

В. И. Арнольд

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Издание четвертое

**Редакция журнала
“Регулярная и хаотическая динамика”**

Удмуртский государственный университет

2000

А 84 Арнольд В. И.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. — 368 с.

Отличается от имеющихся учебных руководств по обыкновенным дифференциальным уравнениям большей, чем это обычно принято, связью с приложениями, в особенности с механикой, и более геометрическим, бескоординатным изложением. В соответствии с этим в книге мало выкладок, но много понятий, необычных для курса дифференциальных уравнений (фазовые потоки, однопараметрические группы, диффеоморфизмы, касательные пространства и расслоения) и примеров из механики (например, исследование фазовых портретов консервативных систем с одной степенью свободы, теория малых колебаний, параметрический резонанс).

Для студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике, но будет интересна и специалистам в области математики и ее приложений.

ББК 22.161.6

© Редакция журнала «Регулярная
и хаотическая динамика», 2000

Оглавление

Предисловие к третьему изданию	5
Предисловие к первому изданию	9
Некоторые постоянно употребляемые обозначения	11
Глава 1. Основные понятия	12
§ 1. Фазовые пространства	12
§ 2. Векторные поля на прямой	36
§ 3. Линейные уравнения	51
§ 4. Фазовые потоки	62
§ 5. Действие диффеоморфизмов на векторные поля и на поля направлений	72
§ 6. Симметрии	83
Глава 2. Основные теоремы	96
§ 7. Теоремы о выпрямлении	96
§ 8. Применения к уравнениям выше первого порядка	113
§ 9. Фазовые кривые автономной системы	127
§ 10. Производная по направлению векторного поля и первые интегралы	132
§ 11. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка с частными производными	140
§ 12. Консервативная система с одной степенью свободы . . .	151
Глава 3. Линейные системы	166
§ 13. Линейные задачи	166
§ 14. Показательная функция	169
§ 15. Свойства экспоненты	177
§ 16. Определитель экспоненты	184
§ 17. Практическое вычисление матрицы экспоненты — слу- чай вещественных и различных собственных чисел . . .	189
§ 18. Комплексификация и овеществление	192

§ 19. Линейное уравнение с комплексным фазовым пространством	197
§ 20. Комплексификация вещественного линейного уравнения	202
§ 21. Классификация особых точек линейных систем	213
§ 22. Топологическая классификация особых точек	218
§ 23. Устойчивость положений равновесия	229
§ 24. Случай чисто мнимых собственных чисел	235
§ 25. Случай кратных собственных чисел	241
§ 26. О квазимногочленах	252
§ 27. Линейные неавтономные уравнения	266
§ 28. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами	281
§ 29. Вариация постоянных	290
Глава 4. Доказательства основных теорем	293
§ 30. Сжатые отображения	293
§ 31. Доказательство теорем существования и непрерывной зависимости от начальных условий	295
§ 32. Теорема о дифференцируемости	306
Глава 5. Дифференциальные уравнения на многообразиях	317
§ 33. Дифференцируемые многообразия	317
§ 34. Касательное расслоение. Векторные поля на многообразии	328
§ 35. Фазовый поток, заданный векторным полем	335
§ 36. Индексы особых точек векторного поля	339
Программа экзамена	355
Образцы экзаменационных задач	356
Предметный указатель	363

Предисловие к третьему изданию

Первые две главы книги сильно переработаны и значительно расширены. Добавлены разделы об элементарных методах интегрирования (о линейных однородных и неоднородных уравнениях первого порядка, об однородных и квазиоднородных уравнениях), о линейных и квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка, об уравнениях, неразрешенных относительно производных, и о теоремах Штурма о нулях линейных уравнений второго порядка. Таким образом, в новое издание книги включены все вопросы действующей программы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Излагая специальные приемы интегрирования, автор старался всюду выявлять геометрическую сущность разбираемых методов и показывать, как эти методы работают в приложениях, особенно в механике. Так, для решения линейного неоднородного уравнения вводится δ -функция и вычисляется запаздывающая функция Грина, квазиоднородные уравнения приводят к теории подобия и закону всемирного тяготения, а теорема о дифференцируемости решения по начальным условиям — к исследованию относительного движения космических тел на близких орбитах.

Автор позволил себе включить в это предисловие несколько исторических отступлений. Дифференциальные уравнения изобретены Ньютоном (1642–1727). Ньютон считал это свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: «законы природы выражаются дифференциальными уравнениями».

Основным аналитическим достижением Ньютона было разложение всевозможных функций в степенные ряды (смысл второй, длинной анаграммы Ньютона в том, что для решения любого уравнения нужно подставить в уравнение ряд и приравнять члены одинаковой степени). Особенное значение имела здесь открытая им формула бинома Ньютона (разумеется, не только с целыми показателями, для которых формулу знал, например, Виета (1540–1603), но и, что особенно важно, с дробными и отрицательными показателями). Ньютон разложил в «ряды Тейлора» все основные элементарные функции (рациональные, радикалы,

тригонометрические, экспоненту и логарифм). Это, вместе с составленной им таблицей первообразных (которая перешла в почти неизменном виде в современные учебники анализа), позволяло ему, по его словам, сравнивать площади любых фигур «за половину четверти часа».

Ньютон указывал, что коэффициенты его рядов пропорциональны последовательным производным функции, но не останавливался на этом подробно, так как он справедливо считал, что все вычисления в анализе удобнее производить не при помощи кратных дифференцирований, а путем вычисления первых членов ряда. Для Ньютона связь между коэффициентами ряда и производными была скорее средством вычисления производных, чем средством составления ряда.

Одним из важнейших достижений Ньютона является его теория солнечной системы, изложенная в «Математических началах натуральной философии» («Principia») без помощи математического анализа. Обычно полагают, что Ньютон открыл при помощи своего анализа закон всемирного тяготения. В действительности Ньютону (1680) принадлежит лишь доказательство эллиптичности орбит в поле притяжения по закону обратных квадратов: сам этот закон был указан Ньютону Гукком (1635–1703) (см. § 8) и, по-видимому, угадывался еще несколькими учеными.

С «Principia» Ньютона начинается современная физика. Завершение формирования анализа как самостоятельной научной дисциплины связано с именем Лейбница (1646–1716). Огромной заслугой Лейбница является также широкая пропаганда анализа (первая публикация — статья 1684 г.) и доведение его алгоритмов¹ до полного автоматизма: он изобрел таким образом способ научить пользоваться анализом (и преподавать его) людей, вовсе его не понимающих, — тенденция, с которой приходится бороться еще и сегодня.

Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707–1783) и Лагранжа (1736–1813). В этих работах была прежде всего развита теория малых колебаний, а следовательно — теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и векторы в n -мерном случае). Характеристическое уравнение линейного оператора долго называли секулярным,

¹Между прочим, Лейбницу принадлежат понятия матрицы, обозначение a_{ij} , а также начала теории определителей и теории систем линейных уравнений, одна из первых вычислительных машин.

так как именно из такого уравнения определяются секулярные (вековые, т. е. медленные по сравнению с годовым движением) возмущения планетных орбит согласно теории малых колебаний Лагранжа. Вслед за Ньютоном Лаплас и Лагранж, а позже Гаусс (1777–1855) развивают также методы теории возмущений.

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Лиувиль (1809–1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в том числе таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах. Позже С. Ли (1842–1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришел к необходимости подробно исследовать группы диффеоморфизмов (получившие впоследствии имя групп Ли) — так из теории дифференциальных уравнений возникла одна из наиболее плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами (алгебры Ли еще раньше рассматривали Пуассон (1781–1840) и, особенно, Якоби (1804–1851)).

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Пуанкаре (1854–1912), созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных привела к основанию современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь ее чаще называют, теория динамических систем, является сейчас наиболее активно развивающейся и имеющей наиболее важные приложения в естествознании областью теории дифференциальных уравнений. Начиная с классических работ А. М. Ляпунова (1857–1918) по теории устойчивости движения в развитии этой области большое участие принимают русские математики (упомяну работы А. А. Андропова (1901–1952) по теории бифуркаций, А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина по структурной устойчивости, Н. М. Крылова (1879–1955) и Н. Н. Боголюбова по теории усреднения, А. Н. Колмогорова по теории возмущений условнопериодических движений. Разбор современных достижений, конечно, выходит за рамки настоящей книги (с некоторыми из них можно познакомиться, например, по книгам автора «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений», М., 1978; «Математические методы классической механики», М., 1974; «Теория катастроф», М., 1981).

Автор благодарен всем читателям предыдущих изданий, сообщившим свои замечания, которые автор постарался учесть при переработке книги, а также Д. В. Аносову, многочисленные замечания которого способствовали улучшению настоящего издания.

В. И. Арнольд

Предисловие к первому изданию

При отборе материала для этой книги автор стремился ограничиться строго необходимым минимумом. Центральное место в курсе занимают два круга вопросов: теорема о выпрямлении векторного поля (эквивалентная обычным теоремам существования, единственности и дифференцируемости решений) и теория однопараметрических групп линейных преобразований (т. е. теория линейных автономных систем). Автор позволил себе не касаться ряда более специальных вопросов, обычно включаемых в курсы обыкновенных дифференциальных уравнений (элементарные приемы интегрирования; уравнения, не разрешенные относительно производной; особые решения; теория Штурма–Лиувилля; уравнения с частными производными первого порядка). Часть из этих вопросов удобнее разобрать на упражнениях; последние же две темы естественнее относить к курсам уравнений с частными производными или вариационного исчисления.

Более подробно, чем это обычно принято, разбираются приложения обыкновенных дифференциальных уравнений к механике. Уравнение маятника появляется на одной из первых страниц; в дальнейшем эффективность вводимых понятий и методов каждый раз проверяется на этом примере. Так, в параграфе о первых интегралах появляется закон сохранения энергии, из теоремы о дифференцировании по параметру извлекается «метод малого параметра», а теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами естественно приводит к исследованию качелей («параметрический резонанс»).

Изложение многих вопросов в курсе сильно отличается от традиционного. Автор стремился всюду выявить геометрическую, качественную сторону изучаемых явлений. В соответствии с этим в книге много чертежей и нет ни одной сколько-нибудь сложной формулы. Зато появляется целый ряд фундаментальных понятий, которые при традиционном, координатном изложении остаются в тени (фазовое пространство и фазовые потоки, гладкие многообразия и расслоения, векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов). Курс значительно

сократился бы, если бы можно было предполагать эти понятия известными. К сожалению, в настоящее время указанные вопросы не включаются ни в курсы анализа, ни в курсы геометрии. Поэтому автору пришлось излагать их достаточно подробно, не предполагая у читателя никаких предварительных знаний, выходящих за рамки стандартных элементарных курсов анализа и линейной алгебры.

Основу настоящей книги составил годовой курс лекций, которые автор читал студентам-математикам второго курса Московского университета в 1968–1970 гг.

При подготовке лекций к печати большую помощь оказал Р. И. Богданов. Автор благодарен ему и всем слушателям и коллегам, сообщившим свои замечания о ротاپринтном тексте лекций (МГУ, 1969). Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и С. Г. Крейну за внимательное рецензирование рукописи.

1971 г.

В. Арнольд

Некоторые постоянно употребляемые обозначения

$\mathbb{R}$ — множество (группа, поле) вещественных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество (группа, поле) комплексных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество (группа, кольцо) целых чисел.

