Г.А. МЕДВЕДЕВ

НАЧАЛЬНЫЙ КУРС ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

Москва
ТОО «Остожье»
2000

УДК 51:336(075.3)
ББК 22.1я721+65.9(2)26я721
М42

ПРИ УЧАСТИИ **ООО «НОВОЕ ЗНАНИЕ»**
Рекомендовано к изданию
Советом факультета прикладной математики и информатики
и
Советом специального факультета бизнеса и информационных технологий
Белорусского государственного университета

Медведев Г.А.
М42 Начальный курс финансовой математики: Учеб.пособие.-М.: ТОО «Остожье»,2000. – 267с.

ISBN 5-86095-117-5

В пособии излагаются основные методы финансовых расчетов, составляющих предмет финансовой математики. Для понимания этих методов достаточно иметь знания в объеме математики старших классов средней школы. Изложение материала в книге снабжено большим количеством примеров, которых достаточно для понимания этого материала и для иллюстрации расчетов. В книге приводятся упражнения по всем рассматриваемым разделам, что позволяет использовать ее в качестве учебного пособия для факультативного изучения финансовой математики в школах (лицеях или гимназиях), а также на первых курсах вузов на специальностях с экономическим или финансовым уклоном, например таких как «Актуарная математика», «Финансы и кредит», «Экономическая кибернетика» и др. Кроме того, книга может служить учебным пособием по дисциплине специализации «Основы математики финансов» в тех вузах, где такая дисциплина предусмотрена.

УДК 51:336(075.3)
ББК 22.1я721+65.9(2)26я721

©Г.А.МЕДВЕДЕВ
© ОФОРМЛЕНИЕ. ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НОВОЕ ЗНАНИЕ»,2000

ISBN 5-86095-117-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время интерес к финансовой деятельности заметно вырос, однако культура финансовых расчетов еще невысока. Особенно это касается случаев, когда такие расчеты делаются при анализе платежей, которые разнесены во времени или составляют потоки (последовательности, серии) регулярно повторяющихся выплат. До последнего времени нашим обществом практически совершенно не использовались ценные бумаги, векселя и другие финансовые атрибуты; имеется слабое представление об определении их рыночной цены. Пока еще основная масса людей недостаточно информирована о разнообразных формах получения и использования процентных денег.

Представляется целесообразным ознакомить широкого читателя с основами финансовых расчетов, составляющих предмет финансовой математики. Для понимания этих основ достаточно иметь знания в объеме математики старших классов средней школы. Поэтому предлагаемая читателю книга в первую очередь адресована старшим школьникам и студентам первых курсов и предназначена для ознакомления с математическими основами финансов, их применением для расчетов, считающихся обычными в странах с развитой финансовой культурой. Не секрет, что пока многие работники финансовых учреждений также недостаточно осведомлены об этом. Для них эта книга также будет полезной. Кроме того, каждому человеку, имеющему свободные деньги, следует уметь ими распорядиться с целью их приумножения. Эта книга научит их делать необходимые расчеты для достижения этой цели и производить правильный выбор, если имеются различные варианты.

Изложение материала в книге сделано по уже сложившемуся классическому стандарту. Дается понятие о процентных деньгах; простых и сложных процентах; дисконтировании (учете изменения стоимости денег со временем из-за возможности получения процентов); эквивалентности платежей; аннуитетов (серий регулярных платежей) и вечных рент. Эти понятия используются для описания элементов практической финансовой деятельности, таких как оформление векселей и их купля/продажа; амортизация (постоянная выплата) долгов; купля/продажа в рассрочку; образование целевых денежных фондов; расчет инвестиций; оперирование с простейшими ценными бумагами-облигациями; определение их рыночной цены; амортизация и обесценивание оборудования.

В настоящее время литературы на русском языке по финансовой математике практически нет. Автору известно лишь руководство Е.М. Четыркина «Методы финансовых и коммерческих расчетов», Москва, Дело Лтд. 1995. Поэтому при написании этой книги автору пришлось использовать иностранные источники. Он опирался, в основном, на следующие учебники (перечислим их по возрастанию сложности) :

1. R. Cissell, H. Cissell, D. Flaspohler. Mathematics of Finance. Houghton Mifflin Company, Boston, 1990 (восьмое издание), 720 с.
2. P.Hummel, C. Seebeck. Mathematics of Finance. McGraw-Hill Inc., New York, 1980 (третье издание), 370 с.
3. S. Kellison. The Theory of Interest. Irwin Inc., Boston, 1991 (второе издание), 446 с.
4. H. Gerber. Life Insurance Mathematics. Springer-Ferlag, Berlin, 1996 (второе издание), 157 с.
5. J. McCutcheon, W. Scott. An Introduction to the Mathematics of Finance. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1996 (восьмое издание), 463 с.

Предлагаемая читателю книга по уровню сложности занимает место между первым и вторым из этих учебников.

Традицией финансовых работников является использование «Таблиц для финансовых расчетов». Вместе с тем появление и широкое распространение вычислительной техники в большой степени понизило роль этих таблиц, так как возможности компьютерного применения значительно шире, а получение результатов быстрее и удобнее. Поэтому при изложении уделяется некоторое внимание употреблению таблиц. К сожалению из-за ограниченности объема сами таблицы в книге не приводится, но в приложении приведено описание этих таблиц, а также приведены формулы, по которым они составляются. Так что каждый читатель, которому доступны даже простейшие вычислительные средства (от программируемых калькуляторов и выше) может сосчитать необходимые значения функций по приведенным формулам. Читатели, которым доступно использование персональных компьютеров, могут воспользоваться дискетой с компьютерной программой, которая специально подготовлена для работы с этой книгой и обеспечивает расчеты в более широком диапазоне, чем это позволяют сделать «Таблицы для финансовых расчетов».

Профессор Медведев Г.А.
Белорусский государственный университет
220050 г. Минск, пр. Ф. Скорины 4. Тел. (017) 2095448.

Глава 1. ПРОЦЕНТНЫЕ ДЕНЬГИ

1.1 ПРОЦЕНТЫ

Всякий собственник, имеющий квартиру или гараж, которые он не использует, может сдать их в наем, получая за это определенную плату. Точно также человек, имеющий деньги, которые он не использует, может их дать взаймы другому лицу (или, используя более общий термин, - инвестировать) за определенное вознаграждение. Доход от инвестированного капитала или, в более узком смысле, вознаграждение за использование денег, называется **процентными деньгами** или кратко **процентами.** Сумма денег, данных взаймы, называется **основной** или **капиталом.** Обычно заем дается на определенное время - **период.** Сумма процентных и основных денег, полагающаяся в конце периода, называется **итогом.** В общем случае отношение процента за период к основной сумме (капиталу) называется **нормой процента.** Эта норма чаще всего выражается в форме процентов, при расчетах используются эквивалентные десятичные (реже - натуральные) дроби. При заключении конкретных сделок для обозначения нормы процентов обычно используется другое название - **процентная ставка.**

ПРИМЕР Иванов взял в сберегательном банке ссуду 10000 рб. Если банк начисляет 250 рб процентных денег за использование этой суммы в течение 6 месяцев, какой будет норма процента за этот период ?

РЕШЕНИЕ Обозначим норму процента за шести месячный период через i. Тогда $i = 250/10000 = 0.025 = 2.5\%$.

1.2 ПРОСТОЙ ПРОЦЕНТ

Пусть P будет основной суммой. r - нормой процента за 1год и t - продолжительность периода времени в годах. Если процент вычисляется по формуле

$$I = Prt \qquad (1)$$

и если процент выплачивается в конце периода времени, тогда выплачиваемые процентные деньги называются **простым процентом.** В этом случае норма процента за рассматриваемый период времени равна rt. Для простого процента норма, как правило, дается для периода продолжительностью 1 год.

Если S обозначает итоговую сумму, тогда

$$S = P + I \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) называются основными уравнениями простого процента. Любая задача для простых процентов может быть решена при помощи этих двух равенств. Следует заметить, что они содержат пять различных переменных, а именно S, P, I, r и t. Если любые три заданы (исключая случай задания трех первых одновременно), остальные две могут быть найдены с помощью (1) и (2). Для удобства можно добавить еще одно равенство. Если исключить из (1) и (2) переменную I, получим выражение итоговой суммы S через P, r и t.

$$S = P(1 + rt) \tag{3}$$

Так как для простого процента r всегда дается как годовая норма, время t должно измеряться в годах. Когда время дается в месяцах, t равно числу месяцев, поделенному на 12. Когда время дается в днях, используется два различных способа для подсчета t. Чаще используется деление числа дней на 360. Если t вычисляется таким способом, полученный процент называется **обыкновенным простым процентом.** Второй способ - использовать деление числа дней на 365 (366 в високосном году). Если t вычисляется таким образом, полученный процент называется **точным простым процентом.**

ПРИМЕР 1 Найти простой процент за ссуду 3000 рб на 5 месяцев при норме 0,07%.

РЕШЕНИЕ Мы имеем $P = 3000$, $r = 0{,}07$ и $t = 5/12$.

$$I = Prt = 3000 \times 0{,}07 \times (5/12) = 87{,}5 \text{ рб.}$$

ПРИМЕР 2 Найти точный простой процент и итоговую сумму, если 5000 рб даны взаймы на 100 дней при норме 4%.

РЕШЕНИЕ $P = 5000$, $r = 0{,}04$ и $t = 100/365$

$$I = 5000 \times 0{,}04 \times (100/365) = 54{,}8 \text{ рб}$$
$$S = 5000 + 54{,}8 = 5054{,}8 \text{ рб.}$$

ПРИМЕР 3 Человеку, который инвестировал 100000 рб, возмещены 101000 рб девяносто днями позже. С какой нормой зарабатывались эти деньги при обыкновенном простом проценте ?

РЕШЕНИЕ $P = 100000$, $S = 101000$ и $t = 90/360 = 1/4$. Теперь, так как $S = P + I$, $I = S - P = 101000 - 100000 = 1000$. Но $I = Prt$, поэтому

$$r = I/(Pt) = 1000/(100000 \times (1/4)) = 0{,}04 = 4\%.$$

ПРИМЕР 4 Через 60 дней после займа Иванов выплатил ровно 10000 рб. Сколько было занято, если 10000 рб включают основную сумму и обыкновенный простой процент при 12% ?

РЕШЕНИЕ $S = 10000$, $r = 0{,}12$ и $t = 60/360 = 1/6$. Подставляя эти значения в $S = P(1 + rt)$, получим

$$10000 = P \times (1{,}02) \quad \text{откуда} \quad P = 10000/\ 1{,}02 = 9804 \text{ рб.}$$

Для вычисления простых процентов без использования современной вычислительной техники применяются различные практические приемы. Наиболее известный из них - шести процентный способ, который основан на том, что на каждый рубль при норме 6% обыкновенный простой процент за 60 дней равен 0,01 рб. Теперь, приводя реальную норму к 6% и реальный период к 60 дням для определения обыкновенного простого процента достаточно перемножить эти приведенные величины и полученное произведение умножить на один процент от основной суммы. Полученный результат и будет обыкновенным простым процентом.

Кроме этого для определения простых процентов не прибегая к вычислениям, используются таблицы. В финансовой математике часто можно решать поставленную задачу несколькими методами. В этих условиях всегда следует искать наиболее простой способ, который сократит и ваш труд и риск числовых ошибок. Решение задач несколькими способами часто является желательным с целью проверки результата.

УПРАЖНЕНИЯ 1

(В этих и всех последующих упражнениях, когда результат не выражается целыми числами, вычисления производить с точностью до второго десятичного знака после запятой, если в условиях не оговорено другое.)

1. Выразить следующие проценты в виде соответствующих натуральных и десятичных дробей с точностью до четвертого десятичного знака : a) 4 %, b) 2 1/4 %, c) 3&2 % , d) 3 1/3 % , e) 0,8 % , f) 1/6 % .

2. Представить каждую из следующих дробей в виде процентов с точностью до сотой доли процента ; a) 0,035 , b) 3/40 , c) 0,04 (1/3) , d) 5/16 , e) 8,40/280 , f) 40/1250.

3. Найти значения $1 + rt$ и выразить результат в виде натуральных и десятичных дробей : a) $r = 6\%$, $t = 1/2$; b) $r = 1\ 1/4\ \%$, $t = 1/3$; c) $r = 5\%$, $t = 3/4$; d) $r = 3.2$, $t = 1/12$; e) $r = 3.2\%$, $t = 1/8$.

4. Вычислить (1 + 0,07(7/12))5000 рб с точностью до 1 рб.

5. Найти простой процент для 7000 рб за 5 месяцев при 3%.

6. Вычислить 6000рб/(1 + 0,05(1/4)) с точностью до 1 рб.

7. Найти простой процент и итоговую сумму, если 7000 рб инвестируются на 4 месяца при 6 1/3 %.

8. Найти обыкновенный и точный простой процент для 4600 рб за 120 дней при 7% в обычном году.

9. Найти обыкновенный простой процент и итоговую сумму для 150000 рб при 5 1/4 % за 90 дней.

10. Банк начисляет 5 рб обыкновенного простого процента за использование 300 рб в течение 60 дней. Какова норма простого процента таких сделок ?

11. При приобретении товаров покупатель может заплатить или 500 рб сразу или 520 рб через 4 недели. Если он займет деньги, чтобы заплатить наличными, какая норма простого процента может быть допустима для возмещения займа ?

12. Найти P если $S = 4800$ рб, $r = 7\%$ и $t = 1/4$.

13. Найти S если $P = 7000$ рб, $r = 8\%$ и $t = 1/6$.

14. Какая основная сумма приведет к итогу 7800 рб за 5 месяцев, если норма процента равна 8% ?

15. Какая основная сумма приведет к итогу 13900 рб через 90 дней при норме 8% обыкновенного простого процента ?

16. Сколько дней понадобится, чтобы 7000 рб заработали 100 рб, если они инвестируются при 9% обыкновенного простого процента ?

Найти точный и обыкновенный простые проценты :

17. $P = 28000$, $r = 7\%$, $t = 189$ дней.

18. $P = 96800$, $r = 6\%$, $t = 227$ дней.

19. $P = 69500$, $r = 4{,}5\%$, $t = 95$ дней.

20. $P = 18700$, $r = 12\%$, $t = 128$ дней.

1.3 ВРЕМЯ МЕЖДУ ДАТАМИ. ОФОРМЛЕНИЕ ВЕКСЕЛЕЙ

Когда временной интервал дается не явно, а в форме промежутка между датами, обычно вычисляют точное число дней, включая первый или последний день, но не оба. Такой способ определяет так называемое **точное время.** Его легко определить, если обе даты относятся к одному и тому же году и имеется в наличии календарь, показывающий порядковый номер каждого дня года. Тогда достаточно из порядкового номера поздней даты вычесть порядковый номер ранней даты и результат даст продолжительность периода. В високосных годах порядковый номер дня после 28 февраля следует увеличивать на единицу. Упомянутый здесь календарь порядковых номеров дней года обычно содержится среди таблиц для финансовых расчетов, имеющихся в руководствах по финансовым и коммерческим расчетам.

Другой способ подсчета количества дней между датами основан на предположении, что каждый месяц года состоит из 30 дней. Когда используется этот способ, получающийся результат называется **приближенным временем.**

Независимо от того, каким образом рассчитывалось число дней временного периода, могут начисляться обыкновенные или точные простые проценты. Поэтому возможны четыре различных варианта числового выражения простого процента. Сочетание точного времени и точного простого процента практически не встречается. Чаще всего встречается случай, когда используется точное время и обыкновенный простой процент. Этот вариант часто называется **правилом банкиров.** В дальнейшем мы будем всегда подразумевать именно этот способ расчетов, если не будет оговорено другое.

ПРИМЕР 1 Ссуда была выдана 10 марта и возвращена 17 ноября. Найти a) точное время, b) приближенное время периода.

РЕШЕНИЕ a) 10 марта является 69-ым днем года, а 17 ноября является 321-ым днем года. Так что число дней точного времени равно

$$321 - 69 = 252.$$

b) При определении приближенного времени для удобства составим следующую табличку

Дата	Месяц	День
17 ноября	11	17
10 марта	3	10
Разность	8	7

Разность равна 8 месяцев и 7 дней или 247 дней, если считать, что в каждом месяце по 30 дней.

ПРИМЕР 2 Ссуда была выдана 20 октября 1993 года и возмещена 15 июня 1995 года. Найти a) точное время, b) приближенное время периода.

РЕШЕНИЕ a) 20 октября является 293-ым днем года, а 15 июня является 166-ым днем года. Определяемый период включает 365 - 293 = 72 дня 1993 года, 365 дней 1994 года и 166 дней 1995 года. Поэтому точное время периода равно

$$72 + 365 + 166 = 604 \text{ дня.}$$

b) При определении приближенного времени опять обращаемся к использованию вспомогательной таблицы

Дата	Год	Месяц	День
15 июня	1995	6	15
15 июня	1994	18	15
15 июня	1994	17	45
20 октября	1993	10	20
Разность	1	7	25

Приближенное время периода равно 1 год 7 месяцев и 25 дней или

$$360 + 210 + 25 = 595 \text{ дней.}$$

Оформление денежных отношений между партнерами финансовой сделки может производиться при помощи **векселей (расписок)**, которые, по существу, являются письменными обязательствами заплатить определенную сумму денег в установленный срок. Дата, до которой деньги должны быть выплачены, называется **датой погашения.** Сумма денег, которая должна быть выплачена, называется **суммой погашения.** Хотя эти две характеристики являются наиболее существенными, обычно в тексте расписки содержится и другая информация, которая может оказаться необходимой. Во всяком случае, текст векселя должен быть составлен таким образом, чтобы на его основании дата и сумма

погашения могли бы быть однозначно определены. Например, предположим, что некто Иванов занял у Петрова 4000 рб и согласился вернуть долг с 76 рб процентов через 4 месяца. Тогда Иванов мог бы дать Петрову следующий вексель :

****

10 октября 1994 г.

Через четыре месяца после указанной даты я обязуюсь по требованию Петрова заплатить сумму 4000 рб и простые проценты в размере 5,7% годовых.

(Подпись) Иванов

****

Такой вексель является обязательством Иванова заплатить Петрову 4076 рб 10 февраля 1995 г. Сумма 4000 рб называется **лицевой суммой** векселя, а 4-месячный период называется **сроком** векселя. Другой вексель, эквивалентный по смыслу и значению, приведенному выше, выглядит так:

****

10 октября 1994 г.

Через четыре месяца после указанной даты по требованию Петрова я обязуюсь заплатить сумму 4076 рб без процентов.

(Подпись) Иванов

****

Когда срок векселя дан в месяцах, он обычно погашается в тот же самый день соответствующего месяца. Исключение составляет случай, когда дата погашения попадает на число месяца, которое не существует (например, 31 июня или 30 февраля). Тогда датой погашения считается последний день месяца. Если же срок векселя дан в днях, обычно рассчитывается точная дата выплаты занятых денег. Например, 80-дневный вексель, датированный 16 ноября, погашался бы 4 февраля. При таких расчетах снова был бы полезен календарь с порядковыми номерами дней года.

ПРИМЕР 3 Установить дату погашения 60-дневной расписки, датированной 17 июля 1994 г.

РЕШЕНИЕ 17 июля является 198-ым днем года. Добавляя 60 дней, получим 258-ой день года, которым является 15 сентября. Это и есть дата погашения.

1.4 ПРОСТОЙ ДИСКОНТ

Дисконтом называют уменьшение суммы счета, расчета, долга и т.п. по какой либо причине. В математике финансов дисконтом является величина, вычитаемая из суммы погашения обязательства, когда обязательство принимается до даты его погашения. Сумма, остающаяся после вычитания дисконта из суммы погашения, называется **выручкой.** Например, предположим, что Иванов получил вексель от Петрова на 10000 рб, которые будут погашены через 5 месяцев. После этого Иванов продает этот вексель Сидорову за 9500. В этом случае дисконт равен 500 рб и выручка равна 9500 рб.

Нормой дисконта для данного периода времени называется отношение дисконта за период к сумме погашения. Как и в случае простого процента, эта норма всегда дается в процентах или эквивалентных десятичных дробях и обычно рассчитывается на годовой основе.

Пусть S обозначает сумму погашения, d - норма дисконта за 1 год и t - продолжительность периода времени в годах. Если дисконт вычисляется по формуле

$$D = Sdt, \tag{4}$$

он называется **простым дисконтом** или, **банковским дисконтом.** Если P обозначает выручку, тогда

$$P = S - D\,. \tag{5}$$

Для простого или банковского дисконта равенства (4) и (5) играют ту же самую роль, какую играют равенства (1) и (2) для простого процента. Если из (4) и (5) исключить D, получается выражение для выручки через величины S, d и t

$$P = S\,(1 - dt). \tag{6}$$

Когда инвестор (в нашем примере Сидоров) покупает вексель до его даты погашения, он, по существу, ссужает деньги продавцу. То есть Сидоров практически ссудил Иванову 9500 рб на 5 месяцев и владеет векселем Петрова как ценной бумагой. В день погашения Сидоров получит от Петрова 10000 рб, так что Сидоров получит 500 рб прибыли за

инвестицию 9500 рб на 5 месяцев. Понятно, что 500 рб могут рассматриваться как простой процент за инвестированные 9500 рб. Таким образом, в день погашения дисконт на S становится процентом на P. Или по-другому, $S - P$ может рассматриваться или как дисконт на S или как процент на P. Ясно, что норма дисконта и норма процента не будут одинаковыми. В рассмотренном примере норма дисконта равна (из $D = Sdt$)

$$d = D/(St) = 500/(10000 \times (5/12)) = 0{,}12\ ,$$

в то время как норма процента равна (из $I = Prt$)

$$r = I/(Pt) = 500/(9500 \times (5/12)) = 12/95.$$

Соотношение между нормой процента и нормой дисконта легко получается приравниванием правых частей равенств (1) и (4) и делением на t. Это дает

$$Pr = Sd. \qquad (7)$$

Ошибки в задачах, касающихся дисконта, обычно появляются из-за перепутывания норм r и d. Равенство (7) ясно показывает, что они не одинаковы и не являются взаимозаменяемыми.

Когда вексель покупается до даты его погашения, цена P, которую инвестор будет платить, обычно определяется одним из двух следующих способов :

a) Инвестор может установить, что используется данная норма дисконта d . В этом случае S, t и d известны и для нахождения P используется уравнение простого дисконта, $P = S(1 - dt)$.

b) Инвестор может установить норму процента r , которую он хотел бы реализовать за свою инвестицию. В этом случае S, t и r являются известными, так что для нахождения P должно быть использовано уравнение простого процента. Поэтому $P = S/(1 + rt)$.

Когда выручка от продажи векселя найдена одним из описанных способов, говорят, что вексель дисконтирован. Если используется способ a) , дисконт называется **банковским дисконтом** или **дисконтом по норме дисконта .** Если используется способ b) , дисконт называется **дисконтом по норме процента** или иногда **истинным дисконтом.**

Когда человек занимает деньги и дает свой вексель, по существу, он продает свой вексель на время до даты погашения. В примере предыдущего параграфа Иванов фактически продал Петрову за 4000 рб расписку о том, что через 4 месяца он выкупит ее за 4076 рб. 4000 рб являются выручкой. 76 рб можно рассматривать как дисконт от суммы погашения 4076 рб. 4 месяца спустя, когда Иванов возместит 4076 рб, 76 рб будут процентом для Петрова за его инвестицию 4000 рб на 4 месяца.

Многие банки используют норму дисконта при выдаче любых ссуд. Однако при этом часто используется термин **процент авансом** в том же самом смысле, что и банковский дисконт. Например, Сидоров попросил ссуду 120000 рб на 60 дней в банке, который использует 7% - ную норму процента авансом. В банке вычисляют величину процента авансом по формуле $D = Sdt$, где $S = 120000$, $d = 0{,}07$ и $t = 1/6$, получая значение 1400 рб, и выдают Сидорову 118600 рб, являющиеся выручкой от ссуды. Понятно, что вексель Сидорова о возмещении 120000 рб через два месяца дисконтируется по способу а). Таким образом, термин процент авансом является синонимом банковского дисконта, а норма процента авансом является банковской терминологией нормы дисконта.

ПРИМЕР 1 16 ноября 1994 Иванов продал сберегательному банку следующий вексель

****

9 февраля 1994

Через год после указанной даты я обязуюсь выплатить по требованию Иванова 150000 рб и простой процент 6% годовых.

Подпись Петров

****

Если сберегательный банк использует 7% - ную норму процента авансом, а) какой будет выручка, b) какую норму процента реализует банк при такой инвестиции ?

РЕШЕНИЕ а) Вексель погашается 9 февраля 1995 г. за 159000 рб. С 16 ноября 1994 г. по 9 февраля 1995 г. пройдет 85 дней, так что $S = 159000$, $t = 85/360 = 17/72$, $d = 0{,}07$.

$$D = Sdt = 159000 \times 0{,}07 \times (17/72) = 2627{,}92 \text{ рб},$$
$$P = S - D = 159000 - 2627{,}92 = 156372{,}08 \text{ рб}.$$

b) $P = 156372{,}08$, $t = 17/72$ и $I = 2627{,}92$.

Из равенства (1) $I = Prt$ имеем

$$r = I/Pt = 2627{,}92/(156372{,}08 \times (17/72)) = 0{,}0712.$$

ПРИМЕР 2 Вексель на 10175 рб, погашаемый через 90 дней, продан банку, который установил 7%-ную норму простого процента при дисконтировании. Какой будет выручка ?

РЕШЕНИЕ Здесь $S = 10175$ рб, $t = 90/360 = 1/4$ и $r = 0{,}07$. По формуле (3) $S = P(1 + rt)$ получаем

$$P = S/(1 + rt) = 10175/(1 + (0{,}07 \times (1/4)) = 10000 \text{ рб}.$$

ПРИМЕР 3 Иванов намеревается получить ссуду в сберегательном банке на 120 дней. Если банк начисляет 7% процента авансом, какую сумму должен просить Иванов, чтобы получить на руки 100000 рб ?

РЕШЕНИЕ Нам нужно определить S , имея следующие данные $P = 100000$ рб, $t = 120/360 = 1/3$ и $d = 0{,}07$. Из формулы (6) имеем $P = S(1 - dt)$, что дает

$$S = P/(1 - dt) = 100000/(1 - (0{,}07 \times (1/4))) = 101781{,}17.$$

Простой дисконт, так же как простой процент, обычно используется только для краткосрочных периодов, как правило, не превышающих года. Чаще применяется норма дисконта d , хотя большое расхождение терминологии в различных текстах и финансовых учреждениях затрудняет временами понять, какая норма упоминается норма процента r или норма дисконта d . В последующем тексте процент авансом означает банковский дисконт и его не следует путать с процентом, который всегда рассчитывается на P и выплачивается в конце сделки.

УПРАЖНЕНИЯ 1.2

1. $S = 170000$ рб, $d = 5\%$, период - два месяца. Найти D и P.
2. $S = 250000$ рб, $d = 7\%$, период от 15 мая до 26 июля. Найти D и P.
3. $P = 250000$ рб, $d = 7\%$, период от 15 мая до 26 июля. Найти D и S.
4. Вексель с суммой погашения 100000 рб продан при норме дисконта 3,5% за 75 дней до даты погашения. Найти дисконт и выручку.
5. Найти выручку в условиях предыдущей задачи, если вместо нормы дисконта дана норма процента 3,5%.

6. Вексель с суммой погашения 60000 рб 15 августа продан за 590000 рб 16 июня. Какая норма дисконта была использована ? Какую норму процента реализовал покупатель в результате сделки ?
7. При получении товара торговец подписал вексель, обязуясь заплатить 240 млн рб через 60 дней. Найти выручку, если поставщик продает вексель банку, который использует 6,5%-ную норму дисконта. Какую прибыль получит поставщик, если товар стоит 190 млн рб ?
8. Инвестор ссудил 34 млн рб и получил вексель с обязательством заплатить эту сумму плюс 7% простых процентов через 90 дней. Вексель был немедленно продан банку, который начисляет 6% банковского дисконта. Сколько заплатил банк за вексель ? Какова прибыль инвестора ? Какую норму процента реализует банк при погашении векселя?
9. Банк заплатил 44000 рб за вексель с суммой погашения 45000 рб через 4 месяца. Какова норма дисконта ? Какова норма процента ?
10. В векселе содержится обязательство выплатить 600000 рб и обыкновенный простой процент при норме 5,5% через 60 дней. Он был дисконтирован при 6% банковского дисконта за 20 дней до погашения. Найти сумму погашения векселя и выручку от продажи.
11.

1 апреля 1994 г.

Через 150 дней после указанной даты я обязуюсь заплатить Иванову 275000 рб и обыкновенный простой процент при 6% годовых.

Подпись Петров

Найти сумму погашения и дату погашения. Если расписка продана 31 мая 1994 г. при 5% банковского дисконта, найти выручку.

12.

1 июня 1994 г.

Я Иванов обязуюсь выплатить Петрову ровно 10000 рб через 60 дней после указанной выше даты.

Иванов

1 июня, когда Иванов подписал вексель, он получил 9500 рб. Какую процентную ставку обыкновенного простого процента установил Петров? Какая норма банковского дисконта дала бы такой же результат?

13. Просьба ссудить 50000 рб на 4 месяца поступила в банк, который начисляет 8% процента авансом. Определить дисконт. Чему равна выручка ссуды ?
14. Для того чтобы получить выручку 80000 рб, сколько нужно попросить в банке для 8-месячной ссуды, если банк начисляет 7% - ный банковский дисконт ?

Глава 2. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

2.1 СОСТАВНОЙ ИТОГ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Когда процент периодически добавляется к основной сумме и эта новая сумма используется, как основная для следующего временного периода и эта процедура повторяется определенное число периодов, окончательный итог называется **составным итогом.** Разность между составным итогом и первоначальной основной суммой называется **сложным процентом.** Период времени между двумя последовательными начислениями процентов называется **периодом начисления процентов** или **периодом конверсии** и может быть установлен любой удобной временной продолжительности. В качестве периода конверсии обычно берется целый делитель года, такой как месяц, квартал, 6 месяцев или год. Норма процента обычно рассчитывается на годовой основе и при начислении процентов должна изменяться до нормы процента на период инверсии.

ПРИМЕР Найти составной итог в конце 1 года при основной сумме 50000 рб, если при начислении используется норма процента 7%, конвертируемая поквартально.

РЕШЕНИЕ Слова 7%, конвертируемые (или составляемые) поквартально, означают 1,75% за квартал (3 месяца). Таким образом, в конце первого квартала 1,75% от 50000 рб добавляются к основной сумме, увеличивая ее до итоговой суммы первого периода 50875 рб. Эта сумма является основной для второго периода. В конце второго квартала к ней добавляются 1,75% от 50875 рб, давая новый итог 51765,31 рб в конце второго периода и основную сумму для третьего периода. В конце третьего периода к основной сумме этого периода добавляются 1,75% от 51765,31 рб процентов третьего периода, приводя к итоговой сумме 52671,20 рб третьего квартала. И, наконец, в конце года 1,75% от 52671,20 рб добавляются к основной сумме четвертого квартала, образуя составной итог года (четырех квартальных периодов) 53592,95 рб. Сложный процент за год равен 3592,95 рб, что на 92,95 рб больше суммы, которая получилась бы при использовании простого процента.

Прямой метод начисления процентов по периодам конверсии, использованный в примере, является утомительным, когда число

периодов становится больше. Поэтому имеет смысл сформулировать более быстрые способы получения итоговой суммы, одинаково удобные для произвольного числа периодов конверсии.

2.2 ОБОЗНАЧЕНИЯ

Будем использовать следующие обозначения :
P - первоначальная основная сумма или настоящая стоимость S .
S - составной итог для P , или итог на конец срока.
n - количество процентных периодов (периодов конверсии).
m - количество периодов конверсии за 1 год.
j - норма процента, которая конвертируется m раз в году.
i - норма процента за период конверсии: всегда $i = j/m$.

Годовая норма j называется **годовой номинальной нормой (ставкой)** или более кратко **номинальной ставкой,** так как она является нормой, используемой только в рассматриваемой сделке. Норма $i = j/m$ всегда используется при начислении итоговой суммы. Обычно используются следующие версии обозначений номинальной ставки, которые поясним примером : $j = 0{,}15$ или (15%, $m = 3$) или (j = 15%, m = 3) означают, что годовая номинальная норма 15% конвертируется 3 раза в год и что $i = 0{,}05$ является нормой процента за 4-месячный период.

2.3 ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА СОСТАВНОГО ИТОГА

Если P обозначает основную сумму в начале первого периода начисления процента и i является нормой процента за период конверсии, тогда процент, начисленный в конце первого периода, равен Pi и итог первого периода равен $P + Pi$ или $P(1 + i)$. Таким образом, итог периода конверсии в $(1 + i)$ раз больше основной суммы этого периода. Подобные рассуждения показывают, что итог в конце любого периода конверсии в $(1 + i)$ раз больше основной суммы этого периода конверсии, так что итог в конце второго периода равен

$$P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2 \ ,$$

а в конце n периодов конверсии имеем итоговую сумму, равную

$$S = P(1 + i)^n \qquad (1)$$

Это равенство называется **основной формулой сложного процента.** Получение всякого результата, связанного со сложными процентами,

прямо или косвенно использует эту формулу. Заметим, что в (1) используется четыре величины, так что если любые три из них известны, четвертая может быть найдена из этого уравнения.

2.4 ВЫЧИСЛЕНИЕ СОСТАВНОГО ИТОГА

Когда P, n и i даны, составной итог можно вычислить. Для наиболее употребительных целочисленных значений величин n и i составлены таблицы выражения $(1 + i)^n$, которое принято называть **множителем накопления.** Если такие таблицы имеются под рукой, по ним находится требуемый множитель накопления, и он умножается на величину основной суммы, что даст необходимый результат : требуемый итог. Таблицы могут не содержать заданных целочисленных значений величин n и i, тогда использование таблиц несколько усложняется, но является все-таки возможным.

Предположим, что норма процента i табулирована, а значение n находится за пределами таблицы. В этом случае следует представить n как сумму целочисленных величин n_1 и n_2, $n = n_1 + n_2$, таких, что n_1 и n_2 табулированы и для каждого из них по таблице найти значения соответствующих множителей накопления: $(1+i)^{n_1}$ и $(1+i)^{n_2}$. Перемножение этих множителей и даст требуемый множитель накопления $(1 + i)^n$. Если значение n настолько велико, что не представляется в виде суммы двух табулированных величин, нужно представить его в виде суммы трех, четырех или другого необходимого числа табулируемых величин. Далее определяются множители накопления, соответствующие слагаемым, и необходимый множитель накопления определяется как произведение множителей накопления, найденных из таблицы.

Предположим теперь, что величина n табулирована, но норма процента i принимает нецелое значение, промежуточное между имеющимися в таблице. Тогда можно использовать **интерполяцию** для получения приближенного значения требуемого множителя накопления. Она заключается в следующем. Пусть заданная норма процента i попадает между соседними в таблице значениями i_1 и i_2, $i_1 < i < i_2$. Из этого следует, что для заданного n

$$(1 + i_1)^n < (1 + i)^n < (1 + i_2)^n$$

Обозначим через X приближенное значение величины $(1 + i)^n$.

В этих условиях составляется пропорция для величины X ,

$$\frac{X-\left(1+i_1\right)^n}{\left(i-i_1\right)}=\frac{\left(1+i_2\right)^n-\left(1+i_1\right)^n}{\left(i_2-i_1\right)},$$

из которой искомая величина X находится в виде :

$$X=\left(1+i_1\right)^n+\frac{i-i_1}{i_2-i_1}\left(\left(1+i_2\right)^n-\left(1+i_1\right)^n\right)=$$
$$=\frac{i_2-i}{i_2-i_1}\left(1+i_1\right)^n+\frac{i-i_1}{i_2-i_1}\left(1+i_2\right)^n .$$

ПРИМЕР Найти приближенное значение итоговой суммы при накоплении процентов основной суммы 10000 рб в течение 20 лет при норме процента i = 5,2%.

РЕШЕНИЕ Из таблицы для множителей накопления имеем :

i	0,055	0,050
$(1 + i)^{20}$	2,9178	2,6533

В этом случае i_1 = 0,050, i = 0,052, i_2 = 0,055.

$$(i_2 - i)/(i_2 - i_1) = 3/5 = 0,6 .$$
$$(i - i_1)/(i_2 - i_1) = 2/5 = 0,4 .$$

Поэтому приближенное значение X величины $(1 + 0,052)^{20}$ вычисляется следующим образом

$$X = (0,6)(2,6533) + (0,4)(2,9178) = 2,7591$$

Таким образом, итоговая сумма S приблизительно равна

$$S = 10000 \times 2,7591 = 27591 \text{ рб.}$$

Когда необходимо найти множитель накопления для значений i и n , которых в таблице нет, приходится вычислять этот множитель непосредственно. При этом удобно вычислить сначала логарифм множителя накопления по формуле

$$\log(1 + i)^n = n \log(1 + i).$$

В предыдущем примере это привело бы к результату

$$\log(1 + 0{,}052) = 20 \log(1{,}052) = 20 \times 0{,}0693 = 1{,}0139$$

что дает величину множителя накопления равную 2,7562 и итоговую сумму 27562 рб. Этот результат показывает, в частности, точность вычисления по приближенной формуле. Погрешность составляет 29 рб, то есть 0,00105 или 0,105% от итоговой суммы.

В заключение заметим, что интерполяция является достаточно громоздкой процедурой и ею следует пользоваться только в тех случаях, когда под рукой есть таблицы и нет калькулятора, который мог бы возводить числа в произвольную степень. Если таковой имеется, лучше не использовать таблицы, а вычислять итоговую сумму по формуле (1).

2.5 НАСТОЯЩАЯ СТОИМОСТЬ И СЛОЖНЫЙ ДИСКОНТ

Часто необходимо знать, какая основная сумма P, инвестированная теперь, при данной норме процента даст накопление до заданной итоговой суммы S к заданной более поздней дате. В этих условиях P называется **настоящей стоимостью** суммы S. Другими словами, настоящая стоимость P на данную дату для суммы S на более позднюю дату является основной суммой, которая, будучи инвестированной в данную дату при заданной норме процента, даст итог S в эту более позднюю дату. Разность $S - P$ называется **сложным дисконтом** от суммы S, а процесс определения настоящей стоимости называется **дисконтированием.** Вычисление настоящей стоимости (или дисконтирование суммы S) означает просто решение уравнения (1) относительно P, когда S, i и n заданы. Решение уравнения (1) дает

$$P = S/(1+i)^n = S(1+i)^{-n}. \qquad (2)$$

Стоящий в знаменателе множитель накопления может быть вычислен способами, описанными в предыдущем параграфе. Тем не менее и в этом случае в руководствах по финансовым расчетам приводятся таблицы обратных значений множителей накопления $(1 + i)^{-n}$, которые принято называть **множителями дисконтирования.**

2.6 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ

Очевидно, что знание годовой номинальной нормы процента бессмысленно, если не задана частота конверсий. Вместе с тем часто желательно знать полное годовое приращение на каждый рубль первоначальной основной суммы. Для этого вводится новое понятие - **годовая эффективная норма.** Годовая эффективная норма r, соответствующая заданной номинальной норме j, конвертируемой m раз в год, - это полная сумма процентов, начисленных за год на каждый рубль основной суммы (капитала), имевшейся в начале года.

Для определения годовой эффективной нормы, соответствующей заданной номинальной норме j, конвертируемой с заданной частотой m, достаточно найти накопленную за год сумму при номинальной норме и приравнять ее к сумме, накопленной при эффективной норме r. Сумма, которую накопит 1 рб за 1 год при норме j, конвертируемой m раз, равна $(1 + i)^m$, где $i = j/m$. При эффективной норме r 1 рб за 1 год накопит сумму $(1 + r)$. Приравнивая эти суммы, имеем

$$1 + r = (1 + i)^m = (1 + (j/m))^m \qquad (3)$$

Равенство (3) связывает три величины, так что если две из них заданы, то третья может быть из него определена.

ПРИМЕР 1 Какая эффективная годовая норма соответствует номинальной норме $j = 0{,}06$ $(6\%, m = 3)$?

РЕШЕНИЕ 1 рб за год обеспечит итоговую сумму

$$(1 + (0{,}06)/3) = (1 + 0{,}02) = 1{,}0612$$

Поэтому годовая эффективная норма равна 6,12%.

ПРИМЕР 2 Найти годовую номинальную норму, конвертируемую поквартально, соответствующую эффективной норме 6% .

РЕШЕНИЕ В этом случае $m = 4$, $r = 0{,}06$.

$$1 + r = 1{,}06 = (1 + i)^4$$

Отсюда $\log(1 + i) = (1/4)\log(1{,}06) = 0{,}01457$ или $1 + i = 1{,}01467$. Наконец $j = mi = 4 \times 0{,}01467 = 0{,}0587$.

Любые две нормы процента, номинальные или эффективные, которые дают одну и ту же составную итоговую сумму в конце года называются годовыми эквивалентными или, более кратко, **эквивалентными.** Например, номинальная норма, конвертируемая ежемесячно, и другая номинальная норма, конвертируемая поквартально, являются эквивалентными, если они приводят к одной и той же итоговой сумме в конце года, то есть j_{12} и j_4 эквивалентны, если справедливо равенство $(1 + j_{12}/12)^{12} = (1 + j_4/4)^4$.

Поскольку эквивалентные нормы дают одинаковую итоговую сумму за год (а значит и за любое количество лет) при любой основной сумме, логично принять следующий принцип :
в математике финансов всегда разрешается заменять заданную норму процента на эквивалентную ей. Важность этого принципа будет ясной из последующего. Например, если норма процента в какой-либо задаче равна $j_{12} = 0{,}05$, она может быть заменена нормой процента $j_4 = 0{,}0502$.

2.7 СОСТАВНОЙ ИТОГ И НАСТОЯЩАЯ СТОИМОСТЬ ДЛЯ ДРОБНЫХ ПЕРИОДОВ ВРЕМЕНИ

Утверждение типа «сложный процент при норме $j_1 = 0{,}08$ за 15 месяцев» не имеет смысла для введенных определений, поэтому должно быть принято какое-либо соглашение как его понимать. Естественным путем является замена данной нормы другой, эквивалентной ей, которая конвертировалась бы через период, кратный 15 месяцам. Например, подошла бы норма, конвертируемая поквартально. Тогда исходное утверждение заменяется на следующее: «сложный процент при норме $j_4 = 0{,}0777$ за 5 кварталов» .

ПРИМЕР 1 Найти составную итоговую сумму, если 10000 рб накапливает проценты в течение 15 лет и 3 месяца при норме $j = 6\%$.

РЕШЕНИЕ Первый шаг - это замена нормы $j_2 = 6\%$ на конвертируемую поквартально, так как заданное время 15 лет и 3 месяца состоит из 61 квартала. Пусть i будет норма процента за квартал, эквивалентная $j_2 = 6\%$. Тогда

$$(1 + i)^4 = (1{,}03)^2 \quad \text{или} \quad 1 + i = (1{,}03)^{1/2}$$

Накопление процентов в течение 61 квартала при норме i

$$S = 10000 \times (1 + i)^{61}$$

Подставляя значение $(1 + i)$ в это выражение, получаем

$$S = 10000 \times (\ 1{,}03\ )^{61/2} \quad = 24634 \text{ рб}$$

При получении этого результата можно было бы использовать таблицы множителей накопления, используя $i = 0{,}03$ и $n = 30{,}5$ по схеме рассмотренной ранее.

Рассмотренный пример дает естественную основу для следующего правила: **точный** (или **дисконтированный**) **метод** накопления или дисконтирования состоит в использовании основных уравнений (1) и (2) несмотря на то, является или нет временной интервал целым числом периодов конверсии, Можно показать, что точное правило всегда дает тот же результат, который получается путем замены данной нормы процента на эквивалентную норму, для которой время накопления (дисконтирования) состоит из целого числа периодов конверсии, Таким образом, реально нет необходимости искать эквивалентную норму, поскольку конечный результат получается тот же самый.

ПРИМЕР 2 Используя точный метод, найти текущую стоимость 50000 рб за 7 лет и 3 месяца до ее накопления с нормой процента $j_1 = 5\%$.

РЕШЕНИЕ Мы имеем $S = 50000$, $i = 0{,}05$, $n = 7{,}25$. Отсюда

$$P = 50000 \times (\ 1{,}05\ )^{-7{,}25} = \ 35103{,}27\ .$$

Когда под рукой нет вычислительных средств, но есть таблицы множителей накопления (дисконтирования), можно в случае дробных продолжительностей использовать следующую аппроксимацию : для целой части периода конверсии найти составной итог накопления (или текущую стоимость при дисконтировании), а для дробной части использовать простую итоговую сумму (или простое дисконтирование), Так, в рассмотренном примере для 7 лет имеем

$$50000 \times (\ 1{,}05\ )^{-7} = 35534{,}06$$

затем осуществляем простое дисконтирование за 0,25 года

$$\text{P} = 35534{,}06 \times (1 - (\ 0{,}05\ )(\ 0{,}25\ )) = 35089{,}88\ .$$

Как видим, в этом примере абсолютная точность определения текущей стоимости равна 35103,27 - 35089,88 = 13,39 что дает относительную точность 0,00038 или 0,038% .

Когда используется простой процент или простой дисконт при определении итоговой суммы или текущей стоимости для дробных сроков накопления или дисконтирования, процедура вычисления называется **практическим методом** и может быть сформулирована следующим образом. Для определения практическим методом итоговой суммы или настоящей стоимости за дробный временной интервал сначала выделяется дробная часть года и для нее определяется промежуточный итог (в случае накопления) или промежуточная настоящая стоимость (в случае дисконтирования). На втором этапе эти промежуточные значения принимаются в качестве исходных для задачи с остающимся временным интервалом, насчитывающим целое число периодов конверсии. Приведем формальное описание этого метода.

В задаче определения итоговой суммы пусть P обозначает основную сумму, i - норму процента за период конверсии и временной интервал накопления равен $n + t$, где n - целое число периодов конверсии, а t - дробная часть периода конверсии, $t < 1$. Сначала определяется промежуточный итог с использованием простого процента

$$P(1 + it)$$

Затем, используя технику сложных процентов и считая промежуточный итог основной суммой, находим окончательную итоговую сумму

$$S = P(1 + it)(1 + i)^{n} .$$

Рассуждая аналогично для определения настоящей стоимости можно получить формулу

$$P = S(1 - it)(1 + i)^{-n} .$$

Использование практического метода поясним на примере. Пусть необходимо определить итоговую сумму накопления для основной суммы 10000 рб при норме процента $i = 10\%$ за 4 года и 10 месяцев. Практический метод предлагает сначала найти промежуточный итог за 10 месяцев, используя технику простого процента, что дает

$$10000 \times (1 + (0,1)(10/12)) = 10833,33 ,$$

Затем, рассматривая это как основную сумму, найдем накопление за 4 года, то есть

$$10833{,}33 \times (1 + 0{,}1)^4 = 10833{,}33 \times 1{,}4641 = 15861{,}08$$

Точное значение итоговой суммы при накоплении в течении 4 лет и 10 месяцев равно

$$S = 10000 \times (1 + 0{,}1)^{4 + 10/12} = 15851{,}29 \text{ рб} .$$

Применение практического метода дает абсолютную точность

$$15861{,}08 - 15851{,}29 = 9{,}79 \text{ рб} .$$

Заметим, что применение практического метода оправдано только в тех случаях, когда под рукой нет вычислительных средств, позволяющих возводить числа в дробную степень, и есть таблицы множителей накопления и дисконтирования.

В заключение обратим внимание еще раз на то, что формулы (1) и (2) связывают четыре величины S, P, n и i, так что если заданы S, P и n по ним можно определить норму процента i, обеспечивающую заданное накопление. Если заданы S, P и i, через них можно найти продолжительность временного интервала n, необходимого для достижения заданного накопления.

УПРАЖНЕНИЯ 2

1. При какой номинальной ставке j_4 деньги удваиваются через 12 лет?
2. При какой номинальной ставке j_2 деньги удваиваются через 15 лет?
3. При данной процентной ставке j_2 10 млн рб прирастают до 25 млн рб через 20 лет. Какой является сумма в конце 10 лет?
4. При данной процентной ставке j_4 10 млн рб прирастают до 15 млн рб в конце 10 лет. Какой будет сумма в конце 6 лет?
5. Облигация стоит 18,75 млн рб и по ней выплачивается 25 млн рб через 10 лет. Какая процентная ставка j_2 обеспечит этот рост?
6. Найти годовую эффективную норму, соответствующую 1,5%, конвертируемым ежемесячно.
7. Сумма денег инвестируется при j_4 на один год. Какая ставка j_{12} накопила бы такую же сумму в конце года?
8. 10 млн рб инвестируются на 5 лет при $j_{12} = 5\%$. Какая ставка j_4 накопит равную сумму через то же самое время?

Глава 3 УРАВНЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

3.1 ДАТИРОВАННЫЕ СУММЫ

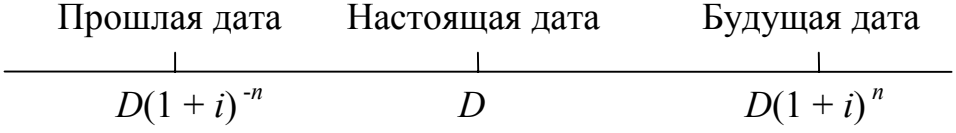
Использование значений денежных сумм без указания даты, когда они должны использоваться, является бессмысленным. Очевидно, что 1000 рб наличными в настоящее время предпочтительнее, чем 1500 рб, обещанные через 50 лет. Сумма платежа вместе с датой погашения называется **датированной суммой.** Например, 10000 рб, полагающиеся 7 июля 1995 г., являются датированной суммой.

