественной (или топологической) размерности, которая равна удвоенной комплексной размерности.

2.3. Определение алгебраических многообразий. Мы хотим рассматривать подмножества в CP^n, которые можно задать с помощью полиномиальных уравнений. При этом нам не подходит произвольный многочлен $f(x_0,\dots,x_n)$, поскольку $f(x_0,\dots,x_n)$ и $f(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)$ не обязаны одноверемено обращаться в нуль. Однако если f—однородный многочлен степени m, то $f(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) = \lambda^m f(x_0,\dots,x_n)$, и уже имеет смысл понятие нулей многочлена f в CP^n. Таким образом, мы говорим, что подмножество $V \subset CP^n$ является проективным алгебраическим многообразием, если существуют однородные многочлены $f_1,\dots,f_k$, такие, что

$$V = \{(x) \in CP^n \mid f_1(x) =\dots= f_k(x) = 0\}.$$

Нетрудно показать, что пересечение или объединение двух проективных алгебраических многообразий снова является проективным алгебраическим многообразием. Разность двух проективных многообразий, как правило, не является проективным многообразием, и мы будем называть получающиеся таким способом множества квазипроективными многообразиями.

Пусть V—проективное многообразие. Тогда многообразия вида $V \cap U_i$ представляют особый интерес. Пусть в обозначениях п. 2.2 многообразие V задано уравнениями

$$f_1(x) =\dots= f_k(x) = 0,$$

тогда прообраз $\phi_i^{-1}(V) \subset C^n$ задается уравнениями

$$f_j(y_1,\dots,y_i,1,y_{i+1},\dots,y_n) = 0,\ j = 1,\dots,k.$$

Такие многообразия называются аффинными. Проективное многообразие V можно рассматривать как многообразие, склеенное из аффинных кусков вида $V \cap U_i$.

2.4. Определение. Алгебраическая геометрия — это область математики, которая изучает алгебраические многообразия.

2.5. Концептуальные проблемы. Разумность изучения алгебраических многообразий не является очевидной. Насильное слияние алгебры и геометрии могло бы привестн к плачевиому результату. Для того чтобы убедиться в том, что мы имеем дело с чем-то интересиым, необходимо получить удовлетворительиые ответы иа следующие три осиовиых вопроса:

(i) Какова взаимосвязь между многообразием и задающими его уравнениями? Ведь совершенио разные системы уравнений могут задавать одно и то же многообразие!

(ii) Почему мы формулируем определение алгебраического многообразия в столь глобальной форме? Может быть следовало бы требовать в определении многообразия *лишь локальное* его задание полииомиальными уравнеииями в $\mathbf{C}P^n$?

(iii) С какой геометрией мы имеем дело — внутренней или внешней? Зачем так сильно использовать вложение многообразия V в объемлющее проективное пространство $\mathbf{C}P^n$?

Остаток данной главы будет посвящен ответам на эти вопросы.

Ответ на вопрос (i)

2.6. Легче изучить аффинный случай, т.е. многообразия в аффинном пространстве $\mathbf{C}^n$. В качестве иллюстрации рассмотрим случай плоских кривых. Для двух многочленов h и f от переменных x и y положим

$$H = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid h(x, y) = 0\},$$
$$F = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid f(x, y) = 0\}.$$

Нас будет интересовать, когда $H \subset F$. Пусть $h = \prod h_i$ — разложение h иа иеприводимые множители, и пусть

$$H_i = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid h_i(x, y) = 0\}.$$

Очевидно, что $H = \bigcup H_i$; следовательно, наша задача состоит в изучении условий $H_i \subset F$. Пусть g — один из сомножителей h_i, а G — соответствующая кривая.

2.7. Предложение. *Пусть f, g—некоторые многочлены из кольца $\mathbb{C}[x, y]$. Предположим, что многочлен g неприводим. Обозначим через F и G соответствующие кривые. Тогда включение $G \subset F$ имеет место в том и только том случае, когда g делит f.*

Доказательство. Вообще говоря, рассуждения требуют некоторых сведений из теории полей, но даже рассмотрение частного случая $g = x^2 + y^2 - 1$ может служить хорошей иллюстрацией для общих рассуждений. Сначала предположим, что многочлен f имеет рациональные коэффициеиты. Выберем произвольное трансцендеитное число, например e. Затем выберем число e', такое, что $g(e, e') = 0$, т. е. $e' = \sqrt{1 - e^2}$. Я утверждаю, что равенство $f(e, e') = 0$ возможно тогда и только тогда, когда g делит f. Разделим f иа g с остатком относительно переменной y:

$$f(x, y) = (y^2 + x^2 - 1)v(x, y) + yp(x) + q(x).$$

Если $f(e, e') = 0$, то $e'p(e) + q(e) = 0$. Делая подстановку $e' = \sqrt{1 - e^2}$ и избавляясь от радикалов, получаем

$$(1 - e^2)p^2(e) = q^2(e).$$

Поскольку f имеет рациональные коэффицнеиты, тем же свойством обладают миогочлеиы p и q. Таким образом, приведенное выше равенство дает полиномиальное уравнение для числа e, что невозможно, за исключением случая равенства многочлеиов

$$(1 - x^2)p^2(x) = q^2(x).$$

Поскольку многочлен $1 - x^2$ не является квадратом, это равеиство возможно, только если p и q тождественно равны нулю. Это нам и требовалось доказать.

Если коэффициенты миогочлена f не являются рациональными числами, то вместо числа e мы должны выбрать некоторое комплексиое число e_0, которое не является корием никакого уравнения вида $g(x, c_1, \ldots, c_k)$, где $c_1, \ldots, c_k$ — коффициенты уравнения f, а многочлен $g(z_0, z_1, \ldots, z_k)$ имеет рациональные коэффициенты. Существование требуемого числа e_0 немедлеиио следует из несчетности поля $\mathbb{C}$. Это доказывает предложение.

Возвращаясь к многочленам h и f, мы видим, что многочлен h_i для каждого i делит многочлен f. Таким образом, h делит f^k. Следовательно, $H \subset F$ тогда и только тогда, когда h делит некоторую степень f.

В общем случае существует следующий фундаментальный результат:

2.8. Теорема Гильберта о нулях. *Пусть многообразие $V \subset \mathbf{C}^n$ задано системой уравнений $g_1(x) = \ldots = g_k(x) = 0$, а f — произвольный многочлен от n переменных. Тогда многочлен f тождественно равен нулю на многообразии V в том и только том случае, когда существует положительное натуральное число m и набор из k многочленов h_i, такие, что*

$$f^m = h_1 g_1 + \ldots + h_k g_k .$$

Короче говоря, многочлен обращается в нуль на алгебраическом многообразии, лишь когда он имеет для этого достаточно явную алгебраическую причину. Аналогично, условие равенства или включения между двумя алгебраическими многообразиями может быть задано эквивалентными простыми алгебраическими условиями.

Ответ на вопрос (ii)

2.9. Для того чтобы получить более локальное определение алгебраического многообразия, можно было бы рассматривать подмножества в $\mathbf{C}P^n$, задаваемые лишь локально множествами нулей некоторых многочленов. Однако класс таких подмножеств слишком велик, например, в нем содержится любое открытое подмножество из $\mathbf{C}P^n$. Поэтому разумно ограничиться замкнутыми подмножествами. Можно далее попытаться сделать определение еще более локальным, рассматривая вместо многочленов степенные ряды. Это приводит к следующему определению:

2.10. Определение. Подмножество $V \subset \mathbf{C}P^n$ является аналитическим подмногообразием, если каждая точка $p \in V$ имеет некоторую окрестность B_p, такую, что

$$V \cap B_p = \{(x) \in B_p \mid f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0\}$$

для некоторых аналитических функций f_i, определенных в окрестности B_p (понятие аналитической функции имеет смысл, поскольку для достаточно малых окрестностей B_p имеется включение $B_p \subset U_i \cong \mathbb{C}^n$ для некоторого i).

Очевидно, что каждое алгебраическое многообразие является аналитическим. Чудесным образом оказывается справедливым обратное утверждение:

2.11. Теорема Чжоу. *Пусть $V \subset \mathbb{CP}^n$ — замкнутое аналитическое подмногообразие; тогда оно является алгебраическим, т.е. может быть глобально задано системой многочленов.*

Доказательство. Мы дадим доказательство для случая $V \subset \mathbb{CP}^2$. Общий случай можно рассмотреть аналогичным способом. Прежде всего нам понадобятся некоторые результаты о локальной структуре аналитических подмногообразий в $\mathbb{C}^2$. Суть одного из них заключается в следующей теореме:

2.12. Подготовительная теорема Вейерштрасса. *Пусть $f(x, y)$ — голоморфная функция в окрестности начала координат. Предположим, что $f(0, 0) = 0$ и $f(0, y) \not\equiv 0$. Тогда существуют степенные ряды $b_1(x), \ldots, b_k(x)$ и $u(x, y)$, такие, что $u(0, 0) \neq 0$ и*

$$f(x, y) = (y^k + b_1(x)y^{k-1} + \ldots + b_k(x))u(x, y).$$

Доказательство. Поскольку функция $f(0, y)$ не равна тождественно нулю, существует такое малое число $\varepsilon > 0$, что $f(0, y) \neq 0$ для $|y| = \varepsilon$. Следовательно, для некоторого $\delta > 0$ выполнено условие $f(x, y) \neq 0$ для всех пар (x, y), таких, что $|y| = \varepsilon$ и $|x| < \delta$. Для фиксированного значения x обозначим через $r_1(x), \ldots, r_k(x)$ корни уравнения $f(x, \cdot) = 0$, лежащие внутри круга радиуса ε (a priori число k может зависеть от x). По теореме о вычетах

$$r_1^m(x) + \ldots + r_k^m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=\varepsilon} \frac{y^m \partial f/\partial y}{f}\, dy.$$

Если $|x| < \delta$, то правая часть этого равенства представляет собой голоморфную функцию от переменной x. В частности, при $m = 0$ получаем, что число k не зависит от x. Пусть

$\sigma_1(x),\dots,\sigma_k(x)$ — элементарные симметрические многочлены от функций r_i (x). Эти функции являются многочленами от сумм степеней r_i (x), а следовательно, также голоморфны по x. Согласио построеиию, две функции $f(x, y)$ и

$$y^k - \sigma_1(x)y^{k-1} + \dots + (-1)^k\sigma_k\ (x)$$

обращаются в иуль иа одиом и том же множестве, поэтому их отношение является не обращающейся в иуль голоморфной функцией. Это завершает доказательство.

В качестве следствия мы можем описать локальную структуру аналитических подмиожеств в $\mathbb{C}^2$:

2.13. Предложение. *Пусть V—аналитическое подмногообразие в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^2$. Тогда V может быть представлено в виде объединения $U \cup W$, где U—некоторое конечное множество, а*

$$W = \{(x,\ y) \in \mathbb{C}^2 \mid g(x,\ y) = 0\}$$

—множество нулей одного *степенного ряда g.*

Доказательство. Пусть многообразие V задано уравнениями

$$f_1 = \dots = f_m = 0.$$

Пользуясь при необходимости подходящей заменой координат, можио предполагать, что ни одна из функций f_i ие обращается тождественно в иуль на оси y. Согласно теореме 2.12, каждая функция f_i может быть записана в виде

$$f_i\ (x,\ y) = g_i\ (x,\ y)u_i\ (x,\ y),$$

где g_i—многочлен от переменной y, коэффициенты которого—степениые ряды от перемеиной x. Поскольку $u_i(0,\ 0) \neq 0$, по крайней мере в окрестности начала координат

$$V = \{(x,\ y) \in \mathbb{C}^2 \mid g_1 = \dots = g_m = 0\}$$

Обозначим через g_{12} наибольший общий делитель многочленов g_1 и g_2, как многочленов от переменной y. Пусть $g_i = h_i\ g_{12}$ $(i = 1,2)$. Запишем очевидное равенство

$$\{(x,\ y)|\ g_1 = g_2 = 0\} = \{(x,\ y)|\ g_{12} = 0\} \cup$$
$$\cup \{(x,\ y)|\ h_1 = h_2 = 0\}.$$

Я утверждаю, что последнее множество является конечным. В самом деле, для любого фиксированного значения x рассмотрим результант относительно переменной y двух многочленов $h_1(x, y)$ и $h_2(x, y)$. Он является некоторым многочленом от коэффициентов многочленов h_i, а следовательно, голоморфной функцией от переменной x. Поскольку многочлены h_1 и h_2 взаимно просты, результант не равен тождественно нулю. Таким образом, он имеет лишь конечное число нулей в окрестности начала координат. Эти нули дают все решения системы $h_1 = h_2 = 0$.

Теперь рассмотрим многочлен g_{123} — наибольший общий делитель g_{12} и g_3 ,... и так далее. В конце концов мы получим возможность выбрать многочлен g, являющийся наибольшим общим делителем всех многочленов g_1 ,..., g_m . Это завершает доказательство.

2.14. Интересно понять, насколько степенной ряд g единствен. Пусть

$$g = h_1 \dots h_s$$

— разложение на неприводимые сомножители. Если $h_i (0, 0) \neq \neq 0$, то, поскольку h_i не имеет нуля в начале координат, на него можно сократить. Очевидно также, что каждый множитель должен встречаться в произведении только один раз. Это показывает, что подмногообразие V можно задать в окрестности начала координат уравнением $\bar{g} = 0$, таким, что в неприводимом разложении $\bar{g} = \bar{h}_1 \dots \bar{h}_t$ отсутствуют кратные множители и выполнено равенство $\bar{h}_i (0, 0) = 0$. Предыдущие рассуждения показывают, что ряд $\bar{g}$ является единственным (хотя, конечно, он зависит от выбора локальных координат).

Теперь мы рассмотрим более глобальный вариант предложения 2.13.

2.15. Предложение. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — связное открытое подмножество, а $V \subset D \times \mathbb{C}$ — замкнутое аналитическое подмножество без изолированных точек. Предположим, что проекция $p : V \longrightarrow D$ является собственным отображением. Тогда существует единственный степенной ряд g вида*

$$g = y^k + a_1(x)y^{k-1} + \ldots + a_k(x),$$

не имеющий кратных множителей, такой, что

$$V = \{(x, y) \in D \times \mathbf{C} \mid g(x, y) = 0\}.$$

Доказательство. Для каждой точки $v \in V$ выберем единственное определяющее V локальное уравнение $\overline{g}_v$ (см. п. 2.14). Для каждой точки $x \in D$ обозначим через

$$(x, b_1(x)),\ldots,(x, b_k(x))$$

точки в V, лежащие над x (кратности которых определяются $\overline{g}_v$). Как мы видели в теореме 2.12, число k является локально постоянной функцией. Поскольку D связно, то это константа. Аналогично видим, что элементарные симметрические многочлены от b_l представляют собой локально голоморфные функции, задающие ряд $g(x, y)$. Его единственность также очевидна.

2.16. Теперь мы готовы, доказать теорему Чжоу.

Пользуясь предложением 2.13, можно записать $V = U \cup W$, где U — локально конечное (следовательно, конечное) множество, а W локально определяется одним уравнением. Все, что нам осталось сделать — это доказать алгебраичность W.

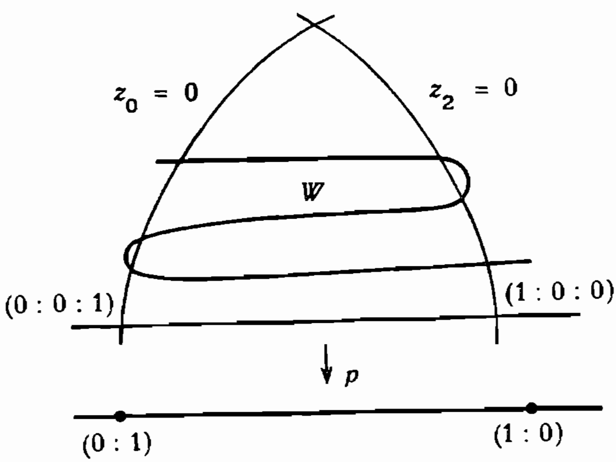


Рис. 1

Выберем на $\mathbf{CP}^2$ однородные координаты $(z_0:z_1:z_2)$ таким образом, чтобы точка (0:1:0) не принадлежала множеству W. Наша стратегия будет заключаться в следующем. Пусть

$$p : \{\mathbf{CP}^2 - (0:1:0)\} \longrightarrow \mathbf{CP}^1$$

– проекция, задаваемая формулой

$$(z_0:z_1:z_2) \longrightarrow (z_0:z_2).$$

В аффинной карте $U_2 = \mathbf{CP}^2 - (z_2 = 0)$ с координатами $y = z_1/z_2$, $x = z_0/z_2$ отображение p соответствует проекции $(x, y) \longrightarrow x$. Поскольку W является компактом, ограиичение p иа W будет собственным отображением, в частности, оио собственно на $U_2 \cap W$. Согласно предложеиию 2.15, получаем, что множество $U_2 \cap W$ может быть задано одним уравнением вида

$$y^k + a_1(x)y^{k-1} + \ldots + a_k(x) = 0,$$

где коэффициенты $a_i(x)$ – голоморфные функции от x. Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что $a_i(x)$ являются многочленами от x. Последнее будет доказано, как только мы покажем, что эти функции не слишком быстро растут при $x \longrightarrow \infty$

Для того чтобы это доказать, рассмотрим другую карту $U_0 = \mathbf{CP}^2 - (z_0 = 0)$ с координатами $u = z_1/z_0$, $v = z_2/z_0$. В этой карте проекция p задается формулой $(u, v) \longrightarrow v$. Стало быть, множество $U_2 \cap W$ может быть задано уравнением

$$u^m + b_1(v)u^{m-1} + \ldots + b_m(v) = 0.$$

На пересечении $U_{02} = U_0 \cap U_2$ мы получаем два уравнения для множества $U_{02} \cap W$: одно уравнение связано с открытым миожеством U_0, а другое – с U_2. Согласно свойству единственности, эти уравнеиия согласованы на пересечеиии, что позволяет нам разобраться с поведением коэффициентов a_i при $x \longrightarrow \infty$.

Делая замену перемениых $u = y/x$, $v = 1/x$, второе уравнеиие можно преобразовать к внду

$$(y/x)^m + b_1(1/x)(y/x)^{m-1} + \ldots + b_m(1/x) = 0.$$

Полученное уравнение пока еще не имеет нужного вида, но после умножения на x^m (заметим, что x не обращается в нуль на U_{02}) мы получим

$$y^m + xb_1(1/x)y^{m-1} + \ldots + x^m\, b_m\,(1/x) = 0.$$

Это уравнение должно совпадать с первоначальным уравнением

$$y^k + a_1(x)y^{k-1} + \ldots + a_k\,(x) = 0.$$

Следовательно, $k = m$ и

$$a_l\,(x) = x^l\, b_l\,(1/x).$$

Поскольку коэффициенты $b_l(1/x)$ являются голоморфными в окрестности $x = \infty$, коэффициенты $a_l(x)$ растут при $x \longrightarrow \infty$ не быстрее, чем x^l. Таким образом, $a_l(x)$ — многочлены степени, не превосходящей i.

Получаем, что однородный многочлен, определяющий подмногообразие W, задается формулой

$$g(z_0, z_1, z_2) = z_1^m + z_2a_1(z_0/z_2)z_1^{m-1} + \ldots + z_2^m a_m\,(z_0/z_2) = 0.$$

Это завершает доказательство.

В действительности, мы доказали даже немного больше:

2.17. Следствие. *Пусть $W \subset \mathbb{C}P^2$ – замкнутое подмногообразие, не содержащее изолированных точек. Тогда это многообразие может быть задано с помощью одного полиномиального уравнения.*

Все эти результаты могут быть использованы для получения некоторых дальнейших связей между алгеброй и геометрией.

2.18. Определение. Алгебраическое многообразие называется неприводимым, если оно не может быть представлено в виде объединения двух собственных замкнутых подмногообразий. Очевидно, что проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является неприводимым многообразием.

2.19. Предложение. *Плоская кривая G является неприводимой тогда и только тогда, когда она может быть задана неприводимым многочленом.*

Доказательство. Пусть $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_l$ — многочлен без кратных множителей, определяющий кривую G. Тогда

$$G = (g_1 = 0) \cup \ldots \cup (g_l = 0);$$

следовательно, при $i \geq 2$ кривая G приводима. Обратно, пусть $G = G_1 \cup G_2$. Очевидно, что можно предполагать отсутствие в G_i изолированых точек. Согласно следствию 2.17, каждая компонента G_i может быть задана одним уравнением $g_i = 0$. Пользуясь предложением 2.7, получаем $g_i | g$. Следовательно, g — приводимый многочлен.

2.20. Предложение. *Неприводимое алгебраическое многообразие является связным.*

Доказательство. Пусть V_i – связные компоненты многообразия V. Очевидно, что V_i – замкнутое аналитическое подмногообразие в $\mathbf{CP}^n$; следовательно, оно алгебраично (см. 2.11). Это противоречит неприводимости.

Имеются два других несложных результата, касающихся топологии алгебраических многообразий.

2.21. Предложение. *Пусть U – неприводимое алгебраическое многообразие, а $V \neq U$ – его замкнутое подмногообразие. Тогда множество $U - V$ является плотным в U.*

Доказательство. Предположим, что U – гладкое многообразие. Тогда локально U выглядит как аффинное пространство $\mathbf{C}^n$, а V может быть задано с помощью уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$. Множество $\mathbf{C}^n - (f_1 = 0)$ меньше, чем множество

$$\mathbf{C}^n - (f_1 = \ldots = f_k = 0),$$

которое, очевидно, является плотным. Общий случай значительно более труден.

2.22. Теорема. *Пусть U – алгебраическое многообразие, а V – его замкнутое подмногообразие. Тогда $\overline{W}$, замыкание в U произвольного замкнутого подмногообразия W из $U - V$, снова является алгебраическим многообразием.*

Доказательство. Мы будем рассматривать простой случай $U = \mathbf{CP}^n$, $V = (x_0 = 0)$. Общий случай рассматривается аналогично. Можно предполагать, что подмногообразие W является неприводимым. Имеем $U - V = \mathbf{C}^n$, а W задается уравнениями

$$f_i(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) = 0.$$

Если взять натуральное число d достаточно большим, то функции $x_0^d f_i$ являются однородными многочленами от переменных $x_0, \ldots, x_n$. Эти многочлены задают замкнутое подмногообразие $W' \subset \mathbf{C}P^n$, такое, что $W' \cap \mathbf{C}^n = W$. Вообще говоря, многообразие W' может оказаться приводимым, однако в этом случае оно имеет неприводимую компоненту W'', содержащую W. Согласно предложению 2.21, многообразие $W = W'' - (x_0 = 0)$ является плотным в W''. Следовательно, $\overline{W} = W''$.

Важно отметить, что утверждение 2.22 неверно для аналитических многообразий.

Можно попытаться дать определение аналитических многообразий, которые a priori не лежат в $\mathbf{C}P^n$. Эти многообразия на самом деле могут оказаться неалгебраическими (см. пример 4.8). Для простоты мы приведем определение лишь гладкого многообразия.

2.23. Определение. Гладким n-мерным комплексным многообразием называется топологическое многообразие M вещественной размерности $2n$, которое может быть покрыто семейством координатных карт $\cup U_i = M$, причем для каждой карты зафиксирован некоторый инъективный гомеоморфизм $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbf{C}^n$ на некоторое открытое подмножество в $\mathbf{C}^n$. Функция f на многообразии M называется голоморфной, если для всех i голоморфна функция $f \circ \phi_i^{-1}$. Для того чтобы это понятие имело содержательный смысл, хотелось бы, чтобы на пересечении $U_i \cap \cap U_j$ голоморфность $f \circ \phi_i^{-1}$ была эквивалентна голоморфности $f \circ \phi_j^{-1}$. Поэтому мы должны потребовать, чтобы все функции $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ были голоморфными.

2.24. Пример. Комплексное проективное пространство $\mathbf{C}P^n$ является гладким комплексным многообразием с картами, описанными в определении 2.2.

2.25. Пример. Пусть f — голоморфная функция на $\mathbf{C}^n$. Положим $F = (f(x) = 0)$. Предположим, что для каждой точки

(x) $\in F$ по крайней мере одна частная производная $\partial f/\partial x_i$ (x) не равна нулю. Если, например, $\partial f/\partial x_1(x) \neq 0$, то, согласно теореме о неявной функции, проекция

$$F \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1} : (x_1,\dots,x_n) \longrightarrow (x_2,\dots,x_n)$$

является локальным гомеоморфизмом в окрестности (x). Используя этот гомеоморфизм для получения карт, можно проверить, что множество F – гладкое комплексное многообразие.

Этот пример является руководящим в определеиии гладкой точки на алгебраическом многообразии. Поскольку проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ покрывается картами, изоморфными $\mathbb{C}^n$, достаточно дать определение гладкой точки для аффинных многообразий.

2.26. Определение. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое многообразие, а $v \in V$ – некоторая его точка. Мы будем говорить, что V является гладким, или неособым, k-мерным многообразием в точке v, если существует подпространство $\mathbb{C}^k \subset \mathbb{C}^n$, такое, что подходящая проекция $p : V \longrightarrow \mathbb{C}^k$ является гомеоморфизмом в окрестности точки v. В этом случае то же самое свойство справедливо для почти всех подпространств $\mathbb{C}^k$ и проекций p на них. Очевидно, что свойство гладкости является открытым условием. Точки, которые не являются гладкими, называются особыми. Множество особых точек образует замкнутое подмножество $\operatorname{Sing} V \subset V$. Это подмножество оказывается алгебраическим. Ясно, что множество $V - \operatorname{Sing} V$ с естественным набором карт превращается в гладкое комплексное многообразие.

Следующий результат связывает число уравнений, задающих алгебраическое многообразие, и его размерность.

2.27. Теорема. *Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ – алгебраическое многообразие, а $f_1,\dots,f_k$ – некоторые многочлены. Пусть W – неприводимая компонента пересечения $V \cap (f_1 = \dots = f_k = 0)$. Тогда*

$$\dim W \geq \dim V - k.$$

Доказательство. Очевидно, что утверждение достаточно доказать для $k = 1$. Для простоты предположим, что многообразие V является гладким, и потому будем рассматривать случай, когда f – голоморфная функция в единичном шаре в $\mathbf{C}^m$ ($m = \dim V$). Если множество точек, в которых функция f равна нулю, непусто и не совпадает со всем шаром, то с помощью подходящей замены координат можно добиться, чтобы $f(0) = 0$ и f не равнялась тождественно нулю на оси координат z_1. Таким образом, при подходящем выборе положительных вещественных чисел ε и δ функция f не обращается в нуль на множестве $|z_1| = \varepsilon$, $|z_2| \le \delta$, ..., $|z_m| \le \delta$. Тогда интеграл

$$N(z_2,\ldots,z_m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z_1|=\varepsilon} \frac{\partial f/\partial z_1}{f}\, dz_1$$

вычисляет число нулей функции $f(*,z_2,\ldots,z_m)$ в круге $|z_1| \le \varepsilon$. Это число является непрерывной функцией от переменных $z_2,\ldots,z_m$ в области $|z_2| \le \delta$, ..., $|z_m| \le \delta$. Следовательно, оно постоянно. По предположению $N(0,\ldots,0) > 0$. Поэтому проекция множества нулей функции f на $(m - 1)$-мерную плоскость координат $z_2,\ldots,z_m$ сюръективна в окрестности начала координат. Таким образом,

$$\dim (f = 0) = m - 1.$$

2.28. Замечание. (i) Если V – гладкое многообразие, а $W \subset V$ – его неприводимое алгебраическое подмногообразие, причем $\dim W = \dim V - 1$, то подмногообразие W может быть локально задано одним уравнением. Это свойство является многомерным аналогом предложения 2.13.

(ii) Сформулированным свойством могут не обладать особые многообразия (см. п. 4.4).

(iii) Если V является гладким алгебраическим многообразием и $\dim W = \dim V - 2$, то многообразие W может быть задано двумя уравнениями (см. п. 4.3).

Ответ на вопрос (iii)

2.29. Ответ на этот вопрос не является красивой теоремой, скорее всего он представляет собой объяснение общей идеологии. Прежде всего отметим возможность строить алгебраическую геометрию, не прибегая к пространствам CP^n или C^n. Важным обстоятельством, однако, является то, что внешняя и внутренняя геометрня многообразня тесно переплетены между собой. Начнем с того, что проективное пространство CP^n является довольно жестким многообразием (доказательство следующего предложения будет дано в следствии 7.18).

2.30. Предложение. $\mathrm{Aut}\ CP^n \cong PGL(n+1, C)$.

Здесь под символом $\mathrm{Aut}\ CP^n$ мы поннмаем группу взанмио однозначных отображений CP^n в себя, которые задаются с помощью многочленов, или, используя вариант теоремы Чжоу, можно предполагать, что они локально задаются с помощью степеннных рядов. Группа $GL(n+1, C)$ естественным образом действует на наборах из $n+1$ комплексных чисел, н это задает также ее действие на CP^n. Поскольку скалярные матрицы индуцируют тривиальное действие на проективном пространстве CP^n, получаем действие группы $PGL(n+1, C)$. Суть утверждения состоит в том, что других автоморфизмов у проектнвного пространства не существует. Поэтому, например, свойство колинеарности точек в CP^n является абстрактным свойством точек проективного пространства!

Более сложные алгебраические многообразия, как правило, совсем не имеют автоморфизмов.

2.31. Еще, пожалуй, более замечательный факт состоит в том, что часто алгебраическне многообразня вкладываются в подходящие проективные пространства единственным образом. Например, если $G \subset CP^2$ – неприводимая крнвая степени не меньше 4, то существует лишь один способ вложения этой кривой в CP^2. Поэтому чнсто внешние свойства точек из G, такне, например, как свойство такой точкн быть точкой перегнба нли свойство двух точек иметь общую касательную, оказываются в результате внутренними свойствами.

Действительная важность этого принципа состоит в том, что он приводит к «процессу линеаризации» алгебраических многообразий. Этот термин я объясню только для алгебраических крнвых. Читателю, не достаточно знакомому с кривыми, следует первоначально познакомиться с разд.3.

2.32. Координаты Чжоу для кривых. Пусть C — гладкая проективная кривая рода $g \geq 2$. Мы выделим два случая.

(i) Кривая C имеет двулистное отображение иа $\mathbf{CP}^1$. Кривые с таким свойством называются гиперэллиптическими. Оказывается, что это отображение является по существу единственным. Существует ровно $2g + 2$ точек в $\mathbf{CP}^1$, которые при рассматриваемом отображеиии имеют только один прообраз. Расположение этих точек однозначно определяет кривую C. Таким образом, мы имеем следующее соответствие:

$$\left\{\begin{matrix}\text{гиперэллиптические кривые}\\ \text{рода } g\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{подмножества из } 2g+2\\ \text{точек в } \mathbf{CP}^1\end{matrix}\right\} \Big/ \mathrm{Aut}\,\mathbf{CP}^1$$

Поскольку $2g + 2$ точек можно рассматривать как множество нулей некоторого однородного многочлена $f(x, y)$ степени $2g + 2$, приведенное выше соответствие можно переписать в виде

$$\left\{\begin{matrix}\text{гиперэллиптические кривые}\\ \text{рода } g\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{однородные многочлены степени } 2g+2\\ \text{без кратных корней}\end{matrix}\right\} \Big/ \mathrm{GL}(2, \mathbf{C}),$$

где группа $\mathrm{GL}(g, \mathbf{C})$ действует по правилу

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f(x, y) = f(ax + by, cx + dy).$$

Таким образом, гнперэллиптические кривые могут быть представлены в виде некоторых простых «линейных объектов» — многочленов.

(ii) C не является гиперэллиптической кривой. Тогда можно доказать, что существует по существу единствениое вложение C в $\mathbf{CP}^{g-1}$, такое, что кривая C не содержится ни в какой гиперплоскости и общая гиперплоскость пересекает C в $2g - 2$ точках. Используя это вложение, мы свяжем с кривой C некоторый «линейный объект». Пусть

$$V = \{\sum a_i x_i\} \cong \mathbf{C}^g$$

—пространство однородных линейных многочленов на $\mathbf{C}P^{g-1}$. Обозначим через $\mathrm{Ch}(C) \subset V \times V$ множество пар $(l_1, l_2) \in V \times V$, таких, что

$$(l_1 = 0) \cap (l_2 = 0) \cap C \neq \varnothing.$$

Если мы зафиксируем l_2, то пересечение $(l_2 = 0) \cap C$ состоит из конечного числа точек. Таким образом, свойство

$$(l_1 = 0) \cap (l_2 = 0) \cap C \neq \varnothing$$

налагает одно условие на l_1. Следовательно, множество $\mathrm{Ch}(C)$ имеет коразмерность 1 в $V \times V$ и может быть задано одним уравнением $\mathrm{ch}(C)(a_1,\ldots,a_g,\ a'_1,\ldots,a'_g) = 0$. Предыдущие рассмотрения показывают, что кривая C может быть восстановлена из уравнения $\mathrm{ch}(C) = 0$. Легко показать, что $\mathrm{ch}(C)$—однородный многочлен степени $2g + 2$ по обоим подмножествам из g переменных a_i и a'_i. При действии группы $\mathrm{GL}(g, \mathbf{C})$, являющейся группой автоморфизмов $\mathbf{C}P^{g-1}$, это уравнение преобразуется по формуле

$$(b_{il})\mathrm{ch}(C)(a_k\ ,\ a'_k) = \mathrm{ch}(C)(\sum b_{kl}\, a_l\ ,\ \sum b_{kl}\, a'_l).$$

Таким образом, мы получаем инъективное отображение

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{негиперэллиптические кривые} \\ \text{рода } g \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{биоднородные многочлены степени} \\ (2g - 2,\ 2g - 2) \text{ от } 2g \text{ переменных} \end{array} \right\} / \mathrm{GL}(g, \mathbf{C}),$$

Этот результат не является столь же красивым, как предыдущий, поскольку очень трудно описать образ получившегося отображения. Тем не менее он позволяет получить хорошее представление в целом о всех алгебраических кривых и может быть развит в очень мощное средство исследования алгебраических кривых.

2.33. Свойство жесткости отображений между алгебраическими многообразиями дает сильный инструмент для исследования алгебраических многообразий, однако его использование требует от нас высокой платы. Прежде всего, как мы увидим в дальнейшем, трудно найти интересные отображения. Даже если мы найдем какое-то отображение, его улучшение может оказаться очень трудным. Стандартные методы «гладких шевелений» из дифференциальной топологии, использующие леммы о трансверсальности и вариации функций Морса, не будут работать из-за отсутствия каких-либо «шевелений».

В связи с этим мы вынуждены очень подробно изучать вырожденные ситуации. Методы, позволяющие справиться с этими проблемами с помощью технического аппарата алгебраической геометрии, часто оказываются очень трудными. В этом обзоре я буду аккуратно обходить эти проблемы и взамен концентрировать внимание на геометрически наглядных частях рассуждений.

3. Немного сведений о кривых

Алгебраические кривые являются простейшими алгебраическими многообразиями. Они очень близки к одномерным комплексным многообразиям, и, так как последние имеют вещественную размерность 2, то их обычно называют римановыми поверхностями. При рассмотрении алгебраических кривых мы будем преследовать две цели: с одной стороны, они дадут нам примеры алгебраических многообразий, а с другой стороны, позволят получить объяснение некоторых фактов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

В основном нас будет интересовать теория алгебраических кривых как комплексных многообразий. Это связано с тем, что подход к ним с точки зрения топологии и теории аналитических функций является наиболее наглядным. Более того, оказывается, что для одномерных компактных многообразий аналитическая и алгебраическая теории эквивалентны.

3.1. Топология кривых. Топологическое пространство алгебраической кривой является компактной поверхностью. В каждой карте умножение на i определяет ориентацию, которая не зависит от выбора карты. Известно, что все компактные ориентируемые поверхности гомеоморфны двумерной сфере с некоторым чнслом приклеенных к ней ручек. Такнм образом, единственным топологическим ннвариантом для алгебраической кривой C является число ручек, которое называется родом этой кривой и обозначается через $g(C)$.