$x \in X \subset Y$ — элемент x подмножества X множества Y .

$X \cap Y, X \cup Y$ — пересечение и объединение множеств X и Y .

$f: X \rightarrow Y$ — отображение f множества X во множество Y .

$x \mapsto y$ — отображение переводит точку x в точку y .

$f \circ g$ — произведение отображений (применяется сначала g).

$\exists; \forall$ — существует; для всякого.

$*$ — не обязательная (более трудная) задача или теорема.

$\mathbb{R}^n$ — линейное пространство размерности n над полем $\mathbb{R}$.

Во множестве $\mathbb{R}^n$ могут рассматриваться и другие структуры (например, аффинная, евклидова или структура прямого произведения n прямых). Обычно это будет специально оговариваться («аффинное пространство $\mathbb{R}^n$ », «евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ », «координатное пространство $\mathbb{R}^n$ » и т. п.).

Векторами мы называем элементы линейного пространства. Векторы обычно обозначаются буквами полужирного шрифта ($\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}$ и т. п.). Векторы координатного пространства $\mathbb{R}^n$ отождествляются с наборами n чисел. Мы будем писать, например, $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_n) = v_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + v_n \boldsymbol{e}_n$; набор n векторов $\boldsymbol{e}_i$ называется *координатным базисом* в $\mathbb{R}^n$.

Нам часто будут встречаться функции вещественного переменного t , называемого *временем*. Производная по t называется *скоростью* и обозначается чаще всего точкой наверху: $\dot{x} = dx/dt$.

ГЛАВА 1

Основные понятия

§ 1. Фазовые пространства

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности*, *конечномерности* и *дифференцируемости*. Прежде чем дать точные математические определения, рассмотрим несколько примеров.

1. Примеры эволюционных процессов. Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящее время. Множество всевозможных состояний процесса называется *фазовым пространством*.

Так, например, классическая механика рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы. Фазовое пространство механической системы — это множество, элементом которого является набор положений и скоростей всех точек данной системы.

Движение частиц в квантовой механике не описывается детерминированным процессом. Распространение тепла — полудетерминированный процесс: будущее определяется настоящим, а прошлое — нет.

Процесс называется *конечномерным*, если его фазовое пространство конечномерно, т. е. если число параметров, нужных для описания его состояния, конечно. Так, например, ньютоновская механика систем из конечного числа материальных точек или твердых тел относится к этому классу. Размерность фазового пространства системы из n материальных точек равна $6n$, а системы из n твердых тел — $12n$. Движения жидкости, изучаемые в гидродинамике, процессы колебаний струны и мембраны, распространение волн в оптике и акустике — примеры процессов, которые нельзя описать с помощью конечномерного фазового пространства.

Процесс называется *дифференцируемым*, если его фазовое пространство имеет структуру дифференцируемого многообразия, а изменение состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями.

Так, например, координаты и скорости точек механической системы меняются со временем дифференцируемым образом.

Движения, изучаемые в теории удара, свойством дифференцируемости не обладают.

Таким образом, движение системы в классической механике может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как квантовая механика, теория теплопроводности, гидродинамика, теория упругости, оптика, акустика и теория удара требуют иных средств.

Еще два примера детерминированных конечномерных и дифференцируемых процессов: процесс радиоактивного распада и процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества. В обоих случаях фазовое пространство одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества или количеством бактерий. В обоих случаях процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Заметим, что вид дифференциального уравнения процесса, а также самый факт детерминированности, конечномерности и дифференцируемости того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы не будем всякий раз подчеркивать это обстоятельство и будем говорить о реальных процессах так, как если бы они точно совпадали с нашими идеализированными математическими моделями.

2. Фазовые потоки. Точная формулировка изложенных выше общих принципов требует довольно абстрактных понятий: *фазового пространства* и *фазового потока*. Чтобы освоиться с этими понятиями, рассмотрим пример, где уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

Задача 1 (Н. Н. Константинов). Из города A в город B (рис. 1) ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из A в B , не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых веза радиуса l , центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

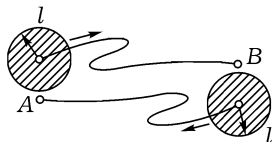


Рис. 1. Начальное положение возов

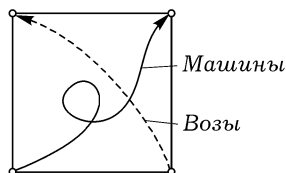


Рис. 2. Фазовое пространство пары экипажей

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим квадрат (рис. 2)

$$M = \{x_1, x_2 : 0 \leq x_i \leq 1\}.$$

Положение двух экипажей (один — на первой дороге, другой — на второй) можно характеризовать точкой квадрата M : достаточно обозначить через x_i долю расстояния от A до B по i -й дороге, заключенную между A и находящимся на этой дороге экипажем.

Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата M . Этот квадрат называется *фазовым пространством*, а его точки — *фазовыми точками*. Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве.

Например, начальное положение машин (в городе A) соответствует левому нижнему углу квадрата ($x_1 = x_2 = 0$), а движение машин из A в B изображается кривой, ведущей в противоположный угол.

Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата ($x_1 = 0, x_2 = 1$), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата.

Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удастся.

В рассмотренном примере не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание состояний процесса как точек подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Например, состояние процесса движения системы n материальных точек в классической механике описывается значениями координат и скоростей всех материальных точек. Следовательно, фазовое пространство такой системы имеет размерность $6n$ (по три координаты и три компоненты скорости на каждую материальную точку). Фазовое пространство системы трех точек (Солнце, Юпитер, Сатурн) 18-мерно. Фазовое пространство системы n твердых тел имеет размерность $12n$ (почему?).

Движение всей системы описывается движением точки по кривой в фазовом пространстве. Скорость движения фазовой точки по этой кривой определяется самой точкой. Таким образом, в каждой точке фазового пространства задан вектор — он называется вектором фазовой скорости. Все векторы фазовой скорости образуют векторное поле фазовой скорости в фазовом пространстве. Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение процесса (зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения).

Основная задача теории дифференциальных уравнений состоит в определении или исследовании движения системы по векторному полю фазовой скорости. Сюда относятся, например, вопросы о виде фазовых кривых (траекторий движения фазовой точки): уходят ли, скажем, фазовые кривые данного векторного поля в фазовом пространстве на бесконечность или остаются в ограниченной области?

В общем виде эта задача не поддается средствам современной математики и, по-видимому, в некотором смысле неразрешима (в частности это относится к упоминавшейся проблеме трех тел). В простейших частных случаях, с которых мы и начнем, задача решается явно при помощи операции интегрирования. Вычислительные машины позволяют приближенно находить решения дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени, но не дают ответа на качественные вопросы о поведении фазовых кривых в целом. В дальнейшем, наряду с методами явного решения специальных дифференциальных уравнений, мы приведем также некоторые методы качественного исследования.

Понятие фазового пространства сводит изучение эволюционных процессов к геометрическим задачам о кривых, определяемых векторными полями. Мы начнем исследование дифференциальных уравнений со следующей геометрической задачи.

3. Интегральные кривые поля направлений. Предположим, что в каждой точке некоторой области на плоскости выбрана проходя-

щая через эту точку прямая. В таком случае говорят, что в области задано поле направлений (рис. 3).

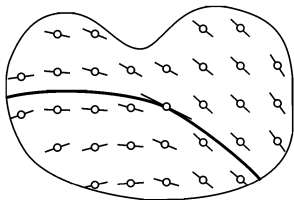


Рис. 3. Поле направлений и его интегральная кривая

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Две гладкие кривые, проходящие через одну точку, задают в ней одинаковое направление, если они касаются. Таким образом, прямые в определении поля направлений можно заменить произвольными гладкими кривыми: важна лишь касательная к кривой в точке. На рис. 3 изображена лишь маленькая часть прямой около каждой точки.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Здесь и в дальнейшем все встречающиеся объекты (функции, отображения, ...) предполагаются гладкими, т. е. непрерывно дифференцируемыми нужное число раз, если не оговорено противное. Поле направлений называется непрерывным (гладким), если прямые поля непрерывно (гладко) зависят от точки приложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичным образом определяется поле направлений (прямых) в n -мерном пространстве (а также на любом гладком многообразии).

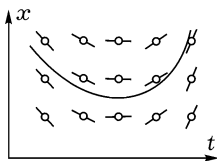


Рис. 4. Поле инвариантное относительно вертикальных сдвигов

Определение. Линия, которая в каждой своей точке касается имеющегося в этой точке направления поля, называется *интегральной кривой* поля направлений.

Название «интегральные кривые» объясняется тем, что в некоторых случаях эти кривые можно найти при помощи операции интегрирования.

ПРИМЕР. Предположим, что непрерывное поле направлений на плоскости переходит в себя при всех сдвигах вдоль некоторой прямой и не содержит параллельных ей направлений (рис. 4).

Теорема. *Задача отыскания интегральных кривых такого поля есть в точности задача интегрирования данной непрерывной функции.*

Доказательство.

Выберем систему координат, в которой данная прямая — вертикальная ось ординат, а ось абсцисс горизонтальна. Интегральная кри-

вая поля без вертикальных направлений является графиком функции. Производная этой функции равна тангенсу угла наклона графика к оси абсцисс. График — интегральная кривая тогда и только тогда, когда этот тангенс равен тангенсу угла наклона прямой данного поля к оси абсцисс. Но этот последний тангенс — известная функция абсциссы (поскольку поле переходит в себя при сдвигах вдоль оси ординат). Следовательно, функция, графиком которой является интегральная кривая, имеет производной известную функцию и, значит, является ее первообразной, что и требовалось доказать.

Обозначим абсциссу буквой t , ординату — буквой x , тангенс угла наклона прямой поля — известная функция $v(t)$, интегральная кривая — график неизвестной функции φ . Кривая $x = \varphi(t)$ интегральная, если и только если $\frac{d\varphi}{dt} \equiv v(t)$. По теореме Барроу¹ $\varphi = \int v dt + C$.

В общем случае задача отыскания интегральных кривых не сводится к операции интегрирования: даже для очень просто задаваемых полей направлений на плоскости уравнения интегральных кривых нельзя представить конечными комбинациями элементарных функций и интегралов².

4. Дифференциальное уравнение и его решения. Геометрическая задача отыскания интегральных кривых аналитически записывается как задача отыскания решений дифференциального уравнения. Предположим, что поле на плоскости (t, x) не содержит вертикальных направлений (не параллельно оси ординат, x (рис. 5)). Тогда тангенс $v(t, x)$ угла наклона приложенной в точке (t, x) прямой поля к оси абсцисс конечен и, интегральные кривые являются графиками функций $x = \varphi(t)$.

Мы будем предполагать, что областью определения функции φ является интервал I оси t . Очевидна

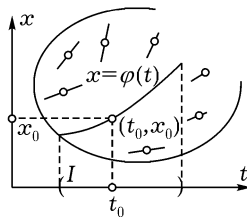


Рис. 5. График решения дифференциального уравнения

Теорема. Для того чтобы график функции φ был интегральной кривой, необходимо и достаточно, чтобы при всех t из I выполнялось

¹И. Барроу, 1630–1677, учитель Ньютона, посвятивший книгу взаимной обратности задач о касательных и площадях.

²Пример: таково поле, в котором тангенс угла наклона прямой, приложенной в точке (t, x) , с осью x равен $x^2 - t$ (Лиувилль).