Когда необходимо сравнивать датированные суммы, нужно обязательно знать норму процента. Если человек имеет возможность в течение некоторого времени инвестировать свои деньги, получая 8% годовых, говорят, что его деньги стоят $j_1 = 8\%$. При такой норме 1000 рб, полагающиеся через три года, и 1360,49 рб ($= 1000 \times (1{,}08)^4$), полагающиеся через 7 лет, могут рассматриваться как эквивалентные, так как после получения через три года 1000 рб можно в течение следующих четырех лет при норме 8% годовых накопить 1360,49 рб. Точно также 793,83 рб, ($= 1000 \times (1{,}08)^{-3}$), имеющиеся в настоящее время, эквивалентны 1000 рб через три года.

В общем случае датированные суммы сравниваются по следующему правилу эквивалентности: сумма P , полагающаяся на данную дату, эквивалентна при данной норме сложного процента i сумме S , полагающейся на n периодов конверсии позже, если является справедливым хотя бы одно из следующих равенств:

$$S = P(1+i)^n \quad \text{или} \quad P = S(1+i)^{-n} \ .$$

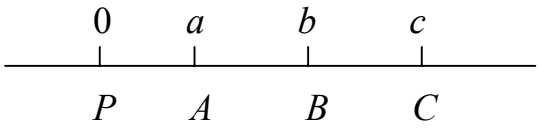
Таким образом, накопление или дисконтирование могут рассматриваться как простое преобразование заданной датированной суммы к другой дате. Преобразование делается в соответствии со следующей временной диаграммой:



Прошлая и будущая суммы эквивалентны датированной сумме D.

Важным и полезным свойством эквивалентных датированных сумм является следующее **свойство 1 :** при данной норме сложного процента если A эквивалентно B и B эквивалентно C, то A эквивалентно C.

Для доказательства этого утверждения мы расположим данные на временной диаграмме следующим образом :



где 0 означает настоящее время и a , b, c представляют числа периодов конверсии от настоящего времени до соответствующих дат погашения.

Если A эквивалентно B, то $B = A(1 + i)^{b-a}$.
Если B эквивалентно C, то $C = B(1 + i)^{c-a}$.

Исключая из этих равенств сумму B, получим, что

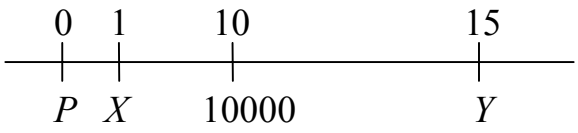
$$C = A(1 + i)^{b-a}(1 + i)^{c-b} = A(1 + i)^{c-a} .$$

Полученный результат является условием эквивалентности датированных сумм A и C.

Это свойство не имеет места для норм простого процента и норм простого дисконта. Поэтому понятие эквивалентности для этих норм не применяется.

ПРИМЕР 1 Долг 10000 рб следует выплатить через 10 лет. Если деньги стоят $j_1 = 5\%$, найти эквивалентный долг через a) 1 год , b) 15 лет.

РЕШЕНИЕ Построим временную диаграмму



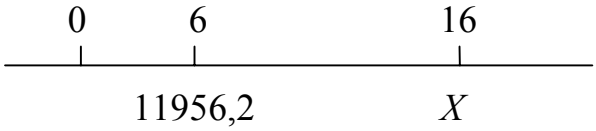
Согласно правилу эквивалентности
$X = 10000 \times (1{,}05)^{-9} = 6446{,}1$ полагается через 1 год

$Y = 10000 \times (1{,}05)^{5} = 12762{,}8$ полагается через 15 лет

Иллюстрацией эквивалентности X и Y может служить применение свойства 1, так как $(6446{,}1)(1{,}05)^{14} = 12762{,}8$.

ПРИМЕР 2 Вексель на 10000 рб со сложным процентом при $j_4 = 6\%$ за три года должен быть погашен через три года. Какая сумма, полагающаяся через 8 лет, эквивалентна этой сумме при $j_2 = 4\%$?

РЕШЕНИЕ Данная сумма, датированная на конец третьего года, равна $10000 \times (1{,}015)^{12} = 11956{,}2$ рб. Расположим данные на временной диаграмме соответствующим образом



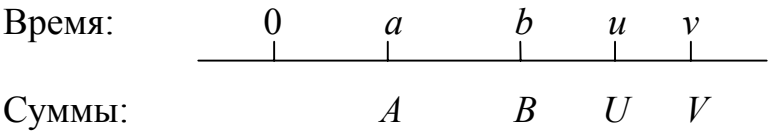
Здесь 6 и 16 представляют количества полугодовых периодов начисления, начиная с начального момента. Искомая сумма получается путем накопления основной суммы 11956,2 рб за 10 периодов начисления при норме 2% за период, то есть $X = 11956{,}2 \times (1{,}02)^{10} = 14574{,}5$ полагается через 8 лет.

3.2 СЕРИИ ДАТИРОВАННЫХ СУММ

Сумма двух или большего числа датированных сумм, погашаемых в различные даты, практически не имеет смысла. Например, предположим, что 20000 рб погашается через два года, а 30000 рб погашается через пять лет. Сумма 20000 + 30000 = 50000 рб не связана с какой либо датой и поэтому мало о чем говорит. Однако, если все рассматриваемые суммы преобразовать в эквивалентные датированные суммы с одной и той же датой погашения, то сумма таких эквивалентных сумм приобретает смысл и называется **датированной суммой серии.** Она будет изменяться в зависимости от даты, к которой преобразованы эквивалентные суммы. Для различных датированных сумм одной и той же серии справедливо следующее **свойство 2 :** датированные суммы одной и той же серии, определенные для различных дат, являются эквивалентными.

Доказательство дадим для серии из двух датированных сумм. Пусть A и B будут двумя датированными суммами, погашаемыми через a и b периодов начисления от настоящего времени. Пусть также U и V

будут двумя датированными суммами этой серии, определенными для дат u и v (за единицу времени принимается период начисления).
Представим эти данные на временной диаграмме



Преобразовывая значения A и B ко времени u согласно правилу эквивалентности и суммируя результаты, получим датированную сумму серии, погашаемую через u периодов

$$U = A(1 + i)^{u-a} + B(1 + i)^{u-b}$$

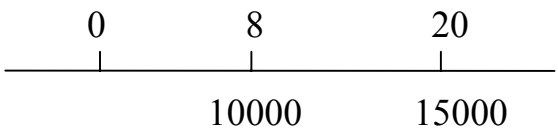
Умножая обе части этого равенства на $(1 + i)^{v-u}$ и производя очевидные упрощения, получим другую датированную сумму серии, погашаемую уже через v периодов начисления,

$$U(1 + i)^{v-u} = A(1 + i)^{v-a} + B(1 + i)^{v-b} .$$

Но правая часть этого равенства в точности равна V, так что $U(1 + i)^{v-u} = V$, и условие эквивалентности U и V выполняется, что и доказывает справедливость свойства 2.

ПРИМЕР Если деньги стоят $j_4 = 4\%$, найти одноразовую выплату, эквивалентную серии из 10000 рб, погашаемых через два года, и 15000 рб, погашаемых через 5 лет, для трех случаев погашения : a) в настоящее время; b) через 2 года; c) через пять лет.

РЕШЕНИЕ Представим серию на временной диаграмме

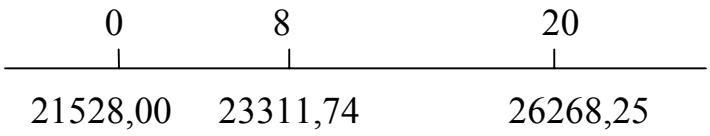


Вычислим эквивалентные значения обоих сумм для трех требуемых временных сроков и сведем их в таблицу

	Настоящее время	Через 2 года	Через 5 лет
Первая сумма	9234,83	10000,00	11268,25
Вторая сумма	12293,17	13311,74	15000,00

Сумма серии	21528,00	23311,74	26268,25

В соответствии со свойством 2 все три датированные суммы серии должны быть эквивалентными. Это можно проверить следующим образом. Представим суммы серии на временной диаграмме



Поскольку $21528{,}00 \times (1{,}1)^{8} = 23311{,}74$, датированная сумма серии на настоящее время эквивалентна датированной сумме серии на конец второго года (8 периодов начисления). Подобным образом,

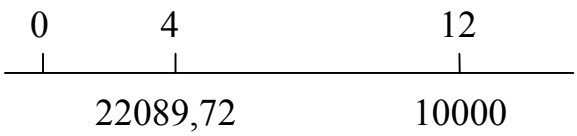
$$23311{,}74 \times (1{,}1)^{12} = 26268{,}25$$

означает, что вторая датированная сумма серии эквивалентна третьей и все три датированные суммы серии являются эквивалентными.

Как уже было выше сказано , для сравнения двух итоговых сумм, погашаемых в различные даты, необходимо заменить их эквивалентными суммами, пересчитанными на одну и ту же дату. Величина разности полученных эквивалентных сумм будет различной в зависимости от использованной для сравнения даты. Также как и в случае сумм серий, разности, рассчитанные на различные даты, будут эквивалентными. Доказательство этого повторяет те же рассуждения, которые были использованы выше при анализе сумм серий на различные даты при рассмотрении свойства 2.

ПРИМЕР Сравнить два обязательства: выплатить 20000 рб со сложным процентом на 2 года при норме $j_4 = 5\%$ через два года, и 10000 рб через 6 лет, если деньги стоят $j_2 = 6\%$, рассматривая их стоимость в три различные момента времени: a) настоящее время; b) через два года; c) через 6 лет.

РЕШЕНИЕ Датированная сумма первого обязательства в момент погашения равна $20000 \times (1{,}0125) = 22089{,}72$. Построим временную диаграмму (время измеряется полугодиями) :



Преобразуем эти две суммы к трем датам сравнения в соответствии с правилами эквивалентности и результаты сведем в таблицу, тогда получим

Суммы	Настоящее время	Через 2 года	Через 6 лет
Первое обязательство	19626,43	22089,72	27982,60
Второе обязательство	7013,80	7894,09	10000,00
Разности	12612,63	14195,63	17982,60

Можно проверить, что разности эквивалентны при норме процента $j_2 = 6\%$, учитывая следующие равенства :

$$12612{,}63 \times (1{,}03)^4 = 14195{,}63 ,$$
$$14195{,}63 \times (1{,}03)^8 = 17982{,}60 .$$

3.3 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СЕРИИ ПЛАТЕЖЕЙ

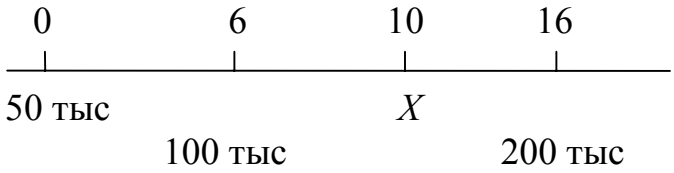
Одной из наиболее важных проблем в математике финансов является замена данной серии платежей или других обязательств на эквивалентную серию. Например, холодильник стоит 3 млн рб. наличными. Однако его можно купить при помощи эквивалентной серии небольших ежемесячных платежей.

Ранее мы рассматривали датированную сумму серии платежей или обязательств. При этом было видно, что сумма серии зависела от используемой нормы процента и даты, на которую вычислялась сумма. На основе правила эквивалентности для таких серий можно сформулировать следующее утверждение : при данной норме сложного процента две серии платежей являются эквивалентными, если датированные суммы этих серий на любую общую дату являются равными. Таким образом, если стоимость холодильника равна 3 млн рб , любая серия платежей, использованная при его покупке должна иметь стоимость на настоящий момент (текущую стоимость) 3 млн рб. Равенство, устанавливающее, что датированные суммы двух серий на общую дату равны, называется **уравнением эквивалентности** или **равенством стоимостей.** Дата, используемая в этом равенстве, называется **датой сравнения.** Из свойства 1 следует, что в качестве даты сравнения может быть использована любая дата.

ПРИМЕР 1 Петров имеет два векселя, подписанные Ивановым, один с датой погашения через три года на 100 тыс рб и второй на 200 тыс рб - через 8 лет. Петров с Ивановым договорились, что деньги стоят $j_2 = 6\%$. Если Петров получит 50 тыс рб сейчас, сколько должен заплатить Иванов через 5 лет, погашая весь долг ?

РЕШЕНИЕ Обозначим сумму, погашаемую через 5 лет через X . Задача состоит в определении X таким образом, чтобы серия «50 тыс рб сейчас и X через 5 лет» была бы эквивалентна при норме процента $j_2 = 6\%$ серии «100 тыс рб через 3 года и 200 тыс рб через 8 лет».

Расположим данные на временной диаграмме, располагая каждую серию в отдельную строку и измеряя время полугодовыми периодами :



Теперь нужно выбрать дату сравнения. Может быть использована любая дата. Обычно выбирается самая поздняя. В нашем примере это 8 лет (16 полугодовых периодов). Равенство эквивалентности получается путем преобразования всех сумм к дате сравнения и приравнивания датированных сумм серий. Это дает

$$50000(1{,}03)^{16} + X(1{,}03)^{6} = 100000(1{,}03)^{10} + 200000$$

Вычисляя соответствующие множители накопления, получим

$$80235 + X(1{,}194052) = 134392 + 200000$$

Из этого равенства получаем, что $X = 212852$ рб. В данном примере более удобной датой сравнения была бы дата сравнения, совпадающая с выплатой X. Действительно, в этом случае она равна 5 лет (10 периодов) и равенство эквивалентности приобретает вид

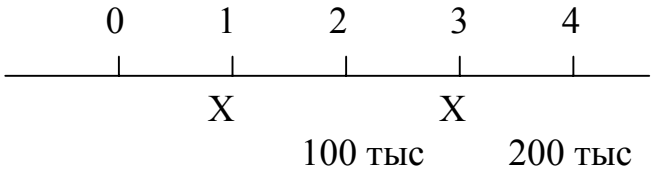
$$X + 50000(1{,}03)^{10} = 100000(1{,}03)^{4} + 200000(1{,}03)^{-6}$$

Вычислив процентные множители, получим выражение для X

$$X = 112551 + 167497 - 67196 = 212852 \text{ рб.}$$

ПРИМЕР 2 Если деньги стоят 5% эффективно, какие равные платежи через 1 год и 3 года будут эквивалентно заменяться следующей серией обязательств : выплатить 100000 рб через три года и 200000 рб с накопленным процентом через 4 года при норме $j_2 = 6\%$?

РЕШЕНИЕ Обозначим через X сумму погашения при искомых платежах. Поместим исходные данные задачи на временной диаграмме, показывая платежи различных серий в различных строках



Выберем конец четвертого года в качестве даты сравнения, хотя любая другая дата была бы также возможной. Все суммы преобразовываются к дате сравнения и датированные суммы серий приравниваются, образуя уравнение эквивалентности.

$$X(1{,}05)^3 + X(1{,}05)^1 = 100000(1{,}05)^1 + 200000(1{,}03)^8$$

или после вычисления множителей накопления

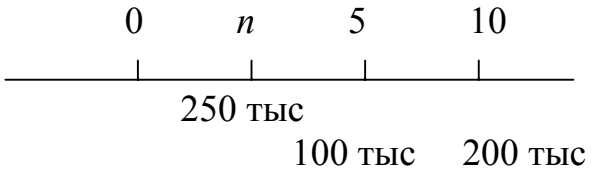
$$X(1{,}157625) + X(1{,}05) = 105000 + 253354.$$

Откуда $X = 358354 / 2{,}207625 = 162326$.

Использование уравнений эквивалентности показывает, что они связывают величины трех типов : суммы погашения, даты погашения и нормы процентов. До сих пор мы использовали уравнения эквивалентности только для определения неизвестных значений сумм погашения. Вместе с тем на практике уравнения эквивалентности используются также для определения и других составляющих : даты погашения или нормы процента. Хотя техника использования уравнений в этих случаях остается прежней, имеются некоторые особенности в деталях. Рассмотрим это на примерах.

ПРИМЕР 3 100 тыс рб погашается через 5 лет и 200 тыс рб погашается через 10 лет. Если деньги стоят $j_1 = 4\%$. Через сколько лет оба платежа эквивалентно заменит выплата a) 250 тыс рб; b) 300 тыс рб ?

РЕШЕНИЕ а) Пусть n обозначает искомый временной интервал для 250 тыс рб. Построим временную диаграмму



Так как относительное положение n неизвестно, обычно предпочтительнее выбирать в качестве даты сравнения настоящее время. Преобразовывая все суммы к настоящему времени и составляя уравнение эквивалентности, получим равенство

$$250000(1{,}04)^{-n} = 100000(1{,}04)^{-5} + 200000(1{,}04)^{-10} = 217305.$$

Разрешая теперь это равенство относительно n , находим, что $n = 3{,}578$ лет, то есть примерно 3 года 6 месяцев и 28 дней.

b) Процедура вычислений в этом случае точно такая же, как и в случае а). Уравнение эквивалентности получается следующим

$$300000(1{,}04)^{-4} = 100000(1{,}04)^{-5} + 200000(1{,}04)^{-10} = 217305$$

и разрешая его относительно n получим $n = 8{,}226$ лет или приблизительно 8 лет, 2 месяца и 21 день.

Когда серия обязательств заменяется единственным обязательством с суммой погашения, равной сумме сумм погашения всех обязательств серии, время выполнения этого обязательства при эквивалентной замене называется **средней датой погашения** или **датой эквивалентности**. В решении b) последнего примера средняя дата погашения равна 8 лет 2 месяца и 21 день, начиная с настоящего момента.

Хотя нахождение уравненной даты не представляет особых трудностей, можно упростить вычисления, если допустимо грубое приближение. Пусть S_1, S_2 , S_3 , ... будут суммами погашения различных обязательств, погашаемых через n_1 , n_2 , n_3 , ... , периодов начисления, и пусть n будет числом периодов начисления до средней даты погашения. Тогда n может быть приблизительно определено по формуле

$$n = \frac{n_1 S_1 + n_2 S_2 + n_3 S_3 + \ldots}{S_1 + S_2 + S_3 + \ldots}$$

Эта формула может быть получена выписыванием уравнения эквивалентности для наиболее поздней в серии даты погашения в качестве даты сравнения и использования простого процента вместо сложного процента.

ПРИМЕР 4 Использовать приближенную формулу для нахождения даты эквивалентности для случая b) предыдущего примера.

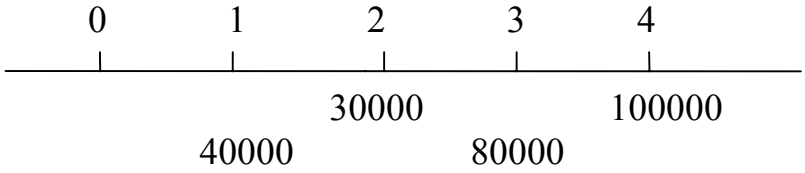
РЕШЕНИЕ Согласно формуле

$$n = \frac{5 \times 100000 + 10 \times 200000}{100000 + 200000} = \frac{25}{3},$$

то есть приблизительно 8 лет и 4 месяца.

ПРИМЕР 5 Какая эффективная норма процента обеспечивает эквивалентность двум следующим сериям обязательств: a) 30000 рб, погашаемых через два года, и 100000 рб, погашаемых через 4 года, и b) 40000 рб, погашаемых через год, и 80000 рб, погашаемых через три года ?

РЕШЕНИЕ Представим исходные данные на временной диаграмме



Выберем в качестве даты сравнения конец четвертого года и составим уравнение эквивалентности

$$40000(1 + i)^3 + 80000(1 + i)^1 = 30000(1 + i)^2 + 100000.$$

Для решения этого уравнения относительно i сократим обе части уравнения на 10000, перенесем все слагаемые, зависящие от i, в левую часть и обозначим ее через $f(i)$, тогда получим

$$f(i) = 4(1 + i)^3 - 3(1 + i)^2 + 8(1 + i) = 10$$

нелинейное алгебраическое уравнение, решение которого в общем случае производится численными методами. Когда под рукой нет вычислительных средств, это уравнение может быть решено приближенно с использованием таблиц множителей накопления и метода интерполяции. В этом примере значение эффективной нормы процента равно приблизительно 0,0683 , то есть 6,83% .

УПРАЖНЕНИЯ 3

1. Предположим, что деньги стоят $j_2 = 3\%$. Найти датированную сумму на конец двенадцатого года, эквивалентную 20 млн рб в конце 4 лет.
2. Какая сумма денег на конец 4 лет эквивалентна 25 млн рб в конце 9 лет, если деньги стоят $j_4 = 4{,}5\%$?
3. Найти датированные суммы в конце 3 лет и в конце 10 лет, эквивалентные 10 млн рб на конец 5 лет, если деньги стоят 4% эффективно. Проверить, что эти суммы эквивалентны между собой.
4. Найти датированные суммы в конце 2 лет и в конце 8 лет, эквивалентные 20 млн рб на конец 4 лет, если деньги стоят $j_2 = 3{,}5\%$. Проверить, что эти суммы эквивалентны между собой.
5. Найти датированную сумму на конец 3 лет при эффективных 6%, эквивалентную 10 млн рб с процентами за 10 лет при $j_2 = 5\%$.
6. Найти датированную сумму на конец 2 лет при $j_2 = 5\%$, эквивалентную 5 млн рб с процентами за 8 лет при $j_4 = 4\%$.
7. Рассматриваются суммы 15 млн рб на конец 3 лет и 16 млн рб на конец 6 лет. Деньги стоят $j_2 = 4{,}5\%$. Сравнить эти суммы в настоящее время и в конце трех лет. Убедиться, что разности между этими суммами для обоих сроков являются одинаковыми.
8. Рассматриваются суммы 10 млн рб на конец 4 лет и 15 млн рб на конец 10 лет. Деньги стоят $j_1 = 5\%$. Сравнить эти суммы в настоящее время и в конце четырех лет. Убедиться, что разности между этими суммами для обоих сроков являются одинаковыми.
9. Деньги стоят $j_4 = 3\%$. Найти датированную сумму в конце 5 лет для серии платежей: 10 млн рб через 6 лет и 20 млн рб через 10 лет.
10. Деньги стоят $j_2 = 5\%$. Найти датированную сумму в конце 3 лет для серии платежей: 5 млн рб через 5 лет и 8 млн рб через 8 лет.
11. Деньги стоят $j_2 = 4\%$. Найти датированную сумму в конце 6 лет для серии платежей: 10 млн рб через 3 года и 15 млн рб через 8 лет.
12. Деньги стоят $j_1 = 6\%$. Найти датированную сумму в конце 7 лет для серии платежей: 6 млн рб через 2 года и 9 млн рб через 10 лет.

13. Найти датированную стоимость на настоящее время для следующего набора активов: 4 облигации по 1 млн рб с датами погашения через 3, 6, 9 и 12 месяцев, если деньги стоят $j_4 = 4\%$.
14. Найти датированную стоимость на конец года для набора облигаций предыдущей задачи.
15. Найти эффективную ставку, при которой 10 млн рб теперь эквивалентны 20 млн рб через 14 лет.
16. Найти номинальную ставку для $m = 12$, при которой 5 млн рб на конец 5 лет эквивалентны 15 млн рб в конце 25 лет.
17. Долг 10 млн рб нужно вернуть через 3 года. Если сегодня выплачивается 2 млн рб в счет долга, какая одноразовая выплата через два года ликвидирует обязательство при стоимости денег $j_4 = 6\%$?
18. Некто занял 50 млн рб сегодня при $j_4 = 5{,}5\%$. Он обещает возместить 10 млн рб через год, 20 млн рб через два года и остальное в конце третьего года. Каким будет это последнее возмещение ?
19. Фермер покупает товары стоимостью 10 млн рб. Он заплатил 2 млн рб сразу и заплатит на 5 млн рб больше через 3 месяца. Если процент начисляется на сумму неоплаченного баланса со ставкой $j_{12} = 6\%$, какой должна быть заключительная выплата в конце 6 месяцев ?
20. Иванов имел 10 млн рб на счету в сберегательном банке 10 лет назад. Сберегательный банк начисляет проценты согласно ставке $j_2 = 3\%$. Иванов взял со счета 2 млн рб пять лет назад и 3 млн рб два года назад. Какая сумма сегодня лежит на счету Иванова ?
21. Петров делал следующие вклады в сберегательный банк, который начисляет проценты в соответствии со ставкой $j_2 = 2{,}25\%$: 10 млн рб пять лет назад и 5 млн рб три года назад. Он брал со счета 2 млн рб год назад и планирует взять остальную сумму через год. Какую сумму он получит ?
22. Сидоров имеет 100 млн рб в сберегательном банке, который начисляет проценты со ставкой $j_4 = 3\%$. Какие одинаковые взносы в конце каждого квартала нужно делать Сидорову, чтобы на его счету в банке через год было 300 млн рб ?
23. Контракт предполагает платежи по 1 млн рб в конце каждого квартала в течение следующего года и дополнительный заключительный платеж 5 млн рб в его конце. Какова стоимость этого контракта наличными, если деньги стоят $j_4 = 5\%$?
24. Вексель Иванова на 5 млн рб и пятилетний процент со ставкой $j_2 = 5{,}5\%$ нужно погасить через пять лет, а второй вексель на 10 млн рб при таких же условиях - через 10 лет. Он желает заплатить 2 млн рб сегодня и рассчитаться полностью двумя одинаковыми платежами в конце 5 лет и 10 лет. Если деньги стоят $j_4 = 4\%$, какими будут эти платежи ?

Глава 4 ПРОСТЫЕ АННУИТЕТЫ

4.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Аннуитет является последовательностью периодических платежей, обычно одинаковых, сделанных через одинаковые промежутки времени. Наиболее известными примерами аннуитетов являются платежи премий страхования жизни, платежи рассрочки, платежи ренты и т.д.

Период времени между двумя последовательными платежами называется **интервалом платежа** и может быть любой удобной продолжительности. Первоначально слово аннуитет относилось только к ежегодным платежам, но современное использование этого термина может предусматривать интервалы платежа любой продолжительности.

Сроком аннуитета является время от начала первого интервала платежа до окончания последнего интервала платежа. Когда срок аннуитета фиксирован, то есть когда срок начинается и заканчивается в определенные даты, аннуитет называется **определенным (детерминированным) аннуитетом.** Когда срок аннуитета зависит от некоторого неопределенного события, такого как смерть человека, аннуитет называется **зависимым (случайным) аннуитетом.**

Когда платежи производятся в моменты окончания интервалов платежа, аннуитет называется **обыкновенным аннуитетом.** Когда платежи производятся в начальные моменты интервалов платежа, аннуитет называется **полагающимся аннуитетом.** В дальнейшем, следуя принятой на практике традиции, слово аннуитет будет означать обыкновенный аннуитет, если не оговорено другое.

Предположим, что Иванов покупает автомобиль в рассрочку, выплачивая наличными 3 млн рб в день покупки и затем ежемесячно 1 млн рб в течение 24 месяцев, первый взнос по истечению 1 месяца после даты продажи. Ежемесячные взносы составляют обыкновенный аннуитет, срок которого начинается в день продажи и продолжается в течение двух лет. Интервал платежа равен 1 месяцу.

Все задачи об аннуитетах касаются полной стоимости серии платежей на некоторую заданную дату. Можно было бы рассмотреть все эти

задачи методами, развитыми в предшествующих разделах. Однако, используя свойство регулярности платежей аннуитетов, вычисление полной стоимости может быть существенно упрощено.

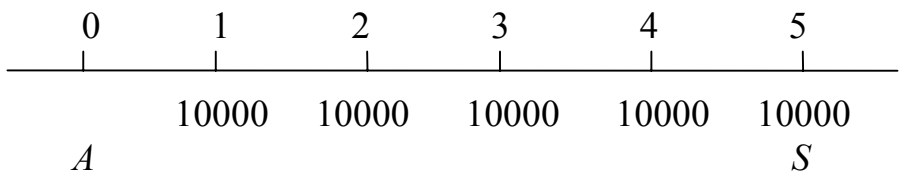
4.2 НАСТОЯЩАЯ СТОИМОСТЬ И ИТОГОВАЯ СУММА ОБЫКНОВЕННОГО АННУИТЕТА

Настоящая стоимость аннуитета определяется как датированная сумма, эквивалентная всей серии платежей, на начало срока аннуитета. Итоговая сумма аннуитета определяется как датированная сумма, эквивалентная всей серии платежей аннуитета на конец срока. Таким образом, настоящая стоимость обыкновенного аннуитета является эквивалентной суммой, выплачиваемой за один период платежа до даты первой выплаты. Итоговая сумма обыкновенного аннуитета является эквивалентной суммой на момент последнего платежа.

Очевидно, что как настоящая стоимость, так и итоговая сумма аннуитета будет зависеть от нормы процента, используемой в уравнении эквивалентности. Так как период начисления процентов не обязательно совпадает с интервалом платежа, удобно классифицировать аннуитеты с учетом этого. Когда интервал платежа совпадает с периодом начисления процентов, аннуитет называется **простым аннуитетом:** в противном случае он называется **общим аннуитетом.** В этом разделе рассматриваются только простые аннуитеты.

ПРИМЕР 1 Найти текущую стоимость и итоговую сумму обыкновенного аннуитета, состоящего из пяти полугодовых платежей 10000 рб каждый, если деньги стоят $j_2 = 4\%$.

РЕШЕНИЕ Пусть A обозначает настоящую стоимость, а S - итоговую сумму аннуитета. Представим данные на диаграмме



Чтобы определить A выпишем уравнение эквивалентности, используя в качестве даты сравнения начало срока аннуитета. Это даст

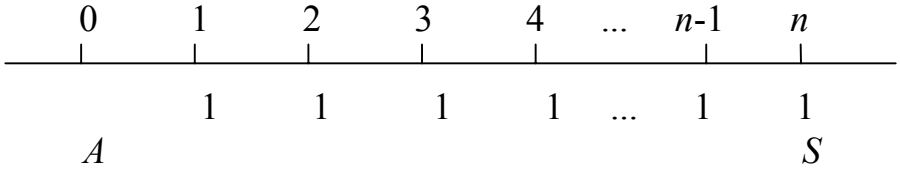
$$A = 10000(1{,}02)^{-1} + 10000(1{,}02)^{-2} + 10000(1{,}02)^{-3} + \\ + 10000(1{,}02)^{-4} + 10000(1{,}02)^{-5} = 47135 \text{ рб.}$$

Подобным образом, для определения S выпишем уравнение эквивалентности, используя в качестве даты сравнения конец срока аннуитета. В этом случае

$$S = 10000 + 10000(1{,}02) + 10000(1{,}02)^2 + \\ + 10000(1{,}02)^3 + 10000(1{,}02)^4 = 52040 \text{ рб.}$$

Способ вычисления A и S, использованный в примере, ясно показывает различие в определениях настоящей стоимости и итоговой суммы, но он является громоздким и неудобным при большом количестве платежей. Более компактный способ расчета можно сформулировать, основываясь на свойствах геометрических прогрессий.

Пусть S будет итоговой суммой обыкновенного простого аннуитета с n платежами по 1 рб каждый при норме процента i за интервал платежа и пусть A является настоящей стоимостью этого аннуитета. Временная диаграмма платежей аннуитета будет выглядеть следующим образом



Для нахождения S составим уравнение эквивалентности, используя конец срока как дату сравнения. Тогда получим

$$S = 1 + 1(1+i) + 1(1+i)^2 + ... + 1(1+i)^{n-1} \quad .$$

Правая часть равенства является геометрической прогрессией из n членов, первый член равен 1 и знаменатель прогрессии равен $(1 + i)$. Сумма такой прогрессии равна

$$S = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Правая часть этого равенства зависит от n и i и имеет общепринятое обозначение $s_{\overline{n}|i}$ или $s_{\overline{n}|}$ при i, читаемое « s уголок n при i ». Таким образом,

$$s_{\overline{n}|i} \text{ (или } s_{\overline{n}|} \text{ при } i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Если каждая выплата состоит из R рб , тогда итоговая сумма в R раз больше этой и формула для итоговой суммы S приобретает вид

$$S = R\ s_{\overline{n}|i} \quad . \tag{1}$$

Для получения настоящей стоимости A этого аннуитета заметим, что A и S являются датированными суммами одной и той же серии платежей и, следовательно, являются эквивалентными суммами. Откуда следует, что

$$S = A(1+i)^n \qquad \text{или} \qquad A = S(1+i)^{-n} \tag{2}$$

Используя (1) в (2), получим

$$A = R\ s_{\overline{n}|i}\,(1+i)^{-n} = R\ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \quad .$$

Общепринятым обозначением является также следующее

$$a_{\overline{n}|i} = (a_{\overline{n}|} \text{ при } i) = (1 - (1+i)^{-n}) / i.$$

Применение его приводит к следующей формуле для A

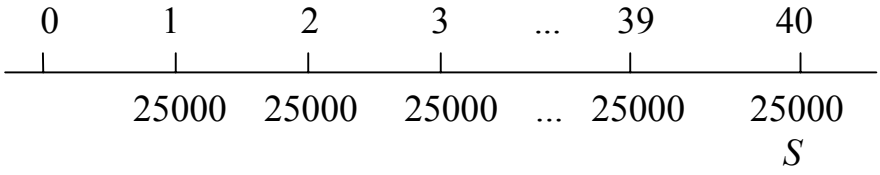
$$A = R\ a_{\overline{n}|i} \quad . \tag{3}$$

Равенства (1), (2) и (3) являются основными соотношениями, устанавливающими связь между величинами S , A и R . Два новых обозначения $s_{\overline{n}|i}$ и $a_{\overline{n}|i}$ заменяют всю серию платежей аннуитета одноразовым платежом в соответствующую дату. Они имеют большое распространение в финансовых расчетах, поэтому их величины также табулированы для наиболее часто встречающихся значений параметров n и i .

ПРИМЕР 2 Иванов будет делать вклады на депозит по 25000 рб в конце каждого квартала в банк, который установил норму процента 3% ,

конвертируемую поквартально. Какую сумму он будет иметь в банке через 10 лет, если a) он не имел ничего на банковском счете в начальный момент; b) он имел на банковском счете 100000 рб в начальный момент ?

РЕШЕНИЕ a) Представим данные на временной диаграмме



На диаграмме время измеряется интервалами платежа от 0 до 40 и S является суммой на конец сорокового интервала платежа, эквивалентной аннуитету. Так как R = 25000 рб, i = 0,75% за интервал платежа и n = 40, мы имеем

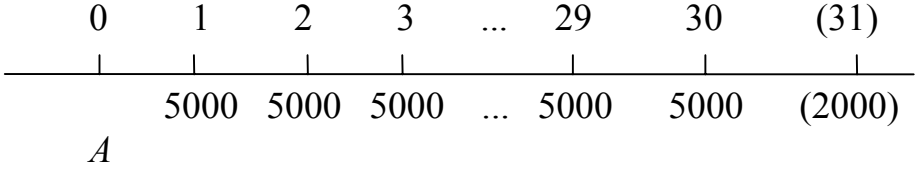
$$S = R\ s_{\overline{n}|i} = 25000\ s_{\overline{40}|0,0075} = 25000 \times 46{,}446481 = 1161162$$

b) Дополнительную сумму 100000 рб следует поместить на временной диаграмме в начальную точку 0. В этом случае уравнение эквивалентности имеет вид

$$S = 100000(1{,}0075)^{40} + 25000\ s_{\overline{40}|0,0075} =$$
$$= 134835 + 1161162 = 1295997 \text{ рб.}$$

ПРИМЕР 3 Петров выплачивает заем, делая платежи по 5000 рб в конце каждых 6 месяцев. Процентная ставка при получении займа была установлена равной j_2 = 5,5% . Какой является неуплаченная часть займа в настоящий момент, если a) осталось сделать 30 платежей, чтобы полностью возместить заем; b) кроме 30 платежей по 5000 рб необходим еще один взнос 2000 рб через 6 месяцев ?

РЕШЕНИЕ a) Имеющиеся данные представим на диаграмме



Настоящая стоимость A займа является настоящей стоимостью аннуитета с платежами по 5000 рб, 30 интервалами платежа при норме процента $i = 2{,}75\%$. Уравнение эквивалентности

$$A = R\ a_{\overline{n}|i} = 5000\, a_{\overline{30}|0{,}0275} = 5000 \times 20{,}2459301 = 101246{,}51$$

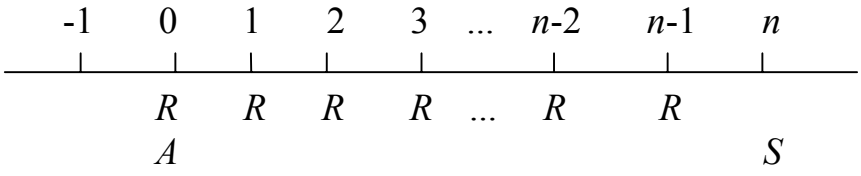
b) Дополнительная сумма 2000 рб должна быть помещена на диаграмме в конце 31-го интервала платежа, A равно сумме всех платежей, дисконтированных к началу :

$$A = 5000\, a_{\overline{30}|0{,}0275} + 2000(1{,}0275)^{-31} = 102109{,}08 \text{ рб.}$$

4.3 ПОЛАГАЮЩИЕСЯ АННУИТЕТЫ

Иногда желательно считать, что срок аннуитета начинается датой первого платежа. В этом случае периодические платежи производятся в начальные моменты интервалов платежа, а не в конце. Такой аннуитет называется **полагающимся аннуитетом** и состоит из серии периодических платежей, производимых в начальные моменты интервалов платежей, со сроком, начинающимся датой первого платежа и заканчивающимся через один интервал после последнего платежа. Так как настоящая стоимость аннуитета была определена как эквивалентная сумма на начало срока, значит настоящая стоимость полагающегося аннуитета является эквивалентной суммой на момент первого платежа. В свою очередь, итоговая сумма аннуитета была определена как эквивалентная сумма на конец срока, поэтому итоговая сумма полагающегося аннуитета является эквивалентной суммой на дату окончания интервала платежа, который начался в момент последнего платежа.

Как и прежде A будет обозначать настоящую стоимость, S - итоговую сумму, R - стоимость периодического платежа и i - норму процента за интервал платежа полагающегося аннуитета из n платежей. Представим эти данные на временной диаграмме



Из диаграммы видно, что существенное отличие полагающегося аннуитета от обыкновенного аннуитета состоит в том, что по отношению к эквивалентным суммам A и S при полагающемся аннуитете каждый платеж делается на один интервал платежа раньше, чем при обыкновенном аннуитете. Сформулируем схемы вычислений настоящей стоимости и итоговой суммы для полагающихся аннуитетов.

Определение *A*. Способ 1. Выписывается уравнение эквивалентности с датой сравнения, установленной на интервал платежа раньше даты первого платежа. На эту дату n платежей R могут рассматриваться как обыкновенный аннуитет. Следовательно,

$$A(1+i)^{-1} = R\ a_{\overline{n}|i}\ .$$

Из этого равенства получаем

$$A = (1+i)\ R\ a_{\overline{n}|i}\ . \qquad (4)$$

Способ 2. Выписывается уравнение эквивалентности с датой сравнения, установленной на дату начала срока. Платеж в этот день рассматривается как выплата наличными, а остальные n-1 платежей могут рассматриваться как обыкновенный аннуитет. Поэтому

$$A = R + R\ a_{\overline{n-1}|i} = R(1 + a_{\overline{n-1}|i}\ ). \qquad (5)$$

Определение *S*. Способ 1. Выписывается уравнение эквивалентности с датой сравнения, установленной на дату последнего платежа. На эту дату платежи могут рассматриваться как обыкновенный аннуитет. Следовательно,

$$S(1+i)^{-1} = R\ s_{\overline{n}|i}\ .$$

Разрешая это соотношение относительно S, получим

$$S = (1+i)\ R\ s_{\overline{n}|i}\ . \qquad (6)$$

Способ 2. Обращаясь снова к временной диаграмме, можно увидеть, что если добавить дополнительный платеж в конце последнего интервала платежа, получающаяся серия платежей (начинающаяся за

интервал платежа до начала срока рассматриваемого аннуитета) может рассматриваться как обыкновенный аннуитет с $n + 1$ платежами. Этот дополнительный платеж увеличивает сумму S ровно на R , так как делается в день окончания срока аннуитета. Поэтому

$$S + R = R \; s_{\overline{n+1}|i} \; .$$

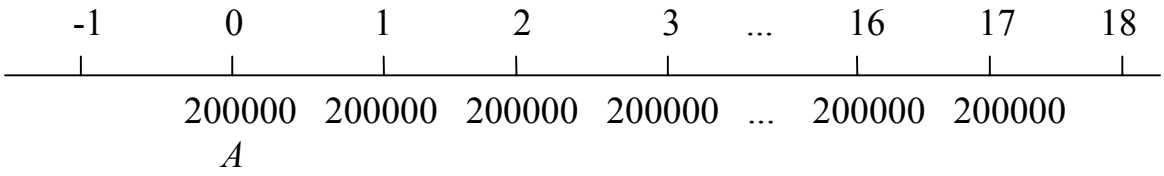
Отсюда итоговая сумма полагающегося аннуитета равна

$$S = R \; s_{\overline{n+1}|i} \; - R = R(s_{\overline{n+1}|i} \; - 1) \; . \qquad (7)$$

Знакомясь со способами расчета A и S , следует иметь ввиду, что главное здесь не полученные формулы, а рассуждения, с помощью которых они получены. Именно такого рода рассуждения часто используются при решении разнообразных финансовых проблем, как можно увидеть позже.

ПРИМЕР 1 Найти эквивалентную стоимость холодильника, который может быть куплен в течение полутора лет ежемесячными платежами по 200000 рб , если деньги стоят $j_{12} = 6\%$.

РЕШЕНИЕ На основе исходных данных построим диаграмму



Способ 1. На дату, помеченную -1 , платежи образуют обыкновенный аннуитет из 18 платежей, а эквивалентная сумма A рассчитывается на 1 интервал платежа позже. Уравнение эквивалентности на дату сравнения -1 имеет вид

$$A(1{,}005)^{-1} = 200000 \times a_{\overline{18}|0{,}005}$$

поэтому

$$A = 201000 \times 17{,}172768 = 3451726 \text{ рб.}$$

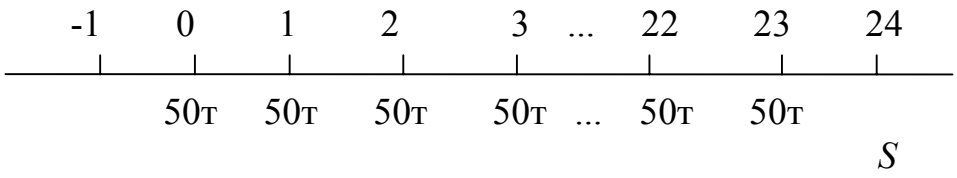
Способ 2. Первый платеж можно рассматривать как выплату наличными, а остальные 17 платежей считать обыкновенным аннуитетом со сроком,

начинающимся в день покупки. Тогда из уравнения эквивалентности с датой сравнения в день покупки получим

$$A = 200000 + 200000 \times a_{\overline{17}|0,005} =$$
$$= 200000 \times (1 + 16{,}258632) = 3451726 \text{ рб.}$$

ПРИМЕР 2 Сберегательный банк начисляет проценты с нормой $j_2 = 4\%$ Если на депозитный счет вносить в начале каждого полугодия по 50000 рб, какая сумма будет лежать на этом счете через 12 лет ?

РЕШЕНИЕ Поместим исходные данные на временную диаграмму



Способ 1. Выпишем уравнение эквивалентности, используя дату последнего платежа как дату сравнения. На эту дату накопленная сумма платежей равна итоговой сумме обыкновенного аннуитета, поэтому

$$S(1{,}02)^{-1} = 50000 \times s_{\overline{24}|0,02} .$$

Отсюда имеем

$$S = 51000 \times 30{,}421862 = 1551515 \text{ рб.}$$

Способ 2. В конце 24-го интервала платежа добавим лишние 50000 рб к серии платежей аннуитета и добавим также 500000 рб к эквивалентной сумме S. Уравнение эквивалентности на конец 24-го интервала теперь примет вид

$$S + 50000 = 50000 \times s_{\overline{25}|0,02} .$$

Из него находим

$$S = 50000(s_{\overline{25}|0,02} - 1) = 50000(32{,}0303 - 1) = 1551515.$$

4.4 ОТСРОЧЕННЫЕ АННУИТЕТЫ

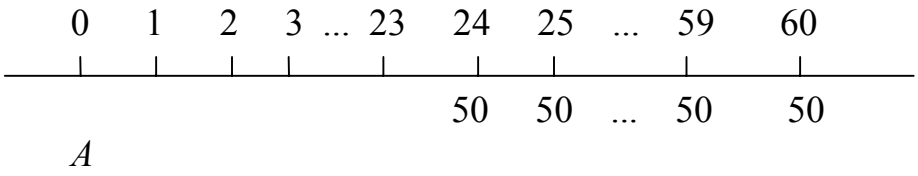
Когда срок аннуитета устанавливается, начиная с некоторой даты в будущем относительно даты заключения сделки, аннуитет называется **отсроченным аннуитетом.** Обычно анализируют отсроченные аннуитеты как обыкновенные аннуитеты, поэтому в последующем слово «обыкновенные» для краткости будем опускать.

Продолжительность времени от даты заключения сделки до начала срока аннуитета, то есть до начала первого интервала платежа, называется **периодом отсрочки.** Таким образом, аннуитет, состоящий из полугодовых платежей, первый из которых делается через 4 года, квалифицировался бы как отсроченный аннуитет с периодом отсрочки 3,5 года.

Для определения настоящей стоимости отсроченного аннуитета не требуется никаких новых методов. Как обычно, составляется уравнение эквивалентности с удобной датой сравнения и из него находится текущая стоимость. Поясним это на примере.

ПРИМЕР Компания получила определенную сумму, которую она будет возмещать, выплачивая по 50 млн рб в месяц, первая выплата должна быть сделана через 2 года, а последняя - через 5 лет от даты заключения сделки. Какую сумму получит компания в день заключения сделки при норме процента 6% , $m = 12$?

РЕШЕНИЕ Обозначим через A настоящую стоимость платежей и поместим исходные данные задачи на временную диаграмму



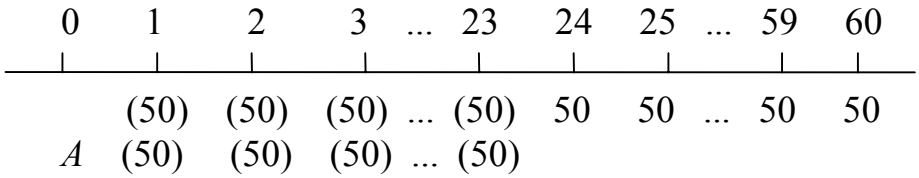
Способ 1. Первая выплата попадает на конец 24-го месяца, а последняя должна быть сделана в конце 60-го месяца, так что всего состоится 37 выплат. Поэтому эти платежи можно рассматривать как обыкновенный аннуитет с 37-ью платежами, отсроченными на 23 интервала платежа. Выпишем уравнение эквивалентности на дату сравнения в конце 23-го месяца.

$$A \text{ x } (1{,}005)^{23} = 50 \times a_{\overline{37}|0{,}005} \text{ млн рб}$$

Умножая это равенство на $(1{,}005)^{-23}$, получим

$$A = (1{,}005)^{-23} \times 50 \times a_{\overline{37}|0{,}005} \text{ млн рб} =$$
$$= 0{,}8916216 \times 50 \times 33{,}70250372 = 1502{,}49 \text{ млн рб.}$$

Способ 2. Этот способ не очевидный и дает пример, когда небольшая изобретательность позволяет упростить вычисления. Поместим на диаграмму дополнительные платежи по 50 млн рб в концах первых 23-ех месяцев в обоих строках. Тогда диаграмма приобретет вид



Поскольку дополнительные платежи будут одинаково входить в обе части уравнения эквивалентности, их присутствие не должно влиять на правильность результата. В правой части будет стоять стоимость аннуитета с 60-ью платежами, а к левой части добавится аннуитет с 23-ью платежами. Уравнение эквивалентности с датой сравнения в день заключения сделки в этом случае имеет вид

$$A + 50 \times a_{\overline{23}|0{,}005} = 50 \times a_{\overline{60}|0{,}005} \text{ млн рб.}$$

Подставляя сюда соответствующие значения $a_{\overline{n}|i}$ из таблицы и выражая A, получим

$$\text{A} = 50 \times (a_{\overline{60}|0{,}005} - a_{\overline{23}|0{,}005}) \text{ млн рб} =$$
$$= 50 \times (51{,}72556075 - 21{,}67568055) = 1502{,}49 \text{ млн рб.}$$

Способ 1 является более естественным, но при наличии таблиц Способ 2 является более простым.

Если два способа, описанные в примере, применяются при расчете A для аннуитета с n платежами по R рб каждый, отсроченного на k

периодов, и с нормой процента i за период, тогда общая формула для Способа 1 имеет вид

$$A = (1 + i)^{-k} \; R \; a_{\overline{n}|i} \; . \tag{8}$$

А для Способа 2 эта формула выглядит следующим образом

$$A = R(a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i}) \; . \tag{9}$$

Так как значения A для обоих методов должны быть одинаковы, приравнивая правые части равенств (8) и (9), мы получим полезное тождество

$$a_{\overline{n+k}|i} - a_{\overline{k}|i} = (1 + i)^{-k} \; a_{\overline{n}|i} \; . \tag{10}$$

Здесь снова следует заметить, что полезно освоить методы получения результатов, а не запоминать полученные формулы. Всегда нужно точно представлять исходные данные на временной диаграмме, правильно определяя количество платежей и период отсрочки.

4.5 ТОЖДЕСТВА, СВЯЗЫВАЮЩИЕ НАКОПЛЕНИЯ И АННУИТЕТЫ

Функции составных платежей широко используются в финансовых расчетах, связанных с платежами распределенными во времени. Для основных из них составлены таблицы, принципы составления которых отражены в приложении к книге. Важную роль при финансовых расчетах играют также тождества, которые устанавливают часто используемые взаимоотношения между функциями составных платежей $s_{\overline{n}|i}$ и $a_{\overline{n}|i}$.