3.2. $g = 0$. Как топологическое пространство кривая рода нуль гомеоморфна двумерной сфере. Мы знаем, что комплексная проективная прямая $\mathbf{CP}^1$ является примером такого многообразия. Оказывается, что этот пример является единственным (см. п. 3.10).

3.3. $g = 1$. Об алгебраических кривых рода 1 писалнсь целые книги.

(i) Начнем с того, что сфера с одной ручкой гомеоморфна двумерному тору, т. е. произведению двух окружностей

$$S^1 \times S^1 \approx \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}/\mathbf{Z} \approx \mathbf{C}/\mathbf{Z} + \mathbf{Z}.$$

Последнее представление дает следующий удобный способ построения кривых рода 1:

Пусть ω_1 и ω_2 – два линейно независимых над $\mathbf{R}$ комплексных числа. Обозначим через $L = \{ n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbf{Z} \}$ порожденную ими решетку. Отождествнм две точки комплексной плос-

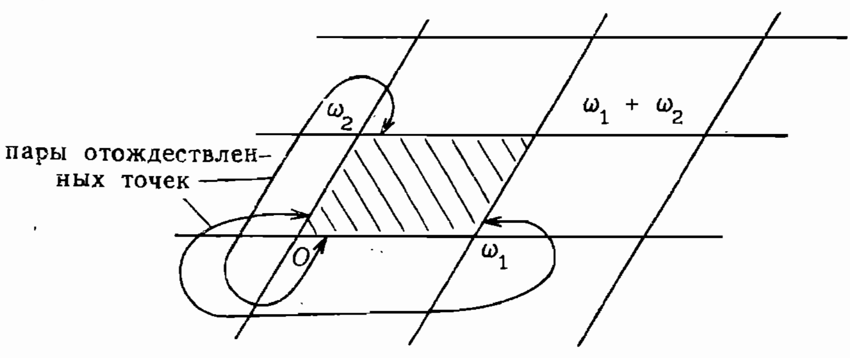


Рис. 2

костн $\mathbf{C}$, еслн их разность принадлежит L. После такого отождествления получим факторпространство $\mathbf{C}/L$. На рнс. 2 заштрихованная часть комплексной плоскости представляет собой фундаментальную область – параллелограмм, сдвиги которого на элементы нз L покрывают всю плоскость $\mathbf{C}$. Факторпространство $\mathbf{C}/L$ можно представлять себе в виде фундаментального параллелограмма с отождествленными противоположными сторонами. Так как сложение комплексных чисел $(x, y) \longrightarrow x + y$ задает некоторое голоморфное отображение $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, то $\mathbf{C}$ является комплексной группой Лн, а L – ее подгруппой. Таким образом, факторпространство $\mathbf{C}/L$ — компактная комплексная группа Ли.

(ii) Возникает следующнй вопрос: когда две разные пары комплексных чисел (ω_1, ω_2) и (ω_1', ω_2') определяют нзоморфные комплексные многообразия? Обозначим через L и L' соответствующие нм решеткн и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{C} & & \mathbf{C} \\
\downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q'} \\
\mathbf{C}/L & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbf{C}/L'
\end{array}$$

Пусть f – биектнвное голоморфное отображение. Вообще говоря, точка $f(q(0))$ не обязана совпадать с $q'(0)$, но этого можно достичь, если вместо f взять его композицию с некоторым сдвнгом в $\mathbf{C}/L'$. Таким образом, можно предполагать, что $f(q(0)) = q'(0)$. Отображение $q' : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/L'$ является универсальным накрывающим отображением. Тогда композиция $f \circ q : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}/L'$ может быть поднята до отображения универсальных накрытий $f^* : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, где $f \circ q = q' \circ f^*$. Применяя аналогичные рассуждення к отображению f^{-1}, мы получим отображенне $f^{-1*} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$, которое является, очевидно, обратным отображением к f^*. Следовательно, f^* — умножение на некоторое комплексное число μ, так как $f^*(0) = 0$ и f^* — бнективное голоморфное отображение $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$. Более того, поскольку

$$f^*(q^{-1}(q(0))) = q'^{-1}(q'(0)),$$

имеем $f^*(L) = L'$, т. е. $\mu L = L'$. В обратную сторону, если

$\lambda L = L'$ для некоторого комплексного числа λ, то умножение на него индуцирует биективное голоморфное отображение $\lambda : \mathbf{C}/L \longrightarrow \mathbf{C}/L'$.

Пару (ω_1, ω_2) можно умножить на комплексное число $\mu = \omega_1^{-1}$ или ω_2^{-1} и получить пару, состоящую из 1 и τ, где $\operatorname{Im} \tau > 0$. Соответствующую решетку, порожденную 1 и τ, мы будем обозначать через L_τ, а факторпространство $\mathbf{C}/L_\tau$ — через E_τ.

(iii) Каждое пространство $\mathbf{C}/L$ изоморфно одному из E_τ, причем E_τ и $E_{\tau'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{для } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbf{Z},\ ad - bc = 1.$$

Доказательство. Мы уже установили первую часть утверждения. Для того чтобы доказать вторую часть, рассмотрим изоморфизм решеток $L_{\tau'} \longrightarrow L_\tau$, индуцированный умножением на комплексное число μ. Тогда

$$\mu\tau' = a\tau + b\cdot 1 \ \text{ и } \ \mu\cdot 1 = c\tau + d\cdot 1.$$

Так как элементы $\mu\tau'$ и $\mu\cdot 1$ должны быть базисом решетки L_τ, то $ad - bc = \pm 1$. Можно легко убедиться, что из условия положительности мнимых частей τ и τ' следует $ad - bc = +1$.

Этот пример демонстрирует особое свойство комплексных многообразий, заключающееся в том, что они допускают непрерывные деформации. Заметим, что в рассмотренном примере при небольшом изменении параметра τ мы будем получать различные комплексные многообразия.

(iv) *Функции на* $\mathbf{C}/L$. Пусть g — мероморфная функция на $\mathbf{C}/L$. Тогда q^*g — мероморфная функция на $\mathbf{C}$, удовлетворяющая условиям $q^*g(z + \omega_1) = q^*g(z + \omega_2) = q^*g(z)$. Таким образом, q^*g — двоякопериодическая мероморфная функция на $\mathbf{C}$. Обратно, каждая двоякопериодическая мероморфная функция на $\mathbf{C}$ (так называемая эллиптическая функция) определяет некоторую мероморфную функцию на $\mathbf{C}/L$. Основная эллиптическая функция может быть представлена в виде ряда

$$p(z) = z^{-2} + \sum_{\omega \in L - 0} [(z - \omega)^{-2} - \omega^{-2}].$$

Проведя несложные вычисления, можно убедиться, что функция p мероморфна на $\mathbf{C}$, двоякопериодическая и имеет полюсы кратности 2 в точности в вершинах решетки L. Очевидно, что производная $p'(z)$ является двоякопериодической функцией, имеющей полюсы кратности 3 в вершинах решетки L. Я утверждаю, что p и p' связаны между собой некоторым полиномиальным соотношением. Доказательство этого факта не совсем обычно.

Рассмотрим отображение

$$\mathbf{C} - L \longrightarrow \mathbf{CP}^2: \quad z \longrightarrow (p(z): p'(z): 1).$$

Это отображение спускается до отображения $\mathbf{C}/L - 0 \longrightarrow \mathbf{CP}^2$. Для того чтобы продолжить это отображение в точку 0, достаточно представить его в эквивалентном виде

$$z \longrightarrow (p(z)/p'(z): 1: 1/p'(z)),$$

и тогда значение в $z = 0$ уже определено. Следовательно, мы получаем некоторое отображение $\mathbf{C}/L \longrightarrow \mathbf{CP}^2$. Образом этого отображения является некоторое компактное аналитическое подмногообразие в $\mathbf{CP}^2$; значит, согласно теореме 2.11, координаты точек образа удовлетворяют полиномиальному уравнению $f(x_0: x_1: x_2) = 0$. Это дает требуемое соотношение $f(p(z), p'(z), 1) = 0$.

В действительности в нашем случае можно выписать это уравнение.

(v) $[p']^2 = 4p^3 + ap + b$ для некоторых a, $b \in \mathbf{C}$. Следовательно, образ рассматриваемого отображения — кубическая кривая.

(vi) В заключение я хотел бы упомянуть о некоторых отображениях кривой E_τ в себя. Если $n \in \mathbf{Z}$, то умножение на n переводит решетку L_τ в себя. Таким образом, мы получаем отображение $n: E_\tau \longrightarrow E_\tau$, которое является накрытием степени n^2,

$$n^{-1}(z) = \left\{ \frac{z}{n} + \frac{i\omega_1 + j\omega_2}{n} : 0 \le i, j < n \right\}.$$

3.4. $g \ge 2$. Случай кривых рода $g \ge 2$ является гораздо более сложным, поэтому мы остановимся на обсуждении только двух тем. Одна из них—топологические свойства отображений между римановыми поверхностями, а другая—аналог проблемы Миттаг-Леффлера, состоящей в нахождении мероморфной функции с заданными полюсами.

Пусть на компактной римановой поверхности C задана некоторая триангуляция. Через t, l и v обозначим соответственно количество треугольников, ребер и вершин этой триангуляции. Нетрудно убедиться, что $t - l + v = 2 - 2g$, где g—род кривой C.

Пусть $f : C' \longrightarrow C$—непостоянное голоморфное отображение между двумя римановыми поверхностями. Тогда кривая C' может быть покрыта картами U_i, в каждой из которых отображение f задано с помощью степенного ряда $f_i(z)$, причем отображение f не является локальным гомеоморфизмом в $z \in U_i$ тогда и только тогда, когда $f'_i(z) = 0$; следовательно, точки с этим свойством образуют дискретное множество, являющееся конечным, если C'—компакт. Обозначим через B образ в C множества точек кривой C', в которых нарушается локальная взаимная однозначность отображения f. Будем предполагать, что множество вершин триангуляции кривой C содержит B. Тогда на кривой C' мы можем рассмотреть прообраз этой триангуляции относительно f. Если отображение f является n-листным накрытием C вне B, то мы получаем

$$t' = nt, \quad l' = nl, \quad p' \le np.$$

Поэтому

$$2 - 2g' = t' - l' + v' = n(2 - 2g) - (np - p').$$

Следовательно, $2g' - 2 \ge n(2g - 2)$. Это неравенство немедленно дает следующее утверждение.

3.5. Предложение. *Пусть $f : C' \longrightarrow C$—непостоянное голоморфное отображение между алгебраическими кривыми. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) *$g(C') \ge g(C)$. В частности, если $C' \cong \mathbf{CP}^1$, то обязательно также $C \cong \mathbf{CP}^1$.*

(ii) *Если $g(C') = g(C) \ge 2$, то f—изоморфизм.*

3.6. Определение. Пусть C — компактная риманова поверхность, $P_i \in C$ — некоторый набор точек и n_i — натуральные числа. Через $\Gamma(\sum n_i P_i)$ обозначим множество всех мероморфных функций на C, имеющих полюсы лишь в точках P_i, причем кратность этих полюсов не превосходит n_i. Очевидно, что такие мероморфные функции образуют векторное пространство. Проблема Миттаг-Леффлера заключается в вычислении размерности этих пространств.

3.7. Предложение. $\dim \Gamma(\sum n_i P_i) \le 1 + \sum n_i$.

Доказательство. В окрестности каждой точки P_i выберем локальную координату z_i. Рассмотрим разложение Лорана для функции $f \in \Gamma(\sum n_i P_i)$ в точках P_i

$$f(z) = a_{-n_i} z^{-n_i} + \cdots + a_{-1} z^{-1} + \cdots.$$

Главная часть этого разложения в каждой точке P_i является элементом n_i-мерного комплексного линейного пространства. Следовательно,

$$\dim \Gamma(\sum n_i P_i) \le \dim \Gamma(\varnothing) + \sum n_i,$$

где $\Gamma(\varnothing)$ – пространство голоморфных функций на C. Согласно принципу максимума, $\Gamma(\varnothing)$ состоит из постоянных функций; следовательно, $\dim \Gamma(\varnothing) = 1$.

Оценка снизу размерности $\Gamma(\sum n_i P_i)$, принадлежащая Риману, является более интересной и трудной задачей.

3.8. Теорема (Риман). *Имеет место неравенство*

$$\dim \Gamma(\sum n_i P_i) \ge \sum n_i + 1 - g.$$

Более того, при $\sum n_i \ge 2g - 1$ *это неравенство превращается в равенство.*

Доказательство. Мы наметим только основные этапы доказательства этой теоремы.

На первом шаге будем исследовать только функцию $u = \operatorname{Re} f$, которая является гармонической. Выберем точку $P = P_i$ и целое число k, удовлетворяющее неравенствам $1 \le k \le n_i$. Предположим, что u — некоторая гармоническая функция на $C - P$, имеющая полюс k-го порядка в точке P

(т. е. u в точке P имеет ту же особенность, что и $\operatorname{Re} z^{-k}$). Согласно определению гармонической функции,

$$\Delta u = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)u \equiv 0.$$

Соответствующая вариационная задача для u состоит в минимизации интеграла Дирихле

$$\int_{C-P} (\partial u/\partial x)^2 + (\partial u/\partial y)^2 dxdy.$$

Однако в такой интерпретации имеются две проблемы. Первая связана с тем, что из-за полюса в P приведенный выше интеграл расходится. А вторая, более серьезная, состоит в доказательстве дифференцируемости экстремальной функции u в рассматриваемой вариационной задаче. Последная проблема привела к большой полемике в XIX столетии и была решена только Гильбертом.

Пусть $v = v(k, P_i)$ — сопряженная к u функция. Положим

$$f = f(k, P_i) = u(k, P_i) + i\,v(k, P_i).$$

Сопряженная функция локально определена только с точностью до константы, так что функция f в общем случае является многозначной.

Фундаментальная группа римановой поверхности C имеет $2g$ образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g}$. Согласно построению, функция f удовлетворяет соотношению

$$f(\gamma_j z) = f(z) + p(j, k, P_i),$$

где $p(j, k, P_i)$ — некоторые константы, не зависящие от z.

Построенные функции $f(k, P_i)$ и постоянные функции порождают $(1 + \sum n_i)$-мерное векторное пространство V многозначных функций, причем функция $g \in V$ является однозначной тогда и только тогда, когда $g(\gamma_j z) = g(z)$ для любого j. Это дает $2g$ линейных ограничений. Следовательно,

$$\dim \Gamma(\sum n_i P_i) \geq \sum n_i + 1 - 2g.$$

В действительности оказывается, что только g из этих условий являются независимыми, что приводит к неравенству теоремы 3.8.

3.9. Следствие. *Каждая компактная риманова поверхность C может быть погружена в некоторое проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ и, следовательно, является алгебраической кривой.*

Доказательство. Пусть $f_1,\dots,f_n$ – мероморфные функции на C. Рассмотрим отображение $F: C \longrightarrow \mathbf{CP}^n$, заданное формулой

$$P \longrightarrow (f_1(P):\ldots:f_n(P):1).$$

Отображение F определено вне полюсов функций f_i. Пусть $Q \in C$ – полюс некоторой функции f_i, и предположим, что f_1 имеет полюс наивысшего порядка в Q. Тогда отображение

$$F: P \longrightarrow (f_1(P):\ldots:f_n(P):1) = (1:f_2(P)/f_1(P):\ldots:1/f_1(P))$$

определено в точке Q, а следовательно, всюду определено.

Предположим, что для отображения F выполнено равенство $F(R) = F(Q)$ для некоторых точек R и Q кривой C. Выберем новую функцию f_{n+1}, имеющую полюс в точке R, но регулярную в Q. Рассмотрим отображение

$$F^+ : P \longrightarrow (f_1(P):\ldots:f_n(P):f_{n+1}(P):1).$$

Если $F(S) \neq F(T)$, то $F^+(S) \neq F^+(T)$. Более того, имеем $F^+(R) \neq F^+(Q)$. Отщепляя этим способом все большее и большее количество точек, в конце концов мы получим инъективное отображение (в этом месте рассуждений нужна компактность C).

Добросовестный читатель с помощью той же самой техники может получить отображение, образ которого является гладким.

3.10. Доказательство 3.2. Пусть C – гладкая кривая рода нуль и P – некоторая ее точка. Тогда $\dim \Gamma(P) \geq 2$; поэтому на C существует функция f с единственным полюсом. Эта функция задает отображение $f: C \longrightarrow \mathbf{CP}^1$, которое является взаимно однозначным в точке ∞. Следовательно, это отображение взаимно однозначно всюду.

3.11. Особенности. Пусть многочлен $f(x, y)$ определяет алгебраическую кривую в $\mathbf{C}^2$. Предположим, что $f(0, 0) = 0$. Если хотя бы одна из частных производных в начале координат функции f не равна нулю, то, согласно примеру 2.25, f задает в его окрестности некоторое многообразие. В противном случае, кривая имеет особенность в начале координат. Приведем несколько примеров.

(i) $x^2 - y^2 = 0$ — две пересекающиеся прямые. Эта особенность называется нодальной[1].

(ii) $x^3 - y^2 = 0$. Эта особенность называется каспидальной.

Заметим, что отображение $p: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^2$, задаваемое формулой $t \longrightarrow (t^2, t^3)$, взаимно однозначно переводит $\mathbf{C}$ в кривую с уравнением $x^3 - y^2 = 0$. Обратное к p отображение является непрерывным, но не дифференцируемым в начале координат. Можно сказать, что эта особенность имеет параметризацию с помощью $\mathbf{C}$.

(iii) $x^{2n} - y^2 = 0$. Эта кривая состоит из объединения двух гладких кривых, задаваемых уравнениями $x^n - y = 0$ и $x^n + y = 0$.

(iv) $x^3 + x^6 - y^4 = 0$. Эта особенность также имеет некоторую параметризацию. Пусть

$$\phi(t) = \left[\tfrac{1}{2}\left[-1 + (1 + 4t^{12})^{1/2}\right]\right]^{1/3}.$$

Эта функция может быть представлена степенным рядом, сходящимся при $|t| < 2^{-1/6}$. Тогда отображение малого круга $\Delta \longrightarrow \mathbf{C}^2$, заданное формулой $t \longrightarrow (\phi(t), t^3)$, является параметризацией приведенной выше особенности.

В общем случае любая особенность допускает параметризацию. Имеется следующая теорема:

3.12. Теорема. *Пусть C — проективная алгебраическая кривая. Тогда существует некоторое отображение $p: \overline{C} \longrightarrow C$, являющееся изоморфизмом над гладкими точками кривой C, причем $\overline{C}$ — гладкая компактная риманова поверхность, а следовательно, согласно следствию 3.9, некоторая проективная кривая. Более того, кривая $\overline{C}$ однозначно определена; она называется нормализацией кривой C.*

---

[1] Или обыкновенной двойной точкой. — *Прим. ред.*

3.13. Определение. Проективная кривая, возможно особая, называется рациональной, если ее нормализация изоморфна $\mathbb{C}P^1$. Если $f: \mathbb{C}P^1 \to D$ — некоторое доминантное отображение, а $\overline{D}$ — нормализация кривой D, то нетрудно доказать, что отображение f поднимается до отображения нормализаций $\overline{f}: \mathbb{C}P^1 \to \overline{D}$. Согласно 3.5(i), $\overline{D} \cong \mathbb{C}P^1$, т. е. кривая D рациональна.

В дальнейшем рациональные кривые будут играть важную роль.

4. Несколько примеров

4.1. Простейшими алгебраическими многообразиями являются гиперповерхности. Если $f(x_0,\dots,x_n)$ — однородный многочлен степени m, то множество

$$F = \{ (x) \in \mathbb{C}P^n \mid f(x) = 0 \}$$

является проективным алгебраическим многообразием. Как и в случае плоских кривых, многообразие F неприводимо тогда и только тогда, когда неприводим многочлен f. Согласно теореме 2.27, размерность F равна $n-1$. По теореме Сарда многообразие F является гладким для почти всех многочленов f. Наиболее простой пример гладкой гиперповерхности — гиперповерхность Ферма, заданная уравнением $f = x_0^m + \dots + x_n^m$. Действительно, в карте U_0 с координатами $z_i = x_i/x_0$ уравнение этой гиперповерхности приобретает вид $1 + z_1^m + \dots + z_n^m$. Его частные производные равны mz_i^{m-1}. Таким образом, все частные производные обращаются одновременно в нуль лишь в начале координат, которое не принадлежит этой гиперповерхности. Следовательно, f определяет гладкое многообразие.

4.2. Полные пересечения. Пусть $f_1,\dots,f_k$ — однородные многочлены. Положим

$$V(f_1,\dots,f_k) = \{ (x) \in \mathbb{C}P^n \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0 \}.$$

Можно показать, что для почти всех наборов многочленов $f_1,\dots,f_k$ получаемое многообразие является гладким и имеет размерность $n-k$ (см. теорему 2.27).

4.3. Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbb{C}^4$ с координатами x, y, u, v многообразие V, являющееся объединением двух аффинных плоскостей с координатами (x, y) и (u, v). Тогда V имеет особенность в начале координат, а в остальных точках гладко. Многообразие V можно задать уравнениями

$$xu = xv = yu = yv = 0.$$

Его можно также задать тремя уравнениями

$$xu = yv = xv + yu = 0.$$

Однако, и это не так легко доказать, многообразие V не может быть задано двумя уравнениями.

Если перейти от аффинного пространства $\mathbb{C}^4$ к соответствующему проективному пространству $\mathbb{CP}^3$, то этот пример показывает, что две скрещивающиеся прямые в $\mathbb{CP}^3$ не могут быть заданы двумя уравнениями. До сих пор, однако, неизвестно, существует ли *неприводимая* кривая $C \subset \mathbb{CP}^3$, которую нельзя задать двумя уравнениями[1].

4.4. Теперь в аффинном пространстве $\mathbb{C}^4$ рассмотрим многообразие $V = \{xy - uv = 0\}$. Это многообразие содержит плоскость $P = \{x = u = 0\}$. Однако одного дополнительного уравнения p недостаточно, чтобы задать $P \subset V$. Действительно, если P задана уравнениями $xy - uv = p(x, y, u, v) = 0$, то по теореме 2.8 существуют многочлены f_1, f_2, g_1, g_2, для которых выполнены равенства

$$x^n = g_1\cdot(xy - uv) + f_1\cdot p, \quad u^m = g_2\cdot(xy - uv) + f_2\cdot p.$$

После подстановки $y = v = 0$ получаем

$$x^n = f_1\cdot p(x, 0, u, 0), \quad u^m = f_2\cdot p(x, 0, u, 0).$$

Следовательно, многочлен $p(x, 0, u, 0)$ является константой. С другой стороны, p обращается в нуль в начале координат.

[1] Точнее, некоторую ее кратность. —*Прим. ред.*

3.13. Определение. Проективная кривая, возможно особая, называется рациональной, если ее нормализация изоморфна $\mathbf{CP}^1$. Если $f : \mathbf{CP}^1 \to D$—некоторое доминантное отображение, а $\overline{D}$—нормализация кривой D, то нетрудно доказать, что отображение f поднимается до отображения нормализаций $\overline{f} : \mathbf{CP}^1 \to \overline{D}$. Согласно 3.5(i), $\overline{D} \cong \mathbf{CP}^1$, т. е. кривая D рациональна.

В дальнейшем рациональные кривые будут играть важную роль.

4. Несколько примеров

4.1. Простейшими алгебраическими многообразиями являются гиперповерхности. Если $f(x_0,\dots,x_n)$ – однородный многочлен степени m, то множество

$$F = \{ (x) \in \mathbf{CP}^n \mid f(x) = 0 \}$$

является проективным алгебраическим многообразием. Как и в случае плоских кривых, многообразие F неприводимо тогда и только тогда, когда неприводим многочлен f. Согласно теореме 2.27, размерность F равна $n-1$. По теореме Сарда многообразие F является гладким для почти всех многочленов f. Наиболее простой пример гладкой гиперповерхности – гиперповерхность Ферма, заданная уравнением $f = x_0^m + \dots + x_n^m$. Действительно, в карте U_0 с координатами $z_i = x_i/x_0$ уравнение этой гиперповерхности приобретает вид $1 + z_1^m + \dots + z_n^m$. Его частные производные равны mz_i^{m-1}. Таким образом, все частные производные обращаются одновременно в нуль лишь в начале координат, которое не принадлежит этой гиперповерхности. Следовательно, f определяет гладкое многообразие.

4.2. Полные пересечения. Пусть $f_1,\dots,f_k$—однородные многочлены. Положим

$$V(f_1,\dots,f_k) = \{ (x) \in \mathbf{CP}^n \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0 \}.$$

Можно показать, что для почти всех наборов многочленов $f_1,\ldots,f_k$ получаемое многообразие является гладким и имеет размерность $n-k$ (см. теорему 2.27).

4.3. Рассмотрим в аффинном пространстве $\mathbf{C}^4$ с координатами x, y, u, v многообразие V, являющееся объединением двух аффинных плоскостей с координатами (x, y) и (u, v). Тогда V имеет особенность в начале координат, а в остальных точках гладко. Многообразие V можно задать уравнениями

$$xu = xv = yu = yv = 0.$$

Его можно также задать тремя уравнениями

$$xu = yv = xv + yu = 0.$$

Однако, и это не так легко доказать, многообразие V не может быть задано двумя уравнениями.

Если перейти от аффинного пространства $\mathbf{C}^4$ к соответствующему проективному пространству $\mathbf{CP}^3$, то этот пример показывает, что две скрещивающиеся прямые в $\mathbf{CP}^3$ не могут быть заданы двумя уравнениями. До сих пор, однако, неизвестно, существует ли *неприводимая* кривая $C\subset\mathbf{CP}^3$, которую нельзя задать двумя уравнениями[1].

4.4. Теперь в аффинном пространстве $\mathbf{C}^4$ рассмотрим многообразие $V = \{xy - uv = 0\}$. Это многообразие содержит плоскость $P = \{x = u = 0\}$. Однако одного дополнительного уравнения p недостаточно, чтобы задать $P\subset V$. Действительно, если P задана уравнениями $xy - uv = p(x, y, u, v) = 0$, то по теореме 2.8 существуют многочлены f_1, f_2, g_1, g_2, для которых выполнены равенства

$$x^n = g_1\cdot(xy-uv) + f_1\cdot p, \quad u^m = g_2\cdot(xy-uv) + f_2\cdot p.$$

После подстановки $y = v = 0$ получаем

$$x^n = f_1\cdot p(x, 0, u, 0), \quad u^m = f_2\cdot p(x, 0, u, 0).$$

Следовательно, многочлен $p(x, 0, u, 0)$ является константой. С другой стороны, p обращается в нуль в начале координат.

[1] Точнее, некоторую ее кратность. —*Прим. ред.*

Поэтому $p(x, 0, u, 0) \equiv 0$, противоречие.

4.5. Произведения. Что такое $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$? Очевидно, что это не $\mathbb{C}P^{n+m}$. Пусть $(x_0:\ldots:x_n)$ и $(y_0:\ldots:y_m)$ — соответствующие однородные координаты. Обозначим через

$$z_{ij} \quad (0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m)$$

однородные координаты на $\mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$. Определим отображение из $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ в $\mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$ формулой

$$((x_0:\ldots:x_n) \times (y_0:\ldots:y_m)) \longrightarrow (z_{ij}),$$

где $z_{ij} = x_i \cdot y_j$. Очевидно, что это отображение инъективно, и его образ определяется простыми уравнениями

$$z_{st} \cdot z_{pq} = z_{sq} \cdot z_{pt},$$

задавая тем самым алгебраическое многообразие, называемое произведением $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{C}P^m$. Таким образом, мы получили в точности то, что могли ожидать.

Если покрыть проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ картами $U_i \cong \mathbb{C}^n$, а $\mathbb{C}P^m$ — картами $U'_j \cong \mathbb{C}^m$, то произведение $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$ покрывается картами $U_i \times U'_j \cong \mathbb{C}^{n+m}$. Более того, если карта $U_{ij} \subset \mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}$ определяется соотношением $z_{ij} \ne 0$, то $U_i \times U'_j = U_{ij} \cap (\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m)$.

Если V и W — произвольные алгебраические многообразия, то определим их произведение $V \times W$ как соответствующее подмножество в $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m$. Такое определение произведения алгебраических многообразий совпадает с любым другим разумным определением.

4.6. Произведение $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ вкладывается в $\mathbb{C}P^3$ и задается в этом пространстве одним уравнением вида $u_0u_1 = u_2u_3$, которое определяет гладкую поверхность второй степени. Два семейства прямых на этой поверхности задаются равенствами

$$u_0 = \lambda u_2,\ u_1 = \lambda^{-1}u_3 \ \text{ и } \ u_0 = \mu u_3,\ u_1 = \mu^{-1}u_2.$$

4.7. Нетрудно найти многомерный аналог эллиптических кривых. Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_{2n}$ — линейно независимые над $\mathbb{R}$ векторы в $\mathbb{C}^n$. Они порождают подрешетку $L \subset \mathbb{C}^n$, фактор по которой $\mathbb{C}^n/L$ — компактное комплексное многообразие, гомеоморфное

$(S^1)^{2n}$. В отличие от случая $n=1$ эти многомерные комплексные многообразия не всегда являются алгебраическими, причем условие их алгебраичности является довольно тонким. Рассмотрим матрицу $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{2n})$ размера $n \times 2n$, составленную из координат векторов $\omega_1, \ldots, \omega_{2n}$. Тогда соответствующее многообразие $\mathbf{C}^n/L$ алгебраично в том и только том случае, когда существует кососимметрическая матрица A с целыми коэффициентами, такая, что

(i) $\Omega A^t\Omega = 0$;

(ii) $\sqrt{-1}\Omega A^t\bar{\Omega}$ — положительно определенная матрица.

Сейчас нам пока трудно говорить о естественности задачи изучения факторов $\mathbf{C}^n/L$, для которых выполнены указанные условия. Однако к этому нас приводит точка зрения теории функций. Непосредственное обобщение следствия 3.9 показывает, что компактное комплексное многообразие M является алгебраическим тогда и только тогда, когда для любого набора точек $p_1, \ldots, p_k \in M$ существует на M мероморфная регулярная в этих точках функция f, такая, что $f(p_i) \neq f(p_j)$. Поэтому $\mathbf{C}^n/L$ алгебраично тогда и только тогда, когда на $\mathbf{C}^n$ существует много L-периодических мероморфных функций.

4.8. Поверхность Хопфа. Результаты, упомянутые в предыдущем пункте, трудно доказать. Ниже мы дадим более простой пример неалгебраической компактной комплексной поверхности.

Рассмотрим действие образующей бесконечной циклической группы на $\mathbf{C}^2 - 0$ по формуле $(x, y) \longrightarrow (2x, 2y)$. Фактор $H = (\mathbf{C}^2 - 0)/\mathbf{Z}$ по этому действию называется поверхностью Хопфа. Подмножество точек в $\mathbf{C}^2 - 0$, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq |x| + |y| \leq 2$, — компакт, сюръективно отображающийся на H. Следовательно, H — компакт. Можно показать, что топологически H гомеоморфно $S^1 \times S^3$.

Пусть f — некоторая мероморфная функция на H. Мы можем взять ее прообраз и получить мероморфную функцию $f(x, y)$ на $\mathbf{C}^2 - 0$, удовлетворяющую соотношению $f(x, y) = f(2x, 2y)$. По теореме Леви о продолжении f является также мероморфной в $(0, 0)$. Поэтому f можно записать в виде отношения двух степенных рядов g/h.

Ограничивая f на прямую $y=\lambda x$, получаем функцию

$$p(x) = f(x, \lambda x) = g(x, \lambda x)/h(x, \lambda x),$$

которая мероморфна по переменной x при условии, что функция $h(x, \lambda x)$ не равна тождественно нулю. Последнее условие выполнено для всех кроме конечного числа значений λ. Имеем также соотношение $p(x)=p(2x)$, из которого следует, что для коэффициентов в разложении Лорана $p(x) = \sum a_i x^i$ выполнено равенство $a_i = 2^i a_i$; следовательно, $p(x)$ — константа. Таким образом, функция f постоянна вдоль всех прямых $y=\lambda x$. Из этого нетрудно вывести, что f — рациональная функция от x/y.

Во всяком случае, мы убедились, что поверхность H покрывается образами прямых $y=\lambda x$, и каждая мероморфная функция на поверхности H является постоянной вдоль этих кривых. Поэтому H не может быть алгебраической поверхностью.

Следует отметить, что для $n=1$ аналогичная конструкция приводит к эллиптической кривой E_τ с $\tau=(-1/2\pi i)\log 2$.

5. Отображения между алгебраическими многообразиями

В этом разделе рассматриваются различные способы описания отображений между алгебраическими многообразиями. Для того чтобы избежать недоразумений, важно сразу отметить, что мы будем рассматривать функции и отображения, которые не являются всюду определенными. Это не противоречит традиции, поскольку ни у кого нет сомнений, что $w(z)=1/z$ является функцией на комплексной плоскости. Понятие морфизма или регулярного отображения мы будем всегда использовать для всюду определенных отображений и обозначать их непрерывной стрелкой $\longrightarrow$. Пунктирной стрелкой $\dashrightarrow$ будет обозначаться отображение, которое может оказаться не всюду определенным.

5.1. Регулярные функции. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ — замкнутое алгебраическое многообразие. Какие функции должны быть основными на V? Поскольку мы занимаемся алгебраической геометрией, нам следует рассматривать полиномиальные функции на $\mathbf{C}^n$. Существуют два способа перейти от $\mathbf{C}^n$ к V. Можно рассматривать ограничения с $\mathbf{C}^n$ на V полиномиальных функций, а можно — функции на V, которые лишь локально представимы в виде ограничений полиномиальных функций. К счастью, оба способа приводят к одним и тем же функциям, которые называются регулярными функциями на V.

5.2. Рациональные функции. Часто возникает необходимость рассматривать функции, являющиеся отношениями многочленов. Такие функции называются рациональными функциями на $\mathbf{C}^n$. Для подмногообразия $V \subset \mathbf{C}^n$ a priori снова возникают две возможности определения соответствующих функций на V, однако они снова приводят к одному и тому же результату. Ограничение рациональной функции f с $\mathbf{C}^n$ на V будет называться рациональной функцией на V. Для того чтобы это ограничение имело смысл, мы должны потребовать, чтобы ни одна из неприводимых компонент V не содержалась в множестве полюсов f.

Назовем рациональную функцию f регулярной в точке $v \in V$, если существуют многочлены g и h, такие, что $f = g/h$ и $h(v) \neq 0$. Рациональная функция называется регулярной на V, если она регулярна в каждой его точке. Можно показать, что понятие регулярной рациональной функции совпадает с понятием регулярной функции.

5.3. Примеры. (i) Функция x/y является рациональной на $\mathbf{C}^2$, причем эта функция регулярна в точке (x, y) тогда и только тогда, когда $y \neq 0$.

(ii) Пусть $L \subset \mathbf{C}^2$ — прямая, заданная уравнением $x = y$, а функция f — ограничение на L функции x/y. Тогда f — рациональная функция на L. Более того, эта функция является регулярной, поскольку $f \equiv 1$ на L.

(iii) Пусть

$$V = (x^2 - y^3 = 0) \subset \mathbf{C}^2.$$

Обозначим через f ограничение x/y на V. Нетрудно показать, что после доопределения $f(0, 0) = 0$ функция f становится непрерывной на V. Несмотря на это, f не является регулярной в точке (0, 0). Действительно, предположим, что

$$x/y = a(x, y)/b(x, y), \text{ где } b(0, 0) \neq 0.$$

Тогда ограничение $xb(x, y) - ya(x, y)$ на V равно нулю, т. е. этот многочлен делится на $x^2 - y^3$. Многочлен $b(x, y)$ по предположению имеет ненулевой свободный член; следовательно, коэффициент при x в $xb(x, y) - ya(x, y)$ не равен нулю. Значит, этот многочлен не может делиться на $x^2 - y^3$.