соотношение

$$\frac{d\varphi}{dt} = v(t, \varphi(t)). \quad (1)$$

Определение. Функция φ называется *решением* дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t, x), \quad (2)$$

если она удовлетворяет соотношению (1) (т. е. если «при подстановке ее в уравнение вместо x уравнение обращается в тождество»).

Определение. Решение φ *удовлетворяет начальному условию* (t_0, x_0) , если $\varphi(t_0) = x_0$.

Таким образом, решение — это заданная на интервале функция, график которой — интегральная кривая; решение удовлетворяет начальному условию (t_0, x_0) , если интегральная кривая проходит через данную точку (рис. 5).

ПРИМЕР. Решение простейшего уравнения $\dot{x} = v(t)$ с начальным условием (t_0, x_0) дается *формулой Барроу*:

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

Всякое дифференциальное уравнение (2) определяет поле направлений на плоскости: приложенная в точке (t, x) прямая имеет тангенс угла наклона $v(t, x)$. Это поле короче называется *полем направлений* v или *полем направлений уравнения* (2).

5. Эволюционное уравнение с одномерным фазовым пространством. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Это уравнение описывает эволюционный процесс с одномерным фазовым пространством. Правая часть задает *векторное поле фазовой скорости*: в точке x приложен вектор $v(x)$ (рис. 6, слева). Такое уравнение, правая часть которого не зависит от t , называется *автономным*. Скорость эволюции автономной системы, т. е. системы, не взаимодействующей с другими, определяется одним лишь состоянием этой системы: от времени законы природы не зависят.

Точки, где v обращается в 0, называются *положениями равновесия* (также *стационарными точками* или *особыми точками*) векторного поля. Если a — положение равновесия, то $\varphi(t) \equiv a$ — решение уравнения (процесс, начавшись в состоянии a , всегда в нем остается). На рис. 6 видно одно положение равновесия, a . Видно, что это положение равновесия неустойчиво: при малом отклонении начального условия от равновесного фазовая точка с течением времени удаляется от положения равновесия.

На рис. 6 изображено также поле направлений рассматриваемого уравнения. Поскольку v не зависит от t , поле переходит в себя при сдвигах вдоль оси t .

Согласно теореме п. 3, задача построения интегральных кривых этого поля решается одним интегрированием (в области, где поле не параллельно оси t , т.е. где нет равновесий, $v(x) \neq 0$). Предположим, что функция v непрерывна и нигде не обращается в 0. Выпишем явную формулу, определяющую интегральные кривые.

Тангенс угла наклона нашего поля к оси x равен $1/v(x)$. Следовательно, *поле направлений уравнения $dx/dt = v(x)$ совпадает с полем направлений уравнения $dt/dx = 1/v(x)$* . Значит, совпадают и интегральные кривые этих уравнений. Но интегральная кривая второго дается формулой Барроу; в данном случае она имеет вид

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)}. \quad (3)$$

Таким образом доказана

Теорема. *Решение $x = \varphi(t)$ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с непрерывной и не обращающейся в 0 правой частью, удовлетворяющее начальному условию (t_0, x_0) , дается формулой (3). Обратно, функция $x = \varphi(t)$, определяемая формулой (3), является решением и удовлетворяет начальному условию.*

ЗАМЕЧАНИЕ. «Мнемонический» способ запоминания формулы (3) состоит в следующем. Запишем исходное уравнение в виде $dx/dt = v(x)$. Хотя в курсах анализа при введении производной учат, что dx/dt не дробь, а единый символ, будем обращаться с этим символом как с дробью и перепишем уравнение, собрав все x слева, а все t справа, в виде

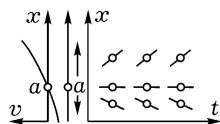


Рис. 6. Векторное поле и поле направлений для уравнения $x = v(x)$

$dx/v(x) = dt$. Интегрируя левую и правую части, получаем соотношение $t = \int dx/v(x)$, т. е. (3).

В действительности этот способ, конечно, больше, чем мнемоническое правило. Лейбниц не стал бы вводить сложное обозначение $\frac{dx}{dt}$, если бы не имел в виду самой настоящей дроби: dx деленное на dt . Дело в том, что dx и dt — вовсе не таинственные «бесконечно малые» величины, а вполне конечные числа, точнее — функции вектора.

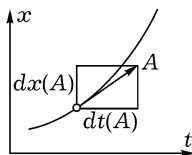


Рис. 7. Числитель и знаменатель дроби dx/dt

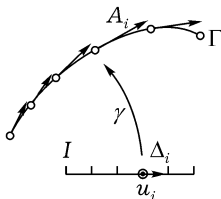


Рис. 8. Определение интеграла 1-формы

Рассмотрим (рис. 7) приложенный в какой-либо точке вектор A скорости движения на плоскости, на которой фиксированы координаты (t, x) . Скорость изменения координаты t при этом движении является функцией этого вектора. Она линейна. Эта линейная функция вектора и обозначается dt . Например, значение этой функции на векторе A с компонентами $(10, 20)$ есть $dt(A) = 10$. Точно так же определяется $dx(A) = 20$ — скорость изменения координаты x при движении с вектором скорости A , так что A имеет компоненты $dt(A)$, $dx(A)$. Очевидно

Предложение 1. Для любого вектора A , касающегося графика гладкой функции $x = \varphi(t)$, отношение $dx(A)/dt(A)$ равно производной dx/dt функции φ в соответствующей точке.

Таким образом, уравнение $dx/v(x) = dt$ есть соотношение между линейными функциями от вектора, касающегося интегральной кривой.

Функции приложенного вектора, линейные при фиксированной точке приложения, называются дифференциальными 1-формами.

Всякая дифференциальная 1-форма на плоскости (t, x) может быть записана в виде $\omega = a dt + b dx$, где a и b — функции на плоскости.

Дифференциальные формы можно интегрировать вдоль ориентированных отрезков кривых. Выберем на отрезке Γ кривой на плоскости ориентирующий параметр u , т. е. представим Γ в виде образа гладкого отображения

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (рис. 8) отрезка оси u в плоскость. Интеграл формы ω вдоль Γ определяется как число

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_I \omega(\gamma') du, \quad \text{где} \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{du}.$$

Иными словами, интеграл — это предел интегральных сумм $\sum \omega(A_i)$, где $A_i = \gamma'(u_i)\Delta_i$; здесь u_i — точки деления отрезка I на отрезки длин $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$. Вектор A_i касается Γ и лишь малыми высшего порядка относительно Δ_i отличается от вектора хорды, соединяющей последовательные точки деления на Γ (рис. 8).

Из теоремы о замене переменной в определенном интеграле¹ вытекает

Предложение 2. *Интеграл 1-формы по ориентированному отрезку кривой не зависит от выбора параметра, согласованного с ориентацией (при изменении ориентации интеграл меняет знак).*

Очевидно

Предложение 3. *Интеграл 1-формы $f(x)dx$ по отрезку кривой, на котором x можно принять за параметр, совпадает с обычным определенным интегралом функции f .*

Вернемся к доказательству формулы (3).

Значения дифференциальных форм $dx/v(x)$ и dt на векторах, касающихся интегральной кривой, совпадают. Значит, их интегралы вдоль отрезка кривой равны. Согласно предложению 3, интеграл первой формы равен правой, а второй — левой части формулы (3).

6. Пример: уравнение нормального размножения. Предположим, что величина биологической популяции (например, количество бактерий в чашке Петри или рыб в пруду) равна x и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

Наше предположение выражается *дифференциальным уравнением нормального размножения*

$$\dot{x} = kx, \quad k > 0.$$

По смыслу задачи $x > 0$, так что поле направлений задано в полуплоскости; оно изображено на рис. 9. Из вида поля направлений ясно, что x

¹Эта теорема открыта Барроу именно при решении простейших дифференциальных уравнений, теперь называемых уравнениями с разделяющимися переменными.

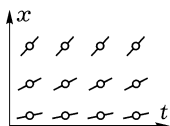


Рис. 9. Уравнение размножения $\dot{x} = kx$

растет с ростом t , но неясно, будут ли бесконечные значения x достигнуты за конечное время (вертикальная асимптота у интегральной кривой) или же решение остается конечным при всех t ? Наряду с будущим неясно также и прошлое: будет ли интегральная кривая стремиться к оси $x = 0$ при стремлении t к конечному отрицательному пределу или к бесконечному?

К счастью, уравнение размножения решается явно по предыдущей теореме: согласно формуле (3),

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{k\xi}, \quad k(t - t_0) = \ln(x/x_0), \quad x = e^{k(t-t_0)}x_0.$$

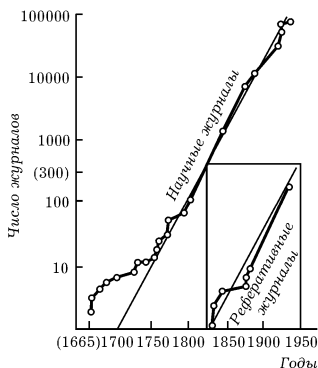


Рис. 10. Рост числа оригинальных и реферативных научных журналов (по книге В. В. Налимова и З. М. Мульченко «Наукометрия» (М.: Наука, 1969))

Это время называется *периодом полураспада*. Период полураспада широко известного изотопа радия-226 — 1620 лет, а наиболее распространенного изотопа урана-238 — $4.5 \cdot 10^9$ лет.

То же уравнение встречается и в большом числе других задач (в дальнейшем мы увидим, что это не случайность, а проявление закона природы, по которому «всякая» функция локально приближенно линейна).

Следовательно, решения уравнения нормального размножения экспоненциально растут при $t \rightarrow +\infty$ и экспоненциально убывают при $t \rightarrow -\infty$; *ни бесконечные, ни нулевые значения x при конечных t не достигаются*. Для удвоения количества населения, согласно уравнению нормального размножения, требуется, таким образом, всегда одно и то же время, независимо от его количества (период удвоения населения Земли сейчас порядка 40 лет). Наука до середины XX века также росла экспоненциально (рис. 10).

То же самое дифференциальное уравнение с отрицательным k описывает радиоактивный распад. Для уменьшения количества радиоактивного вещества вдвое требуется время $T = k^{-1} \ln 2$, независимо от начального количества вещества. Это

Задача 1. На какой высоте плотность воздуха вдвое меньше, чем на поверхности Земли? Температуру считать постоянной, кубометр воздуха на поверхности Земли весит 1250 г.

Ответ. $8 \ln 2$ км ≈ 5.6 км — высота Эльбруса.

7. Пример: уравнение взрыва. Предположим теперь, что скорость прироста пропорциональна не количеству особей, а количеству пар:

$$\dot{x} = kx^2. \quad (4)$$

В этом случае при больших x прирост идет гораздо быстрее нормального, а при малых — гораздо медленнее (эта ситуация встречается скорее в физико-химических задачах, где скорость реакции пропорциональна концентрациям обоих реагентов; впрочем, в настоящее время китам некоторых видов так трудно найти себе пару, что размножение китов подчиняется уравнению (4), причем x мало).

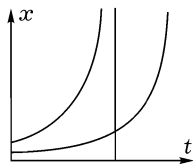


Рис. 11. Уравнение взрыва $\dot{x} = x^2$

Поле направлений на вид мало отличается от такового для случая обычного размножения (рис. 9), но вычисления показывают, что интегральные кривые ведут себя совершенно по-другому. Предположим для простоты, что $k = 1$. По формуле Барроу находим решение $t = \int \frac{dx}{x^2} + C$, т.е. $x = -\frac{1}{t-C}$ при $t < C$. Интегральные кривые — половины гипербол (рис. 11). Гипербола имеет вертикальную асимптоту.