Воспользуемся равенством (2)

$$S = A(1 + i)^{n} \; .$$

Подставляя в это равенство значения S и A по формулам (1) и (3) и сокращая обе части равенства на R , получим

$$s_{\overline{n}|i} = (1 + i)^{n} \; a_{\overline{n}|i} \; . \tag{11}$$

Эта формула и определяет первое тождество, связывающее рассматриваемые функции.

Далее, из определения

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

следует, что

$$1 + i\ s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n .$$

Поделив это равенство на (11), мы получим второе тождество

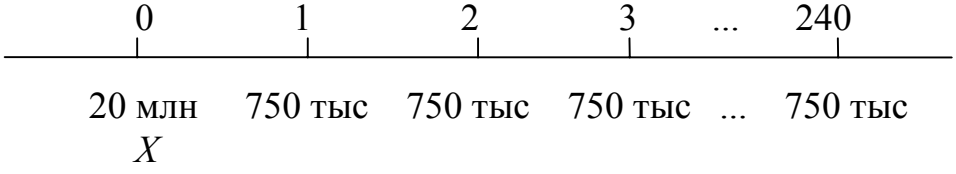
$$\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} + i = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \qquad (12)$$

Оба тождества (11) и (12) справедливы для любых значений параметров n и i.

В дополнение к только что полученным тождествам можно добавить и ряд других важных тождеств. Некоторые из них предлагается получить в порядке выполнения нижеследующих упражнений. Важность этих тождеств можно оценить тогда, когда при расчетах необходимо определять значения функций составных платежей для таких n, которые лежат за пределами имеющихся таблиц.

ПРИМЕР При приобретении дома необходимо заплатить 20 млн рб в день покупки и выплачивать 750 тыс рб ежемесячно в течение следующих 20 лет. Если деньги стоят $j_{12} = 6\%$, какова стоимость дома на день покупки ?

РЕШЕНИЕ Поместим исходные данные на временную диаграмму



Уравнение эквивалентности с датой сравнения в день покупки

$$X = 20000 + 750 \times a_{\overline{240}|0,005}\ .$$

Обычно таблицы для функций составных платежей содержат значения этих функций для n, не превышающих 200. Поэтому значение функции $a_{\overline{240}|0,005}$ не может быть получено из таблицы непосредственно и его нужно определять некоторым другим способом. Мы используем тождество, основанное на формуле (10) (см. также упражнение 4).

$$a_{\overline{n+k}|i} = (1+i)^{-k} a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{k}|i}\ .$$

При $n = 200$, $k = 40$, $i = 0.005$ это тождество дает

$$a_{\overline{240}|0,005} = (1{,}005)^{-40} a_{\overline{200}|0,005} + a_{\overline{40}|0,005} =$$
$$= 0{,}81913886 \times 126{,}24055430 + 36{,}17222786 = 139{,}58077$$

так что эквивалентная стоимость дома на день покупки

$$X = 20000 + 750 \times 139{,}58077 = 124685{,}6 \text{ тыс рб.}$$

УПРАЖНЕНИЯ 4.1

Доказать справедливость следующих равенств

1. $(1+i)\ s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1.$

2. $(1+i)\ a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+1}|i} + 1.$

3. $s_{\overline{n+k}|i} = s_{\overline{n}|i} + (1+i)^n\ s_{\overline{k}|i} = (1+i)^k\ s_{\overline{n}|i} + s_{\overline{k}|i}\ .$

4. $a_{\overline{n+k}|i} = a_{\overline{n}|i} + (1+i)^n\ a_{\overline{k}|i} = (1+i)^{-k}\ a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{k}|i}\ .$

5. $s_{\overline{n+k}|i} = s_{\overline{n}|i} - (1+i)^n\ a_{\overline{k}|i} = (1+i)^{-k}\ s_{\overline{n}|i} - a_{\overline{k}|i}\ .$

6. $a_{\overline{n+k}|i} = a_{\overline{n}|i} - (1+i)^{-n} s_{\overline{k}|i} = (1+i)^k\ a_{\overline{n}|i} - s_{\overline{k}|i}\ .$

4.6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛАТЕЖЕЙ АННУИТЕТА

Основное уравнение аннуитета (1) определяет взаимоотношения между величинами S, R, n и i. Подобным образом, равенство (3) определяет зависимость между A, R, n и i. В каждом из этих случаев если мы знаем три из этих величин, четвертая может быть определена Когда известны S, n и i, периодические платежи аннуитета находятся из уравнения (1)

$$R = \frac{S}{s_{\overline{n}|i}} = S\,\frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \quad . \tag{13}$$

Для быстрого определения R при отсутствии вычислительных средств составлены таблицы величины $(1/s_{\overline{n}|i})$ для обычно используемых значений параметров n и i.

Когда даны A, n и i, формула для R получается из равенства (3)

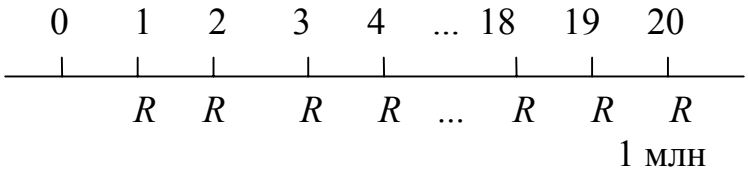
$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}} = A\,\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} \tag{14}$$

Для быстрого определения $(1/a_{\overline{n}|i})$ нет необходимости иметь специальную таблицу, так как по тождеству (12) эта величина выражается через табулированную величину $(1/s_{\overline{n}|i})$ простым добавлением известного параметра i.

Следует заметить, что формулы (13) и (14) справедливы только для обыкновенных аннуитетов. Когда определяются платежи полагающихся или отсроченных аннуитетов, не следует использовать эти формулы. В таких случаях нужно возвращаться к общей процедуре определения составляющих аннуитета, выписывая уравнение эквивалентности.

ПРИМЕР 1 Сберегательный банк начисляет проценты по норме $j_4 = 3\%$. Какой величины вклады необходимо делать в конце каждого квартала, чтобы накопить за 5 лет 1 млн рб ?

РЕШЕНИЕ Представим исходные данные на временной диаграмме



Выпишем уравнение эквивалентности для даты сравнения в конце двадцатого периода начисления. Это дает

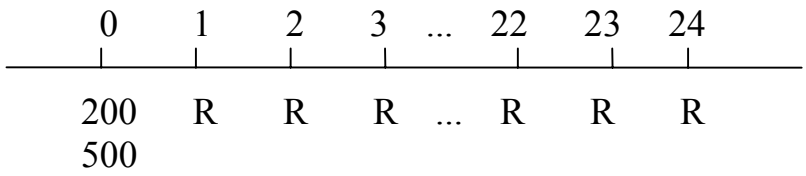
$$1 \text{ млн рб} = R\ s_{\overline{20}|0,0075}\ .$$

Разрешая его относительно R, получим

$$R = 1/\ s_{\overline{20}|0,0075} = 1 \times 0{,}04653063 = 46530{,}63 \text{ рб.}$$

ПРИМЕР 2 Стиральная машина стоит 500 тыс рб наличными. Она может быть приобретена также в рассрочку путем начального платежа 200 тыс рб и одинаковыми ежемесячными взносами в течение двух лет. Найти величину ежемесячного платежа, если деньги стоят $j_{12} = 3{,}5\%$.

РЕШЕНИЕ Представим исходные данные на временной диаграмме



Месячная норма процента равна (7/24)% . Уравнение эквивалентности с датой покупки в качестве даты сравнения имеет вид

$$500 = 200 + R\ a_{\overline{24}|7/24}\ .$$

Разрешая его относительно R, получим

$$R = 300 \times (1/\ a_{\overline{24}|7/24}\ )\ .$$

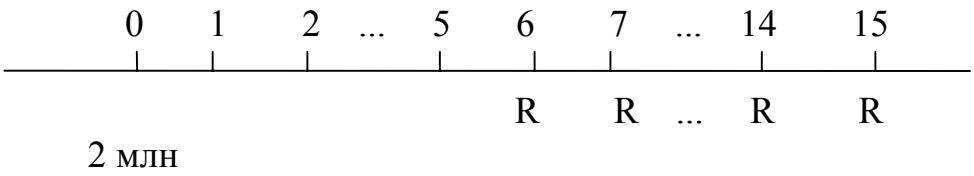
Из тождества (12) находим

$$(1/\ a_{\overline{24}|7/24}\ ) = (1/\ s_{\overline{24}|7/24}\ ) + 0{,}07/24 =$$
$$= 0{,}04028606 + 0{,}00291667 = 0{,}04320273\ .$$

Поэтому $R = 300 \times 0{,}04320273 = 12{,}96$ тыс рб .

ПРИМЕР 3 Студент занимает 2 млн рб, чтобы заплатить за обучение в течение года. Он обещает возместить долг с процентами при $j_2 = 4{,}5\%$ десятью полугодовыми взносами. Первая выплата будет сделана через три года после получения займа. Какими должны быть эти взносы ?

РЕШЕНИЕ Представим исходные данные на временной диаграмме



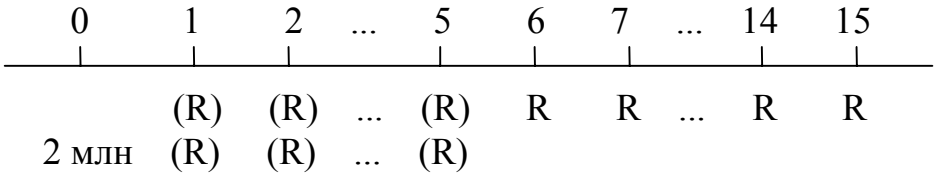
Способ 1. Запишем уравнение эквивалентности, используя конец пятого полугодия в качестве даты сравнения

$$R\ a_{\overline{10}|2{,}25\%} = 2 \times (1{,}0225)^5 \text{ млн рб} .$$

Умножение этого равенства на $(1/a_{\overline{10}|2{,}25\%})$ дает

$$R = 2 \times (1{,}0225)^5 \times (1/a_{\overline{10}|2{,}25\%}) \text{ млн рб} =$$
$$= 2 \times 1{,}11767769 \times 0{,}11278768 \text{ млн рб} = 252{,}11 \text{ тыс рб} .$$

Способ 2. Добавим дополнительные платежи в концах первых пяти периодов в обе строки платежей. Тогда диаграмма преобразуется к следующему виду



Уравнение эквивалентности для дня получения долга в качестве даты сравнения имеет вид

$$R\ a_{\overline{15}|2{,}25\%} = 2000000 + R\ a_{\overline{5}|2{,}25\%} .$$

Разрешая его относительно R , получим

$$R = 2000000/(a_{\overline{15}|2,25\%} - a_{\overline{5}|2,25\%}) =$$
$$= 2000000/(12{,}61216551 - 4{,}67945253) = 252{,}11 \text{ тыс рб}.$$

4.7 АННУИТЕТЫ С НЕИЗВЕСТНЫМИ СРОКАМИ

Предположим, что человек занимает 10 млн рб и согласен выплатить долг при норме процента $j_4 = 4\%$ платежами по 500 тыс рб в конце каждого квартала в течение необходимого времени. Ясно, что платежи образуют аннуитет, текущая стоимость которого на день займа равна 10 млн рб. То есть

$$10000 \text{ тыс рб} = 500 \times a_{\overline{n}|1\%} \text{ тыс рб} \qquad \text{или} \qquad a_{\overline{n}|1\%} = 20,$$

где n является неизвестным. Обратившись к таблицам, мы увидим, что для целого n полученное равенство не может удовлетвориться, действительно,

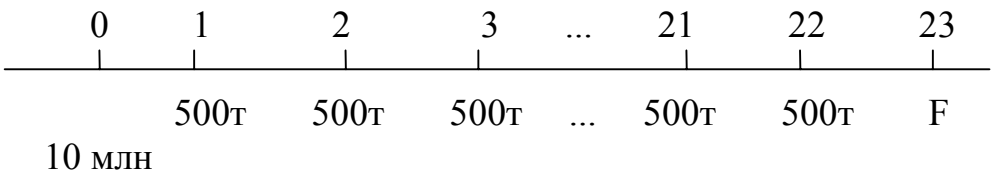
$$a_{\overline{22}|1\%} = 19{,}66037934 \qquad \text{и} \qquad a_{\overline{23}|1\%} = 20{,}45582113.$$

В этой ситуации обычно делается 22 платежа по 500 тыс рб каждый, а 23-ий платеж делается меньшей суммой, но достаточной, чтобы расплатиться с долгом.

В общем случае, когда заданы A, R и i, практически никогда соответствующий параметр n не бывает целым. Поэтому приходится использовать один платеж, отличающийся от R, чтобы обеспечить эквивалентность выплат. Обычно этот платеж является последним и по величине меньше, чем R, хотя это и не является необходимым. Определение величины последнего платежа производится с использованием все того же уравнения эквивалентности. Рассмотрим это на примерах.

ПРИМЕР 1 Предположим, что заемщик в вышеописанной ситуации подписывает сделку с 22-мя поквартальными платежами и последним платежом в конце 23-го квартала величиной F, достаточной для погашения оставшейся части долга. Чему равна F ?

РЕШЕНИЕ Представим исходные данные на временной диаграмме



Способ 1. Выпишем уравнение эквивалентности, используя в качестве даты сравнения конец 22-го периода. Это даст

$$F\,(1{,}01)^{-1} + 500\ s_{\overline{22}|1\%} = 10000 \times (1{,}01)^{22}\,.$$

Разрешая это уравнение относительно F, получим

$$F = (\ 12447{,}16 - 12235{,}79\ )(1{,}01) = 231{,}5 \text{ тыс рб.}$$

Способ 2. Введем по одному дополнительному платежу 500 тыс рб в день окончания 23-го периода и используем эту дату как дату сравнения в уравнении эквивалентности получившихся платежей

$$F + 500\ s_{\overline{23}|1\%} = 10000 \times (1{,}01)^{23} + 500$$
$$F = 12571{,}63 + 500 - 12858{,}15 = 213{,}5 \text{ тыс рб.}$$

Когда заданы величины S, R и i, расчет серии платежей проводится аналогично.

ПРИМЕР 2 Вклады по 10000 рб делаются в сберегательный банк по полугодиям при норме процента j_2 = 3% . На какую дату попадает заключительный вклад, не превышающий 10000 рб, если сумма на депозитном счете становится равной 300000 рб ? Каким будет этот заключительный вклад ?

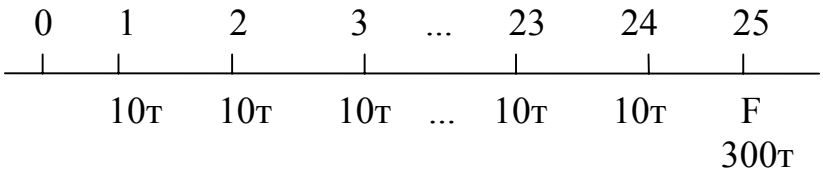
РЕШЕНИЕ Вклады будут образовывать аннуитет с итоговой суммой 300000 рб. Поэтому имеет место равенство

$$300000 = 10000 \times s_{\overline{n}|1{,}5\%} \qquad \text{или} \qquad s_{\overline{n}|1{,}5\%} = 30\,,$$

где n неизвестно. Из таблиц находим, что

$$s_{\overline{24}|1{,}5\%} = 28{,}63352080 \qquad \text{и} \qquad s_{\overline{25}|1{,}5\%} = 30{,}06302361\,.$$

Следовательно, нужно сделать 24 вклада по 10000 рб и заключительный вклад F в конце 25-го периода. Представим это на временной диаграмме



F определяется из подходящего уравнения эквивалентности.
Способ 1. В качестве даты сравнения используем конец двадцать четвертого интервала платежа; тогда имеем

$$F\,(1{,}015)^{-1} + 10000\ s_{\overline{24}|1{,}5\%} = 300000\,(1{,}015)^{-1}$$

Разрешаем это равенство относительно F

$$F = 300000 - 290630 = 9370 \text{ рб.}$$

Способ 2. Добавим по вкладу 10000 рб в каждую строчку диаграммы в конце двадцать пятого периода и выберем эту дату в качестве даты сравнения уравнения эквивалентности.

$$F + 10000\ s_{\overline{25}|1{,}5\%} = 300000 + 10000\ ,$$

откуда получаем

$$F = 310000 - 10000 \times 30{,}06302361 = 9370 \text{ рб.}$$

4.8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ПЛАТЕЖА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Когда A, R и i (или S, R и i) заданы, уравнение аннуитета $A = R\,a_{\overline{n}|i}$ (или $S = R\,s_{\overline{n}|i}$) может быть разрешено относительно n или путем интерполяции или при помощи логарифмирования. Процедура расчета простая, но появляется проблема интерпретации нецелого решения. Например, если уравнение аннуитета приводит к равенству $a_{\overline{n}|i} = 20$,

как встретилось в предыдущем разделе, интерполяция дает результат $n = 22{,}42696$. Легко проверить, что произведение дробной части этого решения на величину периодического платежа дает точное значение заключительного платежа F, определяемого в примере 1,

$$500000 \times 0{,}42696 = 21348 \text{ рб.}$$

Оказывается это имеет место и в общем случае.

Пусть даны A, R и i. Значение n определим с помощью интерполяции. Представим n в виде $k + f$, где k - целое число, а f - дробная часть, $f < 1$. Тогда $F = fR$ равно заключительному платежу, выплачиваемому через один период после последнего платежа R и обеспечивающему эквивалентность платежей. Докажем это. Из уравнения аннуитета имеем $a_{\overline{n}|i} = A/R$. Составим таблицу данных

k	$k+f$	$k+1$
$a_{\overline{k}\|i}$	A/R	$a_{\overline{k+1}\|i}$

Из уравнения пропорции получим

$$\frac{f}{1} = \frac{A/R - a_{\overline{k}|i}}{a_{\overline{k+1}|i} - a_{\overline{k}|i}}$$

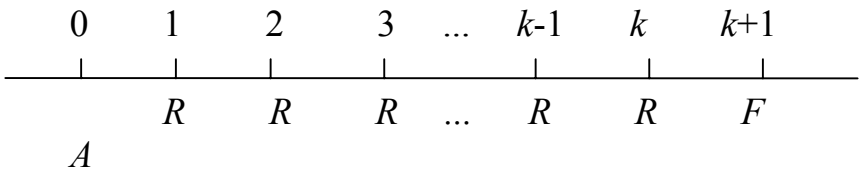
Знаменатель этой формулы можно вычислить по формуле (10) при $n = 1$ с учетом того, что $a_{\overline{1}|i} = (1 + i)^{-1}$. Это дает следующее выражение для f

$$f = \frac{A/R - a_{\overline{k}|i}}{(1 + i)^{-k-1}}$$

Умножая это равенство на $R(1 + i)^{-k-1}$, получим

$$fR(1 + i)^{-k-1} = A - R\, a_{\overline{k}|i}\ .$$

С другой стороны, если F определять при помощи уравнения эквивалентности с датой сравнения в начале первого интервала платежа, мы получим согласно диаграмме



следующее уравнение эквивалентности стоимостей

$$A = R\ a_{\overline{k}|i} + F(1+i)^{-k-1}\ .$$

Сравнивая этот результат с предыдущим, убеждаемся, что в условиях линейной интерполяции $F = f\,R$, что и требовалось.

Таким образом, когда уравнение аннуитета $a_{\overline{n}|i} = A/R$ разрешается относительно n приближенно при помощи линейной интерполяции, дробная часть n может интерпретироваться как дробная часть R, необходимая в качестве заключительного платежа F, когда F выплачивается одним периодом позже последнего платежа R.

В заключение заметим, что точное значение n находится из уравнения аннуитета, записанного в явной форме

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{A}{R}$$

что может быть переписано более удобно

$$(1 - iA/R)(1+i)^{n} = 1\ .$$

Логарифмируя это равенство и выражая затем n, получим его точное значение в виде

$$n = -\left(\log(1 - iA/R)\right) / \log(1+i)\ .$$

К сожалению, это выражение не поддается практической интерпретации.

4.9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ

Когда неизвестна процентная ставка i, но заданы R, n и A (или S), мы вновь обращаемся к формуле (3)

$$A = R\, a_{\overline{n}|i} = R\,(1 - (1 + i)^{-n})/i\,,$$

которая может рассматриваться как уравнение относительно процентной ставки i. Оно может быть преобразовано к виду

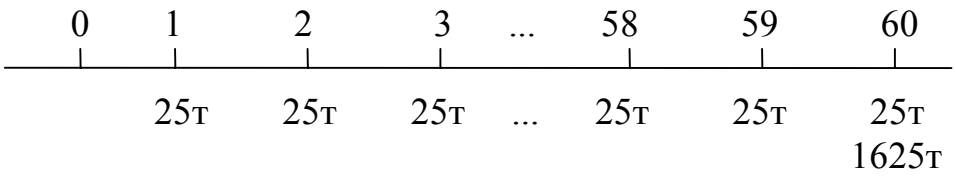
$$(A/R)(1 + i)^{n+1} - (1 + A/R)(1 + i)^{n} + 1 = 0$$

Такое уравнение относится к классу нелинейных алгебраических уравнений и его решение в общем случае не выражается в явной аналитической форме, так что его решение может быть осуществлено только численными методами.

Вместе с тем, используя метод линейной интерполяции, можно достаточно просто находить приближенные решения этого уравнения. Продемонстрируем это на примерах.

ПРИМЕР 1 Петров вкладывал в сберегательный банк по 25 тыс рб в конце каждого месяца в течение 5 лет. В настоящее время у него на счете накопилось 1625 тыс рб. С какой номинальной нормой процента для $m = 12$ начисляет проценты сберегательный банк ?

РЕШЕНИЕ Обозначим через i месячную норму процента и через j_{12} - соответствующую номинальную норму. Вклады по 25000 рб образуют аннуитет с итоговой суммой 1625000 рб как показано на нижеследующей временной диаграмме



Уравнение аннуитета имеет вид

$$25\ s_{\overline{60}|i} = 1625 \qquad \text{так что} \qquad s_{\overline{60}|i} = 65$$

На основе таблицы для функции составных платежей $s_{\overline{n}|i}$ составим следующую табличку

$s_{\overline{60}|i}$	65,46611	65,00000	64,64671
i	7/24 %	?	1/24 %
j_{12}	7/2 %	?	3 %

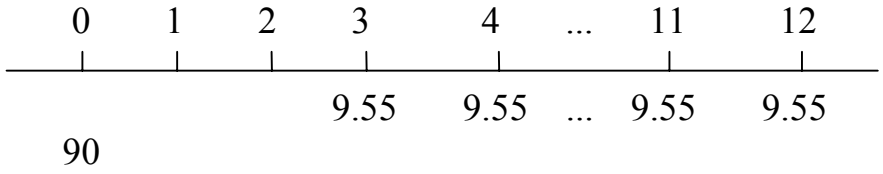
Составляем пропорцию линейной интерполяции

$$\frac{j_{12} - 0{,}03}{0{,}035 - 0{,}03} = \frac{65{,}00000 - 64{,}64671}{65{,}46671 - 64{,}64671} = \frac{0{,}35329}{0{,}81940} .$$

Откуда получаем $j_{12} = 0.03216$.

ПРИМЕР 2 Фирма продает товар стоимостью 100 млн рб по следующему платежному расписанию : 10 млн рб сразу и 10 ежемесячных взносов по 9&55 млн рб каждый, первый взнос делается через три месяца. Какую номинальную норму для m = 12 предусматривает такое расписание ?

РЕШЕНИЕ 10 ежемесячных платежей образуют отсроченный аннуитет с текущей стоимостью 90 млн рб на день покупки как показано на временной диаграмме



Уравнение аннуитета имеет вид

$$90 = 9{,}55\ (a_{\overline{12}|i} - a_{\overline{2}|i}) \qquad \text{так что} \qquad a_{\overline{12}|i} - a_{\overline{2}|i} = 9{,}4241 .$$

Вновь обращаясь к таблицам функций составных платежей, составляем вспомогательную табличку

j_{12}	9 %	?	10.5 %
i	3/4 %	?	7/8 %
$a_{\overline{12}|i} - a_{\overline{2}|i}$	9.4572	9.4241	9.3704

Пропорция линейной интерполяции имеет вид

$$\frac{j_{12} - 0{,}09}{0{,}105 - 0{,}09} = \frac{9{,}4241 - 9{,}4572}{9{,}3704 - 9{,}4572} = \frac{0{,}0331}{0{,}0868} .$$

Следовательно, $j_{12} = 0.0957$.

Применяя приближенные методы интерполяции, следует представлять точность этих приближений. Приведем некоторые данные, касающиеся ошибок при определении нормы процента с использованием интерполяции по таблицам функций составных платежей. Когда i получается по таблицам $a_{\overline{n}|i}$, результат немного завышается; когда используются таблицы $s_{\overline{n}|i}$, результат немного меньше истинного. Ошибка зависит сильнее от разности между двумя соседними значениями нормы процента в таблице и гораздо слабее - от величины n . Анализ ошибок для всех значений параметров таблиц показывает, что ошибка редко превосходит величину

$$(n/10)(\text{ разность норм процента })^2 .$$

Эта величина для расчета i в примере 1 равна

$$(60/10)(\ 0{,}07/24 - 0{,}01/4\ ) = 0{,}00000104 .$$

и для j_{12} составляет 0,0000125 . Для примера 2 расчет j_{12} с точностью до шестого знака дает 0,095719 .

УПРАЖНЕНИЯ 4.2

1. Какие ежеквартальные взносы должны делаться в сберегательный банк, выплачивающий $j_4 = 3\%$, для того, чтобы накопить 50 млн рб за 5 лет?
2. Найти годовые платежи аннуитета, чья итоговая сумма равна 25 млн рб, если срок равен 10 лет и процентная ставка $j_1 = 5\%$.
3. Какие одинаковые платежи в конце каждого квартала в течение 20 лет обеспечили бы приобретение дома, который стоит 200 млн рб наличными, если процентная ставка $j_4 = 5\%$?
4. Автомобиль стоит 35 млн рб наличными, но может быть куплен за 6 млн рб наличными и остаток в виде ежемесячных платежей в течение 3 лет.

Глава 5 ОБЫКНОВЕННЫЕ ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ

5.1 ВВЕДЕНИЕ

Как мы видели, основные задачи финансовой математики связаны с расчетами эквивалентности различных серий финансовых обязательств в связи с тем, что денежные суммы в различное время стоят по-разному. сегодняшние 100 рб эквивалентны 105 рб через год при норме процента 5% годовых. Подобно этому дом, который стоит 120 млн рб при оплате наличными, может быть куплен за 20 млн рб наличными и ежеквартальными платежами по 2154,8 тыс рб в течение 20 лет при норме процента 6% , конвертируемых поквартально. Основным средством решения таких задач финансовой математики является уравнение эквивалентности. Для численного решения задач разработаны формулы и составлены таблицы, позволяющие быстро получать решения в стандартных ситуациях. Когда встречаются нестандартные ситуации рекомендуется пытаться расчленить исходную задачу на стандартные, для решения которых уже можно пользоваться имеющимися таблицами или формулами. Это позволяет составлять достаточно компактные таблицы, позволяющие при отсутствии средств вычислительной техники довольно быстро решать разнообразные задачи. Конечно, когда средства вычислительной техники являются доступными, численное решение таких задач не является сложной проблемой.

Аннуитет был определен как последовательность платежей, обычно равной величины, делаемых через равные промежутки времени. Он был назван простым аннуитетом, если интервал платежа точно совпадает с периодом конверсии; в противном случае он называется общим аннуитетом. Например, предположим, что Иванов вносит вклады по 50 тыс рб на счет в сберегательном банке в конце каждого квартала. Если банк начисляет проценты поквартально, вклады образуют простой аннуитет. Если банк использует другой период конверсии, вклады образуют общий аннуитет.

Внимательный читатель заметит, что общий аннуитет мог бы быть исследован путем замены данной нормы процента на эквивалентную, составляемую с желаемой частотой. Это так, но новая рента может оказаться такой, для которой не составлены таблицы аннуитетов, что не позволит удобным образом решить задачу для заданного аннуитета. Поэтому возникает задача замены данного общего аннуитета такими

эквивалентными обыкновенными простыми аннуитетами, для которых можно было бы эффективно воспользоваться имеющимися таблицами или формулами. Еще раз подчеркнем, что будем рассматривать только общие аннуитеты с платежами в конце интервалов платежа.

5.2 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ОБЩИХ АННУИТЕТОВ В ПРОСТЫЕ АННУИТЕТЫ

Введем обозначения :

W - платежи общего аннуитета;

p - количество платежей общего аннуитета в год;

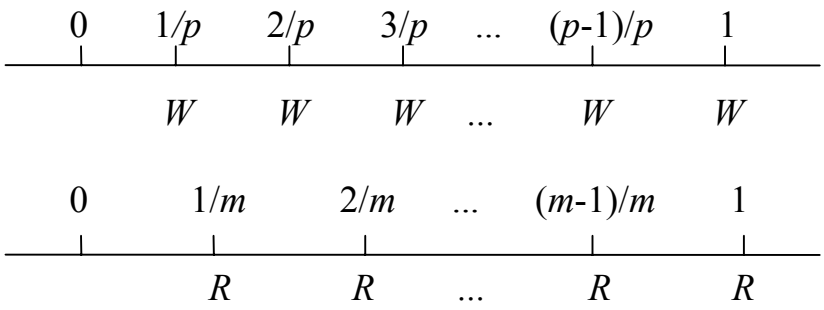
i - норма процента за период конверсии;

m - число периодов начисления процента в год;

R - платежи обыкновенного простого аннуитета, который является эквивалентной заменой общего аннуитета, делаемые m раз в год.

Если аннуитет заменяется другим аннуитетом, то очевидно должны быть выполнены следующие два условия : a) норма процента должна быть той же самой или эквивалентной; b) стоимости обоих аннуитетов должны быть одинаковыми в любой момент времени.

Обыкновенный общий аннуитет с платежами W, делаемыми p раз в год, и нормой процента i за период конверсии с m периодами конверсии в год и обыкновенный простой аннуитет с платежами R, делаемыми m раз в год удобно представить на временных диаграммах :



Для того, чтобы эти аннуитеты были эквивалентными, определим норму процента i' за интервал платежа общего аннуитета, которая эквивалентна норме i за период начисления процента. Тогда (см. раздел 2.6)

$$(1 + i')^p = (1 + i)^m \ . \qquad (1)$$

Если теперь приравнять аннуитеты в конце года, получим

$$R\ s_{\overline{m}|i} = W\ s_{\overline{p}|i}\ . \tag{2}$$

Заменяя функции составных платежей $s_{\overline{m}|i}$ и $s_{\overline{p}|i}$ их явными выражениями в обеих частях (2), будем иметь

$$R\frac{(1+i)^m - 1}{i} = W\frac{(1+i')^p - 1}{i'}\ . \tag{3}$$

С помощью (1) это равенство упрощается к виду

$$R/i = W/i'\ . \tag{4}$$

Разрешая (1) относительно i' находим, что

$$i' = (1 + i)^{m/p} - 1\ ,$$

Подставляя это в (4) окончательно получаем

$$R = W\frac{i}{(1+i)^{m/p} - 1}\ . \tag{5}$$

Дробь в правой части этого равенства является обратным значением функции $s_{\overline{n}|i}$ для дробного параметра $n = m/p$.

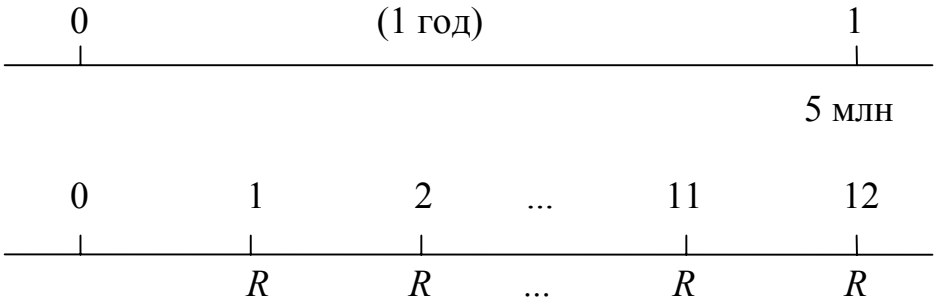
Так что справедливы равенства

$$R = W\frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} \qquad \text{и} \qquad W = Rs_{\overline{m/p}|i}\ . \tag{6}$$

Понятно, что значение дроби m/p в общем случае может быть любым. Однако практически встречается один из следующих вариантов : a) m/p является целым числом : в этом случае для анализа общего аннуитета можно использовать обычные таблицы для целочисленных значений параметра; b) m/p является дробью вида $k/12$, $k = 1, 2, 3, 4$ или 6 , поскольку такие дроби встречаются довольно часто для них также составлены соответствующие таблицы функций составных платежей.

ПРИМЕР 1 Сидоров получает пенсию 5 млн рб в конце каждого года. Какие ежемесячные выплаты эквивалентны этой сумме, если деньги стоят $j_{12} = 6\%$?

РЕШЕНИЕ Здесь $W = 5$ млн рб, $p = 1$, $i = 1/2$ % , $m = 12$ и нужно определить R .



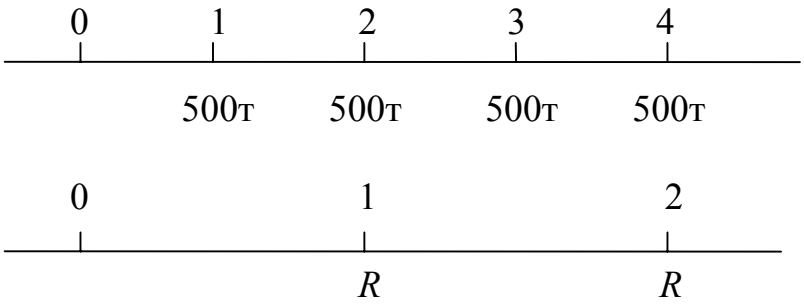
Использование равенства (6) дает

$$R = 5000 \,/\, s_{\overline{12}|0,5\%} = 405{,}35 \text{ тыс рб} .$$

Таким образом, Сидоров мог бы получать ежемесячно 405350 рб вместо получения 5 млн рб в конце года. Такой результат получился бы, если бы мы воспользовались уравнением эквивалентности с датой сравнения в конце года.

ПРИМЕР 2 Заменить платежи по 500 тыс рб в конце каждого квартала на полугодовые платежи, если норма процента 5% , $m = 2$.

РЕШЕНИЕ Мы имеем $W = 500000$, $p = 4$, $i = 2{,}5$ % и $m = 2$.



Из уравнения (6) получаем

$$R = 500 / s_{\overline{1/2}|2,5\%} = 500 \times 2{,}01242284 = 1006{,}2 \text{ тыс рб} .$$

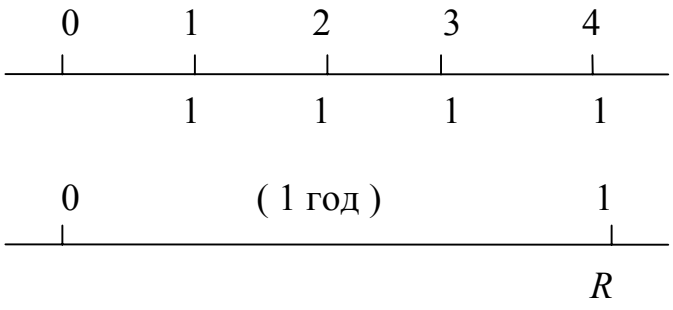
Таким образом, полугодовые платежи 1006,2 тыс рб эквивалентны поквартальным платежам 500 тыс рб при норме процента $j_2 = 5\ \%$.

5.3 ИТОГОВАЯ СУММА И НАСТОЯЩАЯ СТОИМОСТЬ ОБЫКНОВЕННОГО ОБЩЕГО АННУИТЕТА

Идея определения итоговой суммы и настоящей стоимости обыкновенного общего аннуитета остается прежней : преобразовать обыкновенный общий аннуитет в эквивалентный ему обыкновенный простой аннуитет и затем определить требуемую характеристику известными методами для простых аннуитетов. Проблемой, таким образом, является лишь преобразование общего аннуитета в простой. Как только это сделано, анализ простого аннуитета происходит стандартными способами. Никаких дополнительных трудностей не возникает и в случае отсроченных общих аннуитетов. Они преобразовываются в простые тем же самым образом. Покажем это на примерах.

ПРИМЕР 1 Иванов вносит в банк по 1 млн рб в конце каждого квартала при норме процента $j_1 = 4\%$. Какая сумма будет у него в банке через пять лет ?

РЕШЕНИЕ Составим сравнительную временную диаграмму, на основе которой будет легко сделать преобразование общего аннуитета в простой. $W = 1$ млн, $p = 4$, $m = 1$, $i = 4\%$.



Из уравнения (6) имеем

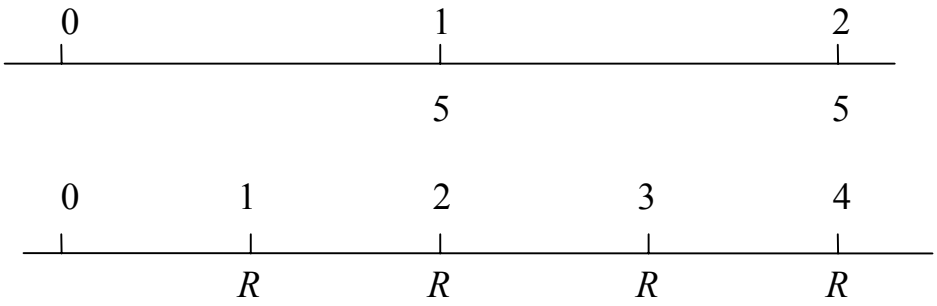
$$R = 1000000 \,/\, s_{\overline{1/4}|4\%} = 1000000 \times 4{,}059510 = 4059510 \text{ рб} .$$

Аннуитет продолжается в течение пяти периодов начисления, поэтому

$$S = R\ s_{\overline{5}|4\%} = 4059510 \times 5{,}41632256 = 21987615 \text{ рб}.$$

ПРИМЕР 2 Найти настоящую стоимость серии полугодовых платежей по 5 млн рб в течение 8 лет, первый платеж в конце пятого года, если норма процента $j_4 = 5\%$.

РЕШЕНИЕ Снова изображаем исходные данные на сравнительной временной диаграмме продолжительностью 1 год. $W = 5$ млн, $p = 2$, $m = 4$, $i = 1{,}25$ % .



Опять используем уравнение (6) и получаем равенство

$$R = 5000000 / s_{\overline{2}|1,25\%} = 5000000 \times 0{,}49689441 = 2484472 \text{ рб},$$

которое определяет квартальные платежи, эквивалентные полугодовым выплатам по 5 млн рб. Срок аннуитета равен 8 лет (32 периода конверсии) и отсрочен на 4,5 года (18 периодов конверсии). Используя ранее разработанную технику расчетов находим настоящую стоимость A

$$A = 2484472 \left(a_{\overline{50}|1,25\%} - a_{\overline{18}|1,25\%} \right) =$$
$$= 2484472 \left(37{,}01287574 - 16{,}02954893 \right) = 52132488 \text{ рб}.$$

Заметим, что после получения эквивалентного простого аннуитета, единицей времени становится период начисления процентов.

5.4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТЫХ АННУИТЕТОВ В ОБЩИЕ

Иногда появляется необходимость перевода обыкновенных простых аннуитетов в обыкновенные общие аннуитеты. Преобразование можно сделать достаточно просто с помощью второго равенства (6) и таблиц функций составных платежей. Такая задача появляется, когда требуется

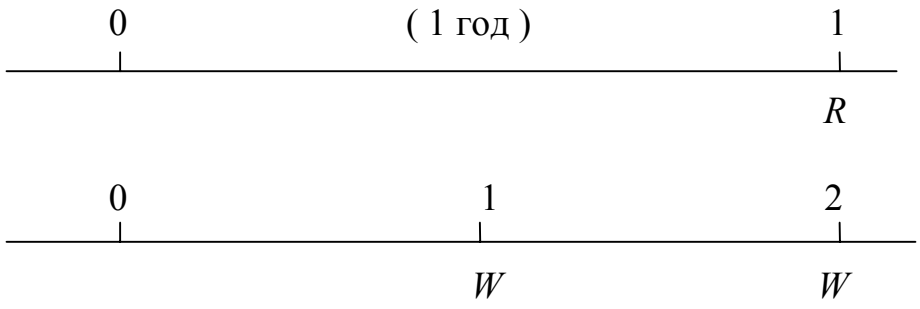
найти платежи общего аннуитета. Идея нахождения общего аннуитета состоит в определении простого аннуитета, который мог бы быть использован для выполнения намеченных целей, а затем преобразования этого простого аннуитета в эквивалентный общий аннуитет.

ПРИМЕР Дом, оцененный в 120 млн рб, продается за 20 млн рб наличными и последовательность одинаковых полугодовых платежей в течение следующих 20 лет. Какими должны быть платежи при норме процентов a) $j_1 = 4{,}5\ \%$, b) $j_4 = 4.5\ \%$?

РЕШЕНИЕ a) Сначала решим задачу о простом аннуитете : какие понадобятся ежегодные платежи ? В этом случае в качестве ежегодных платежей простого аннуитета должны быть

$$R = 100 \text{ млн} / \ a_{\overline{20}|4{,}5\%} = 100 \times 0{,}07687614 = 7687614 \text{ рб.}$$

Теперь преобразуем простой аннуитет в требуемый общий аннуитет. Мы имеем $R = 7687614$, $m = 1$, $p = 2$, $i = 4{,}5\ \%$.



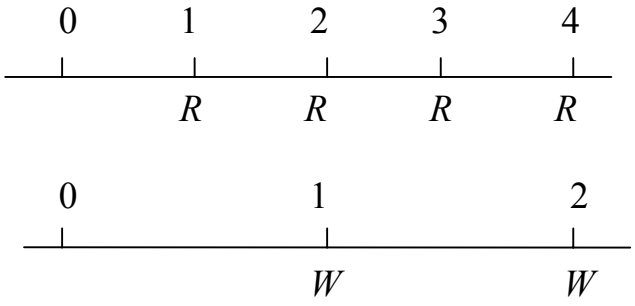
Из второго уравнения (6) получаем эквивалентные полугодовые платежи W

$$W = R \ s_{\overline{0{,}5}|4{,}5\%} = 7687614 \times 0{,}49449811 = 3801511 \text{ рб.}$$

b) Как и в предыдущем случае, сначала находим платежи простого аннуитета, выплачиваемые поквартально,

$$R = 100 \text{ млн} / \ a_{\overline{80}|1{,}125\%} = 100 \times 0{,}01902323 = 1902323 \text{ рб.}$$

Теперь преобразуем этот простой аннуитет, выплачиваемый поквартально, в общий аннуитет с полугодовыми платежами



Из второго уравнения (6) получаем эквивалентные полугодовые платежи общего аннуитета

$$W = R\ s_{\overline{2}|1,125\%} = 1902323 \times 2{,}0112500 = 3826047 \text{ рб}.$$

5.5 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЦЕНТНОЙ СТАВКИ ДЛЯ ОБЩЕГО АННУИТЕТА

Простейший способ определения нормы процента для общего аннуитета состоит в определении нормы процента для простого аннуитета на интервал платежа, а затем преобразовании этой нормы в эквивалентную норму на требуемый период начисления процентов. При этом в отсутствии вычислительных средств снова можно для получения приближенного решения воспользоваться методом линейной интерполяции и таблицами функций составных платежей.

ПРИМЕР Обыкновенный аннуитет на 750 тыс рб поквартально на 7 лет может быть куплен за 15750 тыс рб. Какая номинальная норма, конвертируемая ежемесячно, использована для реализации инвестиции покупателя ?

РЕШЕНИЕ Сначала решим задачу простого аннуитета : какой должна быть поквартальная норма i начисления процентов ?
Для этой вспомогательной задачи используем равенство

$$750\ a_{\overline{28}|i} = 15750 \quad \text{или} \quad a_{\overline{28}|i} = (1 - (1 + i)^{-28})/i = 21.$$

Если под рукой нет вычислительных средств для численного решения этого уравнения, воспользуемся интерполяцией при помощи таблиц. Составим следующую вспомогательную табличку (для рассматриваемого

примера анализ основывается на первых трех строчках этой вспомогательной таблицы)

i	2 %	i	2,25 %
j_{12}	0,0795	j_{12}	0,0893
$a_{\overline{28}\|i}$	21,2813	21,0000	20,6078
j_2	0,0808	j_2	0,0910

Пропорция линейной интерполяции для i имеет вид

$$\frac{i - 0{,}02}{0{,}0225 - 0{,}02} = \frac{21{,}0000 - 21{,}2813}{20{,}6078 - 21{,}2813} = \frac{0{,}2813}{0{,}6735} \ ,$$

что дает $i = 0{,}02104$ или $i = 2{,}1$ % . Однако нам нужно определить не i , а j_{12} , которая должна быть связана с i соотношением эквивалентности

$$(1 + j_{12} / 12)^{12} = (1 + i)^4 \ .$$

Разрешая его относительно j_{12} получим

$$j_{12} = 12 \left((1 + i)^{1/3} - 1\right) .$$

Вычисление по этой формуле дает $j_{12} = 0{,}0835764$. Если возведение в дробную степень вызывает затруднение, можно далее воспользоваться приведенной выше вспомогательной табличкой, составляя новую пропорцию линейной интерполяции

$$\frac{j_{12} - 0{,}0795}{0{,}0893 - 0{,}0795} = \frac{21{,}0000 - 21{,}2813}{20{,}6078 - 21{,}2813} = \frac{0{,}2813}{0{,}6735} \ ,$$

что дает $j_{12} = 0{,}0835932$ или 8,36 % . Как видим, точность интерполяции в этом примере равна $0{,}0000168$.

ПРИМЕР 2 Решить предыдущий пример, если норма процента конвертируется по полугодиям.

РЕШЕНИЕ Процесс решения точно такой же, как и в предыдущем случае, только вместо j_{12} необходимо использовать j_2 , так что соотношение эквивалентности принимает вид

$$(1 + j_2/2)^2 = (1 + i)^4 \quad \text{или} \quad j_2 = 2\,((1 + i)^2 - 1)\,.$$

Поскольку норма процента i остается прежней, получим $j_2 = 0{,}0850452$. Можно использовать линейную интерполяцию и в этом случае. Для этого дополним вспомогательную табличку предыдущего примера четвертой строчкой, дающей сведения о j_2 . Соответствующая пропорция имеет вид

$$\frac{j_2 - 0{,}0808}{0{,}0910 - 0{,}0808} = \frac{21{,}0000 - 21{,}2813}{20{,}6078 - 21{,}2813} = \frac{0{,}2813}{0{,}6735}\,,$$

что приводит к результату $j_2 = 0{,}0850602$. Точность линейной интерполяции в данном случае равна 0,0000150 .

5.6 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРОКА ОБЩЕГО АННУИТЕТА

Для определения срока общего аннуитета следует так же как и ранее сначала преобразовать его в эквивалентный простой аннуитет и затем уже рассмотренными способами определить срок полученного простого аннуитета. Обычно для завершения аннуитета заключительные платежи устанавливаются несколько меньшими, чем регулярные. Техника определения заключительных платежей ранее была рассмотрена, поэтому здесь мы остановимся только на определении количества платежей аннуитета, показав это на примере.

ПРИМЕР Сколько ежемесячных платежей по 500 тыс рб каждый потребуется для ликвидации долга 10 млн рб , если норма процента равна 6% , $m = 2$ и первая выплата делается через месяц после займа ?

РЕШЕНИЕ Данный аннуитет эквивалентен обыкновенному простому аннуитету с полугодовыми платежами R , связанными с платежами общего аннуитета $W = 500$ тыс рб соотношением

$$R = W\,\frac{1}{s_{\overline{1/6}|3\%}} = 500000 \times 6{,}07456894 = 3037284 \text{ рб}\,.$$

Срок аннуитета определяется из свойств функции составного платежа $a_{\overline{n}|i}$, которая удовлетворяет равенству

$$3{,}037284\ a_{\overline{n}|3\%} = 10$$

которое приводит к нелинейному уравнению относительно n

$$a_{\overline{n}|3\%} = (1 - (1 + 0{,}03)^{-n}) / 0{,}03 = 3{,}2924 .$$

Откуда

$$(1{,}03)^{n} = 1{,}1095971 \quad \text{или} \quad n = \frac{\log(1{,}1095971)}{\log(1{,}03)} = 3{,}518 .$$

Здесь n является числом полугодовых периодов, этому соответствует n = 21,1098 месяцев . Если удобнее не вычислять логарифмы, а воспользоваться таблицами, составим вспомогательную табличку для построения интерполяционного решения. Она примет вид

Месяцев	24	?	18
Полугодий	4	?	3
$a_{\overline{n}\|3\%}$	3,7171	3,2924	2,8286

Пропорция линейной интерполяции для n в месяцах

$$\frac{n-18}{24-18} = \frac{3{,}2924 - 2{,}8286}{3{,}7171 - 2{,}8286} = \frac{0{,}4638}{0{,}8885}$$

дает n = 21,1320 , то есть точность определения срока при помощи линейной интерполяции в данном случае равна 0,0222 месяцев.

УПРАЖНЕНИЯ 5

1. Найти ежемесячный аннуитет, эквивалентный аннуитету 2 млн рб в квартал. Процентная ставка $j_{12} = 5\%$.
2. Найти ежемесячный аннуитет, эквивалентный полугодовым выплатам 50 млн рб при процентной ставке $j_{12} = 4\%$.
3. Аннуитет по 1,5 млн рб в квартал заменяется ежегодными платежами. Насколько большими будут они при процентной ставке 6% за год ?
4. Преобразовать общий аннуитет с полугодовыми платежами по 10 млн рб в простой аннуитет а) если деньги стоят $j_1 = 6\%$, б) если деньги стоят $j_4 = 6\%$.
5. Преобразовать общий аннуитет с ежеквартальными платежами по 5 млн рб в простой аннуитет а) если деньги стоят $j_{12} = 5\%$, б) если деньги стоят 5% в год.
6. Найти простой аннуитет при $j_4 = 4\%$, эквивалентный платежам 15 млн рб каждые 5 лет.