Следует отметить, однако, что функция $f^2 = x^2/y^2 = y|V$ совпадает с ограничением на V функции y и, таким образом, является регулярной. Это странное свойство связано с тем, что многообразие V имеет особенность в начале координат, и служит источником многих неудобств. Многообразия, для которых этого не происходит, заслуживают отдельного названия.

5.4. Определение. Пусть $V \subset \mathbf{C}^n$ – алгебраическое многообразие, а v – некоторая его точка. Многообразие V будет называться нормальным в точке v, если каждая ограниченная в некоторой окрестности точки v рациональная функция является регулярной в этой точке. Многообразие V называется нормальным, если оно нормально в каждой точке. В частности, если V является нормальным в v, то рациональная функция будет регулярной в v тогда и только тогда, когда она непрерывна в v.

Теорема Римана о продолжении утверждает, что $\mathbf{C}$—нормальное многообразие. Из этой теоремы легко следует, что все гладкие точки алгебраических многообразий являются нормальными в любой размерности.

5.5. Предложение. *Пусть C—алгебраическая кривая. Тогда C—нормальное многообразие в том и только том случае, если C—гладкая кривая.*

Доказательство. Предположим, что кривая C нормальна. Пусть $p: \bar{C} \longrightarrow C$—разрешение ее особенностей (см. п. 3.12). Для точки $c \in C$ положим $p^{-1}(c) = \{c_1, \ldots, c_k\}$. Пусть f – рациональная функция на $\bar{C}$, имеющая нуль кратности 1 в точке

c_1 и принимающая ненулевые конечные значения в остальных точках $c_2, \ldots, c_k$. Нетрудно показать, что $f \circ p^{-1}$ является рациональной функцией на C, которая ограничена в окрестности точки c и, следовательно, является регулярной в c. Таким образом, $p^{-1}(c) = \{c_1\}$, и отображение $f \circ p^{-1}$ переводит некоторую окрестность точки c в окрестность начала координат в $\mathbb{C}$. Следовательно, $c \in C$ – гладкая точка.

5.6. Следствие. *Пусть V—нормальное многообразие. Тогда размерность множества особых точек многообразия V не превосходит* $\dim V - 2$.

Идея доказательства. Можно расматривать n-мерное многообразие V в виде $(n-1)$-мерного семейства кривых. Если $\dim \operatorname{Sing} V = n-1$, то каждая из этих кривых является особой. В доказательстве предложения 5.5 можно считать, что все рассматриваемые объекты зависят от $n-1$ параметров и аналогичным образом получить противоречие.

5.7. Пример. Пусть отображение $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^7$ задано формулой

$$(x, y) \longrightarrow (x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3).$$

Положим $V = f(\mathbb{C}^2)$. Тогда многообразие V является гладким вне начала координат, но оно не будет нормальным, поскольку $x \circ f^{-1}$ не является регулярным отображением.

Однако существует следующий важный случай, в котором справедливо обратное к предложению 5.6 утверждение (к сожалению, я не знаю простого доказательства этого факта):

5.8. Теорема. *Пусть $F = (f = 0) \subset \mathbb{C}^n$—некоторая гиперповерхность. Тогда F является нормальным многообразием в том и только том случае, если* $\dim \operatorname{Sing} F \le \dim F - 2$.

Существует очень полезная теорема о продолжении, которая справедлива для нормальных многообразий.

5.9. Теорема Хартогса. *Пусть V—нормальное многообразие а $W \subset V$—некоторое его подмногообразие, такое, что*

$$\dim W \le \dim V - 2.$$

Пусть f — регулярная функция на $V - W$. Тогда f продолжается до регулярной функции на V.

Доказательство. Для простоты предположим, что многообразие W состоит из единственной точки w. Пусть $V \subset \mathbf{C}^n$, а B — маленький шар вокруг w. Если $v \in V \cap B$, то с помощью многократных пересечений с гиперплоскостью мы можем получить алгебраическую кривую $C \subset V$, проходящую через данную точку v и не содержащую w. Обозначим через D пересечение $B \cap C$.

Функция $|f|$ ограничена на компактном множестве $\partial B \cap V$ некоторой константой M, причем ограннчение $f|D$ является голоморфной функцией. Следовательно, согласно прннципу максимума,

$$|f| \le \max\{\, |f(z)| : z \in \partial D \,\} \le M.$$

Таким образом, модуль $|f|$ ограничен в окрестности w, и, следовательно, f является регулярной в точке w.

5.10. Определение. Если $W \subset \mathbf{CP}^n$ — произвольное проективное алгебраическое многообразие, то оно покрывается картами $V_i = W \cap U_i$. Используя это покрытие, можно определить понятия регулярной и рациональной функций, а также понятие нормальности, в том числе и для многообразия W.

5.11. Предложенне. *Пусть V — неприводимое проективное многообразие, а f — регулярная на V функция; тогда f постоянна.*

Доказательство. Рассмотрим только случай гладкого многообразия V. Тогда V — компактное комплексное многообразне, а f — голоморфная на V функция. Из компактности V следует, что $|f|$ достигает своего максимума; следовательно, согласно принципу макснмума, f — константа.

5.12. Первое определенне отображенний. Отображение из многообразия V в $\mathbf{CP}^n$ следует задавать с помощью координатных функцнй. Выберем рациональные функцин $f_1, \ldots, f_n$ на V и рассмотрнм отображенне $F\colon V \dashrightarrow \mathbf{CP}^n$, полагая

$$F\colon v \longrightarrow (f_1(v):\ldots:f_n(v):1).$$

Такой подход использовался в следствии 3.9. Безусловно, отображение F определено для тех точек v, для которых определена каждая из функций f_i. Однако отображение F можно также определить и в некоторых других точках. Заметим, что F определено в точке v тогда и только тогда, когда существует регулярная в точке v функция g, такая, что все функции $f_i g$ регулярны в точке v и значения $(f_1 g: \ldots : f_n g : g)$ не обращаются тождественно в нуль. Вместо выражения «f определена в v» мы будем говорить «f регулярна в v».

Если h — рациональная функция на $\mathbf{CP}^n$ и образ $F(V)$ не содержится в множестве ее полюсов, то F^*h — рациональная функция на V. Если отображение F регулярно в v, а функция h регулярна в $F(v)$, то $F^*(h)$ регулярна в точке v.

Следующие результаты показывают некоторые замечательные топологические свойства регулярных отображений.

5.13. Теорема (формула размерности). *Пусть $f : V \longrightarrow W$ — регулярное отображение. Тогда для каждой точки $w \in W$ ее прообраз $f^{-1}(w)$ либо пуст, либо*

$$\dim f^{-1}(w) \geq \dim V - \dim W.$$

Более того, для достаточно общей точки $w \in W$ это неравенство превращается в равенство.

Доказательство. Для простоты предположим, что точка $w \in W$ является гладкой. Если $z_1, \ldots, z_k$ — локальные координаты в точке w, то ее прообраз $f^{-1}(w)$ задается уравнениями $f^*z_1 = \ldots = f^*z_k = 0$. Таким образом, требуемое неравенство получается из теоремы 2.27.

Если точка $v \in V$ является достаточно общей, то ее малая окрестность диффеоморфна произведению некоторой окрестности ее образа $f(v) \in W$ и некоторой окрестности точки v в слое $f^{-1}(f(v))$. Это доказывает последнее утверждение.

С помощью несложных дополнительных рассуждений можно получить такое

5.14. Следствие. *Пусть $f : V \longrightarrow W$ — регулярное отображение. Тогда соответствие $w \longrightarrow \dim f^{-1}(w)$ определяет полуне-*

прерывную сверху функцию (в топологии Зарисского) на многообразии W.

Хотя предложенный в п. 5.12 способ определения отображений с точки зрения теории является наиболее простым, однако он наименее удобен в практической работе.

5.15. Второе определение отображений. Это определение опирается на лучшее понимание того, что такое проективное пространство $\mathbf{CP}^n$. Точка в проективном пространстве задается своими однородными координатами, которые определены неоднозначно. Для того чтобы добиться однозначности, зададим точку в $\mathbf{CP}^n$ с помощью прямой в $\mathbf{C}^{n+1}$. Тогда отображение $f : V \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ будет сопоставлять каждой точке $v \in V$ некоторую прямую в $\mathbf{C}^{n+1}$. Таким образом, наиболее удобно задавать это отображение с помощью подмножества

$$L \subset V \times \mathbf{C}^{n+1},$$

такого, что для каждой точки $v \in V$ множество

$$L \cap (\{v\} \times \mathbf{C}^{n+1})$$

– прямая L_v, алгебраически изменяющаяся в зависимости от точки v. Верно обратное: каждое такое подмножество L определяет некоторое отображение в $\mathbf{CP}^n$.

Более удобно рассматривать следующую двойственную конструкцию: вместо семейства $L_v \subset \mathbf{C}^{n+1}$ мы возьмем отображение $(\mathbf{C}^{n+1})^* \longrightarrow L_v^*$. В этом случае множество L_v^* представляет собой изменяющееся алгебраически над V семейство факторпрямых. Отождествление $(\mathbf{C}^{n+1})^* \cong \mathbf{C}^{n+1}$ задает отображение

$$q : V \times \mathbf{C}^{n+1} \longrightarrow L^*,$$

являющееся линейным на каждом слое $\{v\} \times \mathbf{C}^{n+1}$.

Если $e \in \mathbf{C}^{n+1}$, то соответствие

$$v \longrightarrow (v,\ e) \quad \longrightarrow q(v,\ e)$$

определяет отображение из V в L^*, обозначаемое через q_e. Очевидно, что это отображение является регулярным и $q_e(v) \in L_v^*$. Такое отображение называется сечением множества L^*. Если $e_0,\dots,e_n$ – базис пространства $\mathbf{C}^{n+1}$, то обо–

значим через $q_0,\dots,q_n$ соответствующие сечения. Поскольку для каждой точки v отображение $q:\{v\}\times \mathbf{C}^{n+1}\longrightarrow L_v^*$ является сюръективным, в любой точке $v\in V$ значение по крайней мере одного из сечений q_i не равно нулю.

Обратно, если мы выберем $n+1$ сечений множества L^*, таких, что в каждой точке по крайней мере одно из этих сечений $s_0,\dots,s_n$ не обращается в нуль, то мы можем определить отображение $s: V\times \mathbf{C}^{n+1}\longrightarrow L^*$ формулой

$$s(v,\sum a_i e_i)=\sum a_i s_i(v).$$

Таким образом, эти сечения определяют отображение $V\longrightarrow \mathbf{CP}^n$.

Теперь мы можем дать общее определение. Пусть L – алгебраически изменяющееся семейство прямых над многообразием V, а $s_0,\dots,s_n$ – сечения L. Тогда эти сечения определяют отображение многообразия V в $\mathbf{CP}^n$. Это отображение определено в точке v, если одно из значений $s_i(v)$ отлично от нуля.

Другая точка зрения на это определение состоит в следующем. Значения $s_i(v)$ принадлежат одномерному над $\mathbf{C}$ векторному пространству L_v; поэтому набор

$$(s_0(v),\dots,s_n(v))\in \mathbf{C}^{n+1}$$

определен с точностью до умножения на константу, т. е. определяет точку в $\mathbf{CP}^n$.

5.16. Третье определение отображений. Рассмотрим еще одну стандартную точку зрения на отображения — задание их с помощью графиков. Пусть $F: V\longrightarrow W$ — отображение, определенное в каждой точке многообразия V. Нетрудно увидеть, что его график $\Gamma(F)$ является замкнутым алгебраическим подмногообразием в $V\times W$. В общем случае график отображения не является замкнутым подмножеством, и бывает очень полезным изучать его замыкание. Согласно теореме 2.22, это замыкание является алгебраическим подмногообразием в $V\times W$.

Пусть теперь $\Gamma\subset V\times W$ — некоторое замкнутое подмногообразие. Как выяснить, является ли Γ графиком некоторого отображения? Обозначим через p (соответственно через q)

проекцию $V \times W$ на V (соответственно на W). Если Γ — график некоторого отображения F, то $F(v) = q(p^{-1}(v))$ в точках v, где F определено. Это означает, что для почти всех точек $v \in V$ их прообраз $p^{-1}(v)$ состоит из одной единственной точки. Обратно, предположим, что для подмногообразия Γ отображение $p : \Gamma \longrightarrow V$ сюръективно и для почти всех точек является взаимно однозначным. Тогда нетрудно показать, что Γ — график некоторого алгебраического отображения.

5.17. Теорема Зарисского о связности. *Пусть $p : \Gamma \longrightarrow V$ — собственное регулярное отображение между неприводимыми алгебраическими многообразиями. Предположим, что*

$$p^{-1} : V \dashrightarrow \Gamma$$

— рациональное отображение (т. е. график некоторого отображения $V \dashrightarrow W$) и V является нормальным многообразием. Тогда для каждой точки $v \in V$ ее прообраз $p^{-1}(v)$ связен.

Доказательство. Рассмотрим только случай гладкого многообразия V. Если отображение p^{-1} регулярно в точке v, то множество $p^{-1}(v)$ состоит из единственной точки. Таким образом, мы должны рассмотреть множество $Z \subset V$, состоящее из точек, в которых отображение p^{-1} не является регулярным. Согласно предложению 2.21, множество $p^{-1}(V - Z)$ является плотным в Γ. Пусть размерность V равна n. Рассмотрим точку $z \in Z$ и маленькую сферу $S_\varepsilon \subset V$ размерности $2n - 1$ вокруг z. Вещественная размерность $S_\varepsilon \cap Z$ на единицу меньше вещественной размерности многообразия Z и, следовательно, не превосходит $2n - 3$. Таким образом, $S_\varepsilon \cap (V - Z)$ — связное множество. Поскольку $p^{-1}(v)$ является пределом прообразов $p^{-1}(S_\varepsilon \cap (V - Z))$ связных множеств при $\varepsilon \longrightarrow 0$, множество $p^{-1}(v)$ также является связным.

Если многообразие V не является гладким, то топология V более сложна и трудная часть теоремы состоит в доказательстве связности $S_\varepsilon \cap (V - Z)$.

5.18. Следствие. *В упомянутых выше обозначениях отображение p^{-1} является регулярным в точке v тогда и только тог-*

да, когда $p^{-1}(v)$ состоит из единственной точки.

Доказательство. Необходимость сформулированного условия очевидна. Обратно, предположим, что $p^{-1}(v)$ состоит из единственной точки. Тогда, согласно следствию 5.14, $\dim p^{-1}(u) = 0$ для любой точки u в окрестности точки v. Таким образом, из теоремы 5.17 следует, что отображение p^{-1} является непрерывным однозначным отображением в некоторой окрестности точки v. Следовательно, p^{-1} регулярно в v.

5.19. Следствие. *Пусть V и W — проективные многообразия. Предположим, что V нормально, а $f : V \dashrightarrow W$ — некоторое отображение. Тогда существует подмножество $Z \subset V$, такое, что $\dim Z \le \dim V - 2$ и f регулярно на $V - Z$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma \subset V \times W$ — замыкание графика. Тогда $f = q \circ p^{-1}$, и наша задача состоит в нахождении подмножества Z, такого, что p^{-1} регулярно на $V-Z$. Положим $Z = \{v \in V : \ p^{-1}(v) \ - \text{не точка}\}$. Очевидно, что Z является замкнутым подмножеством; можно даже доказать, что оно алгебраично. Тогда $E = p^{-1}(Z)$ — подмногообразие в Γ.

Поскольку множество $p^{-1}(v)$ связно, оно либо является точкой, либо имеет размерность не меньше 1. Следовательно, $\dim E \ge \dim Z + 1$. Так как E — собственное подмногообразие в Γ, $\dim E \le \dim \Gamma - 1$. Это дает требуемое неравенство.

5.20. Замечание. Пусть V и W — комплексные многообразия. В этом случае предыдущие три определения отображений также имеют смысл. Вместо многочленов следует рассматривать степенные ряды, а вместо рациональных функций — мероморфные функции. Следуя этой схеме, для алгебраических многообразий мы получим уже два различных понятия отображений — алгебраическое и аналитическое. Однако для проективных многообразий оба этих понятия совпадают.

5.21. Теорема. *Пусть V и W — проективные алгебраические многообразия. Тогда любое мероморфное отображение из V в W является алгебраическим. В частности, любая мероморфная функция на V является рациональной.*

Доказательство. Пусть $\Gamma \subset V \times W$ – замыкание графика мероморфного отображения. Можно доказать, что этот график является замкнутым аналитическим подмногообразием в

$$V \times W \subset \mathbb{C}P^{(n+1)(m+1)-1}.$$

По теореме Чжоу 2.11 Г является алгебраическим подмногообразием. Следовательно, как было отмечено в п. 5.16, рассматриваемое отображение алгебраично.

Последнее утверждение теоремы следует из того, что мероморфные функции являются отображениями из V в $\mathbb{C}P^1$.

5.22. Замечание. Четвертый, очень необычный, подход к определению отображений будет дан в следующей главе.

Следующий результат демонстрирует некоторое полезное и необычное свойство алгебраических отображений.

5.23. Теорема о жесткости. *Пусть U, V и W — алгебраические (или комплексные) многообразия. Предположим, что V проективно (компактно), а U связно. Пусть*

$$f : U \times V \longrightarrow W$$

– регулярное голоморфное отображение. Предположим, что для некоторой точки $u_0 \in U$ образ $f(\{u_0\} \times V)$ — точка. Тогда $f(\{u\} \times V)$ является точкой для любой $u \in U$.

Доказательство. Пусть Z – подмножество в U, состоящее из тех точек u, для которых $f(\{u\} \times V)$ является точкой. Очевидно, что Z – замкнутое множество. Таким образом, для доказательства равенства $Z = U$ достаточно показать, что Z является открытым. Пусть $u \in Z$, а u' – некоторая точка в малой окрестности u. Поскольку V – компакт, образ $f(\{u'\} \times V)$ должен быть близок к образу $f(\{u\} \times V)$, который является точкой $w \in W$. Следовательно, $f(\{u'\} \times V)$ лежит в некоторой окрестности w. Таким образом, локальные координатные функции в окрестности w определяют в композиции с f регулярные функции на $\{u'\} \times V$. Согласно предложению 5.11, эти функции должны быть константами. Следовательно, $f(\{u'\} \times V)$ также является точкой.

Одно удивительно следствие из этой теоремы будет дано после определения.

5.24. Определение. Комплексной группой Ли называется комплексное многообразие, имеющее структуру группы, такую, что групповые операции в ней задаются голоморфными отображениями.

5.25. Предложение. *Связная компактная комплексная группа Ли является коммутативной.*

Доказательство. Пусть G – группа. Рассмотрим отображение $f: G \times G \longrightarrow G$, заданное формулой $f(a, b) = b^{-1}ab$. Для нейтрального элемента e группы G имеем $f(\{e\} \times G) = \{e\}$. Следовательно, из теоремы 5.23 вытекает, что $f(\{a\} \times G)$ является точкой. Таким образом, $b^{-1}ab = e^{-1}ae = a$, т. е. $ab = ba$.

6. Топология алгебраических многообразий

В этой главе мы обсудим некоторые простые, но очень важные топологические свойства алгебраических многообразий. Эти свойства естественным путем подведут к программе Мори.

6.1. Основное техническое утверждение. Как топологическое пространство алгебраическое многообразие допускает триангуляцию. Если $X \subset Y$—замкнутое подмногообразие, то существует такая триангуляция многообразия Y, что многообразие X является объединением некоторых ее симплексов. Следовательно, k-мерному подмногообразию $X \subset Y$ соответствует класс когомологий $[X] \in H_{2k}(Y, \mathbf{Z})$.

6.2. Пример. Пусть f—мероморфная функция на Y с подмногообразиями нулей Z_0 и полюсов Z_∞ в Y. Выберем путь, соединяющий точки 0 и ∞ на римановой сфере $\mathbf{CP}^1$. Границей его прообраза относительно f будет $Z_0 - Z_\infty$. Следовательно, $[Z_0] = [Z_\infty]$.

Например, если $Y = \mathbf{CP}^n$, а g—однородный многочлен степени k, определяющий гиперповерхность G, то возьмем в качестве f функцию g/x_0^k. Тогда получаем, что $[G] = k[H]$, где H — гиперплоскость.

6.3. Фундаментальное свойство. *Комплексное многообразие имеет ориентацию.*

Доказательство. Комплексное многообразие локально устроено как $\mathbf{C}^n$. Поэтому, нам достаточно доказать, что пространство $\mathbf{C}^n$ имеет естественную ориентацию, если его рассматривать как $2n$-мерное вещественное пространство.

Выберем в $\mathbf{C}^n$ некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$. Тогда векторы $e_1, \ldots, e_n$, $ie_1, \ldots, ie_n$ образуют вещественный базис в $\mathbf{C}^n$ и, следовательно, определяют его ориентацию. Что произойдет, если мы выберем другой базис? Обозначим через $A + iB \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ матрицу перехода к новому базису (матрицы A и B имеют вещественные коэффициенты). Тогда матрица перехода для соответствующего вещественного базиса имеет вид

$$\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

Осталось доказать, что определитель этой матрицы положителен.

Первое доказательство.

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A - iB & 0 \\ 0 & A + iB \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = |\det(A + iB)|^2 > 0.$$

Второе доказательство. Функция

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}$$

является непрерывной, на элементах из $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ нигде не обращается в нуль и равна 1 на нейтральном элементе. Поскольку $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ — связная группа, эта функция является положительной.

6.4. Следствие. Положительность индекса пересечения. *Пусть Y — комплексное многообразие, а U и V — его трансверсально пересекающиеся подмногообразия. Пусть A_i — компоненты пересечения $U \cap V$. Из топологии хорошо известно, что $[U] \cap [V] = \sum \varepsilon_i [A_i]$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ — числа, зависящие от ориентации U и V вдоль A_i. Поскольку все эти многообразия имеют каноническую ориентацию, $[U] \cap [V] = \sum [A_i]$.*

6.5. Следствие. *Пусть Y — проективное многообразие, а $X^k \subset Y$ — его замкнутое подмногообразие. Тогда класс*

$$[X] \in H_{2k}(X, \mathbf{Q})$$

никогда не равен нулю.

Доказательство. Погрузим многообразие Y в проективное пространство $\mathbf{CP}^n$. Достаточно доказать, что класс

$$[X] \in H_{2k}(\mathbf{CP}^n, \mathbf{Q})$$

не равен нулю. Пусть $x \in X$ — общая точка и L^{n-k} — общая $(n-k)$-мерная плоскость, проходящая через x. Тогда пересечение $X \cap L$ — дискретное множество точек $x = x_1, x_2, \ldots, x_m$ и потому

$$[X] \cap [L] = [x_1] + \ldots + [x_m] = m\,[\text{точка}] \in H_0(\mathbf{CP}^n, \mathbf{Q}) \cong \mathbf{Q}.$$

Таким образом, $[X] \cap [L] \neq 0$, откуда следует, что $[X] \neq 0$.

6.6. Замечания. (i) Те же рассуждения показывают, что для любого набора подмногообразий $X_i^k \subset Y$ и любых положительных коэффициентов a_i выполнено соотношение $\sum a_i [X_i] \neq 0$.

(ii) Для непроективных многообразий доказанное следствие может оказаться неверным (см. 12.11).

6.7. Определение. Для гладкого проективного многообразия X обозначим через $NE(X) \subset H_2(X, \mathbf{R})$ множество положительных линейных комбинаций классов гомологий кривых на X. Очевидно, что это множество является подконусом в векторном пространстве $H_2(X, \mathbf{R})$. Согласно замечанию 6.6(i), 0 не принадлежит $NE(X)$, следовательно, конус $NE(X)$ не содержит прямых. Этот конус называется конусом кривых многообразия X. Как правило, бывает легче работать с его замыканием $\overline{NE}(X)$, которое называется замкнутым конусом кривых (обозначение $NE(X)$ не совсем удачное, но уже стало стандартным).

Из критерия 7.15 получаем, что конус $\overline{NE}(X)$ также не содержит прямых.

6.8. Определение. (i) Пусть $V \subset \mathbf{R}^n$—выпуклый конус, а $W \subset V$—некоторый его подконус. Будем называть W экстремальным, если из того, что u, $v \in V$, $u+v \in W$, следует, что u, $v \in W$. Геометрически это означает, что конус V лежит по одну сторону от W.

(ii) Одномерный подконус называется лучом.

(iii) Легко доказать, что если замкнутый выпуклый конус V не содержит прямых, то он является выпуклой оболочкой своих экстремальных лучей. Назовем конус V локально конечно порожденным в точке $v \in V$, если только конечное число экстремальных лучей пересекает достаточно малую окрестность v. Это понятие содержательно только для точек v, принадлежащих границе V.

Теперь мы готовы дать набросок четвертого подхода к отображениям между проективными многообразиями. Хотя этот подход идейно достаточно прямолинеен, он впервые возник лишь в диссертации Хиронаки и впервые был успешно использован Мори.

6.9. Определение. Пусть X и Y—проективные многообразия, а $f: X \longrightarrow Y$—некоторое отображение между ними. Обозначим через $NE(f)$ или $NE(X/Y)$ подконус в $NE(X)$, порожденный классами тех кривых $C \subset X$, для которых $f(C)$—точка. Я буду называть его конусом ядра отображения f. Замыкание этого конуса обозначим через $\overline{NE}(f)$.

6.10. Предложение (обозначения см. в определении 6.9). (i) *Если C—некоторая кривая, то утверждение, что $f(C)$—точка, равносильно включению $[C] \in \overline{NE}(f)$.*

(ii) *Конус $\overline{NE}(f)$ экстремален.*

Доказательство. (i) Часть «⇒» следует из определения. Предположим теперь, что $[C] \in \overline{NE}(f)$. Тогда $[C] = \sum a_i [C_i]$, где $f(C_i)$ — точка. Следовательно,

$$[f(C)] = \sum a_i [f(C_i)] = 0 \in H_2(Y, \mathbf{R}).$$

Согласно следствию 6.5, $f(C)$ не может быть кривой. Значит, $f(C)$ — точка.

(ii) Пусть элементы

$$u = \sum a_i [C_i], \quad v = \sum b_j [D_j]$$

удовлетворяют условию $u + v \in NE(f)$. Тогда аналогично предыдущим рассуждениям мы получаем, что

$$\sum a_i [f(C_i)] + \sum b_j [f(D_j)] = 0.$$

Следовательно, $f(C_i)$ и $f(D_j)$ являются точками, т.е. u, $v \in NE(f)$.

Теперь мы пришли к исходному пункту программы Мори.

6.11. Основная идея программы Мори. *Пусть X — проективное многообразие, а $f: X \longrightarrow Y$ — его отображение на некоторое нормальное проективное многообразие Y. Предположим, что f имеет только связные слои. Тогда отображение f однозначно определено его конусом ядра $NE(f)$.*

Доказательство. Рецепт восстановления f состоит в следующем. Если x, $y \in X$, то $f(x) = f(y)$ тогда и только тогда, когда существует цепочка кривых $\{C_i\}$, соединяющая точки x и y, для которой $[C_i] \in NE(f)$.

Если $f(x) = f(y)$, то такая цепочка из кривых может быть найдена, поскольку $f^{-1}(f(x))$ — связное множество. С другой стороны, если такая цепочка найдена, то $f(\bigcup C_i) = \bigcup f(C_i)$ — конечное множество точек (см. предложение 6.10(i)). Поскольку $\bigcup C_i$ — связное множество, оно должно быть точкой. Таким образом, $f(x) = f(y)$.

Я хочу особо подчеркнуть необходимость условия проективности образа f: без этого предположения утверждения 6.10(i) и 6.11 не верны.

6.12. Определение. Пусть $V \subset NE(X)$ — замкнутый подконус. Будем говорить, что V может быть стянут, если существует нормальное многообразие Y и сюръективное отображение $f: X \longrightarrow Y$, такое, что f имеет связные слои и $V = NE(f)$.

Это отображение f, которое, согласно п. 6.11, является единственным, будет называться стягиванием V.

6.13. Замечание. Если $g: X \longrightarrow Z$ — произвольное отображение, то с интуитивной точки зрения достаточно ясно, что это отображение может быть разложено в композицию отображений $f: X \longrightarrow Y$ и $h: Y \longrightarrow Z$, где f имеет связные слои, Y — нормальное многообразие, а слои h состоят из конечного числа точек, причем многообразие Y проективно, если проективно многообразие Z. Это разложение называется факторизацией Штейна.

6.14. Вопросы. Их, конечно, очень много. Как можно описать конус $NE(X)$? Какие подконусы соответствуют отображениям? Каким образом можно выяснить свойства отображения f исходя из свойств конуса $NE(f)$?

В общем случае известно очень мало. В некоторых случаях, однако, можно получить прекрасный ответ. Он будет сердцевиной программы Мори.

7. Векторные расслоения и каноническое расслоение

Мимоходом в п. 5.15 мы уже рассматривали линейные расслоения. Поскольку они играют важную роль в описании отображений между алгебраическими многообразиями, мы их исследуем более подробно.

7.1. Определение. Суть понятия векторного расслоения заключается в рассмотрении алгебраически изменяющегося семейства векторных пространств. Более точным является следующее определение:

Пусть X — алгебраическое многообразие. Векторным расслоением над X называется алгебраическое многообразие V с регулярным отображением $p: V \longrightarrow X$, обладающее следующим свойством: для любой точки $x \in X$ существует открытое алгебраическое подмножество U, содержащее x, и алгебраический изоморфизм $g: U \times \mathbf{C}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$, такие, что $p \circ g(u, e) = u$ для любых $u \in U$, $e \in \mathbf{C}^n$. Более того, если

$$g_i : U_i \times \mathbf{C}^n \longrightarrow p^{-1}(U_i) \quad (i = 1, 2)$$

– любые два таких отображения и точка x принадлежит пересечению $U_1 \cap U_2$, то две структуры векторного пространства $g_i : \{x\} \times \mathbf{C}^n \longrightarrow p^{-1}(x)$, индуцированные на слое $p^{-1}(x)$, совпадают.

Другой, несколько отличающийся от приведенного, способ определения векторного расслоения состоит в том, чтобы представлять себе многообразие V склеенным из открытых множеств вида $U_i \times \mathbf{C}^n$ посредством функций перехода

$$g_{ij} = g_i \circ g_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbf{C}^n \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbf{C}^n.$$

Это представление эквивалентно тому, что $g_i \circ g_j^{-1}$ является функцией на $U_i \cap U_j$ со значениями в группе невырожденных матриц. Число n называется рангом векторного расслоения.

Аналогичным способом можно определить аналитические векторные расслоения. Один из вариантов теоремы Чжоу утверждает, что аналитическое векторное расслоение на проективном многообразии является алгебраическим.

7.2. Определение. Обычные операции над векторными пространствами могут применяться послойно к векторным расслоениям. Таким образом, для алгебраических векторных расслоений можно определить понятия прямой суммы, тензорного произведения и внешней степени расслоений.

Если $p_i : V_i \longrightarrow X$ – векторные расслоения на многообразии X, то гомоморфизмом этих векторных расслоений называется регулярное отображение

$$f : V_1 \longrightarrow V_2,$$

такое, что для каждого $v_1 \in V_1$ выполнено условие

$$p_1(v_1) = p_2(f(v_1))$$

и для каждой точки $x \in X$ отображение $f : p_1^{-1}(x) \longrightarrow p_2^{-1}(x)$ является линейным.

Последовательность гомоморфизмов векторных расслоений является точной, если для каждой точки $x \in X$ точна соответствующая последовательность отображений векторных пространств в слое над x. Если

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

– точная последовательность векторных расслоений, то, переходя к их старшим внешним степеням, получаем изоморфизм

$$\det V_2 \cong \det V_1 \otimes \det V_3.$$

7.3. Определение. Пусть $p: V \longrightarrow X$ — некоторое алгебраическое векторное расслоение, а $f: Y \longrightarrow X$ — некоторое регулярное отображение. Тогда определим векторное расслоение $f^*p: f^*V \longrightarrow Y$ следующим образом. Если расслоение V задано склейкой карт $U_i \times \mathbf{C}^n$ с помощью функций перехода g_{ij}, то расслоение f^*V задается склейкой карт $f^{-1}(U_i) \times \mathbf{C}^n$ с помощью функций перехода $g_{ij} \circ f$. В частности, если f — вложение, то f^*V называется ограничением расслоения V на подмногообразие Y и обозначается через $V|Y$.

7.4. Определение. Пусть $p: V \longrightarrow X$ — некоторое алгебраическое векторное расслоение. Сечение расслоения V — это регулярное отображение $s: X \longrightarrow V$, такое, что $p \circ s = \mathrm{id}$. Эти сечения называют обычно глобальными сечениями расслоения V; они образуют векторное пространство, обозначаемое через $\Gamma(X, V)$, относительно операции поточечного сложения и умножения на скаляр. Если сечение определено лишь на некотором открытом подмножестве $U \subset X$, то оно называется локальным сечением.

Рациональным сечением расслоения V называется рациональное отображение $t: X \dashrightarrow V$, такое, что $p \circ t = \mathrm{id}$. Если V – алгебраическое векторное расслоение, то оно всегда имеет рациональные сечения. Для того чтобы это доказать, выберем некоторое открытое подмножество U_i и некоторый элемент $e \in \mathbf{C}^n$ и положим $t(u) = g_i(u, e) \in V$. Отображение t регулярно на подмножестве U_i, а на открытом подмножестве U_j оно задается композицией $u \longrightarrow g_{ji} \circ g_i(u)$, которая является рациональной функцией. Несколько пренебрегая строгостью терминологии, я часто буду называть рациональное сечение мероморфным.

Такое простое следствие 5.9 в дальнейшем нам будет очень полезно:

7.5. Предложение. *Пусть X — нормальное многообразие, а Y — некоторое его подмногообразие, причем* $\dim Y \leq \dim X - 2$. *Тогда для любого векторного расслоения V на многообразии X любое сечение s его ограничения $V \mid X - Y$ продолжается до некоторого сечения $\bar{s}$ всего расслоения V.*

Доказательство. Если сечение $\bar{s}$ существует, то оно, очевидно, единственно. Таким образом, проблема продолжения сечения s на многообразие X является локальной задачей. Пусть $x \in U \subset X$, где U — некоторая малая окрестность точки x, такая, что ограничение $V \mid U$ изоморфно прямому произведению $U \times \mathbf{C}^n$. Тогда ограничению сечения $s \mid U - Y$ соответствует набор из n регулярных функций на множестве $U - Y$. Согласно теореме 5.9, все эти функции продолжаются до регулярных функций на U, тем самым определяя сечение

$$\bar{s} \mid U : U \longrightarrow U \times \mathbf{C}^n \cong V \mid U .$$

Это доказывает предложение.

7.6. Примеры. (i) Для любого натурального числа n существует тривиальное расслоение $X \times \mathbf{C}^n$.

(ii) Мы уже рассматривали этот пример в связи с проективным пространством $\mathbf{CP}^n$. Каждая точка проективного пространства соответствует некоторой прямой в $\mathbf{C}^{n+1}$, что дает некоторое линейное подрасслоение $L \subset \mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^{n+1}$, которое обозначается через $\mathcal{O}(-1)$. Двойственное к этому расслоению расслоение, являющееся фактором $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^{n+1}$, обозначается через $\mathcal{O}(1)$, а его k-я тензорная степень — через $\mathcal{O}(k)$. Позже в теореме 7.17 мы убедимся, что расслоения $\mathcal{O}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, дают все множество линейных расслоений на $\mathbf{CP}^n$.

(iii) Если $f : X \longrightarrow \mathbf{CP}^n$ — некоторое регулярное отображение, то $f^*\mathcal{O}(1)$ — линейное расслоение на многообразии X.

Как мы видели в п. 5.15, это линейиое расслоение вместе с $n+1$ его сечениеми однозначно определяет отображение f. Ввиду важности отображений многообразий в проективные пространства, нас будет интересовать вопрос, представимо ли некоторое расслоение на многообразии X в виде $f^*\mathcal{O}(1)$ для подходящего отображения f.