Итак, если прирост населения пропорционален числу пар, то количество населения становится бесконечно большим за конечное время. Физически этот вывод соответствует взрывообразному характеру процесса. (Разумеется, при t , слишком близком к C , идеализация, принятая при описании процесса дифференциальным уравнением, неприменима, так что реальное количество населения за конечное время бесконечных значений не достигает).

Интересно отметить, что вторая половина гиперболы $x = (C-t)^{-1}$ также является интегральной кривой нашего уравнения (если продолжить его с полуоси $x > 0$ на всю ось x). Решения, соответствующие обеим половинам гиперболы, даются одной и той же формулой, но никак не связаны между собой. Связь между этими решениями восстанавливается, если считать время комплексным или если компактифицировать аффинную ось x до проективной прямой (см. гл. 5).

Задача*1. Какие из дифференциальных уравнений $\dot{x} = x^n$ определяют на аффинной прямой поле фазовой скорости, продолжающееся без особенностей на проективную прямую?

ОТВЕТ. $n = 0, 1$ или 2 .

8. Пример: логистическая кривая. Уравнение обычного размножения $\dot{x} = kx$ пригодно, лишь пока число особей не слишком велико. С увеличением числа особей конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от x как линейная неоднородная функция (при не слишком больших x всякую гладкую функцию можно аппроксимировать линейной неоднородной): $k = a - bx$.

Мы приходим таким образом к *уравнению размножения с учетом конкуренции* $\dot{x} = (a - bx)x$. Коэффициенты a и b можно превратить в единицу выбором масштабов t и x . Мы получаем так называемое *логистическое уравнение*

$$\dot{x} = (1 - x)x.$$

Векторное поле фазовой скорости v и поле направлений на плоскости (t, x) изображены на рис. 12.

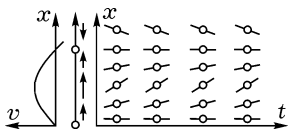


Рис. 12. Векторное поле и поле направлений уравнения $\dot{x} = (1 - x)x$

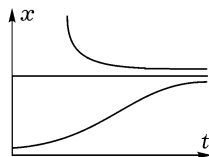


Рис. 13. Интегральные кривые уравнения $\dot{x} = (1 - x)x$

Мы заключаем отсюда, что интегральные кривые выглядят, как изображено на рис. 13. Точнее говоря, мы видим, что

- 1) процесс имеет два положения равновесия: $x = 0$ и $x = 1$;
- 2) между точками 0 и 1 поле направлено от 0 к 1, а при $x > 1$ — к точке 1.

Таким образом, положение равновесия 0 неустойчиво (раз появившееся население начинает расти), а положение равновесия 1 устойчиво (меньшее население вырастет, а большее — убывает).

Каким бы ни было начальное состояние $x > 0$, с течением времени процесс выходит к устойчивому состоянию равновесия $x = 1$.

Из этих соображений неясно, однако, происходит ли этот выход за конечное или за бесконечное время, т.е. имеют ли интегральные кривые, начавшиеся в области $0 < x < 1$, общие точки с прямой $x = 1$?

Можно показать, что таких общих точек нет и что эти интегральные кривые асимптотически стремятся к прямой $x = 1$ при $t \rightarrow +\infty$ и к прямой $x = 0$ при $t \rightarrow -\infty$. Эти кривые называются *логистическими кривыми*. Таким образом, логистическая кривая имеет две горизонтальные асимптоты ($x = 0$ и 1) и описывает переход от одного состояния (0) к другому (1) за бесконечное время.

Задача 1. Найти уравнение логистической кривой.

Решение. По формуле (3) $t = \int \frac{dx}{x(1-x)} = \ln \frac{x}{1-x}$, или $x = \frac{e^t}{1+e^t}$.

Эта формула доказывает указанное выше асимптотическое свойство логистической кривой.

Задача 2. Доказать, что интегральные кривые уравнения $\dot{x} = (1-x)x$ в области $x > 1$ асимптотически стремятся к прямой $x = 1$ при $t \rightarrow +\infty$ и имеют вертикальные асимптоты $t = \text{const}$.

При малых x логистическая кривая практически неотличима от экспоненциальной, т.е. конкуренция мало влияет на рост. Однако по мере увеличения x рост становится неэкспоненциальным и вблизи $x = 1/2$ экспоненциальная кривая резко уходит вверх от логистической; в дальнейшем логистический рост описывает насыщение системы, т.е. установление в ней равновесного режима ($x = 1$).

До середины XX века наука росла экспоненциально (см. рис. 10). Если такой рост будет продолжаться, то к XXI веку все население Земли будет заниматься наукой, а для печатания научных статей не хватит всех лесов планеты. Следовательно, раньше должно наступить насыщение: мы находимся вблизи того места, где логистическая кривая начинает отставать от экспоненциальной. Например, число математических статей в научных журналах после второй мировой войны до 70-х годов увеличивалось каждый год на 7%, а последние несколько лет — медленнее.

9. Пример: квоты отлова. До сих пор мы рассматривали свободную популяцию, развивающуюся по своим внутренним законам. Предположим теперь, что мы отлавливаем часть популяции (скажем, ловим

рыбу в пруду или в океане). Предположим, что скорость вылова постоянна. Мы приходим к дифференциальному уравнению отлова

$$\dot{x} = (1 - x)x - c.$$

Величина c характеризует скорость вылова и называется *квотой*. Вид векторного поля и поля фазовой скорости при различных значениях скорости вылова c показан на рис. 14.

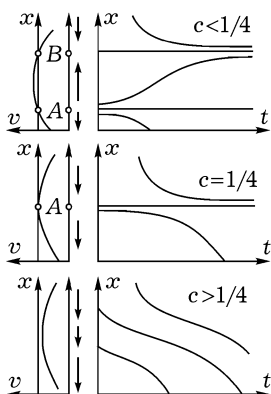


Рис. 14. Уравнение отлова $\dot{x} = (1 - x)x - c$

Мы видим, что при не слишком большой скорости вылова ($0 < c < 1/4$) существуют два положения равновесия (A и B на рис. 14). Нижнее положение равновесия ($x = A$) неустойчиво. Если по каким-либо причинам (перелов, болезни) в некоторый момент величина популяции x опустится ниже A , то в дальнейшем вся популяция за конечное время вымрет.

Верхнее положение равновесия B устойчиво — это стационарный режим, на который выходит популяция при постоянном отлове c .

Если $c > 1/4$, то равновесий нет и вся популяция будет отловлена за конечное время (стеллерова корова и т. п.).

При $c = 1/4$ имеется одно неустойчивое состояние равновесия ($A = B = 1/2$). Отлов с такой скоростью при достаточно большой начальной численности популяции математически возможен в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание численности установившейся равновесной популяции вниз приводит к полному вылову популяции за конечное время.

Таким образом, хотя теоретически допустимы любые квоты, вплоть до максимальной ($c \leq 1/4$), *максимальная квота $c = 1/4$ приводит к неустойчивости и недопустима*. Более того, *практически недопустимы и близкие к $1/4$ квоты*, так как при них опасный порог A близок к установившемуся режиму B (небольшие случайные отклонения отбрасывают популяцию ниже порога A , после чего она погибает).

Оказывается, однако, что можно организовать отлов так, чтобы устойчиво получать улов со скоростью $1/4$ за единицу времени (большего получить нельзя, так как $1/4$ — это максимальная скорость размножения необлавливаемой популяции).

10. Пример: отлов с относительной квотой. Фиксируем вместо абсолютной скорости отлова относительную, т.е. фиксируем отлавливаемую за единицу времени долю наличной популяции: $\dot{x} = (1 - x)x - px$. Вид векторного поля и интегральные кривые (при $p < 1$) изображены на рис. 15.

Нижнее, неустойчивое положение равновесия теперь в точке $x = 0$, второе положение равновесия B устойчиво при любом p , $0 < p < 1$.

После некоторого периода установления популяция выходит на стационарный режим $x = B$. Абсолютная скорость отлова устанавливается при этом равной $c = pB$.

Это — ордината точки пересечения графиков функций $v = (1 - x)x$ и $v = px$ (рис. 15, слева). Исследуем поведение этой величины c при изменении p . При малых относительных выловах (малых p) установившаяся скорость отлова также мала; при $p \rightarrow 1$ она тоже стремится к нулю (перелов). Наибольшее значение абсолютной скорости c равно наибольшей ординате графика функции $v = (1 - x)x$. Оно достигается, когда прямая $v = px$ проходит через вершину параболы (т.е. при $p = 1/2$), и равно $c = 1/4$.

Выберем $p = 1/2$ (т.е. назначим относительную квоту так, чтобы установившаяся популяция составляла половину необлавливаемой). Мы достигли максимально возможной стационарной скорости облавливания $c = 1/4$, причем система остается устойчивой (возвращается к установившемуся состоянию при малых отклонениях начальной популяции от установившейся).

11. Уравнения с многомерным фазовым пространством. В рассматривавшихся выше примерах фазовое пространство было одномерным. В более сложных случаях (например, при учете взаимодействия между несколькими популяциями) точка фазового пространства определяется несколькими числами (двумя для двух популяций и т. д.). Определения дифференциального уравнения, решений и т. д. в этом случае аналогичны введенным выше. Повторим эти определения.

Пусть v — векторное поле в области U n -мерного фазового пространства. Автономное дифференциальное уравнение, заданное полем v , — это уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

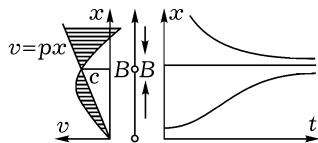


Рис. 15. Уравнение отлова $\dot{x} = (1 - x)x - px$

Решением такого уравнения называется гладкое отображение $\varphi: I \rightarrow U$ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $\frac{d\varphi}{dt} = v(\varphi(t))$ при всех t из I .

Образ отображения φ называется *фазовой кривой*, а график¹ отображения φ — *интегральной кривой*. Интегральная кривая лежит в прямом произведении оси времени на фазовое пространство. Это прямое произведение называется *расширенным фазовым пространством*. Расширенное фазовое пространство имеет размерность $n + 1$.

Пусть $(t_0, \mathbf{x}_0)$ — точка расширенного фазового пространства. Решение φ удовлетворяет начальному условию $(t_0, \mathbf{x}_0)$, если $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$, т. е. если интегральная кривая проходит через точку $(t_0, \mathbf{x}_0)$.

Как и в случае одномерного фазового пространства, интегральные кривые можно описать при помощи поля направлений в расширенном фазовом пространстве. Тангенс угла наклона к оси абсцисс заменяется следующей конструкцией.

Предположим, что дано поле направлений в области V прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и что направление поля нигде не вертикально (не параллельно $\mathbb{R}^n$). Пусть t — координата в $\mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда в каждой точке существует (и единствен) вектор приложенного в этой точке направления, имеющий горизонтальную координату (t -компоненту), равную 1. Таким образом, указанный вектор имеет вид $(1, v(t, \mathbf{x}))$, где $v(t, \mathbf{x})$ — вектор в $\mathbb{R}^n$, зависящий от точки расширенного фазового пространства. Иными словами, невертикальное поле направлений в расширенном фазовом пространстве определяет зависящее от времени векторное поле в фазовом пространстве.