7. Иванов вносит 25 тыс рб в конце каждого месяца в фонд, возмещающий с процентной ставкой $j_2 = 3\%$. Какая сумма будет на счету у Иванова через 5 лет ,
8. Дом может быть куплен за 20 млн рб наличными и по 0,7 млн рб ежемесячно в течение 20 лет. Какой является стоимость дома наличными, если процентная ставка равна 5% в год ?
9. Иванов имеет 10 млн рб в сберегательном банке, который выплачивает проценты по ставке $j_{12} = 3\%$. Если он продолжит вкладывать по 1 млн рб в конце каждого квартала, какую сумму он будет иметь на счете через 5 лет ?
10. По контракту будут делаться платежи по 250 тыс рб в конце каждых 6 месяцев в течении 10 лет и еще один платеж 10 млн рб в конце срока. Какова настоящая стоимость контракта, если деньги стоят 4% в год ?
11. Заменить аннуитет по 10 млн рб в год на эквивалентный общий аннуитет, выплачиваемый а) поквартально, б) помесячно, в) через каждые полгода, если процентная ставка равна 6% годовых.
12. Цена автомобиля равна 27,5 млн рб наличными. Покупателю дается кредит на эту покупку за 9,5 млн рб. Расчет должен быть произведен за 30 месяцев равными ежемесячными взносами. Какими будут эти платежи, если процентная ставка равна 5% годовых ?
13. Сумма 500 млн рб инвестируется сегодня для того, чтобы обеспечить человеку ежегодные поступления в течение 20 лет, первый платеж должен быть получен через 15 лет, начиная от сегодняшнего дня. Найти величину годовых поступлений, если процентная ставка равна $j_4 = 3\%$.
14. Долг 100 млн рб выплачивается посредством 48 равных ежемесячных взносов, первый делается через 25 месяцев от сегодняшнего дня. Какими будут платежи, если процентная ставка равна $j_2 = 5\%$.
15. Сумма аннуитета, выплачивающего по 10 млн рб через каждые полгода, в конце 35 лет равна 2000 млн рб. Найти процентную ставку j_{12}.
16. Машина стоимостью 100 млн рб приобретается выплатой 10 млн рб наличными и десятью полугодовыми платежами по 10 млн рб. Найти процентную ставку j_2 .
17. Найти годовую ставку при которой серия ежеквартальных депозитов по 2 млн рб даст итоговую сумму 90 млн рб через 8 лет.
18. Итоговая сумма пятнадцатимесячного аннуитета равна 10 млн рб. Если процентная ставка равна $j_2 = 5\%$, найти число полных платежей.
19. Сколько ежемесячных платежей по 1 млн рб необходимо, чтобы выплатить долг 40 млн рб, если процентная ставка равна 5% годовых ?
20. Настоящая стоимость аннуитета, выплачивающего поквартально 2,5 млн рб, равна 25 млн рб. Если процентная ставка равна $j_{12} = 3\%$, найти количество полных платежей.

Если процентная ставка $j_{12} = 8\%$, какими должны быть ежемесячные платежи?

5. Некто будет выплачивать долг 60 млн рб с процентной ставкой $j_4 = 6\%$ равными ежеквартальными платежами в течении 8 лет. Какими будут эти платежи?
6. Известно, что оборудование нужно заменять через 15 лет после установки, стоимость замены 150 млн рб. Какую сумму нужно инвестировать компании в конце каждого года для того, чтобы заменить оборудование, если инвестиции приносят проценты 4% годовых ?
7. Цветной телевизор стоит 7,5 млн рб и покупается за 1,5 млн рб наличными и одинаковые ежемесячные взносы в течение 2,5 лет. Если процентная ставка равна $j_{12} = 5\%$, какими будут платежи ?
8. По страховому договору выплачивается пособие 100 млн рб наличными или ежеквартальный аннуитет сроком 10 лет , эквивалентный этой сумме при $j_4 = 4\%$. Найти ежеквартальные платежи аннуитета.
9. Некто занимает 100 млн рб под проценты $j_2 = 5\%$ и начинает выплачивать долг полугодовыми взносами по 5 млн рб. После 10 платежей он желает изменить размер платежей, чтобы ликвидировать долг пятнадцатью взносами. Какими должны быть новые платежи ?
10. Сумма аннуитета по 10 млн рб в год равна 150 млн рб. Процентная ставка равна 4% годовых. Найти число полных платежей и величину заключительного частичного платежа, если он необходим.
11. Настоящая стоимость аннуитета 1 млн рб в квартал равна 5 млн рб. Если процентная ставка равна $j_4 = 4\%$, найти число полных платежей и заключительный частичный платеж.
12. Усадьба стоимостью 250 млн рб покупается за 20 млн рб наличными и ежеквартальные платежи по 5 млн рб так долго, сколько необходимо. Если процентная ставка равна $j_4 = 4{,}5\%$, найти количество полных платежей и заключительный частичный платеж.
13. Ежемесячный журнал стоит 2,5 тыс рб в розничной продаже. Двухлетняя подписка, однако, стоит всего 20 тыс рб. Если за подписку журнала нужно платить на месяц раньше поступления первого номера, с какой процентной ставкой j_{12} «работают» подписные 20 тыс рб.
14. Иванов занял 100 млн рб у Петрова и подписал контракт, обещая выплачивать по 6 млн рб процентов в конце каждого года в течение 10 лет, срока выплаты основной суммы долга. Петров сразу же продал этот контракт в банк, который выплачивает 4% годовых за его инвестиции. Сколько выплатил банк за контракт и какова прибыль Петрова ?

Глава 6 АМОРТИЗАЦИЯ И ПОГАСИТЕЛЬНЫЕ ФОНДЫ

6.1 АМОРТИЗАЦИЯ ДОЛГА

Первоначально слово амортизация означало ликвидацию долга любыми способами. В современном использовании термин **амортизация** означает погашение долга, основной суммы и процентов, путем последовательности обычно одинаковых платежей. Таким образом, каждый платеж содержит уплату процентов, накопившихся за неоплаченную основную сумму в течение предшествующего временного периода, а также возмещение части неоплаченной основной суммы. Поскольку платежи обычно являются равными, они образуют аннуитет.

ПРИМЕР 1 Долг 100 млн рб необходимо амортизировать равными платежами в конце каждого года в течение 5 лет. Если процент за неоплаченную основную сумму начисляется по 5% эффективно, найти сумму каждого платежа. Составить расписание, показывающее, какая часть основной суммы возмещена, и какая часть основной суммы остается неоплаченной на конец года.

РЕШЕНИЕ Сначала найдем, какими должны быть платежи. Так как пять платежей образуют обыкновенный аннуитет с настоящей стоимостью 100 млн рб (первоначальная задолженность), мы имеем

$$100 = R\ a_{\overline{5}|5\%} \qquad \text{или} \qquad R = 100 / a_{\overline{5}|5\%} = 23097{,}5 \text{ тыс рб.}$$

Теперь составим расписание, показывающее процесс амортизации долга. Так как исходная сумма долга 100 млн рб использовалась заемщиком в течение первого года, процент, полагающийся в конце этого года равен

$$100 \times 0{,}05 \text{ млн рб} = 5 \text{ млн рб.}$$

Так как платеж составляет 23,0975 млн рб, 18,0975 млн рб из этих денег возмещает основную сумму. Поэтому задолженность в конце года сводится к

$$100 - 18{,}0975 = 81{,}9025 \text{ млн рб}$$

и эта сумма является неоплаченной частью основной суммы в течение второго года. В конце второго года полагаются проценты с суммы 81,9025 млн рб, то есть

$$81{,}9025 \times 0{,}05 \text{ млн рб} = 4{,}0951 \text{ млн рб} .$$

Платеж остается прежним 23,0975 млн рб, что дает возможность свести задолженность по основной сумме к

$$81{,}9025 - (23{,}0975 - 4{,}0951) = 62{,}9001 \text{ млн рб} .$$

Такая вычислительная процедура повторяется для последующих трех лет, в течение которых долг должен быть полностью ликвидирован. Нижеследующая таблица дает полное представление о процессе погашения долга

Конец года	Процент 5% в год	Годовой платеж	Возмещенная сумма	Неоплаченная сумма
0				100000000
1	5000000	23097500	18097500	81902500
2	4095100	23097500	19002400	62900100
3	3145000	23097500	19952500	42947600
4	2147400	23097500	20950100	21997500
5	1099900	23097400	21997500	0
Всего	15487400	115487400	100000000	

Итог в конце таблицы желателен для целей проверки. Полная сумма столбца «Возмещенная сумма» должна совпадать с первоначальной задолженностью. Точно также, сумма столбца «Годовые платежи» должна совпадать с суммарным процентом плюс сумма столбца «Возмещенная сумма» .

Другой тип задачи амортизации появляется, когда размер платежей задан и нужно найти сколько платежей нужно сделать и каким должен быть последний платеж. Рассмотрим эту задачу на примере.

ПРИМЕР 2 Долг 100 млн рб при норме процента j_2 = 6% будет амортизирован платежами по 20 млн рб в конце каждых 6 месяцев пока не

будет возмещен. Составить расписание амортизации, показывающее процесс полного погашения долга.

РЕШЕНИЕ Процент, полагающийся в конце первых 6 месяцев, равен $100 \times 0{,}03 = 3$ млн рб. Платеж 20 млн рб, сделанный в это время, выплатит процент и уменьшит неоплаченную часть основной суммы долга на 17 млн рб. Таким образом, первый платеж уменьшит долг до 83 млн рб. Далее процедура вычисления повторяется и результаты сводятся в таблицу

Конец периода	Процент (3%)	Выплата за период	Возмещаемая сумма	Неоплаченная сумма
0				100,000
1	3,000	20,000	17,000	83,000
2	2,490	20,000	17,510	65,490
3	1,965	20,000	18,035	47,455
4	1,424	20,000	18,576	28,879
5	0,866	20,000	19,134	9,745
6	0,292	10,037	9,745	0
Всего	10,037	110,037	100,000	

Как видим заключительный платеж составляет только 10,037 млн рб, так как эта сумма полностью ликвидирует долг.

Рассмотренные примеры показывают, что задачи, касающиеся амортизации, по существу, являются задачами об аннуитетах с известной настоящей стоимостью, а расписание амортизации является просто записью, которая показывает распределение по времени выплат процентов и возмещений основной суммы долга.

6.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОПЛАЧЕННОЙ СУММЫ ДОЛГА

Когда погашается долг, неоплаченная сумма долга после любого заданного числа платежей может найдена путем составления расписания амортизации. Когда число платежей велико, составление полного расписания становится утомительным и желательно иметь способы его ускорения. Как мы увидим, для этих целей можно использовать соответствующее уравнение стоимостей.

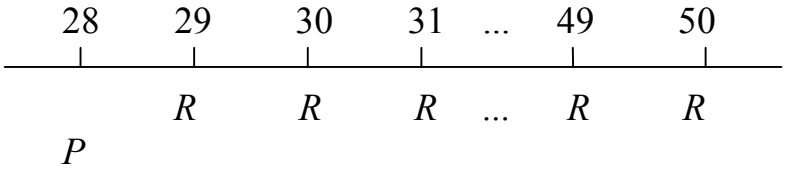
Неоплаченная сумма долга на любую дату представляет собой невозмещенный баланс долга. Точно так же на любую дату настоящая стоимость платежей, которые еще не сделаны, представляет собой невозмещенный баланс долга. Таким образом, мы получаем следующее соотношение эквивалентности : неоплаченная сумма долга на любую заданную дату эквивалентна сумме платежей, которые должны быть сделаны.

ПРИМЕР 1 Долг 100 млн рб будет амортизироваться платежами в конце каждого квартала в течение 12,5 лет. Если деньги стоят 3,5 % , $m = 4$, найти неоплаченную часть долга в конце седьмого года.

РЕШЕНИЕ Способ 1. Сначала определим необходимые амортизационные платежи. Платежи образуют обыкновенный аннуитет с текущей стоимостью 100 млн рб, поэтому

$$100 = R\ a_{\overline{50}|7/8\%} \qquad \text{значит} \qquad R = 100 / a_{\overline{50}|7/8\%} = 2{,}4779\ .$$

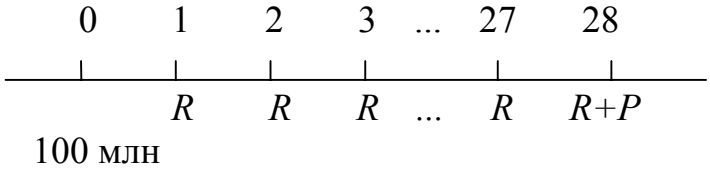
Так как неоплаченная часть долга в конце 7-го года эквивалентна платежам, которые должны быть сделаны, мы представим на временной диаграмме только платежи последних пяти с половиной лет.



Равенство стоимостей дает

$$P = R\ a_{\overline{22}|7/8\%} = 2{,}4779 \times 19{,}93310 = 49{,}3923 \text{ млн рб.}$$

Способ 2. Другой способ определения неоплаченной части долга основан на использовании временной диаграммы платежей первых семи лет



Заметим, что на временной диаграмме в конце седьмого года помещено P, обозначающее остающиеся платежи. Теперь мы составим уравнение стоимостей на конец 7-го года в качестве даты сравнения. Это даст

$$P + R\ s_{\overline{50}|7/8\%} = 100 \times (1{,}00875)^{28}\ .$$

Разрешая его относительно P, мы получим

$$P = 100(1{,}000875)^{28} - 2{,}4779\ s_{\overline{50}|7/8\%} = 49{,}3923 \text{ млн рб}\ .$$

При определении неуплаченной части долга мы использовали два подхода. В первом использовалась заключительная часть временной диаграммы и платежи, еще не сделанные. Такой способ иногда называют **методом перспективы**, так как он использует будущие операции по выплате долга. Во втором способе используется начальная часть временной диаграммы и платежи, которые уже сделаны. Так как этот способ использует уже выполненные операции по выплате долга, его иногда называют **ретроспективным методом.** Когда все платежи одинаковые, обычно проще использовать первый метод, так как неоплаченная часть долга в любой момент времени совпадает с настоящей стоимостью аннуитета, состоящего из платежей, которые еще предстоит сделать. Таким образом, сразу после k-го платежа неоплаченная часть долга равна

$$P = R\ a_{\overline{n-k}|i}\ . \tag{1}$$

Однако когда заключительный платеж отличается от регулярных, обычно проще использовать второй способ, поскольку сразу после k-го платежа неоплаченная часть долга равна

$$P = A(1 + i)^k - R\, s_{\overline{k}|i}\,. \tag{2a}$$

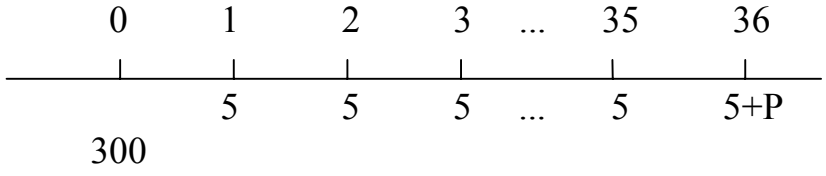
Используя тождество $(1 + i)^k = 1 + i\ s_{\overline{n-k}|i}$, мы можем переписать предыдущее равенство в более простом виде

$$P = A - (R - Ai)\ s_{\overline{k}|i}\ . \tag{2b}$$

(При вычислении по этой формуле, к тому же, достаточно пользоваться одной таблицей.) Эта формула показывает также , что выплаченная сумма долга равна $(R - Ai)\ s_{\overline{k}|i}$.

ПРИМЕР 2 Долг 300 млн рб и проценты при $j_{12} = 6\%$ амортизируются платежами по 5 млн рб в конце каждого месяца до полного погашения долга. Найти неоплаченную часть долга в конце третьего года.

РЕШЕНИЕ Так как число платежей и величина заключительного платежа неизвестны, проще использовать ретроспективный метод. Пусть P обозначает неоплаченную часть долга в конце третьего года. Тогда P эквивалентно всем платежам, сделанным после трех лет, и может быть использовано для обозначения всех этих платежей на временной диаграмме



Записывая уравнение эквивалентности с использованием конца 36-го периода в качестве даты сравнения, получим

$$P + 5\ s_{\overline{36}|0,5\%} = 300 \times (1,005)^{36}.$$

Производя вычисления, получим $P = 162,324$ млн рб. Метод амортизации часто используется при ликвидации долга, возникающего из-за покупки собственности. При этом неоплаченная часть долга часто упоминается как **доля покупателя.** Выплаченная часть долга вместе с наличным платежом, если он был, называется **долей покупателя.** Таким образом мы получаем соотношение

Доля покупателя + Доля продавца = Стоимость собственности (3)

Слова «стоимость собственности» относится к первоначальной продажной цене, которая может быть или не быть ее настоящей рыночной стоимостью.

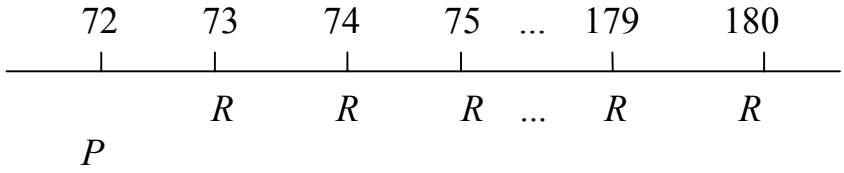
ПРИМЕР 3 Дом стоимостью 100 млн рб продается за 30 млн рб наличными и серию платежей ежемесячными взносами в течение 15

лет. Если норма процента равна $j_{12} = 6\%$, найти доли продавца и покупателя в стоимости дома в конце шестого года после сделки.

РЕШЕНИЕ Так как амортизируется 70 млн рб

$$70 = R\ a_{\overline{180}|1/2\%} \qquad \text{или} \quad R = 70 /\ a_{\overline{180}|1/2\%} = 0{,}5907\ ,$$

которые ежемесячно выплачиваются. Неоплаченная часть стоимости дома в конце 6 лет может быть найдена или методом перспективы или ретроспективным методом, но метод перспектив в этом случае будет проще. Представим выплаты за последние 9 лет на временной диаграмме



Приравнивание стоимостей дает

$$P = R\ a_{\overline{180}|1/2\%} = 0{,}5907 \times 83{,}29342446 = 49{,}2014 \text{ млн рб},$$

которые являются неоплаченной частью стоимости дома, или долей продавца в конце 6 лет. Так как первоначальная цена дома была 100 млн рб, доля покупателя равна

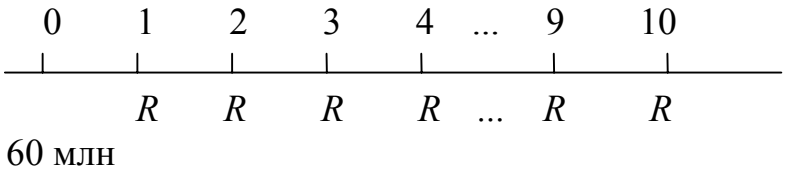
$$100 - 49{,}2014 = 50{,}7986 \text{ млн рб}.$$

ПРИМЕР 4 Петров купил участок земли стоимостью 100 млн рб, заплатив 40 млн рб наличными и остальное ежемесячными взносами по 0,5 млн рб до полной выплаты стоимости участка. Если норма процента равна 5% эффективных, найти долю Петрова в конце десятого года.

РЕШЕНИЕ Так как число платежей неизвестно, удобней использовать ретроспективный метод. Платежи по 0&5 млн рб образуют общий аннуитет, поэтому мы сначала найдем эквивалентный годовой аннуитет. Таким образом, мы имеем

$$R = W/\ s_{\overline{m/p}|i} = 0{,}5 /\ s_{\overline{1/2}|5\%} =$$
$$= 0{,}5 \times 12{,}27257753 = 6{,}136289 \text{ млн рб},$$

как годовые платежи, эквивалентные ежемесячным по 0,5 млн рб. Представим платежи для первых 10 лет на диаграмме



На диаграмме R является годовым платежом и P является неоплаченной частью стоимости участка в конце 10 лет и заменяет все последующие платежи. Выписывая уравнение эквивалентности на дату сравнения в конце 10 лет, получим

$$P + R\ s_{\overline{10}|5\%} = 60 \times (1{,}05)^{10},$$

откуда

$$P = 60 \times 1{,}62889463 - 6{,}136289 \times 12{,}57789254 = 20{,}5521$$

Тогда доля Петрова

$$\text{Доля покупателя} = 100 - 20{,}5521 = 79{,}4479 \text{ млн рб}.$$

6.3 ПОКУПКА В РАССРОЧКУ

При покупке товара в рассрочку покупатель, по существу, реализует амортизацию долга, вызванного приобретением товара. Очевидно, что платежи рассрочки эквивалентны цене товара при некоторой норме процента. Однако, принимаемая норма процента редко когда обеспечивает эквивалентность обоих возможностей (оплата наличными или путем рассрочки). В самом деле, способ, при помощи которого определяются платежи, обычно неявно использует норму процента. Имеется два традиционно используемых способа определения платежей так, чтобы норма процента не проявлялась. Один из них называется **план завышения,** другой - **план текущей платы.**

При использовании плана завышения торговец устанавливает цену товара для продажи в рассрочку и делает скидку с этой установленной цены, если товар покупается за наличные деньги. Например, набор мебели продается за 300 млн рб наличных денег. Торговец устанавливает цену

360 млн рб, допуская продажу за 120 млн рб наличными и выплату остатка (240 млн рб) взносами по 20 млн рб в месяц в течение года. Если покупатель желает купить за наличные, ему дается скидка 16 2/3 % от установленной цены. Таким образом, ему делается скидка 60 млн рб и он заплатит за мебель 300 млн рб. Следует заметить, что завышение равно 60/300 = 20 % от цены продажи за наличные, в то время как скидка равна 60/360 = 16 2/3 % от установленной цены.

Когда используется план текущей платы, дается цена товара за наличные. Платежи взносов определяются следующим образом : обычно требуется умеренная оплата наличными, после вычета которой текущая выплата добавляется к неоплаченному остатку для получения той суммы, которую необходимо выплатить взносами рассрочки. Текущая плата обычно берется как определенный процент от неоплаченного остатка. Сумма, полученная добавлением текущей цены к неоплаченному остатку, делится на определенное число взносов обычно равной величины.

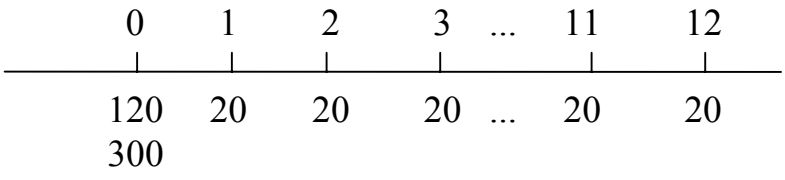
При использовании одного из этих планов подлинная норма процента определяется через уравнение эквивалентности, устанавливающее, что цена продажи за наличные равна взносу наличными плюс текущая стоимость аннуитета, который образуют платежи рассрочки. То есть

$$\text{Наличная цена} = \text{Наличный взнос} + R\ a_{\overline{n}|i}\ .$$

Это уравнение разрешается относительно $a_{\overline{n}|i}$ и норма процента определятся путем решения соответствующего нелинейного уравнения или приближенно линейной интерполяцией с использованием таблиц.

ПРИМЕР 1 Найти норму процента j_{12} выплачиваемого покупателем, который использует описанный выше план рассрочки.

РЕШЕНИЕ Представим на временной диаграмме данные, характеризующие две рассмотренные возможности



Пусть i будет месячной нормой процента, которая обеспечивает эквивалентность этих двух возможностей. Уравнение эквивалентности с днем продажи в качестве даты сравнения дает

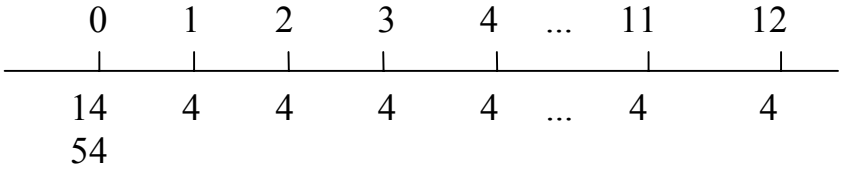
$$300 = 120 + 20\, a_{\overline{12}|i} \quad \text{и} \quad a_{\overline{12}|i} = 9{,}00 .$$

Решение уравнения такого типа ранее уже рассматривалось, поэтому мы приведем лишь результат $j_{12} = 56{,}79\ \%$.

ПРИМЕР 2 Товары стоимостью 54 млн рб наличными покупаются по плану текущей платы: требуется наличный взнос 14 млн рб, после выплаты которого к стоимости добавляется 20% неоплаченного остатка и эта сумма делится на 12 равных ежемесячных взносов. Какую номинальную норму процента при m = 12 предусматривает план рассрочки?

РЕШЕНИЕ После выплаты наличного взноса 14 млн рб остается неоплаченными 40 млн рб. Добавка текущей платы равна 20% от 40 млн рб или 8 млн рб. Таким образом, 48 млн рб должны быть выплачены взносами рассрочки, так что каждый ежемесячный платеж равен 4 млн рб.

Две возможности приобретения товара на временной диаграмме изображаются следующим образом



Пусть i будет месячной нормой процента, которая делает эти две возможности эквивалентными. Выпишем уравнение эквивалентности с днем продажи в качестве даты сравнения

$$54 = 14 + 4\, a_{\overline{12}|i} \quad \text{или} \quad a_{\overline{12}|i} = 10{,}00 .$$

Решение этого уравнения дает результат $j_{12} = 35{,}08\ \%$.

Существует много вариаций описанных планов рассрочки. Например, по одному из рекламных объявлений товары почтой продаются согласно следующему плану платежей

Таблица платежей

(К заявке прилагается не менее 10% от стоимости товара)

Неоплаченный остаток (тыс рб)	Добавление к платежу	Ежемесячный платеж
400,1 - 450	40	50
450,1 - 500	45	50
500,1 - 550	50	50
550,1 - 600	55	60
600,1 - 650	60	60

6.4 ПОГАСИТЕЛЬНЫЕ ФОНДЫ

Простейшей формой погасительного фонда является сберегательный фонд, в котором платежи делаются регулярно одинаковыми вкладами. Он создается для накопления определенной суммы денег на определенную дату. Таким образом, он отличается от обычного сберегательного фонда только тем, что он создается для накопления определенной суммы на определенную дату и что в фонд делаются регулярные платежи. Погасительные фонды устанавливаются с определенной датой окончания так, чтобы выплатить долг, который приходится на некоторую дату в будущем; чтобы купить машину для замены старой, когда она износится; или чтобы возместить сумму, инвестированную в рудник, когда его шахта минералов истощилась. Расписание, показывающее как такой фонд накапливал необходимую сумму, рассмотрим на примере.

ПРИМЕР Сумма 500 млн рб понадобится через пять лет. Если деньги могут быть инвестированы, чтобы накапливать 5% эффективно, найти сумму денег, которая должна вкладываться в фонд в конце каждого года, чтобы накопить необходимую сумму, и составить расписание, показывающее рост фонда.

РЕШЕНИЕ 500 млн рб является итоговой суммой обыкновенного аннуитета с пятью годовыми платежами. Поэтому

$$500 = R\ s_{\overline{5}|5\%} \qquad \text{и} \qquad R = 500 / s_{\overline{5}|5\%} = 90{,}487 \text{ млн рб.}$$

Теперь сконструируем расписание. В конце первого года делается вклад 90,408 млн рб. В конце второго года делается такой же вклад. В то же самое время, однако, первый вклад накапливает проценты в течение этого года, следовательно, сумма фонда увеличится на

$$90{,}487 \times 0{,}05 = 4{,}524 \text{ млн рб.}$$

Таким образом, полное увеличение в конце второго года

$$90{,}487 + 4{,}524 = 95{,}011 \text{ млн рб}$$

и фонд будет содержать 185,498 млн рб. Эта процедура повторяется и результаты сводятся в таблицу.

Конец года	Вклад	Процент фонда	Увеличение фонда	Сумма фонда
1	90,487	0	90,487	90,487
2	90,487	4,524	95,011	185,498
3	90,487	9,275	99,762	285,260
4	90,487	14,263	104,750	390,010
5	90,487	19,501	109,988	499,998
Всего	452,435	47,563	499,998	

Суммирование по столбцам делается только в целях проверки. Точность окончательного результата повысилась бы, если бы вклады делались не с точностью до одной тысячи рублей, а с точностью до одного рубля.

Иногда необходимо знать, какая сумма будет в фонде на некоторую определенную дату. Обращаясь к таблице, мы, конечно, найдем ответ, вместе с тем следует упомянут, что этот результат получился бы также как сумма аннуитета, периодические платежи которого совпадают с вкладами погасительного фонда, и сроком которого является желаемая дата. Например, в рассмотренном примере сумма фонда в конце третьего года равна $90{,}487\ s_{\overline{3}|5\%} = 285{,}260$ млн рб.

6.5 МЕТОД ПОГАСИТЕЛЬНОГО ФОНДА ПОГАШЕНИЯ ДОЛГА

Метод амортизации при погашении долга часто создает проблему для заимодавца денег. Его основная сумма возмещается ему малыми суммами через короткие интервалы. Так как не всегда удобно выгодно инвестировать малые суммы, ему очень хотелось бы иметь некоторые из возмещенных сумм незанятыми в течение некоторого времени до того, как они смогут быть реинвестированы. По этой причине заимодавцы иногда требуют, чтобы вся основная сумма возмещалась целиком в конце срока ссуды. Обычно проценты не накапливаются, а выплачиваются в конце каждого периода начисления. Например, банк может ссудить 100 млн рб на 5 лет с нормой процентов 6% эффективно и требует, чтобы они были возмещены следующим образом % в конце каждого года должны быть выплачены 6 млн рб процентов, а в конце пятого года дополнительно к процентам, полагающимся к этому сроку, должна быть выплачена вся основная сумма 100 млн рб.

Когда деньги занимаются только что описанным способом, заемщик обычно готовится к окончательной ликвидации долга, образовывая погасительный фонд. Обычно платежи погасительного фонда делаются в те же самые дни, в какие выплачиваются проценты за занятую сумму долга. Когда делается таким образом, сумма этих двух платежей называется **периодическими издержками долга.**

ПРИМЕР Иванов занимает 100 млн рб при 6% эффективных. Иванов будет выплачивать проценты в конце каждого года и создаст погасительный фонд для возмещения основной суммы. Какие необходимы годовые платежи, если фонд накапливает проценты 4% эффективно ? Какими являются годовые издержки фонда ? Какую сумму будет содержать погасительный фонд в конце шестого года ?

РЕШЕНИЕ Так как погасительный фонд через десять лет должен образовать итоговую сумму 100 млн рб при 4% годовых

$$100 = R\ s_{\overline{10}|4\%} \qquad \text{и} \qquad R = 100 /\ s_{\overline{10}|4\%} = 8{,}3291 \text{ млн рб.}$$

Проценты за долг в конце каждого года будут равны 6% от 100 млн рб, то есть 6 млн рб. Полные годовые издержки долга, следовательно, равны

$$E = 8{,}3291 + 6 = 14{,}3291 \text{ млн рб.}$$

В конце 6-го года фонд будет содержать сумму обыкновенного аннуитета шести платежей, накапливаемых при 4% годовых.

$$S = 8{,}3291\ s_{\overline{6}|4\%} = 55{,}2467 \text{ млн рб.}$$

6.6 СРАВНЕНИЕ ПОГАСИТЕЛЬНЫХ ФОНДОВ И АМОРТИЗАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ПОГАШЕНИЯ ДОЛГА

Теперь очевидно, что опытный заимодавец денег обычно будет устанавливать немного более низкую норму процента, когда используется метод погасительного фонда для погашения долга, чем он бы установил, если бы долг амортизировался. Также ясно, что заемщик хотел бы использовать план, который бы обеспечивал ему наименьшие издержки. Так как обычно имеется несколько различных возможностей занять деньги, заемщику важно определить, какая из возможностей займа будет наиболее дешевой. Метод определения наиболее подходящей возможности займа состоит просто в вычислении периодических издержек долга при различных вариантах.

ПРИМЕР Петров хочет занять 100 млн рб на 10 лет. Национальный банк ссужает деньги за 6% эффективных и позволяет амортизировать долг годовыми платежами. Государственный банк ссужает деньги за 5% эффективных, предусматривая ежегодную выплату только процентов и возмещение основной суммы в конце 10-летнего срока. Если используется вторая возможность, Петров может установить погасительный фонд, который накапливает 3% эффективно. Какой будет экономия в каждом году при выборе наиболее подходящей возможности ?

РЕШЕНИЕ Если деньги заняты в Национальном банке, 100 млн рб являются настоящей стоимостью аннуитета из 10 платежей. Если R равно необходимому годовому платежу, то

$$100 = R\ a_{\overline{10}|6\%} \quad \text{и} \quad R = 100 / a_{\overline{10}|6\%} = 13{,}5868 \text{ млн рб.}$$

Годовые издержки долга для Петрова в этом случае одинаковы и равны 13,5868 млн рб. Если используется Государственный банк, Петров должен платить 5 млн рб процентов (5% от 100 млн рб) и должен также вносить годовой вклад в погасительный фонд с целью погашения

основной суммы долга. Для определения вклада в погасительный фонд мы имеем

$$100 = R\ s_{\overline{10}|3\%} \qquad \text{и} \qquad R = 100 /\ s_{\overline{10}|3\%} = 8{,}7231 \text{ млн рб.}$$

Отсюда, годовые издержки второго плана будут

$$E = 5 + 8{,}7231 = 13{,}7231 \text{ млн рб.}$$

Сравнивая годовые издержки для двух выриантов, мы видим, что Петров сэкономит 13,7231 - 13,5868 = 0,1363 млн рб ежегодно, взяв долг в Национальном банке и амортизируя его.

6.7 АМОРТИЗАЦИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩАЯ РАЗЛИЧНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

Для малых ссуд законодательство многих стран предусматривает возможность использования двух или более норм процента в зависимости от размера ссуды. Например, компания может установить 2% в месяц на неоплаченную основную сумму 1 млн рб или меньше, и только 1% в месяц на превышение неоплаченной основной суммы над 1 млн рб. Таким образом, если в этих условиях было занято 2,5 млн рб, две нормы процента использовались бы пока неоплаченный остаток не был сведен до 1 млн рб или меньше, после чего использовалась бы только одна норма процента. Подобным образом можно было бы использовать три или даже более норм процента.

Будем использовать следующие обозначения

A - первоначальная полная сумма ссуды.
A_1 - сумма долга, которая амортизируется первой.
A_2 - сумма долга, которая амортизируется второй.
i_1 - норма процента, выплачиваемого за A_1 .
i_2 - норма процента, выплачиваемого за A_2 .
$I_1 = A_1 i_1$, $I_2 = A_2 i_2$ и $I = I_1 + I_2$.
n - полное число платежей. $n = n_1 + n_2$.
n_1 - число платежей, требуемых для амортизации A_1 .
n_2 - число дополнительных платежей, требуемых для амортизации A_2 .
R - периодические платежи, которые погашают долг.

P_t - неоплаченная основная сумма сразу же после t-го платежа .

Сначала получим формулы для неоплаченной основной суммы для произвольного момента времени t . В течение первой стадии амортизации, для $t \le n_1$, платежом R выплачивается процент I_2 за A_2 и амортизируется A_1 (или немного более, чем A_1) при i_1. При ретроспективном методе неоплаченная часть основной суммы будет, следовательно, равна

$$P = A_2 + A_1(1 + i_1)^t - (R - I_2)\ s_{\overline{t}|i} \ .$$

Однако, так как $(1 + i)^t = 1 + i\ s_{\overline{t}|i}$, предыдущее равенство может быть написано в более простом виде

$$P_t = A - (R - I)\ s_{\overline{t}|i_1} \quad t = 1, 2, \ldots, n \ .$$

После того, как n_1 платежей сделаны, используется только одна норма процента и неоплаченная часть основной суммы по методу перспективы равна

$$P_t = R\, a_{\overline{n-t}|i_2} \qquad t = n_1 , n_1 + 1 , \ldots$$

Так как обе формулы имеют место при $t = n_1$, они могут быть приравнены друг другу при этой дате и равенство может быть разрешено относительно R , что даст

$$R = \frac{\left(A + I s_{\overline{n_1}|i_1} \right)}{\left(a_{\overline{n_2}|i_2} + s_{\overline{n_1}|i_1} \right)} \ . \qquad (5)$$

Для того, чтобы определить n_1 и n_2 , мы заметим, что так как R должно быть достаточно большим, чтобы выплатить I_2 и амортизировать A_1 при i_1 в n_1 периодах

$$R \ge I_2 + A_1 / a_{\overline{n_1}|i_1} \ .$$

Более того, так как первые n_1 платежей сокращают долг до A_2 или менее, R не будет превышать платежи, необходимые для амортизации A_2 при i_2 в n_2 периодах. Поэтому

$$R \le A_2 / a_{\overline{n_2}|i_2} = I_2 + A_2 / s_{\overline{n_2}|i_2}$$

по одному из тождеств для функций составных платежей. Объединяя оба неравенства, получим неравенство

$$A_1 s_{\overline{n_2}|i_2} \le A_2 a_{\overline{n_1}|i_1} \tag{6}$$

в котором n_1 является наименьшим целым числом, которое удовлетворяет неравенству (6). Для того, чтобы избежать процедуры выбора численных значений n_1 и n_2 в неравенстве (6), мы можем сначала оценить их следующим образом : так как $a_{\overline{n}|i} \le n \le s_{\overline{n}|i}$, неравенство (6) может быть заменено более слабым неравенством

$$A_1 n_2 < A_2 n_1 ,$$

которое легко приводит к неравенствам

$$n_1 > nA_1/A \quad \text{и} \quad n_2 < nA_2/A . \tag{7}$$

На практике, n_1 и n_2 оцениваются из (7), затем определяются точно из (6), после чего R вычисляется из равенства (5).

ПРИМЕР 1 Сберегательный банк установил процентную ставку 3% в месяц на невыплаченную основную сумму 1 млн рб или меньше и 1% в месяц на превышение невыплаченной основной суммы над 1 млн рб. Если 2,5 млн рб заимствованы в этом банке и возмещаются шестью ежемесячными одинаковыми платежами, найти величину платежа и составить расписание амортизации.

РЕШЕНИЕ Здесь $A_1 = 1{,}5$, $A_2 = 1$, $A = 2{,}5$, $i_1 = 1\%$, i $= 3\%$ и $n = 6$. Сначала мы используем неравенство (7) для оценки n_1 и n_2

$$n_1 > nA_1/A = (6 \times 1{,}5)/2{,}5 = 3{,}6 \quad \text{и} \quad n_2 = n - n_1 < 2{,}4 .$$

Далее мы проверим удовлетворяют ли $n_1 = 4$ и $n_2 = 2$ неравенству (6) и поскольку это выполняется, считаем эти значения зафиксированными. Теперь вычисляем R из (5).

$$R = \frac{\left(A + Is_{\overline{n_1}|i_1} \right)}{\left(a_{\overline{n_2}|i_2} + s_{\overline{n_1}|i_1} \right)} = \frac{\left(2{,}5 + 0{,}045 s_{\overline{4}|1\%} \right)}{\left(a_{\overline{2}|3\%} + s_{\overline{4}|1\%} \right)} =$$

$$= 0{,}4491 \text{ млн рб} .$$

В заключение составляем расписание амортизации

Конец периода	Процент (3%)	Процент (1%)	Периодич. платеж	Выплаченная осн. сумма	Невыплаченная осн. сумма
0					2,5000
1	3,00	1,50	0,4491	0,4041	2,0959
2	3,00	1,10	0,4491	0,4081	1,6878
3	3,00	0,69	0,4491	0,4122	1,2756
4	3,00	0,28	0,4491	0,4163	0,8593
5	2,58		0,4491	0,4233	0,4360
6	1,31		0,4491	0,4360	0
Всего	15,89	3,57	2,6946	2,5000	

Для того чтобы сравнить планы погашения долга, использующие несколько различных норм, с планами, использующими только одну норму, или другими планами, удобно определить **норму доходности** плана. По определению она равна норме процента, которая соответствовала простому аннуитету с теми же самыми платежами, сроком и настоящей стоимостью. Она находится путем решения уравнения $A = R\, a_{\overline{n}|i}$ относительно i, как это рассматривалось ранее в параграфе 4.9 .

ПРИМЕР 2 Найти норму доходности амортизационного плана примера 1.

РЕШЕНИЕ Пусть i будет нормой доходности, тогда

$$2{,}5 = 0{,}4491\, a_{\overline{6}|i} \qquad a_{\overline{6}|i} = 2{,}5 / 0{,}4491 = 5{,}5667$$

и с помощью интерполяции находим $i = 2{,}185$ % в месяц .

В планах с несколькими процентными ставками i_1 почти всегда меньше, чем i_2 и это будет предполагаться в будущем. Норма доходности будет всегда принимать значения между используемыми нормами и можно показать, что она больше, чем I/A .

Когда план использует три ставки, наши обозначения дополнятся величинами A_3 , i_3 и n_3 , смысл которых очевиден. Как и до сих пор сначала амортизируется A_1 , затем A_2 и A_3 в последнюю очередь. Невыплаченная часть основной суммы в течение первой фазы будет равна

$$P_t = A_2 + A_3 + A_1(1 + i_1)^t - (R - I_2 - I_3)\ s_{\overline{t}|i_1} \quad ,$$

что может быть упрощено, как в случае двух ставок,

$$P_t = A - \left(R - I\right)s_{\overline{t}|i_1} \qquad t = 1, 2, \ldots , n$$

В течение первой фазы обычно амортизируется больше, чем A_1 , так что P_{n_1} обычно меньше, чем $A_2 + A_3$. Если мы введем величину $A_2^* = P_{n_1} - A_3$, которая выражается явно в виде $A_2^* = A_1 + A_2 - \left(R - I\right)s_{\overline{n_1}|i_1}$, тогда оставшаяся задача (после n_1 платежей) является задачей с двумя нормами, рассматривающей A_2^* и A_3 при нормах i_2 и i_3 с n_2 и n_3 платежами. Поэтому неоплаченная часть основной суммы в течение второй фазы может быть представлена в виде

$$P_t = A_2^* + A_3 - \left(R - I^*\right)s_{\overline{t-n_1}|i_2} \ , \quad \text{где} \quad I^* = A_2^*\, i_2 + I_3$$

для $t = n_1+1$, $n_2+2, \ldots , n_1+n_2$.

В течение заключительной фазы, как и в случае двух норм,

$$P_t = R\, a_{\overline{n-t}|i_3} \qquad t = n_1+n_2 , \ldots , n - 1.$$

Так как последние два равенства справедливы для $t = n_1 + n_2$, приравнивая их правые части, получим уравнение для определения R . В полученное равенство

$$R\, a_{\overline{n_3}|i_3} = A_2^{*} + A_3 - \left(R - I^{*}\right) s_{\overline{n_2}|i_2}$$

мы подставим для A_2^{*} и I^{*} их явные значения через исходные обозначения. Не выписывая получившееся довольно громоздкое выражение, отметим, что оно может быть упрощено путем использования тождеств для функций составных платежей и позволит выразить R в следующем виде

$$R = \frac{A + A_3\left(i_3 - i_2\right) a_{\overline{n_2}|i_2} + I s_{\overline{n_1}|i_1}}{a_{\overline{n_3}|i_3}\left(1 + i_2\right)^{-n_2} + a_{\overline{n_2}|i_2} + s_{\overline{n_1}|i_1}} \quad . \tag{8}$$

Для того, чтобы определить n_1, n_2 и n_3, план с тремя нормами сравнивается с различными планами с двумя нормами с теми же самыми суммой и сроком. Вот эти планы :

1. Амортизировать $(A_1 + A_2)$ и A_3 при нормах r_1 и i_3 с числом платежей $(n_1 + n_2)$ и n_3, где r_1 лежит между i_1 и i_2.
2. Амортизировать A_1 и $(A_2 + A_3)$ при i_1 и r_2 с числом платежей n_1 и $(n_2 + n_3)$, где r_2 лежит между i_2 и i_3.

Неравенства (6) и (7) применяются к планам с двумя нормами и из (7) просто следует, что

$$n_1 > nA_1/A \quad \text{и} \quad n_3 < nA_3/A\,, \tag{9}$$

в то же время использование неравенства (6) дает

$$(A_1 + A_2)\, s_{\overline{n_3}|i_3} \le A_3\, a_{\overline{n_1+n_2}|r_1} \qquad \text{где} \quad i_1 < r_1 < i_2 \tag{10a}$$

$$A_1\, s_{\overline{n_2+n_3}|r_2} \le (A_2 + A_3)\, a_{\overline{n_1}|i_1} \qquad \text{где} \quad i_2 < r_2 < i_3 \tag{10b}$$

Как эти неравенства могут быть использованы для определения n_1, n_2 и n_3 покажем на примере.

ПРИМЕР 3 Банк требует 3% в месяц за неоплаченную часть основной суммы 2 млн рб или меньше, 2% в месяц за превышение 2 млн рб, но не более 3 млн рб, и 1% в месяц за всю сумму выше 3 млн рб. Если в этом банке берется заем 4 млн рб и возмещается месячными платежами в

течение года, найти величину платежа и составить расписание амортизации. Найти норму доходности.

РЕШЕНИЕ Здесь $A_1 = 1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 2$, $i_1 = 1\%$, $i_2 = 2\%$, $i_3 = 3\%$, $n = 12$. Использование неравенства (9) дает

$$n_1 > (12 \times 1)/4 = 3 \quad \text{и} \quad n_3 < (12 \times 2)/4 = 6$$

Поэтому n_1 равно 4 или более и n_3 равно 5 или менее. Далее, используя неравенства (10a) и (10b) мы получим

$$2\, s_{\overline{n_3}|3\%} \le 2\, a_{\overline{n_1+n_2}|r_1} \quad \text{где} \quad 1\% < r_1 < 2\%$$

$$1\, s_{\overline{n_2+n_3}|r_2} \le 3\, a_{\overline{n_1}|1\%} \quad \text{где} \quad 2\% < r_2 < 3\%$$

Используя таблицы можно проверить, что $n_1 + n_2 = 7$ является наименьшим целым, которое удовлетворяет первому неравенству для любого значения r_1 между 1% и 2%. Аналогично из второго неравенства мы найдем, что $n_1 = 4$. Таким образом, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$. Значение R теперь находится путем использования формулы (8)

$$R = \frac{4 + 0{,}02 a_{\overline{3}|2\%} + 0{,}09 s_{\overline{4}|1\%}}{a_{\overline{5}|3\%} (1{,}02)^{-3} + a_{\overline{3}|2\%} + s_{\overline{4}|1\%}} = 0{,}3928.$$

Расписание амортизации представляется таблицей

Конец периода	Процент 3%	Процент 2%	Процент 1%	Платеж	Основная сумма выплач.	Основная сумма невыплач.
0						4,0
1	0,06	0,02	0,01	0,3928	0,3028	3,6972
2	0,06	0,02	0,007	0,3928	0,3058	3,3914
3	0,06	0,02	0,0039	0,3928	0,3089	3,0825
4	0,06	0,02	0,0008	0,3928	0,3120	2,7705
5	0,06	0,0154		0,3928	0,3174	2,4531
6	0,06	0,0091		0,3928	0,3237	2,1294
7	0,06	0,0026		0,3928	0,3302	1,7992
8	0,054			0,3928	0,3388	1,4604
9	0,0438			0,3928	0,3490	1,1114
10	0,0333			0,3928	0,3595	0,7519
11	0,0226			0,3928	0,3702	0,3817
12	0,0115			0,3928	0,3813	0
Всего	0,5852	0,1071	0,0217	4,7136	3,9996	

Несовпадение итогового результата с 4,0 объясняется тем, что платежи определялись с точностью до 100 рб. Вычисления с точностью до 1 рб дали бы более точный результат.

Для вычисления нормы доходности мы имеем

$$0{,}3928\ a_{\overline{12}|i} = 4\,, \qquad a_{\overline{12}|i} = 4/0{,}3928 = 10{,}1833$$

и путем интерполяции получим $i = 2.62\ \%$ в месяц.

В большинстве случаев неравенства (10a) и (10b) будут единственным образом определять n_1, n_2 и n_3. Однако, возможно, что для получения единственного решения нам необходимо будет более точно знать r_1 и r_2. Имеется простой способ определения диапазона значений этих норм. Если удовлетворительная аппроксимация R уже имеется, могут быть использованы формулы для неоплаченной части основной суммы, чтобы аппроксимировать n путем использования того факта, что A_1 или более амортизируется в течение первых n_1 периодов, а A_3 или менее амортизируется в течение последних n_3 периодов. Значения n_1, n_2 и n_3, полученные таким образом, затем используются для вычисления нового значения R и процедура повторяется. Когда новое R дает те же самые значения для n, которые уже были использованы при вычислении, процесс вычисления завершается. Очевидно, что для выполнения таких расчетов желательно иметь вычислительные средства, а не только таблицы.

ПРИМЕР 4 Пусть $A_1 = 10$, $A_2 = 5$, $A_3 = 5$, $i_1 = 1\%$, $i_2 = 3\%$, $i_3 = 8\%$, $n = 50$. Найти R.