(iv) Предположим, что многообразие X представлено в виде объединения конечного числа карт, $X = U_1 \cup \ldots \cup U_n$, а H — некоторое замкнутое подмногообразие в X, такое, что на каждой карте U_i существует регулярная функция f_i, для которой $H \cap U_i = (f_i = 0)$. Кроме того, предположим, что функции f_i имеют простые нули вдоль каждой из компонент многообразия $H \cap U_i$. Если многообразие X гладко и $\dim H = \dim X - 1$, то эти условия автоматически выполняются (см. замечание 2.28(i)). Мы построим линейное расслоение $\mathcal{O}(H)$ на многообразии X и некоторое его сечение

$$s : X \longrightarrow \mathcal{O}(H),$$

такое, что $H = (s = 0)$. Нам будет удобно ввести дополнительную карту $U_0 = X - H$ и выбрать на ней функцию $f_0 \equiv 1$. Тогда расслоение $\mathcal{O}(H)$ задается функциями перехода

$$g_{ij} = U_i \times \mathbf{C} \longrightarrow U_j \times \mathbf{C}; \ \ g_{ij}(x, z) = \left[x, \frac{f_j(x)}{f(x)} z\right].$$

Поскольку на пересечении $U_i \cap U_j$ обе функции f_i и f_j имеют в качестве нулей множество $H \cap U_i \cap U_j$, функции g_{ij} определяют линейное расслоение $\mathcal{O}(H)$. Для того чтобы получить требуемое сечение s, выберем над открытым множеством U_0 сечение s: $x \longmapsto (x, 1)$. Тогда над открытыми множествами U_i это сечение приобретает следующий вид:

$$s : x \longmapsto g_{0i}(x, 1) = (x, f_i(x)).$$

Очевидно, что это сечение регулярно и $H = (s = 0)$.

Отметим, что в случае, когда $X = \mathbf{CP}^n$ и H — гиперплоскость, $\mathcal{O}(H) \cong \mathcal{O}(1)$.

(v) **Касательное расслоение.** Пусть $V \subset \mathbf{C}^n$ — гладкое подмногообразие размерности k. Тогда для каждой точки $x \in V$ существует k-мерная касательная плоскость к многообразию V

в точке x. Если мы сдвинем эту плоскость на вектор $-x$, то получим k-мерное векторное подпространство в $\mathbf{C}^n$. Рассматривая произвольные точки $x \in V$, получаем таким способом некоторое подрасслоение ранга k в тривиальном расслоении $V \times \mathbf{C}^n$, которое называется касательным расслоением многообразия V и обозначается через T_V. Это расслоение имеет также внутреннее описание. Касательная k-мерная плоскость в точке x является векторным пространством дифференцирований голоморфных функций в окрестности точки x. Если функции z_i образуют локальную систему координат в этой окрестности, то эта k-мерная плоскость состоит из операторов вида $\sum a_i \, \partial/\partial z_i$. Таким образом, касательное расслоение T_V не зависит от вложения многообразия V.

Если $W \subset \mathbf{CP}^n$ — гладкое многообразие, то оно может быть покрыто аффиниыми кусками $V_i = W \cap U_i$ и касательные расслоения T_{V_i}, естественным образом склеиваясь, дают касательное расслоение T_W на многообразии W. Локальные сечения этого расслоения имеют вид $\sum f_i(z)\partial/\partial z_i$.

Двойственное к касательному расслоению T_W обозначается через Ω_W^1; его локальными сечениями являются 1-формы вида $\sum f_i(z)dz_i$. Особый интерес представляет собой старшая внешняя степень этого расслоения $\Omega_W^k = \det \Omega_W^1 = \Lambda^k\Omega^1$, где $k = \dim W$. Это расслоение является линейным, и его сечения — это k-формы вида $f(z)dz_1\wedge\ldots\wedge dz_k$. Расслоение Ω_W^k также называется каноническим раслоением многообразия W и часто обозначается через K_W. Для нас оно будет играть важнейшую роль.

(vi) Если V — гладкое подмногообразие в некотором гладком многообразии W, то имеется естественное вложение $T_V \longrightarrow T_W|V$. Фактор по образу этого вложения снова является векторным расслоением на многообразии V. Над каждой точкой $x \in V$ этот фактор состоит из направлений в касательном пространстве к многообразию W, которые «ортогональны» к касательному пространству многообразия V в точке x. Этот фактор можно также представлять себе в виде линеаризованного варианта подмногообразия $V(\varepsilon) \subset W$, где $V(\varepsilon)$—трубчатая окрестность подмногообразия V в W. Полученное расслоение называется нормальным расслоением подмногообразия V в многообразии W и обозначается через $N_{V|W}$. Таким образом, имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow T_V \longrightarrow T_W|V \longrightarrow N_{V|W} \longrightarrow 0.$$

Переходя к старшим внешним степеням, получаем изоморфизм

$$K_V \cong K_W|V \otimes \det N_{V|W}.$$

Поскольку глобальные сечения расслоений играют важную роль в отображениях многообразий, мы уделим им дополнительное внимание. Следующее утверждение является фундаментальным.

7.7. Теорема. *Пусть $p: V \longrightarrow X$—векторное расслоение над проективным многообразием. Тогда размерность его пространства глобальных сечений $\Gamma(X, V)$ конечна.*

Доказательство. Глобальные сечения представляют собой некоторые отображения из многообразия X в многообразие V. Некоторая модификация теоремы 5.21 показывает, что каждое аналитическое глобальное сечение является в действительности алгебраическим. Нам будет легче рассуждать с аналитическими сечениями.

Зафиксируем на многообразии X некоторую подходящую меру $d\mu$ и положительно определенную эрмитову форму $h_x(\ ,\ )$ на каждом слое $p^{-1}(x)$ над точкой x, которая гладко изменяется в зависимости от x. Для глобальных сечений $s_i \in \Gamma(X, V)$ определим скалярное произведение

$$(s_1, s_2) = \int_X h_x(s_1(x), s_2(x))d\mu.$$

Воспользуемся известным классическим результатом, который утверждает, что если последовательность аналитических функций $\{f_i\}$ в единичном шаре ограничена по норме пространства L^2, то она содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся к аналитической функции на всех компактных подмножествах этого шара. Если применить его к покрытию многообразия X картами, можно доказать, что пространство $\Gamma(X, V)$ превращается в гильбертово пространство, единичный шар которого является компактом. Следовательно, такое гильбертово пространство должно быть конечномерным.

7.8. Примеры. (i) Пусть $\mathcal{O}_X$—тривиальное расслоение, изоморфное $X \times \mathbf{C}$, на связном проективном многообразии X. Тогда сечения расслоения $\mathcal{O}_X$ соответствуют регулярным отображениям $X \longrightarrow \mathbf{C}$ и, следовательно, согласно предложению 5.11, являются константами. Таким образом, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong \mathbf{C}$.

(ii) Пусть L—некоторое линейное расслоение на многообразии X, обладающее сечением $s : X \longrightarrow L$, которое нигде не обращается в нуль. Можно определить отображение $f : X \times \mathbf{C} \longrightarrow L$ формулой $f(x, z) = zs(x)$. Это отображение показывает, что расслоение L изоморфно тривиальному расслоению.

(iii) Существует естественное билинейное отображение

$$\Gamma(X, V_1) \otimes \Gamma(X, V_2) \longrightarrow \Gamma(X, V_1 \otimes V_2),$$

заданное формулой $(s_1 \otimes s_2)(x) = s_1(x) \otimes s_2(x)$.

(iv) **Следствие.** *Пусть X—проективное многообразие, L—линейное расслоение на X, а L^{-1}—двойственное к L расслоение. Если оба расслоения L и L^{-1} имеют ненулевые сечения, то $L \cong \mathcal{O}_X$.*

Доказательство. Пусть s и t являются соответственно ненулевыми сечениями расслоений L и L^{-1}. Тогда $s \otimes t$ – сечение расслоения $L \otimes L^{-1} \cong \mathcal{O}_X$. Согласно (i), это сечение – ненулевая константа; следовательно, сечение s нигде не обращается в нуль. Теперь требуемое утверждение вытекает из (ii).

(v) Пусть L – линейное расслоение, а s – его нетривиальное сечение. Каким образом можно получить другие сечения расслоения L? Предположим, что t – другое его сечение. Тогда $f = t/s$ – рациональная функция на X. Обратно, если $t = f \cdot s$, то t является сечением расслоения L, однако оно может иметь полюсы в полюсах функции f. Для того чтобы получить регулярное сечение, нули сечения s должны компенсировать полюсы f. Это наблюдение может быть использовано при вычислениях (см. следующий пример).

(vi) Вычисление $\Gamma(\mathbf{CP}^n, \mathcal{O}(k))$.

Напомним, что линейное расслоение $\mathcal{O}(1)$ задается посредством факторизации тривиального расслоения $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^{n+1}$, которая в точке $(x_0 : \ldots : x_n)$ определяется линейным отображением

$$(z_0, \ldots, z_n) \longrightarrow \sum x_i z_i \in \mathbf{C}.$$

Строчка $(1, 0, \ldots, 0)$ определяет сечение s расслоения $\mathcal{O}(1)$, которое обращается в нуль на множестве точек из $\mathbf{CP}^n$, определяемых условием $x_0 = 0$ (гиперплоскость на бесконечности). Любое другое сечение имеет вид $f \cdot s$, где f регулярна на карте $U_0 \cong \mathbf{C}^n$ и имеет, самое большее, полюс первого порядка на бесконечности. Такие функции – в точности линейные функции вида $f = \sum a_i x_i / x_0$. Следовательно, сечения $\mathcal{O}(1)$ могут быть отождествлены с линейными многочленами $\sum a_i x_i$. В частности,

$$\dim \Gamma(\mathbf{CP}^n, \mathcal{O}(1)) = n + 1.$$

Для расслоения $\mathcal{O}(k)$ выберем в качестве основного сечения k-ю тензорную степень сечения s. Глобальные сечения расслоения соответствуют регулярным функциям на $U_0 \cong \mathbf{C}^n$, имеющим, самое большее, полюс k-го порядка на бесконечности. Эти функции соответствуют также однородным многочленам степени k от переменных $x_0, \ldots, x_n$. Таким образом,

$$\dim \Gamma(\mathbf{CP}^n, \mathcal{O}(k)) = \binom{n+k}{n}.$$

Согласно (iv), при $k < 0$ не существует ненулевых глобальных сечений.

(vii) Линейные расслоения на кривых. Пусть C – кривая рода g, а L – линейное расслоение на C с сечением s. Другие сечения расслоения L задаются в виде $f \cdot s$, где f – мероморфная функция на кривой C, имеющая полюсы, компенсируемые нулями сечения s. Размерность пространства таких функций была вычислена в теореме 3.8. Таким образом, мы получаем

$$\dim \Gamma(C, L) \geq (\text{число нулей } s) + 1 - g(C).$$

7.9. Важность канонического расслоения K_X[1]. Пусть L—линейное расслоение на проективном многообразии X, а $s_0, \ldots, s_n$ – базис пространства $\Gamma(X, L)$. Тогда этот базис определяет некоторое отображение многообразия X в $\mathbf{CP}^n$. Если выбирается другой базис $s'_0, \ldots, s'_n$, то мы получаем другое отображение. Однако эти два отображения отличаются лишь координатами в $\mathbf{CP}^n$. Таким образом, само расслоение L фактически определяет единственное отображение в $\mathbf{CP}^n$.

До сих пор выбор линейного расслоения L был произвольным. Какое же линейное расслоение в действительности следует выбирать на многообразии X? Преимущество канонического расслоения K_X состоит в том, что оно «задано Богом свыше» и потому исключает проблему выбора. Аналогично, среди всех линейных расслоений выделяются тензорные степени $K_X^{\otimes m}$. Что касается числа m, то его можно выбрать раз и навсегда для всех многообразий.

Почему мы уделяем внимание каноническому расслоению K_X, а не его двойственному K_X^{-1}? В дальнейшем мы увидим (см. теорему 8.15 и следствие 8.17), что пространство глобальных сечений $\Gamma(X, K_X^{\otimes m})$ обладает в отличие от пространства $\Gamma(X, K_X^{-1})$ хорошими функториальными свойствами.

Остается лишь одна проблема. Дело в том, что линейное расслоение $K_X^{\otimes m}$ может иметь очень мало глобальных сечений, возможно, только лишь нулевое сечение. В этом случае мы не получаем интересного отображения. Поэтому мы будем более подробно изучать свойства канонического расслоения K_X, чтобы получить некоторую информацию о многообразиях, для которых расслоения $K_X^{\otimes m}$ не дают интересных отображений.

Возможно, самый простой способ исследования расслоений $K_X^{\otimes m}$ состоит в подсчете размерности пространства их глобальных сечений. Обычно число $\dim \Gamma(X, K_X^{\otimes m})$ обозначается

---

[1] Как обычно, мы не делаем различия между линейными расслоениями и соответствующими им классами дивизоров. В частности, как синонимы мы используем термины «каноническое расслоение» и «канонический класс». — *Прим. ред.*

через $P_m(X)$ и называется m-плюриродом многообразия X, а число $P_1(X)$ — геометрическим родом, обозначаемым через $p_g(X)$.

Теперь мы вычислим каноническое расслоение K_X в некоторых случаях.

7.10. Примеры. (i) $K_{\mathbf{CP}^n} \cong \mathcal{O}(-n-1)$.

Доказательство. Пусть $(x_0 : \dots : x_n)$ — однородиые координаты пространства $\mathbf{CP}^n$. Выберем в карте U_0 координаты $z_i = x_i / x_0$. Поскольку имеется изоморфизм $U_0 \cong \mathbf{C}^n$, каноническое расслоение K_{U_0} на U_0 является тривиальиым расслоением с ненулевым сечением — n-формой вида $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. Что же происходит иа дополнении $\mathbf{CP}^n - U_0$? Если, например, выбрать карту U_n с аффинными координатами $y_i = x_i / x_n$, то

$$z_i = x_i / x_0 = y_i / y_0 \quad \text{для } i = 1, \dots, \quad n-1, \text{ и } z_n = 1/y_0.$$

Следовательно,

$$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = d\frac{y_1}{y_0} \wedge \dots \wedge d\frac{y_{n-1}}{y_0} \wedge d\frac{1}{y_0} = (-1)^n \frac{1}{y_0^{n+1}} dy_0 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}.$$

Таким образом, $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ — рациональное сеченне расслоения $K_{\mathbf{CP}^n}$, которое имеет полюс порядка $n+1$ вдоль гиперплоскости $x_0 = 0$. Следовательно, линейное расслоение $K_{\mathbf{CP}^n} \otimes \mathcal{O}(n+1)$ имеет ненулевое сечение вида

$$(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n) \otimes (s^{n+1}).$$

Поэтому это расслоеиие является тривиальным и, следовательно,

$$K_{\mathbf{CP}^n} \cong \mathcal{O}(-n-1).$$

(ii) Для фактора $\mathbf{C}^n / L$ комплексного пространства $\mathbf{C}^n$ по решетке L (см. 4.7) каноническое расслоение тривиально.

Доказательство. Пусть $z_1, \dots, z_n$ — координаты в аффинном пространстве $\mathbf{C}^n$. Тогда форма $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ является ненулевым сечением канонического расслоения $\mathbf{C}^n$. Поскольку эта форма, очевидно, инвариантна относительно сдвигов на элементы решетки L, оиа также дает ненулевое сечение канонического расслоения фактора $\mathbf{C}^n / L$.

(iii) Пусть X и Y – гладкие проективные многообразия, а

$$p : X \times Y \longrightarrow X \text{ и } q : X \times Y \longrightarrow Y$$

– координатные проекции. Тогда $K_{X \times Y} \cong p^* K_X \otimes q^* K_Y$.

Доказательство. В каждой точке произведения $X \times Y$ касательное пространство разлагается в прямую сумму горизонтального и вертикального касательных пространств. Таким образом, $T_{X \times Y} \cong p^* T_X \oplus q^* T_Y$. Переходя к старшим внешним степеням и двойственным расслоениям, получаем требуемую формулу.

Для дальнейших примеров нам понадобится следующее утверждение:

7.11. Предложение. *Пусть V — векторное расслоение на гладком многообразии X, s: $X \to V$ — некоторое сечение этого расслоения, а $Y \subset X$ — множество нулей s. Предположим, что подмногообразие $s(X) \subset V$ трансверсально пересекает нулевое сечение расслоения V. Тогда $N_{Y|X} \cong V|Y$.*

Доказательство. Пусть $Y(\varepsilon)$ – малая трубчатая окрестность подмногообразия Y в X. Интуитивно ясно, что существует отображение ретракции $r : Y(\varepsilon) \longrightarrow Y$. К сожалению, иногда в качестве r нельзя выбрать аналитическое отображение. Тем не менее предположим, что существует аналитическая ретракция. Тогда она продолжается до ретракции $R : V|Y(\varepsilon) \longrightarrow V|Y$.

Если $x \in Y(\varepsilon)$, то сопоставление $x \longrightarrow R(s(x))$ отображает $Y(\varepsilon)$ на малую окрестность нулевого сечения расслоения $V|Y$. Поскольку, согласно своему определению, нормальное расслоение $N_{Y|X}$ является линеаризацией трубчатой окрестности $Y(\varepsilon)$, получаем требуемый изоморфизм.

В общем случае можно выбрать отображения r и R аналитическими с точностью до первого порядка вдоль многообразия Y. Этого достаточно для завершения доказательства.

7.12. Следствие. Пусть $H \subset \mathbf{CP}^n$ — гладкая гиперповерхность степени k. Тогда $K_H = \mathcal{O}(k - n - 1) | H$.

Доказательство. Пусть гиперповерхность H задана многочленом степени k, соответствующим сечению пучка $\mathcal{O}(k)$. Таким образом, нормальное расслоение гиперповерхности H в $\mathbf{CP}^n$ изоморфно $\mathcal{O}(k)|H$. Согласно п. 7.5(iv),

$$K_H \cong K_{\mathbf{CP}^n}|H \otimes N_{H|\mathbf{CP}^n}.$$

Пользуясь вычислением $K_{\mathbf{CP}^n}$ в п. 7.10(i), получаем требуемое утверждение.

7.13. Определение. (i) Пусть L — лннейное расслоение с сечением $s : X \longrightarrow L$. Обозначим через $V(s) \subset X$ множество нулей этого сечения. Это множество имеет коразмерность 1, и, согласно п. 6.1, класс гомологий $[V(s)]$ принадлежит группе $H_{2n-2}(X, \mathbf{Z})$, где n — размерность многообразия X. Если s' — другое сечение L, то $f = s/s'$ — рациональная функция с множеством нулей $V(s')$ и множеством полюсов $V(s)$. Используя пример 6.2, получаем $[V(s')] = [V(s)]$. Таким образом, имеем корректно определенный класс $[L] \in H_{2n-2}(X, \mathbf{Z})$.

(ii) Если расслоение L не нмеет ненулевых регулярных сечений, то мы можем взять его мероморфное сечение t с множеством нулей $Z(t)$ и множеством полюсов $P(t)$ и определить $[L] = [Z(t)] - [P(t)]$.

(iii) Если X — гладкое проективное многообразие, то группа гомологий H_{2n-2} естественно отождествляется с группой когомологий H^2. В общем случае имеется лишь некоторое отображение из H^2 в H_{2n-2}. Можно показать, что класс $[L]$ может быть поднят до некоторого элемента группы $H^2(X, \mathbf{Z})$. Мы будем использовать этот факт лишь в гладком случае. Получающийся в группе $H^2(X, \mathbf{Z})$ класс обозначается через $c_1(L)$ и называется первым классом Чженя расслоения L.

Из определения легко вытекает, что $c_1(\mathcal{O}_X) = 0$. Согласно примеру 7.8(iii), получаем $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$.

(iv) Если V — иекоторое векторное расслоение над X, то его первый класс Чженя определяется как $c_1(V) = c_1(\det V)$.

(v) Пусть C — гладкая проективная кривая. Тогда $H^2(C, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$. В этом случае класс Чженя $c_1(L)$ может расматриваться как целое число, это число также называется степенью расслоения L и обозначается через $\deg L$.

(vi) В свете введенного выше определения, используя замечание 7.8(vii), можно преобразовать теорему Римана—Роха 3.8 к более привычной форме:

Теорема Римана—Роха для кривых. *Пусть L линейное расслоение на гладкой проективной кривой C. Тогда*

$$\dim \Gamma(C, L) \geq \deg L + 1 - g,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\deg L \geq 2g - 1$.

(vii) Пусть X – некоторое многообразие, а C – проективная кривая в X. Тогда $[C] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ и имеется билинейное спаривание $H_2(X, \mathbb{Z}) \otimes H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$, которое для любого линейного расслоения L задает индекс пересечения $[C] \cdot c_1(L)$.

Непосредственно индекс пересечения определяется следующим образом. Пусть $g : C \longrightarrow C$ – нормализация кривой C. Тогда g^*L – линейное расслоение на кривой C, и, согласно п. (v), оно имеет степень. Совершенно ясно, что

$$\deg g^*L = [C] \cdot c_1(L).$$

(viii) Предположим, что расслоение L порождается глобальными сечениями (т.е. для каждой точки $x \in X$ существует некоторое глобальное сечение s расслоения L, такое, что $s(x) \neq 0$). Пусть $x \in C$ – точка на кривой C и s – не обращающееся в нуль в x сечение L; тогда g^*s – ненулевое сечение расслоения g^*L и $\deg g^*L \geq 0$.

Теперь рассмотрим подмногообразие X в $\mathbb{CP}^n$ и расслоение $\mathcal{O}(1) \mid X$. Согласно 7.8(vi),

$$c_1(\mathcal{O}(1)) = [\text{гиперплоскость}].$$

Поэтому, как мы убедились в доказательстве 6.5,

$$[C] \cdot c_1(\mathcal{O}(1) \mid X) = [C] \cdot [\text{гиперплоскость}] > 0.$$

Таким образом, получаем

7.14. Следствие. *Пусть X — проективное многообразие и L — линейное расслоение, задающее некоторое вложение X в проективное пространство. Тогда для каждой кривой $C \subset X$ выполнено неравенство $[C] \cdot c_1(L) > 0$, т. е. линейная функция, зада-*

ваемая расслоением L, положительна на конусе $NE(X)$.

Это утверждение очень близко к характеризации таких линейных расслоений L. Обратное к следствию 7.14 утверждение содержится в следующем результате, доказательство которого мы опускаем.

7.15. Критерий Клеймана. *Пусть L—линейное расслоение на проективном многообразии X. Тогда следующие два условия на L эквивалентны:*

(i) *расслоение $L^{\otimes m}$ при достаточно больших m задает некоторое вложение многообразия X в проективное пространство.*

(ii) *Линейная функция, заданная расслоением L, положительна на множестве $\overline{NE}(X) - \{0\}$.*

7.16. Определения. (i) Линейное расслоение L, удовлетворяющее сформулированным выше условиям, называется обильным.

(ii) Линейное расслоение L называется численно эффективным или, коротко, nef-расслоением, если линейная функция, задаваемая L, неотрицательна иа $\overline{NE}(X)$. [Это в точности соответствует использованному ранее в книге понятию nef-дивизора для соответствующего класса дивизоров. —*Ред.*] Эквивалетно, L – nef-расслоение, если для любой кривой $C \subset X$ выполнено неравенство $[C] \cdot c_1(L) \geq 0$. Условие численной эффективности проверять легче, чем условие обильности, поскольку мы не должны рассматривать пределы кривых.

В заключение этого раздела мы приведем еще несколько примеров линейных расслоений.

7.17. Теорема. *Каждое линейное расслоение на $\mathbf{C}P^n$ изоморфно некоторому расслоению вида $\mathcal{O}(m)$ для подходящего $m \in \mathbf{Z}$.*

Доказательство. Начнем с проективной прямой $\mathbf{C}P^1$ и линейного расслоения L степени m. Тогда расслоение $L' = L \otimes \mathcal{O}(-m)$ имеет степень 0. Пусть s – некоторое мероморфное сечение расслоеиия L'; тогда оно имеет одинаковое число нулей и полюсов. Следовательно, умножая s на рациональные функции вида $(z-a)/(z-b)$, мы можем избавится от всех иулей и полюсов и получить нигде не обращающееся в нуль сечение расслоения L'. Согласно примеру 7.8(ii), получаем, что $L' \cong \mathcal{O}$; следовательно, $L \cong \mathcal{O}(m)$.

Теперь рассмотрим линейное расслоение L на $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$. Пусть C – некоторая кривая в $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$. Обозначим через m индекс пересечения $[C]c_1(L)$. Переходя к расслоению $L' = L \otimes \mathcal{O}(-m)$, получаем $[C]c_1(L') = 0$. Следовательно, в силу предыдущих рассуждений $L' \mid C \cong \mathcal{O}_C$.

Если зафиксировать некоторую точку $p \in \mathbf{C}\mathrm{P}^n$, то прямые, проходящие через p, покроют все проективное пространство. Если зафиксировать некоторый ненулевой элемент l в слое L' над точкой p, то для каждой прямой C, содержащей p, существует единственное сечение $s_C : C \longrightarrow L' \mid C$, такое, что $s_C(p) = l$. Все эти сечения склеиваются в одно ненулевое сечение расслоения L'. Следовательно, $L' \cong \mathcal{O}_{\mathbf{C}\mathrm{P}^n}$, и утверждение доказано.

Теперь мы можем легко доказать обещанное предложение 2.30.

7.18. Следствие. $\operatorname{Aut} \mathbf{C}\mathrm{P}^n \cong \mathrm{PGL}(n+1, \mathbf{C})$.

Доказательство. Пусть $f : \mathbf{C}\mathrm{P}^n \longrightarrow \mathbf{C}\mathrm{P}^n$ – некоторый автоморфизм. Попробуем выяснить, что такое $f^*\mathcal{O}(1)$. Поскольку любое линейное расслоение на $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$ является тензорной степенью $\mathcal{O}(1)$, то же самое верно для $f^*\mathcal{O}(1)$. Следовательно, расслоение $f^*\mathcal{O}(1)$ изоморфно либо $\mathcal{O}(1)$, либо $\mathcal{O}(-1)$. Поскольку у расслоения $\mathcal{O}(1)$ есть ненулевые сечения, тем же свойством обладает расслоение $f^*\mathcal{O}(1)$, значит, обязательно $f^*\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)$. Таким образом, по модулю некоторого изоморфизма $\mathcal{O}(1) \cong \mathcal{O}(1)$, который является умножением на скаляр, автоморфизм f индуцирует линейное отображение

$$f^* : \Gamma(\mathbf{C}\mathrm{P}^n, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{C}\mathrm{P}^n, \mathcal{O}(1)).$$

С другой стороны, поскольку пространство $\Gamma(\mathbf{C}\mathrm{P}^n, \mathcal{O}(1))$ двойственно к векторному пространству $\mathbf{C}^{n+1}$, по которому строится $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$, отображение f^* определяет элемент из $\operatorname{Aut} \mathbf{C}^{n+1}$. Этот элемент индуцирует автоморфизм пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^n$, который, как легко видеть, совпадает с f.

7.19. Замечание. Не следует думать, что и в общем случае расслоение L определяется своим классом Чженя $c_1(L)$. Например, пусть C — произвольная кривая рода не меньше 1, а p и q — ее различные точки. Тогда $c_1(\mathcal{O}(p)) = c_1(\mathcal{O}(q))$, однако, $\mathcal{O}(p) \not\cong \mathcal{O}(q)$. Действительно, предположим противное. Тогда $\mathcal{O}(p) \otimes \mathcal{O}(q)^{-1} \cong \mathcal{O}$ — расслоение, имеющее не обращающееся в нуль сечение s. С другой стороны, из конструкции в примере 7.6(iv) следует, что это расслоение обладает сечением s', имеющим простой нуль в точке p и простой полюс в точке q. Тогда отношение s'/s — рациональная функция на C с единственным простым полюсом. Так же как и в п. 3.10, из последнего следует изоморфизм $C \cong \mathbf{CP}^1$—противоречие.

8. Как понимать алгебраические многообразия

8.1. Два подхода. Существуют два основных подхода к геометрии алгебраических многообразий. Одни из них использует очень общую точку зрения с надеждой получить широкое понимание *всех* алгебраических многообразий в целом. Поэтому этот подход нацелен на общие структурные теоремы. Другая точка зрения утверждает, что *специальные* часто встречающиеся многообразия представляют наибольший интерес, поэтому следует получить о них подробную информацию.

Мы проиллюстрируем различие между этими подходами на примере. Предположим, что задано конкретное трехмерное многообразие X, причем мы можем доказать, что это многообразие изоморфно гладкой гиперповерхности степени 5 в $\mathbf{CP}^4$. Это полностью удовлетворит приверженца первой точки зрения. Представитель же второго подхода вежливо указал бы, что его интересуют только гиперповерхности и он озабочен тем, чтобы разобраться с отображениями из $\mathbf{CP}^1$ в гиперповерхность степени 5 в $\mathbf{CP}^4$. Эта последняя проблема является очень интересной и тонкой.

В этой статье будет обсуждаться исключительно структурный подход, этот выбор связан с личным вкусом автора.

8.2. Основная стратегия. Идеи, представленные ниже, не являются новыми, они восходят к итальянской школе начала этого столетия.

Первый шаг состоит в определении некоторого отношения эквивалентности на всех алгебраических многообразиях. Два многообразия объявляются эквивалентными, если они почти всюду одинаковы. Затем мы пытаемся разобраться с классами эквивалентности, доказывая, что некоторые простые операции позволяют из одного его представителя получать другие.

Второй шаг состоит в том, чтобы найти способы связывать с заданным классом эквивалентности единственное многообразие. Это часто позволяет редуцировать проблему изучения различных классов эквивалентности многообразий к изучению некоторых их отдельных представителей.

Третий шаг состоит в том, чтобы, используя специальные свойства выделенных индивидуальных представителей, получить представление о всех классах эквивалентности.

Этот подход разрабатывался и достаточно успешно для алгебраических поверхностей – двумерных проективных многообразий. Довольно загадочным способом сложность алгебраических поверхностей возникает либо на шаге 1, либо на шаге 3, но не одновременно на двух. Более точно, имеют место следующие альтернативы.

(i) Класс эквиавлентности содержит очень простой представитель – $\mathbb{CP}^2$. В этом случае связь между поверхностями внутри этого класа очень сложна.

(ii) Класс эквивалентности содержит только сложные поверхности, но все они связаны между собой простым способом.

Значительные успехи были недавно получены для трехмерных многообразий. Хотя в этом случае все гораздо сложнее, тем не менее просматривается аналогичная схема.

Теперь мы более подробно рассмотрим упомянутую выше программу. Сначала определим отношение эквивалентности.

8.3. Определение. (i) Отображение $f\colon X \dashrightarrow Y$ называется бирациональным, если существуют собственные замкнутые под-

7.19. Замечание. Не следует думать, что и в общем случае расслоение L определяется своим классом Чженя $c_1(L)$. Например, пусть C — произвольная кривая рода не меньше 1, а p и q — ее различные точки. Тогда $c_1(\mathcal{O}(p)) = c_1(\mathcal{O}(q))$, однако, $\mathcal{O}(p) \not\cong \mathcal{O}(q)$. Действительно, предположим противное. Тогда $\mathcal{O}(p) \otimes \mathcal{O}(q)^{-1} \cong \mathcal{O}$ — расслоение, имеющее не обращающееся в нуль сечение s. С другой стороны, из конструкции в примере 7.6(iv) следует, что это расслоение обладает сечением s', имеющим простой нуль в точке p и простой полюс в точке q. Тогда отношение s'/s — рациональная функция на C с единственным простым полюсом. Так же как и в п. 3.10, из последнего следует изоморфизм $C \cong \mathbf{CP}^1$—противоречие.

8. Как понимать алгебраические многообразия

8.1. Два подхода. Существуют два основных подхода к геометрии алгебраических многообразий. Один из них использует очень общую точку зрения с надеждой получить широкое понимание *всех* алгебраических многообразий в целом. Поэтому этот подход нацелен на общие структурные теоремы. Другая точка зрения утверждает, что *специальные* часто встречающиеся многообразия представляют наибольший интерес, поэтому следует получить о них подробную информацию.

Мы проиллюстрируем различие между этими подходами на примере. Предположим, что задано конкретное трехмерное многообразие X, причем мы можем доказать, что это многообразие изоморфно гладкой гиперповерхности степени 5 в $\mathbf{CP}^4$. Это полностью удовлетворит приверженца первой точки зрения. Представитель же второго подхода вежливо указал бы, что его интересуют только гиперповерхности и он озабочен тем, чтобы разобраться с отображениями из $\mathbf{CP}^1$ в гиперповерхность степени 5 в $\mathbf{CP}^4$. Эта последняя проблема является очень интересной и тонкой.

В этой статье будет обсуждаться исключительно структурный подход, этот выбор связан с личным вкусом автора.

8.2. Основная стратегия. Идеи, представленные ниже, не являются новыми, они восходят к итальянской школе начала этого столетия.

Первый шаг состоит в определении некоторого отношения эквивалентности на всех алгебраических многообразиях. Два многообразия объявляются эквивалентными, если они почти всюду одинаковы. Затем мы пытаемся разобраться с классами эквивалентности, доказывая, что некоторые простые операции позволяют из одного его представителя получать другие.

Второй шаг состоит в том, чтобы найти способы связывать с заданным классом эквивалентности единственное многообразие. Это часто позволяет редуцировать проблему изучения различных классов эквивалентности многообразий к изучению некоторых их отдельных представителей.

Третий шаг состоит в том, чтобы, используя специальные свойства выделенных индивидуальных представителей, получить представление о всех классах эквивалентности.

Этот подход разрабатывался и достаточно успешно для алгебраических поверхностей – двумерных проективных многообразий. Довольно загадочным способом сложность алгебраических поверхностей возникает либо на шаге 1, либо на шаге 3, но не одновременно на двух. Более точно, имеют место следующие альтернативы.

(i) Класс эквиавлентности содержит очень простой представитель – $\mathbb{C}P^2$. В этом случае связь между поверхностями внутри этого класа очень сложна.

(ii) Класс эквивалентности содержит только сложные поверхности, но все они связаны между собой простым способом.

Значительные успехи были недавно получены для трехмерных многообразий. Хотя в этом случае все гораздо сложнее, тем не менее просматривается аналогичная схема.

Теперь мы более подробно рассмотрим упомянутую выше программу. Сначала определим отношение эквивалентности.

8.3. Определение. (i) Отображение $f: X \dashrightarrow Y$ называется бирациональным, если существуют собственные замкнутые подмножества $V \subset X$ и $Z \subset Y$, такие, что $f: X - V \longrightarrow Y - Z$ является изоморфизмом. В этом случае отображение f имеет обратное рациональное отображение $f^{-1}: Y \dashrightarrow X$, которое регулярно на $Y - Z$.

(ii) Два неприводимых проективных многообразия называются бирационально эквивалентиыми или просто бирациональиыми, если между ними существует бирациональное отображение. Очевидно, мы получаем естественное отношение эквивалентности.

(iii) Аналогичным способом определяется бимероморфные отображения между комплексными многообразиями.

(iv) Два многообразия X и Y называются изоморфными, если существуют регулярные отображения $f: X \longrightarrow Y$ и $g: Y \longrightarrow X$, такие, что $f \circ g = \mathrm{id}$ и $g \circ f = \mathrm{id}$. Обычно мы не будем различать изоморфные многообразия.

8.4. Пример. (i) Пусть Y — иекоторое многообразие, а Z — его замкнутое подмногообразие. Тогда вложение $i: Y - Z \longrightarrow Y$ является бирациональным изоморфизмом.

(ii) Отображение $\mathbf{CP}^2 \dashrightarrow \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$, заданное формулой

$$(x:y:z) \longrightarrow ((x:z),\ (y:z)),$$

бирационально. Оно не является регулярным в точках $(0:1:0)$ и $(1:0:0)$, а прямая $z = 0$ отображается в точку $((1:0),\ (1:0))$.