Каждая интегральная кривая данного поля направлений очевидно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = v(t, \mathbf{x}),$$

т. е. является графиком отображения φ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $\frac{d\varphi}{dt} = v(t, \varphi(t))$ при всех t . Обратно, график всякого решения — интегральная кривая этого поля.

Решение удовлетворяет начальному условию $(t_0, \mathbf{x}_0)$, если и только если интегральная кривая проходит через эту точку.

¹График отображения $f: X \rightarrow Y$ есть подмножество прямого произведения $X \times Y$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in X$; *прямое произведение* $X \times Y$ есть множество всех упорядоченных пар (x, y) , где $x \in X, y \in Y$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В координатной записи векторное поле в n -мерном пространстве задается n функциями n переменных. Наше дифференциальное уравнение принимает поэтому вид «системы n уравнений первого порядка»:

$$\dot{x}_1 = v_1(t; x_1, \dots, x_n), \dots, \dot{x}_n = v_n(t; x_1, \dots, x_n).$$

Решение задается вектор-функцией $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ переменной t , для которой $\frac{d\varphi_k}{dt} = v_k(t; \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$, $k = 1, \dots, n$, при всех t . Начальное условие задается $n + 1$ числом $(t_0; x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$.

12. Пример: дифференциальное уравнение системы хищник-жертва. Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов, скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x} = kx$, пропорциональной их количеству x (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если y — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук; тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x} = kx - axy$.

Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y} = -ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y} = -ly + bxy$.

Мы приходим, таким образом, к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник-жертва:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy, \\ \dot{y} = -ly + bxy. \end{cases}$$

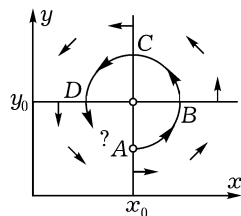


Рис. 16. Поле фазовой скорости хищник-жертва

Эта модель называется *моделью Лотка–Вольтерра* по имени авторов. Правая часть определяет векторное поле на плоскости: приложенный в точке (x, y) вектор имеет компоненты $(kx - axy, -ly + bxy)$. Это — поле фазовой скорости.

Фазовым пространством является угол $x \geq 0, y \geq 0$.

Векторное поле фазовой скорости нетрудно нарисовать, проследив за изменением знаков компонент (рис. 16). Особая точка поля $(x_0 = l/b,$

$y_0 = k/a$) отвечает равновесному количеству карасей и щук, когда прирост карасей уравнивается деятельностью щук, а прирост щук — их естественной смертностью.

Если начальное число щук меньше y_0 (точка A на рисунке), то числа карасей и щук растут, пока размножившиеся щуки не начнут съедать больше карасей, чем их прирост (точка B), затем число карасей начнет убывать, а число щук будет расти, пока нехватка пищи не приведет и щук к вымиранию (точка C); затем число щук уменьшится настолько, что караси снова начнут размножаться (точка D); начавшееся размножение карасей приведет к тому, что со временем и щуки начнут размножаться. Таким образом будут происходить колебания численности карасей и щук вблизи равновесного числа тех и других.

Возникает, однако, вопрос, будут ли эти колебания периодически или же нет. Наша приближенная картина поля фазовой скорости не позволяет ответить на этот вопрос, можно вообразить различные случаи, например, изображенные на рис. 17.

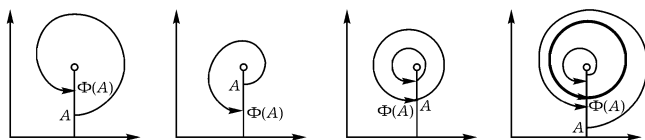


Рис. 17. Функция последования

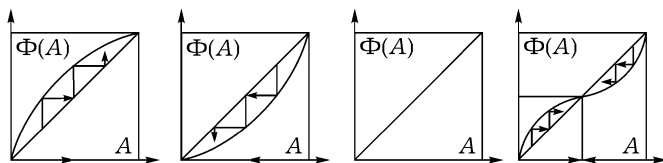


Рис. 18. Диаграммы Ламерея

Чтобы разобраться в этих случаях, рассмотрим отрезок, соединяющий особую точку с осью x . Каждая точка A этого отрезка (не лежащая на оси x) определяет фазовую кривую, которая снова пересекает отрезок в некоторой точке $\Phi(A)$. Функция Φ называется *функцией последования* (или *отображением Пуанкаре*, а также *мондрией* или *голомией*).

Рассмотрим график функции последования. Он называется *диаграммой Ламерея*. Диаграммы Ламерея для четырех случаев рис. 17 изображены на рис. 18.

По диаграмме Ламерея легко построить последовательность образов точки A при повторении преобразования Φ . Для этого следует построить так называемую *лестницу Ламерея* (рис. 19), абсциссы и ординаты вершин которой суть $A, \Phi(A), \Phi^2(A) = \Phi(\Phi(A)), \dots$

Точки пересечения графика функции последования с диагональю (графиком $\Phi \equiv A$) соответствуют замкнутым фазовым кривым (*циклам*) на фазовой плоскости.

Цикл заведомо устойчив (неустойчив), если в соответствующей точке A имеем $\Phi'(A) < 1 (> 1)$. Для наших четырех диаграмм Ламерея (рис. 18) в первом случае фазовые кривые — спирали, наматывающиеся на особую точку, во втором — сматывающиеся с нее, в третьем — замкнутые. В четвертом случае фазовые кривые наматываются на устойчивый цикл изнутри и снаружи.

Соответственно, в первом случае с течением времени устанавливается равновесное население пруда, колебания затухают. Во втором случае равновесное состояние неустойчиво, колебания нарастают. При этом наступит момент времени, когда число карасей (щук) будет меньше 1; к этому моменту наша модель становится неприемлемой, и *население пруда вымирает*.

В третьем случае наблюдаются периодические колебания численности карасей и щук вокруг равновесного состояния; амплитуда колебаний определяется начальными условиями.

В четвертом случае тоже наблюдаются периодические колебания численности карасей и щук, но *амплитуда установившихся колебаний не зависит от начальных условий*: любая фазовая спираль наматывается на предельный цикл. В таком случае говорят, что в системе устанавливается *автоколебательный режим*.

Какой же из случаев имеет место для системы Лотка–Вольтерра? Мы пока не можем ответить на этот вопрос (решение его см. в § 2).

13. Пример: свободная частица на прямой. Согласно «первому закону» Ньютона, ускорение материальной точки, не подверженной действию внешних сил, равно 0: $\ddot{x} = 0$. Если точка x принадлежит $\mathbb{R}$, то говорят о *свободной частице на прямой* (можно представлять себе бусинку на спице).

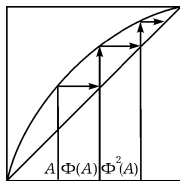


Рис. 19. Лестница Ламерея

Фазовое пространство имеет размерность 2, так как все движение определяется начальным положением и начальной скоростью. На фазовой плоскости с координатами $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ возникает векторное поле фазовой скорости:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

следовательно, компоненты поля равны $(x_2, 0)$ (рис. 20).

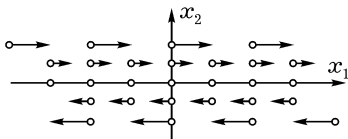


Рис. 20. Поле фазовой скорости свободной частицы

Все точки оси x_1 являются положениями равновесия. Равновесие такого вида в физике называется *безразличным*, а в математике *неустойчивым* (подходящее сколь угодно малое изменение начальной фазовой точки вызывает через достаточно большое время немалое изменение состояния).

Фазовые кривые — горизонтальные прямые $x_2 = \text{const}$ и все точки оси x_1 .

Задача 1. Найти решение с начальным условием (a, b) при $t_0 = 0$.

Ответ. $\varphi_1(t) = a + bt$, $\varphi_2(t) = b$.

14. Пример: свободное падение. Согласно Галилею, ускорение g падающих вблизи поверхности Земли тел постоянно. Если x — высота, то $\ddot{x} = -g$. Вводя координаты на фазовой плоскости, как в предыдущем примере, получаем систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g.$$

Векторное поле, заданное правой частью, изображено на рис. 21.

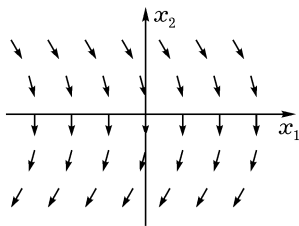


Рис. 21. Поле фазовой скорости падающей частицы

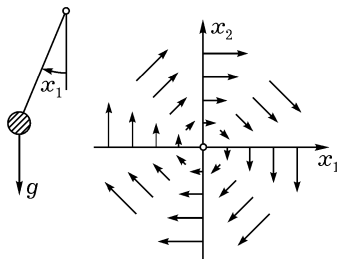


Рис. 22. Поле фазовой скорости малых колебаний

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые — параболы.

15. Пример: малые колебания. Во многих случаях сила, возвращающая систему в положение равновесия, с большей или меньшей точностью пропорциональна отклонению от положения равновесия (закон Гука и т. п.; сущность дела в том, что в положении равновесия сила 0, а в малом всякая функция приближенно линейна). Мы приходим к *уравнению малых колебаний*

$$\ddot{x} = -kx.$$

Коэффициент $k > 0$ можно сделать равным 1 выбором масштаба времени. Уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -x.$$

Вводя по-прежнему координаты $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ на фазовой плоскости, переписываем это уравнение в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Правая часть задает векторное поле на фазовой плоскости. Это поле изображено на рис. 22.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые — окружности и их центр.

РЕШЕНИЕ. Вектор фазовой скорости перпендикулярен радиус-вектору.

Задача 2. Доказать, что фазовая точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью 1.

РЕШЕНИЕ. Длина вектора фазовой скорости равна длине радиус-вектора.

Задача 3. Найти решение с начальным условием $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

РЕШЕНИЕ. Согласно предыдущим двум задачам, нужно повернуть вектор начального условия на угол t . Получаем

$$x_1(t) = a \cos t + b \sin t, \quad x_2(t) = -a \sin t + b \cos t.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, мы доказали, что x совершает гармонические колебания, и установили «закон сохранения энергии»: величина $\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ вдоль фазовой кривой постоянна.

ЗАДАЧА 4. Доказать закон сохранения энергии $\frac{x_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2}$ для системы $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -kx_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Величина $\frac{x_2^2}{2}$ называется кинетической энергией, а $\frac{kx_1^2}{2}$ — потенциальной.

ЗАДАЧА 5. Доказать, что интегральные кривые системы (с $k = 1$) — винтовые линии.

16. Пример: математический маятник. Рассмотрим невесомый стержень длины l , закрепленный в одном конце и несущий на другом точечную массу m . Обозначим через θ угол отклонения маятника от вертикали. Согласно законам механики, угловое ускорение маятника $\ddot{\theta}$ пропорционально моменту силы веса (рис. 23):

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta,$$

где $I = ml^2$ — момент инерции (знак минус объясняется тем, что момент стремится уменьшить отклонение).

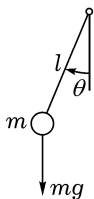


Рис. 23. Математический маятник

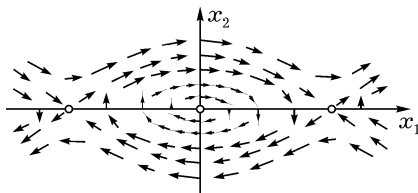


Рис. 24. Поле фазовой скорости маятника

Итак, уравнение маятника имеет вид $\ddot{\theta} = -k \sin \theta$, $k = g/l$. Коэффициент k можно сделать равным 1 выбором масштаба времени. Уравнение принимает вид $\ddot{\theta} = -\sin \theta$.