РЕШЕНИЕ Из неравенства (9) мы имеем

$$n_1 > nA_1/A = (50 \times 10)/20 = 25$$
$$n_3 < nA_3/A = (50 \times 5)/20 = 12{,}5$$

При вычислении R начнем с значений $n_1 = 26$, $n_2 = 12$ и $n_3 = 12$, которые выбраны вблизи границ, устанавливаемых неравенством (9). Мы начинаем с наихудших оценок, чтобы показать несущественность начального выбора. Производя необходимые вычисления, получим $R = 0{,}9311$ в качестве первого приближения. Для получения уточненных значений n_1, n_2 и n_3 мы используем приближенное значение R в

формулах неоплаченной части основной суммы. Возмещенная в течение первых n_1 периодов часть основной суммы равна

$$(R - I)s_{\overline{n_1}|i_1} = 0{,}2811\, s_{\overline{n_1}|1\%} \geq 10\ ^\wedge$$

что дает $s_{\overline{n_1}|1\%} \geq 35{,}5775$ и это требует, чтобы $n_1 \geq 31$. Основная сумма, возмещенная в течение заключительных n_3 периодов равна

$$R\, a_{\overline{n_3}|i_3} = 0{,}9311\, a_{\overline{n_3}|8\%} \leq 5\ ,$$

откуда $a_{\overline{n_3}|8\%} \leq 5{,}3700$ и это требует, чтобы $n_3 \leq 7$. Теперь пересчитываем R , используя значения $n_1 = 31$, $n_2 = 12$ и $n_3 = 7$. Новое приближение R равно 0,9243. Значения $s_{\overline{n_1}|1\%}$ и $a_{\overline{n_3}|8\%}$ пересчитываются снова с учетом этого уточненного значения R . Это дает

$$s_{\overline{n_1}|1\%} \geq 36{,}4564 \quad \text{и} \quad a_{\overline{n_3}|8\%} \leq 5{,}4095\ ,$$

что требует, чтобы $n_1 \geq 32$ и $n_3 \leq 7$. Опять вычисляем R на этот раз при $n_1 = 31$, $n_2 = 11$ и $n_3 = 7$. Новое значение $R = 0{,}9243$ оказывается таким же, как и на предыдущем этапе вычислений. Поэтому величину R можно считать вычисленной. В заключение заметим, что более удачный выбор исходных значений может уменьшить число итераций для достижения результата. Например, в нашем случае при начальном выборе $n_1 = 30$, $n_2 = 10$, $n_3 = 10$ для достижения результата потребовалось бы на одну итерацию меньше. На основе полученных значений параметров процесса амортизации может быть построена таблица амортизационного расписания (в этом случае она будет громоздкой, так как должна предусматривать 50 периодов начисления процентов).

После того, как некоторое количество платежей уже сделано, может возникнуть вопрос : какой является остаточная стоимость сделки ? Заемщик может ликвидировать долг в любой день путем выплаты неоплаченной части основной суммы плюс, быть может, небольшую сумму в связи с прекращением сделки. Однако, когда амортизационный контракт продается одним инвестором другому, цена может

значительно отличаться от той, которая указана в амортизационном расписании как неоплаченная часть основной суммы. Например, предположим, что контракт, рассмотренный нами как амортизация долга в примере 3, продается сразу же после четвертого платежа. Неоплаченная часть основной суммы в этот момент равна 2,7705 млн рб. Если контракт будет продан точно за эту цену, сделка будет такой же самой, как будто бы покупатель ссужает продавцу 2,7705 млн рб при точно таких же условиях, какие установлены в примере 3, то есть 3% в месяц на первые 2 млн рб и 2% в месяц на остающиеся 0,7705 млн рб, которые должны быть погашены 8-ми месячными платежами. Можно показать, что норма доходности для восьми месячного контракта была бы 2,85 % в месяц, в то время как для первых 4 месяцев она была равна 2,21 % в месяц. Так как первоначальный собственник, возможно, имел некоторые издержки при получении контракта, он в праве думать, что если он продаст контракт за цену, указанную в расписании как неоплаченная часть основной суммы, покупатель оказался бы в лучшем положении, чем продавец. По этой и другим причинам контракты этого типа обычно продаются по цене, которая будет предусматривать некоторую компенсацию покупателю по определенной норме.

ПРИМЕР 5 Какой должна бы быть цена контракта для примера 3 сразу же после четвертого платежа для того, чтобы она могла дать покупателю а) 2% в месяц, b) 1,5 % в месяц ?

РЕШЕНИЕ а) Покупатель получает аннуитет из 8 месячных платежей по 0,3928. Для получения 2% в месяц цена должна быть

$$A = R\, a_{\overline{n}|i} = 0{,}3928\ a_{\overline{8}|2\%} = 2{,}8774 \text{ млн рб}.$$

b) Для получения 1,5 % в месяц цена должна быть

$$A = 0{,}3928\ a_{\overline{8}|1{,}5\%} = 2{,}9415 \text{ млн рб}.$$

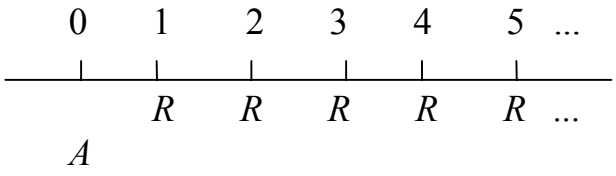
Глава 7 ВЕЧНАЯ РЕНТА

7.1 ОБЫКНОВЕННАЯ ПРОСТАЯ И ОБЩАЯ ВЕЧНЫЕ РЕНТЫ

Вечная рента - это аннуитет, платежи которого продолжаются в течение неограниченного срока. Имеется много примеров вечных рент: возможно, простейшим будет платежи процентов от любой суммы денег, инвестированной в производство. Конкретизирующие определения, такие как простой, общий, обыкновенный, отсроченный и т.д., при применении к вечным рентам имеют тот же самый смысл, который имели эти термины при описании аннуитетов. Таким образом, обыкновенная простая вечная рента является серией периодических платежей, выплачиваемых в концах последовательных периодов начисления процентов, которая должна продолжаться вечно.

Не трудно сразу сообразить, что итоговая сумма вечной ренты не имеет смысла, так как платежи продолжаются неограниченно долго. Однако, настоящая стоимость вечной ренты любого типа является конечной суммой, которая может быть быстро найдена, как только будет известна необходимая информация. Для краткости в дальнейшем изложении мы будем опускать в названии вечной ренты слово вечная, понимая всюду под термином **рента** вечную ренту.

Пусть A будет настоящей стоимостью обыкновенной простой ренты, i будет нормой процента за период, при которой инвестируется A, и пусть R будет платежом ренты. Тогда A должно быть эквивалентна серии платежей R, показанной на временной диаграмме



Так как A будет порождать платежи процентов Ai в конце каждого периода начисления и будет продолжать это делать с нормой i пока будет оставаться инвестированной, из этого следует, что $R = Ai$, или

$$A = R / i . \qquad (1)$$

Ясно, что если две из трех величин A , R и i известны, третья может быть найдена из (1).

Выражение (1) может быть получено также как предельный случай аннуитета, когда n неограниченно возрастает. Для ограниченных n мы имели равенство

$$A = R\, a_{\overline{n}|i} = R\,(1 - (1 + i)^{-n})/i\ .$$

Для любых положительных i слагаемое $(1+i)^{-n} = 1/(1+i)^{n}$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает и выражение для текущей стоимости аннуитета сводится к (1).

ПРИМЕР 1 Сколько денег потребуется, чтобы установить постоянную премию за лучшую научную работу по 7,5 млн рб в конце каждого года, если инвестированные деньги дают 3% эффективно ?

РЕШЕНИЕ Ясно, что платежи будут образовывать обыкновенную простую ренту и мы имеем $R = 7{,}5$ и $i = 0{,}03$. Тогда

$$A = R/i = 7{,}5 / 0{,}03 = 250 \text{ млн рб}\ .$$

Часто, как и в случае с аннуитетами, период платежа отличается от периода начисления процентов. Когда это случается, рента называется **общей рентой.** Ее анализ, по существу, проводится так же, как и в случае с общими аннуитетами. Общая рента преобразуется в эквивалентную
простую ренту по тем же самым формулам, которые использовались в случае аннуитетов. Формула

$$R = W / s_{\overline{m/p}|i}\ , \qquad (2)$$

которая была получена в параграфе 5.2, не зависит от числа рассматриваемых периодов начисления процентов и поэтому так же справедлива для рент как и для аннуитетов. Следовательно, обыкновенная общая рента может быть преобразована в простую ренту с помощью (2), после чего (1) используется для определения текущей стоимости.

ПРИМЕР 2 Для оплаты обслуживания железнодорожного переезда требуется 1 млн рб в конце каждого месяца. Какую сумму следует

инвестировать железнодорожной компании, чтобы на получаемые проценты поддерживать обслуживание переезда? Деньги стоят 3% эффективно.

РЕШЕНИЕ 1 млн рб в конце каждого месяца образуют обыкновенную общую ренту. Железная дорога должна заплатить сумму, равную текущей стоимости этой ренты. Если R обозначает платеж эквивалентной простой ренты, тогда из (2)

$$R = 1 / s_{\overline{1/12}|3\%} = 1 \times 12{,}164119 = 12{,}164119 \text{ млн рб} .$$

Из равенства (1) следует, что

$$A = R/i = 12{,}164119 / 0{,}03 = 405{,}4706 \text{ млн рб} .$$

7.2 ПОЛАГАЮЩИЕСЯ РЕНТЫ

Когда платежи ренты поступают в начале каждого интервала платежа, рента называется **полагающейся рентой.** Так как эта ситуация может рассматриваться как комбинация немедленного платежа R (или W) и обыкновенной ренты с такими же платежами, ясно, что настоящая стоимость полагающейся ренты просто на R (или W) больше, чем дается формулами предыдущего параграфа. Поэтому настоящая стоимость простой полагающейся ренты вычисляется по формуле

$$A = R + R/i \tag{3}$$

и настоящая стоимость общей полагающейся ренты находится из

$$A = W + R/i = W + W/(i\ s_{\overline{m/p}|i}) , \tag{4}$$

как это следует из (2).

Иногда желательно выразить настоящую стоимость общей полагающейся ренты в несколько другой форме. Для этого из (4) получим выражение

$$Ai = W (i + 1/ s_{\overline{m/p}|i}) = W / a_{\overline{m/p}|i} .$$

Но из формулы (1) $R = Ai$. Поэтому общая полагающаяся рента с платежами W может быть заменена эквивалентной простой рентой с платежами R, определяемыми по формуле

$$R = W / a_{\overline{m/p}|i} \ . \qquad (5)$$

Настоящая стоимость ренты в таком случае определяется из (1). Следует иметь ввиду, что значения R, используемые в формулах (2) и (4), не являются одними и теми же. Когда R вычисляется из (2), первый платеж W не используется и поэтому $A = W + R/i$. Однако, когда R вычисляется по (5), первый платеж используется тоже и в терминах этого R мы имеем $A = R/i$.

Уравнение (5) является справедливым для преобразования общих полагающихся аннуитетов в простые аннуитеты и будет рассмотрено в последующем.

ПРИМЕР Местные власти и государство совместно содержат деревянный мост. Местные власти платят 50 млн рб каждые три года в качестве своей доли для замены моста. Если новый мост нужен сейчас и деньги стоят 5% эффективно, какую сумму могла бы заплатить местная власть за строительство моста из стали и бетона, если государство согласно заплатить затраты на все будущие замены моста.

РЕШЕНИЕ Местные власти могут позволить себе заплатить настоящую стоимость ренты (при норме $j_1 = 5\%$), образованной трехлетними платежами по 50 млн рб. Она является общей полагающейся рентой^ так как мост нужен сейчас. Величина m/p является отношением периодов начисления процентов к интервалам платежей и равна, следовательно, 3/1; $W = 50$, $i = 0{,}05$.

a) Если мы рассматриваем полагающуюся ренту как немедленный платеж 50 млн рб, за которым следует обыкновенная рента, тогда

$$R = W / s_{\overline{m/p}|i} = 50 / s_{\overline{3}|5\%} = 50 \times 0{,}31720856 = 15{,}860428 \ .$$

Текущая стоимость ренты в этом случае получается из (4)

$$A = W + R/i = 50 + 15{,}860428/0{,}05 = 367{,}2086 \text{ млн рб} \ .$$

b) Если мы используем (5) для замены полагающейся ренты на обыкновенную простую ренту, мы получим

$$R = W / a_{\overline{m/p}|i} = 50 / a_{\overline{3}|5\%} = 50 \times 0{,}36720856 = 18{,}360428$$

Настоящая стоимость ренты теперь дается равенством (1)

$$A = R/i = 18{,}360428 / 0{,}05 = 367{,}2086 \text{ млн рб} .$$

7.3 ДРУГОЙ ПОДХОД К АНАЛИЗУ ОБЩЕЙ РЕНТЫ

Когда впервые описывались общие аннуитеты, отмечалось, что они могут анализироваться путем замены данной нормы процента на эквивалентную норму, согласованную с частотой платежей, становясь, таким образом, простыми аннуитетами. Однако недостатком такого подхода был тот факт, что новая норма обычно оказывается нетабулируемой и появляются трудности в оценивании функций составных платежей аннуитета. Так как оценивание простой ренты не требует знания функций составных платежей, этот недостаток исчезает. Таким образом, другой способ анализа общих вечных рент является следующим : общая вечная рента преобразовывается в простую вечную ренту заменой данной нормы процента на эквивалентную норму, согласованную с частотой платежей. Проиллюстрируем этот подход на примерах.

ПРИМЕР 1 Решить пример 2 параграфа 7.1 путем замены данной годовой нормы на эквивалентную месячную норму.

РЕШЕНИЕ Пусть i обозначает месячную норму, эквивалентную 3% годовых. Тогда

$$(1 + i)^{12} = 1{,}03 , \quad 1 + i = (1{,}03)^{1/12} = 1{,}00246627 .$$
$$i = 0{,}00246627 \text{ в месяц.}$$

Теперь мы имеем обыкновенную простую ренту, состоящую из платежей по 1 млн рб в месяц при месячной норме процента $i = 0{,}00246627$. Поэтому (как и раньше)

$$A = R/i = 1/0{,}00246627 = 405{,}4706 \text{ млн рб.}$$

ПРИМЕР 2 Решить пример из параграфа 7.2 путем замены данной годовой нормы на эквивалентную ренту, соответствующую трехлетнему сроку.

РЕШЕНИЕ Пусть i будет нормой, соответствующей трехлетнему сроку, которая эквивалентна 5% годовых. Тогда

$$1 + i = (1{,}05)^3 = 1{,}157625\,, \quad i = 0{,}157625 \text{ за 3 года.}$$

Теперь мы имеем простую полагающуюся ренту, состоящую из платежей по 50 млн рб в начале каждого трехлетнего срока и нормой процента $i = 0{,}157625$ за этот срок. Поэтому

$$A = R + R/i = 50 + 50/0{,}157625 = 367{,}2086 \text{ млн рб.}$$

Сравнение двух использованных методов анализа общей ренты показывает, что метод замены нормы процента формально проще. Главным его недостатком является необходимость применения вычислительных средств.

7.4 КАПИТАЛИЗАЦИЯ

Слово **капитализация** имеет несколько значений. В этой главе оно будет обозначать процесс определения настоящей стоимости серии периодических платежей, которые продолжаются неограниченно долго. Таким образом, капитализировать доход (или расход) при данной норме процента означает найти настоящую стоимость вечной ренты, которая будет обеспечивать необходимые платежи. Например, доход 1 млн рб, полагающийся в конце каждого месяца, капитализированный при 3 процентах, $m = 12$, равен 400 млн рб, так как эта сумма является настоящей стоимостью вечной ренты, которая будет обеспечивать 1 млн рб в конце каждого месяца, если инвестирована при $j_{12} = 3$ процента.

В современной экономической теории капитализация является крайне важным инструментом оценивания различных активов и обязательств, одним из наиболее важных применений является определение капитализированной стоимости инвестиций активов, обычно называемой **капитализированной стоимостью**. Капитализированная стоимость активов определяется как первоначальная стоимость плюс настоящая стоимость неограниченного числа возобновлений. Настоящая стоимость неограниченного числа возобновлений является текущей стоимостью вечной ренты, которая будет обеспечивать необходимые возобновляемые платежи. Отсюда, если C является первоначальной стоимостью и K является капитализированной стоимостью, тогда

$$K = C + A\ , \tag{6}$$

где A является настоящей стоимостью вечной ренты, необходимой для возобновляемых платежей, и определяется равенством (1). Если норма процента такова, что рента является простой рентой, R рассматривается как возобновляемая стоимость и мы имеем

$$K = C + R/i\ . \tag{7}$$

Если однако рента является общей рентой, W принимается в качестве возобновляемой стоимости и R , используемое в (7), вычисляется по формуле (2).

ПРИМЕР 1 Промышленная компания первоначально заплатила за сверла 20 млн рб, после чего в конце каждого месяца компания платит по 10 млн рб за возобновление сверл из-за их износа и поломок. Если деньги стоят 4,5 % эффективно, найти капитализированную стоимость сверл.

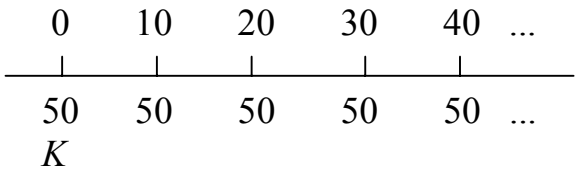
РЕШЕНИЕ Платежи по 1 млн рб в конце каждого месяца образуют общую ренту. Если R является платежом эквивалентной простой вечной ренты, тогда

$$R = 1/s_{\overline{1/12}|4,5\%} = 1 \times 12{,}24553306 = 12{,}245533 \text{ млн рб.}$$
$$K = C + R/i = 2 + 12{,}245533 / 0{,}045 = 274{,}122950 \text{ млн рб.}$$

Если первоначальная стоимость C является той же самой, что и стоимость замены, вычисление можно немного упростить путем рассмотрения первоначальной стоимости, как первого платежа полагающейся вечной ренты. Следующий пример иллюстрирует эту возможность.

ПРИМЕР 2 Найти капитализированную стоимость машины, которая стоит 50 млн рб и подлежит замене по той же самой стоимости в конце каждого десятилетнего периода. Деньги стоят 4% эффективно.

РЕШЕНИЕ Представим платежи на временной диаграмме



Эта общая полагающаяся рента с платежами по 50 млн рб может быть заменена простой рентой с платежами R, где

$$R = W/a_{\overline{m/p}|i} = 50/a_{\overline{10}|4\%} = 50 \times 0{,}12329094 = 6{,}164547 .$$

Тогда, поскольку K является настоящей стоимостью этой ренты

$$K = R/i = 6{,}164547 / 0{,}04 = 154{,}11367 \text{ млн рб} .$$

В теории капитализации часто встречается термин **периодическая инвестиционная стоимость.** Периодическая инвестиционная стоимость активов определяется как периодический процент на капитализированную стоимость. Например, если капитализированная стоимость активов при $j_4 = 4\%$ равна 100 млн рб, то поквартальная инвестиционная стоимость равна 1 млн рб. Таким образом, если обозначить периодическую инвестиционную стоимость символом H, тогда

$$H = Ki = Ci + R , \qquad (8)$$

где K, C, R и i имеют тот же смысл, что и ранее.

Периодическая инвестиционная стоимость имеет более простую интерпретацию. Если K является капитализированной стоимостью активов, тогда K будет сохранять стоимость актива неограниченно. С другой стороны, K, инвестированная теперь при норме i, будет давать Ki, как выплаты процентов, неограниченно. Отсюда если K используется для сохранения стоимости с определенного актива, выплаты процентов Ki являются потерянными как доход и логически могут рассматриваться как периодическая инвестиционная стоимость собственно активов. Такое же заключение может быть получено путем анализа формулы $H = Ci + R$. Слагаемое Ci представляет потери процентов из-за того, что собственник использовал деньги на приобретение активов, а не на инвестирование при норме i. Кроме того, если W является стоимостью замены активов в конце их использования, то $R = W / s_{\overline{m/p}|i}$, помещаемое в сберегательный фонд в конце каждого периода начисления процентов, будет накапливать основную сумму, которая в противном случае была бы потеряна, когда активы достигнут конца своего использования. Таким образом, Ci теряются как процент и выплата R, необходимая для сохранения первоначального капитала нетронутым, содержит реальную

периодическую стоимость, обязанную деньгам, инвестированным в актив, а не денежную инвестицию, и поэтому называется периодической инвестиционной стоимостью.

ПРИМЕР 3 Какова полугодовая инвестиционная стоимость водяного котла, который первоначально стоит 1 млн рб и который необходимо заменять каждые 10 лет за 0,9 млн рб, если деньги стоят $j_2 = 4\%$?

РЕШЕНИЕ Стоимости замены 0,9 млн рб сначала преобразуем в эквивалентную серию платежей в концах периодов начисления процентов. Из равенства (2)

$$R = W/\ s_{\overline{m/p}|i} = 0{,}9\ /\ s_{\overline{20}|2\%} = 0{,}037 \text{ млн рб}\ .$$

Таким образом, 20 полугодовых платежей по 0,037 млн рб , внесенные в сберегательный фонд, будут приносить сумму 0,9 млн рб в конце 10-летнего периода и вместе со старым котлом позволят купить новый котел или возместить первоначальную основную сумму. Потери процентов каждого периода равны $Ci = 1 \times 0.02 = 0.02$ млн рб. Отсюда

$$H = Ci + R = 0{,}02 + 0{,}037 = 0{,}057 \text{ млн рб}$$

является полугодовой инвестиционной стоимостью собственно котла.

7.5 СРАВНЕНИЕ АКТИВОВ НА ОСНОВЕ ИНВЕСТИЦИОННОЙ СТОИМОСТИ

Бизнесмены часто сталкиваются с решением проблемы, связанной с тем, какая из нескольких машин обеспечивает наибольшую экономичность при длительном использовании, или когда заменить старое оборудование новым или следует ли ремонтировать используемую машину или купить новую. Для решения таких проблем нужен какой-нибудь метод сравнения стоимостей различных активов. Все машины постепенно теряют свою стоимость в связи с износом и темп этих потерь не одинаков для различных машин. Поэтому не является адекватным простое сравнение их по первоначальной стоимости. Однако, так как деньги, истраченные на машину, являются инвестицией, мы можем сравнить две различных машины, которые делают одну и ту же работу, путем сравнения их капитализированных стоимостей или их периодических инвестиционных стоимостей.

ПРИМЕР 1 Одна машина стоит 10 млн рб и должна заменяться через 10 лет, на что затрачивается 8 млн рб. Другая машина для тех же целей имеет первоначальную стоимость 13 млн рб и должна заменяться через 15 лет работы, что потребует 10 млн рб. Если деньги стоят 5% эффективно, какая машина требует меньше затрат при длительном использовании ?

РЕШЕНИЕ Сравнение капитализированных стоимостей. По методу предыдущего параграфа мы найдем, что капитализированные стоимости машин равны соответственно

$$K = 22{,}7207 \text{ млн рб} \quad \text{и} \quad K = 22{,}2685 \text{ млн рб.}$$

Поэтому вторая машина дешевле при длительном использовании.

Если мы вычислим годовую инвестиционную стоимость каждой из двух машин, мы получим

$$H = 1{,}1360 \text{ млн рб} \quad \text{и} \quad H = 1{,}1134 \text{ млн рб.}$$

Следовательно, первая машина стоит на 22600 рб больше за год, чем вторая машина.

ПРИМЕР 2 Машина, стоящая 200 млн рб, будет использоваться в течение 40 лет после чего может быть продана на металлолом за 10 млн рб. Какую сумму компания может позволить себе заплатить за другую машину для тех же целей, которая бы после использования в течение 25 лет при замене не давала никаких денег при утилизации ? Считать, что деньги стоят 4% эффективно.

РЕШЕНИЕ Две машины будут экономически эквивалентны, если их годовые инвестиционные стоимости (или капитализированные стоимости) являются одинаковыми. Для первой машины мы имеем

$$H_1 = Ci + R = 200 \times 0{,}04 + 0{,}19 \,/\, s_{\overline{40}|4\%} = 9{,}999463 \text{ млн рб}$$

Пусть C будет первоначальной стоимостью второй машины. Тогда C является также стоимостью замены машины, так как ее утилизация ничего не стоит. Годовая инвестиционная стоимость второй машины равна

$$H_2 = Ci + C/\, s_{\overline{25}|4\%} = C/\, a_{\overline{25}|4\%} \quad .$$

Приравнивание H_1 и H_2 дает

$$C/\, a_{\overline{25}|4\%} = 9{,}999463 \quad \text{и} \quad C = 9{,}999463\, a_{\overline{25}|4\%} = 156212400 \text{ рб.}$$

Этот пример может быть решен приравниванием капитализированных стоимостей двух машин. Однако формальная сторона расчетов несколько проще, когда используются периодические инвестиционные стоимости.

7.6 СРАВНЕНИЕ АКТИВОВ НА ОСНОВЕ СТОИМОСТИ ПРОДУКЦИИ

При сравнении стоимости двух машин, которые выполняют одну и ту же работу, стоимость управления и эксплуатации так же важна, как и инвестиционная стоимость. Должно быть учтено также число изделий, которые будут произведены каждой машиной в течение временного периода. Так как может быть капитализирована любая последовательность периодических платежей, мы можем капитализировать стоимости эксплуатации и стоимости производства на единицу выпуска, или, что эквивалентно, мы можем найти периодические стоимости эксплуатации и производства на единицу выпуска. Эти капитализированные стоимости или соответствующие периодические стоимости обеспечивают базу для решения о том, которая из машин более экономична для использования.

ПРИМЕР Машина, которая стоит 50 млн рб износится через 20 лет и будет утилизирована в это время за 5 млн рб. Ремонт будет стоить в среднем 3 млн рб в год. Расходы по эксплуатации, включая зарплату оператора, будут 4 млн рб в месяц. Другая машина будет производить в два раза больше изделий в год. Она стоит 500 млн рб и должна заменяться через 25 лет при стоимости 450 млн рб. Ремонт для этой машины будет в среднем стоить 2,5 млн рб в год и расходы по эксплуатации будут 5 млн рб в месяц. Если деньги стоят 5% эффективно, сколько будет сэкономлено денег в каждом году приобретением более экономичной машины ?

РЕШЕНИЕ Пусть H , R и O будут эквивалентны годовым стоимостям при 5% годовых, соответственно, инвестиционной стоимости, стоимости ремонта и стоимости эксплуатации. Тогда

$H = 50 \times 0{,}05 + 45/s_{\overline{20}|5\%} = 2{,}5 + 1{,}3609 = 3{,}8609$ млн рб

$R = 3$ млн рб

$O = 4 / s_{\overline{1/12}|5\%} = 49{,}0903$ млн рб.

Полная стоимость годовой продукции для первой машины равна

$$H + R + O = 55{,}9512 \text{ млн рб}.$$

Мы повторим такие же вычисления для второй машины и получим

$H = 500 \times 0{,}05 + 450/s_{\overline{25}|5\%} = 34{,}4286$ млн рб ,

$R = 2{,}5$ млн рб ,

$O = 5 / s_{\overline{1/12}|5\%} = 61{,}3629$ млн рб .

Для второй машины

$$H + R + O = 98{,}2915 \text{ млн рб}.$$

Так как производительность у второй машины в два раза больше, чем у первой, потребуется две машины первого типа, чтобы заменить одну машину второго типа. Годовая стоимость двух машин первого типа была бы 111,9024 млн рб. Это на 13,6109 млн рб больше, чем годовая стоимость второй машины и, следовательно, является той суммой, которая будет сэкономлена ежегодно каждой машиной второго типа, если она будет куплена.

УПРАЖНЕНИЯ 7

1. Найти капитализированную стоимость и полугодовую инвестиционную стоимость машины, которая стоит 100 млн рб первоначально и нуждается в замене через каждые 15 лет по стоимости 80 млн рб , если деньги стоят 4% в год.
2. Сравнить при эффективных 4% капитализированные стоимости следующих двух машин: машина А стоит 50 млн рб и через 20 лет полностью теряет свою стоимость; машина В стоит 75 млн рб и будет стоить 5 млн рб через 25 лет.
3. Некто платит 40 млн рб за новый автомобиль. Если он содержит его в течение 4 лет, его продажная цена становится 10 млн рб. Какой должна быть продажная цена через 3 года, так чтобы продажа в это время была эквивалентна содержанию автомобиля 4 года при $j_2 = 5\%$.
4. Иванов желает красить свой дом. Если использовать покраску класса А, она будет стоить 5 млн рб и продержится 4 года. Если использовать покраску класса В, она будет стоить 4 млн рб и продержится 3 года. Какой вариант будет дешевле, если деньги стоят 3% эффективно ?

Глава 8 ОБЛИГАЦИИ

8.1 ВВЕДЕНИЕ

Когда большой корпорации необходимо занять очень большую сумму денег, такую как 500 млрд рб, обычно невозможно найти какую-то одну финансовую компанию или даже небольшую группу финансовых компаний, которые смогли бы ссудить целиком необходимую сумму денег. Поэтому деньги должны быть получены от большого числа инвесторов как крупных, так и мелких. Для удобства обращения с большим числом инвесторов корпорация печатает заранее большое количество контрактов (ценных бумаг), в каждом из которых указана сумма займа, дата возмещения займа, норма процента, по которой будет возмещаться заем, и даты, когда эти процентные платежи будут делаться. В каждом контракте также устанавливается, где платежи могут быть собраны, и какие гарантии компания предлагает, чтобы заем был возмещен. Такой контракт называется **облигацией.**

Так как облигации выпускаются для займа денег, используются многочисленные средства для привлечения инвесторов. Большинство облигаций выпускаются **на предъявителя** и могут передаваться от одного владельца другому по желанию. Преимуществом такой облигации является то, что она может быть продана владельцем в любой момент времени, когда он пожелает. Другие облигации являются **именными** и могут быть переданы только при соответствующем подтверждении и согласии выпустившей облигацию корпорации. Таким образом, владелец является защищенным от потерь или обмана. Для удобства получения процентов к большинству облигаций прилагаются **датированные купоны,** которые можно обменять на наличные деньги в любом банке в указанную на купоне дату или позже. По некоторым именным облигациям выплата процентов владельцу делается по почте.

Введем некоторую терминологию, относящуюся к облигациям. Сумма денег, указанная в облигации, называется **лицевой стоимостью** или **номиналом.** Она равна обычно от 5 до 50 млн рб. Дата возмещения займа называется **датой выкупа.** Сумма возмещения займа на дату выкупа называется **ценой выкупа.** Цена выкупа всегда близка к лицевой стоимости, в этом случае говорят, что облигация является **выкупаемой по номинальной стоимости.** Некоторые облигации содержат условие, которое позволяет выпустившей ее корпорации выкупать облигации, то

есть выплатить заем, раньше даты выкупа. Такие облигации называются **отзываемыми.** Например, облигация может быть выкуплена через 15 лет и отозвана в любое время после 10 лет. В большинстве отзываемых облигаций указывается, что если они отзываются до даты выкупа, они будут выкупаться с **премией,** то есть за более высокую цену, чем их лицевая стоимость. Например, облигация, выкупаемая за номинальную стоимость через 15 лет, может быть отозвана за 105 % от ее лицевой стоимости после 10 лет.

8.2 ИНВЕСТИЦИОННАЯ НОРМА

Теперь следует уяснить, что облигация является контрактом, который может быть передан от одного лица другому. Следует также уяснить, что владелец облигации, решивший ее продать, будет, естественно, продавать ее покупателю, предложившему наиболее высокую цену. Следовательно, облигация очень редко продается за цену, в точности равную лицевой стоимости. На самом деле, когда облигации впервые предлагаются инвесторам, только в редких случаях выпускающая их корпорация получает лицевую стоимость облигаций. В связи с этим фактом появляются различные задачи, связанные с облигациями. В качестве иллюстрации предположим, что облигация на 10 млн рб будет выкупаться через 10 лет и в среднем 0,5 млн рб процентных платежей будет выплачиваться в конце каждого года. Ясно, что лицо, покупающее эту облигацию за 10 млн рб, инвестирует свои деньги за проценты в размере 5% эффективно. Предположим однако, что эта облигация не может быть куплена за цену меньшую 11,5 млн рб. Тогда полученные процентные платежи будут частично возмещать потери 1,5 млн рб, возникающие при выкупе облигации. Таким образом, естественно возникает вопрос : насколько хорошей инвестицией является эта облигация, если она покупается за 11,5 млн рб ? Предположим также, что инвестор хочет инвестировать деньги, получая 3% эффективно. Какую сумму он может позволить себе предложить за облигацию, упомянутую выше ?

Приведенная иллюстрация достаточно ясно показывает, что при продаже облигации за цену, отличающуюся от лицевой стоимости, покупатель инвестирует свои деньги при норме процента, отличающейся от указанной в облигации. По этой причине имеются две нормы процентов, связанные с облигациями: a) норма, по которой выплачиваются проценты на лицевую стоимость облигации, называемая **нормой облигации**; b) норма процента, реализованная покупателем, называемая **нормой инветиции** или **нормой доходности.**

8.3 ПОКУПНАЯ ЦЕНА ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ЗАДАННОЙ НОРМЫ ИНВЕСТИЦИИ

Первой задачей, касающейся облигаций, является определение суммы, которую следует заплатить инвестору за облигацию, чтобы его инвестиция обеспечивала проценты с заданной инвестиционной нормой. Пусть

F - лицевая стоимость, или номинальная стоимость облигации,

C - цена выкупа облигации,

n - количество периодов начисления процентов до даты выкупа,

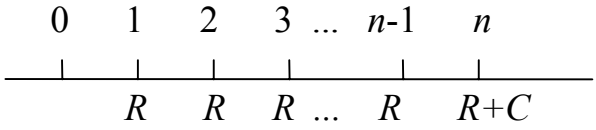
r - норма процента за период, с которой выплачиваются проценты на лицевую стоимость облигации,

$R = Fr$ - сумма процентов облигации, выплачиваемая за облигацию в дни выплаты процентов,

i - инвестиционная норма, или норма доходности, за период начисления процентов,

P - покупная цена, при которой облигация будет давать i .

Для простоты будем пока предполагать, что норма процента облигации и инвестиционная норма имеют одинаковый период начисления процентов. Когда покупается облигация, покупатель получает письменный контракт, который предусматривает два вида платежей: a) периодические платежи процентов, которые образуют аннуитет; b) выкупная цена, полагающаяся в дату выкупа. На временной диаграмме показаны эти предусмотренные платежи



Инвестору, который хочет получать за свою инвестицию проценты с нормой i, следует заплатить сумму, эквивалентную (с нормой i) этим платежам. Таким образом, P является настоящей стоимостью упомянутой выше серии платежей при норме i. Поэтому

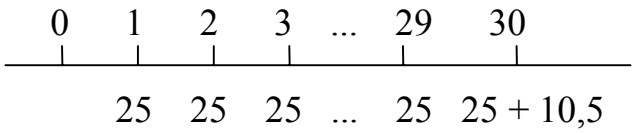
$$P = R\ a_{\overline{n}|i} + C\,(1+i)^{-n} \quad . \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1 Облигация на 10 млн рб, по которой выплачивается процент с нормой 5%, $m = 2$, будет выкупаться за 10,5 млн рб через 15 лет. За сколько следует ее продавать, чтобы инвестору гарантировалась норма 4%, $m = 2$?

РЕШЕНИЕ Процентные платежи облигации будут равны

$$R = Fr = 10 \times 0{,}025 = 0{,}25 \text{ млн рб} .$$

Поэтому облигация будет обеспечивать следующую серию платежей



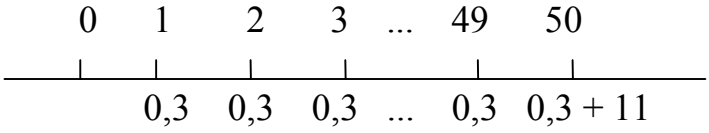
Покупная цена является текущей стоимостью этой серии платежей при норме 2% . Поэтому

$$\text{P} = 0{,}25\, a_{\overline{30}|2\%} + 10{,}5 \times (1{,}02)^{-30} =$$
$$= 5{,}59911 + 5{,}79674 = 11{,}3959 \text{ млн рб} .$$

Таким образом, тот, кто платит за эту облигацию 11,3959 млн рб, инвестирует деньги с нормой 4% , $m = 2$.

ПРИМЕР 2 Облигация на 10 млн рб, по которой выплачивается 6% каждые полгода, может быть отозвана за 110% ее лицевой стоимости 1 марта 1995. Если она не отозвана в этот день, она будет выкуплена по номинальной стоимости 1 марта 2005. Найти покупную цену на 1 марта 1970, которая гарантировала бы проценты с нормой 7% , m =2.

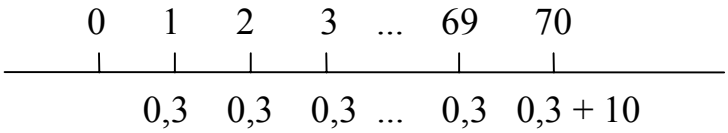
РЕШЕНИЕ Если облигация отзывается в данный день отзыва, она обеспечит серию платежей, показанную на диаграмме



Поэтому покупная цена должна рассчитываться так :

$$P = 0{,}3\ a_{\overline{50}|3{,}5\%} + 11\ (1{,}035)^{-50} =$$
$$= 7{,}03669 + 1{,}96959 = 9{,}0063 \text{ млн рб} .$$

Однако, если облигация не будет отозвана, она обеспечит серию следующих платежей



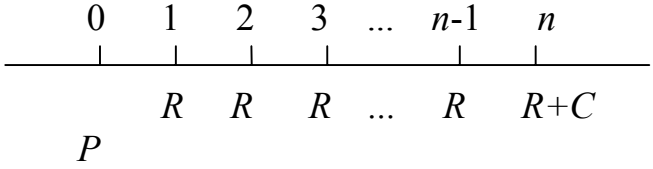
В этом случае покупная цена должна быть такой

$$P = 0{,}3\ a_{\overline{70}|3{,}5\%} + 10\ (1{,}035)^{-70} =$$
$$= 7{,}80012 + 0{,}89986 = 8{,}700 \text{ млн рб}.$$

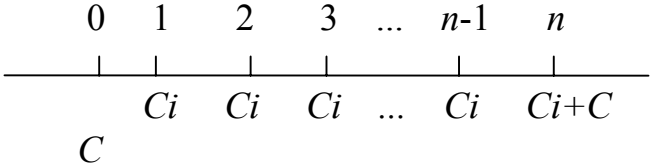
Так как покупатель не знает, какая серия платежей реализуется, он должен покупать облигацию за наименьшую из этих двух цен, 8,7 млн рб, чтобы быть уверенным, что на его инвестицию реализуются проценты с нормой 7% , $m = 2$.

8.4 АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОКУПНОЙ ЦЕНЫ

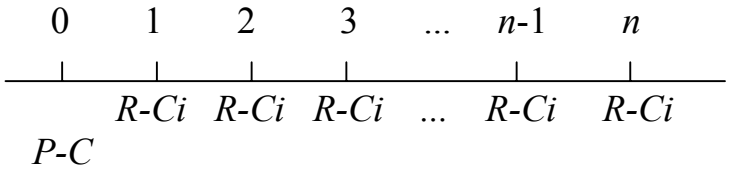
Хотя формула (1) несложная, ее применение предполагает использование двух таблиц. Несколько проще формула, которую мы теперь получим. Для этого мы напомним, что P является настоящей стоимостью серии платежей, выплачиваемых на облигацию, при норме i . Представим эти платежи на временной диаграмме



С другой стороны, сумма C , инвестированная в момент начала этой серии, при норме i обеспечивает платежи процентов Ci в конце каждого периода начисления в течение n периодов и заключительный платеж C в конце последнего периода. Эти платежи также представим на временной диаграмме



Полагая финансовые результаты платежей на приведенных диаграммах одинаковыми, вычтем платежи второй диаграммы из платежей первой диаграммы, что приведет к следующей временной диаграмме



Равенство стоимостей теперь дает $P\text{-}C = (R - Ci)\, a_{\overline{n}|i}$ или

$$P = C + (R - Ci)\, a_{\overline{n}|i} . \qquad (2)$$

Эта формула может быть получена также из (1) аналитически, если использовать тождество $(1 + i)^{-n} = 1 - i\, a_{\overline{n}|i}$ для исключения из (1) множителя $(1 + i)^{-n}$.

Анализ формулы (2) показывает, что если $R = Ci$, покупная цена облигации совпадает с выкупной ценой; если R больше, чем Ci , покупная цена больше выкупной цены; если же R меньше, чем Ci , то $R - Ci$ является отрицательной и покупная цена меньше выкупной цены.

ПРИМЕР 1 Решить пример 2 предшествующего параграфа с использованием формулы (2).

РЕШЕНИЕ Если облигация отзывается в заданную дату отзыва, $C = 11$, $R = Fr = 10 \times 0{,}03 = 0{,}3$, $Ci = 11 \times 0{,}35 = 0{,}385$, $n = 50$. Формула (2) тогда дает

$$P = 11 + (0{,}3 - 0{,}385)\, a_{\overline{50}|3{,}5\%} = 11 - 1{,}9937 = 9{,}0063$$

Если облигация не отзывается, то $C = 10$, $Ci = 0{,}35$, $R = 0{,}3$, $n = 70$. В этом случае

$$P = 10 + (0{,}3 - 0{,}35)\, a_{\overline{70}|3{,}5\%} = 10 - 1{,}3 = 8{,}70 \text{ млн рб} ,$$

Мы получили такие же значения P , как и в случае использования равенства (1).

Конечно, несущественно, которая из формул используется для определения покупной цены облигации. Формула (1) кажется более естественной и ее легче запомнить, однако формула (2) проще в

вычислительном отношении, так как предполагает использование только таблицы для функции $a_{\overline{n}|i}$.

В рассмотренных примерах мы столкнулись только со случаем, когда по облигации выплачиваются проценты с такой же частотой, с какой они начисляются, то есть платежи образуют обыкновенный простой аннуитет. Очевидно, что это имеет место не всегда. Когда период начисления процентов отличается от периода их выплаты так, что процентные платежи облигации образуют общий аннуитет, тогда общий аннуитет преобразуется в эквивалентный ему обыкновенный простой аннуитет при помощи ранее рассмотренных методов и применение формул (1) или (2) позволяет определить покупную цену облигации. Рассмотрим эту процедуру на примере.

ПРИМЕР 2 Облигация на 10 млн рб, по которой выплачивается процент с нормой 5% , m =2 , будет выкупаться за 10,5 млн рб через 15 лет. Найти покупную цену, эквивалентную инвестиции денег с нормой a) 4% , m = 1, b) 4% , m = 4.

РЕШЕНИЕ a) Процентные платежи за облигацию по 250 тыс рб образуют общий аннуитет с W = 250 , p = 2 , i = 0,04 , m = 1. Использование формулы (6) параграфа 5.2 дает

$$R = 250/\, s_{\overline{1/2}|4\%} = 250 \times 2{,}0198039 = 504{,}951 \text{ тыс рб}$$

как эквивалентный ежегодный платеж аннуитета. Покупная цена теперь находится путем использования формулы (1) или (2) . Применяя, например, формулу (1), получим

$$P = 0{,}504951\, a_{\overline{15}|4\%} + 10{,}5(1{,}04)^{-15} = 11{,}4445 \text{ млн рб.}$$

b) Процентные платежи по облигации теперь образуют общий аннуитет с W = 0,25 , p =2 , i =0,01 , m = 4. Повторяя процедуру вычислений, как в случае a), имеем

$$R = 0{,}25/\, s_{\overline{2}|1\%} = 0{,}25 \times 0{,}49751244 = 0{,}124378 \text{ млн рб}$$

как платежи эквивалентного поквартального аннуитета. Теперь, используя для вычисления покупной цены формулу (2), мы получим

$$P = 10{,}5 + (0{,}124378 - 0{,}105)\ a_{\overline{60}|1\%} = 11{,}3711 \text{ млн рб.}$$

Когда облигация продается в день выплаты процентов по облигации, выплачиваемый процент считается собственностью продавца, так что покупатель покупает только будущие выплаты по облигации. Поэтому платежи процентов по облигации, которые получит покупатель, всегда образуют обыкновенный аннуитет (простой или общий) и можно использовать методы, применявшиеся ранее. Случай приобретения облигации между датами выплаты процентов по облигации будет рассмотрен позже.

8.5 ОЦЕНИВАНИЕ ОБЛИГАЦИЙ МЕЖДУ ДАТАМИ НАЧИСЛЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ

Формулы для покупной цены (1) и (2) были получены для облигаций, покупаемых в день начисления процентов, когда продавец удерживает процентные платежи этого дня, а покупатель получает контракт, содержащий все будущие платежи за облигацию. Очевидно, облигации могут продаваться и покупаются в произвольные дни. Следовательно, нам необходим способ определения стоимости облигации между датами начисления процентов по облигации.

Как мы видели, реальная стоимость облигации зависит от нормы процентов, которая приносит доход, и от того покупается ли она в день начисления процентов или нет. Предположим, что облигация покупается между датами начисления процентов по ней с целью получения инвестором процентов с нормой i. Пусть P_0 представляет покупную цену облигации на предшествующую дату начисления процентов, обеспечивающую норму процента i; пусть f будет дробной частью периода начисления процентов, которая истекла с момента предшествующей даты начисления; пусть также P будет стоимостью облигации на день продажи. Тогда P_0 и P являются стоимостями одного и того же контракта на различные даты и поэтому являются эквивалентными. Поэтому уравнение эквивалентности нам дает формулу

$$P = P_0 (1 + i)^f \tag{3}$$

для **точной стоимости** облигации на дату продажи.

Ранее мы говорили, что когда рассматривается дробная часть периода начисления, для аппроксимации точного результата может применяться приближенная формула, основанная на использовании простого процента вместо сложного. Тогда

$$P = P_0 (1 + if) \tag{4}$$

дает **приближенную стоимость** облигации P.

На практике обычно используют (4) и мы будем следовать этому обычаю, если не будет оговорено противное. Обычно принято также вычислять временной множитель f приближенным способом, то есть в предположении, что год состоит из 12 месяцев по 30 дней каждый.

ПРИМЕР 1 Найти покупную цену на 16 июня 1990 г. для облигации с лицевой стоимостью 10 млн рб, выкупаемую по номинальной стоимости 1 октября 2015 г., и предусматривающую проценты с нормой 6% , $m = 2$.

РЕШЕНИЕ Предшествующая дата начисления процентов по облигации 1 апреля 1990 г. Число периодов начисления от этой даты до даты выкупа равно 51. Поэтому стоимость облигации на 1 апреля 1990 г. равна

$$P_0 = 10 + (0{,}35 - 0{,}30)\ a_{\overline{51}|3\%} = 10 + 1{,}2976 = 11{,}2976 \text{ млн рб}$$

Считая по 30 дней в каждом месяце, определяем срок от 1 апреля по 16 июня равным 75 дней, так что $f = 75/180 = 5/12$. Формула (4) тогда дает

$$P = 11{,}2976\ (1 + 0{,}03\ (5/12)) = 11{,}2976 \times 1{,}0125 = 11{,}4388 \text{ млн рб}$$

Если бы мы применяли формулу (3) для вычисления точной стоимости, мы бы получили

$$P = 11{,}2976\ (1{,}03)^{5/12} = 11{,}2976 \times 1{,}01239 = 11{,}4376 \text{ млн рб}$$

Разница этих двух результатов равна 1200 рб (0,0105 %).

Другой способ получения приближенного значения P следующий. Пусть P_0 имеет то же самое значение, что и ранее, и пусть P_1 будет покупной ценой облигации на предстоящую дату начисления процентов. В день предстоящего начисления процента будет произведена выплата

процентов R, после чего стоимость облигации станет равной P_1. Следовательно, ее стоимость непосредственно перед выплатой процентов равна $R + P_1$. Если мы предположим, что изменение стоимости от P_0 до $R+P_1$ происходит равномерно в течение периода начисления процентов, то стоимость облигации в промежуточную дату периода может быть найдена линейным интерполированием между этими значениями.

ПРИМЕР 2 Решить пример 1 с помощью интерполяции.

РЕШЕНИЕ Как и ранее $P_0 = 11{,}2976$ млн рб. Вычислим P_1.

$$P_1 = 10 + (0{,}35 - 0{,}30)\, a_{\overline{50}|3\%} = 11{,}2865 \text{ млн рб.}$$

Поэтому стоимость облигации непосредственно перед выплатой процентов по облигации равна $11{,}2865 + 0{,}35 = 11{,}6365$ млн рб. Интерполяция стоимости между 11,2976 и 11,6365 дает

$$P = 11{,}2976 + (5/12)(11{,}6365 - 11{,}2976) = 11{,}4388 \text{ млн рб.}$$

что совпадает с результатом примера 1.

Так как метод этого параграфа предполагает, что норма доходности облигации известна, этот метод может быть представлен как метод определения цены, которую инвестору следовало бы предложить за данную облигацию для того, чтобы она обеспечила ему установленную норму процента.

8.6 РАСПИСАНИЯ ОБЛИГАЦИЙ

Когда облигация покупается за сумму P, большую ее выкупной цены C, разность $P - C$ называется **превышением,** то есть превышением покупной цены над ценой выкупа. До тех пор пока процентные платежи облигации используются для амортизации превышения, происходит потеря капитала на дату выкупа. В качестве иллюстрации предположим, что инвестор покупает облигацию с лицевой стоимостью 10 млн рб, за которую выплачиваются проценты с нормой 5% , $m = 2$, и она выкупается в конце трехлетнего периода за 10,5 млн рб, принося доход 4% , $m = 2$. По любой из формул (1) или (2) покупная цена определяется величиной 10,7241 млн рб. В конце каждых шести месяцев инвестор будет получать 0,25 млн рб процентных платежей облигации. Однако,

он в действительности не получает 0,25 млн рб каждые шесть месяцев, так как в конце трехлетнего периода он получит только 10,5 млн рб первоначальной суммы 10,7241 млн рб, инвестированной в облигацию. Это превышение 0,2241 млн рб должно быть сэкономлено из процентных платежей облигации для того, чтобы возместить полностью всю основную сумму, инвестированную в облигацию. Поэтому важно, чтобы был принят какой-то систематический план, посредством которого определенная часть каждого процентного платежа облигации использовалась для амортизации этого превышения.