(iii) В общем случае проективное пространство $\mathbf{CP}^{n+m}$ бирационально произведению $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{CP}^m$, поскольку

$$\mathbf{CP}^{n+m} \supset \mathbf{C}^{n+m} \cong \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^m \subset \mathbf{CP}^n \times \mathbf{CP}^m.$$

(iv) Пусть $f: \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^2$ – отображение, заданное формулой $f(t) = (t^n,\ t^m)$, и $V \subset \mathbf{C}^2$ – его образ. Тогда f бирационально в том и только том случае, когда $(n,\ m) = 1$. Более того, f – изоморфизм тогда и только тогда, когда либо $n = 1$, либо $m = 1$. Случай $n = 2$, $m = 3$ был подробно рассмотрен в примере 5.3(iii).

(v) Пусть $Q \subset \mathbf{CP}^{n+1}$ — гладкая гиперповерхность степени 2. Пусть $q \in Q$ – некоторая ее точка, а H – гиперплоскость, не содержащая q. Определим отображение $p : Q \longrightarrow H$ следующим образом. Пусть $q \neq q' \in Q$. Соединим точки q и q' прямой и обозначим через $p(q')$ вторую точку пересечения этой прямой с Q. Нетрудно показать, что отображение p бирационально.

8.5. Основная проблема для бирациональных отображений. Существует ли некоторое множество «элементарных» бирациональных отображеиий, такое, что любое бирациональное отображение может быть представлено в виде таких элементарных преобразований?

Эта проблема удовлетворительно решается в размерности 2, однако уже в размерности 3 остается много неисследованного. Непонятно даже, какие отображения в этом случае следует считать элементарными. Следующий пример — один из кандидатов такого элементарного отображения.

8.6. Пример: Раздутие. Это простой способ получения из одного многообразия X некоторого другого многообразия X', которое бирационально X.

(i) **Раздутие точки в $\mathbf{CP}^n$.** Идея этого преобразования состоит в замене некоторой точки в $\mathbf{CP}^n$ множеством направлений, исходящих из этой точки, т.е. пространством $\mathbf{CP}^{n-1}$. Это можно описать с помощью уравнений следующим образом. Пусть $(y_0 : \ldots : y_n)$ — однородные координаты в $\mathbf{CP}^n$, а $(z_0 : \ldots : z_{n-1})$ — однородные координаты в $\mathbf{CP}^{n-1}$. Обозначим через $B_0\mathbf{CP}^n$ подмножество в произведении $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{CP}^{n-1}$, заданное уравнениями $y_i z_j = z_i y_j$, $0 \le i, j \le n-1$. Пусть

$$p : B_0\mathbf{CP}^n \longrightarrow \mathbf{CP}^n$$

— проекция на первый сомножитель. Если точка $x \in \mathbf{CP}^n$ имеет координаты $(0: \ldots :0:1)$, то приведенные выше уравнения не налагают никаких ограничений на координаты y_i, следовательно, $p^{-1}(0: \ldots :0:1) \cong \mathbf{CP}^n$. Если же, например, $y_0 \neq 0$, то из уравнений следует, что $z_i = z_0 \cdot y_i / y_0$, а значит, набор координат $(z_0 : \ldots : z_{n-1})$ однозначно определен. Таким образом, p — бирациональное отображение, что и требовалось доказать.

(ii) **Раздутие линейного подпространства в $\mathbf{CP}^n$.** Пусть $L \subset \mathbf{CP}^n$ – некоторое линейиое подпространство размерности $n-k-1$, где $k \geq 1$. Тогда можно попытаться заменнть L множеством направлений прямых, «ортогональиых» к L. Как и выше, обозначим через (y) координаты в $\mathbf{CP}^n$, а через (z) – координаты в соответствующем пространстве $\mathbf{CP}^k$. Пусть $B_L \mathbf{CP}^n$ – подмножество в произведении $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{CP}^k$, заданное уравнениями $y_i z_j = z_i y_j$, $0 \leq i, j \leq k$. Тогда проекция на первый сомножитель

$$p : B_L\mathbf{CP}^n \longrightarrow \mathbf{CP}^n$$

—снова бирациональное отображение. Более того,

$$p^{-1}(x) \cong \mathbf{CP}^k,$$

если $x \in L = (y_0 = \ldots = y_k = 0)$, и $p^{-1}(x)$ – единственная точка, если $x \notin L$.

Нетрудио убедиться, что $B_L \mathbf{CP}^n$ – гладкое многообразне.

(iii) **Аналитическое раздутие гладкого подмногообразия.** Пусть X – гладкое комплексное многообразие, а Y – его гладкое подмногообразие. Наша задача – определить многообразие $B_Y X$. Каждая точка $x \in Y \subset X$ имеет малую окрестность, изоморфиую открытому шару $D \subset \mathbf{C}^n$, в которой пересечение $Y \cap D$ задается уравнениями $y_1 = \ldots = y_k = 0$. Определим множество $B_{Y \cap D} X$ как подмножество в $D \times \mathbf{CP}^{k-1}$, удовлетворяющее уравнениям

$$y_i z_j = z_i y_j, \quad 1 \leq i, j \leq k,$$

где $(z_1 : \ldots : z_k)$ – однородные координаты на $\mathbf{CP}^{k-1}$.

Опять можно доказать, что $B_{Y \cap D} X$ – гладкие многообразия для всех открытых подмножеств D, и они склеиваются вместе, определяя бимероморфное отображение $p : B_Y X \longrightarrow X$. Более того, можно доказать, что $B_Y X$ – проективное миогообразие, еслн таковым является многообразие X.

С помощью многократного применения раздутий можно упростить рациональное отображеиие. Такое использование раздутий составляет содержание следующей важиой и очеиь трудной теоремы Хиронаки:

8.7. Исключение точек неопределенности. *Пусть X — гладкое проективное многообразие, а $f: X \dashrightarrow Z$ — некоторое его рациональное отображение. Тогда существует конечная последовательность раздутий*

$$g_n: X_n \to X_{n-1} \to \ldots X_1 \to X_0 = X,$$

такая, что композиция $f \circ g_n$ является всюду регулярным отображением.

8.8. Замечание. (i) Для случая $\dim X = 2$ мы докажем это утверждение в п. 9.7.

(ii) В свете идеологии, изложенной в п. 8.5, этот результат показывает, что «элементарные отображения» можно трактовать как отображения, обратные к раздутиям, и некоторые регулярные отображения. Таким образом, результат оказывается очень полезным. Однако в случае $\dim X \geq 3$ регулярные отображения устроены очень сложно. Программа Мори даст нам некоторый подход к исследованию их структуры.

Существует другой результат Хиронаки, который еще более проясняет понятие бирациональной эквивалентности. Этот результат является обобщением теоремы 3.12.

8.9. Разрешение особенностей. *Пусть X — проективное многообразие. Тогда существует регулярное бирационально отображение $f: Y \to X$, где Y — гладкое проективное многообразие.*

Любое такое многообразие Y мы будем называть разрешением особенностей многообразия X. Приведенный результат показывает, что с бирациональной точки зрения достаточно рассматривать только гладкие многообразия. К сожалению, многообразия X и Y могут очень сильно отличаться друг от друга. Поэтому такая редукция к гладкому случаю не всегда является полезной.

Пришло время сосредоточиться на сходных чертах бирационально эквивалентных многообразий. В связи с этим напомним следствие 5.19: рациональное отображение между гладкими проективными многообразиями регулярно вне множества коразмерности 2. Это свойство дает несколько следствий для бирационально эквивалентных многообразий.

8.10. Теорема. *Пусть $f: C \dashrightarrow C'$ — бирациональное отображение между гладкими проективными кривыми. Тогда f — изоморфизм.*

Доказательство. Поскольку $\dim C = 1$, любое множество коразмерности 2 пусто. Таким образом, f – регулярное отображение, и то же самое верно для f^{-1}. Пример 8.4(ii) показывает, что соответствующее утверждение уже неверно для поверхностей.

8.11. Теорема. *Пусть X и X' — бирационально эквивалентные гладкие проективные многообразия; тогда их фундаментальные группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(X')$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть

$$f: X \longrightarrow X'$$

– регулярное вне $Z \subset X$ бирациональное отображение. Подмногообразие Z имеет комплексную коразмерность не меньше 2; следовательно, его вещественная коразмерность не меньше 4. Таким образом, $\pi_1(X) \cong \pi_1(X-Z)$. Отображение f переводит множество $X-Z$ в X'. Это дает гомоморфизм групп $\pi_1(X-Z) \longrightarrow \pi_1(X')$. Следовательно, получаем гомоморфизм $f_*: \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X')$. Очевидно, что $(f^{-1})_*$ является обратным к f_*.

Следующие результаты очень важны.

8.12. Предложение. *Пусть $g: U \longrightarrow V$ — регулярное отображение между гладкими многообразиями одинаковой размерности. В этом случае существует естественное отображение*

$$g^*K_V \to K_U.$$

Если $u \in U$ — некоторая точка, то отображение между ограничениями линейных расслоений $g^*K_V|u \longrightarrow K_U|u$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда g — локальный диффеоморфизм в окрестности u.

Доказательство. Пусть (u_i) — локальные координаты в точке u, а (v_j)—локальные координаты в точке $v=g(u)$. Пусть $g^*(v_j)=g_j(u_1,\dots,u_n)$. Прямая над точкой v в расслоении K_V состоит из векторов $c\cdot dv_1\wedge\dots\wedge dv_n$ $(c\in\mathbb{C})$. Отображение обратного образа определяется формулой

$$g^*(dv_j)=dg^*(v_j)=\sum\partial g_j/\partial u_i\cdot du_i.$$

Таким образом, отображение $g^*K_V\to K_U$ имеет внд

$$c\cdot du_1\wedge\dots\wedge du_n\longmapsto cg^*dv_1\wedge\dots\wedge g^*dv_n=c\cdot\det(\partial g_j/\partial u_i)du_1\wedge\dots\wedge du_n.$$

Это отображение является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det(\partial g_j/\partial u_i)\neq 0$. Согласно теореме о неявной функции, последнее эквивалентно тому, что g — локальный диффеоморфизм.

8.13. Следствие. *Пусть $E\subset U$—подмножество, на котором отображение g не является локальным диффеоморфизмом; тогда любая неприводимая компонента множества E имеет размерность $n-1$, за исключением случая $E=U$.*

Доказательство. Пусть u – некоторая точка из E. Тогда в окрестности этой точки множество E определяется уравнением $\det(\partial g_j/\partial u_i)=0$. Согласно теореме 2.27, из этого вытекает, что

$$\dim E=n-1,$$

за нсключением случая $\det(\partial g_j/\partial u_i)\equiv 0$.

8.14. Следствие. *Пусть $C\subset U$—неприводимая компактная кривая, такая, что C не принадлежит E. Тогда*

$$[C]c_1(K_U)\geq[g(C)]c_1(K_V),$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, когда $C\cap E=\varnothing$.

Доказательство. Предположим для простоты, что каноническое расслоение K_V имеет глобальное сечение ω с множеством нулей $Z\subset V$. Тогда $g^*\omega$ – сечение расслоения g^*K_V с множеством нулей $g^{-1}(Z)$. Оно дает сеченне расслоення K_U, которое вдобавок будет обращаться в нуль на $E=\bigcup E_k$. Поскольку мы должны учитывать кратности, то получаем

$$c_1(K_U) = [g^{-1}(Z)] + \sum a_k [E_k] \ (a_k > 0).$$

Следовательно,

$$[C][g^{-1}(Z)] = [g(C)][Z] \text{ и } [C]\cdot\sum a_k [E_k] \geq 0,$$

причем равенство выполняется, только если $C \cap E = \varnothing$.

8.15. Теорема. *Пусть $f: X \to Y$—рациональное отображение между гладкими проективными многообразиями одинаковой размерности n. Предположим, что образ $f(X)$ не содержится ни в каком собственном подмножестве многообразия Y. Тогда f индуцирует инъективное отображение*

$$f^*: \Gamma(Y, K_Y^{\otimes m}) \longrightarrow \Gamma(X, K_X^{\otimes m}).$$

Более того, если f—бирациональное отображение, то f^*—изоморфизм. Таким образом, $P_m(Y) = P_m(X)$ для любого $m \geq 1$.

Доказательство. Пусть $Z \subset X$ – множество точек неопределенности для отображения f. Согласно следствию 5.19,

$$\dim Z \leq \dim X - 2.$$

Пусть $U = X - Z$, $V = Y$, $g = f|U$. Пользуясь предложением 8.12, получаем отображение $g^*K_V^{\otimes m} \longrightarrow K_U^{\otimes m}$ и, следовательно, отображения

$$\Gamma(Y, K_Y^{\otimes m}) \longrightarrow \Gamma(U, g^*K_V^{\otimes m}) \longrightarrow \Gamma(U, K_U^{\otimes m}).$$

Согласно 7.5, пространство $\Gamma(U, K_U^{\otimes m})$ инъективно отображается в пространство $\Gamma(X, K_X^{\otimes m})$, и это определяет отображение f^*. Если f – бирациональное отображение, то $(f^{-1})^*$ является обратным к f^*.

Доказанная теорема приводит нас непосредственно к шагу 2 основной программы.

8.16. Определение. Пусть X – гладкое проективное многообразие. Обозначим через $\phi_m: X \dashrightarrow \mathbf{CP}^?$ отображение, задаваемое глобальными сечениями $\Gamma(X, K_X^{\otimes m})$. Это отображение мы будем называть m-каноническим. Замыкание образа отображения ϕ_m в соответствующем проективном пространстве мы назовем m-каноническим образом и обозначим его через $X^{[m]}$.

8.17. Следствие. *Если X и X' — бирационально эквивалентные гладкие проективные многообразия, то многообразия $X^{[m]}$ и $X'^{[m]}$ отличаются друг от друга лишь некоторым автоморфизмом $\mathbf{CP}^?$. В частности, эти многообразия изоморфны.*

Доказательство. Если $f: X \dashrightarrow X'$ — бирациональный изоморфизм, то он индуцирует некоторый изоморфизм

$$\Gamma(X', K_{X'}^{\otimes m}) \longrightarrow \Gamma(X, K_X^{\otimes m}).$$

Если мы будем строить m-каноническое отображение, используя одни и те же базисы в этих двух векторных пространствах, то, очевидно, мы получим в качестве многообразий $X^{[m]}$ и $X'^{[m]}$ одни и те же подмножества в $\mathbf{CP}^?$. Это доказывает следствие.

Действуя таким образом, мы можем связать с каждым гладким многообразием X бесконечную последовательность новых многообразий $X^{[1]}$, $X^{[2]}, \ldots$ и т. д., каждое из которых зависит лишь от класса бирациональной эквивалентности многообразия X. В общем случае многообразие $X^{[n]}$ не является бирационально эквивалентным многообразию X, а следовательно, в $X^{[n]}$ может быть потеряна значительная информация о многообразии X.

Опыт показывает, что многообразия $X^{[i]}$ могут очень сильно отличаться друг от друга, однако среди них существует так называемая «основная серия». А именно, можно доказать следующее утверждение.

8.18. Предложение. *Если числа m и n являются достаточно большими и делятся на достаточно большое число малых простых чисел, то многообразия $X^{[n]}$ и $X^{[m]}$ бирационально эквивалентны. Их класс бирациональной эквивалентности мы, несколько вольно пользуясь терминологией, будем называть многообразием Иитаки $I(X)$. Естественное рациональное отображение $\phi: X \longrightarrow I(X)$ будет называться стабильным каноническим отображением.*

Конечно, мы получили не совсем то, что хотели. Мы бы хотели связать с первоначальным классом бирациональной эквивалентности не набор бирационально эквивалентных многообразий, а *лишь одно* многообразие. Это желание приводит нас к следующей основной проблеме.

8.19. Фундаментальная проблема. Пусть X — гладкое проективное многообразие. Верно ли, что для достаточно больших m и n, делящихся на достаточно большое число малых простых чисел, многообразия $X^{[n]}$ и $X^{[m]}$ в действительности изоморфны?

Эту проблему очень легко решить в случае $\dim X = 1$. Однако уже для поверхности X доказательство не будет простым. Одной из целей и одним из главных достижений программы Мори является утвердительный ответ на поставленнную проблему для трехмерных многообразий.

8.20. Примеры. (i) Поскольку $K_{\mathbf{CP}^n} = \mathcal{O}(-n-1)$ (см. п. 7.9(i)), имеем $K_{\mathbf{CP}^n}^{\otimes m} = \mathcal{O}(-nm-m)$. Поэтому $P_m(\mathbf{CP}^n) = 0$ для всех $m \geq 1$, а следовательно, $I(\mathbf{CP}^n) = \varnothing$.

(ii) Согласно примеру 7.10(ii), каноническое расслоение на $\mathbf{C}^n/L$ тривиально. Следовательно, то же самое верно и для его тензорных степеней. Поскольку $\dim \Gamma(X, \mathcal{O}) = 1$, имеем $P_m(\mathbf{C}^n/L) = 1$. Значит, $I(\mathbf{C}^n/L) =$ точка, и опять мы получаем мало информации.

(iii) Согласно примеру 7.10(iii), имеем изоморфизм

$$K_{X\times Y}^{\otimes m} \cong p^* K_X^{\otimes m} \otimes q^* K_Y^{\otimes m}.$$

Если $s \in \Gamma(X, K_X^{\otimes m})$, а $t \in \Gamma(Y, K_Y^{\otimes m})$, то получаем сечение $p^*s \otimes q^*t \in \Gamma(X \times Y, K_{X\times Y}^{\otimes m})$. Нетрудно показать, что такие сечения порождают все пространство $\Gamma(X \times Y, K_{X\times Y}^{\otimes m})$. Таким образом, $P_m(X \times Y) = P_m(X) \cdot P_m(Y)$ и $I(X \times Y) = I(X) \times I(Y)$.

(iv) Пусть $H \subset \mathbf{CP}^n$ — гладкая гиперповерхность степени k. Пользуясь предложением 7.11, получаем $K_H \cong \mathcal{O}(k-n-1)\,|\,H$. Существуют три возможности:

(a) $k < n+1$. В этом случае $k-n-1 < 0$ и, следовательно, $P_m(H) = 0$ для всех $m > 0$.

(b) $k = n+1$. В этом случае $K_H \cong \mathcal{O}_H$ и, следовательно, $P_m(H) = 1$.

(с) $k > n + 1$. В этом случае расслоение $\mathcal{O}(m(k - n - 1))$ на проективном пространстве $\mathbf{CP}^n$ имеет много глобальных сечений, часть из которых имеет ненулевое ограничение на гиперповерхность H. В действительности можно вычислить, что

$$P_m(H) = \binom{m(k - n - 1) + n}{n} - \binom{m(k - n - 1) + n - k}{n}.$$

(v) **Следствие.** *Пусть H и H' — две гладкие гиперповерхности в проективном пространстве $\mathbf{CP}^n$ соответственно степеней k и k'. Предположим, что $k \geq n + 1$ и $k \neq k'$. Тогда гиперповерхности H и H' не являются бирационально эквивалентными.*

Доказательство. Если бы гиперповерхность H была бирациональна H', то $P_m(H) = P_m(H')$. Поскольку для этих чисел нам известны формулы, использующие k и k' (см. (с)), преобразовав получающееся равенство, можно вывести $k = k'$.

(vi) Что будет, если оба числа k и k' меньше $n + 1$? Прежде всего заметим, что, согласно примеру 8.4, гладкая квадрика ($k = 2$) бирациональна гиперплоскости ($k' = 1$). Имеется также и следующий более сложный пример.

(vii) Рассмотрим гладкую кубику $C \subset \mathbf{CP}^{2n+1}$, заданную уравнением $x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + \ldots + x_{2n+1}x_0^2 = 0$. Обозначим через L_1 (соответственно L_2) линейное подпространство, заданное уравнениями $x_0 = x_2 = \ldots = x_{2n} = 0$ (соответственно уравнениями $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n+1} = 0$). Очевидно, что $L_i \subset C$. Определим теперь следующим образом рациональное отображение $f: L_1 \times L_2 \dashrightarrow C$. Выберем две точки $x_i \subset L_i$. Соединим точки x_1 и x_2 прямой $\mathbf{CP}^{2n+1}$. Эта прямая пересечет кубику в трех точках, две из которых — x_1 и x_2. Предположим, что $f(x_1, x_2)$ — третья точка пересечения с прямой. Можно доказать, что в действительности f — бирациональное отображение. Таким образом, из примера 8.4(iii) следует, что кубика C бирационально эквивалентна $\mathbf{CP}^{2n}$.

(viii) В противоположность рассмотренному примеру гладкая кубика в $\mathbf{CP}^4$ никогда не является бирационально эквивалентной проективному пространству $\mathbf{CP}^3$, но это было трудно доказать (Клеменс – Гриффитс).

17-1663

8.21. Пример. Пусть X — гладкое проективное многообразие с обильным каноническим расслоением. В этом случае по определению для достаточно больших значений n имеем $X \cong X^{[n]}$; поэтому $X = I(X)$, и ответ на основной вопрос 8.19 положителен. Так обстоит дело для всех гладких поверхностей $H \subset \mathbf{CP}^n$ степени не меньше $n+2$.

Изучение стабильного канонического отображения дает разбиение всех многообразий на четыре класса. Для удобства мы введем понятие размерности Коданры $\kappa(X)$, которая равна $\dim I(X)$. Положим $\kappa(X) = -\infty$, если $I(X) = \varnothing$.

8.22. Основное подразделение. (i) $\kappa(X) = -\infty$, т. е. $P_m(X) = 0$ для всех $m > 0$. Примерами таких многообразий являются гиперповерхности небольшой степени.

(ii) $\kappa(X) = 0$, т. е. выполнено неравенство $P_m(X) \leq 1$, которое для некоторого m превращается в равенство. Примерами таких многообразий являются фактормногообразия вида $\mathbf{C}^n/L$ и гиперповерхности $H \subset \mathbf{CP}^n$ степени $n+1$.

(iii) $0 < \kappa(X) < \dim X$. Тогда отображение $\phi : X \dashrightarrow I(X)$ становится очень интересным. Некоторая индукция по размерности позволяет получить значительную информацию о многообразии $I(X)$ и слоях ϕ. Таким образом, появляется надежда, что собранная вместе информация об упомянутых многообразиях меньшей размерности позволит получить некоторые результаты о самом многообразии X.

(iv) $\kappa(X) = \dim X$. Такие многообразия называются многообразиями общего типа. Этот класс многообразий следует рассматривать как наиболее «многочисленный». В этом случае в действительности отображение $\phi : X \dashrightarrow I(X)$ является бирациональным. Поэтому, если ответ на фундаментальный вопрос положителен, то второй шаг основной стратегии завершен.

8.23. Коль скоро только произошло разделение алгебраических многообразий на упомянутые выше четыре класса, то далее должно проводиться индивидуальное исследование каждого из этих классов. Для двух последних классов (т.е. в случае $\kappa(X) > 0$) набросок такого исследования уже описан. В первых двух случаях стабильное каноническое отображение уже мало чем может помочь, поэтому для них следует использовать другие методы. Справедливо было бы сказать, что в настоящее время очень мало известно о многообразиях с $\kappa(X) = 0$, отсутствует даже гипотетический подход к их структурной теории. Однако известно, что класс многообразий с $\kappa(X) = -\infty$ тесно связан с отображениями в X проективной прямой $\mathbf{CP}^1$. Проиллюстрируем это на примере.

8.24. Пример. Рациональные кривые на поверхностях. Пусть $H \subset \mathbf{CP}^n$ — гиперповерхность степени k, заданная уравнением $h(x_0, \ldots, x_n) = 0$, и $\mathbf{b} \in H$ — некоторая ее точка. Мы бы хотели найти отображение $f : \mathbf{CP}^1 \longrightarrow H$, такое, что $f(0{:}1) = \mathbf{b}$.

Любое отображение из $\mathbf{CP}^1$ в $\mathbf{CP}^n$ задается $n + 1$ однородными многочленами, например степени m. Переходя от проективной прямой $\mathbf{CP}^1$ к ее аффинной части $\mathbf{C}$, это отображение можно записать в виде

$$t \longrightarrow [\sum_0^m a_i^0 t^i : \ldots : \sum_0^m a_i^n t^i] \in \mathbf{CP}^n.$$

Условие принадлежности $f(\mathbf{CP}^1) \subset H$ может быть записано в виде

$$h \circ f = h[\sum_0^m a_i^0 t^i : \ldots : \sum_0^m a_i^n t^i] \equiv 0.$$

Поскольку многочлен h имеет степень k, функцию $h \circ f$ можно рассматривать как многочлен степени mk от переменной t, причем его коэффициенты являются некоторыми многочленами от коэффициентов a_j^i. Приведенное выше тождество означает, что все $mk + 1$ получившихся коэффициентов при степенях t должны быть равны нулю. Какое число свободных переменных получится у соответствующей системы? Мы требуем, чтобы $f(0{:}1) = \mathbf{b}$. Поэтому

$$(a_0^0 : \ldots : a_0^n) = (b_0 : \ldots : b_n),$$

а следовательно, мы можем выбрать $a_0^i = b_i$.

После этого выбора коэффициент при нулевой степени в многочлене $h \circ f$ становится нулевым. Значит, одно уравнение системы исчезает. Существует еще одна внутренняя степень свободы — замена параметра t на ct', в результате которой коэффициенты a_j^i превратятся в $c^j a_j^i$. Следовательно, мы можем сделать нормализацию и положить $a_1^0 = 1$. Таким образом, мы приходим к системе из mk уравнений от $(n+1)m-1$ переменных. Следовательно, мы можем ожидать, что

(i) если $k < n+1$, то через каждую точку гиперповерхности H проходит рациональная кривая;

(ii) если $k \geq n+1$, то не существует рациональной кривой, проходящей через общую точку гиперповерхности H.

Хотя приведенные выше рассуждения не вполне строгие, полученные из них следствия в действительности верны.

Сравнивая эти результаты с примером 8.20(iii), получаем, что для гладкой гиперповерхности H условие $\kappa(H) = -\infty$ выполнено тогда и только тогда, когда она покрывается рациональными кривыми.. Это наблюдение приводит к следующей гипотетической структурной характеризации класса $\kappa = -\infty$:

8.25. $\kappa = -\infty$. **Проблема характеризации.** Верно ли, что для гладкого проективного многообразия X условие $\kappa(X) = -\infty$ равносильно тому, что X можно покрыть рациональными кривыми?

Предположим, что многообразие X покрывается рациональными кривыми. Можно доказать, что почти все многообразие X можно покрыть кривыми из одного и того же семейства, т.е. существует многообразие Y (можно предполагать, что $\dim Y = \dim X - 1$) и доминантное рациональное отображение $f : Y \times \mathbf{CP}^1 \dashrightarrow X$. Согласно примеру 8.20(iii),

$$P_m(Y \times \mathbf{CP}^1) = 0.$$

Следовательно, из теоремы 8.15 следует, что $P_m(X) = 0$. Таким образом, $\kappa(X) = -\infty$. Заметим также, что из следствия 8.14 можно вывести, что K_X не является численно эффективным. Трудная часть проблемы состоит в доказательстве обратиого утверждения. Его справедивость для кривых и поверхностей была известна уже к рубежу настоящего столетия, но его доказательство, опираюощееся на общую концепцию, было получено лишь в рамках программы Мори. Недавнее решение этой проблемы в размерности три демонстрирует силу этнх новых методов.

8.26. Рациональные кривые. Приведенная проблема является лишь одним из примеров, показывающих, что понимание расположения рациональных кривых на многообразии X дает ключ к пониманию геометрии самого многообразия X. Общая закономерность состоит в том, что многообразие X имеет ряд очень хороших свойств, если оно не содержит рациональных кривых. Чем больше рациональных кривых содержит многообразие X, тем более сложной становится его бирациональная геометрия. Последующие главы будут изобиловать примерами, подтверждающими этот руководящий принцип программы Мори.

9. Бирациональная геометрия поверхностей

Алгебраические поверхности представляют собой единственный класс примеров, в которых хорошо изучен первый шаг основной стратегии, описанной в п. 8.2. Это будет обсуждаться в настоящм разделе.

9.1. Теория пересечений. Если X – гладкая проективная поверхность, то, поскольку она ориентирована (см. п. 6.3), двойственность Пуанкаре отождествляет пространства H_2 и H^2. Если $C_i \subset X$ – некоторая кривая, то ее класс $[C_i]$ принадлежит $H_2(X, \mathbb{Z})$. Поэтому можно говорить об индексе пересечения $[C_1]\cdot[C_2] \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. В частности, определен индекс самопересечения $[C]\cdot[C]$.

Если $f: X \longrightarrow Y$ – сюръективное отображение между поверхностями, то двойственность Пуанкаре позволяет определить отображения f_* и f^* на группах гомологий или когомологий.

Мы будем их свободно использовать.

Напомним основной прием, применяемый в вычислениях: любые две линии уровня мероморфной функции гомологичны друг другу.

9.2. Топология раздутия. Пусть в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ введены координаты x и y. Положим

$$U = \mathbb{C}^2 - 0.$$

Рассмотрим отображение инверсии

$$t : (x, y) \longrightarrow (x/(x\bar{x} + y\bar{y}),\ y/(x\bar{x} + y\bar{y})).$$

Очевидно, что $t^2 = \mathrm{id}$, и отображение t оставляет неподвижными прямые, проходящие через начало координат. Сфера $S = (x\bar{x} + y\bar{y} = 1)$ является множеством неподвижных точек отображения t, которое переводит множество U в себя, причем внутренность S переходит в ее внешность. Рассмотрим теперь пополнение $\mathbb{C}^2$ до проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, которое получается после добавления бесконечно удаленной прямой L. Обозначим через U^+ подмножество в $\mathbb{C}P^2$

$$L \cup \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x\bar{x} + y\bar{y} \geq 1\}.$$

Тогда дополнение $\mathbb{C}P^2 - U^+$ является открытым шаром вида $(x\bar{x} + y\bar{y} < 1)$. Отображение t имеет непрерывное продолжение на бесконечно удаленную прямую L, которая в результате отображается в начало координат. Однако t нельзя доопределить в точке $0 \in \mathbb{C}^2$. Пусть B – четырехмерное многообразие, получаемое склейкой двух экземпляров U^+ вдоль границы S, причем на втором экземпляре U^+ мы будем рассматривать противоположную ориентацию. Пусть $\overline{\mathbb{C}P^2}$ обозначает комплексную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$ как четырехмерное многообразие с противоположной ориентацией. Тогда многообразие B является связной суммой $\mathbb{C}P^2$ и $\overline{\mathbb{C}P^2}$.

Определим отображение $p : B \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ следующим образом: $p = \mathrm{id}$ на первом экземпляре U^+ и $p = t \circ \mathrm{id}$ на втором экземпляре U^+. Заметим, что t является взаимно однозначным отображением вне точки $0 \in \mathbf{C}^2$, а бесконечно удаленная прямая $\overline{L}$ на втором экземпляре U^+ отображается в точку 0. Точки $\overline{L}$ взаимно однозначно соответствуют прямым, проходящим через начало координат; таким образом, $B \approx B_0\mathbf{CP}^2$.

Для проективной плоскости выполнено равенство $[L][L] = 1$, поэтому на многообразии $\overline{\mathbf{CP}^2}$ имеем $[\overline{L}][\overline{L}] = -1$.

Поскольку любые два раздутия локально выглядят одинаково, в общем случае получаем следующее утверждение:

Пусть X — гладкая алгебраическая поверхность, а x — ее точка. Тогда раздутие B_xX диффеоморфно связной сумме X и $\overline{\mathbf{CP}^2}$. Если кривая $E \subset B_xX$ является прообразом точки x, то $[E][E] = -1$.

Следует особо отметить, что многообразие $\overline{\mathbf{CP}^2}$ никаким способом нельзя представить в виде комплексного многообразия. Поэтому процесс раздутия нельзя представить с помощью операции связной суммы над комплексными многообразиями.

9.3. Локальные координаты раздутия. Локальное описание раздутия является более простым. Пусть D – единичный шар с координатами (x, y). Тогда раздутие B_0D задается в $D \times \mathbf{CP}^1$ уравнением $ty - xs = 0$, где $(t:s)$ – однородные координаты на проективной прямой $\mathbf{CP}^1$. Если $s \neq 0$, то в $D \times \mathbf{CP}^1$ имеем соотношение $x = ty/s$. Таким образом, можно выбрать в качестве локальных координат переменные $y' = y$ и $x' = t/s = x/y$. На открытом подмножестве, удовлетворяющем условию $t \neq 0$, в качестве локальных координат можно выбрать переменные $x'' = x$ и $y'' = s/t = y/x$.

В частности, для естественного отображения $p : B_0D \longrightarrow D$ имеем

$$p^*(dx \wedge dy) = y'\,dx' \wedge dy' = x''dx'' \wedge dy''.$$

Следовательно, прообраз дифференциальной формы вдоль кривой $E = p^{-1}(0)$ приобретает нуль кратности 1.

9.4. Отображение f^* на кривых. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ — регулярное бирациональное отображение между гладкими проективными поверхностями, а C — некоторая алгебраическая кривая на Y. Наша цель состоит в том, чтобы определить кривую $f^*C \subset X$, такую, что $[f^*C] = f^*[C]$.

Отображение f^{-1}, за исключением конечного числа точек $\{y_i\}$, является регулярным. Каждый прообраз $f^{-1}(y_i)$, согласно теореме 5.17, связен и представляет собой некоторое алгебраическое подмногообразие, не являющееся точкой. Таким образом, все эти прообразы — объединения неприводимых кривых, называемых исключительными кривыми для отображения f, их мы обозначим через $\{E_j\}$.

Пусть $C' \subset X$ — замыкание множества $f^{-1}(C - \{y_i\})$. Эта кривая называется собственным прообразом кривой C. Если C не проходит ни через одну точку y_i, то очевидно, что $f^*(C) = C'$ — это мы и намеревались получить.

Если кривая C — множество нулей некоторой функции g, то обозначим через C_ε кривую, заданную уравнением $g = \varepsilon$. Предположим, что кривая C_ε не проходит через точки y_i. Таким образом, $f^*(C_\varepsilon) = C_\varepsilon'$ и кривая C_ε' является линией уровня функции $g \circ f$. Поскольку

$$[C_\varepsilon'] = [\{x \mid g \circ f(x) = 0\}],$$

класс кривой C_ε' совпадает с классом $f^*(C)$. Таким образом,

$$f^*(C) = C' + \sum m_j E_j,$$

где m_j — кратность нуля функции $g \circ f$ вдоль E_j. Следовательно, $m_j \geq 0$, и равенство $m_j = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда образ $f(E_j)$ не принадлежит кривой C.

9.5. Следствие. *Пусть в рассмотренной выше ситуации E — некоторая исключительная кривая. Тогда* $[E] \cdot [f^*C] = 0$.

Доказательство. По своему определению кривая f^*C гомологична кривой C_ε'. Поскольку последняя кривая не пересекает ни одну из исключительных кривых, имеем $[E] \cdot [C_\varepsilon'] = 0$.

9.6. Следствие. *Пусть $p : BY \longrightarrow Y$ — раздутие точки $y \in Y$, а E — соответствующая исключительная кривая. Тогда*

$$c_1(K_{BY}) = p^* c_1(K_Y) + [E].$$

Следовательно, $[E] \cdot c_1(K_{BY}) = -1$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из вычисления в п. 9.3, а второе – из равенства $[L][L] = -1$, полученного в п. 9.2.

Теперь мы перейдем к основному результату этого раздела, который показывает исключительную важность раздутий.

9.7. Теорема. *Пусть X — гладкая проективная поверхность, а $f : X \dashrightarrow Z$ — рациональное отображение поверхности X в некоторое проективное многообразие Z. Тогда существует конечная последовательность раздутий*

$$g_n : X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 = X,$$

такая, что композиция $f \circ g_n$ является всюду регулярным отображением.