Фазовое пространство имеет размерность 2. За координаты можно принять угол отклонения $x_1 = \theta$ и угловую скорость $x_2 = \dot{\theta}$. Уравнение принимает вид системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\sin x_1.$$

Правая часть задает векторное поле фазовой скорости. Оно изображено на рис. 24.

Задача 1. Доказать, что начало координат ($x_1 = x_2 = 0$) и точка ($x_1 = \pi$, $x_2 = 0$) являются фазовыми кривыми.

Вид остальных фазовых кривых мы подробно исследуем в дальнейшем (§ 12).

Замечание. При малых углах отклонения $\sin \theta$ эквивалентен углу θ . Заменяя $\sin \theta$ приближенным значением θ , мы сводим уравнение маятника к уравнению малых колебаний (п. 15). Вопрос о том, насколько выводы, сделанные при исследовании этого простейшего уравнения, переносятся на полное уравнение маятника, нуждается в специальном исследовании. Мы проведем его в дальнейшем (§ 12).

17. Пример: перевернутый маятник. Рассмотрим поведение маятника, перевернутого вверх ногами. В этом случае угол θ близок к π , поэтому естественно ввести угол отклонения от верхнего положения, $\psi = \theta - \pi$. Тогда $\ddot{\psi} = \sin \psi$ и при малых ψ приближенно

$$\ddot{\psi} = \psi.$$

Это уравнение называется *уравнением «малых колебаний» перевернутого маятника*. Фазовое пространство двумерно. Примем за координаты $x_1 = \psi$, $x_2 = \dot{\psi}$. Получим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1.$$

Векторное поле фазовой скорости изображено на рис. 25. Его фазовые кривые мы подробно исследуем в § 2.

18. Пример: малые колебания сферического маятника. Отклонение от вертикали характеризуется двумя числами, x и y .

Уравнения малых колебаний имеют, как известно из механики, вид

$$\ddot{x} = -x, \quad \ddot{y} = -y.$$

Размерность фазового пространства равна 4. За координаты в нем принимаем $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$. Уравнения записываются в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -x_3.$$

Правая часть определяет векторное поле в $\mathbb{R}^4$.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые этого поля лежат на трехмерных сферах $x_1^2 + \dots + x_4^2 = \text{const}$.

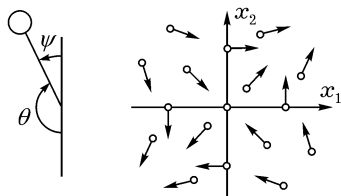


Рис. 25. Поле фазовой скорости перевернутого маятника

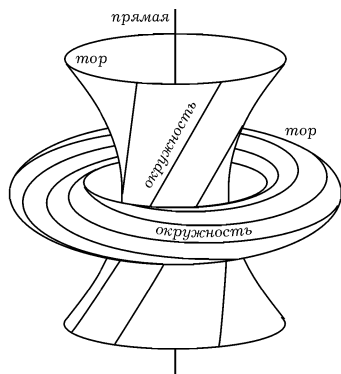


Рис. 26. Фазовые кривые сферического маятника на гиперповерхности постоянной энергии

Задача 2. Доказать, что фазовые кривые — окружности больших кругов указанных сфер.

Однако окружность не всякого большого круга сферы — фазовая кривая.

Задача *3. Доказать, что все фазовые кривые на каждой трехмерной сфере сани образуют двумерную сферу.

Трехмерную сферу S^3 можно представлять себе как трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$, пополненное одной «бесконечно удаленной» точкой. Следовательно, разбиение S^3 на окружности определяет разбиение $\mathbb{R}^3$ на окружности и одну незамкнутую кривую («уходящую обоими концами на бесконечность»). Это разбиение изображено на рис. 26.

Задача *4. Проверить, что любые две из окружностей указанного разбиения зацеплены между собой с коэффициентом зацепления, равным единице (коэффициент зацепления указывает, сколько раз одна из кривых пересекает пленку, натягивающую другую, причем точки пересечения учитываются со знаками).

§ 2. Векторные поля на прямой

В этом параграфе исследуется дифференциальное уравнение, заданное векторным полем на прямой, и сводящиеся к нему уравнения с разделяющимися переменными.

1. Существование и единственность решений. Пусть v — гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция, заданная на интервале U вещественной оси.

Теорема. *Решение φ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием (t_0, x_0)*

- 1) *существует для любых $t \in \mathbb{R}, x_0 \in U$;*
- 2) *единственно в том смысле, что любые два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки t_0 ;*
- 3) *дается формулой Барроу:*

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad \text{если } v(x_0) \neq 0,$$

$$\varphi(t) \equiv x_0, \quad \text{если } v(x_0) = 0.$$

Доказательство.

Пусть x_0 — не положение равновесия. В § 1 мы видели, что: 1) решение дается в окрестности точки t_0 формулой Барроу, 2) определенная этой формулой функция φ является решением и удовлетворяет начальному условию.

В случае, когда x_0 — положение равновесия, функция $\varphi(t) \equiv x_0$ также очевидно является решением, и теорема доказана.

Задача 1. Указать пробел в доказательстве.

2. Опровергающий пример. Пусть $v = x^{2/3}$ (рис. 27). Два решения $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = (t/3)^3$ удовлетворяют общему начальному условию $(0, 0)$, вопреки утверждению о единственности.

Конечно, функция v не дифференцируема, поэтому пример не опровергает утверждение теоремы. Однако приведенное доказательство не использовало гладкости v : оно проходит и в том случае, когда функция v лишь непрерывна. Следовательно, это доказательство не может быть верным. И действительно, утверждение о единственности было доказано лишь при условии $v(x_0) \neq 0$. Мы видим, что если поле v лишь непрерывно (а не дифференцируемо), то единственности решений с начальным условием в положении равновесия может и не быть. Оказывается, *гладкость v гарантирует единственность и в этом случае* (см. п. 3 ниже).

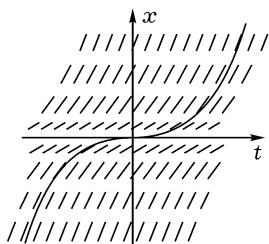


Рис. 27. Пример неединственности

Приведенный пример можно описать еще так: при движении со скоростью $v(x) = x^{2/3}$ можно попасть в положение равновесия ($x = 0$) из другой точки за конечное время.

В § 1 мы рассмотрели движение в линейном поле (со скоростью $v(x) = kx$). В этом случае для того, чтобы прийти в положение равновесия, требовалось бесконечное время (например, если $v(x) = -x$, то фазовая точка приближается к положению равновесия так медленно, что ей в любой момент оставалось бы до него двигаться время, равное 1, если бы ее скорость перестала меняться в этот момент).

Причина неединственности в случае $v(x) = x^{2/3}$ состоит в том, что скорость недостаточно быстро убывает при подходе к положению равновесия. Из-за этого решение и успевает войти в особую точку за конечное время.

3. Доказательство единственности. Предположим, что φ — решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с гладкой правой частью v . Допустим, что $\varphi(t_0) = x_0$ — положение равновесия, $\varphi(t_1) = x_1$ — не положение равновесия (рис. 28). На отрезке между t_0 и t_1 рассмотрим ближайший к t_1 момент времени t_2 , в который $v(\varphi(t_2)) = 0$. Для любой точки t_3 между t_2 и t_1 имеем по формуле Барроу

$$t_3 - t_1 = \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad x_3 = \varphi(t_3).$$

Если функция v гладкая, то интеграл стремится к бесконечности, когда x_3 стремится к x_2 . Действительно, тангенс угла наклона хорд графика гладкой на отрезке функции ограничен (рис. 29), поэтому $|v(\xi)| \leq k|\xi - x_2|$, где постоянная k не зависит от точки ξ отрезка $[x_1, x_2]$ (условие ограниченности наклона хорд графика функции называют условием Липшица, а число k — постоянной Липшица). Итак,

$$|t_3 - t_1| \geq \left| \int_{x_1}^{x_3} \frac{d\xi}{k(\xi - x_2)} \right|.$$

Последний интеграл легко вычислить, он стремится к бесконечности, когда x_3 стремится к x_2 . В этом легко убедиться и не вычисляя интеграла: ведь он равен времени движения между двумя точками в линейном поле, а это время стремится к бесконечности, когда одна из точек стремится к положению равновесия.

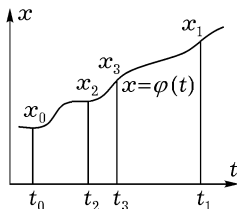


Рис. 28. Доказательство единственности

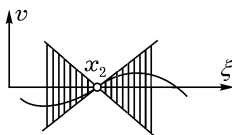


Рис. 29. Условие Липшица

Итак, число $|t_2 - t_1|$ больше любого наперед заданного числа. Чисел, больших любого, не бывает. Следовательно, решение с начальным условием в положении равновесия не может принимать значений, не являющихся положениями равновесия. Стало быть, если $\varphi(t_0)$ — положение равновесия, то $v(\varphi(t)) \equiv 0$ при всех t . Следовательно, $\dot{\varphi} \equiv 0$, т. е. φ — константа. Единственность доказана.

Заметим, что основным в приведенном доказательстве было сравнение движения в гладком поле v с более быстрым движением в подходящем линейном поле. Для последнего движения время входа в положение равновесия бесконечно, следовательно, оно тем более бесконечно для более медленного движения в исходном поле.

Задача 1. Могут ли интегральные кривые гладкого уравнения $\dot{x} = v(x)$ сближаться при $t \rightarrow +\infty$ быстрее, чем экспоненциально?

Ответ. Нет, если одна из них отвечает положению равновесия; да — в противном случае.

Задача 2. Верна ли теорема единственности в случае, когда производная функции v существует, но разрывна?

Ответ. Да.

Задача 3. Показать, что для единственности решения с начальным условием x_0 достаточна расходямость в x_0 интеграла $\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{v(\xi)}$.

Задача 4. Показать, что для единственности достаточно, чтобы функция v удовлетворяла условию Липшица $|v(x) - v(y)| \leq k|x - y|$ при всех x, y .

Задача 5. Доказать единственность удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$ решения уравнения $\dot{x} = v(t, x)$, где v — гладкая функция.

Указание. Заменой x на $x - \varphi(t)$ свести решение к нулевому и затем сравнить поле направлений с подходящим линейным. Это сравнение доказывает единственность при любой размерности фазового пространства.

Задача 6. Доказать, что фазовые кривые системы хищник-жертва (§ 1, п. 12) не пересекают координатные оси (например, первоначально положительное число карасей не может со временем стать отрицательным).

Задача 7. Доказать, что всякие два решения уравнения $\dot{x} = v(x)$ с гладкой v , удовлетворяющие общему начальному условию, совпадают всюду, где оба определены.