Хотя существует несколько способов, используемых бухгалтерами для амортизации превышения, наиболее прямой способ основан на том факте, что облигация была куплена для получения инвестиционного дохода с данной нормой процента на деньги, инвестированные в облигацию. В приведенной выше иллюстрации покупная цена была определена так, чтобы облигация давала доход 2% каждые шесть месяцев на деньги, инвестированные в нее. Таким образом, в конце первой половины года **процент инвестора** должен был быть равным

$$10{,}7241 \times 0{,}02 = 0{,}2145 \text{ млн рб.}$$

Так как он в действительности получил 0,25 млн рб, разность 0,0355 млн рб рассматривается как возмещенная часть первоначальной основной суммы. Следовательно, теперь облигация оценивается суммой 10&7241 - 0&0355 = 10&6886 млн рб. Эта **книжная цена** является той же самой, что и покупная цена облигации за два с половиной года до погашения в расчете на доход по норме 4% , $m = 2$, и может быть вычислена независимо по каждой из двух формул расчета покупной цены.

Повторяя вышеописанную процедуру, мы найдем, что процент инвестора в конце второго 6-месячного периода должен быть равным

$$10{,}6886 \times 0{,}02 = 0{,}2138 \text{ млн рб .}$$

Таким образом, 0,25 - 0,2138 = 0,0362 млн рб из второго процентного платежа облигации является возмещенной частью основной суммы и новой книжной ценой является 10,6886 - 0,0362 = 10&6524 млн рб. Такая вычислительная процедура повторяется до погашения облигации. Конечная книжная цена равна 10,5 млн рб, то есть является ценой выкупа. Эта информация может быть представлена в виде таблицы, которая называется **расписанием облигации.** Приведем пример расписания облигации для только что рассмотренного случая.

Расписание облигации, купленной с превышением

Конец периода	Платежи процентов	Процент инвестора	Амортизация превышения	Книжная цена
0				10,7241
1	0,25	0,2145	0,0355	10,6886
2	0,25	0,2138	0,0362	10,6524
3	0,25	0,2130	0,0370	10,6154
4	0,25	0,2123	0,0384	10,5777
5	0,25	0,2116	0,0384	10,5393
6	0,25	0,2108	0,0392	10,5000
Всего	1,50	1,2760	0,2240	

Когда облигация покупается за цену, меньшую, чем ее цена выкупа, разность $C - P$ называется **дефицитом.** Например, предположим, что облигация в описанной нами иллюстрации была куплена за три года до погашения с целью получения дохода с нормой 6% , $m = 2$. В этом случае формулы (1) или (2) дают требуемую покупную цену 10,1479 млн рб. Так как облигация будет выкупаться за 10,50 млн рб, дефицит равен 10,50 - 10,1479 = 0,3521 млн рб.

Когда облигация покупается с дефицитом, инвестор выигрывает больше, чем непосредственные процентные платежи облигации, так как облигация выкупается за большую цену, чем первоначальная покупная цена. Хорошая расчетная практика требует, чтобы это увеличение стоимости облигации накапливалось постепенно. Таким образом, необходим какой либо систематический план **накопления дефицита.** Имеется несколько способов сделать это. Наиболее прямой из них использует тот факт, что облигация должна обеспечивать заданную норму процентов на сумму денег, инвестированную в облигацию. Для иллюстрации этого метода мы сконструируем расписание облигации для облигации, использованной в предыдущей иллюстрации, но купленной по цене, обеспечивающей норму 6% , $m = 2$. В этом случае покупная цена была бы 10,1479 , то есть облигация продавалась бы с дефицитом 0,3521. Поэтому процент инвестора в конце 6 месяцев равен

$$10,1479 \times 0,03 = 0,3044 \text{ млн рб.}$$

Так как процентные платежи облигации равны 0,25 млн рб, стоимость облигации увеличивается на

$$0,3044 - 0,25 = 0,0544 \text{ млн рб.}$$

Книжная цена облигации становится равной 10,2023 млн рб. Следует заметить, что процент инвестора в данном случае состоит из двух частей: a) процентные платежи облигации и b) увеличение в стоимости облигации. Эта последняя часть будет получена при выкупе облигации.

В конце второго периода начисления процент инвестора будет равен

$$102023 \times 0{,}03 = 0{,}3061 \text{ млн рб;}$$

увеличение стоимости облигации будет равно 0,3061 - 0,25 = 0,0561 млн рб; новая книжная цена станет равной

$$10{,}2023 + 0{,}0561 = 10{,}2584 \text{ млн рб.}$$

Эта процедура продолжается до погашения облигации, во время которого окончательная книжная цена станет равной 10,50 млн рб, то есть совпадет с покупной ценой. Следующая таблица дает полное расписание только что рассмотренной облигации.

Расписание облигации, купленной с дефицитом

Конец периода	Платежи процентов	Проценты инвестора	Накопление дефицита	Книжная цена
0				10,1479
1	0,25	0,3044	0,0544	10,2023
2	0,25	0,3061	0,0561	10,2584
3	0,25	0,3078	0,0578	10,3162
4	0,25	0,3095	0,0595	10,3757
5	0,25	0,3113	0,0613	10,4370
6	0,25	0,3131	0,0631	10,5000
Всего	1,50	1,8522	0,3522	

Несколько замечаний относительно современной терминологии. Разность $P - F$ определена как премия, а разность $P - C$ - как превышение. Когда облигация выкупается по номинальной стоимости, премия и превышение одинаковы; в других случаях это не выполняется. Так как большинство облигаций выкупается по номинальной стоимости, процесс выписывания превышения покупной цены над ценой выкупа часто называется амортизацией премии. Подобным образом, дисконт $F - P$ и дефицит $C - P$ являются одинаковыми для облигаций, выкупаемых по номинальной стоимости, так что слова «накопление дисконта» часто используются для обозначения накопления дефицита.

8.7 ПРИОБРЕТЕНИЕ ОБЛИГАЦИЙ НА РЫНКЕ

Очень редко облигация может быть куплена так, чтобы обеспечить заданную норму процента. В большинстве случаев облигации покупаются на бирже облигаций, где они продаются через аукцион с более высоким предложением цены. Это делается через агентов, действующих в интересах продавца и покупателя. Потенциальный продавец инструктирует своего агента относительно минимально допустимой цены продажи, в то время как потенциальный покупатель сообщает своему агенту максимальную цену, которую он может заплатить. Агенты работают за комиссионные и естественно пытаются получить для своих клиентов наилучшую цену из возможных.

Теперь необходимо напомнить, что когда облигация продана в день начисления процентов за облигацию, процентные платежи облигации, полагающиеся на этот день, считаются принадлежащими продавцу, так что покупатель приобретает только будущие поступления и не имеет доли в тех процентах, которые уже накоплены. По причинам, которые являются очевидными, желательно сохранить понимание того, что покупателю дается право только на будущие поступления от облигации, даже когда облигация покупается между датами начисления процентов за облигацию. Таким образом, продавец имеет право на ту часть предстоящего процентного платежа облигации, которая уже накоплена. Так как доля продавца в предстоящем процентном платеже облигации постоянно изменяется, начиная от нуля в день начисления процентов до R в день следующего начисления процентов, цена продажи также изменяется в зависимости от близости предстоящей даты начисления процентов. По этой причине нежелательно оценивать облигации на рынке по реальной цене, которую продавец ожидает получить. Следовательно, облигации предлагаются на рынке по рыночной цене Q с учетом того, что покупная цена равна Q плюс та часть предстоящего процентного платежа облигации, которая уже накоплена. Поэтому, если Q является **рыночной ценой** и R' представляет ту часть предстоящего процентного платежа облигации, которая уже накоплена (далее называемую накопленным процентом облигации), то полная покупная цена облигации равна

$$P = Q + R'. \tag{5}$$

На практике накопленный процент облигации вычисляется по простой формуле $R' = f\,R$, где f является дробной частью периода начисления, который уже истек. Например, если за облигацию выплачивается 300 тыс рб процентов каждые 6 месяцев, тогда через 45 дней после даты начисления процентов накопленный процент облигации был бы равен 45/180 × 300 = 75 тыс рб.

Наконец, так как облигации выпускаются различными достоинствами, обычно дается **рыночная котировка** на основе облигации на 1 млн рб , округленная к ближайшей одной восьмой. Таким образом, если рыночной котировкой является 105 1/4 , то рыночная цена пятимиллионной облигации была бы 5 × (105 1/4) = 5,2625 млн рб, а покупная цена была бы 5,2625 млн рб плюс накопленный процент облигации, если он имелся.

Пример 1 За 5-миллионную облигацию выплачиваются 150 тыс рб процентов облигации 1 февраля и 1 августа. Эта облигация была продана 1 апреля по рыночной котировке 108 1/2. Сколько заплатил покупатель ?

Решение Рыночная цена была Q = 5 × 1,085 = 5,425 млн рб. Так как она была продана 1 апреля, f = 60/180 = 1/3. Тогда

$$R' = fR = (1/3) \times 0{,}15 = 0{,}05 \text{ млн рб}$$

и окончательно

$$P = Q + R' = 5{,}425 + 0{,}05 = 5{,}4750 \text{ млн рб.}$$

Пример 2 За 10-миллионную облигацию выплачивается процент с нормой 6% , m = 2. Она выкупается по номинальной стоимости 15 января 2000 г. Какой должна быть рыночная котировка 15 сентября 1988 г. для того, чтобы обеспечить покупателю норму процента j_2 = 4% .

Решение Покупная цена 15 июля 1988 г., обеспечивающая норму процента j_2 = 4% , равна

$$P_0 = 10 + (0{,}3 - 0{,}2)\,a_{\overline{23}|2\%} = 10 + 1{,}8292 = 11{,}8292 \text{ млн рб}$$

15 сентября, двумя месяцами позже, покупная цена будет

$$P = P_0(1 + if) = 11{,}8292\ (1 + 0{,}02\ (1/3)) = 11{,}9081 \text{ млн рб}$$

Для определения Q мы используем (5). Накопленный процент облигации равен $R' = f\,R = (1/3) \times 0{,}3 = 0{,}1$ млн рб. Тогда из $P = Q + R'$ имеем

$$Q = P - R' = 11{,}9081 - 0{,}1 = 11{,}8081 \text{ млн рб.}$$

Сводя этот результат к одно миллионной облигации, мы получим рыночное предложение в виде 118,081, округляя которое с точностью до одной восьмой, получим 118 1/8.

Другой способ вычисления Q состоит в интерполяции между значениями P_0 и P_1, где эти символы имеют то же самое значение, как и в предыдущем параграфе.

Следует четко представлять, что обе формулы (4) и (5) дают одно и то же значение покупной цены P. Выбор той или иной формулы зависит от известных данных. Таким образом, потенциальный покупатель, который решает, что он купит облигацию, если только она обеспечит ему, скажем, 4% или более, использовал бы формулу (4) для определения максимальной цены, которую он мог бы заплатить. Формула (5) или ее эквивалент $Q = P - R'$ давали бы тогда соответствующую рыночную цену. Потенциальный продавец, однако, обычно определяет минимальную цену Q, которую он бы допустил за будущие поступления от облигации. Эта цена не включает ту часть предстоящих процентных платежей облигации R', которые уже накоплены, и поэтому полную покупную цену следует определять по формуле (5).

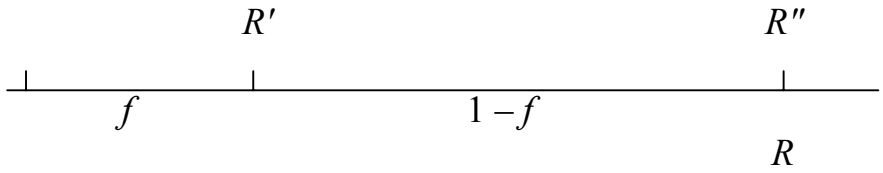
Остается сделать несколько замечаний, касающихся современной терминологии. Величина Q, которую мы назвали рыночной ценой, иногда называется **книжной стоимостью** облигации или **ценой процентов** облигации. Оба эти термина используются одинаково часто и читателю следует знать, что они означают одно и то же. Величина P, которую мы называли покупной ценой, почти всегда упоминается как **прямая цена** облигации.

Методы, рассмотренные в последних параграфах, оставляют без ответа три важных вопроса : *a*) Если используется закон сложных процентов, каким будет накопленный процент облигации ? *b*) Какова точная формула для Q ? *c*) Как построить инвестиционное расписание для облигации, покупаемой между датами начисления процентов ? Ответ на эти вопросы дается в следующем параграфе.

8.8 ЦЕНА ОБЛИГАЦИИ МЕЖДУ ДАТАМИ НАЧИСЛЕНИЯ ПРОЦЕНТОВ

Ранее мы отмечали, что **точная стоимость** облигации между датами начисления дается формулой $P = P_0\,(1 + i)^{f}$, где P_0 представляет стоимость облигации в предшествующую дату начисления, i - норма доходности облигации и f является дробной частью периода начисления, которая истекла после последней даты начисления. Теперь мы получим точную формулу для определения накопленного процента облигации R'.

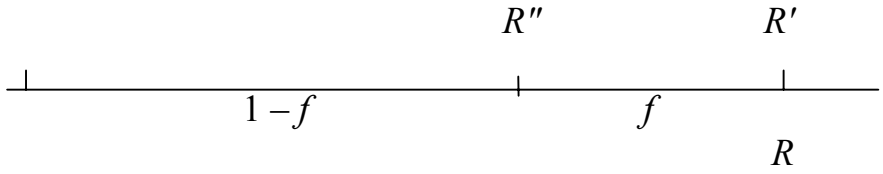
Если использовать точный метод, понятно, что покупателю и продавцу следует разделить предстоящую выплату процентов облигации соответственно закону сложных процентов. Пусть R' будет долей продавца, полагающейся в день продажи, а R'' будет долей покупателя, полагающейся в предстоящую дату начисления процентов. Эти две доли должны быть эквивалентными процентному платежу облигации R, делаемому в конце периода, как показано на диаграмме



Равенство стоимостей на конец периода дает

$$R'(1 + i)^{1-f} + R'' = R \qquad (a)$$

Так как обе доли R' и R'' неизвестны, нам нужно иметь еще одно соотношение между ними, для того, чтобы однозначно определить их значения. Второе соотношение может быть получено путем следующих рассуждений. Так как определение R' и R'' должно быть справедливым как для покупателя так и для продавца, перестановка временных интервалов f и 1-f приводила бы к перестановке R' и R'', как показано на следующей временной диаграмме



Равенство стоимостей в конце периода теперь дает

$$R' + R''(1 + i) = R \qquad (b)$$

Если равенство (a) умножить на $(1 + i)^f$, мы получим

$$R'(1 + i) + R''(1 + i)^f = R\,(1 + i)^f. \qquad (c)$$

Теперь вычитая равенство (b) из (c), найдем, что

$$R'i = R(1 + i)^f - R$$

Отсюда R' определяется в следующем виде

$$R' = R\frac{(1+i)^f - 1}{i} = Rs_{\overline{f}|i}. \qquad (6)$$

Подобным образом получим $R'' = Rs_{\overline{1-f}|i}$.

Пример За облигацию выплачивается 300 тыс рб процентных денег каждые 6 месяцев. Каков накопленный процент облигации двумя месяцами позже даты начисления, если норма доходности равна $a)$ 4% , $m = 2$; $b)$ 8% , $m = 2$?

Решение $a)$ Двумя месяцами позже даты начисления $f = 1/3$. Значит

$$R' = Rs_{\overline{f}|i} = 30s_{\overline{1/3}|2\%} = 300 \times 0{,}33113548 = 99{,}34 \text{ тыс рб}.$$

$b)$ Для нормы доходности 8% , $m = 2$ мы имеем

$$R' = 300 \times 0{,}3289851 = 98{,}7 \text{ тыс рб}.$$

Практический способ вычисления дает

$$R' = fR = (1/3) \times 300 = 100 \text{ тыс рб}.$$

Можно показать, что значение R', полученное из точного равенства (6) всегда несколько меньше, чем то, которое дается приближенной (практической) формулой $R' = f\,R$. Однако разность является обычно

малой и так как покупатели на одну дату становятся продавцами на другую дату, большой несправедливости не ощущается при использовании простой формулы.

Так как точная формула (6) для R' найдена, теперь можно получить точную формулу для Q. Начнем с равенства $P = Q + R'$ или $Q = P - R'$. Используя равенства (3) и (6) для исключения P и R', получим

$$Q = P_0 (1 + i)^f - Rs_{\overline{f}|i}$$

Теперь при помощи (1) исключаем P_0. Это дает

$$Q = (C(1 + i)^{-n} + Ra_{\overline{n}|i})(1 + i)^f - Rs_{\overline{f}|i}.$$

Или после преобразования

$$Q = C(1 + i)^{-n+f} + R(a_{\overline{n}|i}(1 + i)^f - s_{\overline{f}|i}).$$

Используя одно из тождеств для функций составных платежей:

$$a_{\overline{n-k}|i} = (1 + i)^k a_{\overline{n}|i} - s_{\overline{k}|i},$$

последнее выражение можно представить в упрощенной форме:

$$Q = C(1 + i)^{-(n-f)} + Ra_{\overline{n-f}|i}. \qquad (7)$$

Путем использования точно такой же процедуры, какую мы использовали в параграфе 8.4, формулу (7) можно преобразовать к следующему виду

$$Q = C + (R - Ci)\, a_{\overline{n-f}|i}. \qquad (8)$$

Таким образом, формулы для Q являются точно такими же, как (1) и (2) для P, только время, оставшееся до погашения, содержит дробные части периода. С точки зрения смысла, который будет приписан функции $a_{\overline{n}|i}$ в параграфе 10.2 для дробных значений n, формула (7) показывает, что Q равна настоящей стоимости цены выкупа плюс настоящая стоимость будущих процентов облигации и не включает часть текущего

процентного платежа облигации, которая уже накоплена. Поэтому покупная цена должна быть $P = Q + R'$.

Проиллюстрируем эти аналитические формулы численным примером. Предположим, что за облигацию 10 млн рб выплачивается 0,3 млн рб процентов каждые 6 месяцев и она продается за 10 лет и 3 месяца до даты выкупа по номинальной стоимости, чтобы приносить проценты по норме $j = 4\%$. Находим, что

$$P_0 = 10 + (0{,}3 - 0{,}2)\, a_{\overline{21}|2\%} = 11{,}70112 \text{ млн рб},$$

$$P = P_0(1+i)^f = 11{,}70112\ (1{,}02)^{0{,}5} = 11{,}81755 \text{ млн рб}.$$

Таким образом, покупная цена облигации должна быть 11,81755 млн рб. Однако эта сумма должна рассматриваться как состоящая из двух частей, а именно : накопленный процент облигации

$$R' = 0{,}3\, s_{\overline{0{,}5}|2\%} = 0{,}14926 \text{ млн рб}$$

и рыночная цена $Q = P - R' = 11{,}66829$ млн рб. На следующую дату начисления процентный платеж облигации подобным образом рассматривается состоящим из нескольких частей. Во-первых, новый владелец должен получить R' обратно с процентом. Это потребует

$$R'(1+i)^{1-f} = 0{,}14926(1{,}02) = 0{,}15075 \text{ млн рб}.$$

Во-вторых, владелец имеет право на проценты от Q. Проценты от Q будут равны

$$Q(1+i)^{1-f} - Q = 11{,}66829(1{,}02)^{0{,}5} - 11{,}66829 = 0{,}11611 \text{ млн рб}.$$

Остаток процентного платежа облигации, а именно :

$$0{,}3 - 0{,}15075 - 0{,}11611 = 0{,}03314 \text{ млн рб}$$

является амортизацией премии и уменьшает книжную стоимость облигации до $11{,}66829 - 0{,}03314 = 11{,}63515$ млн рб. Можно проверить, что значение, полученное для Q, является точно таким же, которое получается по формуле (7) или (8), и что окончательная книжная стоимость 11,63515 млн рб является величиной P.

В реальной практической деятельности Q обычно задается, в то время как значение i известно только приблизительно. Следовательно, точные формулы, полученные в этом параграфе, не имеют большого практического значения. Однако, эти точные формулы обосновывают обычную расчетную практику получения Q и R' как отдельной задачи. Поэтому, когда покупатель облигации рассматривает R' как временную ссуду, которая будет возмещена при первом же процентном платеже облигации, и считает Q книжной стоимостью облигации, которая покупается, и, следовательно, устанавливает инвестиционное расписание с Q, как стартовой стоимостью облигации, он нуждается в способе, который является аналитически точным.

Наконец, следует заметить, что приближенные формулы, используемые в практических расчетах, получаются из точных формул этого параграфа путем замены $(1+i)^f$ на $1+if$, и $s_{\overline{f}|i}$ на f. Так как f является дробной частью (то есть меньше единицы), можно показать, что эти замены обычно отличаются очень мало от точных выражений.

8.9 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМЫ ДОХОДНОСТИ

Возможно, наиболее важная задача, касающаяся облигаций, состоит в определении инвестиционной нормы, которую облигация будет обеспечивать, когда будет куплена за данную цену. Только решив эту задачу, инвестор может определить, которая из нескольких облигаций обеспечивает наилучшую инвестицию. К сожалению, решение этой задачи не выражается в явной аналитической форме, но имеются численные методы получения решения этой важной задачи с различной степенью точности и различающиеся по сложности. Два из них мы рассмотрим.

Метод средних Когда сумма денег инвестируется только на один период, норма процента может быть найдена делением полученных процентов на инвестированную сумму. Когда рассматривается более, чем один период и изменяются как процентные платежи, так и основная сумма, приближенное значение нормы может быть получено путем деления среднего процентного платежа на среднюю основную сумму. Процедура станет ясной на примере.

ПРИМЕР 1 За облигацию 10 млн рб выплачивается 300 тыс рб процентов каждые 15 января и 15 июля. Она будет выкупаться за 11 млн рб 15 января 2000 г. Рыночное предложение 15 января 1990 г. было 120. Какова приблизительная норма доходности, если облигация покупается в этот день ?

РЕШЕНИЕ Покупная цена облигации равна 12 млн рб, так как дата продажи совпадает с датой начисления процентов. Выплаты, которые покупатель будет получать, если он будет держать облигацию до даты погашения, составят 20 процентных платежей облигации по 300 тыс рб каждый, давая в сумме 6 млн рб, и цену выкупа 11 млн рб. Таким образом, он платит 12 млн рб и получает в сумме 6 + 11 = 17 млн рб или чистый выигрыш 17 - 12 = 5 млн рб. Этот полный выигрыш реализуется за период 10 лет, или 20 периодов начисления, так что средний выигрыш за период равен 5000 / 20 = 250 тыс рб. Так как первоначально облигация стоила 12 млн рб и выкупается за 11 млн рб, ее средняя стоимость равна (12 + 11) / 2 = 11,5 млн рб. Теперь мы приблизительно определяем инвестиционную норму делением среднего выигрыша за период на среднюю сумму, инвестированную в облигацию. Это дает приблизительно $i = 0{,}25 / 11{,}5 = 0{,}02174$ или примерно $j_2 = 0{,}0435$.

Естественно появляется вопрос о точности только что описанного метода и на него нет удовлетворительного ответа. В большинстве случаев можно надеяться, что точность составляет около десятой доли процента, так что для только что рассмотренного примера мы можем полагать, что номинальная норма лежит между 4,3 процента и 4,4 процента. Когда желательна большая точность, следует прибегнуть к процедуре уточнения метода средних путем интерполяции, которую опишем ниже.

Метод интерполяции Этот метод состоит в вычислении покупных цен для различных инвестиционных норм пока не найдутся две такие цены, которые ограничат сверху и снизу реальную покупную цену, между которыми и производится интерполяция. Очевидно, что нужно выбирать для вычисления только такие две покупные цены, для которых известны правильные инвестиционные нормы. Это можно сделать практически всегда, если сначала аппроксимировать норму при помощи метода средних.

ПРИМЕР 2 Вычислить норму доходности для примера 1 путем интерполяции.

РЕШЕНИЕ По методу средних, использованному при решении примера 1, мы нашли, что норма равна приблизительно $j_2 = 4{,}35\%$. Поэтому теперь мы вычислим покупные цены, которые обеспечивают $j_2 = 4\%$ и $j_2 = 4{,}5\%$.

$$\text{Р(для } j_2 = 4\%) = 11 + (0{,}3 - 0{,}2)\, a_{\overline{20}|2\%} = 12{,}3081 \text{ млн рб}$$

$$\text{Р(для } j_2 = 4{,}5\%) = 11 + (0{,}3 - 0{,}2475)\, a_{\overline{20}|2\%} = 11{,}8381 \text{ млн рб}$$

Представляя данные в виде таблицы, мы имеем

Покупная цена	i	j, $m = 2$
12,3081	2%	4%
12,0000	i	j
11,8381	2,25%	4,5%

Составим пропорцию

$$\frac{12{,}3081 - 12{,}0000}{12{,}3081 - 11{,}8381} = \frac{4\% - j}{4\% - 4{,}5\%}, \qquad \frac{0{,}3081}{0{,}4700} = \frac{j - 4\%}{0{,}5\%}.$$

Это дает $j_2 = 4{,}328\%$.

Относительно точности нормы доходности, которую дает интерполяция, существует следующее эмпирическое правило: когда норма доходности облигации найдена интерполяцией, результат также немного больше истинного значения. Однако ошибка редко превосходит $(n/5)$, умноженное на квадрат разности использованных норм.

Из только что сформулированного эмпирического правила следует, что ошибка в определении j для примера 2 должна быть не более 0,00005. На самом деле, можно показать при помощи более точных расчетов, что ошибка равна 0,00003.

Оба описанные в этом параграфе метода одинаково хороши для облигаций, покупаемых между датами начисления процентов. Естественно, вычисления несколько более утомительны, но процедура, по существу, точно такая же. Если используется метод средних, мы можем взять или $(P+C)/2$, или $(Q+C)/2$ как среднюю стоимость облигации. Аналитическое исследование показывает, что $(Q + C) / 2$ дает немного более точный результат.

8.10 ТАБЛИЦЫ ОБЛИГАЦИЙ

Чтобы дать представление о покупной цене облигации для большого разнообразия норм доходности, должны быть подготовлены подробные таблицы. Пример такой таблицы приводится ниже.

Когда таблицы имеются под рукой, многие проблемы облигаций могут быть решены при помощи простого взгляда на них. Более того, так как нормы доходности табулированы для значений, которые различаются только на 0,05 % , интерполяция промежуточных значений дает высокую точность.

Так как разнообразное использование таблиц довольно очевидно, в иллюстративных примерах нет надобности. Однако следует подчеркнуть, что не все задачи об облигациях можно решить с использованием таблиц и, следовательно, крайне желательно знание всех методов, рассмотренных в предшествующей части настоящей главы.

Покупная цена облигации с номинальной стоимостью 10 млн рб,
за которую выплачивается процент с нормой $j_2 = 4\%$.

Норма доходности ($m = 2$)	Время до выкупа, годы			
	8	8,5	9	9,5
3,25%	10,5246	10,5531	10,5812	10,6088
3,30%	10,4887	10,5152	10,5412	10,5669
3,35%	10,4529	10,4774	10,5015	10,5252
3,40%	10,4172	10,4397	10,4619	10,4836
...	...	...	...	...
3,85%	10,1024	10,1079	10,1132	10,1184
3,90%	10,0682	10,0718	10,0753	10,0788
3,95%	10,0340	10,0358	10,0376	10,0393
4,00%	10,0000	10,0000	10,0000	10,0000

8.11 ДРУГИЕ ВИДЫ ОБЛИГАЦИЙ

Когда деньги занимаются путем выпуска облигаций, нет никаких теоретических причин устанавливать единственную дату выкупа облигаций. Поэтому компании, выпускающие облигации, могут решить выкупать облигации в рассрочку. Например, облигация с лицевой

стоимостью 100 млн рб за которую выплачиваются проценты с нормой $j_2 = 6\%$, может выкупаться следующим образом \$ 20 млн рб через 10 лет, 30 млн рб через 15 лет и 50 млн рб через 20 лет. Естественно, процент по облигации выплачивается только за неоплаченную лицевую стоимость. Таким образом, за только что упомянутую облигацию выплачивалось бы 3 млн рб через каждые 6 месяцев в течение первых 10 лет, 2,4 млн рб в течение следующих 5 лет и 1,5 млн рб в течение последних 5 лет. Такие облигации называются **серийными облигациями.**

Недолгое размышление позволяет уяснить, что приобретение серийной облигации эквивалентно покупке нескольких отдельных облигаций одновременно, и поэтому методы, развитые в предшествующих параграфах годятся для исследования различных задач, касающихся серийных облигаций.

ПРИМЕР 1 Найти покупную цену серийной облигации, описанной выше, обеспечивающей 4% , $m = 2$.

РЕШЕНИЕ Данная серийная облигация эквивалентна следующим трем с нормой 6% , $m = 2$ с номиналами : 20 млн рб на 10 лет, 30 млн рб на 15 лет и 50 млн рб , выкупаемую через 20 лет. Соответствующие покупные цены равны

$$P_1 = 20 + (0{,}6 - 0{,}4)\, a_{\overline{20}|2\%} = 23{,}27029 \text{ млн рб},$$
$$P_2 = 30 + (0{,}9 - 0{,}6)\, a_{\overline{30}|2\%} = 36{,}71894 \text{ млн рб},$$
$$P_3 = 50 + (1{,}5 - 1{,}0)\, a_{\overline{40}|2\%} = 63{,}67774 \text{ млн рб}.$$

Покупная цена серийной облигации поэтому равна

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 123{,}667 \text{ млн рб} .$$

Все облигации, рассматриваемые до сих пор, выкупались одним или более взносами, каждый из которых был кратным 1 млн рб. Однако нет никаких причин для того, чтобы лицевая стоимость облигации не могла выкупаться таким образом, чтобы выкуп плюс процентные платежи облигации образовывали аннуитет. Таким образом, контракты, которые предназначаются для погашения долга, основной суммы и процентов равными периодическими платежами, часто называются **аннуитетными облигациями.** Оформляемые различным образом аннуитетные облигации

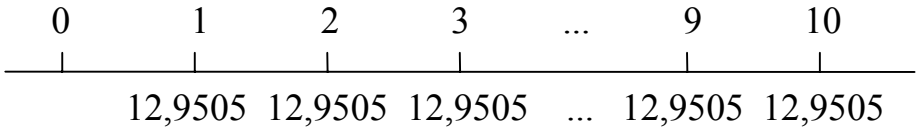
являются контрактами, представляющими аннуитет, подписанный в форме облигации.

ПРИМЕР 2 Основная сумма и проценты 100 миллионной облигации аннуитета будут выкупаться при норме $j_1 = 5\%$ десятью одинаковыми взносами. Сколько предложит потенциальный покупатель за эту облигацию, если он желает реализовать эффективную инвестиционную норму процента a) 4% , b) 5% , c) 6% ?

ПРИМЕР Мы сначала определим, какими будут взносы платежей. Так как они будут образовывать обыкновенный аннуитет, мы имеем

$$100 = R\ a_{\overline{10}|5\%} \quad \text{или} \quad R = 100 / a_{\overline{10}|5\%} = 12{,}9505 \text{ млн рб}$$

Выплаты, которые обеспечиваются этой облигацией, показаны на временной диаграмме



Цена, которая предлагается за эту облигацию, является текущей стоимостью этих платежей, вычисленной для желаемой инвестиционной нормы. Следовательно,

(a) $P = 12{,}9505\ a_{\overline{10}|4\%} = 105{,}0402$ млн рб .

(b) $P = 12{,}9505\ a_{\overline{10}|5\%} = 100{,}0000$ млн рб .

(c) $P = 12{,}9505\ a_{\overline{10}|6\%} = 95{,}3168$ млн рб .

Довольно очевидно, что все задачи, касающиеся облигаций аннуитетов, являются просто задачами аннуитетов, сформулированными в терминологии облигаций, и значит методы, развитые в главах по аннуитетам годятся для их решения.

Глава 9 ОБЕСЦЕНИВАНИЕ

9.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Когда организуется компания, группа людей, называемых акционерами, обеспечивают капитал для приобретения собственности, машин, оборудования и других активов, необходимых для функционирования компании. После этого периодически прибыли компании распределяются между акционерами. Конечно, перед таким распределением необходимо оплатить все затраты на функционирование компании, проценты по ссудам и другие издержки, чтобы иметь чистую прибыль.

Одной из издержек функционирования делового предприятия являются потери в стоимости физической собственности, вызванные различными причинами, не покрываемыми текущими возмещениями. Такие потери в стоимости называются **обесцениванием.** Юридически обесценивание определяется так: «Обесценивание является потерями, невосстанавливаемыми текущей поддержкой, которая вызвана всеми факторами, вызывающими окончательный износ собственности. Эти факторы охватывают износ, разрушение, непригодность и устаревание. Годовое обесценивание является потерями, которые имеют место в течение года.»

Так как основным принципом экономики является то, что капитал, инвестированный в деловое предприятие, следует поддерживать нетронутым, какой-либо систематический план для учета обесценивания должен быть неотъемлемой частью любой хорошо рассчитанной системы.

Обесценивание обычно рассматривается как оперативные издержки и рассчитывается подобно любым другим издержкам. Таким образом ежегодно (или чаще) делается расчет обесценивания физических активов, которыми владеет компания. Иногда обесценивание оформляется путем установления специального фонда, называемого **фондом обесценивания.** В таком случае ежегодно платежи, равные обесцениванию, помещаются в этот фонд до тех пор пока активы не будут проданы, заменены или изношены. Сумма, вкладываемая в фонд обесценивания, не обязательно кладется на денежный счет для сбережения, а может быть инвестирована в самой компании путем использования для выплаты долгов или приобретения других активов. Важным является то, что сумма, равная обесцениванию, берется из

валового дохода и инвестируется каким-либо образом так, чтобы первоначальный капитал оставался нетронутым. Таким образом, в любой момент книги компании должны показывать активы, равные по величине первоначально инвестированному капиталу.

Обычно, когда компания приобретает новую машину или подобную собственность, она сразу же решает в соответствии с наилучшим учетом имеющейся информации какой будет продолжительность полезного использования машины и вероятную стоимость ее остатков в конце этого срока. Затем, исходя из этой информации и стоимости машины компания устанавливает расписание обесценивания, показывающее обесценивание в каждом году, книжную цену (или оценку стоимости) в конце каждого года и полное обесценивание. Хотя много способов используется для решения вопроса о том, каким будет величина обесценивания в каждом году, для всех методов полное обесценивание плюс книжная цена активов должна быть всегда равна первоначальной стоимости активов.

Имеется много способов определения обесценивания различных активов. Некоторые из них будут рассмотрены в следующих параграфах.

9.2 ЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ИЛИ МЕТОД СРЕДНИХ

Одним из простейших и наиболее популярных методов установления суммы обесценивания является метод средних, обычно называемый линейным методом. В этом методе предполагается, что сумма обесценивания для каждого года является одинаковой (постоянной). Таким образом, если C равно первоначальной стоимости и S является стоимостью остатков, или коммерческой стоимостью, в конце периода использования из n лет, тогда годовое обесценивание принимается равным $(C - S)/n$. Этот метод проиллюстрируем следующим примером.

ПРИМЕР Машина стоила компании 33 млн рб. Оценено, что полезная жизнь машины будет 5 лет и что стоимость остатков будет 3 млн рб. Найти годовое обесценивание при помощи линейного метода и построить расписание, которое показывает для каждого года годовое обесценивание, книжную цену машины и полное обесценивание.

РЕШЕНИЕ Так как машина обесценивается на 33 - 3 = 30 млн рб за 5-летний период, среднее обесценивание за каждый год равно 30 / 5 = 6 млн рб/год. Поэтому расписание обесценивания составляется путем уменьшения книжной цены машины на 6 млн рб в каждом году и увеличением обесценивания на ту же самую величину.

Конец года	Годовое обесценивание	Полное обесценивание	Книжная цена
0	0	0	33
1	6	6	27
2	6	12	21
3	6	18	15
4	6	24	9
5	6	30	3

Следует заметить, что имеется два главных возражения линейному методу. a) Он игнорирует проценты фонда обесценивания, когда этот фонд используется. b) Большинство оборудования обесценивается быстрее в течение первых лет, так что книжные цены в течение этих лет значительно выше, чем реальные рыночные цены. Следовательно, первоначальная инвестиция только кажется остающейся нетронутой. Однако несмотря на эти возражения, линейный метод широко используется из-за его простоты.

9.3 МЕТОД ПОГАСИТЕЛЬНОГО ФОНДА

Этот метод является модификацией линейного метода, чтобы учесть накопление процентов фондом обесценивания. Таким образом, устанавливается погасительный фонд для накопления суммы денег, равной полному обесцениванию C - S . Если норма погасительного фонда равна i в год и R является ежегодным платежом в фонд, то

$$R\ s_{\overline{n}|i} = C - S \qquad \text{и} \qquad R = (C - S) / s_{\overline{n}|i}$$

При таком плане стоимость ежегодного обесценивания изменяется от года к году, так как она равна платежу, сделанному в конце года плюс процент, накопленный фондом в течении года. Книжная цена активов определяется как разность между первоначальной стоимостью и полной суммой фонда обесценивания. Расписание обесценивания содержит на два

столбца больше, чем в случае линейного метода : один - годовой взнос в фонд и другой - процент, накопленный фондом в течении года. Эти два показателя добавляются для получения ежегодного обесценивания.

ПРИМЕР Найти ежегодные взносы в фонд обесценивания и составить расписание обесценивания для машины примера предыдущего параграфа, если используется метод погасительного фонда и фонд накапливает с нормой 4% , $m = 1$.

РЕШЕНИЕ Так как полное обесценивание равно 30 млн рб, погасительный фонд за 5 лет должен накопить эту сумму, так что

$$R\, s_{\overline{5}|4\%} = 30 \text{ млн рб} \quad \text{и} \quad R = 30 / s_{\overline{5}|4\%} = 5{,}5388 \text{ млн рб}$$

Расписание теперь выглядит следующим образом

Год	Взнос	Процент фонда	Ежегодное обесценивание	Полное обесценивание	Книжная цена
0	0	0	0	0	33,0000
1	5,5388	0	5,5388	5,5388	27,4612
2	5,5388	0,2216	5,7604	11,2992	21,7008
3	5,5388	0,4520	5,9908	17,2900	15,7100
4	5,5388	0,6916	6,2304	23,5204	9,4796
5	5,5388	0,9408	6,4796	30,0000	3,0000

Следует заметить, что если опустить последний столбец, расписание, по существу, совпадет с расписанием погасительного фонда. Последний столбец «Книжная цена» получается путем вычитания ежегодного обесценивания из книжной цены в конце предыдущего года. Таким образом, в любое время книжная цена плюс полное обесценивание дает первоначальную инвестицию. Поэтому согласно отчетности первоначальная инвестиция остается нетронутой.

9.4 МЕТОД СУММИРОВАНИЯ ДО ЦЕЛОГО

Хотя бухгалтера используют линейный метод и метод погасительного фонда, эти методы многими пользователями считаются нереалистичными. Причина в том, что для многих видов физической собственности обесценивание происходит быстрее в первые годы и

медленнее в течение последних лет. Поэтому получается, что книжная цена является искаженной, вероятно значительно превышающей рыночную цену активов, особенно в первые годы их использования. Следовательно, первоначальная инвестиция остается нетронутой только на бумаге, а не в том смысле, что рыночная цена активов плюс полное обесценивание равны первоначально инвестированной сумме. Если вышеупомянутые рассуждения принять законными, из них следует, что более реалистичный метод анализа обесценивания должен предполагать, что активы быстрее обесцениваются в первые годы и медленнее в последние. Аргументом в пользу этих рассуждений является тот факт, что в большинстве стран такое расписание используется в установлении стоимости автомобилей при налогообложении. Одним из таких подходов является метод суммирования до целого. Применение этого метода иллюстрируется примером.

ПРИМЕР Составить расписание для машины примера параграфа 9.2, используя метод суммирования до целого.

РЕШЕНИЕ Пусть s будет суммой целых чисел от 1 до n, где n будет продолжительностью использования машины. В нашем случае $n = 5$ и $s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Далее образуем дроби 5/15, 4/15, 3/15, 2/15 и 1/15. Заметим, что числители являются целыми числами 1, 2, 3, 4, и 5 в обратном порядке. Теперь для получения стоимости ежегодного обесценивания умножим полное обесценивание 30 млн рб на эти дроби. Таким образом, 30 × (5/15) = 10 млн рб равно обесцениванию для первого года: 30 × (4/15) = 8 млн рб равно обесцениванию на втором году и т.д. Расписание обесценивания теперь выглядит так :

Год	Ежегодное обесценивание	Полное обесценивание	Книжная цена
1	10	10	23
2	8	18	15
3	6	24	9
4	4	28	5
5	2	30	3

Легко показать, что дроби, образованные описанным в примере способом, всегда дают в сумме 1, независимо от величины n; следовательно, сумма стоимостей ежегодных обесцениваний всегда равна полному обесцениванию.

9.5 МЕТОД ПОСТОЯННЫХ ПРОЦЕНТОВ

Другим методом определения стоимостей ежегодных обесцениваний так, чтобы они были больше в первые годы, является метод постоянных процентов. При таком плане каждое годовое обесценивание является фиксированным процентом предшествующей книжной цены. Когда используется этот метод, обычно устанавливается норма обесценивания, а не оценивается продолжительность использования и стоимость остатков. Норма обычно определяется после тщательного анализа рассматриваемого оборудования.

ПРИМЕР 1 Машины определенного типа теряют 10% своей стоимости ежегодно. Машина стоит первоначально 20 млн рб. Составить расписание, показывающее ежегодное обесценивание полное обесценивание и книжную цену в конце каждого года за 5 лет.

РЕШЕНИЕ Стоимость обесценивания для первого года равна 10% от 20 млн рб, то есть 2 млн рб. Книжная цена в конце первого года будет равна 20 - 2 = 18 млн рб. Для второго года стоимость обесценивания будет равна 10% от 18 млн рб, то есть 1,8 млн рб и книжная цена будет 18 - 1,8 = 16,2 млн рб. Продолжая таким образом, мы найдем стоимость обесценивания и книжную цену для каждого года. Полное обесценивание для произвольного времени равно сумме стоимостей обесценивания за предшествующие годы или разности между первоначальной стоимостью и книжной ценой. Расписание в окончательном виде следующее:

Год	Годовое обесценивание	Полное обесценивание	Книжная цена
1	2	2	18
2	1,8000	3,8000	16,2000
3	1,6200	5,4200	14,5800
4	1,4580	6,8780	13,1220
5	1,3122	8,1902	11,8098

Следует заметить, что так как машина теряет 10% своей стоимости каждый год, 90% стоимости остается. Следовательно, каждая книжная цена равна 90% от предшествующей книжной цены. Этот факт делает возможным составить расписание путем вычисления в первую очередь столбца книжных стоимостей.

Процедуру вычислений примера представим в виде формул. Пусть d будет постоянной нормой обесценивания и B_k - книжной ценой в

конце k лет. Обесценивание для следующего года тогда равно dB_k . Если это обесценивание вычитается из книжной цены B_k , получается новая книжная цена. Отсюда $B_{k+1} = B_k - dB_k = B_k (1 - d)$. Эта формула устанавливает фактически, что если вещь теряет долю d своей стоимости, то доля оставшейся стоимости равна $1-d$. Поэтому каждая новая книжная цена равна предшествующей, умноженной на $1 - d$, и книжная цена в конце n лет может быть найдена путем умножения первоначальной стоимости C на $1 - d$ n раз. То есть

$$B_n = C (1 - d)^n . \qquad (1)$$

Эта формула позволяет находить книжную цену в конце любого количества лет, не прибегая к вычислению книжной цены в промежуточные годы.

ПРИМЕР 2 Найти книжную цену машины примера 1 в конце 20 лет.

РЕШЕНИЕ Мы имеем $C = 20$ млн рб, $d = 0{,}1$, и $n = 20$. Подставляя эти значения в формулу, получим

$$B_{20} = 20 (1 - 0{,}1)^{20} = 20 (0{,}9)^{20} .$$

Эти вычисления удобно выполнить с помощью логарифмирования

$$\log B_{20} = \log 20 + 20 \log 0{,}9 = 0{,}88852 .$$

Отсюда $B_{20} = 2{,}431529$ млн рб .

Ранее было установлено, что когда используется метод постоянных процентов, обычно оценивают норму обесценивания и затем вычисляют последовательно книжные цены и стоимости обесценивания. Однако эта процедура не является необходимой, поскольку метод одинаково хорошо работает, если мы предпочитаем оценивать время использования и стоимость остатков оборудования. В этом случае необходимо сначала вычислить норму обесценивания, используя равенство (1), после чего процедура остается той же самой как и до этого. Для определения нормы обычно используют логарифмы.

ПРИМЕР 3 Предполагается, что оборудование стоимостью 150 млн рб будет использоваться 6 лет, после чего его стоимость будет равна 20 млн рб. Если используется метод постоянного процента, найти норму обесценивания.

РЕШЕНИЕ Мы имеем C = 150 млн рб, B_6 = 20 млн рб и n = 6. Подставляя эти значения в уравнение (1), получим

$$20 = 150\,(1 - d)^6 \quad \text{и} \quad (1 - d)^6 = 20 / 150 = 2 / 15$$

Логарифмируя последнее равенство, находим

$$1 - d = 0{,}71475 \quad d = 0{,}28525 = 28{,}525\ \% .$$

Теперь может быть составлено расписание точно таким же образом, как в примере 1. Чтобы облегчить вычисления, можно использовать логарифмы при последовательном вычислении книжных цен. Так как

$$\log B_1 = \log C + \log(1-d) \quad \text{и} \quad \log B_{k+1} = \log B_k + \log(1-d)$$

По этим формулам последовательно находятся книжные цены и затем составляется расписание.

9.6 ГОДОВАЯ ВЕЛИЧИНА ОБЕСЦЕНИВАНИЯ И ПРОЦЕНТОВ

Под годовой величиной обесценивания и процентов будем понимать стоимость, охватывающую стоимость обесценивания и процентную стоимость книжной цены. Годовая процентная стоимость вычисляется на книжную цену за этот год, то есть на книжную цену в конце предыдущего года.

Хотя можно использовать для расчетов любой метод описания обесценивания, в реальной практике почти всегда используется метод погасительного фонда. Однако, норма процентов, с которой накапливает погасительный фонд, не обязательно должна совпадать с нормой, используемой для вычисления процентов на книжную цену активов.

ПРИМЕР Компания выплачивает 33 млн рб за новую машину. Рассчитано, что машина будет использоваться 5 лет и что стоимость остатков после использования будет 3 млн рб. Найти годовую величину обесценивания и процентов, если для компенсации обесценивания используется погасительный фонд с нормой 4% и проценты на книжную цену вычисляются при норме 6% эффективно.

РЕШЕНИЕ Годовая стоимость обесценивания для этой машины вычислялась в примере параграфа 9.3. Годовая стоимость процента находится последовательным умножением книжных цен на 0,06. Таким образом, стоимость процентов в конце первого года равна 6% от 33 млн рб, то есть 1,98 млн рб; стоимость процентов в конце второго года равна 6% от 27,4612 млн рб, то есть 1,6477 млн рб. Полная годовая стоимость теперь находится объединением стоимостей обесценивания и процентов. Расписание имеет вид

Год	Годовая стоимость обесценивания	Книжная цена	Процент (6%)	Полная годовая величина
0	0	33,0000	0	0
1	5,5388	27,4612	1,9800	7,5188
2	5,7604	21,7008	1,6477	7,4081
3	5,9908	15,7100	1,3020	7,2928
4	6,2304	9,4796	0,9426	7,1730
5	6,4796	3,0000	0,5688	7,0484

Метод, использованный в примере для вычисления годовой величины обесценивания и процента, часто называют методом сложных процентов для обесценивания, хотя обесценивание составляет только часть годовой величины.

Формула для годовой величины и процента может быть легко получена, когда используется метод погасительного фонда для обесценивания. Напомним, что увеличение в погасительном в конце k-го года равно $R(1 + i)^{k-1}$. Книжная цена активов в конце $(k - 1)$-го года равна $C - R\,s_{\overline{k-1}|i}$. Поэтому если i' является годовой нормой, используемой для для вычисления процента на книжную цену, тогда полная годовая величина в конце k-го года равна

$$R(1 + i)^{k-1} + (C - R\,s_{\overline{k-1}|i})\,i'.$$

При $i = i'$ это выражение может быть упрощено к виду $R + Ci$. Доказательство этого оставим для упражнений.

Когда годовая величина обесценивания и процентов вычисляется при $i = i'$, полная годовая стоимость часто называется величиной обесценивания по методу аннуитетов, хотя только часть этой величины выражает обесценивание. Действительно, точно такая же величина, $R + Ci$, рассматривалась в параграфе 7.4, где она интерпретировалась как величина инвестиции.

9.7 ИСТОЩЕНИЕ

Угольная шахта во время разработки претерпевает постепенные потери в стоимости, вызванные тем фактом, что уголь из нее выбирается. Подобные потери в стоимости испытывают нефтяные скважины, лесные массивы и различные другие производящие доход активы. Потери в стоимости, вызванные использованием активов, называются **истощением.**

Сразу же, как и в случае обесценивания, следует использовать какой-нибудь систематический план для восстановления потерь капитала, вызванных истощением. Это обычно делается путем годовых платежей в погасительный фонд, называемый **резервом истощения.** Таким образом, если P является покупной ценой истощаемого актива, который будет иметь остаточную стоимость S в конце n лет, то резерв истощения должен составлять $P - S$ к этому времени. Если R является годовым платежом в погасительный фонд, то

$$R\, s_{\overline{n}|i} = P - S \quad \text{или} \quad R = (P - S) / s_{\overline{n}|i} .$$

Когда для защиты от истощения используется погасительный фонд, годовое истощение определяется как увеличение погасительного фонда в этом году и сумма истощения в любой момент времени является суммой резерва истощения. Книжная цена активов является разностью между первоначальной инвестицией и суммой резерва истощения.