Доказательство. Вложим многообразие Z в некоторое проективное пространство $\mathbf{CP}^n$. Пусть $\{H_t\}$ – семейство гиперплоскостей. Обозначим через Γ замыкание графика отображения f в $X \times Z$, а через p и q – естественные проекцни многообразия $X \times Z$.

Пусть $\{x_i\}$ – множество точек в X, в которых отображение f не определено. Тогда, согласно теореме 5.17, $p^{-1}(x_i)$ – некоторая кривая в Γ. Следовательно, $q(p^{-1}(x_i))$ – кривая в $\mathbf{CP}^n$.

Пусть

$$C_t = p(\Gamma \cap q^{-1}(H_t))$$

– замыканне множества $f^{-1}(Z \cap H_t)$. Согласно следствию 6.5,

$$[H_t][q(p^{-1}(x_i))] \neq 0.$$

Таким образом, множество $H_t \cap q(p^{-1}(x_i))$ непусто. Следовательно, кривая C_t проходит через все точки x_i. При достаточно общем выборе t' пересечение $f(X) \cap H_t \cap H_{t'}$ состоит лишь из дискретного множества точек. Тем же самым свойством обладает пересечение $C_t \cap C_{t'}$. Согласно следствию 6.4, из этого вытекает, что $[C_t]\cdot[C_t] = [C_t]\cdot[C_{t'}] \geq 0$.

Пусть теперь $p_1 : X_1 \longrightarrow X_0$ — раздутие одной из точек x_i, а E — соответствующая исключительная кривая. С помощью композиции $f\circ p_1$ можно определить кривую C_t^1, являющуюся собственным прообразом кривой C_t. Согласно п. 9.4, имеем $p_1^*(C_t) = C_t^1 + mE$, где $m > 0$, поскольку кривая C_t проходит через точки x_i. Таким образом,

$$[C_t^1]\cdot[C_t^1] = [p^*(C_t)]\cdot[p^*(C_t)] - 2m[p^*(C_t)]\cdot[E] + m^2[E]\cdot[E].$$

Первый член в правой части равенства совпадает с $[C_t]\cdot[C_t]$, второй член равен нулю (см. п. 9.5), третий $-m^2$ (см. п. 9.2). Таким образом,

$$[C_t^1]\cdot[C_t^1] = [C_t]\cdot[C_t] - m^2 < [C_t]\cdot[C_t].$$

Если композиция $f\circ p_l$ не является регулярным отображением, то аналогичным способом можно получит раздутие p_{l+1} и кривую C_t^{l+1}. Мы уже убедились, что индексы пересечений $[C_t^j]\cdot[C_t^j]$ образуют строго убывающую последовательность из неотрицательных целых чисел. Следовательно, наш процесс должен оборваться. Это доказывает теорему.

9.8. Следствие. *Пусть в условиях 9.7 отображение f не является регулярным. Тогда многообразие Z содержит рациональную кривую.*

Доказательство. Пусть $p_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ — последнее необходимое раздутие, а E — его исключительная кривая. Если бы образ $f(E)$ был точкой, то композиция $f\circ p_{n-1}$ была бы также регулярным отображением. Следовательно, $f(E)$ — рациональная кривая в многообразии Z.

9.9. Замечание. Согласно п. 8.7, доказанное утверждение остается верным для гладкого проективного многообразия X произвольной размерности. Это служит еще одним примером, подтверждающим тезис о том, что рациональные кривые являются источником усложнения алгебраических многообразий.

9.10. Следствие. *Пусть $X \dashrightarrow Z$ — бирациональное отображение гладких проективных поверхностей. Предположим, что для каждой кривой $C \subset Z$ выполнено равенство $[C]\cdot c_1(K_Z) \geq 0$. Тогда отображение f является регулярным.*

Доказательство. Снова рассмотрим последнее необходимое раздутие $p_n: X_n \longrightarrow X_{n-1}$ с исключительной кривой E. Так как образ $f(E)$ не является точкой, то, согласно следствию 8.14, имеем неравенство

$$[E]\cdot c_1(K_{X_n}) \geq [f(E)]\cdot c_1(K_Z) \geq 0.$$

С другой стороны, из п. 9.6 следует, что $[E]\cdot c_1(K_{X_n}) = -1$, — противоречие. Следовательно, отображение f регулярно.

9.11. Следствие. *Класс бирациональной эквивалентности гладких проективных поверхностей содержит самое большее один представитель, имеющий численно эффективное каноническое расслоение.*

Теоремы 8.7 и 9.7 редуцируют проблему изучения произвольных бирациональных отображений к изучению регулярных бирациональных отображений. Если $f: X \longrightarrow Z$ — регулярное бирациональное отображение, то можно применить теорему 8.7 или 9.7 к бирациональному отображению f^{-1}, что, в свою очередь, даст некоторую информацию о самом отображении f. Рассмотрим следующие два результата, полученные этим путем.

Пусть $B \subset Z$ — множество точек, в которых отображение f^{-1} не является регулярным. Обозначим через E прообраз $f^{-1}(B) \subset X$.

9.12. Предложение. *В сформулированных выше обозначениях, множество E покрывается рациональными кривыми.*

Доказательство. Согласно теореме 8.7, существует некоторая последовательность раздутий $g_n : Z_n \to \cdots \to Z_0 = Z$, такая, что отображение $f^{-1} \circ g_n$ является регулярным. По определению каждое раздутие порождает исключительное множество, которое покрывается экземплярами проективного пространства $\mathbf{C}P^{k-1}$ (см. 8.6(iii)). Следовательно, это множество покрывается рациональными кривыми, а их образы относительно $f^{-1} \circ g_n$ покрывают множество E. Получаем требуемое утверждение.

Более важным является второй результат.

9.13. Теорема. *Пусть $f : X \to Z$ — регулярное бирациональное отображение гладких проективных многообразий, а $E \subset X$ и $B \subset Z$ — введенные выше подмножества. Предположим, что f не является изоморфизмом, т. е. $E \neq \varnothing$. Тогда существует рациональная кривая $D \subset E$, такая, что $[D]c_1(K_X) < 0$.*

Доказательство. Согласно следствию 5.19. имеем $\dim B \le \dim Z - 2$. Выберем произвольную точку $z \in B$ и рассмотрим общую гладкую кривую C_0, проходящую через эту точку. Будем двигать кривую C_0 в некотором общем направлении, чтобы получить семейство кривых $\{C_t\}$. Предположим, что объединение $\cup C_t$ является гладкой поверхностью S, причем $C_0 \cap B = z$ и для значений t, близких к 0, выполнятся $C_t \cap B = \varnothing$.

Поскольку отображение $f^{-1} : S \dashrightarrow X$ может оказаться нерегулярным в точке $z \in C_0 \subset S$, воспользуемся теоремой 9.7, чтобы получить последовательность раздутий $h_n : S_n \longrightarrow S$, таких, что композиция $p = f^{-1} \circ h_n : S_n \to X$ уже регулярна. Если $D_i \subset S_n$ — исключительные кривые относительно h_n, то

$$h_n^{-1}(C_0) = C_0' + \sum m_i D_i \qquad (m_i \ge 0)$$

и $h_t^{-1}(C_t) = C_t'$ для $t \neq 0$, где C_t' — собственный прообраз (см. п. 9.4). В частности, $[C_0'] + \sum m_i [D_i] = [C_t']$ $(t \neq 0)$. Применяя отображение p, получаем

$$(*) \qquad [p(C_0')] + \sum m_i [p(D_i)] = [p(C_t')] \ (t \neq 0).$$

Теперь вычислим индексы пересечения с $c_1(K_X)$. Поскольку при $t \neq 0$ выполнено условие $p(C_t') \cap E = \varnothing$ и образ $p(C_0')$ не принадлежит E, мы можем воспользоваться следствием 8.14 и получить,

$$[p(C_t')]c_1(K_X) = [f \circ p(C_t')]c_1(K_Z) = [C_t]c_1(K_Z) \quad (t \neq 0);$$

$$[p(C_t')]c_1(K_X) > [f \circ p(C_0')]c_1(K_Z) = [C_0]c_1(K_Z).$$

Из непрерывности семейства $\{C_t\}$ получаем неравенство

$$[p(C_0')]c_1(K_X) > [p(C_t')]c_1(K_X).$$

Используя его в равенстве (*), приходим к неравенству

$$\sum m_i [p(D_i)]c_1(K_X) < 0.$$

Следовательно, существует по крайней мере один индекс i, для которого $p(D_i)$ не является точкой и $[p(D_i)]c_1(K_X) < 0$. Поскольку

$$f \circ p(D_i) = f \circ f^{-1} \circ h_n(D_i) = h_n(D_i) = z \in B,$$

получаем, что $p(D_i) \subset E$. Таким образом, $D = D_i$ — искомая рациональная кривая.

9.14. Резюме. Мы постепеннно получаем все лучшее описание бирациональных классов алгебраических многообразий. Если $f : X' \longrightarrow X$ — регулярное бирациональное отображение, то разумно предположить, что многообразие X' является более сложным, чем многообразие X. С помощью раздутий гладких подмногообразий мы всегда можем сделать многообразие еще сложнее. Разрешение неопределенностей рациональных отображений (см. п. 8.7) и теорема 9.7 показывают, что этим путем можно получить сколь угодно сложные многообразия. Интересно было бы на самом деле найти внутри фиксированного класса бирациональной эквивалентности наиболее простые многообразия. Теорема 9.13 показывает, что если многоообразие X' является более сложным, чем многообразие X, то существует кривая $D \subset X'$, удовлетворяющая условию $[D]c_1(K_{X'}) < 0$, т.е. канонический класс $K_{X'}$ не является численно эффективным. По крайней мере для случая поверхностей справедливо обратное утверждение: если K_X численно эффективен, то поверхность X является простейшим представителем своего класса бирациональной эквивалентностн (см. следствне 9.10). В высших размерностях такое многообразие X может быть не еднественным наименьшнм представителем своего бирационального класса, однако по крайней мере можно утверждать, что в этом классе не существует других многообразий, меньших X. С этой точки зрения программу Морн можно рассматривать как поиск нанменьших многообразий в фиксированном классе бирациональной эквивалентности.

10. Программма Мори: гладкий случай

Как мы уже убедилнсь в предыдущих разделах, легче разобраться с алгебранческими многообразиями X, для которых канонический класс K_X обилен илн по крайней мере численно эффективен. Первая часть программы Мори предоставляет наглядное геометрическое объяснение, почему свойство чнсленной эффективности канонического класса K_X может нарушиться в каждом конкретном случае.

10.1. Определенне. Пусть X — гладкое проективное алгебраическое многообразне. Тогда канонический класс K_X можно рассматривать как лннейную функцию на конусе $\overline{NE}(X)$. Подконус

$$\overline{NE}(X)^{-} = \overline{NE}(X) \cap \{\, z \in H_2(X, \mathbb{R}) \mid z \cdot c_1(K_X) < 0 \,\}$$

будет называться отрнцательной частью конуса $\overline{NE}(X)$. Мы также будем называть некоторый подконус $V \subset \overline{NE}(X)$ отрнцательным, еслн $V - \{0\} \subset \overline{NE}(X)^{-}$.

Допуская небольшую вольность, будем говорить, что экстремальный луч порожден кривой C, еслн он порождается классом $[C] \in H_2(X, \mathbb{R})$.

Первый важный результат Мори состоит в следующем:

10.2. Первая основная теорема. *Пусть X — гладкое проек-*

тивное многообразие. Тогда конус $\overline{NE(X)}^{-}$ является локально конечно порожденным и каждый отрицательный экстремальный луч порождается рациональной кривой $C \subset X$, удовлетворяющей условиям

$$0 > [C] \cdot c_1(K_X) \geq -\dim X - 1.$$

Доказательство. Если конус $\overline{NE(X)}^{-}$ пуст, то доказывать нечего. В противном случае существует кривая $D \subset X$, такая, что $[D] \cdot c_1(K_X) < 0$. Далее будет приведен лишь набросок рассуждений, позволяющих получить с помощью D некоторую рациональную кривую C[1]. Остальная часть доказательства теоремы носит технический характер. Первый шаг в нахождении кривой C использует следующую лемму. $\square$

10.3. Лемма о деформации. *Пусть $g : \overline{D} \longrightarrow X$ — нормализация кривой D. Предположим, что существует гладкая аффинная кривая P и отображение $G : \overline{D} \times P \longrightarrow X$, удовлетворяющее условиям*

(i) $\dim G(\overline{D} \times P) = 2$;

(ii) *для некоторой точки $p_0 \in P$ выполнено равенство* $G(\cdot, p_0) = g(\cdot)$;

(iii) *для некоторой точки $d_0 \in \overline{D}$ выполнено равенство* $G(d_0, \cdot) = g(d_0)$.

Иначе говоря, отображение g можно включить в нетривиальное семейство отображений $G(\cdot, p) : \overline{D} \longrightarrow X$, для которых фиксирован образ точки d_0.

Тогда X содержит рациональную кривую.

Доказательство. Пополним кривую P до проективной кривой $\overline{P}$. Тогда отображение G продолжается до некоторого рационального отображения $\overline{G} : \overline{D} \times \overline{P} \longrightarrow X$. Предположим сначала, что это отображение является регулярным. Тогда $\overline{G}(\{d_0\} \times \overline{P})$ — точка; следовательно, согласно теореме о жесткости (см. п. 5.23), $\overline{G}(\{d\} \times \overline{P})$ также является точкой для каждой точки

[1] Более подробное доказательство см. в лекции 4 основной книги. — *Прим. ред.*

верхность X является простейшим представителем своего класса бирациональной эквивалентности (см. следствие 9.10). В высших размерностях такое многообразие X может быть не единственным наименьшим представителем своего бирационального класса, однако по крайней мере можно утверждать, что в этом классе не существует других многообразий, меньших X. С этой точки зрения программу Мори можно рассматривать как поиск наименьших многообразий в фиксированном классе бирациональной эквивалентности.

10. Программма Мори: гладкий случай

Как мы уже убедились в предыдущих разделах, легче разобраться с алгебраическими многообразиями X, для которых канонический класс K_X обилен или по крайней мере численно эффективен. Первая часть программы Мори предоставляет наглядное геометрическое объяснение, почему свойство численной эффективности канонического класса K_X может нарушиться в каждом конкретном случае.

10.1. Определение. Пусть X — гладкое проективное алгебраическое многообразие. Тогда канонический класс K_X можно рассматривать как линейную функцию на конусе $\overline{NE}(X)$. Подконус

$$\overline{NE}(X)^{-} = \overline{NE}(X) \cap \{ z \in H_2(X, \mathbf{R}) \mid z \cdot c_1(K_X) < 0 \}$$

будет называться отрицательной частью конуса $\overline{NE}(X)$. Мы также будем называть некоторый подконус $V \subset \overline{NE}(X)$ отрицательным, если $V - \{0\} \subset \overline{NE}(X)^{-}$.

Допуская небольшую вольность, будем говорить, что экстремальный луч порожден кривой C, если он порождается классом $[C] \in H_2(X, \mathbf{R})$.

Первый важный результат Мори состоит в следующем:

10.2. Первая основная теорема. *Пусть X — гладкое проек-*

тивное многообразие. Тогда конус $\overline{NE(X)}^-$ *является локально конечно порожденным и каждый отрицательный экстремальный луч порождается рациональной кривой* $C \subset X$, *удовлетворяющей условиям*

$$0 > [C] \cdot c_1(K_X) \geq -\dim X - 1.$$

Доказательство. Если конус $\overline{NE(X)}^-$ пуст, то доказывать нечего. В противном случае существует крнвая $D \subset X$, такая, что $[D] \cdot c_1(K_X) < 0$. Далее будет приведен лншь набросок рассуждений, позволяющих получить с помощью D некоторую рациональную кривую C[1]. Остальная часть доказательства теоремы носит техническнй характер. Первый шаг в нахождении кривой C использует следующую лемму.

10.3. Лемма о деформацнн. *Пусть* $g : \overline{D} \longrightarrow X$ *— нормализация кривой* D. *Предположим, что существует гладкая аффинная кривая* P *и отображение* $G : \overline{D} \times P \longrightarrow X$, *удовлетворяющее условиям*

(i) $\dim G(\overline{D} \times P) = 2$;

(ii) *для некоторой точки* $p_0 \in P$ *выполнено равенство* $G(\cdot, p_0) = g(\cdot)$;

(iii) *для некоторой точки* $d_0 \in \overline{D}$ *выполнено равенство* $G(d_0, \cdot) = g(d_0)$.

Иначе говоря, отображение g *можно включить в нетривиальное семейство отображений* $G(\cdot, p) : \overline{D} \longrightarrow X$, *для которых фиксирован образ точки* d_0.

Тогда X *содержит рациональную кривую.*

Доказательство. Пополним кривую P до проективной кривой $\overline{P}$. Тогда отображение G продолжается до некоторого рационального отображения $\overline{G} : \overline{D} \times \overline{P} \longrightarrow X$. Предположим сначала, что это отображение является регулярным. Тогда $\overline{G}(\{d_0\} \times \overline{P})$ — точка; следовательно, согласно теореме о жесткости (см. п. 5.23), $\overline{G}(\{d\} \times \overline{P})$ также является точкой для каждой точки

[1] Более подробное доказательство см. в лекции 4 основной книги. — *Прим. ред.*

$d \in \overline{D}$. Такнм образом, получаем трнвнальность семейства. Противоречие.

Поэтому отображение $\overline{G}$ не может быть регулярным, и, пользуясь следствием 9.8, мы находим в X рацнональную кривую.

Теперь рассмотрим проблему нахождения приведенного выше семейства отображений G. Это рассмотрение прнводит к более общему вопросу. Пусть задано некоторое отображение $f: U \longrightarrow V$. Каким образом можно слегка пошевелить f?

10.4. Малые деформации. Предположим, что нам задано семейство отображений $f_t: U \longrightarrow V$. Тогда предел

$$\lim (f_t(u) - f_0(u))/t$$

является касательным вектором к многообразию V в точке $f_0(u)$. Еслн мы будем варьировать точку u по многообразню U, то получим некоторое сечение расслоения $f_0^* T_V$. Таким образом, еслн мы имеем нетрнвиальное семейство f_t, то обязательно расслоение $f_0^* T_V$ имеет нетрнвиальное сечение.

Имея в внду нашу первоначальную ситуацию, найдем сечения расслоения $g^* T_V$. Это векторное расслоение ранга $\dim X$ над гладкой крнвой. Если вообразить, что это расслоение является прямой суммой линейных расслоений, то теорема Рнмана даст соотношение

$$\begin{aligned}\dim \Gamma(\overline{D}, g^* T_X) &\geq \deg g^* T_X + (1 - g(\overline{D}))\dim X = \\ &= [D] c_1(T_X) + (1 - g(\overline{D}))\dim X = \\ &= -[D] c_1(K_X) + (1 - g(\overline{D}))\dim X,\end{aligned}$$

где $g(\overline{D})$ — род кривой $\overline{D}$. Оказывается, что это неравенство также верно н в общем случае.

Мы должны принять во внимание еще одно условие, а именно, мы не хотим, чтобы при деформации изменялся образ $g(d_0)$. Из этого условня следует, что соответствующее сечение должно иметь нуль в точке d_0. Последнее налагает $\operatorname{rank} g^* T_X = \dim X$ новых условий. Таким образом, если обозначить через $\Gamma(D, g^* T_X(-d_0))$ те сечення нз $\Gamma(D, g^* T_X)$, которые обращаются в нуль в точке d_0, мы получаем неравенство

$$\dim \Gamma(\overline{D}, g^*T_X(-d_0)) \geq -[D]c_1(K_X) - g(\overline{D})\dim X.$$

Элемент пространства $\Gamma(\overline{D}, g^*T_X(-d_0))$ можно рассматривать как линейную аппроксимацию к некоторому семейству отображений G. Обратно, можно надеяться, что для любой линейной аппроксимации действительно существует некоторое семейство отображений с этой аппроксимацией. Вообще говоря, это не совсем верно, однако можно доказать, что при

$$-[D]c_1(K_X) - g(\overline{D})\dim X > 0$$

действительно существует требуемое семейство отображений $G : \overline{D} \times P \longrightarrow X$. Следует опять заметить, что в категории гладких многообразий такое семейство существует всегда, и проблема состоит в том, чтобы обеспечить его голоморфность.

10.5. Как сделать число $-[D]c_1(K_X) - g(\overline{D})\dim X$ положительным? Первое слагаемое в этом числе является положительным по предположению, однако мы не можем сравнить его с $g(\overline{D})\dim X$. Идея состоит в том, чтобы заменить кривую $\overline{D}$ другой так, чтобы при этом первый член увеличился, а второй остался неизменным.

Если $g(\overline{D}) = 0$, то $\overline{D}$ уже является рациональной кривой, и делать нечего.

Предположим теперь, что $g(\overline{D}) = 1$, т.е. что $\overline{D}$ — эллиптическая кривая. Возьмем n^2-листное накрытие $n : \overline{D} \longrightarrow \overline{D}$, введенное в п. 3.3(iv), и рассмотрим композицию $g \circ n : \overline{D} \longrightarrow X$. Ее образом снова является кривая D, однако она должна быть подсчитана с кратностью n^2. Таким образом, приведенное выше неравенство приобретает вид

$$\dim \Gamma(\overline{D}, (g \circ n)^*T_X(-d_0)) \geq -n^2[D]c_1(K_X) - \dim X.$$

Если $n \gg 0$, то левая часть этого неравенства становится положительной, и отображение $g \circ h$ можно использовать для нахождения рациональной кривой.

Теперь положим $g(\overline{D}) \geq 2$. Тогда, согласно предложению 3.5, все отображения кривой $\overline{D}$ в себя являются взаимно однозначными. Если мы тем не менее будем рассматривать другие накрытия $p: E \longrightarrow \overline{D}$ и соответствующие композиции $g \circ p$, то число $g(\overline{D})$ заменится на $g(E)$, и эта замена будет препятствовать положительности требуемого числа. Таким образом, для того, чтобы наш метод работал, нам необходимы отображения кривой $\overline{D}$ в себя.

10.6. Последняя надежда — конечные поля. Предположим временно, что вместо алгебраических многообразий над полем $\mathbf{C}$ мы стали рассматривать алгебраические многообразия над конечным полем $\mathbf{F}_p$ — полем вычетов кольца целых чисел по модулю p. С точки зрения алгебры нет никаких проблем в определении аффинного пространства $\mathbf{F}_p^n$, проективного пространства $\mathbf{F}_p\mathbf{P}^n$ и алгебраических подмногообразий в $\mathbf{F}_p\mathbf{P}^n$. Многочлены над полем $\mathbf{F}_p$ не всегда имеют корни в этом же поле. Это, как и в случае поля $\mathbf{R}$, приводит к трудностям. Поэтому мы введем поле $\overline{\mathbf{F}}_p$, состоящее из всех корней многочленов из кольца $\mathbf{F}_p[x]$, и будем работать с проективным пространством $\overline{\mathbf{F}}_p\mathbf{P}^n$. Одним из замечательных свойств этого проективного пространства является существование отображения Фробениуса

$$F(x_0 : \ldots : x_n) = (x_0^p : \ldots : x_n^p).$$

Поле $\overline{\mathbf{F}}_p$ обладает свойством $(x+y)^p = x^p + y^p$, поскольку в биномиальном разложении $(x+y)^p = \sum \binom{p}{i} x^i y^{p-i}$ все биномиальные коэффициенты $\binom{p}{i}$, кроме первого и последнего, делятся на p. Таким образом, для любого многочлена

$$f = \sum a_{i_0,\ldots,i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}$$

из кольца $\overline{\mathbf{F}}_p[x_0,\ldots,x_n]$ имеем

$$f(x_0,\ldots,x_n)^p = \sum a^p_{i_0,\ldots,i_n} (x_0^p)^{i_0} \ldots (x_n^p)^{i_n}.$$

Если a — элемент поля $\mathbf{F}_p$, то $a^p = a$. Следовательно, если f — многочлеи из кольца $\mathbf{F}_p[x_0,\dots,x_n]$ (т. е. все его коэффициенты принадлежат $\mathbf{F}_p$), то

$$f(x_0,\dots,x_n)^p = f(x_0^p,\dots,x_n^p).$$

Значнт, если X — алгебраическое подмногообразне в $\overline{\mathbf{F}}_p\mathbf{P}^n$, определяемое уравнениямн из кольца $\mathbf{F}_p[x_0,\dots,x_n]$ (а не из кольца $\overline{\mathbf{F}}_p[x_0,\dots,x_n]$), то морфизм Фробениуса переводит X в себя.

Все это хорошо, но для чего это нужно? Решающим здесь является то, что многообразие X не является комплексным многообразием, хотя оно по-прежиему проективно. Рассмотрим многообразие X н кривую $\overline{D}$ по модулю p.

10.7. Редукция по модулю р. Пусть многообразне X вложено в проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ и задано в нем уравнениями $f_1 = \dots = f_k = 0$. Для простоты предположим, что многочлены f_i имеют рациональные коэффициенты. Поскольку умножением на некоторое число можно избавится от знаменателей в этих коэффициентах, мы можем предполагать, что все коэффицненты многочленов f_i являются целыми числами. Теперь можно редуцировать эти многочлены по модулю p и рассмотреть многообразне X^p, задаваемое в $\overline{\mathbf{F}}_p\mathbf{P}^n$ уравнениями

$$f_1 = \dots = f_k = 0 \pmod p.$$

Как мы видели в прнмере 8.24, рациональная кривая $C \subset X$ определяется некоторым отображением $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{P}^n$, заданным с помощью многочленов:

$$t \longrightarrow \left[\sum_0^m a_i^0 t^i : \dots : \sum_0^m a_i^n t^i\right] \in \mathbb{C}\mathbf{P}^n,$$

причем образ этого отображения лежит в многообразии X тогда и только тогда, когда все многочлены

$$f_j\left[\sum_0^m a_i^0 t^i : \dots : \sum_0^m a_i^n t^i\right]$$

тождественно равны нулю. Это условие прнводнт к некоторой системе полиномиальных уравнений Σ от переменных a_i^s, коэффициенты которых являются, в свою очередь, многочленами от коэффициентов многочленов f_j, т. е. целыми числами. Теперь мы воспользуемся следующим принципом:

Пусть Σ – система многочленов с целыми коэффициентами, причем эта система имеет общий корень в поле $\overline{\mathbf{F}}_p$ для каждого простого числа p. Тогда система Σ имеет общий корень в $\mathbf{C}$.

Поясним этот принцип на примере линейных многочленов. В этом случае критерий разрешимости состоит в обращении в нуль некоторых определителей, составленных из коэффициентов этих уравнений. Условие разрешимости этой же системы над полем $\overline{\mathbf{F}}_p$ эквивалентно обращению в нуль тех же определителей по модулю p. Очевидно, что целое число является нулем тогда и только тогда, когда оно равно нулю по модулю любого простого числа p. Это доказывает сформулированный принцип для случая линейных систем. В общем случае требуется найти аналогичные условия разрешимости для нелинейных систем. Эта задача была решена еще в XIX столетии.

Таким образом, нахождение рациональных кривых по модулю p в конце концов дает нам рациональную кривую на самом многообразии X.

Есть, правда, еще задача – разработать всю алгебраическую геометрию уже над полем $\overline{\mathbf{F}}_p$, и это на самом деле можно сделать. После этого для каждого p мы можем найти рациональную кривую X^p тем же способом, который использовался в п. 10.5, рассматривая вместо отображения $n : \overline{D} \longrightarrow \overline{D}$ морфизм Фробениуса $\overline{D^p} \longrightarrow \overline{D^p}$.

10.8. Замечание. (i) Приведенный выше способ доказательства существования рациональных кривых в действительности кажется довольно необычным, однако он является до сих пор единственным. Следует отметить особо, что существуют компактные комплексные трехмерные гладкие многообразия X, которые содержат некоторую кривую D, удовлетворяющую условию $[D]c_1(K_X) < 0$, но не содержат ни одной рациональной кривой.

(ii) В приведенных в п. 10.7 рассуждениях содержатся два момента, требующие аккуратности. Во-первых, что делать, если f_i — многочлены не с рациональными коэффициентами? Пусть $\{b_j\}$ — множество всех коэффициентов многочленов f_j; рассмотрим кольцо $\mathbf{Z}[b_j] \subset \mathbf{C}$. Если $\mathfrak{p} \subset \mathbf{Z}[b_j]$ — его произвольный максимальный идеал, то факторкольцо $\mathbf{Z}[b_j]/\mathfrak{p}$ является конечным полем. Таким образом, мы можем редуцировать многообразие X по модулю $\mathfrak{p}$ и использовать предыдущие рассуждения.

Второй момент в доказательстве является более тонким. Если мы хотим найти некоторое отображение $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{CP}^n$, задаваемое многочленами степени m, то соотвествующая система будет зависеть от числа m. Таким образом, для того чтобы воспользоваться сформулированным выше принципом, мы должны не только найти некоторое отображение $\overline{\mathbf{F}}_p \longrightarrow X^p$, задаваемое многочленами, но и обеспечить, чтобы степень этих многочленов не превосходила m. Этот, в какой-то мере технический, шаг основан на следующем наблюдении:

Если $C \subset X$ — некоторая рациональная кривая, то предыдущие рассуждения показывают, что эта кривая имеет нетривиальную деформация с *двумя* неподвижными точками. Как и в лемме 10.3, найдем новую рациональную кривую C'. Можно показать, что $[C']c_1(K_X) > [C]c_1(K_X)$. Это же рассуждение объясняет последнее неравенство в теореме 10.2.

(iii) Мы в некоторой степени можем контролировать расположение найденной рациональной кривой. Несложный анализ доказательств леммы 10.3, следствия 9.3 и теоремы 9.7 показывает, что рациональная кривая проходит через точку d_0. Из этого наблюдения вытекает следующая

10.9. Теорема. *Пусть X — гладкое проективное многообразие. Предположим, что антиканоническое линейное расслоение $-K_X$ является обильным. Тогда многообразие X покрывается рациональными кривыми*[1] .

---

[1] Такие многообразия называются многообразиями Фано. — *Прим. ред.*

Доказательство. Пусть задана точка $d_0 \in X$. Выберем кривую D, проходящую через точку d_0. Тогда $[D]c_1(K_X) < 0$. Следовательно, согласно замечанию 10.8(iii), существует рациональная кривая, проходящая через d_0.

Следующий важный результат состоит в полном описании стягиваний отрицательных экстремальных лучей для случая $\dim X \leq 3$. Начнем с двумерного случая.

10.10. Вторая основная теорема ($\dim X = 2$). *Пусть X — гладкая проективная поверхность, а $C \subset X$ — рациональная кривая, порождающая некоторый экстремальный луч. Согласно теореме 10.2, имеют место неравенства $0 > [C]c_1(K_X) > -3$. Тогда этот экстремальный луч может быть стянут (см. п. 6.12) и мы получаем один из следующих случаев.*

(i) $[C]c_1(K_X) = -3$. *Тогда $X = \mathbf{CP}^2$, $C \subset X$ — прямая и стягивание f экстремального луча отображает X в точку.*

(ii) $[C]c_1(K_X) = -2$. *Тогда стягивание экстремального луча является отображением $f: X \longrightarrow E$ на некоторую гладкую проективную кривую, причем все слои этого отображения изоморфны $\mathbf{CP}^1$, а кривая C является одним из его слоев.*

(iii) $[C]c_1(K_X) = -1$. *Тогда $X = B_yY$ для некоторой гладкой поверхности Y, $f: B_yY \longrightarrow Y$ — стягивание, а C — его исключительная кривая.*

10.11. Следствие. *Пусть X — гладкая проективная поверхность. Тогда существует некоторая гладкая проективная поверхность Y, такая, что X может быть получена из Y с помощью последовательных раздутий точек и Y удовлетворяет в точности одному из следующих условий:*

(i) $Y \cong \mathbf{CP}^2$;

(ii) *поверхность Y обладает отображением на кривую E, причем все слои этого отображения изоморфны $\mathbf{CP}^1$;*

(iii) *канонический класс K_Y поверхности Y является численно эффективным.*

Доказательство. Если K_X численно эффективен, то положим $Y = X$. В противном случае можно стянуть некоторый экстремальный луч. Если при этом стягивании мы попадем в случаи (i) или (ii) теоремы 10.10, то снова положим $Y = X$. Если же мы оказались в случае (iii), то $X = BX_1$ и можно продолжить с поверхностью X_1 те же рассуждения, что и с X. Этот процесс остановится после, самое большее, $\dim H_2(X, \mathbf{R})$ шагов.

Классы бирациональной эквивалентности для случаев (i) и (ii) можно исследовать довольно легко. Получаем, что проективная плоскость $\mathbf{CP}^2$ бирациональна $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ и что в случае (ii) поверхность Y бирациональна произведению $E \times \mathbf{CP}^1$ и кривая E однозначно определена. Теперь утверждения 9.12 и 10.11 можно объединить следующим образом:

10.12. Следствие. *Пусть X — гладкая проективная поверхность. Тогда выполнено одно из следующих утверждений*

(i) *X бирациональна произведению $E \times \mathbf{CP}^1$, а следовательно, X покрывается рациональными кривыми и $P_m(X) = 0$ для всех $m \geq 1$;*

(ii) *класс бирациональной эквивалентности X содержит некоторую поверхность $\overline{X}$, такую, что $K_{\overline{X}}$ численно эффективен и X получается из $\overline{X}$ последовательным раздутием точек.*

Именно эта дихотомия была упомянута в п. 8.2.

10.13. Следствие. *Пусть X и Y — две гладкие бирационально эквивалентные проективные поверхности. Рассмотрим следующие утверждения:*

(i) *X и Y гомеоморфны;*

(ii) *X и Y диффеоморфны;*

(iii) $\dim H_2(X; \mathbf{R}) = \dim H_2(Y; \mathbf{R})$.

Тогда (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). *Импликация* (iii) $\Rightarrow$ (ii) *имеет место, за исключением случая, когда* $\dim H_2(X; \mathbf{R}) = 2$, *а поверхности X* и *Y — расслоения на двумерные сферы на некоторой топологической поверхности. В этом случае имеются два различных класса относительно диффеоморфизма.*

Доказательство. Если мы оказались в ситуации (ii) следствия 10.12, то из п. 9.2 следует, что поверхчость X диффеоморфна связной сумме поверхности $\overline{X}$ и нескольких экземпляров $\overline{\mathbf{CP}^2}$. Тем же свойством обладает поверхность Y. Из этого вытекает требуемое утверждение.

Случай 10.12(i) требует немного больше работы, но она состоит из простых топологических рассуждений, использующих следствие 10.11. Читатель может проделать эти рассуждения самостоятельно.

Теорема 10.10 дает также полное описание регулярных бирациональных отображений в размерности 2.

10.14. Теорема. *Пусть $g: X \longrightarrow Z$ — регулярное бирациональное отображение гладких проективных поверхностей. Тогда g — композиция отображений, обратных к раздутиям.*

Доказательство. Как мы видели в теореме 9.13, существует кривая $C \subset X$, такая, что $g(C)$ – точка и $[C]c_1(K_X) < 0$. Нетрудно доказать, что этой кривой C должна быть одна из экстремальных кривых, найденных в теореме 10.2. Теперь применим теорему 10.10. В случае (i) нли (ii) кривая C деформировалась в семейство кривых $\{C_t\}$, прнчем для любого t образ $g(C_t)$ в Z был бы гомологичен $g(C)$, т.е. точке. Это дает противоречие. Таким образом, остается лишь случай (iii), когда $X = B_y Y$ и отображенне g разлагается в композицию

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z.$$

Для того чтобы получить разложение g в композицию отображений, обратных к раздутиям, нужно повторнть те же рассуждения для отображения $Y \longrightarrow Z$.