4. Прямые произведения. Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1), \quad x_1 \in U_1; \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = v_2(x_2), \quad x_2 \in U_2. \quad (2)$$

Прямым произведением этих уравнений называется система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2), \end{cases} \quad (3)$$

фазовым пространством которой является прямое произведение U фазовых пространств уравнений (1) и (2). Из определения непосредственно вытекает

Теорема. Решения φ дифференциального уравнения (3), являющиеся прямым произведением уравнений (1) и (2), — это отображения $\varphi: I \rightarrow U$ вида $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, где φ_1 и φ_2 — решения уравнений (1) и (2), определенные на одном и том же интервале.

В частности, пусть фазовые пространства U_1 и U_2 одномерны. Тогда мы умеем решать каждое из уравнений (1) и (2). Следовательно, мы можем явно решить и систему двух дифференциальных уравнений (3).

А именно, по теореме п. 5 § 1 решение φ с условием $\varphi(t_0) = x_0$ можно найти в окрестности точки $t = t_0$ из соотношений

$$\int_{x_{1,0}}^{\varphi_1(t)} \frac{d\xi}{v_1(\xi)} = t - t_0 = \int_{x_{2,0}}^{\varphi_2(t)} \frac{d\xi}{v_2(\xi)}, \quad (x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})),$$

если $v_1(x_{1,0}) \neq 0 \neq v_2(x_{2,0})$.

Если $v_1(x_{1,0}) = 0$, то первое соотношение заменяется на $\varphi_1 \equiv x_{1,0}$, а если $v_2(x_{2,0}) = 0$, то второе — на $\varphi_2 \equiv x_{2,0}$. Наконец, если $v_1(x_{1,0}) = v_2(x_{2,0}) = 0$, то x_0 — особая точка векторного поля v и положение равновесия системы (3): $\varphi(t) \equiv x_0$.

5. Примеры прямых произведений. Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = kx_2.$$

Задача 1. Нарисовать соответствующие векторные поля на плоскости при $k = 0, \pm 1, \frac{1}{2}, 2$.

Мы уже решили каждое из двух уравнений в отдельности. Итак, решение φ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ имеет вид

$$\varphi_1 = x_{1,0}e^{(t-t_0)}, \quad \varphi_2 = x_{2,0}e^{k(t-t_0)}. \quad (4)$$

Следовательно, вдоль каждой фазовой кривой $x = \varphi(t)$ имеем либо

$$|x_2| = C|x_1|^k, \quad (5)$$

где C — постоянная, не зависящая от t , либо $x_1 \equiv 0$.

Задача 2. Является ли кривая на фазовой плоскости (x_1, x_2) , заданная уравнением (5), фазовой кривой?

Ответ. Нет.

Семейство кривых (5), где $C \in \mathbb{R}$, имеет разный вид в зависимости от значения параметра k . Если $k > 0$, то это — семейство «парабол¹ с показателем k ». Такие параболы касаются оси x_1 , если $k > 1$, или оси x_2 , если $k < 1$ (рис. 30; при $k = 1$ получается семейство прямых, проходящих через начало координат). Расположение фазовых кривых,

¹ Настоящие параболы получаются лишь при $k = 2$ и $k = 1/2$.

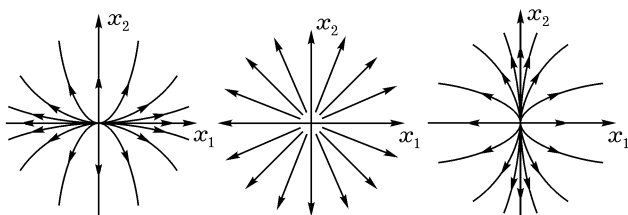


Рис. 30. Узлы: фазовые кривые систем $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = kx_2$ для $k > 0$, $k = 1$ и $0 < k < 1$

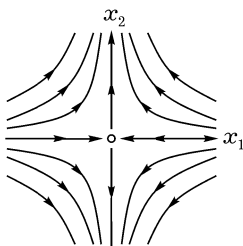


Рис. 31. Седло: фазовые кривые системы $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = kx_2$, $k < 0$

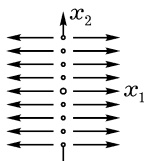


Рис. 32. Фазовые кривые системы $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = 0$

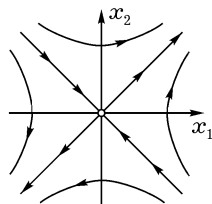


Рис. 33. Фазовые кривые перевернутого маятника

изображенное на рис. 30, называется *узлом*. При $k < 0$ кривые (5) имеют вид гипербол¹ (рис. 31) и образуют в окрестности начала координат *седло*. При $k = 0$ кривые (5) превращаются в прямые (рис. 32).

Из формул (4) видно, что каждая фазовая кривая лежит целиком в одном квадранте (или на координатной полуоси, или совпадает с началом координат, которое при всех k является фазовой кривой). Стрелки на рисунках указывают направление движения точки $\varphi(t)$ при возрастании t .

Задача 3. Докажите, что каждая из парабол $x_2 = x_1^2$ ($k = 2$) состоит из трех фазовых кривых. Опишите все фазовые кривые при других значениях k ($k > 1$, $k = 1$, $0 < k < 1$, $k = 0$, $k < 0$).

Интересно проследить, как один рисунок переходит в другой при непрерывном изменении k .

¹ Настоящие гиперболы получаются лишь при $k = -1$.

Задача 4. Нарисуйте узел, соответствующий $k = 0,01$, и седло, соответствующее $k = -0,01$.

Задача 5. Решить уравнение перевернутого маятника $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$ и нарисовать фазовые кривые.

Решение. Введем на фазовой плоскости новые координаты: $X = x_1 + x_2$, $Y = x_1 - x_2$. Система распадается в прямое произведение: $\dot{X} = X$, $\dot{Y} = -Y$. На плоскости (X, Y) фазовые кривые образуют седло, как на рис. 31. Следовательно, на плоскости (x_1, x_2) также получаем седло (рис. 33). Отсюда, в частности, следует, что *при данном отклонении маятника от вертикали существует одна и только одна начальная скорость, при которой он асимптотически приближается к верхнему положению равновесия при $t \rightarrow +\infty$* (соответствующая фазовая кривая — прямолинейный луч, входящий в 0). При меньшей или большей начальной скорости маятник падает либо не дойдя до верхнего положения равновесия, либо перевалившись через него (соответствующие фазовые кривые — половины гипербол).

Решения имеют вид $X = X_0 e^t$, $Y = Y_0 e^{-t}$, откуда $x_1 = Ae^t + Be^{-t} = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t$, $x_2 = Ae^t - Be^{-t} = a \operatorname{sh} t + b \operatorname{ch} t$.

6. Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y)}{g(x)}. \quad (6)$$

Мы будем предполагать, что f и g — гладкие функции, не обращающиеся в 0 в рассматриваемой области.

Рассмотрим наряду с этим уравнением систему

$$\dot{x} = g(x), \quad \dot{y} = f(y). \quad (7)$$

Теорема. Фазовые кривые системы (7) являются интегральными кривыми уравнения (6), и, наоборот, интегральные кривые уравнения (6) являются фазовыми кривыми системы.

Доказательство.

Тангенс угла наклона вектора фазовой скорости к оси x есть $f(y)/g(x)$. Значит, фазовая кривая системы в каждой своей точке касается поля направлений уравнения.

Обратно, пусть дана интегральная кривая уравнения (6). Тогда на ней можно выбрать параметр t так, что параметрическое уравнение кривой будет $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем функция φ — решение уравнения $\dot{x} = g(x)$ (здесь используется условие $g \neq 0$). Вторая координата ψ точки с параметром t удовлетворяет тогда соотношению $(d\psi/dt)/(d\varphi/dt) = f(\psi(t))/g(\varphi(t))$, т. е. является решением уравнения $\dot{y} = f(y)$. Следовательно, наша кривая — фазовая кривая системы.

Теорема. *Решение уравнения (6) с начальным условием (x_0, y_0) существует, единственно¹ и дается формулой*

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{f(\eta)}.$$

Доказательство.

Это следует из предыдущей теоремы и формул для решения уравнений $\dot{x} = g(x)$ и $\dot{y} = f(y)$ с начальными условиями (t_0, x_0) и (t_0, y_0) соответственно.

Замечание. «Мнемоническое» правило решения уравнения с разделяющимися переменными состоит в том, чтобы рассматривать и левую, и правую части уравнения как дроби и перенести «все члены с x в одну сторону, а все члены с y в другую»:

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{dy}{f(y)}. \quad (8)$$

После этого «приравнивание интегралов» дает искомое соотношение между x и y в виде равенства $\int \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{dy}{f(y)} + C$ для первообразных или в указанном в теореме виде — для определенных интегралов.

Разумеется, это «мнемоническое» правило является, при его правильном понимании, вполне строгим выводом формулы для решения. Действительно, соотношение (8) означает равенство значений двух дифференциальных форм на любом векторе, касающемся интегральной кривой уравнения (6) (и обратно, кривая, все касательные векторы которой удовлетворяют соотношению (8), является интегральной для уравнения (6)).

Интегралы форм в левой и в правой частях уравнения (8) по одному отрезку интегральной кривой уравнения (6) равны (так как в определении

¹В том смысле, что всякие два такие решения совпадают там, где оба определены.

интеграла вдоль кривой участвуют лишь значения формы на касательных векторах кривой, а на этих векторах значения форм совпадают). Наконец, интеграл формы $dx/g(x)$ вдоль отрезка кривой равен обычному интегралу функции $1/g$ вдоль проекции этого отрезка на ось x , и аналогично для формы $dy/f(y)$.

Формула (8) называется иногда *симметричной формой* записи уравнения (6).

Задача 1. Нарисовать интегральные кривые уравнений $dy/dx = y/x$, x/y , $-y/x$, $-x/y$.

Задача 2. Нарисовать интегральные кривые уравнений $dy/dx = kx^\alpha y^\beta$, $\sin y/\sin x$, $\sin x/\sin y$.

Задача 3. Нарисовать фазовые кривые уравнения маятника $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$.

Указание. Рассмотреть уравнение с разделяющимися переменными $dy/dx = -(\sin x)/y$.

7. Пример: модель Лотка–Вольтерра. В п. 12 § 1 мы рассматривали простейшую модель взаимодействия y хищников (шук) и x жертв (карасей):

$$\dot{x} = kx - axy, \quad \dot{y} = -ly + bxy. \quad (9)$$

Но мы не смогли нарисовать фазовые кривые.

Теорема. *Фазовые кривые системы (9) замкнутые (рис. 34).*

Доказательство.

Фазовые кривые системы (9) совпадают с интегральными кривыми уравнения с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx} = \frac{y(bx-l)}{x(k-ay)}$ или с фазовыми кривыми уравнения-произведения

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{bx-l}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{y}{k-ay}$$

(в области, где x , y , $bx-l$ и $k-ay$ отличны от 0).

Следовательно, $\int \frac{k-ay}{y} dy = \int \frac{bx-l}{x} dx + C$ или $p(x) + q(y) = C$, где $p = bx - l \ln x$, $q = ay - k \ln y$. Графики функций p и q имеют

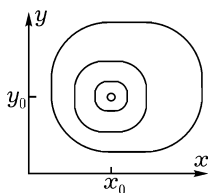


Рис. 34. Фазовые кривые модели Лотка–Вольтерра

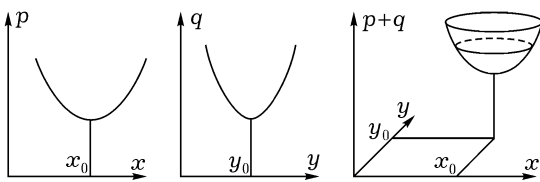


Рис. 35. Построение фазовых кривых модели Лотка–Вольтерра

вид ям. Поэтому и график функции $p + q$ имеет вид ямы (рис. 35). Следовательно, линии уровня функции $p + q$ — замкнутые кривые. Легко проверить, что фазовые кривые уравнения (9) не только принадлежат линиям уровня $p + q$, но и совпадают с ними; теорема доказана.