Если годовой доход от истощаемых активов равен I, тогда $I - R$ представляет прибыль за год и может рассматриваться как процент на инвестицию. Этот факт может быть представлен такой схемой :

Доход = (процент на инвестицию) + (платеж истощения) .

Одной из главных задач, относящихся к истощаемым активам, касается их оценивания. Пусть r будет годовой нормой, которую потенциальный покупатель хотел бы реализовать на свою инвестицию, I - годовой доход, который активы будут производить, S - остаточная стоимость после n лет и P - покупная цена, которая может быть уплачена. Если от истощения используется погасительный фонд, накапливающий с нормой i, тогда P следует определять так, чтобы

$$I = Pr + R , \quad \text{где } R = (P - S) / s_{\overline{n}|i}$$

Исключая R из этих двух равенств, получим

$$I = P\,r + (P - S)/\ s_{\overline{n}|i}\ . \qquad (2)$$

Разрешая это равенство относительно P, получаем

$$P = (I\ s_{\overline{n}|i} + S)/(1 + r\ s_{\overline{n}|i}) = (I + S/\ s_{\overline{n}|i})/(r + 1/\ s_{\overline{n}|i})\ . \qquad (3)$$

Эти формулы могут быть упрощены в том случае, когда нормы r и i одинаковы. Норма r, однако, обычно больше, чем норма i, соответствующая элементам риска этого сорта предприятий бизнеса.

ПРИМЕР Установлено, что шахта будет обеспечивать доход 500 млн рб в год в течение 25 лет, по окончании которых собственность будет стоить 100 млн рб. Найти покупную цену для получения 8% на инвестицию, если фонд истощения накапливает с нормой 3,5 % . Найти также годовое истощение для пятого года.

РЕШЕНИЕ Покупная цена может быть получена прямой подстановкой в (3). Однако, более полезно решить задачу, используя основные принципы. Пусть P - покупная цена. Тогда платежи в фонд истощения будут равны $R = 500 - 0{,}08P$, и эти платежи должны накопить P - 100 млн рб к концу двадцать пятого года. Поэтому

$$P - 100 = (500 - 0{,}08P)\ s_{\overline{25}|3,5\%}\ , \quad P(1 + 0{,}08\ s_{\overline{25}|3,5\%}) = 100 + 500\ s_{\overline{25}|3,5\%}$$

Разрешая относительно P, получим $P = 4755{,}8267$ млн рб. Годовые платежи в резерв истощения находятся из равенства

$$R = I - Pr = 500 - 0{,}08 \times 4755{,}8267 = 119{,}5339 \text{ млн рб.}$$

Для того, чтобы найти годовое истощение для пятого года, мы сначала найдем сумму резерва истощения в конце четвертого года. Эта сумма будет равна $119{,}5339\ s_{\overline{4}|3,5\%} = 503{,}8286$ млн рб.

Увеличение фонда годом позже будет процентом при норме 3,5% от суммы, только что найденной, плюс регулярный взнос в резерв истощения 119,5339 млн рб. Поэтому истощение для пятого года равно

$$503{,}8286 \times 0{,}035 + 119{,}5339 = 137{,}1679 \text{ млн рб.}$$

Этот результат может быть получен при использовании

формулы $R(1+i)^{k-1}$ (см. параграф 7.4 , здесь $k=5$).

УПРАЖНЕНИЯ 9

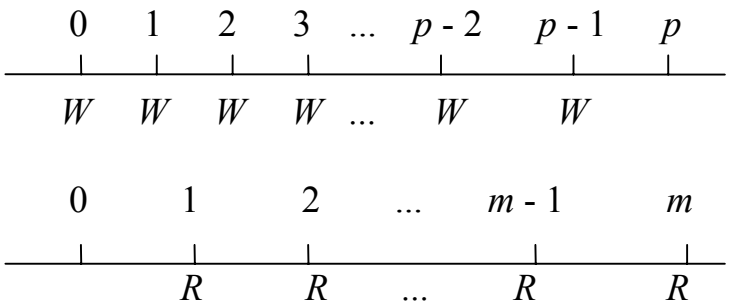
1. Машина стоит 100 млн рб и может быть сдана в металлолом через 5 лет на сумму 20 млн рб. Рассчитать расписание обесценивания машины а) линейным методом, б) методом погасительного фонда при стоимости денег 5% эффективных, в) методом суммирования до целого.
2. Станок стоимостью 250 млн рб может использоваться в течение 20 лет после чего сдается в металлолом без какого-либо возмещения. Найти его полное обесценивание и книжную цену в конце 12 лет а) линейным методом, б) методом погасительного фонда при стоимости денег 4,5% эффективных.
3. Оборудование стоимостью 100 млн рб обесценивается на 25% от своей стоимости каждый год. Рассчитать расписание обесценивания для первых 4 лет. Не рассчитывая расписание дальше, найти, какая книжная цена оборудования была бы в конце 10 лет.
4. Найти книжную цену в конце 8 лет для оборудования, которое стоит 200 млн рб и обесценивается ежегодно на 30% от своей стоимости.
5. Машина такси, стоящая 45 млн рб будет обесцениваться до 5 млн рб к концу третьего года. Найти норму обесценивания и рассчитать его расписание.
6. Грузовик, стоящий 70 млн рб будет обесцениваться до 15 млн рб к концу четвертого года. Найти норму обесценивания и рассчитать его расписание.
7. Автоматическая линия, которая стоит 600 млн рб будет обесцениваться до 50 млн рб через 15 лет. Найти книжную цену в конце 10 лет и определить обесценивание за 17 лет.

Глава 10 ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ

10.1 ОБЩИЕ ПОЛАГАЮЩИЕСЯ АННУИТЕТЫ

Аннуитет называется общим полагающимся, если период платежа отличается от периода начисления процентов и платежи делаются в начале периодов платежей. Исследование общих полагающихся аннуитетов аналогично исследованию общих обыкновенных аннуитетов, в нем общие полагающиеся аннуитеты преобразуются в обыкновенные простые аннуитеты, после чего исследуются как в главе 5.

Пусть W будет платежом общего аннуитета, i - норма процента за период начисления, m - количество периодов конверсии в год, p - число платежей аннуитета в год и R - платеж эквивалентного простого аннуитета. Временная диаграмма, представленная ниже, показывает два эквивалентных аннуитета за 1 год.



Соотношение между платежами двух аннуитетов могут быть установлены путем следующих простых рассуждений. Если первое W на диаграмме представить на конец года, общий аннуитет стал бы обыкновенным и соотношение между аннуитетами, описывалось бы равенством (6) главы 5. Поэтому сумма в конце года для вышеописанного аннуитета превышает одногодичную сумму обыкновенного общего аннуитета на сложный процент, который нарастает в течение года благодаря платежу W. Сложный процент был бы равен $W(1+i)^m - W$, что можно было бы записать в виде $W\,i\,s_{\overline{m}|i}$.

Но это является суммой обыкновенного аннуитета с платежом $W\,i$ за период начисления в течение 1 года. Поэтому каждый платеж R, соответствующий полагающемуся аннуитету, на $W\,i$ больше, чем он был бы, если бы общий аннуитет был обыкновенным аннуитетом. Отсюда мы заключаем

$$R = W / \; s_{\overline{m/p}|i} \;\; = W\,(i + 1/ \; s_{\overline{m/p}|i}\,) = W / \; a_{\overline{m/p}|i} \qquad (1)$$

или в эквивалентном виде

$$W = R\, a_{\overline{m/p}|i} \; . \qquad (2)$$

Эта формула была получена несколько другим путем в параграфе 7.2. (1) и (2) можно получить методом, использованном в параграфе 5.2, используя начало или конец года как дату сравнения. Но это мы оставляем для одного из последующих упражнений.

Когда m/p является дробным, можно воспользоваться таблицами для определения $a_{\overline{m/p}|i}$. Напомним, что таблицы для значений $1/\, a_{\overline{m/p}|i}$ не составляются, так как эта величина только на i отличается от $1/\, s_{\overline{m/p}|i}$, для которой таблицы имеются.

ПРИМЕР 1 Если норма процента равна $j_2 = 5\%$, какая сумма, выплачиваемая в конце каждой половины года аннуитетом, эквивалентна сумме 500 тыс рб, выплачиваемой в начале каждого месяца ?

РЕШЕНИЕ Данные платежи образуют общий полагающийся аннуитет с $W = 500$ и $p = 12$. Желаемые платежи будут образовывать обыкновенный простой аннуитет. Так как $m = 2$ и $i = 0{,}025$, мы имеем

$$R = W / a_{\overline{m/p}|i} = 500 / a_{\overline{m/p}|i} \; .$$

Далее

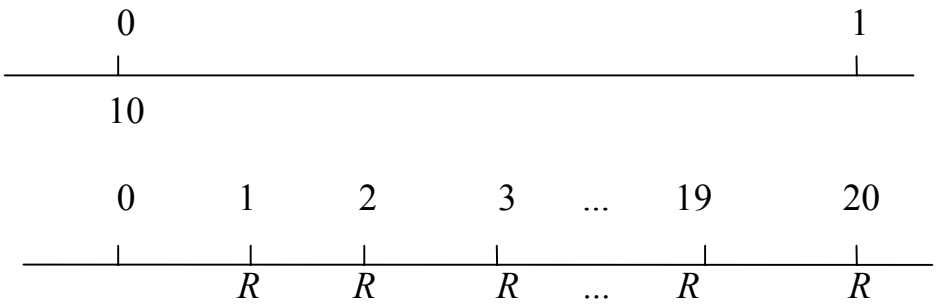
$$1 / \; a_{\overline{1/6}|2\,,5\,\%} = 0{,}025 + 1/ s_{\overline{1/6}|2\,,5\,\%} = 0{,}025 + 6{,}06219991 = 6{,}08719991$$

и поэтому $R = 500 \times 6{,}0871999 = 3043{,}6$ тыс рб являются желаемыми полугодовыми платежами.

ПРИМЕР 2 Если норма процента равна $j_4 = 4\%$, найти аннуитет, выплачиваемый в начале каждого месяца и эквивалентный платежам 10 млн рб в начале каждого пятилетнего периода.

РЕШЕНИЕ Здесь общий полагающийся аннуитет должен быть заменен другим общим полагающимся аннуитетом. Это делается сначала

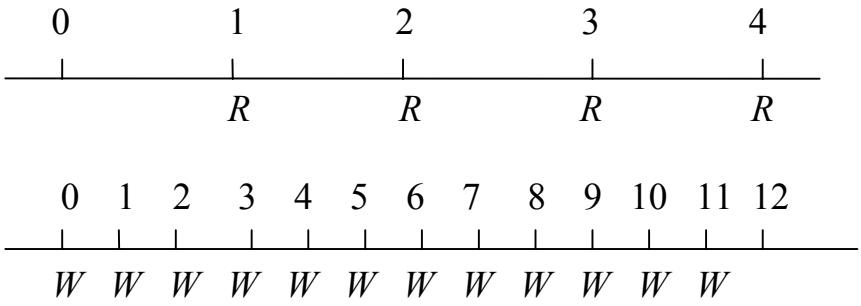
заменой данного аннуитета на обыкновенный простой аннуитет, выплачиваемый поквартально, а затем преобразованием простого аннуитета в общий полагающийся аннуитет, выплачиваемый помесячно. Для первого этапа решения мы возьмем 5 лет как основную единицу измерения времени вместо одного года. Тогда $p = 1$ и $m = 20$.



Так как $W = 10$, $i = 1\%$, $m/p = 20$, мы имеем

$$R = W / \; a_{\overline{m/p}|i} = 10/ a_{\overline{m/p}|i} = 10 \times 0{,}05541531 = 0{,}554153$$

как платежи эквивалентного простого аннуитета, выплачиваемые поквартально. Далее мы заменим простой аннуитет общим полагающимся аннуитетом с платежами, выплачиваемыми в начале каждого месяца. Для этого преобразования построим временную диаграмму на 1 год.



Мы имеем $p = 12$, $m = 4$, $i = 1\%$, $R = 0{,}554153$, тогда

$$W = R \, a_{\overline{m/p}|i} = 0{,}554153 \, a_{\overline{1/3}|1\,\%} = 0{,}554153 \times 0{,}331128 = 0{,}1835 \text{ млн рб.}$$

Другие задачи, касающиеся общего полагающегося аннуитета, такие как нахождение нормы процента или срока, рассматриваются точно таким же способом как в главе 5. Существенным отличием является только использование равенств (1) и (2) для преобразования данного аннуитета в эквивалентный вместо равенств (6) главы 5.

10.2 ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Мы видели, что формулы

$$S = R\ s_{\overline{n}|i} \quad \text{и} \quad A = R\ a_{\overline{n}|i}$$

можно использовать для оценивания общих аннуитетов, где R определяется формулами

$$R = W / s_{\overline{m/p}|i} \quad \text{или} \quad R = W /\ a_{\overline{m/p}|i}$$

в зависимости от того, какой из аннуитетов оценивается обыкновенный или полагающийся. Однако, до сих пор молчаливо предполагалось, что n, число рассматриваемых периодов начисления, является целым. Например, если процент конвертировался ежегодно и платежи делались помесячно, формулы использовались только тогда, когда число платежей было кратно 12. Таким образом, они использовались бы для 24 или 36 платежей, но не для 37. Теперь будет показано, что эти формулы справедливы, является ли число n целым или нет. Например, если норма процента является годовой и имеется 37 ежемесячных платежей, вышеприведенные формулы применяются с $n = 3\ 1/12$.

Пусть W будет платежом обыкновенного общего аннуитета, q - полное число платежей и i - норма процента за период начисления. Пусть p будет числом платежей и m - число периодов начисления для любого удобного интервала времени. Наконец, пусть i' будет нормой процента за интервал платежа, которая эквивалентна i за период начисления. Так как i' является нормой за период платежа и имеется q платежей, ясно, что сумма аннуитета равна

$$S = W\ s_{\overline{q}|i} = W((1 + i')\ - 1)/i'.$$

Так как i и i' эквивалентные нормы, мы имеем

$$(1 + i')^p = (1 + i)^m \quad \text{или} \quad 1 + i' = (1 + i)^{m/p}$$

Если мы теперь исключим i', выразив ее через норму i, мы получим

$$S = W\frac{(1+i)^{(m/p)q} - 1}{(1+i)^{m/p} - 1} = W\frac{i}{(1+i)^{m/p} - 1} \times \frac{(1+i)^{mq/p} - 1}{i}\ .$$

Поэтому

$$S = W \frac{1}{s_{\overline{m/p}|i}} s_{\overline{mq/p}|i} \quad .$$

Теперь если n является количеством периодов начисления, соответствующих q платежам, делаемым через интервалы продолжительностью m/n, последняя формула может быть записана в виде $S = R\ s_{\overline{n}|i}$, где $R = W\ (1/s_{\overline{m/p}|i})$ и $n = mq/p$ является числом периодов в терминах аннуитетов, и эта формула справедлива, является ли n целым или нет.

Доказательство для формулы текущей стоимости является подобным и поэтому не приводится. Подобное доказательство также может быть дано для общего полагающегося аннуитета.

Единственная трудность в использовании этих формул для всех случаев заключается в том, что не существует таблиц для всех возможных n. Однако, большинство случаев, которые встречаются на практике, могут быть рассчитаны, если вместе с таблицами использовать тождества

$$s_{\overline{k+f}|i} = (1+i)^f s_{\overline{k}|i} + s_{\overline{f}|i} \ , \tag{3}$$

$$a_{\overline{k+f}|i} = (1+i)^{-f} a_{\overline{k}|i} + a_{\overline{f}|i} \ , \tag{4}$$

$$s_{\overline{k+f}|i} = (1+i)^{-f} s_{\overline{k}|i} + a_{\overline{f}|i} \ , \tag{5}$$

$$a_{\overline{k+f}|i} = (1+i)^f a_{\overline{k}|i} - s_{\overline{f}|i} \ . \tag{6}$$

ПРИМЕР 1 Контракт предназначен для выплаты 1 млн рб в конце каждого месяца в течение 29 месяцев. Найти текущую стоимость, если начисляется 6% эффективно.

РЕШЕНИЕ Способ 1. (Использование тождеств) Платежи образуют обыкновенный общий аннуитет с $W = 1$, $p = 12$, $i = 6\%$, $m = 1$. Точно также, как в главе 5, мы находим, что эквивалентные годовые платежи равны

$$R = W / s_{\overline{m/p}|i} = 1 / s_{\overline{1/12}|6\%} = 12{,}326528 .$$

Так как срок аннуитета равен 29 месяцам, $n = 2\ 5/12$ года (периодов платежей) и

$$A = R\ a_{\overline{n}|i} = 12{,}326528\ a_{\overline{1/12}|6\%} .$$

Теперь выразим функцию $a_{\overline{29/12}|6\%}$ с помощью тождества (4)

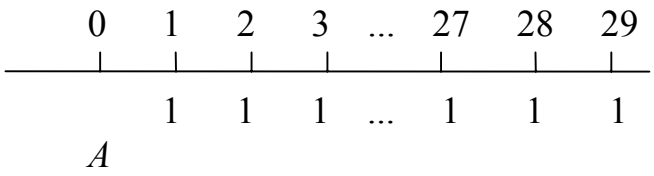
$$a_{\overline{2+5/12}|6\%} = (1{,}06)^{-5/12}\ a_{\overline{2}|6\%} + a_{\overline{5/12}|6\%} .$$

Все величины, встречающиеся в слагаемых правой части являются табулированными и мы имеем

$$a_{\overline{2+5/12}|6\%} = 0{,}976013 \times 1{,}833393 + 0{,}399773 = 2{,}189189.$$

Поэтому $A = 12{,}326528 \times 2{,}189189 = 26{,}9851$ млн рб .

Способ 2. Этот способ состоит в написании уравнения эквивалентности, использующего в качестве даты сравнения конец периода начисления процентов, ближайший к концу срока аннуитета. Так как срок равен 29 месяцам, конец второго года будет использован как дата сравнения.



Сначала найдем R, эквивалентный годовой платеж, точно также, как в способе 1. Тогда наше уравнение эквивалентности приобретет вид

$$A\ (1{,}06)^2 = R\ s_{\overline{2}|6\%} + R\ a_{\overline{5/12}|6\%} .$$

Подставляя численные значения величин правой части, имеем

$$A\ (1{,}06)^2 = 12{,}326528\ (2{,}06 + 0{,}399773) = 30{,}320457 .$$

Следовательно, $A = 30{,}320457\ (1{,}06)^{-2} = 26{,}9851$ млн рб .

ПРИМЕР 2 Если человек вносит на депозит 1 млн рб в конце каждых 4 месяцев в течение трех лет и 8 месяцев в сберегательный банк, который установил норму процента 4% эффективно, сколько денег он будет иметь на своем счете через это время ?

РЕШЕНИЕ Способ 1. Мы хотим найти сумму обыкновенного общего аннуитета, для которого $W = 1$ млн рб, $p = 3$, $m = 1$, $i = 4\%$ и n , число периодов начисления, равно $11/3$. Точно также, как в главе 5, мы находим эквивалентный простой аннуитет с ежегодными платежами. Таким образом,

$$R = W / \, s_{\overline{m/p}|i} = 1 / \, s_{\overline{1/3}|4\%} = 3{,}039651 \, .$$

Сумма аннуитета тогда равна

$$S = R \, s_{\overline{n}|i} = 3{,}039651 \, s_{\overline{11/3}|4\%} \, .$$

Чтобы использовать таблицы для определения величины $s_{\overline{11/3}|4\%}$, мы используем тождество (5). Тогда получим

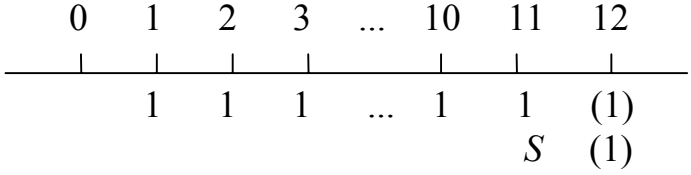
$$s_{\overline{4-1/3}|4\%} = (1{,}04)^{-1/3} \; s_{\overline{4}|4\%} - a_{\overline{1/3}|4\%} \, .$$

Все величины правой части табулированы и мы имеем

$$s_{\overline{4-1/3}|4\%} = 0{,}987012 \times 4{,}246464 - 0{,}324712 = 3{,}866597.$$

Отсюда $S = 3{,}039651 \times 3{,}866597 = 11{,}7531$ млн рб.

Способ 2. Выпишем уравнение эквивалентности, использующее конец четвертого года в качестве даты сравнения, так как она является концом периода начисления ближайшего к концу срока аннуитета.



Мы добавили дополнительный 1 млн рб в обеих строках диаграммы в конце 4 лет (12 периодов начисления). Уравнение эквивалентности для этой даты имеет вид

$$S\,(1{,}04)^{1/3} + 1 = R\; s_{\overline{4}|4\%}\,,$$

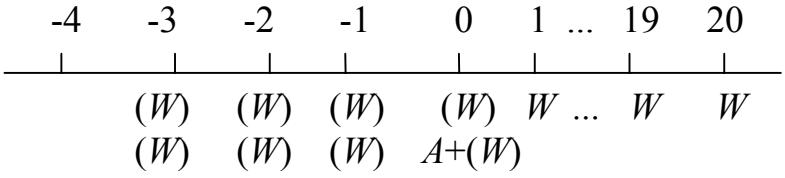
где R имеет то же самое значение как в первом варианте.

$$S\,(1{,}04)^{1/3} = 3{,}039651 \times 4{,}246464 - 1 = 11{,}907770$$
$$S = 11{,}907770\,(1{,}04)^{-1/3} = 11{,}7531 \text{ млн рб.}$$

Когда нужно определить платежи общего аннуитета, используется та же самая процедура, как и в главе 5. Однако, с целью упрощения вычислений в качестве даты сравнения следует выбирать конец периода начисления, ближайший к дате, на которую известна эквивалентная стоимость аннуитета.

ПРИМЕР 3 Стоимость автомобиля равна 40 млн рб наличными. Он покупается за 5 млн рб наличными и остаток возмещается равными платежами в конце каждого месяца в течение 20 месяцев. Какими должны быть эти платежи, если норма процента равна 7% эффективно ?

РЕШЕНИЕ Платежи будут образовывать обыкновенный общий аннуитет с текущей стоимостью $A = 35$ млн рб, $p = 12$, $m = 1$, $i = 7{,}5\%$. Так как срок аннуитета равен 20 месяцам, или 5/3 года, ближайший конец периода начисления для аннуитета с эквивалентной стоимостью $A = 35$ попадает на четыре месяца раньше даты покупки. Представим временную диаграмму, показывающую это



Мы добавили 4 платежа (W) к аннуитету и эквивалентной стоимости A, как показано на диаграмме. Пусть R будет эквивалентный ежегодный платеж; выпишем уравнение эквивалентности, использующее 4 месяца до даты покупки как дату сравнения. Так как все временные интервалы должны быть выражены в годах, мы получаем

$$R\; a_{\overline{2}|7{,}5\%} = R\; a_{\overline{1/3}|7{,}5\%} + A\,(1{,}075)^{-1/3}$$

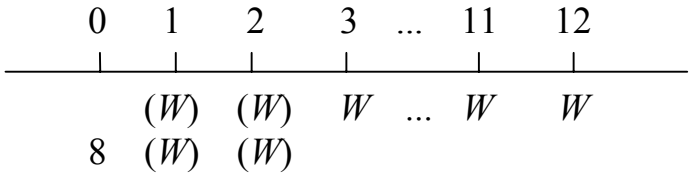
$$R\,(a_{\overline{2}|7,5\%} - a_{\overline{1/3}|7,5\%}) = 35\,(1{,}075)^{-1/3}\,.$$

Отсюда R (1,477983) = 34,166348 или R = 23,11687 млн рб. Мы теперь преобразуем эти годовые платежи R в ежемесячные платежи. Тогда получим

$$W = R\; s_{\overline{1/12}|7,5\%} = 23{,}11687 \times 0{,}080599 = 1{,}8632 \text{ млн рб.}$$

ПРИМЕР 4 Некто занял 1 июня 8 млн рб , которые он будет возмещать десятью одинаковыми ежемесячными платежами, первый из которых будет сделан 1 сентября. Если деньги стоят j_2 = 8% , какими должны быть эти платежи ?

РЕШЕНИЕ Представим данные на временной диаграмме.



Два дополнительных платежа (W) добавляются к аннуитету и к эквивалентной сумме 8 млн рб, как показано на диаграмме. Выпишем равенство стоимостей с датой займа в качестве даты сравнения. Это дает

$$R\; a_{\overline{2}|4\%} = 8 + R\; a_{\overline{1/3}|4\%}\;,$$

где R являются эквивалентными полугодовыми платежами и время измеряется полугодиями. Разрешая это уравнение относительно R и подставляя численные значения, получим

$$R\,(a_{\overline{2}|4\%} - a_{\overline{1/3}|4\%}) = R\,(1{,}561383) = 8 \quad \text{или} \quad R = 5{,}123664.$$

Тогда $W = R\; s_{\overline{1/6}|4\%} = 5{,}123664 \times 0{,}163955 = 0{,}84$ млн рб.

Конечно, проиллюстрированные методы можно использовать, не прибегая к помощи таблиц. В этом случае придется использовать логарифмирование для определения значений функций составных платежей.

ПРИМЕР 5 По контракту приходится выплачивать 2 млн рб в конце каждых двух недель в течение 100 недель. Найти эквивалентную наличную сумму такого контракта, если деньги стоят $j_{12} = 7{,}2\ \%$.

РЕШЕНИЕ Здесь $W = 2$, $q = 50$, $p = 26$, $i = 0{,}006$, $m = 12$, $n = qm/p = 23\ 1/13$. Настоящая стоимость этого обыкновенного общего аннуитета будет $A = R\ a_{\overline{n}|i}$, где $R = W / s_{\overline{m/p}|i}$. Таблицы не содержат необходимых значений, так что функции составных платежей приходится вычислять с использованием логарифмирования. Для этого, комбинируя два последних равенства и заменяя функции составных платежей их явными выражениями, мы получим

$$A = W\,(1/\,s_{\overline{m/p}|i}\,)\ a_{\overline{n}|i} =$$

$$= W\,\frac{i}{(1+i)^{m/p}-1} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\ .$$

Следовательно,

$$A = 2\ (1 - (1{,}006)^{-23\ 1/13}) / (1{,}006)^{6/13} - 1).$$

Используя логарифмирование для вычислений, получим

$$(1{,}006)^{6/13} = 1{,}002765 \quad \text{и} \quad (1{,}006)^{-23\ 1/13} = 0{,}871056.$$

Поэтому

$$A = 2\ (1 - 0{,}871056) / (1{,}002765 - 1) = 93{,}27 \text{ млн рб}\ .$$

10.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ПЛАТЕЖЕЙ И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ПЛАТЕЖА

Если q является числом интервалов платежа общего аннуитета, n в терминах аннуитета является числом периодов начисления процентов, а p и m являются числами интервалов платежа и периодов начисления, соответственно, в год, тогда очевидно, что $q/n = p/m$. Во всех задачах общего аннуитета p и m задаются, так что если q известно, n легко определяется и наоборот. Теперь мы рассмотрим задачу нахождения q , когда известен достаточный набор данных. Как и в случае простых аннуитетов, если A или S , i и W заданы (конечно, в предположении, что m и p известны), обычно не существует

никакого подходящего аннуитета с точно такими же параметрами и необходимо рассматривать один платеж, отличающийся от W для того, чтобы удовлетворить соотношению эквивалентности. Обычно, как и в случае простых аннуитетов, этот отличающийся платеж бывает заключительным и производится через один интервал платежа после последнего регулярного платежа W. В дальнейшем считается, что все нестандартные аннуитеты содержат заключительный платеж F, который меньше W и производится через один интервал платежа после последнего регулярного платежа W.

Когда имеется достаточный набор данных, число платежей и заключительный платеж находятся при помощи решения соответствующих уравнений эквивалентности. Технику расчетов лучше продемонстрировать на примерах.

ПРИМЕР 1 Найти число полных платежей и величину заключительного платежа, необходимых для аннулирования долга 10 млн рб, если 1 млн рб выплачивается в конце каждого года и норма процента равна 6% , $m = 4$.

Так как $m = 4$, $p = 1$, $W = 1$, мы имеем для эквивалентного простого аннуитета

$$R = W / \, s_{\overline{m/p}|i} = 1 / s_{\overline{4}|1,5\%} .$$

Так как долг равен 10 млн рб, $A = 10$ и $10 = R \; a_{\overline{n}|1,5\%}$. Разрешая это равенство относительно $a_{\overline{n}|1,5\%}$, мы получим

$$a_{\overline{n}|1,5\%} = 10 / R = 10 \; s_{\overline{4}|1,5\%} = 40{,}9090338 .$$

Обращаясь к таблицам, мы находим, что эта величина лежит между табулированными значениями для $n = 63$ и $n = 64$. Так как в каждом интервале платежа содержится 4 периода начисления процентов, мы приходим к заключению, что 16 полных платежей по 1 млн рб было бы более, чем достаточно, чтобы рассчитаться с долгом, и поэтому аннуитет содержит 15 полных платежей по 1 млн рб и заключительный платеж F меньше 1 млн рб, уплачиваемый в конце 16-го года.

Чтобы найти F, представим известные данные на диаграмме

Диаграмма интервалов платежа

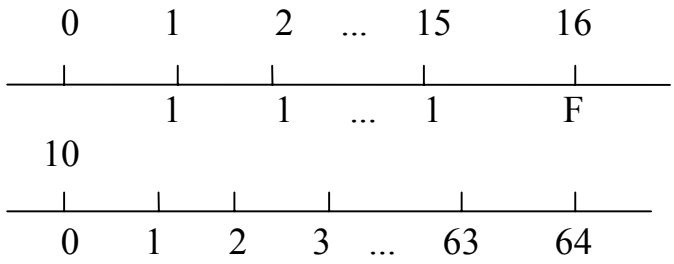


Диаграмма периодов начисления процентов

Величина F может быть теперь найдена методом, использованным в главе 4. Если мы добавим 1 к общему аннуитету и его эквивалентной стоимости в конце 16-го года (64-го периода начисления) и выпишем уравнение эквивалентности с на эту дату, мы получим

$$F + R\ s_{\overline{64}|1,5\%} = 1 + 10\ (1{,}015)^{64},$$

где $R = 1\ /\ s_{\overline{4}|1,5\%} =$ 0,24444479. Разрешая равенство относительно F, мы получим

$$F = 1 + 10 \times 2{,}593144 - 0{,}244445 \times 106{,}209628 = 0{,}9691.$$

Величина F может быть найдена также путем интерполяции способом, подобным описанному в параграфе 4.8. Этот способ состоит в определении числа платежей общего аннуитета q (но не числа периодов начисления процентов n) путем интерполяции между последовательными целыми числами q, затем умножением дробной части решения на W получим F.
Общее доказательство справедливости этого способа будет дано в следующем параграфе.

ПРИМЕР 2 Найти F предшествующего примера путем интерполяции.

РЕШЕНИЕ Как в предшествующем примере, мы находим, что $a_{\overline{n}|1,5\%} =$ = 40,9090338 и что это значение лежит между табулированными значениями для $n = 63$ и $\underline{n} = 64$. Однако, так как интерполяция должна быть между последовательными целыми числами q, для интерполяционной таблички мы используем $n = 60$ и $n = 64$

q	16	$15+f$	15
n	64		60
$a_{\overline{n}\|1,5\%}$	40,957853	40,909034	39,380269

Интерполируя, мы получаем

$$f = 0{,}1528765 / 0{,}1577584 = 0{,}969055$$

и $F = f\,W = 0{,}969055$ млн рб .

ПРИМЕР 3 Некто покупает подержанный автомобиль стоимостью 15 млн рб путем выплаты 5 млн рб наличными и 0,5 млн рб в конце каждого месяца до полного расчета. Найти число платежей и заключительный платеж, если деньги стоят 6% , $m = 2$.

РЕШЕНИЕ Способ 1. Ежемесячные платежи будут образовывать аннуитет, для которого настоящая стоимость $A = 10$, $W = 0{,}5$, $p = 12$, $m = 2$, $i = 3\%$. Поэтому

$$10 = R\ a_{\overline{n}|3\%} \quad , \quad \text{где } R = 0{,}5 / s_{\overline{1/6}|3\%} = 3{,}03728447.$$

Определяя отсюда $a_{\overline{n}|3\%}$, мы получим

$$a_{\overline{n}|3\%} = 10 / R = 20\ s_{\overline{1/6}|3\%} = 3{,}2924146. \qquad \text{(a)}$$

Теперь мы можем найти срок и, следовательно, число платежей способом, использованным в примере 1. Однако, потребуется меньше вычислений, если будет использована следующая процедура. Определим по таблице значение, ближайшее к полученному значению $a_{\overline{n}|i}$ на последнем шаге, затем используем следующие тождества :

$$a_{\overline{n+k}|i} = a_{\overline{n}|i} + (1+i)^{-n}\ a_{\overline{k}|i} \qquad \text{(b)}$$

$$a_{\overline{n-k}|i} = a_{\overline{n}|i} - (1+i)^{-n}\ s_{\overline{k}|i} \qquad \text{(c)}$$

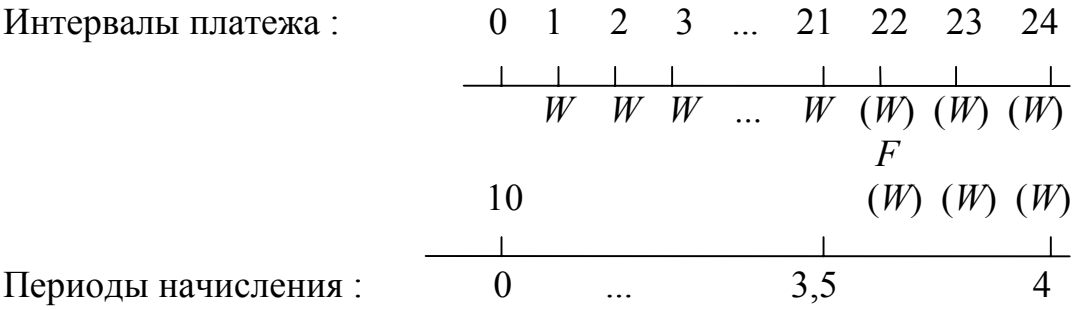
Выберем n как целое, ближайшее к концу срока аннуитета так, чтобы k не превышало 1/2 . В нашем случае $a_{\overline{n}|i}$ ближе к значению, данному для $n = 4$, чем для $n = 3$, так что мы выбираем тождество (c). Таким образом

$$a_{\overline{n}|3\%} = a_{\overline{4}|3\%} - (1{,}03)^{-4}\, s_{\overline{k}|3\%} ,$$

где мы написали n на месте $n - k$ для нецелого решения уравнения (a) и k является дробной частью, остающейся в четвертом периоде начисления. Разрешая это равенство относительно $s_{\overline{k}|3\%}$, мы получим

$$s_{\overline{k}|3\%} = (a_{\overline{4}|3\%} - a_{\overline{n}|3\%})(1{,}03)^4 = 0{,}477985 \qquad \text{(d)}$$

Обратившись к таблице, мы найдем, что k лежит между 2/6 и 3/6. Таким образом, n лежит между $4 - 1/3 = 3\ 2/3$ и $4 - 1/2 = 3\ 1/2$. Так как имеется 6 платежей на период начисления, то будет $6 \times 3{,}5 = 21$ полных платежей и двадцать второй частичный платеж. Если бы мы использовали ошибочно другое тождество на этом последнем шаге, полученное значение $s_{\overline{k}|i}$ (или $a_{\overline{k}|i}$) не было бы найдено в таблице, поскольку значение k превысило бы 1/2. Для того, чтобы определить F рассмотрим диаграмму



Добавляя три платежа по W к аннуитету и к эквивалентной сумме и выписывая уравнение эквивалентности с концом четвертого периода начисления как датой сравнения, получим

$$F(1{,}03)^{1/3} + R\, s_{\overline{4}|3\%} = 10\,(1{,}03)^4 + R\, s_{\overline{1/2}|3\%} .$$

Поскольку $10 = R\, a_{\overline{n}|3\%}$ и $s_{\overline{4}|3\%} = (1{,}03)^4\, a_{\overline{4}|3\%}$ это последнее равенство может быть записано в виде

$$F(1{,}03)^{1/3} = R\, s_{\overline{1/2}|3\%} - R(a_{\overline{4}|3\%} - a_{\overline{n}|3\%})(1{,}03)^4 .$$

Второе слагаемое в правой части по равенству (d) равно $R\, s_{\overline{k}|3\%}$, так что

$$F = R\,(\,s_{\overline{1/2}|3\,\%} - s_{\overline{k}|3\,\%}\,)(1{,}03)^{-1/3} = 0{,}0551 \text{ млн рб}\,.$$

Способ 2 (интерполяция). Как и в предшествующем решении, мы сначала определим, сколько нужно платежей. Так как понадобится 21 полных платежей и 22-ой частичный платеж, интерполяция производится между значениями, соответствующими $q = 21$ и $q = 22$. Поэтому мы определим n, а отсюда и q, интерполяцией между значениями $a_{\overline{3+1/2}|3\,\%}$ и $a_{\overline{4+1/3}|3\,\%}$. Однако, нет необходимости вычислять эти функции, так как из известных тождеств видно

$$a_{\overline{3+1/2}|3\,\%} = a_{\overline{4}|3\,\%} - (1{,}03)^{-4}\, s_{\overline{1/2}|3\,\%}\,,$$
$$a_{\overline{4+1/3}|3\,\%} = a_{\overline{4}|3\,\%} - (1{,}03)^{-4}\, s_{\overline{1/3}|3\,\%}\,,$$

что интерполяция между членами левой части для n эквивалентна интерполяции для k между значениями $s_{\overline{1/2}|3\,\%}$ и $s_{\overline{1/3}|3\,\%}$. Используя значение $s_{\overline{k}|3\,\%} = 0{,}477985$ как найденное в предыдущем решении, мы образуем следующую интерполяционную табличку

q	21	21 + f	22
k	1/2		1/3
$s_{\overline{k}\|3\,\%}$	0,496305	0,477985	0,330054

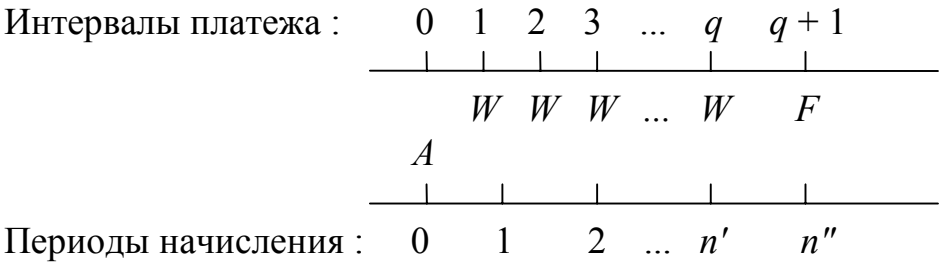
Интерполируя, мы получим $f = 0{,}018320/0{,}166251 = 0{,}11019$ и $F = f\,W = 0{,}0551$.

Хотя каждое из решений последнего примера представляется длинным, будет видно, что они являются наглядными и требуют немного вычислительной работы. Более того, все функции, встречающиеся в вычислениях, обычно табулированы с точностью до восьми десятичных знаков, посредством чего обеспечивается точность окончательного результата по крайней мере до семи значащих цифр.

10.4 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБЩЕЙ ТЕОРЕМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть A будет текущей стоимостью аннуитета, W - периодический платеж, p - число платежей за год, i - норма процента за период конверсии и m - число периодов конверсии в год. Когда вышеперечисленные величины заданы, аннуитет обычно является нестандартным, так что заключительный платеж F, рассчитываемый на дату через один интервал платежа после последнего платежа W, для эквивалентности необходимо определять. Если q, число платежей, определяется путем интерполяции между значениями, соответствующими последовательным целочисленным значениям q, тогда дробная часть f этого решения, умноженная на W, дает заключительный платеж.

Доказательство Предположим сначала, что аннуитет является обыкновенным аннуитетом, так что временные диаграммы платежей выглядят следующим образом



где $n' = q\ (m/p)$ и $n'' = (q + 1)(m/p)$. Уравнение эквивалентности с исходной датой в качестве даты сравнения имеет вид

$$A = R\ a_{\overline{n'}|i} + F\,(1+i)^{-n''}, \qquad \text{где } R = W / s_{\overline{m/p}|i}\,.$$

Поэтому

$$F = (A - R\,a_{\overline{n'}|i})(1+i)^{n''} \tag{a}$$

Если мы установим $a_{\overline{n}|i} = A / R$, тогда $n = (q + f)(m/p)$, где f лежит между 0 и 1. Интерполирование по n между n' и n'' эквивалентно интерполированию по f, что дает

$$f = (A/R - a_{\overline{n'}|i}) / (a_{\overline{n''}|i} - a_{\overline{n'}|i})\,.$$

Отсюда

$$A - R\ a_{\overline{n'}|i} = f R\,(a_{\overline{n''}|i} - a_{\overline{n'}|i})\,. \tag{b}$$

Исключая A из (a) и (b), получим

$$F = f R\,(a_{\overline{n''}|i} - a_{\overline{n'}|i})(1+i)^{n''} .$$

Используя тождество (10) из параграфа 4.4

$$a_{\overline{n''}|i} - a_{\overline{n'}|i} = a_{\overline{n''-n'}|i}\,(1+i)^{n''-n'} ,$$

приходим к равенству

$$F = f R\; a_{\overline{n''-n'}|i}\,(1+i)^{n''-n'} = f R\, s_{\overline{n''-n'}|i} . \qquad \text{(c)}$$

Но $n'' - n' = m/p$ и $R\; s_{\overline{m/p}|i} = \mathrm{W}$, поэтому $F = f W$.

Если аннуитет является полагающимся аннуитетом, каждый платеж, включая F, приходится на один период раньше и равенство (a) преобразуется к виду

$$F = (A - R a_{\overline{n'}|i})(1+i)^{n'} \quad , \quad \text{где } R = W / a_{\overline{m/p}|i} .$$

Равенство (c) принимает вид

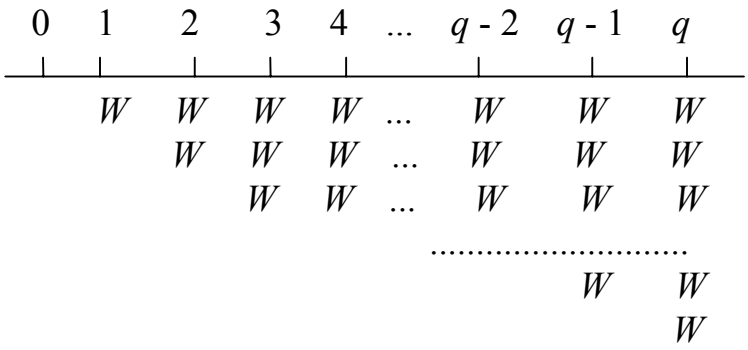
$$F = f R\; a_{\overline{n''-n'}|i} = f R\, a_{\overline{m/p}|i} = f W .$$

10.5 ДРУГИЕ ВИДЫ АННУИТЕТОВ

Имеется несколько других видов аннуитетов, которые иногда встречаются. Некоторые из них кратко рассмотрены ниже.

Увеличивающиеся аннуитеты Этот термин применяется к последовательности периодических платежей W, $2W$, $3W$, ..., qW, каждый из которых на W больше предыдущего пока не будет сделано q платежей. Как обычно, пусть i обозначает норму процента за период конверсии, m - число периодов конверсии в год, p - число платежей в год и $n = qm/p$ число периодов начисления в течение срока аннуитета. Для того, чтобы найти итоговую сумму такого аннуитета, мы рассмотрим его как совокупность q следующих отдельных

аннуитетов : один аннуитет с q платежами по W, другой аннуитет с q - 1 платежами по W, третий аннуитет с q - 2 платежами по W и т.д., все эти аннуитеты заканчиваются в одно и то же время, как показано на временной диаграмме



Каждый из аннуитетов будет эквивалентен простому аннуитету с платежами по $R = W / s_{\overline{m/p}|i}$ и со сроками qm/p ($= n$), $(q - 1)m/p$, $(q - 2)m/p$, ... , $2m/p$ и, наконец, m/p. Поэтому итоговая сумма увеличивающегося аннуитета равна

$$S = R\, s_{\overline{n}|i} + R\, s_{\overline{(q-1)m/p}|i} + R\, s_{\overline{(q-2)m/p}|i} + \ldots + R\, s_{\overline{m/p}|i}\,.$$

Если функции составных платежей представить в явной форме и выполнить упрощающие преобразования, тогда получим

$$S = R\,((1+i)^{n} + (1+i)^{(q-1)m/p} + \ldots + (1+i)^{m/p} - q)/i$$

Сумма в скобках этого выражения является геометрической прогрессией с q членами, первый член равен $(1+i)^{n}$, и знаменателем $(1+i)^{n}$. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, мы получим

$$S = R\,(((1+i)^{n} - 1)/(1 - (1+i)^{-m/p}) - q) / i = R\,((s_{\overline{n}|i} / a_{\overline{m/p}|i}) - q) / i \qquad (7)$$

последнее упрощение использует деление числителя и знаменателя предшествующей дроби на i.

Если требуется найти настоящую стоимость или другую эквивалентную стоимость увеличивающегося аннуитета, рекомендуется сначала определить его итоговую сумму из равенства (7), а затем преобразовывать ее к желаемой дате.

Уменьшаюшиеся аннуитеты Уменьшающийся аннуитет отличается от увеличивающегося аннуитета только тем, что первый платеж равен qW и каждый последующий платеж на W меньше предыдущего до тех пор пока не достигнут заключительный платеж W. Так как этот аннуитет может рассматриваться как сумма q различных аннуитетов, начинающихся в одно и то же время, проще определять формулу для его настоящей стоимости, а не для итоговой суммы. Формула имеет вид

$$A = R\,(q - (a_{\overline{n}|i} / s_{\overline{m/p}|i}))\,/\,i \quad , \tag{8}$$

где $R = W / s_{\overline{m/p}|i}$. Ее доказательство подобно доказательству формулы для увеличивающегося аннуитета и предлагается сделать читателю в качестве упражнения. Если уменьшающийся аннуитет должен быть рассмотрен для даты, отличающейся от начальной, рекомендуется сначала вычислить его настоящую стоимость, а затем преобразовать ее к требуемой дате.

Наконец, следует заметить, что если аннуитет является увеличивающимся или уменьшающимся полагающимся аннуитетом, R, встречающееся в равенствах (7) или (8) следует вычислять с помощью равенства (1) главы 10, $R = W/a_{\overline{m/p}|i}$.

Аннуитеты, выплачиваемые непрерывно Этот тип аннуитетов относится к сбору конечных сумм денег T, в каждый период начисления, когда деньги собираются непрерывным потоком в течение периода. Хотя непрерывные аннуитеты в реальном бизнесе не встречаются, они достаточно близко приближаются в определенных практических случаях, таких как поток монет в системе городского метро.

Для получения формул для текущей стоимости и итоговой суммы такого аннуитета необходимы два соотношения из анализа

$$p\,((1+i)^{m/p} - 1) \to m \ln (1+i) \quad , \quad \text{когда} \quad p \to 0 \tag{9}$$

$$(1 + 1/x)^{x} \to \mathrm{e} = 2{,}71828\ldots \, , \quad \text{когда} \quad x \to 0 \tag{10}$$

Настоящая стоимость обыкновенного общего аннуитета может быть записана в виде

$$A = W\, a_{\overline{n}|i} / s_{\overline{m/p}|i} \, . \tag{11}$$

Пусть $T = p\,W$ будет равно полным платежам аннуитета за год. Тогда

$$A = T\,i\;a_{\overline{n}|i} / (p\,((1+i)^{m/p} - 1)) .$$

Если мы устремим p к бесконечности и используем предел из соотношения (9), мы получим

$$A \to T\,i\;a_{\overline{n}|i} / (m \ln (1+i)) \quad , \quad \text{когда} \quad p \to 0 . \tag{12}$$

Подобным образом

$$S \to T\,i\;s_{\overline{n}|i} / (m \ln (1+i)) \quad , \quad \text{когда} \quad p \to 0 \quad . \tag{13}$$

Аннуитеты с процентами, начисляемыми непрерывно Возвращаясь к равенству (11), будем считать p постоянным, $i = j/m$, $n = tm$, где t равно продолжительности полного года. Тогда

$$A = W \frac{i}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1} \times \frac{1 - \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{-tm}}{\frac{j}{m}} \quad .$$

Это последнее соотношение может быть записано в виде

$$A = W \frac{1 - \left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/j}\right]^{-jt}}{\left[\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/j}\right]^{j/p} - 1} \quad .$$

Если теперь m устремить к бесконечности, соотношение (10) при $x = m/j$ дает

$$A \to W\,(1 - e^{-jt}) / (e^{j/p} - 1) \quad , \quad S \to W\,(e^{jt} - 1) / (e^{j/p} - 1) .$$

Вышеприведенные формулы применяются к аннуитетам, для которых платежи делаются конечное число раз в год, но процент конвертируется непрерывно.

Аннуитеты с непрерывными платежами и непрерывно конвертируемым процентом В качестве последнего варианта рассмотрим аннуитет, для которого и платежи и процент являются непрерывными. Пусть $T = p\ W$ будет полный годовой платеж, и пусть $n = tm$, где t равно полной продолжительности года. Если m и p могут увеличиваться до бесконечности, использование соотношений (9) и (10) дает

$$A \to T\,(1 - e^{-jt})\,/\,j \quad , \qquad S \to T\,(e^{jt} - 1)\,/\,j \quad .$$

Если мы не требуем, чтобы платежи аннуитета все были одинаковыми, очевидно, число различных теоретически возможных типов аннуитетов практически неограниченно. Несмотря на то, что было бы возможно получить формулы для практически любых типов ситуаций, которые могут появиться, значительно более важным является ясное понимание основных принципов того, как они получаются.