10.15. Замечание. Я хотел бы специально отметить, что утверждения в пп. 10.11 – 10.14 ие новые. Они были известны геометрам еще на рубеже прошлого и этого столетий. Однако программа Мори уже представляет собой совершенно новый и унифицированный подход к структурной теории алгебранческих многообразий. Прнведенные в теореме 10.11 три случая рассматривались, как правило, как отдельные теоремы. Лишь сейчас мы можем их рассматривать как три случая в одном утверждении.

Перейдем теперь к трехмерному случаю. Приводимые ниже результаты Мори отсутствовали ранее даже в виде гипотез.

10.16. Вторая основная теорема ($\dim X = 3$). *Пусть X – гладкое проективное трехмерное многообразие, а $C \subset X$ – рациональная кривая, порождающая экстремальный луч. Тогда существует стягивание $f: X \longrightarrow Z$ этого луча, которое приводит нас к одной из следующих ситуаций:*

(i) *Z – точка. Одни из примеров таких мнооообразий X – гиперповерхности степени не более 4 в $\mathbb{CP}^4$. Вообще существует список таких многообразий; все они классифицированы Исковских—Фано. Все многообразия этого типа покрываются рациональными кривыми.*

(ii) *Z – гладкая кривая. Примерами таких многообразий могут служить $\mathbb{CP}^2 \times Z$ и некоторые другие многообразия, являющися уже изученными. Все эти многообразия X также покрываются рациональными кривыми.*

(iii) *Z – гладкая поверхность. Слоями морфизма f в этом случае являются коники в $\mathbb{CP}^2$. Все эти многообразия X также покрываются рациональными кривыми.*

(iv) *Отображение f является обратным к одному из следующих раздутий многообразия Z:*

(a) *Z – гладкое многообразие, $X = B_E Z$ для гладкой кривой $E \subset Z$;*

(b) *Z – гладкое многообразие, $X = B_z Z$ для некоторой точки $z \in Z$;*

(c) *многообразие Z имеет особенность в z вида*

$$(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 0) \subset \mathbb{C}^4,$$

и $X = B_z Z$.

(d) Многообразне Z нмеет особенность в z вида

$$(x^2 + y^2 + z^2 + u^3 = 0) \subset \mathbb{C}^4,$$

и $X = B_z Z$;

(e) *многообразие Z имеет особенность в z вида*

$$\mathbb{C}^3/(x, y, z) \sim (-x, -y, -z),$$

и $X = B_z Z$.

10.17. Замечание. В отличие от ситуации в теореме 10.10 нельзя установить соответствие между перечисленными случаями и значениями индекса пересечения $[C]c_1(K_X)$.

10.18. Резюме. Сформулированная теорема завершает первую основную часть программы Мори. Эта часть дает наглядное простое геометрическое объяснение причины, почему каноническое линейное расслоение K_X может не оказаться численно эффективным. Эта причина носит либо глобальный характер, либо локальный. В глобальном случае рациональные кривые, порождающие экстремальный луч, покрывают все многообразие X, что дает очень хорошее структурное описание этого многообразия. К этому случаю относятся пп. 10.10(i)–(ii) и 10.16(i)–(iii). В локальном случае рациональные кривые заметают лишь собственное подмногообразие, которое может быть стянуто. Для алгебраических поверхностей это стягивание снова приводит к гладкой поверхности, которая оказывается проще, чем предыдущая; повторение этой процедуры снова в конце концов дает очень хорошую структурную теорему 10.11.

Для трехмерных алгебраических многообразий дело обстоит значительно сложнее, поскольку стягивание может приводить к многообразиям с особенностями, что препятствует продолжению этой процедуры. Чтобы продвинуться дальше, надо осознать, что следует ограничиться некоторым классом довольно простых особенностей. Как только подходящий класс особенностей найден, следует разработать аналоги предыдущих результатов для этой более общей ситуации. Это будет сделано в следующем разделе.

11. Программа Мори: случай многообразий с особенностями

В конце предыдущего раздела мы убедились в том, что даже если мы интересуемся лишь гладкими многообразиями, возникает необходимость сформулировать аналог программы Мори, в том числе и для многообразий с особенностями. Однако для многообразий с произвольными особенностями часть понятий программы Мори просто теряет смысл. Поэтому нам следует более аккуратно выбрать класс допустимых особенностей. Следует обеспечить выполнение двух главных условий.

11.1. Первое условие. По своему замыслу основная часть программы Мори посвящена исследованию многообразий X с численно неэффективным K_X. Следовательно, мы не можем надеяться на ее успешное обобщение, если не потребуем существования K_X и существования индекса пересечения $[C]c_1(K_X)$ для любой кривой $C \subset X$.

Пусть Σ – множество особенностей многообразия X. Тогда множество $X - \Sigma$ состоит из гладких точек, и каноническое расслоение $K_{X-\Sigma}$ может быть определено обычным способом. Теперь было бы правильным взять в качестве K_X некоторое линейное расслоение на X, ограничение которого на $X - \Sigma$ изоморфно $K_{X-\Sigma}$. Такое расслоение K_X будет единственным, если многообразие X нормально (это мы будем всегда предполагать). Как только мы обеспечили единственность линейного расслоения K_X, проблема его существования на всем многообразии X превращается в аналогичную локальную проблему в окрестности точки $s \in \Sigma$. Последнее может быть исследовано следующим образом.

11.2. Лемма. *Пусть X—нормальное алгебраическое многообразие, а $S \subset X$—некоторое его подмногообразие, такое, что* $\dim S \leq \dim X - 2$. *Пусть M—некоторое линейное расслоение на $X - S$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Существует единственное линейное расслоение L на X, такое, что $L | X - S \cong M$.*

(ii) *Каждая точка $s \in S$ обладает некоторой окрестностью $U \subset X$, такой, что $M | (U - S) \cap U$ имеет нигде не обращающееся в нуль сечение.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Расслоение L является локально тривиальным и, следовательно, в окрестности любой точки s имеет сечение, нигде не обращающееся в нуль.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Прежде всего докажем, что линейное расслоение L единственно. Действительно, если L_1 и L_2 — два продолжения M, то для линейного расслоения $N = L_1 \otimes L_2^{-1}$ на многообразии X имеем $N|(X-S) \cong M \otimes M^{-1} \cong \mathcal{O}_{X-S}$. Постоянное сечение расслоения $\mathcal{O}_{X-S}$ дает некоторое сечение расслоения N над множеством $X-S$, которое, согласно предложению 7.5, продолжается до некоторого сечения s расслоения N на всем многообразии X. Аналогично, s^{-1} является также сечением N^{-1} над X. Поэтому s нигде не обращается в нуль. Следовательно, согласно примеру 7.8(ii), $N \cong \mathcal{O}_X$ и $L_1 \cong L_2$.

Коль скоро мы доказали единственность L, достаточно построить расслоение L локально. Согласно примеру 7.8(ii), имеем изоморфизм расслоений $M|(U-S) \cap U \cong \mathcal{O}_{(U-S)\cap U}$. Следовательно, расслоение $\mathcal{O}_U$ является продолжением $M|(U-S) \cap U$. Тем самым доказательство завершено.

11.3. Предложение. *Пусть X — некоторая гиперповерхность, заданная уравнением $f(x,\ldots,x) = 0$, $\Sigma = \operatorname{Sing} X$. Предположим, что $\dim \Sigma \leq \dim X - 2$. Тогда каноническое расслоение K_X существует.*

Доказательство. Согласно теореме 5.8, X является нормальным многообразием. Проверим теперь условие (ii) леммы 11.2. Пусть U_i — открытое подмножество в X, на котором выполнено условие $\partial f/\partial x_i \neq 0$. Как мы уже видели в примере 2.25, множество $X - \Sigma$ является объединением $\cup U_i$. Определим нигде не обращающееся в нуль сечение $K_{X-\Sigma}$ следующим образом. Выберем на U_i дифференциальную форму вида

$$t_i = (-1)^i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^{-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_k .$$

Эта дифференциальная форма определяет нигде не обращающееся в нуль сечение расслоения K_{U_i}. Из условия $f = 0$ на X вытекает, что на всем многообразии X выполнено равенство $\sum \partial f/\partial x_i \cdot dx_i = 0$. Из этого равенства следует, что дифференциальные формы t_i и t_j имеют одно и то же ограничение на пересечение $U_i \cap U_j$. Таким образом, эти дифференциальные формы определяют некоторое нигде не обращающееся в нуль сечение расслоения $K_{X-\Sigma}$. Следовательно, согласно лемме 11.2, каноническое линейное расслоенне K_X существует.

Доказанное утверждение охватывает случаи 10.16(iv)(с) и (d), однако оно покрывает случай (е). В действительностн в этом случае канонического расслоения K_X уже не существует. Для этого случая нам потребуется следующее утверждение:

11.4. Предложение. *Пусть U—некоторое алгебраическое многообразие, на котором существует K_U. Предположим, что на многообразии U действует конечная группа G порядка g и $V = U/G$—соответствующее фактормногообразие. Обозначим через $S' \subset U$ подмножество, состоящее из точек, неподвижных относительно хотя бы одного неединичного элемента из G. Предположим, что* $\dim S' \leq \dim U - 2$. *Тогда на многообразии V существует линейное расслоение L, такое, что*

$$L \,|\, (V - \operatorname{Sing} V) \cong K^{\otimes g}_{V-\operatorname{Sing}V}.$$

Таким образом, линейное расслоение K_V может не существовать, но расслоение $K_V^{\otimes g}$ уже существует.

Доказательство. Пусть $p : U \longrightarrow V$ – отображение факторизации. Положим $S = p(S')$. Тогда отображение

$$p : U - S' \longrightarrow V - S$$

является локальиым аналитическим изоморфизмом, и каждая точка $v \in V - S$ нмеет в точностн g прообразов. Линейное расслоенне K_{V-S} существует. Если $p(u) = v$, то естественное отображение

$$p^* : K_v \longrightarrow K_u$$

является изоморфизмом прямой в расслоении K_V над точкой v и прямой в расслоении K_U над точкой u.

Если расслоение L существует, то оно единственно. Поэтому достаточно доказать его существованне локально. Таким образом, можно предположить, что расслоение K_U имеет нигде не обращающееся в нуль сечение $f : U \longrightarrow K_U$. Если точка v принадлежит $V - S$, а $p^{-1}(v) = \{ u_1, \dots, u_g \}$, то элемент $f(u_i) \in K_{u_i}$ может быть отождествлен посредством отображения p^* с некоторым элементом из K_v. Следовательно, сечение f порождает g-значное нигде не обращающееся в нуль сечение расслоения K_{V-S}, что, в свою очередь, дает однозначное нигде не обращающееся в нуль сечение расслоения $K_{V-S}^{\otimes g}$. Следовательно, согласно лемме 11.2, расслоение $K_{V-S}^{\otimes g}$ продолжается до линейного расслоения L над многообразием V.

Пусть теперь X—некоторое нормальное проективное многообразие с множеством особых точек S. Пусть на многообразии X задано некоторое линейное расслоение L, а на многообразии $X - S$—линейное расслоение M. Предположим, что $L|(X-S) \cong M^{\otimes k}$ для некоторого $k > 0$. Если C—кривая в многообразии X, то можно следующим формальным образом определить индекс пересечения:

$$[C]\cdot c_1(M) = \frac{1}{k}[C]c_1(L).$$

Это число является рациональным. В частности, можно определить число $[C]c_1(K_X)$, если каждая точка $x \in X$ имеет некоторую окрестность V вида U/G (см. предложение 11.4). Предложенное определение охватывает оставшийся случай 10.16(iv)(e).

11.5. Второе условие. Одной из важных причин нашего интереса к плюриродам и m-каноническим отображениям является их независимость от выбора гладкой модели в соответствующем классе бирациональной эквивалентности. Мы хотели бы сохранить это замечательное свойство также и для рассматриваемых нами особых многообразий. Следующее наблюдение приводит к общему определению плюриродов.

Пусть L—некоторое линейное расслоение на многообразии X, а Σ—множество особых точек X. Если многообразие X является нормальным (в частиости, $\dim \Sigma \leq \dim X - 2$), то, согласно предложению 7.5, имеем изоморфизм

$$\Gamma(X, L) \cong \Gamma(X - \Sigma, L|(X - \Sigma)).$$

Поэтому для произвольного нормального многообразия X плюрироды можно определить формулой

$$P_m(X) = \dim \Gamma(X - \operatorname{Sing} X, K_{X-\operatorname{Sing}X}^{\otimes m}).$$

11.6. Определение. Пусть X — проективное многообразие, а x — некоторая его точка. Будем говорить, что точка $x \in X$ не влияет на плюрироды, если выполнено следующее условие:

Для любого бирационального регулярного отображения $f: Y \longrightarrow X$ гладкого многообразия Y и любой малой окрестности U точки x естественное отображение

$$\Gamma(f^{-1}(U), K_f^{\otimes m}{}_{-1(U)}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(U - B), K_f^{\otimes m}{}_{-1(U-B)})$$

является изоморфизмом для всех $m \geq 1$ (здесь $B \subset X$ — множество точек неопределенности отображения f^{-1}).

Заметим также, что

$$\Gamma(f^{-1}(U - B), K_f^{\otimes m}{}_{-1(U-B)}) \cong \Gamma(U - B, K_{U-B}^{\otimes m}),$$

поскольку $U - B \cong f^{-1}(U - B)$. Таким образом, любое сечение s расслоения $K_{U-B}^{\otimes m}$ порождает некоторое сечение $\bar{s}$ расслоения $K_f^{\otimes m}{}_{-1(U-S)}$. Сечение $\bar{s}$ продолжается до *мероморфного* сечения f^*s расслоения $K_f^{\otimes m}{}_{-1(U)}$. Таким образом, приведенное выше определение эквивалентно требованию, чтобы f^*s было *регулярным* сечением расслоения $K_f^{\otimes m}{}_{-1(U)}$.

Теперь мы дадим следующее важное определение, принадлежащее Риду.

11.7. Определение. Особенность называется канонической, если для некоторого $m \geq 1$ существует линейное расслоение $K^{\otimes m}$ и эта особенность не влияет на полюрироды.

На первый взгляд это определение выглядит громоздким и недостаточно геометрическим, чтобы с ним можно было работать, однако оказывается, что канонические особенности образуют достаточно хороший класс особенностей. Эти особенности в размерности 2 в тридцатые годы изучались Дю Валем, который получил их полную классификацию. Затем вскоре они были забыты и вновь открыты в шестидесятых годах математиками, изучающими особенности бесконечно дифференцируемых функций.

11.8. Теорема. *Канонические особенности поверхностей имеют в точности следующий вид:*

(i) $x^2 + y^2 + z^k$ *для* $k \geq 1$;

(ii) $x^2 + zy^2 + z^k$ *для* $k \geq 3$;

(iii) $x^2 + y^3 + z^4$, *или* $x^2 + zy^3 + z^3$, *или* $x^2 + y^3 + z^5$.

Хотя для целей бирациональной геометрии канонические особенности представляют собой «правильный» класс особенностей, этот класс является слишком большим для программы Мори. В самом деле, для поверхностей вообще нет необходимости рассматривать особенности. Можно наложить дополнительные условия на особенности, чтобы получить действительно тот класс особенностей, который нам необходим.

11.9. Определение. (i) В обозначениях определения 11.6 мы будем говорить, что точка $x \in X$ является терминальной, если для некоторого $m > 0$ существует линейное расслоение $K_X^{\otimes m}$ и выполнено следующее усиление 11.6: для любого сечения s из пространства $\Gamma(U - B, K_{U-B}^{\otimes m})$ прообраз f^*s является глобальным сечением расслоения $K_{f^{-1}(U)}^{\otimes m}$, которое обращается в нуль вдоль каждой $(\dim X - 1)$-мерной компоненты множества $f^{-1}(B)$. (Согласно теореме 2.27, мы не можем надеяться на обращение в нуль вдоль компонент меньшей размерности.) Заметим, что из предложения 8.12 вытекает терминальность гладкой точки.

(ii) Многообразие X называется $\mathbb{Q}$-факториальным, если для любого неприводимого подмногообразия $H \subset X$, удовлетворяющего условию $\dim H = \dim X - 1$, существует некоторое линейное расслоение L и его сечение $s : X \longrightarrow L$, такие, что $H = (s = 0)$ (здесь последнее равенство является равенством множеств, т.е. сечение s может иметь кратный нуль вдоль H). Сформулированное условие всегда выполнено для гладких многообразий (см. п. 7.6(iii)). В п. 4.4 приведен пример, в котором это условие не выполнено. Название «$\mathbb{Q}$-факториальное многообразие» связано с близостью этого понятия к свойству факториальности для колец регулярных функций на открытых подмножествах рассматриваемого многообразия.

Сформулированное техническое условие является очень удобным и будет выполнено во всех интересующих нас случаях.

Двумерные терминальные особенности поверхностей являются обязательно гладкими точками. В размерности 3 для этого класса особенностей имеется полная структурная теория, разработанная Ридом, Мори, Даниловым, Моррисоном и Стевенсом.

11.10. Теорема. *Трехмерные терминальные особенности имеют следующий вид:*

(i) *гладкие точки;*

(ii) *изолированные особые точки, задаваемые уравнениями вида* $f(x, y, z) + tg(x, y, z, t)$, *где функция* f — *одна из перечисленных в теореме 11.8;*

(iii) *некоторые циклические накрытия особенностей из п.* (ii), *приведенного выше (существует их полный список).*

Теперь мы уже готовы сформулировать аналог первой основной теоремы и часть второй основной теоремы для особых многообразий. Первоначальные идеи Мори, касающиеся нахождения рациональных кривых, по-видимому, не работают в общем случае многообразий с особенностями. Следует развивать различные новые идеи. Первый результат для случая многообразий с особенностями был получен Каваматой. Дальнейшее его развитие, достигнутое Бенвинистом, Каваматой, Колларом, Ридом и Шокуровым, привело к следующей теореме:

11.11. Первая основная теорема. *Пусть* X — *проективное многообразие с каноническими особенностями. Тогда конус* $\overline{NE}(X)^{-}$ *является локально конечно порожденным и каждый его отрицательный экстремальный подконус может быть стянут.*

11.12. Замечание. До сих пор еще не доказано, что каждый экстремальный луч порождается рациональной кривой, хотя это проверено для случая $\dim X = 3$.

Вторая основная теорема в гладком случае дает полное описание отображений стягивания. Хотя в общем случае вряд ли следует ожидать, что можно перечислить все возможности для стягиваний, было бы разумным надеяться получить не-

19-1663

сколько более детальную информацию о стягиваниях, чем просто лишь сам факт их существования. Наши знания в этой области не заслуживают того, чтобы называться теоремой.

11.13. Второе основное предложение-определение. *Пусть X есть $\mathbb{Q}$-факториальное проективное многообразие, имеющее лишь канонические (соответственно лишь терминальные) особенности. Пусть $f: X \to Y$ — стягивание отрицательного экстремального луча. Тогда мы приходим к одному из следующих случаев:*

(i) *Стягивание Фано:* $\dim Y < \dim X$. *В этом случае многообразие X покрывается рациональными кривыми.*

(ii) *Дивизориальное стягивание: отображение f бирационально и существует подмногообразие $E \subset X$, такое, что*

$$\dim E = \dim X - 1, \quad \dim f(E) < \dim E.$$

В этом случае многообразие Y снова является $\mathbb{Q}$-факториальным и имеет лишь канонические (соответственно лишь терминальные) особенности.

(iii) *Малое стягивание: отображение f бирационально и существует подмногообразие $E \subset X$, такое, что*

$$\dim E \leq \dim X - 2$$

и ограничение f на $X - E$ является изоморфизмом на $Y - f(E)$. В этом случае $K_Y^{\otimes m}$ уже никогда не существует.

Доказательство. Для простоты предположим, что X гладко. Пусть $[C]$ порождает стягиваемый экстремальный луч.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $\dim Y < \dim X$. Согласно теореме Сарда, для общей точки $y \in Y$ слой $F = f^{-1}(y)$ является гладким. Очевидно, что $N_{F|X} \cong F \times \mathbb{C}^{\dim Y}$ и, следовательно, $K_F \cong K_X|F$. Если D — любая кривая на F, то $f(D)$ — точка. Значит, $[D] = \lambda[C]$. В частности,

$$[D]c_1(K_F) = [D]c_1(K_X) = \lambda[C]c_1(K_X) < 0.$$

Таким образом, согласно теореме 10.9, F покрывется рациональными кривыми, а следовательно, то же самое выполнено для X.

Остается случай $\dim Y = \dim X$. В этом случае отображение f имеет связные слои и бирационально. Пусть $B \subset Y$ — множество точек неопределенности для f^{-1}. Положим $E = f^{-1}(B)$. Сначала мы предположим, что существует неприводимое подмногообразие $H \subset E$, такое, что $\dim H = \dim X - 1$. Я утверждаю, что $[C][H] < 0$.

Для того чтобы это доказать, рассмотрим семейство кривых $\{D_t\} \subset Y$, такое, что $D_t \cap B = \varnothing$ для $t \neq 0$ и $D_0 \cap B = y \in Y$. Тогда для $t \neq 0$ кривые $D_t' = f^{-1}(D_t)$ образуют семейство, которое в пределе при $t \longrightarrow 0$ вырождается в $D_0' + F$, где D_0' — собственный прообраз D_0 и $f(F) = y$. Можно добиться, чтобы $D_0' \cap H \neq \varnothing$. Поскольку подмногообразие H и кривые D_t' не пересекаются, получаем $[D_t'][H] = 0$. Следовательно, $[F][H] = -[D_0'][H] < 0$. Так как $f(F)$ — точка и $[F] = \lambda[C]$, то $[C][H] < 0$, что и требовалось.

Если бы $E - H$ не было пустым, то можно было выбрать кривую $G \subset E$, такую, что $f(G)$ — точка и G не содержится в H. Это дало бы $[G][H] \geq 0$, что противоречит соотношению $[G] = \mu[C]$ для некоторого $\mu > 0$. Таким образом, $E = H$.

Проверим теперь, что многообразие Y имеет лишь канонические особенности. Сначала докажем существование $K_Y^{\otimes m}$ для некоторого $m > 0$. Если это расслоение существует, то линейное расслоение $f^*(K_Y^{\otimes m})$ изоморфно $K_X^{\otimes m}$ на множестве $X - E$ и тривиально вдоль слоев f. Рассмотрим теперь линейное расслоение $\mathcal{O}(H)$, введенное в п. 7.6(iv). (Это единственное место, где в общем случае используется свойство Q-факториальности.) Поскольку $\mathcal{O}(H) | X - H \cong \mathcal{O}_{X-H}$, любое расслоение вида $L_{m,k} = K_X^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}(H)^{\otimes k}$ изоморфно $f^*(K_Y^{\otimes m})$ на $X - H$. Если выбрать $k = [C]c_1(K_X)$ и

$$m = -[C]c_1(\mathcal{O}(H)) = -[C][H],$$

то $[C]c_1(L_{m,k}) = 0$. Таким образом, $c_1(L_{m,k})$ имеет тривиальное ограничение на слои морфизма f. Из этого вытекает, что $K_Y^{\otimes m}$ существует как *топологическое* линейное расслоение. Существование его как *голоморфного* линейного расслоения является более тонким вопросом, который обсуждаться не будет. Аналогичные рассуждения показывают, что Y является $\mathbf{Q}$-факториальным.

Для того чтобы проверить, что особенности Y не влияют на плюрироды, выберем малую окрестность некоторой особой точки $b \in B \subset Y$ и сечение $s \in \Gamma(U - B, K^{\otimes m})$. Тогда f^*s — мероморфное сечение из $\Gamma(f^{-1}(U), K^{\otimes m})$. Предположим, что это сечение имеет полюс порядка $t \geq 0$ вдоль H. Тогда

$$c_1(K_{f^{-1}(U)}^{\otimes m}) = [Z] - t[H],$$

где Z — множество нулей сечения f^*s. По предположению H не содержится в Z. Выберем кривую $D \subset H$, такую, что $f(D)$ — точка и D также не содержится в Z. Тогда $[D] = \lambda[C]$. Следовательно,

$$\lambda m[C]c_1(K_{f^{-1}(U)}) = [D]c_1(K_{f^{-1}(U)}^{\otimes m}) = [D][Z] - t[D][H] \geq 0,$$

что дает противоречие. Значит, в действительности сечение f^*s обращается в нуль на H.

Пусть

$$h : X' \longrightarrow X$$

— разрешение особенностей. Сечение f^*s является регулярным для расслоения $K_{f^{-1}(U)}^{\otimes m}$, а следовательно, h^*f^*s — регулярное сечение расслоения $K_{h^{-1}f^{-1}(U)}^{\otimes m}$, поскольку X имеет канонические особенности. Это доказывает, что особенность в $b \in Y$ не влияет на плюрироды. Следуя аналогичным рассуждениям, можно доказать также терминальность точки $b \in B \subset Y$.

Остается случай, когда f — бирациональный морфизм и

$$\dim E \leq \dim X - 2.$$

В этом случае, согласно предложению 7.5, сечение f^*s автоматически продолжается на E; поэтому особенности Y не влияют на плюрироды. К сожалению, уже не существует расслоения $K_Y^{\otimes m}$. Если бы оно существовало, то расслоения $f^*(K_Y^{\otimes m})$ и $K_X^{\otimes m}$ давали бы два продолжения на X расслоения $K_{X-E}^{\otimes m}$. Однако это не так, поскольку $[C]c_1(K_X^{\otimes m}) < 0$.

11.14. Замечания. (i) Для поверхностей и гладких трехмерных многообразий реализуются только первые два случая теоремы 11.13.

(ii) Простейшим примером для случая (iii) является следующий. Рассмотрим над проективной плоскостью $\mathbf{CP}^2$ двумерное векторное расслоение $V = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$. Пополним каким-нибудь способом четырехмерное многообразие V до гладкого проективного многообразия X. Прямая $l \subset \mathbf{CP}^2 \subset V \subset X$ порождает отрицательный экстремальный луч. Тогда существует стягивание $\mathbf{CP}^2$ в точку, которое вне $\mathbf{CP}^2$ является изоморфизмом. Для гладких четырехмерных многообразий этот пример является единственным известным.

(iii) Существует много примеров малых стягиваний для особых трехмерных многообразий, однако все они трудны для описания (см. п. 12.5).

11.15. Резюме. Итак, мы достигли некоторых целей, намеченных в конце предыдущего раздела. К сожалению, полученных нами результатов не достаточно, чтобы завершить всю программу. Случай (i) в теореме 11.13 дает удовлетворительный ответ и хорошую структурную информацию о многообразии X. Если имеет место случай (ii) в теореме 11.13, то Y можно рассматривать как более простое по сравнеиию с X многообразие; в этом случае программа может быть продолжена применительно к Y. Однако уже для случая (iii) получающиеся особенности являются очень плохими. Для того чтобы справиться с этой трудностью, необходима новая идея. Этой идее посвящен следующий раздел.

12. Флип и флоп

В этом разделе будут даны некоторые примеры и информация общего характера, касающиеся малых стягиваний в размерности 3.

Как было упомянуто выше, все примеры малых стягиваний являются достаточно сложными. Поэтому мы сосредоточим внимание на одном относительно более простом случае.

12.1. Пример. Пусть $Q \subset \mathbf{CP}^3$ – квадрика, заданая уравнением $xy - uv = 0$. Как мы уже убедились в п. 4.6, эта квадрика изоморфна произведению $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$, а два семейства прямых на ней задаются системами уравнений $\{x = \lambda u,\ v = \lambda y\}$ и $\{x = \lambda v,\ u = \lambda y\}$ (для значения $\lambda = \infty$ имеем соответственно уравнения $u = y = 0$ и $v = y = 0$).

Обозначим через C^0 конус над квадрикой Q, определяемый уравнением $(xy - uv = 0) \subset \mathbf{C}^4$. Этот конус имеет единственную особую точку в начале координат. Рассмотрим также замыкание $C \subset \mathbf{CP}^4$ конуса C^0. Тогда квадрика Q может быть представлена в виде пересечения $C \cap H$ конуса C с бесконечно удаленной гиперплоскостью H. По-прежнему многообразие C имеет единственную особую точку в начале координат $0 \in C \subset \mathbf{CP}^4$. Разрешим эту особенность следующими тремя способами.

(i) Первое разрешение. Рассмотрим раздутие точки $0 \in \mathbf{CP}^4$ и замыкание C_{12} множества $C - 0$ в многообразии $B_0\mathbf{CP}^4$. Над точкой 0 в многообразие $B_0\mathbf{CP}^4$ вклеится дивизор $\overline{E}$, изоморфный $\mathbf{CP}^3$. Поскольку многообразие C является объединением прямых, соединяющих начало координат и точки квадрики $Q \subset H$, получаем, что многообразие $E = \overline{E} \cap C_{12}$ изоморфно квадрике Q. Теперь уже нетрудно доказать, что многообразие C_{12} является гладким.

(ii) Для того чтобы получить два других разрешения особенностей, рассмотрим два семейства плоскостей в многообразии C, полученные соответственно из двух семейств прямых на квадрике Q. Пусть

$$P^1_\lambda = \{x = \lambda u,\ v = \lambda y\},\quad P^2_\lambda = \{x = \lambda v,\ u = \lambda y\}.$$

Обозначим через $\overline{P^i_\lambda}$ замыкание множества $P^i_\lambda - 0$ в многообразии C_{12}. Поскольку все эти плоскости содержат точку 0, то после ее раздутия, очевидно, получаем $\overline{P^i_\lambda} \cong B_0 P^i_\lambda$, причем исключительные кривые на поверхностях $\overline{P^i_\lambda}$ дают в точности уже известные нам два семейства прямых на поверхности

$E \cong \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$. Если мы зафиксируем номер i и будем изменять параметр λ, то многообразие C_{12} окажется покрытым семейством поверхностей $\{\overline{P}^i_\lambda\}$, причем поверхности $\overline{P}^i_\lambda$ и $\overline{P}^i_\mu$ не имеют общих точек при $\lambda \neq \mu$. Поскольку каждая кривая $E \cap \overline{P}^i_\lambda$ на поверхности $\overline{P}^i_\lambda$ может быть стянута в гладкую точку (при этом поверхность $\overline{P}^i_\lambda$ превратится в проективную плоскость P^i_λ), достаточно разумным является предположение, что данные стягивания можно осуществить одновременно во всем семействе с номером i. Это предположение в действительности оказывается верным. Таким образом, мы получаем стягивание $q_i : C_{12} \to C_i$, где многообразие C_i является объединением непересекающихся плоскостей P^i_λ. Получающаяся геометрическая картина изображена ниже на рис. 3.

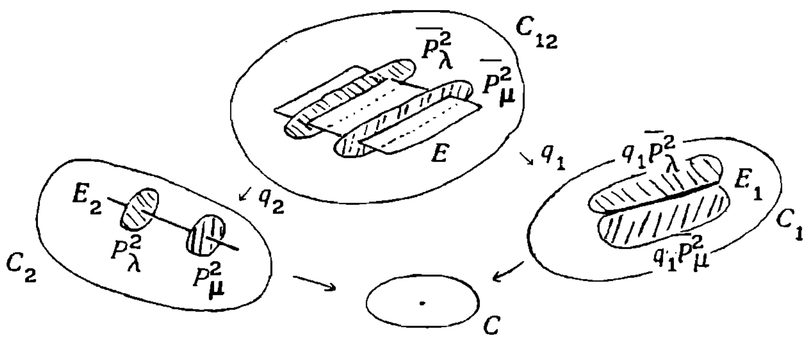


Рис. 3

Из нашей конструкции следует, что плоскость $P^i_\lambda \subset C_i$ пересекает кривую E_i $(E_i = q_i(E))$ в единственной точке. Следовательно, $[E_i]\cdot[P^i_\lambda] = 1$. Пусть $j = 3 - i$. Поверхность $\overline{P}^j_\lambda$ пересекает поверхность E по некоторой прямой, отображающейся на кривую E_i. Поэтому $q_i(\overline{P}^j_\lambda)$ содержит кривую E_i, и индекс пересечения $[E_i]\cdot[q_i \overline{P}^j_\lambda]$ уже не обладает ясной геометрической интерпретацией. Для вычисления этого числа заметим, что при $\lambda \neq \mu$ поверхности $\overline{P}^j_\lambda$ и $\overline{P}^j_\mu$ не пересекаются, а их образы $q_i(\overline{P}^j_\lambda)$ и $q_i(\overline{P}^j_\mu)$ пересекаются лишь по кривой E_i. Предположим, что мы немного сдвинули кривую E_i внутри поверхности $q_i(\overline{P}^j_\mu)$, а затем пересекли ее с поверхностью $q_i(\overline{P}^j_\lambda)$. Тогда получившиеся точки пересечения будут лежать в многообразии $q_i(\overline{P}^j_\lambda) \cap q_i(\overline{P}^j_\mu)$, т. е. на кривой E_i. Таким образом, индекс пересечения $[E_i]\cdot[q_i(\overline{P}^j_\lambda)]$ будет совпадать с индексом самопересечения кривой E_i внутри поверхности $q_i(\overline{P}^j_\mu)$. Эта последняя поверхность изоморфна плоскости $B_0P^j_\mu$ с раздутой точкой; следовательно, согласно п. 9.2, получаем, что $[E_i]\cdot[q_i\overline{P}^j_\lambda] = -1$.

(iii) Нетрудно доказать, что пространство $H_4(C_{12}, \mathbf{R})$ порождается классами $[E]$, $[\overline{P}^1_\lambda]$ и $[\overline{P}^2_\lambda]$. При отображении $q_i: C_{12} \longrightarrow C_i$ класс $[C]$ переходит в нуль. Таким образом, пространство $H_4(C_i, \mathbf{R})$ порождается классами $[\overline{P}^i_\lambda]$ и $[q_i\overline{P}^j_\lambda]$. Отображение $p_2^{-1}p_1$ устанавливает изоморфизм между множествами $C_1 - E_1$ и $C_2 - E_2$, тем самым отождествляя пространства $H_4(C_1 - E_1, \mathbf{R})$ и $H_4(C_2 - E_2, \mathbf{R})$. Поскольку вещественная размерность кривой E_i равна 2, мы также получаем изоморфизм

$$H_4(C_i, \mathbf{R}) \cong H_4(C_i - E_i, \mathbf{R}),$$

и, таким образом, естественный изоморфизм

$$t: H_4(C_1, \mathbf{R}) \longrightarrow H_4(C_2, \mathbf{R}).$$

Этот изоморфизм переводит класс $[P^1_\lambda]$ в класс $[q_2\overline{P}^1_\lambda]$, а класс $[q_1\overline{P}^2_\lambda]$ в $[P^2_\lambda]$. Приведенное выше вычисление показывает, что для любого элемента $a \in H_4(C_1, \mathbf{R})$ выполнено равенство $[E_1]a = -[E_2]t(a)$.

Это равенство в действительности является очень интересным свойством. Если $F \subset X$ — некоторая кривая в проективном многообразии X, то невозможно в X найти другую кривую F', такую, что для любого элемента $a \in H_{2n-2}(X, \mathbf{R})$ выполнено равенство $[F]a = -[F'](a)$. Дело в том, что в этом случае кривая $F \cup F'$ должна быть гомологична нулю.

В рассматриваемом нами выше примере кривые E_1 и E_2 лежат в разных, но близких друг к другу многообразиях. Эта близость многообразий состоит в том, что многообразие C_2 может быть получено из многообразия C_1 с помощью следующего преобразования окрестиости проективной прямой $\mathbf{CP}^1$: мы вырезаем кривую $E_1 \cong \mathbf{CP}^1$ из многообразия C_1 и заменяем ее кривой $E_2 \cong \mathbf{CP}^1$, приклееннои уже другим способом.

Рассмотренный нами пример приводит к следующей общей проблеме.

12.2. Общая проблема хирургии. Пусть X—трехмерное алгебраическое многообразие, а $E \subset X$—некоторая кривая. Можно ли найти другое алгебраическое многообразие X' и кривую $E' \subset X'$, такие, что многообразия $X - E$ и $X' - E'$ являются изоморфными, а многообразия X и X' – нет? Какова степень свободы в выборе многообразия X'? Каким образом можно сравнивать классы $[E] \in H_2(X)$ и $[E'] \in H_2(X')$?