Из замкнутости фазовых кривых следует, что количества карасей и шук в модели Лотка–Вольтерра меняются со временем периодически. Период колебаний зависит от начального условия.

Задача 1. Докажите, что период колебаний в модели Лотка–Вольтерра (9) стремится к бесконечности, когда начальное условие приближается к точке $(0, 0)$.

Замечание. Математическое стремление к бесконечности нужно отличать от физического. Например, $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ действительно стремится к ∞ (например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ величина $1/\varepsilon$ действительно велика). В то же время $|\ln \varepsilon|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ практически остается ограниченным (например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ это величина порядка 10). Практически с логарифмами в асимптотиках часто можно обращаться как с константами.

Задача 2. Как стремится к бесконечности период колебаний в модели Лотка–Вольтерра (9), когда начальное условие имеет вид (x_0, ε) , $\varepsilon \rightarrow 0$?

Ответ. Логарифмически.

Рассмотрим некоторые выводы из наших вычислений.

Для системы Лотка–Вольтерра (9).

1) Существует (и единственно при $x > 0$, $y > 0$) положение равновесия (x_0, y_0) .

2) Количества карасей и шук при неравновесных начальных условиях меняются со временем периодически.

3) Фазовые кривые системы (9) замкнуты.

Заметим, что наша модель вряд ли может претендовать на вполне точное описание действительности, даже если оставаться в рамках двумерного фазового пространства. Например, даже в отсутствие шук при большом числе карасей скорость размножения должна уменьшаться, иначе карасям не хватит пруда, и т. д. Мы можем думать поэтому, что более точная модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - ay + \varepsilon f(x, y)), \\ \dot{y} = y(-l + bx + \varepsilon g(x, y)), \end{cases} \quad (9_\varepsilon)$$

где $x\varepsilon f$ и $y\varepsilon g$ — отброшенные при идеализации малые поправки к нашей модели (поправка в $\dot{x}$ делится на x , так как скорость размножения карасей равна 0, если их число равно 0; по этой же причине поправка в $\dot{y}$ делится на y). Мы будем считать f и g гладкими функциями (строго говоря, здесь и далее рассматривается ограниченная часть фазовой плоскости, так как для малости поправок при очень больших значениях координат нет оснований).

Мы будем называть свойство модели (9) *грубым*, если оно (или аналогичное ему близкое свойство) имеет место и для всякой системы (9_ε) , при достаточно малых ε .

Рассмотрим с этой точки зрения сделанные выше выводы 1)–3).

Теорема. *У системы (9_ε) имеется гладко зависящее от малого ε положение равновесия $x(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ такое, что $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ — положение равновесия системы (9).*

Доказательство.

По теореме о неявной функции система уравнений относительно x, y

$$F(x, y, \varepsilon) = 0, \quad G(x, y, \varepsilon) = 0$$

имеет гладко зависящее от малого ε решение $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$ обращающееся в (x_0, y_0) при $\varepsilon = 0$, если отличен от нуля якобиан $J = \frac{D(F, G)}{D(x, y)} \Big|_{(x_0, y_0, 0)}$.

В нашем случае $F = k - ay + \varepsilon f$, $G = -l + bx + \varepsilon g$, следовательно, $J = \begin{vmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, что и требовалось доказать.

Итак, вывод 1) груб: положение равновесия имеется не только у системы (9), но и у всякой близкой системы (9_ε) .

Напротив, выводы 2) и 3) негрубы. Действительно, функция последования для системы (9) имеет вид $\Phi(A) \equiv A$. Для близкой системы (9_ε)

график функции последования будет близким к диагонали, но не обязательно будет совпадать с ней. В зависимости от вида возмущений f и g диаграмма Ламерея может быть расположена выше или ниже диагонали или пересекать ее в одной или нескольких точках, соответствующих устойчивым и неустойчивым циклам.

Следовательно, *выводы о замкнутости фазовых кривых и периодичности колебания численности карасей и щук с амплитудой, зависящей от начальных условий, негрубы*, хотя у близкой системы (9_ε) каждый виток фазовой кривой и близок к замкнутому циклу, он не замыкается в точности, и через большое время (порядка $1/\varepsilon$) устанавливается, например, автоколебательный режим (фазовая кривая наматывается на предельный цикл).

Свойство системы иметь предельный цикл уже является устойчивым относительно малых возмущений системы уравнений. Точнее, предположим, что цикл соответствует неподвижной точке $A = \Phi(A)$ функции последования Φ и что $\Phi'(A) \neq 1$. В таком случае цикл называется *невырожденным*.

Если система, заданная векторным полем v_0 , имеет невырожденный предельный цикл, проходящий через A_0 , то всякая близкая система (заданная полем v_ε , ε мало) имеет близкий цикл (проходящий через близкую к A_0 точку $A(\varepsilon)$).

Для доказательства нужно применить теорему о неявной функции к уравнению $\Phi(A, \varepsilon) = A$, $A(0) = A_0$.

Следовательно, *вывод о наличии в системе автоколебаний, описываемых невырожденным предельным циклом, груб*: во всякой близкой системе будут близкие автоколебания.

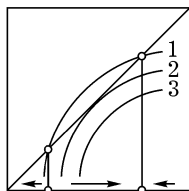


Рис. 36. Перестройка диаграмм Ламерея

Заметим, что вырожденные предельные циклы могут исчезать при малом шевелении системы. Однако они появляются неустранимым малым шевелением, главным образом, в том случае, когда рассматривается не отдельная система, а семейство систем, зависящих от параметра. В этом случае при отдельных значениях параметра могут сливаться между собой различные циклы, причем аналогичное слияние будет иметь место при некотором близком значении параметра и в любом близком семействе. В момент слияния двух невырожденных циклов и возникает вырожденный цикл. При этом, вообще говоря, из двух сливающихся циклов один устойчивый, а другой неустойчивый. Вырожденные циклы, возникающие при слиянии двух невырожденных, представляют интерес потому, что они всегда встречаются на границе области существования колебательного режима в пространстве параметров.

При этом, вообще говоря, из двух сливающихся циклов один устойчивый, а другой неустойчивый. Вырожденные циклы, возникающие при слиянии двух невырожденных, представляют интерес потому, что они всегда встречаются на границе области существования колебательного режима в пространстве параметров.

Например, на рис. 36 изображены диаграммы Ламерея при трех очень близких значениях параметра (кривые 1, 2 и 3). Диаграмма 1 пересекает биссектрису в двух точках; в этом случае в системе имеется два предельных цикла, устойчивый внутри неустойчивого (рис. 37). Положение равновесия неустойчиво; вся область внутри неустойчивого цикла является областью притяжения («бассейном») устойчивого цикла: при начальных условиях в этой области (исключая лишь положение равновесия) в системе устанавливаются автоколебания, изображаемые устойчивым циклом.

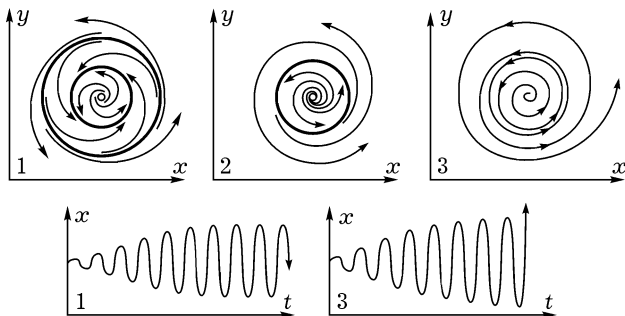


Рис. 37. Перестройка фазового портрета и поведение решений

Кривая 2 соответствует критическому значению параметра: устойчивый цикл сливается с неустойчивым и становится вырожденным. Фазовые кривые, начинающиеся в ограниченной циклом области, стремятся к циклу при возрастании времени. Однако устанавливающийся при этом колебательный режим неустойчив: сколь угодно малое случайное изменение способно выбросить фазовую точку за пределы цикла.

При дальнейшем изменении параметра (кривая 3) цикл исчезает вовсе. Таким образом, слияние циклов приводит к скачкообразному изменению поведения системы: устойчивый автоколебательный режим с конечной областью притяжения внезапно исчезает. Движения с начальным условием в бассейне исчезающего цикла уходят после его исчезновения в другие области фазового пространства (рис. 37). В нашем примере после перехода параметра через критическое значение в популяциях хищников и жертв сколь угодно малое отклонение начальных условий от равновесных приводит к неограниченному нарастанию колебаний и, следовательно, к вымиранию.

Перестройки качественной картины движения при изменении параметров изучает *теория бифуркаций* (бифуркация = раздвоение), а приложения теории бифуркаций к исследованию скачкообразных реакций механических,

физических, химических, биологических, экономических и иных систем на плавное изменение внешних условий получили в последнее время название *теории катастроф*.

Из рисунка 36 видно, что когда значение параметра отличается от критического значения на малую величину Δ , расстояние между устойчивым и неустойчивым циклами порядка $\sqrt{\Delta}$. Следовательно, скорость сближения циклов при изменении параметра быстро растет по мере приближения параметра к критическому значению: в самый момент катастрофы оба цикла движутся навстречу друг другу с бесконечной скоростью. Это объясняет, почему так трудно предотвратить грозящую катастрофу потери устойчивости системы, когда уже сделались заметными ее признаки.

Задача 3. Исследовать бифуркации циклов при изменении параметра c в системе, заданной в полярных координатах уравнениями

$$\dot{r} = cr - r^3 + r^5, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Ответ. При $c = 0$ из положения равновесия $r = 0$ рождается устойчивый цикл радиуса порядка $\sqrt{c}$; при $c = 1/4$ он исчезает, слившись с неустойчивым.

Замечание. Можно показать, что рождение или смерть цикла в положении равновесия, как и рождение или смерть пары циклов — типичное явление, встречающееся при изменении параметра в общих однопараметрических семействах дифференциальных уравнений.

Устойчивые предельные циклы описывают установившиеся периодические колебания системы, находящейся в стационарных внешних условиях. Колебания, описываемые устойчивыми циклами, называются *автоколебаниями*, в отличие от *вынужденных* колебаний, вызванных периодическими внешними воздействиями и от колебаний типа свободных колебаний маятника. Возникновение автоколебаний само по себе довольно удивительно, но они встречаются, например, в таких системах, как часы, паровая машина, электрический звонок, сердце, радиопередатчик, переменные звезды типа цефеид — работа каждого из этих устройств описывается предельным циклом в соответствующем фазовом пространстве.

Однако не следует думать, что все колебательные процессы описываются предельными циклами: в многомерном фазовом пространстве возможно гораздо более сложное поведение фазовых кривых. Примерами могут служить процессия гироскопа, движение планет и их спутников и их вращение вокруг своих осей (непериодичность этих движений ответственна за сложность календаря и трудность предвычисления приливов), а также движение заряженных частиц в магнитных полях (ответственное за возникновение полярных сияний). Мы рассмотрим простейшие движения этого рода в § 24 и § 25 п. 6. В системах с многомерным фазовым пространством фазовые кривые могут