УПРАЖНЕНИЯ 10

1. Иванов занял 100 млн рб и подписал обязательство выплачивать 2 млн рб основной суммы в конце каждого года в течение 50 лет вместе с процентом 5% от суммы, которой он еще владел. После 10 лет контракт был продан инвестору, который захотел иметь 6% эффективно за свою инвестицию. Найти цену продажи. (Указание: использовать тот факт, что выплаты основной суммы образуют обыкновенный аннуитет, а выплаты процентов образуют уменьшающийся аннуитет.)
2. Петров вносит 10 млн рб в начале каждого года на счет фонда, выплачивающего возмещение с эффективным процентом 5% . Основная сумма будет разделена между его тремя дочерьми через 10 лет. Его сын получает все проценты от фонда в конце каждого года. Если сын инвестирует свои проценты в сберегательный банк, который накапливает при 3% , $m = 4$, сколько он будет иметь через 10 лет ? Будет ли его сумма превышать долю сестер ?
3. Городское метро собирает 100000 жетонов (каждый жетон стоит 2000 рб) в течение каждого дня практически непрерывным потоком. Найти настоящую стоимость этих поступлений в течение 365 дней, если деньги стоят а) 4% эффективно, б) 3% конвертируемые непрерывно.
4. Найти итоговую сумму и настоящую стоимость аннуитета, выплачивающего 10 млн рб в конце каждого года в течение 20 лет, если процент конвертируется непрерывно при 3% .
5. Оформляется контракт, по которому выплачивается 500 тыс рб в конце каждого месяца первого года, 450 тыс рб в конце каждого месяца второго

года, и т.д. Ежемесячные платежи каждого последующего года на 50 тыс рб меньше ежемесячных платежей предыдущего года в течение полных 10 лет. Найти настоящую стоимость этого контракта, если деньги стоят 6% , m = 12. (Указание: учесть, что суммы каждого из 10 обыкновенных аннуитетов образуют уменьшающийся аннуитет.)

6. По системе товары-почтой продаются вещи по следующему плану: 10% цены наличными и 10% цены в месяц в течение 10 месяцев. Какая эффективная норма процента реализуется при такой торговле ?
7. Оформляется контракт, по которому выплачивается 500 тыс рб в конце каждого полугодия в течение 7,5 лет и дополнительно 10 млн рб в конце этого срока. Чему равна настоящая стоимость контракта, если деньги стоят j_1 = 5% ?
8. Страховой полис подразумевает платежи 70 тыс рб в начале каждого квартала в течение 25 лет и выплатит 10 млн рб по смерти страхователя. Сколько времени должна продолжаться жизнь страхователя, чтобы компания не разорилась при стоимости денег 4% эффективно ?
9. Иванов занял 10 млн рб 1 июля и такую же сумму 15 августа. Он согласен выплатить эти долги восемью одинаковыми ежемесячными платежами, начиная с 1 ноября. Если учесть проценты 8% , m = 2 , какими должны быть платежи ?
10. Сколько ежеквартальных платежей по 3 млн рб потребуется, чтобы выплатить покупку автомобиля стоимостью 45 млн рб , если выплачивается 8 млн рб наличными и процент начисляется согласно ставке j_{12} = 5% ? Каким будет завершающий платеж ?
11. Мебельная фабрика продает товары по одной из следующих схем: 25% скидка на цены при покупке наличными или 25% стоимости наличными и остальное в виде 12 одинаковых ежемесячных платежей без всяких процентов. Какая эффективная процентная ставка делает эти схемы эквивалентными ?
12. Земельное хозяйство стоит 800 млн рб. Фермер платит 50 млн рб наличными и будет выплачивать оставшийся долг в течение следующих 50 лет равными платежами 1 декабря, 1 марта и 1 июня ежегодно. Какими будут эти платежи, если хозяйство покупается 1 сентября и процентная ставка равна 6% эффективно ?

Глава 11 АКЦИИ

11.1. ВИДЫ АКЦИЙ

В главе об облигациях мы видели, что лицо, которое покупает облигацию, фактически ссужает деньги корпорации или государству и получает право на проценты и конечное возмещение капитала. Акционер является совладельцем корпорации и должен иметь право на долю ее благосостояния. Корпорация или акционерное общество является формой организации производства на основе финансирования путем продажи акций. Документ, который удостоверяет владение акционерным капиталом корпорации, называется **акционерным сертификатом** (акцией). В странах Запада сертификат изготовляется с водяными знаками и высококачественными гравюрами, чтобы препятствовать подделке. Он свидетельствует о внесении определенной доли в капитал акционерного общества и дает право на получение части прибыли в форме дивидендов. Существуют **закрытые** акционерные общества, акции которых распределяются среди их учредителей, и **открытые** акционерные общества, акции которых продаются и покупаются свободно. Совладельцем объединенного имущества открытого акционерного общества может стать любой, кто приобрел хотя бы одну акцию. На общем собрании акционеров каждый обладает правом голоса пропорционально сумме имеющихся у него акций. Именно общее собрание акционеров является высшим органом управления корпорацией. Текущими делами акционерного общества руководит правление или совет директоров. Прибыль, полученная акционерным обществом идет на уплату налогов, расширение производства, пополнение резервов, выплату премий и на распределение дивидендов между акционерами в пропорции к сумме акций каждого из них. Место акционера в получении дивидендов за управляющими, работниками, снабженцами и держателями облигаций.

Имеется два основных типа акций: **привилегированные** и **обыкновенные (простые)**. Привилегированные акции имеют установленный доход, который начисляется на акционерный сертификат в первую очередь в виде твердого заранее определенного процента. Привилегированные акции дают право претендовать на доходы перед платежами, которые могут делаться на обыкновенные акции, они также имеют приоритетное право перед обыкновенными акциями, если компания ликвидируется. Однако, владельцы привилегированных акций занимают место рангом ниже владельцев облигаций и других кредиторов. Большинство привилегированных акций являются **накопительными**. Это означает, что если выдача дивидендов задерживается, они накапливаются и должны быть выплачены до того, как что-либо получат обыкновенные

акционеры. Некоторые привилегированные акции являются **конвертируемыми**. Это означает, что они могут быть преобразованы в обыкновенные акции. Вообще, привилегированные акции не имеют привилегий голосования, они не дают права голоса на общем собрании акционеров, в том числе при избрании членов правления. Привилегированные акции обычно являются выкупаемыми по фиксированной цене по желанию компании. Эта особенность отзыва является важной для компании, поскольку она дает право компании возвращать акционерный капитал, когда обстановка на рынке капитала является благоприятной. С точки зрения инвестора привилегированные акции по безопасности ниже рангом, чем облигации, и ниже обыкновенных акций в возможностях для роста и доли в увеличении прибыли успешно действующей корпорации.

Рисковый капитал, который позволяет новым фирмам начинать, а существующим расширяться, обычно получается путем продажи обыкновенных акций. Владельцы обыкновенных акций принимают риски собственности и когда случаются неудачи, могут потерять весь свой инвестированный капитал или его часть (но не более). С другой стороны, их возможные доходы ничем не ограничиваются. Если их компания успешно ведет дело, они могут получать как увеличивающиеся дивиденды, так и увеличивающуюся рыночную цену за свои акции. Как правило, обыкновенные акционеры могут голосовать при избрании директоров компании и могут предлагать изменения в экономической политике и практической деятельности компании. Дивиденды на обыкновенные акции зависят, в первую очередь, от того, сколько заработала корпорация в текущем году и какой является плановая прибыль на реинвестированные заработки. Доходы по акциям, как правило, выплачиваются один раз в год. Общая сумма акций, условия их продажи, дивиденд и максимальная сумма, на которую можно приобрести акции одному работнику, определяются общим собранием.

Акции могут быть **именными** и на **предъявителя**. Именные акции распространяются среди всех граждан, акции на предъявителя - только среди членов трудовых коллективов.

11.2 ТОРГОВЛЯ АКЦИЯМИ

Денежная сумма, обозначенная на акции, называется номинальной стоимостью акции, а цена, по которой акция продается на рынке, - ее курсом. Курс акции той или иной компании находится в прямой зависимости от получаемого по ним дивиденда (и особенно его перспектив) и в обратной зависимости от величины процентных ставок в данный момент, а также от множества других факторов и поэтому обычно отличается от номинальной стоимости акций.

$$\textit{Курс акций} = \frac{\textit{дивиденд}}{\textit{банковский}\quad \textit{процент}}.$$

Привилегированные акции подобны бессрочным облигациям в том, что как те, так и другие являются типами ценных бумаг с фиксированным доходом без дат погашения. Таким образом, цена привилегированных акций P должна быть равной настоящей стоимости будущих дивидендов F (или постоянных купонов), то есть дивиденды или купоны образуют бессрочный аннуитет (вечную ренту). Так что (см. формулу (1) в главе 7)

$$P = \frac{F}{i}\ . \tag{1}$$

Обыкновенные акции не являются ценными бумагами с фиксированным доходом, то есть их дивиденды заранее не известны и не постоянны. Практически цены обыкновенных акций довольно сильно меняются на рынке акций, часто по незначительным причинам. Теоретически цены обыкновенных акций должны представлять тоже настоящую стоимость будущих дивидендов. Стоимости, вычисленные таким образом, могут характеризоваться на основе модели дисконтированного дивиденда. Конечно, эти вычисления должны учитывать прогнозируемые изменения шкалы дивидендов.

Рассмотрим ситуацию, в которой корпорация планирует выплачивать дивиденд D в конце текущего периода. Предположим, что прогнозируется, что дивиденды увеличиваются согласно геометрической прогрессии ориентировочно с общим знаменателем $1 + k$ и что акция приобретается, чтобы давать доходность i за период, где $-1 < k < i$. Тогда теоретическая цена акции на единицу дивиденда получается путем предельного перехода от обыкновенного аннуитета со сроком n периодов, в котором первый платеж равен 1 и последующие платежи увеличиваются в геометрической прогрессии с одинаковым знаменателем $1 + k$. Настоящая стоимость этого аннуитета равна

$$v + v^2(1 + k) + \ldots + v^n(1 + k)^{n-1}\ . \tag{2}$$

Поскольку дисконтирующий множитель связан с доходностью соотношением $v = (1 + i)^{-1}$, то настоящая стоимость является суммой геометрической прогрессии

$$v \times \frac{1-\left[v(1+k)\right]^n}{1-v(1+k)} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1-\left[v(1+k)\right]^n}{1-\dfrac{1+k}{1+i}} = \frac{1-\left[v(1+k)\right]^n}{i-k} = \frac{1}{i-k}\left[1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n\right].$$

(3)

Переходя в этой формуле к пределу при $n \to \infty$, получим выражение цены обыкновенной акции в виде

$$P = D / (i - k) . \qquad (4)$$

ПРИМЕР 1 Обыкновенная акция постоянно зарабатывает 4 млн руб и по ней будет выплачиваться 2 млн руб дивидендов в конце текущего года. Предполагая, что заработки корпорации увеличиваются ориентировочно на 5% в год и что корпорация планирует продолжать выплачивать 50% своих заработков в виде дивидендов, найти теоретическую цену заработков инвестора при годовой эффективной ставке доходности : 1) 10% , 2) 8% и 3) 6% .

РЕШЕНИЕ 1) Настоящая стоимость дивидендов равна

$$2 \times \left(\frac{1}{0{,}10 - 0{,}05}\right) = 40 \text{ млн руб.}$$

Таким образом, теоретическая цена в 10 раз больше текущих заработков.

2) Настоящая стоимость дивидендов равна

$$2 \times \left(\frac{1}{0{,}08 - 0{,}05}\right) = 66\ 2/3 \text{ млн руб.}$$

Значит, теоретическая цена в 16 2/3 раз превышает текущие заработки.

3) Настоящая стоимость дивидендов равна

$$2 \times \left(\frac{1}{0{,}06 - 0{,}05}\right) = 200 \text{ млн руб.}$$

Отсюда, теоретическая цена в 50 раз превышает текущие заработки.

ПРИМЕР 2 В отличие от примера 1 предположим, что процентная ставка заработков равна 5% за первый год, 2,5 % за второй год и 0% в дальнейшем. Примем годовую эффективную доходность равной 10%.

РЕШЕНИЕ Последовательное использование формул (2) и (3) дает

$$2\left[\frac{1-(1{,}05/1{,}10)^5}{0{,}10-0{,}05}\right]+2\frac{(1{,}05)^5}{(1{,}10)^5}\left[\frac{1-(1{,}025/1{,}10)^5}{0{,}10-0{,}025}\right]+2\frac{(1{,}05)^5(1{,}025)^5}{(1{,}10)^{10}\times 0{,}10}=25{,}72,$$

что составляет приблизительно 64% от ответа 1) примера 1, предполагающего уровень процентов ориентировочно увеличивающимся. В этом случае теоретическая цена в 6,43 раза больше текущих заработков.

11.3 ОЦЕНИВАНИЕ АКЦИЙ

Одной из наиболее важных областей практического применения методов финансовой математики является оценивание ценных бумаг фондового рынка (рынка акций) и определение их доходностей. В соответствии с этим мы рассмотрим эту тему несколько подробно. Как уже было выше сказано некоторые акции аналогичны ценным бумагам с фиксированным доходом. Поэтому для таких акций и ценных бумаг с фиксированным доходом могут быть использованы одинаковые методы оценивания.

Ценные бумаги с фиксированным доходом обычно включают на своем титуле выплачиваемую процентную ставку (например, 2,5% Консоль - Британские правительственные акции). Ежегодные проценты, выплачиваемые каждому акционеру, которые выплачиваются ежегодно или по полугодиям, находятся умножением *числа номиналов* N, которыми он владеет, на годовую процентную ставку D, которая обычно называется *купонной ставкой*. (Например, в случае 2,5% Консоли $D = 0{,}025$.) Если инвестор подвержен подоходному налогу со ставкой t_1 на процентные платежи, его годовой доход после уплаты налогов будет равен $(1 - t_1)DN$.

Денежные платежи при выкупе вычисляются умножением количества номиналов N на цену выкупа R на единицу номинала (которая на практике часто котируется в процентах). Если $R = 1$, акция называется выкупаемой *по номиналу*; если $R > 1$ акция называется *выкупаемой выше номинала* или если $R < 1$, акция называется *выкупаемой ниже номинала* или *со скидкой*. Некоторые ценные бумаги имеют изменяющиеся купонные ставки D или изменяющиеся цены погашения R. *Датой выкупа* является дата, в которую должна быть выплачена сумма выкупа. Некоторые акции имеют изменяемые даты выкупа, в этих случаях дата погашения может быть установлена заемщиком (или, возможно, кредитором) как любая дата выплаты процентов внутри определенного периода или как любая дата выплаты процентов после заданной даты. В последнем случае акция называется не имеющей даты погашения или *бессрочной*.

Цены выпуска и последующие рыночные цены любой акции обычно котируются в терминах определенных номинальных сумм, т.е. 100 млн руб или 1 млн руб номинала. Таким образом, акция может рассматриваться состоящей из 10 000 млн руб номинала, разделенного на 10 000 долей каждая по 1 млн руб номинала. Утверждение, что инвестор владеет акцией номиналом 100 млн руб вообще не подразумевает, что рассматриваемое его капиталовложение стоит 100 млн руб. Если оно стоит, скажем, 105 млн руб, то говорят, что оно *выше номинала* или *с премией*; если оно стоит, скажем, 90 млн руб, то говорят, что оно *ниже номинала* или *со скидкой*; если оно стоит 100 млн руб, акция будет *по номиналу*. Мы используем символ P для обозначения цены на единицу номинала и символ A для цены N номиналов акции. Таким образом,

$$A = NP\,. \tag{5}$$

На практике акции обычно котируются в процентах, например, на 100 млн руб номинала. Мы также используем символ C для обозначения

$$C = NR \tag{6}$$

наличности, полученной при погашении в отношении N номиналов акции.

Купонная ставка, цена погашения и срок до погашения ценной бумаги с фиксированным доходом служат для определения наличных платежей, обещанных освобожденному от налогов инвестору в ответ на его покупную цену. Если инвестор подвергается налогу, соответствующие вычитания из потока наличности должны быть, конечно, сделаны. Стоимость акций с фиксированным доходом при заданной процентной ставке и определение ее доходности при заданной цене можно найти как и для любой другой инвестиции или потока платежей (см. главу 3), но в этой главе с точки зрения практической важности ценные бумаги с фиксированным доходом и используемую терминологию мы рассмотрим более детально.

Имеются также акции с купонной ставкой, которая изменяется в соответствии с изменениями стандартной процентной ставки, такой как ставка национального банка. Эти акции и связанные индексом ценные бумаги, упомянутые выше, не являются, строго говоря, ценными бумагами с фиксированным доходом, но имеют больше общего с ними, чем с обыкновенными акциями.

В дополнение к ценным бумагам с фиксированным доходом фондовый рынок имеет дело с *простыми акциями* (известными также как *обыкновенные акции*). Простые акции являются ценными бумагами, выпускаемыми коммерческими предприятиями или другими органами,

которые дают право их владельцам получать всю чистую прибыль компании после того, как выплачены проценты по ссудам и акциям с фиксированным доходом. Наличность, выплачиваемая ежегодно, называется дивидендом, остающаяся прибыль (если она есть) будет оставаться как резерв или использоваться для деловой активности. Владельцы обыкновенных акций являются собственниками, а не кредиторами компании и они обычно имеют право голоса на общем ежегодном собрании акционеров компании (но не во всех странах). Могут выпускаться акции и не дающие права голоса.

Следует также упомянуть о *привилегированных акциях*, которые, несмотря на их название, являются ценными бумагами с фиксированным доходом, выпускаемыми коммерческими компаниями. Процентные платежи (или, как они обычно называются, дивиденды) удовлетворяются только после выплаты полагающихся процентов по банковским ссудам и долговым обязательствам, но перед выплатами простым акционерам. Если в каком-либо году прибыль недостаточна для удовлетворения дивидендов привилегированным акционерам, платежи дивидендов уменьшаются или, в крайнем случае, переносятся. В случае накопительных привилегированных акций, все долги по дивидендам откладываются до их выплаты в будущем (хотя сами долги не зарабатывают процентов).

Если акция покупается без дивиденда, продавец, а не покупатель, получает следующий процентный или дивидендный платеж. Если она покупается с дивидендом, то покупатель будет получать следующую процентную или дивидендную выплату. (Как упомянуто выше, большинство акций с фиксированным доходом продаются и покупаются на основе того, что покупатель выплачивает продавцу начисленный процент, пропорциональный количеству дней между датой покупки и датой последнего процентного платежа.)

ПРИМЕР Инвестор, который не подвергается налогообложению, имеет большой портфель обыкновенных акций с текущей рыночной стоимостью 14 700 млн руб. Текущая норма дивидендных платежей портфеля равна 620 млн руб в год. Инвестор желает оценить стоимость своих авуаров при процентной ставке 6 % годовых эффективно в предположении, что а) как дивидендный доход от акций, так и их рыночная стоимость будут увеличиваться непрерывно на 2% в год; б) акции будут проданы через 30 лет. Какие средства инвестора помещены в акции?

РЕШЕНИЕ Стоимость, которая помещена во владение акциями равна (см. главу 3)

$$620\times\frac{1-(1{,}02v)^{30}}{i}+14700\times(1{,}02v)^{30}= \quad \text{при } 6\ \%$$
$$=620\times 11{,}4104+14700\times(1{,}02v)^{30}=$$
$$=7074+4636=11\ 710 \text{ млн руб}.$$

Замечание Этот метод дает ответ довольно отличающийся от рыночной стоимости 14 700 млн руб и, следовательно, может быть использован только при определенных обстоятельствах, рассмотрение которых выходит за рамки данной книги. (Различие между двумя стоимостями лежит, конечно, в том факте, что рынок делает различные предположения, касающиеся будущего.) Метод также игнорирует изменчивость цен акций и дивидендов и является поэтому более удобным для оценивания больших разнородных портфелей, чем для отдельной собственности. Разработаны более сложные способы оценивания простых акций, использующие статистические методы, но мы не рассматриваем их здесь.

11.4 ЦЕНЫ И ДОХОДНОСТИ

Мы теперь обратимся к рассмотрению акций с фиксированным доходом. Как и в других задачах сложных процентов, рассматривается один из двух вопросов:

а) Какую цену A, или P на единицу номинала, следует заплатить инвестору за акцию с чистой доходностью i годовых?

б) При условии, что инвестор заплатил цену A, или P на единицу номинала, какой чистый доход он будет получать за год?

Чтобы ответить на вопрос а), мы положим A равной настоящей стоимости процентных и капитальных платежей при процентной ставке i годовых минус любые налоги, выплачиваемые инвестором. То есть

$$A = (\textit{настоящая стоимость чистых процентных платежей при процентной ставке } i \textit{ годовых}) + (\textit{настоящая стоимость чистых платежей капитала при процентной ставке } i \textit{ годовых}) \qquad (7)$$

Ценой за единицу номинала является, конечно, $P = A/N$, где N является количество номиналов акции, к которой относятся платежи.

Чтобы ответить на вопрос б), мы положим A в равенстве (7) равной покупной цене и решим получающееся уравнение относительно чистой (*нетто*) доходности i. Доходность, котируемая в прессе, для акций с фиксированным доходом часто является *брутто* годовой доходностью номинала, конвертируемой по полугодиям. Если инвестор продает свою

акцию до выкупа, или если он подвергается налогообложению, его фактическая доходность в общем случае будет отличаться от той, которая котируется в прессе.

Доходность актива иногда называется *доходностью до выкупа* или *выкупной доходностью*, чтобы отличать ее от *постоянной* (или *текущей*) доходности, которая определяется как D/P , отношение купонной ставки к цене за единицу номинала акции.

ПРИМЕР 1 Определенная акция с фиксированным доходом, выпущенная коммерческой компанией, была выкуплена по номиналу 1 октября 1997. Акция порождает процент 6% годовых, выплачиваемый по полугодиям 1 апреля и 1 октября.

а) Какая цена в процентах должна быть предложена за эту акцию 1 августа 1975, чтобы гарантировать доход 5% годовых для инвестора, освобожденного от уплаты налогов?

б) Какую годовую доходность этой акции предлагать инвестору, освобожденному от уплаты налогов, который покупает ее 1 августа 1975 за 117 % ?

РЕШЕНИЕ

а) В этом примере мы имеем $R = 1$, $N = 100$, $C = 100$, $D = 0{,}06$ и $p = 2$. Цена A, которую следует предложить 1 августа 1975, чтобы гарантировать доходность 5% годовых, равна по формуле (7)

$$A = \textit{настоящая стоимость } 5\% \textit{ процентных платежей} + \textit{настоящая стоимость } 5\% \textit{ капитальных платежей} =$$

$$= v^{1/6}\left[3 + 6a_{\overline{22}|}^{(2)} + 100v^{22}\right] \quad \text{при } 5\% \;=\; 116{,}19$$

б) Теперь мы решим уравнение стоимости

$$117 = v^{1/6}\left[3 + 6a_{\overline{22}|}^{(2)} + 100v^{22}\right]$$

относительно процентной ставки i . В части а) правая часть уравнения рассчитывалась при $i = 5\%$ и равнялась 116,19 , так что доходность будет несколько ниже, чем 5% годовых. Последующие вычисления с применением интерполяции дают $i \approx 4{,}94\%$ годовых.

Замечание Можно было бы работать также с полугодовыми периодами; соответствующее уравнение стоимости тогда имело бы вид

$$117 = v^{1/3}\left[3 + 3a_{\overline{44}|} + 100v^{44}\right] \qquad \text{при ставке } i'$$

которое имеет приближенное решение $i' \approx 0{,}0244$, так что эффективная доходность за год равна $i \approx (1{,}0244)^2 - 1$ или $4{,}94\ \%$ как и ранее.

Когда решают уравнение стоимости при помощи интерполяции (чтобы найти доходность), удобно иметь грубое представление о порядке величины требуемого решения. В большинстве ситуаций верхнюю и нижнюю границы можно найти довольно просто, как показывают следующие рассуждения.

Рассмотрим акцию, которая будет выкупаться через n лет по выкупной цене R за единицу номинала. Предположим, что акция порождает проценты, выплачиваемые ежегодно просрочкой при купонной ставке D годовых, и что инвестор, который подвержен подоходному налогу по ставке t_1 покупает акцию по цене P за единицу номинала. Что можно сказать относительно величины i, чистой годовой доходности инвестора?

Взамен платежа P инвестор получает чистый процент каждый год, равный $D(1 - t_1)$, и выручку при выкупе R. Значит, его чистая доходность i является такой процентной ставке, для которой

$$P = D(1 - t_1)\, a_{\overline{n}|} + Rv^n \tag{8}$$

Если $R = P$, тогда очевидно, что

$$i = \frac{D(1 - t_1)}{P}$$

Если $R > P$, то имеется прирост при выкупе и поэтому

$$i > \frac{D(1 - t_1)}{P}.$$

В этом случае этот прирост равен $R - P$. Если инвестор должен получать этот прирост равными взносами каждый год в течение n лет, а не отдельной суммой после n лет, он будет иметь некоторое преимущество. В этом случае каждый год он получал бы $D(1 - t_1) + (R - P)/n$ как доход (и P как выручка при выкупе), так что его чистый годовой доход был бы $[D(1 - t_1) + (R - P)/n]/P$. Это превышает i, поэтому

$$\frac{D(1-t_1)}{P} < i < \frac{D(1-t_1)+(R-P)/n}{P}$$

Потери при выкупе равны $(P - R)$. Если инвестор будет нести эти потери равными взносами каждый год в течение n лет, а не отдельной суммой после n лет, он очевидно будет в менее преимущественном положении. В этом случае каждый год он получал бы $D(1 - t_1) - (P - R)/n$ как доход (и P как выручку при выкупе), так что его чистый годовой доход был бы $[D(1 - t_1) - (P - R)/n]/P = [D(1 - t_1) + (R - P)/n]/P$. Это уменьшает i , поэтому

$$\frac{D(1-t_1)}{P} > i > \frac{D(1-t_1)+(R-P)/n}{P} .$$

Таким образом, во всех случаях i лежит между $D(1 - t_1)/P$ и $[D(1 - t_1) + + (R - P)/n]/P$. Для большинства практических целей эти границы достаточны для получения удобных значений при использовании их для интерполяции.

ПРИМЕР 2 Акция порождает проценты при ставке 7,5 % годовых, выплачиваемых просрочкой, и является выкупаемой по номиналу через 20 лет. Предполагая, что все проценты, полагающиеся в настоящее время, не будут получены покупателем, найти чистую годовую доходность для инвестора, подверженного подоходному налогу 33 1/3 % , который покупает 80% этой акции ?

РЕШЕНИЕ Заметим, что так как чистые годовые процентные платежи равны 5 млн руб на издержки 80 млн руб (т.е. 6,25 %) и акция выкупается за 100 млн руб, чистая доходность будет очевидно превышать 6,25 % годовых. Прибыль при выкупе равна 20 ьлн руб на 100 млн руб номинала. Если эта прибыль выплачивается равными годовыми взносами (каждый суммой 1 млн руб) выплата 80 млн руб обеспечивала бы чистый доход 6 млн руб в каждом году, или 7,5 % . Это было бы более привлекательной инвестицией, чем имеющаяся в наличии. Чистый годовой доход, таким образом, меньше, чем 7,5 % . Мы имеем купонную ставку $D = 0{,}075$, цену, выплачиваемую за единицу номинала, $P = 0{,}8$, выкупную цену за единицу номинала $R = 1$, ставку подоходного налога $t_1 = 1/3$, и срок до выкупа $n = 20$. Уравнение стоимости имеет вид

$$P = D(1 - t_1)a_{\overline{n}|} + Rv^n \qquad \text{при ставке } i$$

т.е.

$$0{,}8 = 0{,}05a_{\overline{20}|} + v^{20} .$$

Сделанные выше замечания показывают, что i лежит между 0,0625 и 0,075. Когда $i = 0{,}065$, правая часть последнего уравнения равна 0,8347, а когда $i = 0{,}07$, она равна 0,7881. Путем интерполяции мы оцениваем i как 0,0687 или 6,87 %. (На самом деле, чистая годовая доходность в процентах с точностью до четырех десятичных знаков равна 6,8686. Таким образом, метод интерполяции дает достаточно точный результат в этом случае.)

Приближенное значение процентной ставки из уравнения (8) может быть получено следующим образом. Пусть $g = D/R$, так что $g(1 - t_1)$ является чистым годовым процентом на единицу выкупной цены. Уравнение (8) теперь может быть записано в виде

$$P = g(1 - t_1)Ra_{\overline{n}|} + Rv^n = \qquad \text{при ставке } i$$

$$= R\,[g(1 - t_1)a_{\overline{n}|} + (1 - i\,a_{\overline{n}|})]$$

из которого получаем

$$g(1 - t_1) - i - \frac{k}{a_{\overline{n}|}} = 0 , \tag{9}$$

где $a_{\overline{n}|}$ вычисляется при ставке i и

$$k = (P - R) / R . \tag{10}$$

Много различных способов предложено для нахождения приближенного решения уравнения (9). Здесь мы рассмотрим только аппроксимации, основанные на разложении Маклорена функции $1/a_{\overline{n}|}$, т.е.

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \times i + \frac{n^2-1}{12n} \times i^2 + \ldots \tag{11}$$

Отбрасывая в уравнении (9) слагаемые со степенями i выше, чем первая, и подставляя $1/a_{\overline{n}|}$ в уравнение (9), мы получим

$$i = \frac{g(1-t_1) - k/n}{1 + \left(\frac{n+1}{2n}\right)k} . \tag{12}$$

Эта формула является достаточно точной, когда n и i не очень велики. Большей точности обычно можно достичь оставляя в уравнении (11) слагаемые со степенями i до i^2. Уравнения (9) и (11) тогда дают квадратичное уравнение

$$\frac{k\left(n^2-1\right)}{12n}i^2+\left[1+\frac{k(n+1)}{2n}\right]i-\left[g\left(1-t_1\right)-\frac{k}{n}\right]=0 \qquad (13)$$

В практических обстоятельствах только один корень этого уравнения является подходящим, другой является заметно отличающимся от значения, задаваемого уравнением (12). Применяя формулы (12) и (13) в примере 2 для $k = -2$, $n = 20$ и $g(1 - t_1) = 05$, мы получим приближенные доходности 6,70 % и 6,80 %, соответственно.

11.5 ФОРМУЛА МЭЙКХЭМА

Рассмотрим акцию с N номиналами, которая должна быть выкуплена через 20 лет по цене R за единицу номинала, и пусть $C = NR$. Таким образом, C является денежным платежом при выкупе. Пусть купонная ставка (т.е. годовая процентная ставка на единицу номинала) равна D и предположим, что процент выплачивается p-кратно в год просрочкой (т.е. в конце интервала платежа). Таким образом, каждый процентный платеж является суммой $DN/p = gC/p$, где

$$g = \frac{DN}{C} = \qquad (14)$$

$$= \frac{D}{R}. \qquad (15)$$

Заметим, что g является годовой процентной ставкой *на единицу выкупной цены*.

Рассмотрим инвестора, подверженного подоходному налогу по ставке t_1, который хочет купить акцию по цене, обеспечивающей эффективную чистую доходность i в год. Пусть цена, которую ему следует заплатить равна A. (Мы предполагаем, что n является целым, кратным $1/p$, и что любой процент, полагающийся на настоящее время, не будет получен покупателем.) Цена является просто настоящей стоимостью (при ставке i) выкупной выручennой суммы и будущих нетто платежей процентов. Таким образом,

$$A = N R v^n + (1 - t_1) DN a_{\overline{n}|}^{(p)} = \qquad \text{при ставке } i$$

$$= C v^n + (1 - t_1) gC a_{\overline{n}|}^{(p)} =$$

$$= C v^n + (1 - t_1) gC \times \frac{1 - v^n}{i^{(p)}} =$$

$$= C v^n + \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}} (C - C v^n) .$$

Значит

$$A = K + \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}} (C - K) , \qquad (16)$$

где $K = C v^n$ (при ставке i) является настоящей стоимостью возмещений капитала, а $[(1 - t_1) g / i^{(p)}](C - K)$ является настоящей стоимостью нетто платежей процентов. Равенство (16) является известной *формулой Мэйкхема* и является очень важной. Заметим, что $(1 - t_1) g$ является нетто ставкой годовых процентных платежей *на единицу выкупной цены* или на единицу «задолженности». Равенство (16) имеет место только когда

а) t_1 , g и R являются постоянными в течение срока действия акции; и

б) n является целым, кратным $1/p$.

(Когда эти условия не удовлетворяются, формулу (16) необходимо модифицировать.)

Формула Мэйкхема остается справедливой, когда акция выкупается отдельными взносами, при условии, что купонная ставка D , ставка подоходного налога t_1 и цена выкупа на единицу номинала остаются постоянными. Чтобы показать это, мы рассмотрим акцию с количеством номиналов $N = N_1 + N_2 + ... + N_m$; число номиналов, выкупленных в момент n_j , будет N_j ($j = 1, 2, ... , m$).

Сумма, полученная в качестве возмещения части акции в момент n_j , равна $C_j = RN_j$. Формула (16) подразумевает, что стоимость капитала и нетто платежей процентов, ассоциированная с j-ой «долей» акции, равна

$$A_j = K_j + \frac{g(1 - t_1)}{i^{(p)}} (C_j - K_j) ,$$

где

$$K_j = C_j v^{n_j} .$$

Стоимость всей акции, очевидно, равна

$$A = \sum_{j=1}^{m} A_j = \sum_{j=1}^{m} \left[K_j + \frac{g\left(1-t_j\right)}{i^{(p)}} \left(C_j - K_j \right) \right] =$$

$$= K + \frac{g\left(1-t_1\right)}{i^{(p)}} (C - K) ,$$

где

$$K = \sum_{j=1}^{m} K_j = \sum_{j=1}^{m} C_j v^{n_j}$$

является стоимостью платежей капитала и

$$C = \sum_{j=1}^{m} C_j = \sum_{j=1}^{m} RN_j = R \sum_{j=1}^{m} N_j = R\, N$$

как и ранее. Таким образом, формула (16) остается справедливой в этой ситуации.

Настоящая стоимость, или цена единицы номинала равна, конечно, $P = A / N$, при условии, что актив покупается целиком. Привлекательность формулы Мэйкхема заключается в том, что она дает возможность быстро получить стоимость процентных нетто платежей и полной стоимости актива из стоимости капитала K , если даже акция выкупается отдельными взносами.

ПРИМЕР 1 Выпускается акция стоимостью 75 млн руб, зарабатывающая дивиденды по ставке 8% годовых, выплачиваемых поквартально просрочкой. Акция должна возмещаться по номиналу 15-ью годовыми взносами, первый взнос возмещается пять лет спустя после даты выпуска.

Найти цену, которую нужно заплатить в день выпуска за всю акцию покупателю, который желает иметь доходность a) 10% годовых эффективно, и b) 10% годовых, конвертируемых по полугодиям. (Налогами пренебречь.)

РЕШЕНИЕ Возмещения капитала составляют сумму 5 млн руб. Первое возмещение выплачивается через пять лет, а последнее возмещение выплачивается через 19 лет.

a) Выберем год как базовую единицу времени. Требуемая доходность за единицу времени равна 10% , так что i = 0,10. Используя

принятые выше обозначения, мы имеем $C = 75$ (так как выкуп по номиналу). Стоимость возмещения капитала равна

$$K = 5\times(a_{\overline{19}|} - a_{\overline{4}|}) \quad \text{при } 10\% \;=\; 25{,}975.$$

Заметим, что так как выкуп по номиналу, $g = 0{,}08$ и процент выплачивается поквартально (т.е. четыре раза в единицу времени), так что $p = 4$. По формуле Мэйкхема мы получаем требуемую цену

$$25{,}975 + \frac{0{,}08}{0{,}10^{(4)}}\times(75 - 25{,}975) = 66{,}636.$$

Так как $66{,}636 / 75 = 0{,}8885$, эта цена может котироваться как 88,85% (88,85 денежных единиц на 100 денежных единиц номинала).

b) Выберем шесть месяцев как базовую единицу времени. Требуемая доходность за единицу времени равна 5% . Таким образом, $i = 0{,}05$. Теперь заметим, что процент выплачивается дважды за единицу времени, так что в принятых обозначениях $p = 2$. Сумма процентов, выплачиваемая за единицу времени, равна 4% невозмещенной доли акции, поэтому теперь мы имеем $g = 0{,}04$. Возмещение капитала происходит в моменты времени 10, 12, 14, ... , 38, так что

$$K = \frac{5000}{a_{\overline{2}|}}(\, a_{\overline{40}|} - a_{\overline{10}|}) \qquad \text{при } 5\% \quad = 25{,}377\ .$$

Значит стоимость всей акции равна

$$25{,}377 + \frac{0{,}04}{0{,}05^{(2)}}(75 - 25{,}377) = 65{,}565 \text{ млн руб} \;\text{ или }\; 87{,}42\%\ .$$

Заметим, что эта цена меньше, чем в случае а).

Читатель, который оценивал процентные платежи, пользуясь обычным анализом потоков платежей быстро убедится в преимуществе формулы Мэйкхема.

ПРИМЕР 2 По отношению к акции описанной в предыдущем примере найти цену, которая должна быть выплачена в дату выпуска покупателем всей акции, который выплачивает подоходный налог по ставке 40% и хочет получать от акции чистый доход 7% годовых эффективно.

РЕШЕНИЕ Платежи капитала имеют величину

$$K = 5000 \times (a_{\overline{19}|} - a_{\overline{4}|}) \quad \text{при } 7\% \;=\; 34{,}741.$$

Поэтому цена, обеспечивающая чистый доход 7% годовых эффективно, равна

$$34{,}741 + \frac{0{,}08(1-0{,}4)}{0{,}07^{(4)}}(75 - 34{,}741) = 63{,}061 \text{ млн руб} \quad \text{или} \quad 84{,}08\% .$$

ПРИМЕР 3 Акция с номинальной суммой 80 млн руб выкупается за 105% четырьмя взносами в конце 5, 10, 15 и 20 годов. Акция обеспечивает дивиденд по ставке 10% в год, выплачиваемый по полугодиям.

Инвестор, выплачивающий подоходный налог по ставке 30%, купил акцию целиком в день выпуска по такой цене, чтобы получать чистый доход 8% в год эффективно. Какую цену он заплатил?

РЕШЕНИЕ Заметим, что полная задолженность C равна 80 × 1,05, т.е. 84 млн руб. Каждый год полные процентные платежи равны 10% невозмещенного номинала акции, так что процент, выплачиваемый каждый год, равен произведению g на невыплаченную задолженность, где $g = 0{,}1 / 1{,}05$.

Выберем один год в качестве единицы времени. Тогда $i = 0{,}08$ и в день выпуска платежи капитала имеют величину

$$K = 20 \times 1{,}05 \times (v^5 + v^{10} + v^{15} + v^{20}) \quad \text{при } 8\% \;=$$

$$= 21 \; \frac{a_{\overline{20}|}}{s_{\overline{5}|}} \quad \text{при } 8\% \;=\; 35{,}144 .$$

Используя значение g , приведенное выше, мы получим цену, выплачиваемую инвестором в виде

$$35{,}144 + \frac{0{,}1}{1{,}05} \times \frac{1-0{,}3}{0{,}08^{(2)}}(84 - 35{,}144) = 76{,}656 \text{ млн руб} .$$

Заметим, что «цена в процентах» равна цене за 100 денежных единиц номинальной суммы акции, т.е. (76,656 / 80) × 100 = 95,82 %.

ПРИМЕР 4 Выпускается акция с номинальной суммой 1 200 млн руб, обеспечивающая дивиденды 11% в год, выплачиваемые по полугодиям. В

конце каждого года часть акции будет выкупаться по 105% . Номинальная сумма, выкупаемая в конце первого года, будет 10 млн руб и каждый последующий год выкупаемая номинальная сумма будет увеличиваться на 10 млн руб до тех пор, пока акция не будет выкуплена. Выпускная цена акции равна 98,80% .

Найти чистую эффективную доходность инвестора, выплачивающего подоходный налог 40% , который покупает всю акцию в день ее выпуска.

РЕШЕНИЕ Срок акции равен n годам, где

$$1\,200\,000 = 10\,000 \times (1 + 2 + ... + n) = 5\,000 \times n(n + 1) ,$$

откуда следует, что $n = 15$.

Заметим, что так как выкупная цена равна 105% , полная задолженность C равна $1\,200 \times 1{,}05 = 1\,260$ и $g = 0{,}11 / 1{,}05$. Наша единица времени равна одному году и $p = 2$.

При процентной ставке i возмещения капитала имеют величину

$$K = 10 \times 1{,}05 \times \left(Ia\right)_{\overline{15}|} ,$$

так что

$$K = 10 \times \left(Ia\right)_{\overline{15}|} \quad \text{при ставке} \quad i .$$

Таким образом, стоимость акции, которая обеспечит инвестору чистую доходность i в год равна (с учетом значения g)

$$A = K + \frac{0{,}11}{1{,}05} \times \frac{1 - 0{,}4}{i^{(2)}} \times \left(1260 - K\right).$$

Так как выпускная цена равна 98,80% на 100 денежных единиц номинала, цена, выплачиваемая инвестором была $0{,}988 \times 1\,200$, т.е. 1 185 млн руб. Нам нужно найти значение i такое, чтобы A равнялось этой величине.

Заметим, что каждые инвестированные 98 800 руб порождают чистый доход 6 600 руб в год и возмещаются как 10 500 руб. Чистая доходность будет, таким образом, будет несколько больше, чем $6\,600 / 98\,800 = 0{,}0668$ или 6,68 % . Поэтому в качестве первого шага мы оценим акцию при 7% . Мы оставляем читателю проверить, что при $i = 0{,}07$ $A = 1\,206{,}86$ или 100,57 % . Значит чистая доходность больше, чем 7 % годовых. Легко проверить, что при $i = 0{,}08$ $A = 1\,127{,}29$ или

93,94 . Путем линейной интерполяции мы оцениваем чистую доходность как

$$0{,}7 + (0{,}8 - 0{,}7) \times \frac{1206{,}86 - 1185{,}60}{1206{,}86 - 1127{,}29} = 0{,}0727 \quad \text{или} \quad 7{,}27\ \% .$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. По привилегированной акции выплачивается 10 млн руб дивидендов в конце первого года. Каждые последующие годовые дивиденды будут на 5% больше, чем предшествующие. Какие постоянные дивиденды были бы эквивалентными при $i = 12\ \%$.
2. Обыкновенная акция выплачивает годовые дивиденды в конце каждого года. Чистая прибыль компании на акцию в только что закончившемся году была 6 млн руб. Предполагается, что прибыль будет расти на 8 % в год. Проценты от дохода, выплаченные как дивиденды, будут равны 0% в течение первых 5 лет и 50% в последующие годы. Найти теоретическую цену акции, обеспечивающей инвестору доходность 15% эффективно.
3. Найти выражение для теоретической цены обыкновенной акции, выплачивающей годовые дивиденды в конце каждого года. Прибыль только что закончившегося года была E . Предполагается, что норма роста прибыли для года t равна k_t , доходность для года t равна i_t и доля прибыли, которую корпорация планирует выплатить как дивиденды в году t равна p_t , $0 \le p_t \le 1$.
4. Обыкновенная акция приобретается по цене, равной 10 значениям текущей прибыли. В течение следующих 6 лет акция не выплачивает никаких дивидендов, но прибыль увеличивается на 60% . В конце 6 лет акция продается по цене, равной 15 значениям прибыли. Найти эффективную годовую ставку дохода, заработанного на этой инвестиции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. ОПИСАНИЕ «ТАБЛИЦ ДЛЯ ФИНАНСОВЫХ РАСЧЕТОВ»

Таблицы для финансовых расчетов, в основном, предназначены для определения числовых значений составных функций платежей. Такими функциями являются:

Множитель накопления $(1+i)^n$

Множитель дисконта $v^n = \frac{1}{(1+i)^n}$

Функция накопления $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

Обратное значение функции накопления $\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$

Функция определенного (детерминированного) аннуитета $a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$

Ключевым параметром каждой таблицы является эффективная процентная ставка i. Таблица составляется для конкретного значения i, которое выражается в процентах целым числом, обычно от 1% до 10%. В более подробных таблицах значения i берутся через 0,5%. Для каждого значения i подсчитываются также другие нормы процентов: полугодовая, квартальная и месячная. Значения функций чаще всего даются с точностью до восьмого знака после запятой. В некоторых таблицах эта точность может быть другой (от четырех до девяти знаков) в зависимости от назначения таблиц. Чаще всего значения функций даются для целого числа периодов n от 1 до 50 (или 60). Иногда встречаются таблицы для дробных значений этого параметра.

2. ТАБЛИЦА ПОРЯДКОВЫХ НОМЕРОВ ДНЕЙ ГОДА

Номера месяцев года													
Дни	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Дни
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	**1**
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	**2**
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	**3**
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	**4**
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	**5**
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	**6**
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	**7**
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	**8**
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	**9**
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	**10**
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	**11**
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	**12**
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	**13**
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	**14**
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	**15**
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	**16**
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	**17**
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	**18**
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	**19**
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	**20**
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	**21**
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	**22**
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	**23**
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	**24**
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	**25**
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	**26**
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	**27**
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	**28**
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	**29**
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	**30**
31	31		90		151		212	243		304		365	**31**

В високосном году 29 февраля имеет номер 60, а номера дней после 28 февраля увеличиваются на единицу.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3

Глава 1 ПРОЦЕНТНЫЕ ДЕНЬГИ
1.1 Проценты 5
1.2 Простые проценты 5
Упражнения 7
1.3 Время между датами. Оформление векселей 9
1.4 Простой дисконт 12
Упражнения 15

Глава 2 СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ
2.1 Составной итог и сложные проценты 17
2.2 Обозначения 18
2.3 Основная формула составного итога 18
2.4 Вычисление составного итога 19
2.5 Настоящая стоимость и сложный дисконт 21
2.6 Эквивалентные нормы 22
2.7 Составной итог и настоящая стоимость для дробных периодов времени 23
Упражнения 26

Глава 3 УРАВНЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ
3.1 Датированные суммы 27
3.2 Серии датированных сумм 29
3.3 Эквивалентные серии платежей 32
Упражнения 37

Глава 4 ПРОСТЫЕ АННУИТЕТЫ
4.1 Определения 39
4.2 Настоящая стоимость и итоговая сумма обыкновенного аннуитета 40
4.3 Полагающиеся аннуитеты 44
4.4 Отсроченные аннуитеты 48
4.5 Тождества, связывающие накопления и аннуитеты 50
Упражнения 52
4.6 Определение платежей аннуитета 53
4.7 Аннуитеты с неизвестными сроками 56
4.8 Определение заключительного платежа с помощью интерполяции 58
4.9 Определение процентной ставки 61

Упражнения 63

Глава 5 ОБЫКНОВЕННЫЕ ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ
5.1 Введение 65
5.2 Преобразование обыкновенных общих аннуитетов в простые 66
5.3 Итоговая сумма и настоящая стоимость обыкновенного аннуитета 69
5.4 Преобразование простых аннуитетов в общие 70
5.5 Определение процентной ставки для общего аннуитета 72
5.6 Определение срока общего аннуитета 74
Упражнения 75

Глава 6 АМОРТИЗАЦИЯ И ПОГАСИТЕЛЬНЫЕ ФОНДЫ
6.1 Амортизация долга 77
6.2 Определение неоплаченной суммы долга 79
6.3 Покупка в рассрочку 84
6.4 Погасительные фонды 87
6.5 Метод погасительного фонда погашения долга 89
6.6 Сравнение погасительных фондов и амортизационных методов погашения долга 90
6.7 Амортизация, использующая различные процентные ставки 91

Глава 7 ВЕЧНАЯ РЕНТА
7.1 Обыкновенные простая и общая вечные ренты 101
7.2 Полагающиеся ренты 103
7.3 Другой подход к анализу общей ренты 105
7.4 Капитализация 106
7.5 Сравнение активов на основе инвестиционной стоимости . . . 109
7.6 Сравнение активов на основе стоимости продукции 111
Упражнения 112

Глава 8 ОБЛИГАЦИИ
8.1 Введение 113
8.2 Инвестиционная норма 114
8.3 Покупная цена для получения заданной нормы инвестиции . . 115
8.4 Альтернативная формула для покупной цены 117
8.5 Оценивание облигаций между датами начисления процентов 120
8.6 Расписания облигаций 122
8.7 Приобретение облигаций на рынке 126
8.8 Анализ облигаций между датами начисления процентов 129
8.9 Определение нормы доходности 133

8.10 Таблицы облигаций 136
8.11 Другие виды облигаций 137

Глава 9 ОБЕСЦЕНИВАНИЕ
9.1 Определения 139
9.2 Линейный метод или метод средних 140
9.3 Метод погасительного фонда 141
9.4 Метод суммирования до целого 143
9.5 Метод постоянных процентов 144
9.6 Годовая величина обесценивания и процентов 146
9.7 Истощение 148
Упражнения 150

Глава 10 ОБЩИЕ АННУИТЕТЫ
10.1 Общие полагающиеся аннуитеты 151
10.2 Общий случай 154
10.3 Определение числа платежей и заключительного платежа . . 160
10.4 Доказательство общей теоремы интерполяции 165
10.5 Другие виды аннуитетов 167
Упражнения 171

Глава 11 АКЦИИ
11.1 Виды акций 173
11.2 Торговля акциями 174
11.3 Оценивание акций 177
11.4 Цены и доходности 180
11.5 Формула Мэйкхэма 185

ПРИЛОЖЕНИЕ
1. Описание «Таблиц для финансовых расчетов» 192
2. Таблица порядковых номеров дней года 193