Можно начать изучение этой проблемы для случая гладких многообразий X и X', однако для приложенний к программе Мори мы уже должны допустить существоваиие на рассматриваемых многообразиях по крайней мере терминальиых особенностей.

Нетрудио убедиться, что если оба многообразия X и X' имеют терминальные (или даже каноиические) особеииости, то существуют отображения

$$f : X \longrightarrow Z \text{ и } f' : X' \longrightarrow Z,$$

такие, что отображение f стягивает в точку кривую E, а отображение f' стягивает в точку кривую E', причем оба отображения f и f' являются изоморфизмами соотвественно на множествах $X - E$ и $X' - E'$. Более того, обе кривые оказываются изоморфными проективной прямой $\mathbf{CP}^1$. Иногда многообразие Z может получиться неалгебраическим (см. п. 12.12), однако в данный момент мы не будем обращать на это внимание. Рассуждения, близкие к использованным в примере 12.1, показывают, что для некоторого числа $\mu > 0$ выполнено равенство $[E]c_1(K_X) = -\mu[E']c_1(K_{X'})$.

12.3. Определение. В приведенных выше обозначениях следует выделить следующие три случая:

(i) $[E]c_1(K_X) = 0$. Тогда, кроме того, $[E']c_1(K_{X'}) = 0$, и операцию получения пары (X', E') из пары (X, E) будем называть флопом кривой $E \subset X$. Заметим, что эта операция является симметричной.

(ii) $[E]c_1(K_X) < 0$. Тогда $[E']c_1(K_{X'}) > 0$. Операцию получения пары (X', E') из пары (X, E) будем называть флипом пары (X, E). Эта операция уже не является симметричной.

(iii) $[E]c_1(K_X) > 0$. Тогда $[E']c_1(K_{X'}) < 0$. Это преобразование является обратным к флипу, и его можно называть обратиым флипом.

Для заданной пары (X, E) флип (или обратный флип) определены одиозначно. Если X есть $\mathbf{Q}$-факториальное миогообразие, то то же самое верно для флопа.

Причина, по которой мы различаем этн операции, состоит в их различном влиянии на особенности. Мы увидим, что многообразие X и его флоп X' имеют по существу одни и те же особенности соответственно вдоль кривых E и E'. Если же многообразие X' является флипом многообразия X, то особенности X' вдоль кривой E' проще, чем особенности многообразия X вдоль кривой E. Соответствеино обратный флип усложняет особенности многообразий.

Следующая основиая теорема принадлежит Риду.

12.4. Теорема. *Пусть X—трехмерное алгебраическое многообразие с терминальными особенностями. Пусть $\mathbf{CP}^1 \cong E \subset X$ — некоторая кривая. Предположим, что выполнено равенство $[E]c_1(K_X) = 0$ и что кривая E может быть стянута с помощью некоторого отображения $h: X \longrightarrow Z$. Тогда существует флоп (X', E').*

Доказательство. Приводимое ниже доказательство принадлежит Мори.

Сначала мы докажем, что многообразие Z имеет терминальные особенности. Поскольку расслоение $K_X^{\otimes m}$ имеет тривиальное ограничение на кривую E, как и в доказательстве предложения 11.13, получаем существование линейного расслоения $K_Z^{\otimes m}$. Снова пользуясь рассуждениями из предложения 11.13, получаем, что многообразие Z имеет терминальные особенности. Теперь воспользуемся структурной теоремой 11.10. Для простоты предположим, что многообразие Z имеет тип (i) или (ii). Случай (iii) в теореме 11.10 требует большей аккуратности из-за учета действия группы.

Исключительное множество для отображения

$$h : X - \operatorname{Sing} X \longrightarrow Z$$

является кривой, поэтому, согласно следствию 8.13, многообразие Z не является гладким. Таким образом, Z задается уравнением вида

$$f(x, y, z) + tg(x, y, z, t) = 0,$$

где слагаемое $f(x, y, z)$ содержит член x^2. Используя подготовительную теорему Вейерштрасса (см. п. 2.12) для случая четырех переменных, мы можем выбрать новые координаты x', y', z' и t', такие, что многообразие Z в новых координатах локально задается уравнением

$$x'^2 + F(y', z', t') = 0.$$

Рассмотрим отображение $T : Z \longrightarrow Z$ вида

$$T : (x', y', z', t') \longrightarrow (-x', y', z', t').$$

Пусть $U \subset Z$ – окрестность начала координат, инвариантная относительно отображения T. Пользуясь изоморфизмом $f^{-1}(U) - E \cong U - 0$, получаем отображение

$$T : f^{-1}(U) - E \longrightarrow f^{-1}(U) - E.$$

Можно показать, что это отображение *не продолжается* до регулярного отображения из $f^{-1}(U)$ в $f^{-1}(U)$.

Многообразие X имеет покрытие из двух открытых подмножеств $f^{-1}(U)$ и $X - E$, склеенных вдоль $f^{-1}(U) - E$. Пусть X' – многообразие, полученное склейкой тех же открытых подмножеств $f^{-1}(U)$ и $X - E$ вдоль $f^{-1}(U) - E$ так, чтобы точка $u \in f^{-1}(U)$ отождествлялась с точкой $T(u) \in X - E$. Поскольку отображение T не является регулярным вдоль кривой E, то же самое верно и для естественного отображения $X \dashrightarrow X'$.

Заметим, что в примере 12.1, приведенном выше, многообразие Z совпадает с многообразием C, а задающее его уравнение $xy - uv = 0$ должно быть преобразовано к виду

$$x'^2 - y'^2 - uv = 0, \text{ где } x' = (x + y)/2, \ y' = (x - y)/2.$$

12.5. Пример флипа. Используя пример из п. 12.1, можно получить простейший пример флипа следующим образом. Определим действие нетривиального элемента группы $\mathbf{Z}_2$ на многообразии $C^0 = (xy - uv = 0)$ формулой

$$(x, y, u, v) \longrightarrow (x, -y, u, -v).$$

Нетрудно доказать, что это действие индуцирует также $\mathbf{Z}_2$-действие на многообразиях C_{12}, C_1 и C_2.

Семейство плоскостей P^2_λ имеет два инвариантных представителя относительно действия группы $\mathbf{Z}_2$. Один из них — плоскость P^2_∞, на которой эта группа действует тождественно, а другой — плоскость P^2_0, на которой нетривиальный элемент группы $\mathbf{Z}_2$ действует на координаты y и v умножением на -1. Используя явное описание действия группы $\mathbf{Z}_2$, можно доказать, что на многообразии C_1 неподвижные точки этого действия в точности совпадают с образом $q_1\overline{P^2_\infty}$, а на многообразии C_2 неподвижные точки действия — точки плоскости P^2_∞ и пересечение $E_2 \cap P^2_0$.

Если M — некоторое гладкое трехмерное многообразие с действием группы $\mathbf{Z}_2$, то особенности фактора $M/\mathbf{Z}_2$ происходят лишь из неподвижных точек. В каждой неподвижной точке действие группы $\mathbf{Z}_2$ локально имеет тот же вид, что и некоторое линейное действие на $\mathbf{C}^3$.

Имеются три следующих типа нетривиальных действий группы $\mathbf{Z}_2$ на пространстве $\mathbf{C}^3$:

(i) $(x, y, z) \longrightarrow (x, y, -z)$. Множество неподвижных точек этого действия двумерно, и фактормногообразие $\mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_2$ изоморфно пространству $\mathbf{C}^3$, причем изоморфизм осуществляется отображением, заданным формулой $(x, y, z) \longrightarrow (x, y, z^2)$.

(ii) $(x, y, z) \longrightarrow (x, -y, -z)$. Множество неподвижных точек этого действия — прямая, а фактормногообразие $\mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_2$ изоморфно гиперповерхности $(u_2u_3 - u_4{}^2 = 0) \subset \mathbf{C}^4$, причем изоморфизм осуществляется отображением, заданным формулой

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y^2, z^2, yz).$$

(iii) $(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, -z)$. В этом случае имеем единственную изолированную неподвижную точку, а фактормногообразие $\mathbf{C}^3/\mathbf{Z}_2$ изоморфно уже встречавшемуся нам ранее в п. 10.16(iv)(e) многообразию.

Применяя эту классификацию к фактормногообразиям $C_i/\mathbf{Z}_2$, получаем, что многообразие $C_1/\mathbf{Z}_2$ гладко и кривая $E_1 \subset C_1/\mathbf{Z}_2$ имеет индекс пересечения +1 с каноническим расслоением. С другой стороны, многообразие $C_2/\mathbf{Z}_2$ приобретает изолированную особенность в образе пересечения $E_2 \cap P_0^2$. Для этого многообразия канонического линейного расслоения K_{C_2/Z_2} уже не существует. Можно показать с помощью вычислений, что индекс пересечения $[E_2/\mathbf{Z}_2] \cdot c_1(K_{C_2/Z_2})$ равен $-1/2$. Таким образом, кривая $E_2/\mathbf{Z}_2$ порождает отрицательный экстремальный луч в многообразии $C_2/\mathbf{Z}_2$, и естественное отображение $C_2/\mathbf{Z}_2 \longrightarrow C/\mathbf{Z}_2$ является малым стягиванием. Следовательно, отображение $C_1/\mathbf{Z}_2 \longrightarrow C/\mathbf{Z}_2$ — флип.

Как мы уже отметили, многообразие $C_2/\mathbf{Z}_2$ имеет особенности, в то время как многообразие $C_1/\mathbf{Z}_2$ является гладким. Таким образом, в рассмотренном примере флип действительно улучшает особенности.

Для того чтобы использовать флипы в завершении программы Мори, нам необходимо следующее утверждение.

12.6. Предложение. *Пусть X — трехмерное многообразие с каноническими особенностями, а $f: X \longrightarrow Y$ — малое стягивание. Тогда существуют кривые $E_i \subset X$, такие, что отображение f является изоморфизмом на множестве $X - \cup E_i$, $E_i \cong \mathbf{CP}^1$, причем для каждой кривой E_i выполнены условия $[E_i] \cdot c_1(K_X) < 0$ и $f(E_i)$ — точка.*

Рид предложил делать флипы относительно кривых E_i и на каждом шаге получать кривую E_i', удовлетворяющую условию $[E_i']\cdot c_1(K_X) > 0$. К сожалению, флип для кривой E_2 может испортить последнее неравенство для кривой E_1'; поэтому совсем не очевидно, как можно сделать флип одновременно относительно всех кривых. Эта трудность была преодолена Шокуровым, который доказал, что любая последовательность флипов после конечного числа шагов должна обрываться.

12.7. Определение. В приведенных выше обозначениях получившееся в результате отображение $f' : X' \longrightarrow Y$ называется флипом отображения f.

Проблема существования флипов оказывается очень трудной. Ее важные отдельные случаи были решены Цунодой, Шокуровым, Мори и Каваматой. Наконец, в общем случае эта проблема была решена Мори, который доказал следующую теорему.

12.8. Третья основная теорема[1]**.** *Пусть X—трехмерное проективное многообразие с терминальными (или каноническими) особенностями, а $f : X \longrightarrow Y$—некоторое малое стягивание. Тогда отображение f допускает флип.*

В своем доказательстве этой теоремы Мори использует много вычислений, однако его метод дает хорошее геометрическое описание малых стягиваний.

Эта теорема завершает программу Мори, по крайней мере в размерности 3. Два ее основых следствия – трехмерные аналоги утверждений 10.11 и 10.14. Мы отложим первый аналог до следующего раздела и рассмотрим второй результат.

12.9. Теорема. *Пусть $g : X \longrightarrow Z$—регулярное бирациональное отображение между трехмерными гладкими проективными многообразиями. Тогда g может быть представлено в виде композиции дивизориальных стягиваний и флипов.*

Утверждение этой теоремы можно вывести из теоремы 13.1 точно так же, как была выведена из следствия 10.11 теорема 10.14.

---

[1] Более общий результат получен недавно [5*]. —*Прим. ред.*

Заметим, что хотя отображение g является регулярным, в его разложении в виде упомянутой выше композиции могут появляться и флипы, переход к которым не является регулярным отображением. Примеры показывают, что в общем случае нельзя обойтись лишь дивизориальными стягиваниями.

12.10. Замечание. Возможно, что в ситуации, описанной выше, отображение g можно записать в виде композиции дивизориальных стягиваний и флопов. Поскольку флопы значительно более просты для понимания по сравнению с флипами, это был бы более сильный результат.

Теперь обсудим еще одну проблему, которая до этого намеренно нами избегалась. Неприятное обстоятельство заключается в том, что флипы часто приводят к неалгебраическим многобразиям. Снова этот случай легче проиллюстрировать на примере флопов.

12.11. Пример. Этот пример будет опираться на пример флопа, данный в п. 12.1; поэтому мы будем использовать все обозначения этого пункта.

Обозначим через L ограничение линейного расслоения $\mathcal{O}_{\mathbf{CP}^4}(1)$ на многообразие C. Пусть $s: C \longrightarrow L^{\otimes 2}$ – его общее сечение. «Извлечем квадратный корень» из сечения s, т.е. рассмотрим множество точек $V \subset L$, таких, что $v \otimes v \in s(C)$. Пусть $g: V \longrightarrow C$ – естественная проекция. Если в точке $x \in V$ сечение s не обращается в нуль, то множество $g^{-1}(x)$ состоит из двух различных точек; если $s(x) = 0$, то множество $g^{-1}(x)$ состоит из одной точки. Предположим, что множество нулей сечения s не содержит точку $0 \in C$ и является гладким подмногообразием в многообразии C. Тогда многообразие V будет гладким вне $g^{-1}(0)$. Сделаем теперь разрешения особенностей многообразия V. Пусть $\{0_1, 0_2\} = g^{-1}(0)$. В окрестности точек 0_i отображение g является аналитическим изоморфизмом. Таким образом, для разрешения особенности в точках 0_i мы можем использовать одно из разрешений особенностей C_1 или C_2 многообразия C. Пусть $p_{ij}: V_{ij} \longrightarrow V$ – разрешение особенностей, в котором выбирается разрешение C_i в точке 0_1

и разрешение C_j в точке 0_2. Очевидно, существуют естественные отображения $g_i: V_{ii} \longrightarrow C_i$, однако если $i \neq j$, то для многообразия V_{ij} уже не существует таких отображений. Наконец, обозначим через E_l^k множество $p_{ij}^{-1}(0_k)$, где $l = i$ при $k = 1$ и $l = j$ при $k = 2$.

Рассмотрим две исключительные кривые E_1^1 и E_1^2 на многообразии V_{11}. Согласно теореме Лефшеца, пространство $H_4(V_{11}, \mathbf{R})$ порождено классами $[p_{ij}^{-1}(P_\lambda^1)]$ и $[p_{ij}^{-1}(q_1\overline{P}_\lambda^2)]$. Из нашей конструкции следует, что классы $[E_1^1]$ и $[E_1^2]$ имеют одинаковые индексы пересечений с любым классом из пространства $H_4(V_{11}, \mathbf{R})$. Поэтому мы делаем вывод, что $[E_1^1] = [E_1^2]$.

В многообразии V_{12} имеем уже исключительные кривые E_1^1 и E_2^2, причем последняя кривая может быть получена как флоп кривой E_1^2 на многообразии V_{11}. Поэтому $[E_1^1] = -[E_2^2] \in \in H_2(V_{12}, \mathbf{R})$. Согласно замечанию 6.6, это означает, что комплексное многообразие V_{12} не является проективным. Таким образом, для того чтобы сделать флоп относительно кривой E_1^2 и получить при этом проективное многообразие, необходимо одновременно также сделать флоп относительно кривой E_1^1. Тогда в результате мы получим многообразие V_{22}, являющееся проективным.

12.12. Пример. Отображение $p_{11}: V_{11} \longrightarrow V$ имеет также другое интересное свойство. Это отображение стягивает две непересекающиеся кривые E_1^i. По крайней мере с помощью аналитического отображения можно стянуть сначала лишь одну из этих кривых и получить разложение вида $t_i: V_{11} \longrightarrow V_i \longrightarrow V$, где отображение $V_{11} \longrightarrow V_i$ стягивает кривую E_1^j при $j \neq i$. Поскольку выполнены равенства

$$[t_1 E_1^1] = t_1[E_1^1] = t_1[E_1^2] = [t_1 E_1^2] = [0] = 0 \in H_2(V, \mathbf{R}),$$

снова получаем, что многообразие V_1 непроективно. Однако это многообразие можно представить в виде склейки двух открытых алгебраических подмногообразий $V_1 - E_1^1$ и $V_1 - 0_2$. Таким образом, мы получили так называемое абстрактное алгебраическое многообразие, содержащее кривую, имеющую нулевой класс в пространстве гомологий. Однако это невозможно для гладких абстрактных алгебраических многообразий; следовательно, V_1 не алгебраично.

12.13. Приведенные выше примеры показывают, что если мы хотим сделать флоп или флип одновременно относительно нескольких кривых, мы должны разобраться с непроективными многообразиями. Не совсем ясно, какой путь более предпочтителен. Это снова приводит к проблеме нахождения аналога программы Мори для непроективных многообразий. Однако по этому поводу мало что известно.

13. Более тонкая структурная теория

Программу Мори следует рассматривать как начало структурной теории алгебраических многообразий. Эта программа позволяет в каждом классе бирациональной эквивалентности выделить особенно замечательные представители. С этой точки зрения следующая теорема является основным результатом Мори.

13.1. Теорема об удобных моделях. *Пусть X' — проективное многообразие размерности не более 3. Тогда оно бирационально эквивалентно некоторому проективному многообразию X, имеющему лишь $\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, причем выполнено одно из следующих условий:*

(i) *многообразие X обладает морфизмом $f: X \longrightarrow Y$, являющимся расслоением на многообразия Фано;*

(ii) K_X *является* nef-*расслоением.*

Следует отметить, что многообразие X, вобще говоря, определено неоднозначно, а условия (i) *и* (ii) *взаимно исключают друг друга.*

Доказательство. Построим следующую последовательность многообразий X_1, X_2, ... Положим $X_1 = X'$. Предположим, что последовательность $X_1, \dots, X_i$ уже построена. Если канонический класс многообразия X_i численно эффективен, то положим $X = X_i$, и требуемое многообразие X получено. В противном случае существует стягивание $g : X_i \longrightarrow Z$. Если это стягивание является расслоением на многообразия Фано, то, полагая $X = X_i$ и $Y = Z$, мы снова достигаем требуемой цели. Если g – дивизориальное стягивание, возьмем в качестве следующего члена X_{i+1} нашей последовательности многообразие Z. Если же стягивание g является малым, то сделаем флип отображения g и, получив морфизм $g' : X_i' \longrightarrow Z$, положим $X_{i+1} = X_i'$.

Каждое из многообразий X_i в построенной последовательности является проективным, имеет лишь терминальные Q-факториальные особенности и бирационально эквивалентно многообразию X. Если $X_i \longrightarrow X_{i+1}$ является дивизориальным стягиванием, то можно доказать, что

$$\dim H_4(X_{i+1}, \mathbb{R}) = \dim H_4(X_i, \mathbb{R}) - 1.$$

Если $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ – флип, то

$$\dim H_4(X_{i+1}, \mathbb{R}) = \dim H_4(X_i, \mathbb{R}).$$

Пользуясь результатом Шокурова (см. предложение 12.6), получаем, что любая последовательность флипов содержит конечное число членов. Таким образом, наш процесс формирования последовательности многообразий завершится на некотором многообразии X_n. Значит, многообразие X_n удовлетворяет одному из условий (i) или (ii).

Если многообразие X_n обладает стягиванием Фано, то это многообразие может быть покрыто рациональными кривыми (см. п. 11.13(i)); следовательно, тем же свойством обладает и многообразие X. Если же канонический класс многообразия X_n численно эффективен, то ни многообразие X_n, ни многообразие X не могут быть покрыты рациональными кривыми (см. п. 8.25). Таким образом, мы уже заранее можем дать ответ на вопрос, завершится последовательность стягиванием Фано или нет.

Следующая задача теперь состоит в том, чтобы разработать структурную теорию для многообразий, имеющих стягивание Фано, и для многообразий с численно эффективным каноническим расслоением K_X. Для поверхностей хорошая теория была разработана старой итальянской школой и в дальнейшем последовательно совершенствовалась несколькими геометрами.

В теореме 10.10 мы уже дали полное описание стягиваний. Поэтому мы обратимся к случаю численно эффективного K_X. Заметим, что в этом случае, согласно п. 9.11, многообразие X единственно в своем классе бирациональной эквивалентности. Приведем краткий список результатов для алгебраических поверхностей.

13.2. Структура поверхностей с численно эффективным K_X. Пусть X — гладкая проективная поверхность с nef-расслоением K_X. Тогда стабильное каноническое отображение является регулярным, поэтому многообразие Иитаки определено с точностью до изоморфизма. Для этого многообразия имеются следующие случаи:

(i) $\kappa(X) = 0$, $I(X)$ — точка. Для таких поверхностей имеется полный список. В него входят абелевы поверхности $\mathbf{C}^2/L$, поверхности четвертой степени в $\mathbf{P}^3$ и некоторые другие близкие к ним примеры.

(ii) $\kappa(X) = 1$, каноническое отображение $\phi : X \longrightarrow I(X)$ является отображением на некоторую кривую. В этом случае все слои этого отображения, за исключением конечного числа, являются гладкими эллиптическими кривыми. Известны также все возможные варианты для особых слоев. Поверхность X может быть полностью описана с помощью кривой $I(X)$ и некоторой дополнительной структуры на $I(X)$.

(iii) $\kappa(X) = 2$, каноническое отображение $\phi : X \longrightarrow I(X)$ является бирациональным. В этом случае на поверхности $I(X)$ могут быть лишь канонические особенности. Имеется следующая формула для плюриродов при $m \geq 2$:

$$P_m(X) = \left[\frac{m(m-1)}{2} + \frac{1}{12}\right] c_1(K_X)\cdot c_1(K_X) + \frac{1}{12} e(X),$$

где $e(X)$ — топологическая эйлерова характеристика. Имеются также и другие результаты, наиболее глубоким из которых является неравенство $c_1(K_X)\cdot c_1(K_X) < 3e(X)$.

13.3. Следствие. *Для гладкой проективной поверхности X следующие условия являются эквивалентными:*

(i) *поверхность X покрывается рациональными кривыми;*

(ii) *поверхность X бирационально изоморфна произведению $E \times \mathbf{CP}^1$ для некоторой кривой E;*

(iii) $P_m(X) = 0$ *для всех* $m \geq 1$;

(iv) $P_{12}(X) = 0$.

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (iii) была уже отмечена в п. 8.25. Если $P_m(X) = 0$ для каждого $m \geq 1$, то поверхность X не может быть бирационально эквивалентна некоторой поверхности с численно эффективным каноническим классом. Таким образом, поверхность X бирациональна некоторой поверхности, имеющей стягивание Фано. Следовательно, имеем (iii) $\Rightarrow$ (ii). Условие (iv) требует более детального изучения случаев, перечисленных в п. 13.2.

Для трехмерных многообразий известно, разумеется, еще меньше. Хотя для них отсутствует полное описание стягиваний Фано, как было замечено в п. 11.13(i), в случае их существования многообразие X покрывается рациональными кривыми (этот результат был получен Мияокой и Мори [см. [4*]. — *Ред.*]).

В случае численной эффективности канонического класса K_X многообразие X уже не является однозначно определенным. Например, если трехмерное многообразие X содержит кривую E, относительно которой можно сделать флоп, приводящий к многообразию X'', то канонический класс $K_{X''}$ также будет численно эффективным. Эти преобразования впервые изучались Куликовым для одного частного класса трехмерных многообразий. Позднее во все более возрастающей общности их изучали и другие математики: Фридман, Кавамата, Коллар, Мори, Моррисон, Персон, Пинкхамм, Рид, Шеферд-Бэррон, Цунода. К настоящему времени имеется следующая теорема:

13.4. Теорема. *Пусть X и X' —трехмерные проективные многообразия, имеющие лишь терминальные $\mathbf{Q}$-факториальные особенности. Предположим, что K_X и $K_{X'}$ оба являются* nef-*клас-*

сами и существует некоторое бирациональное отображение $f: X \dashrightarrow X'$. *Обозначим через* E *множество точек* X, *в которых отображение* f *не определено. Тогда*

(i) *множество* E *является объединением конечного числа рациональных кривых* $E = \cup E_i$, *причем* $[E_i]c_1(X) = 0$ *для каждого* i;

(ii) *по крайней мере относительно одной из кривых* E_i *можно сделать флоп*;

(iii) *отображение* f *может быть представлено в виде композиции конечного числа флопов.*

Для случая численно эффективного канонического класса K_X фундаментальным является следующая теорема Мияоки (см. [2*]. —*Ред.*).

13.5. Теорема[1]. *Пусть* X *—трехмерное многообразие с терминальными (или с каноническими) особенностями. Предположим, что канонический класс* K_X *является численно эффективным. Тогда* $\kappa(X) \geq 0$, *т.е.* $P_m(X) > 0$ *для некоторого* $m > 0$.

С помощью этой теоремы получаем следующий аналог следствия 13.3 в размерности 3.

13.6. Характеризация многообразий с $\kappa = -\infty$. *Пусть* X *— гладкое проективное трехмерное многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *многообразие* X *покрывается рациональными кривыми;*

(ii) *многообразие* X *бирационально эквивалентно некоторому трехмерному многообразию, обладающему стягиванием Фано;*

(iii) $P_m(X) = 0$ *для всех* $m \geq 1$.

Для трехмерных многообразий с неотрицательной кодаировой размерностью известно несколько больше. Пусть X – трехмерное проективное многообразие с терминальными особенностями, причем K_X численно эффективен. Рассмотрим возможные случаи для числа $\kappa(X)$.

---

[1] Дальнейшие результаты в этом направлении см. в [3*] и [1*]. —*Прим. ред.*

13.7. $\kappa(X)=0$. Имеется полная структурная теория, если $H_1(X, \mathbf{R}) \neq 0$, и практически ничего не известно в случае $H_1(X, \mathbf{R})=0$.

13.8. Если $\kappa(X) \geq 1$, то с помощью методов, разработанных для доказательства 11.11, можно показать, что стабильное каноническое отображение является регулярным; следовательно, многообразие Иитаки с точностью до изоморфизма определено однозначио (этот результат был получен Каваматой). В зависимости от значения числа $\kappa(X)$ имеем три случая.

13.9. $\kappa(X)=1$. Каноническое отображение $\phi: X \longrightarrow I(X)$ имеет в качестве образа $I(X)$ некоторую гладкую кривую. Гладкими слоями отображения ϕ являются поверхности из п. 13.2(i). Возможные случаи для особых слоев полностью не исследованы.

13.10. $\kappa(X)=2$. Каиоиическое отображение $\phi: X \longrightarrow I(X)$ имеет в качестве образа некоторую поверхность $I(X)$, которая может иметь особенности. Возможные особенности в этом случае более или менее изучены. Гладкими слоями ϕ являются эллиптические кривые. Классификация возможных особых слоев ϕ полностью не завершена.

13.11. $\kappa(X)=3$. В этом случае каноническое отображение $\phi: X \longrightarrow I(X)$ является бирациональным, а многообразие $I(X)$ может иметь лишь каиоиические особеиности. Имеется также формула для плюриродов, полученная Ридом и его учениками. Эта формула содержит сумму кубического многочлена и некоторой периодической функции; хорошо изучено геометрическое значение отдельных слагаемых из этой формулы.

13.12. Эпилог. До того как появились работы Мори, считалось общеизвестным, что трехмерные алгебраические многообразня находятся в состоянии хаоса и нет надежды разработать для них теорию, которая была бы аналогом теории алгебраических поверхностей. Макс Нётер однажды сказал, что алгебраические кривые созданы Богом, а алгебраические поверхности – Дьяволом. Такая точка зрения оставляет мало надежд для трехмерных алгебраических многообразий. Я полагаю, что мне удалось убедить читателя в существовании глубокой и содержательной теории трехмерных алгебраических многообразий, которая параллельна теории алгебраических поверхностей. Каждый математик, работающий в этой области, надеется, что результаты, доказанные до сих пор, —это лишь начало создания более детальной структурной теории. [Дальнейшее развитие теории см. в [6*]. —*Ред.*]

Литература

1. Вводные курсы

Clemens C.H., A scarpbook of complex curve theory, Plenum Press, 1980. [Имеется перевод: Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых. —М.: Мир, 1984.]

Элементарное и необычное по красоте введение в теорию кривых.

Fulton W., Algebraic curves, W.A. Benjamin, 1969.

Алгебраическое введение в теорию кривых.

Mumford D., Algebraic geometry I: Complex projective varieties, Springer, 1976. [Имеется перевод: Мамфорд Д., Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия. —М.:Мир, 1979.]

Книга содержит немного коммутативной алгебы и дает возможность очень быстро подойти к пониманию интересных теорем. Части II не существует.

Ried M., Undergraduate algebraic geometry, London Math. Soc. Texts in Math., 1988. [Имеется перевод: Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. —М.: Мир, 1991.]

Наиболее элементарное введение в общую теорию.

Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. —М.: Наука, 1972.

Части I и II книги дают алгебраиеское введение, часть

13.7. $\kappa(X) = 0$. Имеется полная структурная теория, если $H_1(X, \mathbb{R}) \neq 0$, и практически ничего не известно в случае $H_1(X, \mathbb{R}) = 0$.

13.8. Если $\kappa(X) \geq 1$, то с помощью методов, разработанных для доказательства 11.11, можно показать, что стабильное каноническое отображение является регулярным; следовательно, многообразие Иитаки с точностью до изоморфизма определено однозначно (этот результат был получен Каваматой). В зависимости от значения числа $\kappa(X)$ имеем три случая.

13.9. $\kappa(X) = 1$. Каноническое отображение $\phi : X \longrightarrow I(X)$ имеет в качестве образа $I(X)$ некоторую гладкую кривую. Гладкими слоями отображения ϕ являются поверхности из п. 13.2(i). Возможные случаи для особых слоев полностью не исследованы.

13.10. $\kappa(X) = 2$. Каноническое отображение $\phi : X \longrightarrow I(X)$ имеет в качестве образа некоторую поверхность $I(X)$, которая может иметь особенности. Возможные особенности в этом случае более или менее изучены. Гладкими слоями ϕ являются эллиптические кривые. Классификация возможных особых слоев ϕ полностью не завершена.

13.11. $\kappa(X) = 3$. В этом случае каноническое отображение $\phi : X \longrightarrow I(X)$ является бирациональным, а многообразие $I(X)$ может иметь лишь канонические особенности. Имеется также формула для плюриродов, полученная Ридом и его учениками. Эта формула содержит сумму кубического многочлена и некоторой периодической функции; хорошо изучено геометрическое значение отдельных слагаемых из этой формулы.

13.12. Эпилог. До того как появились работы Мори, считалось общеизвестным, что трехмерные алгебраические многообразия находятся в состоянии хаоса и нет надежды разработать для них теорию, которая была бы аналогом теории алгебраических поверхностей. Макс Нётер однажды сказал, что алгебраические кривые созданы Богом, а алгебраические поверхности — Дьяволом. Такая точка зрения оставляет мало надежд для трехмерных алгебраических многообразий. Я полагаю, что мне удалось убедить читателя в существовании глубокой и содержательной теории трехмерных алгебраических многообразий, которая параллельна теории алгебраических поверхностей. Каждый математик, работающий в этой области, надеется, что результаты, доказанные до сих пор, —это лишь начало создания более детальной структурной теории. [Дальнейшее развитие теории см. в [6*]. —*Ред.*]

Литература

1. Вводные курсы

Clemens C.H., A scarpbook of complex curve theory, Plenum Press, 1980. [Имеется перевод: Клеменс Г. Мозаика теории комплексных кривых. —М.: Мир, 1984.]

Элементарное и необычное по красоте введение в теорию кривых.

Fulton W., Algebraic curves, W.A. Benjamin, 1969.

Алгебраическое введение в теорию кривых.

Mumford D., Algebraic geometry I: Complex projective varieties, Springer, 1976. [Имеется перевод: Мамфорд Д., Алгебраическая геометрия. Комплексные проективные многообразия. —М.:Мир, 1979.]

Книга содержит немного коммутативной алгебы и дает возможность очень быстро подойти к пониманию интересных теорем. Части II не существует.

Ried M., Undergraduate algebraic geometry, London Math. Soc. Texts in Math., 1988. [Имеется перевод: Рид М. Алгебраическая геометрия для всех. —М.: Мир, 1991.]

Наиболее элементарное введение в общую теорию.

Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. —М.: Наука, 1972.

Части I и II книги дают алгебраиеское введение, часть

III – иной, независимый подход для компактных комплексных многообразий.

Siegel C.L., Topic in complex function theory. I,II,III, Wiley-Interscience, 1969.

Прекрасное введенне в аналитическую теорию римановых поверхностей.

2. Более фундаментальные учебники

Barth W., Peters C., Wan de Ven A., Compact complex surfaces, Springer, 1984.

Доступное элегантное изложение теорни алгебраических поверхностей.

Griffiths P., Harris J., Principles of algebraic geometry, Wiley-Interscience, 1978. [Имеется перевод: Гриффитс Ф. Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. —М.: Мир, 1982.]

Подробное введение в аналитическую теорию алгебраических многообразий.

Hartshorn R., Algebraic geometry, Springer, 1977. [Имеется перевод: Хартсхорн Р., Алгебраическая геометрия. —М.: Мир, 1981.]

Эта книга является стандартным алгебраическим введением.

Ueno K., Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math., vol. 439, Springer, 1975.

Обзор теории до результатов, полученных Мори.

3. Недавние обзорные статьи

Clemens C.H., Curves on threefolds, the Abel–Jacobi mapping, Proc. Sympos. Pure Math.(Algebraic Geometry, Bowdoin College, 1985), Amer.Math. Soc. (в печати).

Детальное изучение геометрии специальных трехмерных многообразий. (Автор придерживается другой точки зрения, изложенной нами в разд. 8.)

Kawamata Y., Matsuda K. and Matsuki K., Introduction to the minimal model problem, Adv. Studies in Pure Math., Sendai (впечати).

Доступное изложение, расчитанное на специалистов.

Mori S., Classification of higher-dimensional varieties, Proc. Sympos. Pure Math. (Algebraic geometry, Bowdoin College, 1985), Amer. Math. Soc. (в печати).

Большая часть обзора посвящена результатам, не вошедшим в программу Мори.

Reid M., Tendencious survey of 3-folds, Proc. Sympos. Pure Math. (Algebraic geometry, Bowdoin College, 1985), Amer. Math. Soc. (в печати).

Большая часть обзора – философские идеи и шутки. Статья рекомендуется для алгебраических геометров.

Reid M., Young person's guide to canonical singularities, Proc. Sympos. Pure Math. (Algebraic geometry, Bowdoin College, 1985), Amer. Math. Soc. (в печати).

Прекрасное введение в теорию трехмерных терминальных особенностей.

Wilson P.M.H., Towards birational classification of algebraic varieties, Bull. London Math. Soc. 19 (1987), 1–48.

Детальный обзор для алгебраических геометров широкого профиля.

Дополнительная литература[1)]

[1*] Kawamata Y. Abundance theorem for minimal threefolds. Preprint Univ. Tokyo, 1991.

---

1) Добавлена редактором перевода.

[2*] Miyaoka Y. On the Kodaira dimension of minimal threefolds. Math. Ann., 1988, v. 281, 325—332.

[3*] Miyaoka Y. Abundance conjecture for 3 folds: case $\nu = 1$. Composito Math., 1988, v. 68, 203—220.

[4*] Miyaoka Y., Mory S. A nummerical criterien of uni-ruled ness. Ann. of Math., 1986, v. 124, 65—69.

[5*] Шокуров В.В. Трехмерные логперестройки. — Изв. АНСССР, сер. матем., 1992, т. 56, № 1, с. 105—201..

[6*] Kollàr J. Effective base point freeness, University of Utah, preprint, 1992.